



Traitement numérique du signal - Notes de Cours-

Régis MARCHIANO - Sylvain ARGENTIERI
regis.marchiano@sorbonne-universite.fr - sylvain.argentieri@sorbonne-universite.fr

Sorbonne Université

Septembre 2020

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Notion de signal	4
1.2	Notion de traitement du signal	5
2	Rappels sur les outils mathématiques	7
2.1	Eléments sur les distributions	7
2.2	Le produit de convolution	8
2.2.1	Représentation fréquentielle des signaux périodiques : la série de Fourier	10
2.2.1.1	Définition	10
2.2.1.2	Quelques propriétés	12
2.2.2	La transformée de Fourier	13
2.2.2.1	Définition	14
2.2.2.2	Propriétés essentielles	15
2.3	La transformée de Laplace	19
2.3.1	La Transformée de Laplace	19
2.3.1.1	Propriétés essentielles	20
3	Rappels sur signaux et les systèmes continus	23
3.1	Etude des signaux à temps continu	23
3.1.1	Représentation temporelle	23
3.1.1.1	Signaux élémentaires en traitement du signal	23
3.1.1.2	Valeur moyenne, valeur efficace	24
3.1.1.3	Classification des signaux	24
3.1.2	Représentation fréquentielle	25
3.2	Etude des systèmes à temps continu	25
3.2.1	Filtrage et convolution	27
4	Du temps continu au temps discret : l'échantillonnage	31
4.1	Echantillonnage	31
4.1.1	Théorème de l'échantillonnage	31
4.2	Reconstruction du signal à partir de la suite des échantillons	32
4.3	Quantification	34
5	Analyse spectrale des signaux numériques	35
5.1	Représentation temporelle	35
5.2	La Transformée de Fourier des Signaux Discrets - TFSD	38
5.3	La Transformée de Fourier Discrète - TFD	42
5.3.1	Résolution et précision	45

6	Analyse des systèmes discrets : la transformée en Z	47
6.1	La transformée en Z	47
6.1.1	Définition et premiers exemples	47
6.1.2	Propriétés essentielles	49
6.2	Systèmes discrets linéaires et invariants par translation dans le temps	50
6.2.1	Définition	50
6.2.2	Relation de convolution et fonction de transfert	51
6.2.2.1	Relation de convolution	51
6.2.2.2	Fonction de transfert	51
6.2.2.3	Equation récurrente	51
6.2.3	Causalité et stabilité d'un système LIT	52
6.2.4	Les filtres RII et RIF	54

Notations

Temps continu

t	Variable “temps” (s)
$x(t)$	Signal à temps continu
$u(t)$	Fonction échelon
$\Pi_T(t)$	Fonction porte, centrée en 0, de largeur T
$x_q(t)$	Signal quantifié en amplitude
$x_e(t)$	Signal échantillonné
f	Fréquence (Hz)
ω	Pulsation (rad.s^{-1}), avec $\omega = 2\pi f$
$X(f)$ ou $X(\omega)$	Transformée de Fourier des Signaux à temps Continu (TFSC) du signal $x(t)$
p	Variable de Laplace (fréquence complexe), avec $p = \sigma + j2\pi f$
$X(p)$	Transformée de Laplace (TL) du signal $x(t)$
$h(t)$	Réponse impulsionnelle d’un système à temps continu
$H(f)$	Réponse en fréquence d’un système à temps continu
$H(p)$	Fonction de transfert d’un système à temps continu

Temps discret

n	Numéro d’échantillon temporel
$x[n]$	Signal à temps discret
f_e	Fréquence d’échantillonnage (Hz)
T_e	Période d’échantillonnage (s), avec $T_e = 1/f_e$
$X(e^{j2\pi f T_e})$	Transformée de Fourier des Signaux à temps Discrets (TFSD) du signal $x[n]$
k	Numéro d’échantillon fréquentiel
$X_N[k]$	Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur N points
$X(z)$	Transformée en z (TZ) du signal $x[n]$ (peu utilisé)
$h[n]$	Réponse impulsionnelle d’un système à temps discret
$H(e^{j2\pi f T_e})$	Réponse en fréquence d’un système à temps discret
$H(z)$	Fonction de transfert d’un système à temps discret

Chapitre 1

Introduction

1.1 Notion de signal

Ce cours a pour sujet le traitement du signal, dont l'objectif est l'étude des méthodes de traitement (tels que le filtrage, mais également la compression, etc.), d'analyse, de synthèse et d'interprétation de signaux. Mais qu'est ce qu'un signal ? Le terme *signal* est défini, selon le Larousse, par :

Signal (*du latin classique “signum”, signe*) : Tout signe, geste, cri, son, etc., destiné à avertir, à donner une consigne, un ordre – exemple : “Lancer un signal de détresse.”

Cette définition en appelle une autre, plus proche des sciences de l'ingénieur et de ses applications :

Signal : Un signal peut être vu comme le *support* d'une *information*.

Ce support est en général très concret, lié à une grandeur physique (comme une tension, un courant, etc.), tandis que l'information qui y est représentée peut être beaucoup plus abstraite (par exemple, le nombre de personnes dans un amphi, la température dans une pièce, etc.). Bien entendu, différents types de support de cette information sont envisageables, non seulement en terme de grandeur physique (comme mentionné précédemment), mais également en terme de dimension :

- Signaux 1D : ce seront les signaux que nous allons essentiellement traiter dans la suite, qui s'exprimeront quasi-systématiquement en fonction du temps (mais ce n'est pas une nécessité). Néanmoins, les méthodes que nous allons voir dans la suite peuvent s'appliquer par généralisation aux signaux de dimensions supérieures sans perte de généralité. Ces signaux sont généralement constitués d'une grandeur physique dont l'amplitude varie en fonction du temps. Parmi ces signaux, on peut citer par exemple : le signal vocal, le signal issu d'un capteur de température, etc.
- Signaux 2D : il s'agit ici de signaux qui peuvent être assimilés à des images, pour lesquelles les deux dimensions sont cette fois spatiales (par exemple les coordonnées x et y d'un pixel dans une image).

Un autre type de classification des signaux, appelé classification morphologique, est extrêmement important :

- les **signaux analogiques**, ils peuvent être représentés par des fonctions continues d'une va-

riable (en général, le temps, noté t). Dans toute la suite, ces signaux seront notés par exemple $x(t)$, la variable continue étant indiquée entre parenthèses.

- **les signaux numériques**, ils peuvent être représentés par des suites de nombres indicés par leur numéro d'échantillon noté n . Dans toute la suite, ces signaux seront notés par exemple $x[n]$, la variable discrète $n \in \mathbb{Z}$ étant indiquée entre crochets.

1.2 Notion de traitement du signal

Le signal étant défini comme le support d'une information, l'objectif du traitement du signal est généralement d'extraire cette information. Selon la morphologie du signal (continu ou discret), les méthodes pour y parvenir sont différentes, et les outils nécessaires à la compréhension de ces méthodes sont dédiés à la morphologie du signal.

Le traitement du signal désigne aussi plus communément l'ensemble des opérations que l'on fait subir à un signal (qu'il soit analogique ou numérique) pour le transformer en un autre signal (par exemple de la musique codée sur un disque vinyl ou un CD qui est transformée en un signal acoustique). Le traitement du signal se rencontre donc dans de nombreux domaines et fait partie intégrante de la plupart des appareils que nous utilisons quotidiennement. Ce type de traitement fait apparaître 2 contraintes fondatrices de la discipline :

- Tout d'abord, et de manière tout à fait générale, l'information liée à l'application d'intérêt n'est pas la seule présente dans le signal. On qualifie généralement toutes ces informations non pertinentes à l'application comme étant du *bruit*. Mais attention, cette notion de bruit est très relative ! Prenons comme exemple le signal capté en sortie d'une antenne braquée sur un satellite transmettant une chaîne de télévision. Dans ce cas, toutes les interférences de la transmission liées aux événements cosmiques (éruption solaire, etc.) ne sont que des *perturbateurs* de la transmission télévisée, et un des objectifs du traitement du signal issu de l'antenne consistera à minimiser l'influence de ces perturbations. Maintenant, imaginons que nous travaillions dans un centre d'analyse du soleil. Dans ce cas, toutes les transmissions télévisées satellitaires risquent de brouiller notre étude du rayonnement du soleil : ce qui était du bruit précédemment, devient en fait l'information. Plus généralement, l'étude du bruit et de ses caractéristiques a permis aujourd'hui de procéder à des transmissions toujours plus lointaines et toujours plus rapides.
- Lorsqu'on cherche à transformer un signal en un autre signal, il est nécessaire d'utiliser des *systèmes*. Un système est constitué d'une ou plusieurs entrées et/ou d'une ou plusieurs sorties. Ainsi, un système mono-entrée/mono-sortie à temps continu peut être schématiquement représenté par la figure [?]. La "boîte" \mathcal{S} représentée sur cette figure peut représenter n'importe quel système physique, de type électrique (un capteur), mécanique (un amortisseur), information (un algorithme), chimique (une réaction), biologique (cycles hormonaux), etc. Formellement, tous ces systèmes peuvent être décrits comme étant des *opérateurs* faisant subir à une ou plusieurs sollicitations (qui seront considérées comme les entrées du système) un *traitement* quelconque qui a pour effet de produire une ou plusieurs réponses (qui seront considérées comme les sorties du système).

On le voit, ces 2 problématiques mettent en avant 2 types d'étude complémentaires des signaux :

- d'une part, l'étude et la caractérisation des signaux à proprement parlé : où est l'information nécessaire à l'application dans le signal, où est le bruit qu'il faudra chercher à supprimer, etc.

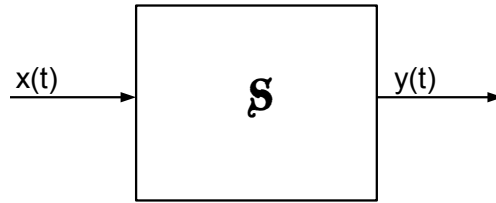


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'un système

- d'autre part l'étude et la caractérisation des systèmes de traitement des signaux qui permettront, une fois l'étape d'analyse précédente effectuée, d'extraire ou de transformer l'information utile.

On parle alors plus généralement *d'étude des signaux et systèmes*. C'est l'ensemble de ces 2 éléments qui seront étudiés dans la suite, à la fois pour signaux et systèmes à temps continu, mais également pour les signaux et systèmes à temps discret.

Chapitre 2

Rappels sur les outils mathématiques

Cette partie est consacrée à quelques rappels de mathématiques sur les outils adaptés à l'étude des fonctions continues ("=signaux continus"). Il ne s'agit pas d'un cours de mathématiques mais d'un bref récapitulatif des différentes notions qui vont nous servir tout au long du cours de traitement du signal. Ainsi, la définition et les propriétés essentielles des distributions sont rappelées. La notion de distribution est indispensable pour pouvoir utiliser la fonction de Dirac ainsi que d'autres fonctions utilisant la fonction de Dirac comme le peigne de Dirac. De même les séries de Fourier et les transformées de Fourier seront utiles pour étudier les propriétés fréquentielles des signaux continus.

2.1 Éléments sur les distributions

La plupart des signaux que nous allons rencontrer sont des fonctions du temps, qui associent à un instant t donné une amplitude $x(t)$. Mais une telle définition est problématique dès que l'on s'intéresse à un instant pour lequel le signal x connaît une discontinuité. Dès lors, comment définir sa valeur ? Afin de résoudre ce problème, la notion de *fonction généralisée*, ou *distribution*, a été formalisée dans les années 1930 par le mathématicien français Laurent Schwartz. Intuitivement, l'idée ici n'est plus d'évaluer le signal en un instant donné, mais plutôt une moyenne de celui-ci dans un intervalle infiniment petit autour de l'instant d'intérêt.

Définition : Soit \mathcal{D} une distribution et ϕ une fonction infiniment dérivable à support compact. On note la valeur de la distribution appliquée à la fonction ϕ :

$$\langle D, \phi \rangle = \int_T D(t) \phi(t) dt. \quad (2.1)$$

On définit sa dérivée $\partial D / \partial t$ par :

$$\left\langle \frac{\partial D}{\partial t}, \phi \right\rangle = \int_T \frac{\partial D}{\partial t} \phi(t) dt = - \int_T D(t) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} dt = - \left\langle D, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle, \quad (2.2)$$

Distributions utilisées en traitement du signal : Parmi toutes les distributions, la fonction généralisée de Dirac a une importance toute particulière dans l'étude et la caractérisation des signaux et systèmes.

Définition 2.1.1 (*Fonction généralisée de Dirac*)

On définit la distribution $\delta(t-t_0)$ (ou fonction généralisée) de Dirac au point $t_0 \in T$ la distribution

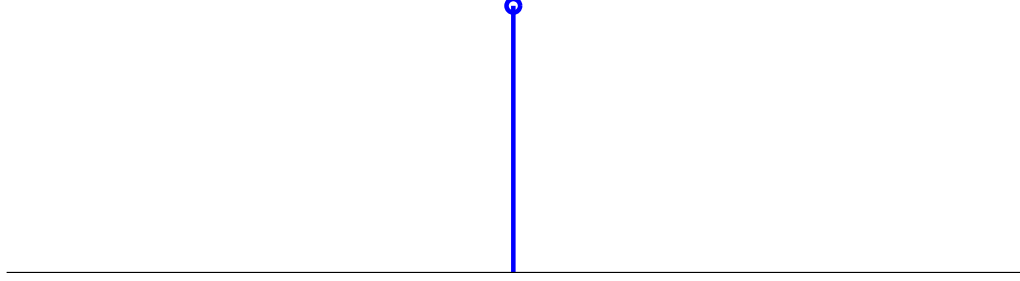


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de la fonction généralisée de Dirac : $\delta(t - t_0)$

telle que :

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_T \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0). \quad (2.3)$$

La distribution $\delta(t - t_0)$ de Dirac est une fonction « généralisée », nulle partout sauf en t_0 , et infiniment grande en t_0 , si bien que, lorsqu'on la multiplie par une fonction « test » ϕ et que l'on intègre sur T , on obtient la relation 3.1. La distribution $\delta(t - t_0)$ est l'outil mathématique permettant de décrire une « action » concentrée en un point.

