Examen du 11 Mai 2017
Éléments de corrigé

Problème : transport par advection-diffusion

Partie 1

1) $\operatorname{div}(w\vec{V}) = \underbrace{\operatorname{grad} w}_{\vec{\nabla} w} \cdot \vec{V} + w(\underbrace{\operatorname{div}\vec{V}}_{0}) = \vec{V}\cdot\vec{\nabla} w$

Alors,

$$\int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx = \int_\Omega \nabla\cdot(\vec{V} u v)\, dx - \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} v)\, u\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \vec{n}\cdot\vec{V} \underbrace{u}_{0}\underbrace{v}_{0}\, ds - \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} v)\, u\, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx = -\int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} v)\, u\, dx.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\vec{V}\,\vec{\nabla} u)\, v\, dx$$

et $\frac{1}{2}\int_\Omega (\vec{V}\,\vec{\nabla} u)\, v\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} v)\, u\, dx$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v - (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} v)\, u\right] dx.$$

2). On multiplie l'équ (1) par $v \in H^1_0(\Omega)$ et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega (-\nu\Delta u)\, v\, dx + \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx + \int_\Omega \alpha u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

$$\int_\Omega (-\nu \Delta u)\, v\, dx \underset{\text{Formule de Green}}{=} -\int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{v}_{0}\, ds + \int_\Omega \nu\, \vec\nabla u \cdot \vec\nabla v\, dx$$

$$= \int_\Omega \nu (\vec\nabla u \cdot \vec\nabla v)\, dx$$

En utilisant le résultat de la question 1) on trouve :

$$\underbrace{\nu \int_\Omega (\vec\nabla u \cdot \vec\nabla v)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \vec V \cdot (v \vec\nabla u - u \vec\nabla v)\, dx + \alpha \int_\Omega u v\, dx}_{a_1(u,v)} =$$

$$= \underbrace{\int_\Omega f v\, dx}_{L(v)}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

On a montré donc que u est solution du problème :

$$(PV_1) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ a_1(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

3). a_1 est linéaire par rapport à chacune des variables car les opérateurs $\vec\nabla$ et $\int_\Omega$ sont linéaires, donc

$$a_1(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a_1(u_1, v) + a_1(u_2, v)$$

et $a_1(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a_1(u, v_1) + a_1(u, v_2)$

De même, L est linéaire car $\int_\Omega$ est un opérateur linéaire et donc

$$\underbrace{\int_\Omega f(\lambda v_1 + v_2)\, dx}_{L(\lambda v_1 + v_2)} = \lambda \underbrace{\int_\Omega f v_1\, dx}_{L(v_1)} + \underbrace{\int_\Omega f v_2\, dx}_{L(v_2)}$$

4) L'application $a_1(\cdot,\cdot)$ n'est pas symétrique car si c'était le cas on aurait :

$$\nu \cancel{\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx} + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\,dx + \alpha \cancel{\int_\Omega uv\,dx} =$$

$$= \nu \cancel{\int_\Omega \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u \, dx} + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)\,dx + \alpha \cancel{\int_\Omega vu\,dx}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \vec{V}(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v)\,dx = 0 \quad \forall u,v.$$

Or cette égalité est fausse en général.

Pour que a_1 soit symétrique il suffit que $\vec{V}=0$.

5). Pour démontrer la continuité il faut montrer que $\exists M>0$ tel que :

$$|a_1(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \quad \forall u,v \in H^1_0(\Omega)$$

$$|a_1(u,v)| \leq \nu\left|\int_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, dx\right| + \left|\int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla}u)\, v\, dx\right| + \alpha\left|\int_\Omega uv\,dx\right|$$

On va estimer chaque intégrale :

$$\left|\int_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v \, dx\right| \leq \sum_{i=1}^{3}\left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2}$$

$$\leq \|\vec{\nabla}u\|_{L^2(\Omega)}\|\vec{\nabla}v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \nu\left|\int_\Omega (\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)\,dx\right| \leq \nu\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Le champ $\vec{V}$ est continu sur Ω $\Rightarrow \exists M_1, M_2, M_3 > 0$ constantes telles que $|V_i(x)| \leq M_i$, $\forall i \in \{1,2,3\}$

$$\Rightarrow \left| \int_\Omega (\vec{V}\cdot\vec{\nabla} u)\, v\, dx \right| \leq \sum_i \int_\Omega M_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right| dx \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \sum_i M_i \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \max\{M_1, M_2, M_3\} \, \|v\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2}}$$

$$\leq \max\{M_1, M_2, M_3\} \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\alpha \left| \int_\Omega u v\, dx \right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On additionne les intégrales :

$$|a_1(u,v)| \leq \underbrace{(\nu + \max\{M_1, M_2, M_3\} + \alpha)}_{M} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

ce qui prouve la continuité de $a(\cdot,\cdot)$.

