Analyse vectorielle, intégrales multiples

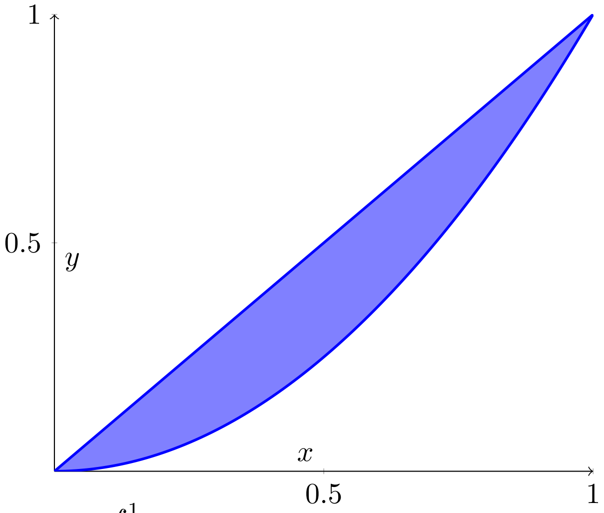
Examen Final 14/1/2019
2H.
Documents et instruments électroniques interdits.

Exercice 1.—Intégrales
Soit P une plaque dont la surface est comprise entre les graphes des fonctions $y = x^2$ et $y = x$ avec $x \in [0, 1]$.

1. Dessiner P.
2. Calculer la surface de P.
3. Si la plaque a une densité de masse $f(x, y) = x$ calculer la masse M de la plaque.
4. Calculez la coordonnée x du centre de gravité de la plaque.

Solution exercice 1.[10pt/50]

1. (2pt)



2. (2pt) $\int_0^1 (x - x^2)dx = \left[x^2/2 - x^3/3\right]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6$
3. (3pt = 2p expression + 1pt calcul) $M = \int_0^1 x(x - x^2)dx = \left[x^3/3 - x^4/4\right]_0^1 = 1/3 - 1/4 = 1/12$
4. (3pt = 2p expression + 1pt calcul) $x_G = \int_0^1 xx(x - x^2)dx/M = \left[x^4/4 - x^5/5\right]_0^1/M = (1/4 - 1/5)/M = 12/20 = 6/5$

Exercice 2.—Travail dans $\mathbb{R}^2$
Considérons le vecteur $\mathbf{V} = (y, x)$ de $\mathbb{R}^2$ et les points $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$ dans le plan.

1. Donner l'expression du travail de $\mathbf{V}$ entre A et B.
2. Si A et B sont connectés par une parabole $y = x^2$, calculer le travail entre A et B (pour cela vous devrez parameter la courbe).
3. Si le chemin de retour se fait le long d'une droite $y = x$, que vaut le travail du vecteur $\mathbf{V}$ entre B et A.

4. Quelle est votre conclusion ?

Solution exercice 2.[10pt/50]

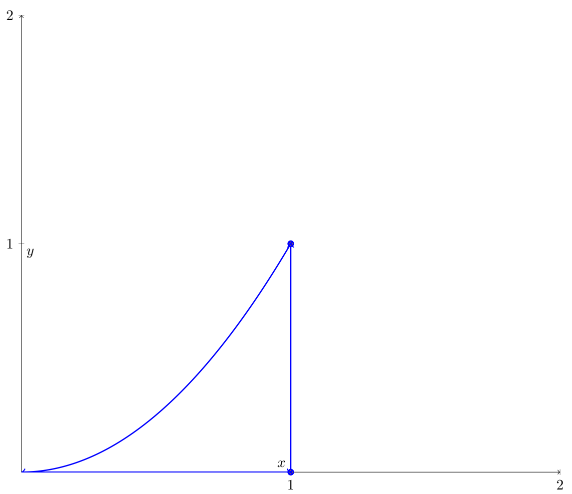
1. (2pt)
   $\displaystyle\int_A^B \mathbf{Vdl} = \int \omega$ avec $\omega = ydx + xdy$ une 1-forme différentielle.
2. (3pt = 2pt paramètrage + 1p calcul)
   $\phi(t) = \{x = t, y = t^2\}$ et donc $dx = dt$,$dy = 2tdt$
   $$\int_A^B (ydx + xdy) = \int_0^1 (t^2dt + 2t^2dt) = \int_0^1 3t^2dt = [t^3]_0^1 = 1$$
3. (3pt = 2pt paramètrage + 1p calcul)
   $\phi(t) = \{x = t, y = t\}$ et donc $dx = dt$,$dy = dt$
   $$\int_A^B (ydx + xdy) = \int_1^0 (tdt + tdt) = \int_1^0 32tdt = [t^2]_1^0 = -1$$
4. (2pt)
   L'intégrale sur un chemin fermé est zéro, donc $\omega = ydx + xdy$ dérive d'un potentiel $df = \omega$. La réponse "sont égales " ne donne pas de points.

Exercice 3.—Formes différentielles dans $\mathbb{R}^2$
On considère la forme différentielle $\omega = xdy$ en $\mathbb{R}^2$, les points $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1)$ et on définit une surface S délimitée par le bord orienté ∂S suivant : droite AB + droite BC + parabole $y = x^2$ entre C et A.

