Signaux et Systèmes
Cours n°6

Mohamed CHETOUANI
Professeur des Universités
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
Sorbonne Université

mohamed.chetouani@sorbonne-universite.fr

Plan

- Système du 1er Ordre
- Système du 2nd Ordre

Système du 1er Ordre

- Equation différentielle:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ke(t)$$

- Fonction de transfert (CI=0):

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

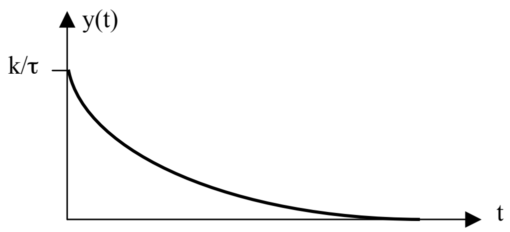
Gain statique

Constante de temps

Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

- Réponse impulsionnelle

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$



- Par fonction de transfert:

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

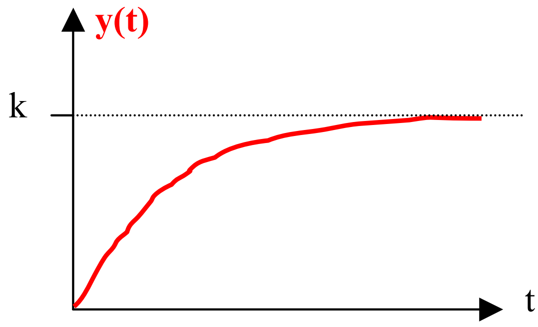
- Réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} \times \frac{1}{p}$$

- TL inverse

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$



Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

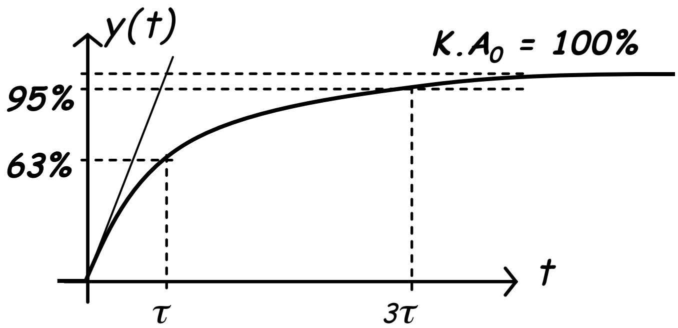
- Réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

- Quelques valeurs:

Temps de réponse à 5%



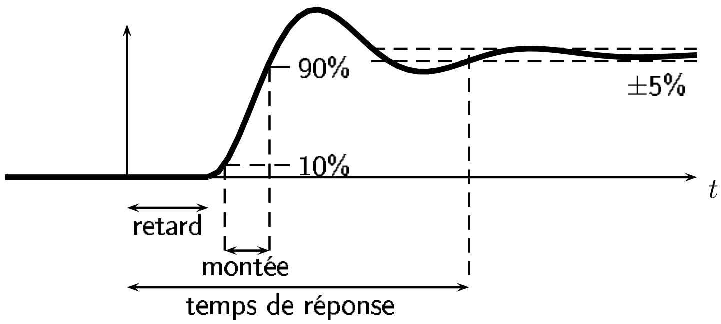
Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

- Réponse indicielle (réponse à un échelon)

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

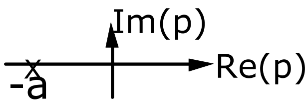
- Quelques valeurs:



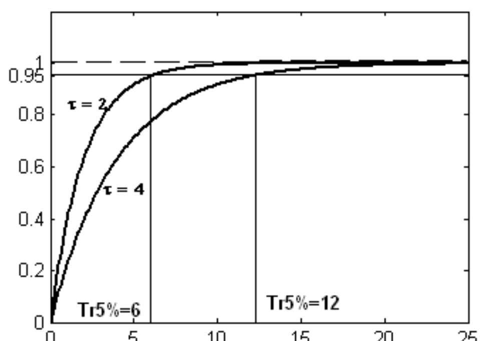
Système du 1er Ordre: Réponses temporelles