6). $a_1(v,v) = \nu \int_\Omega (\vec{\nabla} v)^2 dx + 0 + \alpha \int_\Omega v^2 dx \geq \underbrace{\min(\nu, \alpha)}_{\alpha_0} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$

donc a_1 est coercive

7) $|L(v)| = \left| \int_\Omega f v\, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|f\|_{L^2(\Omega)}}_{C} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

$\exists C > 0$ tq. $|L(v)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$C = \|f\|_{L^2(\Omega)}$

$\Rightarrow$ L = continue

8). On applique le théorème de Lax-Milgram :

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{bilinéaire, continue, coercive} \\ L = \text{linéaire, continue} \\ (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1}) = \text{espace de Hilbert} \end{array}\right\} \Rightarrow (PV_1) \text{ a une solution unique.}$$

9). Si u est solution du (PV_1), alors :

$$a_1(u,u) = L(u) \qquad (*)$$

Or $|L(u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$

et $a_1(u,u) \geq \nu \int_\Omega (\vec{\nabla} u)^2 \, dx$

Inégalité de Poincaré : $\exists\, C_0 > 0$ t.q.

$$\int_\Omega v^2 \, dx \leq C \int_\Omega (\vec{\nabla} v)^2 \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On écrit l'inégalité de Poincaré pour u et on trouve :

$$a_1(u,u) \geq \nu \int_\Omega (\vec{\nabla} u)^2 \, dx \geq \frac{\nu}{C} \underbrace{\int_\Omega u^2 \, dx}_{= \|u\|^2_{L^2}} \qquad (**)$$

On combine $(*)$ et $(**)$:

$$\frac{\nu}{C} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \nu, \ \forall \alpha.$$

$K = C =$ constante de Poincaré, indépendante de α et ν.

Partie 2

1). Comme $\operatorname{div}(\vec{V} u) = (\operatorname{div} \vec{V})\, u + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u$

on obtient :

$$\int_\Omega (\vec{V} \cdot \nabla u) v \, dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_\Omega \vec{V} (v \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} v) dx}_{a_1(u,v)} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{V}) u v \, dx}_{c(u,v)}$$

Donc u vérifie la formulation $(PV2)$.

2) La bilinéarité de $a_2(u,v)$ repose sur celle de $a_1(\cdot,\cdot)$ et $c(\cdot,\cdot)$.

$a_1(u,v)$ — continue (question 5)

$c(u,v)$ — continue car

$$|c(u,v)| \leq \underbrace{\frac{M_1+M_2+M_3}{2}}_{M_c} \left| \int_\Omega uv \right| dx \leq M_c \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq M_c \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$\Rightarrow$ $a_2 = a_1 + c$ est continue aussi.

3). On a :

$$a_2(u,u) = \nu \int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 dx + \int_\Omega \left(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{V}\right) u^2 dx$$

Mais $\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{V} \geq -\frac{\nu}{K} + \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad a_2(u,u) \geq \nu \int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 dx + \int_\Omega \left(-\frac{\nu}{K} + \varepsilon\right) u^2 dx$$

Si $-\frac{\nu}{K} + \varepsilon > 0 \Rightarrow a_2(u,u) \geq \nu \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \geq \frac{\nu}{K+1} \|u\|_{H^1}^2$

$K = C =$ cte de Poincaré

ce qui prouve la coercivité de a_2

- Si $-\frac{\nu}{K} + \varepsilon \leq 0$ alors

$$\int_\Omega u^2 dx \leq K \int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 dx.$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\nu}{K}+\varepsilon\right)\int_\Omega u^2 dx \geq \left(-\frac{\nu}{K}+\varepsilon\right) K \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$$

$$\Rightarrow a_2(v,v) \geq \underbrace{\left[\nu + \left(-\frac{\nu}{K}+\varepsilon\right) K\right]}_{\cancel{\nu} - \cancel{\nu} + \varepsilon K} \int_\Omega (\vec{\nabla} u)^2 dx.$$

$$\geq \frac{\varepsilon K}{K+1} \|u\|^2_{H^1} \Rightarrow a_2 \text{ est coercive}.$$

41. On applique de nouveau Lax-Milgram