Définition 2.1.2 (*Peigne de Dirac*)

On définit le peigne de Dirac : distribution $\text{III}(t - t_0)$ la distribution telle que :

$$\langle \text{III}, \phi \rangle = \int_T \text{III}(t - t_0) \phi(t) dt = \int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0) \phi(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nt_0) \quad (2.4)$$

La fonction généralisée peigne de Dirac permet de prélever des échantillons à intervalle régulier et sera utilisée dans la suite pour formaliser la notion d'échantillonnage.

2.2 Le produit de convolution

Définition 2.2.1 (*Le produit de convolution*)

On appelle produit de convolution l'opération suivante :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) du \quad (2.5)$$

Le produit de convolution est commutatif :

Propriété 2.2.1 (*Commutation du produit de convolution*)

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) y(u) du.$$

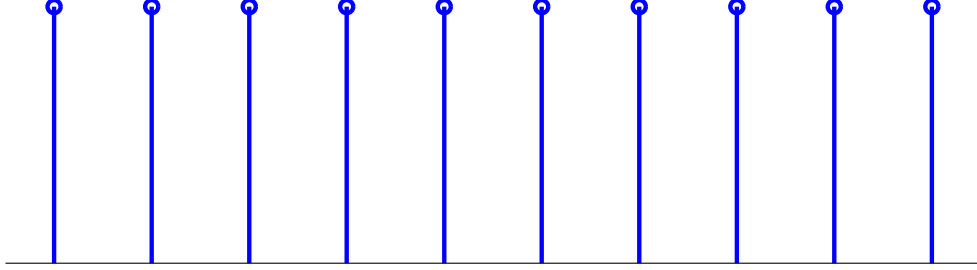


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la fonction généralisée de Dirac : $\text{III}(t - t_0)$

Démonstration : On pose $v = t - u$, on a $dv = -du$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-v)y(v)(-dv) \quad (2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)y(v)(dv) \quad (2.7) \quad \blacksquare$$

Le produit de convolution est distributif :

Propriété 2.2.2 (*Distribution du produit de convolution*)

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)(y(u) + z(u))du = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u) + x(t-u)z(u)du \quad (2.8)$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du + \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)z(u)du \quad (2.9) \quad \blacksquare$$

Le produit de convolution est associatif :

Propriété 2.2.3 (*Association du produit de convolution*)

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

La fonction généralisée de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution :

Propriété 2.2.4 (*Elément neutre du produit de convolution*)

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Démonstration :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\delta(u)du = x(t) \quad (2.10) \quad \blacksquare$$

Il est possible de décaler une fonction $x(t)$ d'une quantité t_0 en utilisant le produit de convolution :

Propriété 2.2.5 (*Décalage en temps par convolution avec la fonction de Dirac*)

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Démonstration :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \delta(t - t_0 - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) \delta(u - t_0) du = x(t - t_0) \quad (2.11) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.2.6 (*Périodisation par convolution avec le peigne de Dirac*)

$$x(t) * \text{III}(t - T) = \sum_n x(t - nT)$$

Démonstration :

$$x(t) * \text{III}(t - T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) \text{III}(u - T) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) \sum_n \delta(u - nT) du = \sum_n x(t - nT) \quad (2.12) \quad \blacksquare$$

Cette propriété montre que convoluer une fonction $x(t)$ avec un peigne de Dirac de période T revient à construire une fonction périodique de période T dont le motif élémentaire est donné par $x(t)$ (cf. Fig. ??).

2.2.1 Représentation fréquentielle des signaux périodiques : la série de Fourier

Les représentations temporelles précédentes, bien qu'extrêmement utilisée, ne permettent pas toujours de bien analyser un signal. En particulier, on peut imaginer que plusieurs informations très différentes sont incluses dans le même signal ; si c'est le cas, alors la vue temporelle de ce signal ne sera d'aucune utilité. Un autre mode de représentation des signaux est donc à utiliser. Dans le cas de signaux périodiques, c'est la série de Fourier qui permet d'aboutir à une représentation *fréquentielle* des signaux.

2.2.1.1 Définition

Définition 2.2.2 (*Décomposition en séries de Fourier*)

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (ω_0 est la pulsation). La décomposition en séries de Fourier de la fonction $x(t)$ est :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \quad (2.13)$$

les coefficients a_0 , a_n et b_n sont donnés par les formules d'Euler :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt; \quad (2.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(\omega_0 n t) dt; \quad (2.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(\omega_0 n t) dt. \quad (2.16)$$

Théorème 2.2.7 (Existence de la décomposition en séries de Fourier)

Soit g une fonction périodique de période T_0 . On suppose que g est continue par morceaux et possède une dérivée à droite et à gauche en tout point (pas nécessairement égales).

Alors g peut être décomposée en séries de Fourier.

Démonstration des formules d'Euler : Démontrons les 3 formules d'Euler :

1. formule donnant a_0

D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \right] dt \quad (2.17)$$

$$= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_n \cos(\omega_0 n t) dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} b_n \sin(\omega_0 n t) dt \quad (2.18)$$

$$= a_0 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt \quad (2.19)$$

$$= a_0 T_0 \quad (2.20)$$

2. formule donnant a_n :

D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$I = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(\omega_0 p t) dt \quad (2.21)$$

$$= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \right] \cos(\omega_0 p t) dt \quad (2.22)$$

$$= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 \cos(\omega_0 p t) dt \quad (2.23)$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_n \cos(\omega_0 n t) \cos(\omega_0 p t) dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} b_n \sin(\omega_0 n t) \cos(\omega_0 p t) dt \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

On rappelle que : $\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ et $\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{a_n}{2} (\cos(\omega_0 t(n+p)) + \cos(\omega_0 t(n-p))) dt \quad (2.26)$$

$$+ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{b_n}{2} (\sin(\omega_0 t(n+p)) + \sin(\omega_0 t(n-p))) dt \quad (2.27)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{a_n}{2} (\cos(\omega_0 t(n+p)) + \cos(\omega_0 t(n-p))) dt \quad (2.28)$$

Cette dernière intégrale est nulle pour $p \neq n$, pour $p = n$ on a :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(\omega_0 n t) dt = \frac{a_n}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt = \frac{a_n T_0}{2} \quad (2.29) \quad \blacksquare$$

Exemple 1 (fonction créneau)

On considère la fonction $x(t)$ de période 2π :

Calculons la décomposition en séries de Fourier de cette fonction : $a_0 = 1/2$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{-1}{n\pi}((-1)^n - 1)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

2.2.1.2 Quelques propriétés

Propriété 2.2.8 (*Décomposition d'une fonction paire*)

Soit $x(t)$ une fonction paire et périodique de période T_0 , sa décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t). \quad (2.30)$$

Démonstration : La fonction $x(t)$ étant périodique, on peut la décomposer en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t), \quad (2.31)$$

où :

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(\omega_0 n t) dt. \quad (2.32)$$

Comme $x(t)$ est une fonction paire, $x(t) \sin(\omega_0 n t)$ est également une fonction impaire. Or l'intégrale d'une fonction impaire entre des bornes symétriques est nulle. Par conséquent, $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ ■

Propriété 2.2.9 (*Décomposition d'une fonction impaire*)

Soit $x(t)$ une fonction impaire et périodique de période T_0 , sa décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega_0 n t). \quad (2.33)$$

Propriété 2.2.10 (*Forme complexe de la décomposition en séries de Fourier*)

La forme complexe de la décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_0 n t}, \quad (2.34)$$

avec,

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt. \quad (2.35)$$

Démonstration : On considère une fonction $x(t)$ périodique de période T_0 . Cette fonction admet une décomposition en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \quad (2.36)$$

On rappelle que $\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$ et $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$, alors :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{j\omega_0 n t} + e^{-j\omega_0 n t}}{2} + b_n \frac{e^{j\omega_0 n t} - e^{-j\omega_0 n t}}{2j}, \quad (2.37)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{j\omega_0 n t} \frac{a_n - j b_n}{2} + e^{-j\omega_0 n t} \frac{a_n + j b_n}{2}. \quad (2.38)$$

Calculons à present les coefficients $a_n - jb_n$ et $a_n + jb_n$:

$$a_n - jb_n = \frac{2}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(\omega_0 nt) dt - i \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(\omega_0 nt) dt \right] \quad (2.39)$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \left(\frac{e^{j\omega_0 nt} + e^{-j\omega_0 nt}}{2} - i \frac{e^{j\omega_0 nt} - e^{-j\omega_0 nt}}{2i} \right) dt \quad (2.40)$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \quad (2.41)$$

En procédant de la même manière, on trouve :

$$a_n + jb_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j\omega_0 nt} dt \quad (2.42)$$

Remarquons que le coefficient a_0 peut s'écrire :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j\omega_0 \times 0 \times t} dt \quad (2.43)$$

Par conséquent, la fonction $x(t)$ peut s'écrire :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{j\omega_0 nt} \left(\frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \right) + e^{-j\omega_0 nt} \left(\frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j\omega_0 nt} dt \right) \quad (2.44)$$

Posons :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \quad (2.45)$$

La fonction $x(t)$ peut s'exprimer en fonction de c_n :

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{j\omega_0 nt} c_n + e^{-j\omega_0 nt} c_{-n}), \quad (2.46)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{j\omega_0 nt} c_n + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-j\omega_0 nt} c_{-n}, \quad (2.47)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{j\omega_0 nt} c_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{j\omega_0 nt} c_n, \quad (2.48)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_0 nt}. \quad (2.49)$$

■

On remarquera que la décomposition en série de Fourier permet de passer d'une représentation continue ($x(t)$), à une représentation discrète (c_n) à condition que la fonction continue soit périodique. Nous allons retrouver cette propriété lors de l'étude du théorème de l'échantillonnage.

2.2.2 La transformée de Fourier

Dans la partie précédente, nous avons vu qu'il était possible de décomposer toutes fonctions périodiques sous la forme de séries de Fourier. Dans cette, l'idée de décomposition en fonctions élémentaires est étendue à une gamme de fonctions plus grande que les seules fonctions périodiques.

2.2.2.1 Définition

Définition 2.2.3 (*Transformée de Fourier*)

On appelle transformée de Fourier de la fonction $x(t)$, les fonctions notée $X(f)$ ou $X(\omega)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp[-j2\pi ft] dt, \text{ et } X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt. \quad (2.50)$$

Définition 2.2.4 (*Transformée de Fourier inverse*)

On appelle transformée de Fourier inverse de la fonction $X(f)$ ou $X(\omega)$, la fonction notée $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp[j2\pi ft] df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \quad (2.51)$$

Généralement on dénote la transformée de Fourier avec le symbole chapeau : $\hat{\cdot}$. On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = TF(x(t)) = X(\omega) \quad (2.52)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x}(\omega)) = TF^{-1}(\hat{x}(\omega)) \quad (2.53)$$

La définition transformée de Fourier n'est pas unique. En particulier, le signe dans les exponentiels est une convention et peut être interverti.

Exemple 2 (*TF de la fonction porte*)

Calculons la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

D'après la définition, on a :

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \\ &= \int_{-1}^{+1} \exp[-j\omega t] dt, \\ &= \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-1}^{+1}, \\ &= 2 \sin_c(\omega) \end{aligned}$$

On obtient une fonction continue de la variable ω

Quelques remarques sur la transformée de Fourier :

1. La transformée de Fourier permet de passer d'une représentation dans l'espace des temps à une représentation dans l'espace des fréquences ($\omega = 2\pi f$) ;
2. $x(t)$ et $\hat{x}(\omega)$ peuvent être des fonctions complexes. Le plus souvent, nous serons amenés à traiter le cas où $x(t)$ est réelle et $\hat{x}(\omega)$ est une fonction complexe à symétrie hermitienne.
3. la formule 2.51 peut être interprétée de la façon suivante : $x(t)$ se décompose comme une somme 'infinie' de fonctions harmoniques ($\exp[-j\omega t]$) pondérées par les coefficients $\hat{x}(\omega)$;

4. $\hat{x}(\omega)$ est le spectre de la fonction $x(t)$;
5. $|\hat{x}(\omega)|$ est appelé module du spectre de $x(t)$, cette quantité représente la contribution de chaque harmonique ;
6. $\arg(\hat{x}(\omega))$ est la phase du spectre, cette quantité représente le déphasage entre chaque harmonique ;
7. la transformée de Fourier est réversible :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}(x(t)) \}; \quad (2.54)$$

2.2.2.2 Propriétés essentielles

Propriété 2.2.11 (*Linéarité*)

La transformée de Fourier d'une combinaison linéaire des fonctions f et g est la combinaison linéaire des transformées de Fourier des fonctions f et g :

$$\mathcal{F} \{ ax(t) + bx(t) \} = a\hat{x}(\omega) + b\hat{x}(\omega). \quad (2.55)$$

Cette propriété permet de 'découper' les expressions quand on calcule la transformée de Fourier d'une équation.

Démonstration :

$$\mathcal{F} \{ ax(t) + bx(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax(t) + bx(t)) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.56)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t) \exp[-j\omega t] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} bx(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.57)$$

$$= a\hat{x}(\omega) + b\hat{x}(\omega). \quad (2.58) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.2.12 (*dérivation*)

L'opération de dérivation de la fonction $x(t)$ revient à multiplier la fonction $\hat{x}(\omega)$ par $j\omega$:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = j\omega \hat{x}(\omega) \quad (2.59)$$

Nous utiliserons beaucoup cette propriété dans la suite car elle permet de passer d'une expression faisant apparaître des dérivées à une expression de type polynôme en ω .