- Relation constante de temps et pôle

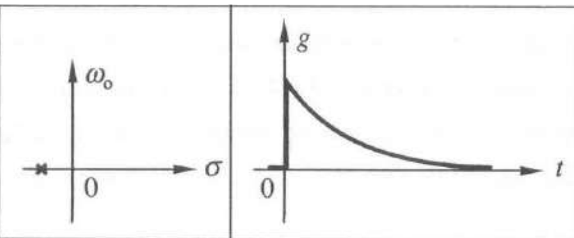
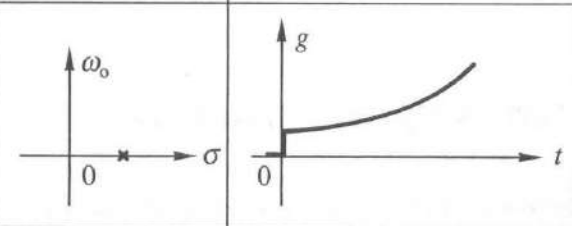
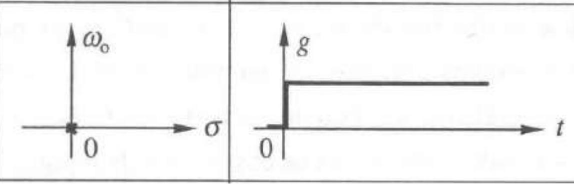
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \qquad \frac{1}{p + a}$$



- Effets du pôle sur le temps de réponse



Pôles et réponses temporelles

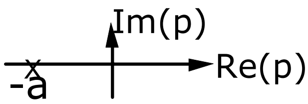
Réel négatif		Asymptotiquement stable
Réel positif		Instable
Nul (Multiplicité = 1)		Marginalement stable

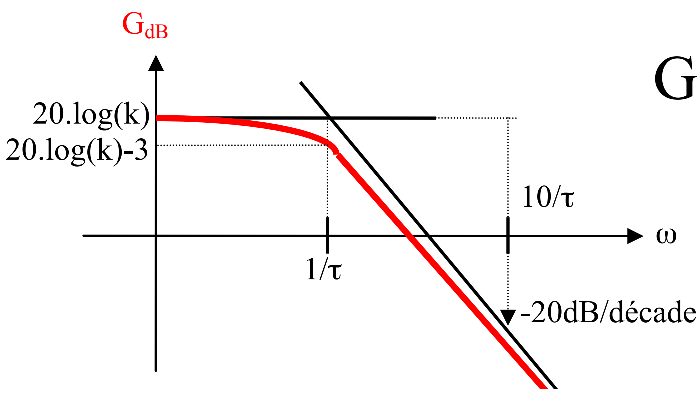
Système du 1er Ordre: Réponse fréquentielle

- Diagramme de Bode

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\frac{1}{p+a}$$





$$G(j.\omega) = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega}$$

$$\boxed{G_{dB} = 20.\log_{10} \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}}}$$

Réponses des systèmes

- Equation différentielle

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots + a_{n-i} \frac{d^{n-i} s}{dt^{n-i}} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e + b_1 \frac{ds}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}$$

- La solution générale s'obtient en faisant la somme :
  - de la solution générale s1(t) de l'équation sans second membre
  - d'une solution particulière s2(t) de l'équation avec second membre
- Solution s(t)=s1(t) + s2(t)   Théorème de superposition

Réponses des systèmes

- Equation différentielle

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots + a_{n-i} \frac{d^{n-i} s}{dt^{n-i}} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e + b_1 \frac{ds}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m e}{dt^m} 0$$

- Equation caractéristique:

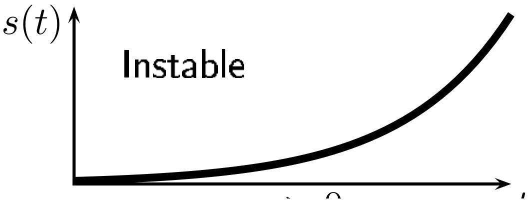
$$a_n r^n + \ldots + a_{n-i} r^{n-i} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 = \prod_{i=1}^{n} (r - r_i)$$

