RAPPEL DU
N° DE PLACE

3A003 - Examen du 19 Mars - Corrigé

Question de cours

1) $f : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ application linéaire. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes.

a) f est continue $\forall\, x \in E$.

b) f est continue en 0.

c) f est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$: $\exists M>0$ t.q. $\underbrace{\forall y \in \overline{B}(0,1)}_{\Updownarrow\ \|y\|_E \leq 1.}$, $\|f(y)\|_F \leq M$

d) f est lipschitzienne :
$\exists M>0$ tq. $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

2) H est un espace de Hilbert si H = espace vectoriel sur lequel on peut définir un produit scalaire, notée $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ et une norme associée $\|\cdot\|_H$, de sorte que $(H, \|\cdot\|_H)$ = espace complet (espace de Banach) (c'est-à-dire, toute suite de Cauchy est convergente).

3) Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Hilbert et $L : H \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_H$.

$$\begin{cases} L(\lambda x + y) = \lambda L(x) + L(y), \quad \forall\, x, y \in H & \text{- \underline{linéarité}} \\ \exists M>0 \text{ t.q. } \forall x \in H, \quad |L(x)| \leq M \|x\|_H & \text{- \underline{continuité}} \end{cases}$$

Alors $\exists!\ u \in H$ tel que

$$L(v) = \langle u, v\rangle_H \quad , \forall\, v \in H.$$

4) $L^2(]0,1[) = \{ f :]0,1[\to \mathbb{R} , \int_{]0,1[} f^2 dx < \infty \}$ (2

intégrale prise au sens de Lebesgue.

Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ qui est un intervalle borné, alors f est bornée. Donc $\exists M > 0$ t.q. $|f(x)|^2 \leq M_1^2 \; \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 M^2 dx = M^2 < \infty.$

$\Rightarrow f \in L^2(]0,1[)$

5) Soit $f \in L^2(]0,1[)$. f admet une dérivée faible si $\exists g \in L^2(]0,1[)$ telle que :

$$\int_{]0,1[} g \varphi \, dx = -\int_{]0,1[} f \varphi' dx, \; \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$$

$\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ = ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (indéfiniment dérivables), à support compact $\subset]0,1[$

Exemple de fonction de $L^2(]0,1[)$ qui n'a pas de dérivée faible :

$$f :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Si g existe alors $g = f'$ presque partout

avec $f' = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

en $\frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2})$ n'existe pas. Mais $g = f'$ sur $]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[$ ne vérifie pas la définition de la dérivée faible car dans le cas contraire il faudrait

$\int_0^1 g \varphi \, dx = -\int_0^1 f \varphi' dx \; \forall \varphi \Rightarrow 0 = -\varphi(\frac{1}{2}) \;\; \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$

ce qui est faux !

RAPPEL DU
N° DE PLACE

Problème

1) $H^1(]0,1[) = \{ v :]0,1[\to \mathbb{R},\ v \in L^2(]0,1[),\ \exists v' \in L^2(]0,1[)$
$v' =$ dérivée faible de $v \}$.

2) On écrit la relation (4) pour $x = 1$, $y = x$. Alors
$\forall v \in H^1(]0,1[)$ on a :

$$v(1) = v(x) + \int_x^1 v'(t)\,dt .$$

$$|v(1)| \le |v(x)| + \left| \int_x^1 v'(t)\,dt \right| \le |v(x)| + \int_x^1 |v'(t)|\,dt \quad (*)$$

Mais $0 \le \int_x^1 |v'(t)|\,dt \le \int_0^1 |v'(t)|\,dt$, $\forall x \in [0,1]$.

et $\int_0^1 |v'(t)|\,dt = \int_0^1 1 \cdot |v'(t)|\,dt \underset{\text{Cauchy-Schwarz sur } L^2(]0,1[)}{\le} \left(\int_0^1 1^2\,dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (v'(t))^2\,dt \right)^{1/2}$

donc $\int_0^1 |v'(t)|\,dt \le 1 \cdot \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \underset{\text{définition de la norme } H^1}{\le} \|v\|_{H^1(]0,1[)}$

On revient dans l'inégalité $(*)$ et on intègre sur $]0,1[$:

$$\underbrace{\int_0^1 |v(1)|\,dx}_{= |v(1)| \cdot 1} \le \underbrace{\int_0^1 |v(x)|\,dx}_{\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} 1 \cdot \|v\|_{L^2(]0,1[)}} + \underbrace{\int_0^1 \|v\|_{H^1(]0,1[)}\,dx}_{= \|v\|_{H^1(]0,1[)} \cdot 1} .$$

Donc $|v(1)| \le \|v\|_{L^2(]0,1[)} + \|v\|_{H^1(]0,1[)}$
Mais $\|v\|_{L^2(]0,1[)} \le \|v\|_{H^1(]0,1[)}$ (par définition de $\|\cdot\|_{H^1}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|v(1)| \le \|v\|_{H^1(]0,1[)} + \|v\|_{H^1(]0,1[)} = 2\|v\|_{H^1}}$$

On pose $\boxed{C = 2}$

3) On doit vérifier que $\begin{cases} i) \; V_0 \neq \emptyset \\ ii) \; \forall v_1, v_2 \in V_0 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \quad (\lambda v_1 + v_2) \in V_0 \text{ aussi} \end{cases}$

i) $v=0$ est un élément de $V_0 \Rightarrow V_0 \neq \emptyset$.

