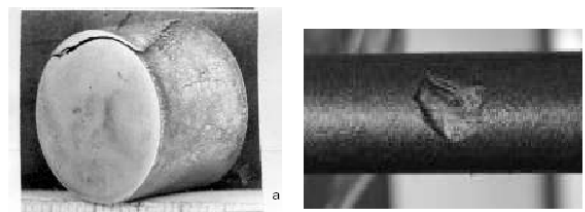


## Ondes

### Thème 5 : d'autres types d'ondes

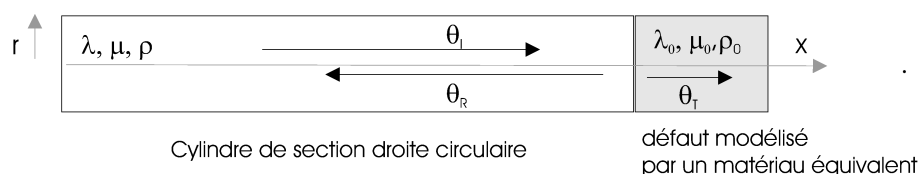
#### Exercice 1 : Propagation d'ondes de torsion dans des arbres cylindriques

Les arbres qui transmettent les rotations dans les pompes des installations pétrolières (entre autres) ont besoin d'être inspectés régulièrement pour détecter des usures anormales et dangereuses. Une méthode d'inspection consiste à utiliser la propagation d'ondes de torsion dans les arbres (cylindres de section droite circulaire) : une onde est générée à une extrémité et les échos (signaux dus aux ondes réfléchies le long du cylindre) sont enregistrés. La présence d'un défaut (fissure, soudure endommagée, etc. ; voir figure 1) correspond à une diminution locale de rigidité de torsion, de sorte que l'onde « voit » le défaut comme une interface avec un cylindre d'impédance différente du reste de la barre. Nous proposons en conséquence



**Figure 1** – Photographie de défauts d'usure sur des arbres cylindriques. Tiré de Budenkov & Korobeynikova, « NDT for safety », 2007.

pour l'étude du problème de détection de défaut le modèle suivant. Soit un cylindre d'axe  $x$  de diamètre extérieur  $2a$  constitué d'un matériau de densité  $\rho$  et de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Le défaut est modélisé par une interface avec un « matériau équivalent de densité  $\rho_0$  et de coefficients de Lamé  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  (voir figure 2). On considérera que la cohésion entre les deux milieux au niveau de l'interface est parfaite (pas de mouvement relatif possible).



**Figure 2** – Schéma de l'expérience.

## Équation des ondes de torsion dans un cylindre

Dans cette première partie, on considère un cylindre infini d'axe  $x$  de diamètre extérieur  $2a$  constitué d'un matériau de densité  $\rho$  et de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . A une coordonnée  $x$  quelconque, on considère que la section droite subit un mouvement de rotation de corps rigide ; le mouvement est donc entièrement caractérisé par cette rotation notée  $\theta(x)$ . Le couple résultant (du à l'ensemble de la section) est noté  $C(x)$ . On rappelle que la relation de comportement est

$$C(x, t) = \mu I \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad \text{avec} \quad I = \frac{\pi a^4}{2}.$$

1. Rappeler l'équation des ondes de torsion pour la rotation de section  $\theta(x, t)$ .

**Solution:** L'équation de propagation des ondes de torsion a pour expression

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

avec  $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$ .

## Réflexion des ondes de torsion

Dans un premier temps, on considère la réflexion à une surface libre (extrémité libre de l'arbre).

2. Donner les expressions de l'angle de rotation  $\theta_i$  et du couple  $C_i$  associés à une onde plane incidente se propageant dans la direction  $x$ .

L'angle de rotation associé à l'onde incidente a pour expression

$$\theta_i(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Le couple  $C_i$  a alors pour expression

$$C_i(x, t) = \mu I \frac{\partial \theta_i(x, t)}{\partial x} = -ik\mu I A e^{i(\omega t - kx)}.$$

3. Donner les expressions de l'angle de rotation  $\theta_r$  et du couple  $C_r$  associés à l'onde réfléchie. On notera  $r_\theta$  le coefficient de réflexion en amplitude de rotation.

**Solution:** L'angle de rotation associé à l'onde réfléchie a pour expression

$$\theta_r(x, t) = r_\theta A e^{i(\omega t + kx)}.$$

Le couple  $C_r$  a alors pour expression

$$C_r(x, t) = \mu I \frac{\partial \theta_r(x, t)}{\partial x} = ik\mu I r_\theta A e^{i(\omega t + kx)}.$$

4. Écrire formellement les conditions limites en  $x = 0$  dans le cas d'une surface libre et en déduire la valeur du coefficient de réflexion.

