Examen
Partie Mécanique des Fluides

Jeudi 10 janvier 2019 – Durée : **3h**
sans document ni appareil électronique

1 Contrôle de couche limite

Nous avons mis en évidence qu'au sein d'un écoulement à grand nombre de Reynolds (noté Re) autour d'une plaque une couche limite visqueuse laminaire s'établit le long de la plaque. Or cette couche limite laminaire se déstabilise et devient turbulente au-delà de $\mathrm{Re} \simeq 5 \times 10^5$, ce qui affecte fortement l'écoulement et augmente notablement la force de traînée subie par la plaque. Dans le contexte de l'aéronautique, il est crucial de repousser à des valeurs plus élevées de Re cette transition laminaire-turbulent. Le but de ce problème est d'étudier une technique de stabilisation de la couche limite visqueuse par aspiration. Dans un premier temps, vous allez ré-établir les propriétés de la couche limite visqueuse se développant le long d'une plaque plane à grand nombre de Reynolds. Dans un second temps, vous étudierez l'effet sur l'écoulement d'une aspiration du fluide à travers la plaque.

1.1 Ecoulement à $\mathrm{Re} \gg 1$ le long d'une plaque plane

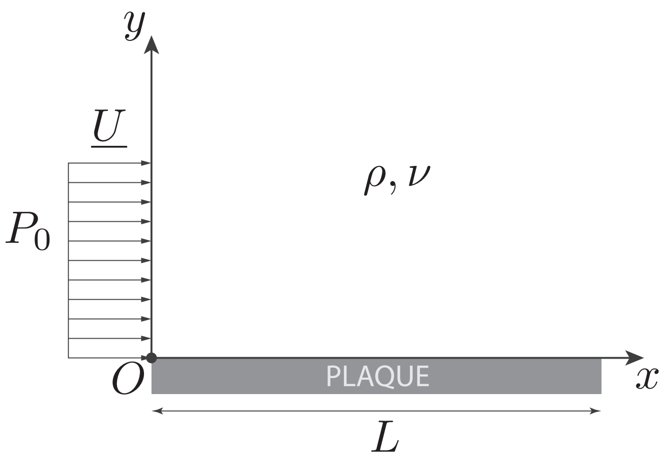

FIGURE 1 – Géométrie de l'écoulement autour d'une plaque plane.

On considère une plaque plane rectangulaire d'épaisseur négligeable qui se déplace à vitesse constante U avec un angle d'incidence nul dans un fluide homogène au repos de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν. Dans le référentiel de la plaque, l'écoulement incident sur la plaque est donc stationnaire, parallèle et homogène de vitesse U et de pression P_0, voir la figure 1.

On suppose l'écoulement isovolume, bidimensionnel plan et stationnaire. En utilisant les coordonnées cartésiennes associées au repère orthonormé $(O,\ \underline{e}_x,\ \underline{e}_y)$, le champ de vitesse du fluide s'écrit $\underline{u} = u(x,y)\ \underline{e}_x + v(x,y)\ \underline{e}_y$ et le champ de pression $p(x,y)$. L'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & \text{(2a)} \\[2ex] u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) & \text{(2b)} \end{cases}$$

Le domaine d'étude est défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L & \text{(3a)} \\ 0 \leq y \leq L & \text{(3b)} \end{cases}$$

1. La plaque est imperméable et le fluide au contact de la plaque adhère à la plaque par viscosité. Ecrivez les condition imposées à u et v le long de la plaque.

Solution: 1 point

$$u(x, y = 0) = 0\ \forall x\ /\ 0 \leq x \leq L$$
$$v(x, y = 0) = 0\ \forall x\ /\ 0 \leq x \leq L$$

2. Donnez les expressions de u, v et de p à la verticale du bord d'attaque de la plaque, c'est-à-dire le long du segment défini par $\{x = 0,\ 0 < y \leq L\}$.

