



Pelleteuse à vérins

Écrit réparti : jeudi 23 février 2017

*Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (−2 points possibles).
Aucun point ne sera attribué à une réponse écrite au crayon papier (crayon = brouillon).*

Cet énoncé contient 18 questions en tout (hors questions bonus), pour un total de 40 points.

1 Questions de cours

- (1 Pt) Donner un exemple de système de solides qui ne soit pas à l'équilibre bien que le torseur des actions mécaniques extérieures soit nul.
- (2 Pts) On considère une barre de masse M , de longueur L , dont le centre de masse se trouve en C . On note A et B les extrémités de cette barre. Un couple d'axe \underline{z}_0 est appliqué en B et la barre est inclinée d'un angle α avec l'horizontale (voir FIGURE 1).

Calculer l'intensité du couple en B pour que la barre soit en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_0 = (B, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$.

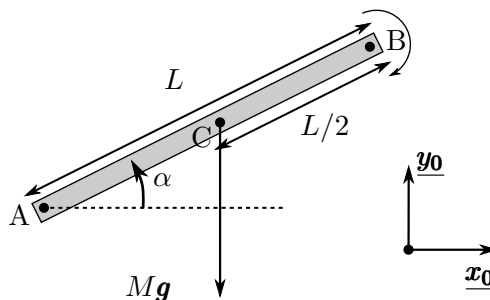


FIGURE 1 – Barre en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_0 = (B, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$.

Solution: La gravité exerce sur la barre une force $M\underline{g}$ de point d'application C et un moment $M\underline{g} \wedge \underline{CB}$ au point B . On peut décomposer $\underline{CB} = \frac{L}{2}(\cos \alpha \underline{x}_0 + \sin \alpha \underline{y}_0)$. D'après le PFS, le couple en B est $\Gamma \underline{z}_0$ avec

$$\Gamma = -(M\underline{g} \wedge \underline{CB}) \cdot \underline{z}_0 = -Mg \frac{L}{2} \cos \alpha$$

avec $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

2 Problème de Cinématique : Introduction

Il est question d'étudier la cinématique du système mécanique présenté en Figure 2 de type "pelleteuse". Le système est constitué de huit pièces : le bâti (S_0), considéré fixe dans le repère de travail, les bras (S_1) et (S_2) et une pelle (S_3). Ces trois solides sont liés par des liaisons pivots parfaites en A , B et C . L'ouverture des bras est pilotée par des vérins (S_4+S_5) et (S_6+S_7). Enfin, un moteur en C permet de gérer l'angle ψ formé entre le second bras (S_2) et la pelle (S_3). Par souci de simplification, nous considérerons que cet angle est piloté par un moteur (et non pas par un vérin, comme c'est le cas pour θ et ϕ).

