Chapitre 2.

Problèmes d'élasticité plane

1. Problème d'équilibre élastique en déformations planes
    - 1.1 Champs de déplacement et de déformation planes
    - 1.2 Champ de contrainte associé
    - 1.3 Cadre des déformations planes
    - 1.4 Résolution par une approche déplacement
    - 1.5 Résolution par une approche contrainte
2. Problème d'équilibre élastique en contraintes planes
    - 2.1 Champ de contraintes planes
    - 2.2 Champ de déformation associé
    - 2.3 Cadre des contraintes planes
    - 2.4 Résolution en contraintes planes
3. Fonction de contraintes : fonction d'Airy.

En pratique, dans la resolution de problèmes d'élasticité tridimensionnels, on va chercher à limiter au maximum le nombre d'inconnues et de variables du problème en faisant des hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses peuvent être soit vérifiées strictement soit constituer une approximation du problème. Une hypothèse consiste à considérer que les phénomènes pertinents ont lieu dans un plan et à ecrire des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la 3e direction le problème devient alors un problème d'elasticité plane. Deux hypothèses con-duisent à un problème plan : l'hypothèse des déformations planes et celles des contraintes planes. La demarche de simplification repose sur l'analyse des symetries du problème.

1- Problème d'equilibre élastique en déformation plane.

1.1 Champs de déplacement et de deformation plane

- On dit qu'un champ de deplacement tridimensionnel est un champ plan parallèlement au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ si $u_3 = 0$ et les composantes selon e_1 et e_2 sont independantes de la variable x_3, soit :

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) = u_2(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) = 0 \end{cases} \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$$

- le champ de déformation correspondant est tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ie $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1,x_2)\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ avec $\alpha, \beta = 1,2$.

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est plan parallèlement à $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et independant de la variable $\underline{x}_3$.

Réciproquement : si $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est de la forme précédente alors le champ de déplacement (à un déplacement de corps rigide près) est un champ plan parallèle au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

• 1.2 Champ de contrainte associé

En élasticité isotrope, le champ de contrainte associé est donné par la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{trace} \underline{\underline{\varepsilon}} \, \mathbb{1} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Il est donc de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}(x_1,x_2)$$

avec $\sigma_{\alpha\beta}(x_1,x_2) = \lambda\left(\varepsilon_{11}(x_1,x_2) + \varepsilon_{22}(x_1,x_2)\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\, \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1,x_2)$

et $\sigma_{33}(x_1,x_2) = \lambda\left(\varepsilon_{11}(x_1,x_2) + \varepsilon_{22}(x_1,x_2)\right)$

le tenseur des contraintes est lui aussi indépendant de x_3 mais il n'est pas plan : $\sigma_{33} \neq 0$.

la composante σ_{33} s'exprime en fonction de σ_{11} et σ_{22} par la relation :

$$\sigma_{33}(x_1,x_2) = \nu\left(\sigma_{11}(x_1,x_2) + \sigma_{22}(x_1,x_2)\right)$$

Cette dernière relation s'obtient par la loi de comportement inverse, en exprimant le fait que $\varepsilon_{33} = 0$. Soit

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) = 0$$

On peut donc formuler une loi de comportement purement bidimensionnelle avec

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) \\ \sigma_{22}(x_1,x_2) \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) \\ \varepsilon_{22}(x_1,x_2) \\ 2\varepsilon_{12}(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

que l'on complète avec :

$$\sigma_{33}(x_1,x_2) = \nu\left(\sigma_{11}(x_1,x_2) + \sigma_{22}(x_1,x_2)\right)$$

ou encore sous forme inverse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij}$$

d'où $\quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22} + \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right)\delta_{\alpha\beta}$ et $\varepsilon_{i3} = 0$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) \\ \varepsilon_{22}(x_1,x_2) \\ 2\varepsilon_{12}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & -\frac{\nu}{E}(1+\nu) & 0 \\ -\frac{\nu}{E}(1+\nu) & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{1+\nu}{E}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) \\ \sigma_{22}(x_1,x_2) \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

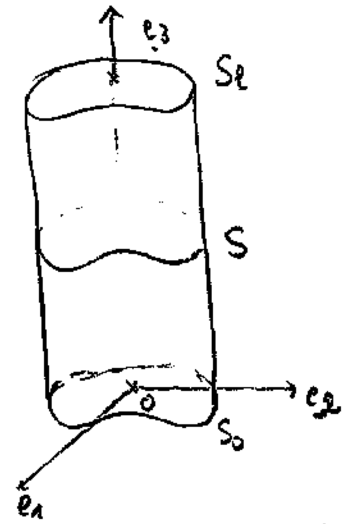
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}$$

ou $\quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}$

1.3 Cadre de l'hypothèse des déformations planes.

On va chercher à savoir dans quelles conditions un problème d'élasticité peut être posé en déformations planes.

