1. Equations et conditions aux limites

équilibre : $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\Pi}}(r,\theta,z) + \rho_0 \omega^2 r\, \underline{e_r} = \underline{0} \quad \forall r / 0<r<R,\ \theta \in [0,2\pi[,\ z \in]-h,h[$

loi de comportement : $\underline{\underline{\Pi}}(r,\theta,z) = \lambda\, \mathrm{trace}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(r,\theta,z)\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(r,\theta,z)$

avec $\underline{\underline{\varepsilon}}(r,\theta,z) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u})^T\right]$

Condition aux limites : $\underline{\underline{\Pi}}(r,\theta,z=\pm h)\cdot(\pm \underline{e_z}) = \underline{0} \quad \forall\, 0<r<R \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi[$

$\underline{\underline{\Pi}}(r=R,\theta,z)\cdot \underline{e_r} = \underline{0} \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi[\quad \forall\, z \in]-h,h[$

- Ce problème est régulier en chaque point du bord nous disposons de 3 conditions aux limites scalaires. Il est de type 2, les conditions sur l'ensemble de la frontière portent sur les densités d'efforts surfaciques.
- La solution du problème en déplacement et contraintes existe sous la condition nécessaire $\iiint_\Omega \rho_0 \underline{f}\, dv = \underline{0}$ soit $\iiint_\Omega \rho_0 \omega^2 r\, \underline{e_r}\, r dr d\theta dz = \underline{0}$

Cette condition est bien vérifiée ici $\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, \underline{e_1} + \sin\theta\, \underline{e_2}\, d\theta = 0\right)$

A rapprocher de la condition d'existence pour un problème de Neuman

$\begin{cases} \underline{u} \in V = \{\underline{v} \text{ réguliers}\} \\ a(\underline{u},\underline{v}) = L(\underline{v})\ \forall \underline{v} \in V \end{cases}$ si $\underline{v} = \underline{C^{ste}} \in V$ alors $a(\underline{u},\underline{v}) = 0 = L(\underline{v})$ ⇒ fournit la condition nécessaire d'existence

avec $a(\underline{u},\underline{v}) = \iiint_\Omega \left[\lambda (\mathrm{trace}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))(\mathrm{trace}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})) + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\right] dv$

$L(\underline{v}) = \iiint_\Omega \rho_0 \underline{f}\cdot\underline{v}\, dv$

- La solution en contraintes et déformations est unique. Elle est en déplacement non unique, mais définie à un déplacement de corps rigide près $\underline{u}^* = \underline{u} + \underline{C}$ avec $\underline{u}$ solution, $\underline{C} \in \mathcal{R}$ déplacement de corps rigide ($\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{C}) = \underline{\underline{0}}$) est aussi solution.

- $\mathcal{U}ad = \{\underline{v}(r,\theta,z) \text{ réguliers}\}$ (aucune condition aux limites en déplacement imposée)

- $\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ réguliers, symétriques, vérifiant $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}} + \rho_0 \omega^2 r\, \underline{e_r} = \underline{0}$ dans Ω

$\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{0}$ sur $z = \pm h$ avec $\underline{n} = \pm \underline{e_z}$

$\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{0}$ sur $r=R$ avec $\underline{n} = \underline{e_r}\}$

2- Recherche de solution sous la forme d'un tenseur de contraintes plan parallèlement au plan $(\underline{e_1}, \underline{e_2})$

les efforts volumiques $\rho_0 \underline{f}$ sont fonction de (r,θ) indépendants de z et dans le plan $(\underline{e_1}, \underline{e_2})$ (portés par $\underline{e_r}$) et donc de la forme

$\rho_0 \underline{f} = f_1(x_1,x_2)\, \underline{e}_1 + f_2(x_1,x_2)\, \underline{e}_2$, forme nécessaire pour que les équations d'équilibre en contraintes planes soient satisfaites

- Par ailleurs sur les faces $z = \pm h$, les conditions aux limites sont des conditions de bord libre $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ soit en cartésien $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, condition aux limites sur $x_3 = \pm h$ compatibles avec la forme du tenseur des contraintes sous l'hypothèse des contraintes planes.

