EDP de la Mécanique - 2
Méthodes variationnelles et spectrales

I) Introduction

Dans le cadre de ce cours nous allons traiter el.pdv mathématique des EDP du second ordre, du type :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

avec a, b, c = constantes , $u = u(x,y)$ la fonction recherchée

On rappelle que l'équation générale (1) est :

- <u>elliptique</u> si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; <u>exemple</u> : l'équation de Laplace ou Poisson :

$$-\Delta u = f \iff -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

- <u>parabolique</u> si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; exemple l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad \text{(en 1D en espace)} \quad u = u(x,t)$$

$$\begin{cases} a = -k \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

- <u>hyperbolique</u> si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; exemple : l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad \text{(en 1D en espace)}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -c^2 \end{cases}$$

Dans la plupart des cas, on ne sait pas résoudre analytiquement les équations précédentes. Ce que l'on peut envisager est de résoudre numériquement et de trouver des solutions approchées. Mais avant d'envisager des simulations il est important d'étudier les propriétés mathématiques du problème et donc analyser si le problème est bien posé.

I.1) Notion de problème bien posé

Si l'on note f les données d'un problème (second membre, données initiales, données aux limites), le problème peut être mis sous la forme :

$$A(u) = f \qquad (2)$$

où u est la solution recherchée et A un opérateur qui tient compte de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u, ainsi que des conditions initiales et aux limites.

Le problème est bien posé au sens d'Hadamard si :

- pour toute donnée f, il existe une solution u (existence)
- cette solution est unique (unicité)
- u dépend continûment des données f, i.e. si $f^n \to f$ alors u^n (solution associée à f^n) $\to u$ (solution associée à f)

La dernière condition est très importante dans la perspective d'une approximation numérique : faire une résolution numérique revient à perturber les données en les discrétisant et à résoudre avec ces données perturbées ; si des petites perturbations des données engendrent des grandes perturbations de la solution, alors la solution numérique ne sera pas proche de la solution exacte. Donc, avant toute approche numérique d'un problème de mécanique, il faut s'assurer qu'il s'agit d'un problème bien posé.

I2) les difficultés de l'analyse mathématique.

Sur le plan mathématique, le problème s'écrit globalement sous la forme abstraite suivante :

$$\left\{ \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \mathcal{A}(u) = f \right. \qquad (3)$$

avec V = espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions (espace fonctionnel)

$\mathcal{A}$ = opérateur qui sera ici linéaire, $\mathcal{A} : V \to D$

D = espace vectoriel, dont f fait partie

Le problème (3) ressemble à un système linéaire, mais présente des différences majeures :

- V est un espace de dimension infinie (espace fonctionnel)
- l'opérateur $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel qui n'est pas continu pour les topologies classiques.

On doit donc répondre aux questions suivantes :

1) Quel doit être l'espace D des données pour qu'il existe une solution au problème ? (régularité des données)
2) Quel doit être l'espace V dans lequel on cherche la solution u ? (régularité de u)
3) Quelles normes (topologie) doit-on choisir pour ces espace pour avoir la continuité de u par rapport aux données ?

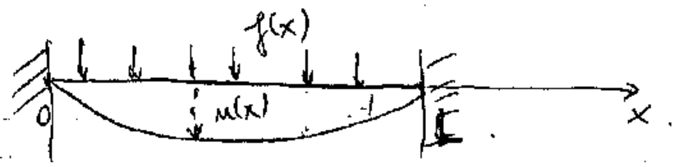
Obs : La notion de pb. bien posé n'est pas intrinsèque. Elle est liée au choix d'espaces et de normes. Un changement de espaces ou des normes peut entraîner des propriétés d'existence et unicité différentes.

Pour établir des résultats d'existence et unicité nous allons transformer le problème de départ en un problème équivalent selon l'approche dite variationnelle, et nous allons construire le cadre fonctionnel où le problème équivalent (variationnel) est bien posé.

- Démarche à suivre sur un exemple type

Qu'appelle-t-on formulation variationnelle d'un problème ?

Pour répondre à cette question, prenons le problème du fil élastique tendu à ses deux extrémités, qui se déforme sous l'action d'une force transverse (typiquement, son poids). Soit $u(x)$ le déplacement transverse du fil ; $u(x)$ est solution de



$$(P.C)\quad \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), & x \in]0,L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathbb{V}$ l'espace des champs cinématiquement admissibles

$\mathbb{V} = \mathcal{U}_{ad} = \{ v(x),\ t.q\ v(x)$ réguliers et $v(0) = v(L) = 0 \}$

(v vérifient les conditions aux limites cinématiques)

et soit u la solution du problème continu (P.C). On a $u \in \mathbb{V}$.

