Signaux et Systèmes
Cours n°5

Mohamed CHETOUANI
Professeur des Universités
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
Sorbonne Université

mohamed.chetouani@sorbonne-universite.fr

Plan

- Rappels: Transformée de Laplace
- Système du 1er Ordre

Introduction

- La transformée de Laplace d'une fonction f(t) causale (définie pour t>0 et nulle pour t<0) est une fonction F(p) définie par l'expression suivante:

$$F(p) = \mathcal{TL}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

- L'existence de F(p) est sujette à la convergence de cette intégrale.
- Transformation bijective:

$$f(t) = \mathcal{TL}^{-1}[F(p)]$$

Introduction

- Exemple
- Calcul de la transformée de Laplace de f(t)=e^{-t} u(t) avec u(t) fonction échelon

$$F(p) = \mathcal{TL}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+1)t}dt$$

$$= -\frac{1}{p+1}\left[e^{-(p+1)t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{p+1}$$

Propriétés

- Linéarité
  - Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ qui ont respectivement pour transformée de Laplace $F_1(p)$ et $F_2(p)$.
  - La transformée de Laplace de la combinaison linéaire de ces deux fonctions est:

$$af_1(t) + bf_2(t) \Rightarrow aF_1(p) + bF_2(p)$$

Propriétés

- Facteur d'échelle $\quad f(at) \Rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
  - Exemple:
  - Calcul de la transformée de Laplace de $f(t)=e^{-at}\,u(t)$:

$$F(p) = \mathcal{TL}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{p+a}\left[e^{-(p+a)t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{p+a}$$

$$\frac{1}{p+a} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{p}{a}+1}$$

Propriétés

- Translations
  - Retard: $f(t-\tau) \Rightarrow e^{-\tau p}F(p)$
  - Décalage dans le plan de Laplace:

$$F(p+\omega_0) \Rightarrow f(t)e^{-\omega_0 t}$$

Propriétés

- Dérivation en temps

$$\frac{df}{dt} \Rightarrow pF(p) - f(0^+)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Rightarrow p(pF(p) - f(0^+)) - f'(0^+)$$

- Avec $f(0^+)$ valeur initiale de f(t) et $f'(0^+)$ valeur initiale de f'(t)
- Dérivation dans le domaine de Laplace

$$\frac{dF}{dp} \Rightarrow tf(t)$$

Propriétés

- Intégration

La transformée de $g(t) = \int_0^t f(t')dt'$ est donnée par:

$$\mathcal{TL}[g(t)] = \mathcal{TL}\left[\int_0^t f(t')dt'\right]$$
$$= \frac{1}{p}F(p)$$

- Remarque:
- Si les conditions initiales sont nulles, dériver en temps revient à multiplier par p en Laplace. De la même manière, intégrer en temps revient à diviser par p en Laplace.

Propriétés

- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

Propriétés

- Produit de convolution:

- Le produit de convolution est la relation qui lie l'entrée x(t) d'un système à sa sortie y(t) :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- La transformée de convolution est (cf. démonstration du théorème de Plancherel, transformée de Fourier) :

$$x(t) * h(t) \Rightarrow X(p).H(p)$$

Propriétés

- Produit de convolution:

- Modélisation de systèmes

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)=X(f)\ H(f)$$

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p)=X(p)\ H(p)$$

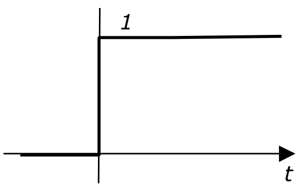
Transformée de Laplace

- Quelques transformées

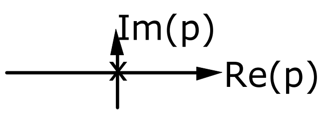
$x_{(t)}$ pour $t > 0$	$X_{(p)}$	$x_{(t)}$ pour $t > 0$	$X_{(p)}$
$\delta_{(t)}$ Dirac	1	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1+Tp}$
$u_{(t)}=H_{(t)}$: Heaviside Echelon unitaire	$\frac{1}{p}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace

- Pôles
- Quelques cas:

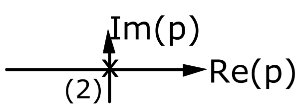


$$\frac{1}{p}$$



t u(t)

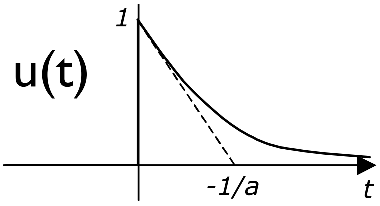
$$\frac{1}{p^2}$$



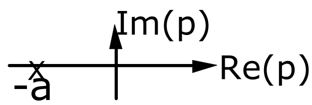
Transformée de Laplace

- Pôles
- Quelques cas:

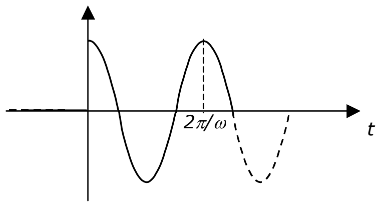
e^{-at} u(t)



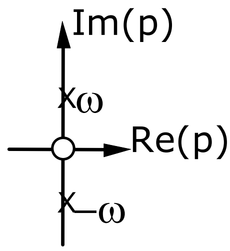
$$\frac{1}{p+a}$$



cos(ωt) u(t)



$$\frac{p}{p^2+\omega^2}$$



Transformée de Laplace inverse

Les fonctions F(p) sont généralement des fonctions rationnelles dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur:

$$F(p) = \frac{b_n p^m + b_{m-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

avec n≥m

Transformée de Laplace inverse

Le calcul de la transformée inverse consiste à décomposer F(p) en éléments simples:

• On cherche alors les zéros (racines du numérateur) et les pôles (les racines du dénominateur) de manière à écrire F(p) sous la forme suivante:

$$F(p) = \frac{(p - z_1)(p - z_2)...}{(p - p_1)(p - p_2)\dots}$$

•Ensuite, on décompose en éléments simples:

$$F(p) = \frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_2)} + \dots$$

•Après la décomposition, on utilise le plus souvent une table de transformée ainsi que les différentes propriétés (retard, translations, etc. ...) pour retrouver les fonctions originales correspondant à chaque élément.

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- Cas où les pôles sont simples:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+5p+6} = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}$$
$$= \frac{A}{(p+2)} + \frac{B}{(p+3)}$$

- On détermine A et B en multipliant F(p) par le monôme du pôle: F(p) (p-pi) correspondant et en p=pi

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- Valeur de A? $(p+2)F(p)|_{p=-2} = A + \frac{(p+2)B}{p+3}|_{p=-2}$
- Le résultat de la décomposition est donc:

$$F(p) = \frac{-1}{(p+2)} + \frac{2}{(p+3)}$$

- En identifiant les termes aux transformées connues, on obtient:

$$f(t) = \left[-e^{-2t} + 2e^{-3t}\right] u(t)$$

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- Cas où les pôles sont multiples:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p} = \frac{p+1}{p(p+2)^2}$$
$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+2)^2}$$

- Pour déterminer A, B et C, on procède de la manière suivante:
  - A: $pF(p)|_{p=0}$
  - B: $(p+2)^2F(p)|_{p=-2}$
  - C: $\lim_{p\to\infty}(p+2)F(p)$

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- On obtient la décomposition suivante:

$$F(p) = \frac{0,25}{p} + \frac{-0,25}{(p+2)} + \frac{0,5}{(p+2)^2}$$

- La transformée de Laplace inverse est donc:

$$f(t) = \left[0,25 - 0,25e^{-2t} + 0,5te^{-2t}\right] u(t)$$

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- Cas où les pôles sont complexes:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{10}{p(p^2+2p+10)} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+10} \end{aligned}$$

- La décomposition en éléments simples est réalisée de la manière suivante:
  - A: $pF(p)|_{p=0}$
  - B: $lim_{p\to\infty}pF(p)$
  - C: On prend une valeur particulière de p (ex. $p = 1$)

Transformée de Laplace inverse

- Exemple:
- On trouve:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+2}{p^2+2p+10}$$

- La transformée de Laplace inverse (cf. table des transformées) est donc:

$$f(t) = \left[1 - \cos(3t)e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t)\right]u(t)$$

