

INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES VOLUMES-FINIS POUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

PARTIE 1

AS, CW, Sorbonne Université

Master 1 - MF2A

31/01/2020

Contents

1 Principe de la méthode des volumes-finis	2
1.1 Problème physique et équations modèles	2
1.2 Principe de la méthode des volumes-finis	3
2 Volumes finis pour les problèmes de diffusion stationnaire : cas d'un problème 1D	6
2.1 Calcul de l'intégrale de volume \overline{S}_Φ	7
2.2 Calcul de l'intégrale de surface $\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS$	7
2.2.1 Approximation du gradient sur les faces : influence de la distribution (nœuds - faces)	7
2.2.2 Coefficient de diffusion Γ et conservation des flux discrets aux frontières des VC	9
2.3 Formulation générale	9
2.4 Exercice : diffusion 2D stationnaire	10
3 Volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion	12
3.1 Maillages décalés	12
3.2 Problème 1D	13
3.2.1 Intégration sur un volume de contrôle Ω_Φ	13
3.2.2 Approximation par un schéma centré (CDS) de la variable Φ advectée sur les faces	14
3.3 Exemple : écoulement 1D à vitesse constante	15
3.4 Exercice : mise en œuvre en 2 dimensions	18

1. Mieux introduire les Vf avec le principe de conservation et les maillages structurés / non-structures. Le principe des VF contigues sans trou.
2. Donner un exemple sur le point milieu et trapèze, puis dire ce que l'on fait ... pas direct en trapeze / simpson.

1 Principe de la méthode des volumes-finis

On définit un problème physique par ses équations modèles caractérisant le phénomène physique à étudier, le domaine spatial de l'étude, et les conditions frontières à appliquer aux limites du domaine physique.

1.1 Problème physique et équations modèles

Lorsqu'on emploie une approche numérique, on cherche à décrire le domaine d'étude de manière discrète sur un domaine de calcul, découpé suivant un maillage de dimension fini. Les variables du problème (typiquement, la vitesse \mathbf{V} et la pression p) sont alors uniquement définies sur un nombre connu N de points, et seront obtenues par la résolution des équations modèles de manière discrète. En dehors des points du maillage, la valeur des variables pourra résulter d'interpolations sur les points connus.

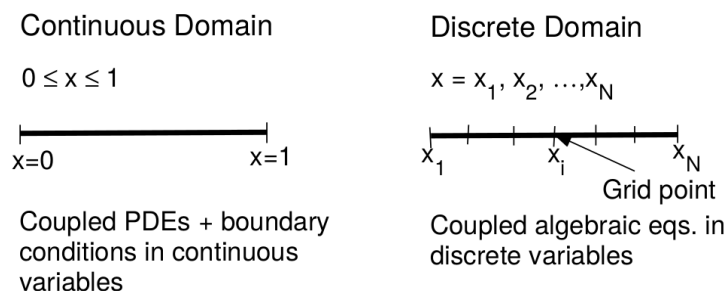


Figure 1: Discrétisation du domaine physique (cas 1D).

Dans ce cours, on se limite aux écoulements incompressibles stationnaires bi-dimensionnels (2D) pour un fluide newtonien de propriétés physiques (ρ, μ) considérées constantes (respectivement masse volumique et viscosité dynamique). Le domaine de calcul est décrit dans le système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x, y)$. Le vecteur vitesse sera noté $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (u, v)(x, y)$, et la pression $p(x, y)$.

Les équations modèles sont exprimées sous la forme d'équations locales gouvernant l'écoulement, basées sur les lois de conservation (masse / quantité de mouvement). Les équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide newtonien s'expriment sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement peuvent se réécrire sous la forme conservative de la façon suivante, en combinant les équations 2 ou 3 avec l'équation 1. C'est cette formulation que l'on retiendra par la suite pour ses propriétés de conservation, en faisant apparaître la viscosité cinématique ($\nu = \mu/\rho$).

$$\left(\frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

1.2 Principe de la méthode des volumes-finis

Dans la méthode des volumes finis, les volumes (ou surfaces) des mailles sont nommés des *cellules* et les points du maillage des *nœuds*. On utilisera la notation géographique pour désigner les nœuds voisins (fig. 3), et la position des *faces* à l'interface avec les cellules voisines.

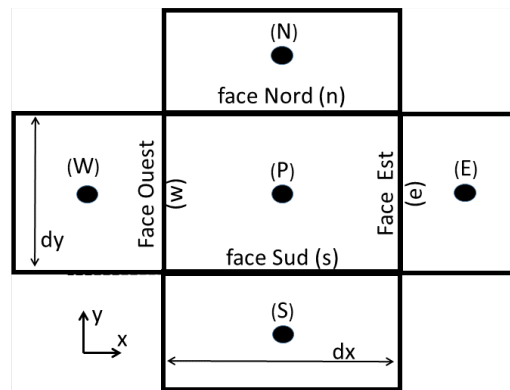


Figure 2: Cellule élémentaire ou *volume de contrôle* avec la notation géographique (cas 2D).

Prenons comme exemple l'équation de transport d'un scalaire Φ par un écoulement donné \mathbf{V} sur un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$.

$$\underbrace{\text{div}(\mathbf{V}\Phi)}_{\text{transport advectif}} = \underbrace{\text{div}(\Gamma \mathbf{grad} \Phi)}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{S}_{\text{source volumique locale}} \quad (6)$$

Les équations de conservation précédentes sont alors des cas particuliers de la formulation générale

- si $\Phi = 1$: équation de conservation de la masse (éq. 1),
- si $\Phi = u, v$: équations de conservation de la quantité de mouvement (éq. 4, 5), écrites sous la forme conservative.

