Sorbonne Université **Année 2018-2019**

Master Sciences et Technologie - Mention Sciences pour l'Ingénieur

---

Traitement numérique du signal (4AN01)
2nde session - Mardi 7 Mai 2019 - durée : 2h00
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Radar de recul

La plupart des nouveaux véhicules sont aujourd'hui dotés de radars de recul. Celui-ci informe le conducteur de la distance qui le sépare d'un obstacle placé à l'arrière par l'émission d'un son. Cette distance est mesurée via un système mesurant le temps que met un ultrason à aller et revenir vers l'émetteur. Le principe retenu est simple : un ultrason de fréquence $f_0 = 32$kHz est émis à partir de $t = 0$s pendant une durée $T = 1$ms. Puis ce même signal est réfléchi et capté à nouveau après un temps τ représentant le temps nécessaire au signal pour aller vers l'obstacle et revenir vers l'émetteur ultrason.

La figure 1 présente un exemple de signal envoyé et reçu[1]. On note $x(t)$ le signal émis, et $y(t)$ le signal reçu. Dans ce problème, on souhaite analyser le signal $y(t)$ et proposer des solutions pour mesurer le temps τ, proportionnel à la distance séparant le véhicule de l'obstacle.

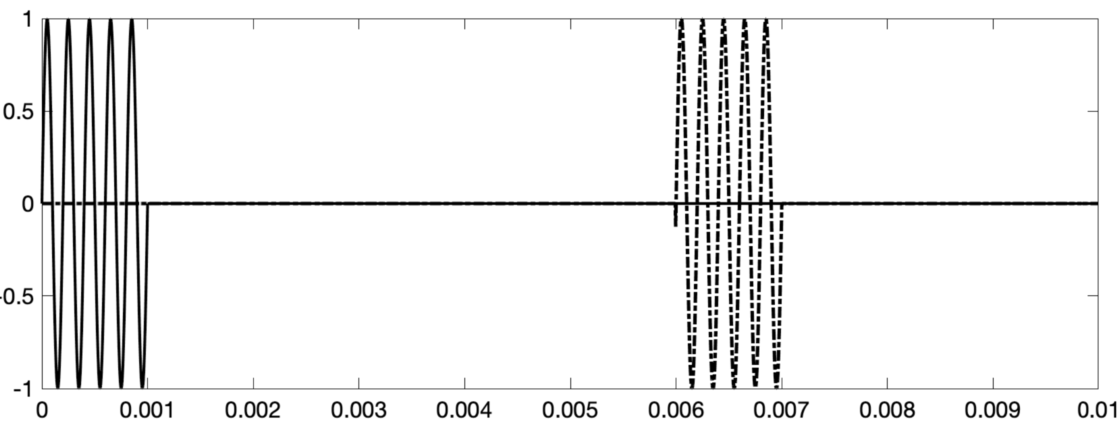


Figure 1: Signal émis $x(t)$ (traits pleins) et reçu $y(t)$ (pointillés).

1 Étude préalable

1. Exprimer le retard τ en fonction de la distance d séparant le véhicule de l'obstacle et de la vitesse de propagation du son c.

[1]Dans ce tracé, la fréquence f_0 est volontairement abaissée pour améliorer la lisibilité.

Solution: 2 points.
$\tau = \frac{2d}{c}$.

2. A l'aide de la figure 1, préciser la valeur numérique du retard τ.

Solution: 1 point.
On mesure $\tau = 6$ms.

3. En déduire la valeur de la distance d à l'obstacle.

Solution: 1 point.
On a $d = \frac{\tau c}{2}$. Avec $c \approx= 340 m.s^{-1}$, on a $d \approx= 1/26.10^{-3} * 340 \approx 1.02$m.

2 Analyse du signal reçu, traitement et échantillonnage

Le signal reçu $y(t)$ peut s'écrire comme le produit entre un signal $p(t)$ sinusoïdal de fréquence f_0 et une fonction porte $\Pi_T(t-\tau)$, avec

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq T \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. Déterminer la transformée de Fourier des signaux continus (TFSC) $\Pi(f)$ de la fonction porte $\Pi_T(t)$.

Solution: 2 points.
$\Pi(f) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j\pi f T}$.

