2A002, Bases de Thermodynamique

Mardi 16 janvier 2018 – Durée : 2 heures.
Tout document interdit. Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1 – Cycle de Carnot

L'objet de cet exercice est d'étudier un moteur thermique fonctionnant au moyen d'un gaz constituant un système fermé et effectuant un cycle de Carnot entre deux sources de températures T_c et T_f avec $T_c > T_f$. Le cycle est composé d'une compression isotherme AB à température T_f, puis d'une compression adiabatique BC, puis d'une détente isotherme CD à température T_c et enfin d'une détente adiabatique DA. Toutes ces transformations sont considérées comme réversibles.
Les données sont : V_A, V_B, T_f, T_c, et le nombre de moles effectuant le cycle n. La constante universelle des gaz parfaits est notée R.

I) Etude avec un gaz parfait *(barème indicatif : 20 points)*
Le gaz est un gaz parfait de constante $\gamma = 1,4$ donnée.

1. Donner l'expression des pressions p_A et p_B en fonction des données.
2. Donner l'allure du cycle sur un diagramme de Clapeyron p(V). Préciser l'équation de la courbe décrivant chaque transformation du cycle.
3. Exprimer les volumes V_C et V_D en fonction de V_A, V_B, T_c, T_f et γ.
4. Exprimer la quantité de chaleur Q_{CD} échangée entre le système (gaz) et la source chaude (milieu extérieur) en fonction des données. Préciser son signe. Exprimer aussi la quantité de chaleur Q_{AB} échangée entre le système (gaz) et la source froide.
5. Exprimer le travail total W_{cycle} échangé entre le système et le milieu extérieur sur le cycle.
6. Quel est le signe de W_{cycle} ? S'agit-il d'un cycle moteur ou réfrigérateur ?
7. On définit le rendement $\eta = |W_{cycle}|/Q_{CD}$. Montrer à partir des questions précédentes que η peut s'exprimer en fonction des températures T_c et T_f uniquement.
8. Est-il possible, en passant par les mêmes états intermédiaires A, B, C, D dans un ordre différent, de constituer un cycle réfrigérateur ? Représenter l'allure de ce cycle sur un diagramme de Clapeyron. Préciser dans ce cas le signe de la quantité de chaleur échangée entre le système et la source chaude, de la quantité de chaleur échangée entre le système et la source froide, et du travail total échangé entre le système et le milieu extérieur.

II) Etude avec un gaz de Van der Waals *(barème indicatif : 20 points)*
On considère un gaz obéissant à l'équation d'état suivante

$$(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$

avec a et b donnés réels positifs, n le nombre de moles de gaz, R la constante universelle des gaz parfaits.
La quantité de chaleur élémentaire δQ échangée entre le gaz et le milieu extérieur lors d'une transformation réversible est exprimée sous la forme $\delta Q = n\bar{C}_v dT + l_v dV$. $\bar{C}_v$ est la capacité calorifique molaire du gaz, qui dépend a priori de T et V. De même l_v dépend a priori de T et de V.

9. Exprimer les variations élémentaires d'énergie interne dU et d'entropie dS du système en fonction de dT et dV au cours de cette transformation réversible. Après avoir justifié pourquoi c'est vrai, donner les conditions pour que dU et dS soient des différentielles totales exactes. En déduire que

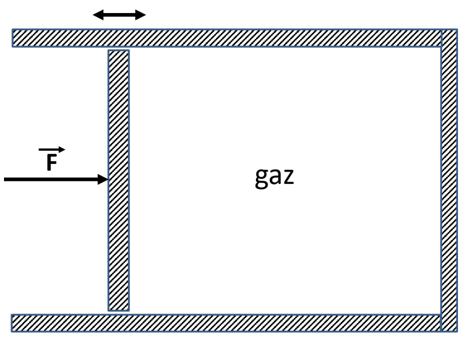
$$l_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \text{et} \qquad n\left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$$

10. En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer $l_v(T,V)$. Déterminer également $\bar{C}_v(T,V)$, sachant que à la limite des grands volumes, $\bar{C}_v$ tend vers $\frac{R}{(\gamma-1)}$ (avec $\gamma = 1,4$ comme dans la partie I de l'exercice) à toute température. Commenter ce dernier point.
11. En déduire l'expression de l'énergie interne $U(T,V)$ à une constante près.
12. Déterminer également l'expression de l'entropie $S(T,V)$ à une constante près. Montrer que pour une transformation adiabatique réversible, on a : $T(V-nb)^{\gamma-1} = constante$.