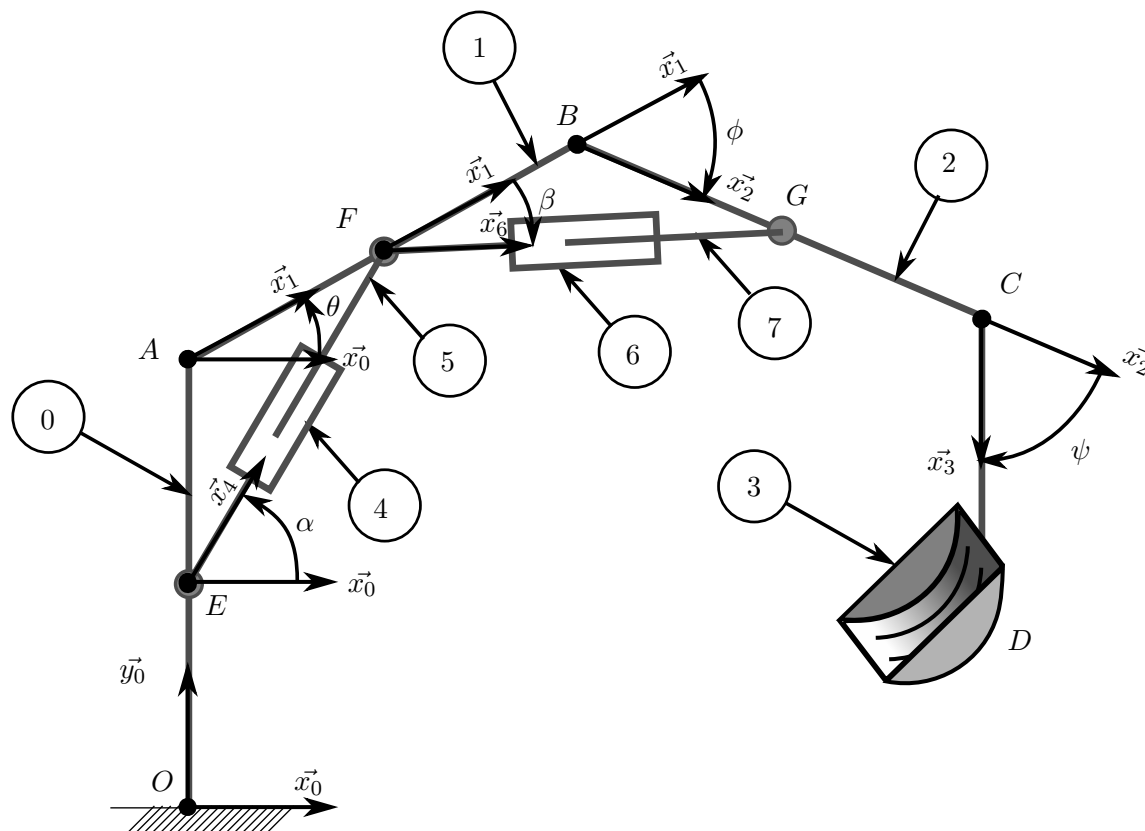


FIGURE 2 – Schéma de la pelleteuse à vérins.

Le but de cet exercice est de déterminer le pilotage des vérins et du moteur pour assurer une remontée verticale de la pelle, sans en renverser le contenu.

Paramétrage du système :

- $\mathcal{R}_0(O, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$ est le référentiel lié au bâti S_0 ;
- $\mathcal{R}_1(A, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_0)$ est lié au solide S_1 , l'angle $(\underline{x}_0, \underline{x}_1) = \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est mesuré autour de \underline{z}_0 ;
- $\mathcal{R}_2(B, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_0)$ est lié au solide S_2 , l'angle $(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \phi \in]-\pi, 0[$ est mesuré autour de \underline{z}_0 ;
- $\mathcal{R}_3(C, \underline{x}_3, \underline{y}_3, \underline{z}_0)$ est lié au solide S_3 , l'angle $(\underline{x}_2, \underline{x}_3) = \psi \in]-\pi, \pi[$ est mesuré autour de \underline{z}_0 ;
- $\mathcal{R}_4(E, \underline{x}_4, \underline{y}_4, \underline{z}_0)$ est lié au solide S_4 , l'angle $(\underline{x}_0, \underline{x}_4) = \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est mesuré autour de \underline{z}_0 ;

- $\mathcal{R}_6(F, \underline{x}_6, \underline{y}_6, \underline{z}_6)$ est lié au solide S_6 , l'angle $(\underline{x}_1, \underline{x}_6) = \beta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ est mesuré autour de \underline{z}_0 ;

On donne : $\underline{OE} = h\underline{y}_0$, $\underline{EA} = r\underline{y}_0$, $\underline{AF} = \underline{FB} = r\underline{x}_1$, $\underline{BG} = \underline{GC} = r\underline{x}_2$, $\underline{CD} = p\underline{x}_3$, $\underline{EF} = a(t)\underline{x}_4$ et $\underline{FG} = b(t)\underline{x}_6$.

3 Partie analytique

Cette partie se décompose en deux sections non indépendantes. Cependant, si un résultat n'est pas trouvé explicitement, il pourra être remplacé par une fonction des variables indiquées pour la suite. Une attention particulière sera accordée à la rédaction des démonstrations. Tout résultat non justifié ne sera pas accepté.

3.1 Un peu de géométrie

1. (2 Pts) En considérant le triangle EFA , établir une relation entre α et θ ; vérifier que pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ on a $\theta = 0$. En déduire $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\alpha}$.

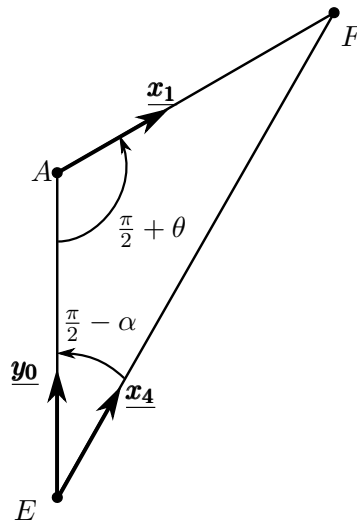
Solution: La somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc

$$(\widehat{\underline{EF}, \underline{EA}}) + (\widehat{\underline{FA}, \underline{FE}}) + (\widehat{\underline{AE}, \underline{AF}}) = \pi$$

