Sorbonne Université **Année universitaire 2017-2018**

Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 1er Juin 2018 - Session1

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un matrice carrée A soit inversible ? Même question si A est diagonalisable.
2. Donner la définition d'une application linéaire. Définissez une valeur propre et un vecteur propre pour une application linéaire.
3. Enoncer le théorème du rang.
4. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donner le développement en série entière de $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, et précisez son rayon de convergence.
5. **Bonus :** Donner l'expression de la série de Fourier $SF(f)$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, de période 2, de classe $\mathcal{C}^1$ sur la période principale $[-1, 1]$. Préciser les coefficients de la série a_0, a_n, b_n, $\forall n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit f una application linéaire , $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, représentée dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $C = (u_1, u_2, u_3)$, avec $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que C est une base.
2. Déterminer la matrice de passage de B à C et son inverse.
3. Déterminer la matrice de f dans la base C.(Indication : On peut calculer cette matrice directement, sans utiliser la matrice de passage de la base de B à la base C.)
4. On note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Calculer la matrice de f^n dans la base C pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En utilisant le changement de base calculer f^n dans la base B.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $y(x)$ réelle, $x \in [0, \infty[$:

$$x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = x^3(1+x)^2 \tag{1}$$

1. On considère d'abord l'équation homogène associée à (1).

$$x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0 \tag{2}$$

2. Trouver une solution $y_1(x)$ évidente de l'équation (2).
   Indication : On cherchera une solution polynomiale.
3. Trouver une deuxième solution de la forme $y_2(x) = y_1(x)u(x)$. Vérifiez que (y_1, y_2) forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (2).
4. Donner la solution générale de l'équation homogène (2).
5. Trouver une solution particulière de l'équation non homogène (1).
6. Trouver la solution pour (1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (continue, dérivable, avec la dérivée continue).
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$f'(x) = 2xf(x) + 1 \tag{3}$$

4. **Bonus :** Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5. On cherche maintenant une solution de l'équation (3), développable en série entière, du type $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   a) Etablir une relation de récurrence pour les coefficients a_n.
   b) Sachant que $y(x)$ vérifie la même condition initiale $y(0) = 0$, déterminer a_0 et a_1.
   c) Trouver l'expression de a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   d) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Justifier votre réponse en précisant le critère utilisé.
6. Justifier que $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est le développement en série entière de f (on s'appuyera sur un théorème du cours).