Projet d'informatique (2A202) - Poutre sous compression verticale

Duvivier Valentin

Formation Cursus de Master en Ingénierie - 2^{e} année

2018-2019

encadré par Anca Belme

Introduction

Le métier de génie mécanique est inéluctablement lié à la notion de calcul de structure et de déformation des matériaux et plus spécifiquement à leur résistance. Dans le cadre de notre recherche, nous chercherons à étudier et à décrire le comportement d'une poutre verticale sur laquelle est appliquée une force. Cette poutre ne subit toutefois pas de déformation mais un simple déplacement oblique , notamment définis par l'angle créé entre la verticale et la poutre (se référer au schéma et à la description qui en est faite). Pour ce qui est de la sélection du problème, j'ai décidé d'étudier l'aspect statique du problème. Étant en monôme et n'ayant pas suivi l'UE d'informatique de L1 j'ai privilégié une étude statique, mettant en jeu des équations non-linéaires. Même si j'ai envisagé la possibilité d'étudier la partie dynamique du problème, je m'y suis pris un peu tard et je n'aurais sans doute pas pu faire une étude aussi complète que je l'aurai espérer et cela n'aurait abouti qu'a n'en étudier que les prémices.

Pour ce qui est du plan de la recherche, dans un premier temps, nous chercherons à faire une étude théorique de notre système afin de retrouver l'équation de la statique donnée dans le sujet. Puis, à l'aide de la méthode Newton-Raphson nous verrons comment résoudre notre équation non-linéaire et ainsi définir des positions d'équilibres. Enfin, nous exploiterons les données numériques obtenus à l'aide de notre programme et mettrons en lumière le fonctionnement de notre objet d'étude.

1 Configuration d'équilibre du système et établissement de notre équation d'équilibre :

Nous avons une poutre, sous compression verticale, rattachée au sol par une liaison rotule, et qui ne subit pas de déformation. Notre étude suppose que les déformations sont nulles : on ne considère que des déformations et des déplacements qui restent petits et dans la zone de comportement élastique des matériaux. On supposera donc que les calculs se font à partir de la structure non déformées.

Dans un premier temps nous allons chercher à retrouver l'équation de la statique de la poutre qui est la suivante :

- $$-\theta + P * sin(\theta) = 0$$

avec θ l'angle entre l'axe verticale et P la force verticale appliquée sur notre système.

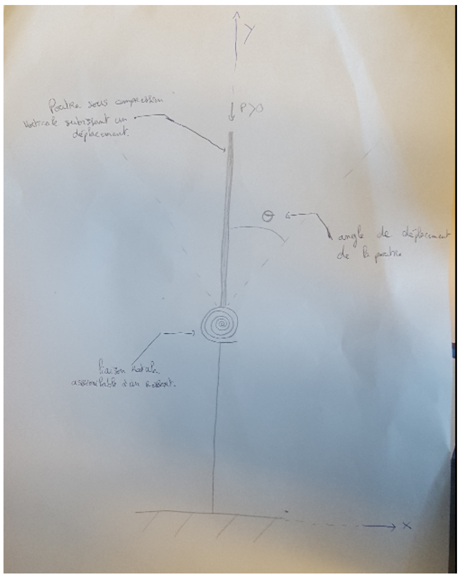

figure 1 : Schéma de l'étude de cas

1.1 Force de rappel semblable à celle d'un ressort

Une méthode pour étudier la déformation d'une poutre soumise à la contrainte d'une force extérieur peut-être de symboliser notre système par un modèle extérieur. En fait, on peut ici assimiler la liaison entre la poutre et la rotule à un ressort. Pour avoir une confirmation de cette méthode, j'ai décidé de tracer la courbe de l'équation de notre problème. J'ai donc tracée la courbe définissant notre système, ce qui m'a permis de retrouver la courbe qui m'avait été donnée dans les données de départ pour la recherche.

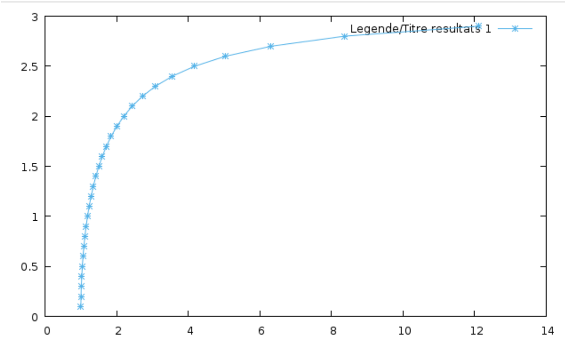

figure 2 : Courbe thêta = f(P) pour P allant jusqu'à 14N

NB : Cette courbe et sa conception seront étudiées dans la partie programmation.

