

**MU4MEF03 – Aérodynamique**  
**PARTIE INCOMPRESSIBLE**

Travaux Dirigés  
2020–2021

1. Similitude. Efforts sur un profil d'aile. Écoulement autour d'un cylindre.
2. Traînée. Portance d'un cylindre avec circulation.
3. Singularités. Vortex potentiel. Nappe tourbillonnaire.
4. Théorie des profils minces.
5. Théorie des profils minces. Ailes d'envergure finie. Volet de bord de fuite.



## TD 1

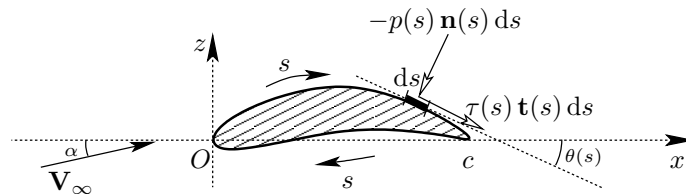
### Similitude. Efforts sur un profil d'aile. Écoulement autour d'un cylindre.

#### 1. Similitude. Soufflerie à air comprimé.

On considère un Airbus A320 en vol de croisière à  $880 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , à une altitude de  $11.4 \text{ km}$ , où la pression et la température valent respectivement  $20.7 \text{ kPa}$  et  $217 \text{ K}$ . Une maquette de l'A320 à l'échelle  $1/50$  est testée dans une soufflerie à température  $239 \text{ K}$ . Quelles doivent être les vitesse et pression de l'écoulement dans la veine d'essai pour que les coefficients de traînée et de portance mesurés sur la maquette soient les mêmes que pour le vol réel ? On supposera que la viscosité  $\mu$  et la célérité du son  $a$  sont proportionnelles à  $T^{1/2}$ , et on fera l'hypothèse du gaz parfait.

#### 2. Coefficients aérodynamiques en écoulement 2D

Dans le cadre des écoulements plans bidimensionnels, les efforts sont définis par unité d'envergure suivant un axe  $Oy$  : pour une force  $F$  qui s'exerce sur une portion de solide d'envergure  $b$ , on définit la force  $F' = F/b$  mesurée en  $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ .



Considérons dans un premier temps les seuls efforts de pression s'exerçant sur un profil d'aile (voir figure ci-dessus).

- Exprimer la résultante aérodynamique par unité d'envergure  $\mathbf{R}'$ , ainsi que ses composantes axiale  $A'$  et normale  $N'$  suivant les axes respectifs  $x$  et  $z$ .
- On introduit le *coefficient de pression*, une fonction de l'espace donnée par

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{q_\infty},$$

où  $q_\infty = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ . Quelle est la dimension de  $C_p$  ? En introduisant les coordonnées réduites  $\bar{x} \equiv x/c$  et  $\bar{z} \equiv z/c$ , donner l'expression des coefficients aérodynamique axial et normal  $C_{A'}$  et  $C_{N'}$  uniquement à l'aide de grandeurs adimensionnées.

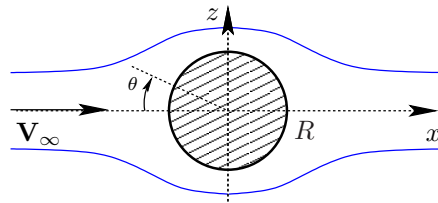
- On a l'habitude de séparer l'intégrale de contour en deux parties, une relative à l'extrados, l'autre relative à l'intrados du profil. En utilisant l'équation du contour  $z = z_e(x)$  pour l'extrados et  $z = z_i(x)$  pour l'intrados, ramener chacune des expressions ci-dessus en une intégrale sur  $\bar{x}$  du bord d'attaque ( $\bar{x}_{BA} = 0$ ) au bord de fuite ( $\bar{x}_{BF} = 1$ ). On utilisera les valeurs du coefficient de pression  $C_{pe}(\bar{x})$  à l'extrados et  $C_{pi}(\bar{x})$  à l'intrados.
- On intègre maintenant les frottements, via la contrainte pariétale  $\tau$  et le coefficient de frottement  $C_f \equiv \tau/q_\infty$ . Ces grandeurs sont comptées positivement quand l'écoulement (extrados ou intrados) va du bord d'attaque au bord de fuite. Donner l'expression complète de  $C_{A'}$  et de  $C_{N'}$ .
- L'écoulement incident faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $Ox$ , donner l'expression des coefficients  $C_{D'}$  et  $C_{L'}$ .

