Université Pierre et Marie Curie **2009-2010**

LICENCE DE MECANIQUE

LA 206 - Dynamique des Fluides

Ecrit du 9 juin 2010
Sans document - Sans calculatrice
Durée 2 heures

L'énoncé est constitué de trois pages et de deux exercices indépendants.
Une attention particulière sera accordée au soin apporté à la rédaction.
Un barème indicatif est donné.

Problème 1 : dynamique des fluides parfaits (barème indicatif 10/20)

On considère un grand bassin (figure 1). Il est alimenté en eau par un débit volumique Q ($Q \neq 0$) constant. Un siphon, de section s, assure le vidage du bassin. Il se termine par un embout de section s_1, situé à l'extrémité d'un tronçon horizontal dont l'axe est à une distance h_0 en dessous du fond du bassin : l'origine des cotes verticales est pris sur cet axe. Le haut du siphon est à la cote h^* au dessus de l'embout et son orifice d'aspiration est à la cote h. Il comporte dans sa parti verticale un tube de venturi ayant une section contractée s_2 à la cote h_2 (voir figure 1). On note S_e la section de la conduite d'alimentation du bassin.

On considère l'eau comme un **fluide parfait**, de masse volumique ρ constante. L'extérieur du dispositif est à la pression atmosphérique notée P_a et supposée constante. L'accélération de la pesanteur, supposée elle aussi constante, est notée $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

On note z la cote de la surface libre dans le bassin. Au cours du processus de vidange, cette cote dépend du temps : $z = H(t)$; on supposera que l'écoulement est quasi-stationnaire (c'est-à-dire stationnaire sur des intervalles de temps petits) de façon à appliquer le théorème de Bernoulli et le théorème des efforts globaux établis sous l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement. On admettra que la vitesse et la pression sont uniformes dans chaque section du siphon (hypothèse de l'écoulement par tranches). Les modules des vitesses du fluide dans les section s_1 et s_2 sont notées respectivement V_1 et V_2.

On supposera, enfin, que l'aire de la surface libre du bassin (notée S) est très grande devant s : $S >> s$.

Pour les applications numériques on prendra :
Q=0,03 m^3.s^{-1}, h=2 m, h^*=3 m, Pa = 105 Pa, ρ= 10^3 kg.m^{-3}, S=10 m . Les sections s, s1 et s2 sont des sections circulaires de diamètre respectif 20 cm, 10 cm et 7 cm.

Partie I

1°) En écrivant la conservation de la masse sous forme globale au domaine fluide D constitué par le fluide situé dans le dispositif, montrer que la conservation du débit volumique s'écrit :

$$Q + V_A S = Q_1$$

Où l'on a noté : $Q_1 = V_1 s_1$ et $Q = -\iint_{S_e} \vec{v}.\vec{e}_z dS$.

2°) Après avoir vérifié que toutes les hypothèses nécessaires sont satisfaites, appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant liant un point de la surface libre du bassin à un point de la section de sortie s_1. En déduire une expression de V_1 en fonction de g et de z, puis une expression de Q_1.

3°) Etudier la variation de Q_1 en fonction de z. En supposant que $Q < Q_1$, quelle est la cote minimale théorique H_m que le niveau d'eau dans le bassin peut atteindre ? (on ne se préoccupera pas du fonctionnement du siphon). Donner la valeur numérique de H_m.

4°) Calculer le pression p^* dans la section de cote h^* du siphon. Montrer que p^* est toujours positive dans le cas des données numériques du problème.
Trouver, en fonction de z, la pression p_2 du fluide dans la section s_2 ($s_2 < s$) du tube de Venturi. A quelle condition doit satisfaire h_2 pour que p_2 ne soit jamais négative ? Traduire numériquement cette condition.

5°) Appliquer le théorème des quantités de mouvement au domaine fluide *D'* constitué du fluide situé dans l'embout entre les sections s et s_1 (voir figure 2).
Quelle est la valeur de la pression dans la section d'entrée s de l'embout en fonction des données ?
Quelle est, en fonction de z et des données, la résultante des efforts de pression exercés par le fluide et l'air sur l'embout ?
Soit $\vec{F}$ cette résultante. Pour quelle hauteur du plan d'eau $|\vec{F}|$ est-il maximum ?

Partie II

Dans cette partie, on suppose qu'à l'instant initial la hauteur de l'eau dans le bassin h^*, c'est-à-dire que $H(0)=h^*$. Le siphon est amorcé dès l'instant initial.

