2. Flexion d'un arbre cylindrique

2.1 Formulation du problème de flexion simple normale

On considère un arbre cylindrique de section S quelconque de longueur l et de generatrices parallèles à $\underline{e}_1$. On designe par S_0 et S_l les sections terminales l'origine O du repère est prise au centre d'inertie de la section S_0 et les axes $(0,\underline{e}_2)$ et $(0,\underline{e}_3)$ coincident avec les axes principaux d'inertie de S_0. le choix induit les relations suivantes pour toute section S dans ce repère :

$$\int_S x_2\, dS = 0 \qquad \int_S x_3\, dS = 0 \qquad I_{23} = \int_S x_2 x_3\, dS = 0$$

(O centre de gravité géométrique situé sur $O\underline{e}_1$)

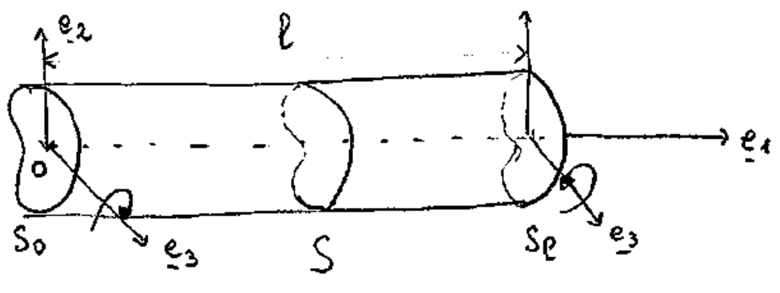
Soit $I_{\alpha\beta} = \int_S x_\alpha x_\beta\, dS$ la composante $(\alpha\beta)$ du tenseur d'inertie $\underline{\underline{I}}$

$\underline{\underline{I}}$ est symétrique donc possède deux directions principales orthogonales

Si l'on choisit comme axe de coordonnées $(0,\underline{e}_2)$, $(0,\underline{e}_3)$ ces deux directions principales alors $\underline{\underline{I}}$ est diagonal et on a $I_{23} = 0$. On note

$$I_3 = \int_S x_2^2\, dS \quad \text{et} \quad I_2 = \int_S x_3^2\, dS$$

I_2 et I_3 sont appelés moments d'inertie géométriques principaux de la section S



l'arbre est elastique homogène isotrope. On etudie son equilibre isotherme sous les sollicitations suivantes :

i) les efforts volumiques sont négligeables

ii) la surface latérale $\partial\Omega \setminus (S_0 \cup S_l)$ est libre d'effort

iii) les faces extrêmes sont soumises à un couple de la forme :

$\underline{R} = \underline{0}$ — résultante nulle — $\underline{M}(O) = \mathcal{M}_3\, \underline{e}_3$ sur S_ℓ

Moment en O porté par $\underline{e}_3$ appelé Moment de flexion

Sur la Section S_0, le couple est opposé : $\underline{R} = \underline{0}$ $\underline{M}(O) = -\mathcal{M}_3\, \underline{e}_3$ sur S_0

le couple est appliqué par rapport à un axe principal d'inertie de la section

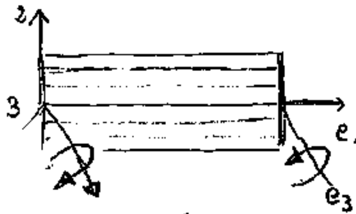
On parle de <u>flexion normale</u>.

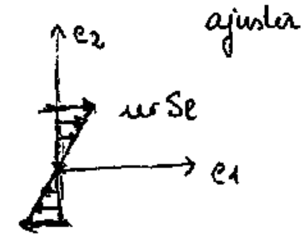
- Comme pour le problème de torsion, le problème ainsi posé n'est pas un problème régulier ; on ne connait pas les efforts surfaciques en tout point du bord. Par application du principe de Saint-Venant, on va chercher une répartition d'efforts surfaciques (sur S_0 et S_ℓ) la plus simple possible dont le torseur associé est un couple de moment porté par $\underline{e}_3$.