(f) Le coefficient de moment aérodynamique au bord d'attaque (point  $O$ ) est donné par :

$$C_{M'_O} = \int_0^1 \left[ \left( C_{pe} \frac{d\bar{z}_e}{d\bar{x}} + C_{fe} \right) \bar{z}_e + \left( -C_{pi} \frac{d\bar{z}_i}{d\bar{x}} + C_{fi} \right) \bar{z}_i \right] d\bar{x} \\ + \int_0^1 \left( C_{pi} - C_{pe} + C_{fe} \frac{d\bar{z}_e}{d\bar{x}} + C_{fi} \frac{d\bar{z}_i}{d\bar{x}} \right) \bar{x} d\bar{x}.$$

Donner l'abscisse  $\bar{x}_p$  du *centre de pression*, où s'applique la résultante aérodynamique, et que l'on supposera situé sur l'axe  $Ox$ . Cette grandeur est importante pour l'équilibrage de l'avion.

### 3. Écoulement autour d'un cylindre en fluide parfait – Paradoxe de d'Alembert.



On s'intéresse à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre infini dans l'approximation du fluide parfait incompressible. Le cylindre de rayon  $R$  est placé à l'origine des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (voir la définition de  $\theta$  sur la figure ci-dessus). L'écoulement admet la fonction de courant :

$$\psi(r, \theta) = V_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (r > R).$$

- Calculer le champ de vitesse associé, et vérifier que la périphérie du cylindre est bien une ligne de courant. Trouver les points de stagnation.
- Calculer la pression et le coefficient de pression à la surface du cylindre.
- En déduire les coefficients de portance et de traînée.

## TD 2

### Traînée. Portance d'un cylindre avec circulation.

#### 1. Comparaison des traînées d'un profil et d'un cylindre

L'ordre de grandeur du coefficient de traînée minimal d'un profil d'aile comme le NACA 23015 est 0.006. Quel est, dans le même écoulement, le diamètre d'un cylindre produisant la même force de traînée qu'un profil 23015 de corde 1m ? On se placera en régime sous-critique pour le cylindre.

#### 2. Cylindre avec circulation – Théorème de Kutta–Joukowski.

On superpose à l'écoulement potentiel autour d'un cylindre l'écoulement de rotation de fonction de courant  $\psi^R = C \ln r$  (pour  $r \geq R$ ). Ceci donne lieu à un champ de vitesse supplémentaire

$$V_r^R = 0, \quad V_\theta^R = \frac{C}{r},$$

où  $C > 0$  est une constante, et qui est également potentiel. On modélise ainsi en fluide parfait une situation dans laquelle le fluide serait entraîné (par viscosité) par la rotation du cylindre (voir l'expérience de Prandtl & Tietjens).

(a) Donner l'expression de la vitesse à la surface du cylindre. Commenter.

(b) Montrer que  $C$  est liée à la circulation autour du cylindre  $\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ . Cette circulation dépend-elle du contour choisi autour du cylindre ?

(c) Dans la suite on utilise la circulation  $\Gamma$  plutôt que  $C$ . Calculer la pression et le coefficient de pression  $C_p$  à la surface du cylindre.

(d) Pour quelles valeurs de  $\Gamma$  les points d'arrêt de l'écoulement sont-ils situés sur le cylindre ?

(e) Calculer les coefficients de traînée et de portance, en prenant  $2R$  comme longueur de référence. En déduire la relation entre la portance  $L'$  et la circulation  $\Gamma$ . Ce résultat est général et constitue le théorème de Kutta–Joukowski.

