2A004 Statique et dynamique des fluides
TD (Problèmes et aide à la résolution)

J-M Fullana

5 septembre 2018

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 1 : Maths pour des fluides

Exercice 1.1 : Fonctions à plusieurs variables

1. Calculer les dérivées partielles (premières et secondes) de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y, z) = 5x^2 - 12xy + 7y^3 + xz$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Que ce qu'on peut dire des dérivées croisées ?

Exercice 1.2 : Opérateurs

1. Calculer $\vec{u} = \vec{grad}\ f$.
2. Calculer $div(\vec{u})$.
3. On se place à 2D, montrer que si le vecteur $\vec{u}$ derive d'un potentiel alors $rot(\vec{u}) = 0$.
4. Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe-il des fonctions $f(x, y)$, de deux variables telles que l'on ait, en tout point (x, y)
$$\vec{grad}\ f(x, y) = (x^2y^2, y + \alpha x^3 y)$$
Tracer $z = f(x, y)$ pour $z = 0$. Tracer $\vec{grad}\ f(x, y)$. Vérifier que $\vec{grad}\ f(x, y)$ est un vecteur dirigé dans le sens des $f(x, y)$ croissants.
5. Plus simple, si l'on a des cercles $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ (pour chaque valeur de $R > 0$) vérifier que $\vec{grad}\ f(x, y)$ est un vecteur dirigé dans le sens des $f(x, y)$ croissants.
6. Tracer le champ de vitesses et calculer le rotationnel pour deux champs "équivalents" à 2 dimensions (attention, coordonnées polaires, la composante z du rotationnel est $(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta})$
   — $\vec{u} = \frac{A}{r}\ e_\theta$
   — $\vec{u} = Br\ e_\theta$
7. Discuter les deux cas.
8. (problème d'examen) Modèle de tornade

Exercice 1.3 : Intégrales

1. Soit une ligne de longueur L le long l'axe x
   — calculer $\int_L p dx$ avec p constant.
   — calculer $\int_L p dx$ avec $p = Ax$, A constant.
2. Calculer les moments par rapport à l'origine O.
3. Où doit-on placer une force ponctuelle (entre 0 et L) pour avoir le même moment par rapport à l'origine ?

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 2 : Statique des fluides

Exercice 2.1 : Piscine

Nous allons calculer les forces dues à la pression $\mathbf{dF} = -p\mathbf{n}dS$ sur le fond de deux piscines. On suppose que $p(z) = \rho g z$. La coordonné verticale est z et l'horizontale x. Ici on ne tient pas compte de la coordonnée y dirigée vers l'intérieur de la page et l'on a supposé que la pression atmosphérique est égale à 0.

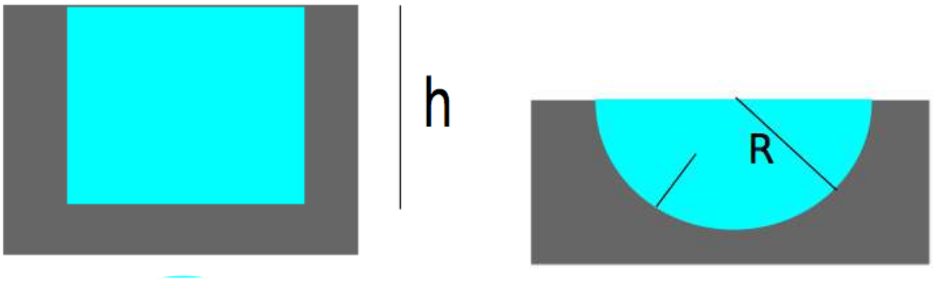

FIGURE 1 – Statique : (gauche) Piscine rectangulaire (droite) Piscine à section circulaire de rayon R

1. Figure 1 (gauche). Calculer la force due à la pression sur le fond d'une piscine de section rectangulaire ($h \times L$).
2. Figure 1 (droite). Calculer la force due à la pression sur le fond d'une piscine de section circulaire de rayon R. Aide : $\int_0^\pi sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.2 : Barrage

La plaque en forme de L inversé (de profondeur constant et égal à b) peut pivoter autour du point O (pris comme l'origine des coordonnées), déterminer la valeur de la force P pour éviter la fuite de liquide. Pour simplifier les calculs vous pouvez écrire que $P_{atm} = 0$ (justifiez).

