Signaux et Systèmes
Cours n°3

Mohamed CHETOUANI
Professeur des Universités
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
Sorbonne Université

mohamed.chetouani@sorbonne-universite.fr

Résumé cours 2

- Introduction à l'analyse spectrale
- Séries de Fourier
- Transformée de Fourier

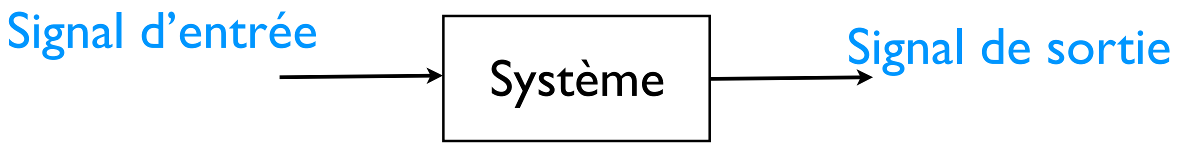
- Connaître les transformations des signaux usuels, les propriétés...

Plan

- Systèmes de transmission et de filtrage
- Produit de convolution
- Théorème de Plancherel

Systèmes de transmission, de commande...

- Définition:
- Un système peut-être défini comme un ensemble d'éléments exerçant collectivement une fonction déterminée.
- Un système communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de grandeurs (souvent fonction du temps), appelés signaux.
- Un système peut-être composé d'un certain nombre d'entrées M et de sorties N.
- L'application des signaux d'entrée génèrent des signaux de sortie que l'on appelle respectivement excitation et réponse du système.



Systèmes réels, linéaires, invariants, causaux

- Un système est dit réel si les excitations (entrées) et les réponses (sorties) sont des fonctions réelles.
- Un système est dit linéaire si la réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la combinaison linéaire des réponses:
- Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les réponses du système correspondant respectivement aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, si on applique une combinaison linéaire de ces entrées:

$$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$$

- alors on obtient la sortie suivante:

$$y(t) = a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$$

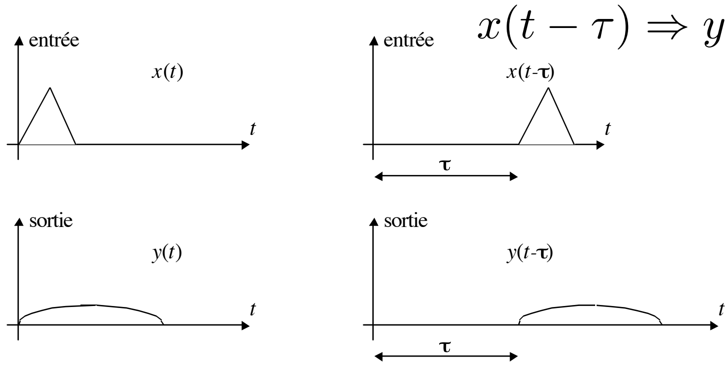
- Remarque : Cette propriété de linéarité est également appelée principe de superposition.

Systèmes réels, linéaires, invariants, causaux

- Un système est dit invariant si la réponse du système à une entrée x(t) différée d'un temps τ est la même réponse y(t) mais différée de τ:
- Ce qui se traduit par la relation suivante:

$$x(t) \Rightarrow y(t)$$

$$x(t-\tau) \Rightarrow y(t-\tau)$$



Systèmes réels, linéaires, invariants, causaux

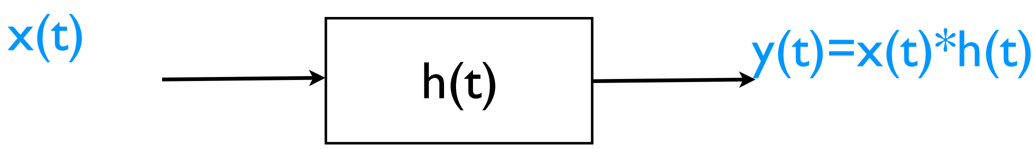
- Un système est dit causal si l'effet (la sortie) ne précède pas la cause (l'entrée).
- Les systèmes physiques sont réels, le plus souvent linéaires (du moins on en fait l'hypothèse), invariants et causaux.

$$y(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Signal d'entrée → Système → Signal de sortie

Réponses temporelles des systèmes à une entrée quelconque...

