Equilibre, stabilité & Vibrations (3A103)

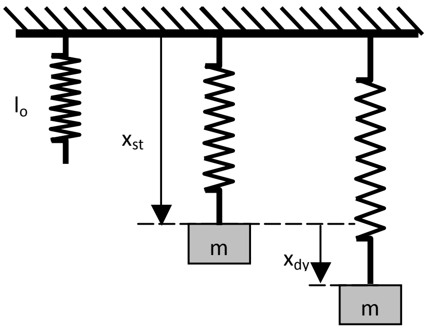
Travaux Dirigés de Vibrations

Travaux Dirigés N°1
Vibrations Libres de Systèmes à 1 DDL SANS AMORTISSEMENT

1 - Rappels

Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système mécanique oscillant sans amortissement visqueux. (On traitera les cas d'un système à 1 DDL en translation, en rotation et un système pendulaire).

2 - Effet de la gravité dans l'équation différentielle du mouvement.



Montrer, pour le système représenté ci-contre, que l'équation du mouvement en présence de gravité est identique à celle du même système non soumis à la gravité, à la condition de compter la variable *x* décrivant le déplacement *à partir de la position d'équilibre statique.*

C'est un résultat que l'on peut étendre à tout système linéaire suspendu élastiquement.

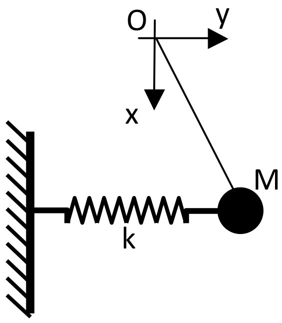
3 - Etude d'un système mécanique tige masse et ressort

On suppose un système mécanique constitué d'une tige OM, de longueur l articulée au point O qui porte au point M un objet rigide de masse m.

L'objet en question est aussi attaché à un support élastique de raideur k.

Le système est en équilibre statique lorsque la tige OM est en position verticale.

La position de la tige est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale



1) Etablir l'équation du mouvement du système
2) Déterminer la pulsation propre du système
3) Déterminer la réponse du système en vibration libre

4 - Etude vibratoire d'un ascenseur

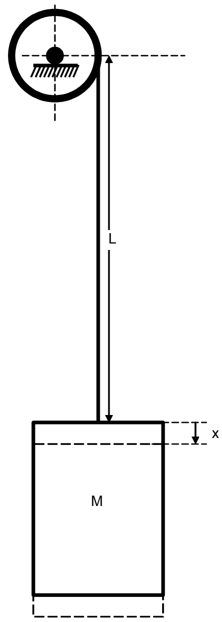
Un ascenseur est constitué d'une cabine de masse M suspendue à un treuil par l'intermédiaire d'un câble. La raideur k du câble dépend de sa longueur variable L.

On donne M = 1000 kg

Pour le câble, la section droite est $S = 3.14\ cm^2$, la masse est négligeable et le module d'Young est $E = 1{,}03 \times 10^{11}$ Pa.

On donne $ES/M = 180^2$ SI

Evaluation des caractéristiques propres du système



1. Si l'on suppose une répartition uniforme de la contrainte dans la section droite du câble, montrer que l'allongement du câble sous le seul effet du poids de la cabine s'écrit

$$\Delta L_{st} = \frac{MgL}{ES}$$

2. En déduire la raideur k du câble en fonction de L
3. Exprimer la fréquence propre ω_0 du système en fonction de L.

Dans un immeuble de 10 étages, la longueur du câble varie de 36 m à 1 m

4. Donner les valeurs numériques de l'intervalle critique des vitesses de rotation du treuil.
5. Comment cet intervalle est-il modifié par la présence de passagers ?

Evaluation des efforts sur le câble

A chaque démarrage ou arrêt du treuil, une vibration libre verticale de la cabine apparaît. On souhaite étudier cette vibration pour connaître l'effort subi par le câble.