Le principe de la méthode des volumes-finis consiste à considérer la forme intégrale des équations locales de conservation appliquée à chaque volume de contrôle Ω_i (pour $i \in [1 : N]$ avec

N le nombre total de cellules) découpant le domaine de calcul Ω pour obtenir une approximation discrète de celles-ci.

$$\int_{\Omega_i} \text{div}(\mathbf{V}\Phi) dV = \int_{\Omega_i} \text{div}(\Gamma \mathbf{grad} \Phi) dV + \int_{\Omega_i} S dV \quad (7)$$

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient

$$\oint_{\partial\Omega_i} \Phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial\Omega_i} \Gamma \mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_i} S dV. \quad (8)$$

Pour le volume de contrôle Ω_i , on affecte au nœud courant P la valeur Φ_P telle que

$$\Phi_P = \frac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} \Phi dV. \quad (9)$$

Φ_P est donc la valeur moyenne de Φ sur Ω_i le volume de contrôle (VC).

Les intégrations numériques sont basées sur la valeur de Φ affectée au nœud courant Φ_P ou aux nœuds voisins (Φ_{NB}) :

$$\int_{\Omega_P} \Phi dV \simeq |\Omega_P| \sum_{i=(P,NB)} \omega_i \Phi_i \quad (10)$$

où les ω_i sont des poids, déterminés par la formule de quadrature retenue (par ex. quadrature de Newton-Cotes: point milieu, trapèze, Simpson, etc...).

La résolution numérique de l'équation (8) conduit donc à estimer la valeur de l'inconnue Φ_P du nœud courant en la reliant aux valeurs (Φ_{NB}) des N_{NB} nœuds voisins. Cette relation dépend

- du type de maillage retenu,
- du choix de la formule de quadrature (éq. 10),
- du choix des schémas de discrétisation appliqués aux différents termes de l'équation 8,

Finalement, la formulation discrète de l'équation modèle 8 peut se mettre sous la forme suivante

$$a_P \Phi_P = \sum_{N_{NB}} a_{NB} \Phi_{NB} + b_P \quad (11)$$

Le problème complet, parcourant l'ensemble des N cellules du domaine de calcul se réduit alors à la résolution d'un système matriciel ($\mathcal{A}\Phi = \mathbf{b}$), pour lequel les conditions limites appliquées au bord du domaine de calcul $\partial\Omega$ ont modifié des éléments de la matrice \mathcal{A} ou du vecteur \mathbf{b} .

$$\begin{bmatrix} a_{P_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -a_{NB} & \\ & & & \ddots \\ & -a_{NB} & & & \\ & & & & a_{P_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

Remarque : La matrice \mathcal{A} est une matrice creuse. Si on emploie un schéma centré, elle comporte 3 à 7 diagonales non-nulles suivant la dimension du problème, le nombre de cellules voisines (N_{NB}) de la cellule courante P variant de 2 (cas 1D), 4 (cas 2D) à 6 (cas 3D).

2 Volumes finis pour les problèmes de diffusion stationnaire : cas d'un problème 1D

On se place dans le cas stationnaire, sans écoulement, de l'équation de transport par diffusion d'un scalaire Φ .

$$\text{div}(\Gamma \mathbf{grad} \Phi) + S_\Phi = 0 \quad (13)$$

L'intégration sur un volume de contrôle Ω_P quelconque conduit à :

$$\oint_{\partial\Omega_P} \Gamma \mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_P} S_\Phi dV = 0 \quad (14)$$

Le problème se réduit à une intégrale de volume sur le volume de contrôle (Ω_P) et une intégrale sur la frontière du VC ($\partial\Omega_P$) (constituée d'un ensemble de *faces* (voir figure 3)), dont la somme est nulle. Deux opérations élémentaires sont à réaliser :

- estimation du terme de flux \mathcal{F}_Φ sur la frontière du volume de contrôle (VC) :

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial\Omega_P} \Gamma \mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n} dS, \quad (15)$$

- estimation du terme source (ou de la somme des termes sources), intégré sur le volume de contrôle.

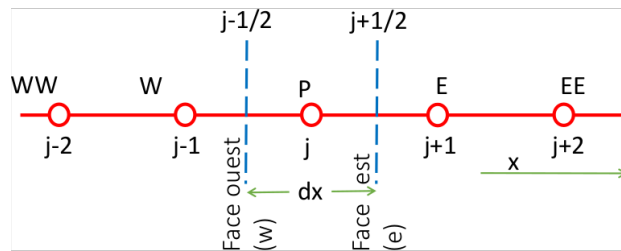


Figure 3: Cas général d'un maillage 1D. La frontière du VC est appelée *face*.

Dans le cas 1D, on intègre les équations sur le volume de contrôle $[w, e]$. Les intégrales volumiques deviennent des intégrales sur la longueur dx du volume de contrôle, et les faces deviennent 2 points, que l'on nomme e et w (fig. 3). L'équation modèle (éq. 14) devient alors

$$\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_w^e S_\Phi dx = 0 \quad (16)$$

La méthodologie de résolution est la suivante :

1. Pour chaque VC, approcher la valeur de Φ à la frontière de VC ($\partial\Omega_P$), évaluer \mathcal{F}_Φ sur chaque face, ce qui peut conduire à deux valeurs distinctes du flux de chaque côté de la frontière ;
2. appliquer une stratégie pour résoudre le problème de discontinuité pour imposer une seule valeur de \mathcal{F}_Φ sur toute les faces du VC ;
3. calculer l'intégrale de surface : $\oint_{\partial\Omega_P} \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS$;
4. calculer l'intégrale de volume (terme source) ;
5. assembler la matrice \mathcal{A} et le vecteur \mathbf{b} , puis résoudre le système.