- Sur $r = R$, les conditions aux limites de bord libre sont également compatibles avec cette hypothèse. Elles s'écrivent en effet en cartésien

$$\sigma_{11} \frac{x_1}{R} + \sigma_{12} \frac{x_2}{R} = 0 \quad ; \quad \sigma_{12} \frac{x_1}{R} + \sigma_{22} \frac{x_2}{R} = 0 \qquad \sigma_{13} \frac{x_1}{R} + \sigma_{23} \frac{x_2}{R} = 0$$

(automatiquement satisfait)

- Le disque étant mince $2h \ll R$ dans la direction $\underline{e}_3$, il est raisonnable par ailleurs de supposer que les conditions aux limites de bord libre en face supérieure $z = h$ et inférieure $z = -h$ soient également satisfaites dans toute section $z = $ cste intérieure au disque.

- Le champ de contraintes sous l'hypothèse des contraintes planes parallèlement au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ s'écrit sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3} \quad \text{avec } \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1,x_2) \quad \alpha,\beta = 1,2$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}_{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3} \quad \text{avec } \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}(x_1,x_2)$$

et

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad \text{(d'après la loi de Hooke)}$$

3 - Efforts volumiques

$\rho_0 \underline{f} = \rho_0 \omega^2 r\, \underline{e}_r$ dérive d'un potentiel $\rho_0 \underline{f} = -\underline{\mathrm{grad}}\, V$

en effet $\exists V(x_1,x_2) \,/\, \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = -\rho_0 \omega^2 r \cos\theta = -\rho_0 \omega^2 x_1 \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = -\rho_0 \omega^2 r \sin\theta = -\rho_0 \omega^2 x_2 \end{cases}$ $\quad \underline{e}_r = \cos\theta\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, \underline{e}_2$

Ce système est bien intégrable $\quad V = -\rho_0 \omega^2 \dfrac{x_1^2}{2} + \tilde{f}(x_2)$

et $\quad \dfrac{d\tilde{f}}{dx_2} = -\rho_0 \omega^2 x_2 \Rightarrow \tilde{f}(x_2) = -\rho_0 \omega^2 \dfrac{x_2^2}{2} + \text{Cste}$

soit donc $\quad V(x_1,x_2) = -\rho_0 \dfrac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \text{Cste}$, la constante est quelconque soit donc $\quad V = V(r) = -\rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2} \quad$ avec $r^2 = x_1^2 + x_2^2$

. D'après l'équilibre sous l'hypothèse des contraintes planes, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12} + \rho_0 f_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} - V) + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12} = 0 \qquad \left(\rho_0 f_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22} + \rho_0 f_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} - V) = 0$$

l'équilibre est satisfait s'il existe $\varphi(x_1,x_2)$ et $\psi(x_1,x_2)$ tels que

$$\begin{cases} \sigma_{11} - V(x_1,x_2) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \sigma_{12} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{21} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \sigma_{22} - V = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} \qquad \text{en tout point } (x_1,x_2)$$

soit donc comme $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ $\quad -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0$ équation satisfaite

sous la condition d'existence d'une fonction $\chi(x_1,x_2)$ telle que

$$\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \qquad \psi = +\frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

et donc

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1,x_2) = V(x_1,x_2) + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_2} \\ \sigma_{22}(x_1,x_2) = V(x_1,x_2) + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_1} \qquad \forall (x_1,x_2) \in \Omega \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) = \sigma_{21}(x_1,x_2) = -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$

4- Tenseur des déformations

D'après la loi de comportement, on a

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{trace}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\mathbb{1}$ soit ici sous l'hypothèse des contraintes planes

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}$$

soit $\quad \varepsilon_{11}(x_1,x_2) = \frac{1}{E}\left(V(x_1,x_2) + \chi_{,22}\right) - \frac{\nu}{E}\left(V + \chi_{,11}\right)$

et donc $\quad \varepsilon_{11}(x_1,x_2) = \left(\frac{1-\nu}{E}\right)V(x_1,x_2) + \frac{1}{E}\chi_{,22} - \frac{\nu}{E}\chi_{,11}$