Considérons la densité surfacique d'effort de la forme :

$$F_2 = 0 \qquad F_3 = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell$$

et $\quad F_1 = k\, x_2$ sur S_ℓ et $F_1 = -k\, x_2$ sur S_0 où k est une constante à ajuster





$(\mathcal{M}_3 < 0)$ (section terminale)

On s'inspire pour cela de la forme attendue de la déformée d'une barre en flexion, les fibres parallèles à $O\underline{e}_1$ en partie supérieure subissent un étirement et celles en partie inférieure une contraction

Calculons le torseur des efforts appliqués associés sur S_ℓ :

$$R_1 = \int_{S_\ell} k\, x_2\, dS = 0 \quad \text{du fait du choix du repère} \quad , R_2 = R_3 = 0.$$

(O étant centre de gravité géométrique)

$$\underline{OM} \wedge \underline{F} : \begin{vmatrix} \ell \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ x_3 F_1 = k x_2 x_3 \\ -x_2 F_1 = -k x_2^2 \end{vmatrix}$$

d'où $\quad M_1 = 0 \quad ; \quad M_2 = \int_S k\, x_2 x_3\, dS = 0 \qquad M_3 = -k \int_S x_2^2\, dS = -k\, I_3$

le moment est bien porté par $\underline{e}_3$

En posant $k = -\dfrac{M_3}{I_3}$ on a bien $M_3 = \mathcal{M}_3$.

La densité surfacique d'effort $F_1 = -\dfrac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2$ $F_2 = 0$ $F_3 = 0$ sur S_ℓ

correspond à un torseur de résultante nulle et de moment en O $\mathcal{M}_3$ porté par $(O, \underline{e}_3)$

De même, la densité d'effort $F_1 = \dfrac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ sur S_ℓ

correspond à un torseur de résultante nulle et de moment en O $-\mathcal{M}_3 \, \underline{e}_3$

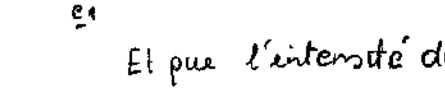
On peut alors formuler le problème régulier suivant :

$$
\left|
\begin{array}{lll}
\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(x_1,x_2,x_3) = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega & \\
\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{trace} \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} & \forall x \in \Omega & \\
\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) & x \in \Omega & \\
\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega \setminus (S_o \cup S_\ell) & \text{avec } \underline{n} = (0, n_2, n_3),\ n_2^2 + n_3^2 = 1 \\
\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -\dfrac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2 \, \underline{e}_1 & \text{sur } S_\ell & \text{avec } \underline{n} = \underline{e}_1 \\
\underline{\underline{\sigma}} \cdot n = \dfrac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2 \, \underline{e}_1 & \text{sur } S_o & \text{avec } n = -\underline{e}_1
\end{array}
\right.
$$

Il s'agit d'un problème de type II, bien posé au sens où la barre est bien en equilibre global. La solution en déplacement n'est pas unique mais définie à un deplacement de corps rigide près. En revanche la solution en contraintes et déformation est unique.

- 2.2. Résolution par l'approche contrainte.

D'après l'idée que l'on a de la déformation d'un élément de matière,



On est amené à penser que les contraintes sont des contraintes de traction en haut et de compression.

Et que l'intensité dépend de x_2 seulement.

d'où la forme

$$\underline{\underline{\Pi}} = k\,x_2\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} k x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

$\underline{\underline{\Pi}}$ vérifie bien les équations d'équilibre, les condition de surface latérale libre d'effort et en prenant $k = -\dfrac{M_3}{I_3}$ les condition sur les faces S_0 et S_ℓ en effort sont bien satisfaites donc $\underline{\underline{\Pi}} \in SA$ avec

$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} = -\frac{M_3}{I_3}\, x_2\ (\underline{e}_1 \times \underline{e}_1)}$$

le champ de déformation associé est donné par la loi de comportement.

