



Licence de Mécanique

---

**2A001**  
**Mécanique du solide indéformable**

---

*Exercices d'application*

*rédigés par*

Yves BERTHAUD

Éric SULTAN

et l'équipe qui travaille depuis de nombreuses années.

Paris, 2019

## Introduction

Ces exercices sont organisés en plusieurs sections qui correspondent aux chapitres du cours à savoir :

1. Cinématique.
2. Statique et liaisons.
3. Cinétique.
4. Dynamique et théorèmes énergétiques.

Les notations sont constantes à savoir un repère  $\mathcal{R}$ , un solide  $S_i$  ou  $i$  ou  $(i)$ , un vecteur le plus souvent comme en cours  $\underline{V}$  mais dans un exercice  $\vec{V}$  ou aussi  $\mathbf{V}$ . Les accélérations sont notées  $\underline{\Gamma}$ , les torseurs  $\{\mathcal{A}\}$  comme action,  $\{\mathcal{V}\}$  comme vitesse,  $\{\mathcal{C}\}$  comme cinétique et  $\{\mathcal{D}\}$  comme dynamique.

# 1 Cinématique

## Exercice 1. Centrifugeuse de laboratoire.

Objectifs :

- ▶ Exprimer un vecteur dans une base mobile.
- ▶ Dériver un vecteur par rapport à une coordonnée de position et par rapport au temps.

On s'intéresse à une centrifugeuse de laboratoire présentée ci-dessous (Fig. 1), composée d'un bâti  $S_0$ , d'un bras  $S_1$  et d'une éprouvette  $S_2$  contenant deux liquides de masses volumiques différentes. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras  $S_1$  l'éprouvette  $S_2$  s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras. De fait, le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté au fond de l'éprouvette.

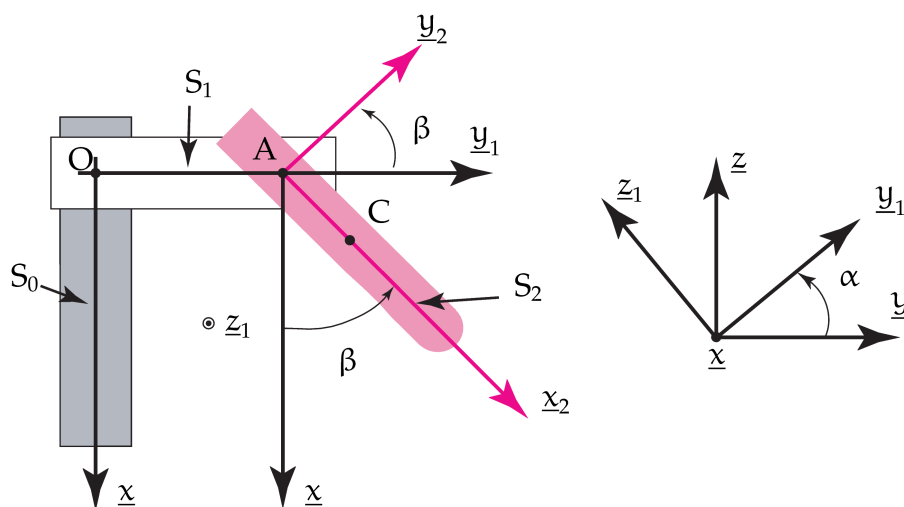


Figure 1 – Centrifugeuse de laboratoire

Paramétrage du système :

- $\mathcal{R}_0(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  est un repère lié à  $S_0$ .
- $S_1$  est en liaison pivot d'axe  $(O, \underline{z})$  avec  $S_0$ . Le repère  $\mathcal{R}_1(O, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$  est un repère lié à  $S_1$ , on note  $\alpha = (\underline{y}, \underline{y}_1)$  l'angle mesuré autour de  $\underline{z}$ .
- $S_2$  est en liaison pivot d'axe  $(A, \underline{z}_1)$  avec  $S_1$ . Le repère  $\mathcal{R}_2(A, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2)$  est un repère lié à  $S_2$ , on note  $\beta = (\underline{x}, \underline{x}_2)$  l'angle mesuré autour de  $\underline{z}_1$ .
- On donne  $\underline{OA} = a\underline{y}_1$  et  $\underline{AC} = b\underline{x}_2$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives exprimées en mètres.

### Questions

1. Calculer la vitesse de  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en O et en A.
2. Calculer l'accélération de  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  au point A.
3. Calculer la vitesse de  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en A et en C, puis dans son mouvement par rapport à  $S_1$  en A et en C.

## Exercice 2. Calcul vectoriel.

### Objectifs :

► Se familiariser avec le calcul vectoriel.

1. Soient  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  deux vecteurs quelconques. Trouver tous les vecteurs  $\underline{u}$  tels que  $\underline{A} \wedge \underline{u} = \underline{A} \wedge \underline{B}$ .
2. *Produit mixte et permutations circulaires* : Montrer que quels que soient  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{C}$  :

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A}).$$

3. *Double produit vectoriel* : Montrer que, quels que soient  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{C}$  :

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C}.$$

En déduire  $(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C}$ .

4. En utilisant les résultats ci-dessus, établir la *formule de Laplace* :

$$(\underline{A} \wedge \underline{B})^2 = \underline{A}^2 \underline{B}^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2.$$

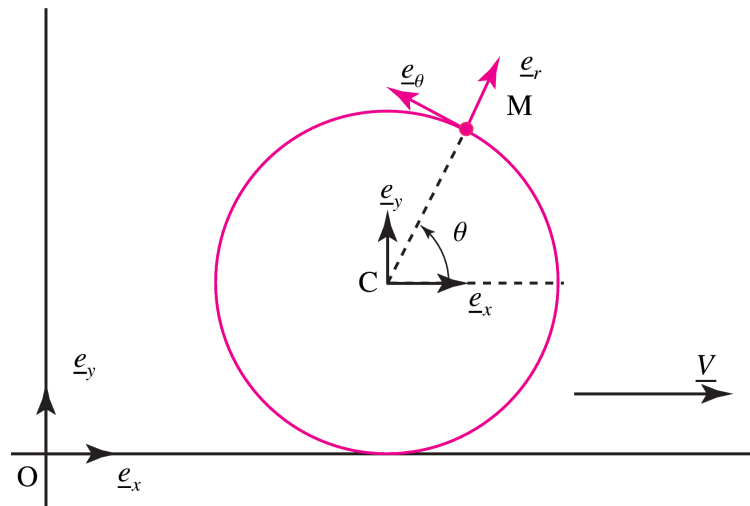
Retrouver cette identité géométriquement (introduire l'angle  $\alpha$  entre  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ ).

## Exercice 3. Roulement avec ou sans glissement.

► Exprimer un vecteur dans une base mobile.

► Dériver un vecteur par rapport à une coordonnée de position et par rapport au temps.

Soit un vélo dont le centre de masse est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $V$ . On étudie le mouvement d'un point  $M$  de la roue avant (de centre  $C$  et de rayon  $R$ ).



Soit  $O$  un point fixe par rapport à la route. On se donne une base cartésienne  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  telle que le vélo se déplace suivant  $\underline{e}_x$ . Le mouvement du point  $M$  par rapport à  $C$  est décrit à l'aide de l'angle  $\theta(t) = (\underline{e}_x, \widehat{CM})$ . Si l'on définit le vecteur unitaire  $\underline{e}_r = \underline{CM}/\|\underline{CM}\|$ , on peut alors construire la base polaire locale  $(C, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ . On rappelle que les vecteurs de base se transforment suivant les lois :

$$\begin{cases} \underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y \\ \underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{e}_x = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta \\ \underline{e}_y = \sin \theta \underline{e}_r + \cos \theta \underline{e}_\theta \end{cases}$$

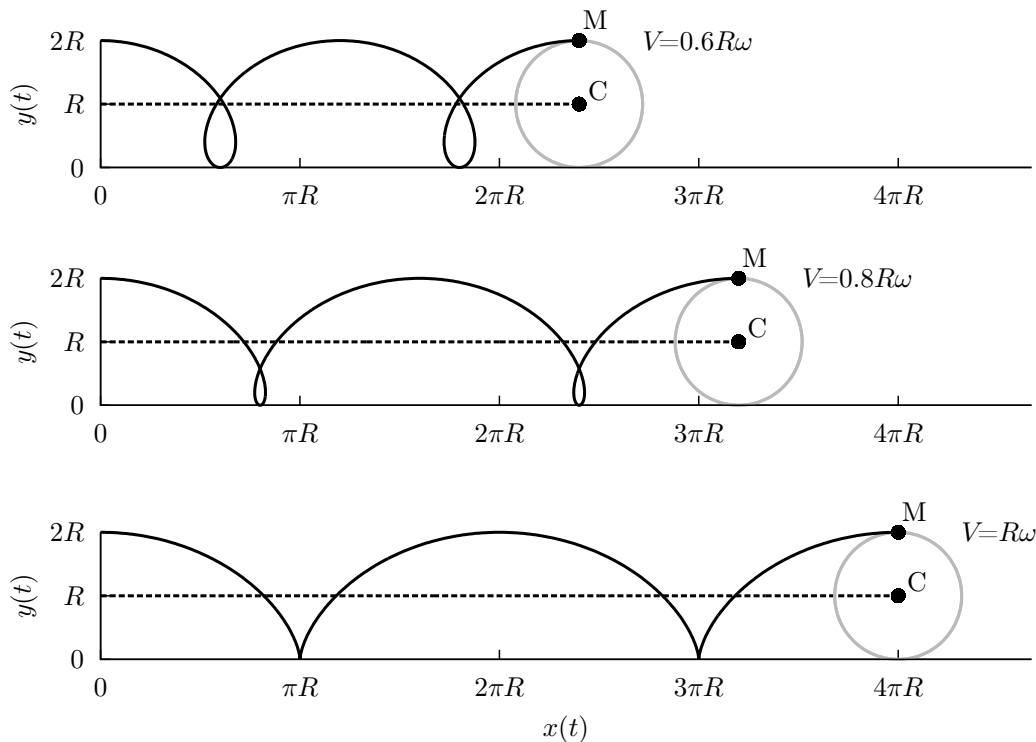
## Questions

1. Calculer  $\frac{d}{d\theta}\underline{e}_r$  puis  $\frac{d}{dt}\underline{e}_r$ . On exprimera le résultat dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  et dans  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ .
2. Même question pour  $\frac{d}{d\theta}\underline{e}_\theta$  puis  $\frac{d}{dt}\underline{e}_\theta$ .
3. On note  $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(t)$ . Vérifier que l'on a <sup>1</sup>  $\frac{d}{dt}\underline{e}_r = (\dot{\theta}\underline{e}_z) \wedge \underline{e}_r$ .
4. Exprimer la vitesse de M dans le référentiel  $(C, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$  puis dans  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ .
5. Quel est le signe de  $\dot{\theta}$  si le mouvement du vélo se fait dans la direction des  $x$  croissants?
6. On suppose que la roue tourne à une vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  constante et on note  $T$  la période associée. Quelle est la vitesse  $V$  du vélo si le roulement est sans glissement? Généraliser ce résultat au cas d'une vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t) \neq \text{Cte}$ .
7. On suppose qu'à l'instant  $t = t_0$ , le point M est en contact avec la route. Montrer qu'en l'absence de glissement

$$\left. \frac{d\underline{CM}}{dt} \right|_{t=t_0} = \underline{0} \quad (1)$$

où la dérivée est calculée par rapport au référentiel de la route <sup>2</sup>.