On considère un arrêt alors que la cabine se déplace à la vitesse constante v_0. Le câble a la longueur L.

6. Si on néglige l'amortissement, rappeler l'expression générale de x(t) le déplacement vibratoire de la cabine.
7. Préciser son amplitude X en fonction de v_0.
8. En déduire la contrainte dynamique maximum σ_{max} subie par le câble en fonction de son allongement relatif maximum X/L.

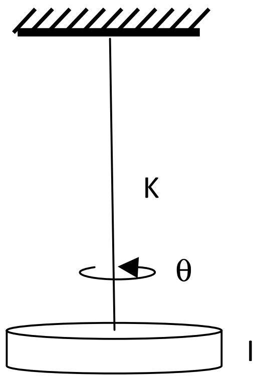
Vibrations - Travaux Dirigés N°2
Vibrations Libres de Systèmes à 1 DDL AVEC AMORTISSEMENT

1 - Rappels

Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système mécanique oscillant avec amortissement visqueux. (On traitera les cas d'un système à 1 DDL en translation).

Rappeler les solutions à cette équation pour les différentes conditions d'amortissement et tracer leur allure.

2 – Recherche d'un mouvement apériodique critique



Un disque circulaire de moment d'inertie I = 0,01 kg/m^2 est suspendu en son centre par un fil de résistance à la torsion K = 0.025 Nm/rad.

Le disque est mis en oscillation de torsion autour de l'axe du fil en l'écartant de sa position d'équilibre. On note θ la position angulaire du disque par rapport à l'équilibre.

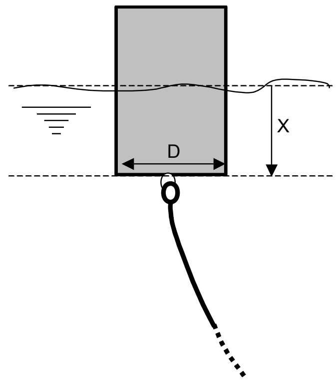
1) Déterminer la pulsation naturelle et la période des oscillations.
2) Un électro-aimant, placé à l'extrémité du disque, exerce sur lui un couple d'amortissement proportionnel à sa vitesse angulaire. Les oscillations du disque deviennent pseudo-périodiques :

   On relève l'amplitude de la première oscillation à π, celle de la suivante à $2\pi/5$.

Déterminer le décrément logarithmique, le coefficient d'amortissement et la pseudo-période des oscillations.

Quelle est la valeur de la constante d'amortissement C de l'électro-aimant ?

3 – Mouvement oscillant d'une bouée soumise à la houle



Une bouée cylindrique de diamètre D = 1.35 m, de masse M = 1250 kg, flotte à la surface de l'eau (ρ_0 = 1026 kg/m^3).

Sous l'action des mouvements de la surface, la bouée peut rentrer en oscillations suivant un mouvement vertical.

Le rappel élastique de cet oscillateur est fourni par la poussée d'Archimède Π.

Soit X la distance entre la partie inférieure de la bouée et la surface moyenne de l'eau.

On donne l'accélération de la pesanteur g = 9.81 m/s²

1. Exprimer la poussée $\Pi(X)$.
2. En déduire l'expression de la raideur équivalente k du système. Donner sa valeur numérique.
3. Exprimer la pulsation propre d'oscillation de la bouée (ω_0). Donner sa valeur numérique ainsi que celle de la fréquence propre f_0 correspondante.

