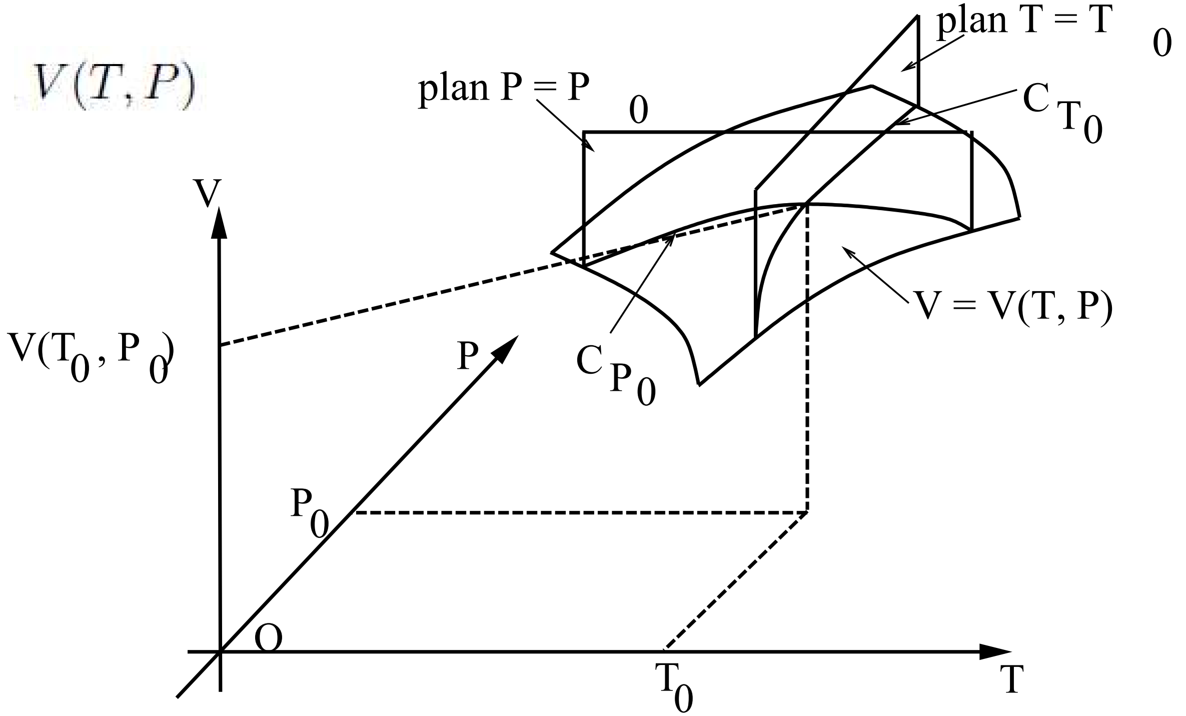
Eléments mathématiques

1. Interprétation d’une fonction à deux variables
2. Dérivées partielles d’une fonction à plusieurs variables
3. Différentielle

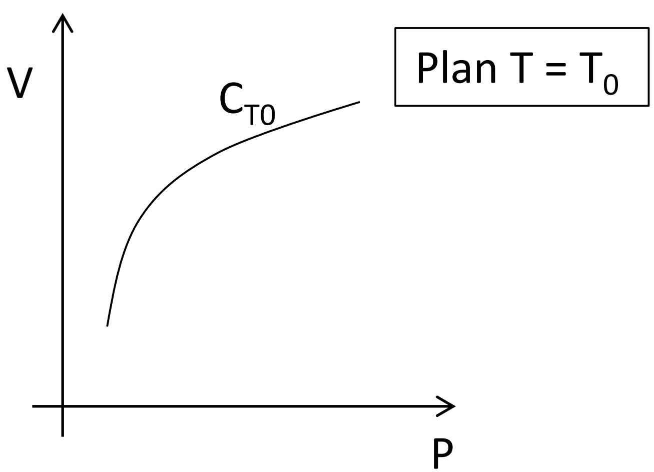
1. Interprétation d’une fonction à deux variables
2. Dérivées partielles d’une fonction à plusieurs variables
3. Différentielle

