Etude du flottement d'un panneau mince

1 Présentation du problème

Dans un référentiel cartésien d'axes $Oxyz$, on considère un panneau mince de dimensions a et b respectivement dans les directions Ox et Oz, et d'épaisseur h. On fait l'hypothèse $b >> a$.
Le matériau constitutif du panneau est considéré élastique linéaire de module de Young E, coefficient de Poisson ν et masse volumique ρ.
Le panneau est encastré aux deux extrémités $x = 0$ et $x = a$.
Un flux d'air s'écoule dans la direction de l'axe Ox au dessus du panneau (demi-espace $y > 0$). On note ρ_a la masse volumique de l'air, U_∞ la vitesse de l'écoulement à l'infini et M_∞ le nombre de Mach correspondant.
La symétrie du problème nous permet de considérer que toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée x, et on réalise donc une modélisation unidimensionnelle de cette structure.
De plus, on considère ici des écoulements dans le domaine des nombres de Mach $M_\infty \in [1.6, 5]$. Dans ce cas, la pression aérodynamique exercée par le flux sur la surface supérieure du panneau peut s'exprimer à l'aide de la théorie linéaire du piston :

$$p_{\text{aero}}(x,t) = \frac{\rho_a U_\infty}{\sqrt{{M_\infty}^2 - 1}} \left[U_\infty \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{{M_\infty}^2 - 2}{{M_\infty}^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial t} \right] \tag{1}$$

où l'on a noté $v(x,t)$ le déplacement vertical (composante selon l'axe Oy) du panneau.

2 Formulations

Question 2.1. En appliquant le modèle d'une plaque en flexion circulaire, écrire les équations et les conditions limites du problème d'équilibre dans le cadre HPP (Hypothèse de Petites Perturbations) usuel (formulation forte).

Question 2.2. Définir les espaces cinématiquement et statiquement admissibles.

Question 2.3. Ecrire une formulation faible en déplacements du problème posé.

3 Résolution approchée par la méthode des éléments finis

Question 3.1. Discrétisation. Le domaine géométrique représentatif du panneau en modélisation unidimensionnelle est un segment de droite dirigée selon l'axe Ox et portant sur les coordonnées $x \in [0, a]$.
On divise ce domaine linéique en deux éléments identiques de type "coque 1D en flexion circulaire". Ecrire la table de connectivité pour le maillage ainsi construit.

4 Construction du modèle aux éléments finis

Pour étudier le comportement du panneau mince en flexion, simplement appuyé sur deux côtés, on considère un maillage constitué d'un seul élément "coque à deux noeuds".

Question 4.1. Approximation des déplacements : donner l'expression de l'approximation du champ de déplacements sur l'élément "coque 1D".
Spécifier le vecteur $\{U_e\}$ de déplacements généralisés aux noeuds de l'élément.
Rappeler les conditions vérifiées par les fonctions de forme $N_1(\xi)$ et $N_2(\xi)$ aux noeuds 1 et 2, étant $\xi = x/L_e$.

On rappelle les expressions des fonctions de forme $N_i(\xi), (i = 1, ..., 4)$:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \tag{2}$$
$$N_2(\xi) = L_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \tag{3}$$
$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \tag{4}$$
$$N_4(\xi) = L_e(-\xi^2 + \xi^3) \tag{5}$$

Question 4.2. Calcul des déformations : donner l'expression de l'opérateur $\mathbf{B}_{el}$ de déformation liant la courbure $\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ au vecteur $\{U_e\}$ de déplacements généralisés.

Question 4.3. Calcul des matrices élémentaires : en calculant les contributions élémentaires aux termes intégrales de la formulation variationnelle, donner les expressions intégrales des matrices élémentaires de masse $\mathbb{M}_e$ et de rigidité $\mathbb{K}_e$. Les expressions de ces deux matrices en fonction des paramètres du problème (largeur du panneau a, module de rigidité en flexion D, masse surfacique m_s, longueur de l'élément L_e etc.) sont données en appendice de ce sujet.

