Structures Elastiques (LU3ME006)

(Partie RDM)

Amâncio FERNANDES
(amancio.fernandes@sorbonne-universite.fr)

Tour 5565 - bureau 402

Plan du cours :

Introduction à la RDM

Rappels sur la statique des solides

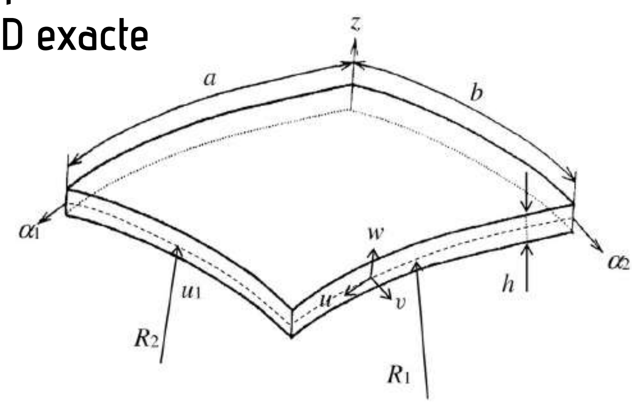
Introduction

RDM => Résistance Des Matériaux

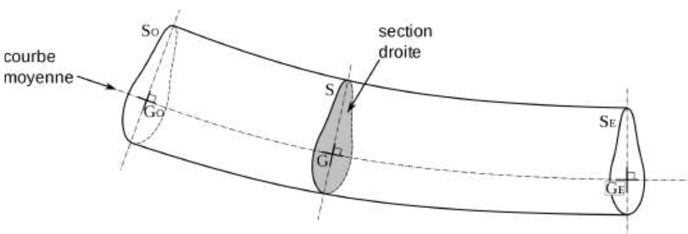
Issue de la MMC (pb mathématiquement bien posé mais peu de solution)

Pour des géométries et chargements particuliers
=> approximation de la solution 3D exacte

1 dim négligeable devant 2 autres
=> Théorie des plaques ou coques



2 dim négligeables devant la 3ème
=> Théorie des poutres (RDM)



Hypothèses simplificatrices en théorie des poutres

(H1) : **Matériau élastique linéaire, homogène et isotrope**

(H2) : **Hypothèses des petites perturbations (HPP)**
Petites déformations, petits déplacements

(H3) : **Evolution quasi-statique**
Les termes d'accélération sont négligés, les sections droites varient lentement ou sont constantes

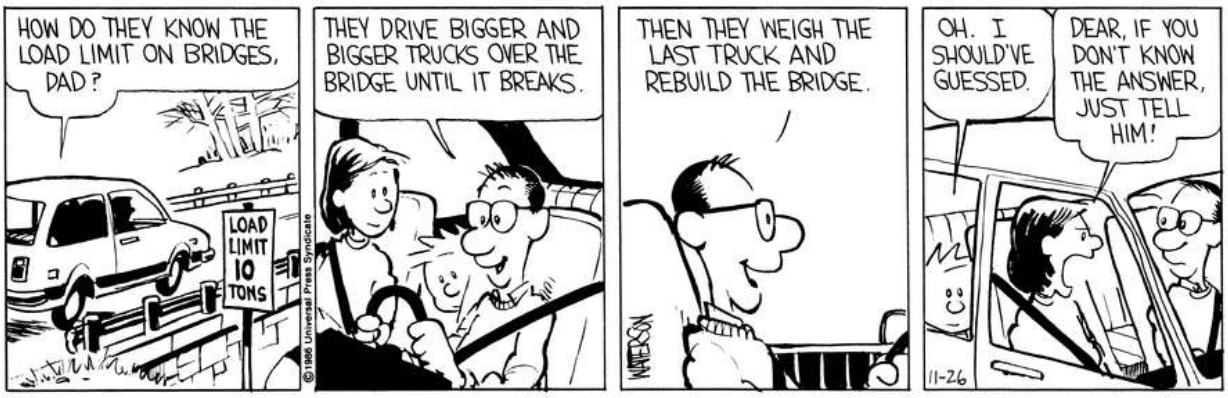
(H4) : **Principe de Saint-Venant**
Dans une section éloignée des points d'application d'efforts ponctuels, une sollicitation extérieure peut-être remplacée par son torseur résultant

(H5) : **Principe de superposition**
Qqsoit l'ordre d'application des efforts extérieurs sur la poutre, l'état final est le même (base des théorèmes énergétiques)

Sous ces hypothèses, les champs utilisés sont alors plus élémentaires.