6°) **Cas $H_m > h$**
Dans ce cas, le siphon ne se désamorce pas au cours du processus de vidange.

a) Justifier que l'on a :

$$V_A = -\frac{dH}{dt}(t)$$

b) Ecrire une équation différentielle pour la fonction *H(t)*

c) Montrer que le temps mis pour atteindre, à partir de l'instant initial, la cote H_m est infini.

7°) ***Cas $H_m < h$***
Pour $H(t)=h$, le siphon se désamorce. Après désamorçage, le débit Q_1 est nul et le niveau dans le bassin remonte jusqu'à ce qu'il atteigne le sommet du siphon, c'est-à-dire $H(t)=h^*$, ce qui réamorce celui-ci.

a) Décrire qualitativement le mouvement de la surface libre.
b) Trouver *H(t)* pendant le remplissage.
c) Déterminer le temps de remplissage du bassin. Donner sa valeur numérique.
d) Le plan d'eau étant à la cote h^* au temps t*, déterminer *H(t)* pendant la vidange qui suit et déterminer le temps de vidange. Indiquer sur un graphique, l'allure de la fonction *H(t)* en fonction du temps *t*.

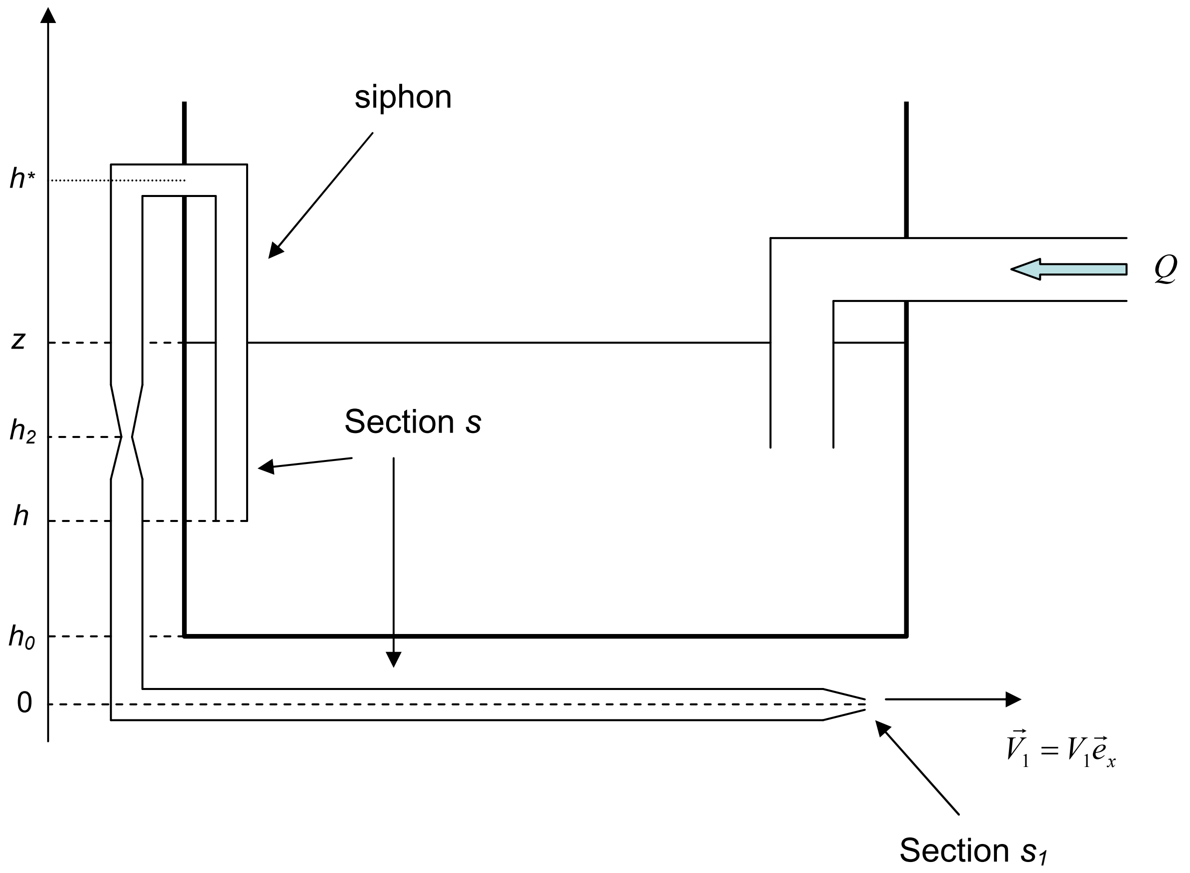


Figure 1

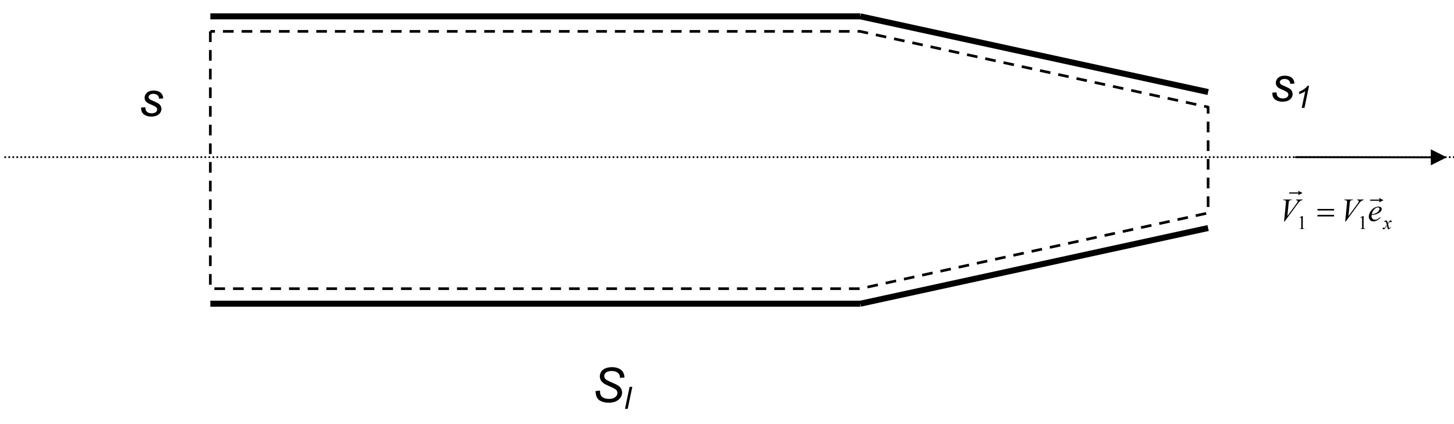


Figure 2

Problème 2 : dynamique des fluides visqueux (barème indicatif 10/20)