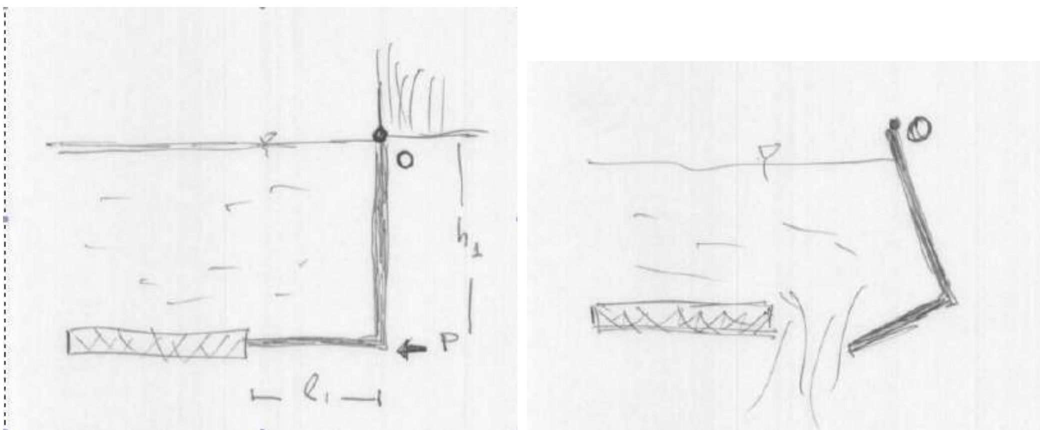

FIGURE 2 – Barrage

Exercice 2.3 : Récipient en rotation

(problème de l'écrit d'octobre 2012)
Un récipient cylindrique de rayon R rempli d'eau jusqu'une hauteur H est soumis à une rotation constante ω autour de l'axe z. Le système a alors deux forces de volume : la force de pesanteur égale à $-\rho g\ e_z$ et la force centripète égale à $\rho\omega^2 r\ e_r$,

1. quelle est l'expression de la forme **locale** de l'équation fondamentale de la statique des fluides ? (rappel $gr\vec{a}dp = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z$)
2. Intégrez les équations du point 1 et montrez : que la pression est une fonction de r et de z soit $p = p(r, z)$ et que les courbes isobares (à pression constante) sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe z.
3. Représentez la surface libre du fluide dans les cas limites w grand et w petit.
4. La pression sur le fond au centre du récipient, augmente-telle avec la rotation ? Justifiez.
5. Sans faire des calculs, comment calculeriez vous la hauteur de la surface libre aux bords du récipient en rotation ($r = R$) ?

Exercice 2.4 : Archimède

question bonus écrit 2013
Quelle proportion du volume total V_T d'un iceberg est visible ? Un glaçon qui fond dans un verre d'eau fait-il augmenter le niveau d'eau ? ($\rho_g = 0.9\rho_e$)

Exercice 2.5 : Crève-tonneau

Pascal en 1646 a fait l'expérience suivante : il a inséré un tube de 10 m de long dans un tonneau rempli d'eau à rasbord. Il montre que quand un verre d'eau est ajouté dans le tube l'augmentation de pression fait exploser le tonneau.

1. Analysez le phénomène
2. si le tube a $0.2cm^2$ de section de combien d'eau avez vous besoin pour remplir le tube ?
3. si le tonneau a 1 m de haut et 0.5 m de diamètre, quelle est la pression sur la face supérieure (le couvercle) avant et après le remplissage du tube ?
4. et si l'on gèle le liquide à l'intérieur du tube.

Crève-tonneau de Pascal.

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 3 : Cinématique

Exercice 3.1 :

On considère le mouvement plan d'un fluide défini dans la représentation eulerienne par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x,y,t) & = & -k_o\ y\ \exp(-\alpha t) \\ v(x,y,t) & = & +k_o\ x \end{array}\right.$$

où k_o et α sont des constantes avec $\alpha > 0$.

1. Quelle est la dimension de k_o et de α ?
2. Déterminer et tracer les lignes de courant à $t = 0$ et quand $t \to +\infty$.
3. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(x,y,t)$.

Exercice 3.2 :

Soit un milieu continu Ω en mouvement plan par rapport au référentiel $R_0(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. La position d'une particule M(x,y,z) de Ω est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(x_o,y_o,z_o,t) & = & -\tan(at)y_o + x_o \\ y(x_o,y_o,z_o,t) & = & \tan(at)x_o + y_o \\ z(x_o,y_o,z_o,t) & = & z_o \end{array}\right.$$

où $M_0(x_o, y_o, z_o)$ est la position de la particule à l'instant $t = 0$.

1. De quelle représentation du mouvement s'agit-il ?
2. Déterminer la vitesse au point M d'une particule.
3. Déterminer et tracer la trajectoire d'un point M au cours du temps.
4. Donner la représentation eulérienne du mouvement.

Exercice 3.3 :

Soit un milieu continu Ω en mouvement plan par rapport au référentiel $R_0(O, \vec{e_x}, \vec{e_z}, \vec{e_z})$. La vitesse eulérienne d'une particule M(x,y,z) de Ω est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x,y,z,t) & = & V_0(1-e^{-\alpha t)}) + \omega y \\ v(x,y,z,t) & = & V_0(1+e^{-\alpha t)}) - \omega x \\ w(x,y,z,t) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Déterminer les lignes de courant pour les instants $t = 0$ et $t = +\infty$
2. Calculer la divergence de $\vec{u}(x,y,z,t)$. Que peut-on conclure sur l'écoulement.
3. Calculer l'accélération du point M, $\vec{\Gamma}(x,y,z,t)$.

Exercice 3.4 :

On considère le mouvement plan d'un fluide défini dans la représentation eulerienne par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x,y,t) & = & 4\omega(x+2y) \\ v(x,y,t) & = & -4\omega(x+y) \end{array}\right.$$

où ω est une constante.