8. Dans le cas  $\omega = \dot{\theta} \equiv \text{Cte}$ , tracer la trajectoire de M dans le référentiel  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  en choisissant  $x_M(t=0) = 0$ ,  $y_M(t=0) = 2R$  et en prenant  $V = \frac{3}{5}R\omega, \frac{4}{5}R\omega, R\omega$ .



1. Le vecteur  $\dot{\theta}\underline{e}_z$  s'appelle le vecteur vitesse instantané de rotation de la roue par rapport à la route; il sera noté  $\underline{\Omega}(\text{roue}/\text{route})$  ou  $\underline{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$  dans toute la suite du cours.

2. La relation (1) s'appelle *condition de roulement sans glissement* (RSG); cette notion sera exposée plus en détails dans le cours.

## Exercice 4. Manipulateur.

### Objectifs :

- ▶ Déterminer le vecteur vitesse instantané de rotation  $\underline{\Omega}$ .
- ▶ Appliquer la loi de composition des mouvements.
- ▶ Comprendre la cinématique de la liaison pivot.

Ce sujet va vous permettre de travailler les définitions des vitesses et accélérations de points qui appartiennent à des solides. Soit un système appelé manipulateur (Fig. 2) constitué de plusieurs solides en mouvement les uns par rapport aux autres :

- le bâti est repéré par le solide (0). On associe un repère  $\mathcal{R}_0$  à ce solide. Il est noté  $(O, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$ ;
- le solide (1) est un bras. Le repère associé est  $\mathcal{R}_1 (A, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$  avec  $\underline{z}_0 = \underline{z}_1$  et l'angle  $\alpha = (\underline{x}_0, \underline{x}_1)$ ;
- le solide (2) est un avant bras. Le repère associé est  $\mathcal{R}_2 (B, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2)$  avec  $\underline{z}_2 = \underline{z}_1$  et l'angle  $\beta = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ ;
- le solide (3) peut être vu comme un poignet et le solide (4) comme une pince.

On a  $\underline{OA} = a\underline{z}_0$ ;  $\underline{AB} = r\underline{x}_1$ ;  $\underline{BC} = r\underline{x}_2$ ;  $\underline{CP} = h(t)\underline{z}_0$  et  $h(t) < 0$ .

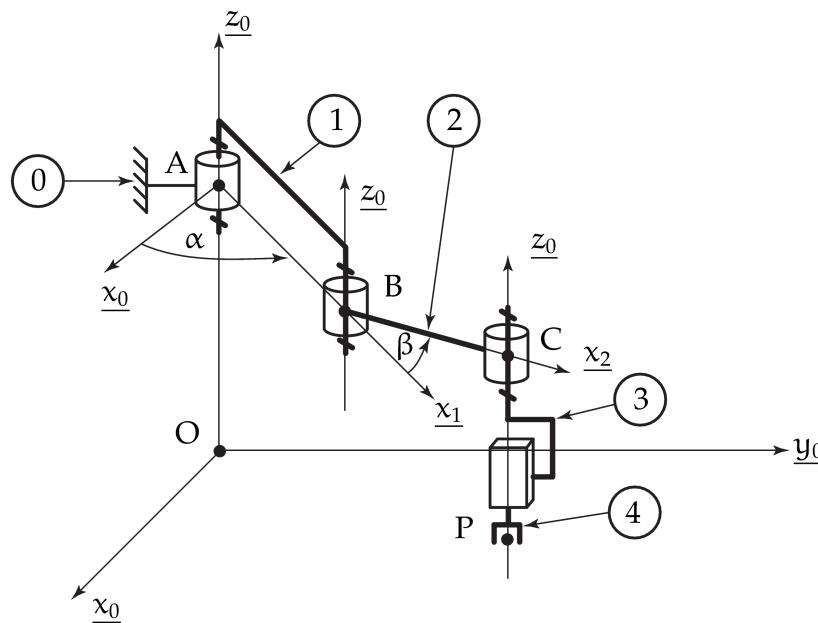


Figure 2 – Schéma du bras manipulateur.

### Questions

1. Déterminez les vitesses suivantes :  $\underline{V}(P \in 4/2)$ ,  $\underline{V}(P \in 4/1)$ ,  $\underline{V}(P \in 4/0)$ ,  $\underline{V}(C \in 2/0)$ .
2. Calculez les accélérations :  $\underline{\Gamma}(P \in 4/2)$  et  $\underline{\Gamma}(P \in 4/1)$ .

On souhaite donner au point C une trajectoire rectiligne telle qu'il décrive un segment DE.

On pose :  $\underline{AD} = 2r\underline{x}_0$ ;  $\underline{AE} = 2r\underline{y}_0$ ;  $\underline{AC} = X(t)\underline{x}_0 + Y(t)\underline{y}_0 = \lambda(t)\underline{u}$ . L'angle  $\theta$  est l'angle  $(\underline{x}_0, \underline{u})$ .

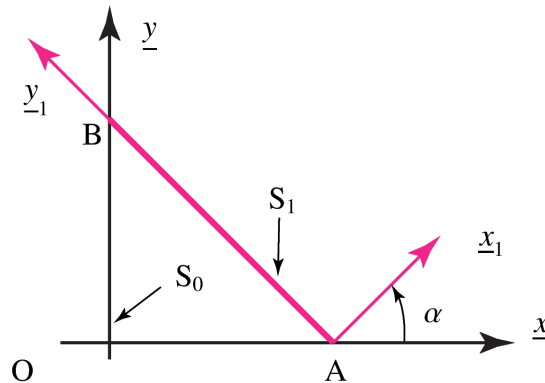
3. Après avoir tracé une figure dans le plan  $(O, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$  trouvez :

- les expressions de  $X = f(\lambda, \theta)$  et  $Y = g(\lambda, \theta)$  ;
  - la relation liant  $X$ ,  $Y$  et  $r$  sachant que  $C$  décrit  $DE$  ;
  - la relation entre les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta$  ;
  - l'expression de  $\lambda$  en fonction de  $r$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ .
4. Vous pouvez alors en déduire les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $\theta$ .
  5. Donnez les valeurs des différents angles  $\alpha$  et  $\beta$  pour  $\theta$  valant  $0$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$  et  $\pi/2$ .
  6. Faire une figure permettant de vérifier les résultats précédents (choisissez une valeur particulière).

## Exercice 5. Échelle.

### Objectifs :

- ▷ Déterminer la base et la roulante du mouvement d'un solide relativement à un autre.
- ▷ Caractériser les liaisons simples.



**Mouvement d'une échelle.** Une échelle  $S_1$  repose sur le sol en son extrémité A et s'appuie contre un mur  $S_0$  en son autre extrémité B. On désigne par  $\mathcal{R}(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  le repère lié au sol et au mur et par  $\mathcal{R}_1(A, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$  un repère lié à l'échelle, tel que  $\underline{AB} = h\underline{y}_1$ . On note  $\alpha$  l'angle entre  $\underline{x}$  et  $\underline{x}_1$ .

### Questions

- Déterminer le centre instantané de rotation  $I_{10}$  du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  de manière analytique puis graphique.
- Trouver la base et la roulante du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$ .

## Exercice 6. Chariot élévateur

On considère un chariot disposant d'un dispositif de levage d'une plate-forme (5) parallèlement au sol. Pendant le levage, le chariot étant immobile (il est posé sur une plate forme de mesure), on peut le supposer encastré avec le sol. Le point O en particulier est fixe dans le repère de travail. L'ensemble chariot/sol est repéré par (0). Les longueurs OF et BE sont identiques (et notées  $2\ell$ ). Les barres (1) et (2) sont en liaison pivot en leur milieu respectif au point A. Ces liaisons sont supposées parfaites. Les vecteurs vitesses des points des solides sont dans le plan de la figure (plan  $(O, x, y)$ ). L'actionneur est un vérin communiquant à la tige (4) une vitesse relative portée par la droite (CD). L'orientation du vérin est suivant  $\underline{y}$  dans ce cas particulier (vous traiterez aussi cet exemple par la cinématique graphique). L'objectif de ce TD est de se donner la vitesse relative du vérin (c'est l'entrée du mécanisme) et d'en déduire la vitesse de montée du plateau (5) dans le repère de travail.

### Résolution par la cinématique graphique

- Expliquer le fonctionnement de ce mécanisme et tracer une autre position de celui-ci. Identifier un solide pour lequel la cinématique est identique à celle de l'échelle dans l'exercice précédent.
- Identifier lequel des solides du mécanisme admet les mêmes configurations que l'échelle de l'exercice précédent. En déduire que  $\underline{V}(F \in 2/0) = \underline{0}$ .



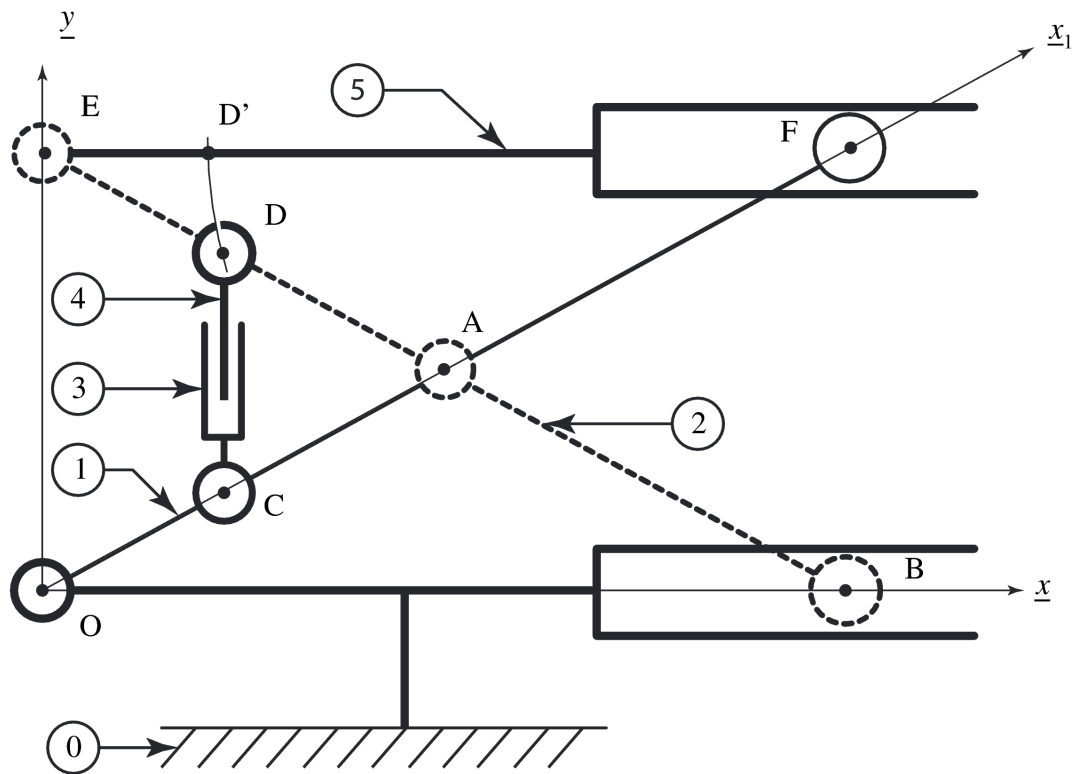


Figure 4 – Schéma d'un chariot élévateur de laboratoire.