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{M_3}{EI_3} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & +\dfrac{\nu M_3}{EI_3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\nu M_3}{EI_3} x_2 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est linéaire en x_2 (du premier degré) les équation de compatibilité sont donc automatiquement vérifiées. le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est donc intégrable.

L'intégration conduit à la solution particulière :

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{M_3}{EI_3}\, x_2 x_1 + \varphi_1(x_2, x_3) \\[2mm] u_2 = \dfrac{\nu M_3}{EI_3}\, \dfrac{x_2^2}{2} + \varphi_2(x_1, x_3) \\[2mm] u_3 = \dfrac{\nu M_3}{EI_3}\, x_2 x_3 + \varphi_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \dfrac{\nu M_3}{EI_3} x_3 + \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dfrac{M_3}{EI_3} x_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

d'où en dérivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2} + \dfrac{\nu M_3}{EI_3} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{M_3}{EI_3} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} = 0$$

soit $\varphi_2 = \dfrac{M_3}{2EI_3}\, x_1^2 - \dfrac{\nu M_3}{EI_3}\, \dfrac{x_3^2}{2}$, $\varphi_3 = 0$ $\varphi_1 = 0$ solution particulière.

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, x_2 x_1 \\[2ex] u_2 = \dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, \dfrac{1}{2} \left[x_1^2 + \nu \left(x_2^2 - x_3^2 \right) \right] \\[2ex] u_3 = \dfrac{\nu \mathcal{M}_3}{EI_3}\, x_2 x_3 \end{array} \right.$$

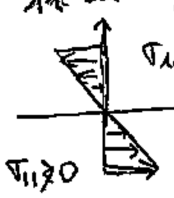
Et la solution générale s'obtient en ajoutant un déplacement de corps rigide (et donc les déplacement solution)

2.3 Analyse de la solution.

Forme du champ de contrainte.

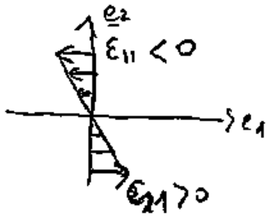
. le champ de contrainte est un champ uniaxial dans la direction $\underline{e}_1$ la distribution des contraintes est linéaire en fonction de x_2 et indépendante de la section considérée (x_1).

- Si $\mathcal{M}_3 > 0$ σ_{11} est négatif pour $x_2 > 0$ et positif pour $x_2 < 0$



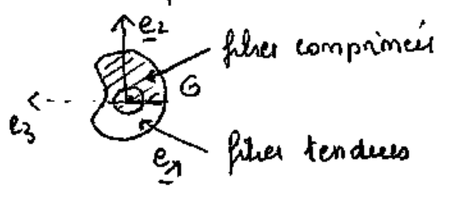
d'où les fibres parallèles à $O\underline{e}_1$ sont en compression pour $x_2 > 0$ et traction pour $x_2 < 0$.

- On a ε_{11} est négatif pour $x_2 > 0$ donc les fibres supérieures ($x_2 > 0$) subissent un raccourcissement alors que les fibres inférieures subissent un allongement proportionnel à x_2



(cas $\mathcal{M}_3 > 0$)

- Soit G le centre d'inertie d'une section droite. L'axe $(G, \underline{e}_3)$ est appelé axe neutre de la section. Il sépare dans la section, la zone des fibres comprimées de celles des fibres tendues



Validité de l'hypothèse des petites perturbations

On cherche à préciser les hypothèses necessaires sur la géometrie et les efforts pour que le cadre de l'hypothèse HPP reste valide. On doit d'abord s'assurer que les déformations sont petites, ie $|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}| \ll 1$.

Or $\underline{\underline{\nabla u}} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2 & -\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_1 & 0 \\ \frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_1 & \nu\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2 & -\nu\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_3 \\ 0 & \nu\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_3 & \nu\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2 \end{pmatrix}$

On doit donc avoir : $\left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2\right| \ll 1$; $\left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_1\right| \ll 1$ $\left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_3\right| \ll 1$ $\forall \underline{x} \in \Omega$

On note D le diamètre maximal de la section droite (la plus grande largeur).

