Exercice 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

1) $$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -\lambda & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda - 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{a} & -\lambda & a \\ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1+\lambda) & a & a^2 \\ \frac{1}{a}(1+\lambda) & -\lambda & a \\ 0 & \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix} = (1+\lambda) \begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -\lambda & a \\ 0 & \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1+\lambda) \begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 1-\lambda & 2a \\ 0 & \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2a \\ \frac{1}{a} & -\lambda \end{bmatrix} =$$

1,5

$$= -(1+\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda) - 2\right] = (1+\lambda)\left[\lambda - \lambda^2 + 2\right] = (1+\lambda)(1+\lambda)(-\lambda+2)$$

$$= (1+\lambda)^2 (2-\lambda).$$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{v.p. double} \\ \lambda_2 = 2 & \text{v.p simple} \end{cases}$, $m(-1) = 2$. $m(2) = 1$.

1,5

• Sous-espaces propres

$\rightarrow \lambda_1 = -1 \Rightarrow$ $$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 & (1) \\ \frac{1}{a}x + y + az = 0 & (2) \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

obs : $(2) = (1) \cdot \frac{1}{a}$.

$(3) = (1) \cdot \frac{1}{a^2}$

$\Rightarrow \quad x + ay + a^2 z = 0$ Equ. d'un plan $\Rightarrow$ $\dim(E_{-1}) = 2$. [2]

$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -a \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -a^2 \quad , v_2 = \begin{bmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Vect}\{(-a,1,0),(-a^2,0,1)\}$

0,75

$\rightarrow \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + ay + a^2 z = 0. & (4) \\ \frac{1}{a} x - 2y + az = 0. & (5) \\ \frac{1}{a^2} x + \frac{1}{a} y - 2z = 0 & (6). \end{cases}$

$(4) + (2a) \times (5) \Rightarrow. \quad -\cancel{2x} + \cancel{2x} + ay - 4ay + a^2 z + 2a^2 z = 0.$

$\Rightarrow -\cancel{3}\cancel{a} y = -\cancel{3} a^{\cancel{2}} z.$

$\Rightarrow \boxed{y = az}$.

$2x = a \cdot az + a^2 z = 2a^2 z \quad \Rightarrow \boxed{x = a^2 z}$.

$v_3 = (a^2 z, az, z) = z(a^2, a, 1)$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect}\{(a^2, a, 1)\}$

0,75

La matrice A est diagonalisable car $\dim E_{-1} = m(-1) = 2$

$\dim E_2 = m(2) = 1$.

0,5

2) La matrice diagonale

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 0,5

$$P = \begin{bmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ 0,5

$A' = P^{-1}AP$. 0,5

1p

3). $\det A' = \det A = (-1)(-1)\cdot 2 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow A$ = inversible. 0,5

Exercice 2a

$a \in \mathbb{R}^*$.

$$x^{a+1}y'' + (2a+1)\,x^a y' + a^2 \cdot x^{a-1} y = -1.$$

1). $a=0 \Rightarrow \quad xy'' + y' = -1$.

Equ. linéaire d'ordre 2, non-homogène, réductible à une équ d'ordre 1.

On note $y' = v$. Alors :

2,5

$$xv' + v = -1. \Rightarrow. \quad xv' = -(v+1).$$

$$\xrightarrow[\text{des variables}]{\text{séparation}} \frac{dv}{v+1} = -\frac{1}{x}\,dx.$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v+1} = \int -\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|v+1| = -\ln|x| + \text{cte}.$$

$$\Rightarrow |v+1| = e^{-\ln x + \text{cte}}, \quad x>0.$$

$$\Rightarrow v+1 = C\cdot\frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow v = \frac{c_1}{x} - 1.$

$y'(x) = \frac{c_1}{x} - 1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 \ln x - x + c_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2). $\underline{a > 0}$

a) $y_1(x) = x^{-a}$: On vérifie que y_1 est solution de l'équation homogène :

$y_1' = (-a)\, x^{-a-1}, \quad y_1'' = (-a)(-a-1)\, x^{-a-2}.$

1p $x^{a+1} \cdot (-a)(-a-1)\, x^{-a-2} + (2a+1)\, x^a (-a)\, x^{-a-1} + a^2 x^{a-1} \cdot x^{-a} =$