- Solution

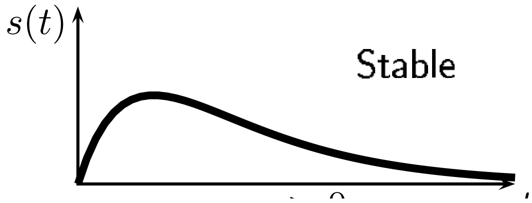
$$s_1(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + \ldots + K_n e^{r_n t}$$

Réponses des systèmes Régime libre

- Racines réelles:

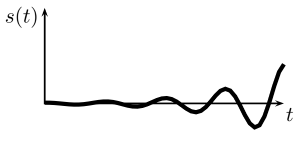


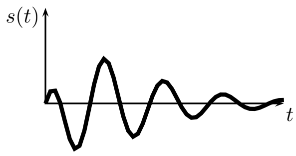
ri>0



ri<0

- Racines complexes:





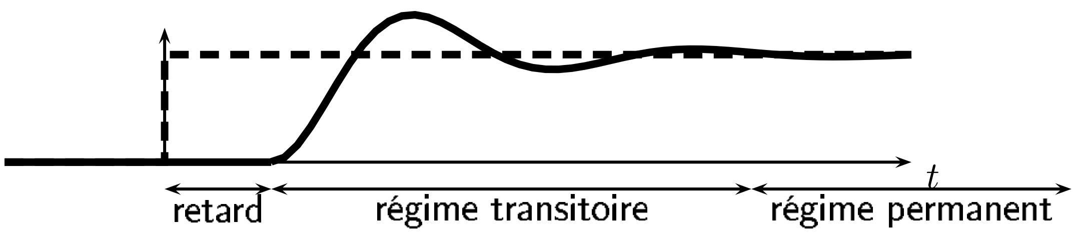
Réponses des systèmes Régime forcé

- Solution particulière:
  - Même forme que l'excitation
  - Polynôme, exponentielle, périodique...

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots + a_{n-i} \frac{d^{n-i} s}{dt^{n-i}} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e + b_1 \frac{ds}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}$$

Réponses des systèmes
Régimes transitoire / permanent

- Le régime libre ou régime transitoire caractérise le comportement dynamique du système
- Le régime forcé ou régime permanent caractérise son comportement statique



Système du 2nd Ordre

- Equation différentielle

$$a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_0 e(t)$$

- Fonction de transfert:

$$a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_0 E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Système du 2nd Ordre

$$H(p) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}p + \frac{a_2}{a_0}p^2}$$

On définit :

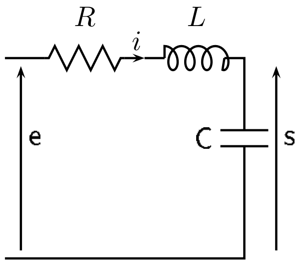
- $K = \frac{b_0}{a_0}$: Le gain statique ;
- $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$: La pulsation propre non amortie ;
- $\zeta = \frac{a_1}{2} \frac{1}{\sqrt{a_0 a_2}}$: le coefficient d'amortissement

On écrit enfin la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Système du 2nd Ordre

Circuit RLC



Par définition :

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} + s \ ; \ i = C\frac{di}{dt} \rightarrow e = LC\frac{d^2s}{dt^2} + RC\frac{ds}{dt}$$

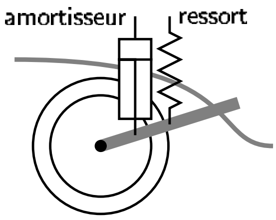
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

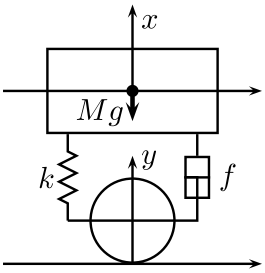
On peut identifier :