5. En utilisant les propriétés de la TFSC, déterminer sans plus de calcul la TFSC du signal $\Pi_T(t-\tau)$.

Solution: 1 point.
On sait que $TFSC[x(t-\tau)] = X(f)e^{-j2\pi f\tau}$. Donc :
$TFSC[\Pi(t-\tau)] = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(T/2+\tau)}$.

6. Rappeler, sans la démontrer, l'expression de la TFSC $P(f)$ de $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

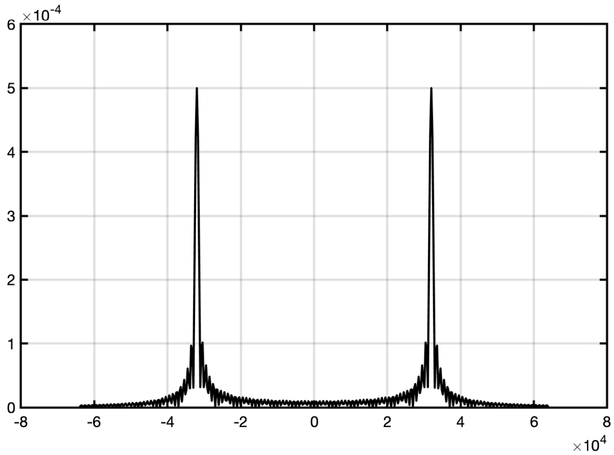
Solution: 1 point.
$P(f) = TFSC[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)}{2j}$.

7. En déduire l'expression de la TFSC du signal reçu $y(t) = p(t)\Pi_T(t-\tau)$, notée $Y(f)$.

Solution: 2 points.
On a $y(t) = p(t)\Pi(t-\tau)$. Donc $Y(f) = P(f) * TFSC[\Pi(t-\tau)]$, soit :
$Y(f) = \frac{T}{2j}\left(\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\pi(f+F_0)T}e^{-j2\pi(f+f_0)(T/2+\tau)} - \frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\pi(f-F_0)T}e^{-j2\pi(f-f_0)(T/2+\tau)}\right)$.

8. Tracer[2] l'allure du module de $Y(f)$ sur votre copie. Préciser les valeurs des fréquences pour lesquelles $|Y(f)| = 0$.

Solution: 2 points.



Valeur max $= T$, $|Y(f)| = 0$ pour $f = f_0 + k/T$.

En pratique, ce n'est pas le signal $y(t)$ qui sera numérisé, mais le signal $y_1(t) = y(t)^2$.

9. En remarquant que $(\Pi_T(t-\tau))^2 = \Pi_T(t-\tau)$, montrer que la TFSC $Y_1(f)$ du signal $y_1(t)$ est donnée par[3] :

$$Y_1(f) = \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(\frac{T}{2}+\tau)} - \frac{T}{4}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(\frac{T}{2}+\tau)} * \big(\delta(f+2f_0)+\delta(f-2f_0)\big).$$

[2] ATTENTION : les tracés demandés dans toute la suite doivent être rigoureux ! Par exemple, les axes doivent préciser la grandeur tracée, l'unité, et les échelles utilisées.

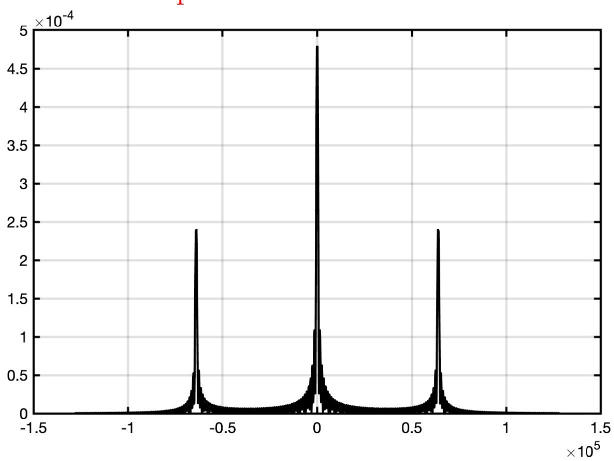
[3] RAPPEL : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

Solution: 2 points.
$y_1(t) = y^2(t) = (\sin(2\pi f_0 t)\Pi_T(t-\tau))^2 = \sin^2(2\pi f_0 t)\Pi_T(t-\tau)$.
Or $\sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(1-\cos(4\pi f_0 t))$.
Donc $y_1(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(4\pi f_0 t))\Pi_T(t-\tau)$.
Alors :

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= \frac{1}{2}TFSC[\Pi_T(t-\tau)] - \frac{1}{2}TFSC[\cos(4\pi f_0 t)] * TFSC[\Pi_T(t-\tau)]]. & (1) \\ &= \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(T/2+\tau)} - & (2) \\ & \quad \frac{T}{4}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(T/2+\tau)} * (\delta(f+2f_0)+\delta(f-2f_0)) & (3) \end{aligned}$$

10. Tracer l'allure de $|Y_1(f)|$ sur votre copie. A nouveau, on précisera les valeurs des fréquences pour lesquelles $|Y_1(f) = 0|$.

