

LICENCE DE MÉCANIQUE

# **LU3ME006 - Structures élastiques**

## **Résistance Des Matériaux**



AMÂNCIO FERNANDES

([amancio.fernandes@sorbonne-universite.fr](mailto:amancio.fernandes@sorbonne-universite.fr))



Année 2019 – 2020



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction à la RDM - Rappels sur la statique des solides</b>	<b>5</b>
I Introduction . . . . .	5
II Rappels sur la statique des solides . . . . .	7
II.1 Modélisation des actions mécaniques . . . . .	7
II.1.a Notion de force et de moment . . . . .	7
II.1.b Torseur résultant . . . . .	8
II.2 Principe Fondamental de la Statique . . . . .	9
II.3 Liaisons et actions de contact entre deux solides . . . . .	9
II.4 Systèmes isostatiques et hyperstatiques . . . . .	11
<b>2 Statique des milieux curvilignes</b>	<b>15</b>
I Définition d'un milieu curviligne . . . . .	15
II Caractéristiques géométriques des sections planes . . . . .	18
II.1 Moment statique et centre de gravité . . . . .	18
II.1.a Moment statique . . . . .	18
II.1.b Centre de gravité . . . . .	19
II.2 Moments et produits quadratiques d'une surface plane . . . . .	20
II.2.a Moment quadratique par rapport à un axe . . . . .	21
II.2.b Moment quadratique polaire ou moment de giration . . . . .	26
II.3 Exemples . . . . .	26
III Poutres curvilignes tridimensionnelles . . . . .	28
III.1 Efforts extérieurs . . . . .	28
III.2 Equations d'équilibre global . . . . .	28
III.3 Efforts intérieurs . . . . .	29
III.4 Equations d'équilibre du tronçon $]s, \ell[$ ( $0 < s < \ell; s \neq s_i$ ) . . . . .	31
III.5 Equations d'équilibre locales . . . . .	33
IV Poutres curvilignes planes . . . . .	36
V Poutres droites . . . . .	37
VI Exemples . . . . .	39
<b>3 Cinématique et lois de comportement des milieux curvilignes élastiques</b>	<b>43</b>
I Cinématique, déformations des poutres curvilignes . . . . .	43
I.1 Hypothèses cinématiques . . . . .	43
I.2 Déformations . . . . .	44
I.3 Hypothèse d'Euler-Bernoulli . . . . .	47
II Cas des poutres droites tridimensionnelles . . . . .	48

III	Cas des poutres curvilignes planes à plan de symétrie . . . . .	53
III.1	Poutres curvilignes planes ( $R_t(s) \rightarrow \infty$ ) . . . . .	53
III.2	Poutres droites planes ( $R_c(s) \rightarrow \infty$ ) . . . . .	56
IV	Sollicitations simples . . . . .	57
IV.1	Effort normal (traction-compression) . . . . .	57
IV.2	Moment de flexion (flexion pure) . . . . .	60
IV.2.a	Calcul du point de vue géométrique des contraintes normales . . . . .	60
IV.2.b	Dimensionnement . . . . .	61
IV.2.c	Equation de la déformée . . . . .	62
IV.3	Effort tranchant . . . . .	64
IV.4	Moment de torsion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Méthodes énergétiques</b> . . . . .	<b>67</b>
I	Energie de déformation . . . . .	67
I.1	Définitions . . . . .	67
I.1.a	Energies propres . . . . .	67
I.1.b	Energies échangées avec l'extérieur . . . . .	67
I.2	Théorème de Clapeyron . . . . .	69
I.2.a	Coefficients d'influence . . . . .	69
I.2.b	Formule de Clapeyron . . . . .	70
I.3	Expression de l'énergie de déformation dans le cadre de la RDM . . . . .	71
II	Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti . . . . .	74
III	Théorème de Castigliano . . . . .	77
IV	Théorème de la charge fictive (théorème de Bertrand de Fontviolant) . . . . .	80
V	Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal) . . . . .	82

# Chapitre 1

## Introduction à la RDM - Rappels sur la statique des solides

### Sommaire

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Rappels sur la statique des solides</b>	<b>7</b>
II.1	Modélisation des actions mécaniques	7
II.2	Principe Fondamental de la Statique	9
II.3	Liaisons et actions de contact entre deux solides	9
II.4	Systèmes isostatiques et hyperstatiques	11

### I Introduction

La RDM (Résistance Des Matériaux) ou Mécanique des Structures est issue de la théorie plus générale : la MMC (Mécanique des Milieux Continus) [cf 3A004 et début du 3A006]. En MMC même si sur le plan théorique le problème est dit mathématiquement bien posé (existence de la solution), sur le plan pratique on ne peut que très rarement calculer cette solution de façon explicite.

Pour des géométries et des chargements particuliers, on peut **simplifier** le problème en cherchant une approximation de la solution 3D exacte. En effet :

- si **une** dimension est négligeable devant les deux autres  $\implies$  théorie des plaques ou des coques [cf Partie Cours Plaques-Structures Elancées en M1 MSGC].
- si **deux** dimensions sont négligeables devant la 3<sup>ème</sup> ( $L/h > 5$  et rayon de courbure de  $L$  grand devant les dimensions transversales)  $\implies$  **théorie des poutres**.

**Hypothèses simplificatrices en théorie des poutres :**

(H1) Matériau élastique linéaire, homogène et isotrope.

(H2) **Hypothèses des petites perturbations (HPP)** : petites déformations, petits déplacements (sauf pour le chapitre de flambement).



Début des travaux au XVII<sup>ème</sup> (1638) par **Galilée** sur la tension et la flexion des poutres.  
**Mariotte** (1680) : flexion linéaire des poutres élastiques (relation linéaire entre la courbure et le moment de flexion)  
**Bernoulli** (1634-1782) et **Euler** (1707-1783) notamment équation différentielle de la flexion élastique

Pour les méthodes énergétiques : **Menabrea** (1858) et **Castigliano** (1874)

**Nombreux domaines d'applications :**

Génie civil (bâtiments, ponts, câbles, pylônes), Aérospatiale (avions), ...

## II Rappels sur la statique des solides

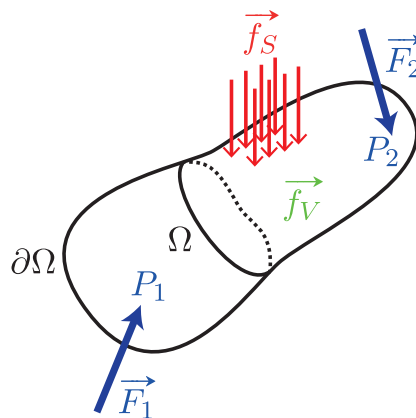
On ne s'intéresse par la suite qu'aux structures supposées **immobiles** et en **équilibre** sous l'effet de diverses actions qui leur sont appliquées.

### II.1 Modélisation des actions mécaniques

action mécanique  $\equiv$  toute cause susceptible de déplacer ou de déformer un solide.

#### II.1.a Notion de force et de moment

On considère un solide  $\Omega$  délimité par une frontière  $\partial\Omega$  :



Les actions mécaniques peuvent s'appliquer soit par **contact direct** sur la frontière  $\partial\Omega$  soit à **distance** au sein du solide  $\Omega$ .

Il existe plusieurs types d'efforts :

- i) les densités volumiques de forces  $\vec{f}_V$  (dimension  $[N/m^3]$ ) (exemple : forces de pesanteur  $\vec{f}_V = \rho \vec{g}$  ou forces électromagnétiques)
- ii) les densités surfaciques de forces  $\vec{f}_S$  (dimension  $[N/m^2]$ ) constituent des **forces réparties** appliquées sur une partie importante de la surface d'un solide (représentées par un ensemble de vecteurs)

iii) lorsque la surface de contact est très petite, on peut considérer une **force ponctuelle (ou concentrée)**  $\vec{F}_i$  en  $P_i$  (dimension  $[N]$ ).

Il est plus usuel d'utiliser les **résultantes** de ces forces qui s'obtiennent par intégration volumique ou surfacique :

$$\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} = \int_{\Omega} \vec{f}_V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{f}_S dS + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (1.1)$$

Pour calculer le point d'application de cette résultante, on doit calculer le moment de ces forces par rapport à un point  $A$  par exemple (dimension  $[N.m]$ )

$$\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) = \int_{\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_S dS + \sum_{i=1}^N \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \quad (1.2)$$

qui peut s'exprimer sous la forme  $\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) = \vec{AQ} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}$  où le point  $Q$  est le point d'application de la résultante  $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}$ .

**Remarque :**

$\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) = \vec{0}$  si le support (ligne d'action) de  $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}$  passe par  $A$  ou si  $\|\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}\| = 0$ .

**Relation vectorielle :**

$$\begin{aligned} \vec{M}_B(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) &= \vec{BQ} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \\ &= \vec{BA} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} + \underbrace{\vec{AQ} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}}_{\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega})} \end{aligned} \quad (1.3)$$

d'où la **formule de transport ou relation de Varignon** :

$$\boxed{\vec{M}_B(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) = \vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}} \quad (1.4)$$

**Remarque :**

Lorsque  $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}$  est nulle mais que le moment ne l'est pas, le moment ne dépend pas de la position du point  $B$ . Dans ce cas le moment est appelé un **couple**.

### II.1.b Torseur résultant

Le torseur résultant (ou torseur des actions mécaniques) est défini par la réunion de deux champs vectoriels : la résultante des actions mécaniques  $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}$  et le moment résultant, par rapport au point  $A$ , des actions mécaniques  $\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega})$  appelés **éléments de réduction** au point  $A$  du torseur des actions mécaniques. Le torseur résultant est noté :

$$\{\mathfrak{C}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \\ \vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) \end{array} \right\}_A \quad (1.5)$$



de même :

$$\{\mathcal{C}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \\ \vec{M}_B(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) = \vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \end{array} \right\}_B \quad (1.6)$$

## II.2 Principe Fondamental de la Statique

Un solide est en équilibre si les actions mécaniques **extérieures** appliquées à  $\Omega$  vérifient :

$$\{\mathcal{C}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \\ \vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) \end{array} \right\}_A = \{0\}_A \quad \forall A \quad (1.7)$$

On obtient alors :

(théorème de la résultante)

$$\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} \stackrel{(1.1)}{=} \int_{\Omega} \vec{f}_V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{f}_S dS + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \quad (1.8)$$

(théorème du moment  $A$ )

$$\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega}) \stackrel{(1.2)}{=} \int_{\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_S dS + \sum_{i=1}^N \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$$

## II.3 Liaisons et actions de contact entre deux solides

Un système matériel est au contact d'autres solides par l'intermédiaire de liaisons.

Dans le repère cartésien :

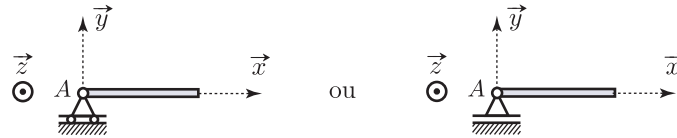
- un solide libre 3D possède 6 degrés de liberté (ddl)  
 $\implies$  trois translations  $u_x, u_y, u_z$  et trois rotations  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$
- un solide libre 2D possède 3 degrés de liberté (ddl)  
 $\implies$  deux translations  $u_x, u_y$  et une rotation  $\theta_z$

A chaque ddl supprimé (translation ou rotation) correspond une réaction d'appui ou réaction de liaison dans la direction du mouvement bloqué.