Solution: 1,5 point

$$u(x = 0, y) = U\ \forall y\ /\ 0 < y \leq L$$
$$v(x = 0, y) = 0\ \forall y\ /\ 0 < y \leq L$$
$$p(x = 0, y) = P_0\ \forall y\ /\ 0 < y \leq L$$

0,5 point par égalité

On considère la situation correspondant à $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$, où L est la corde de la plaque, voir la figure 1. Dans ce régime, l'observation indique qu'à une distance de l'ordre de L l'écoulement n'est pas perturbé par la plaque, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} \underline{u}(x, y = L) = \underline{U}\ \ \forall x\ /\ 0 \leq x \leq L & \text{(4a)} \\ p(x, y = L) = P_0\ \forall x\ /\ 0 \leq x \leq L & \text{(4b)} \end{cases}$$

1.1.1 Adimensionnement du problème à l'échelle de la plaque

Pour adimensionner les équations (1) et (2), vous noterez

— $\bar{z}$ la partie analytique de z, z pouvant être x, y, u, v ou p,

— V l'échelle de v et δp l'échelle de p.

3. Définissez les adimensionnements de x, y, u, v et p.

Solution: 2,5 points

$$\begin{aligned}
x &= L\,\bar{x},\ \bar{x} \sim 1 \\
y &= L\,\bar{y},\ \bar{y} \sim 1 \\
u &= U\,\bar{u},\ \bar{u} \sim 1 \\
v &= V\,\bar{v},\ \bar{v} \sim 1 \\
p &= P_0 + \delta p\,\bar{p},\ \bar{p} \sim 1
\end{aligned}$$

0,5 point par égalité

4. Adimensionnez l'équation (1) et justifiez brièvement pourquoi $V \sim U$. Dans la suite, vous poserez $\boxed{V = U}$.

Solution: 2 points

$$\frac{U}{L}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{L}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \ (\textbf{1 point})$$

Principe de Non Simplification Abusive : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il convient de ne pas trop simplifier sa description donc de supposer qu'aucun terme dans l'équation ne domine a priori : $U \sim V$ (**1 point**).

5. Adimensionnez les équations (2a) et (2b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta p}{\rho U^2}$ et Re.

Solution: 2 points

$$\begin{aligned}
\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)
\end{aligned}$$

6. Adimensionnez les conditions imposées à u, v et p aux limites du domaine d'étude.

Solution: 4 points

A la verticale du bord d'attaque :

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 1 \\
\bar{v}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 0 \\
\bar{p}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 0
\end{aligned}$$

Au contact de la plaque :

$$\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$$
$$\bar{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$$

Loin au-dessus de la plaque :

$$\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 1$$
$$\bar{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 0$$
$$\bar{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 0$$

0,5 point par égalité

1.1.2 Solution de type écoulement parfait

Comme Re $\gg 1$, on peut supposer les effets de la viscosité négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque.

7. Sous ces hypothèses, quelle condition à la limite disparaît ? Ré-écrivez les équations scalaires modifiées sous ces hypothèses sous leur forme adimensionnée. Quel est le nom de l'équation vectorielle correspondante ?

Solution: 3 points
La condition d'adhérence $\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$ disparaît (**1 point**). Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme dépendant de la viscosité disparaît :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \text{ } (\textbf{0,5 point})$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \text{ } (\textbf{0,5 point})$$

L'équation correspondante est l'équation d'Euler (**1 point**).

8. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$. Dans la suite, vous poserez $\boxed{\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1}$.

Solution: 5 points
La direction principale de l'écoulement est (Ox) (**1 point**). Analyse physique :

- le moteur de l'écoulement est l'inertie de l'écoulement incident, représentée dans la projection selon (Ox) par le terme $\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ qui est d'ordre de grandeur l'unité (**1 point**),
- le frein de l'écoulement est l'adhérence du fluide à la paroi immobile et le frottement visqueux, représenté par le terme $\mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$ qui est d'ordre de grandeur $\mathrm{Re}^{-1} \ll 1$ (**1 point**),

— les forces de pression, représentées par le terme $\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$, sont une conséquence de l'écoulement d'ordre de grandeur $\frac{\delta p}{\rho U^2}$ (**1 point**).