On a de plus

$$\begin{aligned} (\widehat{\underline{EF}, \underline{EA}}) &= (\widehat{\underline{x}_4, \underline{y}_0}) = (\widehat{\underline{x}_4, \underline{x}_0}) + (\widehat{\underline{x}_0, \underline{y}_0}) = -\alpha + \frac{\pi}{2} \\ (\widehat{\underline{AE}, \underline{AF}}) &= (\widehat{-\underline{y}_0, \underline{x}_1}) = (\widehat{-\underline{y}_0, \underline{x}_0}) + (\widehat{\underline{x}_0, \underline{x}_1}) = \frac{\pi}{2} + \theta \end{aligned}$$

Le triangle EFA est isocèle, et donc $(\widehat{\underline{EF}, \underline{EA}}) = (\widehat{\underline{FA}, \underline{FE}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



On en déduit que $2\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$.

2. (2½ Pts) Établir une relation entre $a(t)$, α et r . En déduire \dot{a} en fonction de $\dot{\theta}$ et r .

Solution: La hauteur du triangle EFA est $r \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r \cos \alpha$. D'après pythagore, on a $r^2 = r^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}a^2$ et donc $a^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha$. En se rappelant que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on trouve en prenant la racine carrée $a = 2r \sin \alpha$.

Par dérivation, il vient $\dot{a} = 2r\dot{\alpha} \cos \alpha$, ou encore, d'après la question 1, $\dot{a} = r\dot{\theta} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$.

3.2 Vitesses

Toute simplification doit être rigoureusement justifiée. Pensez à vérifier les dimensions de vos résultats. Toute discussion de la cohérence ou non des résultats obtenus sera prise en compte.

- (2½ Pts) Donner les diagrammes de changement de base entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_0 pour ($i = 1, 2, 3, 4$) et entre \mathcal{R}_6 et \mathcal{R}_1 . Indiquez les angles sur les diagrammes.
- (2½ Pts) Donner les vecteurs vitesses instantanés de rotation $\underline{\Omega}(i/0)$ pour ($i = 1, 2, 3, 4, 6$).

Solution: Pour les solides directement en liaison avec le bâti :

$$\underline{\Omega}(1/0) = \dot{\theta} \underline{z}_0$$

$$\underline{\Omega}(4/0) = \dot{\alpha} \underline{z}_0$$

Pour les autres, on applique la loi de composition :

$$\underline{\Omega}(2/0) = \underline{\Omega}(2/1) + \underline{\Omega}(1/0) = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \underline{z}_0$$

$$\underline{\Omega}(3/0) = \underline{\Omega}(3/2) + \underline{\Omega}(2/0) = (\dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}) \underline{z}_0$$

$$\underline{\Omega}(5/0) = \underline{\Omega}(5/4) + \underline{\Omega}(4/0) = \dot{\alpha} \underline{z}_0$$

$$\underline{\Omega}(6/0) = \underline{\Omega}(6/1) + \underline{\Omega}(1/0) = (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \underline{z}_0$$

- (3 Pts) Calculer les vecteurs vitesses $\underline{V}(B \in 1/0)$, $\underline{V}(C \in 2/0)$ et $\underline{V}(D \in 3/0)$, en fonction de r , p , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$.

Solution: D'après la loi de torseur (ou de transport) :

$$\underline{V}(B \in 1/0) = \underline{V}(A \in 1/0) + \underline{\Omega}(1/0) \wedge \underline{AB} = 2r\dot{\theta} \underline{z}_0 \wedge \underline{x}_1 = 2r\dot{\theta} \underline{y}_1$$

La liaison entre (2) et (1) étant pivot d'axe passant par B , on a $\underline{V}(B \in 2/0) = \underline{V}(B \in 1/0)$. Par ailleurs, d'après la loi de torseur :

$$\begin{aligned} \underline{V}(C \in 2/0) &= \underline{V}(B \in 2/0) + \underline{\Omega}(2/0) \wedge \underline{BC} = 2r\dot{\theta} \underline{y}_1 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \underline{z}_0 \wedge (2r \underline{x}_2) \\ &= 2r[\dot{\theta} \underline{y}_1 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \underline{y}_2] \end{aligned}$$

De façon analogue, on a

$$\begin{aligned}\underline{V}(D \in 3/0) &= \underline{V}(C \in 3/0) + \underline{\Omega}(3/0) \wedge \underline{CD} = \underline{V}(C \in 2/0) + (\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\psi})\underline{z_0} \wedge (p\underline{x_3}) \\ &= 2r[\dot{\theta}\underline{y_1} + (\dot{\theta} + \dot{\phi})\underline{y_2}] + p(\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\psi})\underline{y_3}\end{aligned}$$

4. (2½ Pts) Quelle condition doit-on imposer à $\underline{V}(D \in 3/0)$ pour que la pelle S_3 se déplace verticalement ? En déduire une relation entre r , p , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$.