Question 4.4. Injecter l'expression de la pression aérodynamique selon la théorie linéaire du piston dans la forme linéaire de la formulation variationnelle, et en déduire les contributions élémentaires en termes de matrices élémentaires d'amortissement aérodynamique $\mathbb{A}_{de}$ et d'influence aérodynamique $\mathbb{A}_{f_e}$. Calculer l'expression de ces matrices en fonction des grandeurs caractéristiques du problème (largeur du panneau a, module de rigidité en flexion D, masse surfacique m_s, longueur de l'élément L_e, coefficients du chargement aérodynamique α et β, etc.).

Question 4.5. Equations d'équilibre de la structure : en prenant en compte les conditions limites par une méthode de condensation, écrire l'équation matricielle pour l'équilibre de la structure :

$$[\mathbb{M}_{red}]\,\{U_{red}\} + [\mathbb{A}_{dred}]\,\{U_{red}\} + \left([\mathbb{K}_{red}] + \left[\mathbb{A}_{f_{red}}\right]\right)\{U_{red}\} = \{\mathrm{O}\} \tag{6}$$

Expliciter les composantes des matrices réduites qui apparaissent dans cette équation en fonction des composantes des matrices élémentaires.
Préciser la forme des vecteurs réduits $\{U_{red}\}$, $\{U_{red}\}$ et $\{U_{red}\}$.

5 Analyse modale de la structure libre

On étudie les modes et les fréquences propres du panneau mince en absence du chargement aérodynamique.

Question 5.1. En considérant le panneau libre (absence du flux d'air), résoudre le problème aux valeurs propres donnant les pulsations et ensuite les fréquences naturelles du panneau.

Question 5.2. Déterminer les vecteurs représentant les modes propres.
Pour chaque mode, reconstruire l'expression du champ de déplacement $v(x)$ correspondant et représenter graphiquement la forme du mode.

6 Analyse modale de la structure sous le chargement aérodynamique

On considère ici le panneau sous l'influence du chargement aérodynamique exprimé par la théorie linéaire du piston (équation complète en présence des termes d'amortissement aérodynamique et d'influence aérodynamique).

Question 6.1. A partir de l'équation d'équilibre dynamique où le terme $\mathbb{A}_f$ est absent, exprimer le vecteur des accélérations $\{U_{red}\}$ en fonction des vitesses $\{U_{red}\}$, des déplacements $\{U_{red}\}$ et des matrices $\mathbb{M}_{red}$, $\mathbb{K}_{red}$, $\mathbb{A}_{dred}$ et $\mathbb{A}_{f_{red}}$.
On introduit le vecteur auxiliaire $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} U_{red} \\ \dot{U}_{red} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Question 6.2. A partir de la définition de $\mathbf{z}$, montrer que l'on peut écrire l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{z}} = [\mathbf{B}]\,\mathbf{z} \tag{8}$$

étant la matrice $[\mathbf{B}]$ définie comme il suit :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

en précisant les expressions pour les matrices $\mathbf{B}^{(1)}$ et $\mathbf{B}^{(2)}$.

Question 6.3. L'équation différentielle précédente admet une solution de la forme : $\mathbf{z} = \mathbf{Y}\exp(\lambda t)$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle en $\mathbf{z}$, montrer que la recherche des pulsations propres λ et des modes propres $\mathbf{Y}$ revient à résoudre le problème aux valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\mathbf{B}$.

Question 6.4. En notant ${b_{ij}}^{(1)}$ et ${b_{ij}}^{(2)}$ les composantes des matrices $\mathbf{B}^{(1)}$ et $\mathbf{B}^{(2)}$, écrire l'équation pour la recherche des valeurs propres λ de la matrice $\mathbf{B}$, et montrer qu'elle se met sous la forme suivante :

$$\left[\lambda\left({b_{11}}^{(2)} - \lambda\right) + {b_{11}}^{(1)}\right]\left[\lambda\left({b_{22}}^{(2)} - \lambda\right) + {b_{22}}^{(1)}\right] = 0 \tag{10}$$

Déterminer alors les valeurs propres λ. Combien de valeurs distinctes on obtient ?

Formulaire : matrices élémentaires

$$\mathbb{M}_{el} = \frac{m_s L_e}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4{L_e}^2 & 13L_e & -3{L_e}^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3{L_e}^2 & -22L_e & 4{L_e}^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbb{K}_{el} = \frac{D}{{L_e}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4{L_e}^2 & -6L_e & 2{L_e}^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2{L_e}^2 & -6L_e & 4{L_e}^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$