

Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

3. Modèles linéaires algébriques

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

Qu'avez-vous retenu?

QCM #1

<https://www.wooclap.com/JYKQPF>

Approximation (hypothèse) de Boussinesq

- La partie déviatrice de τ_{ij}^R représente la contribution des fluctuations turbulentes au transport de quantité de mouvement
 - Diffusivité accrue des écoulements turbulents!
- La plupart des modèles de fermeture pour a_{ij} utilisés dans les applications en sciences de l'ingénieur utilisent une approximation de type gradient de la forme:

$$\tau_{ij}^R - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} = 2\rho k a_{ij} = 2\rho \nu_t \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \text{tenseur du taux de déformation moyen}$$

où le coefficient ν_t est appelé **viscosité tourbillonnaire** ou **viscosité turbulente** (eddy viscosity)

- Le problème de modélisation se réduit alors à déterminer ν_t
- **Hypothèse de Boussinesq** : analogie avec la loi de comportement des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien isochore :

$$\tau_{ij} = 2\rho \nu S_{ij}$$

→ k négligé (encore acceptable pour des écoulements jusqu'à Mach < 5)

Classification des modèles RANS

Modèles à viscosité tourbillonnaire linéaire (Boussinesq)

Linear Eddy Viscosity Models (LEVM)

- Algébriques:
 - De longueur de mélange (Prandtl, 1925)
 - À viscosité tourbillonnaire (Baldwin-Lomax, Cebeci-Smith, Michel...)
- Modèles à une équation de transport
 - pour l'énergie cinétique turbulente
 - pour la viscosité turbulente (Spalart-Allmaras, Baldwin-Barth)
- Modèles à deux équations de transport
 - k-e, k-w, k-l, k-t, q-w, ...

Modèles à viscosité tourbillonnaire non linéaire
(Modèles aux tensions de Reynolds algébriques)

Non-linear Eddy Viscosity Models (NLVM)
Algebraic Stress Models (ASM)

- Analogie viscoélastique
- Modèles aux tensions de Reynolds algébriques
- Modèles algébriques explicites (EARS)

Modèles aux tensions de Reynolds (équations de transport)

Reynolds-Stress Models (RSM)

Equations de transport pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds + une échelle de longueur
Launder-Reece-Rodi, Wilcox-Rubesin,...

Modèles algébriques

- Appelés également **modèles à 0 équations**

- Aucune équation de transport additionnelle n'est requise
- La viscosité tourbillonnaire est calculée en fonction d'une échelle de longueur bien choisie (longueur de mélange)
 - Introduite par analogie avec le libre parcours moyen des particules, dont dépend la viscosité moléculaire
- Analyse dimensionnelle :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \times u_t \times l_t$$

avec u_t et l_t une vitesse et une longueur caractéristiques des fluctuations turbulentes.

- **Modèle de longueur de mélange** (Prandtl, 1925) :

$l_t = l_m$ = longueur de mélange (donnée par une relation algébrique)

$$u_t = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \rightarrow \mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

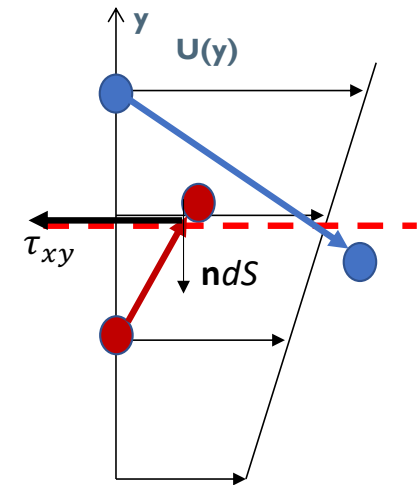
Nota : dorénavant nous omettons la barre sur les grandeurs moyennées, afin d'alléger les notations

Modèles algébriques

- La longueur de mélange dépend de l'écoulement considéré
 - Différence fondamentale avec le libre parcours moyen qui, lui, ne dépend que des conditions thermodynamiques du fluide
 - Cette longueur doit être spécifiée au cas par cas, en fonction des échelles caractéristiques de l'écoulement moyen
 - Elle est reliée à la distance à la paroi la plus proche
 - Casse-tête en cas de géométrie complexes, écoulements décollés, solveurs non structurés...
- De façon générale, la validité de l'approximation de Boussinesq est discutable dans beaucoup de situations

Modèle de longueur de mélange (Prandtl, 1925)

- Analogie avec entre transport **turbulent** et **moléculaire** de quantité de mouvement
 - Considérons un écoulement cisailé dans la direction x : $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{i}$
 - Au niveau moléculaire, la vitesse des particules est la somme de cette vitesse macroscopique et de la vitesse d'agitation moléculaire (aléatoire) : $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}^*$
 - A cause de ce mouvement les molécules se déplacent dans la direction y , en transportant leur quantité de mouvement
 - Le brassage induit un flux infinitésimal de quantité de mouvement en x à travers une section donnée à la position y : $dq_{xy} = \rho(U(y) + u^*)v^*dS$
 - En moyennant sur toutes les particules, on obtient le flux net :
$$dQ_{xy} = \rho \overline{u^*v^*}dS$$
 - L'équilibre dynamique de la surface fluide dS impose que ce flux donne lieu à une force sur l'élément de surface, et donc à une tension : $\tau_{xy} = -\rho \overline{u^*v^*}$
→ ressemblance avec les contraintes de Reynolds!