Le frein étant d'amplitude très petite devant celle du moteur de l'écoulement, c'est la conséquence qui constitue le frein et qui compense donc le moteur (**1 point**) :

$$\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$$

9. Vérifiez par le calcul que l'écoulement homogène non perturbé $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$ est une solution exacte de ce problème simplifié.

Solution: **2 points**
L'écoulement homogène annule tous les termes dans les edp décrivant l'écoulement (**1 point**). Par ailleurs, il vérifie les conditions aux limites d'imperméabilité de la plaque, à la verticale du bord d'attaque, loin au-dessus de la plaque (**1 point**). Donc c'est bien une solution exacte du problème simplifié.

10. Quel comportement non physique cette solution présente-elle ?

Solution: **1 point**
L'écoulement homogène solution glisse au contact de la plaque, ce qui est non physique (même si c'est permis par le modèle d'écoulement de fluide parfait).

1.1.3 Développements asympotiques raccordés

Pour déterminer une solution plus satisfaisante, vous allez employer la méthode des développements asymptotiques raccordés, c'est-à-dire :

— supposer qu'à Re $\gg 1$ les effets de la viscosité sont négligeables presque partout sauf au voisinage d'une singularité que vous allez supposer située sur la plaque,

— déterminer la solution du problème dans ce voisinage puis la raccorder à la solution du problème déterminée précédemment qui est *a priori* valable en-dehors de ce voisinage.

Le voisinage de la plaque dans lequel les effets de la viscosité sont supposées notables, appelé domaine singulier et noté D.S., est d'épaisseur notée $\delta \ll L$. Dans l'objectif de résoudre le problème dans le domaine singulier, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de ce domaine et en faire l'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique.
Le domaine singulier est donc défini par :

$$\begin{cases} 0 \le x \le L & \text{(5a)} \\ 0 \le y \le \delta & \text{(5b)} \end{cases}$$

Pour adimensionner les équations (1) et (2), vous noterez :

— $\tilde{z}$ la partie analytique de z, z pouvant être y, u, v ou p (l'extension du domaine selon x étant inchangée, vous utiliserez l'adimensionnement précédemment utilisé pour x qui implique $\bar{x}$),

— U_1 l'échelle de u, V_1 l'échelle de v et δp_1 l'échelle de p.

11. Définissez les adimensionnements de x, y, u, v et p adaptés à l'étude dans le domaine singulier.

> **Solution:** **2,5 points**
>
> $$\begin{aligned} x &= L\,\bar{x},\ \bar{x} \sim 1 \\ y &= \delta\,\tilde{y},\ \tilde{y} \sim 1 \\ u &= U_1\,\tilde{u},\ \tilde{u} \sim 1 \\ v &= V_1\,\tilde{v},\ \tilde{v} \sim 1 \\ p &= P_0 + \delta p_1\,\tilde{p},\ \tilde{p} \sim 1 \end{aligned}$$
>
> **0,5 point par égalité**

Compte tenu de la simplicité de la solution approchée visée ici, le raccordement de la solution à la frontière entre le domaine singulier et l'extérieur du domaine singulier, appelé domaine extérieur et noté D.E., s'écrit :

$$\lim_{y \gg \delta} (\text{solution dans le D.S.}) = \lim_{y \to 0} (\text{solution dans le D.E.})$$

12. Montrez que :
   - $\boxed{U_1 = U}$ et $\lim\limits_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$,
   - $\boxed{\delta p_1 = \delta p}$ et $\lim\limits_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 0$.