Si le mouvement de translation est entravé dans une direction donnée, il y a apparition d'une force de liaison ayant cette direction. De même, si le mouvement de rotation autour d'un axe est entravé, il y a apparition d'un couple de liaison ayant pour support l'axe entravé.

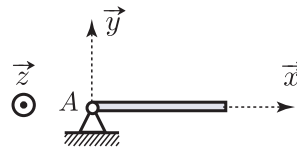
### Illustration pour un système plan (2D) :

On considère un **système plan** (2D) donc les mouvements possibles se ramènent à une rotation autour d'un axe normal au plan du système et à une translation dans une direction quelconque du plan (soit 3 ddl) :



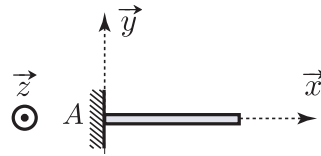
appui mobile ou appui simple glissant

Grandeur cinématique	$u_x \neq 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z \neq 0 \implies 2 \text{ ddl}$
Grandeur statique	$R_x = 0 \quad \mathbf{R}_y \neq 0 \quad M_z = 0 \implies 1 \text{ réaction}$
Torseur de liaison	$\{\mathcal{C}_{\text{liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$



articulation ou appui simple fixe

Grandeur cinématique	$u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z \neq 0 \implies 1 \text{ ddl}$
Grandeur statique	$\mathbf{R}_x \neq 0 \quad \mathbf{R}_y \neq 0 \quad M_z = 0 \implies 2 \text{ réactions}$
Torseur de liaison	$\{\mathcal{C}_{\text{liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$



encastrement

Grandeur cinématique	$u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z = 0 \quad \Rightarrow 0 \text{ ddl}$
Grandeur statique	$R_x \neq 0 \quad R_y \neq 0 \quad M_z \neq 0 \quad \Rightarrow 3 \text{ réactions}$
Torseur de liaison	$\{\mathcal{C}_{\text{liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \\ M_z \vec{z} \end{array} \right\}_A$

**Remarque :**

On se limite aux liaisons parfaites (travail des actions de liaison nul).

**II.4 Systèmes isostatiques et hyperstatiques**

On considère une structure, soumise à des appuis qui ont au total  $r$  composantes de réactions à déterminer.

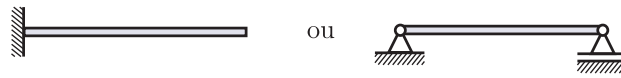
Pour une structure 3D, on dispose de 6 équations pour écrire l'équilibre global de la structure (3 pour le théorème de la résultante, 3 pour le théorème du moment d'après le PFS). Si on note  $h$  le **degré d'hyperstatisme** alors pour le cas 3D  $\Rightarrow h_{3D} = r - 6$ .

De même pour une structure plane, on dispose de 3 équations pour écrire l'équilibre global de la structure (2 pour le théorème de la résultante, 1 pour le théorème du moment d'après le PFS), alors pour le cas plan  $\Rightarrow h_{2D} = r - 3$ .

- Si  $h=0$  alors la structure est dite **isostatique**. Les liaisons sont au nombre strictement suffisant pour assurer l'équilibre. L'écriture des équations de la statique suffit seule à déterminer les réactions de liaison.
- Si  $h>0$  alors la structure est dite **hyperstatique d'ordre  $h$** . L'écriture des équations de la statique ne suffit pas seule à déterminer les réactions de liaison. On parle d'appuis **surabondants**. Il faudra  $h$  équations supplémentaires pour résoudre le système.
- Si  $h<0$  alors la structure est un **mécanisme** (pas stable).

**Quelques exemples :**

$h = 0 \Rightarrow$  poutre isostatique



$h = 1 \Rightarrow$  poutre hyperstatique de degré 1



$h = 3 \Rightarrow$  poutre hyperstatique de degré 3



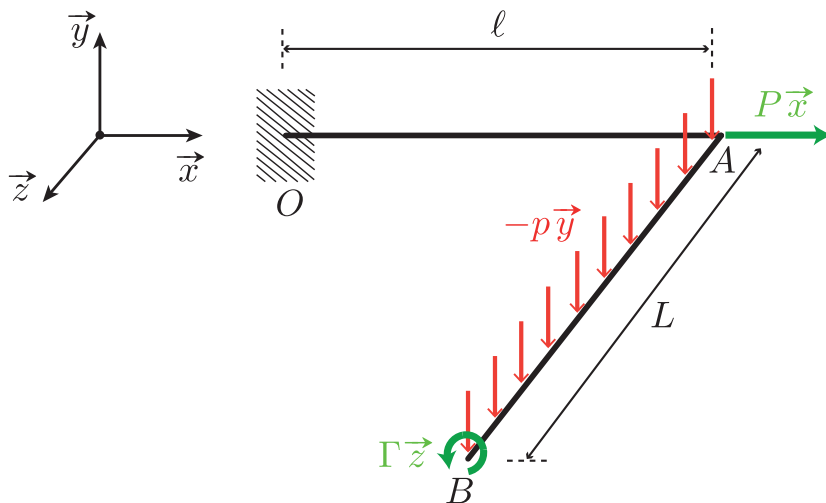
**Remarque :**

Les structures généralement fortement hyperstatiques (fort degré d'hyperstatisme  $\equiv$  facteur de sécurité). La disparition d'un appui n'entraîne pas systématiquement la ruine totale de la structure. Celle-ci peut n'être que locale (la structure s'adapte).

A l'inverse une structure faiblement hyperstatique (proche d'une structure isostatique), généralement plus esthétique, offre moins de sécurité. En cas d'accident, la ruine locale peut entraîner la ruine de toute la structure (exemple de l'effondrement du terminal 2E de l'aéroport CDG en 2004).

**Exemple de calcul du torseur de liaison :**

On considère une poutre  $[OAB]$  encastree en  $O(x = 0, z = 0)$  soumise à une force ponctuelle  $P\vec{x}$  en  $A(x = \ell, z = 0)$ , à un couple  $\Gamma\vec{z}$  en  $B(x = \ell, z = L)$  ainsi qu'à une densité linéique de force  $-p\vec{y}$  sur la portion  $[AB]$ .



Déterminer le torseur de liaison en  $O$  dû à l'encastrement.

Poutre 3D encastrée en  $O$  donc 6 inconnues de liaison : 3 pour  $\vec{R}_O$  et 3 pour  $\vec{M}_O$ .

On a également 6 équations : 3 pour le théorème de la résultante et 3 pour le théorème du moment donc  $h_{3D} = r - 6 = 6 - 6 = 0$  donc problème isostatique.

- Théorème de la résultante :

$$\vec{R}_O + \int_A^B -p\vec{y} \, dz + P\vec{x} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{R}_O = pL\vec{y} - P\vec{x}}$$

- Théorème du moment en  $O$  :

$$\vec{M}_O + \int_A^B \overrightarrow{OM} \wedge (-p\vec{y}) \, dz + \overrightarrow{OA} \wedge P\vec{x} + \Gamma\vec{z} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O + \int_O^L (\ell\vec{x} + z\vec{z}) \wedge (-p\vec{y}) \, dz + \ell\vec{x} \wedge P\vec{x} + \Gamma\vec{z} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{M}_O = -\frac{pL^2}{2}\vec{x} + (p\ell L - \Gamma)\vec{z}}$$



# Chapitre 2

## Statique des milieux curvilignes

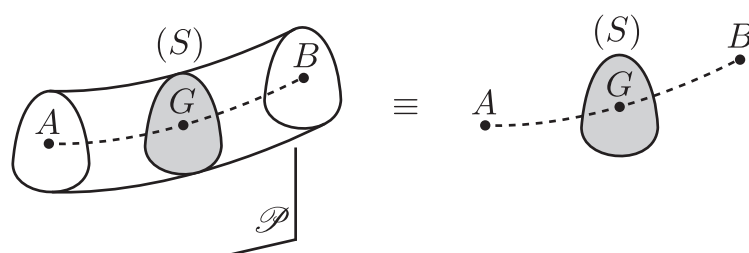
### Sommaire

<b>I</b>	<b>Définition d'un milieu curviligne</b>	<b>15</b>
<b>II</b>	<b>Caractéristiques géométriques des sections planes</b>	<b>18</b>
II.1	Moment statique et centre de gravité	18
II.2	Moments et produits quadratiques d'une surface plane	20
II.3	Exemples	26
<b>III</b>	<b>Poutres curvilignes tridimensionnelles</b>	<b>28</b>
III.1	Efforts extérieurs	28
III.2	Equations d'équilibre global	28
III.3	Efforts intérieurs	29
III.4	Equations d'équilibre du tronçon $]s, \ell[$ ( $0 < s < \ell; s \neq s_i$ )	31
III.5	Equations d'équilibre locales	33
<b>IV</b>	<b>Poutres curvilignes planes</b>	<b>36</b>
<b>V</b>	<b>Poutres droites</b>	<b>37</b>
<b>VI</b>	<b>Exemples</b>	<b>39</b>

### I Définition d'un milieu curviligne

Les structures étudiées ici sont des solides tels qu'il est possible de **mettre en évidence une dimension prépondérante par rapport aux autres**. Cette particularité géométrique permet de recourir à une **modélisation unidimensionnelle**.

Une poutre est un solide engendré par une surface plane  $(S)$  dont le centre d'inertie géométrique  $G$  décrit la courbe  $\widehat{AB}$ , le plan de  $(S)$  reste normal à la courbe  $\widehat{AB}$  :



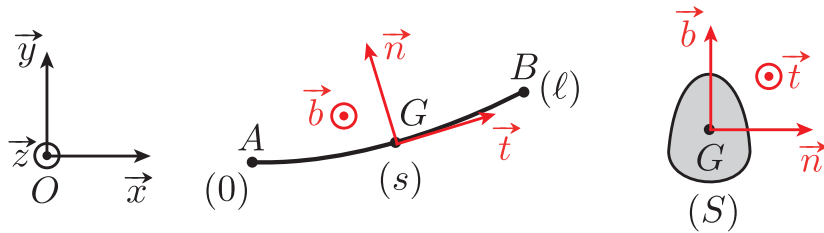
L'aire  $(S)$  est appelée **section droite** de la poutre et la courbe  $\mathcal{C} \equiv \widehat{AB}$  est appelée **fibre moyenne** de la poutre.

**Remarque :** Une poutre plane est une courbe dont la fibre moyenne est une courbe plane.

Le solide est assimilable à un milieu curviligne si en tout point  $G$ , les dimensions de la section sont petites devant la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$  et si tout point du volume n'appartient qu'à une unique section droite.

La poutre est donc totalement définie par sa fibre moyenne et par sa section droite. Pour les poutres à section variable, il faut aussi se donner la forme de l'évolution le long de la fibre moyenne.

Toutes les fonctions considérées seront définies sur l'arc  $\widehat{AB}$  et le point  $G$  sera repéré par  $s$ , l'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne.



