LU3ME005 – Projet Numérique

PRESENTATION DU PROBLEME

On se propose, pour ce projet numérique, d'étudier le mouvement d'un pendule simple de longueur *l* et de masse m soumise au champ d'accélération terrestre $\vec{g}$. (Fig.1).

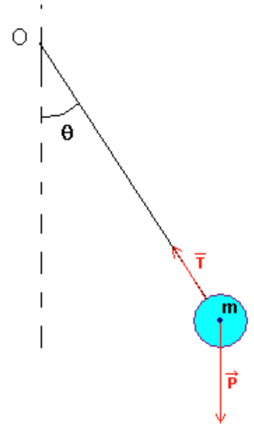

Figure 1 Pendule simple

L'énergie mécanique du pendule s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

La conservation de l'énergie mécanique donne alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = ml^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Cela conduit à l'équation différentielle non-linéaire suivante (Eq.A) avec $\omega_0^2 = g/l$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{(A)}$$

L'équation (A) non linéaire n'admet pas de solution analytique. On ne peut qu'en obtenir une solution numérique ou bien trouver une théorie linéarisée.

En effet, en supposant que l'angle θ reste petit, on obtient l'équation linéarisée:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Ainsi, nous avons une théorie linéarisée de pendule résoluble analytiquement qui prévoit un mouvement harmonique avec les conditions initiales ($\theta(0) = \theta_0; \dot{\theta}(0) = 0$).

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

avec la période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Il est néanmoins possible de trouver l'expression de la période dans le cadre de la théorie non linéaire. En effet, l'énergie mécanique Em est conservée et égale à sa valeur pour la position initiale. On a donc :

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta) = mgl(1 - cos\theta_0)}$$

ce qui donne

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Enfin, la période du pendule est obtenue sous forme d'intégrale (Eq 2).

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \qquad \text{(B)}$$

Cependant, l'expression (B) n'est pas intégrable et on ne peut qu'obtenir une solution numérique.

PARTIE I. CONSTRUCTION DES OUTILS (35%)

On commence ce projet par la construction de quelques outils numériques (qui permettront ensuite d'obtenir la solution numérique de la théorie non linéaire du pendule, Equations A et B).

I.1° Générer un tableau de 101 valeurs de temps $t_i \in [0, 2\pi]$ à intervalle constant. Ensuite, en prenant $n = N + 1$, avec N le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant (le plus grand parmi le binôme), avec $0 \leq N \leq 9$, générer un deuxième tableau de 101 valeurs égales à $\theta_i = \sin(nt_i)$.

I.2° A partir du tableau des θ_i, calculer la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction $\sin nt$ en utilisant des approximations aux différences finies (différence progressive pour la première et différence centrée pour la seconde) pour $t \in [0, 2\pi]$. Tracer les deux dérivées en fonction du temps avec le logiciel graphique de votre choix.

I.3° Calculer la valeur numérique de l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin(nt)dt$ par la formule des trapèzes composites en utilisant le tableau $\theta_i = \sin(nt_i)$. Evaluer la précision des résultats par rapport à la solution analytique.

I.4° Trouver le polynôme de degré m au sens des moindres carrés pour approcher le tableau $\theta_i = \sin(nt_i)$, $t_i \in [0, 2\pi]$, en prenant m=5+le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant (le plus petit parmi le binôme). Evaluer l'erreur quadratique avec le tableau $\theta_i = \sin(nt_i)$.

PARTIE II. APPLICATIONS AU PENDULE (50%)

Dans cette partie, nous allons adapter les outils numériques construits auparavant pour analyser le problème du pendule simple. L'étude reste assez libre et il faut en profiter pour personnaliser votre étude. L'originalité est un élément essentiel pour une meilleure note.

II.1° Trouver un exemple de pendule pour choisir les paramètres. Calculer et tracer l'évolution de l'angle $\theta(t)$ avec les conditions initiales ($\theta(0) = \theta_0; \dot{\theta}(0) = 0$) selon la théorie linéarisée. Calculer la période associée.

