Sorbonne Université **Année 2018-2019**

Master Sciences et Technologie - Mention Sciences pour l'Ingénieur

Traitement numérique du signal (4AN01)
1ère session - Mardi 19 Janvier 2019 - durée : 2h00
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Analyse et filtrage d'un signal d'électrocardiogramme (ECG)

Un électrocardiogramme est un outil d'analyse de l'activité cardiaque . Il permet, grâce à la mesure de l'activité électrique du cœur, de remonter aux mouvements des muscles du cœur. Pour faire un ECG, le médecin dispose des électrodes sur la peau du patient. Ces électrodes sont reliées à un électrocardioscope, appareil en charge de la conversion des signaux analogiques en signaux numériques et de leur traitement.

La figure 1 présente un ECG[1]: il s'agit de l'activité électrique en fonction du temps. On note $s(t)$ ce signal. Dans ce problème, on souhaite analyser ce signal $s(t)$ et proposer des solutions pour réaliser son filtrage.

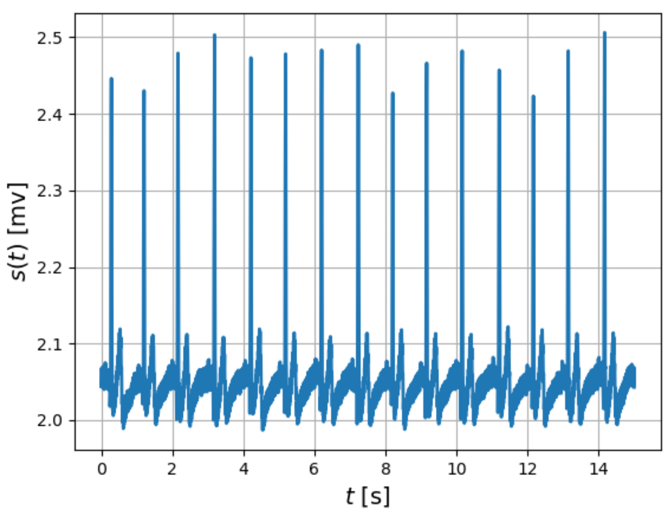

Figure 1: Électrocardiogramme

[1]données obtenues sur https://github.com/PIA-Group/BioSPPy

1 Analyse du signal continu et échantillonnage

1. La figure 2 donne le spectre (en dB) de l'ECG présenté figure 1. On considère que l'appareil de mesure est fiable jusqu'à environ -40dB et qu'en dessous de ce seuil le signal n'est constitué que de bruit. Dans quelle bande de fréquences se situe le signal utile de cet ECG ?

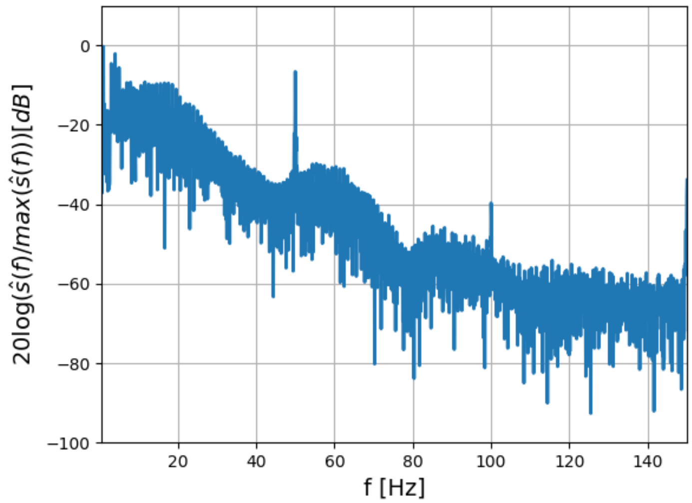

Figure 2: Spectre de l'électrocardiogramme

Solution: La bande de fréquences utile est $[0, 70]$Hz

2. Quelle fréquence d'échantillonnage minimale peut-on choisir ?

Solution: $f_e \geq 2 * 70$ donc au minimum $f_e = 140$Hz.

3. Quelle opération faut-il appliquer avant d'échantillonner le signal à la fréquence d'échantillonnage trouvée précédemment ?

Solution: Il faut appliquer un filtre passe-bas analogique de fréquence de coupure $f_c =$ 70Hz

4. A partir de la figure 1, donner une valeur approchée de la fréquence de battements du cœur, exprimée en battements par minutes, puis en Hz.

Solution: On compte 15 pics pendant une durée de 15 secondes, on a donc un pic par seconde, soit une fréquence de battement de 1Hz (60BPM).

2 Suppression de la bande 0-10Hz

Dans cette partie et la suivante, on suppose que le signal est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz. D'un point de vue médical, la bande utile du spectre ne commence qu'à partir de 10Hz. En dessous, de cette fréquence, le signal est dû au mouvement du patient qu'il faut filtrer avant analyse. C'est le but de cette partie : on choisit de faire un filtre avec la réponse en fréquences idéale $H_1(e^{j2\pi fT_e})$ représentée sur la figure 3.