> **Solution:** **2 points**
>
> - $\lim\limits_{\tilde{y} \to +\infty} U_1 \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{\bar{y} \to 0} U \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = U$; on égale d'une part les échelles, soit $U_1 = U$, d'autre part les limites des parties analytiques, soit :
>
> $$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = 1$$
>
> - $\lim\limits_{\tilde{y} \to +\infty} P_0 + \delta p_1\, \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{\bar{y} \to 0} P_0 + \delta p\, \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = P_0$, donc $\delta p_1 = \delta p$ et
>
> $$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = 0$$

13. On note $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\delta}{L}} \ll 1$. Adimensionnez l'équation (1) et justifiez brièvement pourquoi

$$V_1 \sim \varepsilon U$$

Dans la suite, vous poserez $\boxed{V_1 = \varepsilon U}$.

> **Solution:** **2 points**
>
> $$\frac{U}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_1}{\delta}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \ (\textbf{1 point})$$
>
> PNSA : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, on suppose les deux termes de l'équation d'amplitudes comparables, donc $V_1 \sim \frac{\delta}{L} U$ (**1 point**).

14. Adimensionnez les équations (2a) et (2b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta p}{\rho U^2}$, ε et Re et procédez aux simplifications automatiques.

Solution: **4 points**

$$\bar{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \cancel{\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{x}^2}}\right)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\varepsilon^{-2}\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \cancel{\varepsilon^2\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \bar{x}^2}}\right)$$

1,5 point par équation, 1 point pour les simplifications automatiques

15. Adimensionnez les conditions imposées à la solution au contact de la plaque.

Solution: **1 point**

$$\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) = 0$$
$$\tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) = 0$$

0,5 point par égalité

16. Dans le domaine singulier, on considère précisément que les effets de la viscosité sont notables. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que :

$$\mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2} \sim 1$$

Dans la suite, vous poserez $\boxed{\mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2} = 1}$. Déduisez-en l'expression de δ en fonction de L et de Re.

Solution: **2 points**
Par définition du D.S., dans celui-ci le frein visqueux est comparable au moteur inertiel : $\mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2} \sim 1$ (**1 point**), soit $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \ll L$ (**1 point**).

17. En considérant maintenant la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement principal, montrez qu'en première approximation $\tilde{p}$ ne dépend pas de $\tilde{y}$. En déduire $\tilde{p} = 0$.

Solution: **3 points**
$\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$ donc $\varepsilon^{-2}\frac{\delta p}{\rho U^2} \gg 1$ et $\mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2} \sim 1$ donc $\frac{\delta p}{\rho U^2} \gg \mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2}$ (**1 point**). Donc ne conserver que les termes dominants conduit à écrire :

$$0 = -\varepsilon^{-2}\frac{\delta p}{\rho U^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \text{ soit } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 : \tilde{p} \text{ ne dépend pas de } \tilde{y} \ (\textbf{1 point})$$

Or $\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 0$ donc $\tilde{p} = 0$ (**1 point**).

18. Réécrivez le système d'équations et les conditions aux limites auxquelles obéissent $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ dans le D.S (problème de couche limite le long d'une plaque plane). Ce problème est-il bien posé ?

Solution: 5 points

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ (\textbf{0,5 point})}$$

Avec $\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1 = \mathrm{Re}^{-1}\varepsilon^{-2}$:

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \text{ (\textbf{1 point})}$$

$\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$ (**0,5 point**), $\tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$ (**0,5 point**), $\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$ (**0,5 point**).

- $\tilde{u}$ obéit à une edp d'ordre 2 et doit vérifier deux CL : $\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$ et $\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$ (**1 point**)
- $\tilde{v}$ obéit à une edp d'ordre 1 : $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}}$ et doit vérifier une seule CL : $\tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$ (**1 point**)

donc le problème est bien posé.