### TD 3

#### Singularités. Vortex potentiel. Nappe tourbillonnaire.

On se place dans le cadre d'écoulements potentiels incompressibles plans, et on utilise les coordonnées cartésiennes  $(x, z)$  ou les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Les composantes du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  sont notées respectivement  $(v_x, v_z)$  et  $(v_r, v_\theta)$ .

Potentiel des vitesses  $\phi$  et fonction de courant  $\psi$  sont définis par

$$\mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \nabla \psi \times \mathbf{e}_y.$$

Ceci implique :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

#### 1. Écoulement uniforme

- (a) Trouver potentiel  $\Phi$  et fonction de courant  $\Psi$  de l'écoulement uniforme  $\mathbf{V}_\infty = V_\infty \mathbf{e}_x$ .
- (b) Même question si l'écoulement uniforme fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x$ .

#### 2. Source / puits

On considère l'écoulement qui dérive du potentiel

$$\phi = K \ln r.$$

- (a) Déterminer le champ de vitesse associé et les lignes de courant.
- (b) Calculer le débit  $Q$  sortant à travers un cercle centré à l'origine et le relier à  $K$ .
- (c) Calculer la circulation le long d'un tel cercle.

#### 3. Vortex ponctuel (ou potentiel)

- (a) Déterminer le champ de vitesse et les lignes de courant de l'écoulement de potentiel

$$\phi = C\theta.$$

- (b) Calculer le débit sortant à travers un cercle centré à l'origine.
- (c) Calculer la circulation  $\Gamma$  le long d'un tel cercle et la relier à  $C$ .

#### 4. Allée de vortex

On considère une rangée de vortex ponctuels de circulation  $\Gamma_i$ , régulièrement disposés sur l'axe  $x$  aux abscisses  $x_i = i \times \ell$ .

- (a) Donner l'allure des lignes de courant quand  $\Gamma_i = \Gamma = \text{cte} > 0$ .
- (b) Écrire l'expression du champ de vitesse en tout point de l'axe  $x$ .

### 5. Nappe tourbillonnaire

Une nappe tourbillonnaire est la juxtaposition de vortex ponctuels infiniment proches et de circulation infinitésimale  $d\Gamma$ . C'est donc une ligne dans le plan  $(x, z)$ , la nappe étant supposée infinie le long de la direction  $y$ . On considère ici une nappe située sur l'axe  $x$ , entre les abscisses 0 et  $c$ , d'intensité  $\gamma(x)$  : la circulation autour d'un élément de nappe de largeur  $dx$  situé à l'abscisse  $x$  est  $d\Gamma = \gamma(x)dx$ .

- (a) Exprimer la circulation totale de la nappe.
- (b) Exprimer la vitesse induite par la nappe en tout point de l'axe  $x$ .
- (c) Montrer que, de part et d'autre de la nappe tourbillonnaire, on a une discontinuité de la vitesse que l'on caractérisera.

## TD 4

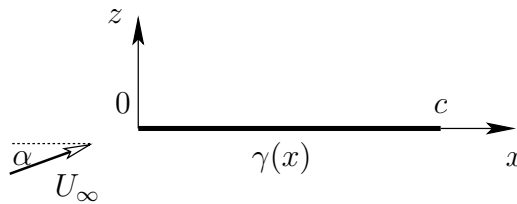
### Théorie des profils minces.

#### 1. Modèle de voilure biplan

Les avions biplans (et même triplans, avec le célèbre Baron Rouge) ont eu leur heure de gloire lors de la première guerre mondiale, puis ont été progressivement remplacés par les monoplans que nous connaissons actuellement. On se propose d'évaluer l'interaction entre les deux ailes d'un biplan du type de la figure ci-contre. On adopte une approche 2D, dans l'approximation des profils minces, le fluide étant supposé incompressible. De plus, on utilise ici des profils symétriques.



1. On considère dans un premier temps un profil symétrique unique dans un écoulement de vitesse  $U_\infty$ , sous incidence  $\alpha$ . Ce cas est décrit par une densité de tourbillons  $\gamma(x)$  le long de la corde  $x \in [0, c]$ .