2.1 Calcul de l'intégrale de volume \overline{S}_Φ

On intègre le terme source S_Φ sur Ω_P , soit :

$$\overline{S}_\Phi = \int_{\Omega_P} S_\Phi dV = S_{\Phi,P} |\Omega_P| \quad (17)$$

L'intégrale de S_Φ sur le volume de contrôle (\overline{S}_Φ), va donc dépendre des quadratures et schémas de discrétisation retenus, suivant l'expression de S_Φ et les variables connues aux nœuds ou aux faces.

Si le terme source local S_Φ est fonction de la variable Φ_P , alors on utilise une linéarisation pour écrire :

$$\overline{S}_\Phi = S_C + S_P \Phi_P, \quad (18)$$

où S_C et S_P sont des constantes à déterminer.

2.2 Calcul de l'intégrale de surface $\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS$

On a posé \mathcal{F}_Φ , le flux diffusif avec, en 1D : $\mathcal{F}_\Phi = \Gamma \frac{d\Phi}{dx}$. L'intégrale sur la frontière donne :

$$\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS = \mathcal{F}_e - \mathcal{F}_w, \quad (19)$$

où \mathcal{F}_e , \mathcal{F}_w sont respectivement les valeurs de \mathcal{F} calculés aux faces (e) et (w). On a :

$$\mathcal{F}_e = \Gamma_e \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_e \quad \text{flux diffusif sur la face Est} \quad (20)$$

$$\mathcal{F}_w = \Gamma_w \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_w \quad \text{flux diffusif sur la face Ouest} \quad (21)$$

Deux grandeurs sont donc à évaluer sur les frontières (w, e) : le coefficient de diffusion Γ et le gradient scalaire $d\Phi/dx$.

2.2.1 Approximation du gradient sur les faces : influence de la distribution (nœuds - faces)

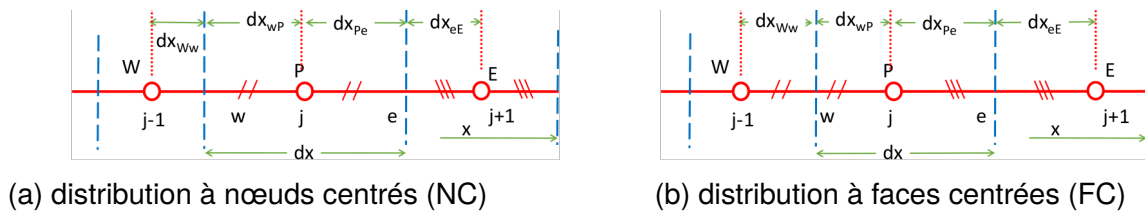


Figure 4: Deux types de distribution nœuds - faces pour les maillages cartésiens.

Dans le cas d'un maillage cartésien, deux distributions de maillage sont possibles.

Approche classique à nœuds centrés (NC) les nœuds sont au milieu du VC (fig. 4-a). On définit les VC en premier, puis on place les nœuds au centre. On a alors $dx_{wp} = dx_{pe}$. *Avantage* : les valeurs aux nœuds Φ_P correspondent à la moyenne de Φ sur le VC à l'ordre 2 au moins si on utilise des schémas de discrétisation centrés (car le nœud est au centre géométrique du VC).

Approche à faces centrées (FC) les faces sont au milieu des nœuds (fig. 4-b). On définit la positions des nœuds, puis on place les faces sur la médiatrice des segments reliant les nœuds. On a $dx_{Ww} = dx_{wP}$ et $dx_{Pe} = dx_{eE}$.

Avantage : les flux évalués sur les faces sont approchés à l'ordre 2 au moins, si on utilise des schémas de discrétisation centrés (car les faces sont au milieu des nœuds), ce qui peut être important pour les propriétés de conservation du schéma global.

Remarque : La figure 3 représente une distribution régulière des mailles suivant x . On notera que dans ce cas (cas d'un maillage régulier), le maillage est à la fois à nœuds (NC) et faces (FC) centrés.

Application au calcul des flux diffusifs

On souhaite exprimer les deux flux diffusifs \mathcal{F}_e et \mathcal{F}_w sur les faces. On pose :

$$\mathcal{F}_e = \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_w = \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{dx_{Ww} + dx_{wP}} \quad (22)$$

Appliquons un développement de Taylor autour du point (e) pour Φ_E et Φ_P ,

$$\Phi_E = \Phi_e + dx_{eE} \Phi'_e + \frac{(dx_{eE})^2}{2} \Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{eE})^3) \quad (23)$$

$$\Phi_P = \Phi_e - dx_{Pe} \Phi'_e + \frac{(dx_{Pe})^2}{2} \Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{Pe})^3) \quad (24)$$

En faisant la différence entre ces 2 équations, on obtient :

$$\Phi_E - \Phi_P = (dx_{eE} + dx_{Pe}) \Phi'_e + \frac{(dx_{eE} + dx_{Pe})(dx_{eE} - dx_{Pe})}{2} \Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{Pe})^3, (dx_{eE})^3) \quad (25)$$

soit,

$$\Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \frac{dx_{eE} - dx_{Pe}}{2} \Phi''_e + \mathcal{O}(dx^2) \quad (26)$$

La distribution (nœuds - faces) modifie en conséquence l'ordre d'approximation des dérivées des scalaires aux faces.