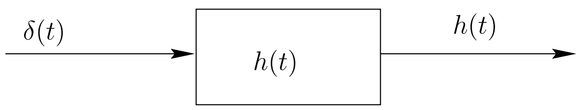
- La réponse y(t) d'un système linéaire à une entrée quelconque x(t) peut s'exprimer sous la forme d'un produit de convolution entre le signal d'entrée x(t) et la réponse impulsionnelle h(t)



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Réponses temporelles des systèmes à une entrée quelconque...

- Réponse impulsionnelle h(t): réponse du système à l'application d'une impulsion de Dirac



- Le système étant linéaire et invariant, la réponse associée à

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

Réponses temporelles des systèmes à une entrée quelconque...

- Le signal x(t) peut s'écrire sous la forme infinie de composantes à base d'impulsions de Dirac

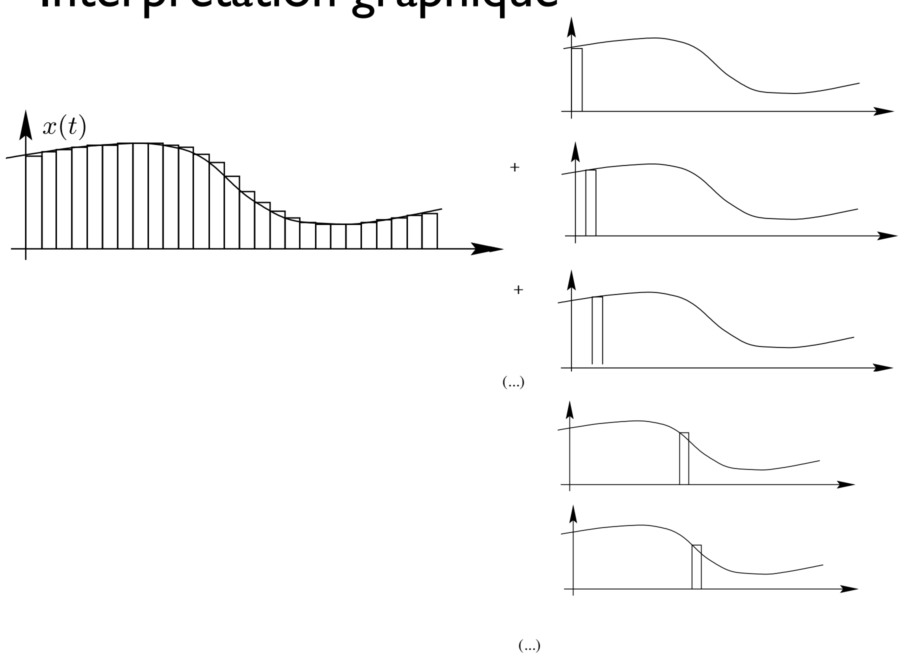
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- La réponse du système à une entrée x(t) est donc:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Réponses temporelles des systèmes à une entrée quelconque...

- Interprétation graphique



Propriétés du produit de convolution

- Commutativité: x(t)*g(t) = g(t)*x(t)
- Distributivité: [x(t)+s(t)]*g(t) = x(t)*g(t)+s(t)*g(t)
- Associativité [x(t)*s(t)]*g(t) = x(t)*[s(t)*g(t)]
- Dérivation: [x(t)*y(t)]'=x'(t)*y(t)=x(t)*y'(t)

Propriétés du produit de convolution

- Dirac: élément neutre du produit de convolution

$$\delta(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) g(t) d\tau$$

$$= g(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

$$= g(t)$$

Propriétés du produit de convolution

- Elément de translation

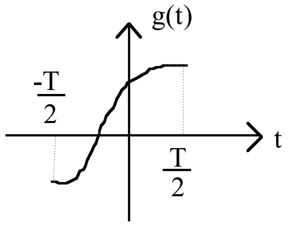
$$\delta(t-t_0) * g(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) g(t-\tau) d\tau$$
$$= g(t-t_O)$$

