2A004 - Statique et Dynamique de Fluides
6 Janvier 2017

Problème 1: Fluides parfaits

Le tube OB de longueur L et section S présenté sur la Figure 1(haut) est alimenté par un réservoir de hauteur H et surface S_A. Le tube est posé sur un plan d'appui et il peut pivoter autour du point O. Le jet d'eau sort du point B de section S_B dans la direction z négative comme le montre la Figure et il pousse donc le tube vers le haut. Nous allons étudier d'abord pour quelle hauteur H le tube décolle du plan.

1. Énoncez le théorème de conservation de la masse sous la forme globale.
2. Énoncez le théorème des quantités de mouvement sous la forme globale dans le cas d'un écoulement stationnaire et soumis à la pesanteur. Donnez les hypothèses du théorème.
3. Si $S_A >> S_B$ appliquer le théorème de Bernoulli entre A et B et montrer que la vitesse de sortie en B est $V_B = \sqrt{2gH}$.
4. Appliquer le théorème des quantités de mouvement sur le volume de contrôle (S_0, S_{lat}, S_B sur la Fig. 1 (bas)) et montrez que les composantes s'écrivent

$$-\rho V_0^2 S = -R_x$$
$$-\rho V_B^2 S_B = -\rho g S L - R_z$$

5. (pas nécessaire pour la suite du problème) Donnez l'expression des efforts du fluide sur le solide, R_x et R_z.
6. Si la force de gravité s'applique en $\frac{L}{2}$ $\mathbf{e_x}$ et la force de réaction du jet dans L $\mathbf{e_x}$ donner la condition et la valeur de H pour que le tube décolle du plan d'appui.

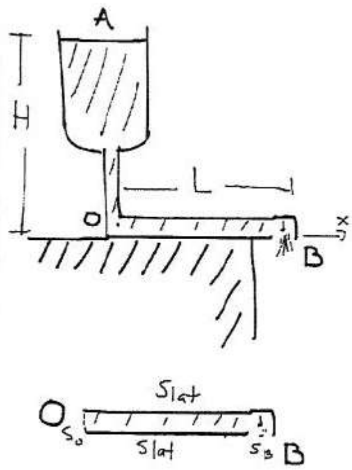


FIGURE 1 – (haut) Schéma (bas) Zoom sur le volume de contrôle entre O et B.

Le tube est maintenant décollé à une hauteur h du plan d'appui et forme un angle α avec l'axe x (Figure 2).

8. En reprenant le calcul du point 3 donnez la nouvelle expression de la vitesse en B.
9. Calculez l'angle α en fonction des paramètres du problème.
10. La position d'équilibre est-elle stable? C'est à dire si vous écartez le tube de sa positon d'équilibre revient-il à sa position? Justifiez sans calculs.

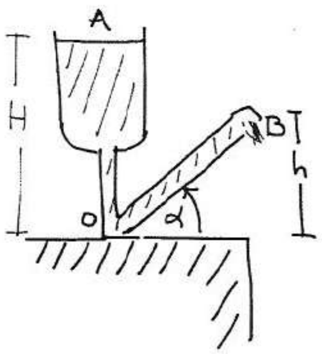


FIGURE 2 – Tube décollé.

Problème 2: Fluides visqueux

On considère un fluide visqueux de viscosité μ et de masse volumique ρ constante en écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles, la vitesse est de la forme $\vec{v} = U(y)e_x$ (Figure 3). On néglige les forces de pesanteur donc $g = 0$. Les plaques sont fixes soit les conditions aux limites suivantes : $U(y = h) = U(y = 0) = 0$ et l'on suppose que le moteur de l'écoulement est le gradient de pression K connu. L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \mu\triangle\vec{v}$$

où $\triangle = \nabla^2$ (Rappel $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z$)

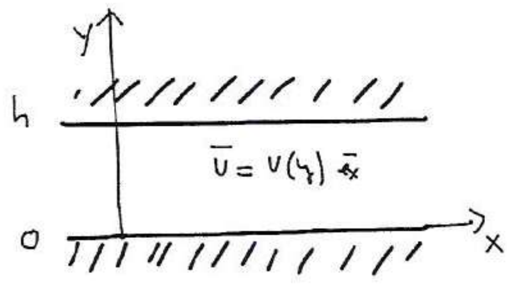


FIGURE 3 – Écoulement entre deux plaques parallèles.