L'hypothèse HPP limite l'intensité du moment :

$$\boxed{|\mathcal{M}_3| \ll \frac{EI_3}{\ell} \quad , \quad |\mathcal{M}_3| \ll \frac{EI_3}{D}}$$

Par ailleurs, on doit également s'assurer de l'hypothèse des petits déplacements,

soit $\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2 x_3\right| \ll \text{longueur caractéristique} = L_c \\ \left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} x_2 x_1\right| \ll L_c \\ \left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} \frac{x_1^2}{2}\right| \ll L_c \quad , \left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} \frac{x_2^2}{2}\right| \ll L_c \quad ; \left|\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3} \frac{x_3^2}{2}\right| \ll L_c \end{array}\right.$

Reste à définir une longueur caractéristique pour le problème, qui peut être selon les cas la longueur de l'arbre ou le diamètre de la section et donc peut conduire à des nouvelles limitation. (Dans la pratique, on a souvent $\frac{\ell}{D}$ $10 < \frac{\ell}{D} < 10^2$)

Déformée de la ligne moyenne

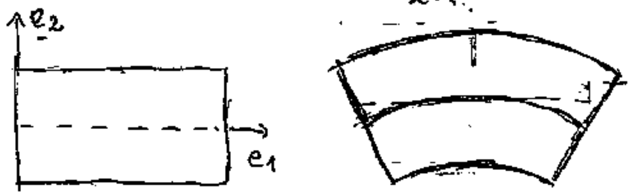
l'axe de l'arbre $(O, \underline{e}_1)$ est appelé ligne moyenne ou fibre moyenne de l'arbre. c'est la ligne qui passe par les centres d'inertie des section droites, d'équation $X_2 = X_3 = 0$

l'équation de la déformée s'écrit (en notant $\underline{X}$ les coordonnées d'un point avant déformation et $\underline{x}$ les coordonnées déformées)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + u_1(X_1, 0, 0) = X_1 \\ x_2 = 0 + u_2(X_1, 0, 0) = \dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3} \dfrac{1}{2} X_1^2 \\ x_3 = 0 + u_3(x_1, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un arc de parabole dans le plan $X_3 = 0$ qui s'écrit :

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{EI_3}{\mathcal{M}_3}$$



(R est le rayon de courbure de la courbe $y = f(x)$

$\frac{1}{R} = f''(0)$ avec $y = f(x)$, $f'(0) = f(0) = 0$)

- On a $\mathcal{M}_3 = EI_3 \frac{1}{R}$ le moment de flexion est relié au rayon de courbure de la ligne moyenne par un module EI_3 appelé module de rigidité à la flexion : cette relation est exploitée expérimentalement pour mesurer le module d'Young

- Compte tenu de l'hypothèse des petites transformations, l'arc de parabole peut en fait être confondu avec un arc de cercle de rayon R.

$$x_1^2 + (x_2 - R)^2 = R^2$$

en effet $\quad \dfrac{x_2}{R} = \dfrac{X_1^2}{2R^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_1^2 M_3^2}{E^2 I_3^2}\right)$. et d'après HPP, on a $\frac{x_2}{R} \ll 1$ d'où

$$\frac{x_2}{R} \simeq \frac{X_1^2}{2R^2} + \frac{x_2^2}{2R^2} \quad \text{avec } \frac{x_2^2}{2R^2} \text{ correction d'ordre inférieur.}$$

d'où $\quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_2R = 1$

On parle de flexion circulaire

⇒ Déformée des section droites

On s'intéresse maintenant à la déformée d'une section $X_1 = C^{te} = X_1^0$. D'après l'expression du déplacement, on a :

$$\begin{cases} x_1 = X_1^0 - \dfrac{M_3}{EI_3} X_2 X_1^0 \\ x_2 = X_2 + \dfrac{M_3}{EI_3} \dfrac{1}{2} \left(X_1^{0\,2} + \nu (X_2^2 - X_3^2) \right) \\ x_3 = X_3 + \nu \dfrac{M_3}{EI_3} X_2 X_3 = X_3 \left[1 + \nu \dfrac{M_3}{EI_3} X_2 \right] \end{cases}$$