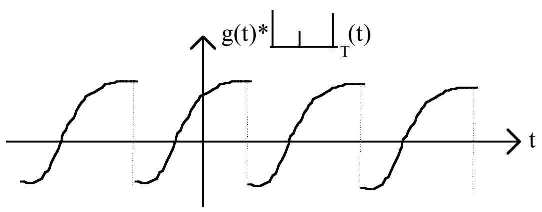
Propriétés du produit de convolution

- Convolution avec un peigne de Dirac

$$|\_\text{I}\_|_T(t) * g(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(t-kT) * g(t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t-kT)$$

- Exemple: Soit le signal g(t) défini entre [-T/2;T/2]
Que vaut g(t) convoluer avec le peigne de Dirac?

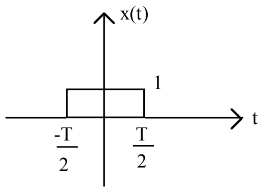


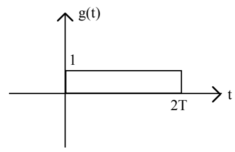


Propriétés du produit de convolution

- On considère les signaux suivants:

$$x(t) = \prod_{\frac{T}{2}}(t) \text{ et } g(t) = \prod_{T}(t - T)$$





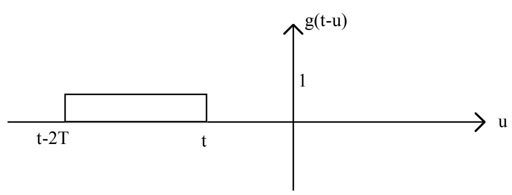
- Calculons y(t)=x(t)*g(t)

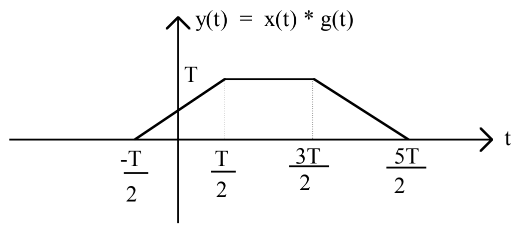
Propriétés du produit de convolution

- On considère les signaux suivants:

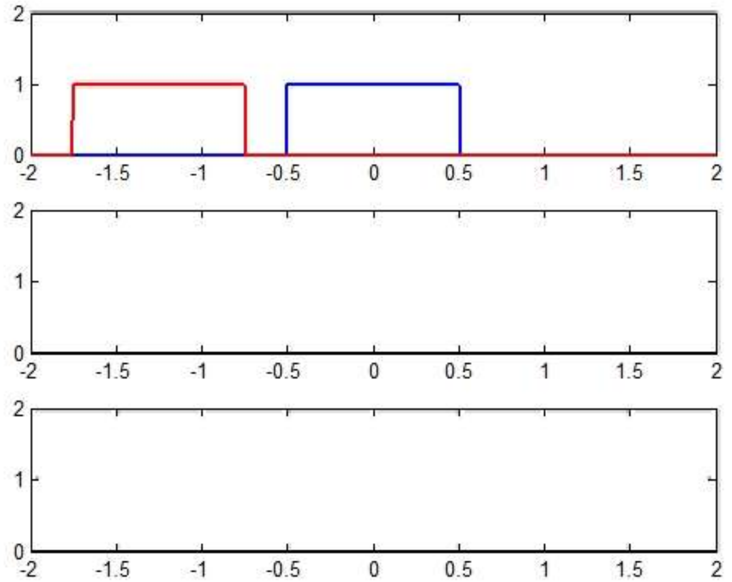
$$x(t) = \prod_{\frac{T}{2}}(t) \text{ et } g(t) = \prod_{T}(t - T)$$