La force résistive de frottement visqueux exercée par l'eau sur la bouée peut être approchée par l'expression

$$F_v = - \rho_0.S.C.v$$

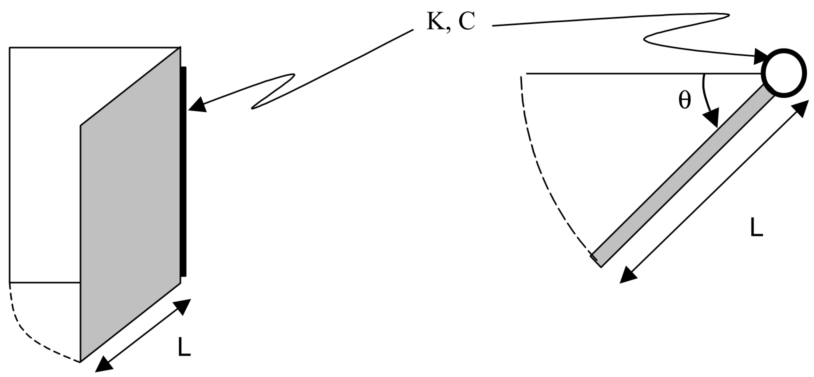
où S est la section de la face inférieure de la bouée, C un coefficient de viscosité surfacique et v la vitesse verticale

On considère désormais la position relative $x = X - X_{st}$, où X_{st} est la position d'équilibre statique de la bouée

4. Ecrire l'équation sur x du mouvement libre vertical de la bouée.
5. On donne C = 3.5 m.s^{-1}. En déduire le régime des oscillations libres de la bouée. On note ξ le facteur d'amortissement.
6. Calculer l'expression et représenter la fonction x(t) pour une vitesse initiale nulle et une position initiale égale à x_0.
7. Exprimer l'amplitude et la phase du mouvement en fonction des conditions initiales et du facteur d'amortissement ξ.
8. Quelle période de houle fait entrer le système en résonance ?

4 – Porte battante

On cherche à déterminer la valeur optimale du coefficient d'amortissement visqueux C du système de fermeture automatique d'une porte battante d'auditorium représentée sur la figure ci-dessous.



Les dimensions utiles de la porte sont les suivantes : Largeur L = 1.2 m Masse M = 85 kg

1. Calculer le moment d'inertie I de la porte par rapport à son axe de rotation et montrer qu'il vaut 40.5 kg.m²

La charnière (axe de rotation) de la porte est pourvue :

- d'une raideur à la torsion K = 22 Nm/rad qui exerce un couple résistif proportionnel à l'angle θ d'ouverture de la porte
- d'un coefficient d'amortissement C à déterminer et qui exerce un couple résistif proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ d'ouverture de la porte.

2. Par application du théorème du moment dynamique, établir l'équation du mouvement de la porte.
3. Ecrire cette équation sous la forme : $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.
4. Exprimer la pulsation propre ω_0 et calculer sa valeur. En déduire la valeur de la fréquence propre.
5. Exprimer le facteur d'amortissement ξ.

On souhaite que la porte se referme sans oscillation sous les actions combinées des couples exercés par K et C.

6. Quelle valeur minimum faut-il donner à ξ ?
7. Calculer la valeur numérique de C réalisant cette condition.
8. Considérant cette valeur de C, dans quel régime libre le mouvement se situe-t-il ?
   Rappeler alors l'expression $\theta(t)$ du mouvement de la porte.

   La position initiale de la porte $\Theta_0 = 70°$, sa vitesse initiale est $\Omega_0 = 0.3$ rad/s
9. En déduire l'expression exacte de $\theta(t)$
10. A quel instant t_1 la position de la porte atteint-elle $\theta(t_1) = 3°$? On ne demande qu'une valeur approchée.

On conserve les valeurs précédentes de K et C, Mais pour assurer une meilleure isolation phonique, la porte est couverte d'un revêtement spécial, réparti uniformément, qui augmente la masse de la porte de 10%. On note ω'_0 la nouvelle pulsation propre, et ξ' le nouveau facteur d'amortissement.

11. Situer ω'_0 par rapport à ω_0 et calculer sa valeur.
12. Situer ξ' par rapport à ξ et calculer sa valeur.
13. Quel type de régime libre la nouvelle porte présente-t-elle ?
14. Rappeler et représenter la forme $\theta'(t)$ du mouvement libre de la nouvelle porte.