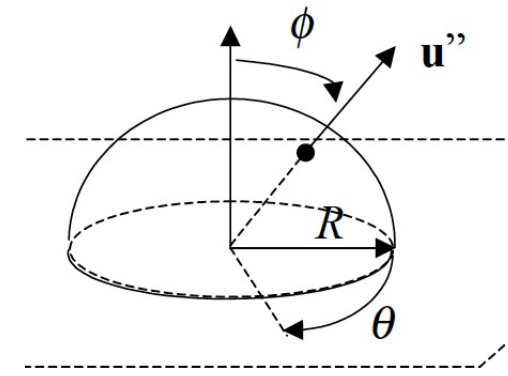
Viscosité moléculaire

- On peut utiliser la théorie cinétique des gaz pour calculer la contrainte τ_{xy}
 - Hypothèse de distribution de vitesse à la Maxwell (les molécules ont une vitesse d'agitation thermique $v_{th} = v_{th}(T) \approx \frac{4}{3}a$ (a =vitesse du son) et toutes les directions sont équiprobables).
 - Valeur moyenne de la vitesse verticale $v_{th} \sin \theta : \frac{v_{th}}{2}$ (intégrale sur demie-sphère)
 - En moyenne, la moitié des molécules par unité de volume ($n/2$) traverse vers le haut, l'autre vers le bas
 - Une molécule parcourt en moyenne une distance égale au parcours libre moyen l_{fp}
 - Ceci produit une variation de quantité de mouvement : $\frac{v_{th}}{2} M (U(0) - U(l_{fp}))$
 - En multipliant par le nombre de molécules à l'unité de volume :

$$\frac{v_{th}}{2} \frac{n}{2} M (U(0) - U(l_{fp})) \approx \frac{\rho}{4} v_{th} l_{fp} \frac{dU}{dy}(0)$$

- Enfin, en ajoutant les contributions de part et d'autre de l'élément de surface, on obtient :

$$\tau_{xy} = \frac{\rho}{2} v_{th} l_{fp} \frac{dU}{dy}(0) = \mu \frac{dU}{dy}(0) \quad \text{avec } \mu = \frac{\rho}{2} v_{th} l_{fp} = \mu(T) \quad \text{pour un gaz}$$



Validité?

■ Hypothèses à vérifier :

1. Développement en série tronquée au premier ordre de la vitesse.

○ Acceptable si

$$l_{fp} \left| \frac{d^2 U}{dy^2} \right| \ll \left| \frac{dU}{dy} \right| \Rightarrow \frac{\left| \frac{dU}{dy} \right|}{\left| \frac{d^2 U}{dy^2} \right|} \sim L \ll l_{fp} \text{ avec } L \text{ une échelle macroscopique}$$

$$\Rightarrow Kn = \text{nombre de Knudsen} = \frac{l_{fp}}{L} \ll 1$$

→ Bien respectée tant que l'écoulement satisfait l'hypothèse de **milieu continu**

2. La vitesse v_{th} suit une distribution de Maxwell malgré le cisaillement.

○ Vrai si le temps caractéristique des collisions entre molécules est petit devant le temps caractéristique de l'écoulement :

$$\frac{l_{fp}}{v_{th}} \ll \frac{1}{\left| \frac{dU}{dy} \right|} \Rightarrow \left| \frac{dU}{dy} \right| = O\left(\frac{U_{ref}}{L}\right) \ll \frac{v_{th}}{l_{fp}}$$