3. On parle de vitesse relative du vérin. Écrivez cette vitesse en précisant les notations.
4. On pose  $\underline{V}(D \in 4/3) = \underline{V}(D \in 2/3) = V\mathbf{y}$  avec  $V = 3 \text{ cm}$ . En déduire par composition des vitesses la vitesse  $\underline{V}(D \in 2/0)$ .
5. En déduire les vecteurs vitesses  $\underline{V}(A \in 1/0)$  et  $\underline{V}(B \in 2/0)$ .
6. Construire la vitesse  $\underline{V}(E \in 5/0)$ . On pourra utiliser le point  $D'$  (et sa vitesse  $\underline{V}(D' \in 2/0)$ ) situé sur un cercle de centre  $F$  et de rayon  $FD$ .
7. Montrer que l'on peut trouver  $\underline{V}(F \in 5/0)$ , la vitesse du point  $F$ , en utilisant les compositions du vecteur vitesse de  $F$ .

## Exercice 7. Pelleteuse à vérins

### Problème de Cinématique : Introduction

Il est question d'étudier la cinématique du système mécanique présenté en Figure 5 de type "pelleteuse". Le système est constitué de huit pièces : le bâti ( $S_0$ ), considéré fixe dans le repère de travail, les bras ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) et une pelle ( $S_3$ ). Ces trois solides sont liés par des liaisons pivots parfaites en A, B et C. L'ouverture des bras est pilotée par des vérins ( $S_4+S_5$ ) et ( $S_6+S_7$ ). Enfin, un moteur en C permet de gérer l'angle  $\psi$  formé entre le second bras ( $S_2$ ) et la pelle ( $S_3$ ). Par souci de simplification, nous considérerons que cet angle est piloté par un moteur (et non pas par un vérin, comme c'est le cas pour  $\theta$  et  $\phi$ ).

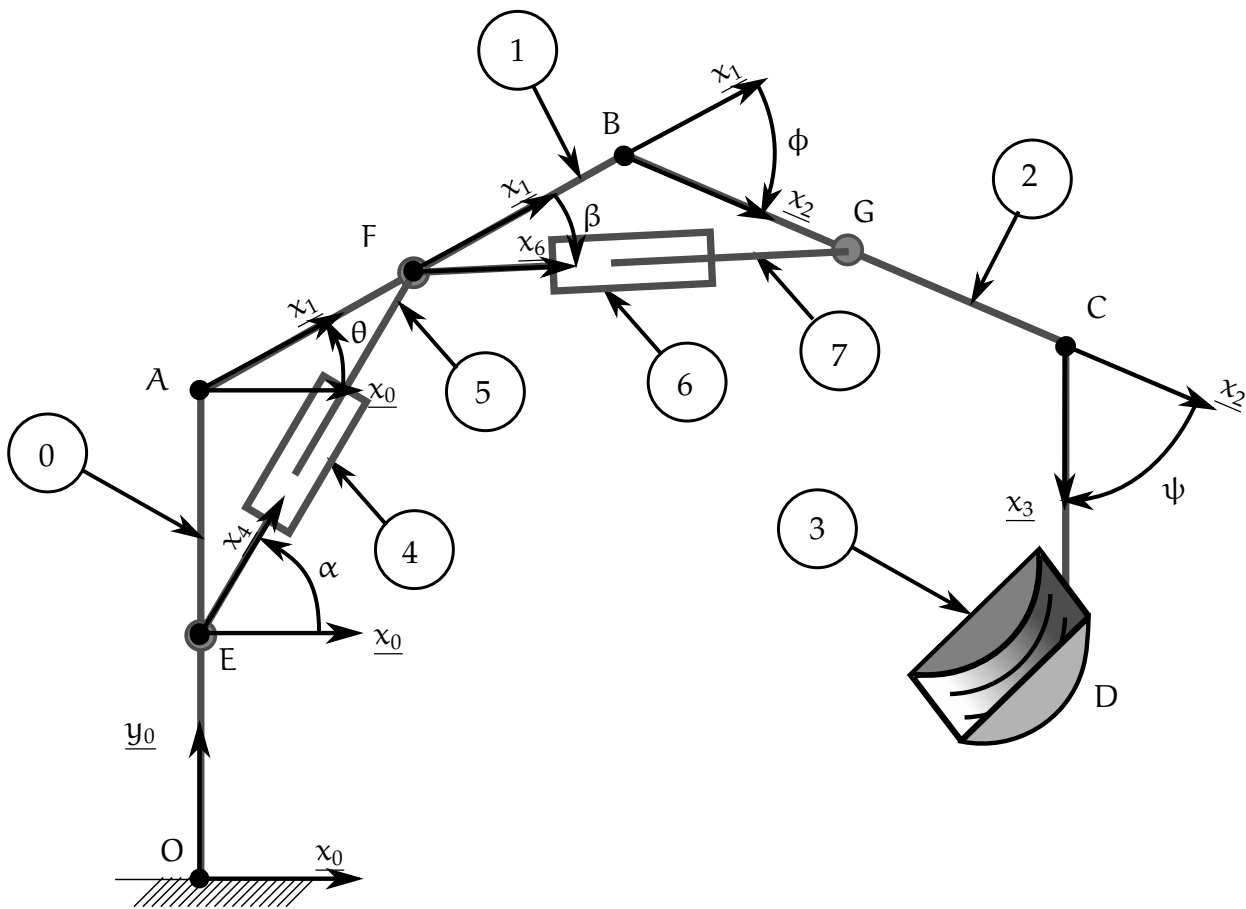


Figure 5 – Schéma de la pelleteuse à vérins.

Le but de cet exercice est de déterminer le pilotage des vérins et du moteur pour assurer une remontée verticale de la pelle, sans en renverser le contenu.

Paramétrage du système :

- $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est le référentiel lié au bâti  $S_0$  ;
- $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au solide  $S_1$ , l'angle  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$  ;
- $\mathcal{R}_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  est lié au solide  $S_2$ , l'angle  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \phi \in ]-\pi, 0[$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$  ;

- $\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié au solide  $S_3$ , l'angle  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \psi \in ]-\pi, \pi[$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$  ;
- $\mathcal{R}_4(E, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$  est lié au solide  $S_4$ , l'angle  $(\vec{x}_0, \vec{x}_4) = \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$  ;
- $\mathcal{R}_6(F, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_0)$  est lié au solide  $S_6$ , l'angle  $(\vec{x}_1, \vec{x}_6) = \beta \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$  ;

On donne :  $\vec{OE} = h\vec{y}_0$ ,  $\vec{EA} = r\vec{y}_0$ ,  $\vec{AF} = \vec{FB} = r\vec{x}_1$ ,  $\vec{BG} = \vec{GC} = r\vec{x}_2$ ,  $\vec{CD} = p\vec{x}_3$ ,  $\vec{EF} = a(t)\vec{x}_4$  et  $\vec{FG} = b(t)\vec{x}_6$ .

## Partie analytique

Cette partie se décompose en deux sections non indépendantes. Cependant, si un résultat n'est pas trouvé explicitement, il pourra être remplacé par une fonction des variables indiquées pour la suite. Une attention particulière sera accordée à la rédaction des démonstrations. Tout résultat non justifié ne sera pas accepté.

### 1 Un peu de géométrie

1. En considérant le triangle EFA, établir une relation entre  $\alpha$  et  $\theta$  ; vérifier que pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  on a  $\theta = 0$ . En déduire  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\dot{\alpha}$ .
2. Établir une relation entre  $a(t)$ ,  $\alpha$  et  $r$ . En déduire  $\dot{a}$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $r$ .

### 2 Vitesses

1. Donner les diagrammes de changement de base entre  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_0$  pour ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et entre  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_1$ . Indiquez les angles sur les diagrammes.
2. Donner les vecteurs vitesses instantanés de rotation  $\vec{\Omega}(i/0)$  pour ( $i = 1, 2, 3, 4, 6$ ).
3. Calculer les vecteurs vitesses  $\vec{V}(B \in 1/0)$ ,  $\vec{V}(C \in 2/0)$  et  $\vec{V}(D \in 3/0)$ , en fonction de  $r$ ,  $p$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$ .
4. Quelle condition doit-on imposer à  $\vec{V}(D \in 3/0)$  pour que la pelle  $S_3$  se déplace verticalement ? En déduire une relation entre  $r$ ,  $p$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$ .
5. Quelle condition doit-on imposer à  $\vec{\Omega}(3/0)$  pour que la pelle  $S_3$  ne se tourne pas dans le référentiel de travail ? En déduire une relation entre  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$ .

On donne les relations scalaires suivantes :

$$\dot{b} = -r\dot{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \quad (1)$$

$$\dot{a} = r\dot{\theta} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \quad (2)$$

1. On considère que la vitesse d'ouverture du vérin ( $S_4+S_5$ ) est connue, on note  $\dot{a} = V_0$ . En vous appuyant sur les résultats précédents, donner  $\dot{b}$  et  $\dot{\psi}$  en fonction de  $V_0$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $\theta$  et  $\phi$  pour que le déplacement de la pelle soit vertical et ne renverse pas le contenu.

### 3 Questions bonus

1. Justifiez rigoureusement les identités (1) et (2).
2. Donner la condition sur  $V_0$  pour que la pelle remonte en fonction des données géométriques.
3. On souhaite remplacer le moteur en C par un vérin entre G et D. Il est clair que cette solution présente un inconvénient : le vérin passerait au travers du contenu de la pelle. Proposer une autre solution pour que le vérin ne passe pas par l'intérieur de la pelle (tous les coups sont permis, vous avez le droit de modifier la géométrie des pièces).

## Partie graphique

Le but de cette partie est de déduire les vitesses de pilotage des vérins à partir d'une vitesse d'entrée pour la pelle. On donne sur la FIGURE 12  $\vec{V}(C \in 3/0)$ .

1. Donner la définition du CIR. Quels sont les CIR de  $I_{1/0}$  et  $I_{4/0}$  ?
2. Quelle est la relation entre  $\vec{V}(C \in 2/0)$  et  $\vec{V}(C \in 3/0)$  ? Construire  $\vec{V}(B \in 2/0)$ .
3. Construire le CIR  $I_{2/0}$ . Construire  $\vec{V}(G \in 2/0)$ .
4. Construire  $\vec{V}(F \in 1/0)$ .
5. Quels sont les supports de  $\vec{V}(G \in 7/6)$ ,  $\vec{V}(F \in 5/4)$  et  $\vec{V}(F \in 4/0)$  ?
6. Justifier que  $\vec{V}(F \in 1/0) = \vec{V}(F \in 5/0) = \vec{V}(F \in 6/0)$ .
7. En utilisant les trois questions précédentes, construire  $\vec{V}(F \in 5/4)$ .
8. En utilisant l'équiprojectivité entre F et G dans le mouvement de 6 par rapport à 0, construire  $\vec{V}(G \in 7/6)$ .

