SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 3 : les ondes élastiques dans les solides

Exercice 1 : Ondes de volume élastiques

Dans un solide homogène isotrope, caractérisé par la masse volumique ρ et les coefficients de Lamé λ et μ, l'équation du mouvement est donnée par

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = div \underline{\underline{\sigma}},$$

où le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est relié au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{I}} \operatorname{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

On s'intéresse dans cet exercice à la propagation d'ondes dans la direction x. Cela impose que les composantes du champ de déplacement ne dépendent de la seule coordonnée spatiale x et du temps.

1. Donner les expressions des composantes du tenseur des déformations en fonction des composantes du déplacement $\underline{u}$.

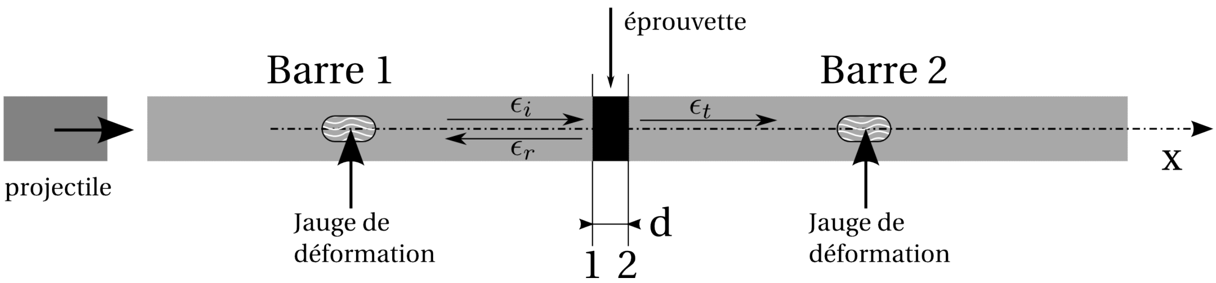
2. Déduire de la question précédente les expressions des composantes du tenseur des contraintes.

3. Montrer que chaque composante du champ de déplacement satisfait à une équation de d'Alembert. Expliciter les vitesses.

Exercice 2 : Mesure d'une loi de comportement par la méthode des barres de Hopkinson (tiré de l'examen de janvier 2013)

Très utilisée dans l'étude du comportement des matériaux à grande vitesse de déformation, la méthode des barres de Hopkinson (1914) est une application de la théorie élémentaire de propagation des ondes élastiques. Cette technique consiste à charger par un train d'ondes une éprouvette courte (longueur d) placée entre deux barres d'impédances mécaniques identiques. On doit à Kolsky (1949) des améliorations

qui ont permis de déterminer l'histoire des déformations $\epsilon_e(t)$ et des contraintes $\sigma_e(t)$ auxquelles est soumise l'éprouvette.
Le principe est le suivant (Figure) : un choc est provoqué à l'extrémité de la barre 1 [1], ce qui induit une onde, dans la barre 1, incidente sur l'éprouvette. Au niveau de l'éprouvette, l'onde rencontre une rupture d'impédance qui se traduit par la création d'une onde réfléchie et d'une onde transmise dans la barre 2. Des jauges permettent de mesurer les déformations associées à la propagation des ondes dans les deux barres.
Les barres 1 et 2 sont faites d'un matériau de module de Young E et de densité ρ. On note c la vitesse des ondes de barreau dans ces barres.



Le dépouillement de la mesure est basé sur l'hypothèse que l'état des déformations et des contraintes est homogène dans l'éprouvette, c'est-à-dire que l'on y néglige la propagation des ondes. Dans l'éprouvette, à chaque instant, $\sigma_e(t) = E_e \ \epsilon_e(t)$, où E_e est le module de Young de l'éprouvette (qui n'est pas forcément une constante).

1. Discuter qualitativement le choix de la durée de l'impact T que doit induire l'expérimentateur de manière à se placer dans des conditions favorables vis-à-vis de l'hypothèse d'homogénéité.