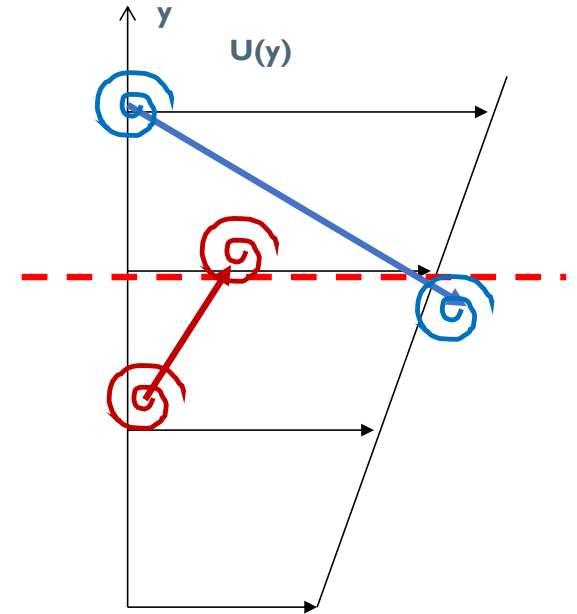
→ vrai si Knudsen est petit devant 1

Viscosité tourbillonnaire

- Contrainte de Reynolds dans un écoulement cisaillé : $\tau_{xy}^R = -\rho \overline{u'v'}$

$$\tau_{xy}^R = \frac{\rho}{2} v_m l_m \frac{dU}{dy} = \mu_t \frac{dU}{dy} \quad \text{avec } \mu_t = \frac{\rho}{2} v_m l_m$$

- v_m = vitesse de mélange → définition??
 - L'analyse dimensionnelle suggère : $v_m = O(l_m \left| \frac{dU}{dy} \right|)$
 - On a alors $\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$
 - Modèle incomplet : il reste toujours à définir l_m !
 - Une hypothèse courante pour des écoulement pariétaux est $l_m \approx \kappa y \approx \kappa L$,
 κ = constante de von Karman ≈ 0.41
- L'équation pour la viscosité turbulente fait partie de la solution, puisqu'elle dépend du gradient de vitesse moyen



Validité?

■ Validité des hypothèses précédentes?

- $Kn_t = \ll$ Knudsen turbulent $\ll 1$ mais avec les hypothèses ci-dessous $\frac{l_m}{L} \approx 0.41$ ☹️
- De plus, le temps caractéristique des structures turbulentes doit être petit devant le temps caractéristique du cisaillement moyen : $\frac{l_m}{v_m} \ll \left| \frac{dU}{dy} \right|^{-1} \rightarrow$ pas nécessairement vérifié ☹️ !
→ Les plus grands tourbillons ont une taille de l'ordre de l'échelle macroscopique L

■ Conclusion :

- l'analogie entre viscosité moléculaire et viscosité turbulente est séduisante mais **pas vraiment justifiée**
- Le succès des modèles à viscosité tourbillonnaire algébriques repose sur :
 - l'ajout de fonctions correctives (empiriques)
 - l'ajustement (**calibration**) de coefficients de fermeture pour quelques écoulements canoniques

Premières applications et calibration

- Applications à des écoulements cisailés libres (*free shear flows*)
 - Caractérisés par une direction dominante
 - Effets visqueux de proche paroi absents
- Les équations RANS peuvent être simplifiées en adoptant une approximation de type couche limite :

$$\frac{1}{x^m} \frac{\partial(x^m u)}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial(y^j v)}{\partial y} = 0 \text{ (continuité)} \quad (*)$$

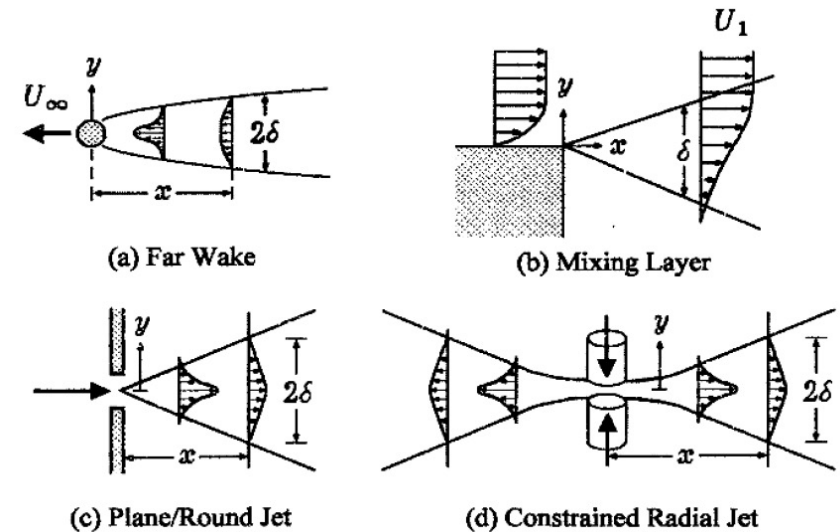
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial(y^j (\tau_{xy} + \tau_{xy}^R))}{\partial y} \text{ (Q. mvt en x)}$$

- Recherche de **solutions auto-semblables**
- Loin de la géométrie, la solution adimensionnée ne dépend que d'une seule variable (variable de similitude)
- Exemple :

$$\frac{u(x, y)}{u_0(x)} = F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

Cas 2D : $m=j=0$

Cas axi : m ou $j=1$



Exemples d'écoulements cisailés libres
(From Wilcox, 2006)