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux (de viscosité de cisaillement μ constante) et incompressible (de masse volumique ρ constante). Dans tout ce problème, nous négligeons l'action de la pesanteur. L'écoulement a lieu dans une conduite annulaire axisymétrique de rayon interne R_1, de rayon externe R_2 et de longueur L. On note $(\mathrm{O}, \vec{e}_z)$ l'axe de cette conduite (voir figure 3).

On se donne la pression p_0 en entrée ($z=0$) et la pression p_L en sortie ($z=L$). On suppose que le cylindre extérieur est au repos et que le cylindre intérieur est animé d'une vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_z$ constante ($U > 0$).

On cherche une solution laminaire de ce problème sous la forme : $\vec{v} = v(r)\ \vec{e}_z$ et $p = p(z)$ où $\vec{v}$ désigne la vitesse et p la pression.

1°) Montrer que le champ de vitesse proposé est bien celui d'un écoulement incompressible.

2°) L'équation du mouvement, en coordonnées cylindriques, pour un tel écoulement est celle qui a été établie en cours :

$$\frac{dp}{dz}(z) = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}(r)\right)$$

Quelles sont les conditions aux limites à utiliser pour la vitesse ? Pour la pression ?

3°) Montrer que le gradient de pression est constant et donner son expression en fonction de p_0, p_L et L .

4°) En déduire l'expression de la vitesse en fonction de μ, R_1, R_2, p_0, p_L, L et r.

5°) Calculer le débit volumique du fluide qui s'écoule dans la canalisation.