=> calculs des déformations, déplacements et contraintes d'objets de forme simple et donc pouvoir les **dimensionner**.

Pour des structures plus complexes on aura recours à des logiciels EF.



Calvin & Hoobes

RDM a pour objet l'étude de la stabilité et la **résistance des structures**

RDM outil indispensable à l'ingénieur pour **concevoir** et **réaliser** des pièces ou ouvrages

Historique


114 DIALOGO SECONDO

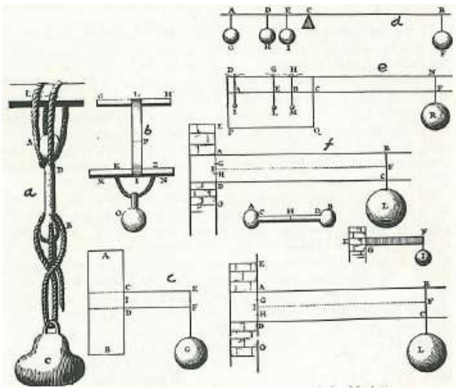
sin quì dichiarate, non sarà difficile l'intender la ragione, onde auuenga, che vn Prisma, ò Cilindro solido di vetro, acciaio, legno, ò altra materia frangibile, che sospeso per lungo sosterrà grauissimo peso, che gli sia attaccato, mà in trauerso (come poco fà diceuamo) da minor peso assai potrà tal volta essere spezzato, secondo che la sua lunghezza eccederà la sua grossezza. Imperò che figuriamoci il Prisma solido AB, CD fitto in vn muro dalla parte AB, e nell'altra estremità s'intenda la forza del Peso E, (intendendo sempre il muro esser eretto all'Orizonte, & il Prisma, ò Cilindro fitto nel muro ad angoli retti) è manifesto che douendosi spezzare si romperà nel luogo B, doue il taglio del muro serue per sostegno, e la BC per la parte della Leua, doue si pone la forza, e la grossezza del solido BA e l'altra parte della Leua, nella quale è posta la resistenza, che consiste nello staccamento, che s'hà da fare della parte del solido BD, che è fuor del muro, da quella che è dentro; e per le cose dichiarate il momento della forza posta in C al momento della resistenza che stà nella

Prop. I.

Galilée
(1564-1642)

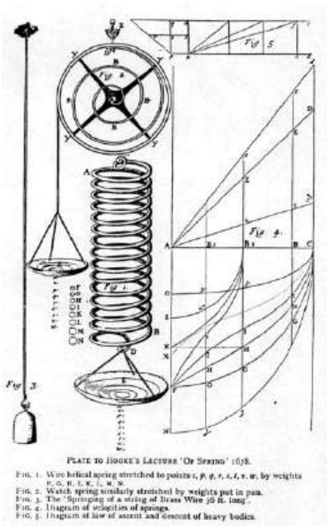
Début des travaux XVIIème :
travaux sur la tension
et la flexion des poutres

History of Strength of Materials (S.P. Timoshenko)



Edme Mariotte
(1620-1684)

Flexion linéaire des poutres élastiques/Relation linéaire entre courbure et moment flexion



Robert Hooke
(1635-1703)

Déformation élastique fonction linéaire des contraintes.
Il a relié l'allongement à la force appliquée.

Les **Bernoulli**

Johann
(1667-1748)
1ère fois problème réduit à une équation différentielle

Jacob
(1654-1705)
Expression différentielle du rayon de courbure

Daniel
(1700-1782)
Travaux sur l'élasticité statique

Leonhard **Euler** (1707-1783)

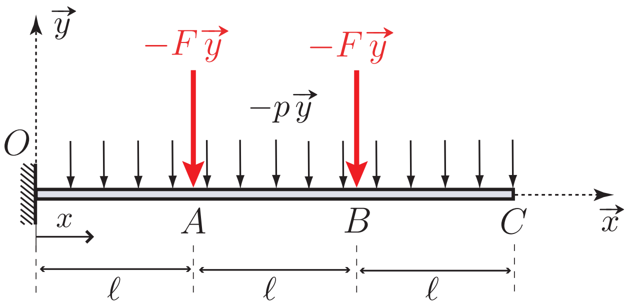
Équation différentielle de la flexion élastique

Alberto **Castigliano** (1847-1884)

Méthodes énergétiques

Exemples utilisation RDM dans la vie courante

Calcul Structures (Génie Civil:Bâtiments/Ponts;Pylônes électriques...)