1. Le champ de vitesse est il stationnaire ? incompressible ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant.
3. Calculer le rotationnel du champ de vitesse.
4. Calculer la dérivée particulaire de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)$

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 4 : Cinématique

Exercice 4.1 :

Soit le mouvement plan d'un milieu continu défini par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= \omega y \\ v(x,y,t) &= -\omega x + a\omega^2 t \end{cases}$$

où a et ω sont deux constantes positives.

1. Déterminer les lignes de courant à l'instant t. Indiquer le sens de parcours.
2. Déterminer les trajectoires
3. Examiner le cas $a = 0$. Dessiner les vecteurs vitesses aux points $A = (1, 0)$, $B = (2, 1)$ et $C = (0, 2)$.
4. En prenant comme variables de Lagrange (x_0, y_0), position de la particule à l'instant $t = 0$, exprimer x et y en fonction des variables (x_o, y_o, t).
5. Calculer l'accélération de la particule située en (x, y) à l'instant t en variables d'Euler (x, y, t) et en variables de Lagrange (x_o, y_o, t).
6. On associe à chaque particule une température T telle que $T = T_o(x^2 + a^2\omega t)\frac{1}{a^2}$. Calculer $\frac{DT}{Dt}$.

Exercice 4.2 :

Soit le mouvement plan d'un milieu continu défini par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= \omega x \\ v(x,y,t) &= -\omega y \quad \text{où } \omega \text{ est une constante.} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de courant ψ et tracer quelques lignes de courant.
2. Vérifier que $\vec{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$. Déterminer la fonction potentiel des vitesses φ et tracer quelques équipotentielles.
3. Montrer que les lignes de courant sont perpendiculaires aux lignes équipotentielles.

Exercice 4.3 : Ecoulement instationnaire

Soit le mouvement plan d'un milieu défini par le champ des vitesses suivant :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= \omega x + at \\ v(x,y,t) &= -\omega y \quad \text{où } \omega \text{ est une constante.} \end{cases}$$

avec a et ω constantes

1. Déterminer les lignes de courant et les trajectoires en indiquant les sens de parcours.
2. Que remarque-ton lorsque $a = 0$?
3. Calculez l'accélération de deux manières.

Exercice 4.4 :

On considère le mouvement d'un fluide défini dans la représentation lagrangienne par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (a-h)\mathrm{e}^{-t/\tau} + h(1-t/\tau) \\ y(t) & = & (b+h)\mathrm{e}^{-t/\tau} - h(1+t/\tau) \\ z(t) & = & c \end{array} \right.$$

où h et τ sont des constantes.

1. Que représentent a, b, c ?
2. Déterminer le champ de vitesse (représentation eulérienne).
3. Déterminer le champ d'accélération de deux manières différentes.

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 5 : Écoulement potentiel, potentiel complexe

Exercice 5.1 : Ecoulement potentiel

1. Qu'appelle-t-on écoulement potentiel ?
2. On étudie l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon R. Le champ des vitesses s'écrit en coordonnées polaires :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_r & = & U_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ u_\theta & = & -U_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta \end{array}\right.$$
où U_0 est une constante positive.

   a) L'écoulement est il plan, stationnaire, incompressible, irrotationnel ?
   b) Déterminer le potentiel des vitesses $\varphi(r,\theta)$ et la fonction de courant $\psi(r,\theta)$. Vérifier que les lignes de courant et les équipotentielles sont orthogonales.
   c) Représenter les lignes de courant.

Exercice 5.2 : Exercice 2

On considère un écoulement plan, stationnaire, d'un fluide incompressible de masse volumique ρ. On utilisera soit les coordonnées cartésiennes (x,y), soit les coordonnées polaires (r,θ) avec $x = r\,\cos\theta$ et $y = r\,\sin\theta$. La fonction de courant associée à cet écoulement est, dans un système de coordonnées polaires :
$$\psi = U\left(\frac{h\,\theta}{2\,\pi}\ -\ r\,\sin\theta\right) \tag{1}$$
avec $-\pi < \theta < \pi$ et où U et h sont des constantes positives ayant respectivement les dimensions d'une vitesse et d'une longueur.

1. Déterminer les composantes en coordonnées cartésiennes du champ de vitesse. Montrer que l'on peut l'interpréter comme la superposition de deux champs que l'on précisera et dont on donnera une interprétation physique.
2. Déterminer, si il existe, le potentiel des vitesses associé à cet écoulement.
3. Donner une approximation du champ de vitesse lorsque r est petit devant h. En, déduire la valeur du débit massique traversant un petit cercle centré à l'origine
4. Construire la ligne de courant $\psi = 0$. Montrer qu'elle comporte deux branches qui se rejoignent en un point A dont on déterminera les coordonnées. Quelle est la vitesse du fluide en ce point.
5. Interpréter l'écoulement ainsi obtenu. Quel rôle particulier joue dans l'écoulement cette ligne $\psi = 0$?

Exercice 5.3 : Potentiel complexe

On considère la fonction complexe $f(z) = a\,z^n$ où a et n sont deux réels positifs.

1. Déterminer les fonctions de courant, ψ, et potentiel φ, ainsi que les composantes de la vitesse u et v en fonctions des variables r et θ.
2. Donner les équations des courbes équipotentielles et des lignes de courant. Donner les équations des courbes $\psi = 0$ et $\varphi = 0$.
3. Tracer les lignes de courant dans le cas $n < 1$: on traitera les cas $n = \frac{2}{3}$ et $n = \frac{1}{2}$. Que matérialise l'écoulement dans ce cas ?
4. Dans le cas $n > 1$, on considère le cas particulier $n = 2$. Comment peut-on matérialiser l'écoulement dans ce cas ? Tracer les points d'égale vitesse.