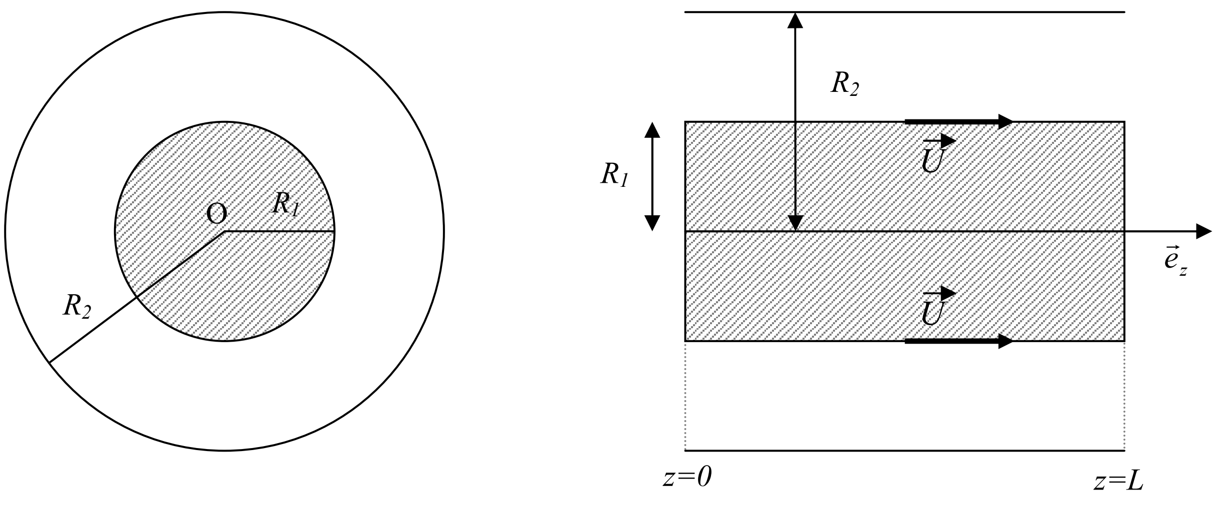
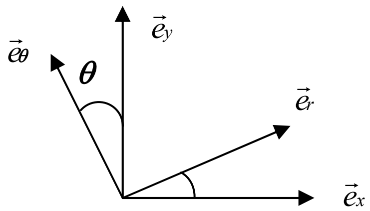


Figure 3

Rappels en coordonnées cylindriques



$r^2 = x + y \qquad r \geq 0$

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$$\vec{G}rad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$Div(\vec{\mathbf{V}}) = \nabla.\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{R}ot(\vec{\mathbf{V}}) = \nabla \wedge \vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Escamen de juin 2010 - Problème I.

Partie I.

1- On écrit la conservation de la masse sous forme globale appliquée au domaine constitué du fluide à l'intérieur du dispositif :

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \iint_{\partial D} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (*)$$

$\vec{n}$: vecteur normal unitaire orienté vers l'esctérieur du domaine fluide.

Le fluide étant incompressible et l'écoulement stationnaire, (*) se réduit à :

$$\iint_{S_1 \cup S_e \cup S_\ell \cup S_p} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

S_ℓ : surface libre

S_p : parois solides non poreuses.

$$\Leftrightarrow \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_e} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_\ell} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \underbrace{\iint_{S_p} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS}_{=0} = 0$$

$= 0$ car $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur S_p (glissement)

De plus :

- $$\iint_{S_e} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_e} \vec{v} \cdot \vec{e}_z \, dS = -Q.$$

On fait l'hypothèse d'un écoulement par tranches :

sur S_1 : $\begin{cases} n = \vec{e}_x \\ \vec{v} = V_1 \, \vec{e}_x \quad (V_1 \text{ cste} > 0) \end{cases}$ sur S_ℓ : $\begin{cases} \vec{n} = \vec{e}_z . \\ \vec{v} = -V_A \vec{e}_z \quad (V_A \text{ cste} > 0). \end{cases}$

Par conséquent :

$$V_1 S_1 - Q - V_A S_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{V_1 S_1 = V_A S_A + Q}}.$$

2- Le fluide est, par hypothèse, parfait, incompressible, soumis aux efforts de pesanteur et en écoulement stationnaire. On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli.

Le long d'une ligne de courant liant un point de la surface libre à un point de la section de sortie on a :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{\rho V_A^2}{2} = p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} \cdot \quad (**)$$

- On suppose $V_A \simeq 0$.
- De plus, par continuité de la pression sur la surface libre :

$$p_A = P_a$$

- A la sortie, sur la surface du jet, la pression est égale à P_a par continuité. L'écoulement étant supposé par tranches, $p_1 = P_a$ sur toute la section de sortie. La relation $(**)$ devient donc :

$$P_a + \rho g z_A \simeq P_a + \rho g z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} \cdot \qquad \text{or : } \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_A = z(t) . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_1 \simeq \sqrt{2gz}.}}$$

- $Q_1 = V_1 S_1 \Rightarrow Q_1 = S_1 \sqrt{2gz} = \underline{\underline{\frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2gz} = Q_1.}}$

3 - • $Q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2gz}$

$$\Rightarrow \frac{dQ_1}{dz} = \frac{\pi d_1^2}{8} \sqrt{2g} \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\pi d_1^2}{8} \sqrt{\frac{2g}{z}} > 0$$

Q_1 est donc une fonction croissante de z.

