Sorbonne Université **Anné 2019-2020**

Master Sciences pour l'Ingénieur - Mécanique
COURS 5AF38 - AÉROÉLASTICITÉ - PARTIE STRUCTURES
Enseignant : Angela Vincenti (angela.vincenti@upmc.fr)

Instabilités aéroélastiques dynamiques : étude du comportement dynamique d'un panneau mince en présence d'un flux d'air

Présentation du problème

On se propose d'étudier l'influence de la présence d'un flux d'air parallèle à la surface d'un panneau mince sur la réponse dynamique d'une telle structure.
On fixe un référentiel cartésien d'axes $Oxyz$ avec l'axe Oy dirigé vers le haut. Les dimensions du panneau soient a et b respectivement dans les directions Ox et Oz, et son épaisseur h. On fait l'hypothèse $b >> a$, et aussi $h << b$.
Le matériau constitutif du panneau est considéré élastique linéaire de module de Young E, coefficient de Poisson ν et masse volumique ρ.
Le panneau est simplement appuyé sur les deux côtés $x = 0$ et $x = a$.

Au dessus du panneau (demi-espace $y > 0$), un flux d'air s'écoule parallèlement à la face supérieure du panneau et dans la direction de l'axe Ox.
On note ρ_a la masse volumique de l'air, U_∞ la vitesse de l'écoulement à l'infini et M_∞ le nombre de Mach correspondant.

La symétrie du problème nous permet de considérer que toutes les grandeurs du problème ne dépendent que de la coordonnée x, et on réalise donc une modélisation unidimensionnelle de cette structure.
On réalise l'étude dans le domaine des nombres de Mach $M_\infty \in [1.6, 5]$; dans cette plage, la pression aérodynamique $p(x,t)$ exercée par le flux sur la surface supérieure du panneau peut s'exprimer à l'aide de la théorie linéaire du piston :

$$p(x,t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\rho_a U_\infty}{\sqrt{{M_\infty}^2 - 1}} \left[U_\infty \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{{M_\infty}^2 - 2}{{M_\infty}^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial t} \right] \tag{1}$$

où l'on a noté $v(x,t)$ le déplacement vertical (composante selon l'axe Oy) du panneau.

1 Formulations

Question 1.1. Formulation forte : sous l'hypothèse de plaque mince en flexion circulaire, écrire l'équation dans la variable champ de déplacement $v(x,t)$ et les conditions limites du problème d'équilibre pour le panneau mince sous le chargement aérodynamique. On considère le cadre HPP usuel.

Question 1.2. Définir l'espace cinématiquement admissible.

Question 1.3. Formulation faible : écrire la formulation variationnelle en déplacements du problème posé.

2 Construction du modèle aux éléments finis

Pour étudier le comportement du panneau mince en flexion, simplement appuyé sur deux côtés, on considère un maillage constitué d'un seul élément "coque à deux noeuds".

Question 2.1. Approximation des déplacements : donner l'expression de l'approximation du champ de déplacements sur l'élément "coque 1D".
Spécifier le vecteur $\{U_e\}$ de déplacements généralisés aux noeuds de l'élément.

Rappeler les conditions vérifiées par les fonctions de forme $N_1(\xi)$ et $N_2(\xi)$ aux noeuds 1 et 2, étant $\xi = x/L_e$.
On rappelle les expressions des fonctions de forme $N_i(\xi), (i = 1, ..., 4)$:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \tag{2}$$

$$N_2(\xi) = L_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \tag{3}$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \tag{4}$$

$$N_4(\xi) = L_e(-\xi^2 + \xi^3) \tag{5}$$

Question 2.2. Calcul des déformations : donner l'expression de l'opérateur $\mathbb{B}_{el}$ de déformation liant la courbure $\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ au vecteur $\{U_e\}$ de déplacements généralisés.

Question 2.3. Calcul des matrices élémentaires : en calculant les contributions élémentaires aux termes intégrales de la formulation variationnelle, donner les expressions intégrales des matrices élémentaires de masse $\mathbb{M}_e$ et de rigidité $\mathbb{K}_e$. Calculer $\mathbb{M}_e$ et $\mathbb{K}_e$ en fonction des propriétés matériau et géomtriques du panneau, ainsi que de la longueur des éléments L_e.