Rappels en coordonnées cylindriques

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{v} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 6 : Dynamique des fluides parfaits

Exercice 6.1 : Ecoulement incompressible / fluide incompressible

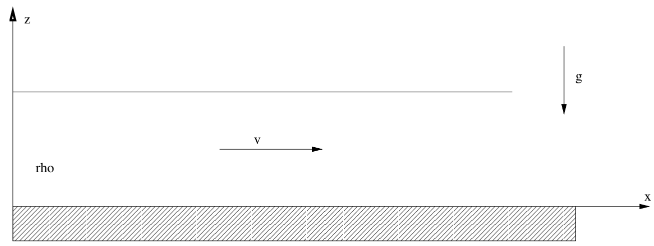

FIGURE 3 – Ecoulement le long d'une plaque

Soit un fluide parfait de masse volumique ρ en écoulement stationnaire le long d'une plaque (voir figure 3).

1. (a) Écrire la loi de conservation de la masse sous forme globale puis locale.
   (b) Montrez que l'écoulement d'un fluide incompressible ($\rho = cste$) est toujours incompressible ($div(\vec{u}) = 0$) dès lors que l'écoulement satisfait au principe de conservation de la masse. Qu'en est-il de la réciproque ?
   (c) A quelle condition un fluide compressible peut-il être en écoulement incompressible ?
2. Dans un repère cartésien $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, écrivez les équations du mouvement du fluide : les **équations d'Euler**.
3. Si l'écoulement est stationnaire et si toutes les lignes de courant sont parallèles à l'axe $(O, \vec{x})$ que deviennent les équations ci dessus ?
4. En déduire que si le fluide s'écoule de façon stationnaire et parallélement à la direction $(O, \vec{x})$, alors dans le plan perpendiculaire à cette direction (plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$), la pression suit la loi de l'hydrostatique.

Exercice 6.2 : Ondes planes

On va étudier les ondes planes à une dimension à partir des équations d'Euler compressibles (voir cours). On va étudier pour cela un champ de vitesses de type $\mathbf{u} = u(x,t)e_x$.

1. donnez les équations de continuité (conservation de la masse) et de conservation de la quantité de mouvement. On propose étudier un gaz parfait dont l'équation d'état est $p = \rho r T$ avec r la constante universelle des gaz et T la température, supposée constante et égale à T_0. La condition $T = T_0$ est-elle nécessaire ? Si la température n'est pas constante il vous manque une équation ?
2. on va linéairiser les équations autour d'une position d'équilibre $u = u_0 + u^{'}(x,t)$ et $\rho = \rho_0 + \rho^{'}(x,t)$ avec $u^{'} << u_0$ et $\rho^{'} << \rho_0$. Sans perte de généralité on peut prendre $u_0 = 0$. Donner les équations résultantes.
3. Eliminez l'une des deux équations pour montrer que l'équation pour $\rho^{'}$ satisfait une équation d'onde.
4. Trouvez la vitesse de l'onde et comparez la à la vitesse du son dans l'air ($p_{atm} = 10^5\ Pa$).
5. On propose une solution de type $\rho^{'} = \bar{\rho} e^{\omega t - kx}$, trouvez la relation de dispersion $\omega = f(k)$.
6. Calculez la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Conclusion ?.

Exercice 6.3 : Pression et Bernoulli

Considérons un fluide parfait en écoulement plan, stationnaire, incompressible et irrotationnel. Compte-tenu de ces propriétés, le potentiel des vitesses φ existe et on peut ainsi définir l'écoulement par :

$$\varphi \;=\; \frac{K}{4}\left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)$$

1. Déterminez le champ des vitesses correspondant. Quelle est la dimension du coefficient K ?
2. Quelle condition sur l'écoulement nous autorise à construire une fonction de courant ? Montrez que l'on peut l'obtenir, à une constante près, sous la forme :
$$\psi \;=\; K\left(x^3y - xy^3\right)$$
3. Construisez, en les orientant, les lignes de courant obtenues pour l'équation $\psi = 0$. Déduisez-en la forme de l'écoulement étudié.
4. On suppose que la pression en O vaut p_o. A l'aide des équations d'Euler, montrez que la pression dans tout l'espace s'écrit :
$$p(x, y) = p_o - \frac{\rho K^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)^3$$
5. Retrouvez une expression analogue à l'aide du théorème de Bernoulli. Quel problème se pose pour des lignes de courant différentes des celles associées à l'équation $\psi = 0$?

Exercice 6.4 : Oscillations d'un liquide dans un tube en U

Dans un tube en U de section constante. Au repos, le liquide est au même niveau dans les deux branches ; ce niveau sera pris comme référence. On provoque des oscillations de sorte que le niveau varie de x sur les deux cotés.

