Exercice 1 - Corrigé

1) Pour montrer que f est un endomorphisme il faut

i). montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2(x)$

ii) $\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

i) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$; alors $P(x) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dP}{dx} = P'(x) = 2aX + b.$$

$$\begin{aligned} f(P(x)) &= (X^2+1)(2aX+b) - 2X(aX^2+bX+c) \\ &= \cancel{2aX^3} + bX^2 + 2aX + b - \cancel{2aX^3} - 2bX^2 - 2cX \\ &= -bX^2 + 2(a-c)x + b \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= (X^2+1)\frac{d}{dx}(\alpha P + Q) - 2X(\alpha P(x) + Q(x)) \\ &= \alpha(X^2+1)\frac{dP}{dx} - \alpha \cdot 2X P(x) + (X^2+1)\frac{dQ}{dx} - 2XQ(x) \\ &= \alpha f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

2) $f(1) = -2X$

$f(X) = -X^2 + 1$.

$f(X^2) = (X^2+1)(2X) - 2X \cdot X^2 = 2X$

3) $$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tq } L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y = 0} \\ -2x + 2z = 0 \Rightarrow \underline{x = z} \\ -y = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} L = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim Ker L = 1 , base = $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\mathrm{Im}\, L = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \text{ tq. } \exists \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ avec } L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = a \\ -2x + 2z = b \\ -y = c \end{cases} \Rightarrow a + c = 0.$$

b = quelconque.

$$\mathrm{Im}\, L = \begin{pmatrix}a\\b\\-a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

dim (Im L) = 2 , Base de Im L = $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right)$

5) dim Ker L = 1 $\Rightarrow$ dim Ker f = 1 $\Rightarrow$ f $\neq$ injective

dim Im L = 2 $\Rightarrow$ dim (Im f) = 2 $\Rightarrow$ Im f $\neq \mathbb{R}_2[X]$

donc f $\neq$ surjective

bonus

6) (a)

Soit $P_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$

$P_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

$$(\alpha P_1 + P_2)(x) = (\alpha a_1 + a_2) x^2 + (\alpha b_1 + b_2) x + \alpha c_1 + c_2$$

$$g(\alpha P_1 + P_2) = (\alpha a_1 + a_2) + \alpha c_1 + c_2 = \alpha(a_1 + c_1) + a_2 + c_2$$

$$= \alpha g(P_1) + g(P_2)$$

donc g = linéaire

(b) $(g \circ f)(P(x)) = g(f(P(x))) = g\left((x^2+1)\frac{dp}{dx} - 2xP(x)\right)$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(P(x)) = -bx^2 + 2(a-c)x + b$

On utilise la définition de g :

$$\left.\begin{matrix} g(f(P)) = -b + b = 0 \\ \text{vrai } \forall P \in \mathbb{R}_2[X] \end{matrix}\right\} \Rightarrow g \circ f = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

(c) $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.
Elle vérifie donc le théorème du rang :

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3. \\ \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R} \text{ et } \dim(\mathrm{Im}\, g) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2 \\ \text{On sait que } \dim(\mathrm{Im} f) = 2 \text{ (question 4)} \\ \text{les 2 ensembles sont des espaces vectoriels} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g}$$

Exercice 2

1) $$A = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

f = rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe x (e_1)

2) $$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = \text{famille libre.}$$

$$\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = B'$ base de E.

3) $$\underset{B \to B'}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $$\underset{B'}{A'} = P^{-1} A P$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{+\frac{1}{2}} & \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}\cancel{+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2} \\ 0 & \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\cancel{+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = A'$$

On trouve $A' = A$

5) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la base B :

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}\overset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{f(v)}$$

$v' = P^{-1} v = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

$f(v') =$ $(A' = A) \cdot v' =$

Obs :
On aurait pu aussi faire.

$$f(v') = P\cdot f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\cancel{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1). Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Alors.

$$\lambda M(a_1) + M(a_2) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda_1+1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda a_1+a_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M(a\lambda_1+a_2)}$$

donc $E \neq$ espace vectoriel

2) $a=4$. , $M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $P_\lambda(M) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^3 + 4(-1)(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] = (1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2)$
$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda)$.
$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 3}$

ii). $\underline{\lambda_1 = -1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4z=0 \\ x+2y=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = z$.
$x = -2z$

$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = 3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Big\} \ y = z$

$E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) La matrice $M(4)$ est diagonalisable car le polynôme caractéristique a 3 racines différentes donc $M(4)$ a 3 valeurs propres distinctes.

$M'(4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M' = P^{-1} M P$

3) $\underline{a = 0}$

i) $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_\lambda(M(0)) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$

$\lambda = 1$ valeur propre <u>triple</u>

ii) Espace propre associé : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$\dim E_1 = 2 \neq 3$ (ordre de multiplicité de λ)

$\Rightarrow M(0) \neq$ diagonalisable.

Autrement, raisonnement par absurd :

Si M est diagonalisable alors $M'(0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (matrice identité)

$M' = P^{-1}MP$.

$\Rightarrow M = PM'P^{-1} = P.I.P^{-1} = I$.

donc $M = I$ absurd !

Donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

iii) $M(0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$

On observe que $M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$

Raisonnement par récurrence :

On ~~sup~~ a déjà vérifié pour $n = 1, 2, 3$.

On suppose que $M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$ et on veut

démontrer que $M^{n+1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\n+1&1&0\\n+1&0&1\end{pmatrix}$.

$M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\n+1&1&0\\n+1&0&1\end{pmatrix}$ 2.e.d

$\Rightarrow M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(v) $M(0)$ est inversible car $\det M = 1$.

$$\left(M(0)\right)^{-n} = \left[M^{-1}(0)\right]^{n} = \left[M^{n}(0)\right]^{-1}.$$

$$M^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[M^{n}(0)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Si a est quelconque, $a \in \mathbb{R}$.

$P(\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - a\right)$.

1) si $a < 0$ alors $(1-\lambda)^2 - a = 0$ a deux racines complexes donc le polynôme $P(\lambda)$ a une seule racine réelle ce qui veut dire que la matrice $M(a)$ a une seule valeur propre réelle. La matrice n'est donc pas diagonalisable (pour cela il faudrait 3 valeurs propres réelles distinctes ou non)

2) Si $a = 0$ on a vu que la matrice $M(0)$ n'est pas diagonalisable même si elle a toutes les valeurs propres réelles.

3) Si $a > 0$ alors $(1-\lambda)^2 - a = 0$ a deux racines réelles car $a = (\sqrt{a})^2 \Rightarrow (1-\lambda-\sqrt{a})(1-\lambda+\sqrt{a}) = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{a} - 1$

$\lambda_3 = \sqrt{a} + 1$

Donc $\boxed{a \in \mathbb{R}_+^*}$ pour que $M(a)$ soit diagonalisable

5) Si $a = 0$, $M \neq$ diagonalisable, si $\boxed{a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$ alors on a 3 valeurs propres complexes distinctes $\Rightarrow M(a) =$ diagonalisable