**Trièdre de Frenet :**

Soit une courbe  $\mathcal{C}$  (arc régulier et orienté de  $A$  vers  $B$ ), paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$  ( $0 < s < \ell$ ). A chaque point  $G(s)$  de  $\mathcal{C}$  on associe le **vecteur tangent unitaire** en  $G(s)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  :

$$\vec{t}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{OG}(s)}{ds}. \quad (2.1)$$

Comme  $\|\vec{t}(s)\|^2 = 1$ , en dérivant par rapport à  $s$  on obtient :  $\vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = 0$ . Si  $\frac{d\vec{t}(s)}{ds} \neq \vec{0}$  il est alors perpendiculaire à  $\mathcal{C}$  et sa direction est par définition celle de la **normale principale** à  $G(s)$  à  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\vec{n}(s)$  le vecteur unitaire de cette normale ayant même direction que  $\frac{d\vec{t}(s)}{ds}$  on peut donc écrire que :  $\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = C(s) \vec{n}(s)$  où  $C > 0$  représente la **courbure**. On appelle  $R_c(s)$  le **rayon de courbure** de  $\mathcal{C}$  en  $G(s)$  avec  $R_c(s) = \frac{1}{C(s)}$ .

Par conséquent, le **vecteur normal principal** à  $\mathcal{C}$  en  $G(s)$  est défini par :

$$\vec{n}(s) \stackrel{\text{def}}{=} R_c(s) \frac{d\vec{t}(s)}{ds}. \quad (2.2)$$

On appelle **vecteur binormal** à  $\mathcal{C}$  en  $G(s)$  le vecteur défini par :

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) \quad (2.3)$$



afin de compléter le trièdre direct de Frénet  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ .

De plus, on appelle  $R_t(s)$  le **rayon de torsion** de  $\mathcal{C}$  en  $G(s)$  avec  $R_t(s)$  défini par :

$$\frac{1}{R_t(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \quad (2.4)$$

Calcul de  $\frac{d\vec{n}(s)}{ds}$  et  $\frac{d\vec{b}(s)}{ds}$  :

Comme  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$  est une base orthonormée alors :

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \left( \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \right) \vec{t}(s) + \left( \vec{n}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \right) \vec{n}(s) + \left( \vec{b}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \right) \vec{b}(s)$$

or comme :

$$\text{i) } \vec{t}(s) \cdot \vec{n}(s) = 0 \text{ donc en dérivant } \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \cdot \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = 0 \text{ d'où}$$

$$\vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -\frac{d\vec{t}(s)}{ds} \cdot \vec{n}(s) \stackrel{(2.2)}{=} -\frac{\|\vec{n}(s)\|^2}{R_c(s)} = -\frac{1}{R_c(s)}$$

$$\text{ii) En dérivant } \|\vec{n}(s)\|^2 = 1 \text{ on obtient } \vec{n}(s) \cdot \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = 0$$

En tenant compte de (2.4), on obtient donc :

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -\frac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} + \frac{\vec{b}(s)}{R_t(s)} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)) = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \stackrel{(2.2), (2.5)}{=} \vec{0} + \vec{t}(s) \wedge \frac{\vec{b}(s)}{R_t(s)} \\ &= -\frac{\vec{n}(s)}{R_t(s)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = -\frac{\vec{n}(s)}{R_t(s)} \quad (2.6)$$

**Remarque :**

L'orientation de  $\vec{n}$  est arbitraire; le fait de changer  $\vec{n}$  en  $-\vec{n}$  change alors le rayon de courbure  $R_c$  en  $-R_c$ , le signe de la courbure n'a donc pas de signification géométrique. La plupart du temps dans le cas des poutres planes, on prend  $\vec{n}$  directement perpendiculaire à  $\vec{t}$  donc  $(\vec{t}, \vec{n}) = +\frac{\pi}{2}$ ;  $R_c$  est alors **positif** si  $\vec{n}$  est orienté vers la concavité de la courbe  $\widehat{AB}$ .

## II Caractéristiques géométriques des sections planes

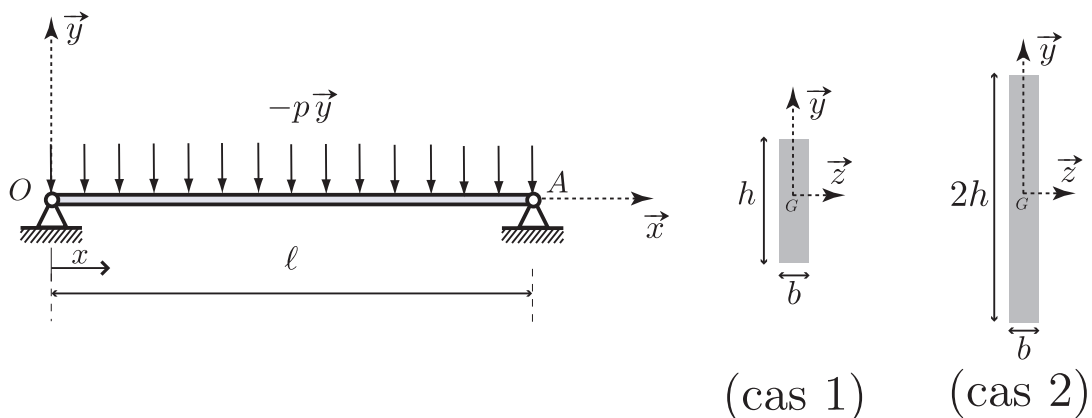
Pour cette section, on suppose que dans la base de Frénet  $\vec{t} = \vec{x}$ ,  $\vec{n} = \vec{y}$ ,  $\vec{b} = \vec{z}$ .

On doit s'assurer que les sections prévues pour ces éléments soient **suffisantes** pour que les contraintes qui leur sont appliquées et les déformations qui en résultent **n'excèdent pas les contraintes et les déformations admissibles**.

Pour le calcul des contraintes agissant sur les sections planes des éléments d'une structure et la détermination des déformations, on a besoin de connaître la valeur de diverses **caractéristiques géométriques** de ces sections.

On voit que pour un chargement donné, les déformations de même que les contraintes, dépendront des sections transversales qui composent les poutres de la structure.

En effet, si l'on considère les systèmes suivants :



la seule différence est que la section droite est de hauteur  $h$  pour l'un et  $2h$  pour l'autre.

On remarque alors pour les flèches que  $f_2 = \frac{f_1}{8}$ .

Pour une section rectangulaire la flèche est inversement proportionnelle au cube de la hauteur (voir plus loin ...).

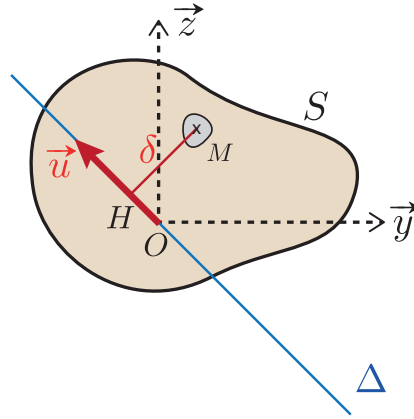
En fait la flèche est inversement proportionnelle aux **inerties des sections transversales**. L'inertie d'une section caractérise la "résistance" de celle-ci aux déformations.

### II.1 Moment statique et centre de gravité

#### II.1.a Moment statique

Soit une surface plane  $S$  et un système d'axes de son plan  $\mathcal{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Soit un point  $M$  de  $S$  et un petit élément de surface  $dS$  entourant ce point.  $H$  est le projeté de  $M$  sur la droite  $\Delta$  passant par  $O$  et dirigée suivant  $\vec{u}$ .



Le moment statique de la section  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  dans le plan  $(O; \vec{y}, \vec{z})$  est la quantité :

$$m_{\Delta} = \iint_S d(M, \Delta) dS = \iint_S \delta dS \quad (2.7)$$

où  $\delta$  est la distance du point  $M$  à l'axe  $\Delta$ .

En particulier :

$$m_{Oy} = \iint_S z dS \quad \text{et} \quad m_{Oz} = \iint_S y dS \quad ([m^3]; \quad >0, <0 \text{ ou } =0) \quad (2.8)$$

Le moment statique permet de calculer les coordonnées du centre géométrique d'un solide. Il est caractéristique de la géométrie du solide.

### II.1.b Centre de gravité

Le centre de gravité de la section  $S$  est le barycentre  $G$  de l'ensemble des points  $M$  de  $S$  et vérifie :

$$\iint_S \overrightarrow{GM} dS = \vec{0}. \quad (2.9)$$

#### Remarque :

Le centre de gravité étant le barycentre des poids, le confondre avec le centre d'inertie revient à négliger les variations de la pesanteur. L'erreur commise est très faible car les variations de hauteur de notre structure sont faibles devant le rayon de la Terre.

On en déduit la propriété du centre de gravité :

Les moments statiques d'une aire plane par rapport aux axes  $(G\vec{y})$  et  $(G\vec{z})$  qui passent par son centre de gravité  $G$  sont égaux à zéro.

$$m_{Gy} = m_{Gz} = 0 \quad (2.10)$$

D'après (2.9) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{OM} dS = y_G \vec{y} + z_G \vec{z} \quad (2.11)$$

En projetant sur les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  on obtient :

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_S y dS = \frac{m_{Oz}}{S} \quad (2.12)$$

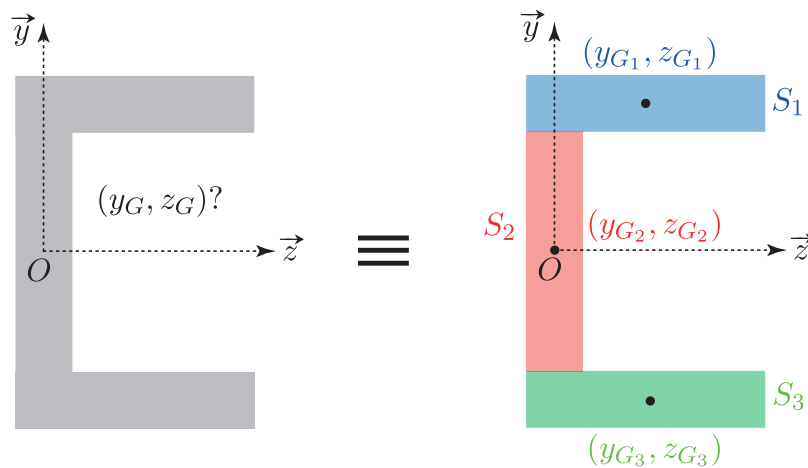
$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS = \frac{m_{Oy}}{S} \quad (2.13)$$

Pour des éléments de structures courantes à analyser, les aires ont des **formes géométriques régulières**, ce qui facilite la détermination du centre de gravité d'une section plane. Pour des configurations régulières, la position du centre de gravité est connue ou facilement déterminée. On peut donc remplacer les intégrations par la sommation des moments statiques et des aires. Ainsi :

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^N S_i y_{G_i}}{\sum_{i=1}^N S_i} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N S_i z_{G_i}}{\sum_{i=1}^N S_i} \quad (2.14)$$

où  $S_i$  sont les aires des parties composant la section et  $y_{G_i}$  et  $z_{G_i}$  sont les distances respectives de leur centre de gravité aux axes  $(O\vec{y})$  et  $(O\vec{z})$ .

**Exemple :**



## II.2 Moments et produits quadratiques d'une surface plane

Les moments quadratiques permettent de calculer les éléments du tenseur d'inertie d'un solide toujours dans un repère donné. Un choix judicieux du repère (par des considérations de symétries par exemple) peut nous faciliter les calculs. Le moment quadratique est souvent appelé moment d'inertie géométrique. Cependant, il ne rend compte que de la géométrie d'une section et non de sa masse (idem matrice d'inertie en mécanique du point mais avec un solide plan et une masse surfacique unitaire).