- La cote minimale H_m que le niveau de l'eau dans le bassin peut atteindre, en dehors de toute considération concernant le siphon, est donc obtenue pour $Q_1 = Q$ ie quand Q_1 est maximal :

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2g H_m} \iff H_m = \frac{Q^2}{2g S_1^2} = \frac{Q^2}{2g} \frac{16}{\pi^2 d_1^4} =$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_m = \frac{8 Q^2}{g \pi^2 d_1^4}}} \cdot \qquad \text{A.N. : } H_m = \frac{8 . 9 . 10^{-4}}{10 . \pi^2 . 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow H_m \simeq \frac{72}{100} \simeq \underline{\underline{0,72 \text{ m}}}.$$

4 - On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant liant un point de la section de sortie à un point de la section de cote h^*. On a alors :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p^* + \rho g h^* + \frac{\rho V^{*2}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \quad P_a + \frac{\rho V_1^2}{2} = p^* + \rho g h^* + \frac{\rho V^{*2}}{2}.$$

La conservation du débit volumique entre S_1 et la section de côte h^* donne : $V^* s = V_1 S_1$.

$$\Rightarrow \quad V^* = \frac{\pi d_1^2}{4} V_1 \frac{4}{\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V^* = \frac{d_1^2}{d^2} V_1.}}$$

Par conséquent :

$$P_a + \frac{\rho V_1^2}{2} = p^* + \rho g h^* + \frac{\rho}{2} \frac{d_1^4}{d^4} V_1^2.$$

$$\Rightarrow \quad p^* = P_a - \rho g h^* + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{p^* = P_a - \rho g h^* + \rho g z \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right).}}$$

Par conséquent : $\dfrac{dp^*}{dz} = \rho g \left(1 - \dfrac{d_1^4}{d^4}\right) > 0$

p^* est donc minimale quand $z = H_m$

et $p^*(H_m) = P_a - \rho g h^* + \rho g H_m \left(1 - \dfrac{d_1^4}{d^4}\right)$.

$$= 10^5 - 3.10^4 + 10^4 . 0{,}72 . \left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

$$= 10^5 - 3.10^4 + 72 . 10^2 . \frac{15}{16} = 7{,}675\ 10^4\ \text{Pa}.$$

$\underline{\underline{\text{On a donc } p^* > 0.}}$

- On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant liant un point de S_2 à un point de S_1 :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}.$$

La conservation du débit volumique donne : $V_1 S_1 = V_2 S_2$.

$$\Rightarrow \quad V_2 = \frac{S_1}{S_2} V_1 = \frac{d_1^2}{d_2^2} V_1.$$

Par conséquent :

$$P_a + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2}\frac{d_1^4}{d_2^4} V_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = P_a - \rho g h_2 + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right) V_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = P_a - \rho g h_2 + \rho g z\left(\frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2^4}\right) \qquad d_2 < d_1 .$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{p_2 = P_a - \rho g h_2 - \rho g z\left(\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_2^4}\right)}} .$$

$p_2(z)$ est une fonction décroissante, elle est donc minimale quand z est maximale i.e. quand $z = h^*$.

Par conséquent : $p_{2min} = P_a - \rho g h_2 - \rho g h^* \left(\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_2^4}\right)$.

et $p_{2min} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad P_a - \rho g h^*\left(\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_2^4}\right) > \rho g h_2 .$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h_2 < \frac{P_a}{\rho g} - h^*\left(\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_2^4}\right)}} .$$

$$\text{A.N. :} \quad h_2 < \frac{10^5}{10^4} - 3\left(\frac{10^{-4} - 0{,}24\ 10^{-4}}{0{,}24\ 10^{-4}}\right) .$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 < 10 - 1{,}56 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h_2 < 8{,}44\ m}} .$$

5- On applique le théorème des quantités de mouvement (théorème des efforts globaux, théorème d'Euler) au domaine fluide situé dans l'embout :

$$\iint_{\partial D} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = \iiint_D \rho \vec{g}\, dv + \iint_{\partial D} -p\vec{n}\, dS .$$

$\vec{n}$: vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur de D.