- La pulsation propre non amortie $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Le facteur d'amortissement $\zeta = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$

Système du 2nd Ordre

Amortisseur de voiture (forme approchée)





$$M\frac{d^2x}{dt^2} = f\frac{d(y-x)}{dt} + k(y-x)$$

$$Mp^2X(p) = fp\left[Y(p) - X(p)\right] + k\left[Y(p) - X(p)\right]$$

$$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1+\frac{f}{k}p}{1+\frac{f}{k}p+\frac{M}{k}p^2} = \frac{1+\tau p}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec

$$\tau = \frac{f}{k} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \zeta = \frac{f}{2\sqrt{kM}}$$

Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

$$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n} \rightarrow p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2 = 0$$

$$p_i = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right]$$

On distingurera deux cas :

- $\zeta \geq 1$, le trinôme admet deux racines réelles

$$p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2 = (p-p_1)(p-p_2) = 0 = (1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)$$

On obtient deux pôles réels distincts :

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \omega_n\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right) \\ p_2 = \omega_n\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\ \tau_2 = \frac{1}{\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \end{array}\right.$$

- $\zeta < 1$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées.

$$p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2 = (p+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n\left(1-\zeta^2\right)$$

Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

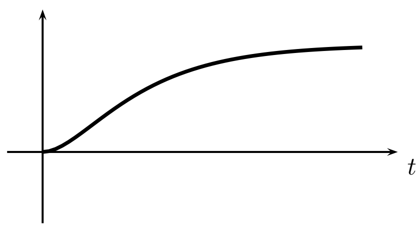
$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n} \rightarrow p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

Cas où $\zeta \geq 1$:

$$p_i = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]$$

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \times \frac{1}{p} \\ &= K\left[\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\frac{1}{p + 1/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\frac{1}{p + 1/\tau_2}\right] \end{aligned}$$

$$s(t) = K\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)\right]u(t)$$



Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

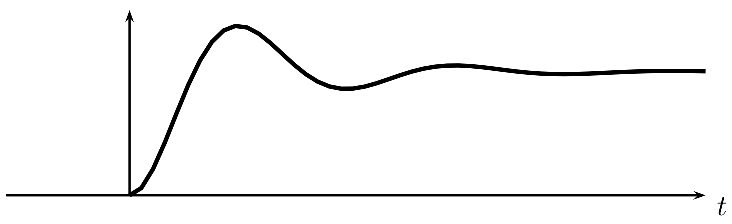
$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n} \rightarrow p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

$$p_i = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]$$

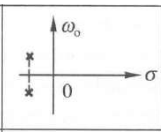
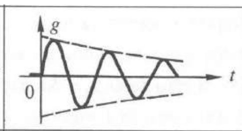
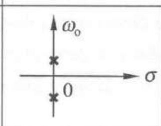
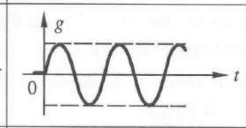
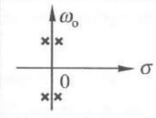
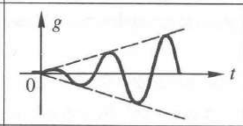
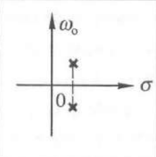
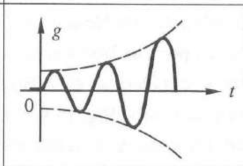
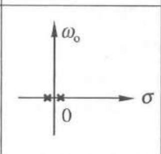
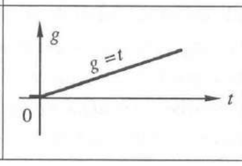
Cas où $\zeta < 1$:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\omega_n^2}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \times \frac{1}{p} \\ &= K\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\zeta\omega_n}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}\right] \end{aligned}$$