Sillage lointain

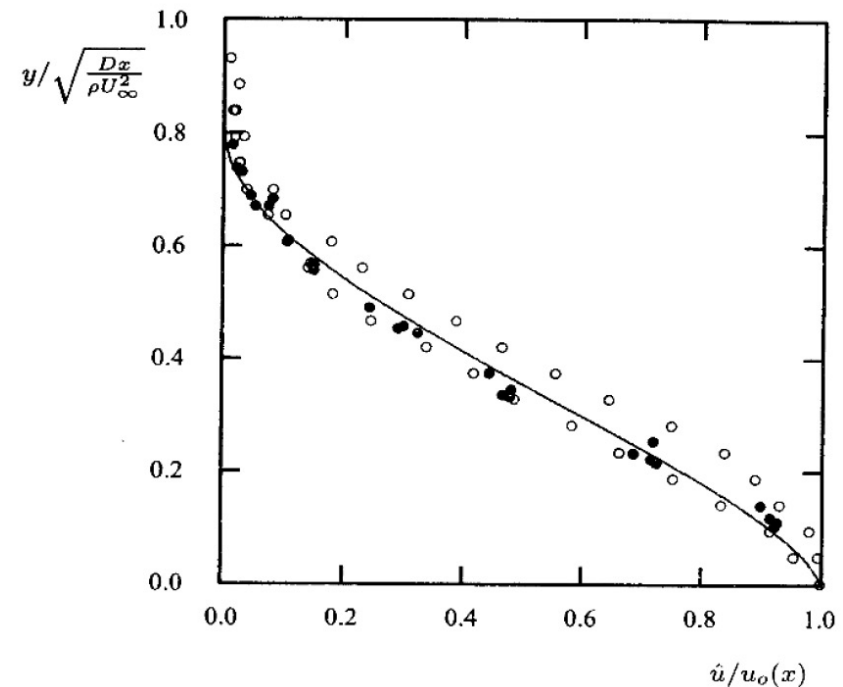
- Equations (*) avec conditions aux limites :

$$u(x, y) \rightarrow U_\infty \quad \text{pour } y \rightarrow \infty; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ (symétrie)}$$

- Dans le sillage lointain, on cherche la solution sous forme d'une petite perturbation de l'écoulement uniforme
- La solution doit satisfaire le bilan global de quantité de mouvement:

$$\int_0^\infty \rho u (U_\infty - u) dy = \frac{1}{2} D$$

- On suppose $l_m = \alpha \delta(x)$, avec α un coefficient de fermeture
- Le calcul de cette solution fait l'objet du TD1
- Calibration de la longueur de mélange sur des données expérimentales : $\alpha=0.18$
- La solution du modèle pour le profil de vitesse est en bon accord avec les mesures

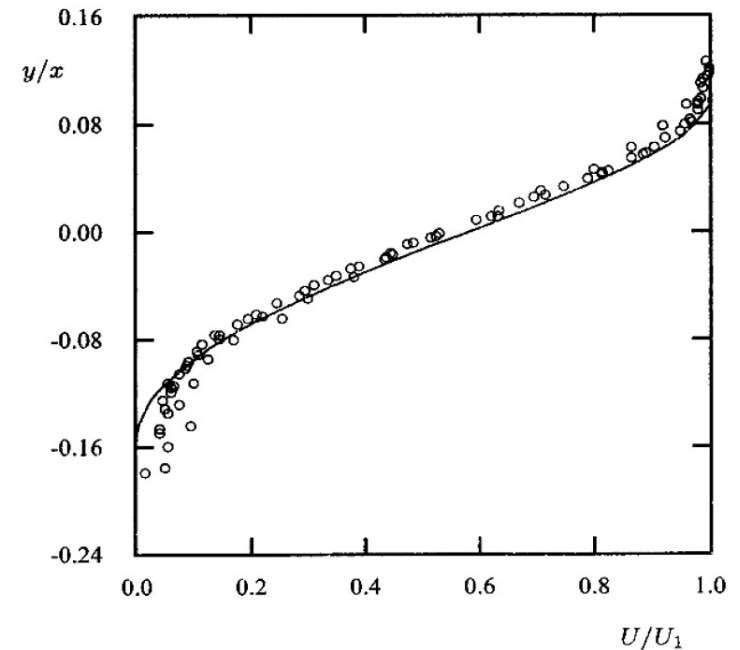


Couche de mélange

- Equations (*) avec conditions aux limites :

$$u(x, y) \rightarrow U_1 \quad \text{pour } y \rightarrow \infty; \quad u(x, y) \rightarrow U_2 \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty$$

