ABOUAKIL
Majda

1. Flottement de panneaux en écoulement supersonique

2.1) Les énergies potentielles des deux ressorts P_1, P_2, s'expriment par :

$$P_1 = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 = \frac{1}{2} k q_1^2 . \qquad P_2 = \frac{1}{2} k q_2^2$$

L'énergie potentielle du système est donc :

$$\boxed{P = \frac{1}{2} k \left(q_1^2 + q_2^2\right)}$$

2.2. Dm, les forces aérodynamiques généralisées ne contribuent pas au couplage des modes propres.

Les équations de mouvement de ce système mécanique peuvent s'obtenir avec les équations de Laplace :

$$i = 1, 2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-P)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (K-P)}{\partial q_i} = Q_i \qquad \left| \begin{cases} K = \frac{1}{2} m\ell \left[\frac{2}{3} \dot{q}_1^2 + \frac{2}{3} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{3} \dot{q}_1 \dot{q}_2\right] \\ Q_1 = -\frac{1}{2} \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty} q_2 \\ Q_2 = \frac{1}{2} \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty} q_1 \end{cases} \right.$$

$$\text{Soit} \begin{cases} \frac{m\ell}{6}\left(4 \ddot{q}_1(t) + \ddot{q}_2(t)\right) + k q_1(t) = -\frac{1}{2} \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty} q_2(t), \quad i = 1 \\ \frac{m\ell}{6}\left[4 \ddot{q}_2(t) + \ddot{q}_1(t)\right] + k q_2(t) = \frac{1}{2} \rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty} q_1(t), \quad i = 2 \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous forme matricielle :

$$\underbrace{M_s}_{\text{matrice de masse}} \ddot{q} + \underbrace{k_s}_{\text{matrice de raideur}} q = \underbrace{F_{aero}}_{\text{les forces aérodynamiques généralisées}}$$

Avec $M_s = \frac{m\ell}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $K_s = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$$F_s = \frac{1}{2}\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

On suppose que les déformations de la structure sont la réponse à de petites perturbations harmoniques en temps.

On pose $q = \bar{q} \exp(\omega t)$ avec p un complexe. $\ddot{q} = \omega^2 q$

On écrit $G(\omega^2) = \left(\omega^2 M_s + (K_s - K_a)\right)$. $G(\omega^2)\,\bar{q} = 0$

Avec K_a la matrice de raideur aérodynamique

$$K_a = \frac{1}{2}\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On appelle le déterminant de flottement ainsi :

$$\Delta_f = \det\left(G(\omega)\right)$$

On trouve $G(\omega) = \begin{bmatrix} 2\frac{m\ell}{3}\omega^2 + k & \frac{m\ell}{6}\omega^2 + \frac{1}{2}\rho_\infty\frac{U_\infty^2}{M_\infty} \\ \frac{m\ell}{6}\omega^2 - \frac{1}{2}\rho_\infty\frac{U_\infty^2}{M_\infty} & 2\frac{m\ell}{3}\omega^2 + k \end{bmatrix}$

D'où $\det(G(\omega)) = \left(\frac{2ml}{3}\omega^2 + k\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\rho_\infty \frac{U_\infty^2}{M_\infty}\right)^2 - \left(\frac{ml\omega^2}{6}\right)^2$

2.4) On note $\lambda = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2 M_\infty k}$

$$\Delta_f = \frac{15}{36}\left(\frac{ml}{k}\right)^2 \omega^4 + \frac{4ml}{3k}\omega^2 + \lambda^2 + 1$$

En posant $\Omega^2 = \frac{\omega^2 ml}{k}$, on obtient

$$\boxed{\det(G(p)) = a\,\Omega^4 + b\,\Omega^2 + \lambda^2 + c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{36} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

2.5 Le déterminant de cette équation est :

$$\Delta = b^2 - 4a(c+\lambda^2) = \frac{16}{9} - \frac{15}{9}(1+\lambda^2) = \frac{1}{9}(1 - 15\lambda^2)$$

On trouve donc $\Omega^2 = \frac{-b \pm \Delta^{1/2}}{2a} \Rightarrow \boxed{\Omega^2 = \frac{8}{5} \pm \frac{2}{5}(1-15\lambda^2)^{1/2}}$

Si $\Delta < 0$, Ω^2 s'écrit $A \pm iB$ et au moins une solution Ω aura une partie réelle positive donc un flottement aura lieu.

$\Rightarrow \boxed{\lambda_F = \frac{1}{15}}$. Si $\lambda > \lambda_F$, il y a flottement.

Si $\lambda = \frac{1}{15}$ alors $\boxed{\Omega_F = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{4}{\sqrt{10}}}$.

2.6) En l'absence des forces aérodynamiques, $\lambda = 0$ donc :

$$\boxed{\Omega_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_2 < \Omega_F < \Omega_1$$

On rappelle le système matriciel :

$$\left(-\frac{\omega^2 m l}{6k} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \exp(\omega t) \\ \bar{q}_2 \exp(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On cherche donc les vecteurs propres associés à chaque mode. pour faire le ratio de $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$.

• Pour le mode propre : $\Omega_1 = \sqrt{2}$ et $\lambda = 0$

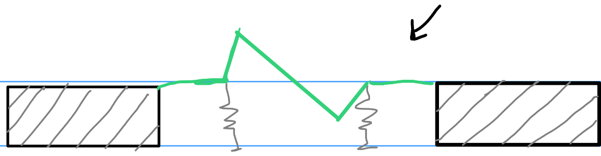
(On a simplifié par $\exp(\omega t)$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{4}{6}\Omega_1^2 + 1\right)\bar{q}_1 - \frac{\Omega_1^2}{6}\bar{q}_2 = 0 \\ -\frac{\Omega_1^2}{6}\bar{q}_1 + \left(-\frac{4}{6}\Omega_1^2 + 1\right)\bar{q}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_1^2}{6}\bar{q}_2 = \left(-\frac{4}{6}\Omega_1^2 + 1\right)\bar{q}_1 \Rightarrow \boxed{\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = -1}$$

$|\bar{q}_1| = |\bar{q}_2|$

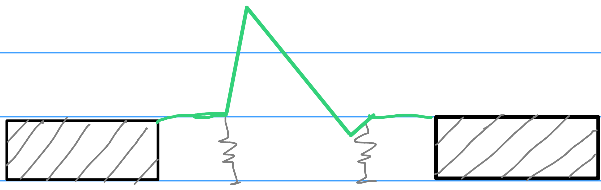
L'allure du mode est :



• Pour le mode de flottement : $\Omega_F = \sqrt{\frac{8}{5}}$, $\lambda = \frac{1}{15}$

On trouve $\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = -4 + \sqrt{15} \simeq -0{,}12$

L'allure du mode est :



• Pour le 2ème mode propre : $\Omega_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$, $\lambda = 0$

On trouve $\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = 1$

L'allure du mode est :