On considère un corps cylindrique d'axe $\underline{e}_3$ de section quelconque S. On note ℓ la hauteur selon $(0,\underline{e}_3)$, S_0 et S_ℓ les bases d'extrémités $x_3 = 0$ et $x_3 = \ell$.



- les forces volumiques sont de la forme suivante :

$$\underline{f}(x_1,x_2) = f_1(x_1,x_2)\,\underline{e}_1 + f_2(x_1,x_2)\,\underline{e}_2$$
$$\text{avec } f_3 = 0$$

c'est à dire indépendantes de x_3 et parallèle à $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2)$

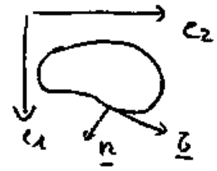
(forme induite par l'équilibre compte tenu de la forme de $\underline{\underline{\sigma}}$)

- les données sur So et Se sont telles que :

$$\left|\begin{array}{l} u_3(x_1,x_2) = 0 \\ F_1^d(x_1,x_2) = 0 \\ F_2^d(x_1,x_2) = 0 \end{array}\right. \qquad \forall (x_1 x_2) \in S_0 \cup S_\ell$$

sur So et Se $\underline{n} = \pm \underline{e}_3$ or $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \sigma_{33} \end{pmatrix}$

- les données sur la surface latérale :



Elles sont indépendantes de x_3 : On peut avoir

$$u_3(x_1,x_2) = 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \partial\omega$$

ou $\sigma_{33}(x_1,x_2) = 0$ $\qquad \underline{n} = (n_1, n_2, 0)$

les autres données concernent les efforts ou déplacements complémentaires (u_1, u_2) ou $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = F_N \ , \ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\tau} = F_T)$

L'hypothèse des déformations planes (// à $0, e_1, e_2$) est en pratique utilisée pour des corps élancés dans la direction $\underline{e}_3$, de section quelconque S constante, chargés parallèlement au plan de section de la même manière dans toute les sections.
Ces corps étant longs, les condition aux limites sur les faces So et Se ont peu d'influence sur la zone centrale, Et on peut penser que les déplacements dans le plan de la section sont indépendants de la section..

1.4 - Résolution par l'approche déplacement.

Sous l'hypothèse des déformations planes, l'équation de Navier se simplifie en deux équations scalaires :

$$\left| (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)_{,\alpha} + \mu\, u_{\alpha,\gamma\gamma} + \rho f_\alpha = 0 \right. \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1,2 \\ \gamma = 1,2 \end{array}$$

(La 3^e équation est automatiquement satisfaite)

Le problème à résoudre se pose alors comme un problème bidimensionnel dans le plan $(0, \underline{e}_1\, e_2)$ avec les équations suivantes :

- 2 équation de Navier (scalaires)
- la loi de comportement bidimensionnelle (donnée précédemment)
- les conditions aux limites sur le bord de S, soit en déplacement, soit en effort, soit mixtes

$$\begin{cases} u_1 = U_1^d \\ u_2 = U_2^d \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = T_1^d \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 = T_2^d \end{cases}$$

(Condition aux limites bidimensionnelles)

1.5 Résolution par l'approche contrainte.

- Dans l'hypothèse des déformations planes, les équations de compatibilité se simplifient en une seule équation $\qquad (\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqr}\, \partial^2 \varepsilon_{jq,kr} = 0)$

$$\boxed{\varepsilon_{11,22} - 2\,\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = 0}$$

les autres équation sont automatiquement satisfaites.