$$s(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right)\right]u(t)$$

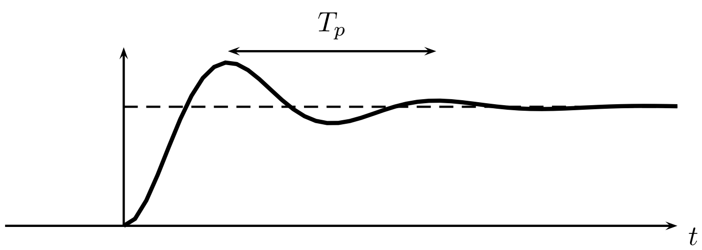


Pôles et réponses temporelles
Système du 2nd Ordre

Complexe conjugué Partie réelle négative			Asymptotiquement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 2)			Instable
Complexe conjugué Partie réelle positive			Instable
Nuls (Multiplicité = 2)			Instable

Pôles et réponses temporelles
Système du 2nd Ordre

Réponse indicielle

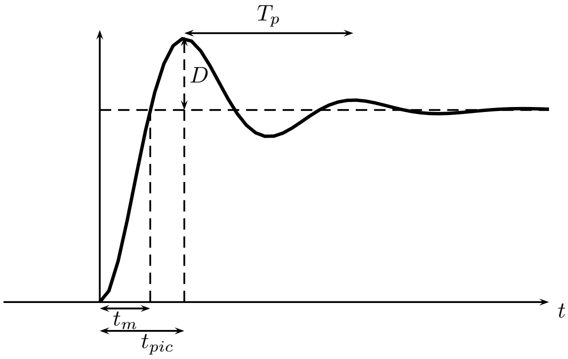


Calcul de la pseudo période

$$T_p = t_{pic_{2n+1}} - t_{pic_{2n-1}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pôles et réponses temporelles
Système du 2nd Ordre

Réponse indicielle



- On peut déterminer sans ambiguïté $\zeta \rightarrow D = Ke^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$$t_m = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

- et $\omega_n \rightarrow t_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pôles et réponses temporelles
Système du 2nd Ordre

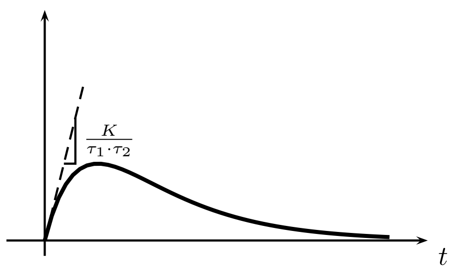
Réponse impulsionnelle

Cas où $\zeta \geq 1$:

$$e(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad E(p) = 1$$

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \times 1 = \frac{K}{\tau_1+\tau_2}\left[\frac{1}{p+1/\tau_1} - \frac{1}{p+1/\tau_2}\right]$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)u(t)$$



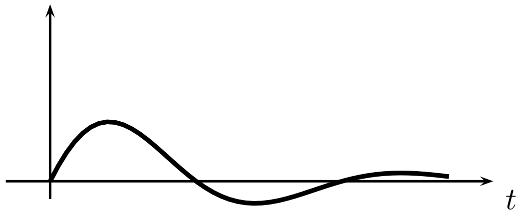
Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

Réponse impulsionnelle

Cas où $\zeta < 1$:
$S(p)$ ne se décompose pas :

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \times 1$$

$$s(t) = \frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) u(t)$$



Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

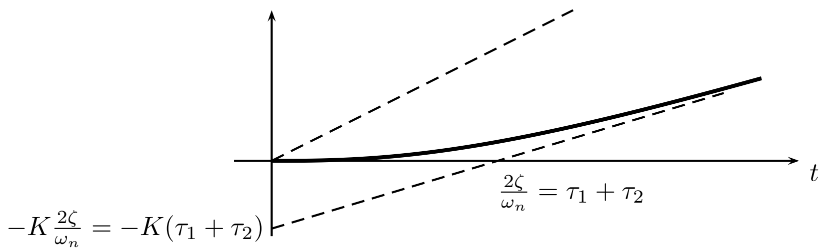
Réponse en vitesse

$$e(t) = tu(t) \quad \rightarrow \quad E(p) = \frac{1}{p^2}$$

Cas où $\zeta \geq 1$:

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \times \frac{1}{p^2} = K\left[\frac{1}{p^2} + \frac{\tau_1+\tau_2}{p} \frac{\tau_1^2}{\tau_1-\tau_2}\frac{1}{p+1/\tau_1} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1-\tau_2}\frac{1}{p+1/\tau_2}\right]$$

$$s(t) = K\left[t - (\tau_1+\tau_2) + \frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1^2 e^{-t/\tau_1} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2}\right)\right] u(t)$$



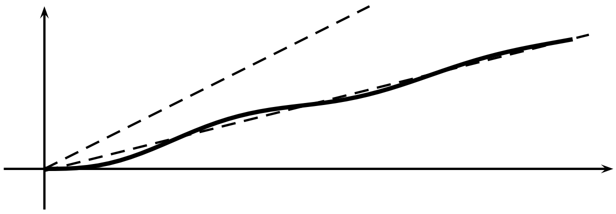
Système du 2nd Ordre: Réponses temporelles

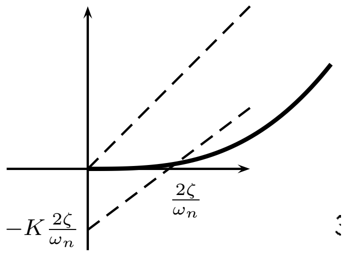
Réponse en vitesse

Cas où $\zeta < 1$ **:**

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \times \frac{1}{p^2} = K\left[\frac{1}{p^2} - \frac{2\zeta}{\omega_n p} + \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}p + 4\zeta^2 - 1}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n\left(1-\zeta^2\right)}\right]$$

$$s(t) = K\left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t - \arctan\left(\frac{2\zeta^2-1}{2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right)\right]u(t)$$





Système d'ordre n

Toute fonction de transfert du n[e] ordre peut se décomposer en termes du premier et du deuxième ordre :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots a_{n-i}p^{n-i} + \ldots a_0} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{p^\alpha \prod_{i=1}^{k}(1-\tau_i p)\prod_{j=1}^{\ell}(1 + c_j p + d_j p^2)}$$

$$H(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} + \frac{C + Dp}{1 + c_j p + d_j p^2} + \ldots$$

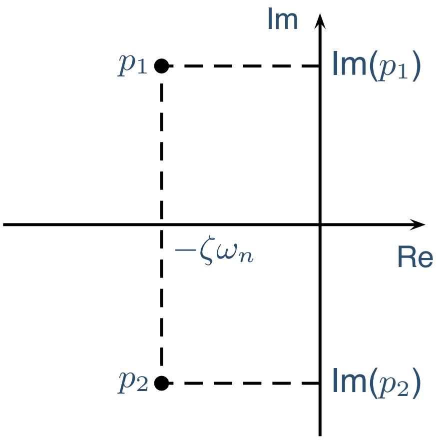
Les réponses temporelles et harmoniques de ces systèmes sont les **sommes algébriques** des réponses des systèmes du 1[er] et du 2[e] ordre correspondants.

- Les pôles "très près" de l'axe imaginaire (constante de temps longue ou faible amortissement) limitent considérablement la réponse du systèmes. On dit qu'ils sont dominants.
- La présence d'un zéro (racine au numérateur) peut aussi influence la rapidité du système.

Système d'ordre n

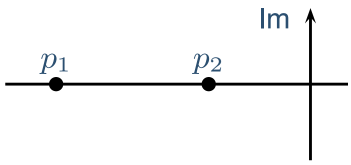
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Les 2 pôles sont complexes conjugués. Dans ce cas aussi, lorsque les pôles s'approchent de l'axe imaginaire (ζ décroit), le temps de réponse augmente.