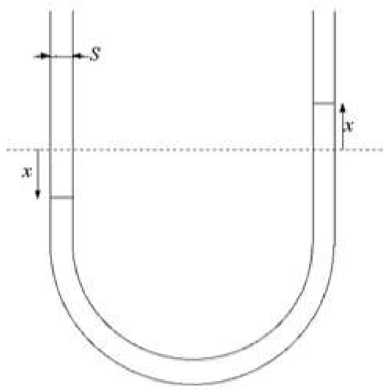

FIGURE 4 – Oscillations d'un tube en U

1. Rappeler les équations de Bernoulli instationnaires. Multipliez l'équation par **dl** parallèle à une ligne de courant.
2. Donner une expression pour la vitesse dans le tube. Est-elle la même partout ?
3. Intégrez l'équation entre deux points A et B sur les surfaces libres et trouvez l'équation de mouvement.
4. Calculer la fréquence propre et la solution de l'équation différentielle.
5. Dans le cas d'un écoulement visqueux, quel terme faudrait-il ajouter ?

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 7 : Dynamique des fluides parfaits - II

Exercice 7.1 : Principe d'un vaporisateur

On considère le dispositif décrit par la figure 5. Dans la conduite 1-2, de l'air, considéré comme un fluide parfait incompressible non pesant de masse volumique ρ_a s'écoule de façon stationnaire. On note 1 le point d'entrée de la conduite de section S_1 et 2 le point de la conduite de section $S_2 < S_1$. On suppose que l'écoulement est uniforme par tranches en tout point de la conduite.

Au point 2, un tube très mince plonge dans un réservoir d'eau (**fluide au repos** parfait, incompressible de masse volumique ρ_e) de volume très grand (son niveau ne varie pas). La présence du tube ne perturbe pas l'écoulement de l'air dans la conduite.

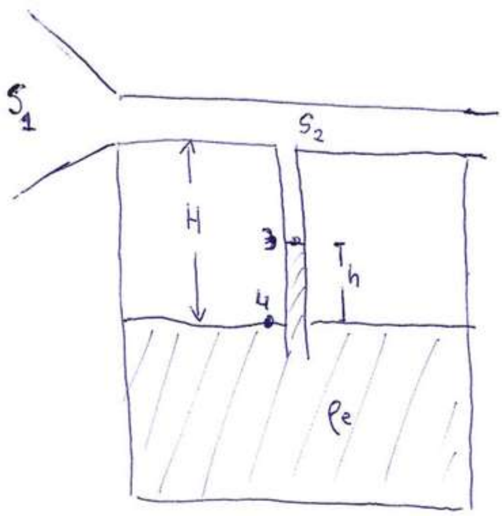

FIGURE 5 – Vaporisateur

On désigne par Q le débit volumique dans la conduite et par P_{atm} la pression atmosphérique.

1. Calculer le débit volumique d'air s'écoulant dans la conduite.
2. Calculer la pression au point 2 en fonction de Q, S_1, S_2. La comparer avec la pression au point 1. Ce résultat était-il prévisible ? Comment l'observe-t-on ?.
3. Que vaut la pression au point 3 ? Au point 4 ? Calculer la côte h atteinte par le niveau de l'eau dans le tube en fonction de Q, S_1, S_2.
4. Calculer la valeur minimale du débit Q pour que le niveau de l'eau atteigne le point 2. Que se passe-t-il si le débit est supérieur ?

Exercice 7.2 : Clepshydre

On veut réaliser une horloge à eau (figure 6) mesurant le temps de variation de niveau au cours de la vidange. Pour cela, considérons un récipient dont la section horizontale, A, varie en fonction de la cote z au dessus d'un orifice percé au fond (voir figure 3). L'écoulement est supposé irrotationnel et incompressible et l'eau est considérée comme un fluide parfait. La pression de l'air est P_{atm}.

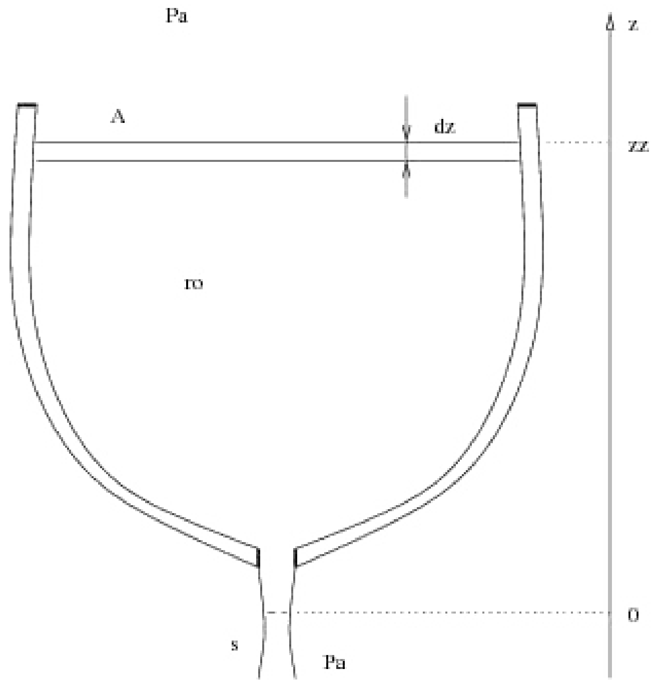

FIGURE 6 – Horloge à eau.