Tracer cette courbe permet d'avoir une idée du comportement de la poutre en fonction du déplacement. Ainsi, cette courbe m'a permis d'observer que plus l'angle entre la poutre et la verticale est grand, plus la force à appliquer est grande, ce qui pour notre problème s'assimile au fait que la force de rappel est importante. Ainsi, on retrouve un fonctionnement similaire à celui d'un ressort : le mouvement de la poutre est au début facile mais par la suite devient de plus en plus difficile, rendant quasiment impossible tout déplacement au bout d'un certain angle dépassé ; ce qui nous permet de faire cette analogie afin de pouvoir plus facilement caractériser notre système.

On sait donc que notre système est soumis à deux forces : la force P et la force de rappel due à la liaison rotule.

Cette description visuelle du comportement de notre système permet donc de faire le lien entre les forces qui s'appliquent à la poutre et des forces théoriques, simplifiant notre problème. Dans la partie suivante nous allons voir si notre système se résume à ces deux forces.

1.2 Bilan des forces pour une étude isostatique

Nous étudions le bilan des forces appliquées sur une poutre verticale. En fait, lorsque la force va être appliquée sur le haut de la poutre, la poutre va simplement se pencher, et non entrer en flexion. Nous n'aborderons donc pas les idées de moment fléchissant et de flambage. Par ailleurs, il est à noter que nous sommes ici dans un problème plan. Plus précisément, nos conditions d'études (hypothèses sur les déformations, problème plan, liaison rotule) nous permettent de définir que notre problème est isostatique. Cela signifie qu'en tout point de notre objet les forces appliquées seront les mêmes et qu'il nous suffit d'appliquer le principe fondamentale de la dynamique à notre problème pour l'étudier. Or, étant donné que nous étudions le cas statique de notre problème on peut en fait n'appliquer que le principe fondamentale de la statique pour étudier les forces s'appliquant sur la poutre.

Cela implique que le PFS suffit à déterminer les inconnues statiques ; et nous ferons donc la résultante des actions mécaniques sur notre solide afin de chercher à en décrire le comportement, dans le cas statique. Ainsi, nous étudierons les configurations d'équilibre de la poutre, et ce pour différents angles et forces appliqués. Il est à noter que nous négligerons dans notre étude le poids, en supposant qu'il est négligeable devant les forces déjà considérées.

L'application du PFS à notre problème nous permet de définir la relation suivante :

- $$P + (-k * \theta) = 0$$

Nous avons ici un bilan qui ne met en jeu que les deux forces exposées précédemment. On retrouve P la force appliquée sur notre système et θ l'angle que la poutre fait avec la verticale. La variable P symbolise la force appliquée sur le haut de la poutre tandis que la force $k * \theta$ représente la force de ressort oblique lié à la liaison rotule. En effet, nous avons ici $k * \theta$ et non pas $k * x$ car la raideur est ici angulaire, faisant intervenir les moments. Nous avons en effet un déplacement qui se fait en rotation autour de la liaison rotule, laquelle est symbolisé par un système ressort.

En sommes, selon le mode de déformation et le phénomène étudié, ici celui d'une poutre en déplacement oblique, on définit le type de ressort appliqué et ainsi la raideur qui traduit le mieux le comportement du système, ici une raideur angulaire. Pour ce qui est du bilan des forces, étant donnée que nous avons un problème plan, nous allons avoir des forces sur 2 axes. Cependant, notre étude porte sur les points d'équilibre de la poutre en fonction du déplacement de celle-ci. Ainsi, notre déplacement se faisant sur l'axe x, on projette nos forces sur cet axe. En se référant au repère donné sur le schéma, on retrouve :

- $$P * sin(\theta) - k * \theta = 0$$

Par analogie avec l'équation de départ qui accompagne le sujet, on peut en déduire que l'on a ici k = 1 ; ce qui traduit le fait que pour notre cas la résistance à la déformation élastique d'un corps (ici la poutre) est de l'ordre de 1 et supposé constante. Ce qui correspond bien à notre objet d'étude : une poutre sous compression verticale et ne subissant pas de déformations sinon un simple déplacement.

Pour finir, l'application du PFS nous a permis de retrouver l'équation de la statique de notre poutre. Nous allons désormais exploiter cette relation afin de déterminer des points d'équilibres par la méthode de Newton-Raphson.

