Jérémy BLEYER, `jeremy.bleyer@enpc.fr`

ENDOMMAGEMENT Partie II
Devoir

*Modalités : par **groupes de 2**, à rendre au plus tard le **15 février 2022**.*

On considère les modèles à gradient d'endommagement présentés en cours :

$$\mathcal{E}(u,d) = \mathcal{E}_{el}(u,d) + \mathcal{E}_f(u,d) = \int_\Omega \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(u),d)\,\mathrm{dx} + \int_\Omega \frac{G_c}{\ell_0 c_w}\left(w(d) + \ell_0^2\|\nabla d\|^2\right)\mathrm{dx} \tag{1}$$

avec une densité d'énergie élastique de la forme :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},d) = (a(d)+\kappa_{res})\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

et ici :

$$a(d) = \frac{(1-d)^2}{1+Kw(d)} \tag{3}$$

$$w(d) = 1-(1-d)^2 \tag{4}$$

où $K > 0$ est un paramètre supplémentaire du modèle.

1 Questions préliminaires

1.1 Solution homogène

On se place ici dans le cas 1D avec $\sigma(\varepsilon) = a(d)E\varepsilon$. On cherche une solution homogène en déformation et en endommagement. On peut donc supposer que $\nabla d = 0$ et on retrouve ainsi un formalisme identique à celui des modèles d'endommagement local. On prendra $\kappa_{res} = 0$ dans toute cette section "Questions préliminaires".

1. Ecrire la forme du critère d'endommagement pour ce cas.
2. Déterminer la déformation critique et la contrainte critique pour laquelle le critère d'endommagement est atteint (en considérant un endommagement initialement nul).
3. En supposant connue la valeur σ_0 de cette contrainte critique (identifiée expérimentalement par exemple), exprimer le paramètre K du modèle en fonction de E, G_c, σ_0, ℓ_0 et c_w.
4. On pose $\ell_c = EG_c/\sigma_0^2$. Quelle est la dimension physique de cette quantité ? À quelle condition sur ℓ_c et ℓ_0 la relation précédente sur K est-elle valable ?

1.2 Solution localisée

On considère le cas 1D d'une barre infinie soumise à une traction σ. On cherche une solution en endommagement localisé sur une zone $[-L; L]$ où L est à déterminer, l'endommagement étant nul en dehors.

1. Ecrire la forme du critère d'endommagement pour ce cas.
2. En considérant le cas où $\sigma = 0$ et $d(x = 0) = 1$, déterminer la solution localisée $d(x)$ pour $x \geq 0$ ainsi que la taille L de la zone localisée. On rappelle que l'on doit avoir $d(\pm L) = d'(\pm L) = 0$ et $d(x) \geq 0 \ \forall x$.
3. Calculer l'énergie dissipée par cette solution et identifier la valeur de la constante c_w en reprenant la démarche vue en cours.

2 Validation numérique

Implémenter le modèle décrit par (2)-(3)-(4) en modifiant le fichier `damage_gradient.py`. On pourra appeler ce modèle `"DM"` et on ajoutera le cas `elif model=="DM":` aux endroits appropriés. On choisira en particulier pour K la valeur déterminée à la question 1.1.4 en fonction des paramètres matériaux donnés dans le script (notez que vous avez accès à la variable `sig0` représentant σ_0).

1. Simuler le calcul de la solution homogène (`problem="homog"`, `refinement_level=0`). Comment se comporte-t-elle ? Quelle est l'influence de ℓ_0 sur la contrainte maximale et sur la courbe contrainte-déformation en général ?. Inversement, quelle est l'influence de la valeur de σ_0 sur la solution, à ℓ_0 fixé ? Que se passe-t-il si la relation de la question 1.1.4 n'est pas vérifiée ?
2. Comparer les résultats trouvés à ceux obtenus à l'aide du modèle AT1.
3. Effectuer le calcul de la solution localisée avec `refinement_level=4,5,6`, $\ell_0 = 0.1$, $\sigma_0 = 5$ et `damage_bcs=True`. Vérifier numériquement que vous obtenez la bonne contrainte critique, la bonne énergie dissipée et comparer la taille de la zone localisée obtenue numériquement avec celle obtenue analytiquement.
4. Faire varier ℓ_0 en respectant la limite imposée par la question 1.1.4. Quelle est son influence sur la courbe force déplacement, la contrainte critique, l'énergie dissipée et la taille de la zone localisée ?
5. Dressez une conclusion générale sur l'intérêt et les limites du modèle "DM" vis-à-vis des modèles AT2/AT1 basée sur ces différents résultats.

3 Fissuration d'un matériau composite

On considère ici un matériau composite multicouche de dimensions $L \times H = 1 \times 0.2$ sollicité en traction dans la direction de la longueur. Le multicouche est constitué d'un matériau homogène en termes de propriétés élastiques E, ν, en revanche seule une couche centrale d'épaisseur `center_thickness` peut se fissurer

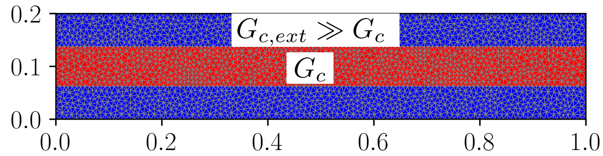

FIGURE 1 – Géométrie du multicouche, la couche centrale (rouge) peut fissurer, contrairement aux couches externes (bleu).

(énergie de fissuration G_c) [1]. Les deux couches supérieures et inférieures ne peuvent fissurer, étant dotées d'une énergie de fissuration $G_{c,ext} \gg G_c$.

On prendra dans toute la suite `problem="composite"`, `damage_bcs=True`, `Umax=7.5e-3`, $\sigma_0 = 10$. On utilisera le modèle `"DM"` sauf indication contraire. On pourra éventuellement diminuer la valeur de la tolérance d'arret du point fixe à `tol=1e-3` pour accélérer les calculs.

Les champs EF solutions sont sauvegardés dans un fichier `results.xdmf` que l'on recommande d'ouvrir avec le logiciel Paraview pour visualiser leur évolution. Les données brutes (déplacement `Uimp`, contrainte apparente, énergies élastiques et dissipées) sont sauvegardés dans un fichier `results_data.csv` que l'on peut ouvrir avec un tableur pour tracer des courbes.

1. Pour `center_thickness`=0.1, $\ell_0 = 0.02$ et `refinement_level = 0`, effectuer le calcul et décrire comment évolue le champ d'endommagement. Relier cette évolution de l'endommagement à l'allure de la courbe force/déplacement. Commenter la valeur de la contrainte apparente pour laquelle apparaissent les premières fissurations vis à vis des paramètres du modèle.
2. Tracer l'évolution de l'énergie dissipée dans la structure en fonction du chargement `Uimp`. Est-ce que la valeur de l'énergie dissipée après chaque évolution brutale est en accord avec ce qui est attendu ?
3. Lancer le même calcul pour un maillage plus fin (`refinement_level=1`). Constatez-vous des différences notables ?
4. Pour ce même maillage plus fin, effectuer un calcul avec $\ell_0 = 0.01$. Que constatez-vous ?
5. Quelle est l'influence de ℓ_0 dans le cas où on utilise le modèle AT1 par exemple.
6. Etudier pour finir les cas `center_thickness`=0.075 et `center_thickness`=0.15. Quelle est l'influence de l'épaisseur de la couche sur le faciès de fissuration ?

1. Noter que pour briser la symétrie du problème, les propriétés de fissuration ne sont pas tout à fait homogènes mais perturbées de manière aléatoire autout de G_c en tout point. Cet aspect n'est pas essentiel pour la discussion suivante.