Solution: Si on veut que le mouvement de la pelle soit vertical, on doit imposer $\underline{V}(D \in 3/0) \cdot \underline{x_0} = 0$.

D'après la question précédente, il vient en projetant selon $\underline{x_0}$

$$\begin{aligned}0 &= 2r[\dot{\theta}(\underline{y_1} \cdot \underline{x_0}) + (\dot{\theta} + \dot{\phi})(\underline{y_2} \cdot \underline{x_0})] + p(\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\psi})(\underline{y_3} \cdot \underline{x_0}) \\ &= 2r[-\dot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin(\theta + \phi)] - p(\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\psi}) \sin(\theta + \phi + \psi)\end{aligned}$$

Notons au passage qu'en intégrant par rapport à t , on peut obtenir la relation scalaire suivante (pas demandée) :

$$\text{Cte} = 2r[\sin \theta + \sin(\theta + \phi)] + p \sin(\theta + \phi + \psi)$$

où la constante est à déterminer à partir des conditions initiales (non spécifiées ici).

5. (2½ Pts) Quelle condition doit-on imposer à $\underline{\Omega}(3/0)$ pour que la pelle S_3 ne se tourne pas dans le référentiel de travail ? En déduire une relation entre $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$.

Solution: Pour que la pelle ait un mouvement de translation pure dans le référentiel \mathcal{R}_0 , il faut imposer $\underline{\Omega}(3/0) = \underline{0}$, c'est-à-dire, $\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\psi} = 0$.

On donne les relations scalaires suivantes :

$$\dot{b} = -r\dot{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \quad (1)$$

$$\dot{a} = r\dot{\theta} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \quad (2)$$

6. (3 Pts) On considère que la vitesse d'ouverture du vérin ($S_4 + S_5$) est connue, on note $\dot{a} = V_0$. En vous appuyant sur les résultats précédents, donner \dot{b} et $\dot{\psi}$ en fonction de V_0 , r , p , θ et ϕ pour que le déplacement de la pelle soit vertical et ne renverse pas le contenu.

Solution: En combinant les résultats des questions 4 et 5, on voit que la condition pour que le déplacement de la pelle soit vertical s'écrit $2r[-\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\psi} \sin(\theta + \phi)] = 0$.

On en tire la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ en fonction de $\dot{\theta}$, θ et ϕ :

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)}.$$

D'après (2), on a $V_0 = r\dot{\theta} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$ et ainsi

$$\dot{\psi} = \frac{V_0}{r \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)}.$$

Par ailleurs, on peut déduire de (1) :

$$\begin{aligned} \dot{b} &= r(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \frac{\phi}{2} \\ &= r\dot{\theta} \left(1 + \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} \right) \sin \frac{\phi}{2} \\ &= \frac{V_0 \sin \frac{\phi}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} \right). \end{aligned}$$

3.3 Questions bonus

Il est fortement conseillé de ne traiter ces questions qu'après avoir traité la partie graphique !

1. Justifiez rigoureusement les identités (1) et (2).

Solution: La relation (2) a été établie dans une question précédente.

En raisonnant dans le triangle isocèle FBG , on peut montrer que $\beta = \frac{\phi}{2}$. Par ailleurs, la base de ce triangle est $b = 2r \cos \beta = 2r \cos(\frac{\phi}{2})$. En dérivant les deux membres par rapport au temps, on trouve bien la relation (1) indiquée.

2. Donner la condition sur V_0 pour que la pelle remonte en fonction des données géométriques.
3. On souhaite remplacer le moteur en C par un vérin entre G et D . Il est clair que cette solution présente un inconvénient : le vérin passerait au travers du contenu de la pelle. Proposer une autre solution pour que le vérin ne passe pas par l'intérieur de la pelle (tous les coups sont permis, vous avez le droit de modifier la géométrie des pièces).

4 Partie graphique

Tout tracé non justifié sur la copie ne sera pas comptabilisé ...

Inversement, un tracé erroné basé sur une bonne justification sera récompensé !