II.2° Utiliser la formule (B) pour approcher numériquement la valeur de la période selon la théorie sans linéarisation. Vérifier la précision de vos résultats numériques en adaptant le pas d'intégration (comparer avec la valeur théorique pour un angle initial $\theta(0) = \theta_0$ très petit). Etudier l'évolution de la période en fonction de l'angle initial $\theta(0) = \theta_0$. Calculer l'angle initial maximal pour lequel l'erreur sur la période de la théorie linéarisée ne dépasse pas un pourcentage à fixer (selon la sensibilité de chacun pour la ponctualité).

II.3° Afin d'obtenir le mouvement complet du pendule, nous devons résoudre l'équation différentielle non-linéaire (A) numériquement. Nous allons remplacer la dérivée seconde par l'approximation aux différences finies centrée d'ordre deux et construire la solution de proche en proche en choisissant un incrément de temps, avec les conditions initiales ($\theta(0) = \theta_0; \dot{\theta}(0) = 0$). Cette résolution nous donne non seulement la période mais aussi l'évolution de la position du pendule (angle) en fonction du temps.

3.1 Calculer l'évolution de la position du pendule (angle) en fonction du temps pendant une période complète pour le cas d'un angle initial très petit (mouvement presque harmonique).

3.2 Trouver un polynôme de degré de m au sens des moindres carrés pour les points issus du cas II3.1 (avec la même valeur de m qu'en I.4°). Etudier le développement de Taylor jusqu'à l'ordre m de la solution de la théorie linéarisée $\theta_{lin}(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ et comparer (penser à diminuer le pas de temps si la précision obtenue n'est pas suffisante).

3.3 Calculer l'évolution de la position du pendule (angle) en fonction du temps pendant une période complète pour le cas d'un angle initial assez grand et en déduire la valeur de la période (penser à diminuer le pas de temps si la précision n'est pas suffisante). Comparer la période ainsi obtenue avec les résultats de la question II.2.

3.4 Tracer l'évolution de l'angle en fonction du temps pour le cas de II.3.3. Comparer avec la solution harmonique dans le cadre de la théorie linéarisée. Quantifier l'erreur quadratique entre ces deux solutions.

PARTIE III. EXTENSION (15%)

III.1° A partir d'une recherche bibliographique, retrouver les équations différentielles du mouvement du pendule de Foucault.

III.2° Proposer une solution numérique pour le cas du pendule de Foucault. Etudier l'influence de l'angle initial sur la période.

III.3° Tracer l'évolution de l'angle en fonction du temps.

Pièces à rendre

Remettre <u>sur Moodle uniquement</u> (les envois par mail ne seront pas acceptés), avant le <u>20 décembre 2019 à 23h</u> (heure locale), <u>un seul dossier par binôme</u>:

1° un compte-rendu en **pdf** concis de 10 pages maximum identifié par les noms-prénoms, numéros des deux étudiants du binôme ainsi que votre groupe de TP.
Il doit contenir l'introduction du cas étudié, ainsi que les méthodes, résultats, une discussion et une conclusion.

2° un listing des programmes avec des commentaires pour la compréhension.

3° un fichier readme en **txt** d'instructions de compilation et d'exécution de votre programme.

4° un fichier **pdf** contenant un tableau d'une page maximum résumant les grandes étapes de la réalisation de votre projet (le temps passé sur chaque question, les difficultés théoriques ou techniques rencontrées, etc).

Remarques importantes :

Outre les travaux réalisés et les résultats obtenus, la qualité de présentation du rapport, l'originalité des choix d'étude, la cohérence/logique dans le raisonnement et l'analyse, les discussions et commentaires sont aussi des éléments clés de l'appréciation (surtout pour des notes au-dessus de la moyenne). Le non-respect des consignes et le retard seront sévèrement sanctionnés. Il est à noter que le projet proposé est long et de difficulté croissante (notamment la partie III). Bon courage.