Vibrations - Travaux Dirigés N°3
Réponses aux excitations harmoniques de Systèmes à 1 DDL

1 - Rappels

Rappeler l'expression du mouvement d'un système non conservatif à 1DDL à une excitation harmonique.

2 – Etude d'un sismographe

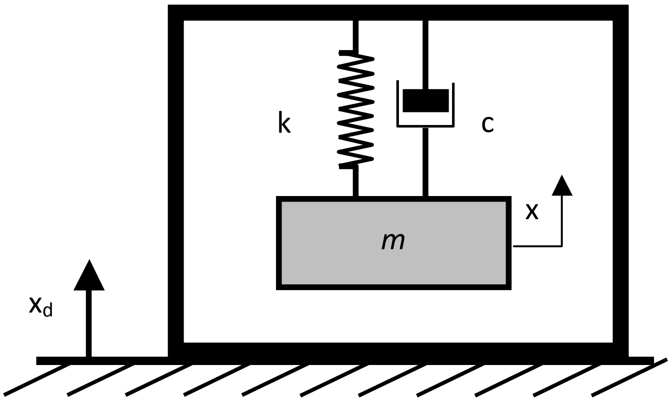
On se propose de déterminer dans quelles conditions le sismographe schématisé ci contre permet de mesurer soit l'accélération du bâti, soit ses déplacements.

La masse sismique m est suspendue au bâti du sismographe par l'intermédiaire d'un support élastique caractérisé par une raideur k et un coefficient d'amortissement c.

Le sismographe repose sur le sol dont on souhaite mesurer le mouvement. Ce mouvement est harmonique de la forme : $x_d(t) = D \sin(\Omega t)$.

La masse sismique m est suspendue au bâti du sismographe par l'intermédiaire d'un support élastique caractérisé par une raideur k et un coefficient d'amortissement c.

On note ω_0 la pulsation propre du sismographe et ξ l'amortissement réduit.



Le sismographe repose sur le sol dont on souhaite mesurer le mouvement. Ce mouvement est harmonique de la forme : $x_d(t) = D \sin(\Omega t)$.On note x(t) le déplacement de la masse sismique par rapport au bâti.

1. Ecrire l'équation du mouvement de la masse sismique (celui mesuré en premier lieu) en fonction du mouvement du sol
2. Calculer la réponse permanente x(t) du sismographe en fonction de Ω, ω_o et ξ.
3. Préciser les conditions pour que le sismographe mesure mieux l'accélération, le déplacement ou la vitesse du sol.

3 – Accéléromètre piézoélectrique

Pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une structure, on utilise un accéléromètre piézoélectrique à compression (figure 1)

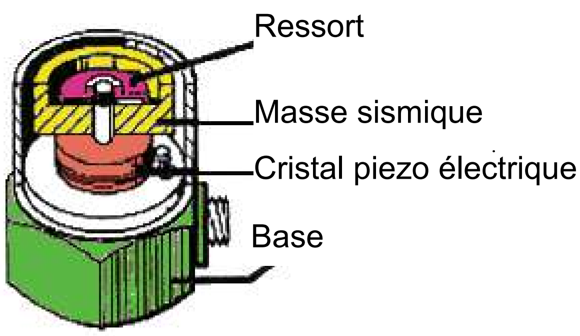


Figure 1

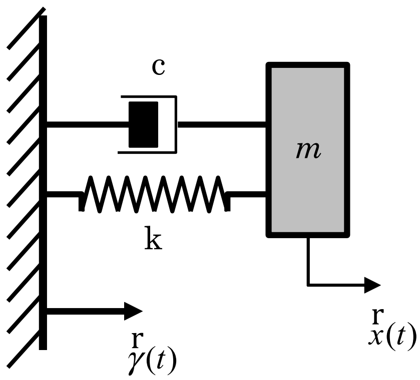


Figure 2

La structure présente au point de mesure une accélération $\gamma(t)$ horizontale.

On fixe donc l'accéléromètre rigidement (vissage ou collage) et en position horizontale.