Démonstration :

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp[-j\omega t] dt \quad (2.60)$$

$$= \left([x(t)e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j\omega e^{-j\omega t}) dt \right) \quad (2.61)$$

$$= j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.62)$$

$$= j\omega \hat{x}(\omega) \quad (2.63) \quad \blacksquare$$

Ce résultat s'étend sans difficulté aux dérivées d'ordre supérieur :

Propriété 2.2.13 (dérivée d'ordre supérieur)

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n x}{dt^n} \right\} = (i\omega)^n \hat{x}(\omega) \quad (2.64)$$

Démonstration : Pour démontrer cette propriété, on utilise le fait que $\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$ ■

Propriété 2.2.14 (décalage dans le temps)

Un décalage d'une quantité t_0 dans l'espace des temps correspond à multiplier la fonction $\hat{x}(\omega)$ par $e^{-j\omega t_0}$ dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{F} \{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \hat{x}(\omega) \quad (2.65)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.66)$$

On pose : $u = t - t_0$, donc $du = dt$, $u \rightarrow -\infty$ si $t \rightarrow -\infty$ et $u \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$, en effectuant ce changement de variables on obtient :

$$\mathcal{F} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \exp[-j\omega(u + t_0)] du \quad (2.67)$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \exp[-j\omega u] du \quad (2.68)$$

$$= e^{-j\omega t_0} \hat{x}(\omega) \quad (2.69) \quad \blacksquare$$

Définition 2.2.5 (Le produit de convolution)

On appelle produit de convolution l'opération suivante :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) u(u) du. \quad (2.70)$$

Propriété 2.2.15 (Théorème de convolution)

Soient f et g , deux fonctions absolument intégrables sur l'axe des réels, alors la transformée de Fourier du produit de convolution de f par g est le produit simple des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F} \{x(t) * y(t)\} = \hat{x}(\omega) \cdot \hat{y}(\omega) \quad (2.71)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F} \{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) * y(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.72)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) du \exp[-j\omega t] dt \quad (2.73)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) \exp[-j\omega t] du dt \quad (2.74)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t - u) \exp[-j\omega t] dt \right] du \quad (2.75)$$

On pose $v = t - u$ donc $t = u + v$ à u fixé,

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(v) \exp[-j\omega(v+u)] dv \right] du \quad (2.76)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \exp[-j\omega u] du \int_{-\infty}^{+\infty} y(v) \exp[-j\omega v] dv \quad (2.77)$$

$$= \hat{x}(\omega) \cdot \hat{y}(\omega) \quad (2.78) \quad \blacksquare$$

Cette relation est très importante. Elle permet de 'transformer' un produit de convolution en un produit simple. Elle justifie, à elle seule, l'emploi intensif de la transformée de Fourier en traitement du signal.

Propriété 2.2.16 (transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac)

La transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac est :

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}. \quad (2.79)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \exp[-j\omega t] dt \quad (2.80)$$

$$= e^{-j\omega t_0} \quad (2.81) \quad \blacksquare$$

Cette propriété existe aussi pour la fonction généralisée de Dirac dans l'espace de Fourier :

Propriété 2.2.17

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.82)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) \exp[j2\pi f t] df \quad (2.83)$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.84) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.2.18 (Transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus)

Les transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus sont respectivement :

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \pi (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) \quad (2.85)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) \quad (2.86)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} \quad (2.88)$$

or d'après la relation 2.84, on a :

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \delta(f - f_0)$$

Par conséquent on obtient la relation voulue :

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad (2.89)$$

La démonstration pour la fonction sinus est analogue :

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \quad (2.90) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.2.19 (Transformée de Fourier du peigne de Dirac)

$$\mathcal{F}\{\text{III}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - n/T) \quad (2.91)$$

Cette propriété montre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac avec une fréquence de récurrence de $1/T$ et une amplitude de $1/T$.

Démonstration : Pour montrer ce résultat, nous allons procéder en deux temps : (i) mettre le peigne de Dirac sous une forme équivalente en calculant son développement en séries de Fourier, (ii) calculer la transformée de Fourier du développement en série de Fourier.

Le peigne de Dirac est une fonction (généralisée) de période T . Il peut être décomposé en série de Fourier. En utilisant la forme complexe du développement en séries de Fourier (Eq. 2.2.10), il vient :

$$\frac{\text{III}(t)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_0 n t}$$

avec les coefficients c_n qui valent :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{III}(t)}{T} e^{-j\omega_0 n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Calculons à présent la transformée de Fourier du peigne de Dirac en utilisant la formule donnée par son développement en séries de Fourier et les propriétés sur les transformées de Fourier des fonction de Dirac généralisées exposées ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{III}(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j\omega_0 n t}\right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n t}\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Propriété 2.2.20 (Théorème de Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.92)$$

Ce théorème illustre le fait que l'énergie du signal se retrouve que la représentation du signal soit temporelle ou fréquentielle.

Démonstration : voir plus loin ... ■

Définition 2.2.6 (densité spectrale d'énergie)

On appelle densité spectrale d'énergie la quantité suivante :

$$|X(\omega)|^2$$

Propriété 2.2.21 (Second théorème de Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)H^*(\omega)d\omega \quad (2.93)$$

Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega dt \quad (2.94)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt d\omega \quad (2.95)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega)X(\omega)d\omega \quad (2.96) \quad \blacksquare$$

Le théorème de Parseval peut se déduire du second théorème de Parseval en choisissant $h(t) = x(t)$.

2.3 La transformée de Laplace

La partie précédente a permis de mettre en place le formalisme des transformées de Fourier. Cette transformée est bien adaptée aux problèmes impliquant des fonctions définies (et intégrables) de moins l'infini à plus l'infini. Cependant, il existe d'autres problèmes avec des conditions initiales du type "à $t=0$, ..." qui ne sont pas bien décrits par la transformée de Fourier. On utilise alors la transformée de Laplace.

2.3.1 La Transformée de Laplace

Définition 2.3.1 (La transformée de Laplace)

On appelle transformée de Laplace de la fonction $x(t)$, la fonction $X(p)$ définie par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad (2.97)$$

Théorème 2.3.1

Si $x(t)$ est une fonction intégrable sur tout intervalle fini de l'axe des réels et qui ne diverge pas en norme à l'infini plus vite qu'une exponentielle de type e^{-ct} (avec $c \in \mathbb{R}$).

Alors sa transformée de Laplace existe pour tout $p \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est plus grande que c ($\text{Re}(p) > c$)

Démonstration : la démonstration découle naturellement des hypothèses de l'énoncé du théorème. ■

Dans ce cours, la transformée de Laplace sera notée indifféremment $X(p) = \mathcal{L}(x(t)) = TL(x(t))$.

Exemple 3 (Transformée de Laplace de la fonction Heaviside)

Calculons la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

D'après la définition 2.97 la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est :

$$\begin{aligned} U(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt, \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty}, \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 (Transformée de Laplace inverse)

Soit $x(t)$ une fonction admettant une transformée de Laplace $X(p)$. Soit γ un nombre réel plus grand que la partie réelle de tous les points où $X(p)$ est singulière.

Alors la transformée de Laplace inverse s'obtient par l'expression suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} X(\gamma + j\omega) e^{(\gamma+i\omega)t} d\omega \quad (2.98)$$

Démonstration : ADMIS ■

En pratique, on calcule rarement les transformées de Laplace directe ou inverse. On utilise des tables dans lesquelles, les fonctions usuelles et leurs transformées ont été compilées (cf tableau 2.1)

2.3.1.1 Propriétés essentielles

Propriété 2.3.3 (Linéarité)

La transformée de Laplace d'une combinaison linéaire des fonctions f et g est la combinaison linéaire des transformées de Laplace des fonctions f et g :

$$\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p). \quad (2.99)$$

$x(t)$	$X(p)$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p^2}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-at} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p+a}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ te^{-at} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{a} \sin(at) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \cos(at) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{1}{p} e^{-k\sqrt{p}}$

TABLE 2.1 – Quelques exemples de transformées de Laplace

Cette propriété permet de 'découper' les expressions quand on calcule la transformée de Laplace d'une équation.

Démonstration :

$$\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = \int_0^{+\infty} (ax(t) + by(t)) \exp[-pt] dt \quad (2.100)$$

$$= p \int_0^{+\infty} ax(t) \exp[-pt] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} by(t) \exp[-pt] dt \quad (2.101)$$

$$= aX(p) + bY(p). \quad (2.102) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.3.4 (dérivation)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = pX(p) - x(0) \quad (2.103)$$

Nous utiliserons beaucoup cette propriété dans la suite car elle permet de passer d'une expression faisant apparaître des dérivées à une expression de type polynôme en p .

Démonstration :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp[-pt] dt \quad (2.104)$$

$$= \left([x(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) (-pe^{-pt}) dt \right) \quad (2.105)$$

$$= x(0) + p \int_0^{+\infty} x(t) \exp[-pt] dt \quad (2.106)$$

$$= pX(p) - x(0) \quad (2.107) \quad \blacksquare$$

Ce résultat s'étend sans difficulté aux dérivées d'ordre supérieur :

Propriété 2.3.5 (dérivée d'ordre supérieur)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n x}{dt^n} \right\} = p^n X(p) - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \dots - \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}(0) \quad (2.108)$$

Propriété 2.3.6 (intégration)

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t x(u) du \right\} = \frac{1}{p} X(p) \quad (2.109)$$

Démonstration :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t x(u) du \right\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t x(u) du \right) \exp[-pt] dt \quad (2.110)$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} \int_0^t x(u) du \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) \frac{e^{-pt}}{-p} dt \quad (2.111)$$

$$= \frac{1}{p} X(p) \quad (2.112) \quad \blacksquare$$

Propriété 2.3.7 (décalage dans le temps)

Un décalage d'une quantité t_0 dans l'espace des temps correspond à multiplier la fonction $X(p)$ par e^{-pt_0} dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{L} \{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = e^{-pt_0} X(p) \quad (2.113)$$

Propriété 2.3.8 (Produit de convolution)

La transformée de Laplace d'un produit de convolution de deux fonctions x et y est le produit simple des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L} \{x(t) * y(t)\} = X(p)Y(p) \quad (2.114)$$

Chapitre 3

Rappels sur signaux et les systèmes continus

Cette partie est consacrée à des rappels succints sur l'analyse des signaux et des systèmes analogiques.

3.1 Etude des signaux à temps continu

3.1.1 Représentation temporelle

3.1.1.1 Signaux élémentaires en traitement du signal

Il est difficile de proposer une liste exhaustive de tous les signaux possiblement rencontrés en traitement du signal. Néanmoins, certains reviennent plus que d'autres :

- Le signal sinusoïdal, de fréquence f_0 , d'amplitude A et de phase φ , tel que :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Le signal échelon, généralement noté $u(t)$, tel que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Le signal porte $\Pi_T(t)$, de largeur T , tel que :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autres signaux particuliers, qui ne sont pas des fonctions (au sens mathématique du terme), sont également particulièrement utilisés en traitement du signal comme la fonction généralisée de Dirac et le peigne de Dirac introduit dans le chapitre sur les outils mathématiques. On rappelle que la fonction de Dirac est définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_T \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0). \quad (3.1)$$

et que le peigne de Dirac est défini par

$$\langle \text{III}, \phi \rangle = \int_T \text{III}(t - t_0) \phi(t) dt = \int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0) \phi(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nt_0) \quad (3.2)$$

La fonction généralisée peigne de Dirac permet de prélever des échantillons à intervalle régulier et sera utilisée dans la suite pour formaliser la notion d'échantillonnage.

3.1.1.2 Valeur moyenne, valeur efficace

La valeur moyenne d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \quad (3.3)$$

La valeur moyenne quadratique, ou valeur efficace, est définie par :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \quad (3.4)$$

Exemple : Valeur moyenne et valeur efficace de la fonction sinus Si $x(t) = A \sin \omega_0 t$, alors la valeur moyenne est nulle $\langle x(t) \rangle = 0$ et la valeur efficace vaut $RMS = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

3.1.1.3 Classification des signaux

Nous avons déjà évoqué dans l'introduction l'existence de signaux pluridimensionnels. D'autres caractéristiques importantes permettent également de caractériser les signaux.

Classification phénoménologique

- Signaux déterministes : ce sont les signaux que nous allons rencontrer le plus souvent, dont l'évolution temporelle est dictée par une fonction (généralisée ou non), permettant de connaître parfaitement la valeur du signal à n'importe quel instant t . Parmi ces signaux, on rencontre :
 - des signaux périodiques, de période T_0 , tels que $x(t-T_0) = x(t)$. Exemple : signal sinusoïdal, etc.
 - des signaux apériodiques, ne possédant aucune périodicité pour tout t ;
 - des signaux transitoires, non périodiques également, qui présentent une valeur constante de repos (généralement 0), sauf dans un intervalle de temps donné (possiblement non borné).
- Signaux aléatoires : ces signaux sont des fonctions aléatoires pour lesquelles il n'est pas possible de donner avec exactitude leur valeur à un instant donné. Généralement, de tels signaux sont caractérisés par des données statistiques, telles que des moyennes, variances, etc.

Classification énergétique Selon la nature phénoménologique du signal, celui-ci possédera une énergie ou une puissance différentes. Ces grandeurs sont définies de la façon suivante :

Définition 3.1.1 (*Énergie*)

Soit $x(t)$ un signal déterministe. Alors, son énergie E est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (3.5)$$

Définition 3.1.2 (*Puissance d'un signal quelconque*)

Soit $x(t)$ un signal déterministe. Alors, sa puissance P est donnée par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (3.6)$$

Si le signal $x(t)$ est T_0 -périodique, alors sa puissance peut se calculer selon la définition suivante.

Définition 3.1.3 (Puissance d'un signal T_0 -périodique)

Soit $x(t)$ un signal déterministe de période T_0 . Alors, sa puissance P est donnée par :

De ces définitions découle la classification suivante :

- Signaux à énergie finie, i.e. $E < +\infty$: ces signaux possèdent également une puissance nulle $P = 0$. Ce sera le cas de la plupart des signaux déterministes non périodiques que nous rencontrerons dans la suite.
- Signaux à énergie infinie, i.e. $E \rightarrow +\infty$: ces signaux possèdent également une puissance non nulle. Ce sera le cas de tous les signaux périodiques que nous allons étudier.