1. Calculer la vitesse V ainsi que le débit volumique q_v de l'eau à travers la veine liquide contractée (en effet, la section de la veine est légérement inférieure à celle de l'orifice) de section s supposée très petite devant la section horizontale A du récipient. On supposera la cote de cette section confondue avec celle de l'orifice.
2. La variation de la section horizontale du réservoir suit une loi du type :

$$\frac{A}{A_o} = \left(\frac{z}{z_o}\right)^{\alpha}$$

   où A_o est la section à une cote de référence arbitraire z_o et α est un réel. Exprimez la loi donnant la variation de la cote de l'eau en fonction du temps , dz/dt.
3. Déduire le temps Δt nécessaire pour passer d'une cote z_1 à une cote z_2 en fonction de α, de l'accélération de la pesanteur g, de A_o, s, z_o, z_1 et z_2.
4. Pour quelle valeur de α la variation de la cote en fonction du temps est-elle linéaire ?
5. Sachant que le récipient présente une symétrie de révolution, et que son rayon R à la cote $z = 50\,cm$ vaut $30\,cm$, calculer pour cette valeur de α, le temps correspondant à une variation de cote de $1\,cm$. On donne : $g = 10\,m.s^1$ et $s = 15\,10^{-6}\,m^2$.

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 8 : Dynamique des fluides parfaits III : Quantité de mouvement

Exercice 8.1 : Plaque inclinée

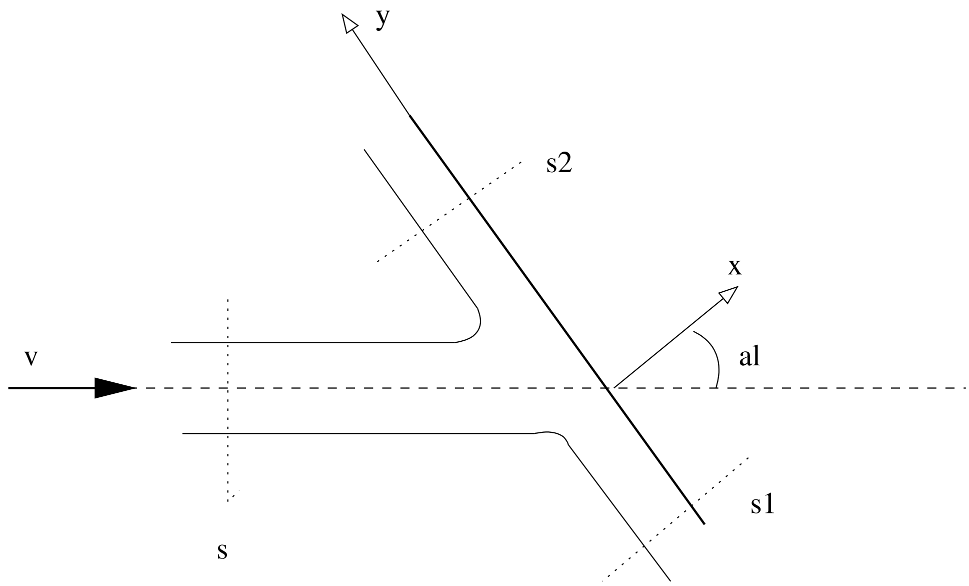

FIGURE 7 – Plaque inclinée

On considère l'écoulement d'un jet d'eau sur une plaque inclinée d'un angle α par rapport à la verticale (voir figure 7). Soit S la section droite du jet incident où la pression peut être considérée comme constante et égale à la pression atmosphérique P_{atm} et où la répartition de la vitesse peut-être considérée comme uniforme et égale à V. On désigne par q_v le débit volumique incident par unité de largeur. Soit S_1 et S_2 les deux sections droites des jets de parois situées après l'impact et où l'on peut faire les mêmes hypothèses. On désigne par q_{v1} et q_{v2} les débits et par V_1 etV_2 les vitesses correspondantes. On néglige les forces de pesanteur.

1. Déterminez l'expression de la résultante $\vec{R}$ des forces subies par la plaque. Expliciter ses composantes R_x et R_y.
2. En négligeant les effets de viscosité, déterminez q_{v1} et q_{v2} en fonction de q_v et α.

