3A102 :
Transformées linéaires
. ~ .
- Notes de Cours-

Régis MARCHIANO
regis.marchiano@upmc.fr

Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
Institut Jean Le Rond d'Alembert - UMR CNRS 7190
4, place Jussieu - 75252 Paris cedex 05 France

Septembre 2016 - v1.3

Table des matières

Propos liminaires

Ce document regroupe des notes de cours de la partie "transformées linéaires" du module 3A102 de la licence 3 de mécanique de l'UPMC. Ces notes sont partielles et ne couvrent pas forcément tout ce qui est vu pendant le cours. Elles ne se substituent donc pas aux notes que vous pourriez prendre en cours. De plus elles ne regroupent pas (encore) les applications qui sont vues en TD et TP. Elles rassemblent essentiellement les définitions, théorèmes, propriétés et démonstrations vues en cours.

Chapitre 1

Introduction : EDO et EDP linéaires

Ce cours a pour but de présenter une série d'outils basés sur le principe de "transformée" ou de "décomposition" (ces notions seront précisées dans la suite) qui permettent de résoudre de nombreux problèmes classiques de mécanique. Les problèmes abordés seront des problèmes linéaires, *i.e.* on pourra toujours leur appliquer le principe de superposition. Cette restriction, certes importante, ne nous empêchera pas d'aborder un grand nombre de problèmes différents sous la forme de problèmes issus de différentes branches de la mécanique (thermique, acoustique, fluide, solide, ...).

1.1 Modélisation

La modélisation est l'étape qui permet de mettre en équation un problème donné. Cette étape nécessite d'identifier les mécanismes mis en jeu et de formuler des hypothèses simplificatrices permettant à partir des principes fondamentaux de la physique [1] d'obtenir une ou plusieurs équations permettant de modéliser le problème (ie de rendre compte des phénomènes observés). De plus, il faut associer des conditions aux limites et des conditions initiales pour obtenir le modèle complet. C'est en effet l'ensemble de ces trois composantes qui forme le modèle. Les trois éléments sont nécessaires. Les conditions initiales et aux limites font partie intégrante du problème. Pour forcer le trait, on peut même dire que les équations sont toujours les mêmes, et que seules changent les conditions initiales et aux limites.

Le plus souvent, la modélisation fait apparaître des équations différentielles ordinaires (EDO) ou bien des équations aux dérivés partielles (EDP). Dans ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux EDO et EDP linéaires.

1.2 Systèmes linéaires et invariants par translation dans le temps

Dans ce paragraphe, on se propose de caractériser la linéarité des équations par un formalisme de type entrée - sortie. On désigne par $\mathcal{S}$ le système par lequel une entrée e_1 est changée

1. PFD, 1er principe de la thermodynamique, loi de conservation de la masse, ...

en une sortie s_1 (Eq. 1.1).

$$e_1 \to \mathcal{S} \to s_1 \tag{1.1}$$

Définition 1.2.1 (*systèmes linéaires*)

Soient e_1 et e_2 deux entrées du système $\mathcal{S}$ donnant respectivement les sorties s_1 et s_2. Le système $\mathcal{S}$ est dit linéaire si à l'entrée $\lambda e_1 + \mu e_2$ correspond la sortie $\lambda s_1 + \mu s_2$

$$\lambda e_1 + \mu e_2 \to \mathcal{S} \to \lambda s_1 + \mu s_2. \tag{1.2}$$

Définition 1.2.2 (*systèmes invariants par translation dans le temps*)

Sot e une entrée du système $\mathcal{S}$ donnant la sortie s. Le système $\mathcal{S}$ est dit invariant par translation dans le temps si à l'entrée $e(t-t_0)$ correspond la sortie $s(t-t_0)$

$$e(t-t_0) \to \mathcal{S} \to s(t-t_0). \tag{1.3}$$

Exemple 1 (*Allongement d'un ressort*)

Considérons un ressort dont l'allongement vérifie la loi $F = k.x$, où, k est la raideur, x l'allongement par rapport à la position d'équilibre, et F la force appliquée. En considérant que l'entrée du système est la force appliquée et que la sortie et l'allongement du ressort, il est immédiat de vérifier que $\lambda F_1 + \mu F_2 \to \mathcal{S}_{ressort} \to \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda \frac{F_1}{k} + \mu \frac{F_2}{k}$

Exemple 2 (*Equation de transport*)

Considérons maintenant une EDP appelée 'équation de transport' :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial q}{\partial t} = e(t),$$

Cette équation modélise la propagation de la quantité q à la vitesse c_0 dans la direction $+x$. Si q_1 correspond à l'entrée e_1 et q_2 à l'entrée e_2, alors :

$$\begin{aligned}
\lambda e_1(t) + \mu e_2(t) &= \lambda \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial q_1}{\partial t}\right) + \mu \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial q_2}{\partial t}\right) \\
&= \lambda \frac{\partial q_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial q_2}{\partial x} + \lambda \frac{1}{c_0}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \mu \frac{1}{c_0}\frac{\partial q_2}{\partial t} \\
&= \frac{\partial\left(\lambda q_1 + \mu q_2\right)}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial\left(\lambda q_1 + \mu q_2\right)}{\partial t}
\end{aligned}$$

ce qui montre que le système est linéaire.

Exemple 3 (*Le pendule*)

On considère un pendule (masse ponctuelle m) en oscillations forcées (un couple est exercé). Si on suppose que le movement de la masse m ne se fait que dans un plan $(0xz)$ alors l'application du principe fondamental de la dynamique permet de modéliser le problème sous la forme d'une équation différentielle du deuxième ordre portant sur l'angle θ au cours *du temps :*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = e(t);$$

où θ est l'angle du pendule avec la verticale, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation propre, l est la longueur du pendule, et $e(t) = \alpha \sin(\omega t)$ est proportionnel au couple exercé sur le pendule, α est l'amplitude d'excitation et ω est la pulsation de l'excitation.

A cette équation, il faut ajouter un couple de conditions initiales. Ici, nous choisissons : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. Ce choix est bien sûr arbitraire. Nous aurions pu choisir d'autres conditions initiales.

Nous allons vérifier que cette équation n'est pas linéaire.

Dans la suite de ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux systèmes linéaires et invariants par translation dans le temps.