1.1.4 Traînée visqueuse

On rappelle que la contrainte pariétale $\underline{T}_{\mathrm{p}}$ exercée par le fluide sur la plaque a pour expression :

$$\underline{T}_{\mathrm{p}} = \underline{\underline{\sigma}}\Big|_{\text{plaque}} \cdot \underline{n}$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{1}}$ est le tenseur identité, $\underline{n}$ est le vecteur normal à la plaque orienté vers le fluide et

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\{\underline{e}_x,\, \underline{e}_y\}}$$

19. Montrez que la composante horizontale de la contrainte pariétale $T_{\mathrm{p},x}$ a pour expression :

$$T_{\mathrm{p},x}(x) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,0)\right)$$

Solution: 2 points

$\underline{n} = \underline{e}_y$ donc $\underline{T}_{\mathrm{p}} = -p(x,0)\,\underline{e}_y + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,0)\right)}_{T_{\mathrm{p},x}}\underline{e}_x + 2\mu\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)\,\underline{e}_y$

20. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants, $T_{\mathrm{p},x}$ a pour expression approchée :

$$T_{\mathrm{p},x}(x) = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x},0)$$

Solution: **3 points**
$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\delta}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V}{L}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon^2 \frac{U}{\delta}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}$ donc $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x}$ (**2 points**). D'autre part, $\mu\frac{U}{\delta} = \rho U^2 \frac{\nu}{UL}\frac{L}{\delta} = \rho U^2 \mathrm{Re}^{-1/2}$ (**1 point**).

21. La solution invariante d'échelle du problème de couche limite le long d'une plaque plane (solution de Blasius) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0) = \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}}$$

où C est une constante d'ordre unité. Montrez que la trainée par unité de largeur exercée par l'écoulement sur la plaque sur ses deux faces :

$$f_\mathrm{T} = 2\int_0^L T_{\mathrm{p},x}(x)\,\mathrm{d}x$$

a pour expression :

$$f_\mathrm{T} = 4C\rho U^2 L\,\mathrm{Re}^{-1/2} = 4C\rho\,\nu^{1/2}\,U^{3/2}\,L^{1/2}$$

Solution: **3 points**

$$T_{\mathrm{p},x} = \rho U^2 \mathrm{Re}^{-1/2}\frac{C}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{C\,\rho U^2}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc :

$$f_\mathrm{T} = \frac{2C\,\rho U^2}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}\underbrace{\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{L}} = 4C\,\rho U^2\,L\,\mathrm{Re}^{-1/2} = 4C\rho\,\nu^{1/2}\,U^{3/2}\,L^{1/2}$$

2 Effet d'une aspiration du fluide

2.1 Préambule

On considère maintenant que la plaque est percée d'une multitude de trous reliés à un dispositif d'aspiration, comme schématisé sur la figure 2. Leur densité surfacique est telle que tout se passe comme si le fluide pénétrait dans la plaque avec une vitesse verticale $\underline{v}_0$ homogène le long de la plaque, petite en comparaison de U :

$$v(x,0) = -v_0\;\forall\, x\;/\;0 \leq x \leq L \quad\text{avec}\quad v_0 > 0 \quad\text{et}\quad \boxed{\eta = \frac{v_0}{U} \ll 1} \tag{6}$$

sans que le fluide glisse le long de la plaque :

$$u(x,0) = 0\;\forall\, x\;/\;0 \leq x \leq L \tag{7}$$

Les conditions expérimentales étudiées dans la partie 1 sont inchangées. Par conséquent, tous les résultats établis jusqu'à la question 6 incluse s'appliquent à cette situation, exceptée l'adimensionnement de la condition 6.

