2.1 Espaces de Sobolev.

▶ **Espace L^2.** Soit Ω ouvert dans $\mathbb{R}^N$

$$L^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,,\ \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \}.$$

↳ intégrale prise au sens de Lebesgue.

▶ **Propriétés** : ① $(L^2(\Omega), \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$ = espace de Hilbert

$$\langle f,g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg \, dx. \quad \text{produit scalaire}$$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{norme associée}.$$

② Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle f,g \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Si, de plus, Ω = borné, on a :

$$\to \int_\Omega |f(x)| dx \leq \underbrace{\left(\int_\Omega dx \right)^{1/2}}_{= [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{(mesure de } \Omega)$$

$$\Rightarrow L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

$$\to \int_\Omega |f(x)|^2 dx \leq \mu(\Omega) \cdot \|f\|^2_{L^\infty} \Rightarrow \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow L^\infty \subset L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow L^\infty \subset \dots \subset L^{p+1} \subset L^p \subset \dots \subset L^2 \subset L^1.$$

③ Théorème de densité :

Soit $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact $\subset \Omega$. Alors

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

c'est-à-dire que :

$$\forall f \in L^2(\Omega),\ \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.q. } \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

(4) Conséquence : Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega f \phi \, dx = 0$$

Alors $f = 0$ presque partout dans Ω.

► <u>Définition de la dérivation faible dans $L^2(\Omega)$</u>

Soit Ω un ouvert (borné)? régulier $\subset \mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On dit que f est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$ telles que :

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \, dx = -\int_\Omega w_i(x) \phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

w_i = $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f au sens faible

$w_i \overset{\text{notation}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

<u>Propriétés</u> : i) Si f est dérivable au sens faible alors les dérivées partielles de f faibles sont uniques au sens de $L^2(\Omega)$

ii) Si $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ alors les dérivées partielles de f au sens fort ~~sont~~ coïncident avec les dérivées partielles au sens faible.

<u>Remarque</u> : $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de f au sens des distributions. $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ revient à confondre $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ avec $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$, la distribution associée à $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, définie par (rappel 1er semestre) :

$$\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \phi \rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

<u>Espace $H^1(\Omega)$</u>

<u>Définition de H^1</u>

Soit Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^N$, $\boxed{H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = \overline{1, N} \right\}}$

→ Proposition :

1) L'application $\left\{\begin{array}{l} H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}. \\ (u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v\rangle_{L^2}. \\ \left(\langle u,v\rangle_{H^1} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \vec{\nabla} u(x) \vec{\nabla} v(x)\,dx \right) \end{array}\right.$

définit un produit scalaire sur H^1

2) $(H^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}, \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert

Preuve : . on vérifie facilement que $\langle u,v\rangle_{H^1}$ est un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$

— $\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle v,u\rangle_{H^1}$ symétrie.

— $\langle \lambda u_1 + u_2, w\rangle = \lambda\langle u_1,w\rangle + \langle u_2,w\rangle$ bilinéarité

- $\langle u,u\rangle_{H^1} = \int_\Omega [u^2(x) + [\vec{\nabla} u(x)]^2]\,dx \geq 0.$

$\langle u,u\rangle_{H^1} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_\Omega u^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ pp.} \\ \int_\Omega [\vec{\nabla} u(x)]^2\,dx = 0 \end{array}\right.$

. de même, on vérifie facilement que $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H^1}}$ est une norme sur $H^1(\Omega)$

$- \|\lambda u\|^2_{H^1} = \int_\Omega \lambda^2 u^2(x)\,dx + \int_\Omega \lambda^2 |\vec{\nabla} u|^2\,dx = \lambda^2 \|u\|_{H^1}$

$\Rightarrow \|\lambda u\|_{H^1} = |\lambda|\,\|u\|_{H^1}.$

- $\|u\| \geq 0$ évident

- $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$ pp ds Ω.

- $\|u+v\|^2_{H^1} = \int_\Omega (u+v)^2\,dx + \int_\Omega (\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} v)^2\,dx =$

$= \|u\|^2_{H^1} + \|v\|^2_{H^1} + \underbrace{\underbrace{2\int_\Omega uv\,dx}_{\leq 2\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}} + \underbrace{2\int_\Omega \vec{\nabla} u\cdot\vec{\nabla} v\,dx}_{\leq 2\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}}}_{\leq 2\sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}}\sqrt{\|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2}}}$

$\leq (\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1})^2$

d'où $\|u+v\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}$.

- Il reste à montrer que $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ est complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$. Alors (u_n) est une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$ et $(\vec{\nabla} u_n)$ également.

Mais $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ = espace complet (Banach) $\Rightarrow \begin{cases} (u_n) \xrightarrow[L^2(\Omega)]{} u \\ (\vec{\nabla} u_n)_i \xrightarrow[\text{ds } L^2(\Omega)]{} w_i \end{cases}$

Il reste à demontrer que u est dérivable au sens faible et que ses dérivées partielles faibles sont w_i :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega)$, donc par définition de la dérivée partielle faible de u_n ; $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \phi \, dx = - \int_\Omega u_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En passant à la limite ds la relation précédente

$\downarrow$

$$\int_\Omega w_i \phi \, dx = - \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

q.e.d.

Remarques :

1) $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

2) $\Omega \subset \mathbb{R}$ (dimension 1) : $H^1(]a,b[) \subset \mathcal{C}^0(]a,b[)$
faux en dimension $N \neq 1$

Proposition : Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire :

$\forall f \in H^1(\Omega)$, $\exists f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $f_n \to f$ dans H^1

L'espace H^1 est constitué des fonctions régulières, complété par les limites des suites de fonctions régulières.

Remarques : i) $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega}) = \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ si Ω est borné
ii) $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ ne s'annulent pas forcément sur le bord