Approche milieux complexes (Exple:aéronautique)

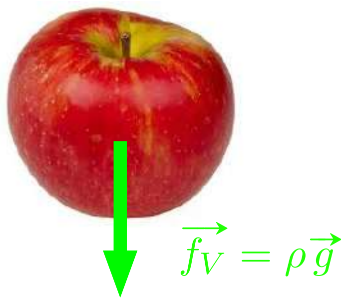
Rappels sur la statique des solides

Toutes les structures sont supposées **immobiles** et en **équilibre** sous l'effet de diverses **actions mécaniques** (toute cause susceptible de déplacer ou déformer un solide)

Modélisation des actions mécaniques:

Plusieurs types d'efforts :

(i) Densités volumiques de forces $\overrightarrow{f_V}$ **(**$[N/m^3]$**)**



Exple : forces de pesanteur

(ii) Densités surfaciques de forces $\overrightarrow{f_S}$ **(**$[N/m^2]$**)**

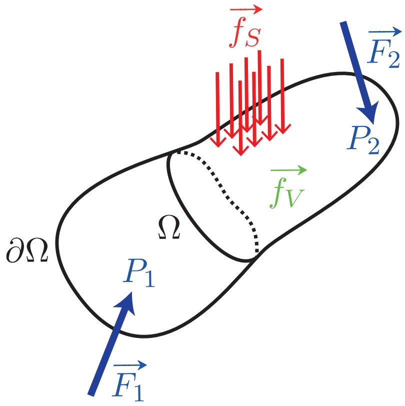
Forces réparties appliquées sur une partie importante de la surface d'un solide

(iii) Force ponctuelle ou concentrée $\vec{\mathtt{F}}_i$ **(**$[N]$**) en** P_i

Surface de contact très petite

Notion de force et de moment :

On considère un solide Ω délimité par une frontière $\partial\Omega$



Les résultantes de ces forces s'obtiennent par intégration volumique ou surfacique :

$$\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega} = \int_\Omega \overrightarrow{f_V}\, dV + \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{f_S}\, dS + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathbf{F}_i}$$

Le calcul du moment de ces forces par rapport à un point A permet d'obtenir le point d'application de cette résultante

$$\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) = \int_\Omega \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_V}\, dV + \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_S}\, dS + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}_i}$$

ou $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) = \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}$

avec Q le point d'application de la résultante $\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}$

Relation vectorielle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_B(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) &= \overrightarrow{BQ} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega} \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega} + \underbrace{\overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}}_{\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega})}\end{aligned}$$

=>formule de transport : $\overrightarrow{M}_B(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) = \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}$

Torseur résultant ou torseur des actions mécaniques :

$$\boxed{\left\{\mathcal{C}_{\text{ext}\to\Omega}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega} \\ \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega})\end{array}\right\}_A}$$

Résultante

Moment en A

Eléments de réduction

$$\left\{\mathcal{C}_{\text{ext}\to\Omega}\right\}_B = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega} \\ \overrightarrow{M}_B(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) = \overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to\Omega}\end{array}\right\}_B$$

Principe Fondamental de la Statique (PFS) :

Un système est en **équilibre** si les actions mécaniques **extérieures** appliquées à Ω vérifient :

$$\left\{\mathcal{C}_{\text{ext}\to\Omega}\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext}\to\Omega} \\ \vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext}\to\Omega}) \end{array} \right\}_A = \left\{0\right\}_A \quad \forall A$$

