Examen 3A005, Licence de Mécanique, Janvier 2019

Exercice 1 : (10/40):

Pour construire une formule de quadrature de Gauss à deux points sur intervalle [-1,1], on utilise le polynôme de Legendre $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ sur [-1, 1].

1.1 Calculer les deux racines (x_{i_0}, x_{i_1}) de polynôme Legendre ci-dessus. En supposant les valeurs de f(x) sur les deux points $f(x_{i\_0}), f(x_{i\_1})$ connues, construire une approximation polynomiale de Lagrange $\tilde{f}(x)$ sur [-1, 1].

1.2 Calculer $\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)dx$, et en déduire une formule de quadrature Gauss pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

1.3 Transformer cette formule de quadrature de Gauss pour calculer l'intégrale définie sur [0, 1].

1.4 Quelle est la précision de cette formule de quadrature. Argumenter.

1.5 Vérifier que la formule quadrature donne un résultat exact pour l'intégrale $\int_0^1 x^3 dx$

Exercice 2 : (8/40)

On suppose que la fonction f : [0,T]x ℝ→ℝ est continue et Lipchitzienne. Soit $t_0 = 0; t_1 = h; ...t_n = nh = T$ une subdivision régulière d'intervalle [0,T]. On considère deux schémas d'intégration suivants :

$$s_1 \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \\ y_0 = a \end{cases}$$

$$s_2 \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ y_0 = a \end{cases}$$

$$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y))\right]$$

2.1 On suppose ici f(t,y)=2t+y, a=0 , T=3, n=3. Pour chacun des deux schémas, calculer y_1, y_2, y_3.

2.2 Commenter la différence entre ces deux schémas avec la terminologie exacte.

2.3 Ces deux schémas sont de quel ordre ?

Exercice 3 : Valeurs propres (10/40 points)

Soit B une matrice réelle 3x3 définie par A=$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ avec $d > c > b > a > 0$

3.1. Montrer que *a, b, c* sont les 3 valeurs propres de la matrice A.

3.2. Montrer que le vecteur $[0 \quad 0 \quad 1]^t$ est le vecteur propre associé à la valeur propre *c*.

3.3. Décrire la méthode de la puissance itérée. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée à la matrice A si on utilise un vecteur initial aléatoirement choisi. Argumenter.

3.4. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée à la matrice A si on utilise un vecteur initial comme $[\zeta \quad \eta \quad 0]^t$. Argumenter.

3.5. Construire la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - a[I]$. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée à la matrice B si on utilise un vecteur initial aléatoirement choisi. Argumenter.

3.6. Est-il possible d'appliquer la méthode de la puissance inverse à la matrice B ? Si oui, donner le résultat sans faire de calcul.

3.7. Construire la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{A} - d[I]$. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée à la matrice C si on utilise un vecteur initial aléatoirement choisi. Argumenter.

3.8. Peut-on utiliser la méthode de la puissance inverse avec la matrice C ? Si oui, donner le résultat sans faire de calcul.

Exercice 4 Approximation au sens des moindres carrés (12/40)

Soit $\{ P_i = (x_i, y_i), \quad 1 \le i \le n\}$ une famille de n points observés d'un satellite dans une orbite elliptique, l'erreur quadratique F par rapport à une équation de l'ellipse est définie par :

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^{n} (x_i^2 + \alpha y_i^2 + \beta y_i + \gamma)^2$$

4.1 Montrer que le triplet (α, β, γ) minimisant cette fonction est la solution d'un système linéaire comme suit :

$$[M]\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \{b\}$$

Expliciter l'expression de la matrice [A] et le second membre $\{b\}$.

4.2 Pour la famille de points suivante :

$P_1 = (0,-1); \quad P_2 = (0,1); \quad P_3 = (2,0); \quad P_4 = (-2,0);$

Montrer que la matrice $[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ et le second membre $\{b\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$.

4.3 Donner la factorisation LU de la matrice [M] avec L à diagonale unité.

4.4 Déterminer (α, β, γ) en utilisant la factorisation LU.

4.5 L'équation $x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ est une ellipse dans le plan x-y. Tracer sur un même graphe les points ainsi que cette ellipse.

Quelques formules

Interpolation de Lagrange à deux points :

$$N_i(x) = l_0(x)$$

$$N_{i+1}(x) = l_1(x) \qquad avec\ l_i(x) = \prod_{i \ne j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Décomposition LU :

$$\mathrm{A} = \mathrm{L\,U}\ , \quad U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \quad (1 \le i \le j)$$

$$L_{jj} = 1; \quad L_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}) / U_{jj} \quad (j+1 \le i \le n)$$