De même $\quad \varepsilon_{22}(x_1,x_2) = \frac{1-\nu}{E}V(x_1,x_2) + \frac{1}{E}\chi_{,11} - \frac{\nu}{E}\chi_{,22}$

$$\varepsilon_{12}(x_1,x_2) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = -\frac{1+\nu}{E}\chi_{,12}$$

$$\varepsilon_{33}(x_1,x_2) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{E}\left(2V(x_1,x_2) + \chi_{,11} + \chi_{,22}\right)$$

5- Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité traduisent l'intégrabilité du système

$\frac{1}{2}(\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{\nabla}\,\underline{u}^T) = \underline{\underline{\varepsilon}}$ donné symétrique, c'est à dire l'existence d'un champ de déplacement $\underline{u}$ associé à un tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donné

- Elles s'expriment en coordonnées cartésiennes sous la forme

$$\left\{ \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqr}\, \frac{\partial^2 \varepsilon_{jq}(x)}{\partial x_k \partial x_r} = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad i, p = 1,2,3 \right.$$

Il s'agit de 6 équations scalaires. Pour l'hypothèse des contraintes planes $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2)$ de sorte qu'elles se réduisent à 4 équations

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,22} - 2\,\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = 0 \\ \varepsilon_{33,11} = 0 \\ \varepsilon_{33,22} = 0 \\ \varepsilon_{33,12} = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \text{les 2 autres étant automatiquement satisfaites}$$

Compte tenu des expressions de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de $X(x_1,x_2)$, on obtient :

(3)

- $\left(\frac{1-\nu}{E}\right) \Delta V(x_1,x_2) + \frac{1}{E} X_{,2222} - \frac{\nu}{E} X_{,1122} + \frac{1}{E} X_{,1111} - \frac{\nu}{E} X_{,2211} + \frac{2(1+\nu)}{E} X_{,1212} = 0$

  soit $(1-\nu)\, \Delta V(x_1,x_2) + \Delta(\Delta X)(x_1,x_2) = 0 \quad \forall (x_1,x_2)$

  avec $\Delta(\Delta X) = X_{,1111} + X_{,2222} + 2\, X_{,1212}$

  $\Delta V = V_{,11} + V_{,22}$

- $2\, V_{,11} + X_{,1111} + X_{,22,11} = 0$

  soit $2\, V_{,11} + \Delta(X_{,11}) = 0 = 2\, V_{,11} + (\Delta X)_{,11}$

- $2\, V_{,22} + X_{,1122} + X_{,2222} = 0$

  soit $2\, V_{,22} + \Delta(X_{,22}) = 0 = 2\, V_{,22} + (\Delta X)_{,22}$

- $2\, V_{,12} + X_{,1112} + X_{,2212} = 0$

  soit $2\, V_{,12} + \Delta(X_{,12}) = 0 = 2\, V_{,12} + (\Delta X)_{,12}$

6- Équation de compatibilité en polaire

D'après (3) et le fait que $X = X(r)$ et $V = V(r) = -\rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2}$,

$(1-\nu)\,\Delta V + \Delta(\Delta X) = 0$ s'écrit sous la forme

$$(1-\nu)\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r \frac{dV}{dr}\right] + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r \frac{d(\Delta X)}{dr}\right] = 0$$ soit en intégrant :

$$(1-\nu)\, r \frac{dV}{dr} + r \frac{d}{dr}(\Delta X) = A \quad \text{avec } A = \text{cste}$$

d'où $-(1-\nu)\,\rho_0 \omega^2 r + \frac{d}{dr}(\Delta X) = \frac{A}{r}$ et donc $\Delta X = A \log r + (1-\nu)\,\rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2} + B$

or en $r = 0$, les contraintes doivent être finies. Les contraintes font intervenir des dérivées secondes de $X(r)$ (pour $\sigma_{\theta\theta}$) ou en $\frac{1}{r}\frac{dX}{dr}$ pour (σ_{rr})

de plus trace $\underline{\underline{\Pi}} = \Delta X + 2V$. Pour que trace $\underline{\underline{\Pi}}$ soit finie en $r=0$ notamment, on doit avoir $A=0$