⟹ Théorème de la résultante

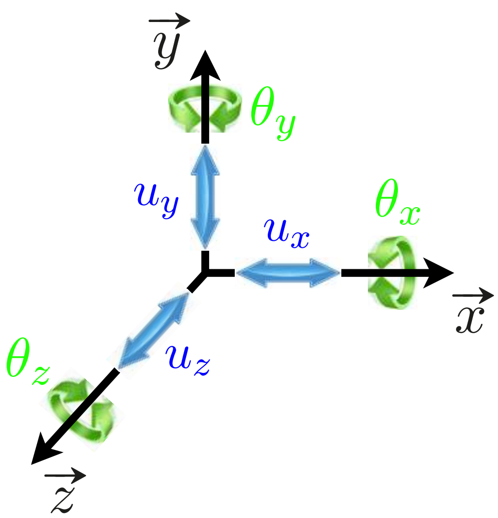
$$\vec{R}_{\text{ext}\to\Omega} = \boxed{\int_\Omega \vec{f_V}\, dV + \int_{\partial\Omega} \vec{f_S}\, dS + \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathtt{F}_i} = \vec{0}}$$

⟹ Théorème du moment en A

$$\vec{M}_A(\vec{R}_{\text{ext}\to\Omega}) = \boxed{\int_\Omega \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f_V}\, dV + \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f_S}\, dS + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{\mathtt{F}_i} = \vec{0}}$$

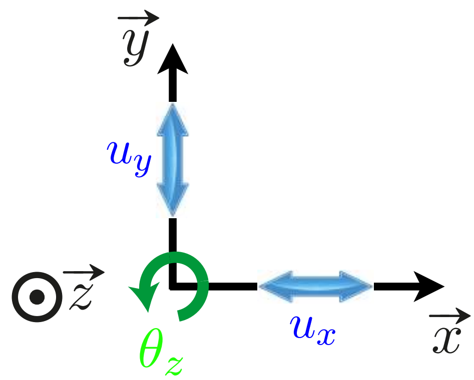
Liaisons et actions de contact entre 2 solides :

Solide libre 3D



6 degrés de liberté

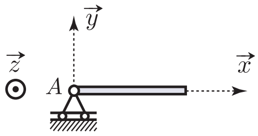
Solide libre 2D (système plan)



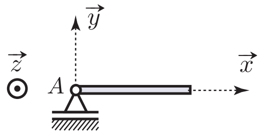
3 degrés de liberté

Illustration pour un système plan (liaisons parfaites) :

Appui mobile ou appui simple glissant

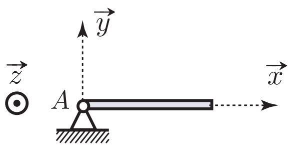
ou



appui mobile ou appui simple glissant

Grandeur cinématique	$\boldsymbol{u_x \neq 0}$ $\quad u_y = 0$ $\quad \boldsymbol{\theta_z \neq 0}$ $\quad \Longrightarrow$ 2 ddl
Grandeur statique	$R_x = 0$ $\quad \boldsymbol{R_y \neq 0}$ $\quad M_z = 0$ $\quad \Longrightarrow$ 1 réaction
Torseur de liaison	$\left\{\mathscr{C}_{\text{liaison}}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} R_y\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$

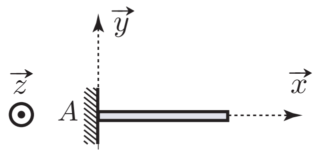
Articulation ou appui simple fixe

articulation ou appui simple fixe

Grandeur cinématique	$u_x = 0$ $\quad u_y = 0$ $\quad \boldsymbol{\theta_z \neq 0}$ $\quad \Longrightarrow$ 1 ddl
Grandeur statique	$\boldsymbol{R_x \neq 0}$ $\quad \boldsymbol{R_y \neq 0}$ $\quad M_z = 0$ $\quad \Longrightarrow$ 2 réactions
Torseur de liaison	$\left\{\mathscr{C}_{\text{liaison}}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} R_x\,\vec{x} + R_y\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$

Encastrement



encastrement

Grandeur cinématique	$u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z = 0 \quad \Longrightarrow$ 0 ddl
Grandeur statique	$\boldsymbol{R_x \neq 0} \quad \boldsymbol{R_y \neq 0} \quad \boldsymbol{M_z \neq 0} \quad \Longrightarrow$ 3 réactions
Torseur de liaison	$\{\mathcal{C}_{\text{liaison}}\}_A = \begin{Bmatrix} R_x\vec{x} + R_y\vec{y} \\ M_z\vec{z} \end{Bmatrix}_A$

Systèmes isostatiques et hyperstatiques :

Soit une structure ayant au total $\boldsymbol{r}$ inconnues de liaison (composantes de réactions à déterminer).