Application

- Exemple:
- Connaissant l'image $I_2(p)$ de $i_2(t)$

$$I_2(p) = \frac{p+2}{p^2+7p+12} = \frac{p+2}{(p+3)(p+4)}$$

- On désire calculer $i_2(0+)$, $i_2(\infty)$ et $i_2(t)$

Application

- Exemple:
- Valeur initiale et valeur finale

$$i_2(O+) = pI_2(p)|_{p\to\infty} = 1A$$

$$i_2(\infty) = pI_2(p)|_{p\to 0} = 0A$$

- Recherche des pôles:

$$p_1 = -3\left[\frac{1}{sec}\right] \quad \text{et} \quad p_1 = -4\left[\frac{1}{sec}\right]$$

Application

- Exemple:
- Evolution temporelle
- Décomposition en éléments simples:

$$I_2(p) = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+4}$$

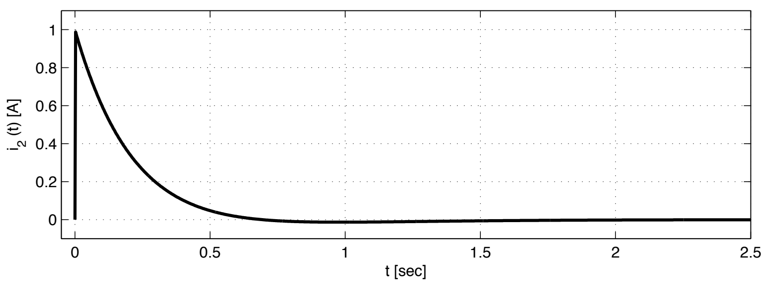
- Identification de la TL inverse:

$$i_2(t) = [-1e^{-3t} + 2e^{-4t}]u(t)$$

Application

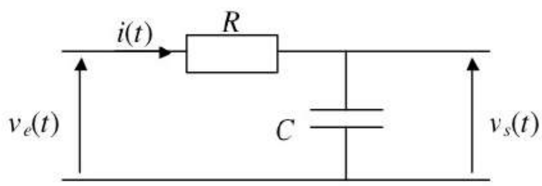
- Exemple:
- Evolution temporelle

$$i_2(t) = [-1e^{-3t} + 2e^{-4t}]u(t)$$



Intérêt

- Modélisation symbolique de systèmes



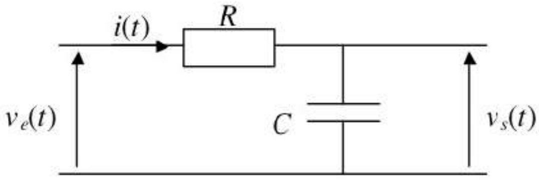
$$V_s(t) = \frac{q(t)}{C}$$

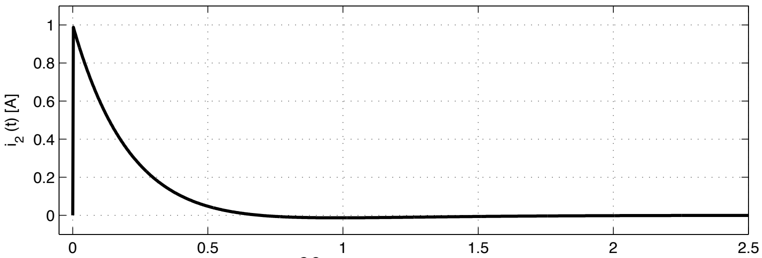
$$V_e(t) = RC\frac{\mathrm{d}V_s(t)}{dt} + V_s(t)$$

$$V_s(p) = \frac{1}{1+RCp}V_e(p) = H(p)V_e(p)$$

Intérêt

- Etude des composantes transitoires





Système du 1er Ordre

- Equation différentielle:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ke(t)$$

- Fonction de transfert (CI=0):

Gain statique

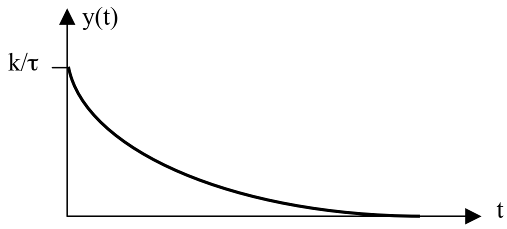
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Constante de temps

Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

- Réponse impulsionnelle

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$



- Par fonction de transfert:

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

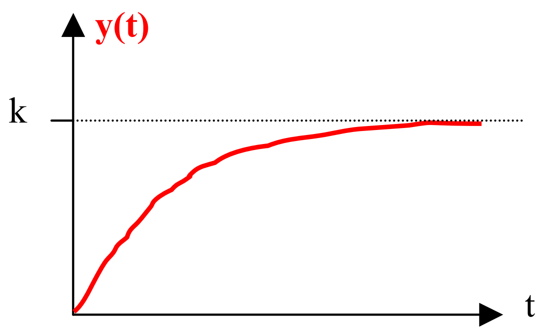
- Réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} \times \frac{1}{p}$$

- TL inverse

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$



Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

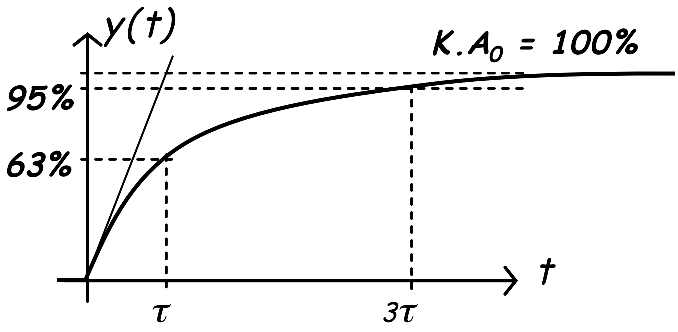
- Réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

- Quelques valeurs:

Temps de réponse à 5%

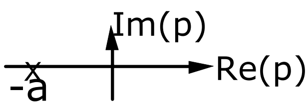


Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

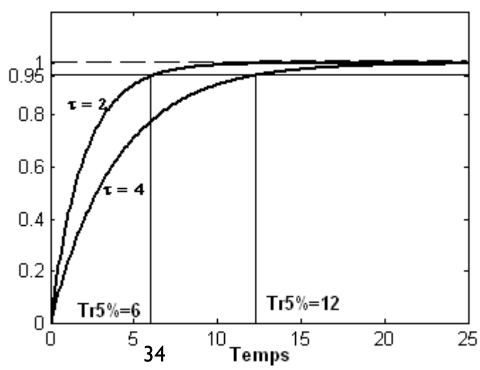
- Relation constante de temps et pôle

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\frac{1}{p + a}$$



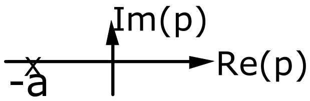
- Effets du pôle sur le temps de réponse

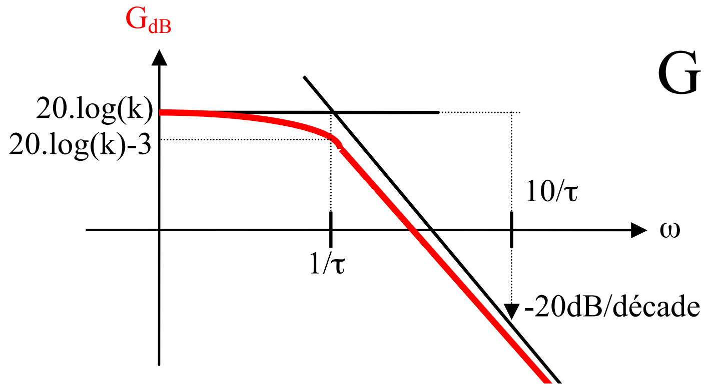


Système du 1er Ordre: Réponse fréquentielle

- Diagramme de Bode

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p} \qquad \frac{1}{p+a}$$





$$G(j.\omega) = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega}$$

$$\boxed{G_{dB} = 20.\log_{10}\frac{k}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}}}$$

Résumé

- Rappels: Transformée de Laplace
- Exploitation pour l'analyse de système