- On introduit la fonction de courant, telle que $u = \partial\psi/\partial y; v = -\partial\psi/\partial x$
- On écrit les équations en fonction de la variable de similitude η
- On néglige la contribution de la viscosité moléculaire
- Calibration de la longueur de mélange sur des données expérimentales : $\alpha=0.071$
- **Remarque** : comme attendu, la longueur de mélange **n'a pas de valeur universelle!**
- Elle doit être adaptée pour chaque écoulement
- Nécessité de calibrer le modèle



Ecoulements avec parois

■ Rappel : profil de vitesse dans une couche limite turbulente

- Zone linéaire : $u^+ = y^+$ (les contraintes visqueuses sont dominantes)
- Zone logarithmique : $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$ avec $\kappa \approx 0.41$ = « constante » de von Karman; $C \approx 5$;
 $u^+ = u/u_\tau$; $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$

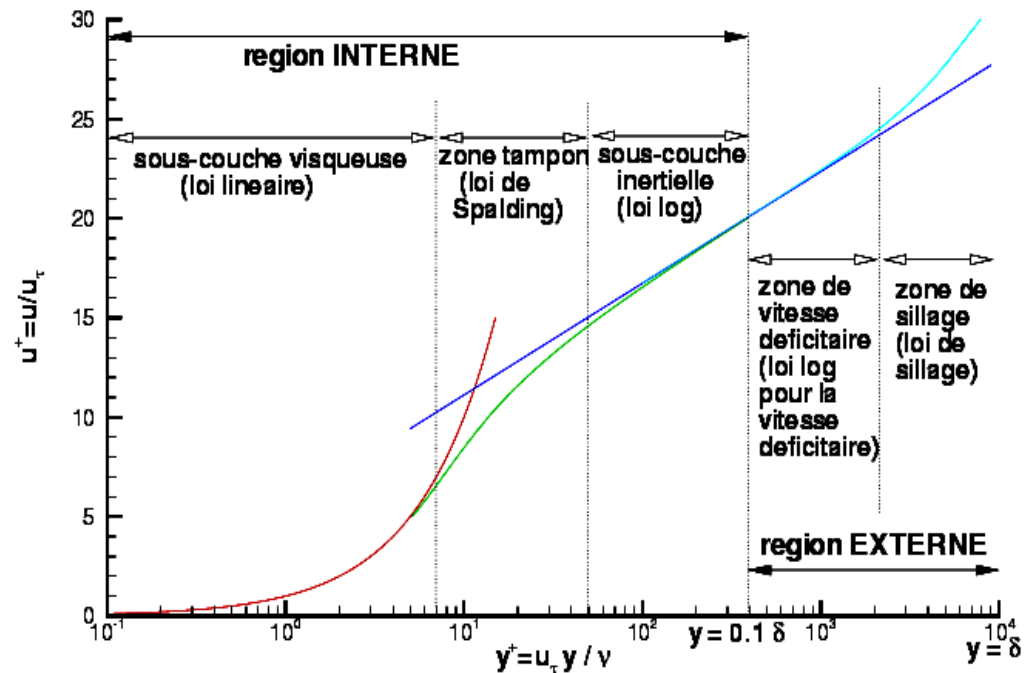
- Dans la zone logarithmique, termes convectifs négligeables

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \approx 0$$

$$\text{négl} \quad \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} = \text{const} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2$$

$$-\overline{u'v'} = l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = u_\tau^2$$

$$l_m = \frac{u_\tau}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \boxed{\kappa y}$$



Corrections du modèle longueur de mélange

Modifications successives au modèle de longueur de mélange afin de prendre en compte les effets de paroi:

1. Loi d'amortissement de Van Driest (1956)

- Le modèle de Prandtl implique $\tau_{xy}^R \propto y^2$ pour $y \rightarrow 0$
- Les DNS et les expériences montrent que $\tau_{xy}^R \propto y^m$, $m \approx 3 \div 4$ pour $y \rightarrow 0$
- On pose alors $l_m \approx \kappa y f(y)$, f =fonction de van Driest pour assurer le bon comportement asymptotique