- Dans le cas à nœuds centrés (NC), on a $dx_{Pe} \neq dx_{eE}$. L'approximation est alors du premier ordre :

$$\Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \mathcal{O}(dx)$$

- Dans le cas à faces centrées (FC), on a $dx_{Pe} = dx_{eE}$. L'approximation est alors du second ordre :

$$\Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \mathcal{O}(dx^2)$$

Dans ce cours, nous retiendrons l'approche à faces centrées (FC), de façon à assurer les propriétés de conservation.

2.2.2 Coefficient de diffusion Γ et conservation des flux discrets aux frontières des VC

Tous les scalaires sont définis aux nœuds des VC. On peut donc définir Γ_E , Γ_P et Γ_W correspondant à la moyenne de Γ sur les différents VC (de la même façon que pour Φ , éq. 9). Or, nous cherchons à assurer la conservation du schéma, ce qui signifie que le flux aux interfaces (\mathcal{F}_e , \mathcal{F}_w) doit être continu et avoir une même expression lorsque l'on considère les volumes de contrôle de part et d'autre de chaque interface (e) ou (w). Deux méthodes existent :

La régression linéaire : on suppose $\frac{\Gamma_e - \Gamma_P}{dx_{Pe}} = \frac{\Gamma_E - \Gamma_e}{dx_{eE}}$, d'où

$$\Gamma_e = \frac{dx_{Pe}\Gamma_E + dx_{eE}\Gamma_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}}$$

Dans le cas à faces centrées, alors l'expression se réduit à une moyenne arithmétique :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}.$$

Cependant, cette méthode n'assure pas la continuité des flux discrets.

L'imposition de la continuité des flux \mathcal{F} : on cherche à écrire la continuité des flux discrets à l'interface (\mathcal{F}_e , \mathcal{F}_e^- , \mathcal{F}_e^+), soit $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_e^- = \mathcal{F}_e^+$.

Prenons l'exemple de $\mathcal{F}_e = \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}}$. On a :

$$\mathcal{F}_e^- = \Gamma_P \frac{\Phi_e - \Phi_P}{dx_{Pe}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_e^+ = \Gamma_E \frac{\Phi_E - \Phi_e}{dx_{eE}} \quad (27)$$

En écrivant $\mathcal{F}_e^- = \mathcal{F}_e^+$, on obtient la relation suivante :

$$\mathcal{F}_e = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{dx_{eE} \Gamma_P + dx_{Pe} \Gamma_E} (\Phi_E - \Phi_P) \quad (28)$$

d'où

$$\frac{dx_{Pe} + dx_{eE}}{\Gamma_e} = \frac{dx_{eE}}{\Gamma_E} + \frac{dx_{Pe}}{\Gamma_P}. \quad (29)$$

Dans le cas de la distribution à faces centrées, l'expression se réduit alors à une moyenne harmonique :

$$\frac{2}{\Gamma_e} = \frac{1}{\Gamma_E} + \frac{1}{\Gamma_P} \quad \text{ou encore} \quad \Gamma_e = \frac{2\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_E + \Gamma_P} \quad (30)$$

2.3 Formulation générale

Considérant les coefficients de diffusion aux frontières des VC connus, la formulation générale discrète de l'équation 16 s'écrit alors:

$$\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}} - \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{dx_{Pw} + dx_{wW}} + (S_C + S_P \Phi_P) = 0 \quad (31)$$

Pour alléger l'écriture, posons

$$d_{EP} = dx_{Pe} + dx_{eE} \quad \text{et} \quad d_{PW} = dx_{Pw} + dx_{wW} \quad (32)$$

L'équation 31 devient

$$\left(\frac{\Gamma_e}{d_{PE}} + \frac{\Gamma_w}{d_{PW}} - S_P \right) \Phi_P = \left(\frac{\Gamma_e}{d_{PE}} \right) \Phi_E + \left(\frac{\Gamma_w}{d_{PW}} \right) \Phi_W + S_C \quad (33)$$

On peut ainsi définir une équation générale pour les nœuds courants (i.e. hors condition limite) sous la forme

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + b_P \quad (34)$$

avec

a_W	a_E	a_P	b_P
$\frac{\Gamma_w}{dx_{PW}}$	$\frac{\Gamma_e}{dx_{PE}}$	$a_E + a_W - S_P$	S_C

Pour passer de l'écriture locale à une écriture globale sur le domaine physique, on affecte un numéro $i, i \in [1, N]$ à chaque volume de contrôle, et on écrit une équation pour chaque volume de contrôle. L'équation locale sera modifiée pour les volumes de contrôle qui sont voisins des bords du domaine physique, par les conditions aux limites. En 1D, le système est tridiagonal. Le système linéaire obtenu est de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{P_1}^* & -a_{E_1}^* & & & & \\ -a_{W_2} & a_{P_2} & -a_{E_2} & & & \\ & -a_{W_3} & a_{P_3} & -a_{E_3} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -a_{W_{N-1}} & a_{P_{N-1}} & -a_{E_{N-1}} \\ & & & & & -a_{W_N}^* & a_{P_N}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^* \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \\ \Phi_{N-1} \\ \Phi_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N^* \end{bmatrix}$$

Remarques :

- Les coefficients a_{NB} sont tous positifs, où NB est l'ensemble des nœuds voisins de P ;
- En l'absence de terme source $S_P = 0$,
 - on a $a_P = \sum_{NB} a_{NB}$;
 - le coefficient a_P au point courant P est aussi positif ;
- Si $S_P \leq 0$ la matrice est à diagonale dominante.