### 4 Question bonus

En supposant que la distance CD fait en réalité 500 mm, et que 1 cm sur le dessins représente  $0,2 \text{ m.s}^{-1}$ . Calculer la vitesse de rotation du moteur en C.

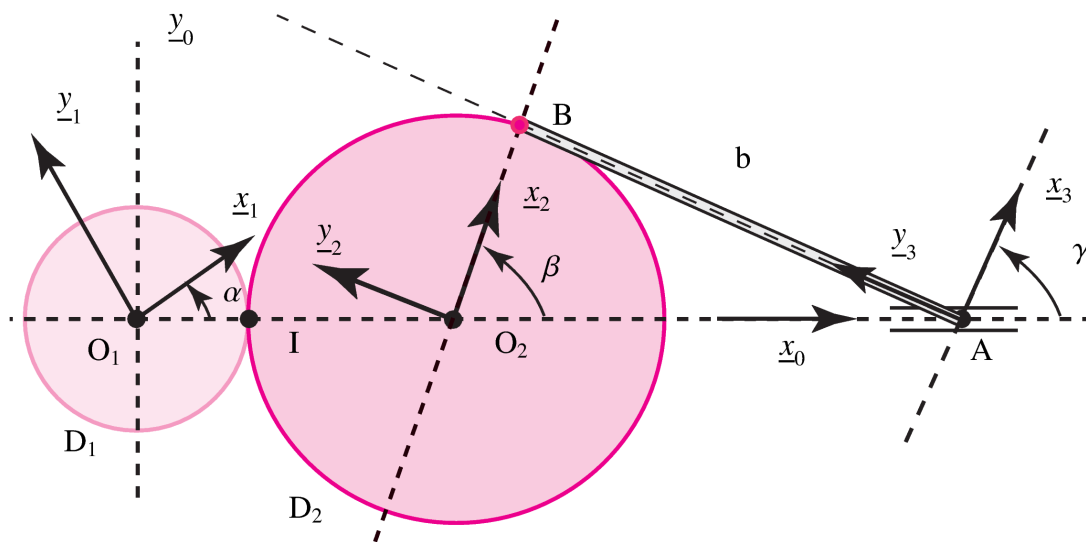
## Exercice 8. Mécanisme.

### Objectifs :

- ▶ Exprimer et exploiter la condition de roulement sans glissement.
- ▶ écrire le torseur cinématique et ses éléments de réduction.
- ▶ Identifier la nature d'un torseur : torseur nul, glisseur, torseur couple.

On considère un mécanisme constitué par :

- deux disques  $D_1$  et  $D_2$ , de centres et rayons respectifs  $(O_1, R_1)$  et  $(O_2, R_2)$ .  $D_1$  et  $D_2$  sont contenus dans un même plan et sont en contact ponctuel en I.
- d'une barre  $b$ , de longueur  $L$ , d'extrémités A et B telles que A soit astreinte à se déplacer le long de l'axe  $(O_1, \underline{O_1O_2})$  et que B soit une liaison pivot entre  $b$  et  $D_2$ .



On se donne les repères orthonormés directs  $\mathcal{R}_0$  ( $O_1, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0$ ),  $\mathcal{R}_i$  ( $O_i, \underline{x}_i, \underline{y}_i, \underline{z}_i$ ) ( $i=1,2$ ) et  $\mathcal{R}_3$  ( $A, \underline{x}_3, \underline{y}_3, \underline{z}_3$ ) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le mécanisme } D_1 \cup D_2 \cup b \text{ soit situé dans le plan } (O_1, \underline{x}_0, \underline{y}_0) \\ \mathcal{R}_1 \text{ est attaché à } D_1, \quad \mathcal{R}_2 \text{ est attaché à } D_2, \quad \mathcal{R}_3 \text{ est attaché à } b \\ \underline{O_1O_2} = (R_1 + R_2)\underline{x}_0, \quad \underline{O_2B} = R_2\underline{x}_2, \quad \underline{AB} = L\underline{y}_3 \\ \alpha(t) = (\underline{x}_0, \underline{x}_1), \quad \beta(t) = (\underline{x}_0, \underline{x}_2), \quad \gamma(t) = (\underline{x}_0, \underline{x}_3) \end{array} \right.$$

On prendra pour conditions initiales  $\alpha(t=0) = \beta(t=0) = 0$  et  $\gamma(t=0) = \pi/2$ . Les résultats seront exprimés dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

### Questions Partie 1

1. Exprimer les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(D_1/\mathcal{R}_0)\}_{O_1}$ ,  $\{\mathcal{V}(D_2/\mathcal{R}_0)\}_{O_2}$  et  $\{\mathcal{V}(b/\mathcal{R}_0)\}_A$  (Indication : pour la dérivation de  $\underline{O_1A}$ , il est préférable de ne pas passer par le point B).
2. Déterminer par composition des mouvements les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(D_2/\mathcal{R}_1)\}_I$  et  $\{\mathcal{V}(b/\mathcal{R}_2)\}_B$ .

3. En supposant que le contact en I entre les deux disques se fait sans glissement, obtenir une relation scalaire entre  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ .
4. Que peut-on dire du point B par rapport aux solides  $D_2$  et  $b$ ? En déduire une relation scalaire entre  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$ . Retrouver cette dernière relation géométriquement (raisonner sur le triangle  $O_1BA$ ).
5. Calculer la vitesse  $\underline{V}(B \in D_2/\mathcal{R}_0)$  puis l'accélération  $\underline{\Gamma}(B \in D_2/\mathcal{R}_0)$  en fonction de  $R_2$ ,  $\beta(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$  et  $\ddot{\beta}(t)$ .

### Questions Partie 2

1. Dans le cas où l'on a  $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ , préciser la nature des torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(D_1/\mathcal{R}_0)\}_{O_1}$ ,  $\{\mathcal{V}(D_2/\mathcal{R}_0)\}_{O_2}$ ,  $\{\mathcal{V}(b/\mathcal{R}_0)\}_A$ ,  $\{\mathcal{V}(D_2/\mathcal{R}_1)\}_I$  et  $\{\mathcal{V}(b/\mathcal{R}_2)\}_B$ . Quels mouvements représentent-ils? En déduire que l'étude de ces mouvements est celle d'un mouvement plan sur plan.
2. Déterminer les centres instantanés de rotation  $I_{10}$ ,  $I_{20}$ ,  $I_{21}$  et  $I_{32}$ .
3. Déterminer géométriquement le centre instantané de rotation  $I_{30}$ .
4. Déterminer la base et la roulante pour les mouvements suivants :
  - $D_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ;
  - $D_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ;
  - $b$  par rapport à  $\mathcal{R}_2$ ;
  - $D_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ .

## 2 Statique, liaisons

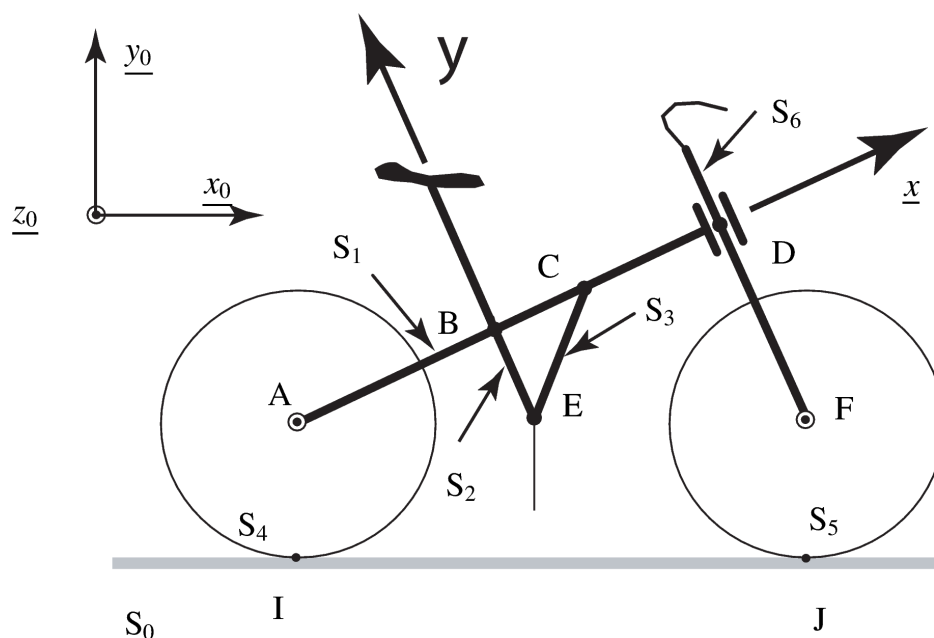
### Exercice 9. Cadre de VTT.

Objectifs :

- ▶ Déterminer des actions de liaisons
- ▶ Application du PFS

La qualité d'un V.T.T. est liée à la rigidité de son cadre. Afin d'alléger la structure, le constructeur a réduit au minimum la triangulation classique. Elle comprend ici trois barres ABCD, BE et CE, notées respectivement  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  qui forment un solide rigide.

On se propose d'étudier l'état de sollicitation de la barre principale  $S_1$ . On suppose que l'action mécanique exercée par l'utilisateur sur le cadre se réduit au point E à un glisseur de résultante verticale  $P = 500$  N. Il faut considérer deux contacts ponctuels en I et J, deux liaisons pivots d'axe  $\underline{z}_0$  en A et F et une liaison pivot d'axe  $\underline{y}$  en D.



On donne :  $AB = 360$  mm,  $BC = 240$  mm,  $CD = 320$  mm,  $DF = 400$  mm.

#### Questions

Il s'agit d'un problème plan, défini dans le plan  $(A, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ . Par conséquent la composante de la résultante selon  $\underline{z}_0$  et les composantes du moment selon  $\underline{x}_0$  et  $\underline{y}_0$  sont nulles.

1. Étudier les torseurs de chaque liaison (en I, J, A, F et D).
2. Appliquer le PFS au V.T.T. pour trouver les réactions en I et J.
3. Déterminer les efforts des liaisons pivots en A et F.
4. Appliquer le PFS au solide  $S_6$  pour trouver le torseur d'actions de  $S_6$  sur  $S_1$  en D, que l'on écrira dans le repère  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}_0)$ .

### 3 Cinétique

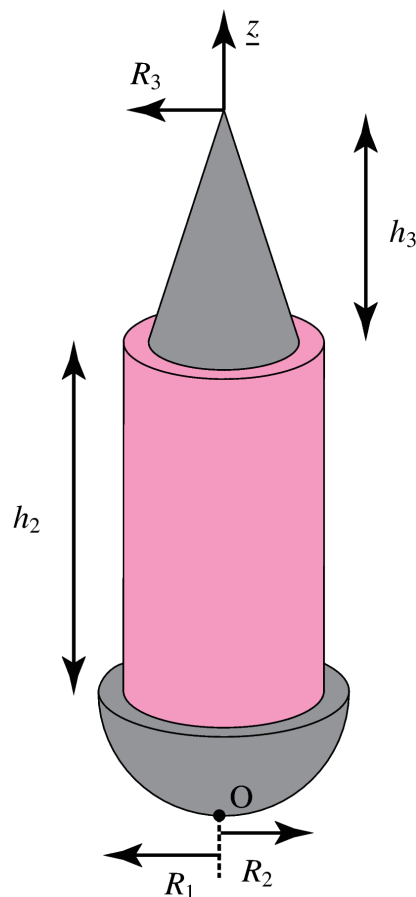
#### Exercice 10. Culbuto et double pendule.

