

## Analyse vectorielle, intégrales multiples

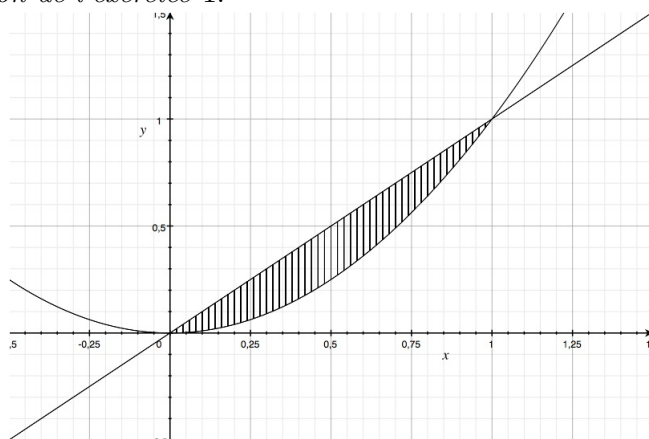
Examen première session décembre 2016

Deux heures, documents, portables et calculatrices interdits.

**Exercice 1 :** (Les questions a, b, c et d sont indépendantes) Soit  $P$  une plaque dont la surface est comprise entre les graphes des fonctions  $y = x^2$  et  $y = x$  avec  $x \in [0, 1]$ .

- a) Dessiner  $P$ .
- b) Calculer la surface de  $P$ .
- c) On suppose que  $f(x, y) = xy$  est la densité de masse de la plaque  $P$ . Calculer la masse  $M$  de  $P$ .
- d) Soit  $\omega$  la 1-forme  $ydx + xdy$ .
  - i) Paramétrer le bord orienté  $\partial P$  de  $P$  et en déduire un calcul de  $\int_{\partial P} \omega$ .
  - ii) Calculer  $d\omega$  et en déduire un autre calcul de  $\int_{\partial P} \omega$ .

*Solution de l'exercice 1.*



- a)
- b) La surface de  $P$  est donnée par l'intégrale  $\int_P dx dy$  qui vaut par le théorème de Fubini (domaine compris entre le graphe de deux fonctions)

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^x dy \right) dx = \int_0^1 [x - x^2] dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

- c) La masse de  $P$  est donnée par l'intégrale  $M = \int_P f(x, y) dx dy$  donc par le théorème de Fubini, on obtient

$$M = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^3 - x^5] dx = 1/2 [1/4 - 1/6] = 1/24.$$

- d) i) On paramètre le bord de  $P$  par deux fonctions définies pour  $x \in [0, 1]$  par  $\sigma_1(x) = (x, x^2)$  et  $\sigma_2(x) = (1 - x, 1 - x)$  On obtient

$$\int_{\sigma_1} \omega = \int_0^1 x^2 dx + x d(x^2) = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$$

et

$$\int_{\sigma_2} \omega = \int_0^1 (1-x)d(1-x) + (1-x)d(1-x) = - \int_0^1 2-2xdx = -1$$

ce qui implique que  $\int_{\partial P} \omega = 1 - 1 = 0$ .

ii) On a  $d\omega = dy \wedge dx + dx \wedge dy = 0$  donc par la Formule de Stokes sur  $P$ , on a

$$\int_{\partial P} \omega = \int_P d\omega = \int_P 0 = 0.$$

**Exercice 2 :** On considère les 1-formes  $\alpha = (x^2 + y^2)dx + 2xydy$  et  $\beta = y^3dx + xdy$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta$  à l'aide du changement de variables  $u = \cos(\theta)$ .
- Calculer l'intégrale de  $\alpha$  sur le cercle unité  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ .
- Calculer  $d\alpha$  et  $d\beta$ .
- Existe-t-il une fonction  $f$  telle que  $df = \alpha$ ? Si oui, trouver  $f$ .
- Existe-t-il une fonction  $g$  telle que  $dg = \beta$ ? Si oui, trouver  $g$ .
- Que signifient ces résultats en termes de champs de vecteurs?
- Retrouver l'intégrale de  $\alpha$  sur le cercle unité  $S^1$  par une autre méthode.

*Solution de l'exercice 2.*

- On a  $\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = - \int_1^{-1} u^2 du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = 0$ .
- On paramètre le cercle unité par  $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ . On a

$$\begin{aligned} M^*\alpha &= (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))d(\cos \theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)d(\sin \theta) \\ &= d(\cos \theta) - 2\cos^2(\theta)d(\cos \theta). \end{aligned}$$

L'intégrale de  $\alpha$  le long du cercle donne donc

$$\int_{S^1} \alpha = \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos^2(\theta)]d(\cos \theta) = \left[ \cos \theta - 2\frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