- (a) On rappelle l'équation fondamentale des profils minces symétriques :

$$U_\infty \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi.$$

Donner brièvement la signification physique de cette relation (on pourra s'aider d'un schéma).

- (b) À l'aide du changement de variable  $x = \frac{1}{2}c(1 - \cos \theta)$ , vérifier qu'une solution à cette équation est :

$$\gamma(\theta) = 2\alpha U_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}.$$

On rappelle les intégrales de Glauert (pour  $n \geq 0$ ) :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin \theta}.$$

- (c) En déduire  $\gamma(x)$  et vérifier que la condition de Kutta est bien vérifiée.  
 (d) Montrer que la circulation totale est alors  $\Gamma = \pi \alpha c U_\infty$ . Physiquement, c'est la condition de Kutta qui fixe cette valeur.



(e) Calculer le moment au bord d'attaque

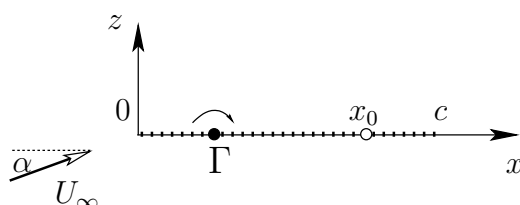
$$M'_{BA} = -\rho U_\infty \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi.$$

(f) Des calculs ci-dessus, on peut déduire les propriétés suivantes **que l'on admettra** :

$$C_{L'} = 2\pi\alpha, \quad C_{M'_{BA}} = -\frac{\pi\alpha}{2} = -\frac{C_{L'}}{4}.$$

Donner l'expression du coefficient de moment aérodynamique au quart de corde  $C_{M', c/4}$ .

2. On souhaite maintenant simplifier le problème et remplacer la distribution  $\gamma(x)$  ci-dessus par un vortex unique de circulation  $\Gamma$  situé au quart de corde en  $x = c/4$ , et on s'intéresse à la vitesse normale au profil  $V_n = V_z$  en fonction de  $x \in [0, c]$ .



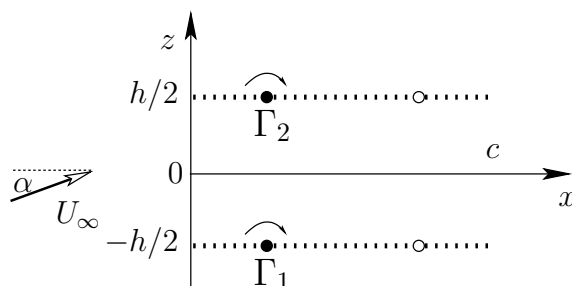
(a) Montrer qu'elle est donnée, pour les faibles incidences, par

$$V_n(x) = U_\infty \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi(x - c/4)}.$$

(b) Montrer qu'il n'y a qu'un seul point sur le profil où la vitesse normale est nulle, et déterminer sa position  $x_0$ .

On appelle ce point "point de contrôle". On admet que, quelles que soient les conditions d'écoulement, ce point de contrôle est fixe et la circulation autour du profil est déterminée par la condition  $V_n(x_0) = 0$ .

3. On applique maintenant cette modélisation au biplan. La voilure est supposée constituée de deux profils parallèles identiques de corde  $c$  superposés et espacés d'une distance  $h$ . Dans cette modélisation, les deux profils sont remplacés par deux tourbillons ponctuels, l'un de circulation  $\Gamma_1$  situé en  $(x = c/4, z = -h/2)$ , et l'autre de circulation  $\Gamma_2$  situé en  $(x = c/4, z = +h/2)$ .



(a) En imposant la vitesse normale  $V_n = V_z$  nulle aux deux points de contrôle de coordonnées  $(x = 3c/4, z = -h/2)$  et  $(x = 3c/4, z = +h/2)$ , trouver le système d'équations que vérifient les inconnues  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . On pourra poser  $\delta \equiv h/c$ .

(b) En déduire  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

- (c) Étudier les cas limites  $h \rightarrow 0$  et  $h \rightarrow \infty$ . Les commenter (on peut le faire même si on n'a pas calculé  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ).
- (d) Peut-on obtenir un gain de portance par rapport à une aile unique de longueur  $2c$  ?
4. Citer un avantage et un inconvénient du biplan par rapport au monoplane.