Objectifs :

- ▶ Localiser le centre de masse d'un système de solides.
- ▶ Calculer le moment cinétique d'un solide par intégration.

**Centre d'inertie d'un culbuto.** Nous avons volontairement utilisé la notation des vecteurs avec une flèche dans cet exercice. Un solide  $S$ , homogène de masse volumique  $\rho$ , de symétrie cylindrique, est constitué de 3 parties accolées :

- un cône  $S_3$  de hauteur  $h_3$  et de rayon de base  $R_3$  ;
- un cylindre  $S_2$  de hauteur  $h_2$  et de rayon de base  $R_2$  ;
- une demi-sphère  $S_1$  de rayon  $R_1$ .



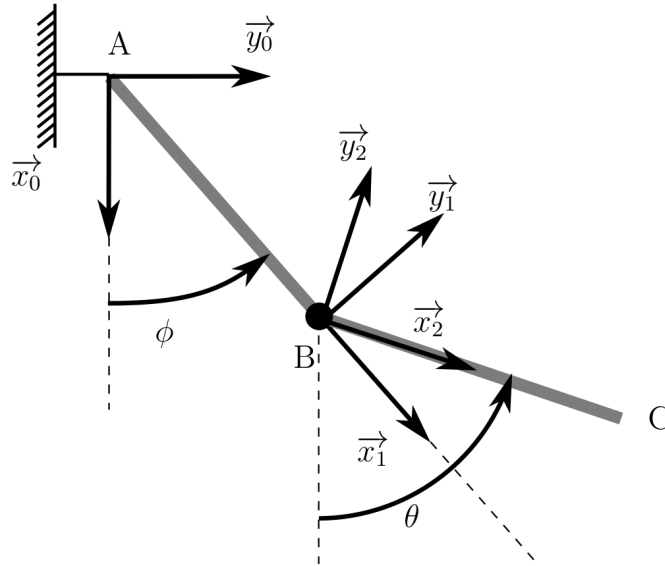
1. Déterminer la masse  $m_i$  de chaque solide  $S_i$ .
2. Déterminer le centre d'inertie  $C_i$  de chaque solide  $S_i$ .
3. En déduire le centre d'inertie  $C$  du solide  $S$ .



## Exercice 11. Double pendule.

Soit  $\mathcal{R}_0 = (A, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$  un repère fixe lié à un bâti (0). On considère un système formé de deux tiges  $T_1$  et  $T_2$  identiques, de masses  $m$  et de longueurs  $\ell$ . La tige  $T_1$  est reliée au bâti en A par une liaison pivot d'axe  $(A, \underline{z}_0)$  et est reliée à la tige  $T_2$  en B par une liaison pivot d'axe  $(B, \underline{z})$ . On notera  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) le centre d'inertie de la tige  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) et on supposera que les liaisons pivot sont parfaites.

On introduit les bases mobiles  $(\underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_0)$  et  $(\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_0)$  telles que  $\underline{AC}_1 = \ell \underline{x}_1$ ,  $\underline{BC}_2 = \ell \underline{x}_2$  et avec  $(\underline{x}_0, \underline{x}_1) = \phi(t)$  et  $(\underline{x}_0, \underline{x}_2) = \theta(t)$ .



### Questions

1. Exprimer les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(T_1/0)\}_A$  et  $\{\mathcal{V}(T_2/0)\}_A$ . Identifier leur nature.
2. Calculer les vitesses des centres d'inertie de chacune des barres.
3. Calcul les moments cinétiques  $\underline{\sigma}(A \in T_1/0)$ ,  $\underline{\sigma}(A \in T_2/0)$  et  $\underline{\sigma}(A \in T_1 \cup T_2/0)$ .
4. Exprimer les torseurs cinétiques  $\{\mathcal{C}(T_1/0)\}_A$ ,  $\{\mathcal{C}(T_2/0)\}_A$  et  $\{\mathcal{C}(T_1 \cup T_2/0)\}_A$ .

## Exercice 12. Éolienne.

### Objectifs :

- ▶ Définir la matrice d'inertie et calculer ses éléments.
- ▶ Visualiser le mouvement tridimensionnel de solides.

**Étude cinétique d'une éolienne.** Soit une éolienne modélisée par 3 solides : la girouette  $S_1$ , l'hélice  $S_2$  et un balourd  $S_3$ . Le repère orthonormé direct galiléen  $\mathcal{R}_0 = (O; \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$  est lié à un bâti fixe  $S_0$ , alors que les repères  $\mathcal{R}_1 = (O; \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_0)$  et  $\mathcal{R}_2 = (C; \underline{x}_1, \underline{y}_2, \underline{z}_2)$  sont liés aux solides  $S_1$  et  $S_2$  respectivement.

Le solide  $S_1$  est en liaison pivot  $(O, \underline{z}_0)$  avec le bâti. On note  $OC = \alpha \underline{x}_1$  et  $\alpha = (\underline{x}_0, \underline{x}_1)$ .

Le solide  $S_2$ , de centre d'inertie  $C$  et de masse  $M$ , est en liaison pivot  $(G, \underline{x}_1)$  avec  $S_1$ . On note  $\beta = (\underline{y}_1, \underline{y}_2)$ .

On tient compte de l'existence d'un déséquilibre de l'hélice en rotation en introduisant un balourd  $S_3$  représenté par une masse ponctuelle de masse  $m$ , située en un point  $P$  tel que  $\underline{CP} = b \underline{z}_2$ .

Les liaisons sont toutes supposées parfaites.

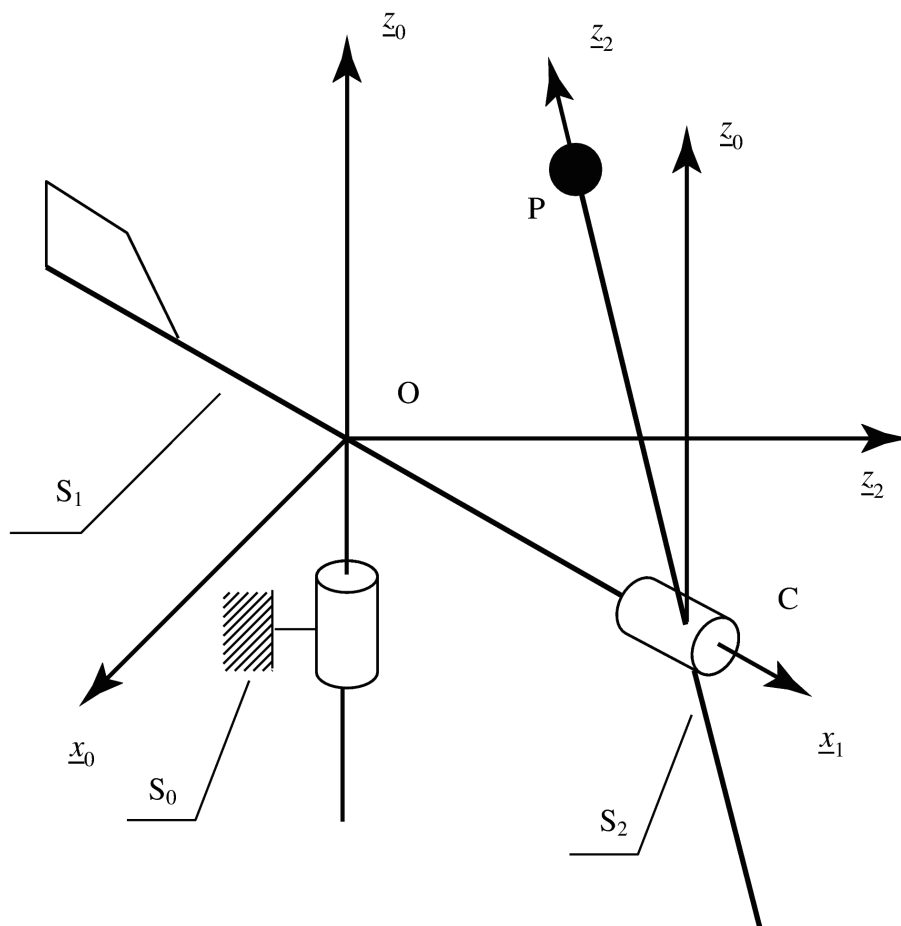


Figure 6 – Éolienne

### Indications :

- on suppose que l'axe  $(O, \underline{z}_0)$  est une direction principale d'inertie de  $S_1$  et on note  $I$  le moment d'inertie de  $S_1$  par rapport cet axe.

— on note  $[J_{S_2}(C)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$  la matrice d'inertie du solide  $S_2$  en  $C$  exprimée dans la base  $(\underline{x}_1, \underline{y}_2, \underline{z}_2)$ .

### Questions

1. Déterminer le moment cinétique au point  $O$ , par rapport à l'axe  $(O, \underline{z}_0)$ , de la girouette  $S_1$  dans son mouvement par rapport au bâti.
2. Déterminer le moment cinétique au point  $O$ , par rapport à l'axe  $(O, \underline{z}_0)$ , de l'hélice  $S_2$  dans son mouvement par rapport au bâti.
3. Déterminer le moment cinétique au point  $O$ , par rapport à l'axe  $(O, \underline{z}_0)$ , du balourd  $S_3$  dans son mouvement par rapport au bâti.

### Exercice 13. Matrice d'inertie d'une sphère, d'une demi-sphère

1. Déterminer la matrice d'inertie d'une sphère  $S$  homogène, de rayon  $R$  et de masse  $m$ , en son centre d'inertie  $C$ .

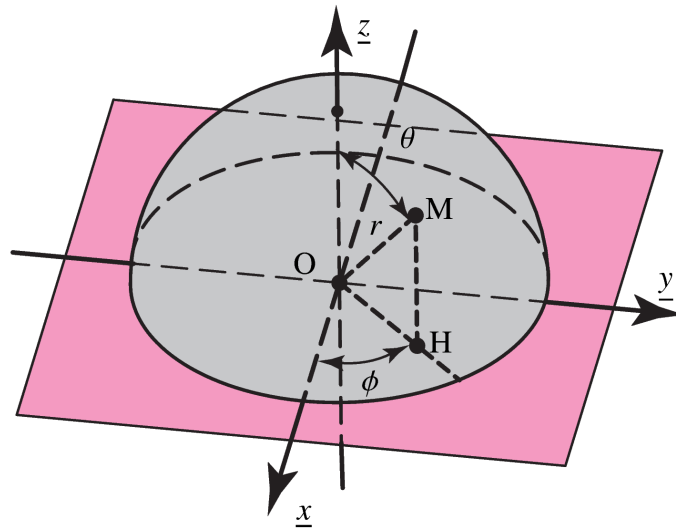


Figure 7 – Coordonnées sphériques.

2. En déduire la matrice d'inertie d'une demi-sphère  $S'$  homogène, de rayon  $R$  et de masse  $m$ , au centre  $O$  de sa base. Donner ensuite la matrice d'inertie de  $S'$  en son centre d'inertie  $C'$ .