Le but de cette partie est de déduire les vitesses de pilotage des vérins à partir d'une vitesse d'entrée pour la pelle. On donne sur la FIGURE 3 $\underline{V}(C \in 3/0)$.

1. ($2\frac{1}{2}$ Pts) Donner la définition du CIR. Quels sont les CIR de $I_{1/0}$ et $I_{4/0}$?

Solution: Les liaisons entre (1) et (0) et entre (4) et (0) sont des pivots. Les CIR associés se trouvent sur l'axe de la liaison. On a donc $I_{1/0} = A$ et $I_{4/0} = E$.

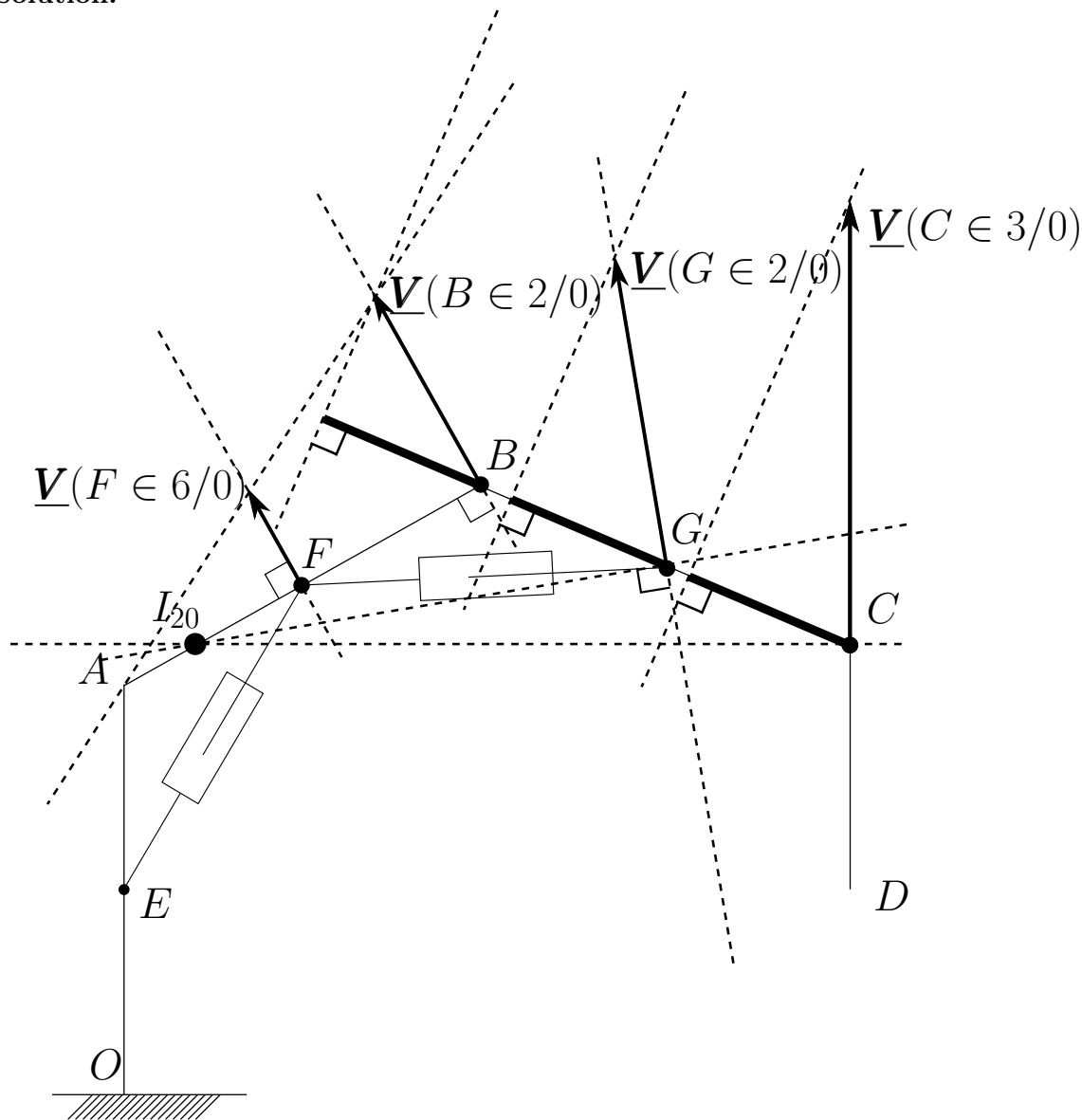
2. (2½ Pts) Quelle est la relation entre $\underline{\mathbf{V}}(C \in 2/0)$ et $\underline{\mathbf{V}}(C \in 3/0)$? Construire $\underline{\mathbf{V}}(B \in 2/0)$.