Solution: 2 points.



Max en T/2 et T/4, et $|Y_1(f) = 0|$ pour $f = k/T$ et $f = 2f_0 \pm k/T$ et $f = -2f_0 \pm k/T$.

11. Quelle est la fréquence maximale présente dans le signal $y_1(t)$? Expliquer et justifier.

Solution: 2 points.
Le pic le plus haut en fréquence se situe en $2f_0 = 64$kHz. Il existe des rebonds ensuite, dont il faut décider à partir de quand leur amplitude est négligeable. Comme vu en TD, on peut décider qu'au delà $2f_0 + 5/T$ les lobes sont négligeables. Ainsi, $f_{max} \approx 69$kHz.

12. En déduire à quelle valeur de fréquence d'échantillonnage minimale $f_e = 1/T_e$ le signal $y_1(t)$ peut être échantillonné.

Solution: 1 point.
On a donc $f_e = 2f_{max} = 138$kHz.

13. Sur la base de l'expression de $Y_1(f)$ et du tracé précédent, comment est-il possible de récupérer l'information de distance du signal $y_1(t)$?

Solution: 1 point.
On constate qu'on récupère autour de $f = 0$ le contenu fréquentiel d'un signal rectangulaire, décalé de $T/2 + \tau$. L'information de distance est donc dans la phase de ce signal rectangulaire, sous réserve de supprimer les composantes en $\pm 2f_0$.

14. Le signal $y_1(t)$ est échantillonné à la fréquence f_e précédemment déterminée. On note $y_2(t) = y_1(t)Ш_{T_e}(t)$ ce signal échantillonné. Donner l'expression de $Y_2(f)$ en fonction de $Y_1(f)$.

Solution: 1 point.
$Y_2(f) = f_e \sum_n Y_1(f - nf_e)$.

15. Rappeler la définition de la transformée de Fourier des signaux discrets $X(e^{j2\pi fT_e})$ d'un signal discret $x[n]$.

Solution: 1 point.
$X(f) = \sum_n x[n]e^{j2\pi fnT_e}$.

16. Rappeler quelle relation unit la transformée de Fourier dicrète $X_N[k]$ et la transformée de Fourier des signaux discrets $X(e^{j2\pi fT_e})$ d'un signal $x[n]$ de durée finie.

Solution: 1 point.
$X_N[k] = X(e^{j2\pi fT_e})|_{f=kf_e/N}$.

3 Filtrage numérique

On souhaite filtrer le signal $y_2[n] = y_2(nT_e)$ échantillonné à une fréquence $f_e = 176400$Hz par le filtre numérique de fonction de transfert $H(z)$ donnée par

$$H(z) = \frac{1}{N}\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

17. Peut-on déterminer si le filtre est de type RIF ou RII ? Justifier.

Solution: 1 point.
Non, car le fait que la fonction de transfert présente "un dénominateur" ne permet pas de décider si le filtre est RIF ou RII.

18. Déterminer la réponse en fréquence $H(e^{j2\pi fT_e})$ du filtre.

Solution: 2 points.
On pose $z = e^{-j2\pi fT_e}$. On a alors :
$H(e^{j2\pi fT_e}) = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi fNT_e)}{\sin(\pi fT_e)}e^{-j\pi f(N-1)T_e}$.

19. Peut-on maintenant déterminer si le filtre est de type RIF ou RII ? Justifier.

Solution: 1 points.
La réponse en fréquence du filtre présente une phase linéaire. Le filtre est donc de type RIF.