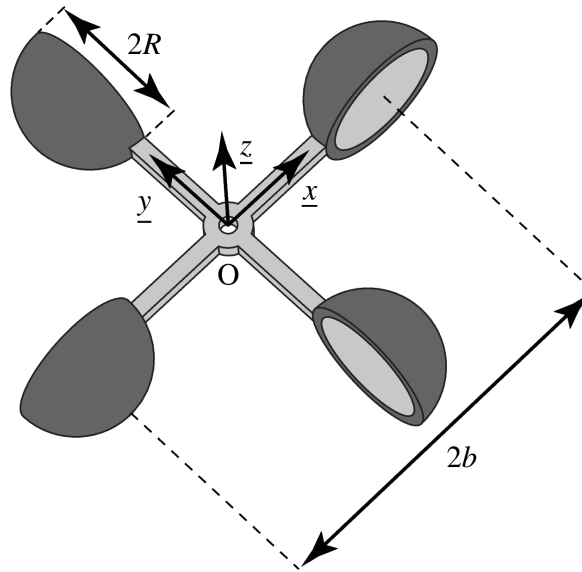
## Exercice 14. Anémomètre.

### Objectifs :

- ▶ Calculer un moment cinétique à l'aide de la matrice d'inertie.
- ▶ Obtenir la matrice d'inertie d'un ensemble de solides par assemblage des matrices de chaque solide.

**Pendule double par matrices d'inertie.** Retrouver les moments cinétiques déjà obtenus (dans un précédent TD) en appliquant le formalisme des matrices d'inertie.

### Anémomètre à coupelles.



Un anémomètre à coupelles est un appareil que l'on utilise pour mesurer la vitesse du vent. Il est constitué de quatre coupelles  $S_i$ , de centre respectifs  $O_i$  ayant la forme de demi-sphères creuses (cf figure ci-dessus). Les coupelles sont homogènes, de masse  $m$  et de rayon  $R$ . Leurs centres sont situés à la distance  $b$  de l'axe de rotation  $(O, z)$ . On néglige l'inertie des tiges assurant la liaison entre les coupelles.

### Questions

1. Soit  $\mathcal{R} = (O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  un repère lié à l'anémomètre  $S$ . Calculer le moment d'inertie de  $S$  par rapport à  $(O, z)$ . On pourra commencer par déterminer le moment d'inertie d'une sphère creuse de centre  $O$  de rayon  $R$  de masse  $M$  par rapport à un axe quelconque passant par  $O$ .
2. On suppose que l'anémomètre est en liaison pivot d'axe  $(O, z)$  par rapport au bâti 0. On introduit  $\mathcal{R}_0 = (O, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$  un repère lié au bâti avec l'angle  $\alpha = (\underline{x}_0, \underline{x}) = (\underline{y}_0, \underline{y})$ . Calculer le moment cinétique au point  $O$  de l'anémomètre dans son mouvement par rapport au bâti.

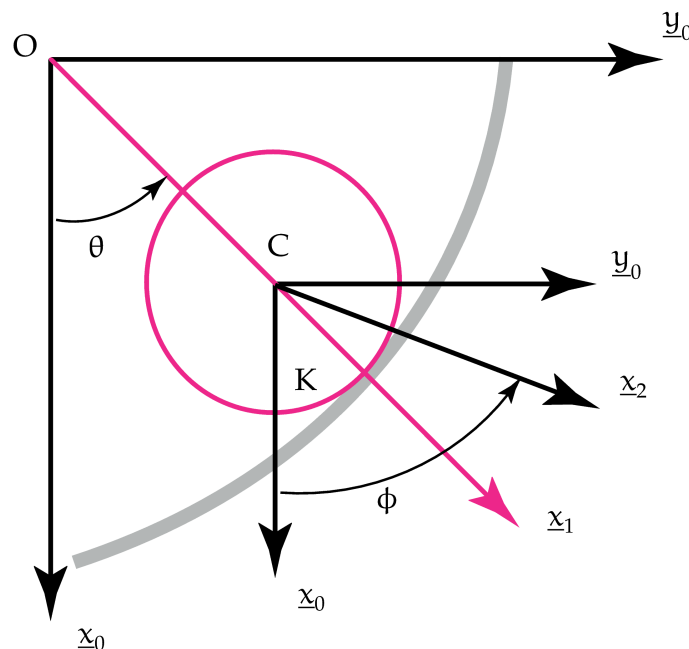
## 4 Dynamique

### Exercice 15. Boule sur piste circulaire.

Objectifs :

- ▶ Faire la distinction entre efforts intérieurs et efforts extérieurs.
- ▶ Analyser les efforts de liaison.
- ▶ Établir les équations du mouvement.

On se propose d'étudier le mouvement d'une boule B de centre C, de rayon  $r$ , de masse  $m$  et de moment principal d'inertie  $I$ , assujettie à rouler sur une piste circulaire de centre O et de rayon  $R$  avec  $R \geq r$ . On suppose que le référentiel lié à la piste est galiléen. On note  $(\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$  la base liée à la piste avec  $\underline{x}_0$  vertical descendant. La position de la boule, liée à la base  $(\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2)$  est repérée au moyen des angles  $\theta$  et  $\phi$  et de la base intermédiaire  $(\underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$  tels que  $\theta = (\underline{x}_0, \underline{x}_1)$  et  $\phi = (\underline{x}_0, \underline{x}_2)$  mesurés tous deux autour de  $\underline{z}_0$ .



### Questions

1. Calculer la vitesse et l'accélération du point C.
2. Calculer  $\dot{\phi}$  en fonction de  $\dot{\theta}$  lorsqu'il y a roulement sans glissement en K, point de contact entre la boule et la piste.
3. Calculer  $I$  et donner la matrice d'inertie  $J_C(B)$  de la boule en son centre C dans la base  $(\underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$ .
4. Détailler le bilan des efforts appliqués à la boule.
5. Calculer le moment dynamique  $\delta(\underline{K}, B/0)$ .
6. Donner la valeur des efforts de réaction en K en fonction de  $\theta, \dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ .

**Application du Théorème du moment dynamique.** On considère à nouveau le système constitué de la boule B en mouvement sur la piste circulaire P, et on cherche à présent à obtenir l'équation du mouvement de B dans le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ . D'après les calculs effectués

plus haut, le mouvement peut être caractérisé par un seul paramètre à choisir parmi  $\theta$  ou  $\phi$ , ce qui signifie qu'il n'y a une seule équation indépendante pour décrire la dynamique du système. Nous allons déterminer cette équation du mouvement de deux manières, d'abord par application du Théorème du moment dynamique, puis par application du Théorème de l'énergie cinétique.

**Théorème de l'énergie cinétique.** On considère à nouveau le système constitué de la boule B en mouvement sur la piste circulaire P et on cherche à présent à obtenir l'équation du mouvement de B dans le repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ . D'après les calculs effectués plus haut, le mouvement peut être caractérisé par un seul paramètre à choisir parmi  $\theta$  ou  $\phi$ , ce qui signifie qu'il y a une seule équation indépendante pour décrire la dynamique du système. Nous allons déterminer cette équation du mouvement de deux manières, d'abord par application du Théorème du moment dynamique, puis par application du

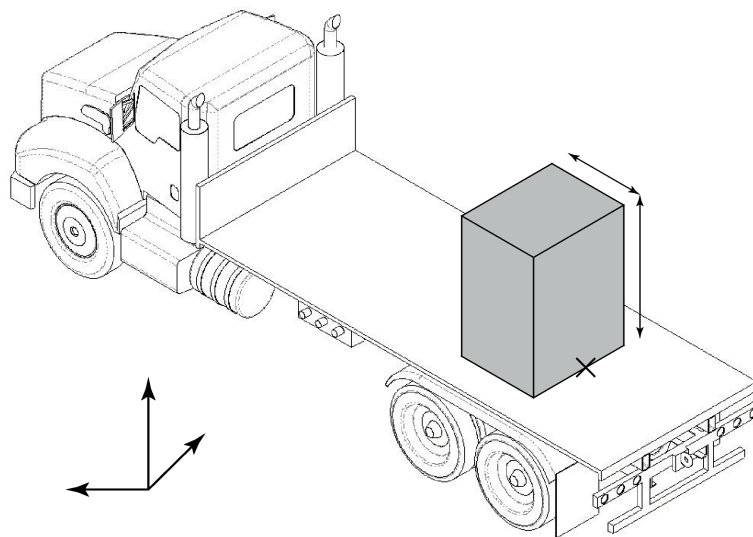
7. Calculer l'énergie cinétique  $T_g(B/0)$  de la boule par rapport au repère lié à la piste.
8. Calculer la puissance galiléenne des efforts extérieurs  $P_g(\text{ext} \rightarrow B)$  dans le repère lié à la piste. On montrera en particulier que les efforts de réaction de la piste ne travaillent pas.
9. Écrire l'équation du mouvement obtenue à partir du théorème de l'énergie cinétique.
10. L'intégrer une fois par rapport au temps et retrouver le théorème de l'énergie mécanique.

## Exercice 16. Camion.

### Objectifs :

- ▷ Déterminer les éléments de réduction Torseur Dynamique.
- ▷ Formuler le PFD.
- ▷ Distinguer les efforts de contact des efforts volumiques.

On étudie la stabilité de caisses lors de leur transport sur un camion (1) se déplaçant en ligne droite sur une route horizontale (0). Le repère lié à la route est supposé galiléen et est noté  $\mathcal{R}_0 = (O, \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z})$  où la direction de  $\underline{X}$  est celle de la route. L'accélération de la pesanteur est  $\underline{g} = -g\underline{Y}$  (avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ).



Étant donné le mouvement rectiligne du camion, l'analyse se ramène à un problème plan. Dans le plan  $(A, \underline{x}, \underline{y})$ , la caisse (2) est assimilée à un rectangle de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , de hauteur  $2h$  et de largeur  $2a$ . On notera  $I$  le moment d'inertie de la caisse par rapport à l'axe  $(C, \underline{z})$ .

1. Faire le bilan des actions agissant sur la caisse.

On suppose dans un premier temps que le camion a une *vitesse constante* par rapport à (0) et que la caisse est stable (sa vitesse par rapport à la route est la même que celle du camion).

2. Que peut-on dire du repère lié au camion ?
3. Montrer que le torseur des efforts de contact de la plateforme du camion sur la caisse  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$  se réduit à un glisseur et trouver son axe central.

Lors d'une accélération (resp. d'un freinage) trop brusque la caisse peut glisser ou basculer vers l'arrière (resp. vers l'avant). On s'intéresse aux conditions du basculement en supposant qu'il se produit à un instant  $t = t_{\text{basc}}$  (l'accélération du camion à cet instant est  $\gamma_{\text{basc}}$ ).

On suppose que la caisse est en liaison pivot d'axe  $(A, \underline{z})$  en  $A$  avec le camion. On introduit un référentiel  $\mathcal{R} = (A, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  attaché à la caisse tel que  $\theta(t) = (\widehat{\underline{Y}, \underline{y}})$ .

1. En appliquant le PFD, obtenez une relation entre l'accélération du camion  $\gamma, \ddot{\theta}, \dot{\theta}$  et  $\theta$ .
2. Identifier les conditions de basculement.
3. Conclure.