- $$\iiint_D \rho \vec{g}\, dv = m_D \vec{g}$$

- $$\iint_{\partial D} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = \iint_{S_1} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS + \iint_{S} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS}_{=0 \text{ (glissement)}}$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse de l'écoulement par tranches :

$$\iint_{\partial D} \rho \vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS = \rho V_1^2 S_1 \vec{e}_x - \rho V^2 S \vec{e}_x .$$

$$= \left(\rho V_1^2 \frac{\pi d_1^2}{4} - \rho V^2 \frac{\pi d^2}{4}\right) \vec{e}_x .$$

De plus $V_1 S_1 = V S \iff V = \frac{\pi d_1^2}{4} V_1 \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d_1^2}{d^2} V_1$.

$$\Rightarrow \iint_{\partial D} \rho \vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS = \left(\rho V_1^2 \frac{\pi d_1^2}{4} - \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{d_1^4}{d^4} V_1^2\right) \vec{e}_x .$$

$$= \frac{\rho \pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right) V_1^2 \vec{e}_x$$

- $$\iint_{\partial D} -p\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} -p\vec{n}\,dS + \iint_{S} -p\vec{n}\,dS + \underbrace{\iint_{S_{lat}} -p\vec{n}\,dS}$$

$$= -\vec{R} + \iint_{S_1} -P_a \vec{e}_x\,dS + \iint_{S} -p(-\vec{e}_x)\,dS$$

$$= -\vec{R} - \frac{\pi d_1^2}{4} P_a \vec{e}_x + \frac{\pi d^2}{4} p\,\vec{e}_x .$$

$= -\vec{R}$ où $\vec{R}$ est la résultante des efforts excercés par le fluide sur la plaque.

On exprime p en utilisant le théorème de Bernoulli le long d'une l.c horizontale liant S à S_1.

$$p + \rho g z_1 + \rho \frac{V^2}{2} = p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$\iff p = P_a + \frac{\rho V_1^2}{2} - \rho \frac{d_1^4}{d^4} V_1^2 = P_a + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 .$$

Par conséquent :

$$\iint_{\partial D} -p\vec{n}\,dS = -\vec{R} - \frac{\pi d_1^2}{4} P_a \vec{e}_x + \frac{\pi d^2}{4}\left(P_a + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2\right) \vec{e}_x .$$

$$= -\vec{R} - \frac{\pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d^2}{d_1^2}\right) P_a \vec{e}_x + \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 \vec{e}_x .$$

Finalement, :

$$\frac{\rho \pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right) V_1^2 \vec{e}_x = m_D \vec{g} - \vec{R} - \frac{\pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d^2}{d_1^2}\right) P_a \vec{e}_x + \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 \vec{e}_x$$

$$\iff \vec{R} = m_D \vec{g} + \frac{\rho \pi d^2}{8}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 \vec{e}_x - \frac{\rho \pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right) V_1^2 \vec{e}_x$$

$$- \frac{\pi d_1^2}{4}\left(1 - \frac{d^2}{d_1^2}\right) P_a \vec{e}_x .$$

La force exercée par l'air sur l'embout est donnée par :

$$\vec{R}_a = \iint_{S_{lat}} -P_a \vec{n}\, dS = \underbrace{\iint_{\partial\mathcal{D}} -P_a \vec{n}\, dS}_{=0} + \iint_{S_1} P_a \vec{n}\, dS + \iint_{S} P_a \vec{n}\, dS$$

$$= P_a \left\{ \frac{\pi d_1^2}{4} \vec{e}_x + \frac{\pi d^2}{4}(-\vec{e}_x) \right\} = \frac{\pi d_1^2}{4} P_a \left(1 - \frac{d^2}{d_1^2}\right) \vec{e}_x .$$

On a donc :

$$\vec{R} = m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d^2}{8} \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 \vec{e}_x - \frac{\rho \pi d_1^2}{4} \left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right) V_1^2 \vec{e}_x - \vec{R}_a$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{R} + \vec{R}_a = m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d^2}{8} \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) V_1^2 \vec{e}_x - \frac{\rho \pi d_1^2}{4} \left(1 - \frac{d_1^2}{d^2}\right) V_1^2 \vec{e}_x .$$

$$= m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d_1^2}{4} V_1^2 \left\{ \frac{d_1^2}{d^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d_1^2} \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) \right\} \vec{e}_x$$

$$= m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d_1^2}{4} V_1^2 \left\{ \frac{d_1^2}{d^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d_1^2} - \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{d^2} \right\} \vec{e}_x .$$

$$= m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d_1^2}{4} V_1^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{d^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d_1^2} \right\} \vec{e}_x .$$

$$\vec{F} = m_{\mathcal{D}} \vec{g} + \frac{\rho \pi d_1^2}{8} \left\{ \frac{d_1^2}{d^2} + \frac{d^2}{d_1^2} - 2 \right\} g z \, \vec{e}_x .$$

$$F^2 = m_{\mathcal{D}}^2 + \left(\frac{\rho \pi d_1^2}{8}\right)^2 \left\{ \frac{d_1^2}{d^2} + \frac{d^2}{d_1^2} - 2 \right\}^2 g^2 z^2 .$$

Par conséquent $|\vec{F}|$ est maximal quand z est maximal

Partie II. $H(0) = h^*$.