2. Correction de Clauser pour la zone déficitaire (1956) :

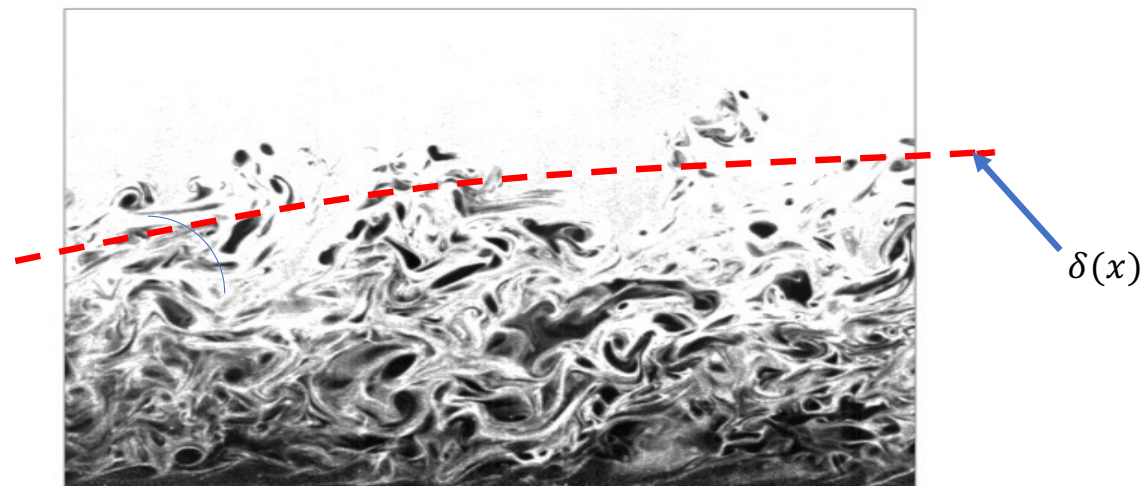
- Dans la zone externe on s'attend à ce que la longueur turbulente et la vitesse turbulente soient respectivement de l'ordre de l'épaisseur de couche limite et de la vitesse extérieure U_e
- La couche limite externe se comporte comme un sillage confiné par une paroi
- Cela implique $\nu_t \approx K U_e \delta^*$ (δ^* =épaisseur de déplacement de la couche limite)
→ U_e, δ^* difficiles à calculer pour des écoulements complexes

Corrections du modèle longueur de mélange

3. Fonction d'intermittence de Corrsin et Kistler (1954):

- La région la plus externe de la couche limite est caractérisée par le passage de grandes structures turbulentes (bulges) et par l'entraînement de poches de fluide non turbulent de l'extérieur de la couche limite
- En d'autres termes, la couche limite est, de façon intermittente, turbulente et laminaire
- Il faut alors réduire la viscosité turbulente dans cette région en la multipliant par une fonction ad hoc

Les variantes modernes du modèle de longueur de mélange cherchent à prendre en compte ces corrections



Exemple : Modèle de Baldwin et Lomax (1978)

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t_{inner}} & \text{if } y \leq y_{cross} \\ \mu_{t_{outer}} & \text{if } y > y_{cross} \end{cases} \quad \text{and } y_{cross} = \min(y) \text{ where } \mu_{t_{inner}} = \mu_{t_{outer}}$$

Clauser (pointing to $\mu_{t_{outer}}$)

$$\mu_{t_{inner}} = \rho l^2 |\Omega|$$

Généralisation de $\partial u / \partial y$ (pointing to $|\Omega|$)

Van Driest (pointing to the term $1 - e^{\frac{-y^+}{A^+}}$)

where $|\Omega| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ and $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ and $l = \kappa y \left(1 - e^{\frac{-y^+}{A^+}} \right)$

$$\mu_{t_{outer}} = \rho K C_{cp} F_{wake} F_{kleb}(y)$$

where $F_{wake} = \min \left(y_{max} F_{max}, C_{wk} y_{max} \frac{u_{diff}^2}{F_{max}} \right)$ and $u_{diff} = \max(\sqrt{U_i U_i}) - \min(\sqrt{U_i U_i})$

y_{max} and F_{max} is determined by the maximum of $F(y) = y |\Omega| \left(1 - e^{\frac{-y^+}{A^+}} \right)$