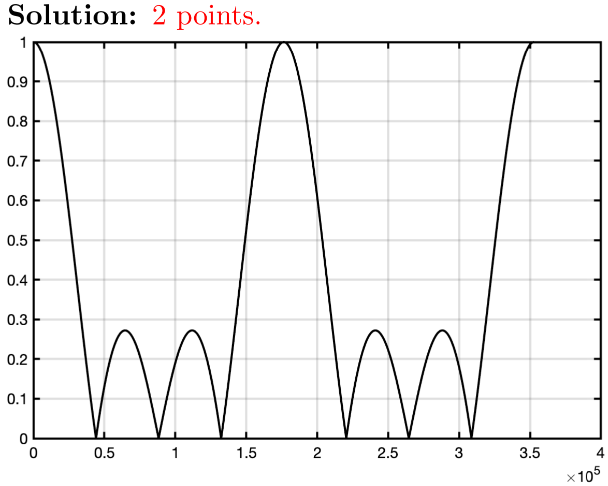
20. Déterminer l'équation de récurrence du filtre.

Solution: 2 points.
$y[n] = \frac{1}{N}(x[n] - x[n-N]) + y[n-1]$.

On choisit dans la suite de prendre $N = 4$.

21. Tracer sur votre copie l'allure de $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ pour $0 \le f \le 2f_e$. Préciser les fréquences pour lesquelles $|H(e^{j2\pi fT_e})| = 0$.

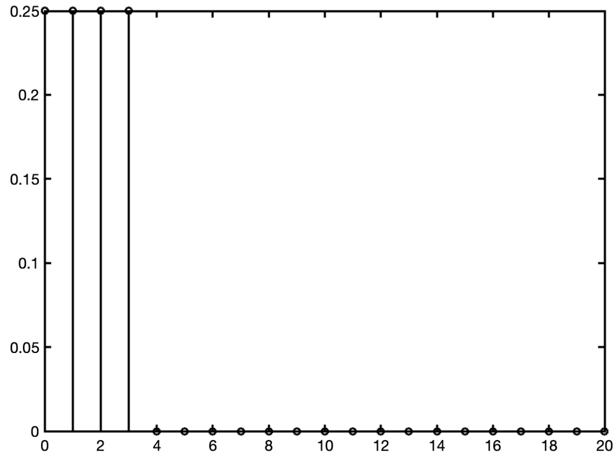
Solution: 2 points.



Max à 1, et $|H(e^{j2\pi fT_e})| = 0$ pour $f = k\frac{f_e}{N}$ sauf en $f = lf_e$.

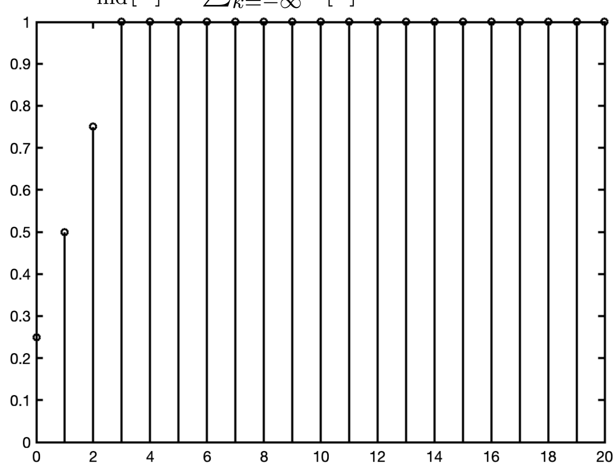
22. Déterminer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre numérique.

Solution: 2 points.



23. Rappeler l'expression de la réponse indicielle $s_{\text{ind}}[n]$ du filtre en fonction de $h[n]$. En déduire les 10 premiers échantillons de $s_{\text{ind}}[n]$.

Solution: 2 points.
On a $s_{\text{ind}}[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$. On en déduit :



24. Représenter sur le même graphique sur votre copie la réponse impulsionnelle $h[n]$ et la réponse indicielle $s_{\text{ind}}[n]$ du filtre.

Solution: 1 point.
Cf. figures précédentes.

25. Mettre l'équation de récurrence sous une forme non récursive.

Solution: 1 point.
$y[n] = \frac{1}{N}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$

26. Déterminer la sortie du filtre $s[n]$ en réponse à l'entrée $y_2[n] = [0, 1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0, 0, \ldots]$.

Solution: 1 point.
On trouve : $s[n] = [0, 1/4, 3/4, 1, 1, 1/2, -1/2, -1, -1, -3/4, -1/4, 0, \ldots]$