Interprétation d'une fonction à deux variables

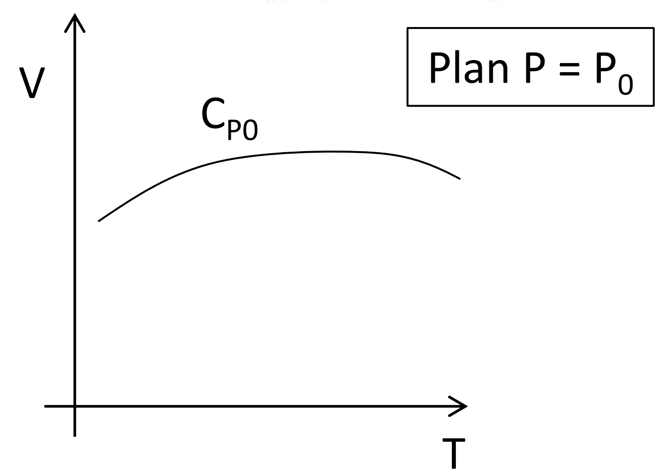
$V(T,P)$



$P \mapsto V(T = T_0, P)$



$T \mapsto V(T, P = P_0)$



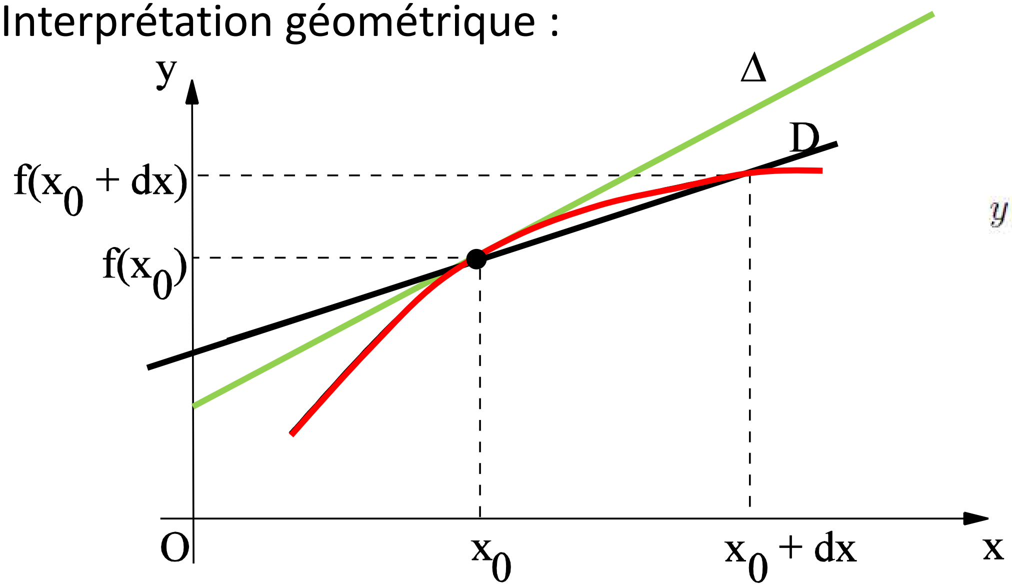
1. Interprétation d’une fonction à deux variables
2. Dérivées partielles d’une fonction à plusieurs variables
3. Différentielle

Définition

La dérivée en $x = x_0$ d'une fonction d'une seule variable $f(x)$, notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$, est la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ lorsque dx tend vers zéro :

$$\lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Interprétation géométrique :



La droite D a pour équation :

$$y(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}(x-x_0)$$

La droite Δ a pour équation :

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$D \xrightarrow[dx\to 0]{} \Delta$$

dx petit : $\dfrac{\overbrace{f(x_0+dx)-f(x_0)}^{df}}{dx} \approx f'(x_0)$

➔ Notation : $\dfrac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$

Dérivées partielles : Rappel : dérivée d'une fonction d'une seule variable

Dérivée de f = taux de variation de f par rapport à x

=

comment f varie lorsque x varie

f' est une fonction de x

Compressibilité isotherme d'un gaz

=

comment varie son volume lorsque sa pression varie à température fixée

Dérivée de V par rapport à P à T fixé : $\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_T (T, P)$

Cette nouvelle fonction de T et de P se calcule en dérivant V par rapport à la variable P en considérant momentanément T comme une constante. Elle est appelée la **dérivée partielle** de V par rapport à P à T constant, parce qu'on n'a dérivé V que par rapport à une seule variable.