    Le système constitué du gaz ainsi défini parcourt un cycle de Carnot à partir de l'état A, défini par une compression isotherme AB' à la température froide T_f, une compression adiabatique $B'C'$, une détente isotherme $C'D'$ à la température chaude T_c et une détente adiabatique $D'A$, toutes les transformations étant réversibles, avec les mêmes données que précédemment : V_A, $V_{B'} = V_B$, T_f,T_c, et n le nombre de moles du système.
13. Donner l'expression de $V_{C'}$ et $V_{D'}$ en fonction des données.
14. Exprimer la quantité de chaleur $Q'_{C'D'}$ échangée entre le système (gaz) et la source chaude (milieu extérieur) en fonction des données, et la quantité de chaleur $Q'_{AB'}$ échangée entre le système et la source froide.
15. Exprimer le travail total W'_{cycle} échangé entre le système et le milieu extérieur sur le cycle.
16. Calculer le rendement du cycle η' avec le gaz de Van der Waals. Commenter ce résultat.

Exercice 2 – Compression adiabatique d'un gaz parfait *(barème indicatif : 20 points)*

Un cylindre aux parois rigides et adiabatiques, de section S, contient une masse m d'un gaz parfait de constantes r et γ données. Le cylindre est fermé par un piston adiabatique qui peut se déplacer horizontalement sans frottement. Initialement, le gaz est en équilibre à la température T_1, son volume est V_1, et sa pression p_1. On applique une force $\vec{F}$ au piston, de façon à comprimer le gaz jusqu'à la pression p_2 donnée.



Dans un premier cas, la force $\vec{F}$ augmente très progressivement de telle sorte que la transformation est réversible.
1. Exprimer à l'état final le volume V_2 et la température T_2 en fonction des données.
2. Exprimer le travail W échangé entre le système et le milieu extérieur en fonction de m, r, γ, T_1 et du rapport p_2/p_1.
3. Calculer, en justifiant les réponses, la variation d'entropie du système ΔS_{12}, l'entropie échangée S_{tr} et la production d'entropie S_{pr}.

    Dans un second cas, la force $\vec{F}$ est imposée brutalement et reste constante durant la transformation, de telle sorte que la transformation est irréversible, avec la pression extérieure constante égale à p_2.
4. En utilisant le premier principe, exprimer à l'état final la température $T_{2'}$ et le volume $V_{2'}$ en fonction des données.
5. Exprimer le travail W' échangé entre le système et le milieu extérieur en fonction de m, r, γ, T_1 et du rapport p_2/p_1.
6. En posant $x = p_2/p_1$, comparer T_2 et $T_{2'}$, puis comparer W et W'. Commentez les résultats.
7. Exprimer la variation d'entropie du système $\Delta S_{12'}$, l'entropie échangée S'_{tr} et la production d'entropie S'_{pr} en fonction de m, r, γ, et du rapport p_2/p_1. En posant $x = p_2/p_1$, trouver le signe de S'_{pr}. La transformation est-elle compatible avec le second principe ?

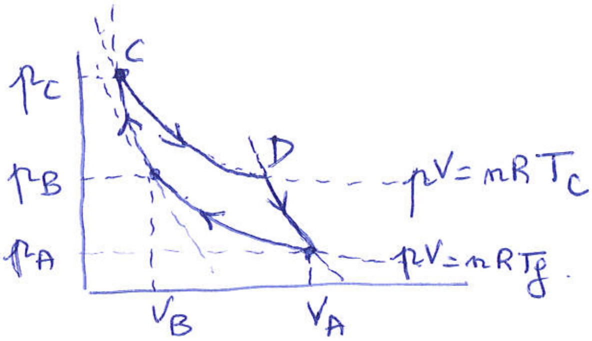
Exercice 1 ①

I

1) $p_A = \dfrac{nRT_A}{V_A}$ avec $T_A = T_f$ $\Rightarrow$ $p_A = \dfrac{nRT_f}{V_A}$

$p_B = \dfrac{nRT_B}{V_B}$ avec $T_B = T_f$ $\Rightarrow$ $p_B = \dfrac{nRT_f}{V_B}$

2)



AB : $pV = nRT_f$

BC : $pV^\gamma = p_B V_B^\gamma$

CD : $pV = nRT_C$

DA : $pV^\gamma = p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma$

3) $pV^\gamma = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_B \left(\frac{T_f}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = V_A \left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_A \left(\frac{T_f}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\Big\} \; \dfrac{V_C}{V_B} = \dfrac{V_D}{V_A}$

4) $$Q_{CD} = - W_{CD} = + \int_C^D p\,dV = + \int_C^D \frac{nRT_C\,dV}{V} = + nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} > 0$$

$$Q_{AB} = - W_{AB} = + nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A} \; (< 0)$$