Solution: Les solides (2) et (3) sont en liaison pivot en C. On a donc $\underline{\mathbf{V}}(C \in 2/0) = \underline{\mathbf{V}}(C \in 3/0)$.

3. (1½ Pts) Construire le CIR $I_{2/0}$. Construire $\underline{\mathbf{V}}(G \in 2/0)$.

4. (1 Pt) Construire $\underline{\mathbf{V}}(F \in 1/0)$.

Solution:



5. (2½ Pts) Quels sont les supports de $\underline{\mathbf{V}}(G \in 7/6)$, $\underline{\mathbf{V}}(F \in 5/4)$ et $\underline{\mathbf{V}}(F \in 4/0)$?

Solution: Le support de $\underline{V}(G \in 7/6)$ est la droite (FG) car le mouvement 7/6 est une translation pure.

Pour la même raison, le support de $\underline{V}(F \in 5/4)$ est la droite (EF) .

Enfin, le support de $\underline{V}(F \in 4/0)$ est la droite perpendiculaire à (EF) passant par F car les solides (4) et (0) sont en liaison pivot en E .

6. (1 Pt) Justifier que $\underline{V}(F \in 1/0) = \underline{V}(F \in 5/0) = \underline{V}(F \in 6/0)$.

Solution: F est le lieu de la liaison 5/1, 6/1 et 6/5 et donc $\underline{V}(F \in 5/1) = \underline{V}(F \in 6/1) = \underline{V}(F \in 6/5) = \underline{0}$. La relation demandée est ainsi une conséquence directe de la loi de composition des vitesses.

7. (2 Pts) En utilisant les trois questions précédentes, construire $\underline{V}(F \in 5/4)$.

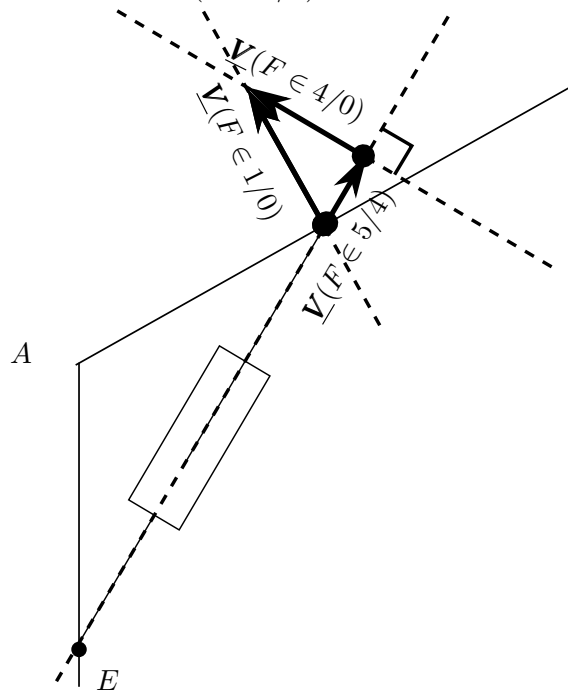
Solution: D'après la loi de composition des vitesses

$$\begin{aligned}\underline{V}(F \in 5/4) &= \underline{V}(F \in 5/0) - \underline{V}(F \in 4/0) \\ &= \underline{V}(F \in 1/0) - \underline{V}(F \in 4/0)\end{aligned}$$

Le support de $\underline{V}(F \in 5/4)$ est la droite (EF) , celui de $\underline{V}(F \in 4/0)$ est la droite perpendiculaire à (EF) passant par F . On peut en déduire que

$$\underline{V}(F \in 5/4) \cdot \underline{EF} = \underline{V}(F \in 1/0) \cdot \underline{EF}$$

ce qui permet de construire $\underline{V}(F \in 5/4)$.



On notera qu'ici, comme la loi de composition fait intervenir deux vecteurs perpendiculaires, il n'y a pas besoin de construire $\underline{V}(F \in 4/0)$.

8. (3½ Pts) En utilisant l'équiprojectivité entre F et G dans le mouvement de 6 par rapport à 0, les questions 4) et 6), construire $\underline{V}(G \in 7/6)$.

Solution:

Soit (Δ) la perpendiculaire à (FG) passant par G .