**Solution:** La surface  $x = 0$  étant une surface libre, cela impose que le couple  $C = C_i + C_r$  est nul en  $x = 0$ . On en déduit aisément que  $r_\theta = 1$ .

5. Quelle est l'amplitude de la rotation sur la surface libre ?

**Solution:** Les rotations associées aux ondes incidente et réfléchie sont de mêmes amplitudes à l'extrémité. En conséquence, la rotation totale est le double de la rotation incidente.

6. On considère maintenant la réflexion et la transmission à l'interface avec un milieu caractérisé par les coefficients de Lamé  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ . Donner les expressions de l'angle de rotation  $\theta_t$  et du couple  $C_t$  associés à l'onde transmise. On notera  $t_\theta$  le coefficient de transmission en amplitude de rotation.

**Solution:** L'angle de rotation associé à l'onde transmise a pour expression

$$\theta_t(x, t) = t_\theta A e^{i(\omega t - k_0 x)} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

Le couple  $C_t$  a alors pour expression

$$C_t(x, t) = \mu_0 I \frac{\partial \theta_t(x, t)}{\partial x} = i k_0 \mu_0 I t_\theta A e^{i(\omega t - k_0 x)}.$$

7. Donner les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux et en déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission.

**Solution:** La continuité des rotations et des couples à l'interface implique

$$\begin{cases} \theta_i(x = 0, t) + \theta_r(x = 0, t) = \theta_t(x = 0, t), \\ C_i(x = 0, t) + C_r(x = 0, t) = C_t(x = 0, t). \end{cases}$$

Le report des différentes expressions angles de rotation et des couples dans ces conditions aux frontières conduit au système

$$\begin{cases} 1 + r_\theta = t_\theta, \\ Z(1 - r_\theta) = Z_0 t_\theta. \end{cases}$$

avec  $Z = \rho c$  et  $Z_0 = \rho_0 c_0$ . On en déduit rapidement les expressions des coefficients de réflexion et de transmission

$$r_\theta = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad \text{et} \quad t_\theta = \frac{2Z}{Z + Z_0}.$$

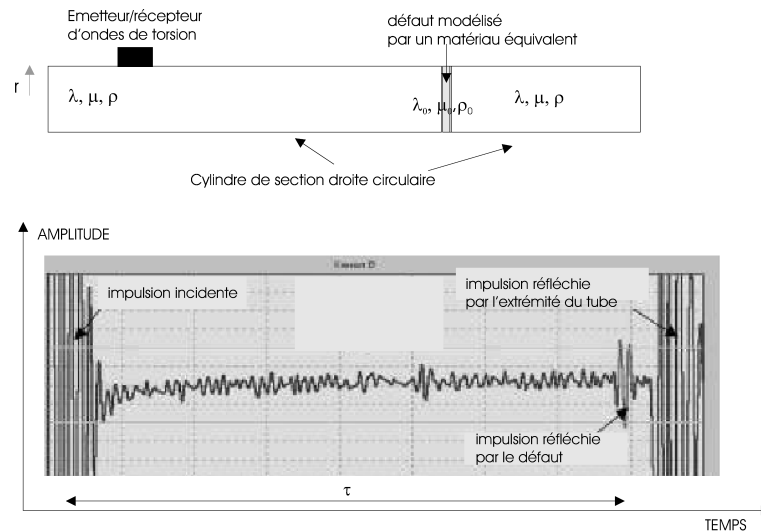
8. Montrer que le coefficient de réflexion dans le cas de l'extrémité libre est un cas particulier du cas étudié ici.

**Solution:** L'absence de matériau revient à annuler les coefficients de Lamé et donc l'impédance  $Z_0$ . On a alors  $R = 1$ .

9. On considère finalement le système représenté sur la figure 3. A la différence du cas étudié plus haut, le deuxième cylindre a une section droite de diamètre inférieur au premier. On rappelle que l'on s'intéresse à la propagation d'ondes pour lesquelles la section droite est sollicitée dans son ensemble. Déterminer le coefficient de réflexion.

## Application

La figure 4 décrit une configuration de mesure type et un exemple de signal du à des ondes de torsion se propageant dans arbre cylindrique.



**Figure 3** – Exemple de signal expérimental pour la caractérisation d'arbre par ondes de torsion.

10. Donner la méthode et les expressions mathématiques simples permettant de localiser le défaut.

**Solution:** Soit  $d$  la distance entre le défaut et le capteur. L'onde incidente met un temps  $\tau$  pour se propager du capteur au défaut et l'onde réfléchi mets le même temps  $\tau$  pour se propager du défaut au capteur. Si on note  $t_0$  le moment où l'onde incidente commence à se propager et  $t_1$  le moment où l'onde réfléchie est reçu par le capteur, alors on a

$$t_1 - t_0 = 2\tau = \frac{2d}{c}.$$

On en déduit que la distance entre le capteur et le défaut a pour expression

$$d = \frac{c}{2}(t_1 - t_0).$$

**11.** Comment peut-on avoir une information sur la nature de l'élément réflecteur (fissure, inclusion d'un autre matériau, présence d'une soudure) à partir d'un signal comme représenté sur la figure 4.

