2A001 - Dynamique du Solide Rigide **Année 2018-2019**

Écrit du Lundi 20 mai
Durée 2h

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (–2 points possibles).
Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.
L'usage du crayon est réservé au brouillon.

Cet énoncé contient 19 questions en tout, pour un total de 30 points et 0 points bonus.
Un formulaire succinct vous est donné page 6.

Questions de cours

1. Donner la définition d'un solide indéformable.

Solution :

2. On suppose que $\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = \vec{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})$ pour $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$. Peut-on affirmer que le solide S est en translation pure dans le référentiel $\mathcal{R}$?

Solution : L'affirmation est fausse si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R})$ sont colinéaires.

3. Soit S un solide de masse m en mouvement de translation pure dans le référentiel $\mathcal{R}$. Exprimer son énergie cinétique par rapport à $\mathcal{R}$, $T\,(\mathrm{S}/\mathcal{R})$.

Solution :
$$T(\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2m}\vec{p}(\mathrm{S}/\mathcal{R})^2 = \frac{1}{2}m\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})^2, \qquad \forall \mathrm{A}.$$

4. On considère un solide constitué de deux points matériels A, B de masse identique m. On se donne un repère $(\mathrm{O}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a\vec{X} + b\vec{Y}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -b\vec{Y}$ où a, b sont des constantes.
   (a) caractériser le centre de masse et le moment d'inertie par rapport à $(\mathrm{O}, \vec{X})$ du solide.

Solution :
$$2m\overrightarrow{\mathrm{OC}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{a}{2}\vec{X}$$
$$I = m\|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{X}\|^2 + m\|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \wedge \vec{X}\|^2 = 2mb^2$$

   (b) le solide est-il équilibré statiquement autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{X})$?

Solution : Oui car $C \in (O, \vec{X})$.

(c) si c'est le cas, a-t-on équilibrage dynamique autour du même axe ?

Solution : Non car il y a absence de symétrie matérielle (sauf si $a = 0$) et donc $(O, \vec{X})$ n'est pas principal d'inertie.

5. Énoncer le théorème des axes parallèles.

Solution : $I' = I + md^2$

Problème

Le but de ce problème est de dimensionner un moteur actionnant une bétonnière embarquée sur un camion. Le camion (1) se déplace sur une route horizontale plane (0) liée à un référentiel $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ supposé galiléen avec $\vec{z_0}$ vertical descendant.

La cuve de mélange (ou bétonnière) (2) a une masse m et son centre de masse est noté C_2. Elle est fixée au camion en A par une liaison rotule et est maintenue par un système de roulements à billes (lui-même fixé sur le camion). L'axe (AC_2) est incliné d'un angle constant α par rapport à la verticale (cf. FIGURE 1) et constitue un axe de symétrie matérielle de révolution pour (2).

À un instant t donné, la vitesse $\vec{V}(C_2 \in 1/0)$ est donnée par $v(t)\vec{y_1}$ où $\vec{y_1}$ est un vecteur unitaire horizontal. On introduit l'angle orienté $\theta = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$ mesuré autour de $(O, \vec{z_0})$.

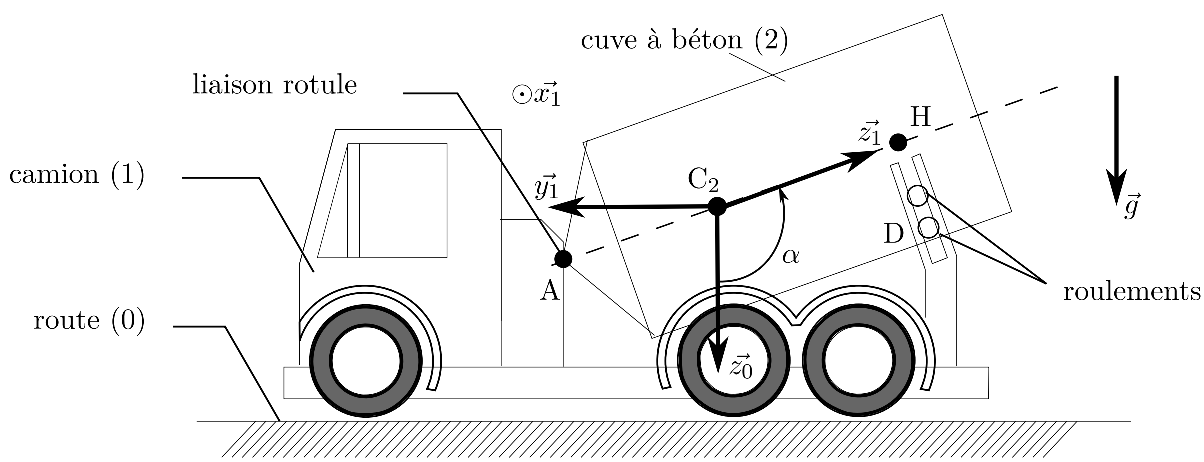


FIGURE 1 – Vue de côté du camion à bétonnière.