2.4 Exercice : diffusion 2D stationnaire

On s'intéresse à la résolution de l'équation de diffusion bidimensionnelle stationnaire écrite sous la forme locale:

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + \bar{S} = 0$$

La diffusivité du matériau Γ et le terme source \bar{S} peuvent dépendre de la position (x, y) , mais sont indépendants de $\Phi(x, y)$.

1. Faire un schéma de la maille courante en 2D.
2. Intégrer le terme source sur Ω_P .
3. Ecrire l'équation modèle sous forme intégrale.
4. Formulation générale.

On introduit un maillage régulier en x et en y . Ecrire l'équation en chacun des nœuds courants sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b_P,$$

en précisant la valeur des coefficients a_P , a_E , a_W , a_S , a_N et b_P en fonction des valeurs de Γ et des paramètres géométriques Δx et Δy .

3 Volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion

On se place dans le cas stationnaire de l'équation de transport par convection-diffusion d'un scalaire. On considère un écoulement incompressible, dont le champ de vitesse de vecteur \mathbf{V} (en 2D, $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (u, v)(x, y)$) est connu. L'équation locale gouvernant le transport et la diffusion du scalaire Φ s'écrit :

$$\underbrace{\text{div}(\mathbf{V}\Phi)}_{\text{transport advectif}} = \underbrace{\text{div}(\Gamma \mathbf{grad} \Phi)}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{S_\Phi}_{\text{source volumique locale}} \quad (35)$$

L'intégration sur un volume de contrôle Ω_P conduit à :

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Phi dS = \oint_{\partial\Omega_P} \Gamma \mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_P} S_\Phi dV \quad (36)$$

En l'absence de source, la discrétisation de l'équation (36) sur les nœuds courants doit donc respecter la conservation des flux (advectifs et diffusifs) aux frontières entre les volumes de contrôle.

L'écoulement étant incompressible, on inclut l'équation de continuité à la modélisation du problème physique :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (37)$$

dont l'intégration sur un volume de contrôle Ω_P conduit à :

$$\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (38)$$

3.1 Maillages décalés

En volumes-finis, les variables scalaires sont toutes positionnées aux mêmes points du maillage. La figure 5 représente une répartition du champ de pression (P) sur un maillage cartésien régulier.

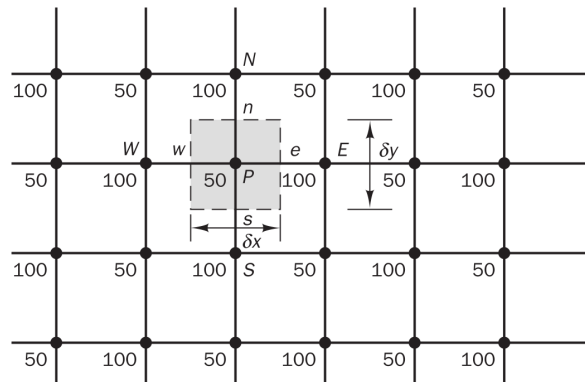


Figure 5: Champ de pression en damier. Les valeurs indiquées sur la figure correspondent aux valeurs de la pression en ces points.

On peut exprimer les gradients discrets de pression apparaissant dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (ρu) et (ρv) de la manière suivante :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{P_e - P_w}{\partial x} = \frac{(P_E + P_P)/2 - (P_P + P_W)/2}{\partial x} = \frac{P_E - P_W}{2 \partial x} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_P = \frac{P_N - P_S}{2 \partial y}$$

Comme présenté à la figure 5, un champ de pression présentant une oscillation paire-impair conduit à des gradients de pression nuls, de manière analogue à un champ de pression uniforme (quelle que soit sa valeur ...).

Pour remédier à cela, il a été proposé un positionnement décalé des variables scalaires et de vitesse (Harlow & Welch, 1965), de façon à exprimer les gradients de pression sur les frontières (en 2D, $\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(e,w)}$ et $\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(n,s)}$) des nœuds scalaires P . En effet, dans le cas de maillages décalés, les nœuds des composantes de vitesse (u, v) sont définis sur les frontières des volumes de contrôle Ω_Φ de la variable scalaire Φ . Cela donne la répartition illustrée à la figure 6.

On notera que les nœuds courants et les VC de Φ , u , v sont décalés d'une demi maille.