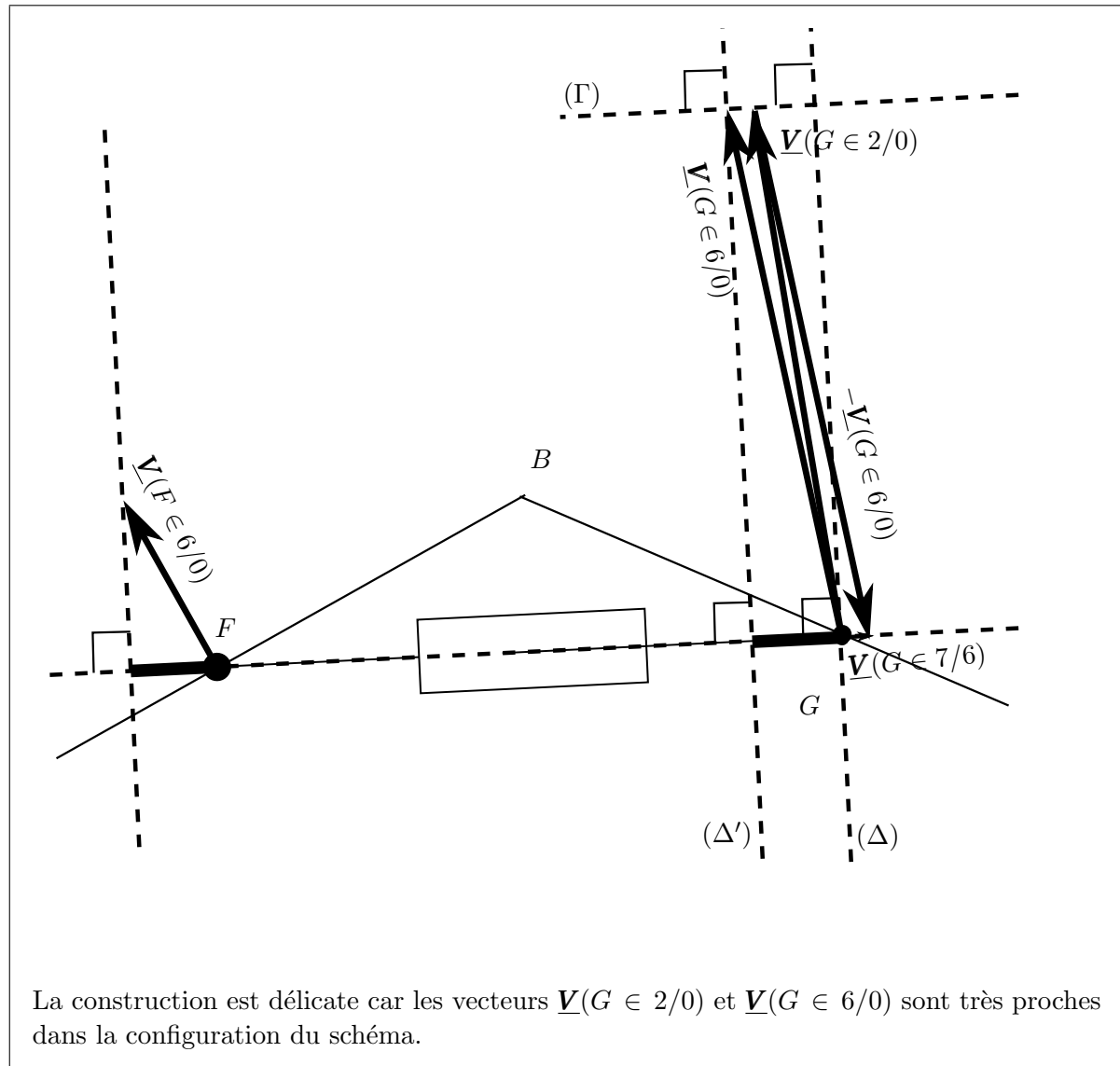
D'après la loi de composition des vitesses

$$\begin{aligned}\underline{V}(G \in 7/6) &= \underline{V}(G \in 7/0) - \underline{V}(G \in 6/0) \\ &= \underline{V}(G \in 2/0) - \underline{V}(G \in 6/0)\end{aligned}$$

Comme le support de $\underline{V}(G \in 7/6)$ est la droite (FG) (cf. question 5), on en déduit que les projetés de $\underline{V}(G \in 2/0)$ et $\underline{V}(G \in 6/0)$ suivant la droite (Δ) sont égaux.

Par ailleurs, l'équiprojectivité entre F et G dans le mouvement de 6 par rapport à 0 se traduit par $\underline{V}(G \in 6/0) \cdot \underline{FG} = \underline{V}(F \in 6/0) \cdot \underline{FG}$.