3.1.2 Représentation fréquentielle

Propriété 3.1.1 (Théorème de Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.7)$$

Ce théorème illustre le fait que l'énergie du signal se retrouve que la représentation du signal soit temporelle ou fréquentielle.

Démonstration : voir plus loin ... ■

Définition 3.1.4 (densité spectrale d'énergie)

On appelle densité spectrale d'énergie la quantité suivante :

$$|G(\omega)|^2$$

Le théorème de Parseval peut se déduire du second théorème de Parseval en choisissant $h(t) = g(t)$.

3.2 Etude des systèmes à temps continu

Les filtres (ou systèmes) linéaires et invariants par translation dans le temps sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

— **filtres linéaires**

On considère un filtre \mathcal{S} qui fait correspondre à l'entrée $x(t)$ la sortie $y(t)$ (cf figure 3.1). On dira que le filtre \mathcal{S} est linéaire si à l'entrée $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ correspond la sortie $\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ (où $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont les sorties correspondant respectivement aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$) comme l'illustre la figure 3.2.

Cette définition s'étend sans problème aux filtres numériques qui à une entrée $x[n]$ font correspondre une sortie $y[n]$ telle que $\lambda x_1[n] + \mu x_2[n] \rightarrow \lambda y_1[n] + \mu y_2[n]$

— **filtres invariants par translation dans le temps**

On dira qu'un système ou un filtre \mathcal{S} est invariant par translation dans le temps si à l'entrée $x(t)$ correspond la sortie $y(t)$ et qu'à l'entrée $x(t - \tau)$ correspond la sortie $y(t - \tau)$. Autrement dit, si on décale d'une quantité τ l'entrée, la sortie est également décalée de la même quantité τ .

Là aussi, la propriété s'étend aux filtres numériques à la différence que le retard est quantifié : si on considère un filtre numérique invariant par translation dans le temps tel qu'à une entrée

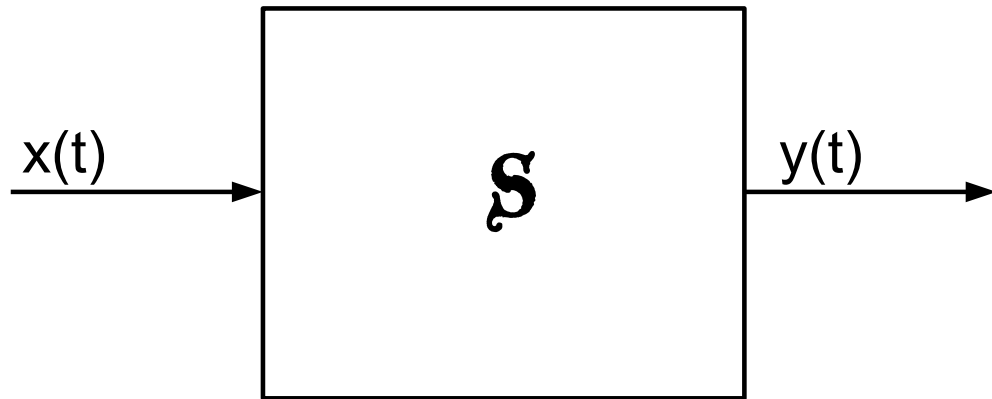


FIGURE 3.1 – Représentation schématique d'un système

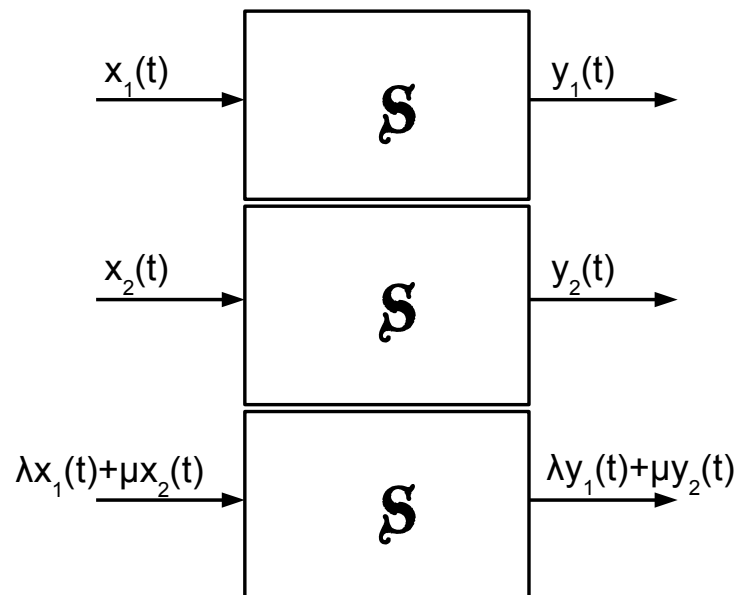


FIGURE 3.2 – Représentation schématique d'un système linéaire

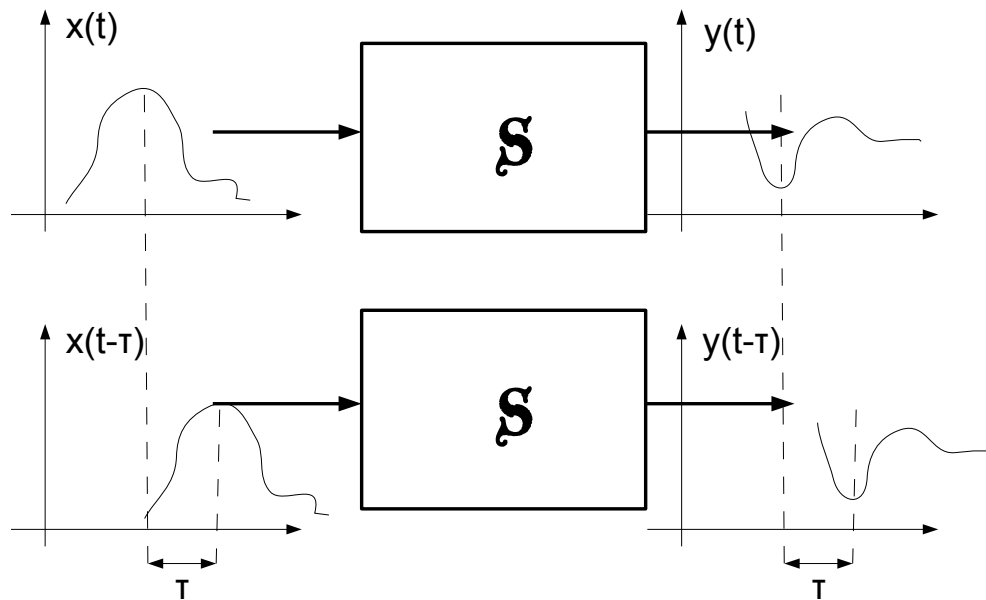


FIGURE 3.3 – Représentation schématique d'un filtre invariant par translation dans le temps

$x[n]$ corresponde une sortie $y[n]$, alors à l'entrée $x[n - q]$ correspond la sortie $y[n - q]$ où $q \in \mathbf{Z}$

Exemple 4 (*Filtres linéaires et non linéaires*)

Exemples de filtres linéaires

- $x(t) \rightarrow y(t) : y(t) = 2x(t) ;$
- $x(t) \rightarrow y(t) : \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = x(t) ;$

et de filtres non linéaires :

- $x(t) \rightarrow y(t) : y(t) = \sin(x(t)) ;$

3.2.1 Filtrage et convolution

Le but de ce paragraphe est d'obtenir la relation fondamentale des filtres linéaires et invariants par translation dans le temps par quelques petites expériences de pensée. Le raisonnement se fait en 5 étapes, l'ensemble des étapes est illustré par les figures 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8. Pour cela, on considère un filtre \mathcal{S} linéaire et invariant par translation dans le temps.

1. On impose comme signal d'entrée une impulsion d'amplitude unité à $t = 0$, on note ce signal $i(t)$. A ce signal d'entrée correspond un signal de sortie, que l'on note $h(t)$ (figure 3.4) :

$$i(t) \rightarrow h(t)$$

2. Si on décale dans le temps d'une quantité τ l'impulsion en entrée, alors le motif $h(t)$ est lui aussi décalé dans le temps de la quantité τ car \mathcal{S} est invariant par translation dans le temps (figure 3.5) :

$$i(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

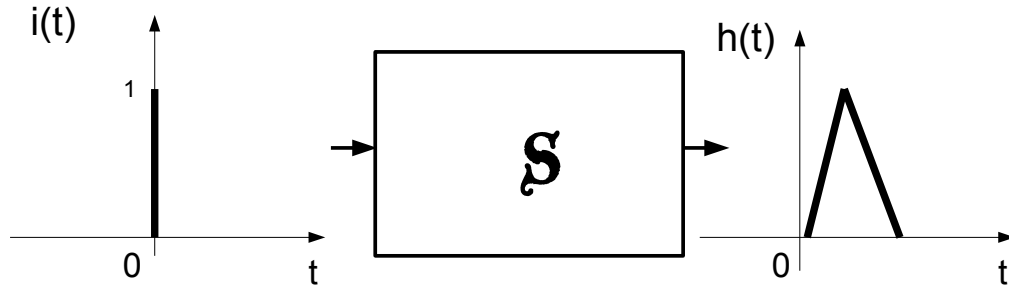


FIGURE 3.4 – Illustration du principe de convolution - étape 1

3. Si on considère deux impulsions d'amplitude respective A_1 et A_2 émises aux temps τ_1 et τ_2 , comme \mathcal{S} est un filtre linéaire et invariant par translation dans le temps, dans le premier cas le signal de sortie est $A_1 h(t - \tau_1)$ et dans le deuxième cas $A_2 h(t - \tau_2)$:

$$A_1 i(t - \tau_1) \rightarrow A_1 h(t - \tau_1)$$

$$A_2 i(t - \tau_2) \rightarrow A_2 h(t - \tau_2)$$

4. On somme maintenant les deux signaux $A_1 i(t - \tau_1)$ et $A_2 i(t - \tau_2)$ en entrée du filtre, le filtre étant linéaire et invariant par translation dans le temps, la sortie du filtre est simplement $A_1 h(t - \tau_1) + A_2 h(t - \tau_2)$:

$$A_1 i(t - \tau_1) + A_2 i(t - \tau_2) \rightarrow A_1 h(t - \tau_1) + A_2 h(t - \tau_2)$$

5. On considère maintenant un signal quelconque $s(t)$, ce signal peut être vu comme la superposition de signaux 'impulsions' d'amplitude différente et décalé dans le temps : $e(t) = \sum_i A_i i(t - \tau_i)$, le filtre étant linéaire et invariant par translation dans le temps, la sortie du filtre s'écrira : $s(t) = \sum_i A_i h(t - \tau_i)$. En passant à la limite continue, on trouve :

$$e(t) \rightarrow s(t) = \int e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.8)$$

Cette dernière relation (eq. 3.8) est la relation fondamentale des filtres linéaires et invariants par translation dans le temps, car elle permet de déterminer le signal de sortie $s(t)$ à un signal d'entrée quelconque $e(t)$ à condition de connaître la fonction $h(t)$ qui caractérise le filtre. Dans la suite nous allons voir que cette relation est un produit de convolution entre l'entrée du filtre et sa réponse impulsionnelle.

