Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 1-2 - Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1 - Vecteurs libres, liés

i) Etudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes dans $\mathbb{R}^3$:
   1. $(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)$.
   2. $(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)$.

ii) Soit E l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ par rapport à l'addition des fonctions et la multiplication des fonctions par un scalaire. Montrer que les fonctions $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=xe^x,\ f_3(x)=e^{2x}$ forment un ensemble de vecteurs de E qui sont linéairement indépendants.

iii) Dans un espace vectoriel E sur le corps K, on considère trois vecteurs linéairement indépendants $\mathbb{R}$. v_1,v_2,v_3.
   1. Montrer que les vecteurs $v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3$ sont linéairement indépendants.
   2. Montrer que les vecteurs $v_1+v_2+v_3, v_1-v_2+v_3, v_1+v_2-v_3$ sont linéairement indépendants.

Exercice 2 - Bases

i)
   1. Montrer que les vecteurs $v_1=(0,1,1)$, $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w=(1,1,1)$ dans cette base (v_1,v_2,v_3).
   2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
   3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

ii) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

iii) On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   1. Soient D_1,D_2,D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1,D_2,D_3.
   2. Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1\cap P_2=\{0\}$. Alors $\dim E\geq 4$.

Exercice 3* (Supplémentaire) - Image et Noyau

Soit E, F et G des espaces vectoriels et f et g des applications linéaires de E dans F et de F dans G respectivement. Montrer que :

$$g\circ f=0 \leftrightarrow Im(f)\subset Ker(g)$$

Exercice 4 - Automorphisme réciproque

Soit F l'ensemble des fonctions obtenues par combinaisons linéaires des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ définies dans l'exercice 1, ii), i.e. $F = Vect\Big\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\Big\}$. F est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles de classe C^1. Sur F on définit l'application $\mathcal{L}$ qui associe à chaque fonction $f \in F$ sa dérivée f'.

1. Montrer que l'application de dérivation $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de l'espace F.
2. Montrer que $\mathcal{L}$ est bijective et donc c'est un automorphisme de F.
3. D'eterminer l'automorphisme réciproque $\mathcal{L}^{-1}$.

Exercice 5 - Injectivité et Surjectivité

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + 3t, x - y - z + t, x - 3y - 3z - t)$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. Déterminer le système de vecteurs libres qui génère chacun de ces ensembles. Préciser leur dimensions respectives.
2. f est-elle injective ? Surjective ?

Solution :

1. $Ker(f) = Vect\Big\{(2, 1, 0, -1), (2, 0, 1, -1)\Big\}$, $Im(f) = Vect\Big\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\Big\}$, $dim(Ker(f)) = dim(Im(f)) = 2$.
2. f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 6* (Supplémentaire) - Produits scalaire, vectoriel

Soit $E = \mathbb{R}^3$ l'espace euclidien et $<, >$ et $\wedge$ le produit scalaire, respectivement le produit vectoriel. a et b désignent deux vecteurs de E et f l'application de E dans lui-même, définie par :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) =< a, x > a + b \wedge x$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. A quelle condition sur a et b a-t-on $rang(f) \leq 2$?
3. Dans le cas où $< a, b >= 1$, montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

Solution :

1. Vérification facile.
2. On utilise le théorème du rang pour déduire que $Ker(f) \neq \emptyset$. En prenant $x_0 \in Kerf(f)$, $x_0 \neq 0$, on trouve que x_0 est orthogonal à a et colinéaire à b, d'où la condition d'orthogonalité sur a et b.
3. On doit résoudre l'équation $f(x) = y$ pour déterminer $f^{-1}(y)$ tel que $f^{-1}(y) = x$. Pour cela on fait le produit vectoriel de l'égalité $f(x) = y$ avec a et ensuite le produit scalaire de la même égalité avec b. En combinant les deux on trouve $x =< y, b > b + y \wedge a = f^{-1}(y)$.

Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 3-4 - Matrices, opérations, déterminants, systèmes linéaires

Exercice 0 - Application linéaire

Soit $F = Vect\left\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille de générateurs $\{f_1 = e^x, f_2 = xe^x, f_3 = e^{2x}\}$. Sur F on définit l'application $\mathcal{L}$ qui associe à chaque fonction $f \in F$ sa dérivée f'. Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire et écrivez la matrice associée.