Le système structure/accéléromètre peut être alors modélisé par la figure 2, où k et c sont respectivement la raideur équivalente et le coefficient d'amortissement équivalent de l'accéléromètre. Le déplacement de la masse sismique m est noté x(t).

1. Justifier qu'en se plaçant dans le repère lié à la structure, animée d'un mouvement vibratoire d'accélération $\gamma(t)$, l'équation du mouvement de la masse sismique m de l'accéléromètre s'écrit.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\gamma$$

On note $\omega_o^2 = k / m$ la pulsation propre de l'accéléromètre

$\xi = c / 2 m \omega_o$ son facteur d'amortissement

2. Déduire de 1 l'expression de l'accélération $\gamma(t)$ de la structure en fonction de x(t), de ses dérivées, et de ξ et ω_o.

Sous l'effet du déplacement x(t) de la masse sismique, le cristal piézo-électrique délivre une tension électrique proportionnelle u(t) telle que :

$$u(t) = \alpha\, x(t).$$

On suppose que la structure étudiée est en vibration harmonique avec

$$\gamma(t) = \Gamma(\Omega) \cos(\Omega t)$$

3. Donner alors l'expression de la tension mesurée à la sortie de l'accéléromètre. On précisera l'amplitude $U(\Omega)$ et la phase $\Phi(\Omega)$.

4. La fonction de réponse en fréquence ou sensibilité dynamique de l'accéléromètre est définie par

$$A(\Omega) = U(\Omega) \,/\, \Gamma(\Omega)$$

   Exprimer $A(\Omega)$.

La courbe de la figure 3, fournie par le constructeur de l'accéléromètre, représente en décibels (dB) la fonction $A(\Omega)$.

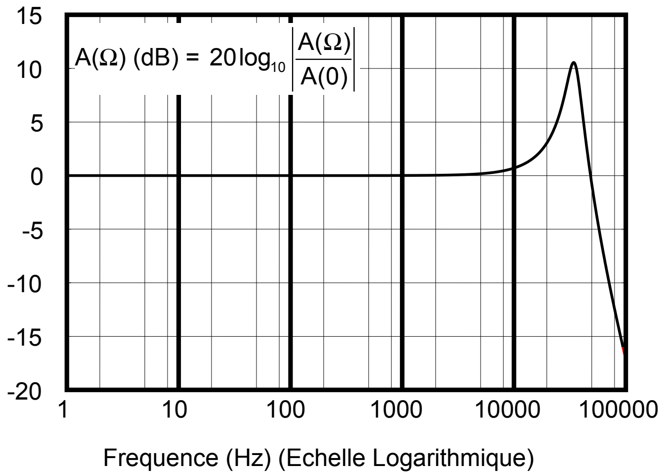


Figure 3

Sachant que l'accéléromètre est exploitable sur la bande de fréquence où la sensibilité dynamique est constante, donner une valeur approchée de la limite supérieure du domaine d'utilisation de cet accéléromètre

On s'intéresse aux caractéristiques de l'accéléromètre au voisinage de la résonance.

La figure 4 fait un gros plan de la sensibilité dynamique $A(\Omega)$ autour de la fréquence de résonance.