5) $$W_{cycle} = \underbrace{\Delta U}_{= 0 \text{ (cycle)}} - Q_{AB} - \underbrace{Q_{BC}}_{=0} - Q_{CD} - \underbrace{Q_{DA}}_{=0}$$

$$= - nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} - nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A}$$ or $\dfrac{V_D}{V_C} = \dfrac{V_A}{V_B}$

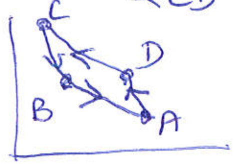
$$= - nRT_C \ln \frac{V_A}{V_B} - nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$W_{cycle} = + nR \underbrace{(T_C - T_f)}_{>0} \underbrace{\ln \frac{V_B}{V_A}}_{<0} = - nR (T_C - T_f) \ln \frac{V_A}{V_B} < 0.$$

6) cycle moteur. $W_{cycle} < 0$.

7) $$\eta = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{CD}} = \frac{\cancel{n}R (T_C - T_f) \cancel{\ln \frac{V_A}{V_B}}}{\cancel{n}R\, T_C \cancel{\ln \frac{V_A}{V_B}}} = 1 - \frac{T_f}{T_C}.$$

8)



cycle en sens inverse.

$Q_{DC} < 0$ $\quad Q_{BA} > 0$. $\quad W_{cycle} > 0$.

II ②

8) $$dU = -p\,dV + n\bar{C}_v\,dT + \ell_v\,dV$$
$$= n\bar{C}_v\,dT + (\ell_v - p)\,dV$$

$$dS = \frac{n\bar{C}_v}{T}dT + \frac{\ell_v}{T}dV$$

dU, dS différ. totales exactes car ce sont des fonctions d'état.

Schwarz : $$\left(\frac{\partial(n\bar{C}_v)}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T}(\ell_v - p)\right)_V = \left(\frac{\partial \ell_v}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{n\bar{C}_v}{T}\right)\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\ell_v}{T}\right)\right]_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \ell_v}{\partial T}\right)_V - \frac{\ell_v}{T^2}$$

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial(n\bar{C}_v)}{\partial V}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial(n\bar{C}_v)}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial \ell_v}{\partial T}\right)_V - \frac{\ell_v}{T}$$

identification $\Rightarrow$ $\ell_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Rightarrow n\left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V}\right)_T = \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V} + T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V - \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$

9) $$\ell_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \boxed{T\left(\frac{nR}{V-nb}\right)},\quad \left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V}\right)_T = 0 \Rightarrow \bar{C}_v = \bar{C}_v(T) = \frac{R}{\gamma-1}$$

10) $$dU = \frac{nR}{\gamma-1}dT + \left(\cancel{\frac{nRT}{V-nb}} - \cancel{\frac{nRT}{V-nb}} + \frac{an^2}{V^2}\right)dV$$

$$\boxed{U(T,V) = \frac{nR}{\gamma-1}T - \frac{an^2}{V} + Cte}$$

$$dS = \frac{nR}{\gamma-1}\frac{dT}{T} + \frac{nR}{V-nb}dV$$

11) $$\boxed{S(T,V) = \frac{nR}{\gamma-1}\ln T + nR\ln(V-nb) + Cte}.$$

$$\Delta S_{B'C'} = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{nR}}{\gamma-1}\ln T_{B'} + \cancel{n}R\ln(V_{B'} - nb)$$
$$= \frac{\cancel{nR}}{\gamma-1}\ln T_{C'} + \cancel{n}R\ln(V_{C'} - nb)$$

$$\Rightarrow \ln T_{B'} + (\gamma-1)\ln(V_{B'} - nb) = \ln T_{C'} + (\gamma-1)\ln(V_{C'} - nb)$$

$$\Rightarrow \ln\left[T_{B'}(V_{B'} - nb)^{\gamma-1}\right] = \ln\left[T_{C'}(V_{C'} - nb)^{\gamma-1}\right]$$

12) $$V_{B'} - nb = (V_{C'} - nb)\left(\frac{T_{C'}}{T_{B'}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (V_{C'} - nb)\left(\frac{T_c}{T_f}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$V_{A'} - nb = (V_{D'} - nb)\left(\frac{T_{D'}}{T_{A'}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (V_{D'} - nb)\left(\frac{T_c}{T_f}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