de sorte que $x_1 = X_1^0 - \dfrac{M_3}{EI_3} X_1^0 \left[x_2 - \dfrac{M_3}{EI} \dfrac{1}{2} \left(X_1^{0\,2} + \nu (X_2^2 - X_3^2) \right) \right]$

d'où sous l'hypothèse HPP : $x_1 \simeq X_1^0 - \dfrac{M_3}{EI_3} X_1^0 x_2$

cette équation est une relation linéaire en x_1, x_2 et indépendante de x_3

les points de la section $x_1 = X_1^0$ restent donc dans un plan contenant l'axe e_3

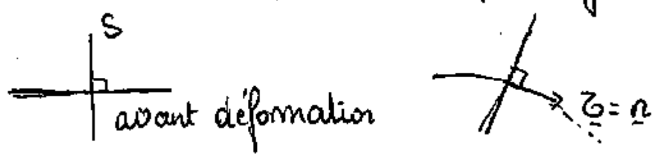
qui a tourné de $\dfrac{M_3}{EI_3} X_1^0 = +\omega_{12}$ par rapport à l'axe $\underline{e}_3$

Sous l'hypothèse HPP, les section droites restent droites. Elles se déforment toutes de la même manière et subissent une rotation autour de $\underline{e}_3$ proportionnelle à leur abscisse : $\omega(x_1) = \dfrac{M_3}{EI_3} x_1$

Par ailleurs, les sections droites restent normales à la fibre moyenne

En effet le vecteur normal à la section droite (déformée) vaut $\underline{n} = \underline{e}_1 + \dfrac{X_1^0}{R} \underline{e}_2$

et le vecteur tangent à la ligne moyenne déformée vaut $\underline{\tau} = \underline{e}_1 + \dfrac{X_1}{R} \underline{e}_2$.



$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{X_1^2}{R} \end{cases}$$

les section droites restent orthogonales à la fibre moyenne

On parle de flexion circulaire (les fibres parallèle à Ox se transforment en des arcs de cercles) et de flexion normale (les fibres fléchissent dans le plan ortho gonal à l'axe des moments appliqués.

- On regroupe sous le nom d'hypothèses de Navier-Bernoulli, les hypothèses
  - section droites restent planes
  - sections droites restent orthogonales à la ligne moyenne.

Cette hypothèse sert de base à l'établissement de certaines théories de milieux curvilignes

Autre façon de poser le problème :

La solution construite en imposant des condition aux limites en effort sur les faces S_0 et S_ℓ est aussi solution du problème avec des conditions mixtes :

$$\begin{cases} F_2 = 0 \ , \ F_3 = 0 & \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \\ u_1 = 0 \text{ sur } S_0 & \text{et} \quad u_1 = 2\,\omega(\ell)\, x_2 \end{cases}$$

où $\omega(\ell)$ est une rotation imposée autour de $\underline{e}_3$ $\quad \omega(\ell) = \frac{M_3}{E I_3}\,\ell$

Ces conditions sont imposées à travers un contact sans frottement avec des plateaux rigides, l'un fixe en $x_1 = 0$ et l'autre soumis à une rotation autour de l'axe $\underline{e}_3$.

D'après le principe de Saint-Venant, on admet que cette solution est également valable aux effets d'extrémité près pourvu que l'arbre soit suffisamment élancé si l'on applique d'autres conditions aux limites conduisant à des efforts surfaciques tels que les torseurs associés aient une résultante nulle et des moments égaux à $\pm M_3\, \underline{e}_3$

On peut par exemple encastrer complètement la face S_0.