D'où l'expression recherchée

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX}{dr}\right) = \Delta X(r) = B + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\frac{r^2}{2} \qquad \forall\, 0<r<R$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX}{dr}\right) = Br + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\frac{r^3}{2} \quad \text{soit} \quad r\frac{dX}{dr} = B\frac{r^2}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\frac{r^4}{8} + C$$

et $\dfrac{dX}{dr} = B\dfrac{r}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\dfrac{r^3}{8} + \dfrac{C}{r}$; $\dfrac{d^2X}{dr^2} = \dfrac{B}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\dfrac{3r^2}{8} - \dfrac{C}{r^2}$

et donc

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \dfrac{B}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\dfrac{r^2}{8} + \dfrac{C}{r^2} - \rho_0\,\omega^2\dfrac{r^2}{2} \\[2ex] \sigma_{\theta\theta}(r) = \dfrac{B}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\dfrac{3r^2}{8} - \dfrac{C}{r^2} - \rho_0\,\omega^2\dfrac{r^2}{2} \\[2ex] \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta})$ doivent être finies en $r=0$ d'où $C=0$ et on obtient les expressions demandées.

7 - Détermination des contraintes

D'après la condition aux limites en $r=R$, on doit avoir $\sigma_{rr}(r=R)=0$

Les autres conditions sont automatiquement satisfaites $\sigma_{r\theta}(r=R) = 0 = \sigma_{rz}(r=R)$ ainsi que $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz}$ en $z = \pm h$

$$\sigma_{rr}(r=R)=0 \iff \frac{B}{2} + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\frac{R^2}{8} - \rho_0\,\omega^2\frac{R^2}{2} = 0$$

$$\text{Soit} \quad B = \rho_0\,\omega^2 R^2\left[1 - \frac{(1-\nu)}{4}\right] = \rho_0\,\omega^2 R^2\left[\frac{3+\nu}{4}\right]$$

et donc

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \rho_0\,\omega^2\left[\dfrac{(3+\nu)}{8}R^2 + (1-\nu)\dfrac{r^2}{8} - \dfrac{r^2}{2}\right] \\[2ex] \qquad\quad = \dfrac{\rho_0\,\omega^2}{8}(3+\nu)\left[R^2 - r^2\right] \\[2ex] \sigma_{\theta\theta}(r) = \rho_0\,\omega^2\dfrac{(3+\nu)}{8}R^2 + (1-\nu)\,\rho_0\,\omega^2\dfrac{3r^2}{8} - \rho_0\,\omega^2\dfrac{r^2}{2} \\[2ex] \qquad\quad = \rho_0\dfrac{\omega^2}{8}\left[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)\,r^2\right] \\[2ex] \sigma_{r\theta}(r) = 0 \end{cases}$$

8 - Expression du tenseur des déformations linéaires

Ces expressions s'obtiennent à partir de la loi de comportement :

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\sigma_{rr} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\rho_0\frac{\omega^2}{8}\left[(3+\nu)(R^2-r^2) - \nu(3+\nu)R^2 + \nu(1+3\nu)r^2\right] \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E}\sigma_{rr} = \frac{1}{E}\rho_0\frac{\omega^2}{8}\left[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2 - \nu(3+\nu)(R^2-r^2)\right] \\
\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} = 0 \\
\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \\
\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}) = -\frac{\nu}{E}\rho_0\frac{\omega^2}{8}\left[(3+\nu)(R^2-r^2) + (3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2\right]
\end{array}\right.$$

9) Détermination du champ de déplacement

D'après le formulaire, si l'on recherche $\underline{u} = \underline{u}(r, z)$, on a :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right]$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \qquad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

de l'expression de $\varepsilon_{\theta\theta}$ on déduit alors :

$$\left\{ u_r = \frac{1}{E}\rho_0\frac{\omega^2}{8} r \left[(1-\nu)(3+\nu)R^2 - (1+\nu)(1-\nu) r^2\right]\right.$$