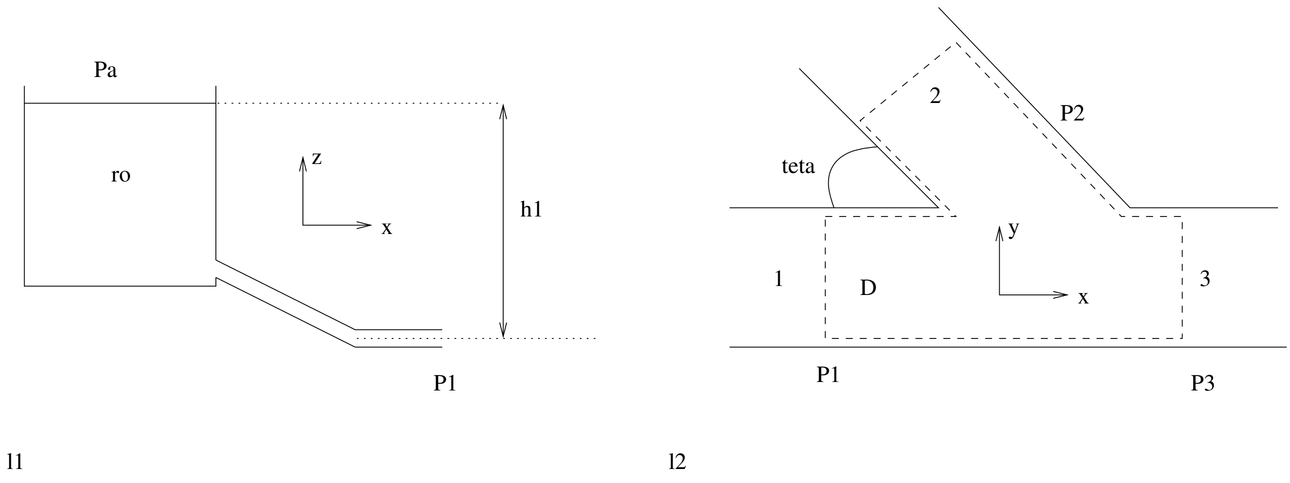

Figure 8 – Etude d'un confluent.

Exercice 8.2 : Étude d'un confluent

On considère un réservoir ouvert à l'air libre de grande dimension auquel est raccordée une conduite circulaire de rayon R_1. Cette conduite se termine par un tronçon horizontal dont l'extrémité se trouve à H_1 au dessous de la surface libre du réservoir (figure 8). On admettra que la vitesse et la pression sont uniformes dans chaque section droite de la conduite (approximation des écoulements par tranches). L'écoulement est supposé stationnaire et l'eau est considérée comme un fluide parfait de masse volumique ρ constante.

1. Calculer la pression P_1 à l'extrémité horizontale de la conduite en fonction de la pression atmosphérique P_{atm} ; du débit volumique Q_v et de H_1.
2. Une deuxième conduite, de rayon R_2 raccordée à un deuxième réservoir (également ouvert à l'air libre) et lui aussi terminé par un tronçon horizontal (dont l'extrémité se trouve à H_2 au dessous de la surface libre du réservoir) vient s'ajouter à la première conduite pour en alimenter une troisième de rayon $R_3 = R_1$. Les débits volumiques dans les conduites 1 et 2 sont imposés et valent Q_{v1} et Q_{v2}. Quelle doit être la valeur de H_2 pour que les pressions P_1 et P_2 soient égales ? Calculer la vitesse V_3 dans la conduite 3 en utilisant l'équation de conservation de la masse.
3. Calculer les composantes horizontales R_x et R_y de la résultante des forces exercées par le fluide sur le confluent en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2, θ, P_1, P_2. On appliquera le théorème des quantités de mouvement au domaine fluide D (représenté en pointillé sur la figure b) qui entoure une zone de mélange visqueuse où le théorème de Bernoulli ne s'applique pas.

2A004 Statique et dynamique des fluides S1

Feuille d'exercices n° 9 : Dynamique des fluides visqueux

Exercice 9.1 : Nombre de Reynolds

1. Qu'est-ce que le nombre de Reynolds ? A quelle condition sur ce nombre peut-on adopter l'hypothèse des fluides parfaits ?
2. Sachant que U_0, L_0 sont la vitesse et la longueur caractéristiques d'un problème, écrivez l'équation de Navier-Stokes dans des variables sans dimension.
3. Faites le rapport entre le terme d'inertie et le terme visqueux.
4. Calculer le nombre de Reynolds dans les cas suivants. Conclusion ?
   - ▷ Avion en vol : $\nu_{air} = 15\ 10^{-6}\ m^2\, s^{-1}$, $U_o = 1000\ km/h$, $L = 3\ m$
   - ▷ Bille dans la glycérine : $\nu_{gly} = 6,8\ 10^{-4}\ m^2\, s^{-1}$, $U_o = 1\ cm/s$, $L = 5\ mm$
   - ▷ Déplacement d'une bactérie dans l'eau : $\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2\, s^{-1}$, $U_o = 1\ \mu m/s$, $L = 3\ \mu m$

Exercice 9.2 : Écoulement entre deux plaques.

On admet que les écoulements de fluides visqueux incompressibles et non pesants sont décrits par les équations suivantes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{grad}(p) + \mu \Delta \vec{u}$$

On considère un écoulement stationnaire, plan, d'un fluide visqueux de viscosité dynamique μ constante, non pesant et incompressible (figure 9). Ce fluide s'écoule entre deux plaques parallèles en mouvement dans leur plan.