## 2. Profil parabolique (d'après Faure p106)

On considère, plongé dans un écoulement  $V_\infty$  avec un angle d'incidence  $\alpha$ , un profil dont la ligne de cambrure moyenne est donnée par :

$$z(x) = 4m \frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right).$$

- (a) Calculer les coefficients de Glauert  $A_i$ .
- (b) En déduire l'intensité  $\gamma(\theta)$  de la nappe tourbillonnaire qui modélise ce profil mince, puis, par intégration, la circulation globale  $\Gamma$ .
- (c) Déterminer directement à partir des coefficients de Glauert la circulation  $\Gamma$ , l'angle de portance nulle  $\alpha_{L'=0}$  et la portance  $L'$ .
- (d) À l'aide du théorème de Bernoulli, montrer que dans l'hypothèse où les perturbations de vitesse induites par le profil sont petites par rapport à  $V_\infty$ , on peut relier la différence de pression entre extrados et intrados  $p_e(x) - p_i(x)$  à l'intensité  $\gamma(x)$  de la nappe tourbillonnaire. L'exprimer pour le profil parabolique.

## 3. Profil NACA à 4 chiffres

La ligne de cambrure moyenne d'un profil NACA à 4 chiffres est donnée par :

$$\left| \begin{array}{ll} z = \frac{f}{p^2} x(2p - x) & 0 \leq x \leq p \\ z = \frac{f}{(c-p)^2} (c-x)(c+x-2p) & p \leq x \leq c \end{array} \right.$$

Rappelez la signification de  $f$ ,  $p$  et  $c$ .

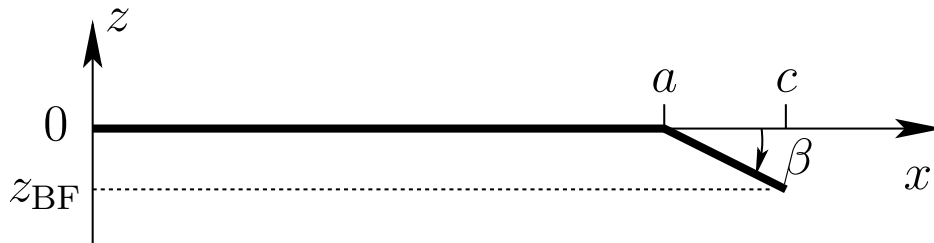
Indiquez la marche à suivre pour calculer l'angle  $\alpha_{L'=0}$  de portance nulle pour un profil NACA à 4 chiffres, dans l'approximation des profils minces. Pour quels profils cette approximation est-elle valide ?

## TD 5

### Théorie des profils minces. Ailes d'envergure finie.

#### Volet de bord de fuite (d'après écrit 2012-2013).

Le volet de bord de fuite est un dispositif hypersustentateur couramment utilisé sur les avions de ligne ou de chasse. On souhaite évaluer son efficacité à l'aide d'un modèle simple. Dans cette partie, on fait l'hypothèse d'un écoulement incompressible de fluide parfait, uniforme à l'infini, de vitesse  $V_\infty$ , faisant un angle  $\alpha$  avec la corde du profil. Le profil est supposé constitué d'une plaque plane mince, de corde  $c$ , et comporte deux parties : une partie située entre  $x = 0$  et  $x = a$ , qui reste fixe, et une partie articulée en  $x = a$ , qui fait un angle  $\beta$  avec la corde. Ici, on appelle corde le segment de l'axe  $x$  situé entre  $x = 0$  et  $x = c$ , même lorsque le volet est braqué et que le bord de fuite se décale de  $(c, 0)$  à  $(c, z_{BF})$ .



1. On considère tout d'abord le cas où  $\beta = 0$ . Donner les expressions du coefficient de portance  $C_{L'}$  et du coefficient de moment au quart de corde  $C_{M',c/4}$ .

Dans toute la suite, on s'intéresse au cas où l'angle  $\beta > 0$  est **petit**.