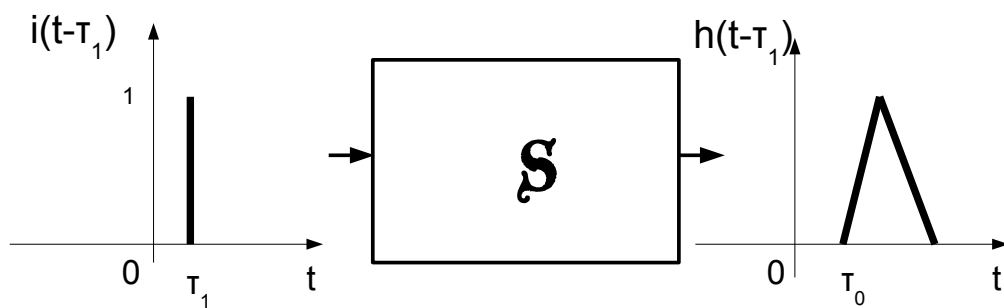


FIGURE 3.5 – Illustration du principe de convolution - étape 2

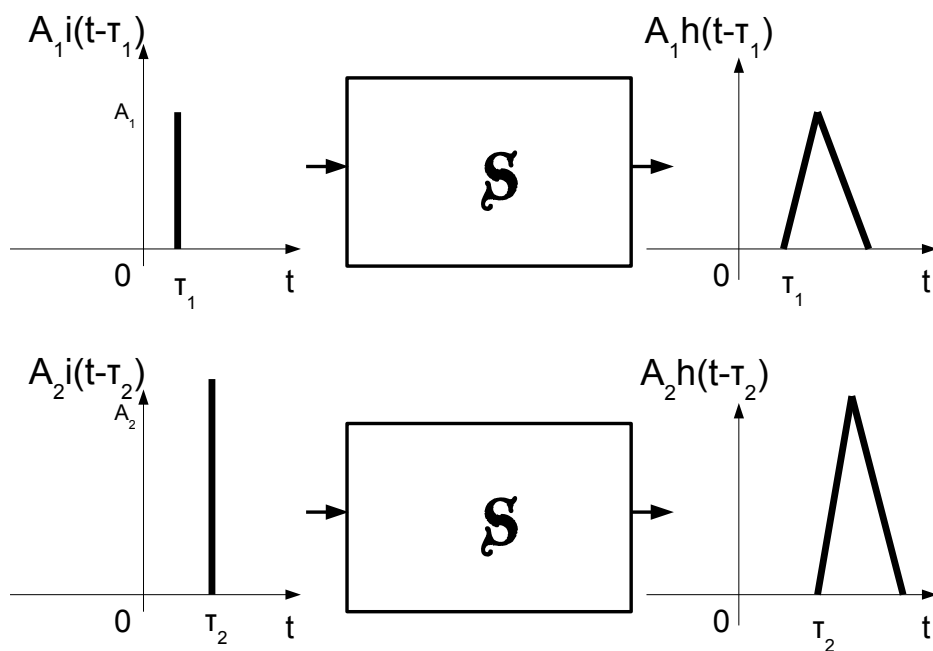


FIGURE 3.6 – Illustration du principe de convolution - étape 3

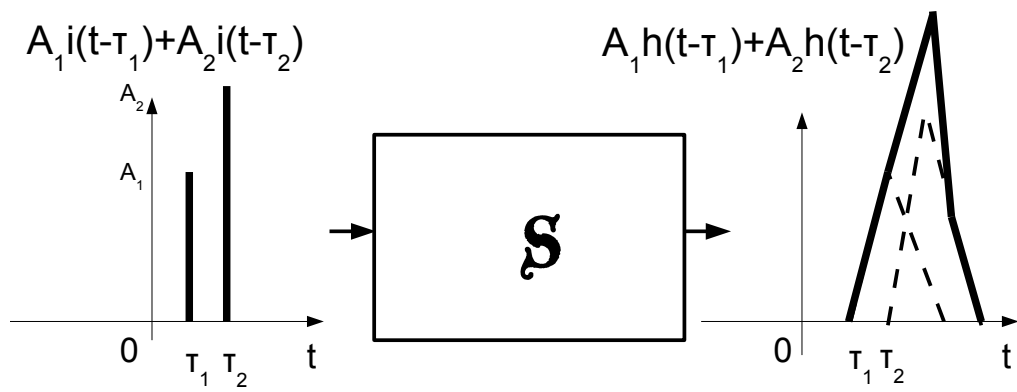


FIGURE 3.7 – Illustration du principe de convolution - étape 4

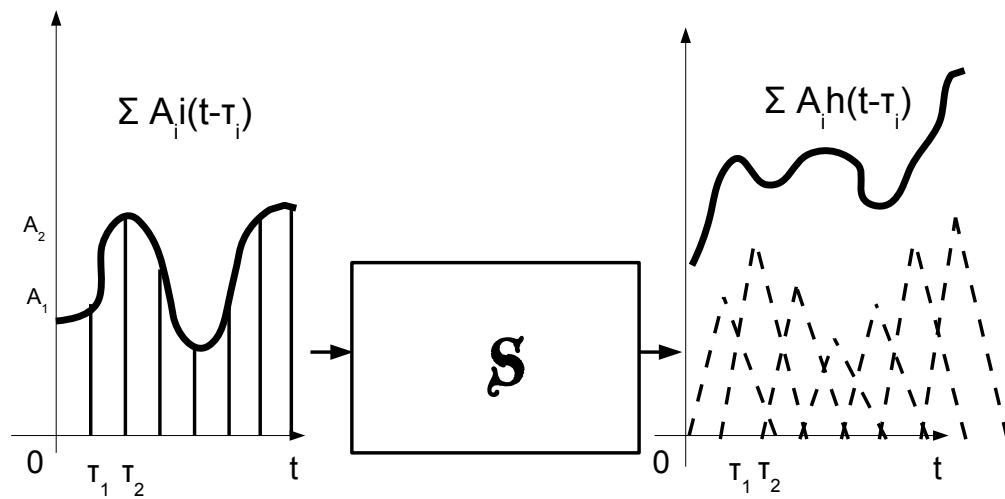


FIGURE 3.8 – Illustration du principe de convolution - étape 5

Chapitre 4

Du temps continu au temps discret : l'échantillonnage

4.1 Echantillonnage

4.1.1 Théorème de l'échantillonnage

L'échantillonnage est l'opération qui permet de passer d'un signal à temps continu à un signal à temps discret. Soit $x(t)$ le signal à temps continu et $x_E[n]$ les échantillons prélevés à des temps réguliers (toutes les T secondes). Ces deux quantités sont reliées en considérant que le signal échantillonné est obtenu en multipliant le signal continu par un peigne de Dirac (Eq 3.2) :

$$x_E[n] = x(t) \cdot \text{III}(t - T) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (4.1)$$

Calculons la transformée de Fourier de cette relation. On note $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ et $X_E(f)$ la transformée de Fourier de $x_E(t)$:

$$X_E(f) = \mathcal{F} \left(x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right). \quad (4.2)$$

D'après la propriété 2.2.15, la transformée de Fourier d'un produit simple dans le temps est le produit de convolution des transformées de Fourier :

$$X_E(f) = X(f) * \mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right). \quad (4.3)$$

D'après la propriété 2.2.19, la transformée de Fourier du peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac :

$$X_E(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) \quad (4.4)$$

Compte tenu des propriétés de la fonction généralisée de Dirac, le produit de convolution apparaissant dans cette formule se calcule simplement :

$$X_E(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T}). \quad (4.5)$$

Ainsi le spectre de la fonction échantillonnée est composé de la superposition du spectre de la fonction continue décalé de n/T .

De cette dernière relation, on tire les conclusions suivantes :

- le spectre de la fonction continue est le motif élémentaire permettant de construire le spectre de la fonction échantillonnée ;
- si le spectre de la fonction continue est tel que $|X(f)| = 0$ si $f > f_c$ et que $1/(2T) > f_c$, alors les deux spectres coïncident dans la plage de fréquence $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$ ($f_e = 1/T$ est la fréquence d'échantillonnage) ;
- f_c est la fréquence de coupure du spectre de la fonction continue, c'est la fréquence maximale pour lequel le spectre n'est pas nul, si $f_c \neq \infty$ alors l'allure du spectre est un passe bas ;

Ces remarques permettent d'établir le théorème de l'échantillonnage :

Soit $x(t)$ un signal continu dont le spectre est tel que $|X(f)| = 0$ si $f > f_c$, la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T$ doit respecter l'inégalité suivante pour que le signal ne soit pas altéré : $f_e \geq 2f_c$

Examinons à présent différents scénarios pour un signal remplissant les conditions mentionnées ci-dessus :

1. si $f_e = 2f_c$ alors le signal est correctement échantillonné même si l'impression visuelle peut laisser penser le contraire (cf paragraphe sur la reconstruction) ;
2. si $\frac{f_e}{2} < f_c$ alors le signal est **sous-échantillonné**, le spectre dans la bande de fréquences $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$ est modifié, on dit qu'il y a **repliement du spectre** (cf exemple ci-dessous) ;
3. si $\frac{f_e}{2} > f_c$ le signal sera bien échantillonné, cependant la fréquence d'échantillonnage est plus grande que nécessaire : on parle de **sur-échantillonnage**.

4.2 Reconstruction du signal à partir de la suite des échantillons

L'objectif de ce paragraphe est de voir comment reconstruire $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT) = x[n]$.

Pour cela, on part de la relation 4.5 reliant le spectre de la fonction échantillonnée à celui de la fonction continue. Sous réserve d'avoir échantillonné le signal correctement ($f_e \geq 2f_c$), on constate que :

$$X(f) = \frac{1}{f_e} X_E(f) \cdot \text{rect}_{(-f_e/2; f_e/2)}(f). \quad (4.6)$$

On peut donc reconstruire le spectre de la fonction continue en appliquant au spectre de la fonction échantillonnée un filtre de gain 1 ($\text{rect}_{(-f_e/2; f_e/2)}(f)$) dans la bande de fréquences $(-f_e/2; f_e/2)$ et 0 ailleurs. En prenant la transformée de Fourier inverse de cette expression, on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{f_e} X_E(f) \cdot \text{rect}_{(-f_e/2; f_e/2)}(f)\right\} \quad (4.7)$$

Comme nous l'avons déjà vu, la transformée de Fourier d'un produit simple est équivalente au produit de convolution des transformées de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{f_e} \mathcal{F}^{-1}\{X_E(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\text{rect}_{(-f_e/2; f_e/2)}(f)\} \quad (4.8)$$

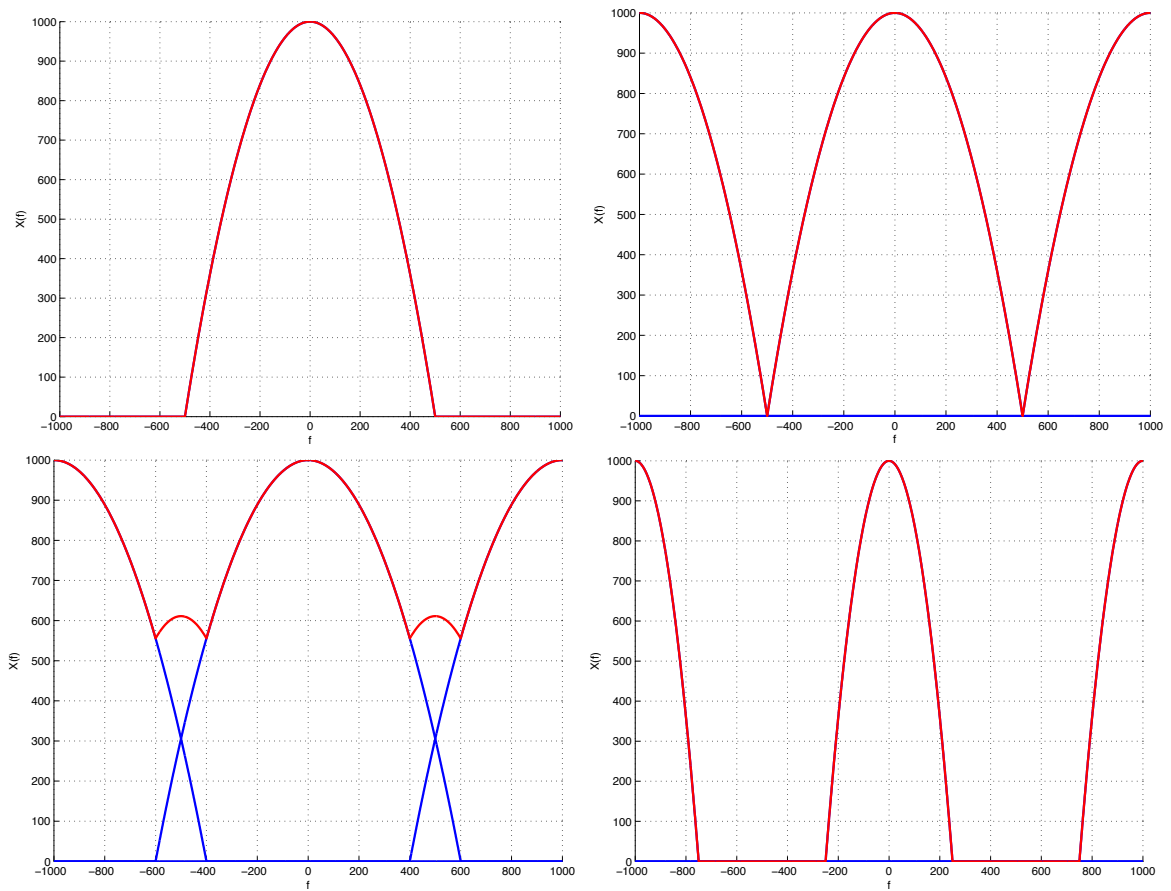


FIGURE 4.1 – Effet de l'échantillonnage sur le spectre : (a) spectre analogique (fonction continue), (b) $f_c = f_e/2$, (c) $f_e/2 < f_c$, (d) $\frac{f_e}{2} > f_c$

Calculons la transformée de Fourier inverse de la fonction porte :

$$\mathcal{F}^{-1}\{rect_{(-f_e/2;f_e/2)}(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} rect_{(-f_e/2;f_e/2)}(f) e^{j2\pi ft} df \quad (4.9)$$

$$= \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} e^{j2\pi ft} df \quad (4.10)$$

$$= \left[\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi t} \right]_{-f_e/2}^{f_e/2} \quad (4.11)$$

$$= \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi t} \quad (4.12)$$

Injectons cette dernière expression dans le produit de convolution :

$$x(t) = \frac{1}{f_e} \left(x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right) * \left(f_e \frac{\sin(\pi f_e t)}{f_e \pi t} \right) \quad (4.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - nT) \sin_c(\pi f_e(t - u)) du \quad (4.14)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \sin_c(\pi f_e(t - u)) \delta(u - nT) du \quad (4.15)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \sin_c(\pi f_e(t - nT)) \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Cette dernière formule permet de reconstruire le signal continu $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT)$. Il s'agit en fait d'une interpolation entre les échantillons. Mais cette interpolation assure de reconstruire le signal continu parfaitement. Toutefois, on voit que cette expression nécessite le calcul d'un produit de convolution. En pratique, le calcul de $x(t)$ se fait par interpolation entre les échantillons (interpolation linéaire, quadratique, spline, ...), ce qui a pour conséquence de dégrader l'information et de ne pas reconstruire exactement la fonction continue.

4.3 Quantification

Nous n'aborderons pas dans ce cours la notion de quantification. Nous retiendrons seulement que la quantification résulte de l'échantillonnage sur un certain nombre de niveaux (bits) du signal.

Chapitre 5

Analyse spectrale des signaux numériques

Ce chapitre est consacré à l'analyse des signaux discrets. On rappelle quelques définitions sur la représentation temporelle puis on développe les outils d'analyse spectrale utiles pour les signaux discrets.