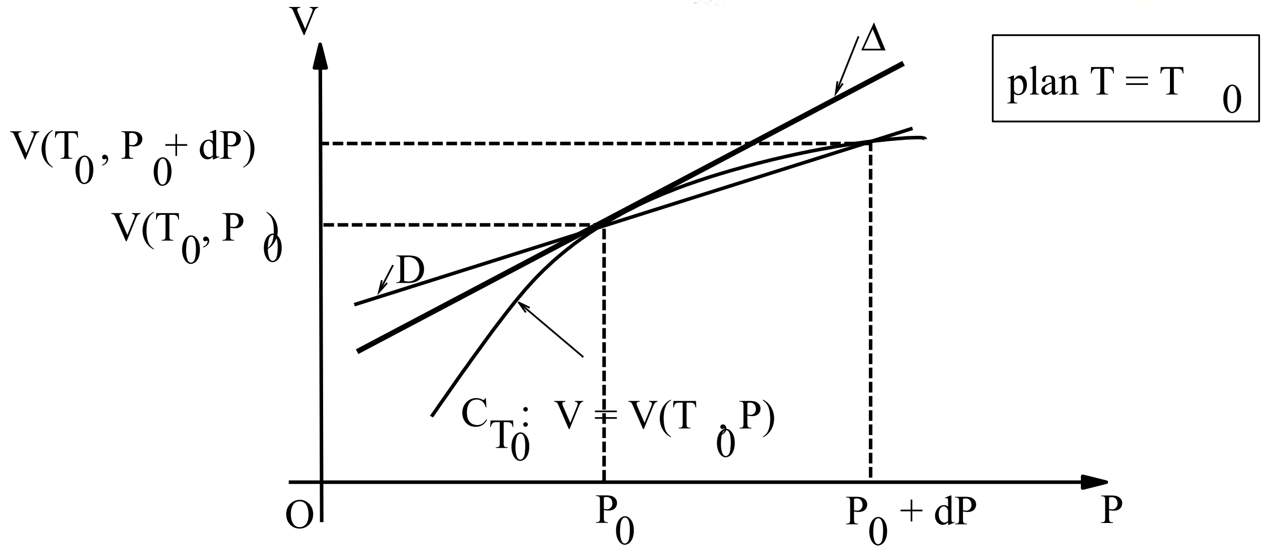
$\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_T$ est une fonction de T et de P

Définition : Dérivée partielle de V par rapport à V à T fixé, évaluée en (T_0, P_0) :

$$\frac{V(T_0, P_0 + dP) - V(T_0, P_0)}{dP} \xrightarrow[dP \to 0]{} \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T (T_0, P_0)$$

Interprétation de la notation :

∂V est la variation infinitésimale de V au voisinage de $V(T_0, P_0)$ lorsque P varie infinitésimalement de ∂P au voisinage de P_0 à $T = T_0$ constant.



1. Interprétation d’une fonction à deux variables
2. Dérivées partielles d’une fonction à plusieurs variables
3. Différentielle

Différentielle : Définition

lorsque P varie infinitésimalement de dP autour de P_0 à température constante égale à T_0, V varie infinitésimalement de dV tel que :

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T (T_0, P_0) dP$$

Lorsque simultanément P et T varient infinitésimalement de dT et de dP à partir de (T_0, P_0), comme V dépend de T et de P, la variation infinitésimale de V, appelée différentielle de V en (T_0, P_0) et notée $dV(T_0, P_0)$

$$dV(T_0, P_0) = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P (T_0, P_0)\, dT + \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T (T_0, P_0)\, dP$$