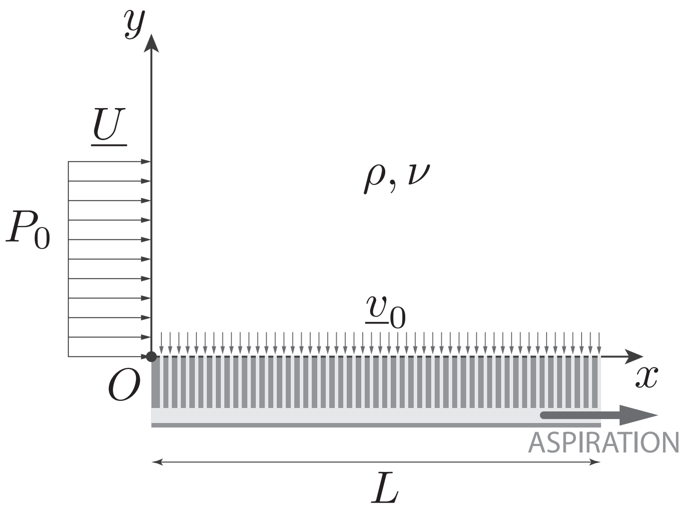

FIGURE 2 – Schéma de la plaque percée d'une multitude de trous aspirant le fluide en écoulement.

22. Adimensionnez la condition (6) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle de la plaque faits au paragraphe 1.1.1.

> **Solution: 2 points**
> $\bar{v}(\bar{x}, 0) = \frac{v}{V}$ avec $V = U$ donc $\bar{v}(\bar{x}, 0) = -\eta$.

Comme Re $\gg 1$ et $\eta \ll 1$, pour approcher la solution de ce problème, on peut dans un premier temps supposer les effets de la viscosité et de l'écoulement d'aspiration pariétale négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait ($\mathrm{Re}^{-1} = 0$) et non aspiré ($\eta = 0$) et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque. L'écoulement homogène non perturbé $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$ est une solution exacte de ce problème simplifié.

23. Quels comportements non physique cette solution présente-elle ?

> **Solution: 2 points**
> L'écoulement homogène solution glisse à la paroi et n'est pas aspiré.

Pour déterminer une solution plus satisfaisante, l'approche du paragraphe 1.1.3 peut être mise en oeuvre : après avoir scindé le domaine d'étude en domaine singulier près de la plaque et domaine extérieur, on applique la méthode des développement asymptotiques raccordés. Avec les mêmes notations et les mêmes choix de relations entre échelles, l'écoulement dans le domaine singulier où les effets de la viscosité sont notables vérifie :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{8}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \tag{9}$$

avec comme conditions aux limites :

— l'adhérence du fluide à la plaque : $\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$

— la condition (6) adimensionnée de manière adéquate (voir question suivante).

— le raccordement à la frontière entre D.S. et D.E. : $\lim_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$

24. Montrez que l'adimensionnement de la condition (6) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle du D.S. faits au paragraphe 1.1.3 s'écrit :
$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = -\eta \, \mathrm{Re}^{1/2}$$

> **Solution:** **2 points**
> $$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = \frac{v(x,0)}{V_1} = -\frac{v_0}{V_1} \text{ avec } V_1 = \varepsilon U$$
> donc
> $$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = -\frac{\eta}{\varepsilon} = -\eta \, \mathrm{Re}^{1/2}$$

Dans la suite, on définit $\boxed{\alpha = \eta \, \mathrm{Re}^{1/2} = \frac{\eta}{\varepsilon}}$.

2.2 Recherche d'une solution invariante d'échelle

Mis en confiance par l'efficacité de la recherche de solution invariante d'échelle dans la situation de la partie 1 qui permet de mettre en évidence la solution de Blasius, on applique cette technique à ce problème.

25. En imposant un changement d'échelle à toutes les grandeurs impliquées dans ce problème de la forme $a = a^* a^{'}$, où a, qui est la grandeur de départ, peut être $\bar{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, α, $a^{'}$ est la notation pour la grandeur dilatée par changement d'échelle, et a^* le facteur de changement d'échelle, montrez que le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à un seul paramètre libre.