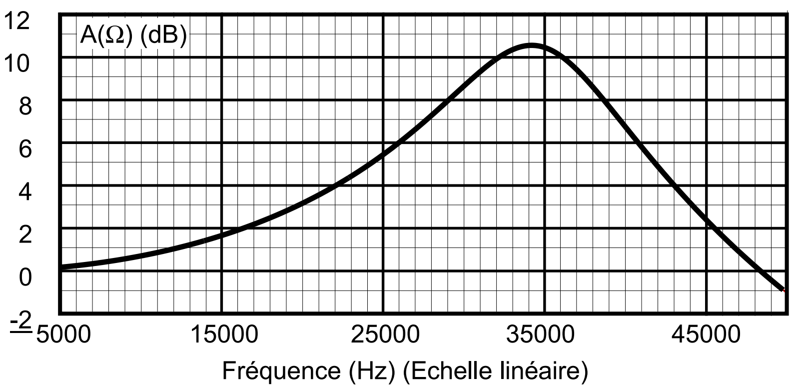
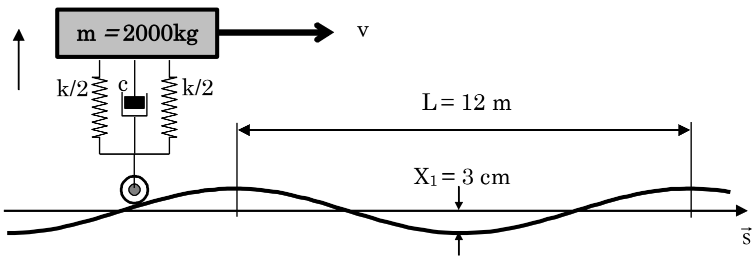


Figure 4

5. A partir de la figure 4, en utilisant la méthode de la largeur à -3dB, donner des valeurs approchées de la pulsation propre ω_o et de l'amortissement ξ.

4 - Véhicule soumis aux défauts de la route.

En raison du fluage du béton, Il peut apparaître des flèches intempestives dans des tabliers de ponts. Si le pont est constitué d'une série de portées identiques, ces déformations engendrent une excitation harmonique communiquée par la chaussée aux suspensions des véhicules.



La raideur k de la suspension est telle qu'on observe un allongement de 2 mm lorsqu'une masse de 50 kg y est suspendue.

1. Modéliser le problème (véhicule et route).
2. Etablir l'équation différentielle relative au mouvement du châssis.
3. Déterminer la vitesse critique du véhicule.
4. A 72 km/h quelle est l'amplitude du mouvement du châssis. Sachant que l'amortisseur présente un coefficient égal à 40% de l'amortissement critique
5. Quelle serait cette amplitude, à la même vitesse, en l'absence d'amortissement.

Vibrations - Travaux Dirigés N°4
Réponse à des excitations harmonique et quelconque

1 - Régime permanent périodique

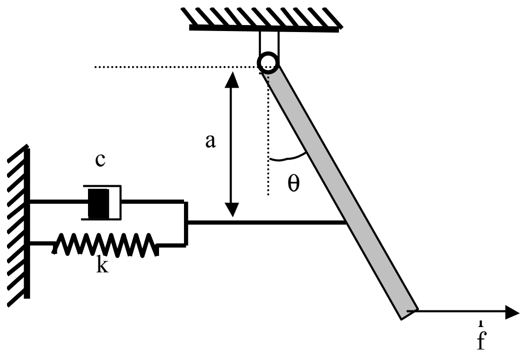
On modélise une structure suspendue selon le schéma suivant :

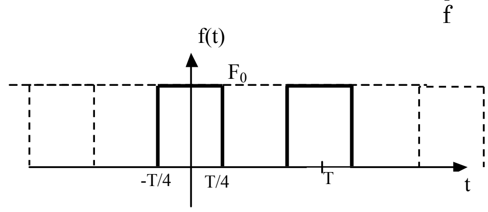
Une poutre rigide de longueur l et de masse m est suspendue à un bâti fixe par une liaison pivot.

Les caractéristiques viscoélastiques de la structure en liaison avec son support peuvent être représentées par une raideur k et un amortissement c concentrés à la distance a de la liaison pivot.

L'amplitude des vibrations est faible ($\theta << 1$).

1. Établir l'équation du mouvement de la structure
2. Déterminer sa réponse à la force extérieure f(t) représentée ci-contre.





2 – Réponse à une excitation quelconque - méthode de Laplace

1. Rappeler l'équation du mouvement d'un système à 1 ddl amorti, soumis à une force F(t) quelconque.
2. Écrire la transformée de Laplace de cette équation.