1.3 Rappel : Résolution d'une EDO

Les EDO que nous traiterons dans ce cours sont des EDO à coefficients constants. De manière générale, nous les noterons :

$$a_m \frac{d^m s}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} s}{dt^{m-1}} + ... + a_0 s(t) = a_p \frac{d^p e}{dt^p} + b_{p-1} \frac{d^{p-1} e}{dt^{p-1}} + ... + b_0 e(t) \tag{1.4}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. Un cas particulier très important est la résolution des équations différentielles ordinaires du second ordre :

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx(t) = e(t) \tag{1.5}$$

On rappelle ici la méthode de résolution :

1. Résolution de l'équation homogène (sans second membre) ;

$$a \frac{d^2 x_H}{dt^2} + b \frac{dx_H}{dt} + cx_H = 0; \tag{1.6}$$

2. Résolution de l'équation particulière :

$$a \frac{d^2 x_P}{dt^2} + b \frac{dx_P}{dt} + cx_P = e(t); \tag{1.7}$$

3. la solution générale s'obtient en superposant la solution homogène et la solution particulière :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t); \tag{1.8}$$

4. on determine les constantes d'intégration à partir des conditions initiales ou des conditions aux limites (en fonction de la variable d'intégration t ou x).

Exemple 4 (*Le pendule (suite ...)*)

On considère le pendule étudié dans l'exemple précédent. Comme nous l'avons vu le *modèle alors développé ne décrivait pas un système linéaire. Cependant si on ajoute une hypothèse supplémentaire consistant à supposer que l'amplitude des oscillations du pendule est petite, on peut approcher* $\sin(\theta) \approx \theta$ *. On obtient alors l'équation de l'oscillateur forcé :*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = e(t);$$

où θ *est l'angle du pendule avec la verticale,* $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ *est la pulsation propre,* l *est la longueur du pendule, et* $e(t) = \alpha\sin(\omega t)$ *est proportionnel au couple exercé sur le pendule,* α *est l'amplitude d'excitation et* ω *est la pulsation de l'excitation.*

A cette équation, il faut ajouter un couple de conditions initiales. Ici, nous choisissons : $\theta(t = 0) = \theta_0$ *et* $\dot{\theta}(t = 0) = 0$*. Ce choix est bien sûr arbitraire. Nous aurions pu choisir d'autres conditions initiales. Appliquons la méthode de résolution précédemment décrite :*

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   On cherche la solution homogène sous la forme $\theta_H(t) = Ae^{rt}$*. En injectant cette solution dans l'EDO, on trouve le polynôme caractéristique :*

   $$r^2 + \omega_0^2 = 0.$$

   La résolution du polynôme caractéristique conduit à deux racines : $r_{1,2} = \pm i\omega$*. Par conséquent la solution homogène du problème s'écrit :*

   $$x_H(t) = Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t} = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t). \tag{1.9}$$

2. *Recherche d'une solution particulière*
   Généralement on cherche la solution particulière sous la forme de l'excitation. Dans notre cas, nous allons rechercher la solution particulière sous la forme : $x_P(t) = A\sin(\omega t)$*. En injectant cette solution dans l'équation, on trouve une équation de compatibilité :*

   $$-A\omega^2\sin\omega t + A\omega_0^2\sin\omega t = \alpha\sin(\omega t), \tag{1.10}$$

   $\theta_P(t)$ *n'est une solution que si :* $A = \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$

3. *Solution générale*
   La solution générale est :

   $$\theta(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$$

4. *détermination des constantes d'intégration*
   On applique les conditions initiales à la solution générale :

   $$\theta(t = 0) = \theta_0 = C$$

   et

   $$\dot{\theta}(t = 0) = 0 = D\omega_0 + A\omega$$

   d'où $D = -\frac{A\omega}{\omega_0}$*. La solution du problème est donc :*

   $$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) - \frac{A\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + A\sin(\omega t). \tag{1.11}$$

Rmq : Quand la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre du système $\omega = \omega_0$, il se produit le phénomène de résonance pour lequel l'amplitude augmente fortement. Contrairement à ce que pourrait laisser croire la relation donnant A en fonction de ω et ω_0, l'amplitude ne devient pas infinie car d'autres mécanismes interviennent. Ces mécanismes négligés en première approche ne peuvent plus être négligés quand on est près de la résonance.

1.4 Comment aller plus loin ?

La méthode générale de résolution des EDO, illustrée par l'exemple du pendule nous montre que si on change l'excitation, alors il faut reprendre les 3 dernières étapes de la résolution pour trouver la solution du problème.

Reprenons l'exemple précédent. Si la fonction d'excitation est encore un sinus mais d'amplitude α_2 et de pulsation ω_2, alors la solution est encore formellement valide. De plus, comme le système est linéaire, si l'entrée est de la forme $\sum_i \alpha_i \sin(\omega_i t)$, alors la solution particulière sera de la forme : $\sum_i A_i \sin(\omega_i t)$ avec $A_i = \frac{\alpha_i}{\omega_0^2 - \omega_i^2}$. Si on détermine ensuite les constantes C et D associées à ce problème, on connaît la solution générale pour toute entrée pouvant s'écrire comme la superposition de fonctions sinusoïdales. Si les coefficients α_i changent, la sortie changera en conséquence sans avoir besoin d'être entièrement recalculée.

Bien sûr le raisonnement précédent n'a de sens que si on peut "décomposer" l'excitation du système comme une somme de fonctions sinusoïdales. C'est justement ce que permettent les séries de Fourier (à certaines conditions !).

Chapitre 2

Les séries de Fourier

2.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence le besoin de pouvoir décomposer une fonction continue comme une superposition de fonctions harmoniques (sinus ou cosinus) dont les amplitudes et les fréquences seraient différentes.

2.2 Définition

Définition 2.2.1 (*Décomposition en séries de Fourier*)

Soit $f(t)$ une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($f(t) = f(t+T)$). La décomposition en séries de Fourier de la fonction $f(t)$ est :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \tag{2.1}$$

les coefficients a_0, a_n et b_n sont donnés par les formules d'Euler :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt; \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega n t)dt; \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\omega n t)dt. \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.1 (*Existence de la décomposition en séries de Fourier*)

Soit f une fonction périodique de période T. On suppose que f est continue par morceaux et possède une dérivée à droite et à gauche en tout point (pas nécessairement égales).

Alors f peut être décomposée en séries de Fourier.