Exercice 1 - Application linéaire et changement de base

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a ainsi $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Soit A la matrice de f dans la base e, que l'on note $A = Mat(f, e, e)$. On rappelle que chaque colonne de A est composée des coordonnées dans la base d'arrivée e de l'image par f d'un vecteur de la base de départ e. Les coefficients de A sont donc $a_{i,j} = f(e_j)_i$ où $f(e_j)_i$ est la i^{eme} coordonnée du vecteur $f(e_j)$ dans la base e, de sorte que

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1)_1 & f(e_2)_1 & f(e_3)_1 \\ f(e_1)_2 & f(e_2)_2 & f(e_3)_2 \\ f(e_1)_3 & f(e_2)_3 & f(e_3)_3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   i) Montrer que Ker$A$ =Vect$((1, 1, 1))$.

   ii) En déduire rg$A$.

   iii) Montrer que ImA =Vect$((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

2. Soit $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une famille de vecteurs telle que $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_1 - e_3$.

   i) Exprimer e'_1, e'_2 et e'_3 dans la base e, sous forme de matrice colonne.

   ii) Montrer que e' est une famille libre. Pour cela, on montrera que si $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$ (où α, β et γ sont des réels), alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   iii) En déduire que $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Dans la suite, on cherche à représenter l'endomorphisme f dans la base e'.

   i) A l'aide de la matrice A, calculer $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ dans la base e. Que dire de e'_1 ?

   ii) Exprimer $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ dans la base e'. Pour cela, on cherchera à exprimer les $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3.

   iii) En déduire la matrice $B = Mat(f, e', e')$ de f dans la base e'.

4. Donner la relation entre A et B.

Exercice 2* (Supplémentaire) - Projecteurs

Soit a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On considère l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui à tout x de $\mathbb{R}^3$ associe $\langle u, x\rangle\, u$, avec $u = (a, b, c)$. On pose

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad Q = I - P \quad (I = \text{ matrice-unité})$$

1. Montrer que $P = Mat\,(p, e, e)$.
2. Déterminer $kerP$ et ImP dans $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
4. Caractériser géométriquement P et Q dans $\mathbb{R}^3$ supposé orthonormé, (a, b, c) étant les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$.

Solution :

2. $\text{Ker}P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus ax + by + cz = 0\right\}$, $\quad \text{Im}P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus bx = ay; cy = bz\right\}$.
3. $P^2 = P, \qquad PQ = QP = 0, \qquad Q^2 = Q.$

Exercice 3 - Matrice d'inertie d'une particule

On note $E = \mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel des vecteurs à trois dimensions.

Soit une particule de masse m dont la position est donnée par un point P. L'opérateur d'inertie $\mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A})$ de la particule en un point A est l'application de E dans lui-même définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A}) &: E \to E \\ \vec{u} &\mapsto \mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A})[\vec{u}] = -m\overrightarrow{\text{AP}} \wedge (\overrightarrow{\text{AP}} \wedge \vec{u}) \end{aligned}$$

On notera $\vec{r}$ le vecteur position de la particule relativement à A (càd $\vec{r} = \overrightarrow{\text{AP}}$).

1. Montrer que l'application $\mathcal{L}_{\vec{r}} :\ E \to E$, $\vec{u} \mapsto \mathcal{L}_{\vec{r}}[\vec{u}] = \vec{r} \wedge \vec{u}$ est linéaire.

2. Soit $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{R}^3$. On note $L = \text{Mat}(\mathcal{L}_{\vec{r}}, B)$ la matrice de $\mathcal{L}_{\vec{r}}$ et (x, y, z) les coordonnées de $\vec{r}$ dans la base B.

Déterminer les coefficients de L. Que remarquez-vous ?

3. Identifier le noyau et l'image de $\mathcal{L}_{\vec{r}}$ lorsque $\vec{r} \neq \vec{0}$.

4. L'application composée $\mathcal{L}_{\vec{r}} \circ \mathcal{L}_{\vec{r}}$ est-elle linéaire ? Exprimer le vecteur $(\mathcal{L}_{\vec{r}} \circ \mathcal{L}_{\vec{r}})[\vec{u}]$ à l'aide du produit vectoriel $\wedge$. En déduire la relation entre $\mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A})$ et $\mathcal{L}_{\vec{r}} \circ \mathcal{L}_{\vec{r}}$.

5. Exprimer la matrice d'inertie $J = \text{Mat}(\mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A}), B)$ de la particule (c'est-à-dire la matrice de l'opérateur d'inertie $\mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A})$ dans la base B). Que remarquez-vous ?

