# Examen 2A003 - 1er juin 2018

## Elements de correction

**Exercice 1** : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , $B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1). On montre d'abord que C est une famille libre. Pour cela on vérifie que le déterminant

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La famille libre C contient 3 vecteurs, donc $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Par conséquent $(u_1, u_2, u_3)$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donc base pour $\mathbb{R}^3$.

2) La matrice de passage de B à C est formée avec les composantes de $u_1, u_2, u_3$ dans la base B.

$$P_{BC} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

3) $f(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1.$

dans la base B

$f(u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2.$

dans la base B

$f(u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

ds la base B $= u_3 + u_1.$

$= u_1 + u_3.$

En résumé,

$$f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$
$$f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$
$$f(u_3) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

La matrice de $f$ dans la base C est donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(u_1)$ $f(u_2)$ $f(u_3)$ dans la base C.

! Observation : On peut aussi calculer $A'$ avec la matrice de passage $P_{BC}$.

$$A' = P_{BC}^{-1} A P_{BC}.$$

$$P_{BC}^{-1} = \frac{1}{\det P} (\operatorname{com} P)^t = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} +1 & +1 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4) La matrice de $f^n$ dans la base C est

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A')^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On démontre par récurrence que.

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a déjà vérifié pour $n = 2, 3$.

On suppose que c'est vrai pour $n$ et on vérifie l'égalité pour $(n+1)$..

$$(A')^{n+1} = (A')^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.q.f.d.

5). La matrice de $f^n$ dans la base B est $A^n$.

$$A^n = (P_{BC} A' P_{BC}^{-1})^n = (P_{BC} A' P_{BC}^{-1})(P_{BC} A' P_{BC}^{-1}) \cdots (P_{BC} A' P_{BC}^{-1}) = P_{BC} (A')^n P_{BC}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & n+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+2 & n+1 & -n-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ n+1 & n+1 & -n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ : $x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$.

2). On observe que $y_1(x) = x$ est solution car

$y_1' = 1$, $y_1'' = 0$.

$\Rightarrow \underbrace{0 \cdot x^2(x+1)}_{0} - x\cancel{(x^2+4x+2)} + \cancel{(x^2+4x+2)}\, x = 0$.

3). On cherche $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x) = x\, u(x)$.

$y_2' = xu' + u$.

$y_2'' = 2u' + xu''$

On remplace dans l'équation homogène :

$$x^2(x+1)(2u' + xu'') \underbrace{- x(x^2+4x+2)(xu'+u)}_{=\, -x(x^2+4x+2)\,xu' \, - x\cancel{(x^2+4x+2)}u} + \cancel{(x^2+4x+2)}\, xu = 0$$

$$\Rightarrow x^3(x+1)u'' + \underbrace{2x^2(x+1)u' - x^2(x^2+4x+2)u'}_{=\, x^2u'[\underbrace{2(x+1) - x^2 - 4x - 2}_{2x+\cancel{2}-x^2-4x-\cancel{2}}]} = 0.$$

$x^3(x+1)u'' + x^2u'(-x^2-2x) = 0$

$u''(x+1) - u'(x+2) = 0$.

On note $u' = v \Rightarrow v'(x+1) - v(x+2) = 0$.

On résout par séparation des variables :

$$\frac{dv}{v} = \frac{x+2}{x+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{x+2}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \int \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= x + \ln(x+1) + K.$$

$\Rightarrow v = \pm e^x(x+1) \cdot e^K$ ; on prend $v(x) = e^x(x+1)$

$u(x) = \int e^x (x+1)\,dx = x e^x + Cte.$

On choisit $u(x) = x e^x \Rightarrow y_2(x) = x e^x . x = x^2 e^x.$

On vérifie d'abord que $(y_1, y_2)$ forme une famille libre. Pour cela, on calcule par exemple leur wronskien

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 e^x \\ 1 & (2x+x^2) e^x \end{vmatrix} = x e^x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x(2+ \end{vmatrix}$$

$$= x e^x (2\cancel{x} + x^2 - \cancel{x}) = x e^x\, x(x+1) = x^2(x+1)e^x$$

$W(y_1, y_2) \neq 0$ pour $x \in ]0, +\infty[$.

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ = famille libre de cardinal 2 = dimension de l'espace des solutions

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ = base pour l'espace des solutions de l'équ. homogène

4) . $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes réelles quelconques

$y_H(x) = c_1 x + c_2 x^2 e^x$

5). On cherche une solution particulière avec la méthode de variation des constantes.

