Chapitre 2 : Résultats d'analyse fonctionnelle, Th. de Stampacchia et Lax-Milgram, Espaces de Sobolev

1. Résultats d'existence et d'unicité

1.1. Théorème de Stampacchia :

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|_H$. Soit K un convexe fermé de H.

Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme
$(u, v) \mapsto a(u, v)$

- bilinéaire : $\forall (u, v, w) \in H, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$.

$$a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)$$
$$a(u, \lambda w + \mu v) = \lambda a(u, w) + \mu a(u, v)$$

- symétrique : $a(u, v) = a(v, u)$
- continue : $\exists M > 0$ t.q. $\forall u, v \in H$:

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

- coercive ou H-elliptique : $\exists \alpha > 0$ t.q. $\forall u \in H$:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 .$$

Soit $L : H \to \mathbb{R}$ une forme
$v \mapsto L(v)$

- linéaire
- continue : $\exists M > 0$ t.q. $\forall v \in H \quad |L(v)| \leq M \|v\|_H$.

Il existe alors un unique $u \in K$ solution de

$$\begin{cases} I(u) \leq I(v), \ \forall v \in K. \\ \text{avec } I(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \end{cases}$$

▸ Proposition :

Sous les hypothèses du théorème de Stampacchia :

- H = espace de Hilbert
- a = forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur H.
- L = forme linéaire continue.

si on considère K un sous-espace vectoriel fermé de H

Alors, il $\exists!\, u \in K$ tel que $I(u) \leq I(v)$, $\forall v \in K$.

$\Leftrightarrow$ $\exists!\, u \in K$ tel que $a(u,v) = L(v)$, $\forall v \in K$.

($\Leftrightarrow$ $\exists!\, u \in K$ tel que $a(u, v-u) = L(v-u)$, $\forall v \in K$)

1.2. Théorème de Lax-Milgram

▸ Proposition : Théorème de Banach-Picard de point fixe

Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Banach, $T : H \to H$ une application contractante

$\exists\, k \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq k < 1$, tel que $\forall v \in H$, $\forall w \in H$:

$$\|T(v) - T(w)\|_H \leq k \|v - w\|_H .$$

Alors $\exists!\, u \in H$ tel que $T(u) = u$

Preuve : K = s.e.v fermé, est en particulier un convexe fermé donc le théorème de Stampacchia s'applique et on obtient $\exists!\, u \in K$ t.q $I(u) \leq I(v)$, $\forall v \in K$.

Montrons que les deux formulations sont équivalentes.

$\boxed{\Rightarrow}$ K = s.e.v. fermé et u solution de $\begin{cases} u \in K \\ I(u) \leq I(v), \forall v \in K \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$\exists!\, u = \underbrace{P_K(v_L)}_{\in K}$ qui vérifie $\langle v_L - P_K(v_L), y \rangle_1 = 0$, $\forall y \in K$.

$$\Updownarrow$$

$a(v_L - u, y) = 0$, $\forall y \in K$

Or $a(v_L, y) = L(y)$, $\forall y \in H$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow L(y) = a(u, y)$, $\forall y \in K$.

$\boxed{\Leftarrow}$. Soit $u \in K$ qui vérifie $a(u, v) = L(v)$, $\forall v \in K$.

$\underline{a(u, v-u)} = a(u,v) - a(u,u) = L(v) - L(u) = \underline{L(v-u)}$ $\forall v \in K$.

donc u vérifie : $a(u, v-u) \geq L(v-u)$, $\forall v \in K$ et d'après l'équivalence de la proposition précédente, u est solution de

$\begin{cases} u \in K. \\ I(u) \leq I(v), \forall v \in K \end{cases}$, avec $I(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$

1.2. Théorème de Lax-Milgram

Proposition : Théorème de Banach-Picard de point fixe

Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Banach, $T : H \to H$ une application contractante $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq k < 1$, tel que $\forall v \in H$, $\forall w \in H$:

$$\|T(v) - T(w)\|_H \leq k \|v - w\|_H .$$

Alors $\exists!\, u \in H$ tel que $T(u) = u$

▷ Proposition : généralisation du théorème de Représentation de Riesz

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ = espace de Hilbert, $\|\cdot\|_H$ = norme associée

$a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue
$(u,v) \mapsto a(u,v)$

Il existe alors un unique opérateur $A : H \to H$; $A(u) \overset{\text{not}}{=} Au$

tel que $\forall v \in H \quad , \quad a(u,v) = \langle Au, v \rangle$

A ainsi défini est un opérateur continu.

Preuve : sans

▶ Théorème de Lax-Milgram

Soit
- $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $\|\cdot\|$ la norme associée.
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive
- $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, continue

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H$$

Remarques : 1). C'est une extension du résultat précédent aux applications non symétriques

2) La dém. ne peut plus utiliser l'équivalence des normes ($\neq$ Stampacchia)

Preuve : D'après la généralisation du théorème de représentation de Riesz on a $\forall u \in H$:

- $\exists ! \; A : H \to H$ opérateur linéaire continu tel que $\forall v \in H \quad a(u,v) = \langle Au, v \rangle$
- $\exists ! \; v_L \in H$ tel que $\forall v \in H \; : \; L(v) = \langle v_L, v \rangle$

Prouver l'existence de $u \in H$, $a(u,v) = L(v)$, $\forall v \in H$.
revient à prouver qu'il existe $u \in H$ t.q $\langle Au, v \rangle = \langle v_L, v \rangle, \forall v$
soit $Au = v_L$

→ Soit $T : H \to H$ l'application définie par :

$$v \longmapsto T(v) = v - \lambda\left(A(v) - v_L\right), \quad \lambda > 0$$

Resoudre $\begin{cases} u \in H \\ A(u) = v_L \end{cases}$ revient à trouver $\begin{cases} u \in H \\ T(u) = u \end{cases}$

On va utiliser le th. de Banach - Picard. Montrons que T est contractante : $\forall v, w \in H$

$$\|T(v) - T(w)\| = \|v - w - \lambda\left(A(v) - A(w)\right)\| = \|v - w - \lambda A(v-w)\|$$

A-linéaire

$$\Rightarrow \|T(v) - T(w)\|^2 = \|v-w\|^2 + \lambda^2 \|A(v-w)\|^2 - 2\lambda \langle v-w, A(v-w)\rangle$$
$$= \|v-w\|^2 + \lambda^2 \|A(v-w)\|^2 - 2\lambda a(v-w, v-w)$$

A = continue sur H $\Rightarrow \exists M > 0$: $\|A(v-w)\| \leq M \|v-w\|$

a = coercive $\Rightarrow \exists \alpha > 0$: $A(v-w, v-w) \geq \alpha \|v-w\|^2$

$$\Rightarrow \|T(v) - T(w)\|^2 \leq \|v-w\|^2 \left[1 + \lambda^2 M^2 - 2\lambda\alpha\right]$$

on pose $\lambda = \frac{\alpha}{M^2} > 0$

$$\Downarrow$$

$$\|T(v) - T(w)\|^2 \leq \|v-w\|^2 \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha^2}{M^2}\right)}_{\text{le} < 1} \quad (\alpha \leq M).$$

$\Rightarrow T$ = contractante $\xRightarrow[\text{Banach - Picard}]{\text{Th}}$

$\exists!\, u \in H$ tel que $T(u) = u$. et donc.

$\exists!\, u \in H$ tel que $A(u) = v_L \Leftrightarrow \begin{cases} \exists!\, u \in H \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \forall v \in H \end{cases}$