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(t-u)du$$

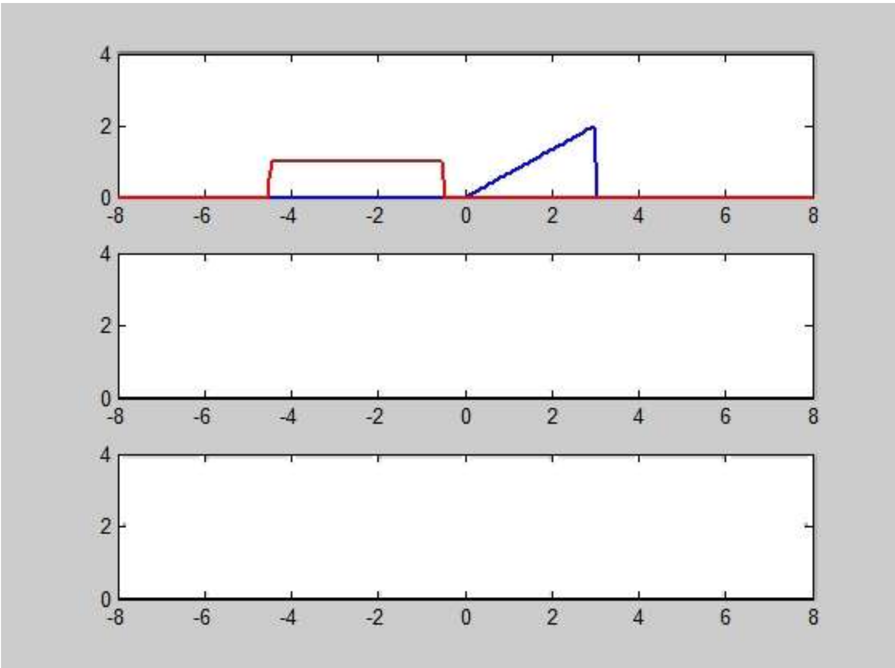




Exemples:



Exemples:



Produit de convolution d'un système causal

- Un système est dit causal, si la sorite ne dépend que des valeurs de l'entrée précédent la sortie
- h(t)=0 pour t<0

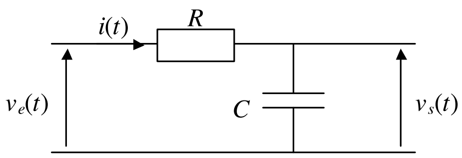
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

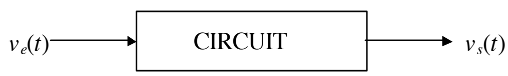
$$= \int_{0}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Application à la réponse d'un circuit RC

- Un circuit RC est un système linéaire



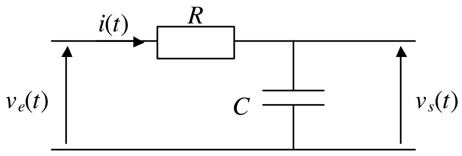


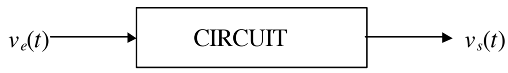
- Modélisation par un produit de convolution:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Application à la réponse d'un circuit RC

- Que vaut la réponse impulsionnelle h(t)?





- Réponse impulsionnelle d'un circuit RC:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Application à la réponse d'un circuit RC

- Réponse à un échelon

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{RC} \int_{O}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{RC} \left[RCe^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(t-\tau) \right]_0^t \quad = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$$

Et maintenant dans le domaine fréquentiel

- Le produit de convolution permet de décrire la sortie d'un système caractérisé par sa réponse impulsionnelle.
- On peut également caractérisé un système dans le domaine fréquentiel (filtrage, transmission de signaux...)
- On considère un système de réponse impulsionnelle h(t) et d'entrée x(t) $x(t) = X_0 e^{2\pi j f_o t}$

La sortie est donnée par le produit de convolution:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X_0 e^{2\pi j f_o (t-\tau)} d\tau$$