### II.2.a Moment quadratique par rapport à un axe

#### ○Définition

Avec les mêmes notations que précédemment, le moment quadratique de la surface  $(S)$  par rapport à un axe  $\Delta$  (droite passant par le point  $O$  et dirigée suivant  $\vec{u}$ ) est donné par :

$$I_{\Delta} = \iint_S \delta^2 dS = \iint_S \|\overrightarrow{HM}\|^2 dS \quad (2.15)$$

$$\text{or } \|\overrightarrow{HM}\|^2 = \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\|^2 = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{u} \cdot [\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})]$$

$$\text{donc } I_{\Delta} = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) \quad (2.16)$$

où l'application qui  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$  fait correspondre  $\mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \iint_S [\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})] dS$  est **linéaire et symétrique**.

#### Démonstration :

linéarité :

$$\mathcal{J}(O, S)(\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}) = \lambda_1 \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) + \lambda_2 \mathcal{J}(O, S)(\vec{v}) \text{ [linéarité de l'intégrale et du produit vectoriel]}$$

symétrie :

$$\vec{v} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \iint_S [\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})] dS \text{ [permutation de } \cdot \text{ et } \wedge]$$

$$\text{donc } \vec{v} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \iint_S [(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})] dS = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{v}) \quad \blacksquare$$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow I_{\Delta} = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \iint_S [(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})]^2 dS \geq 0$$

est donc une forme quadratique définie positive.

On pose  $\mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \mathbf{I}(O, S) \vec{u}$  soit  $I_{\Delta} = \vec{u} \cdot \mathbf{I}(O, S) \vec{u}$

Comme  $\overrightarrow{OM} = y\vec{y} + z\vec{z}$  et  $\vec{u} = u_2\vec{y} + u_3\vec{z}$ , on obtient facilement que :

$$\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} z^2 & -yz \\ -zy & y^2 \end{pmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z})} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z})}$$

D'où le tenseur d'inertie en  $O$  de la section ( $S$ ) :

$$\mathbf{I}(O, S) = \begin{pmatrix} I_{Oy} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oyz} & I_{Oz} \end{pmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z})} \quad (2.17)$$

$$\text{avec } I_{Oy} = \iint_S z^2 dS \quad \text{et} \quad I_{Oz} = \iint_S y^2 dS \quad ([m^4]; >0) \quad (2.18)$$

respectivement les moments quadratiques de l'aire  $S$  par rapport aux axes  $(O\vec{y})$  et  $(O\vec{z})$  et

$$I_{Oyz} = \iint_S yz dS \quad ([m^4]; >0, <0 \text{ ou } =0) \quad (2.19)$$

le produit quadratique de l'aire  $S$  par rapport au plan  $(O\vec{y}, \vec{z})$ .

Le moment quadratique est une caractéristique géométrique importante d'une section, car il intervient dans les calculs de la résistance à la flexion, du flambement et de la détermination des flèches. Par conséquent, dans le calcul des structures il est important de réaliser qu'il faut donner à une aire  $S$  une géométrie telle que le moment quadratique par rapport à l'axe considéré soit **optimal**. Par exemple dans le cas d'une section rectangulaire, cela se traduit par le choix d'une hauteur optimale pour rester dans le domaine élastique.

**Remarque :**

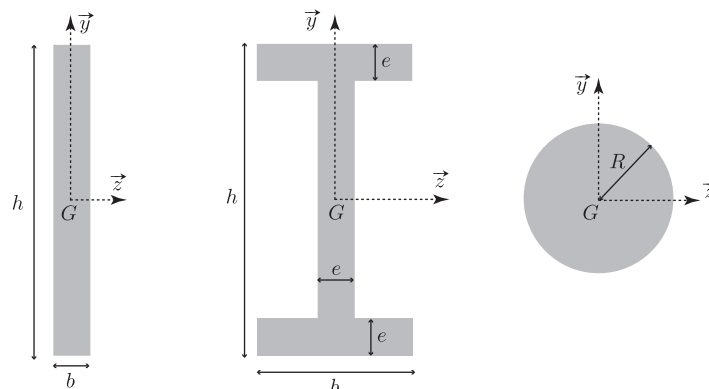
i) Comme  $\mathcal{J}(O, S)$  est un opérateur symétrique, alors  $\mathbf{I}(O, S)$  est une matrice **symétrique** dans toute base orthonormée. Ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux donc la matrice est **diagonalisable** en base orthonormée. Cette base est appelée **base principale** d'inertie du solide  $S$ . Alors :

$$\mathbf{I}(O, S) = \begin{pmatrix} I_{OY} & 0 \\ 0 & I_{OZ} \end{pmatrix}_{(\vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.20)$$

où les axes  $(O\vec{Y})$  et  $(O\vec{Z})$  sont les **axes principaux d'inertie** et  $I_{OY}$  et  $I_{OZ}$  les **moments principaux d'inertie**.

ii) Dans la plupart des cas,  $(\vec{y}, \vec{z})$  et  $(\vec{Y}, \vec{Z})$  coïncident. Il suffit pour cela que l'un des axes soit axe de symétrie ( $O\vec{z}$  par exemple) alors le produit d'inertie  $I_{Oyz}$  est nul.

**Exemple :**



## Axes principaux (PAS FAIT EN COURS)

### ◦ Changement de repère

On considère une surface plane  $S$  et deux systèmes d'axes de son plan  $(O; \vec{y}, \vec{z})$  et  $(O; \vec{Y}, \vec{Z})$  tels que  $\alpha = (\vec{y}, \vec{Y})$ .

$$\begin{cases} Y = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ Z = z \cos \alpha - y \sin \alpha \end{cases} \quad (2.21)$$

On suppose les moments quadratiques  $I_{Oy}$ ,  $I_{Oz}$  et le produit d'inertie  $I_{Oyz}$  connus. On propose de déterminer  $I_{OY}$ ,  $I_{OZ}$  et  $I_{OYZ}$ .

$$\begin{aligned} I_{OY} &= \iint_S Z^2 dS = \iint_S [z \cos \alpha - y \sin \alpha]^2 dS = I_{Oz} \sin^2 \alpha + I_{Oy} \cos^2 \alpha - 2I_{Oyz} \sin \alpha \cos \alpha \\ I_{OZ} &= \iint_S Y^2 dS = \iint_S [y \cos \alpha + z \sin \alpha]^2 dS = I_{Oz} \cos^2 \alpha + I_{Oy} \sin^2 \alpha + 2I_{Oyz} \sin \alpha \cos \alpha \\ I_{OYZ} &= \iint_S YZ dS = \iint_S [z \cos \alpha - y \sin \alpha][y \cos \alpha + z \sin \alpha] dS \\ &= (I_{Oy} - I_{Oz}) \cos \alpha \sin \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) I_{Oyz} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Comme  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ ;  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$  et  $I_{OY} + I_{OZ} = I_{Oy} + I_{Oz}$  alors :

$$\begin{aligned} I_{OY} &= \frac{I_{Oy} + I_{Oz}}{2} + \frac{I_{Oy} - I_{Oz}}{2} \cos(2\alpha) - I_{Oyz} \sin(2\alpha) \\ I_{OZ} &= \frac{I_{Oy} + I_{Oz}}{2} - \frac{I_{Oy} - I_{Oz}}{2} \cos(2\alpha) + I_{Oyz} \sin(2\alpha) \\ I_{OYZ} &= \frac{I_{Oy} - I_{Oz}}{2} \sin(2\alpha) + I_{Oyz} \cos(2\alpha) \end{aligned} \quad (2.23)$$

### ◦ Axes principaux

Les **axes principaux** sont deux axes orthogonaux  $(O\vec{Y})$  et  $(O\vec{Z})$  qui passent par un point  $O$  d'une section et qui sont situés de façon à ce que le produit d'inertie  $I_{OYZ}$  par rapport à ces axes soit égal à 0.

$$I_{OYZ} = \frac{I_{Oy} - I_{Oz}}{2} \sin(2\alpha) + I_{Oyz} \cos(2\alpha) = 0 \implies \tan(2\alpha) = -\frac{2I_{Oyz}}{I_{Oy} - I_{Oz}} \quad (2.24)$$

Dans le cas d'une section avec un **axe de symétrie**, cet axe est un **axe principal d'inertie**. En effet, s'il y a un axe de symétrie alors  $I_{Oyz} = 0$  et d'après (2.24)  $\tan(2\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$  donc  $I_{OYZ} = 0$  dans (2.23).

Autre façon :

$$\begin{cases} \frac{dI_{OY}}{d\alpha} = -(I_{Oy} - I_{Oz}) \sin(2\alpha) - 2I_{Oyz} \cos(2\alpha) = 0 \\ \frac{dI_{OZ}}{d\alpha} = -\frac{dI_{OY}}{d\alpha} \end{cases} \quad (2.25)$$

On retrouve donc (2.24), donc les moments quadratiques  $I_{OY}$  et  $I_{OZ}$  sont extrémaux.

Quand l'une des inerties passe par un maximum, l'autre inertie passe par un minimum  
 $\Rightarrow$  axes principaux d'inertie.

**Définitions :**

- Les deux axes perpendiculaires orthogonaux  $(O\vec{Y})$  et  $(O\vec{Z})$  du plan de  $S$  pour lesquels les moments quadratiques de  $S$  sont, maximum pour l'un, minimal pour l'autre sont appelés **axes principaux** en  $O$  de la surface  $S$ .
- Les axes principaux  $(G\vec{Y})$  et  $(G\vec{Z})$  au centre de gravité  $G$  de  $S$  sont appelés **axes centraux principaux**.
- Dans le repère principal  $(O; \vec{Y}, \vec{Z})$  ou central principal  $(G; \vec{Y}, \vec{Z})$ , le produit d'inertie est nul.
- Tout axe de symétrie d'une section est axe principal de celle-ci.

### ◦ Moments quadratiques principaux

Les moments quadratiques  $I_{OY}$  et  $I_{OZ}$  sont dits principaux quand ils sont relatifs aux axes principaux du repère principal.

D'après (2.24) on peut avoir  $\alpha$  et  $\alpha + \pi/2$  qui vérifient la relation  $\tan(2\alpha) = -\frac{2I_{Oyz}}{I_{Oy} - I_{Oz}}$

d'où  $\cos(2\alpha) = -\frac{(I_{Oy} - I_{Oz})}{2I_{Oyz}} \sin(2\alpha)$  or  $\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = 0$

donc  $\sin(2\alpha) = \frac{\pm 2I_{Oyz}}{\sqrt{4(I_{Oyz})^2 + (I_{Oy} - I_{Oz})^2}}$ .