## Exercice 17. Cylindres sur un plan incliné (sujet d'examen 2016-17).

On souhaite étudier le mouvement d'une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable posée sur deux rouleaux cylindriques, d'axes parallèles, reposant sur un plan incliné.

Le système complet est constitué de 4 solides numérotés comme suit (voir FIGURE 8) :

- le plan (0) (qui joue le rôle de bâti) ;
- les cylindres de révolution (1) et (2), identiques, de masse  $m$ , homogènes, de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , qui roulent sans glisser sur le plan (0) ;
- la plaque rectangulaire (3), d'épaisseur négligeable, de masse  $m_3$ , homogène, de longueur  $L$ , de largeur  $\ell$ , qui roule sans glisser sur les deux cylindres.

Le vecteur unitaire  $\vec{z}_0$  est normal au plan (0) et  $O$  est un point de ce plan. On notera  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) le centre de masse du cylindre (1) (resp. (2)) et  $C_3$  le centre de masse de la plaque. Le vecteur  $\vec{x}_i$  est attaché au cylindre (i) de telle sorte que  $(C_i, \vec{x}_i)$  coïncide avec son axe de révolution ( $i = 1, 2$ ).

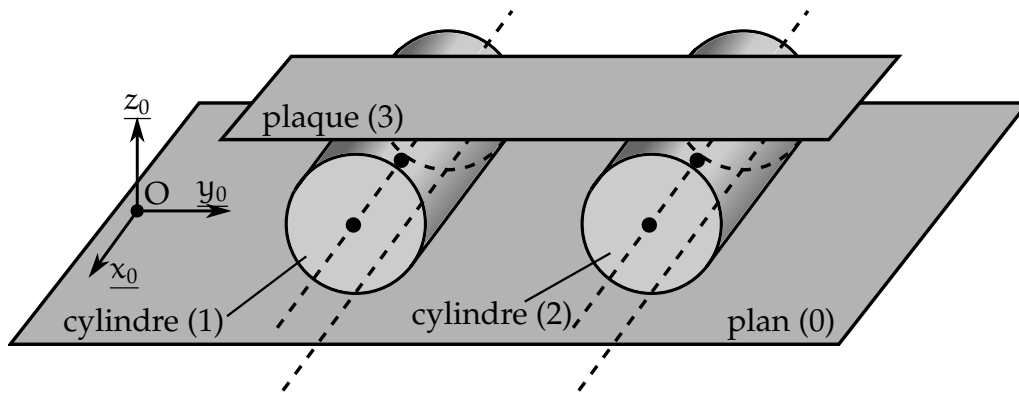


Figure 8 – Schéma de la plaque reposant sur les cylindres.

La condition de contact entre un cylindre et le plan peut s'écrire  $\begin{cases} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{OC_i} = R \\ \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_i = 0 \end{cases}$ . Lorsque cette double condition est satisfaite, la région de contact entre le cylindre et le plan est une génératrice  $(\Delta_i)$ .

La condition de contact entre la plaque et les deux cylindres est  $\overrightarrow{C_1M} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{C_2M} \cdot \vec{z}_0 = R$ , pour tout point matériel  $M \in (3)$ .

Dans le but de décrire le mouvement des différents solides, on définit les référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au plan (0) et est supposé galiléen.
- $\mathcal{R}'_i = (C_i, \vec{x}_i, \vec{v}_i, \vec{z}_0)$  est un référentiel auxiliaire, introduit pour des raisons de commodité, avec  $\vec{v}_i = \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_i$  et dans lequel l'axe du cylindre (i) ainsi que la génératrice de contact  $(\Delta_i)$  sont immobiles. Notez que  $\mathcal{R}'_i$  n'est pas attaché à un solide particulier. L'angle  $\phi_i(t) = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_i}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{v}_i})$  est mesuré autour de  $\vec{z}_0$ .
- $\mathcal{R}_i = (C_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  est lié au cylindre ( $i = 1, 2$ ). L'angle  $\theta_i(t) = (\widehat{\vec{v}_i, \vec{y}_i}) = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}_i})$  est mesuré autour de  $\vec{x}_i$ .
- $\mathcal{R}_3 = (C_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié à la plaque (3). La rotation 3/0 est décrite par l'angle  $\varphi(t) = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_3}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_3})$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ .

Dans l'état initial ( $t = 0$ ), on a  $\theta_1 = 0$ , càd  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_0$  sont alignés.



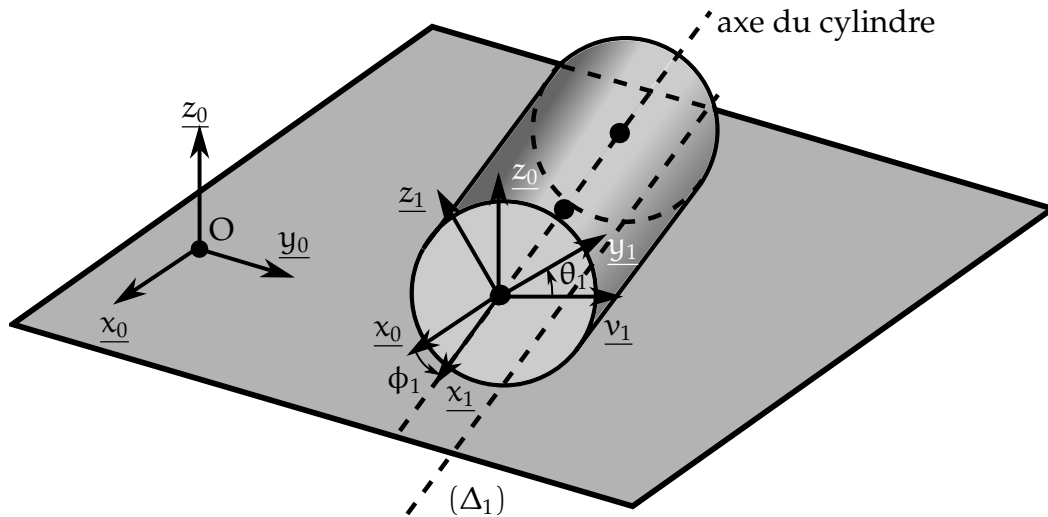


Figure 9 – Cylindre (1) sur le plan (0).

## Cinématique

Dans un premier temps, seuls le cylindre (1) et le plan (0) sont pris en compte (FIGURE 9). On supposera que le plan (0) est horizontal (l'attraction de la pesanteur n'interviendra que dans la partie Dynamique).

On va montrer dans cette partie que, les roulements étant sans glissement, le mouvement du système est nécessairement plan-sur-plan.

- Dessiner les diagrammes de changement de base pour les angles  $\phi_1$  et  $\theta_1$ .
  - Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'_1)$  puis  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ .
- Exprimer la condition de roulement sans glissement (RSG) de (1) sur (0).
- Écrire une relation entre les vecteurs vitesse  $\vec{V}(M_1 \in 1/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{V}(M_2 \in 1/\mathcal{R}_0)$ . En prenant pour  $M_1$  et  $M_2$  deux points de la génératrice  $(\Delta_1)$ , utiliser la condition RSG pour montrer que  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{x}_1$  sont colinéaires.
- Utilisez les questions précédentes pour montrer que  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$ .
  - En déduire la loi horaire de  $\phi_1(t)$  en prenant en compte la condition initiale  $\phi_1(0) = 0$ .
  - En déduire que  $\underline{x}_1 = \underline{x}_0$  et  $\underline{v}_1 = \underline{y}_0$  pour tout  $t$ .
  - Donner l'expression simplifiée de  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ .
- Exprimer la vitesse du centre de masse du cylindre  $\vec{V}(C_1 \in 1/\mathcal{R}_0)$ .

Dans la suite, on prend en compte la plaque et les deux cylindres dont les axes sont disposés parallèlement (suivant  $\vec{x}_0$ ).

On admettra que les résultats obtenus pour le cylindre (1) dans les questions précédentes sont aussi valables pour le cylindre (2) et qu'en particulier  $\phi_1(t) = \phi_2(t) \equiv 0$  et  $\vec{V}(C_i/\mathcal{R}_0) = -R\dot{\theta}_i \vec{y}_0$  ( $i = 1, 2$ ).

On note  $J_i$  le point de contact entre la plaque (3) et  $i$  (cf. FIGURE 10) et on suppose qu'à  $t = 0$ ,

$$\text{on a } \varphi(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0, \overrightarrow{OC_3}(0) = 2R\vec{z}_0 \text{ et } \begin{cases} \overrightarrow{OC_2}(0) = \frac{1}{4}L\vec{y}_0 + R\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{OC_1}(0) = -\frac{1}{4}L\vec{y}_0 + R\vec{z}_0 \end{cases}.$$

6. En prenant en compte les conditions initiales, établir la loi horaire du vecteur position  $\overrightarrow{OC_i}$ .

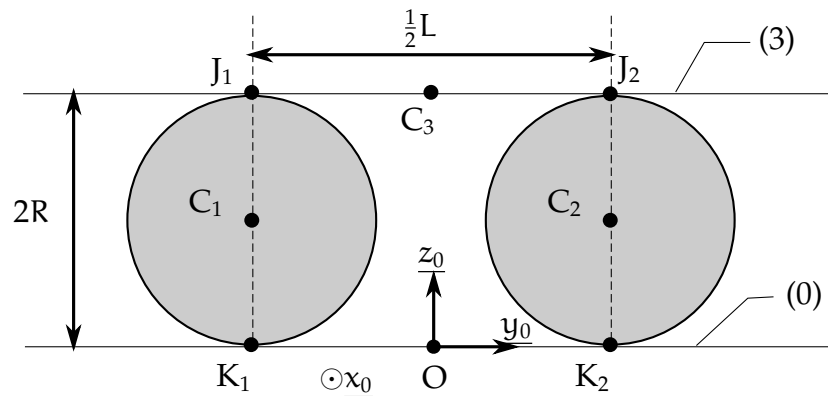


Figure 10 – Système complet dans l'état initial ( $t = 0$ ).

7. Exprimer le vecteur vitesse instantanée de rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0)$ .
8. Montrer que la condition de roulement sans glissement en  $J_i$  se traduit par  $\vec{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0)$  pour  $i = 1, 2$ .
9. Exprimer la vitesse  $\vec{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0)$  en fonction de  $R$  et  $\dot{\theta}_i$ .
10. (a) Écrire une relation entre  $\vec{V}(J_1 \in 3/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{V}(J_2 \in 3/\mathcal{R}_0)$  faisant intervenir le vecteur  $\overrightarrow{J_1J_2}$ .  
 (b) En partant de la dernière relation et en utilisant les questions précédentes, établir une relation vectorielle contenant  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .  
 (c) En déduire que  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$  et que  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t$ .  
 Dans toute la suite, on notera simplement  $\theta(t) = \theta_1(t) = \theta_2(t)$ .
11. Exprimer  $\vec{V}(C_3 \in 3/\mathcal{R}_0)$  en fonction de  $R$ ,  $\dot{\theta}$ . En déduire  $\overrightarrow{OC_3}$  en fonction de  $\theta(t)$ .
12. À l'aide de la décomposition  $\overrightarrow{J_iC_3} = \overrightarrow{J_iC_i} - \overrightarrow{OC_i} + \overrightarrow{OC_3}$ , montrer que
- $$\begin{cases} \overrightarrow{J_1C_3}(t) = (\frac{1}{4}L - R\theta(t))\vec{y}_0 \\ \overrightarrow{J_2C_3}(t) = -(\frac{1}{4}L + R\theta(t))\vec{y}_0 \end{cases}, \quad \forall t.$$
13. Vérifier que l'on a  $\overrightarrow{J_1J_2} = \frac{1}{2}L$  pour tout  $t$ .
14. Quel type de liaison vous évoque la nature du mouvement relatif de la plaque (3) par rapport au plan (0)? Précisez l'axe de cette liaison.