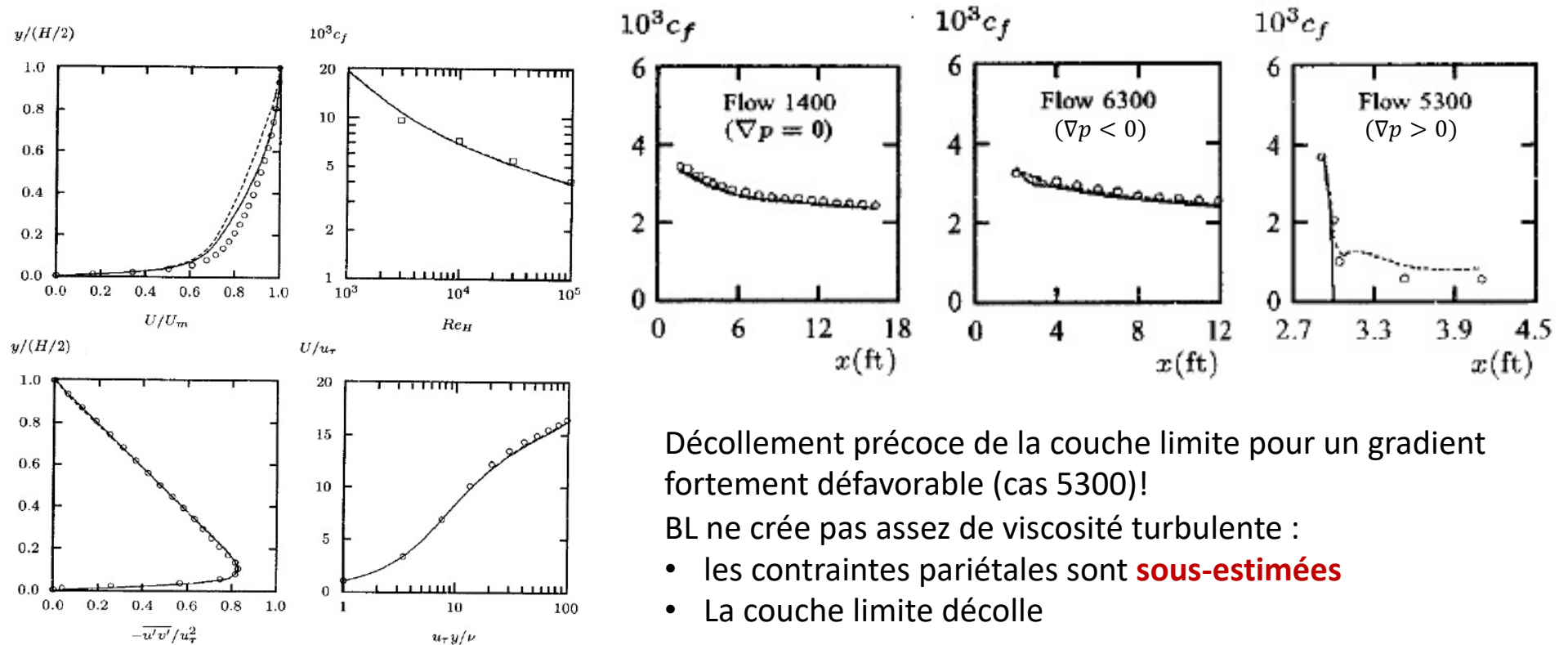
and $F_{kleb}(y) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y C_{kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}$

Corrsin and Kistler (pointing to the term $\left[1 + 5.5 \left(\frac{y C_{kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}$)

$$A^+ = 26, C_{cp} = 1.6, C_{kleb} = 0.3, C_{wk} = 0.25, \kappa = 0.4, K = 0.0168$$

Application à des écoulements avec parois

- Pour des écoulements turbulents simples : canal plan (gauche), couche limite sans gradient de pression ou gradient favorable (milieu), le modèle BL est assez précis



Décollement précoce de la couche limite pour un gradient fortement défavorable (cas 5300)!

BL ne crée pas assez de viscosité turbulente :

- les contraintes pariétales sont **sous-estimées**
- La couche limite décolle

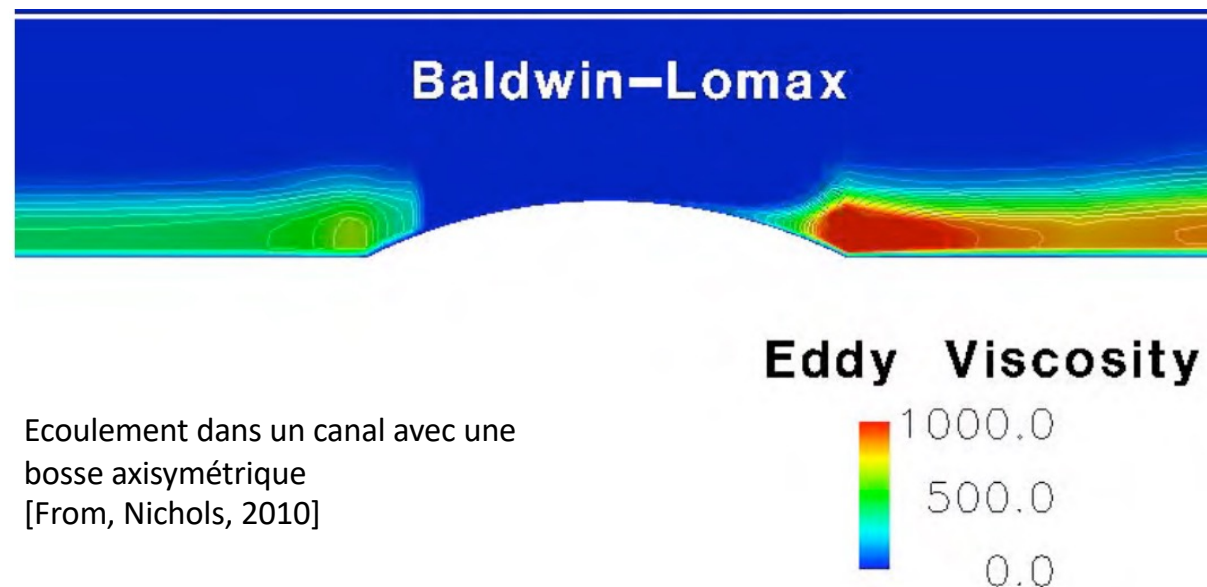


Figure 3.13: Comparison of computed and measured channel-flow properties, $Re_H = 13750$. — Baldwin-Lomax model; - - - Cebeci-Smith model; \circ Mansour et al. (DNS); \square Halleen-Johnston correlation.