En remplaçant dans (2.23) on trouve :

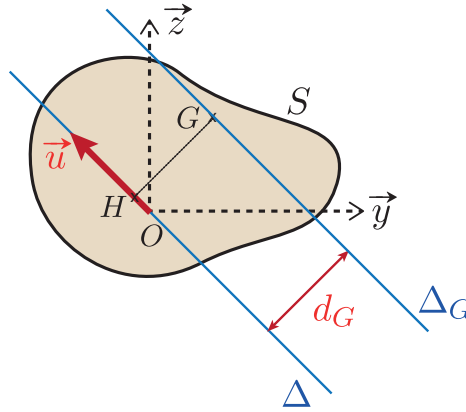
$$\begin{aligned} I_{OY} &= I_{\max} = \frac{I_{Oy} + I_{Oz}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4(I_{Oyz})^2 + (I_{Oy} - I_{Oz})^2} \\ I_{OZ} &= I_{\min} = \frac{I_{Oy} + I_{Oz}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4(I_{Oyz})^2 + (I_{Oy} - I_{Oz})^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$



## ◦Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une surface  $S$  par rapport à un axe  $\Delta$  est égal à la somme du moment quadratique de  $S$  exprimé par rapport à l'axe  $\Delta_G$  parallèle à  $\Delta$ , passant par  $G$  son centre de gravité et du produit de la surface par le carré de la distance entre  $\Delta_G$  et  $\Delta$  :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + (d_G)^2 S \quad (2.27)$$



## Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) &= \iint_S [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dS \\ &= \iint_S [(\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dS \\ &= \iint_S [\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dS + \iint_S [\vec{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dS \\ &= \vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \left( \iint_S \vec{OM} dS \right) + \left( \iint_S \vec{GM} dS \right) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \iint_S [\vec{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GM})] dS \\ &= \vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge S \vec{OG} + \vec{0} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \iint_S [\vec{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GM})] dS \\ &= \mathcal{J}(G, S)(\vec{u}) + S (\vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \vec{OG}) \end{aligned}$$

$$\text{Or } I_{\Delta} = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(O, S)(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(G, S)(\vec{u}) + S \vec{u} \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \vec{OG})$$

$$\text{Comme } I_{\Delta_G} = \vec{u} \cdot \mathcal{J}(G, S)(\vec{u})$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \vec{OG}) = (\vec{u} \wedge \vec{OG}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{OG}) = \|\vec{u} \wedge \vec{OG}\|^2 = \|\vec{HG}\|^2 = (d_G)^2$$

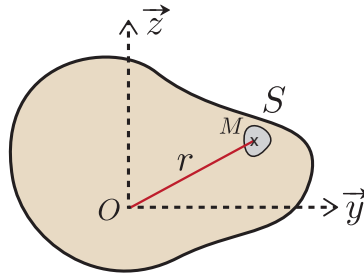
$$\text{alors : } I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + (d_G)^2 S \quad \blacksquare$$

En particulier :

$$\boxed{I_{Oy} = I_{Gy} + (z_G)^2 S} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{Oz} = I_{Gz} + (y_G)^2 S} \quad (2.28)$$

### II.2.b Moment quadratique polaire ou moment de giration

Soit  $M(y, z)$  un point de  $S$  distant de  $r$  de l'origine et  $dS$  un élément de surface entourant  $M$ .



Le moment quadratique polaire  $I_O$  de la surface  $S$  par rapport au point  $O$  de son plan est défini par :

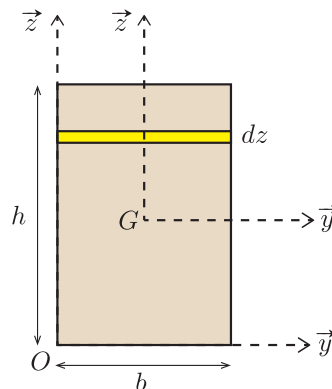
$$I_O = \iint_S r^2 dS \quad ([m^4]; \quad >0) \quad (2.29)$$

Remarque :

$$I_O = \iint_S r^2 dS = \iint_S (y^2 + z^2) dS = I_{Oz} + I_{Oy} \quad (2.30)$$

### II.3 Exemples

Soit une surface  $S$  rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ .  $\mathcal{R}(G; \vec{y}, \vec{z})$  est le repère central principal.



Calculer les caractéristiques géométriques de ce rectangle.

**Moments quadratiques principaux :**

$$I_{Gy} = \iint z^2 dS = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 b dz = b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \iint y^2 dS = \int_{-b/2}^{+b/2} hy^2 dz = \frac{hb^3}{12}$$

**Produit quadratique :**

$$I_{Gyz} = \iint yz dS = \int_{-h/2}^{+h/2} z dz \int_{-b/2}^{+b/2} y dy = 0 \quad [\text{Sym}]$$

d'après le théorème de Huygens :

$$I_{Oy} = I_{Gy} + S \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{Oz} = I_{Gz} + S \left( \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{Oyz} = \int_0^h \int_0^b yz dy dz = \frac{b^2 h^2}{4} = I_{Gyz} + S \left( \frac{b}{2} \right) \left( \frac{h}{2} \right)$$

Même question pour une section droite circulaire pleine de rayon  $R$

$$I_{Gy} = I_{Gz} = \iint y^2 dS = \iint r^2 \cos^2(\theta) r dr d\theta = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{Gyz} = 0 \quad [\text{Sym}]$$

et pour une section droite circulaire creuse de rayon intérieur  $R_i$  et rayon extérieur  $R_e$ .

$$I_{Gy} = I_{Gy}^{circ R_e} - I_{Gy}^{circ R_i} = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$I_{Gyz} = 0 \quad [\text{Sym}]$$

### III Poutres curvilignes tridimensionnelles

#### III.1 Efforts extérieurs

A l'instant  $t_0$  considéré, le milieu est soumis à des efforts extérieurs du type :

(i) **Efforts aux extrémités :**

$$\text{sur l'extrémité } s = 0 : \quad \{\mathcal{C}_A\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$$

$$\text{sur l'extrémité } s = \ell : \quad \{\mathcal{C}_B\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_B$$

(ii) **Efforts concentrés aux points  $G_i$  :**

$$\text{aux points } (s_i)_{1 \leq i \leq N} \text{ avec } 0 < s_1 < \dots < s_N < \ell : \quad \{\mathcal{C}_{G_i}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i \\ \vec{C}_i \end{array} \right\}_{G_i}$$

(iii) **Efforts répartis :**

(exple : pesanteur  $\vec{f}(s) = \rho(s)\vec{g}$ , efforts d'inertie, forces de frottements, ...)

• **densité linéique de forces  $\vec{f}(s)$**

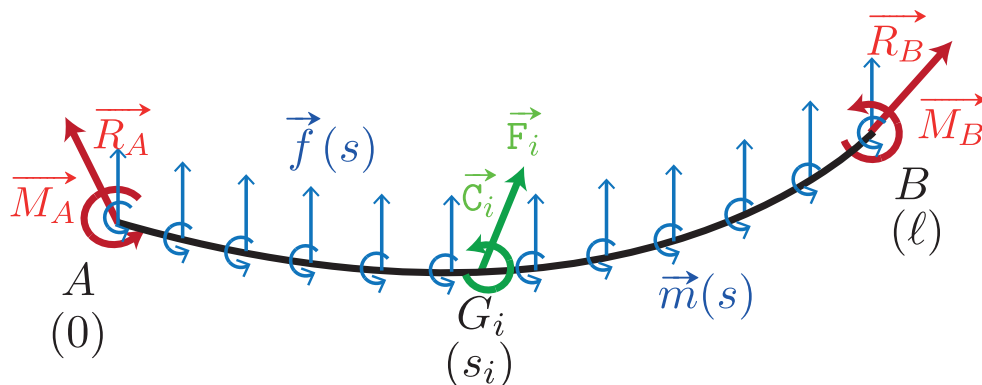
$\vec{f}(s)ds \equiv$  force extérieure exercée sur l'élément de longueur  $ds$

$$\vec{f}(s) = p(s)\vec{t}(s) + \vec{q}(s)$$

$p(s)$  est la densité linéique d'efforts normaux

$\vec{q}(s) = q_n(s)\vec{n}(s) + q_b(s)\vec{b}(s)$  est la densité linéique d'efforts tranchants

• **densité linéique de moments  $\vec{m}(s)$  (exceptionnel)**



#### III.2 Equations d'équilibre global

Pour que  $\mathcal{C}$  (la fibre moyenne) soit en équilibre sous l'effet des efforts extérieurs décrits précédemment, **il faut mais il ne suffit pas** que le torseur résultant des efforts extérieurs soit nul.

- Equation de la résultante :

$$\vec{R}_A + \int_0^\ell \vec{f}(s) ds + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{R}_B = \vec{0} \quad (2.31)$$

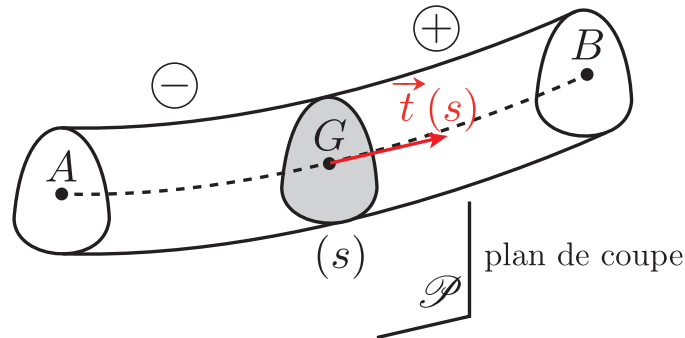
- Equation du moment résultant en  $O$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge \vec{R}_A + \int_0^\ell \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) ds \\ + \sum_{i=1}^N \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

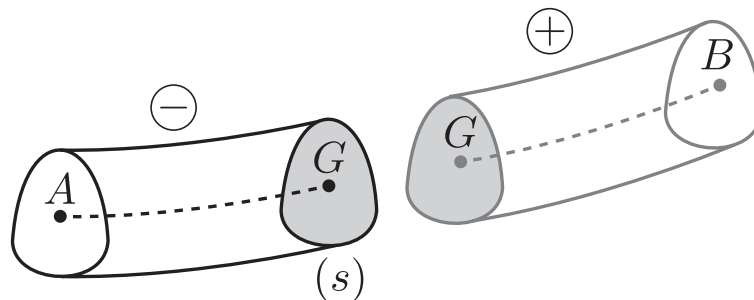
### III.3 Efforts intérieurs

Pour un milieu déformable, il ne suffit pas d'écrire les équations (2.31) et (2.32) pour être assuré qu'il est en équilibre. Il faut aussi écrire que chacune de ses parties sont en équilibre. Ceci nécessite d'introduire la notion d'**efforts intérieurs** qui représentent les **efforts de cohésion** (notion de contrainte) mis en oeuvre par le milieu pour maintenir son "intégrité".

On considère une poutre, que l'on oriente du point  $A$  vers le point  $B$  imposant la direction du vecteur tangent  $\vec{t}(s)$ . On sépare artificiellement au point  $G$  d'abscisse  $s$  la poutre en deux parties :  $\ominus$  pour la partie gauche et  $\oplus$  pour la partie droite.

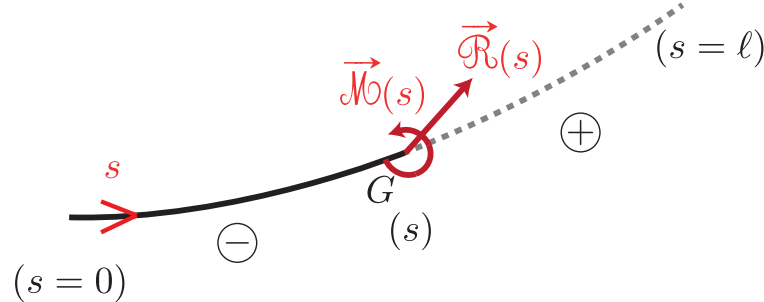


A partir de la coupure définie précédemment, on peut isoler un des 2 tronçons de la poutre par exemple  $\ominus$  :



Ce tronçon est soumis à une partie des actions mécaniques extérieures  $\{\mathcal{F}_{\text{ext} \rightarrow \ominus}\}$  et aussi aux actions de la partie  $\oplus$  sur la partie  $\ominus$  à travers de la section  $(S)$ .