1. Donnez les unités de la viscosité μ. Quelle est la valeur pour l'eau ?
2. Définissez le nombre de Reynolds. Donnez une interprétation physique.
3. Écrivez les composantes (x,y) de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.
4. Montrez que pour l'écoulement du problème elles se réduisent à
$$K = \mu\frac{d^2U}{dy^2}.$$
5. Trouvez le profil de vitesses $U(y)$ et montrez que la vitesse est maximale en $y = h/2$.
6. Calculez le débit volumique Q.
7. Calculez la vitesse débitante U_d.
8. Calculez le nombre de Reynolds, quelle est la condition pour avoir un écoulement laminaire ?

Nous avons maintenant deux fluides non miscibles (c'est à dire qu'ils ne se mélangent pas) de viscosités différentes comme montré sur la Figure 4 :

- Le fluide près de la paroi inférieure s'étale de $y = 0$ à $y = e$ et il est désigné par la lettre i donc la vitesse par U_i.

- Le fluide de la partie supérieure, désigné par la lettre s s'étale de $y = e$ à $y = h$ et la vitesse est donc écrite U_s.

Les conditions aux limites sur les parois sont les mêmes que pour un seul fluide et l'équation de Navier-Stokes s'écrit de la même manière dans les deux parties soit

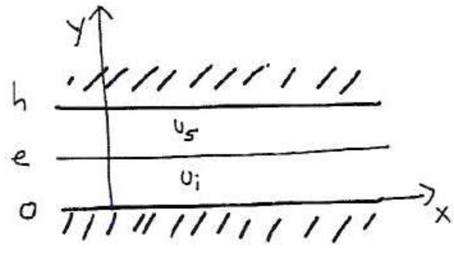


FIGURE 4 – Deux fluides.

$$K = \mu_i\frac{d^2U_i}{dy^2} \quad \text{pour } y \in (0, e)$$
$$K = \mu_s\frac{d^2U_s}{dy^2} \quad \text{pour } y \in (e, h)$$

où μ_i et μ_s sont les viscosités des fluides, différentes. Nous avons les 2 conditions aux limites supplémentaires à l'interface $y = e$:

$$U_i(y = e) = U_s(y = e) \quad \text{continuité des vitesses}$$
$$\mu_i\frac{dU_i}{dy}_{|y=e} = \mu_s\frac{dU_s}{dy}_{|y=e} \quad \text{continuité des contraintes}$$

9. Trouvez le profil de vitesses $U(y)$.
10. Calculez le débit volumique Q.

Corrigé 2A004 6/1/2017

Pb1

1. Cours [1pt]

2. Cours [1pt]

3. $\frac{1}{2}\rho V_A^2 + p_A + H = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + p_B$ et comme $p_A = p_B = p_{atm}$ et

$$V_A S_A = V_B S_B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{S_B}{S_A}$$ si $S_A \gg S_B$ $V_A \ll V_B$

donc $V_B = (2gH)^{1/2}$ [1pt]

4. $$\int_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS = -\rho g S L \vec{e}_z + \int_S -p\vec{n}\,dS. \quad S = S_0 \cup S_{lat} \cup S_B$$

$S_0 \begin{cases} \vec{v} = V_0 \vec{e}_x \\ n = -e_x \\ p = p_0 \end{cases}$ $\quad S_B \begin{cases} \vec{v} = -V_B e_z \\ \vec{n} = -\vec{e}_z \\ p = p_B = p_{atm} \end{cases}$ $\quad S_{lat} \begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \\ p = p \end{cases}$

$$-\rho V_0^2 S \vec{e}_x - \rho V_B^2 S_B \vec{e}_z = -\rho g S L \vec{e}_z + \underbrace{\int_{S_0} -p_0 \vec{n}\,dS + \int_{S_{lat}} -p\vec{n}\,dS + \int_{S_B} -p_B \vec{n}\,dS}_{1}$$

- Soit on dit que 1 $= -\vec{R}_{f\to s}$ [1pt] (réponse acceptée)
- Soit on le fait correctement comme $p_B = p_{atm}$. on peut écrire

$$1 = +\int_{S_0} -p_0\vec{n}\,dS + \int_{S_0} -p_{atm}\vec{n}\,dS - \int_{S_0} -p_{atm}\vec{n}\,dS + \int_{S_{lat}} -p\vec{n}\,dS + \int_{S_{lat}} -p_{atm}\vec{n}\,dS - \int_{S_{lat}} -p_{atm}\vec{n}\,dS + \int_{S_B} -p_{atm}\vec{n}\,dS$$

et on fait apparaître une surface fermée $\oint -p_{atm}\vec{n}\,dS = 0$

$$1 = \underbrace{\int_{S_0} -(p_0 - p_{atm})\vec{n}\,dS + \int_{S_{lat}} -(p - p_{atm})\vec{n}\,dS}. = -\vec{R}_{f\to s}$$

5. [1pt] si cette expression est trouvée.