L'équation de compatibilité dans le plan (e_r, e_z) $\varepsilon_{rr,zz} - 2\varepsilon_{rz,rz} + \varepsilon_{zz,rr} = 0$ ayant été exploitée pour obtenir la fonction X et les contraintes, puis les déformations, nous sommes assurés que les équations en $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$ sont bien compatibles et conduisent bien à l'expression u_r trouvée

On a $\varepsilon_{r\theta} = 0 \Rightarrow \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0$

$\varepsilon_{\theta z} = 0 \Rightarrow u_\theta$ indépendant de z et si on a supposé $\underline{u}$ indépendant de θ

$\Rightarrow u_\theta = u_\theta(r)$

de sorte que $\varepsilon_{r\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{u_\theta}{r} - \frac{du_\theta}{dr} = 0 \quad \forall r$

et donc $\frac{du_\theta}{u_\theta} = \frac{dr}{r}$ soit $\log u_\theta = \log r + C$

et donc $\left\{ u_\theta = Kr \right.$

K est une constante quelconque qui ne pourra pas être déterminée, toutes les conditions aux limites ayant été exploitées. Cette composante correspond à une partie du déplacement de corps rigide qui est indéterminé (problème de type 2).

10- Composante selon e_z du déplacement

D'après ce qui précède $u_r(r)$ seulement de sorte que $\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$

$\Rightarrow u_z = u_z(z)$

or $\varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}$ = fonction de r uniquement d'après 8)

On voit donc qu'il n'est pas possible de déterminer u_z en rendant les équations ε_{rz} et ε_{zz} compatibles.

Jusqu'à présent les équations de compatibilité (4) (5) (6) n'ont pas été exploitées d'ailleurs. Elles correspondent à $\varepsilon_{zz,11} = \varepsilon_{zz,22} = \varepsilon_{zz,12} = 0$

soit donc $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{33} = a x_1 + b x_2 + C = a r\cos\theta + b r\sin\theta + c$

On voit donc qu'elles ne sont pas satisfaites, ce qui explique l'impossibilité d'intégrer. L'hypothèse des contraintes planes est à remettre en cause

D'après la déformée présentée en Figure 3, on voit bien que u_z et même u_r dépendent de r et également de z, ce qui n'est pas le cas de la solution construite sous l'hypothèse des contraintes planes $u_r(r)$

11- Dimensionnement simplifié

Les 3 contraintes principales (dans le cas de la solution analytique en contraintes planes) sont : σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{zz} = 0$

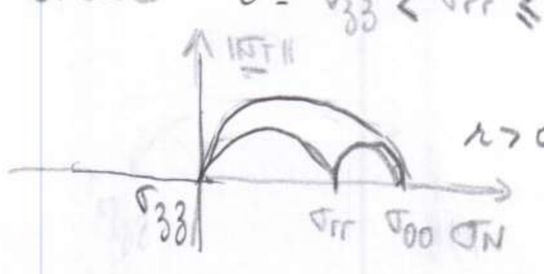
le tenseur est diagonal dans la base (e_r, e_θ, e_z)

On voit sur la Figure 4 que σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant r < R$

et $\sigma_{rr}(r=0) = \sigma_{\theta\theta}(r=0)$

De sorte que la plus grande des valeurs propres est $\sigma_{\theta\theta}$

Et on a $0 = \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \leqslant \sigma_{\theta\theta}$ pour tout r.



la contrainte normale maximale $\sigma_{\theta\theta}$ atteint sa plus grande valeur pour $r=0$ (Figure 4)

En ce point elle vaut $\sigma_{\theta\theta\,max} = \frac{\rho_0\,\omega^2}{8}(3+\nu)R^2 = \sigma_{rr\,max}$

Si l'on suppose que la pièce tient la sollicitation tant que $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_0$ en tout point, le critère sera atteint en premier lieu en $r=0$ dès que $\rho_0 \frac{\omega^2}{8}(3+\nu) R^2 = \sigma_0$

donc pour $\omega = \omega^*$ / $\rho_0 \omega_*^2 = \frac{8 \sigma_0}{(3+\nu) R^2}$