Démonstration des formules d'Euler : Démontrons les 3 formules d'Euler :

1. formule donnant a_0
   D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)\right] dt \tag{2.5}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(\omega nt)dt + \int_{-T/2}^{T/2} b_n \sin(\omega nt)dt \tag{2.6}$$

$$= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt \tag{2.7}$$

$$= a_0 T \tag{2.8}$$

2. formule donnant a_n : D'après la définition de la décomposition en séries de Fourier :

$$I = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega pt)dt \tag{2.9}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)\right] \cos(\omega pt)dt \tag{2.10}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} a_0 \cos(\omega pt)dt \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(\omega nt)\cos(\omega pt)dt + \int_{-T/2}^{T/2} b_n \sin(\omega nt)\cos(\omega pt)dt \tag{2.12}$$

$$\tag{2.13}$$

On rappelle que : $\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b)+\cos(a-b)))$ et $\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b)+\sin(a-b)))$

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_n}{2}(\cos(\omega t(n+p)) + \cos(\omega t(n-p)))dt \tag{2.14}$$

$$+ \int_{-T/2}^{T/2} \frac{b_n}{2}(\sin(\omega t(n+p)) + \sin(\omega t(n-p)))dt \tag{2.15}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_n}{2}(\cos(\omega t(n+p)) + \cos(\omega t(n-p)))dt \tag{2.16}$$

Cette dernière integrale est nulle pour $p \neq n$, pour $p = n$ on a :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega nt)dt = \frac{a_n}{2}\int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{a_n T}{2} \tag{2.17}$$ ■

Exemple 5 (*fonction créneau*)

On considère la fonction $f(t)$ de période 2π :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < t \leqslant 0, \\ 1 & si \quad 0 > t \geqslant \pi. \end{cases}$$

Calculons la décomposition en séries de Fourier de cette fonction : $a_0 = 1/2$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{-1}{n\pi}((-1)^n - 1)$

2.3 Quelques propriétés

Propriété 2.3.1 (***Décomposition d'une fonction paire***)

Soit $f(t)$ une fonction paire et périodique de période T, sa décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t). \tag{2.18}$$

Démonstration : La fonction $f(t)$ étant périodique, on peut la décomposer en séries de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t), \tag{2.19}$$

où :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega n t) dt. \tag{2.20}$$

Comme $f(t)$ est une fonction paire, $f(t)\sin(\omega n t)$ est un fonction impaire. Or l'intégrale d'une fonction impaire entre des bornes symétriques est nulle. Par conséquent, $b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ■

Propriété 2.3.2 (***Décomposition d'une fonction impaire***)

Soit $f(t)$ une fonction impaire et périodique de période T, sa décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega n t). \tag{2.21}$$

Propriété 2.3.3 (***Forme complexe de la décomposition en séries de Fourier***)

La forme complexe de la décomposition en séries de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t}, \tag{2.22}$$

avec,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t}. \tag{2.23}$$

Démonstration : On considère une fonction $f(t)$ périodique de période T. Cette fonction admet une décomposition en séries de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \tag{2.24}$$

On rappelle que $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ et $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$, alors :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i}, && (2.25)\\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\omega nt} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-i\omega nt} \frac{a_n + ib_n}{2}. && (2.26)
\end{aligned}
$$

Calculons à present les coefficients $a_n - ib_n$ et $a_n + ib_n$:

$$
\begin{aligned}
a_n - ib_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega nt)dt - i\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\omega nt)dt\right] && (2.27)\\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left(\frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} - i\frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i}\right)dt && (2.28)\\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega nt}dt && (2.29)
\end{aligned}
$$

En procédant de la même manière, on trouve :

$$
a_n + ib_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega nt}dt \tag{2.30}
$$

Remarquons que le coefficient a_0 peut s'écrire :

$$
a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega 0t}dt \tag{2.31}
$$

Par conséquent, la fonction $f(t)$ peut s'écrire :

$$
f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\omega nt}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega nt}dt\right) + e^{-i\omega nt}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega nt}dt\right) \tag{2.32}
$$

Posons :

$$
c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega nt}dt \tag{2.33}
$$

La fonction $f(t)$ peut s'exprimer en fonction de c_n :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{i\omega nt}c_n + e^{-i\omega nt}c_{-n}\right), && (2.34)\\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\omega nt}c_n + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-i\omega nt}c_{-n}, && (2.35)\\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\omega nt}c_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\omega nt}c_n, && (2.36)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega nt}. && (2.37)
\end{aligned}
$$

■

2.4 Résolution d'EDO par séries de Fourier

Grâce au formalisme des séries de Fourier nous allons résoudre une EDO de façon 'générale', *i.e.* la résolution sera faite une fois mais valable pour toutes les fonctions périodiques. Pour cela, nous allons résoudre cette EDO en supposant que le membre de droite est périodique (il peut donc s'écrire $e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ où a_0, a_n et b_n sont supposés connus). Nous choisissons ici de nous restreindre à l'étude d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Cette équation est écrite sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = e(t). \tag{2.38}$$

Cette équation correspond par exemple au cas d'une masse couplée à un ressort et un amortisseur : x représente le déplacement de la masse par rapport à la position d'équilibre, M est la masse, C est le coefficient d'amortissement, k est la raideur du ressort et $e(t)$ est l'excitation du système. Dans la suite on suppose que $(C/M)^2 - 4k/M < 0$, qui correspond à un régime d'amortissement faible. Enfin, remarquons que les conditions initiales du problème n'ont pas été spécifiées. On ne pourra donc pas déterminer les constantes d'intégration qui vont apparaître lors de la résolution.

1. **Résolution de l'équation homogène**
   Cherchons à présent $x_H(t)$, la solution de l'équation homogène :

   $$\frac{d^2x_H}{dt^2} + \frac{C}{M}\frac{dx_H}{dt} + \frac{k}{M}x_H = 0. \tag{2.39}$$

   Le polynôme caractéristique associé à cette équation est : $r^2 + \frac{C}{M}r + \frac{k}{M} = 0$. Les racines de ce polynôme sont :

   $$r_{1,2} = \frac{-C/M \pm i\sqrt{4k/M - (C/M)^2}}{2} \tag{2.40}$$

   On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\xi = \frac{C}{M}$ et $\bar{\omega} = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \xi^2}}{2}$. La solution de l'équation homogène est donc :

   $$\begin{aligned} x_H(t) &= e^{-\frac{\xi}{2}t}\left[Ae^{-i\bar{\omega}t} + Be^{i\bar{\omega}t}\right], & (2.41)\\ &= e^{-\frac{\xi}{2}t}\left[C\cos(\bar{\omega}t) + D\sin(\bar{\omega}t)\right]. & (2.42)\end{aligned}$$

   Remarquons que si $\xi = 0$ (pas d'amortissement), alors on retrouve les résultats du pendule non amorti du premier chapitre.

2. **Recherche d'une solution particulière**
   Comme nous l'avons dit en introduction de ce paragraphe, nous cherchons la solution de l'EDO pour une entrée de type :

   $$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t).$$

   La détermination d'une solution particulière associée à cette entrée se fait en plusieurs étapes.

(a) Recherche d'une solution particulière pour une entrée de type $e(t) = a_0$
On cherche une solution particulière de l'équation :

$$\frac{d^2x_P}{dt^2} + \xi\frac{dx_P}{dt} + \omega_0^2 x_P = a_0, \tag{2.43}$$

sous la forme $x_P(t) = \alpha_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$, cela donne :

$$\omega_0^2\alpha_0 = a_0. \tag{2.44}$$

Ainsi $x_P(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2}$ est une solution particulière de l'équation 2.43.