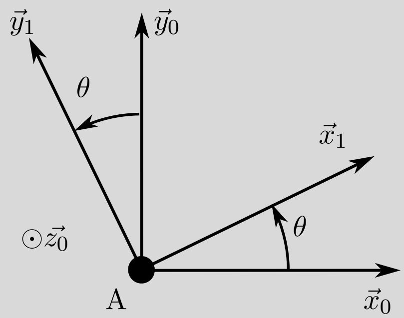
On introduit le point matériel $D \in (2)$ situé sur la circonférence de la cuve ainsi que H, son projeté orthogonal sur l'axe (AC_2) (FIGURE 1). On pose $\overrightarrow{AC_2} = \ell\vec{z_1}$, $\overrightarrow{C_2H} = L\vec{z_1}$, $\overrightarrow{HD} = d\vec{x_2}$, $\vec{x_1} = \vec{y_1} \wedge \vec{z_0}$, $\vec{y_1}' = \vec{z_1} \wedge \vec{x_1}$ et $\vec{y_2} = \vec{z_1} \wedge \vec{x_2}$. L'angle $\varphi = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$, mesuré autour de $(A, \vec{z_1})$, paramétrise la rotation de la cuve autour de (AC_2).

1 Cinématique

1. Dessiner le diagramme de changement de base $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \leftrightarrow (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_0})$.

Solution :

$(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \leftrightarrow (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_0})$



2. Estimer numériquement la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dans le cas où le camion tourne sur un cercle de rayon 10 m à une vitesse de 20 km/h. Préciser l'unité.

Solution :

$$V = 20 \text{ km.h}^{-1} = \frac{2{\cdot}10^4}{3600} \text{ m.s}^{-1} = \frac{30 \times 6 + 20}{6 \times 6} \text{ m.s}^{-1} \simeq 5.5 \text{ m.s}^{-1}.$$

Pour la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{V}{R} \simeq \frac{5.5}{10} = 0.55 \text{ rad.s}^{-1}$ ce qui signifie que le camion fait un tour complet en $2\pi/\dot{\theta} \simeq 11.4$ s.

3. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$ puis $\vec{\Omega}(2/0)$.

Solution :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\vec{z_0}$$
$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\phi}\vec{z_1}$$
$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\phi}\vec{z_1} + \dot{\theta}\vec{z_0}$$

On peut passer (pas demandé) dans la base $(\vec{x_1}, \vec{y_1}', \vec{z_1})$:

$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\phi}\vec{z_1} + \dot{\theta}(\cos\alpha\vec{z_1} + \sin\alpha\vec{y_1}') = (\dot{\phi} + \dot{\theta}\cos\alpha)\vec{z_1} + \dot{\theta}\sin\alpha\vec{y_1}'.$$

4. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution :
Par définition de l'accélération :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}(\mathrm{C}_2 \in 1/0)\bigg|_0 = \dot{v}(t)\vec{y_1} + v(t)\frac{\mathrm{d}\vec{y_1}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 = \dot{v}(t)\vec{y_1} - v(t)\dot{\theta}\vec{x_1}.$$

2 Cinétique

On note la matrice d'inertie de (2) en C_2 dans la base $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_1})$ de la manière suivante :

$$[J_2(\mathrm{C}_2)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Justifier l'identité $A = B$ par des arguments de symétrie.
2. Justifier que, bien que le repère $(\mathrm{C}_2, \vec{x_1}, \vec{y_1}', \vec{z_1})$ ne soit pas lié à la cuve, la matrice d'inertie $[J_2(\mathrm{C}_2)]$ exprimée dans la base $(\vec{x_1}, \vec{y_1}', \vec{z_1})$ s'écrive encore sous la forme (1).
3. Calculer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) &= \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\theta \sin\alpha \\ \dot\varphi + \dot\theta\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= A\dot\theta \sin\alpha \vec{y_1}' + C(\dot\varphi + \dot\theta\cos\alpha)\vec{z_1} \end{aligned}$$

3 Dynamique

L'effort $1 \to 2$ en A est modélisé par une liaison rotule parfaite :

$$\{\mathcal{A}_{\text{rotule}\to 2}\}_{\mathrm{A}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} = X_{\mathrm{A}}\vec{x_1} + Y_{\mathrm{A}}\vec{y_1}' + Z_{\mathrm{A}}\vec{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Le maintien par les roulements est modélisé par le torseur :

$$\{\mathcal{A}_{\text{roulements}\to 2}\}_{\mathrm{D}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R'} = Y_{\mathrm{D}}\vec{y_1}' \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Un moteur, monté entre le camion et la bétonnière, assure la mise en rotation de cette dernière. Il fournit un couple $\{\mathcal{A}_{\text{moteur}\to 2}\}_{\mathrm{A}} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \kappa(t)\vec{z_1} \end{Bmatrix}$

Dans cette partie, on supposera que $v(t) = \mathrm{Cte} = v_0$, $\dot\theta = \mathrm{Cte}$ et $\dot\varphi = \mathrm{Cte} = \omega$.