**Par définition (convention)** le torseur des actions mécaniques de  $\oplus$  sur  $\ominus$  est appelé **torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion**. C'est en effet cette liaison (les efforts et les moments qu'elle transmet) qui assure la cohésion des éléments  $\ominus$  et  $\oplus$  de la poutre.



On a donc :

$$\{\mathfrak{C}_{\text{int}}\}_G \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{C}_{\oplus \rightarrow \ominus}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}_G(s) = \vec{\mathcal{M}}(s) \end{array} \right\}_G \quad (2.33)$$

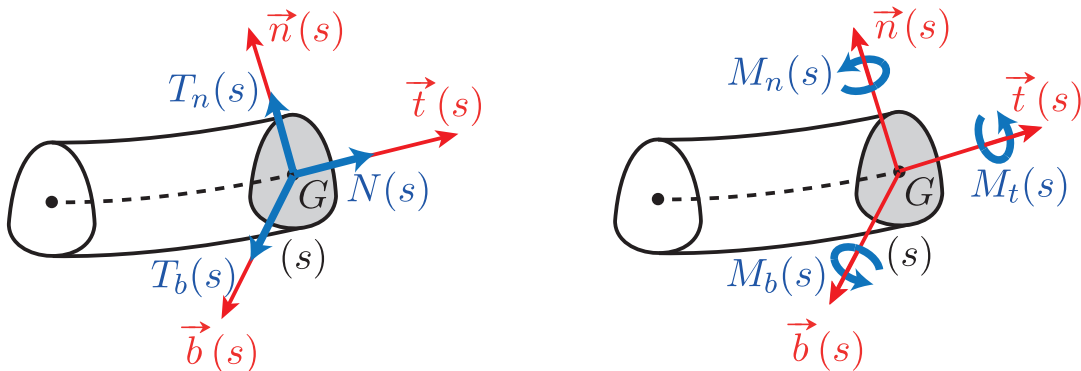
avec  $\vec{\mathcal{R}}(s) = N(s) \vec{t}(s) + \vec{T}(s)$

où  $N(s)$  est l'**effort normal** (suivant  $\vec{t}(s)$ ) [ $N > 0$  traction ;  $N < 0$  compression]

et  $\vec{T}(s) = T_n(s) \vec{n}(s) + T_b(s) \vec{b}(s)$  sont les **efforts tranchants** dans le plan de la section droite.

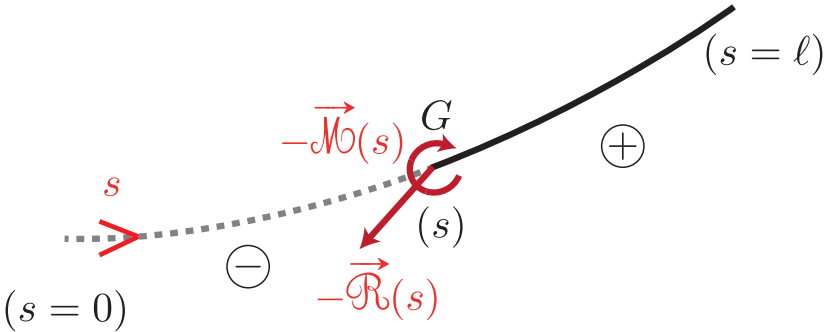
De plus,  $\vec{\mathcal{M}}(s) = M_t(s) \vec{t}(s) + \vec{M}_f(s)$

où  $M_t(s)$  est le **moment de torsion** (autour de  $\vec{t}(s)$ ) et  $\vec{M}_f(s) = M_n(s) \vec{n}(s) + M_b(s) \vec{b}(s)$  sont les **moments fléchissants** dans le plan de la section droite.

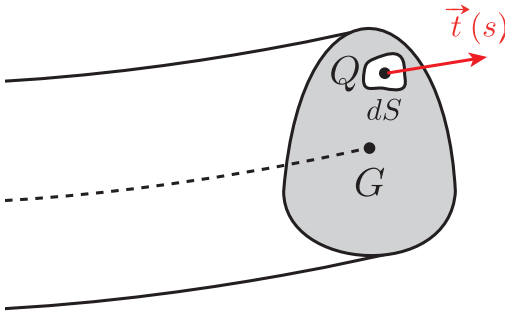


Si le point de coupe n'est pas soumis à des efforts extérieurs ponctuels, d'après le principe d'action-réaction :

$$\{\mathcal{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_G = -\{\mathcal{C}_{\oplus \rightarrow \ominus}\}_G = -\{\mathcal{C}_{\text{int}}\}_G \quad (2.34)$$

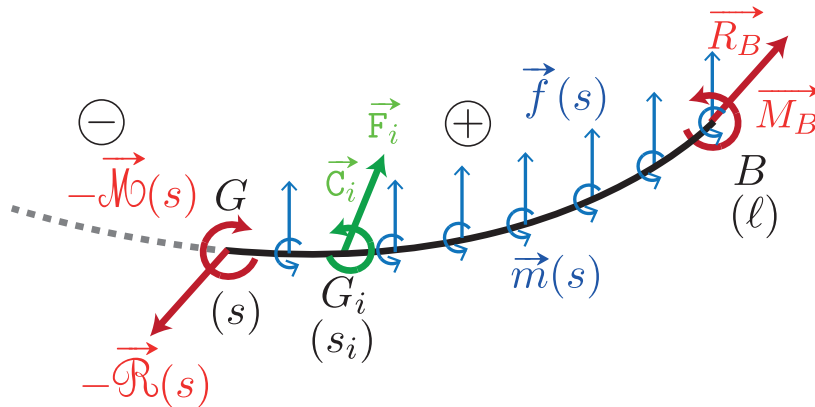


Lien entre les éléments du torseur de cohésion et les contraintes (voir MMC) :



$$\boxed{\vec{\mathcal{R}}(s) = \iint_S \underbrace{(\vec{\sigma}(Q) \cdot \vec{t})}_{\text{vecteur contrainte}} dS} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}(s) = \iint_S \vec{G}\vec{Q} \wedge (\vec{\sigma}(Q) \cdot \vec{t}) dS} \quad (2.35)$$

### III.4 Equations d'équilibre du tronçon $]s, \ell[$ ( $0 < s < \ell$ ; $s \neq s_i$ )



$$\{\mathfrak{C}_{\text{ext} \rightarrow \oplus}\}_G + \{\mathfrak{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_G = \{0\}_G \quad (2.36)$$

d'où

$$\{\mathfrak{C}_{\text{ext} \rightarrow \oplus}\}_G - \{\mathfrak{C}_{\text{int}}\}_G = \{0\}_G \quad (2.37)$$

soit

$$\{\mathfrak{C}_{\text{int}}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}(s) \end{array} \right\}_G = \{\mathfrak{C}_{\text{ext} \rightarrow \oplus}\}_G \quad (2.38)$$

$$\text{or} \quad \{\mathfrak{C}_{\text{int}}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \end{array} \right\}_O \quad (2.39)$$

Théorème de la résultante :

$$\vec{\mathcal{R}}(s) = \int_s^\ell \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{F}_i + \vec{R}_B \quad (2.40)$$

Théorème du moment en  $O$  :

$$\begin{aligned} & \vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \\ &= \int_s^\ell \vec{m}(\xi) d\xi + \int_s^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{\mathcal{C}}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B \end{aligned} \quad (2.41)$$

• Conditions aux extrémités :

$$\text{D'après (2.40), } \lim_{s \rightarrow \ell^-} \vec{\mathcal{R}}(s) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \left[ \int_s^\ell \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{F}_i + \vec{R}_B \right] = \vec{R}_B \quad (\star)$$

et d'après (2.41),

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \ell^-} \left[ \vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \ell^-} \left[ \int_s^\ell \vec{m}(\xi) d\xi + \int_s^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{\mathcal{C}}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{\mathcal{M}}(\ell) + \vec{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}(\ell) \stackrel{(\star)}{=} \vec{\mathcal{M}}(\ell) + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B = \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B$$



donc au point  $B$  (extrémité droite  $s = \ell$ )

$$\vec{\mathcal{R}}(\ell) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \vec{\mathcal{R}}(s) = \vec{R}_B \quad (2.42)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\ell) = \lim_{s \rightarrow \ell^-} \vec{\mathcal{M}}(s) = \vec{M}_B \quad (2.43)$$

De même, d'après (2.40),

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \vec{\mathcal{R}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[ \int_s^\ell \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^N \vec{F}_i + \vec{R}_B \right] = \int_0^\ell \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{R}_B \stackrel{(2.31)}{=} -\vec{R}_A \quad (**)$$

et d'après (2.41),

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} [\vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s)] \\ &= \int_0^\ell \vec{m}(\xi) d\xi + \int_0^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \vec{C}_i + \sum_{i=1}^N \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{\mathcal{M}}(0) + \vec{OA} \wedge \vec{\mathcal{R}}(0) \stackrel{(**)}{=} \vec{\mathcal{M}}(0) + \vec{OA} \wedge (-\vec{R}_A) \stackrel{(2.32)}{=} -\vec{M}_A - \vec{OA} \wedge \vec{R}_A$$

donc au point  $A$  (extrémité gauche  $s = 0$ )

$$\vec{\mathcal{R}}(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \vec{\mathcal{R}}(s) = -\vec{R}_A \quad (2.44)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \vec{\mathcal{M}}(s) = -\vec{M}_A \quad (2.45)$$

### III.5 Equations d'équilibre locales

Pour  $s \neq s_i$  :

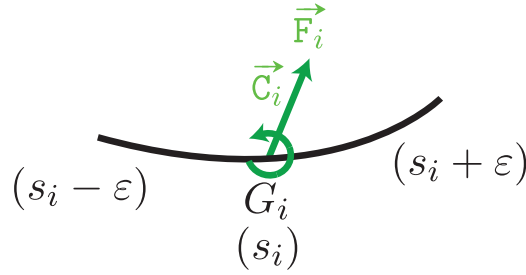
$$\frac{d(2.40)}{ds} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\mathcal{R}}(s)}{ds} + \vec{f}(s) = \vec{0} \quad (\text{équilibre local des forces}) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(2.41)}{ds} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad & \frac{d\vec{\mathcal{M}}(s)}{ds} + \frac{d\vec{OG}(s)}{ds} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \frac{d\vec{\mathcal{R}}(s)}{ds} \\ &= -\vec{m}(s) - \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) \end{aligned} \quad (2.47)$$

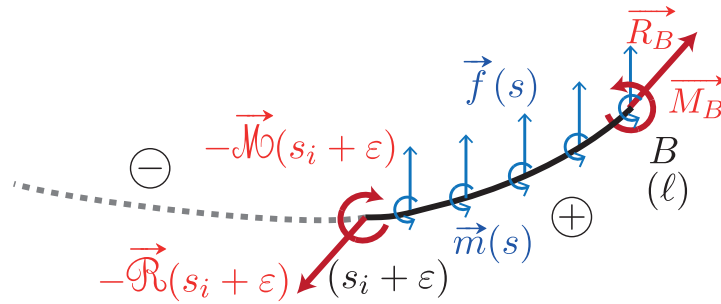
or comme  $\vec{t}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{OG}(s)}{ds}$  et d'après (2.64) alors :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}(s)}{ds} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) + \vec{m}(s) = \vec{0} \quad (\text{équilibre local des moments}) \quad (2.48)$$

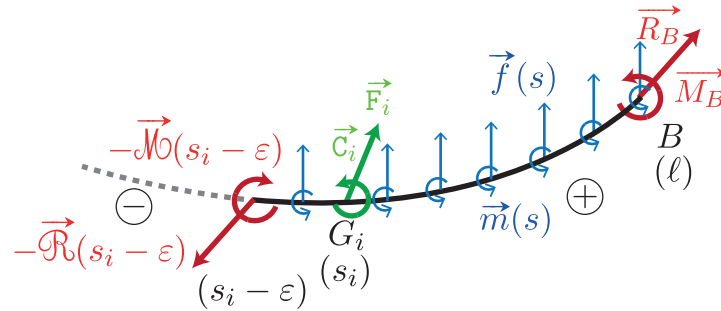
Pour  $s = s_i$  :



On écrit (2.40) pour  $s = s_i + \varepsilon$



et  $s = s_i - \varepsilon$ ,



on fait la différence tout en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro.