2. Justifier que l'équation du profil est donnée par

$$\begin{cases} z(x) = 0 & x \in [0, a] \\ z(x) = \beta(a - x) & x \in [a, c] \end{cases}$$

3. On introduit le changement de variables  $x = \frac{1}{2}c(1 - \cos \theta)$  ainsi que l'angle  $\theta_a$ , qui est tel que  $a = \frac{1}{2}c(1 - \cos \theta_a)$ . Donner  $f(\theta)$ , qui désigne la fonction  $z'(x)$  exprimée en variable  $\theta$ .
4. Calculer les coefficients  $f_n$  en distinguant le cas  $n = 0$  des cas  $n \geq 1$  :

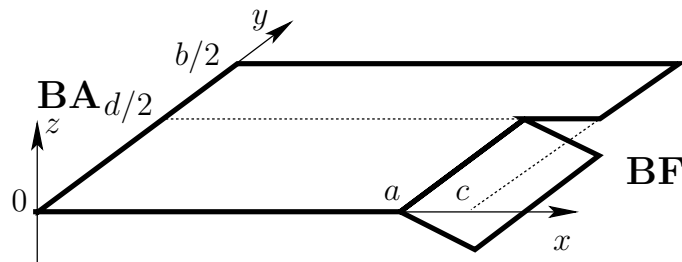
$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

En déduire l'expression des coefficients de Glauert  $A_n$ .

5. Exprimer  $C_{L'} = \pi(2A_0 + A_1)$ .  
On pose  $\theta_a = \pi - \epsilon$  où  $\epsilon \ll 1$ . Exprimer  $C_{L'}$  à l'aide de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\epsilon$ .
6. Exprimer l'angle de portance nulle  $\alpha_{L'=0}$  en fonction de  $\beta$  et de  $\epsilon$ .
7. Exprimer le coefficient de moment au bord d'attaque  $C_{M',BA} = -\frac{1}{2}\pi(A_0 + A_1 - \frac{1}{2}A_2)$  et montrer qu'au premier ordre en  $\epsilon$ , on a :  $C_{M',BA} \approx -\frac{1}{2}\pi\alpha - 2\epsilon\beta$ .

8. Montrer que le coefficient de moment au quart de corde vaut, à cet ordre,  $C_{M',c/4} \approx -\epsilon\beta$ . Pourquoi ne dépend-il pas de  $\alpha$  ?

On considère maintenant une aile d'envergure finie  $b$ , de corde  $c$ , mince, symétrique par rapport au plan  $(x, z)$ , comportant une partie plane pour  $|y| \in ]d/2, b/2]$  et une partie articulée avec le volet étudié précédemment pour  $|y| \in [0, d/2]$ . La géométrie de l'aile est schématisée ci-dessous, seule la partie  $y \geq 0$  en est représentée, mais les calculs seront effectués pour l'aile entière  $y \in [-b/2, b/2]$ .



9. On suppose que toutes les sections de l'aile voient le même écoulement de vitesse amont  $V_\infty$  et d'angle d'incidence  $\alpha$ . Donner la portance totale  $L$  de l'aile et le coefficient de portance  $C_L$  dans le cas où  $\beta = 0$  (aile rectangulaire plane).
10. Sous les mêmes hypothèses, donner la portance totale  $L$  de l'aile et le coefficient de portance  $C_L$  dans le cas où  $\beta > 0$  est petit.
11. Sous les mêmes hypothèses, schématiser et caractériser le système tourbillonnaire généré par cette aile dans son sillage. On pourra calculer l'intensité tourbillonnaire générée au bord de fuite

$$\gamma_x(y) = -\frac{d\Gamma}{dy}(y),$$

où  $\Gamma(y)$  est la distribution de circulation le long de l'envergure, liée à la distribution de portance  $L'(y)$  par le théorème de Kutta–Joukowski que l'on rappellera.

12. Expliquer ce que l'on voit sur la photo ci-dessous.



13. Expliquer pourquoi le calcul de  $C_L$  est en fait plus compliqué que celui qui a été effectué dans les questions 9 et 10.