Et maintenant dans le domaine fréquentiel

La sortie est donnée par le produit de convolution:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X_0 e^{2\pi j f_o (t-\tau)} d\tau$$

$$= X_0 e^{2\pi j f_o t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-2\pi j f_o \tau} d\tau$$

Gain complexe ou fonction de transfert H(f) du système: TF de h(τ)

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-2\pi j f_o \tau} d\tau$$

Et maintenant dans le domaine fréquentiel

La sortie y(t) s'écrit alors:

$$y(t) = X_0 e^{2\pi j f_o t} H(f_0)$$

- Pour un système linéaire excité par une excité par une exponentielle complexe de fréquence f_0, la sortie un signal de même fréquence.

Et maintenant dans le domaine fréquentiel

- Un signal x(t) quelconque peut s'exprimer comme une somme infinie d'exponentielles complexes (via la Transformée de Fourier inverse):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df$$

- A chacune des composantes: $X(f) e^{2\pi j f t}$

correspond alors une sortie: $X(f) H(f) e^{2\pi j f t}$

- Par superposition: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) H(f) e^{2\pi j f t} df$

Et maintenant dans le domaine fréquentiel

- On en déduit que la transformée de Fourier de la sortie, Y(f), vaut:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- On obtient alors le Théorème de Plancherel:

$$\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] \rightarrow X(f)Y(f)$$

$$\mathrm{TF}[x(t)y(t)] \rightarrow X(f) * Y(f)$$

Relation entre Série de Fourier et TF

- Soit x(t) un signal périodique de période T, il peut être décomposé en série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2\pi jnt}{T}}$$

- En prenant la TF de cette expression, on obtient X(f):

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Relation entre Série de Fourier et TF

- Soit $x_T(t)$ le signal tronqué (correspondant à un motif):

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } t \in \left[-\frac{T}{2} , \frac{T}{2} \right[\\ 0 \quad \text{Ailleurs} \end{cases}$$

- x(t) s'exprime comme une convolution de $x_T(t)$ et un peigne de Dirac:

$$x(t) = x_T(t) * Ш_T(t)$$

- Et en prenant la TF: $X(f) = \frac{1}{T} X_T(f)\, Ш_{\frac{1}{T}}(f)$

Relation entre Série de Fourier et TF

- En comparant la décomposition en série de Fourier et la TF

$$X(f) = \frac{1}{T} X_T(f)\, Ш_{\frac{1}{T}}(f) \qquad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

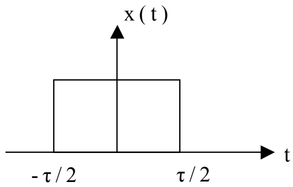
- On en déduit la relation: $C_n = \frac{X_T\left(\frac{n}{T}\right)}{T}$

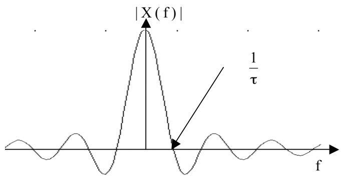
Le spectre d'un signal périodique est discret

Relation entre Série de Fourier et TF

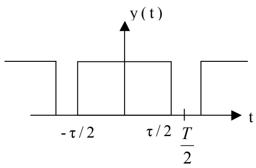
- Exemple: TF de la fonction porte

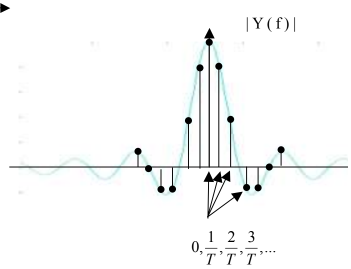
$$x(t) = \prod\nolimits_{\tau/2}(t) \qquad X(f) = \tau \sin c(\pi f \tau)$$





y(t) «périodisé» de x(t)





Résumé

- Modélisation de la réponse d'un système par un produit de convolution
- Propriétés du produit de convolution
- Théorème de Plancherel
- Relation TF - Série de Fourier
- Connaître ces propriétés...