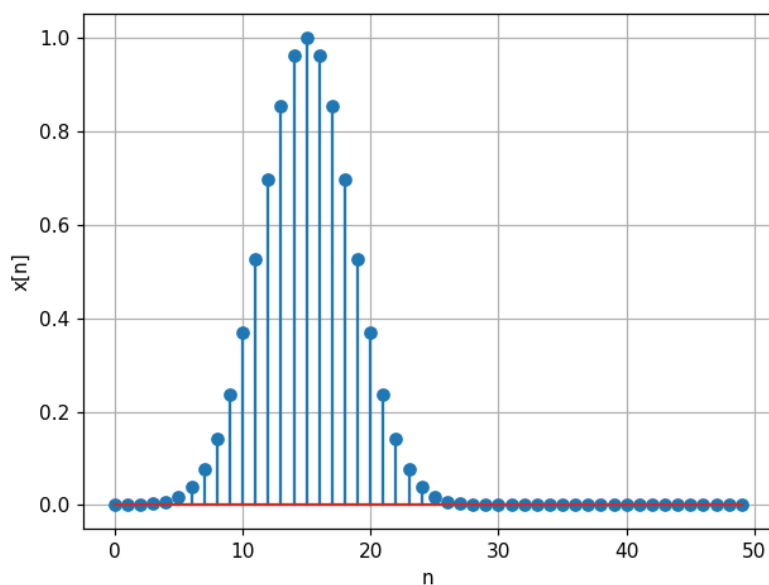


FIGURE 5.1 – exemple de signal numérique

5.1 Représentation temporelle

On a vu au chapitre précédent qu'un signal discret est noté : $x[n]$. Par convention, on le représentera par un ensemble d'échantillons comme l'illustre la figure 5.1.

Dans la suite du document, plusieurs signaux reviennent souvent et sont à connaître :

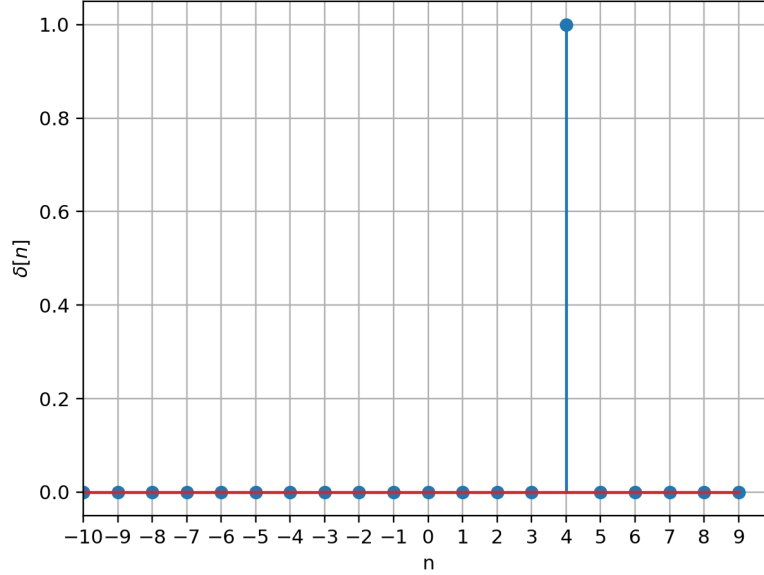


FIGURE 5.2 – fonction impulsion : $\delta[n]$

— l'impulsion, il s'agit de la version "discrète" de la fonction généralisée de Dirac :

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Un exemple est donné à la figure 5.2 pour $n_0 = 4$

— la fonction échelon :

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Un exemple est donné à la figure 5.3.

— la fonction porte :

$$\Pi_{[n_1:n_2]}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n_1 \leq n \leq n_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Un exemple est donné à la figure 5.4 pour $n_1 = 0$ et $n_2 = 4$.

Ces signaux sont à la base de beaucoup d'autres signaux. Par exemple, la figure 5.5 présente le signal $x[n] = \Pi_{[-4:4]} \sin(\frac{\pi n}{4})$ construit à partir des signaux de base. Bien entendu, les signaux que nous allons étudier peuvent être plus complexes. Par exemple, la figure 5.6 rassemble les mesures (une par jour) de la température à Berlin depuis 1876. Cette évolution est naturellement représentée par un signal discret puisque les mesures ne sont pas faites en continu mais sont journalières, la fréquence d'échantillonnage est $f_e = 1/(24 \times 3600) \approx 1.16e^{-6}\text{Hz}$. Des caractéristiques utiles et facilement accessibles sont :

— la valeur moyenne définie par :

$$x_{\text{moy}} = \langle x[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (5.4)$$

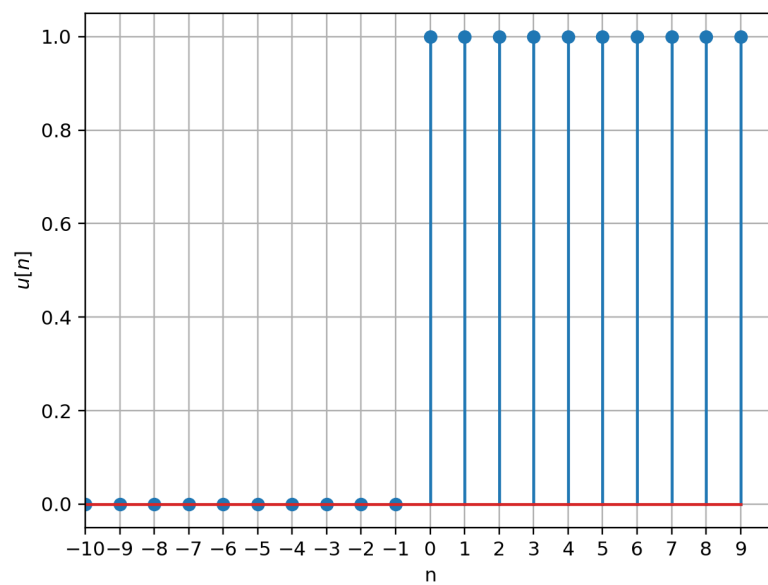


FIGURE 5.3 – fonction échelon : $u[n]$

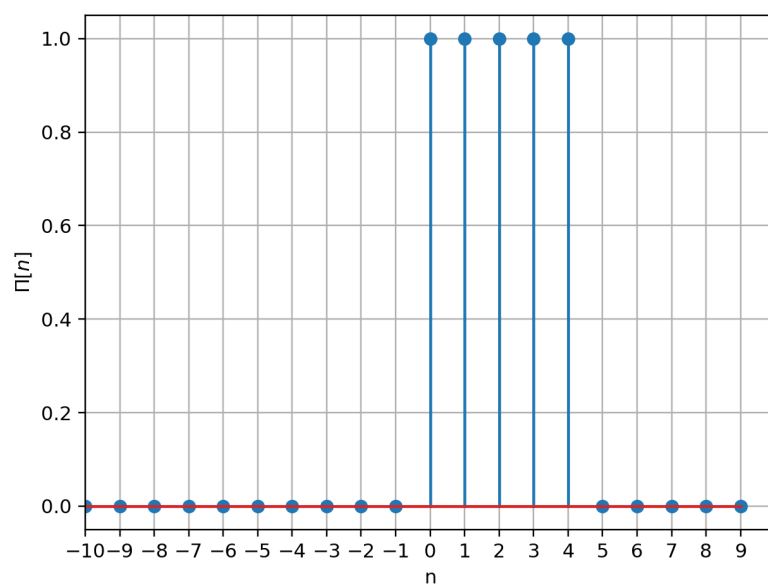


FIGURE 5.4 – fonction porte : $\Pi[n]$

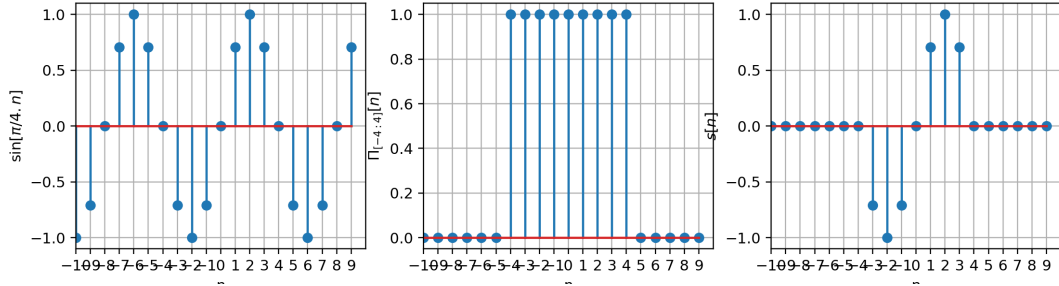


FIGURE 5.5 – (a) fonction sinus, (b) fonction porte : $\Pi[n]$, (c) produit de la fonction sinus et de la fonction porte

— la valeur efficace définie par :

$$x_{rms} = \sqrt{\langle |x[n]|^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2} \quad (5.5)$$

Concernant l'évolution de la température journalière, on trouve : $x_{moy} = 9.15^\circ\text{C}$ et $x_{rms} = 11.98^\circ\text{C}$.

5.2 La Transformée de Fourier des Signaux Discrets - TFSD

Lorsqu'on travaille avec des signaux numériques, on ne peut plus utiliser la transformée de Fourier vue au premier chapitre qui est un outil dédié aux signaux analogiques (fonctions continues). Pour cela, on introduit la Transformée de Fourier pour les Signaux Discrets (TFSD).

Définition 5.2.1 (Transformée de Fourier des Signaux Discrets)

On appelle TFSD de $x[n]$, la fonction $X(e^{2j\pi f T_e})$ telle que :

$$X(e^{2j\pi f T_e}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] e^{-2j\pi f n T_e} \quad (5.6)$$

avec f la fréquence en Hertz, et F_e la fréquence d'échantillonnage ($F_e = 1/T_e$ où T_e est la période d'échantillonnage (i.e. le pas de temps entre deux échantillons)).

Cette définition appelle plusieurs remarques :

- la notation $X(e^{2j\pi f T_e})$ peut sembler compliquée et pourrait être abrégée en $X(f)$, toutefois, le choix est fait de noter à chaque fois la TFSD $X(e^{2j\pi f T_e})$ pour ne pas la confondre avec la TZ que l'on verra au prochain chapitre,
- f est une variable continue (pas d'échantillons) ;
- $x[n]$ est un signal numérique (échantillons) ;
- $X(e^{2j\pi f T_e})$ est une fonction continue de f ;
- $X(e^{2j\pi f T_e})$ est une fonction périodique de période F_e : $X(f + F_e) = X(f)$;
- en général, du fait de la périodicité, on restreint la représentation de $X(e^{2j\pi f T_e})$ en prenant f sur l'intervalle $[0, F_e[$ ou $[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}[$

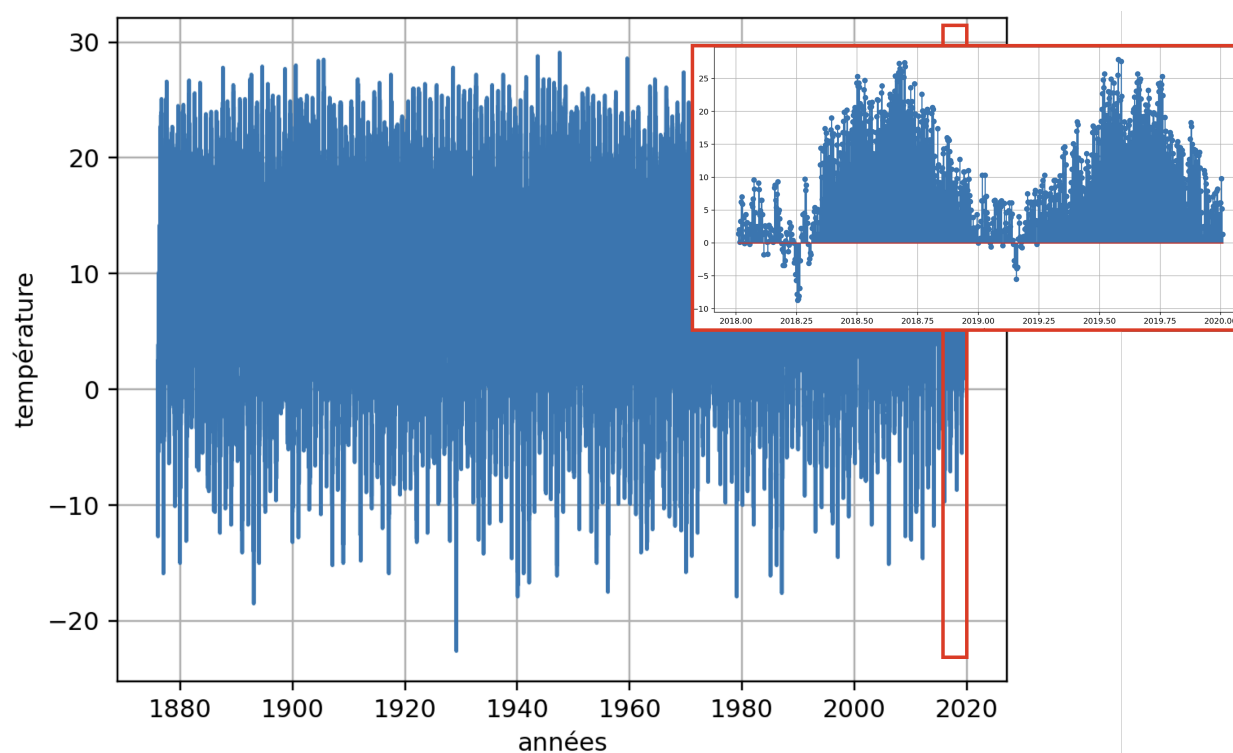


FIGURE 5.6 – Evolution de la température journalière à Berlin depuis 1876 (Klein Tank, A.M.G. and Coauthors, 2002. Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the European Climate Assessment. *Int. J. of Climatol.*, 22, 1441-1453.)

D'après cette définition, on constate que la TFSD est en fait la décomposition en série de Fourier de la fonction $X(e^{2j\pi f T_e})$ (sous sa forme complexe, cf prop. 2.2.10). Les coefficients de la décomposition permettent de calculer les $x[n]$ à partir des $X(e^{2j\pi f T_e})$:

$$x[n] = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(e^{2j\pi f T_e}) e^{2j\pi f n T_e} df \quad (5.7)$$

Cette formule permet de définir la TFSD inverse. Cette formule est cohérente avec le chapitre sur l'échantillonnage puisqu'on retrouve qu'une suite de valeurs discrètes en temps correspond à une fonction continue mais périodique en fréquences.