$y_p(x) = c_1'(x)\, x + c_2'(x)\, x^2 e^x = c_1' y_1 + c_2' y_2$

avec $c_1', c_2'$ solutions du système de Cramer:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \dfrac{x^3(1+x)^2}{x^2(x+1)} = r(x) \end{cases}$$

(obtenu ~~de~~ l'équation (1) ~~écrite sous forme~~ normalisée)

$= x(1+x)$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 e^x \\ x(x+1) & x(2+x)e^x \end{vmatrix}}{x^2(x+1)e^x} =$$

$$= -\frac{x^3(x+1)e^x}{x^2(x+1)e^x} = -x \Rightarrow c_1(x) = -\frac{x^2}{2} + cte.$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \cancel{x}(x+1) \end{vmatrix}}{x^2(x+1)e^x} = \frac{x^2\cancel{(x+1)}}{x^2\cancel{(x+1)}e^x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -e^{-x} + cte.$$

En conclusion,

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cdot x + (-e^{-x}).\, x^2e^x = -\frac{x^3}{2} - x^2.$$

6) La solution générale est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 x + c_2 x^2 e^x - \frac{x^3}{2} - x^2.$$

On impose les C.I :

$y(0) = 0 \Rightarrow$ vérifié $\forall c_1, c_2$.

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 + (2c_2 x + c_2 x^2)e^x - \frac{3x^2}{2} - 2x \Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = c_2 x^2 e^x - \frac{x^3}{2} - x^2}.$$

**Ex 3** : 1) $f(0) = e^0 \cdot 0 = 0$.

2). $\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$ où F est ~~une~~ la primitive de $e^{-x^2}$ qui s'annule en 0 ($F(0)=0$)

$F'(x) = e^{-x^2}$.

Donc $f(x) = e^{x^2} \cdot F(x)$ ;

$e^{x^2}$ = fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$F(x)$ = continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive de $e^{-x^2}$, $F'(x) = e^{-x^2}$ donc $F'$ contin

(la continuité est assurée en 0 aussi car $\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$.)

$\Rightarrow f(x) = e^{x^2} F(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3) $f'(x) = (e^{x^2})' F(x) + e^{x^2} F'(x) = 2x e^{x^2} F(x) +$

$+ \underbrace{e^{x^2} \cdot e^{-x^2}}_{1} = 2x \underbrace{e^{x^2} F(x)}_{f(x)} + 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 2x f(x) + 1$

4). De la relation précédente on déduit que si $f \in \mathcal{C}^1$ alors $f' \in \mathcal{C}^1$ donc $f \in \mathcal{C}^2$.

$f^{(2)}(x) = 2 \underbrace{f(x)}_{\in \mathcal{C}^1} + \underbrace{2x f'(x)}_{\in \mathcal{C}^1} \Rightarrow f^{(2)} \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}^3$

Par récurrence, on peut justifier que $f^{(n)}$ existe et est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, $\forall n \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$

5). a). $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$.

$y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{0}^{\infty} a_n x^n + 1.$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + 1.$$

On réindexe les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n - 1 = 0.$$

$$1 \cdot a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n - 1 = 0.$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+1) a_{n+1} - 2 a_{n-1} \right] x^n - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - 1 = 0. \\ (n+1) a_{n+1} - 2 a_{n-1} = 0, \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

b). $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0.}$

$a_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

c) . $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$ .

Si $n$ = pair , $n = 2k$ alors

$$a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1}.$$

$$a_{2k-1} = \frac{2}{2k-1} a_{2k-3}.$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{2}{2k-1} \cdots \frac{2}{1} a_1.$$

$$= \frac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 1} \cdot 1$$

Si $n$ = impair , $n = 2k-1$ alors

$$a_{n+1} = a_{2k-1+1} = a_{2k} = \frac{2}{2k} a_{2k-2} =$$

$$= \frac{2}{2k} \cdot \frac{2}{2(k-1)} \cdots \underbrace{a_0}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0.$$

Donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 1}, & n = 2k+1. \\ a_n = 0, & n = 2k \end{cases}$

(*)

d) Il s'agit d'une série lacunaire. 
On calcule le rayon de convergence à l'aide des $a_{2k+1}$ avec le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0.$$

$\Rightarrow \boxed{R = \infty}$

6). Le problème de Cauchy (3) + C.T : $f(0)=0$ a une solution unique (th. de Cauchy Lipschitz). Alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \; a_n \text{ donnés par } (*)$$

est le dév. en série entière de $f$.

f