> **Solution:** **5 points**
> Le groupe de changements d'échelles est à 5 facteurs d'échelle $x^*, y^*, u^*, v^*, \alpha^*$, qui sont liés par les relations issues de (8), (9), la condition d'adhérence adimensionné et la condition (6) adimensionnée) :
> $$\begin{aligned} \frac{u^*}{x^*} &= \frac{v^*}{y^*} \\ \frac{u^{*2}}{x^*} &= \frac{u^* v^*}{y^*} = \frac{u^*}{y^{*2}} \\ v^* &= \alpha^* \\ u^* &= 1 \end{aligned}$$
> **0,5 point par égalité**
> qui sont équivalentes aux 4 relations suivantes :
> $$\begin{aligned} u^* &= 1 \\ v^* &= \alpha^* \\ v^* &= \frac{y^*}{x^*} \\ v^* &= \frac{1}{y^*} \end{aligned}$$
> **2 points si 4 égalités indépendantes**
> Donc le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à $5 - 4 = 1$ paramètre libre (**0,5 point**).

26. Exprimez les facteurs de changement d'échelle laissant le problème invariant en fonction de α^* choisi comme le paramètre libre.

Solution: **2 points**

$$\begin{aligned} u^* &= 1 \\ v^* &= \alpha^* \\ y^* &= (\alpha^*)^{-1} \text{ (**1 point**)} \\ x^* &= (\alpha^*)^{-2} \text{ (**1 point**)} \end{aligned}$$

27. La solution du problème invariant par changement d'échelles étant elle-même invariante par ce même groupe de changements d'échelle,
    - listez les grandeurs dont dépend $\tilde{u}$ sous la forme $\tilde{u} = f(...)$, f fonction inconnue,
    - opérez les changements d'échelle sur toutes les grandeurs impliquées dans cette relation,
    - exprimez tous les facteurs de changements d'échelle en fonction de α^*,
    - choisissez enfin une valeur particulière pour α^*,

    pour montrer finalement que :

$$\tilde{u} = f(\alpha^2\ \bar{x},\ \alpha\ \tilde{y})$$

Solution: **4 points**

$\tilde{u}$ s'exprime sous la forme :

$$\tilde{u} = f(\bar{x}, \tilde{y}, \alpha) \text{ (**1 point**)}$$

qui se transforme par changements d'échelles en :

$$u^* u = f(^* x, y^* y, \alpha^* \alpha)$$

soit :

$$u = f(\alpha^{*-2} x, \alpha^{*-1} y, \alpha^* \alpha) \text{ (**1 point**)}$$

On pose $\alpha^* = \alpha^{-1}$ (**1 point**) :

$$u = f(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = f(\alpha^2 x, \alpha y)$$

donc en revenant aux variables initiales :

$$\tilde{u} = f(\alpha^2 \bar{x}, \alpha \tilde{y}) \text{ (**1 point**)}$$

28. Procédez de même pour $\tilde{v}$.

Solution: **2 points**
$\tilde{v}$ s'exprime sous la forme :

$$\tilde{v} = g(\bar{x}, \tilde{y}, \alpha)$$

qui se transforme par changements d'échelles en :

$$v^* v = g(^* x, y^* y, \alpha^* \alpha)$$

soit :

$$\alpha^* v = g(\alpha^{*-2} x, \alpha^{*-1} y, \alpha^* \alpha) \text{ (}\textbf{1 point}\text{)}$$

On pose $\alpha^* = \alpha^{-1}$:

$$\frac{v}{\alpha} = g(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = f(\alpha^2 x, \alpha y) \text{ soit } v = \alpha\ g(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = \alpha\ g(\alpha^2 x, \alpha y)$$

donc en revenant aux variables initiales :

$$\tilde{v} = \alpha\ g(\alpha^2\ \bar{x},\ \alpha\ \tilde{y}) \text{ (}\textbf{1 point}\text{)}$$

Il se trouve qu'il existe une solution particulière exacte à ce problème qui est indépendante de $\bar{x}$. En posant $\xi = \alpha \tilde{y}$, on écrit cette solution sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u} = F(\xi) & \text{(10a)} \\ \tilde{v} = -\alpha G(\xi) & \text{(10b)} \end{cases}$$

F et G étant deux fonctions à déterminer.

29. Réécrivez le problème (8, 9) et ses conditions aux limites comme un système d'équations différentielles couplées impliquant les fonctions inconnues F et G.