Figure 3: Réponse en fréquence idéale souhaitée pour le filtre 1

5. Préciser la nature du filtre, et préciser la valeur numérique de sa fréquence de coupure f_{c1}. Que vaut la fréquence f_{c2} ?

Solution: Il faut appliquer un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_{c1} = 10Hz$ et $f_{c2} = f_e - f_{c_1} = 990$Hz.

6. Calculer la TFSD inverse de $H_1(e^{j2\pi fT_e})$, notée $h_1[n]$. Que représente $h_1[n]$?

Solution:

$$
\begin{aligned}
h_1[n] &= \int_{(f_e)} H_1(e^{j2\pi f T_e}) e^{j2\pi f n T_e} \mathrm{d}f \\
&= \int_{f_{c1}}^{f_{c2}} e^{j2\pi f n T_e} \mathrm{d}f \\
&= \left[\frac{e^{j2\pi f n T_e}}{2j\pi n T_e}\right]_{f_{c1}}^{f_{c2}} \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_{c2} n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi (f_e - f_{c1}) n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_e n T_e} e^{-j2\pi f_{c1} n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_e/2 n T_e} e^{-j2\pi f_{c1} n T_e} - e^{-j2\pi f_e/2 n T_e} e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e} - e^{-j2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{\pi n T_e} \sin(2\pi(f_e/2 - f_{c1}) n T_e) \\
&= 2(f_e/2 - f_{c1}) e^{j\pi f_e n T_e} \operatorname{sin}_c(2\pi(f_e/2 - f_{c1}) n T_e) \\
&= 2(f_e/2 - f_{c1}) (-1)^n \operatorname{sin}_c(2\pi(f_e/2 - f_{c1}) n T_e)
\end{aligned}
$$

7. Justifier si le filtre 1 ainsi obtenu est de type RIF ou RII.

Solution: Le sinus cardinal étant du durée infinie, le filtre obtenu est de type RII.

8. On pose maintenant $h_2[n] = h_1[n] w_T[n]$, avec

$$
w_T[n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{L} & \text{si } -L/2 \leq n < 0, \\ 1 - \frac{2n}{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L/2 - 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}
$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Tracer $w_T[n]$ pour $L = 8$.

(b) Le filtre 2, de réponse impulsionnelle $h_2[n]$, est-il RIF ou RII ? Justifier.

Solution: La fenêtre étant de durée limitée, le filtre 2 est un filtre RIF.

(c) Sachant que $w_T[n] = \frac{2}{L} w_R[n] * w_R[n]$ (où $*$ est le produit de convolution), exprimer $W_T(e^{j2\pi f T_e})$ en fonction de $W_R(e^{j2\pi f T_e})$.

> **Solution:** $W_T(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{2}{L} W_R(e^{j2\pi f T_e})^2$.

(d) Sachant que $W_R(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{\sin(\pi f / f_e L/2)}{\sin(\pi f / f_e)} e^{j2\pi f T_e}$, donner l'expression de $W_T(e^{j2\pi f T_e})$.

> **Solution:** On en déduit que $W_T(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{2}{L} \left(\frac{\sin(\pi f / f_e L/2)}{\sin(\pi f / f_e)} \right)^2 e^{j4\pi f T_e}$.

(e) Préciser la valeur de $|W_T(e^{j2\pi f T_e})|$ en $f = 0$Hz et les les positions en fréquence des zéros de $W_T(e^{j2\pi f T_e})$.

> **Solution:**
>
> - $|W_T(e^{j2\pi f T_e})| = \frac{L}{2}$ en $f = 0$.
> - zéros en $k \frac{2 f_e}{L}$.

(f) Tracer l'allure de $W_T(e^{j2\pi f T_e})$ pour $f \in [-f_e, f_e]$ et avec $L = 8$.

9. Exprimer $H_2(e^{j2\pi f T_e})$ en fonction de $H_1(e^{j2\pi f T_e})$ et $W_T(e^{j2\pi f T_e})$. Représenter alors l'allure de $|H_2(e^{j2\pi f T_e})|$.

> **Solution:** On a $H_2(e^{j2\pi f T_e}) = H_1(e^{j2\pi f T_e}) * W_T(e^{j2\pi f T_e})$.

10. On définit maintenant un 3ème filtre de réponse impulsionnelle $h_3[n] = h_2[n - \frac{L-1}{2}]$. Quel est l'intérêt de ce 3ème filtre ? Expliquer.

> **Solution:** On décale la réponse impulsionnelle pour rendre causal le filtre.

11. Justifier si le filtre 3 est de type RIF ou RII, causal ou non causal.

> **Solution:** Le filtre obtenu est RIF et causal.

3 Filtrage du 50Hz

Sur le spectre 2 on constate un pic à $f_p = 50$Hz. Ce pic ne correspond pas à une information pertinente de l'ECG mais à un bruit parasite dû à la tension d'alimentation de l'électrocardioscope (en France, le courant alternatif domestique avec lequel les appareils sont alimentés est à 50Hz).