On obtient alors :

$$\vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) = \int_{s_i + \varepsilon}^{\ell} \vec{f}(\xi) d\xi + \vec{R}_B \quad (2.49)$$

$$\vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon) = \int_{s_i - \varepsilon}^{\ell} \vec{f}(\xi) d\xi + \vec{F}_i + \vec{R}_B \quad (2.50)$$

donc

$$\vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) - \vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon) = \int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{f}(\xi) d\xi - \vec{F}_i \quad (2.51)$$

or

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) - \vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon)] = \vec{\mathcal{R}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{R}}(s_i^-) = \llbracket \vec{\mathcal{R}} \rrbracket (s_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{f}(\xi) d\xi}_{\vec{0}} - \vec{F}_i \quad (2.52)$$

donc

$$\boxed{\llbracket \vec{\mathcal{R}} \rrbracket (s_i) + \vec{F}_i = \vec{0}} \quad (\text{condition de saut pour les forces}) \quad (2.53)$$

De même, d'après (2.41) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(s_i + \varepsilon) + \vec{OG}(s_i + \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) \\ = \int_{s_i + \varepsilon}^{\ell} \vec{m}(\xi) d\xi + \int_{s_i + \varepsilon}^{\ell} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(s_i - \varepsilon) + \vec{OG}(s_i - \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon) \\ = \int_{s_i - \varepsilon}^{\ell} \vec{m}(\xi) d\xi + \int_{s_i - \varepsilon}^{\ell} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi + \vec{C}_i + \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B \end{aligned} \quad (2.55)$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(s_i + \varepsilon) - \vec{\mathcal{M}}(s_i - \varepsilon) + \vec{OG}(s_i + \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) - \vec{OG}(s_i - \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon) \\ = \int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{m}(\xi) d\xi + \int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi - \vec{C}_i - \vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\text{or} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\vec{\mathcal{M}}(s_i + \varepsilon) - \vec{\mathcal{M}}(s_i - \varepsilon)] = \vec{\mathcal{M}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{M}}(s_i^-) = \llbracket \vec{\mathcal{M}} \rrbracket (s_i) \quad (2.57)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\vec{OG}(s_i + \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i + \varepsilon) - \vec{OG}(s_i - \varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i - \varepsilon)] \\ = \vec{OG}(s_i) \wedge [\vec{\mathcal{R}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{R}}(s_i^-)] = \vec{OG}_i \wedge \llbracket \vec{\mathcal{R}} \rrbracket (s_i) \stackrel{(3.40)}{=} -\vec{OG}_i \wedge \vec{F}_i \end{aligned} \quad (2.58)$$

de plus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{m}(\xi) d\xi = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_i + \varepsilon}^{s_i - \varepsilon} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi) d\xi = \vec{0} \quad (2.59)$$

donc

$$\boxed{\llbracket \vec{\mathcal{M}} \rrbracket (s_i) + \vec{C}_i = \vec{0}} \quad (\text{condition de saut pour les moments}) \quad (2.60)$$

En résumé :

Equations d'équilibre locales ( $s \neq s_i$ ) :

$$\frac{d\vec{\mathcal{R}}(s)}{ds} + \vec{f}(s) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\mathcal{M}}(s)}{ds} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) + \vec{m}(s) = \vec{0}$$

Conditions de saut ( $s = s_i$ ) :

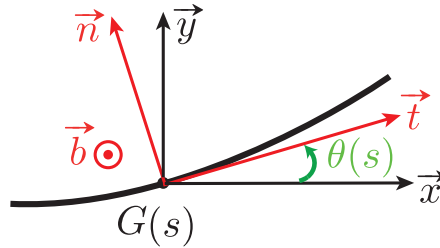
$$\llbracket \vec{\mathcal{R}} \rrbracket (s_i) + \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \llbracket \vec{\mathcal{M}} \rrbracket (s_i) + \vec{C}_i = \vec{0}$$

Conditions aux extrémités ( $s = 0$  et  $s = \ell$ ) :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(0) = -\vec{R}_A \\ \vec{\mathcal{M}}(0) = -\vec{M}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(\ell) = \vec{R}_B \\ \vec{\mathcal{M}}(\ell) = \vec{M}_B \end{cases}$$

## IV Poutres curvilignes planes

La ligne moyenne est une courbe plane donc  $\vec{b} = \vec{z}$  ( $R_t(s) \rightarrow \infty$ ).



Nous avons alors :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(s) = N(s) \vec{t}(s) + T_n(s) \vec{n}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}(s) = M_b(s) \vec{b}(s) \end{cases} \quad (2.61)$$

avec  $N(s)$  l'effort normal ;  $T_n(s)$  l'effort tranchant et  $M_z(s)$  le moment fléchissant autour de  $\vec{z}$

**Remarque :**

$$\vec{t}(s) = \cos \theta(s) \vec{x} + \sin \theta(s) \vec{y} ;$$

$$\vec{n}(s) = \vec{z} \wedge \vec{t}(s) = \cos \theta(s) \vec{y} - \sin \theta(s) \vec{x} \quad [\theta(s) : \text{angle tangent en } s].$$

D'après (2.64) :  $\frac{d\vec{\mathcal{R}}(s)}{ds} + \vec{f}(s) = \vec{0}$  donc

$$\frac{dN(s)}{ds} \vec{t}(s) + N(s) \frac{d\vec{t}(s)}{ds} + \frac{dT_n(s)}{ds} \vec{n}(s) + T_n(s) \frac{d\vec{n}(s)}{ds} + p(s) \vec{t}(s) + q_n(s) \vec{n}(s) = \vec{0} \quad (2.62)$$

or d'après le repère de Frénet

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{\vec{n}(s)}{R_c(s)} \\ \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -\frac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} + \frac{\vec{b}(s)}{R_t(s)} = -\frac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} \quad \text{car } R_t(s) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.63)$$

nous avons donc :

$$\begin{cases} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{T_n(s)}{R_c(s)} + p(s) = 0 \\ \frac{dT_n(s)}{ds} + \frac{N(s)}{R_c(s)} + q_n(s) = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

D'après (2.65), avec  $\vec{m} = m(s)\vec{b}$  on obtient :

$$\frac{dM_b(s)}{ds} + T_n(s) + m(s) = 0 \quad (2.65)$$

+ conditions de saut en  $s = s_i$  et conditions aux extrémités.

## V Poutres droites

La ligne moyenne est une droite. La position du centre de gravité d'une section ( $S$ ) est repérée par l'abscisse  $s \equiv x$  d'où les équations d'équilibre locales :

$$\frac{d\vec{\mathcal{R}}(x)}{dx} + \vec{f}(x) = \vec{0} \quad (2.66)$$

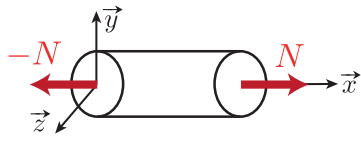
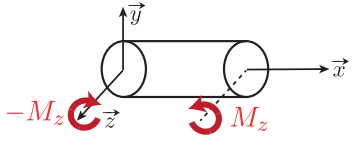
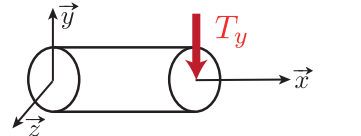
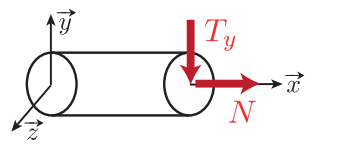
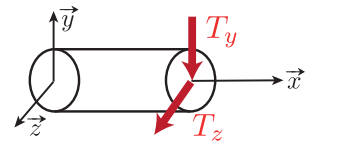
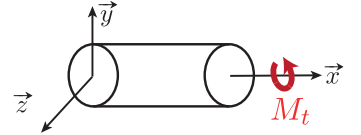
$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\mathcal{R}}(x) + \vec{m}(x) = \vec{0} \quad (2.67)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(x) = N(x) \vec{x} + T_y(x) \vec{y} + T_z(x) \vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}(x) = M_t(x) \vec{x} + M_y(x) \vec{y} + M_z(x) \vec{z} \end{cases} \quad (2.68)$$

+ conditions de saut en  $x = x_i$  et conditions aux extrémités ( $x = 0$  et  $x = \ell$ ).

### Sollicitations simples :

$N \neq 0$ $N > 0$ Traction $N < 0$ Compression	$T_y = T_z = 0$ $M_t = M_y = M_z = 0$		Traction simple Compression simple
$M_z \neq 0$	$N = T_y = T_z = 0$ $M_t = 0$		Flexion pure
$T_y \neq 0$ ( $M_z \neq 0$ )	$N = T_z = 0$ $M_t = M_y = 0$		Flexion simple
$T_y \neq 0$ ( $M_z \neq 0$ ); $N \neq 0$	$T_z = 0$ $M_t = 0$		Flexion composée
$T_y \neq 0$ ( $M_z \neq 0$ ) $T_z \neq 0$ ( $M_y \neq 0$ )	$N = 0$ $M_t = 0$		Flexion déviée
$M_t \neq 0$	$N = T_y = T_z = 0$ $M_y = M_z = 0$		Torsion pure

### Cas d'une poutre droite plane ( $R_c(s) \rightarrow \infty$ ) :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(x) = N(x) \vec{x} + T_y(x) \vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}(x) = M_z(x) \vec{z} \end{cases} \quad (2.69)$$

de plus  $\vec{f}(x) = f_x(x) \vec{x} + f_y(x) \vec{y}$  et  $\vec{m}(x) = m(x) \vec{z}$  donc d'après les équations d'équilibre locales (2.66) et (2.67) on obtient :

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{dT_y(x)}{dx} + f_y(x) = 0 \quad (2.71)$$

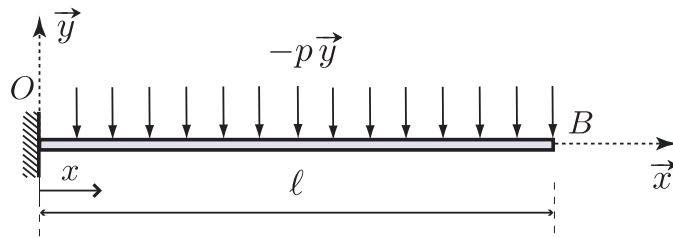
$$\frac{dM_z(x)}{dx} + T_y(x) + m(x) = 0 \quad (2.72)$$

+ conditions de saut en  $x = x_i$  et conditions aux extrémités ( $x = 0$  et  $x = \ell$ ).

## VI Exemples

Calculer pour les deux exemples les éléments de réduction du torseur de cohésion via l'intégration des équations d'équilibre locales et la méthode des coupures.