Question 2.4. Injecter l'expression de la pression aérodynamique selon la théorie linéaire du piston dans la forme linéaire de la formulation variationnelle, et en déduire les contributions élémentaires en termes de matrices élémentaires d'amortissement aérodynamique $\mathbb{A}_{de}$ et d'influence aérodynamique $\mathbb{A}_{f_e}$.

Question 2.5. Equations d'équilibre de la structure : en prenant en compte les conditions limites par une méthode de condensation, écrire l'équation matricielle pour l'équilibre de la structure :

$$[\mathbb{M}_{red}]\{U_{red}\} + [\mathbb{A}_{dred}]\{U_{red}\} + \left([\mathbb{K}_{red}] + \left[\mathbb{A}_{f_{red}}\right]\right)\{U_{red}\} = \{\mathrm{O}\} \tag{6}$$

Expliciter les composantes des matrices réduites qui apparaissent dans cette équation en fonction des grandeurs caractéristiques du problème (longueur a, module de rigidité de flexion D, masse linéique m_s, coefficients du chargement aérodynamique α et β, etc.).
Préciser la forme des vecteurs réduits $\{U_{red}\}$, $\{U_{red}\}$ et $\{U_{red}\}$.

3 Analyse modale de la structure libre

On étudie les modes et les fréquences propres du panneau mince en absence du chargement aérodynamique.

Question 3.1. En considérant le panneau libre (absence du flux d'air), résoudre le problème aux valeurs propres donnant les pulsations et ensuite les fréquences naturelles du panneau.

Question 3.2. Déterminer les vecteurs représentant les modes propres.
Pour chaque mode, reconstruire l'expression du champ de déplacement $v(x)$ correspondant et représenter graphiquement la forme du mode.

4 Analyse modale de la structure sous le chargement aérodynamique

On considère ici le panneau sous l'influence du chargement aérodynamique exprimé par la théorie linéaire du piston (équation complète en présence des termes d'amortissement aérodynamique et d'influence aérodynamique).

Question 4.1. A partir de l'équation d'équilibre dynamique où le terme $\mathbb{A}_f$ est absent, exprimer le vecteur des accélérations $\{U_{red}\}$ en fonction des vitesses $\{U_{red}\}$, des déplacements $\{U_{red}\}$ et des matrices $\mathbb{M}_{red}$, $\mathbb{K}_{red}$, $\mathbb{A}_{dred}$ et $\mathbb{A}_{f_{red}}$.
On introduit le vecteur auxiliaire $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} U_{red} \\ \dot{U}_{red} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Question 4.2. A partir de la définition de $\mathbf{z}$, montrer que l'on peut écrire l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{z}} = [\mathbf{B}]\,\mathbf{z} \tag{8}$$

étant la matrice $[\mathbf{B}]$ définie comme il suit :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

en précisant les expressions pour les matrices $\mathbf{B}^{(1)}$ et $\mathbf{B}^{(2)}$.

Question 4.3. L'équation différentielle précédente admet une solution de la forme : $\mathbf{z} = \mathbf{Y}\exp(\lambda t)$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle en $\mathbf{z}$, montrer que la recherche des pulsations propres λ et des modes propres $\mathbf{Y}$ revient à résoudre le problème aux valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\mathbf{B}$.

Question 4.4. En notant ${b_{ij}}^{(1)}$ et ${b_{ij}}^{(2)}$ les composantes des matrices $\mathbf{B}^{(1)}$ et $\mathbf{B}^{(2)}$, écrire l'équation pour la recherche des valeurs propres λ de la matrice $\mathbf{B}$, et montrer qu'elle se met sous la forme suivante :

$$\left[\lambda\left({b_{11}}^{(2)} - \lambda\right) + {b_{11}}^{(1)}\right]\left[\lambda\left({b_{22}}^{(2)} - \lambda\right) + {b_{22}}^{(1)}\right] = 0 \tag{10}$$

Déterminer alors les valeurs propres λ. Combien de valeurs distinctes on obtient ?

5 Etude de la structure avec conditions limites d'encastrement

Répéter l'étude dans le cas du panneau de mêmes propriétés et même géométrie, mais avec des conditions d'encastrement aux deux extrémités. Dans ce cas, construire un maillage constitué de deux éléments finis **"coque à deux noeuds".**