Solution: **5 points**

$$\begin{cases} G' = 0 & \text{(11a)} \\ -G\,F' = F'' & \text{(11b)} \\ F(0) = 0 & \text{(11c)} \\ \lim_{\xi \to +\infty} F(\xi) = 1 & \text{(11d)} \\ G(0) = 1 & \text{(11e)} \end{cases}$$

30. Résolvez ce système pour montrer que :

$$\begin{cases} F(\xi) = 1 - \exp(-\xi) & \text{(12a)} \\ G(\xi) = 1 & \text{(12b)} \end{cases}$$

Solution: 3 points
$G^{'} = 0$ et $G(0) = 1$ impliquent $G = 1$ (**0,5 point**). $F^{''} = -G\ F^{'}$ implique $F^{'} = F_0 \exp(-\xi)$ soit $F = -F_0 \exp(-\xi) + F_1$ (**1,5 point**). $F(0) = 0$ implique $F_1 = F_0$ (**0,5 point**). $\lim_{\xi \to +\infty} F(\xi) = 1$ implique $F_0 = 1$ (**0,5 point**).

31. Cette solution n'a de sens que si elle rejoint la solution dans le domaine extérieur avant la sortie de la couche limite, c'est-à-dire pour $\tilde{y} \sim 1$. Montrez que ceci nécessite $\alpha \gtrsim 1$.

Solution: 1 point
F rejoint 1 pour $\xi = \alpha\tilde{y} \gtrsim 1$, soit $\tilde{y} \gtrsim \alpha^{-1}$. Si $\alpha \ll 1$, F rejoint 1 pour $\tilde{y} \gg 1$, c'est-à-dire trop loin en sortie de couche limite. Donc nécessairement $\alpha \gtrsim 1$.

32. Exprimez la solution $\tilde{u} = F(\xi)$ en variables dimensionnées pour montrer que :

$$u = U\left[1 - \exp\left(-\frac{y}{\ell}\right)\right]$$

où ℓ est une longueur caractéristique dont vous établirez l'expression. Quelle est l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse en présence d'aspiration ? Varie-t-elle avec x ?

Solution: 3 points
$u = U\,\tilde{u} = U\,F(\xi)$ avec

$$\xi = \alpha\tilde{y} = \frac{\eta}{\epsilon}\frac{y}{\delta} = \frac{v_0}{U}\frac{yL}{\underbrace{\delta^2}_{\frac{L^2}{\mathrm{Re}}}} = \frac{v_0}{U}\frac{yL\frac{UL}{\nu}}{L^2} = \frac{v_0}{\nu}y \text{ (\textbf{2 points})}$$

On pose donc :

$$\ell = \frac{\nu}{v_0} \text{ (\textbf{1 point})}$$

33. Quelle est la principale différence avec la solution de Blasius pour la couche limite visqueuse en absence d'aspiration :

$$u = U f_{\mathrm{B}}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

où $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ et f_{B} est une fonction telle que $f_{\mathrm{B}}(0) = 0$ et $\lim_{\eta \to +\infty} f_{\mathrm{B}}(\eta) = 1$?

Solution: 2 points
La couche limite aspirée est d'épaisseur caractéristique δ qui est indépendante de x, tandis que l'épaisseur caractéristique de la couche limite de Blasius augmente avec x.

2.3 Trainée visqueuse

34. En utilisant l'expression de la composante horizontale de la contrainte pariétale $T_{\mathrm{p},x}$ donnée dans la question 20, montrez que :

$$T_{\mathrm{p},x} = \rho v_0 U$$

Solution: **3 points**
Avec $\tilde{u} = 1 - \exp(-\alpha\tilde{y})$, $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}(0) = \alpha = \frac{\eta}{\varepsilon} = \frac{v_0}{U}\mathrm{Re}^{1/2}$ donc

$$T_{\mathrm{p},x} = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}(\bar{x},0) = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{v_0}{U}\mathrm{Re}^{1/2} = \rho\, U\, v_0$$