2 Résolution d'équation non-linéaires

2.1 Méthode Newton-Raphson

Pour réaliser l'étude de notre système, nous faisons la résolution d'une équation algébrique non-linéaire par la méthode de Newton-Raphson qui consiste, à partir d'un nombre initiale et de l'équation de la statique de la poutre, à retrouver un ou plusieurs point(s) d'équilibre du système. Nous rappelons l'équation :

- $-\theta + P * sin(\theta)$; qui décrit l'étude statique de notre système.

Les propriétés fondamentales de la méthode Newton-Raphson sont les suivantes :

- convergence quadratique : à chaque itération le résultat gagne en précision ; ainsi on définit le nombre d'itérations en fonction de la précision souhaitée.
- il y a convergence si :
  - la fonction f est C^2 sur son ensemble de définition ;
  - df(x) $\neq 0$ et de signe constant ;

NB : pour appliquer la méthode de Newton-Raphson il faut écrire la fonction sous la forme $f(x) = 0$; pour notre cas on a $f(x) = -x + Psin(x) = 0$
Notre équation comporte la fonction sinus, ce qui nous permet de déduire qu'elle est au moins C^2. Pour ce qui est de la dérivée de notre fonction on a : $df(x) = -1 + Pcos(x)$

Lorsque l'on réfléchi sur la physique de notre problème, il apparaît évident que la poutre ne peut se déplacer qu'entre $]-\Pi; 0[$ et $]0; \Pi[$. Cela se traduit par le fait que notre poutre ne peut effectuer une rotation que de 180° vers la gauche ou de 180° vers la droite, car après ça elle entre en contact avec la liaison rotule et le mouvement s'en retrouve bloqué. Or, dans notre cas, par l'utilisation de sinus et cosinus dans notre fonction, on va pouvoir se ramener à l'étude d'un intervalle réduit.

En fait, il va y avoir deux choses du au fait que l'on est des fonctions sinus et cosinus dans notre application de la méthode Newton-Raphson (figure 3) :

- notre analyse peut se limiter à celle pour les angles positifs car on va avoir une symétrie au niveau de l'axe des ordonnées, nous permettant de simplifier le problème.;
- on retrouve le fait que pour notre intervalle considéré on a bien θ qui va varier entre d'un côté, $]-\Pi; 0[$ et de l'autre $]0; \Pi[$.

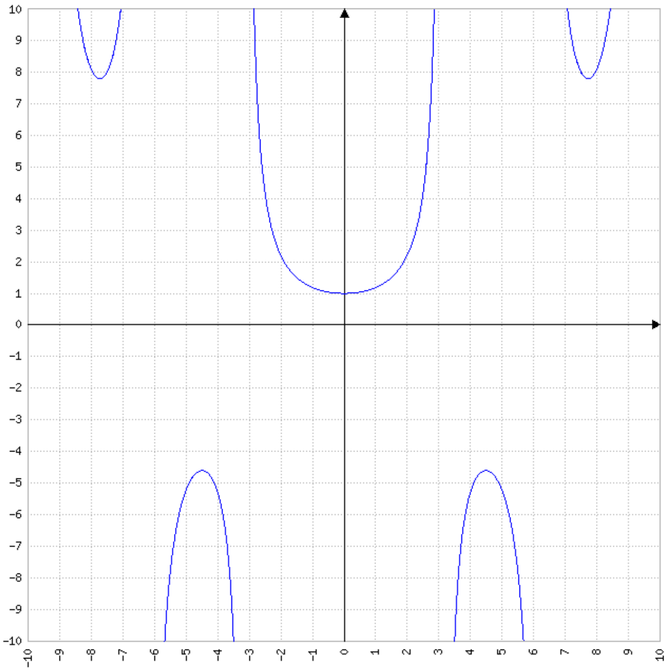

figure 3 : Tracé de notre fonction f(P) = thêta pour un P donné

Maintenant que cet aspect théorique a été introduit nous allons appliquer la méthode de Newton-Raphson, dont voit ci la formule :

- $$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{df(X_n)}$$

Pour ce qui est de la méthode en elle même, elle se base sur la linéarisation et la résolution d'équations plus complexes. Pour cela, on utilise une méthode d'itération qui donne des résultats précis, à condition de choisir un point de départ assez proche du point de convergence final. Une des difficultés de cette méthode consiste donc en le choix de notre point initial. La réussite de cette méthode repose en effet sur le fait que l'on doit avoir un point initial qui est assez proche de la valeur d'équilibre.