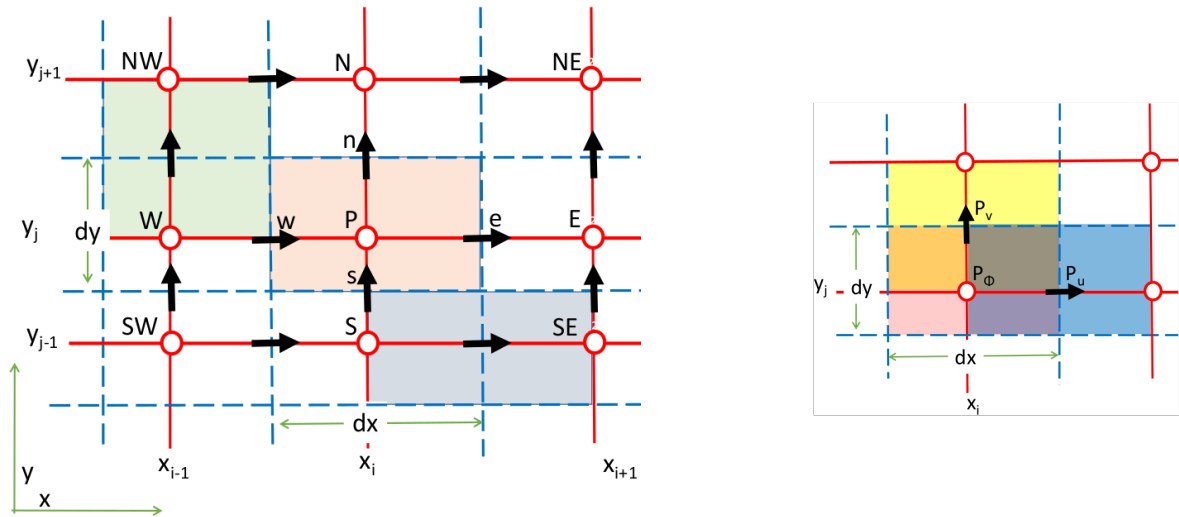


Figure 6: Notations en maillage décalé. Les volumes de contrôle des variables Φ , u , v sont matérialisés. Gauche : les nœuds rouges correspondent aux nœuds scalaires. Droite : Les volumes de contrôle pour les nœuds courants scalaires P_Φ et de vitesse P_u , P_v .

3.2 Problème 1D

3.2.1 Intégration sur un volume de contrôle Ω_Φ

On reprend le problème discret (éq. 36, 38) dans le cas d'un domaine physique 1D (fig. 7). On note qu'on utilise une distribution nœuds - faces à faces centrées, avec un maillage décalé pour les variables liées à la vitesse, c'est-à-dire que les vitesses sont définies (et ici connues) aux positions (e, w) de Ω_P .

Dans le cas 1D, les intégrales volumiques deviennent des intégrales sur la longueur du volume de contrôle, et les faces deviennent 2 points (ici nommés e et w), soit

$$\oint_w^e \Phi u dx = \oint_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \int_w^e S_\Phi dx \quad (39)$$

$$\oint_w^e u dS = 0 \quad (40)$$

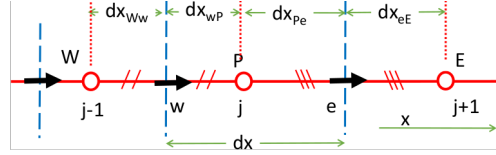


Figure 7: Maillage cartésien 1D à face centrée. Les flèches indiquent la composante u de vitesse.

Les équations se simplifient en :

$$(u\Phi)_e - (u\Phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right)_w + \int_w^e S_\Phi dx \quad (41)$$

$$u_e - u_w = 0 \quad (42)$$

On définit deux variables D et F représentant respectivement des vitesses de diffusion et de transport (ici homogènes à une quantité de mouvement) aux frontières de Ω_Φ , tels que :

$$D = \frac{\Gamma}{dx} \quad \text{et} \quad F = u, \quad (43)$$

soit aux frontières : $D_e = \frac{\Gamma_e}{dx_{PE}}$; $D_w = \frac{\Gamma_w}{dx_{WP}}$; $F_e = u_e$; $F_w = u_w$.

Les valeurs D_e , D_w , F_e et F_w sont connues en raison du maillage utilisé. En reprenant la méthode utilisée au chapitre précédent pour les termes diffusifs et le terme source, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right)_w &= D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) \\ \int_w^e S_\Phi dx &= \bar{S}_P \end{aligned}$$

Pour le terme convectif, en utilisant les valeurs de F , on a

$$(u\Phi)_e - (u\Phi)_w = F_e\Phi_e - F_w\Phi_w \quad \text{avec} \quad F_e = F_w \quad (44)$$

d'après l'équation de continuité (éq. 42).

Le problème s'écrit donc, à ce stade:

$$F_e\Phi_e - F_w\Phi_w = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \bar{S}_P \quad (45)$$

Pour déterminer le champ discret Φ_P de l'ensemble des nœuds du maillage, il reste donc à approcher Φ_e et Φ_w , variables advectées par l'écoulement aux faces du volume de contrôle, les coefficients D_e , D_w , F_e et F_w et \bar{S}_P étant connues.

3.2.2 Approximation par un schéma centré (CDS) de la variable Φ advectée sur les faces

Le schéma le plus classique utilise une approche centrée. Il couple un schéma centré (*Central Differencing Scheme*) pour les termes diffusifs tel que proposé au chapitre précédent, et une interpolation linéaire pour les termes de transport.