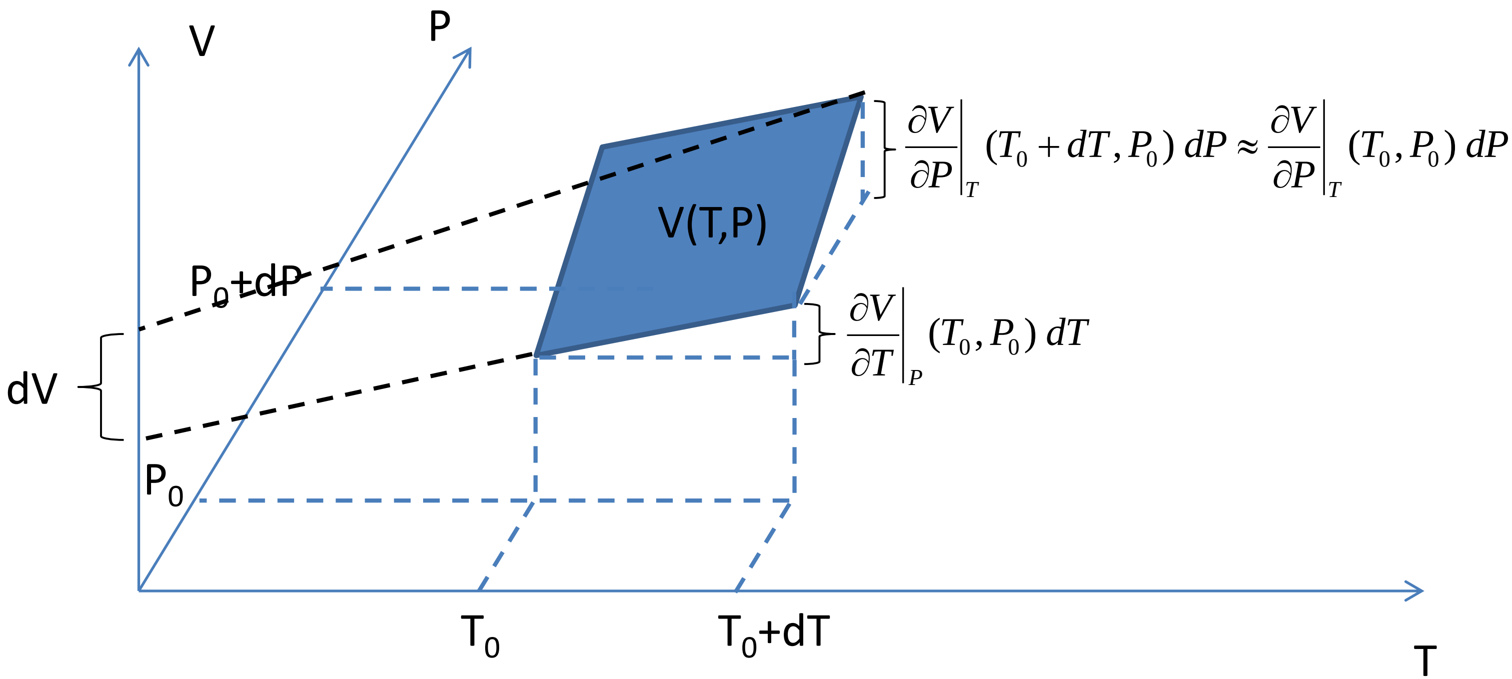
Forme différentielle totale de V

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P dT + \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T dP$$

dépend de T et de P

Différentielle : Interprétation géométrique

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T (T_0, P_0)\, dP + \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P (T_0, P_0)\, dT$$



dT et dP étant petits, la surface V(T, P) est approximée localement par un plan.

Problématique de construction d'équations d'état à partir de mesures

$\delta V(T,P) = A(T,P)dT + B(T,P)dP$ forme différentielle

Elle est exacte s'il existe une fonction $F(T,P)$ telle que : $A = \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_P \qquad B = \left.\frac{\partial F}{\partial P}\right|_T$

équivalent à :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial P}\right|_T = \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right|_P$$

En effet, on peut calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial P \partial T}$ de deux manières équivalentes (théorème de Schwartz):

$$\underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial T}\left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T\right)\right|_P}_{\left.\frac{\partial B}{\partial T}\right|_P} = \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial P}\left(\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P\right)\right|_T}_{\left.\frac{\partial A}{\partial P}\right|_T} = \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial P} \qquad (1.1)$$

on peut alors noter δV : dV