- les équations de Beltrami se simplifient également en une seule équation :

$$\boxed{(1-\nu)\, \Delta_2 \sigma_{\gamma\gamma} + \rho_0\, \mathrm{div}_2\, \underline{f} = 0}$$

avec Δ_2 Laplacien bidimensionnel, div_2 divergence bidimensionnelle

en effet

$$\varepsilon_{11,22} = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{11,22} - \nu\, \sigma_{\gamma\gamma,22}\right]$$

$$\varepsilon_{22,11} = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{22,11} - \nu\, \sigma_{\ell\ell,11}\right]$$

$$\varepsilon_{12,12} = \frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{12,12}$$

d'où d'après l'équation de compatibilité

$$\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{11,22} + \sigma_{22,11} - \nu\, \sigma_{\gamma\gamma,22} - \nu\, \sigma_{\gamma\gamma,11}\right] - 2\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{12,12} = 0$$

or $\sigma_{11,11} + \sigma_{12,12} + \rho f_{1,1} = 0$

$\sigma_{12,12} + \sigma_{22,22} + \rho_0 f_{2,2} = 0$

d'où $\quad -\left[\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22} + \rho_0(f_{1,1} + f_{2,2})\right] = +2\,\sigma_{12,12}$

et donc

$$\boxed{(1-\nu)\, \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \rho_0\,(f_{1,1} + f_{2,2}) = 0}$$

2. Problème d'équilibre élastique en contraintes planes

2.1 Champ de contraintes planes.

Un champ de contraintes planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}(x_1,x_2)$$

soit donc $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1,x_2)\ \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \qquad \alpha,\beta = 1,2$

Il en resulte que $\underline{e}_3$ est direction principale de contraintes associée à la contrainte normale principale $\sigma_3 = 0$ et que les deux autres directions principales sont dans le plan $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

2.2 Champ de déformation associé.

Pour un milieu isotrope, le tenseur de déformation associé est de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

Il n'est pas plan. La composante ε_{33} s'obtient à partir des autres $\varepsilon_{\alpha\beta}$ avec

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\,\varepsilon_{33}$$

d'où
$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{-\nu}{1-\nu}\,\varepsilon_{\gamma\gamma}$$

-nu /E

la loi de comportement se formule donc sous forme bidimensionnelle

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \cancel{\frac{1+\nu}{E}} & 0 \\ \cancel{\frac{1+\nu}{E}} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_{33} = \cancel{-\frac{\nu}{E}}(\sigma_{11} + \varepsilon_{22}) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}$

-nu/(1-nu)

ou encore sous forme inversée :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \right] \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\, \varepsilon_{\alpha\beta}$$

soit

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda^{*} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\, \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\, \varepsilon_{\alpha\beta}$$

$$\text{avec} \quad \lambda^{*} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}.$$

On obtient ainsi une loi du même type que celle obtenue en déformation plane

On a également la forme suivante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\, \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\, \varepsilon_{\gamma\gamma}\, \delta_{\alpha\beta}$$

identique à celle des déformations planes en posant $E \rightsquigarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$
$\nu \rightsquigarrow \frac{\nu}{1+\nu}$

2.3. Cadre de l'hypothèse des contraintes planes

Comme au paragraphe 1.3, un problème n'est pas en général posé en contraintes planes. C'est la forme des données, de la géométrie qui incitera à rechercher une solution de type contraintes planes.

Considérons à nouveau un cylindre d'axe $(O, \underline{e}_3)$ de section S quelconque

- les forces volumiques sont de la forme :

$$f_3 = 0$$
$$\underline{f} = f_1(x_1,x_2)\, \underline{e}_1 + f_2(x_1,x_2)\, \underline{e}_2$$

- les conditions sur S_0 et S_e sont automatiquement satisfaites avec

$$\underline{F}^d(\underline{x}) = \underline{0} \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_e$$

(faces extrêmes libres d'efforts)

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

- les conditions sur la surface latérale de S sont indépendantes de x_3. On peut supposer $F_3^d = 0$ que l'on complète avec $\begin{matrix} u_1 = u_1^d \\ u_2 = u_2^d \end{matrix}$ sur ∂S

et $\underline{u}_1^d(x_1,x_2)$

ou $\quad \begin{matrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = F_1^d \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = F_2^d \end{matrix}$ sur ∂S avec $\underline{F}^d = \underline{F}^d(x_1, x_2)$ indépendant de x_3

L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps minces chargés dans leur plan.