(b) Recherche d'une solution particulière pour une entrée de type $e(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$
On cherche une solution particulière de l'équation :

$$\frac{d^2x_P}{dt^2} + \xi\frac{dx_P}{dt} + \omega_0^2 x_P = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \tag{2.45}$$

sous la forme $X_P(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, cela donne :

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= -\alpha\omega^2\cos(\omega t) - \beta\omega^2\sin(\omega t) && (2.46)\\ &- \xi\alpha\omega\sin(\omega t) + \xi\beta\omega\cos\omega t + \omega_0^2\alpha\cos(\omega t) + \omega_0^2\beta\sin(\omega t) && (2.47)\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\cos(\omega t)\left[-a - \alpha\omega^2 + \xi\beta\omega + \omega_0^2\alpha\right] + \sin(\omega t)\left[-b - \beta\omega^2 - \xi\alpha\omega + \omega_0^2\beta\right] = 0. \tag{2.48}$$

Cette équation doit être vérifiée pour toutes les valeurs de t, par conséquent :

$$\begin{cases} -a - \alpha\omega^2 + \xi\beta\omega + \omega_0^2\alpha = 0, \\ -b - \beta\omega^2 - \xi\alpha\omega + \omega_0^2\beta = 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

ou encore,

$$\begin{cases} \alpha(\omega_0^2 - \omega^2) + \beta\xi\omega = a, \\ \beta(\omega_0^2 - \omega^2) - \alpha\xi\omega = b. \end{cases} \tag{2.50}$$

On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues (α et β). Pour le résoudre, plusieurs méthodes sont applicables. Nous allons utiliser le formalisme matriciel. Le système précédent peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & \xi\omega \\ -\xi\omega & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

c'est à dire sous la forme $MX = Y$. La solution est donc $X = M^{-1}Y$.
L'inverse de la matrice M est :

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}\begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\xi\omega \\ \xi\omega & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

avec $det(M) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \xi^2\omega^2$. Finalement on obtient :

$$x_P(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)a - \xi\omega b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \xi^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{\xi\omega a + (\omega_0^2 - \omega^2)b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \xi^2\omega^2}\sin(\omega t) \tag{2.53}$$

(c) Recherche d'une solution particulière pour une entrée de type $e(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que si l'entrée du système est :

$$e(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

alors la sortie s'écrit :

$$x_P(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)a - \xi\omega b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \xi^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{\xi\omega a + (\omega_0^2 - \omega^2)b}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \xi^2\omega^2}\sin(\omega t).$$

D'après le principe de superposition, si l'entrée du système est :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

alors la sortie est :

$$x_P(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\omega_0^2 - \omega_n^2)a_n - \xi\omega_n b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\cos(\omega_n t) + \frac{\xi\omega_n a_n + (\omega_0^2 - \omega_n^2)b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\sin(\omega_n t).$$

Ce raisonnement n'est valable que 1) grâce aux résultats du paragraphe précédent, 2) au principe de superposition.

(d) Recherche d'une solution particulière pour une entrée de type $e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$

D'après les paragraphes précédents, en utilisant le principe de superposition on montre que si l'entrée du système est du type :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

alors la solution particulière est :

$$x_P(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\omega_0^2 - \omega_n^2)a_n - \xi\omega_n b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\cos(\omega_n t) + \frac{\xi\omega_n a_n + (\omega_0^2 - \omega_n^2)b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\sin(\omega_n t).$$

3. Solution générale

La solution générale est la superposition de la solution homogène et de la solution particulière :

$$x(t) = e^{-\frac{\xi}{2}t}\left[C\cos(\bar{\omega}t) + D\sin(\bar{\omega}t)\right] + \frac{a_0}{\omega_0} \quad (2.54)$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\omega_0^2 - \omega_n^2)a_n - \xi\omega_n b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\cos(\omega_n t) + \frac{\xi\omega_n a_n + (\omega_0^2 - \omega_n^2)b_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + \xi^2\omega_n^2}\sin(\omega_n t) \quad (2.55)$$

4. **Détermination des constantes d'intégration**

   Dans l'expression précédente, il reste encore à déterminer les constantes C et D. Cela doit être fait à partir des conditions initiales.

Une fois les constantes d'intégration déterminées, on a la solution du problème. Cette solution sera valable pour toute entrée de type périodique. En effet, si $e(t)$ est périodique alors cette fonction peut être décomposée en séries de Fourier et se met sous la forme :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t),$$

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont déterminés à partir des formules d'Euler et la solution du problème est celle trouvée au paragraphe précédent.

2.5 Conclusions

Le formalisme des séries de Fourier permet de décomposer toutes les fonctions périodiques en une somme de fonctions harmoniques. Cette décomposition peut être utilisée pour systématiser la résolution d'EDO et même de certaines EDP (selon les conditions aux limites du problème). Cependant, la décomposition en séries de Fourier est limitée aux fonctions périodiques et ne permet pas d'étudier les autres fonctions. Le chapitre suivant est consacré à une extension des séries de Fourier aux fonctions non périodiques, on parle alors de transformée de Fourier.

Chapitre 3

La Transformée de Fourier

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il était possible de décomposer toutes fonctions périodiques sous la forme de séries de Fourier. Dans ce chapitre, nous allons essayer d'étendre cette idée de décomposition en fonctions élémentaires à une gamme de fonctions plus grande que les seules fonctions périodiques. Les résultats du chapitre précédents vont nous guider sur cette voie.

Considérons une fonction $f(t)$ intégrable et périodique de période T. Alors cette fonction peut être décomposée en séries de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)$$

avec les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega n t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega n t) dt.$$

Une approche intuitive du problème de la généralisation des séries de Fourier aux fonctions non périodiques consiste à faire tendre la période T à l'infini. Ainsi, la fonction obtenue ne contient qu'un seul motif.

3.2 Les intégrales de Fourier

Définition 3.2.1 (*Intégrales de Fourier*)

On appelle intégrale de Fourier la représentation d'une fonction sous la forme :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \tag{3.1}$$

avec :

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \tag{3.2}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \tag{3.3}$$

Théorème 3.2.1 (*Existence des intégrales de Fourier*)

Soit $f(t)$ une fonction intégrable sur l'axe des réels, alors $f(t)$ admet une représentation sous forme d'intégrales de Fourier.