**Solution:** On peut caractériser le défaut en analysant l'amplitude de l'écho (à rapprocher du coefficient de réflexion). On peut faire une application numérique en prenant par exemple le couple aluminium/eau, le défaut étant modélisé par de l'eau.

**12.** Si un défaut est localisé très proche de la surface, quel autre type d'onde peut-on utiliser à la place des ondes de torsion ?

**Solution:** Si le défaut est proche de la surface, les ondes de surface et notamment l'onde de Rayleigh, peuvent y être sensibles.

## Exercice 2 : Ondes de pression dans une conduite déformable

Une conduite linéaire d'axe  $z$ , de rayon  $R_0$  et d'épaisseur  $e$  petite devant  $R_0$  fait d'un matériau de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$  contient un fluide de masse volumique  $\rho_0$ , de célérité  $c_0$  et de pression statique  $p_0$ . On souhaite déterminer la vitesse de l'onde résultant du couplage entre le fluide et le matériau de la conduite. Pour cela, on considérera que le fluide est homogène, imposant que toutes les grandeurs sont indépendantes des coordonnées transverses de la conduite ( $r$  et  $\theta$ ) et qu'il est au repos. Au passage de l'onde, la pression dans le fluide modifie la section du tube notée  $S$  et donc le rayon  $R$ .

1. Effectuer un bilan des échanges de masse et un bilan des efforts sur une tranche infinitésimale de fluide d'épaisseur  $dz$  afin d'obtenir les équations de conservation.

**Solution:** Le flux de masse au travers d'une surface  $S$  de normale  $\underline{n}$  est donné par la relation

$$Q = - \iint_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS.$$

On fait le bilan des échanges de masse sur une portion de la conduite de longueur  $dz$  :

$$\frac{d(\rho(z)S(z) \, dz)}{dt} = \rho(z)v(z)S(z) - \rho(z+dz)v(z+dz)S(z+dz) \approx - \left( \rho v \frac{\partial S}{\partial z} + S v \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho S \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz$$

d'où

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho v S}{\partial z} = 0.$$

On fait le bilan des efforts agissant sur la tranche d'épaisseur  $dz$  :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} S(z) \, dz = P(z)S(z) - P(z+dz)S(z+dz)$$

d'où

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} S = - \frac{\partial (PS)}{\partial z}.$$

2. La pression, la vitesse particulière et la densité sont recherchées sous la forme de développements limités au premier ordre. Après avoir linéarisé les équations de conservation, déterminer une équation de propagation liant la pression acoustique et la variation de section. Pour cela, la loi d'état liant la variation de densité et la pression acoustique devra être utilisée.

**Solution:** Les équations de conservation linéarisées ont pour expressions

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial S_a}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 S_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \rho_0 S_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} + p_0 \frac{\partial S_a}{\partial z} + S_0 \frac{\partial p_a}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à la coordonnée  $z$  et en tenant compte de la loi d'état, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 S_a}{\partial t^2} + \frac{S_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \rho_0 S_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} = 0, \\ \rho_0 S_0 \frac{\partial^2 v_a}{\partial z \partial t} + p_0 \frac{\partial^2 S_a}{\partial z^2} + S_0 \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\rho_0 \frac{\partial^2 S_a}{\partial t^2} + \frac{S_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - p_0 \frac{\partial^2 S_a}{\partial x^2} - S_0 \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0.$$

**3.** Au passage de l'onde, la pression dans le fluide déplace le rayon intérieur  $R_0$  du tube d'une longueur  $U$ . Donner l'expression de la variation de section en fonction du déplacement  $U$ .

**Solution:** La variation de section s'écrit

$$S = S_0 + S_a = \pi(R_0 + U)^2 = \pi(R_0^2 + U^2 + 2UR_0) \approx \pi R_0(R_0 + 2U).$$

On en déduit la relation

$$S_a = 2\pi R_0 U.$$

**4.** La pression statique  $p_0$  et la pression acoustique  $p_a$  engendrent respectivement des champs de contrainte statique et dynamique dans le matériau constituant la conduite. Sachant que la déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$  dans le matériau correspond à la variation relative de périmètre, déterminer l'expression de la partie dynamique de la déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$ .

**Solution:** La déformation est décomposée en une partie statique et une partie dynamique :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_0 + \varepsilon_a,$$

où la déformation dynamique a pour expression

$$\varepsilon_a = \frac{2\pi(R_0 + U) - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{U}{R_0}.$$

5. Dans le cas d'un tube infini sous pression, les composantes non nulles du tenseur des contraintes sont données par les approximations

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{e}, \quad \sigma_{zz} = \nu \frac{pR}{e} \quad \text{et} \quad \sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}.$$

En utilisant la loi de Hooke,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{pp}]$$

déterminer l'expression de la partie dynamique de la déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$ .

