MU4ME014 -Solides : Modélisation des Solides Déformables

TD 4 : Compression d'un joint de matériau élastique

Dans ce problème on s'intéresse au comportement mécanique d'un joint élastique de forme parallélépipédique relié d'une part à un bâti rigide fixe (B1) et d'autre part à une paroi rigide mobile (P). Cette paroi est en translation rectiligne suivant $\underline{e}_1$ parallèlement au bâti (B1) (voir Figure (**??**)). Le bloc est constitué d'un matériau élastique, linéaire, isotrope de coefficient de Lamé λ et μ, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. On rappelle par ailleurs que :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

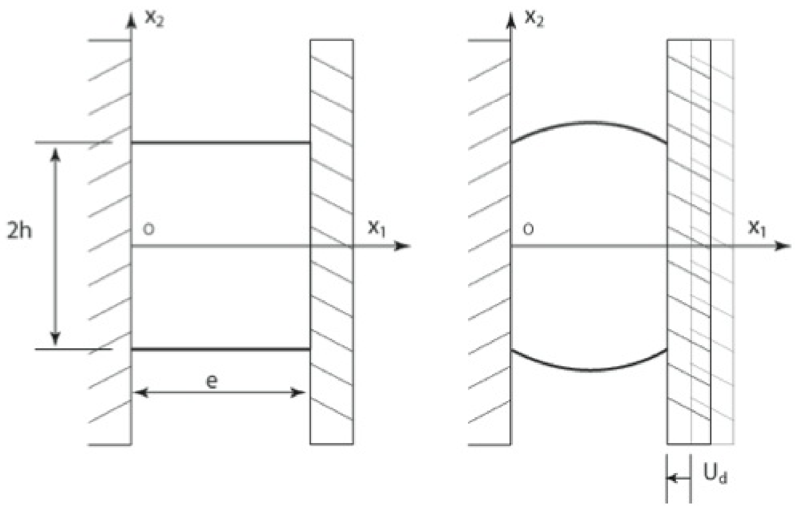

FIGURE 1 – Description du joint et de son chargement

On choisit les axes Ox_1 et Ox_2 comme indiqué sur la Figure (**??**). On désigne par e l'épaisseur du bloc et par $2h$ sa hauteur. On suppose que la dimension du bloc parallèlement au troisième axe Ox_3 (perpendiculaire à la figure), est assez grande pour que l'on puisse faire l'approximation d'une déformation plane dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. On considère l'étude du domaine Ω dans les conditions suivantes :

- la face $x_1 = 0$ est collée au bâti fixe (B1).
- la face $x_1 = e$ est collée à la plaque mobile (P), qui a un déplacement imposé $\underline{u} = u^d \underline{e}_1$.
- les faces $x_2 = h$ et $x_2 = -h$ sont libres d'efforts.
- les forces volumiques sont négligées.

Équations du problème de mécanique

1) Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'élastostatique ainsi posé sur le domaine plan.
2) Définir l'espace des champs cinématiquement admissible U_{ad}.
3) Définir l'espace des champs statiquement admissible T_{ad}.

4) Rappeler l'expression de l'erreur en relation de comportement $\psi(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}})$. Montrer que le problème peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) \in U_{ad} \times T_{ad}, \text{ tels que :} \\ \psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{array} \right.$$

5) En déduire les énergies potentielle $E_p(\underline{v})$ et complémentaire $Ep^*(\underline{\underline{\tau}})$.

6) Montrer que la loi de comportement élastique en déformations planes peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_{ij} = A\left(\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

où les indices i, j, et k prennent les valeurs 1 et 2 seulement et où A est une constante à déterminer en fonction de E et ν.

7) Simplifier alors les expression de $E_p(\underline{v})$ et $Ep^*(\underline{\underline{\tau}})$.

Encadrement du module de compression

On se propose dans cette partie d'obtenir un encadrement du module de rigidité du joint en compression. On note f la résultante des actions mécaniques exercées par la plaque (P) sur le joint en projection sur $\underline{e}_1$:

$$f = \int_{-h}^{+h} \sigma_{11}(e, x_2)dx_2$$

1) Justifier qu'il existe une constante k ne dépendant que des propriétés géométriques et mécaniques de la liaison, telle que $f = ku^d$.

2) Montrer que les théorèmes de l'énergie permettent d'obtenir un encadrement du module de rigidité à la compression k. En déduire un encadrement de k en fonction de u^d, $Ep(\underline{v})$ et $Ep^*(\underline{\underline{\tau}})$ avec $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) \in U_{ad} \times T_{ad}$.

3) Soit $\underline{v}^* = Dx_1\underline{e}_1$. Montrer que les champs de déplacement ainsi définis sont cinématiquement admissibles pour une valeur de D que l'on précisera. En déduire un majorant de k.

4) Montrer que le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^*$ de la forme :

$$[\sigma]^*_{|\underline{e}_1, \underline{e}_2} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est statiquement admissible pour toute valeur constante de σ_0. Donner la valeur de σ_0 qui maximise $-E_p^*(\underline{\underline{\sigma}}^*)$. En déduire un minorant de k.

5) Encadrement de k :

   (a) Montrer que l'encadrement de k peut s'écrire :

$$\frac{2h}{e}Ef_{min}(\nu) \leq k \leq \frac{2h}{e}Ef_{max}(\nu)$$

   avec f_{min} et f_{max} deux fonctions de ν à déterminer.

   (b) Tracer sur un même graphe l'allure de ces deux fonctions en fonction de ν.

   (c) Donner l'encadrement de k pour $\nu = \frac{1}{3}$.

   (d) À quelle condition l'encadrement permet-il d'obtenir la valeur exacte de k ? Entre le module de compressibilité d'un acier et d'un caoutchouc (quasi incompressible), quel est celui qui est encadré avec la meilleure précision ? Commenter.