Démonstration : ADMIS ■

Afin d'obtenir une forme plus opérationnelle pour la décomposition des fonctions non périodiques, nous allons manipuler les expressions données dans la définition des intégrales de Fourier. Tout d'abord injectons les formules 3.2 et 3.3 dans la formule de décomposition (eq. 3.1) :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega u)du\cos(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(\omega u)du\sin(\omega t)\right)d\omega && (3.4)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(\cos(\omega u)\cos(\omega t) + \sin(\omega u)\sin(\omega t)\right)dud\omega && (3.5)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega(t-u))dud\omega && (3.6)
\end{aligned}$$

Remarquons que $I(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega(t-u))du$ est une fonction paire de la variable ω ($I(-\omega,t) = I(\omega,t)$. Par conséquent :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega(t-u))dud\omega \tag{3.7}$$

Remarquons à présent que l'on peut aussi utiliser les arguments de parité/imparité pour montrer que :

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(\omega(t-u))du = 0. \tag{3.8}$$

On peut donc inclure cette intégrale dans l'expression de $f(t)$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp[i\omega(t-u)]dud\omega && (3.9)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp[-i\omega u]du\right\}\exp[i\omega t]d\omega && (3.10)
\end{aligned}$$

On fait ainsi apparaître ce qu'on appelle la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse qui vont nous servir dans la suite de ce chapitre.

3.3 La Transformée de Fourier

Définition 3.3.1 (***Transformée de Fourier***)

On appelle transformée de Fourier de la fonction $f(t)$*, la fonction notée* $\hat{f}(\omega)$ *:*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \tag{3.11}$$

Définition 3.3.2 (***Transformée de Fourier inverse***)

On appelle transformée de Fourier inverse de la fonction $\hat{f}(\omega)$*, la fonction notée* $f(t)$ *:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp[i\omega t] d\omega \tag{3.12}$$

Généralement on dénote la transformée de Fourier avec le symbole chapeau : $\hat{.}$ On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = TF(f(t)) \tag{3.13}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\omega) = TF^{-1}\hat{f}(\omega) \tag{3.14}$$

L'expression 3.10 montre que la définition transformée de Fourier n'est pas unique. Nous aurions pu modifier les préfacteurs $1/\sqrt{2\pi}$ et faire un autre choix à la condition que le produit des deux pré-facteurs soit égale à $1/2\pi$. Par ailleurs, le signe dans les exponentielles est aussi une convention : si on met le signe $-$ dans la transformée directe, alors on met un signe $+$ dans la transformée inverse et inversement.

Exemple 6 (***TF de la fonction porte***)

Calculons la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leqslant 1, \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

D'après la définition, on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \exp[-i\omega t] dt, \\ &= \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{+1}, \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sin}_c(\omega) \end{aligned}$$

On obtient une fonction continue de la variable ω

Quelques remarques sur la transformée de Fourier :

1. La transformée de Fourier permet de passer d'une représentation dans l'espace des temps à une représentation dans l'espace des fréquences ($\omega = 2\pi f$) ;
2. $f(t)$ et $f(\omega)$ peuvent être des fonctions complexes. Le plus souvent, nous serons amenés à traiter le cas où $f(t)$ est réelle et $\hat{f}(\omega)$ est une fonction complexe à symétrie hermitienne.
3. la formule 3.12 peut être interprétée de la façon suivante : $f(t)$ se décompose comme une somme 'infinie' de fonctions harmoniques ($\exp[-i\omega t]$) pondérées par les coefficients $\hat{f}(\omega)$;
4. $\hat{f}(\omega)$ est le spectre de la fonction $f(t)$;
5. $|\hat{f}(\omega)|$ est appelé module du spectre de $f(t)$, cette quantité représente la contribution de chaque harmonique ;
6. $arg(\hat{f}(\omega))$ est la phase du spectre, cette quantité représente le déphasage entre chaque harmonique ;
7. la transformée de Fourier est réversible (cf. relation 3.10) :
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}(f(t))\right\}; \tag{3.15}$$
8. Il est assez facile de calculer la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ sur un ordinateur en utilisant les algorithmes de FFT (Fast Fourier Transform).

Exemple 7 (*Le son*)

Un objet de la vie quotidienne pour lequel il est naturel de parler de fréquence et de spectre est le son. Tout le monde a déjà associé à un son les concepts de graves ou aigus. Ces mots signifient respectivement qu'un son possède un spectre avec seulement des basses fréquences ou seulement des hautes fréquences. On fait donc de la transformée de Fourier sans le savoir !
Applet : traitement temps - réel de sons : acquisition et visualisation des sons sous forme de fonction du temps et de sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier et donc une autre 'vision' de la fonction $f(t)$, la visualisation du spectre permet de voir les informations autrement. Cette outil est l'outil de base de l'analyse harmonique.

3.4 Propriétés essentielles de la Transformée de Fourier

Propriété 3.4.1 (*Linéarité*)

La transformée de Fourier d'une combinaison linéaire des fonctions f et g est la combinaison linéaire des transformées de Fourier des fonctions f et g :
$$\mathcal{F}\left\{af(t) + bg(t))\right\} = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega). \tag{3.16}$$

Cette propriété permet de 'découper' les expressions quand on calcule la transformée de Fourier d'une équation.

Démonstration :

$$\mathcal{F}\{af(t)+bg(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(af(t)+bg(t))\exp[-i\omega t]dt \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} af(t)\exp[-i\omega t] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} bg(t)\exp[-i\omega t]dt \quad (3.18)$$

$$= a\hat{f}(\omega)+b\hat{g}(\omega). \quad (3.19)$$

■

Propriété 3.4.2 (*dérivation*)

L'opération de dérivation de la fonction $f(t)$ revient à multiplier la fonction $\hat{f}(\omega)$ par $i\omega$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = i\omega\hat{f}(\omega) \quad (3.20)$$

Nous utiliserons beaucoup cette propriété dans la suite car elle permet de passer d'une expression faisant apparaître des dérivées à une expression de type polynôme en ω.

Démonstration :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dt}\exp[-i\omega t]dt \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(-i\omega e^{-i\omega t}\right)\right)dt \quad (3.22)$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp[-i\omega t]dt \quad (3.23)$$

$$= i\omega\hat{f}(\omega) \quad (3.24)$$

■

Ce résultat s'étend sans difficulté aux dérivées d'ordre supérieur :

Propriété 3.4.3 (*dérivée d'ordre supérieur*)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (i\omega)^n\hat{f}(\omega) \quad (3.25)$$

Démonstration : Pour démontrer cette propriété, on utilise le fait que $\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}$ ■

Propriété 3.4.4 (*décalage dans le temps*)

Un décalage d'une quantité t_0 dans l'espace des temps correspond à multiplier la fonction $\hat{f}(\omega)$ par $e^{-i\omega t_0}$ dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \quad (3.26)$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\exp[-i\omega t]dt \tag{3.27}$$

On pose : $u = t - t_0$, donc $du = dt$, $u \to -\infty$ si $t \to -\infty$ et $u \to +\infty$ si $t \to +\infty$, en effectuant ce changement de variables on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp[-i\omega(u+t_0)]du && (3.28)\\
&= \frac{e^{-i\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp[-i\omega u]du && (3.29)\\
&= e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) && (3.30)
\end{aligned}$$