2. Discuter qualitativement le choix de la position de la jauge dans la barre 1, en relation avec la durée de l'impact, de manière à ce que les ondes incidentes et réfléchies soient mesurées indépendamment l'une de l'autre.

Modélisation de la propagation d'onde dans les barres

On s'intéresse dans un premier temps à la propagation d'une onde plane dans un barreau élastique de module de Young E et de masse volumique ρ. On rappelle que l'onde de barreau est associée à un déplacement axial homogène dans la section droite du barreau. On note $u(x,t)$ le déplacement dans l'axe du barreau de la section droite d'abscisse x, $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ la vitesse et $\epsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ la déformation. On note $\sigma = E\epsilon$ la contrainte longitudinale dans l'axe du barreau.

3. Comment peut-on justifier que des ondes de barreau sont créées par l'impact du projectile ?

1. L'impact peut par exemple être créé par l'impact d'un projectile, dont les propriétés permettent de fixer la durée du choc.

4. À partir du principe fondamental de la dynamique et de la loi de Hooke, retrouver l'équation des ondes de barreau, dont $u(x,t)$ est solution.

5. Écrire la forme générale des solutions propagatives de l'équation d'onde à une dimension et vérifier que la vitesse de l'onde de barreau est $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

On choisit d'écrire l'onde de déplacement se propageant dans le sens des x croissants sous la forme $u(x,t) = u(x - ct)$.

6. Montrer que la vitesse des sections droites associée à cette onde est $v(x,t) = -c\epsilon$.

7. Pour l'onde se propageant dans le sens des x décroissants, montrer que $v(x,t) = c\epsilon$.

Détermination de la contrainte et de la déformation dans l'éprouvette

On note v_1 et v_2 les vitesses de déplacement des surfaces 1 et 2 de l'éprouvette en contact avec les barres 1 et 2. On suppose que l'éprouvette reste en contact avec les barres pendant toute l'expérience. L'éprouvette est soumise à un taux de déformation

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{v_2 - v_1}{d}, \quad \forall t.$$

8. Écrire v_1 en fonction des amplitudes v_i et v_r des ondes incidentes et réfléchies.

9. Écrire v_2 en fonction de l'amplitude v_t de l'onde transmise.

10. Montrer que

$$\dot{\epsilon}_e = -\frac{c}{d}\left(\epsilon_r + \epsilon_t - \epsilon_i\right)$$

On fait l'hypothèse que les contraintes sont homogènes dans l'éprouvette, c'est-à-dire que à chaque instant, les contraintes σ_1 et σ_2 sur les faces 1 et 2 de l'éprouvette sont égales.

11. Montrer qu'avec cette hypothèse $\epsilon_t = \epsilon_i + \epsilon_r$.

12. En déduire que

$$\epsilon_e(t) = \frac{-2c}{d}\int_0^t \epsilon_r(\tau)d\tau.$$

13. Montrer que la contrainte dans l'éprouvette est

$$\sigma_e = E\epsilon_t.$$

Méthode alternative

Il est également possible de déterminer la contrainte transmise en utilisant un accéléromètre placé sur la surface libre à l'extrémité de la barre 2. À cette extrémité l'onde incidente est réfléchie. Ces ondes sont associées à des états de contraintes $\sigma_i^{(2)}$ et $\sigma_r^{(2)}$ respectivement (l'exposant (2) fait référence à l'extrémité libre de la barre 2). Dans le problème complet traité dans la partie précédente, $\sigma_i^{(2)} = \sigma_t$

14. En écrivant la condition de surface libre, déterminer la valeur du coefficient de réflexion de l'onde de contrainte à l'extrémité de la barre 2.

15. Montrer que la condition de surface libre s'écrit aussi $\rho c v_i^{(2)} - \rho c v_r^{(2)} = 0$, où $v_i^{(2)}$ et $v_r^{(2)}$ sont les vitesses des sections droites associées aux ondes incidente et réfléchies.

16. Montrer que $\sigma_t = -\frac{1}{2}\rho c\frac{\partial \xi}{\partial t}$, où ξ est le déplacement mesuré par l'accéléromètre.