## Cinétique

Vous pouvez admettre pour répondre aux questions suivantes que le problème est plan-sur-plan, que  $\vec{x}_3 = \vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_3 = \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{J_1J_2} = \frac{1}{2}L\vec{y}_0$  pour tout  $t$ .

On notera  $I$  le moment d'inertie des cylindres autour de leur axe ( $C_i, \vec{x}_0$ ).

1. Exprimer, en fonction de  $\dot{\theta}$  et des données du problème, les torseurs cinétiques  $\{\mathcal{C}(1/\mathcal{R}_0)\}_{C_1}$  et  $\{\mathcal{C}(2/\mathcal{R}_0)\}_{C_2}$  des cylindres (1) et (2) dans leur mouvement par rapport au plan (0), en leur centre de masse.

**Rappel :** le moment d'inertie d'un cylindre homogène, de masse  $m$ , de rayon  $R$ , autour de son axe de révolution est  $I = \frac{1}{2}mR^2$ .

- Calculez l'énergie cinétique  $T(1/0)$ ,  $T(2/0)$  des cylindres (1) et (2) dans leur mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .
- Justifiez par des arguments de symétrie que la matrice d'inertie  $[J_3(C_3)]$  de la plaque (3) en son centre de masse est diagonale dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ?

On posera  $[J_3(C_3)]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$  pour la suite.

- Justifiez que  $C = A + B$ .
- Calculez directement A et B en fonction de  $m_3$ , L et  $\ell$ . En déduire C.
- Exprimer, en fonction de  $\dot{\theta}$  et des données du problème, le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(3/\mathcal{R}_0)\}_{C_3}$  de la plaque dans son mouvement par rapport au plan (0), au centre de masse.
- Calculez  $T(3/0)$ , l'énergie cinétique de la plaque dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

## Dynamique

On note  $\alpha$  l'angle d'inclinaison du plan (0). L'accélération de la pesanteur s'écrit  $\vec{g} = -g(-\sin \alpha \vec{y}_0 + \cos \alpha \vec{z}_0)$ . L'état initial du système est celui de la FIGURE 11. Toutes les vitesses initiales sont nulles et en particulier  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Les actions mécaniques entre les cylindres (1), (2) et le plan (0) (resp. la plaque (3)) sont modélisées par des glisseurs de moment nul en  $K_1$  et  $K_2$  (resp. en  $J_1$  et  $J_2$ ) :

$$\{\mathcal{A}(0 \rightarrow i)\}_{K_i} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow i} \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \{\mathcal{A}(i \rightarrow 3)\}_{J_i} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{i \rightarrow 3} \\ 0 \end{array} \right\}.$$

On notera dans la suite  $\vec{R}_{0 \rightarrow i} = P_i \vec{x}_0 + Q_i \vec{y}_0 + R_i \vec{z}_0$  et  $\vec{R}_{i \rightarrow 3} = X_i \vec{x}_0 + Y_i \vec{y}_0 + Z_i \vec{z}_0$ .

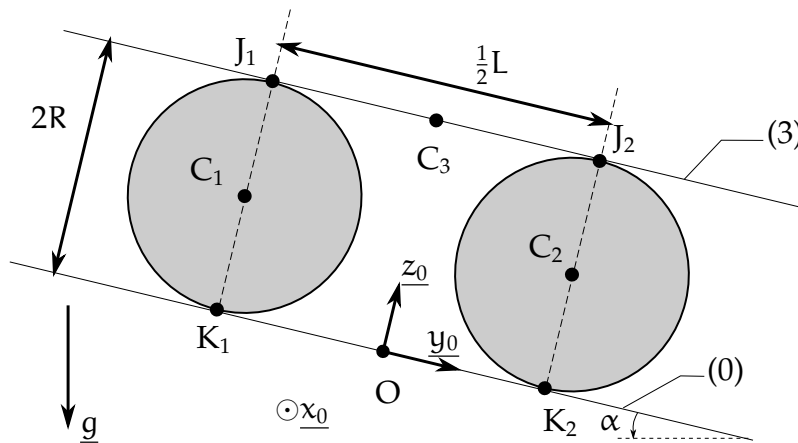


Figure 11 – Système complet dans l'état initial ( $t = 0$ ).

- Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}_{C_3}$ .
- (a) Après avoir clairement précisé le solide à isoler et dressé le bilan des actions mécaniques le concernant, appliquer le théorème de la résultante dynamique et exprimer le vecteur  $\vec{R}_{1 \rightarrow 3} + \vec{R}_{2 \rightarrow 3}$  en fonction de  $m_3$ ,  $\ddot{\theta}$  et des données du problème.

- (b) Dédurre de la relation précédente trois relations scalaires exprimant  $X_1 + X_2$ ,  $Y_1 + Y_2$  et  $Z_1 + Z_2$  en fonction de  $m_3$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  (et ses dérivées par rapport au temps) et les données géométriques du problème.
3. (a) Appliquer le théorème du moment dynamique à la plaque (3) dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  au point de votre choix. En déduire une relation vectorielle dans laquelle vous ne cherchiez pas à calculer les produits vectoriels qui pourraient apparaître.
- (b) En déduire les expressions de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$ .
4. Exprimer les torseurs dynamiques  $\{\mathcal{D}(1/0)\}_{C_1}$  et  $\{\mathcal{D}(2/0)\}_{C_2}$ .
5. (a) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cylindre (i) dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ . En déduire une relation vectorielle donnant  $\overrightarrow{R_{0 \rightarrow i}} - \overrightarrow{R_{i \rightarrow 3}}$ .
- (b) En déduire les équations scalaires donnant  $P_i - X_i$ ,  $Q_i - Y_i$  et  $R_i - Z_i$  pour  $i = 1, 2$ .
6. (a) Appliquer le théorème du moment dynamique au cylindre (i) dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  au point  $C_i$ . En déduire une relation vectorielle (vous ne cherchiez pas à calculer les produits vectoriels qui y figurent).
- (b) En déduire les expressions (scalaires) pour  $X_i + Q_i$ ,  $Y_i + Q_i$  pour  $i = 1, 2$ .
7. Trouver une équation du mouvement pour le système en combinant les résultats des questions précédentes.
8. Exprimer les efforts de contact  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$ .

## Énergétique

1. Exprimer les puissances mutuelles de liaison  $\mathcal{P}(1 \leftrightarrow 3)$  et  $\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 3)$ .
2. Exprimer les puissances galiléennes
  - (a)  $\mathcal{P}(0 \rightarrow 1/\mathcal{R}_0)$  et  $\mathcal{P}(0 \rightarrow 2/\mathcal{R}_0)$ ,
  - (b)  $\mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow 1/\mathcal{R}_0)$  et  $\mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow 2/\mathcal{R}_0)$ ,
  - (c)  $\mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow 3/\mathcal{R}_0)$ .
3. Retrouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système  $1 \cup 2 \cup 3$ .

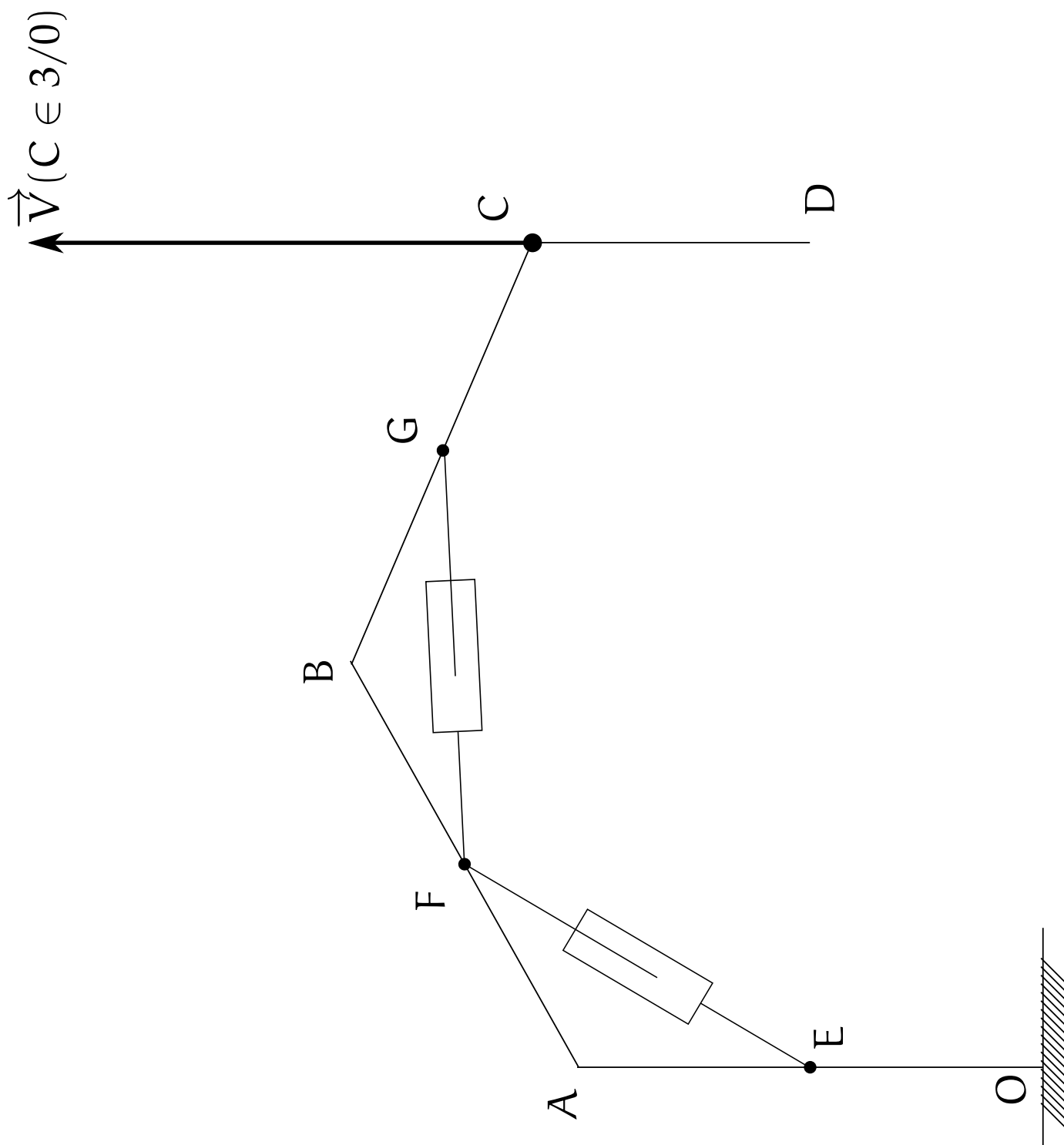


Figure 12 – Schéma à utiliser pour traiter la partie graphique.