1. Dessiner S et ∂S (avec l'orientation) .
2. Donner une paramétrisation des trois parties du bord
3. Calculer les différentielles dx et dy pour chaque paramétrisation.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\partial S} \omega$.
5. En calculant $d\omega$, retrouver la valeur de $\displaystyle\int_{\partial S} \omega$ par une autre méthode.

Solution exercice 3.[15pt/50]

1. (2pt)

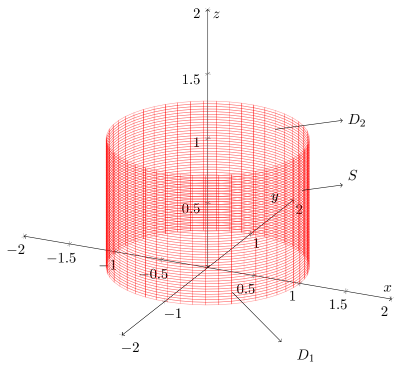


2. (3pt = 1pt chaque)
   $AB, \phi(t) = \{x = t, y = 0\}, t \in [0, 1]$
   $BC, \phi(t) = \{x = 1, y = t\}, t \in [0, 1]$
   $CA, \phi(t) = \{x = 1 - t, y = (1 - t)^2\}, t \in [0, 1]$
3. (3pt = 1pt chaque)
   $AB, \{dx = dt, dy = 0\}, t \in [0, 1]$
   $BC, \{dx = 0, dy = dt\}, t \in [0, 1]$
   $CA, \{dx = -dt, dy = -2(1 - t)dt\}, t \in [0, 1]$
4. (4pt = 1pt l'expression + 1pt $\int_{AB} xdy = 0$ + 2p le calcul)
   $\int_{\partial S} \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CA} \omega$ mais $\int_{AB} xdy = 0$ car $dy = 0$, donc $\int_{\partial S} \omega = \int_{BC} \omega + \int_{CA} \omega$
   $\int_{BC} \omega = \int_{BC} xdy = \int_0^1 dt = 1$
   $\int_{CA} \omega = \int_{CA} xdy = \int_0^1 (1 - t)(-2(1 - t)dt = -2 \int_0^1 (1 - t)^2 dt = -2[t - t^2 + t^3/3]_0^1 = -2/3$
   $\int_{\partial S} \omega = 1 - 2/3 = 1/3$
5. (3pt = 1pt calcul de $d\omega$ + 1pt énoncé du théorème de Stokes + 1 pt résultat)
   $d\omega = dx \wedge dy$ par le théorème de Stokes $\int_{\partial S} \omega = \int_S dx \wedge dy$. Mais $\int_S dx \wedge dy$ c'est l'aire sous la courbe $y = x^2$.
   $S = \int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3.$

Exercice 4.—Formes différentielles dans $\mathbb{R}^3$
On considère le domaine V dont le bord est composé du cylindre $S = \{(x, y, z), 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1\}$ et des disques $D_1 = \{(x, y, z), z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$ et $D_2 = \{(x, y, z), z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Dessiner V.
2. Donner une paramétrisation de S.
3. Donner une paramétrisation pour chaque disque D_1 et D_2.
4. Soit $\eta = xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$, calculer $\omega = d\eta$.
5. En utilisant la paramétrisation de S la calculez l'intégrale de ω sur la surface S soit l'intégrale de la 2-forme suivante, $\int_S \omega$.
6. Montrez que l'intégrale de ω sur le disque inférieur D_1 est nulle, soit $\int_{D_1} \omega = 0$
7. Soit $\partial V = D_1 \cup D_2 \cup S$ le bord du volume V (orienté selon la normale extérieure). Donner l'expression du théorème de Stokes et en déduire sans faire le calcul la valeur de l'intégrale de ω sur le disque supérieur D_2 $\left(\int_{D_2} \omega\right)$.

Solution exercice 4. [15pt/50]



1. (2pt)
2. (2pt)
   $\phi_S(\theta, z) = \{\cos(\theta), \sin(\theta), z\}, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1]$
3. (2pt = 1pt chaque)
   $\phi_{D_1}(r, \theta) = \{r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0\}, r \in [0, 1]\theta \in [0, 2\pi]$
   $\phi_{D_2}(r, \theta) = \{r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1\}, r \in [0, 1]\theta \in [0, 2\pi]$
4. (1pt)
   $d\eta = \omega = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$
5. (3pt = 1pt équation + 2pt calcul)
   De 2. $dx = -\sin(\theta)d\theta, dy = \cos\theta d\theta, dz = dz$ et comme $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$ alors on a $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ et le tiré en arrière $\phi^*\omega = -\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z$ donc

   $$\int_S \omega = \int_{\phi^* S} -\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = -\pi$$

   par Fubini.
6. (2pt)
   comme $z = 0$ en donc $dz = 0 \to \omega = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = 0$ et donc $\displaystyle\int_{D_1} \omega = 0$.
7. (3pt = 1pt Stokes + 2pt résolution)
   Le théorème de Stokes $\displaystyle\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega$ mais comme $\omega = d\eta$ nous avons $d\omega = dd\eta = 0$ (Lemme de Poincaré). Alors

   $$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega \tag{1}$$

   $$0 = \int_S \omega + \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega \tag{2}$$

   $$\int_{D_2} \omega = -\int_S \omega = \pi$$

   car $\displaystyle\int_{D_1} \omega = 0$.