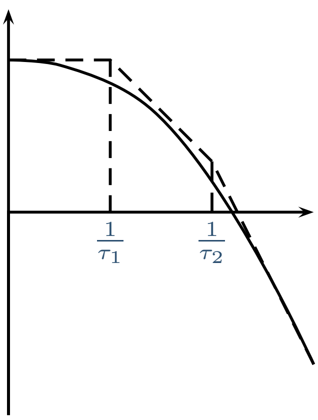


Système d'ordre n

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$



La réponse harmonique a l'allure suivante :



La bande passante à 3dB est comp ment influencée par τ_1.
En gros si $\zeta > 1,7$[a]

$$H(p) \approx \frac{1}{1+\tau_1 p} \rightarrow t_m \approx 3\tau_1$$

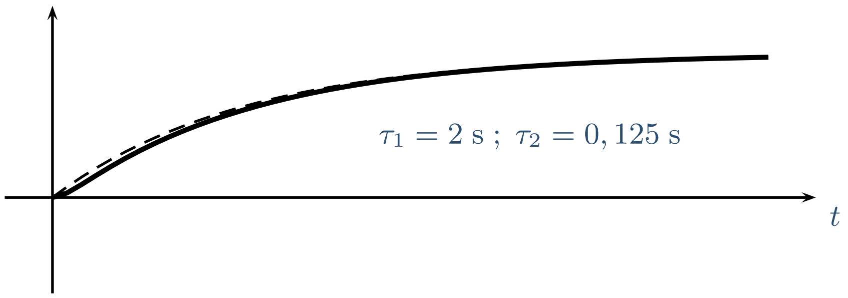
si $\zeta > 1,5$

$$H(p) \approx \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}} \rightarrow t_m \approx \frac{6\zeta}{\omega_n}$$

[a] $\tau_1 > 8\tau_2$

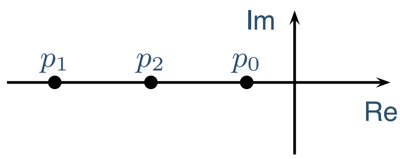
Système d'ordre n

$$s(t) = K\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)\right]u(t)$$

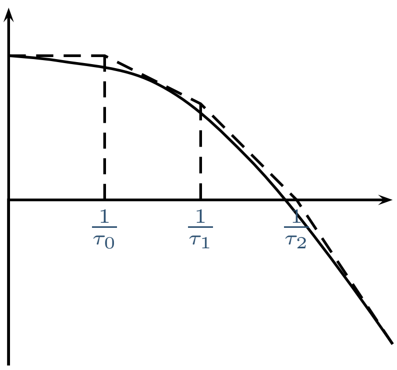


Système d'ordre n

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_0 p)(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n^2})}$$
$$= \frac{K}{(1+\tau_0 p)(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$



La réponse harmonique a l'allure suivante :