Soit $v_1, v_2 \in V_0 \Rightarrow v_1, v_2 \in H^1(]0,1[)$
H^1 = espace vectoriel $\Big\} \Rightarrow \underline{(\lambda v_1 + v_2) \in H^1(]0,1[)}$

$\left.\begin{array}{l} v_1(1) = 0 \\ v_2(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{(\lambda v_1 + v_2)(1)} = \lambda v_1(1) + v_2(1) = \underline{0}$.

Donc V_0 est un sous-espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$.
$(V_0 \subset H^1(]0,1[)$).

4). V_0 étant un sous-espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$, $(V_0, \langle \cdot,\cdot \rangle_{H^1}, \|\cdot\|_{H^1})$ = espace vectoriel normé. Il reste à vérifier que c'est un espace complet, donc que toute suite de Cauchy est convergente

- Soit (v_n) une suite de Cauchy dans $(V_0, \|\cdot\|_{H^1})$

Alors (v_n) est suite de Cauchy dans $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ car $V_0 \subset H^1$. Mais l'espace $(H^1(]0,1[), \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace complet. Donc (v_n) est suite convergente dans $H^1(]0,1[)$, c'est-à-dire $\exists\, v \in H^1(]0,1[)$ telle que $\|v_n - v\|_{H^1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Il reste à vérifier que $v \in V_0$, donc que $v(1) = 0$.

On utilise pour cela l'inégalité (3) (démontrée à la question 2).) pour $(v_n - v)$:

$\left.\begin{array}{l} |v_n(1) - v(1)| = |(v_n - v)(1)| \leq C \|v_n - v\|_{H^1} \\ v_n \in V_0 \Rightarrow v_n(1) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |v(1)| \leq C \|v_n - v\|_{H^1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \boxed{v(1) = 0}$

q.e.d.

RAPPEL DU N° DE PLACE

5

5) On multiplie l'équation (1) par $v \in V_0$ et on intègre sur $]0,1[$:

$$\int_0^1 -u''.v\,dx + \int_0^1 \frac{u.v}{2}\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

Intégration par parties :

$$[-u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 \frac{uv}{2}\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 \frac{uv}{2}\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

$v \in V_0 \Rightarrow v(1) = 0$

$u'(0) = ku(0)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 \frac{uv}{2}\,dx + ku(0)v(0)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 fv\,dx}_{L(v)}.$$

6) $$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \int_0^1 (\lambda u_1 + u_2)'v'\,dx + \int_0^1 \frac{(\lambda u_1 + u_2)v}{2}\,dx$$

$$+ k(\lambda u_1(0) + u_2(0))v(0) \underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \lambda\left[\int_0^1 u_1'v'\,dx + \int_0^1 \frac{u_1 v}{2}\,dx\right.$$

$$\left. + ku_1(0)v(0)\right] + \left[\int_0^1 u_2'v\,dx + \int_0^1 \frac{u_2 v}{2}\,dx + ku_2(0)v(0)\right]$$

$= \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$ $\Rightarrow$ a = linéaire par rapport à u.

$a(u,v) = a(v,u)$ $\Rightarrow$ a = symétrique

$\Rightarrow$ a = linéaire par rapport à v aussi.

7) a étant bilinéaire, il suffit de démontrer que $\exists M > 0$ t.q.

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v \in V_0.$$

pour justifier la continuité de a.

$$|a(u,v)| \leq \underbrace{\left|\int_0^1 u'v'\right|}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\left|\int_0^1 uv\,dx\right|}_{I_2} + k\underbrace{|u(0)\,v(0)|}_{I_3}.$$

$$I_1 \underset{\text{Cauchy-Schwarz sur } L^2}{\leq} \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

$$I_2 \underset{\text{Cauchy Schwarz sur } L^2}{\leq} \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

On utilise l'inégalité (3) pour estimer I_3 :

$$I_3 \leq kC\|u\|_{H^1}\cdot C\|v\|_{H^1} = kC^2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

On a les 3 inégalités :

$$I_1+I_2+I_3 \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+kC^2\right)}_{=M}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

Donc $\exists M = \frac{3}{2}+kC^2 > 0$ tel que

$$\boxed{|a(u,v)| \leq M\cdot\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}}, \forall u,v\in H^1$$

8). a est coercive si

$\exists \alpha>0$ t.q. $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{H^1}$, $\forall v\in V_0$.

$$a(v,v) = \int_0^1 (v')^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 v^2dx + k\underbrace{(v(0))^2}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (v')^2dx + \int_0^1 v^2dx\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\alpha}\|v\|^2_{H^1}$$

ce qui justifie la coercivité.