Limite d'élasticité

D'après l'expression du tenseur des contraintes uniaxial, les contraintes normales principales sont données par

$$\sigma_1 = -\frac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2 \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{et } \sigma_3 = 0 \quad \text{et sont associées à } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$$

axe principaux d'inertie. la contrainte tangentielle maximale vaut

$$-\frac{\mathcal{M}_3}{I_3}\frac{x_2}{2} \text{ si } \mathcal{M}_3 < 0 \qquad \left(\text{ou } \frac{\mathcal{M}_3}{I_3}\frac{x_2}{2} \text{ si } \mathcal{M}_3 > 0\right)$$

Elle atteint son maximum pour les fibres les plus éloignées de l'axe moyen.
Si l'on note σ_0 la limite d'élasticité du matériau (égale en traction et compression, la pièce reste élastique tant que :

$$|\mathcal{M}_3| < \sigma_0 \frac{I_3}{h} \quad \text{(avec } h \text{ la distance de la fibre la plus éloignée à l'axe moyen)}$$

en adoptant le critère de Tresca par exemple dont la fonction de charge est donnée par : $f(\sigma) = \left(\mathrm{Max}\left[|\sigma_1-\sigma_2|\,|\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_1-\sigma_3|\right] - \sigma_0 \right)$.

2.4. Flexion déviée

La flexion déviée est caractérisée par des sollicitations appliquées sur S_0 et S_e dont la résultante est nulle et le moment dirigé suivant une direction quelconque parallèle à $(0, e_2, e_3)$ soit :

$$\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_2\, \underline{e}_2 + \mathcal{M}_3\, \underline{e}_3 \quad \text{sur } S_e \quad \text{et } -\underline{\mathcal{M}} \text{ sur } S_0$$

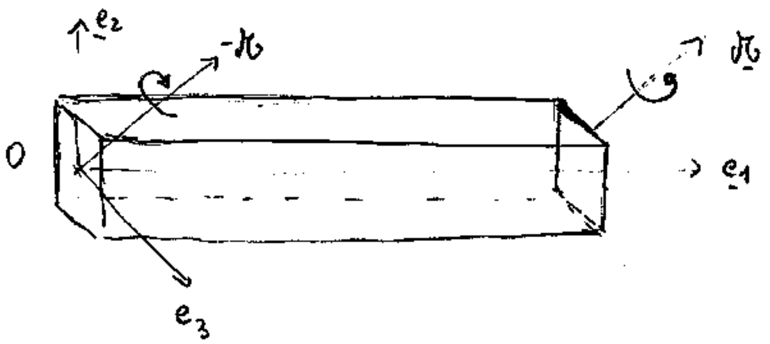
La solution s'obtient en exploitant le principe de superposition, et en sommant deux solution de flexion simple, l'une normale à $(0\underline{e}_2)$, l'autre normale à $(0, \underline{e}_3)$. On obtient aisément

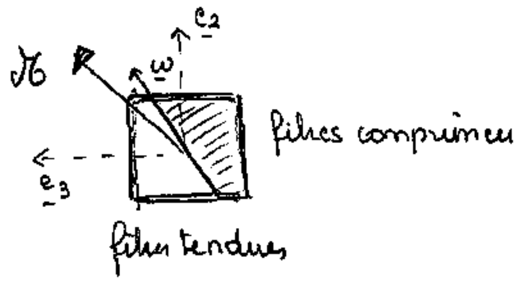
$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(-\frac{\mathcal{M}_3}{I_3} x_2 + \frac{\mathcal{M}_2}{I_2} x_3\right)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left(-\frac{\mathcal{M}_3}{E I_3} x_2 + \frac{\mathcal{M}_2}{E I_2} x_3\right)\left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right)$$

et
$$\begin{cases} u_1 = \left(-\dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, x_2 + \dfrac{\mathcal{M}_2}{EI_2}\, x_3\right) x_1 \\[2ex] u_2 = \dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\left(\dfrac{x_1^2}{2} + \nu\, \dfrac{x_2^2 - x_3^2}{2}\right) - \nu\, \dfrac{\mathcal{M}_2}{EI_2}\, x_2 x_3 \\[2ex] u_3 = \nu\, \dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, x_2 x_3 + \dfrac{\mathcal{M}_2}{EI_2}\left(-\dfrac{x_1^2}{2} + \nu\left(\dfrac{x_2^2 - x_3^2}{2}\right)\right) \end{cases}$$

