Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 24 Octobre 2016

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donnez la définition d'une équation aux dérivées partielles linéaire. Donnez un exemple d'équation aux dérivées partielles non-linéaire.
2. Pour l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

   déterminer les points du plan (x, y) où cette équation est parabolique.
3. Décrivez le comportement d'une singularité pour un problème hyperbolique, puis parabolique.
4. Donnez un exemple de problème de Cauchy que vous avez étudié en cours et pour lequel la solution ne se propage pas à une vitesse finie.
5. Soit le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty] \qquad (1)\\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Quel est le domaine de dépendance de la solution u au point $(0,2)$?
6. Donnez la définition de la fonction de Green pour l'équation de la chaleur $1D$. Précisez son comportement pour différents temps t.

Exercice 1

Soit l'équation aux dérivées partielles : $2u_{xx} + 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.
(a) De quelle type d'équation s'agit-t-il ?
(b) Effectuer une factorisation de l'opérateur linéaire d'ordre deux associé à l'équation en deux opérateurs linéaires d'ordre un puis trouver la solution générale.
(c) Déterminer la solution u sachant qu'elle vérifie les conditions auxiliaires $u(x,0) = x^2$ et $u_y(x,0) = x$.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4u_{tt}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ u(x,0) &= e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) &= xe^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

1. Déterminer la solution $u(x,t)$ du problème.
2. Expliquer l'évolution (en temps) de cette solution. Pour ce faire, vous pouvez comparer $u(x,0)$, $u(x,2)$, $u(x,4)$, ...

Exercice 3
Résoudre l'équation de la chaleur avec dissipation constante :

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} + bt^2 u &= 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \Phi(x), \end{aligned}$$

où b est un réel positif. On pourra poser $u(x,t) = e^{-bt^3/3} v(x,t)$.

Exercice 4 (*Bonus*)
Soit une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifie l'equation des ondes suivante :

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{2}$$

On pose :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_t^2\right) \qquad \left(\textit{Attention : } u_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$p(x,t) = u_t(x,t) u_x(x,t)$$

(a) Montrer que $e_t(x,t) = p_x(x,t)$ et que $e_x(x,t) = p_t(x,t)$. En déduire que e et p sont également solutions de (2).
(b) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $u(x,t)$ et $u_t(x,t)$ sont nulles pour tout $x \notin [-R, R]$. Montrer que pour chaque t, il existe un réel $R(t)$ telle que $u(x,t)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$.
(c) Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e_t(x,t)\mathrm{d}x = 0$. Donner une interprétation physique de ce résultat.