■

Définition 3.4.1 (*Le produit de convolution*)

On appelle produit de convolution l'opération suivante :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du. \tag{3.31}$$

Propriété 3.4.5 (*produit de convolution*)

Soient f et g, deux fonctions absolument intégrables sur l'axe des réels, alors la transformée de Fourier du produit de convolution de f par g est le produit simple des transformées de Fourier de f et g multiplié par un facteur $\sqrt{2\pi}$:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega) \tag{3.32}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f * g\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) * g(t)\exp[-i\omega t]dt && (3.33)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du\exp[-i\omega t]dt && (3.34)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\exp[-i\omega t]dudt && (3.35)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\exp[-i\omega t]dt\right]du && (3.36)
\end{aligned}$$

On pose $v = t - u$ donc $t = u + v$ à u fixé,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f * g\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v)\exp[-i\omega(v+u)]dv\right]du && (3.37)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp[-i\omega u]du \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\exp[-i\omega v]dv && (3.38)\\
&= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega) && (3.39)
\end{aligned}$$

■

Propriété 3.4.6 (*produit de convolution de deux fonctions dans l'espace de Fourier*)

Soient $\hat{f}$ et $\hat{g}$, les transformées de Fourier des fonctions $f(t)$ et $g(t)$, alors la transformée de Fourier inverse du produit de convolution de $\hat{f}$ par $\hat{g}$ est le produit simple de f et g multiplié par un facteur $\sqrt{2\pi}$:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f} * \hat{g}\right\} = \sqrt{2\pi} f(t).g(t) \tag{3.40}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f} * \hat{g}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} * \hat{g} \exp[i\omega t] d\omega && (3.41)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(\omega - u) du \exp[i\omega t] d\omega && (3.42)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(\omega - u) \exp[i\omega t] du d\omega && (3.43)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(\omega - u) \exp[i\omega t] dt\right] d\omega && (3.44)
\end{aligned}$$

On pose $v = \omega - u$ donc $\omega = u + v$ à u fixé,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f} * \hat{g}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(v) \exp[i\omega(v + u)] dv\right] du && (3.45)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) \exp[-i\omega u] du \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(v) \exp[-i\omega v] dv && (3.46)\\
&= \sqrt{2\pi} f(t).g(t) && (3.47)
\end{aligned}$$

■

Définition 3.4.2 (*La fonction généralisée de Dirac*)

On appelle fonction généralisée de Dirac, la distribution telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0). \tag{3.48}$$

Propriété 3.4.7 (*transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac*)

La transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac est :

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t - t_0)\right\} = \frac{e^{-i\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.49}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\delta(t - t_0)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \exp[-i\omega t] dt && (3.50)\\
&= \frac{e^{-i\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}} && (3.51)
\end{aligned}$$

■

Cette propriété existe aussi pour la fonction généralisée de Dirac dans l'espace de Fourier :

Propriété 3.4.8

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\delta(\omega-\omega_0)\right\} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.52}$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\delta(\omega-\omega 0)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\exp[i\omega t]dt \tag{3.53}$$

$$= \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.54}$$

■

Propriété 3.4.9 (*Transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus*)

Les transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus sont respectivement :

$$\mathcal{F}\left\{\sin(\omega_0 t)\right\} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right) \tag{3.55}$$

$$\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right) \tag{3.56}$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\} \tag{3.57}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{i\omega_0 t}\right\}+\mathcal{F}\left\{e^{-i\omega_0 t}\right\} \tag{3.58}$$

or d'après la relation 3.54, on a :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}}\right\} = \delta(\omega-\omega_0)$$

Par conséquent on obtient la relation désirée :

$$\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) \tag{3.59}$$

La démonstration pour la fonction sinus est analogue. ■

3.5 Résolution d'EDO par Transformée de Fourier

Reprenons le formalisme entrée/sortie utilisé dans le premier chapitre et considérons un système dont l'entrée et la sortie sont reliées par l'équation différentielle à coefficients constants suivante :

$$a_m\frac{d^m s(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}s(t)}{dt^{m-1}}+...+a_0 s(t) = b_n\frac{d^n e(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}e(t)}{dt^{n-1}}+...+b_0 e(t) \tag{3.60}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. On suppose que $s(t)$ et $e(t)$ sont deux fonctions dont la transformée de Fourier existe. Grâce aux propriétés de linéarité (prop. 4.3.1) et de dérivation (prop. 3.4.3), on peut calculer la transformée de Fourier de cette équation :

$$a_m(i\omega)^m\hat{s}(\omega) + a_{m-1}(i\omega)^{m-1}\hat{s}(\omega) + ... + a_0\hat{s}(\omega) = b_n(i\omega)^n\hat{e}(\omega) + b_{n-1}(i\omega)^{n-1}\hat{e}(\omega) + ... + b_0\hat{e}(\omega) \tag{3.61}$$

On peut mettre cette équation sous la forme :

$$\hat{s}(\omega)\left[a_m(i\omega)^m + a_{m-1}(i\omega)^{m-1} + ... + a_0\right] = \hat{e}(\omega)\left[b_n(i\omega)^n + b_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + b_0\right], \tag{3.62}$$

ce qui conduit à l'expression :

$$\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} = \frac{b_n(i\omega)^n + b_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + b_0}{a_m(i\omega)^m + a_{m-1}(i\omega)^{m-1} + ... + a_0}. \tag{3.63}$$

Cette équation montre que l'on a réussi à séparer l'entrée $\hat{e}(\omega)$, la sortie $\hat{s}(\omega)$ et le comportement du sytème étudié : $\frac{b_n(i\omega)^n + b_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + b_0}{a_m(i\omega)^m + a_{m-1}(i\omega)^{m-1} + ... + a_0}$

Définition 3.5.1 (*Fonction de transfert*)

On appelle fonction de transfert la fonction notée $T(\omega)$ reliant la sortie et l'entrée d'un système linéaire et invariant dans le temps :

$$T(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} \tag{3.64}$$

Cette fonction caractérise entièrement le système étudié, elle contient l'intégralité de ces propriétés physiques.

On voit qu'une fois $T(\omega)$ connue, on peut calculer n'importe quelle sortie pour une entrée donnée :

$$\hat{s}(\omega) = T(\omega)\hat{e}(\omega) \tag{3.65}$$

La solution de l'équation différentielle (Eq. 3.63), peut être déterminée en calculant la transformée de Fourier inverse :

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{s}(\omega)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{T(\omega)\hat{e}(\omega)\right\} \tag{3.66}$$

A ce stade de l'étude, soit on calcule directement la transformée de Fourier inverse de $T(\omega)\hat{e}(\omega)$, soit on la calcule formellement en utilisant la propriété sur le produit de convolution :

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{T(\omega)\hat{e}(\omega)\right\} && (3.67)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{T(\omega)\right\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{e}(\omega)\right\}\right) && (3.68)\\ &= i(t) * e(t) && (3.69) \end{aligned}$$

où $i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left\{T(\omega)\right\}$.