Le lien entre la TFSD et la TFSC (Transformée de Fourier des Signaux Continus - "Transformée de Fourier classique") est donné par le théorème de l'échantillonnage :

$$x(t) \xrightarrow{\text{TFSC}} X(f) \quad (5.8)$$

$$x_e(t) = x(t) \cdot \text{III}(t) = x[n] \xrightarrow{\text{TFSD}} X_e(e^{2j\pi f T_e}) \quad (5.9)$$

D'après le théorème de l'échantillonnage :

$$X_e(e^{2j\pi f T_e}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (5.10)$$

$$= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) \quad (5.11)$$

Cette dernière formule fait apparaître explicitement le lien entre TFSC et TFSD. La TFSD s'obtient à partir de la TFSC en effectuant les opérations suivantes :

- on normalise la TFSC par le facteur F_e ;
 - on périodise la fonction avec la période F_e .
- On obtient la TFSC à partir de la TFSD en faisant les opérations suivantes :
- On normalise par le facteur T_e ;
 - on limite la bande de fréquences entre $-F_e/2$ et $F_e/2$.

La TFSD apparaît comme l'outil naturel pour les signaux à temps discrets. Tout comme la TFSC, la TFSD possède les propriétés de linéarité, translation dans le temps et de convolution.

Propriété 5.2.1 (Linéarité de la TFSD)

$$\lambda x_1[n] + \mu x_2[n] \xrightarrow{\text{TFSD}} \lambda X_1(e^{2j\pi f T_e}) + \mu X_2(e^{2j\pi f T_e})$$

Propriété 5.2.2 (Translation dans le temps- déphasage)

$$x[n - n_0] \xrightarrow{\text{TFSD}} X(e^{2j\pi f T_e}) e^{-2j\pi f T_e n_0}$$

Propriété 5.2.3 (Symétrie hermitienne)

Soit $x[n]$ un signal numérique réel, alors $X(f) = X(-f)^*$

Définition 5.2.2

Produit de convolution discret On appelle produit de convolution discret entre les signaux numériques

$x[n]$ et $y[n]$, l'opération suivante :

$$g[n] = x[n] * y[n] = \sum_k x[k]y[n-k], \quad (5.12)$$

Propriété 5.2.4 (*Théorème de convolution*)

La TFSD du produit de convolution discret (définition 5.2.2) de deux signaux numériques est le produit des deux TFSD :

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{\text{TFSD}} X(e^{2j\pi f T_e}) Y(e^{2j\pi f T_e})$$

Démonstration :

$$\text{TFSD}(x[n] * y[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] * y[n] e^{-2j\pi f n T_e} \quad (5.13)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] e^{-2j\pi f n T_e} \quad (5.14)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k] e^{-2j\pi f n T_e} \quad (5.15)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] e^{-2j\pi f (m+k) T_e} \quad (5.16)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-2j\pi f k T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] e^{-2j\pi f m T_e} \quad (5.17)$$

$$= X(e^{2j\pi f T_e}) Y(e^{2j\pi f T_e}) \quad (5.18) \quad \blacksquare$$

Propriété 5.2.5 (*Théorème de Parseval*)

Soient $x[n]$ un signal discret et $X(e^{2j\pi f T_e})$ sa TSFD, on a alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} |X(e^{2j\pi f T_e})|^2 df.$$

Démonstration : On commence par établir la relation suivante :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-F_e/2}^{F_e/2} Y^*(e^{2j\pi f T_e}) e^{-2j\pi f n T_e} df \quad (5.19)$$

$$= \int_{-F_e/2}^{F_e/2} Y^*(e^{2j\pi f T_e}) \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2j\pi f n T_e} df \quad (5.20)$$

$$= \int_{-F_e/2}^{F_e/2} Y^*(e^{2j\pi f T_e}) X(e^{2j\pi f T_e}) df \quad (5.21)$$

puis, on prend $y[n] = x[n]$; il vient immédiatement le résultat énoncé :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} |X(e^{2j\pi f T_e})|^2 df.$$

■

5.3 La Transformée de Fourier Discrète - TFD

La TFSD vue dans la partie précédente, ne peut pas être calculée sur ordinateur car c'est une fonction continue. L'utilisation de calculateur impose d'introduire un nouvel outil qui ne s'appliquerait qu'aux signaux discrets tel que :

$$x[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X[k]$$

où $x[n]$ est une suite d'échantillons en temps (n indice les temps) et $X[k]$ une suite d'échantillons en fréquences (k indice les fréquences). Pour cela, il faut discrétiser les variables continues temps et fréquences. On découpe alors l'axe des temps en N échantillons régulièrement répartis et on divise l'axe des fréquences en K échantillons :

- discrétisation de l'axe des temps : $n \in [0, N-1]$, $T_e = 1/F_e$, $t[n] = nT_e$ et $t \in [0; (N-1)T_e]$
- discrétisation de l'axe des fréquences : $k \in [0; K-1]$, $\Delta f = F_e/K$, $f[k] = k\Delta f = \frac{kF_e}{K}$ et $f \in [0; F_e[$

Définition 5.3.1

TFD : Transformée de Fourier Discrète

On appelle Transformée de Fourier Discrète la transformation reliant les suites $x[n]$ et $X[k]$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2j\pi nk}{K}} \quad (5.22)$$

Définition 5.3.2

TFD inverse : Transformée de Fourier Discrète inverse

On appelle Transformée de Fourier Discrète inverse, la transformation reliant les suites $X[k]$ et $x[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} X[k] e^{\frac{2j\pi nk}{K}} \quad (5.23)$$

On voit ainsi les similitudes avec la TFSD, en particulier on constate que :

- on modifie les bornes de la somme (tout se passe comme si on multiplie $x[n]$ par une fonction porte) ;
- on discrétise l'axe des fréquences (on prélève des échantillons sur l'axe des fréquences)
- $w_K = e^{-\frac{2j\pi}{K}}$ est une racine $K^{\text{ième}}$ de l'unité.

La TFD apparait comme étant la TFSD calculée en un point particulier : $f = F_e k/K$ car dans ce cas $X[k] = X(f)$. Par conséquent, la TFD est l'outil numérique permettant de calculer de façon opérationnelle la Transformée de Fourier des Signaux Discret. Cette propriété est essentielle et justifie le fait qu'on utilise la TFD pour calculer la TFSD. On fait ensuite le lien entre TFSD et TFSC avec les relations exposées au paragraphe précédent.

En pratique, pour le calcul de la TFD, on s'arrange pour que le nombre d'échantillons fréquentiels soit supérieur ou égal au nombre d'échantillons temporels : $K \geq N$. On vient ensuite compléter les échantillons temporels par des zéros de sorte que les calculs sont faits pour K points en temps et en

fréquences :

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si } n \leq N-1, \\ 0 & \text{si } K-1 \geq n \geq N. \end{cases} \quad (5.24)$$

En effet, dans ce cas les TFD de $x[n]$ et de $x_2[n]$ sont égales :

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{K-1} x[n] w_K^{nk} \quad (5.25)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_K^{nk} \quad (5.26)$$

$$= X[k]. \quad (5.27)$$

Cette opération s'appelle faire du *zero padding*.

Enfin, remarquons que, d'après la définition (Eq. 5.22) la fréquence nulle ($k = 0$) de la transformée de Fourier discrète est directement reliée à la moyenne du signal numérique :

$$X[k = 0] = N \cdot x_{moy} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (5.28)$$

Tout comme la TFSC et la TFSD, la Transformée de Fourier discrète possède certaines propriétés :

Propriété 5.3.1

Linéarité de la TFD

$$\lambda x_1[n] + \mu x_2[n] \xrightarrow{\text{TFD}} \lambda X_1[k] + \mu X_2[k]$$

Propriété 5.3.2 (*Translation dans le temps- déphasage*)

$$x[n - n_0] \xrightarrow{\text{TFD}} e^{-\frac{2j\pi n_0 k}{K}} X[k]$$

Le théorème de convolution existe également pour cette transformée. Toutefois, comme nous l'avons vu, le nombre d'échantillons composant les signaux (en temps ou en fréquence) est limité. Par conséquent, le produit de convolution discret tel que défini par la relation 5.2.2 n'a plus de sens. Il faut définir un nouveau produit de convolution.

Définition 5.3.3

Produit de convolution circulaire On appelle produit de convolution circulaire l'opération entre les signaux $x[n]$ et $y[n]$ avec $n \in [0; N-1]$ telle que :

$$z[n] = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] y[n - p] \quad (5.29)$$

où les indices sont calculés modulo N

Rappel sur la notation **modulo** :

L'opération modulo N consiste à faire une permutation circulaire des indices. Soit la suite $x[n]$ telle que $x[n] = \{x[1], x[2], x[3], x[4]\}$. On a donc $N = 4$. Si les propriétés ou résultats s'appliquant à la suite $x[n]$ sont dits modulo N cela signifie que la suite notée $x[n - 2]$ est $x[n - 2] = \{x[3], x[4], x[1], x[2]\}$.

Propriété 5.3.3

Théorème de convolution pour la TFD

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{TFD} X[k]Y[k]$$

où les indices sont calculés modulo N

Propriété 5.3.4 (*Symétrie hermitienne*)

si $x[n]$ est un signal numérique réel, alors $X[k] = X^*[-k]$

Démonstration : par définition :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}$$

et donc,

$$X^*[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{\frac{2j\pi n(-k)}{N}}$$

comme $x[n]$ est un signal numérique réel : $x^*[n] = x[n]$ et donc

$$X^*[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{2j\pi n(-k)}{N}} = X[k]$$

■

Propriété 5.3.5 (*Théorème de Parseval*)

Soit $x[n]$ un signal numérique et $X[k]$ sa TFD, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} |X[k]|^2$$

Démonstration : On commence par établir la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} Y^*[k] e^{-\frac{2j\pi nk}{K}} \quad (5.30)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} Y^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2j\pi nk}{K}} \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} Y^*[k] X[k] \quad (5.32)$$

Ensuite, en choisissant $y[n] = x[n]$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} |X[k]|^2$$

■

On voit donc qu'on peut relier la valeur efficace définie précédemment (eq. 5.5) à la transformée de Fourier discrète :

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{K-1} |X[k]|^2 \quad (5.33)$$

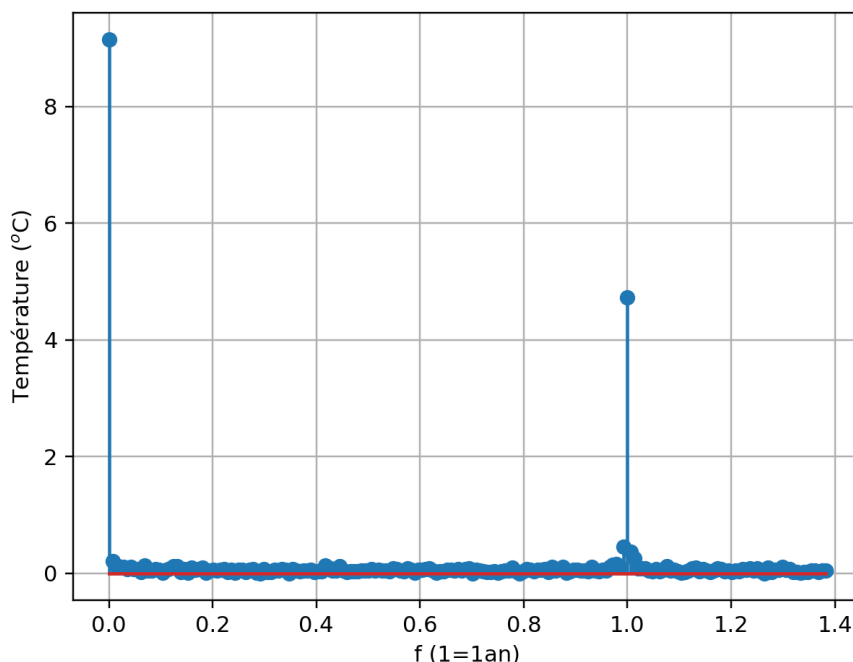


FIGURE 5.7 – Spectre de l'évolution de la température journalière à Berlin. L'axe des fréquences est normalisé tel que 1 corresponde à une fréquence de 1 an.

La FFT

La FFT ou *Fast Fourier Transform* est un algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier discrète. C'est cet algorithme introduit en 1965 par Cooley et Tuckey qui est utilisé (avec des versions plus ou moins optimisées) dans la plupart des logiciels faisant appel aux transformées de Fourier. Son succès repose sur le fait qu'il nécessite $N \log N$ opérations alors qu'un calcul classique de la TFD requiert N^2 opérations (si $N = 1024$ alors $N \log N \approx 3083$ opérations et $N^2 = 1048576$ opérations). Notons que la plupart des algorithmes de FFT nécessite de travailler avec un nombre d'échantillons égal à une puissance de 2 ($N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 512, 1024, 2048, \dots$). Pour atteindre ce nombre d'échantillons on a recours à l'utilisation de la technique de *zero-padding* exposée précédemment.

L'utilisation de la FFT pour calculer la TFD de l'évolution journalière de la température à Berlin (cf. figure 5.6) permet d'obtenir la figure 5.7. On constate que ce spectre contient deux pics. Le premier à la fréquence nulle correspond à la température moyenne (cf eq. 5.4) d'environ 9.15°C . Le deuxième pic, se produit pour une fréquence 1 qui correspond à une période de 1 an. Il s'agit de la périodicité du phénomène : les températures varient sur un cycle d'un an.

5.3.1 Résolution et précision

La résolution et la précision sont deux notions distinctes :

- la résolution est la capacité à séparer deux fréquences proches l'une de l'autre ;
- la précision est la capacité de calculer la fréquence exacte d'un pic.

Exemple 5

FFT et résolution spectrale

Cet exemple est tiré de "Signal déterministe et aléatoire" de A. Quinquis (ex SD20). On veut calculer la FFT d'un signal avec une résolution d'au moins 5 Hz. On suppose que le spectre du signal analogique ne contient pas de fréquence au dessus de 1.25kHz

1. Quelle est la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage ?
2. Quel est alors le nombre de points contenu dans le signal ?
3. Pour cette valeur de la fréquence d'échantillonnage, quelle est la durée minimale du signal à traiter ?
4. Faut-il faire du zero-padding si on dispose de signaux de durée :
 - (a) $T_{tot} = 150\text{ms}$,
 - (b) $T_{tot} = 300\text{ms}$.