**Exemple 1** - On considère une poutre console de longueur  $\ell$ , encastree en  $x = 0$  soumise à des charges transversales uniformément réparties de densité  $-p\vec{y}$  constante et libre d'efforts à son extrémité  $x = \ell$ .



i) l'intégration des équations d'équilibre locales [plus facile dans ce cas]

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{R}}(x)}{dx} - p\vec{y} = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{R}}(x) = px\vec{y} + \vec{C}_1 \quad \text{or} \quad \vec{\mathcal{R}}(\ell) = \vec{0} = p\ell\vec{y} + \vec{C}_1 \quad \text{donc} \\ \vec{C}_1 = -p\ell\vec{y}.$$

$$\text{Comme } \vec{\mathcal{R}}(x) = N(x)\vec{x} + T_y(x)\vec{y} = p(x - \ell)\vec{y}$$

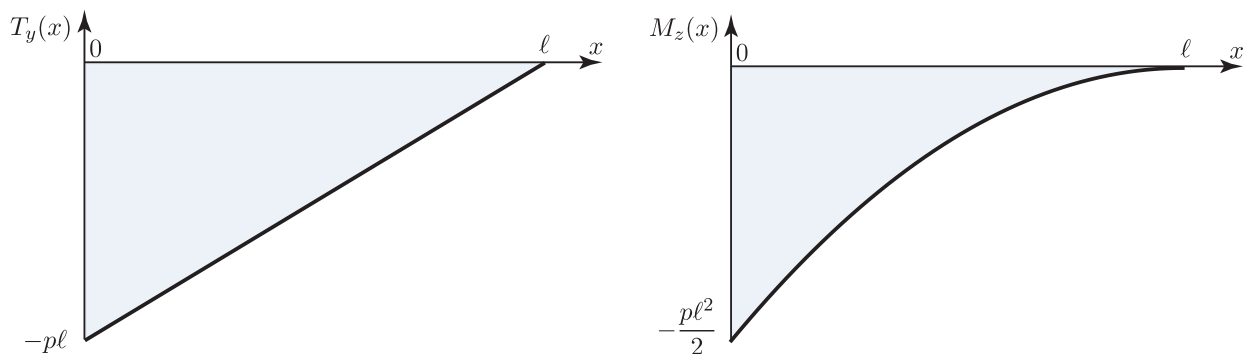
$$\implies \boxed{N(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_y(x) = p(x - \ell)}$$

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{M}}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\mathcal{R}}(x) = \vec{0} \implies \frac{dM_z(x)}{dx} = -T_y(x) = -p(x - \ell)$$

$$\implies M_z(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2 + C_2 \quad \text{or} \quad \vec{\mathcal{M}}(\ell) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad C_2 = 0$$

$$\implies \boxed{M_z(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2}$$

$\triangleright$  Diagrammes des efforts de cohésion



**Remarque :** En écrivant les conditions aux limites en  $x = 0$  on peut déterminer le torseur

d'encastrement

$$\vec{R}_O = -\vec{\mathcal{R}}(0) = -N(0)\vec{x} - T_y(0)\vec{y} = p\ell\vec{y}$$

$$\vec{M}_O = -\vec{\mathcal{M}}(0) = -M_z(0)\vec{z} = p\ell\vec{y} = \frac{p\ell^2}{2}\vec{z}$$

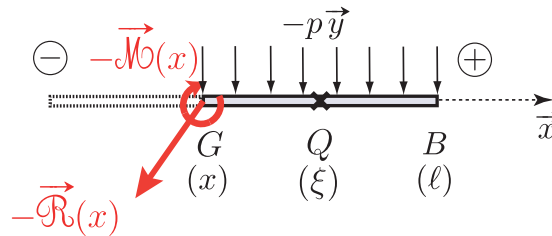
## ii) Méthode des coupures

On coupe la poutre au point  $G$  d'abscisse  $x$  et on isole la partie droite (ici  $\oplus$ ).

On considère donc les efforts de la partie  $\ominus$  sur la partie  $\oplus$  :

$$\{\mathfrak{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_G = -\{\mathfrak{C}_{\text{int}}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{\mathcal{R}}(x) \\ -\vec{\mathcal{M}}(x) \end{array} \right\}_G$$

On étudie l'équilibre de la portion  $[GB]$  :



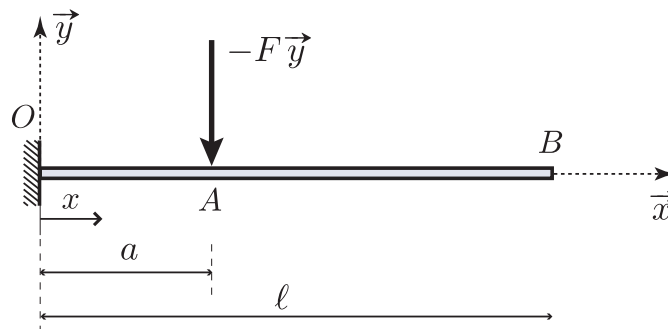
▷ Théorème de la résultante :

$$-\vec{\mathcal{R}}(x) + \int_x^\ell -p\vec{y}d\xi = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{R}}(x) = p(x - \ell)\vec{y}.$$

▷ Théorème du moment en  $G$  :

$$\begin{aligned} -\vec{\mathcal{M}}(x) + \int_x^\ell \vec{GQ} \wedge (-p\vec{y})d\xi &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}(x) &= \int_x^\ell (\xi - x)\vec{x} \wedge (-p\vec{y})d\xi = -p \left[ \frac{(\xi - x)^2}{2} \right]_x^\ell \vec{z} = -p \frac{(\ell - x)^2}{2} \vec{z}. \end{aligned}$$

**Exemple 2** - On considère une poutre de longueur  $\ell$ , encastree en  $x = 0$  soumise à une force ponctuelle  $-F\vec{y}$  constante en  $x = a$  et libre d'efforts à son extrémité  $x = \ell$ .

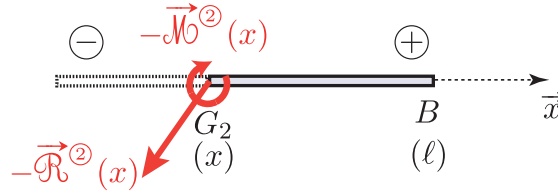




## i) Méthode des coupures [plus facile dans ce cas]

Une force ponctuelle  $-F\vec{y}$  est appliquée à l'"intérieur" de la poutre en  $x = a$ , il faut alors considérer deux domaines  $[OA] \equiv \textcircled{1}$  et  $[AB] \equiv \textcircled{2}$ .

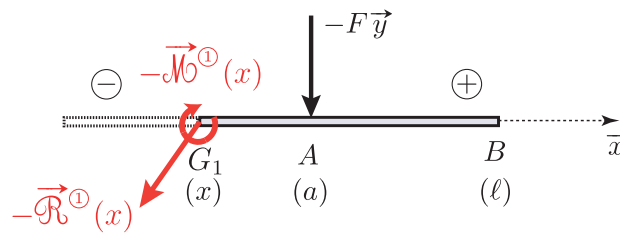
▷ Soit  $G_2 \in [AB]$  ( $a < x \leq \ell$ ), on étudie l'équilibre de la portion  $[G_2B]$  :



◦ Théorème de la résultante :  $\vec{R}^{\textcircled{2}}(x) = \vec{0} \implies N^{\textcircled{2}}(x) = T_y^{\textcircled{2}}(x) = 0$

◦ Théorème du moment en  $G_2$  :  $\vec{M}^{\textcircled{2}}(x) = \vec{0} \implies M_z^{\textcircled{2}}(x) = 0$

▷ Soit  $G_1 \in [OA]$  ( $0 \leq x < a$ ), on étudie l'équilibre de la portion  $[G_1B]$  :

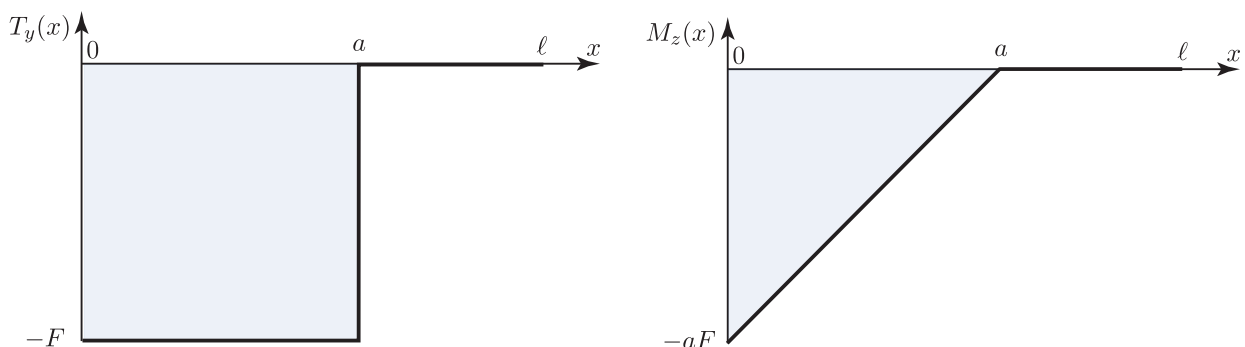


◦ Théorème de la résultante :  $-\vec{R}^{\textcircled{1}}(x) - F\vec{y} = \vec{0} \implies N^{\textcircled{1}}(x) = 0$  et  $T_y^{\textcircled{1}}(x) = -F$

◦ Théorème du moment en  $G_1$  :  $-\vec{M}^{\textcircled{1}}(x) + \vec{G_1A} \wedge (-F\vec{y}) = \vec{0}$

soit  $\vec{M}^{\textcircled{1}}(x) = (a - x)\vec{x} \wedge (-F\vec{y}) \implies M_z^{\textcircled{1}}(x) = F(x - a)$

▷ Diagrammes des efforts de cohésion



ii) l'intégration des équations d'équilibre locales

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{R}}^{\otimes}(x)}{dx} = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{R}}^{\otimes}(x) = \vec{C}_1 = \vec{\mathcal{R}}^{\otimes}(\ell) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{C}_1 = \vec{0} \implies N^{\otimes}(x) = T_y^{\otimes}(x) = 0$$

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{M}}^{\otimes}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\mathcal{R}}^{\otimes}(x) = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{M}}^{\otimes}(x) = \vec{C}_2 = \vec{\mathcal{M}}^{\otimes}(\ell) = \vec{0} \implies M_z^{\otimes}(x) = 0.$$

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(x)}{dx} = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(x) = \vec{K}_1$$

or en  $x = a$  on a la condition de saut  $\llbracket \vec{\mathcal{R}} \rrbracket(a) - F\vec{y} = \vec{0} = \vec{\mathcal{R}}^{\otimes}(a) - \vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(a) - F\vec{y}$

donc  $\vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(a) = \vec{K}_1 = -F\vec{y} = \vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(x) \implies N^{\oplus}(x) = 0$  et  $T_y^{\oplus}(x) = -F$

$$\triangleright \frac{d\vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\mathcal{R}}^{\oplus}(x) = \frac{d\vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge (-F\vec{y}) = \vec{0} \implies \vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(x) = xF\vec{z} + \vec{K}_2.$$

or en  $x = a$  on a  $\llbracket \vec{\mathcal{M}} \rrbracket(a) = \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}^{\otimes}(a) - \vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(a)$

donc  $\vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(a) = aF\vec{z} + \vec{K}_2 = \vec{0}$  donc  $\vec{\mathcal{M}}^{\oplus}(x) = F(x - a)\vec{z}$