$= x^{-1}\left[a(a+1) - a(2a+1) + a^2 \right] = x^{-1}\underbrace{\left[a^2 + \cancel{a} - 2a^2 - \cancel{a} + a^2 \right]}_{\shortparallel \atop 0}$

$= 0.$

b) $y_2(x) = z(x)\, x^{-a} = z(x)\, y_1(x)$

0,5 $y_2'(x) = z'(x)\, y_1 + z(x) \cdot y_1'(x)$

0,5 $y_2''(x) = z''(x)\, y_1 + 2 z'(x)\, y_1'(x) + z(x)\, y_1''(x).$

$\Rightarrow x^{a+1}\left[z'' y_1 + 2 z' y_1' + z y_1'' \right] + (2a+1)\, x^a \left[z' y_1 + z y_1' \right]$

$+ a^2 x^{a-1} \cdot z\, y_1 = 0.$

On regroupe les termes :

$x^{a+1} \cdot x^{-a} z'' + 2 x^{a+1} (-a)\, x^{-a-1} \cdot z' + (2a+1)\, x^a \cdot x^{-a} z'$

$+ z \underbrace{\left[x^{a+1} y_1'' + (2a+1)\, x^a y_1' + a^2 x^{a-1} \cdot y_1 \right]}_{\shortparallel} = 0.$

(prouvé dans question a)

$$x z'' + (-\cancel{2a} + \cancel{2a} + 1) z' = 0.$$

1p

$$\Rightarrow \quad x z'' + z' = 0 \quad , \quad z' = w.$$

$$\Rightarrow \quad x w' + w = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{w} = -\frac{1}{x}$$

1p

$$\Rightarrow \quad w = \frac{c_1}{x} \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$z = \int \frac{c_1}{x}\, dx = c_1 \ln x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc $y_2(x) = (c_1 \ln x + c_2) \cdot x^{-a}$.

On choisit $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

2). Solution générale de l'éqn (2) :

(y_1, y_2) sont deux solutions linéairement indépendantes car $W(y_1, y_2) \neq 0$.

1p $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ (calcul rapide).

1p $y_h(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

3). Solution particulière de (1).

$$y_p(x) = -x \cdot x^{-a} = -x^{-a+1}.$$

$$y'_p(x) = -(-a+1)\, x^{-a+1-1} = -(1-a)\, x^{-a}.$$

2p

$$y''_p(x) = -(-a)(1-a)\, x^{-a-1}.$$

$$x^{a+1} \cdot a(1-a) \cancel{x^{-a-1}} + (2a+1) \cancel{x^{a}} \cdot (a-1) \cancel{x^{-a}} + a^2 \cancel{x^{a-1}} (-) \cancel{x^{-a+1}} =$$

$$= a - \cancel{a^2} + \cancel{2a^2} - 2a + a - 1 - \cancel{a^2} = -1. \quad \text{Yes}.$$

0,5

$$y(x) = y_h + y_p$$

Exercice 3 / (9p) + 3p bonus

1). Eqn. linéaire, non-homogène, d'ordre 1.

2) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(1p)

a) $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

$$2x(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1-2x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 1.$$

On fait un changement d'indice dans les sommes avec x^{n+1} ; $n+1 \longmapsto n$.
$n \longrightarrow n-1$.

(1,5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n a_n) x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n = 1.$$

La somme commune est à partir de $n=2$.
On sépare alors les termes en $n=0$ et $n=1$ des autres sommes :

$$2 \cdot 1 \cdot a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2n a_n - 2(n-1) a_{n-1} + a_n - 2a_{n-1}\right) x^n$$

$$+ a_0 + a_1 x - 2 \cdot a_0 x = 1$$

$$\Rightarrow a_0 + x\left[2a_1 + a_1 - 2a_0\right] + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(2n+1)a_n - 2(n-1+1)a_{n-1}\right]x^n$$

$$= 1.$$

On identifie les coefficients des mêmes puissances de x

$\Rightarrow \quad a_0 = 1.$ (1)

1p

$3a_1 - 2a_0 = 0.$ (2)

$\boxed{(2n+1)\,a_n = 2n\,a_{n-1}.}$ (3) relation de récurrence $\forall n \geq 2$.

On observe que (2) peut être obtenue avec (3) en faisant $n = 1$.