6 - $H_m < h$.

a) le niveau de l'eau dans le reservoir diminue uniformément : $V_A = -\frac{dH}{dt}(t)$ $(V_A > 0)$.

b) D'après la première question : $Q + V_A S_\ell = V_1 S_1$.

$$\Leftrightarrow Q - S_\ell \frac{dH}{dt} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2gH} .$$

$$\Leftrightarrow \frac{dH}{dt} + \frac{\pi d_1^2}{4S} \sqrt{2gH} = \frac{Q}{S} .$$

c) $$\frac{dH}{\frac{Q}{S} - \frac{\pi d_1^2}{4S}\sqrt{2gH}} = dt \quad \Rightarrow t = \int_{h^*}^{H} \frac{dz}{\frac{Q}{S} - \frac{\pi d_1^2}{4S}\sqrt{2gz}}$$

$$t = \int_{h^*}^{H} \frac{dz}{\frac{Q}{S} - \frac{\pi d_1^2}{4S}\sqrt{2g}\sqrt{z}} = \frac{4S}{\pi d_1^2 \sqrt{2g}} \int_{h^*}^{H} \frac{dz}{\frac{4Q}{\pi d_1^2 \sqrt{2g}} - \sqrt{z}}.$$

$$= \frac{-4S}{\pi d_1^2 \sqrt{2g}} \int_{h^*}^{H} \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{4Q}{\pi d_1^2 \sqrt{2g}}}.$$

On a, d'après la question 3) $H_m = \left(\frac{4Q}{\pi d_1^2 \sqrt{2g}}\right)^2$

$$\Rightarrow t = -\frac{\sqrt{H_m}\, S}{Q} \int_{h^*}^{H} \frac{dz}{\sqrt{z} - \sqrt{H_m}}$$

$$= -\frac{\sqrt{H_m}\, S}{Q} \Big[2 \left\{ \sqrt{z} + \sqrt{H_m} \ln \left| \sqrt{z} - \sqrt{H_m} \right| \right\} \Big]_{z = h^*}^{z = H}.$$

$$\Rightarrow t = -\frac{2S}{Q}\sqrt{H_m} \left\{ \sqrt{H} - \sqrt{h^*} + \sqrt{H_m} \ln \left| \sqrt{H} - \sqrt{H_m} \right| - \sqrt{H_m} \ln \left| \sqrt{h^*} - \sqrt{H_m} \right| \right\}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2S}{Q}\sqrt{H_m} \left\{ \sqrt{h^*} - \sqrt{H} + \sqrt{H_m} \ln \left| \sqrt{h^*} - \sqrt{H_m} \right| - \sqrt{H_m} \ln \left| \sqrt{H} - \sqrt{H_m} \right| \right\}.$$

On a bien $\lim_{H \to H_m} t = \infty$.

Juin 2010 - Problème II.

1- L'écoulement est incompressible si et seulement si $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{avec } \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v\,\vec{e}_z.$$

Dans le cas présent $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0 \;,\; \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$$

2- • Pour un fluide visqueux, les conditions aux limites à utiliser sont des conditions d'adhérence. On a donc :

$$\begin{cases} \vec{v}(R_2) = \vec{0} \\ \vec{v}(R_1) = \vec{U} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(R_2) = 0 \\ v(R_1) = U \end{cases}$$

• Concernant la pression, on se donne : $\begin{cases} p(z=0) = p_0 \\ p(z=L) = p_L. \end{cases}$

3- L'équation du mouvement est celle établie en cours :

$$\frac{dp}{dz}(z) = \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}(r)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dz}(z) = -k \\ \dfrac{\nu}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}(r)\right) = -k \quad (*) \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Par conséquent :

$$\frac{dp}{dz}(z) = -k \Leftrightarrow p(z) = -kz + \alpha_1 \quad \text{où } \alpha_1 \text{ est une constante.}$$

De plus $p(0) = p_0 \Rightarrow \alpha_1 = p_0$

$$p(L) = p_L \Rightarrow p_L = -kL + p_0 \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{p_0 - p_L}{L}}}$$

4- Pour la vitesse, on part de l'équation (*) :