En reprenant les développements de Taylor autour du point e (éq. 23 et 24), on peut obtenir une approximation du second ordre

$$\Phi_e = \frac{dx_{Pe}\Phi_E + dx_{eE}\Phi_P}{dx_{PE}} + \mathcal{O}(dx^2) \quad (46)$$

Dans le cas d'un maillage à faces centrées ($dx_{PE} = 2 dx_{eE} = 2 dx_{Pe}$), on a

$$\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2} + \mathcal{O}(dx^2) \quad (47)$$

De même,

$$\Phi_w = \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} + \mathcal{O}(dx^2) \quad (48)$$

L'équation discrète complète se met sous la forme:

$$F_e \frac{dx_{Pe} \Phi_E + dx_{eE} \Phi_P}{dx_{PE}} - F_w \frac{dx_{Ww} \Phi_P + dx_{wP} \Phi_W}{dx_{WP}} = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \bar{S}_P$$

ce qui se simplifie dans le cas d'un maillage à faces centrées (FC) :

$$\frac{F_e}{2}(\Phi_E + \Phi_P) - \frac{F_w}{2}(\Phi_P + \Phi_W) = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \bar{S}_P$$

soit

$$\left[\left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) + \left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) \right] \Phi_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \Phi_E + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \Phi_W + \bar{S}_P$$

ou encore

$$\left[\left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \Phi_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \Phi_E + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \Phi_W + \bar{S}_P \quad (49)$$

On peut identifier les coefficients a_P , a_E , a_W et b_P du système linéaire à résoudre ($a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + b_P$), tels que

a_W	a_E	a_P	b_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_E + a_W - (F_e - F_w)$	\bar{S}_P

Remarque : ici, l'écoulement est incompressible ($F_e = F_w$), le coefficient a_P se simplifie donc en $a_P = a_E + a_W$.

3.3 Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

La variable scalaire Φ est transportée par convection et diffusion dans un écoulement à vitesse constante et connue u traversant un domaine mono-dimensionnel représenté sur la figure 8, où figurent les conditions limites du problème.

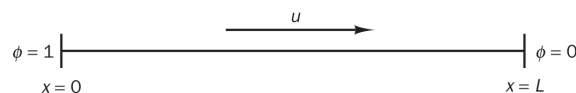


Figure 8: Problème physique.

Soit à résoudre le problème de transport 1D par convection-diffusion

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right), \quad 0 < x < L, \quad \Phi(0) = \Phi_A = 1, \quad \Phi(L) = \Phi_B = 0$$

avec $\Gamma = 0.1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ constants, $L = 1 \text{ m}$. La solution analytique du problème est

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{\rho u x}{\Gamma}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho u L}{\Gamma}\right) - 1}$$

Au moyen de cinq ou vingt volumes de contrôle répartis régulièrement (voir fig. 9) et d'une formulation basée sur une approche centrée pour discrétiser les flux diffusifs et advectifs, calculer la distribution de Φ en fonction de x , dans les trois cas suivants :

Cas n° 1 : $u_1 = 0.1 \text{ m/s}$ et $\delta x = 0.2 \text{ m}$, d'où $\Phi_1(x) = \frac{2.7183 - \exp(x)}{1.7183}$;

Cas n° 2 : $u_2 = 2.5 \text{ m/s}$ et $\delta x = 0.2 \text{ m}$, d'où $\Phi_2(x) = 1 + \frac{1 - \exp(15x)}{7.2 \cdot 10^{10}}$;

Cas n° 3 : $u_2 = 2.5 \text{ m/s}$ et $\delta x = 0.05 \text{ m}$ et $\Phi_2(x)$ inchangé.

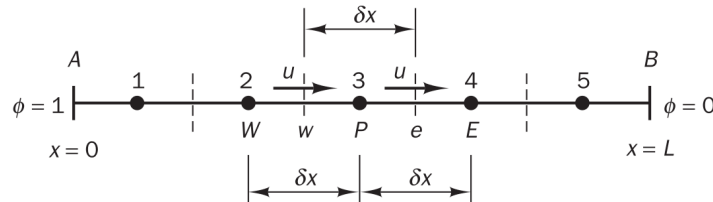


Figure 9: Discrétisation du problème : maillage régulier pour 5 VC.

Résultats Le problème se met sous la forme

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + S_C \quad \text{avec} \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P. \quad (50)$$

Les coefficients sont donnés ci-dessous pour 5 volumes de contrôle en tenant compte des conditions limites. On note $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$ et $F = \rho u$.

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C
1	0	$D - \frac{F}{2}$	$-(2D + F)$	$(2D + F)\Phi_A$
2, 3, 4	$D + \frac{F}{2}$	$D - \frac{F}{2}$	0	0
5	$D + \frac{F}{2}$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F)\Phi_B$

cas n° 1 On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $F = \rho u_1 = 0.1 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, et $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

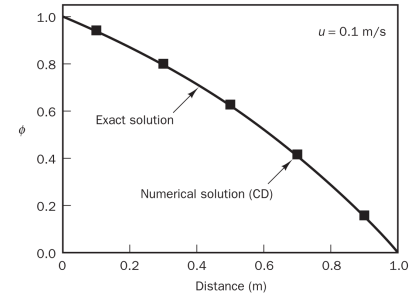
On obtient :

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C	a_P
1	0	0.45	$1.1 \Phi_A$	-1.1	1.55
2	0.55	0.45	0	0	1.0
3	0.55	0.45	0	0	1.0
4	0.55	0.45	0	0	1.0
5	0.55	0	$0.9 \Phi_B$	-0.9	1.45

soit, sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Node	Distance	Finite volume solution	Analytical solution	Difference	Percentage error
1	0.1	0.9421	0.9387	-0.003	-0.36
2	0.3	0.8006	0.7963	-0.004	-0.53
3	0.5	0.6276	0.6224	-0.005	-0.83
4	0.7	0.4163	0.4100	-0.006	-1.53
5	0.9	0.1579	0.1505	-0.007	-4.91



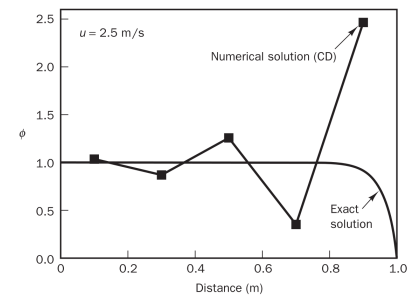
Cas 1 : comparaison des solutions numériques et exactes.