On remarque que si $e(t) = \delta(t)$ alors $s(t) = i(t)$, en effet :

$$\begin{aligned} s(t) &= i(t) * e(t) && (3.70)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i(t-u)\delta(u)du && (3.71)\\ &= i(t) && (3.72)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\{T(\omega)\} && (3.73) \end{aligned}$$

Si l'entrée du système est une impulsion (la fonction généralisée de Dirac), alors la sortie du système s'identifie à la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. On appelle cette fonction la réponse impulsionnelle.

Définition 3.5.2

On appelle réponse impulsionnelle du sytème la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert :

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\{T(\omega)\} \tag{3.74}$$

La réponse impulsionnelle du système caractérise le comportement du sytème. On constate que c'est l'analogue dans l'espace des temps de la fonction de transfert. Cependant dans le cas général cette fonction n'apparaît pas naturellement et on lui préfère la fonction de transfert.

Bilan

Lorsqu'un système est modélisée par une équation différentielle à coefficients constants dans l'espace temporel, l'utilisation de la transformée de Fourier permet de se ramener à un problème faisant intervenir des polynômes de la variable ω. On obtient facilement la solution de l'équation transformée en factorisant les différents termes. La solution finale dans l'espace des temps se détermine en calculant la transformée de Fourier inverse de la solution obtenue dans l'espace de Fourier.

3.6 Résolution d'EDP par Transformée de Fourier

Comme nous n'avons pas de forme générale pour les EDP, nous allons examiner un cas particulier et essayer d'en tirer des enseignements.

Exemple 8 (*Résolution de l'équation de transport*)

Reprenons l'équation de transport portant sur la fonction à deux variables $u(x,t)$ déjà évoquée dans le premier chapitre :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{3.75}$$

on ajoute à cette équation la condition en $x = 0$:

$$u(x = 0, t) = e(t).$$

On suppose que $u(t)$ est une fonction dont la transformée de Fourier existe. Calculons la transformée de Fourier de l'équation de transport :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{i\omega}{c_0}\hat{u}(x,\omega) = 0. \tag{3.76}$$

L'équation ainsi obtenue est une équation différentielle du premier ordre en x. On sait résoudre ce type d'équation :

$$\hat{u}(x,\omega) = A(\omega)e^{-\frac{i\omega}{c_0}x} \tag{3.77}$$

où $A(\omega)$ est une fonction inconnue à déterminer en fonction de la condition en $x = 0$:

$$\mathcal{F}\left\{u(x=0,t)\right\} = \hat{e}(\omega) = A(\omega). \tag{3.78}$$

On obtient alors la solution du problème dans l'espace de Fourier :

$$\hat{u}(x,\omega) = \hat{e}(\omega)e^{-\frac{i\omega}{c_0}x}. \tag{3.79}$$

Si on considère que $\hat{e}(\omega)$ est l'entrée du système et $\hat{u}(x,\omega)$ la sortie, on peut définir la fonction de transfert du système

$$\hat{T}(\omega) = \frac{\hat{u}(x,\omega)}{\hat{e}(\omega)} = e^{-\frac{i\omega}{c_0}x} \tag{3.80}$$

Une étude du module et de l'argument de $\hat{T}(\omega)$ permettrait de connaître les propriétés du système étudié (cf. TD). La solution dans l'espace des temps s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse de l'équation précédente :

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{e}(\omega)e^{-i\frac{x}{c_0}\omega}\right\} \tag{3.81}$$

D'après la propriété de décalage en temps (prop 4.3.5) :

$$u(x,t) = e\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \tag{3.82}$$

Bilan

L'utilisation de la transformée de Fourier pour des systèmes décrits par une EDP linéaire conduit à remplacer l'EDP par une EDO. La résolution est donc simplifiée. Une fois la solution connue dans l'espace de Fourier, il suffit de calculer la transformée de Fourier inverse pour trouver la solution dans l'espace des temps.

Chapitre 4

La Transformée de Laplace

4.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en place le formalisme des transformées de Fourier. Cette transformée est bien adpatée aux problèmes impliquant des fonctions définies (et intégrables) de moins l'infini à plus l'infini. Cependant, il existe d'autres problèmes avec des conditions initiales du type "*à t=0, ...*" qui ne sont pas bien décrits par la transformée de Fourier. On utilise alors la transformée de Laplace.

4.2 La Transformée de Laplace

Définition 4.2.1 (*La transformée de Laplace*)

On appelle transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, la fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{4.1}$$

Théorème 4.2.1

Si $f(t)$ est ne fonction intégrable sur tout intervalle fini de l'axe des réels et qui ne diverge pas en norme à l'infini plus vite qu'une exponentielle de type e^{-ct} (avec $c \in \mathbb{R}$).

Alors sa transformée de Laplace existe pour tout $p \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est plus grande que c ($Re(p) > c$)

Démonstration : la démonstration découle naturellement des hypothèse de l'énoncé du théorème.■

Dans ce cours, la transformée de Laplace sera notée indifféremment $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = TL(f(t))$.

Exemple 9 (*Transformée de Laplace de la fonction Heaviside*)

Calculons la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0, \\ 1 & si \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

D'après la définition 4.1 la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est :

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt, \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}, \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 (*Transformée de Laplace inverse*)

Soit $f(t)$ une fonction admettant une transformée de Laplace $F(p)$. Soit γ un nombre réel plus grand que la partie réelle de tous les points où $F(p)$ est singulière.