On multiplie l'équation du (P.C) par v et on intègre sur $]0,L[$

$$\int_0^L -\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, v(x)\, dx \quad , (\forall)\, v \in \mathbb{V}.$$

soit en intégrant par parties :

$$\int_0^L -\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x)\, dx = \underbrace{\left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x)\right]_0^L}_{0 \text{ car } v(0)=v(L)=0} + \int_0^L \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx$$

$$= \int_0^L \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx = \int_0^L f(x) v(x)\, dx.$$

De sorte que u solution du problème local, continu vérifie

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ tel que} \\ \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^L f v\,dx \;, (\forall) v \in \mathbb{V} \end{cases}$$

Si on pose $a(u,v) = \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$.

et $l(v) = \int_0^L f(x) v(x)\,dx$.

alors

$a : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire

$l : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ est une application linéaire

et u est solution du problème variationnel :

$$\boxed{(PV)_{bis} \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v) \;, (\forall) v \in \mathbb{V} \end{cases}}$$

Réciproquement, si u est solution du problème variationnel (PV), en remontant les calculs on obtient :

$$u \in \mathbb{V} \text{ et } \int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\right) v(x)\,dx = 0 \;, \forall v \in \mathbb{V}.$$

$$\overset{\text{formellement}}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), & \forall x \in]0,L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

On a donc équivalence entre la formulation du problème continu, satisfaite en tout point (on l'appelle aussi formulation forte) et la formulation variationnelle du problème (ou faible).

<u>Remarque</u> : L'ordre de dérivation n'est pas le même dans les deux formulations

Interprétation mécanique

La formulation variationnelle exprime le principe des travaux virtuels, traduisant l'équilibre du système dpdt. énergétique :

$\int_0^L f(x)v(x)\,dx$ = travail des efforts extérieurs dans un déplacement virtuel v (cinématiquement admissibles)

$\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$ = travail des efforts intérieurs

Une première partie du cours va consister à établir un résultat mathématique d'∃! pour le problème variationnel : théorème (lemme) de <u>Lax-Milgram</u> ; son application nécessitera de préciser le cadre fonctionnel de l'espace V donc nous allons présenter des notions de topologie. (espaces de Banach, Hilbert)

<u>Remarque</u> : Dans l'exemple précédent, le problème variationnel est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$(P.M.)\ \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ t.q.} \\ I(u) \le I(v),\ \forall v \in V \end{cases} \iff \begin{cases} u \in V \\ I(u) = \min_{v\in V} I(v) \end{cases}$$

avec $$I(v) = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f(x)v(x)\,dx.$$

<u>Justification</u> :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit u solution de (P.V). On construit $I(v+u)$:

$$I(v+u) = I(u) + \underbrace{\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - f(x)v(x)\right)dx}_{\substack{\parallel \\ 0 \text{ car } u \text{ solution de (PV)}}} + \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx,\ \forall v \in V$$

$\Rightarrow\ I(v+u) \ge I(u),\ \forall v \in V$

V étant un espace vectoriel $\Rightarrow I(w) \geq I(u),\ (\forall) w \in V$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si u est solution du pb. de minimisation alors on a :

$$f(\lambda) = I(u+\lambda v) = I(u) + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^L \frac{d^2v}{dx^2}\,dx + \lambda\int_0^L\left(\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - f(x)v(x)\right)dx$$
$$\geq I(u) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\int_0^L \frac{d^2v}{dx^2}\,dx + \lambda\int_0^L\left(\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - f(x)v(x)\right)dx \geq 0 \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\int_0^L\left(\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx} - f(x)v(x)\right)dx\right]^2 \leq 0.$$

d'où : $\displaystyle\int_0^L \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in V$

<u>Interprétation mécanique</u> :

Le problème de minimisation ou d'optimisation est un problème de minimisation de l'énergie :

$\displaystyle\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$ = énergie de déformation associée au champ de déplacement réel u

$\displaystyle\int_0^L -f(x)u(x)\,dx$ = énergie potentielle

$I(u)$ = énergie totale.

Parmi tous les champs admissibles, la solution u minimise l'énergie totale.

Le résultat mathématique pour étudier un tel problème est le <u>théorème de Stampacchia</u>.

Une fois acquise l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites par application de Lax-Milgram, Stampacchia, nous cherchons à étudier des propriétés