13) $$Q'_{C'D'} = \cancel{\int_{C'}^{D'} n \bar{C}_v \frac{dT}{T}} + \int_{C'}^{D'} \frac{nRT}{V-Nb} dV = nRT_c \ln\left(\frac{V_{D'}-nb}{V_{C'}-nb}\right)$$ ③

$$= nRT_c \ln\left(\frac{V_A - nb}{V_B - nb}\right)$$

14)

$$W'_{cycle} = \underbrace{\Delta U}_{=0} - Q'_{AB} - \underbrace{Q'_{BC'}}_{=0} - Q'_{C'D'} - \underbrace{Q'_{D'A'}}_{=0}.$$

$$Q'_{A'B'} = nRT_f \ln \frac{V_B - nb}{V_A - nb} = -nRT_f \ln\left(\frac{V_A - nb}{V_B - nb}\right)$$

$$W'_{cycle} = \ln\left(\frac{V_A - nb}{V_B - nb}\right)\left(-nRT_c + nRT_f\right)$$

15) $$\eta' = \frac{|W'_{cycle}|}{Q'_{C'D'}} = T_c - \frac{T_f}{T_c} = \eta.$$

Exercice 2.

1) Transformat° réversible.

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \implies \boxed{V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1}$$

$$p_1 V_1 = nrT_1$$

$$p_2 V_2 = nrT_2 \implies T_2 = \frac{p_2 V_2}{nr} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \cdot T_1$$

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \times \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot T_1$$

$$\boxed{T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1}$$

2) $$W = \Delta U = \frac{nr}{\gamma-1}\left(T_2 - T_1\right) = \frac{nr}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) T_1$$

3) $$\Delta S = S_{tr} = S_{pr} = 0.$$

---

4) $$W' = \Delta U = \frac{nr}{\gamma-1}\left(T_{2'} - T_1\right) = -p_2\left(V_{2'} - V_1\right)$$

$$= -p_2 V_{2'} + \frac{p_2}{p_1} V_1 p_1$$

$$\frac{\cancel{nr}}{\gamma-1}\left(T_{2'} - T_1\right) = -\cancel{nr} T_{2'} + \frac{p_2}{p_1} \cancel{nr} T_1$$

$$\implies \left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right) T_{2'} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}\right) T_1 \implies \frac{\gamma}{\gamma-1} T_{2'} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}\right) T_1$$

$$\implies \boxed{T_{2'} = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right) T_1} \qquad V_{2'} = \frac{nrT_{2'}}{p_2}$$

$$\boxed{V_{2'} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T_{2'}}{p_2} = \frac{p_1}{p_2} V_1 \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p_2}{p_1}\right)}$$

5) $$W' = -p_2 V_{2'} + \frac{p_2}{p_1} nrT_1$$

$$= -nrT_{2'} + \frac{p_2}{p_1} nrT_1$$

$$= nrT_1\left[-\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$\boxed{W' = nrT_1\left[-\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\frac{p_2}{p_1}\right] = \frac{nrT_1}{\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}$$

6) $T_{2'} > T_2$?

$$\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right) > \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \ ?$$

$x = \frac{p_2}{p_1}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)x\right) - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

$$f'(x) = \frac{\gamma-1}{\gamma} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-x^{-1/\gamma}\right)$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(1) = \frac{1}{\gamma}\times\gamma - 1 = 0$

$\Rightarrow$ oui $f(x) > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_{2'} > T_2}$

$\Rightarrow$ $W' > W$ (Il faut apporter un travail de compression supérieur en irréversible par rapport à la transformation réversible).

7) $$\Delta' S = \frac{nr}{\gamma-1}\ln\frac{T_2'}{T_1} + nr\ln\frac{V_2'}{V_1}$$

$$= \frac{nr}{\gamma-1}\ln\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right) + nr\ln\frac{p_1}{p_2\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$= nr\left[\underbrace{\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right) + \ln\frac{p_1}{p_2} + \ln\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right)}_{\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)\frac{p_2}{p_1}\right)}\right]$$

$S'_{tr} = 0$

$\Rightarrow S'_{pr} = \Delta' S > 0$?

$x = \frac{p_2}{p_1}$ $\qquad f(x) = -\ln x + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)x\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\gamma}{\cancel{(\gamma-1)}}\times\frac{\cancel{(\gamma-1)}}{\cancel{\gamma}}\,\frac{1}{\frac{1}{\gamma}\left(1+(\gamma-1)x\right)}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{\gamma}{1+(\gamma-1)x} = \frac{-[1+(\gamma-1)x]+\gamma x}{x(1+(\gamma-1)x)}$$

$$= \frac{-1-\cancel{\gamma x}+x+\cancel{\gamma x}}{x(1+(\gamma-1)x)} > 0 \text{ pour } x > 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(1) = 0 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{1}{\gamma}\times\gamma = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$ OK 2nd ppe.