Alors la transformée de Laplace inverse s'obtient par l'expression suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(\gamma+i\omega)e^{(\gamma+i\omega)t}d\omega \tag{4.2}$$

Démonstration : ADMIS ■

En pratique, on calcule rarement les transformées de Laplace directe ou inverse. On utilise des tables dans lesquelles, les fonctions usuelles et leur transformée ont été compilées (cf tableau 4.1)

4.3 Propriétés essentielles de la Transformée de Laplace

Propriété 4.3.1 (*Linéarité*)

La transformée de Laplace d'une combinaison linéaire des fonctions f et g est la combinaison linéaire des transformées de Laplace des fonctions f et g :

$$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = aF(p)+bG(p). \tag{4.3}$$

Cette propriété permet de 'découper' les expressions quand on calcule la transformée de Laplace d'une équation.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} &= \int_0^{+\infty}(af(t)+bg(t))\exp[-pt]dt && (4.4) \\ &= p\int_0^{+\infty} af(t)\exp[-pt]dt + \int_{-\infty}^{+\infty} bg(t)\exp[-pt]dt && (4.5) \\ &= aF(p)+bG(p). && (4.6) \end{aligned}$$

■

Propriété 4.3.2 (*dérivation*)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = pF(p) - f(0) \tag{4.7}$$

Nous utiliserons beaucoup cette propriété dans la suite car elle permet de passer d'une expression faisant apparaître des dérivées à une expression de type polynôme en p.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}\exp[-pt]dt && (4.8)\\
&= \left(\left[f(t)e^{pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\left(-pe^{-pt}\right)\right) dt && (4.9)\\
&= f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t)\exp[-pt]dt && (4.10)\\
&= pF(p) - f(0) && (4.11)
\end{aligned}$$

■

Ce résultat s'étend sans difficulté aux dérivées d'ordre supérieur :

Propriété 4.3.3 (*dérivée d'ordre supérieur*)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0) \tag{4.12}$$

Propriété 4.3.4 (*intégration*)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{p}F(p) \tag{4.13}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} &= \int_0^{+\infty}\int_0^t f(u)du\exp[-pt]dt && (4.14)\\
&= \left[\int_0^{+\infty} f(u)du\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\frac{e^{-pt}}{-p}dt && (4.15)\\
&= \frac{1}{p}F(p) && (4.16)
\end{aligned}$$

■

Propriété 4.3.5 (*décalage dans le temps*)

Un décalage d'une quantité t_0 dans l'espace des temps correspond à multiplier la fonction $F(p)$ par e^{-pt_0} dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{L}\left\{f(t-t_0)h(t-t_0)\right\} = e^{-pt_0}F(p) \tag{4.17}$$

Propriété 4.3.6 (*Produit de convolution*)

La transformée de Laplace d'un produit de convolution de deux fonctions f et g est le produit simple des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}\left\{h(t)(f(t) * g(t))\right\} = F(p)G(p) \tag{4.18}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ht()(f(t) * g(t))\right\} &= , && (4.19)\\
&= \int_0^{+\infty} h(t)(f(t) * g(t))e^{-pt}dt, && (4.20)\\
&= \int_0^{+\infty} h(t)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)due^{-pt}dt, && (4.21)\\
&= \int_0^{+\infty} f(u)\int_0^{+\infty} g(t-u)e^{-pt}dtdu, && (4.22)\\
& && (4.23)
\end{aligned}$$

On pose $v = t - u$ à u fixé

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} &= \int_0^{+\infty} f(u)\int_0^{+\infty} g(v)e^{-p(u+v)}dvdu, && (4.24)\\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du\int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv}dv, && (4.25)\\
&= F(p)G(p). && (4.26)
\end{aligned}$$

■

4.4 Quelques Transformées de Laplace utiles

Voici trois exemples de calculs de transformées de Laplace :

— $\mathcal{L}(e^{-at}h(t)) = \frac{1}{a+p}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{-at}h(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt, && (4.27)\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t}dt, && (4.28)\\
&= \left[\frac{e^{-(a+p)t}}{-(a+p)}\right]_0^{+\infty}, && (4.29)\\
&= \frac{1}{a+p}. && (4.30)
\end{aligned}$$

— $\mathcal{L}(h(t)\sin at) = \frac{a}{a^2+p^2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin at) &= \mathcal{L}\left(h(t)\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right), && (4.31)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left(e^{iat}\right)-\mathcal{L}\left(e^{-iat}\right)\right), && (4.32)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-ia+p}-\frac{1}{ia+p}\right), && (4.33)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{p+ia-(p-ia)}{p^2+a^2}\right), && (4.34)\\
&= \frac{a}{a^2+p^2}. && (4.35)
\end{aligned}$$

— $\mathcal{L}(h(t)\cos at) = \frac{p}{a^2+p^2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos at) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a}\frac{d\sin(at)}{dt}\right), && (4.36)\\
&= \frac{p}{a}\mathcal{L}\left(\sin(at)\right)-\frac{1}{a}(sin(a.0)), && (4.37)\\
&= \frac{p}{a^2+p^2}. && (4.38)
\end{aligned}$$

La table suivante contient ces résultats ainsi que d'autres transformées de Laplace.

$f(t)$	$F(p)$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ 1 & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ t & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{p^2}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ e^{-at} & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{p+a}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ te^{-at} & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ \frac{1}{a}sin(at) & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ cos(at) & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0,\\ erfc(\frac{k}{2\sqrt{(t)}}) & \text{si} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$	$\frac{1}{p}e^{-k\sqrt{p}}$

TABLE 4.1 – Quelques exemples de transformées de Laplace

4.5 Résolution d'EDO par la Transformée de Laplace

cf TD et TP

4.6 Résolution d'EDP par la Transformée de Laplace

cf TD et TP

4.7 Décomposition en éléments simples

On rappelle ici brièvement la décomposition en éléments simples. On considère une fonction F de la variable complexe p qui s'écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

où P et Q sont deux fonctions polynomiales de la variables p. On suppose que le degré de P est inférieur ou égal au degré de Q et que P et Q sont premiers entre eux (pas de racine commune). Par ailleurs, on suppose que $Q(p)$ se factorise sous la forme :

$$Q(p) = (p - z_1)^{n_1}(p - z_2)^{n_2}...(p - z_p)^{n_p}$$

Alors la décomposition en éléments simples de $F(p)$ s'écrit :

$$F(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} = T + \frac{a_1}{(p - z_1)} + \frac{a_2}{(p - z_1)^2} + ... + \frac{a_{n_1}}{(p - z_1)^{n_1}} + \frac{b_1}{p - z_2} + ... + \frac{b_{n_2}}{(p - z_2)^{n_2}} + ...$$

où les coefficients a_i et T sont *a priori* complexes.

Exemple 10

Décomposition en éléments simples On veut décomposer

$$F(p) = \frac{1}{(p - 2)(p - 3)}$$

On sait que dans ce cas la décomposition en éléments simples sera de la forme :

$$F(p) = \frac{A}{(p - 2)} + \frac{B}{(p - 3)}$$

Pour trouver A et B, plusieurs méthodes existent. Dans le cas présent, la plus simple consiste à remarquer que : $A = lim_{p\to 2}(p - 2)F(p)$ et $B = lim_{p\to 3}(p - 3)F(p)$ et d'avaleur ces limites. On trouve ainsi : $A = lim_{p\to 2}(p - 2)F(p) = -1$ et $B = lim_{p\to 3}(p - 3)F(p) = 1$.

La décomposition en éléments simples s'écrit donc

$$F(p) = \frac{-1}{(p - 2)} + \frac{1}{(p - 3)}$$