- les profils des déformation et des contraintes sont indépendants de x_1, ils sont linéaires en x_2 et x_3 sur une section droite
- les sections droites restent planes et orthogonales aux fibres
- la droite $-\dfrac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, x_2 + \dfrac{\mathcal{M}_2}{EI_2}\, x_3 = 0$ dans le plan des sections droites est l'axe neutre qui sépare les fibres comprimées des fibres tendues
- le vecteur rotation d'une section droite
$$\omega(x_1) = \left(-\frac{\mathcal{M}_3}{EI_3}\, \underline{e}_3 + \frac{\mathcal{M}_2}{EI_2}\, \underline{e}_2\right) x_1$$
n'est pas parallèle à la direction du moment de flexion .. (sauf si l'on se retrouve en flexion simple avec $\mathcal{M}_2$ ou $\mathcal{M}_3 = 0$). On dit que la <u>flexion est déviée</u>
- les fibres ont des déformées circulaires en HPP





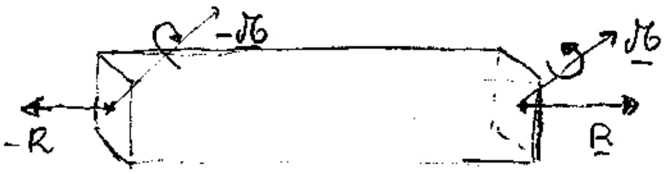
section rectangulaire $I_2 \neq I_3$

• 2.5 Flexion composée

Le problème de flexion composée consiste à imposer sur S_0 et S_ℓ des efforts surfaciques tels que le torseur associé est défini par :

une résultante $\underline{R} = R\,\underline{e_1}$ et un moment $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_2\,\underline{e_2} + \mathcal{M}_3\,\underline{e_3}$ sur S_ℓ
et $-R$, $-\mathcal{M}$ sur S_0

Il s'agit d'un problème de flexion déviée avec un effort normal $\underline{R}$ appliqué

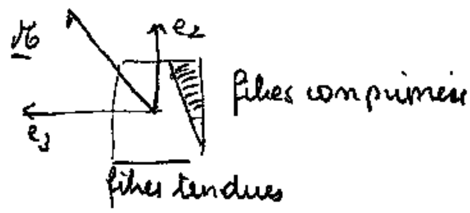


le champ de contrainte solution est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{R}{S} - \frac{\mathcal{M}_3}{EI_3}x_2 + \frac{\mathcal{M}_2}{EI_2}x_3\right)\underline{e_1}\otimes\underline{e_1}$$

l'axe neutre correspondant à un état de contrainte nul dans le plan d'une section a pour équation :

$$\frac{R}{S} - \frac{\mathcal{M}_3}{EI_3}x_2 + \frac{\mathcal{M}_2}{EI_2}x_3 = 0$$



Il est parallèle à l'axe neutre du problème de flexion déviée, mais ne passe plus par le centre géométrique de la section

On peut chercher à avoir un axe neutre à l'extérieur de la section pour que toutes les fibres soient tendues ou au contraire comprimées en jouant sur les valeurs de $\frac{R}{S}$, $\frac{\mathcal{M}_3}{I_3}$, $\frac{\mathcal{M}_2}{I_2}$, (par exemple lorsque le matériau constitutif est fragile)

2.6 Problème de Saint-Venant

Ce problème consiste à imposer des efforts surfaciques tels que la résultante du torseur associé est porté par $\underline{e_1}$ et le moment est quelconque

$\underline{\mathcal{M}} = C\,\underline{e_1} + \mathcal{M}_2\,\underline{e_2} + \mathcal{M}_3\,\underline{e_3}$

La solution s'obtient en superposant la solution précédente à celle du problème de torsion.