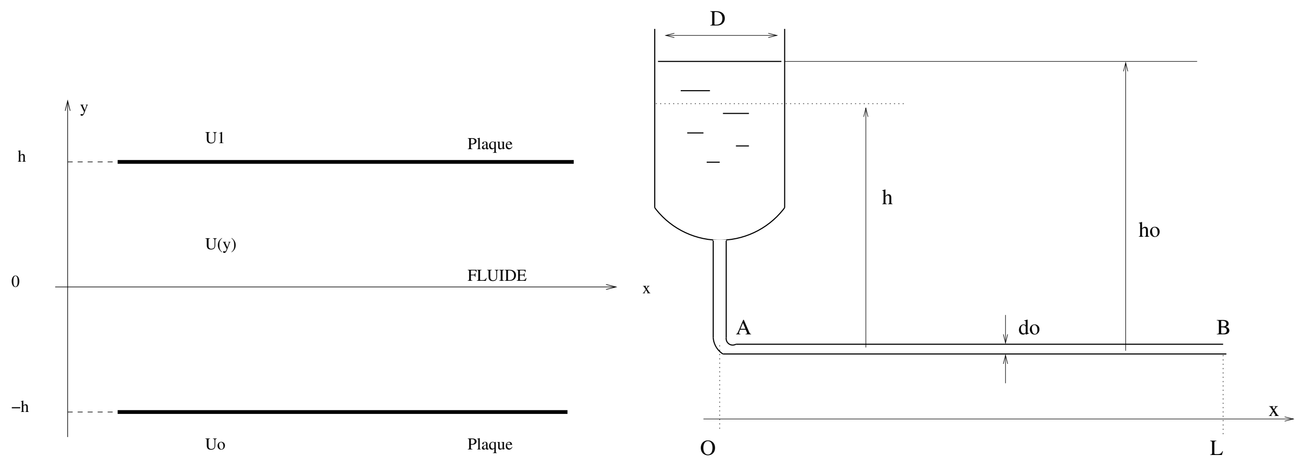

FIGURE 9 – Écoulement entre deux plaques (Ex 9.2). Viscosimètre (Ex. 9.3)

On suppose que l'écoulement se fait avec une vitesse parallèle à $(O; \vec{e}_x)$.

1. A partir des équations de Navier Stokes et en utilisant les hypothèses faites sur l'écoulement, retrouvez les équations données dans le cours pour décrire un tel écoulement.
2. Quelles sont les conditions aux limites pour la vitesse pour ce problème ?

3. Exprimez le champs de vitesse et de pression en fonction d'une seule constante que l'on notera K. Quelle est l'interprétation physique de cette constante.
4. Calculez le débit volumique. Exprimez K en fonction de Q_v.
5. Tracez le profil des vitesses dans les cas suivants :
   — $U_0 = 0$, $U_1 = 0$.
   — $U_0 = 0$, $U_1 = 1$.
   — $U_0 = -1$, $U_1 = 1$.

Exercice 9.3 : Etude d'un viscosimètre

On considère un viscosimètre à écoulement, constitué d'un récipient cylindrique de diamètre $D = 5$ cm relié à un tube horizontal fin de diamètre $d_o = 1$mm et de longueur $L = 50$ cm (voir figure **??**), et contenant un liquide visqueux et incompressible, de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ. Le liquide est surmonté d'air à la pression atmosphérique. En laissant s'écouler le liquide par le tube horizontal, le niveau de celui-ci dans le récipient baisse d'une hauteur $h_o - h$. L'écoulement dans le tube est supposé permanent (les variations du débit et de la pression dans le temps sont très faibles) et les effets dus aux extrémités du tube sont supposés négligeables.

1. On rappelle que dans l'hypothèse d'un écoulement permanent s'effectuant dans une conduite cylindrique et présentant une symétrie de révolution autour de l'axe de celle-ci, l'équation de bilan de quantité de mouvement se réduit, en négligeant les effets de pesanteur, à :
$$\frac{d\,p(x)}{dx} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\,u(r)}{dr}\right)$$
où $u(r)$ désigne la composante de vitesse selon l'axe x de la conduite supposée indépendante de la coordonnée longitudinale x , et r est la coordonnée radiale. Établir l'expression de la vitesse u en fonction de $r, r_o, \mu, \Delta p$ et L où r_o est le rayon de la conduite et $\Delta p = p_A - p_B$ est la différence de pression entre les extrémités du tube.
2. Montrer que le débit volumique dans la conduite dans la direction $\vec{e_x}$ s'écrit sous la forme :
$$q_v = \frac{\pi d_o^4}{128\mu L}\Delta P$$
3. En supposant que l'écoulement dans le récipient soit très lent, et que la pression à l'extrémité du tube horizontal diffère très peu de la pression atmosphérique, calculer la différence de pression Δp en fonction de la hauteur du liquide h.
4. Donnezl'équation différentielle en h régissant la variation de hauteur en fonction du temps t.
5. Intégrer cette équation et montrer que l'expression de h peut se mettre sous la forme :
$$h = h_o e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$$
où $\Delta t = t - t_o$, t_o étant l'instant initial, h_o est la hauteur initiale et τ est :
$$\tau = \frac{32D^2\mu L}{\rho g d^4}$$
6. Quelle est la dimension de τ ? Comment varie h dans les deux cas limites suivants :
   — τ tend vers l'infini.
   — τ tend vers zéro.
7. Calculer la viscosité du liquide sachant qu'il a fallu 46 minutes et 12 secondes pour que le niveau du liquide dans le récipient passe de 6 à 3 cm. On donne :$\ln 2 = 0.693$.
8. Calculer, en utilisant la question 2, la vitesse moyenne liée au débit, $\bar{U}$, en fonction de $\mu, d_o, \Delta p$ et L. En déduire la valeur de cette vitesse pour une hauteur $h = 3$ cm.
9. Vérifier que l'écoulement dans le tube est laminaire.