6. $$\vec{M}_0 = -\rho g S L \cdot \frac{L}{2} + \rho V_B^2 S_B \cdot L = \vec{0}$$

$\Rightarrow V_B^2 L = L \cancel{\rho_B}$

$$V_B^2 S_B \cancel{L} = g S L \cdot \frac{\cancel{L}}{2}$$

$V_B^2 = g \frac{L}{2} \frac{S}{B_B}$ mais $V_B^2 = 2gH$

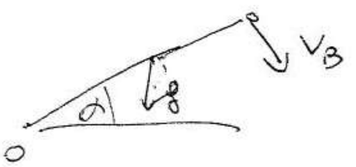
$$\boxed{H = \cancel{g} \frac{L}{4} \frac{S}{S_B}}$$ [1p]

Att. $\Sigma F = 0$ ne donne pas la bonne réponse !!

7. Même qu'en 3 avec $V_B = \left(2g(H-h)\right)^{1/2}$

on retrouve la solution en 3 avec $h=0$.

8. $\bar{M}_O = 0$



à partir du point 6 $V_B^2 S_B \cancel{L} = g \cos\alpha \, S L \frac{\cancel{L}}{2}$

$V_B^2 = 2g(H-h)$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{4(H-h)}{L} \frac{S_B}{S}}$$

9 pas simple. Si l'on écarte le tube vers le bas la vitesse en B augmente donc il va tendre vers sa position initiale (plus finement on devrait traiter le comportement de $\cos\alpha$ ...) [1pt]

Réponse acceptée : [1/2 pt] comme H diminue $\alpha \to 0$ ...

9/10

Pb 2

1. $[\mu] = Pa.s$, 10^{-3} à 20°C (1 pt)

2. $Re = \frac{\rho U D}{\mu}$ rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses.
(0,5) (0,5)

3. (1 pt)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (0.5)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (0.5)$$

4. stationnaire, $u = u(y)$
(1p)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 U}{dy^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = p(x) \text{ donc } \frac{dp}{dx}. \quad (0.5)$$

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \mu\frac{d^2 U}{dy}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{dp}{dx} \quad (0,5)$$

5. (1.5p) $\frac{d^2U}{dy} = \frac{k}{\mu}$; $\frac{dU}{dy} = \frac{k}{\mu} y + A \Rightarrow \boxed{U = \frac{k}{\mu}\frac{y^2}{2} + Ay + B}$

$U(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$U(h) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{k}{2}\frac{h^2}{\cancel{4}} + A\cancel{h} \Rightarrow A = -\frac{kh}{2}$

$U = \frac{k}{\mu}\frac{1}{2}(y^2 - hy)$ (1 pt)

étude $f(y) = y^2 - hy$

(0.5p) $f' = 2y - h = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{2}$ max ou min. $f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2} = -\frac{h^2}{2}$

$f(0) = 0 \quad f(h) = 0$ comme $k < 0 \Rightarrow$ max < 0

6. $Q = \int_0^h U(y)\, dy \underbrace{\int_0^z dz}_{b}$

$$Q = \frac{k b}{\mu 2} \int_0^h (y^2 - h y)\, dy = \frac{k b}{\mu 2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{h y^2}{2} \right]_0^h = -\frac{k h^3 b}{\mu 12}$$

$$Q = -\frac{1}{12} \frac{k h^3}{\mu} \cdot b \quad (\text{rappel } k < 0) \quad (1p)$$

7. $U_d = \frac{Q}{S} = \frac{-\frac{1}{12} \frac{k h^3}{\mu} b}{h\, b} = -\frac{1}{12} \frac{k h^2}{\mu}$ (1 p)

8. $\mathrm{Re} = \frac{\rho U_d h}{\mu}$ avec U_d. (0.5)

$\mathrm{Re} < 2000$ pour une conduite cylindrique (0.5)

9. (1p)

10. [1,5 p]