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}(r)\right) = -\frac{kr}{\nu}$$

$$\Leftrightarrow r\frac{dv}{dr}(r) = -\frac{kr^2}{2\nu} + \alpha_2 \quad \text{où } \alpha_2 \text{ est une constante}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dr}(r) = -\frac{kr}{2\nu} + \alpha_2/r.$$

On a donc :

$$\underline{v(r) = -\frac{kr^2}{4\nu} + \alpha_2 \ln r + \alpha_3} \quad \text{où } \alpha_3 \text{ est une constante.}$$

De plus :

$$\begin{cases} v(R_2) = 0 \iff -\dfrac{kR_2^2}{4\nu} + \alpha_2 \ln R_2 + \alpha_3 = 0 \\ v(R_1) = U \iff -\dfrac{kR_1^2}{4\nu} + \alpha_2 \ln R_1 + \alpha_3 = U \end{cases}$$

La première condition donne : $\alpha_3 = +\frac{kR_2^2}{4\nu} - \alpha_2 \ln R_2$.
En reportant dans la seconde :

$$-\frac{kR_1^2}{4\nu} + \alpha_2 \ln R_1 - \alpha_2 \ln R_2 + \frac{kR_2^2}{4\nu} = U.$$

$$\iff \alpha_2 \ln\frac{R_1}{R_2} = U + \frac{k(R_1^2 - R_2^2)}{4\nu}$$

$$\implies \alpha_2 = \frac{U - \frac{k}{4\nu}(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \iff \underline{\alpha_2 = \frac{\frac{k}{4\nu}(R_2^2 - R_1^2) - U}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}.$$

Par conséquent :

$$\alpha_3 = \frac{kR_2^2}{4\nu} - \frac{\frac{k}{4\nu}(R_2^2 - R_1^2) - U}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln R_2$$

$$= \frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left\{ R_2^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2 + R_1^2 \ln R_2 \right\} + \frac{U \ln R_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\underline{\alpha_3 = \frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left\{ R_1^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1 \right\} + \frac{U \ln R_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

On a finalement :

$$v(r) = -\frac{kr^2}{4\nu} + \frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left\{ R_2^2 \ln r - R_1^2 \ln r \right\} - \frac{U \ln r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$
$$+ \frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left\{ R_1^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1 \right\} + \frac{U \ln R_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

$$\underline{\underline{v(r) = \frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left\{ R_2^2 \ln\frac{r}{R_1} - R_1^2 \ln\frac{r}{R_2} - r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right\} - \frac{\ln\left(\frac{r}{R_2}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} U.}}$$

avec $k = \frac{p_0 - p_L}{L}$

4 - Le débit volumique est donné par la relation :

$$q_v = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} v(r)\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\, r\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r\, v(r)\, dr$$

$$= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{k r^3}{4\nu} + \alpha_2 r \ln r + \alpha_3 r\right) dr$$

$$= -\frac{k\pi}{8\nu}\left(R_2^4 - R_1^4\right) + 2\pi\alpha_2 \int_{R_1}^{R_2} r \ln r\, dr + \pi\alpha_3\left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

La seconde intégrale se calcule par partie :

$$\int_{R_1}^{R_2} r \ln r\, dr = \left[\frac{r^2}{2}\ln r\right]_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{2}\, dr$$

$$= \frac{R_2^2}{2}\ln R_2 - \frac{R_1^2}{2}\ln R_1 - \frac{1}{4}\left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

Par conséquent :

$$q_v = -\frac{k\pi}{8\nu}\left(R_2^4 - R_1^4\right) + \pi\alpha_2\left\{R_2^2\ln R_2 - R_1^2 \ln R_1 - \frac{1}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right\} + \pi\alpha_3\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow q_v = -\frac{k\pi}{8\nu}\left(R_2^4 - R_1^4\right) + \pi\alpha_2\left\{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1\right\} + \pi\left(\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{2}\right)\left(R_2^2 - R_1^2\right).$$

Par conséquent :

$$q_v = -\frac{k\pi}{8\nu}\left(R_2^4 - R_1^4\right) + \frac{k\pi}{4\nu}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\frac{R_2^2\ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} - U\frac{\left(R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$+ \pi\left(R_2^2 - R_1\right)\left\{\frac{k}{4\nu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\left[R_1^2 \ln R_2 - R_2^2 \ln R_1\right] + \frac{U \ln R_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} - \frac{\frac{k}{4\nu}\left(R_2^2 - R_1^2\right) - U}{2\ln\left(R_2/R_1\right)}\right\}.$$