2.2 Tracer de courbes : force oblique ou angle initial

Pour engendrer un mouvement dans le cas de notre poutre nous avons deux solutions : instaurer une force oblique ou bien définir un angle initiale non nul. En effet, si jamais la poutre était à la verticale et que l'on appliquait une force elle aussi verticale suivant le même axe, la poutre serait compressée et non déplacée suivant l'axe de rotation de la rotule. Il en va de même pour la condition sur l'angle.

Ainsi, il y a deux alternative qui s'offrent à nous : considérer que la poutre est initialement décalée de l'axe z d'un angle θ, ou bien que la force initiale soit oblique, et pousse donc la poutre selon deux directions, l'amenant à se pencher.

Dans une optique de modéliser cette méthode sous la forme d'un programme, qui nous permettra d'étudier le ou les points d'équilibre du système, j'ai du définir une solution à ce problème et définir la meilleur méthode. Comme nous l'avons dit précédemment, le choix du point initial est primordiale dans l'application de la méthode Newton-Raphson. Ainsi, il faut choisir une solution qui prend en compte l'aspect chaotique de la méthode dès lors que l'on ne répond pas à ces conditions d'applications.

Nous allons voir dans la partie programmation quelle méthode nous avons finalement mis en place.

3 Programme

Une solution au problème précédemment énoncé est l'utilisation d'un développement limité de la fonction sinus. En effet, il nous faut déterminer un point initial proche du point d'équilibre. Plutôt que de définir un angle initial au hasard j'ai donc privilégier l'utilisation de l'hypothèse d'une force oblique. Ainsi, notre étude porte sur des points d'équilibres, et à chaque force P est lié un angle d'équilibre θ. Grâce à cette méthode, on peut définir l'angle θ en fonction de la force P. Ainsi, on approxime l'angle thêta que l'on devrait obtenir afin d'augmenter nos chance de partir avec une valeur initiale qui correspondra aux conditions d'application de la méthode Newton-Raphson. A l'aide d'un développement imité de la fonction sinus à l'ordre 4 on arrive à la relation suivante :

$$\theta = \sqrt[2]{(6 - \frac{6}{P})}$$

Ce que nous apporte cette formule c'est que pour une force donnée, le programme va être capable de calculer une approximation de la valeur de thêta correspondante, et ainsi permettre d'appliquer la méthode. On a en fait cherché à définir un point de départ qui permettait un fonctionnement optimale de la méthode, et l'utilisation d'un développement limité semble être une bonne solution pour cela.

Définir ce point est primordiale dans l'écriture du code. Le reste de la méthode Newton-Raphson étant pour le reste coder dans l'optique de faire participer un maximum l'utilisateur et lui permettre de définir des angles d'équilibres pour des forces données, grâce notamment à une boucle permettant de répéter le code tant que l'utilisateur le souhaite. En fait, après quelques lignes de codes servant à introduire le sujet et montrer que le code c'est bien lancé nous avons deux objectifs :

- Appliquer la méthode de Newton-Raphson pour qu'à une force donnée on puisse définir l'angle θ d'équilibre équivalent;
- et que l'on définisse ensuite pour un maximum de forces, les points d'équilibres.

Ce second point va être l'objet du prochain paragraphe.

Pour généraliser notre étude à tous les points nous avons plusieurs possibilités à notre dispositions :

- Généraliser la méthode Newton-Raphson;
- Ou bien initialiser les angles ou les forces, et utiliser la formule $-\theta + Psin(\theta) = 0$

On pourrait penser que la généralisation de la méthode étudiée est la meilleure solution : elle présente une bonne précision et amène à un résultat après quelques itérations seulement. Toutefois, sur ce point comme sur celui qui inclue l'initialisation de la force pour déterminer les angles d'équilibres, ce procédé n'est pas concluant dans notre cas. En effet : les deux méthodes cités ci-dessus sont basé sur notre utilisation d'un développement limité pour définir l'angle θ en fonction de P. Or, si nous avons pu utiliser cette approximation précédemment c'est parce qu'on l'utilise afin de définir la valeur de départ de la méthode Newton-Raphson. Dans l'égalité suivante:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{df(X_n)}$$

l'utilisation du développement limité permet de définir la variable X_0. Ensuite, c'est le reste du programme qui s'occupe de faire des itérations jusqu'à arriver à l'angle d'équilibre avec la précision souhaité. Néanmoins, on voit que cette simplification ne s'applique pas à une utilisation directe pour définir les angles d'équilibre. En fait, l'utilisation du développement limité ne permet qu'une approximation de l'angle d'équilibre finale pour une force donnée, et non pas la valeur exacte. Par ailleurs, même si la méthode Newton-Raphson présente une bonne précision, on voit d'après la formule suivante que l'on ne peut pas l'appliquer à toutes les forces :