6. Identifier le noyau et l'image de $\mathcal{J}_{\text{P}}(\text{A})$ lorsque $\vec{r} = \overrightarrow{\text{AP}} \neq \vec{0}$.

On rappelle que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de deux vecteurs se calcule suivant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

où u_x, u_y et u_z (resp. v_x, v_y et v_z) désignent les coordonnées de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) dans la base B.

Exercice 4 - Matrices de rotation

1. On donne $A = \begin{pmatrix} cos(2\theta) & sin(2\theta) \\ sin(2\theta) & -cos(2\theta) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   Calculer A^n et B^n pour $n \in \mathbb{Z}$. Donner une interprétation géométrique du résultat.

2. *(Supplémentaire) Calculer A^p en fonction de A et I_2 sachant que :
   $A^3 + 3A^2 + 3A + I_2 = 0$.

   Solution :

   1. $A^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n \text{ est paire} \\ A & \text{si } n \text{ est impaire}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad B^n = \begin{pmatrix} cos(n\theta) & sin(n\theta) \\ -sin(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$,
   2. $A^p = (-1)^p \left[\frac{p(p-1)}{2} A^2 + (p^2 - 2p)A + \frac{p^2-3p+2}{2} I_2 \right]$.

Exercice 5 - Déterminants

Soit a, b, c et d réels. Calculer les déterminants suivants :

i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ ii)* $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ iii)* $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Note : Les cas notés avec "*" sont supplémentaires.

Solution :

i) $(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$ ii) $(b-a)^2((b+a)^2-4c^2)$ iii) $(d-c)(c-b)(b-a)a$

Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 5-6 - Matrices, diagonalisation, valeurs propres, applications

Diagonalisation des matrices

Exercice 1

Soit $M(\mathcal{L})$ la matrice de l'application de dérivation écrite dans la base $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, trouvée dans l'exercice 0 du TD précédent (Exercice 0, TD 3-4). $M(\mathcal{L})$ est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de la matrice de l'application réciproque $\mathcal{L}^{-1}$?

Exercice 2

Soient les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont-elles diagonalisables ?
2. Si oui, déterminer les matrices A'_i diagonales semblables à A_i. Dans chaque cas, on déterminera la matrice de passage P_i.

Solution :

$$A'_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème spectral

$$A'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Cisaillement pur d'un solide élastique

En physique des matériaux déformables (élastiques), le cisaillement imposé à un solide (par exemple un cube) est un cas classique. On se propose ici de montrer que dans un cas très simple, les techniques de diagonalisation sont utiles pour des études physiques. Dans le cadre de cette étude, si le cisaillement est imposé selon $\boldsymbol{e_x}$, la matrice Gradient de la Transformation s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k(t)$ est une fonction régulière et positive du temps responsable du cisaillement.

1. Par définition, on pose $J = det(F)$ et on dit que la transformation est isovolume localement si $J = 1$. Que peut-on dire de la transformation ?
2. On définit la matrice de dilatation de Cauchy par $K = F^T * F$ où F^T est la transposée de F. Calculer K.
3. Donner les valeurs propres de K et écrire K dans sa base de vecteurs propres (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'importance).
4. Déterminer les vecteurs propres associés (application numérique pour $k = 1$) et esquisser la transformation.

Exercice 4 - Matrice à paramètres* (Supplémentaire)

On considère la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Le but de l'exercice est de trouver à quelle(s) condition(s) portant sur les paramètres (a, b, c) la matrice B est diagonalisable.

1. Ecrire le polynôme caractéristique de B. En déduire les deux valeurs propres de B et leur ordre de multiplicité.
2. En veillant à ce que la dimension des sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres de B vérifient la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, donner les conditions que doivent vérifier (a, b, c).

Exercice 5 *(Supplémentaire)

On considère la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. On cherche dans un premier temps à calculer le polynôme caractéristique de C. Pour ce faire, montrer que $det(C - XI)$ peut se mettre sous la forme $(X + 5) * det(D)$ où D est une matrice à préciser.
2. En effectuant une opération astucieuse, montrer que $det(C - XI)$ peut se mettre sous la forme
$$(X + 5) \begin{pmatrix} -1 & \alpha(X) & 0 \\ 0 & \beta(X) & \delta(X) \\ 0 & \gamma(X) & \beta(X) \end{pmatrix}$$
où α, β, γ et δ sont des fonctions de X à préciser.
3. En déduire une forme simple du polynôme caractéristique de C. C est-elle diagonalisable si elle est réelle ? Complexe ?