L'extrémité de $\underline{V}(G \in 6/0)$ se trouve à l'intersection des droites (Δ') et (Γ) :



4.1 Question bonus

En supposant que la distance CD fait en réalité 500 mm, et que 1 cm sur le dessin représente $0,2 \text{ m.s}^{-1}$. Calculer la vitesse de rotation du moteur en C.

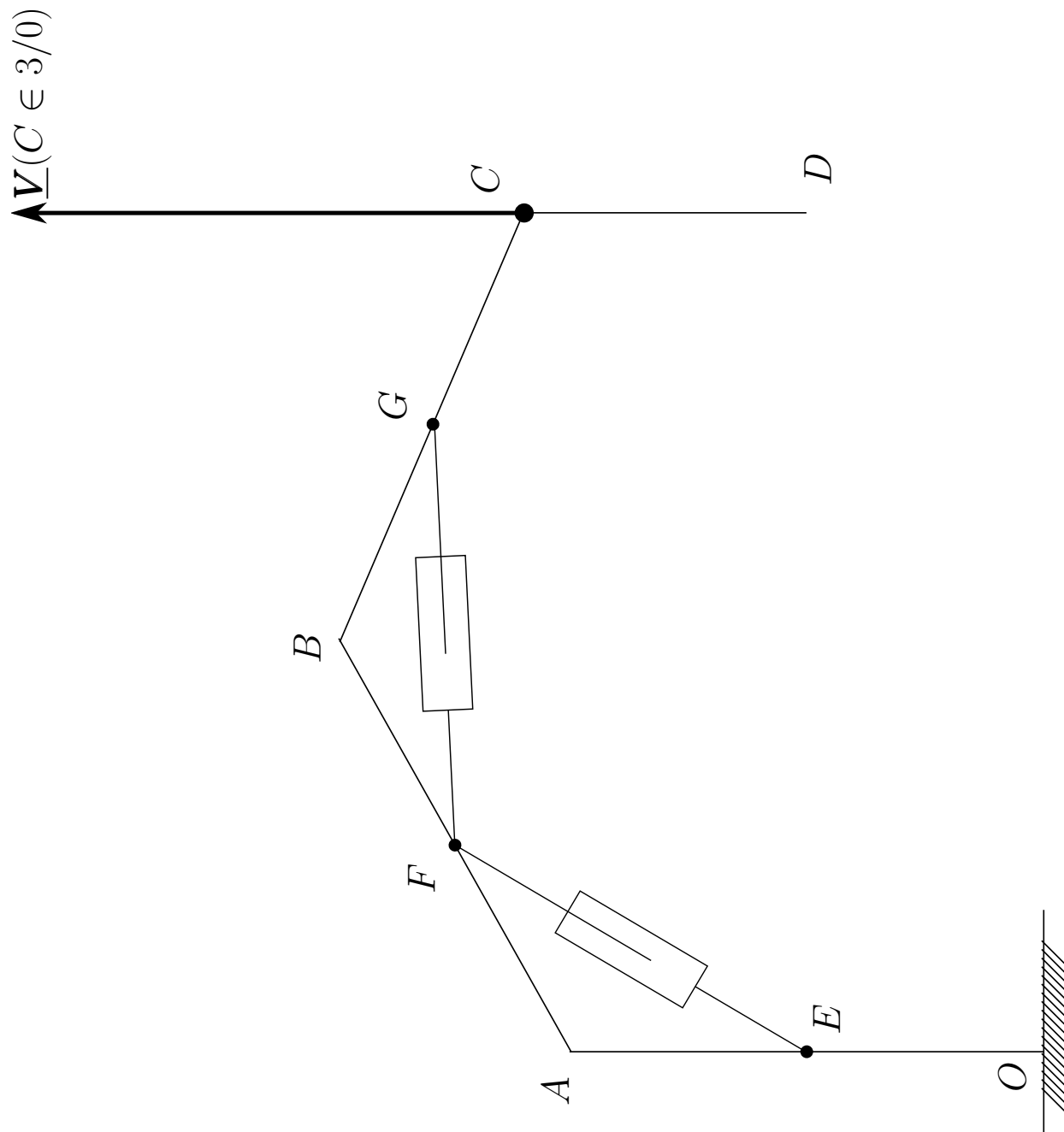


FIGURE 3 – Schéma à utiliser pour traiter la partie graphique. À compléter et à remettre avec le cahier de composition. **Indiquer le numéro d’anonymat sur cette page.**