Figures extraites de Wilcox, Ch3

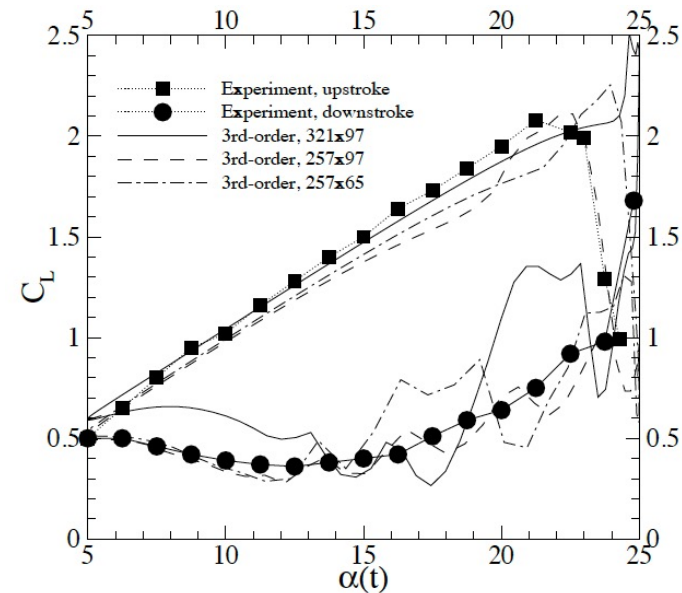
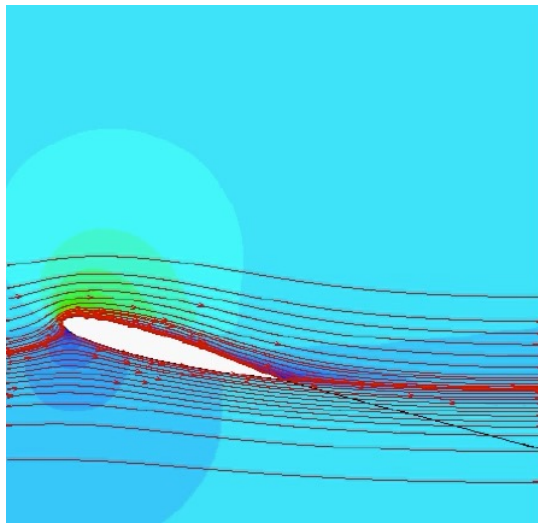
Exemple : Modèle de Baldwin et Lomax (1978)

- La fonction F peut présenter plusieurs extrema pour des écoulements dans lesquels la vorticité extérieure n'est pas nulle
- La viscosité tourbillonnaire dépend directement de F , donc du profil de vorticité **local**
- Le premier extrémum peut apparaître très près de la paroi, ce qui conduit à une forte sous-estimation de la viscosité turbulente → relaminarisation



Ecoulements décollés

- D'une façon plus générale, la viscosité tourbillonnaire d'un modèle algébrique ne dépend que des propriétés locales de l'écoulement moyen
 - Baisse soudaine de la viscosité tourbillonnaire au point de décollement
 - Sous-estimation du frottement pariétal
 - Surestimation de la longueur de décollement
- La turbulence ne s'adapte pas de façon instantanée!



Récapitulatif sur les modèles algébriques (0 équations)

Avantages

- Les modèles algébriques donnent de bons résultats pour des écoulements simples, pour lesquels ils ont été calibrés
- Rapides et robustes
- Ne nécessitent pas de maillages très fins

Inconvénients

- La viscosité tourbillonnaire ne dépend que des propriétés **locales** de l'écoulement
 - L'écoulement ne doit pas présenter de variations abruptes
 - Pas de forts gradients de pression
 - Pas de décollements
 - Faible courbure des lignes de courant
- Pas très généraux
- Mal adaptés aux solveurs non structurés et aux géométries complexes car il nécessitent le calcul d'une distance à la paroi
- Convergence en maillage non monotone

Next time...

- QCM de 10 minutes pour se souvenir des épisodes précédents
- Dans le prochain cours on s'intéressera aux modèles de turbulence Boussinesq à équations de transport
- On s'intéressera au traitement des conditions aux limites au loin et près des parois
- En TD on les appliquera à des écoulements canoniques