LU3ME002 : Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Corrigé feuille d'exercices n° 4 : Equation de diffusion 1D

Exercice 1

On considère le problème initial et aux limites pour l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 4x(1-x) \end{aligned}$$

a) Montrer que pour tout $0 < x < 1$, $t > 0$ nous avons les inégalités :

$$0 \leq u(x,t) \leq 1$$

b) Montrer que $u(x,t) = u(1-x,t)$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$.
c) Utilisez une méthode de type énergie pour démontrer que l'intégrale $\int_0^1 u^2 dx$ est strictement décroissante par rapport à la variable t.

Corrigé :

a) D'après le principe de maximum on sait que la solution u de l'equation de diffusion atteint son maximum/minimum sur les frontières (lateralles ou basse) du domaine rectangulaire : $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$.
Si le maximum/minimum est atteint sur les frontières lateralles ($x = 0$ ou $x = 1$) alors il est 0 car $u \equiv 0$ sur ces frontières.
Si le maximum/minimum est atteint sur la frontière $t = 0$ on sait que la solution est de la forme $u(x,0) = 4x(1-x)$. On cherche les points critiques par la condition :

$$u^{'}(x,0) = 4 - 8x = 0$$

ce qui donne seulement $x_0 = \frac{1}{2}$. Comme $u(\frac{1}{2}, 0) = 1$, alors le maximum de la solution est 1 et le minimum 0, donc :

$$0 \leq u(x,t) \leq 1$$

b) Pour démontrer l'égalité $u(x,t) = u(1-x,t)$ il suffit de démontrer, par unicité, que $u(1-x,t)$ est solution du problème de Dirichlet.
Soit $v(x,t) = u(1-x,t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} v(0,t) = u(1,t) = 0 = u(0,t) = v(1,t) \\ v(x,0) = u(1-x,0) = 4x(1-x) \\ v_t(x,t) = u_t(1-x,t) \\ v_{xx}(x,t) = u_{xx}(1-x,t) = u_t(1-x,t) = v_t(x,t) \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $v(x,t) = u(1-x,t)$ est solution du problème de Dirichlet et, par unicité, $u(1-x,t) \equiv u(x,t)$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$.

c) La méthode de l'énergie consiste a multiplier l'équation par u :

$$\begin{aligned}
0 &= u_t - u_{xx} \\
0 &= (u_t - u_{xx})u \\
0 &= (\frac{1}{2}u^2)_t - (u_x u)_x + u_x^2
\end{aligned}$$

et intégrer le résultat sur $[0,1]$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2 \mathrm{d}x - [u_x u]_0^1 + \int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

On utilise les conditions aux bords : $u(0,t) = u(1,t) = 0$ et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2 \mathrm{d}x = -2\int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x \leq 0 \tag{2}$$

L'inégalité obtenue devient égalité pour $u_x = 0$. Cela signifierait que u est une fonction de t seulement : $u(x,t) = f(t)$, mais on a la condition initiale $u(x,0) = 4x(1-x)$ contredit cette hypothèse. On a donc :

$$\int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x > 0$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 u^2 \mathrm{d}x < 0$$

donc $\int_0^1 u^2 \mathrm{d}x$ est strictement décroissante par rapport à la variable t.

Exercice 2

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned}
u_t &= k u_{xx} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\
u(x,0) = 1 \quad &| x | < 1 \ \ ; \ \ u(x,0) = 0 \quad | x | \geq 1
\end{aligned}$$

avec $k > 0$.
a) Obtenir une représentation de la solution du problème en fonction de la fonction d'erreur $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ en utilisant la solution fondamentale pour l'équation de diffusion.
b) Montrer que, pour tout $t > 0$ arbitrairement petit, la solution du problème est non nulle partout sur l'axe réel, malgré la donnée initiale concentrée sur $(-1,1)$. Comparaison avec l'équation des ondes.
c) Montrer que, en chaque point x, la solution $u(x,t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Corrigé

a) Il s'agit du problème de Cauchy pour l'équation de diffusion avec une condition initiale continue par morceaux. La solution peut-être déterminé en utilisant la solution fondamentale :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \mathrm{d}y \tag{3}$$

avec ϕ la donnée initiale.
En tenant compte de la condition initiale on obtient :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \mathrm{d}y \tag{4}$$