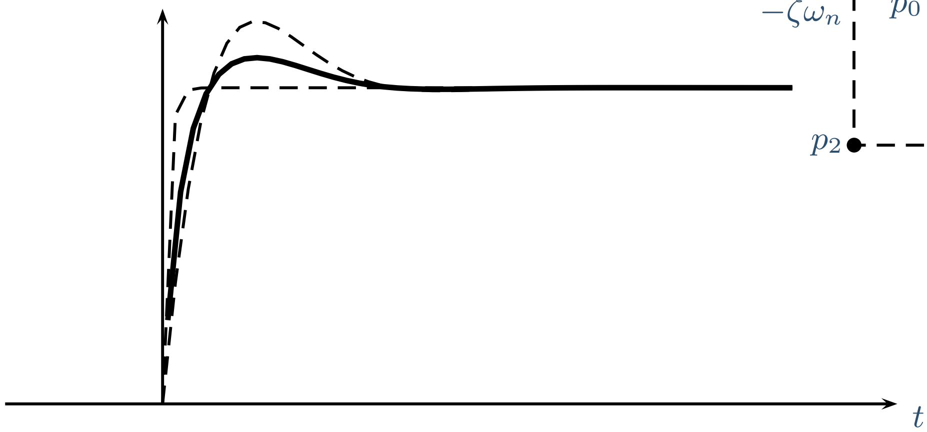


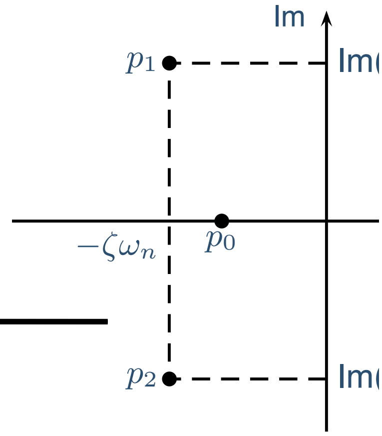
On peut faire le "même raisonnement" que pour le système du 2^e ordre.

Système d'ordre n

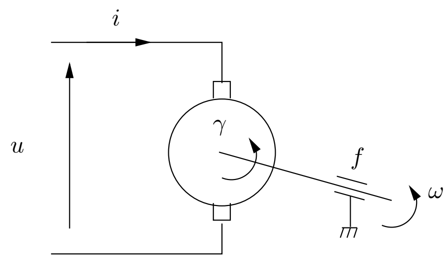
$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_0 p)\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Il faut placer le pôle p_0 par rapport à $-\zeta\omega_n$.





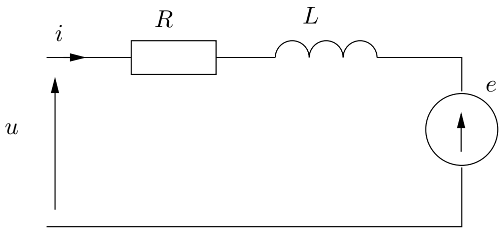
Cas du moteur à courant continu



$$\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt},$$

$$\gamma = K_m i.$$

$$e = K_e\,\omega.$$



$$Ri + L\frac{di}{dt} + e = u,$$

Cas du moteur à courant continu

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ}\frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ}\omega = \frac{K}{LJ}u.$$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}s + \frac{Rf+K^2}{LJ}}.$$

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{1 + (\tau_{el} + \tau_{em})s + \tau_{el}\tau_{em}s^2}.$$

Cas du retard

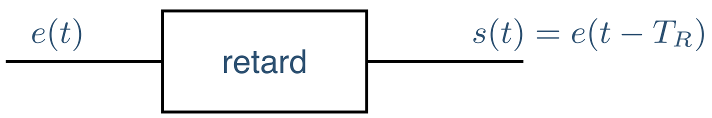
Le terme $e^{-T_R p}$ nécessaire dans la modélisation d'un système avec retard est non linéaire. Pour le linéariser, on utile un développement limité :

$$e^{-T_R p} = 1 - T_R p + \frac{T_R^2}{2!}p^2 - \frac{T_R^3}{3!}p^3 + \ldots$$

Si on se limite au premier ordre :

$$e^{-T_R p} = 1 - T_R p \approx \frac{1}{1 + T_R p}$$

En première approximation, le retard peut être décrit par un système du premier ordre (passe-bas). Mais cette approximation n'est pas très bonne, surtout si on considère l'amplitude de la fonction de transfert.



Cas du retard
Approximation de Padé

$$e^{-T_R p} = \frac{e^{-\frac{T_R}{2}p}}{e^{\frac{T_R}{2}p}} \approx \frac{1-\frac{T_R}{2}p}{1+\frac{T_R}{2}p}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\left|1 - j\omega\frac{T_R}{2}\right|}{\left|1 + j\omega\frac{T_R}{2}\right|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2\frac{T_R^2}{4}}}{\sqrt{1+\omega^2\frac{T_R^2}{4}}} = 1 \quad \arg H(j\omega) = \arctan\frac{1-j\omega\frac{T_R}{2}}{1+j\omega\frac{T_R}{2}} = -2\arctan\frac{\omega T_R}{2}$$

Résumé

- Analyse des Systèmes 1er, 2nd Ordre
- Lien avec l'automatique, filtrage, etc…