Donc $\boxed{(2n+1)a_n = 2n\,a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1}$.

b). De (1) on trouve $\boxed{a_0 = 1}$ 0,5

$y(0) = a_0 + 0 + 0 + \ldots \Rightarrow \boxed{y(0) = a_0 = 1}$. 0,5

$= a_0$

Condition initiale.

c). Sans calculer y(x) que peut-on dire sur ~~l'existence et~~ l'unicité d'une telle solution ? Justifier votre réponse.

c). Il s'agit d'un problème de Cauchy. Si l'équation admet une solution en série entière alors cette solution doit vérifier $y(0) = 1$ qui représente une condition initiale. Donc y est solution d'un problème de Cauchy

1p

donc unique

4) $a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$, $\forall n$.

(1p)

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{(2n)(2(n-1))\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}}, \forall n \geq 1$$

Donc $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} x^n$. (0,5)

5) On calcule le rayon de convergence avec le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

(1p) (0,5p)

R rayon de convergence.

La série converge sur $]-1, 1[$. (0,5)

e) Bonus $\boxed{x=1}$.

(3p)

$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $y(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

On utilise les inégalités :

$$\frac{2n}{2n+1} > \frac{2n}{2n+2}$$

$$\frac{2(n-1)}{2n-1} > \frac{2(n-1)}{2n}.$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{4}.$$

On multiplie les inégalités précédentes :

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} > \frac{\cancel{2n}}{2n+2}\cdot\frac{2\cancel{(n-1)}}{\cancel{2n}}\cdots\frac{2}{\cancel{4}} = \frac{1}{n+1}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ est une série divergente

car de même nature que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (série vu en cours)

Par critère de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est

alors divergente aussi.

Si $\boxed{x=-1}$ la série

$$y(-1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n .$$

devient une série alternée. le terme général.

a_n est decroissant car $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n}{2n+1} < 1$. $\forall n$.

Ex2 b

$$\begin{cases} x'(t) = y + 4e^{-3t} \\ y'(t) = 4x + e^{-t} \end{cases}$$

25

$y' = AY + B$

1). $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ 1p , $B = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ 0,5

2). $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = \varphi(\lambda)$ 0,5

$\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2$ 1p

deux v.p. simples

$\underline{\lambda_1 = 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0.$

$y = 2x$.

$v_1 = (1, 2)$. 0,5p

$\underline{\lambda_2 = -2} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0.$

$y = -2x$

$v_2 = [1, -2]$. 0,5p

La solution générale :

$$Y_h(t) = c_1 . e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ 1p

3) $Y_p' = -3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-3t} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} e^{-t}$. 0,5 $\qquad$ $\underline{\dim = 2}$ 0,5p

$$\begin{pmatrix} -3a \\ -3b \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} -c \\ -d \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a . e^{-3t} + c e^{-t} \\ b e^{-3t} + d e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$ 1p

$$\begin{pmatrix}-3a\\-3b\end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix}-c\\-d\end{pmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix}\cancel{4a}\ b\\ 4a\end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix}\cancel{4c}\ d\\ d\ 4c\end{bmatrix} e^{-t} + \quad 2b$$

$$+ \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-t}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} -3a = \cancel{4a}\ b + 4. \\ -3b = 4a + 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow b = -3a - 4 \Rightarrow 9a - 4a = -12$

$-3(-3a-4) = 4a$ coeff de e^{-3t}. $5a = -12$

$\boxed{a = \frac{-12}{5}}$

$\Rightarrow b = \frac{36}{5} - 4 \quad \cancel{\frac{4}{7}} = 5$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{16}{5}}$

1p

pour systèmes

$$\begin{cases} -c = \cancel{4c}\ d + 0. \\ -d = \cancel{d}\ 4c + 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3c = -1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{3}}$ $0{,}5 \times 4 = 2p$ coeff

$\boxed{d = \frac{1}{3}}$

4) $Y_g = Y_h + Y_p$

1p

Vérif :

$-\frac{4}{3} + \frac{3}{1} = -\frac{1}{3} = d$ ✓

$\frac{b + 4}{5} = \underbrace{-3a}$

$9 \qquad -3 \times \frac{(-12)}{5} = \frac{36}{5}$

$\neq 9$