On peut effectuer le changement de variables $p = (x-y)/\sqrt{4kt}$ pour obtenir une représentation de la solution sous la forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} \mathrm{d}p \tag{5}$$

En utilisant la fonction d'erreur $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ on exprime la solution :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(Erf(\frac{x+1}{\sqrt{4kt}}) - Erf(\frac{x-1}{\sqrt{4kt}}) \right).$$

b) Pour un $t > 0$, la solution donnée par l'intégrale (4) est non-nulle en tout $x \in \mathbb{R}$. Cela montre que la perturbation initiale se propage avec une vitesse "infinie". Le comportement est différent de celui des solutions de l'équation des ondes, pour lesquelles la perturbation initiale se propage avec une vitesse finie et on définit le domaine d'influence à l'aide des caractéristiques.
c) Quant $t \to \infty$ le domaine d'intégration de l'intégrale dans (5) se réduit au point 0, donc l'intégrale s'annule.

Exercice 3

Résoudre la problème de Cauchy pour l'équation de diffusion :

$$u_t = ku_{xx} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x} \quad x \geq 0 \quad ; \quad u(x,0) = 0 \quad x < 0$$

avec $k > 0$. La solution sera exprimée avec la fonction d'erreur $Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$.

Corrigé

La solution générale pour une donnée initiale arbitraire ϕ est exprimée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) \mathrm{d}y.$$

Pour la condition initiale donnée elle devient :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt} - y} \mathrm{d}y \end{aligned}$$

On transforme l'exposant en :

$$\frac{-(y+2kt-x)^2}{4kt} + kt - x,$$

et on pose $p = \frac{(y+2kt-x)}{\sqrt{4kt}}$. Alors d$y = \sqrt{4kt}dp$. Après ce changement de variables la solution devient :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{kt-x} \int_{\frac{2kt-x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} \mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{kt-x} \left(\int_0^{\infty} e^{-p^2} \mathrm{d}p - \int_0^{\frac{2kt-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} \mathrm{d}p \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{kt-x} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} Erf\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{4kt}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{kt-x} \left(1 - Erf\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{4kt}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Exercice 4

Soit l'équation de diffusion sur l'axe réel avec la condition initiale

$$u(x,0) = \phi(x)$$

Montrer que si $\phi(x)$ est une fonction paire (impaire), alors la solution $u(x,t)$ est aussi une fonction paire (impaire) de x.

Corrigé

Supposons que $\phi(x)$ est une fonction impaire. Si $u(x,t)$ est la solution correspondante, on introduit $w(x,t) = u(-x,t) + u(x,t)$. Alors :

$$w(x,0) = u(-x,0) + u(x,0) = \phi(-x) + \phi(x) = -\phi(x) + \phi(x) = 0.$$

Ainsi w vérifie l'équation de diffusion avec condition initiale :

$$\begin{aligned} w_t &= k w_{xx} \\ w(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

En tenant compte de l'unicité, on obtient $w(x,t) \equiv 0$ d'ou $u(-x,t) = -u(x,t)$.

Dans le cas où $\phi(x)$ est paire on fait un raisonnement similaire ; on prend $w(x,t) = u(-x,t) - u(x,t)$. Comme précédement w vérifie l'équation de diffusion et :

$$w(x,0) = u(-x,0) - u(x,0) = \phi(-x) - \phi(x) = \phi(x) - \phi(x) = 0.$$

w vérifie ainsi l'équation de diffusion avec condition initiale :

$$\begin{aligned} w_t &= k w_{xx} \\ w(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant la condition d'unicité on obtient $w(x,t) \equiv 0$, d'ou u(-x,t) = u(x,t).