**Solution:** Compte tenu de la loi de Hooke, la déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$  a pour expression

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{zz}) \approx \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}).$$

On obtient donc la relation

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{pR}{eE} (1 - \nu^2),$$

ou encore

$$\varepsilon_{\theta\theta} \approx \frac{1}{E} \left( \frac{p_0 R_0}{e} + \frac{p_0 U}{e} + \frac{p_a R_0}{e} - \nu^2 \frac{p_0 R_0}{e} - \nu^2 \frac{p_0 U}{e} - \nu^2 \frac{p_a R_0}{e} \right).$$

La déformation dynamique a donc pour expression

$$\varepsilon_a = \frac{1 - \nu^2}{eE} (p_0 U + p_a R_0).$$

6. Après avoir posé  $\eta = e/R_0$ , exprimer le déplacement  $U$ , puis la variation de section  $S_a$  en fonction de la pression acoustique  $p_a$ . On remarquera également que la pression  $p_0$  est très faible devant le produit  $\eta E$ .

**Solution:** Compte tenu des deux précédentes questions, on a l'égalité

$$\frac{1 - \nu^2}{eE} (p_0 U + p_a R_0) = \frac{U}{R_0},$$

On a donc

$$\frac{U}{R_0} \left( 1 - \frac{1 - \nu^2}{\eta E} p_0 \right) = \frac{1 - \nu^2}{\eta E} p_a,$$

ou encore, sachant que  $p_0$  est faible devant  $\eta E$ ,

$$U = \frac{1 - \nu^2}{\eta E} p_a R_0.$$

La variation de section a alors pour expression

$$S_a = \frac{2S_0(1 - \nu^2)}{\eta E} p_a.$$



7. En déduire l'équation de propagation dont satisfait le champ de pression.

**Solution:** En tenant compte de l'expression de la variation de section  $S_a$  l'équation du mouvement devient

$$\left( \frac{2(1-\nu^2)}{\eta E} \rho_0 + \frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \left( \frac{2(1-\nu^2)}{\eta E} p_0 + 1 \right) \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0.$$

ou encore

$$\left( 1 + \frac{2(1-\nu^2)}{\eta E} \rho_0 c_0^2 \right) \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0.$$

Cette équation peut donc être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0,$$

où la vitesse  $c$  a pour expression

$$c = c_0 \sqrt{\frac{\frac{\eta E}{1-\nu^2}}{2\rho_0 c_0^2 + \frac{\eta E}{1-\nu^2}}}.$$

8. Exprimer cette vitesse en fonction de la vitesse de l'onde de plaque définie par la relation

$$c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}.$$

**Solution:** On a

$$c = c_0 \sqrt{\frac{\eta \rho c_b^2}{2\rho_0 c_0^2 + \eta \rho c_b^2}},$$

d'où

$$c = c_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2\rho_0 c_0^2}{\eta \rho c_b^2}}}.$$

9. Calculer la vitesse de l'onde dans la conduite dans le cas d'une canalisation en acier d'épaisseur  $e = 5$  mm et de rayon  $R_0 = 10$  cm remplie d'eau. L'acier est caractérisé par la masse volumique  $\rho = 7500$  kg.m<sup>-3</sup>, le module d'Young  $E = 220$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0,25$  et l'eau par la masse volumique  $\rho_0 = 1000$  kg.m<sup>-3</sup> et la vitesse du son  $c_0 = 1500$  m.s<sup>-1</sup>.

**Solution:** La vitesse de l'onde de barreau a pour valeur

$$c_b = \sqrt{\frac{220 \cdot 10^9}{7500(1 - 0,25^2)}} \approx 5594 \text{ m.s}^{-1}.$$

et la vitesse dans la conduite est

$$c = 1275 \text{ m.s}^{-1}.$$

**10.** On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde de pouls dans une artère de diamètre 2,5 cm et d'épaisseur 2 mm contenant du sang. L'artère est caractérisée par la masse volumique  $\rho = 1200 \text{ kg.m}^{-3}$ , le module d'Young  $E = 5 \text{ MPa}$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$  et le sang par la masse volumique  $\rho_0 = 1060 \text{ kg.m}^{-3}$  et la vitesse du son  $c_0 = 1570 \text{ m.s}^{-1}$ .

**Solution:** La vitesse de l'onde de barreau a pour valeur

$$c_b = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{1200(1 - 0,5^2)}} \approx 75 \text{ m.s}^{-1}.$$

et la vitesse dans la conduite est

$$c = 23 \text{ m.s}^{-1}.$$