- On a  $d\alpha = 2ydy \wedge dx + 2ydx \wedge dy = 0$  et  $d\beta = 3y^2dy \wedge dx + dx \wedge dy = [1 - 3y^2]dx \wedge dy \neq 0$ .
- Comme  $d\alpha = 0$  ( $\alpha$  fermée) et que  $\alpha$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  domaine sans trou, le Lemme de Poincaré implique que  $\alpha$  est exacte, i.e., admet une primitive  $f$ . On peut choisir  $f = x^3/3 + y^2x + c$  avec  $c$  constante réelle.
- Comme  $d\beta \neq 0$ ,  $\beta$  n'est pas fermée donc n'admet pas de primitive.
- En termes de champs de vecteurs, ceci signifie que  $\vec{V} = (x^2 + y^2, 2xy)$  est un champ dont le rotationnel scalaire est nul et égal au champ gradient de  $f$  et que  $\vec{W} = (y^3, x)$  est de rotationnel scalaire non nul donc n'est pas un champ gradient.
- La formule de Stokes nous donne, si  $D^1$  est le disque unité de bord  $S^1$ , que

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{D^1} d\alpha = 0.$$

**Exercice 3 :** On considère le domaine  $V$  dont le bord est composé de la demi-sphère

$$S = \{(x, y, z), z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

du cylindre

$$C = \{(x, y, z), -1 \leq z \leq 0, x^2 + y^2 = 1\},$$

et du disque

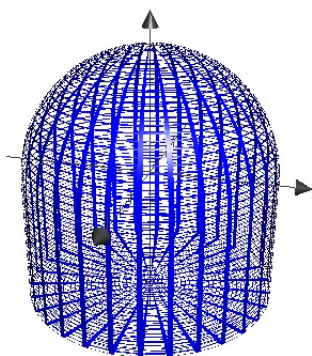
$$D = \{(x, y, z), z = -1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- a) Dessiner  $V$ .
- b) On va calculer le volume de  $V$ .
  - i) Donner une paramétrisation de la demi-boule  $B = \{(x, y, z), z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , et en déduire son volume.
  - ii) Donner une paramétrisation du cylindre plein  $E = \{(x, y, z), -1 \leq z \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$  et en déduire son volume.
  - iii) En déduire le volume de  $V$ .
- c) On oriente le bord  $\partial V$  de  $V$  en utilisant la normale extérieure. Soit

$$\omega = (x + y) dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

- i) Calculer  $d\omega$ .
- ii) En déduire un calcul rapide de la valeur de l'intégrale  $\int_{\partial V} \omega$ .
- iii) Que signifie cette intégrale en termes de champs de vecteurs?
- d) (Question bonus) Calculer  $\int_D \omega$  avec  $D$  orienté par la normale vers le haut, et déduire des résultats précédents un calcul de  $\int_{S \cup C} \omega$  avec  $S \cup C$  orienté vers l'extérieur de  $V$ .

*Solution de l'exercice 3.*



- a)
- b) i) On paramètre par les coordonnées sphériques  $(r, \phi, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$  par  $\sigma_1(r, \phi, \theta) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$  (attention,  $\phi$  et  $\theta$  sont inversés dans les conventions de l'amphi A). Le Jacobien est  $r^2 \sin(\phi)$ . On obtient par Fubini

$$\int_B dx \wedge dy \wedge dz = \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\phi) d\theta \right) d\phi \right) dr = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

- ii) On paramètre par les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-1, 0]$  par  $\sigma_2(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  avec pour Jacobien  $r$ . On obtient par Fubini

$$\int_E dx \wedge dy \wedge dz = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-1}^0 r dz \right) d\theta \right) dr = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\pi = \pi.$$

- iii) On obtient que le volume de  $V$  est  $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ .

- c) i) On a

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz.$$

- ii) La formule de Stokes nous donne que

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_V 3dx \wedge dy \wedge dz = 3 \cdot \text{Vol}(V) = 5\pi.$$

- iii) C'est le flux du champ de vecteur  $\vec{V} = (x+y, y, z)$  à travers le bord de  $V$ , orienté en utilisant la normale extérieure à  $V$ .

- d) Soit  $\sigma(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -1)$  avec  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  la paramétrisation standard de  $D$  (orienté par la normale vers le haut). On a  $\sigma^*(dz) = d(-1) = 0$  donc les deux premiers termes de  $\sigma^*\omega$  s'annulent et on obtient  $\sigma^*\omega = -1 \cdot \sigma^*(dx \wedge dy) = -rdr \wedge d\theta$ . Par Fubini, on a

$$\int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sigma^*\omega = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} -r d\theta \right) dr = \frac{-1}{2} 2\pi = -\pi.$$

On a  $\int_{\partial V} \omega = \int_{S \cup C} \omega + \int_D \omega$  donc

$$\int_{S \cup C} \omega = \int_{\partial V} \omega - \int_D \omega = 5\pi + \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sigma^*\omega = 5\pi - \pi = 4\pi.$$

On aura pris soin ici de remarquer que l'orientation de  $D$  induite par la normale extérieure à  $V$  est opposée à celle donnée par sa paramétrisation polaire ci-dessus, d'où le changement de signe.