La condition de faces supérieure et inférieure libre d'effort $(\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$ est satisfaite. Comme le corps est mince il est raisonnable de penser que dans tout le corps il en est de même.

2.4 Résolution en contraintes planes

- Le problème en contraintes planes est formellement posé comme un problème en déformations planes. En faisant la correspondance $\begin{matrix} \lambda \to \lambda^* = \\ \mu \to \mu \end{matrix}$ on obtient les équations de Navier bidimensionnelle en contraintes planes à partir de celles explicitées en déformations planes, soit :

$$(\lambda^* + \mu)\, u_{\gamma,\gamma\alpha} + \mu\, u_{\alpha,\gamma\gamma} + \rho_0 f_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1,2 \qquad \lambda^* =$$

- De même les équations de Beltrami en contraintes planes se simplifient en :

$$\frac{1}{1+\nu}\, \Delta_2(\sigma_{\gamma\gamma}) + \rho_0\, \mathrm{div}_2\, \underline{f} = 0$$

- Mais du fait de $\varepsilon_{33} \neq 0$ il existe aussi des conditions d'intégrabilité supplémentaires :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

(issues des équations de compatibilité)

de sorte que $\quad \varepsilon_{33} =$ fonction affine de (x_1, x_2)

$$\varepsilon_{33} = a x_1 + b x_2 + c$$

Cette condition est très contraignante ; elle est en général pas satisfaite

Cette compatibilité transversale peut être non vérifiée lorsque le solide est mince l petit devant les dimension de S, (Approximation des tranches minces) le fait que la compatibilité ne soit pas assurée signifie que les déformation entre les couches ne sont pas compatibles si l'on empile des tranches minces les unes sur les autres

. 3. Fonctions de contraintes : fonction d'Airy

Qu'il s'agisse d'un problème en deformations planes ou contraintes planes, on est amené à resoudre des equations d'equilibre bidimensionnelles. qui s'ecrivent en absence d'effort volumique sous la forme

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0$$
$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0$$

On utilise le theoreme de Poincaré (ou integrabilité)

donc $\exists\ \varphi(x_1,x_2)$ telle que $\sigma_{11} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ $\quad \sigma_{12} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$

et $\exists\ \psi(x_1,x_2)$ telle que $\sigma_{21} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}$ $\quad \sigma_{22} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}$

Or d'après la symetrie du tenseur de Cauchy, on a :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0$$

donc il existe $\chi(x_1,x_2)$ telle que :

$$\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

De sorte que
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

Au lieu de chercher 3 composantes, on recherche une seule fonction χ appelée fonction de contraintes ou fonction d'Airy.

Pour resoudre le problème, il suffit donc de trouver $\chi(x_1,x_2)$ solution de l'equation de Beltrami :

qui s'écrit alors en contraintes planes et en déformation planes :

$$\Delta_2 (\sigma_{ee}) = 0$$

soit $\Delta_2 (\Delta_2 \chi) = 0$ soit $\boxed{\chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = 0}$

la fonction d'Airy est donc bi-harmonique

Cette équation posée dans une section est à compléter par des conditions aux limites sur le bord de S. Cette formulation est bien adaptée si les conditions concernent les contraintes.

- Cette formulation se généralise au cas où les forces de volume dérivent d'un gradient

$$\rho_0 f_1 = -V_{,1} \quad \rho_0 f_2 = -V_{,2}$$

Dans ce cas $(\sigma_{11} - V)_{,1} + \sigma_{12,2} = 0 \Rightarrow \exists\, \varphi \begin{cases} \sigma_{11} - V = \varphi_{,2} \\ \sigma_{12} = -\varphi_{,1} \end{cases}$

$\sigma_{21,1} + (\sigma_{22} - V)_{,2} = 0 \Rightarrow \exists\, \psi \begin{cases} \sigma_{21} = -\psi_{,2} \\ \sigma_{22} - V = \psi_{,1} \end{cases}$

d'où $\exists\, \chi(x_1, x_2)$ telle que $\varphi = \chi_{,2}$ et $\psi = \chi_{,1}$

soit
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} + V \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} + V \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

L'équation de Beltrami s'écrit alors en déformations planes

$$\boxed{\Delta_2(\Delta\chi) + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V = 0}$$

et en contraintes planes

$$\boxed{\Delta_2(\Delta\chi) + (1-\nu)\Delta V = 0}$$