   Une machine de 200 kg est installée sur une surface élastique de raideur équivalente $k = 2\times10^5$ N/m, sans amortissement. Au cours de son fonctionnement, la machine est soumise à une force constante de 2000 N pendant 3 s.
3. Écrire l'équation du mouvement de la machine et sa transformée de Laplace
4. Exprimer la force F(t) en utilisant l'échelon de Heavyside et calculer sa transformée de Laplace.
5. En déduire x(s), transformée de Laplace de la position de la machine.
6. Décomposer x(s) en fractions simples.

7. En déduire x(t).
8. A quoi se réduit cette expression après l'excitation (t > 3s).
9. A quelle condition le régime permanent résultant de la force F est-il éliminé ?
10. Décrire le mouvement et donner son amplitude maximum.

Vibrations - Travaux Dirigés N°5
Systèmes à 2 degrés de liberté

1 – Oscillations libres d'un système à 2 DDL conservatifs

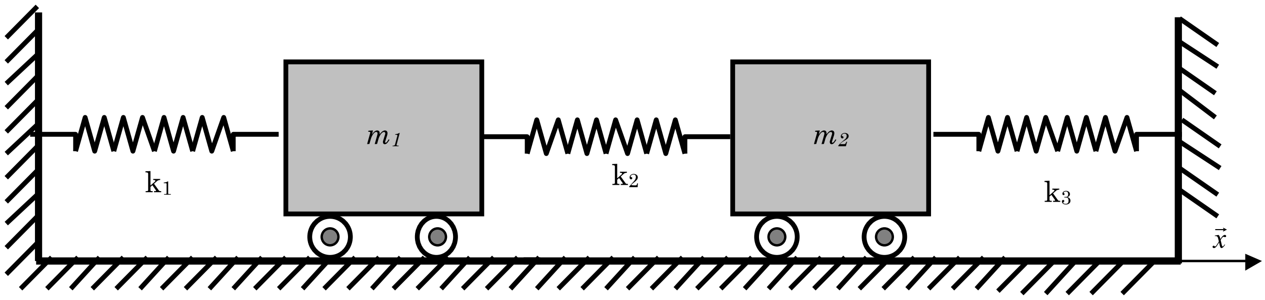


Figure 1

On considère un système masses–ressorts (m, k) tel que représenté figure 1. Aucune pesanteur n'agit, les ressorts ont une masse négligeable et on observe les petits mouvements du système écarté de sa position d'équilibre stable et relâché. On note x_1 et x_2 les déplacements des masses relativement à cette position statique selon la seule direction x.

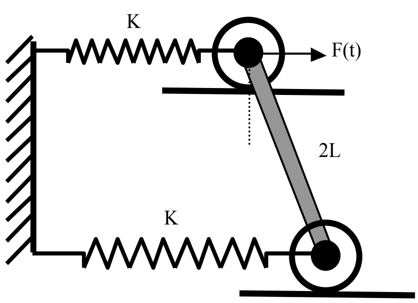
1. Ecrire les équations du mouvement libre des deux masses selon le principe fondamental de la dynamique et les équations de Lagrange
2. En déduire les matrices de masse et de raideur
3. Calculer les fréquences propres (on vérifiera que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{8}$ sont solutions du problème) et les modes propres du système
4. En déduire la solution générale du problème pour le mode libre avec les conditions initiales $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$ $x_2(0)=0.025$ m

Application : On se donne les valeurs suivantes :

$m_1 = 1$ kg $m_2=4$ kg $k_1=3$ N/m $k_2=4$ N/m $k_3=12$ N/m

2 – Oscillations forcées d'une barre

On considère la barre suivante de masse M et de moment d'inertie I (en son centre de gravité) avec deux ressorts de raideur K.



1. Paramétrer le système avec ses différents degrés de liberté
2. En utilisant les équations de Lagrange, établir les équations du système. En déduire les fréquences propres
3. On considère la force F(t)=F0 cos(t). Calculer la puissance des efforts et en déduire le vecteur des efforts généralisés.
4. Calculer les amplitudes des mouvements

respectifs des degrés de liberté.