Pour une **structure 3D**, on dispose de 6 **équations** pour écrire l'équilibre global de la structure (3 pour le **théorème de la résultante**, 3 pour le **théorème du moment** d'après le PFS)

On note $\boldsymbol{h}$ le **degré d'hyperstatisme** alors pour le cas 3D : $h_{3D} = r - 6$

Pour une **structure plane**, on dispose de 3 **équations** pour écrire l'équilibre global de la structure (2 pour le **théorème de la résultante**, 1 pour le **théorème du moment**) alors pour le cas plan : $h_{2D} = r - 3$

Si $h = 0$ alors la structure est dite isostatique.
=> Les liaisons sont au nombre **strictement suffisant** pour assurer l'équilibre. L'écriture du PFS suffit à déterminer les réactions de liaison.

Si $h > 0$ alors la structure est dite hyperstatique d'ordre h.
=> L'écriture du PFS **ne suffit pas** à déterminer les réactions de liaison. On parle d'appuis **surabondants**. Il faudra h équations supplémentaires pour résoudre le système.

Si $h < 0$ alors la structure est un mécanisme (pas stable).

Exple de calcul du degré d'hyperstatique :

Structures fortement hyperstatiques :

fort degré d'hyperstatisme $\equiv$ facteur de sécurité

La disparition d'appuis n'entraîne pas systématiquement la ruine totale de la structure. Celle-ci peut n'être que locale (la structure s'adapte).

Tour Grenfell de Londres (2017)

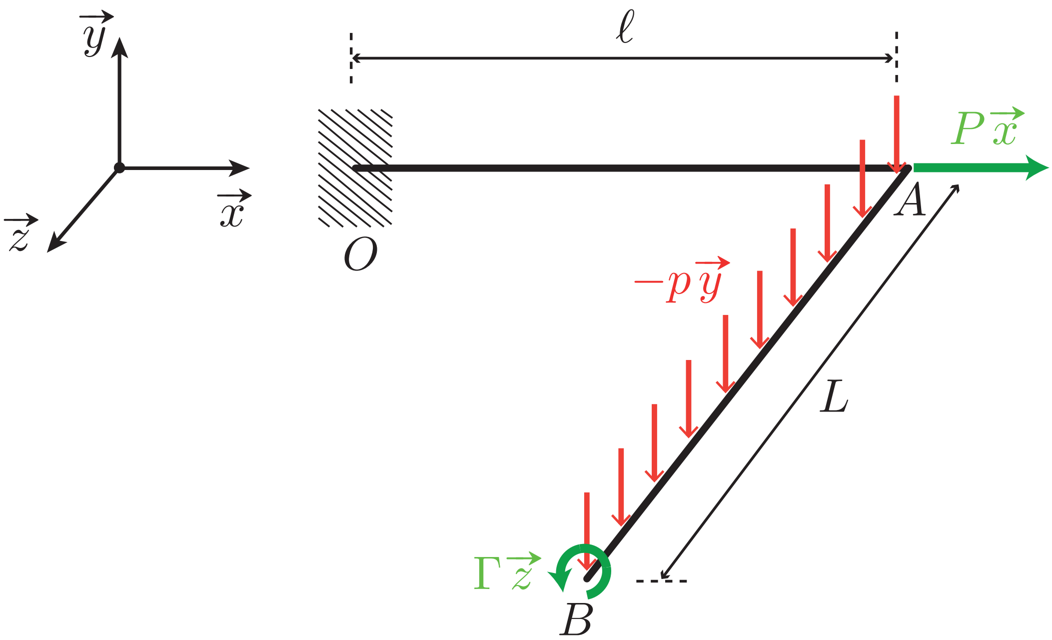
Structures faiblement hyperstatiques :

Une structure faiblement hyperstatique (proche structure isostatique), généralement **plus esthétique**, **offre moins de sécurité**.

Si accident, la ruine locale peut entraîner la ruine de toute la structure.

Terminal 2E CDG (2004)

Exple de calcul du torseur de liaison :



Déterminer le torseur de liaison en O dû à l'encastrement