9) a est une application bilinéaire et symétrique (question 6)

il reste à vérifier qu'elle est définie positive pour conclure qu'elle définit un produit scalaire.

On a démontré que

$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{H^1} \geq 0$. $\Rightarrow \boxed{a(v,v)\geq 0, \forall v\in V}$

RAPPEL DU N° DE PLACE

$\boxed{a(v,v)=0} \Rightarrow 0 \geq \alpha \|v\|^2_{H^1}$ (à cause de la coercivité)

$$\Downarrow$$

$$\|v\|_{H^1}=0 \Rightarrow \boxed{v=0}$$

Donc a est définie positive aussi.

$|v|_1 = \sqrt{a(v,v)}$ définit une norme si l'application vérifie les propriétés d'une norme :

$$\begin{cases} i) & |v|_1 \geq 0, \ \forall v \text{ et } |v|_1 = 0 \Rightarrow v=0 \\ ii) & |\lambda v|_1 = |\lambda| \cdot |v|_1 \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_0 \\ iii) & |v_1+v_2|_1 < |v_1|_1 + |v_2|_1 \quad , \forall v_1, v_2 \in V_0 \end{cases}$$

Vérifions les 3 propriétés :

i). $|v|_1 = \sqrt{a(v,v)} \geq 0 \quad \forall v \in V_0$

$|v|_1 = 0 \Rightarrow a(v,v)=0 \Rightarrow v=0$ (on a vu à la question précédente)

ii). $|\lambda v|_1 = \sqrt{a(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 a(v,v)} = |\lambda| \sqrt{a(v,v)}$

$= |\lambda| |v|_1$.

iii) $|v_1+v_2|_1 = \sqrt{a(v_1+v_2, v_1+v_2)} = \sqrt{\cancel{a(v_1,v_1)+2a(v_1,v_2)}}$

$= \sqrt{a(v_1,v_1) + 2a(v_1,v_2) + a(v_2,v_2)}$

$= \sqrt{|v_1|_1^2 + |v_2|_1^2 + 2a(v_1,v_2)}$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$:

$|a(v_1,v_2)| \leq |v_1|_1 |v_2|_1$.

$\Rightarrow 2a(v_1,v_2) \leq 2|v_1|_1 |v_2|_1$

$$\Rightarrow |v_1|_1^2 + 2a(v_1,v_2) + |v_2|_1^2 \leq \underbrace{|v_1|_1^2 + 2|v_1|_1|v_2|_1 + |v_2|_1^2}_{= \left(|v_1|_1 + |v_2|_1\right)^2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{|v_1|_1^2 + 2a(v_1,v_2) + |v_2|_1^2}_{\overset{\shortparallel}{|v_1+v_2|_1}}} \le |v_1|_1 + |v_2|_1 .$$

q.e.d.

les deux normes sont équivalentes car:

$\to$ on a vu que $|a(u,v)| \le M \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$ $\forall u,v$

(continuité de a).

Si on pose $u = v \Rightarrow$

$$|v|_1^2 = |a(v,v)| \le M \|v\|_{H^1}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|v|_1 \le \sqrt{M} \|v\|_{H^1}}, \forall v \in V_0 .$$

$\to$ a = coercive $\Rightarrow$ $\underset{\overset{\shortparallel}{|v|_1^2}}{a(v,v)} \ge \alpha \|v\|_{H^1}^2, \forall v \in V_0.$

$$\Rightarrow \boxed{|v|_1 \ge \sqrt{\alpha} \|v\|_{H^1}}, \forall v \in V_0$$

On a donc

$$\sqrt{\alpha} \|v\|_{H^1} \le |v|_1 \le \sqrt{M} \|v\|_{H^1} .$$

$\forall v \in V_0$

ce qui définit l'équivalence de deux normes.

10) L = linéaire si $L(\lambda v_1 + v_2) = \lambda L(v_1) + L(v_2)$

$$\underline{L(\lambda v_1 + v_2)} = \int_0^1 f(\lambda v_1 + v_2)\, dx = \lambda \int_0^1 f v_1\, dx + \int_0^1 f v_2\, dx$$

$$= \underline{\lambda L(v_1) + L(v_2)}$$

L-linéaire $\Rightarrow$ [L = continue $\Leftrightarrow \exists K > 0$ t.q. $|L(v)| \le K \cdot \|v\|_{H^1}, \forall v \in V_0$]

$$|L(v)| = \left| \int_0^1 f v\, dx \right| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\le} \left(\int_0^1 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \quad , \forall v \in V_0 .$$ 9.

On prend $K = \|f\|_{L^2}$.

11. On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram:

Hypothèses :

i) $(V_0, \|\cdot\|_{H^1}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{H^1})$ = espace de Hilbert
vérifié dans les questions 3,4.

ii) a - application bilinéaire, continue et coercive
(questions 6,7,8)

iii) L - application linéaire et continue
(question 10).

Alors $\exists ! \, u \in V_0$ solution du (PV).