⇒ la solution numérique approche correctement la solution analytique.

cas n° 2 On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $F = \rho u_2 = 2.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, et $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C	a_P
1	0	-0.75	$3.5 \Phi_A$	-3.5	2.75
2	1.75	-0.75	0	0	1.0
3	1.75	-0.75	0	0	1.0
4	1.75	-0.75	0	0	1.0
5	1.75	0	$-1.5 \Phi_B$	1.5	0.25

Node	Distance	Finite volume solution	Analytical solution	Difference	Percentage error
1	0.1	1.0356	1.0000	-0.035	-3.56
2	0.3	0.8694	0.9999	0.131	13.05
3	0.5	1.2573	0.9999	-0.257	-25.74
4	0.7	0.3521	0.9994	0.647	64.70
5	0.9	2.4644	0.9179	-1.546	-168.48

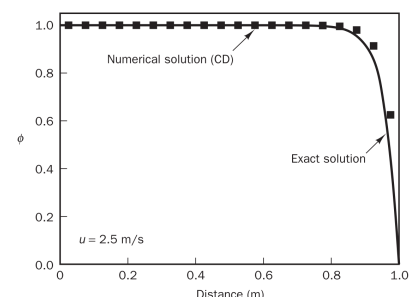


Cas 2 : comparaison des solutions numériques et exactes.

⇒ la solution numérique oscille par rapport à la solution analytique, et n'est pas bornée par les valeurs limites données pour Φ en $x = 0$ et $x = L$, ce qui n'est pas physique.

cas n° 3 On a 20 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $F = \rho u_2 = 2.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, et $D = \Gamma/\Delta x = 2.0 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$.

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C	a_P
1	0	0.75	$6.5 \Phi_A$	-6.5	7.25
2 - 19	3.25	0.75	0	0	4.0
20	3.25	0	$5 \Phi_B$	-1.5	4.75



Cas 3 : comparaison des solutions numériques et exactes.

⇒ la solution numérique approche correctement la solution analytique. Il n'y a plus d'oscillations.

En conclusion, un schéma numérique peut diverger (oscillations de la solution qui n'est plus bornée par les conditions limites données). L'augmentation du nombre de volumes de contrôle permet de remédier au problème. On peut remarquer que lorsque le rapport sans dimension F/D devient grand, des oscillations apparaissent. Il s'agit du **nombre de Péclet de maille** (pour les cas 1 de 3, on a $Pe_1 = 0.2$, $Pe_2 = 5$, et $Pe_3 = 1.25$), qui peut varier en chaque du maillage. Le nombre de Péclet compare les propriétés advectives et diffusives d'un écoulement : $Pe = F/D = \rho u \delta x / \Gamma$, avec δ_x : taille du maillage dans la direction portée par u .

3.4 Exercice : mise en œuvre en 2 dimensions

Soit Ω un domaine rectangulaire de longueur $L = 2m$ et de largeur $l = 1m$. On souhaite résoudre dans Ω l'équation stationnaire de transport par convection-diffusion de la quantité ϕ . On suppose que le coefficient de diffusion Γ est constant. Il est égal à $\Gamma_x = 0, 1 kgm^{-1}s^{-1}$ dans la direction x , et à $\Gamma_y = 0, 2 kgm^{-1}s^{-1}$ dans la direction y . L'équation de transport s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

La masse volumique du fluide est constante, égale à $\rho = 1 kg/m^3$. Le champ des vitesses (u, v) est supposé connu avec $u = 0.3m/s$ et $v = -0.5m/s$ et doit satisfaire à l'équation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

Les conditions aux limites choisies sont $\phi = 1$ en $x = 0$ et en $y = 0$, et $\phi = 0$ en $x = L$ et en $y = l$. On définit un maillage cartésien régulier, avec 4 volumes de contrôle suivant x et 3 volumes de contrôle suivant y .

1. Faire un schéma du domaine physique discrétisé. Représenter les conditions aux limites. On numérotera les volumes de contrôle suivant les indices (i, j) , avec $i \in [1, 4]$ suivant la direction x , et $j \in [1, 3]$ suivant la direction y . On notera Δx et Δy les pas du maillage suivant les directions x et y respectivement.
2. Intégrer l'équation de transport sur un volume de contrôle courant (P) de façon à introduire la vitesse d'advection ($\mathcal{F} = \rho u$) aux différentes faces du volume de contrôle.
3. Que déduit-on de l'intégration de l'équation de continuité sur ce même volume de contrôle?
4. On pourra calculer les nombres de Péclet de maille Pe_x et Pe_y .
5. Ecrire l'équation discrète en utilisant un schéma centré sur le nœud courant (P).
6. Combien d'équations seront écrites ? Donnez la forme du système matriciel obtenu, sans calculer tous les coefficients, mais en indiquant les "0" par une case vide et éléments modifiés par les conditions limites. On placera les $a_k^{(i,j)}$, avec $k = (P, E, W, N, S)$.
7. Discuter les méthodes de résolution possibles.