On souhaite réaliser un filtre pour éliminer cette composante. La fonction de transfert en z du filtre choisi est :

$$H_4(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}.$$

avec

$$\begin{cases} z_1 = e^{j\theta_1} \\ z_2 = e^{-j\theta_1} \\ p_1 = 0.9e^{j\theta_1} \\ p_2 = 0.9e^{-j\theta_1} \end{cases}$$

12. Ce filtre est-il stable ? Justifier.

Solution: La fonction de transfert en z a deux pôles p_1 et p_2. Ces deux pôles ont un module inférieur à 1 ($|p_1| = |p_2| = 0.9$), donc les pôles sont compris à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe : le filtre est stable et causal.

13. Comment choisir la valeur de θ_1 pour éliminer la fréquence parasite $f_p = 50$Hz ?

Solution: La réponse en fréquence du filtre est $H_3(z = e^{2j\pi f T_e})$. Cette fonction est nulle si $z = Z_1$ ou $z = z_2$. Pour éliminer la fréquence parasite il faut donc choisir θ_1 tel que :

$$e^{j\theta_1} = e^{2j\pi f_p T_e}$$

c'est à dire :

$$\theta_1 = 2\pi f_p T_e = 2\pi 50/1000 = \pi/10$$

14. Positionner sur un graphique représentant le plan complexe la position des zéros et des pôles (on prendra en compte les résultats obtenus aux questions précédentes).

Solution: to do

15. Tracer qualitativement la module de la réponse en fréquences pour des fréquences f comprises entre 0 et f_e.

Solution: to do

16. Quelle est l'équation de récurrence du filtre ?

Solution:

$$H_4(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
Y(z)(z - p_1)(z - p_2) &= X(z)(z - z_1)(z - z_2) \\
Y(z)(z^2 - zp_1 - zp_2 + p_1p_2) &= X(z)(z^2 - zz_1 - zz_2 + z_1z_2) \\
Y(z) - (p_1 + p_2)z^{-1}Y(z) + p_1p_2z^{-2}Y(z) &= X(z) - (z_1 + z_2)z^{-1}X(z) + z_1z_2z^{-2}X(z)
\end{aligned}$$

La TZ inverse de cette relation nous donne l'équation récurrente :

$$y[n] - (p_1 + p_2)y[n-1] + p_1p_2y[n-2] = x[n] - (z_1 + z_2)x[n-1] + z_1z_2x[n-2]$$

17. Pour pouvoir implémenter le filtre grâce à son équation de récurrence, il faut que les coefficients de l'équation récurrente soient réels. Est-ce le cas pour ce filtre ?

Solution: Les coefficients du filtre sont réels, en remarquant que $p_1 = p_2^*$ et $z_1 = z_2^*$:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 2Re(p_1) \\ z_1 + z_2 = 2Re(z_1) \\ p_1p_2 = |p_1|^2 \\ z_1z_2 = |z_1|^2 \end{cases}$$

4 Suppression des harmoniques

Pour terminer, on souhaite supprimer du signal ECG tout le contenu fréquentiel présent au delà de $f = 100$Hz, non utile pour l'analyse de certaines pathologies cardiaques.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser ?

Solution: On utilise un filtre passe-bas.

2. Avant l'utilisation de systèmes numériques, un tel filtrage était effectué de manière analogique à l'aide du filtre de fonction de transfert $H_a(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est donnée par

$$h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u(t).$$

On souhaite synthétiser un filtre numérique, de fonction de transfert $H_5(z)$, réalisant la même opération par équivalence à la réponse impulsionnelle.

(a) Déterminer l'expression de la réponse impulsionnelle $h_5[n]$ de ce 5ème filtre numérique.

Solution: On a directement $h_5[n] = \frac{K}{\tau} e^{-nT_e/\tau} u[n]$.

(b) Représenter, sur un même graphique, $h(t)$ et $h_5[n]$ (on prendra ici $K = 1$).

Solution: to do.

(c) Déterminer la fonction de transfert $H_5(z)$ du filtre ainsi obtenu.

Solution: $H_5(z) = TZ[h_5[n]] = \frac{K}{\tau} \frac{1}{1-e^{-T_e/\tau} z^{-1}}$.

3. Donner l'équation de récurrence du filtre.

Solution: $y[n] = \frac{K}{\tau} x[n] + e^{-T_e/\tau} y[n-1]$.

4. Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir $|H_5(e^{j2\pi f T_e})| = 1$ en $f = 0$.

Solution: $K = \tau(1 - e^{-T_e/\tau})$.

5. Exprimer la valeur de $|H_5(e^{j2\pi f T_e})|$ en $f = f_e/2$ en fonction de T_e et τ. Si on admet que $T_e = \frac{\tau}{M}$, comment choisir M ?

Solution: On a $|H_5(e^{j2\pi f T_e})|_{f=f_e/2} = 1 - e^{-T_e/\tau} = 1 - e^{-1/M}$. Ainsi, plus M est grand, plus $|H_5(e^{j2\pi f T_e})|_{f=f_e/2}$ tend vers 0.