1. Exprimer la quantité d'accélération $m\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution :
Comme $\dot v(t) = 0$, on a d'après la dernière question de cinématique :

$$m\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = -m v_0 \dot\theta \vec{x_1}.$$

2. Exprimer l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ dans la base $(\vec{x_1}, \vec{y_1}', \vec{z_1})$.

Solution :

$$\vec{g} = g\vec{z_0} = g(\cos\alpha\vec{z_1} + \sin\alpha\vec{y_1}').$$

3. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la cuve. Exprimer, lorsque c'est possible, les composantes de l'action de la liaison rotule sur la cuve.

Solution :

Le référentiel $\mathcal{R}_0$ étant considéré comme galiléen, le théorème de la résultante dynamique appliqué à la cuve fournit :

$$-mv_0\dot{\theta}\vec{x_1} = m\vec{g} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R'}$$

que l'on projète suivant $\vec{z_1}$ (ce qui permet d'exploiter $\overrightarrow{R'} \cdot \vec{z_1} = \vec{0}$) :

$$0 = -mg(\vec{z_0} \cdot \vec{z_1}) + (\overrightarrow{R} \cdot \vec{z_1})$$

ou encore

$$Z_{\mathrm{A}} = \overrightarrow{R} \cdot \vec{z_1} = mg\cos\alpha$$

La projection suivant $\vec{x_1}$ fournit :

$$X_{\mathrm{A}} = -mv_0\dot{\theta}.$$

4. Exprimer le moment dynamique $\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution :

$$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)\bigg|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(A\dot{\theta}\sin\alpha\vec{y_1}' + C(\omega + \dot{\theta}\cos\alpha)\vec{z_1}\Big)\bigg|_0$$

On a $\dot{\theta} = \mathrm{Cte}$ et $\omega = \mathrm{Cte}$, donc seuls les vecteurs $\vec{y_1}'$ et $\vec{z_1}$ sont fonction du temps.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{y_1}'}{\mathrm{d}t}\right|_0 = (\dot{\theta}\vec{z_0}) \wedge \vec{y_1}' = \dot{\theta}\vec{z_0} \wedge (\cos\alpha\vec{y_1} + \sin\alpha\vec{z_0}) = -\dot{\theta}\cos\alpha\vec{x_1}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{z_1}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = (\dot{\theta}\vec{z_0}) \wedge \vec{z_1} = \dot{\theta}\sin\alpha\vec{x_1}$$

Ainsi

$$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \big((C-A)\dot{\theta}^2\cos\alpha + C\omega\dot{\theta}\big)\sin\alpha\,\vec{x_1}.$$

5. Appliquer le théorème du moment dynamique au système (2).

Solution :

Le référentiel $\mathcal{R}_0$ étant galiléen, le théorème du moment dynamique appliqué à la cuve fournit la relation vectorielle :

$$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{poids}\to 2}}(\mathrm{C}_2)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{rotule}}}(\mathrm{C}_2)}_{=\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}_2}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{moteur}}}(\mathrm{C}_2)}_{=\kappa\vec{z_1}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{roulement}}}(\mathrm{C}_2)}_{=\overrightarrow{R'}\wedge\overrightarrow{\mathrm{DC}_2}}$$

6. En déduire une expression du couple κ que doit fournir le moteur.

Solution :
On projète $\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$ suivant $\vec{z_1}$:

$$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) \cdot \vec{z_1} = 0 = (\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}_2}) \cdot \vec{z_1} + \kappa(t) + (\overrightarrow{R'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{DC}_2}) \cdot \vec{z_1}$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= (\overrightarrow{\mathrm{AC}_2} \wedge \overrightarrow{R}) \cdot \vec{z_1} + (\overrightarrow{\mathrm{DC}_2} \wedge \overrightarrow{R'}) \cdot \vec{z_1} \\ &= (\vec{z_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}_2}) \cdot \overrightarrow{R} + (\vec{z_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{DC}_2}) \cdot \overrightarrow{R'} \\ &= \ell(\vec{z_1} \wedge \vec{z_1}) \cdot \overrightarrow{R} - \big(\vec{z_1} \wedge (L\vec{z_1} + d\vec{x_2})\big) \cdot \overrightarrow{R'} = -d\overrightarrow{R'} \cdot \vec{y_2}.\end{aligned}$$

7. **Bonus :** Peut-on, comme ci-dessus, parvenir à la détermination du couple κ si l'on remplace la liaison rotule par une liaison pivot parfaite d'axe $(\mathrm{A}, \vec{z_1})$?

4 Formulaire

Relation de torseur pour le champ de vitesse d'un solide S par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Moment cinétique d'un solide S de masse m par rapport à $\mathcal{R}$ au point A :

$$\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})[\vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R})]$$

où C est le centre de masse et $\mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})$ est l'opérateur d'inertie en A de S.
Moment dynamique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})\bigg|_{\mathcal{R}} + m\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}).$$