Eléments de réponse :

1. La fréquence d'échantillonnage minimale est : $F_e = 2F_M = 2 \times 1.25\text{kHz} = 2.5\text{kHz}$.
2. Pour que la résolution spectrale soit $\Delta f = 5\text{Hz}$ avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 2.5\text{kHz}$, le nombre de points est : $\Delta F = F_e/N$ soit $N = F_e/\Delta F$, $N = 500$ points.
3. la durée du signal est donc : $T_{tot} = NT = N/F_e = 500/2500 = 0.2\text{s}$
4. (a) Si la durée du signal est de 150ms alors il possède que 375 échantillons, ce qui n'est pas suffisant pour obtenir la résolution spectrale demandée : $\Delta F = F_e/N = 6,66\text{Hz}$, et ce même en faisant du zero-padding (il faut soit diminuer la fréquence d'échantillonnage (risque de repliement) ou augmenter la période d'acquisition.
- (b) Si la durée du signal est de 300ms, le nombre d'échantillons $N = 750$ est suffisant. On fera du zero-padding pour atteindre un nombre d'échantillon égal à 1024.

Chapitre 6

Analyse des systèmes discrets : la transformée en Z

Ce chapitre est consacré à la transformée en Z.

6.1 La transformée en Z

6.1.1 Définition et premiers exemples

Définition 6.1.1 (*La transformée en z*)

On appelle transformée en z du signal discret $x[n]$, la fonction complexe :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},$$

avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |z| < R_2$.

D'après la définition, le domaine de convergence de cette série est une couronne dans le plan complexe. Les valeurs de R_1 et R_2 dépendent bien entendu de $x[n]$.

Exemple 6 (*TZ de la fonction impulsion*)

On rappelle que :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} TZ(\delta[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le domaine de convergence de la transformée en z de la fonction impulsion est donc \mathbb{C} .

Exemple 7 (*TZ de la fonction échelon (ou fonction de Heavyside)*)

On rappelle que :

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

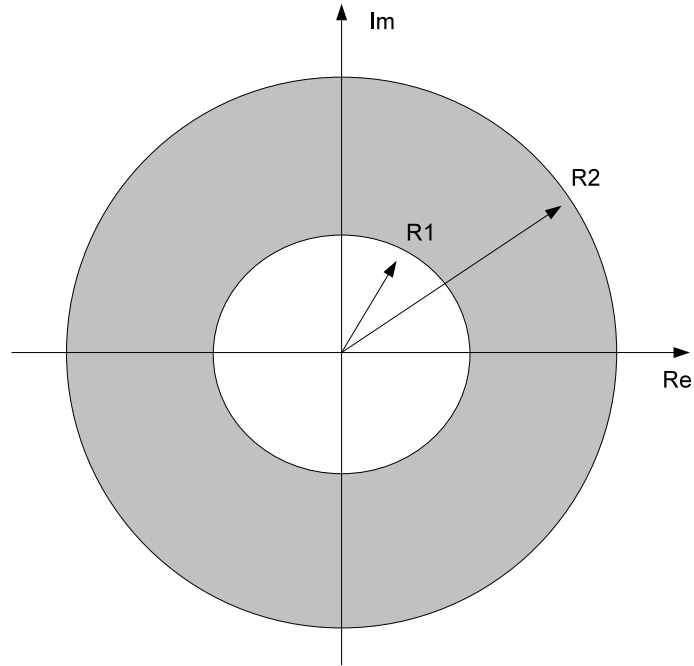


FIGURE 6.1 – Illustration du domaine de convergence en forme de couronne dans le plan complexe pour la transformée en Z

Par conséquent,

$$\begin{aligned} TZ(u[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \end{aligned}$$

En restreignant l'étude aux cas où $|z| > 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

Pour établir ce résultat on a utilisé la propriété de sommation des séries géométriques :

$$S_M = \sum_{n=0}^M ax^n = a \frac{1 - x^{M+1}}{1 - x}, \text{ avec } x \in \mathbb{C} \text{ ou } x \in \mathbb{R}$$

Définition 6.1.2 (Zéros et Pôles)

Les points tels que $X(z) = 0$ sont appelés les zéros.

Les points tels que $X(z) \rightarrow +\infty$ sont appelés les pôles.

6.1.2 Propriétés essentielles

Propriété 6.1.1 (*Linéarité*)

La transformée en Z d'une combinaison linéaire et la combinaison linéaire des transformées en Z :

$$TZ(ax[n] + by[n]) = aX(z) + bY(z) \quad (6.1)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TZ(ax[n] + by[n]) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax[n] + by[n])z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} \\ &= aX(z) + bY(z) \end{aligned}$$

■

Propriété 6.1.2 (*Décalage*)

L'opération de décalage de n_0 indices dans le domaine temporel est équivalent à multiplier la transformée en Z par z^{-n_0} dans le plan complexe :

$$TZ(x[n - n_0]) = z^{-n_0}X(z) \quad (6.2)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TZ(x[n - n_0]) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0]z^{-n} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x[p]z^{-(p+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x[p]z^{-p} \\ &= z^{-n_0}X(z) \end{aligned}$$

■

Propriété 6.1.3 (*Transformée en z inverse*)

Soit Γ un contour fermé contenant tous les points singuliers de $X(z)$ ainsi que l'origine. Les échantillons $x[n]$ peuvent se déduire de la fonction $X(z)$ par la relation :

$$x[n] = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} z^{n-1} X(z) dz \quad (6.3)$$

Propriété 6.1.4 (*Produit de convolution*)

Soit la relation de convolution :

$$g[n] = x[n] * y[n] = \sum_k x[k]y[n - k],$$

la transformée en Z de cette relation est alors :

$$G(z) = X(z)Y(z) \quad (6.4)$$

Propriété 6.1.5 (*Produit simple*)

Soit la suite $y[n]$ définie comme le produit des suites $x_1[n]$ et $x_2[n]$:

$$y[n] = x_1[n].x_2[n],$$

la transformée en Z de cette relation est alors :

$$Y(z) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} X_1(u)X_2\left(\frac{Z}{u}\right) du. \quad (6.5)$$

Propriété 6.1.6 (*Relation entre la TZ et la TFSD*)

D'après la définition de la TZ (def. 6.1.1), la TFSD est un cas particulier de la TZ pour lequel $z = e^{2j\pi fT_e}$, i.e. lorsqu'on parcourt le cercle unité $|z| = 1$.

6.2 Systèmes discrets linéaires et invariants par translation dans le temps

6.2.1 Définition

On appelle système discret ou filtre, un système S tel qu'un signal discret $x[n]$ (appelé entrée numérique) est transformé en un autre signal numérique $y[n]$ (appelé sortie numérique)

$$x[n] \rightarrow S \rightarrow y[n] \quad (6.6)$$

On appelle système discret linéaire un système vérifiant les relations :

$$x_1[n] \rightarrow S \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow S \rightarrow y_2[n]$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow S \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

On appelle système discret invariant par translation dans le temps, un système qui vérifie les relations :

$$x[n] \rightarrow S \rightarrow y[n]$$

$$x[n - n_0] \rightarrow S \rightarrow y_1[n - n_0]$$

On appelle système discret linéaire et invariant dans le temps un système qui est à la fois linéaire et invariant par translation dans le temps. Dans la suite de ce cours, nous traiterons uniquement ces systèmes.

6.2.2 Relation de convolution et fonction de transfert

6.2.2.1 Relation de convolution

Un système linéaire et invariant par translation dans le temps peut se mettre sous la forme :

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (6.7)$$

avec $x[n]$ l'entrée, $y[n]$ la sortie, $h[n]$ la réponse impulsionnelle et $*$ le produit de convolution discret déjà utilisé lors de l'analyse des signaux discrets.

Cette relation (Eq. 6.7) est l'équation fondamentale qui caractérise les systèmes discrets LIT.

6.2.2.2 Fonction de transfert

On appelle fonction de transfert du filtre, la transformée en z de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = TZ(h[n]) \quad (6.8)$$

6.2.2.3 Equation récurrente

Considérons un filtre numérique LIT. Supposons que la relation entrée/sortie de ce filtre soit de type équation récurrente :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_P y[n-P] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_N x[n-N].$$

Compte tenu des diverses propriétés vues dans le paragraphe précédent, la transformée en z de cette équation s'écrit :

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_P z^{-P} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_N z^{-N} X(z)$$

On peut factoriser cette équation et l'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

où $H(z)$ est définie par :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}.$$

Ainsi, on constate que la TZ permet de montrer qu'une équation récurrente est un cas particulier de la convolution puisqu'on peut écrire une relation entrée/sortie (dans l'espace des z) du même type que pour la convolution.

Nous retiendrons que quelque soit la représentation du filtre (RIF, RII, convolution), dans l'espace des z , la relation fondamentale s'écrit :

$$Y(z) = H(z) X(z),$$

où $X(z)$ désigne la transformée en z du signal d'entrée $x[n]$, $Y(z)$ est la transformée en z du signal de sortie $y[n]$ et où $H(z)$ est la fonction de transfert en z du filtre. Cette fonction contient les informations sur le comportement du système.

6.2.3 Causalité et stabilité d'un système LIT

Définition 6.2.1 (*Causalité*)

Un filtre numérique LIT est dit **causal** si la sortie à l'échantillon n_0 $y[n_0]$ ne dépend que des entrées aux indices $n < n_0$

Propriété 6.2.1 (*Causalité à partir de la réponse impulsionnelle*)

Une condition pour qu'un filtre numérique LIT soit causal est que la réponse impulsionnelle soit nulle pour tous les échantillons négatifs :

$$h[n] = 0 \text{ pour } n < 0. \quad (6.9)$$

Démonstration : La relation fondamentale d'un filtre numérique LIT est :

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

En développant le produit de convolution, il vient :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[+1]x[n-1] + \dots \end{aligned}$$

D'après la définition de la causalité il faut que $h[n] = 0$ si $n < 0$ pour $y[n]$ ne dépende pas d'échantillon futur. ■

Propriété 6.2.2 (*Causalité à partir de la fonction de transfert*)

Le filtre est causal si le rayon extérieur de l'anneau de convergence de $H(z)$ tend vers l'infini ($R_2 \rightarrow +\infty$).

Démonstration : On rappelle que la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u[n]$ est assurée à condition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u[n]|^{1/n} < 1$.

Décomposons la transformée en z en une partie causale et une autre anti-causale :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n},$$

Examinons à présent la TZ de la partie causale :

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n},$$

cette série converge si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x[n]z^{-n}|^{1/n} < 1, \quad (6.10)$$

par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x[n]|^{1/n} |z^{-1}| < 1, \quad (6.11)$$

Introduisons

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x[n]|^{1/n}. \quad (6.12)$$

Cette série converge si :

$$R_1 < |z| \quad (6.13)$$

Examinons, à présent, la TZ de la partie anti-causale :

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}, \quad (6.14)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x[-n]z^n. \quad (6.15)$$

La série converge si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x[-n]z^n|^{1/n} < 1, \quad (6.16)$$

Introduisons

$$R_2 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |x[-n]|^{1/n} \right)^{-1} \quad (6.17)$$

La série $X_1(z)$ converge si : $z < R_2$.

Par conséquent, la TZ de $x[n]$ sera une série convergente si : $R_1 < |z| < R_2$. Compte tenu des définitions de R_1 et R_2 , on constate que si la fonction de transfert est causale alors $R_2 \rightarrow +\infty$. ■

Définition 6.2.2 (*Stabilité*)

Un filtre numérique LIT est dit **stable** si à toute entrée bornée $x[n]$ correspond une sortie bornée $y[n]$.

Propriété 6.2.3 (*Stabilité à partir de la réponse impulsionnelle*)

Une condition nécessaire et suffisante pour que le filtre soit stable est que :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < +\infty$$

Démonstration : Démontrons d'abord que la condition est nécessaire.

Pour cela, on choisit un cas particulier comme signal d'entrée : $x[n] = 1$ si $h[-n] \geq 0$ et $x[n] = -1$ si $h[-n] < 0$. Remarquons que ce signal particulier est borné. Si le système est stable, alors la sortie doit être bornée. On a la relation

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m]$$

Pour $n = 0$, on a :

$$y[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[-m]x[m]$$

compte tenu du signal d'entrée choisi :

$$y[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]|$$

par conséquent, il est nécessaire que $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < M$ pour que la sortie du système soit bornée.

Montrons à présent que cette condition est suffisante. Considérons une entrée bornée :

$$|x[n]| < M$$

Alors d'après la relation de convolution : $y[n] = h[n] * x[n]$, on a :

$$|y[n]| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| |x[n-m]| \leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]|$$

■

Propriété 6.2.4 (*Stabilité à partir de la fonction de transfert*)

Le filtre est stable si le cercle unité appartient au domaine de convergence de la fonction de transfert en z

Démonstration : La fonction de transfert en z s'écrit :

$$H(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (6.18)$$

Le module doit donc satisfaire la relation suivante :

$$|H(z)| = \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \right| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| |z^{-n}| \quad (6.19)$$

Evaluons cette expression sur le cercle unité : $|z| = 1$:

$$H(|z| = 1) \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]|, \quad (6.20)$$

On en déduit que si le filtre est stable : alors la fonction de transfert sur le cercle unité est bornée, ce qui revient à dire qu'elle est contenue dans le domaine de convergence (sans quoi elle ne serait pas bornée). ■

Propriété 6.2.5 (*Stabilité et Causalité*)

Le filtre est stable et causal si tous les pôles de $H(z)$ sont compris à l'intérieur du cercle unité.

Démonstration : En combinant les propriétés sur la causalité et la stabilité on obtient immédiatement que le filtre est stable et causal si tous les pôles de $H(z)$ sont compris à l'intérieur du cercle unité. ■

6.2.4 Les filtres RII et RIF

à suivre ...