$$\theta = \sqrt[2]{(6 - \frac{6}{P})}$$

Le DL montre que notre étude ne peut concerner des forces comprises entre 0 et 1, et qu'elle nous limite à une certaine force : le terme $6/P$ devenant de plus en plus négligeable avec la force qui augmente, faisant tendre la valeur de θ vers la valeur de $\sqrt[2]{6}$ pour des forces trop élevées.

Au final, pour boucler notre étude et définir les positions d'équilibres, l'idée va être d'initialiser les angles, de définir les valeurs de P correspondantes et de finalement pouvoir tracer la courbe introduite dans la première partie (Figure 2). Par une étude visuelle de la courbe on retrouve le fait que P n'est pas définis pour des valeurs inférieures à 1.

pour finir, notre programme permet de définir les points d'équilibre de notre système, nous permettant d'avoir une idée visuelle de son évolution au cours du temps :

- La variable p n'est pas définis pour des forces inférieures à 1 ;
- Au bout d'un certain angle dépassé, la poutre ne se déplace quasiment plus et il faut appliquer de très grande force pour obtenir un léger déplacement (figure 3 en annexe) ;
- Notre angle a pour maximum la valeur de Π ; notre poutre subit donc au maximum un déplacement de $180°$, soit un demi tour.

Pour ce qui est de la méthode Newton-Raphson, on voit d'après la compilation du programme que pour de petites précisions (de l'ordre du centième) il n'est, la majorité du temps, nécessaire que de 4 itérations pour arriver à la valeur de l'angle d'équilibre. La résolution de notre équation paraissant peu conventionnel du à la présence du sinus, on voit que grâce à cette méthode on arrive à résoudre notre fonction non linéaire et attribuer des angles d'équilibre à des forces données.

Caractériser notre problème devient donc beaucoup plus évident, même si une généralisation de cette méthode pour toutes les forces n'est pas permise avec nos considérations. Toutefois, la méthode est généralisable pour une certaine intervalle et il me semble que ce n'est qu'à partir du moment que la poutre bouge très peu malgré la force qui augmente que notre généralisation de la méthode Newton-Raphson s'arrête.

En fait, il semblerait que la généralisation s'arrête pour des forces pour lesquelles le déplacement devient négligeable; Ainsi, la généralisation de la méthode Newton-Raphson permet tout de même l'étude de notre poutre sur la plage où la variation angulaire est la plus intéressante, malgré le fait qu'elle ne permette pas l'étude complète de notre fonction.

4 Conclusion

Pour conclure, on a réussit à mettre sous la forme d'un programme la méthode Newton-Raphson et à l'utiliser pour caractériser notre problème. Pour pallier au problème de la généralisation exposé précédemment, nous avons mis en place une boucle permettant à l'utilisateur d'étudier autant de forces qu'il souhaite. On a par ailleurs réussis à obtenir une compréhension visuelle de notre problème par l'initialisation des valeurs de thêta et le tracer des courbes qui lient les valeurs de thêta aux forces.

On a en sommes su étudié notre système pour la cas statique et modéliser une résolution d'équation non-linéaire par un codage de la méthode Newton-Raphson.

Ce type d'étude peut permettre l'étude de systèmes complexes, dépendant de variables multiples et ayant un comportement non prévisible comme une étude portant sur des ponts par exemple. Cette recherche donne une esquisse des types de procédés qu'il est nécessaire d'effectuer pour étudier un problème plus complexe prenant par exemple en compte des déformations et des mouvements.

5 Mots clés

Mots clés : flambage, équilibre statique, structure isostatique, contraintes internes, méthode de Newton-Raphson, fonction récursive, force de ressort.

6 Bibliographie

1 Théorie et cours de base $https : //www.emse.fr/\ badel/12-01-06_COURS_RDM_FULL.pdf$

Compréhension de la méthode de Newton-Raphson

2 $https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/04_continuite_derivabilite_fonc$

3 Schéma : $https://fr.wikipedia.org/wiki/M$

4 $http://www.cinam.univ-mrs.fr/klein/teach/mip/numeriq/node25.html$

Site qui aide sur la compréhension du problème et qui aide avec le sinus

5 $http://www.math.ubc.ca/\ anstee/math104/newtonmethod.pdf$