Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

Examen du 9 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique (e_1, e_2, e_3), avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

On définit les vecteurs $u = e_1 + e_2 + 2e_3$, $v = 3e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que les vecteurs u, v et e_3 forment une base de E. Donner la matrice de passage, notée P, de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u, v, e_3) .
2. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(e_3)$.
3. Déterminer la matrice T de f dans la base (u, v, e_3). Quelle est la relation entre T et A ?
4. Soit $N = T - I$.
   (a) Calculer N^2, N^3. Montrer que $N^n = (T - I)^n = 0$, $\forall n \geq 3$.
   (b) En déduire que $(A - I)^n = 0$, $\forall n \geq 3$.
5. **Bonus :** Exprimer A^n à l'aide de n, I, A et A^2.

Corrigé

1. La matrice de (u, v, e_3) dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire, de termes diagonaux non nuls. Elle est donc de rang 3 ce qui prouve que (u, v, e_3) est une base. Cette matrice P est égalmement la matrice de passage demandée.

2. On obtient par calcul $f(u) = e_1 + e_2 + 2e_3 = u$. u est invariant par f.
$f(v) = e_1 + 4e_2 + 4e_3$.
$f(e_3) = 2e_1 + 11e_2 + 11e_3$
La matrice de f dans la base (u, v, e_3) est $T = P^{-1}AP$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On observe que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0$$

donc $N^r = 0$ pour $r \geq 3$.
N étant la matrice dans la base (u, v, e_3) de $f - Id$, il en résulte que $g = f - Id$ est nilpotent et donc $A - I_3$= la matrice dans la base canonique de $(f - Id)$ est nilpotente.

$$(A - I_3)^k = 0, \quad k \geq 3$$

4. On pose $B = A - I_3$, avec B, I_3 permutables. La formule du binôme s'applique et donne :

$$A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

$$A^n = I_3 + n(A - I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(A^2 - 2A + I_3)$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $x(t)$ réelle, $t \in]0, \infty[$:

$$x'' - 2x' + x = (1+t)e^t \tag{1}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (1).
2. Trouver une solution particulière de l'équation non homogène (1).
3. Trouver la solution pour (1) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$.

Corrigé

1. L'équation différentielle homogène associée est :

   $$x'' - 2x' + x = 0$$

   La solution générale est $x_h(x) = (c_1 + tc_2)e^t$.

2. On cherche $x_p(x) = P(t)e^t$ avec $P(t)$ un polynôme en t (par la méthode des coefficients indéterminés). On trouve :

   $$x_p'(t) = (P'(t) + P(t))e^t, \quad x_p''(t) = (P''(t) + 2P'(t) + P(t))e^t$$

   d'ou

   $$[(P''(t) + 2P'(t) + P(t)) - 2(P'(t) + P(t)) + P(t)]e^t = (1+t)e^t$$

   donc

   $$(P''(t) + 2P'(t) + P(t)) - 2(P'(t) + P(t)) + P(t) = 1 + t \Longleftarrow P''(t) = t + 1$$

   En inégrant deux fois on obtient : $P(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + at + b$ donc $x_p = (\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + at + b)e^t$.

3. La solution générale de l'équation non-homogène (1) est :

   $$x(t) = (c_1 + tc_2)e^t + (\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2})e^t$$

   En imposant $x(0) = x'(0) = 0$ on trouve $c_1 = c_2 = 0$ et donc

   $$x(t) = (\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2})e^t$$

Exercice 3

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire de second degré non-homogène, à coefficients constants :

$$y'' + y = t^2 \cos t \tag{2}$$

1. Ecrire la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'' + y = 0. \tag{3}$$

2. En introduisant une nouvelle variable $z(t) = y'(t)$ montrer que l'équation (3) est équivalente à un système de deux équations différentielles de premier ordre.
   (a) On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Montrer que le système différentiel peut s'écrire sous la forme $Y'(t) = AY(t)$, avec A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
   (b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A sur $\mathbb{C}$. En déduire la solution réelle générale du système différentiel, comme combinaison linéaire des partiels réelle et imaginaires de la solution complexe générale. Montrer que l'on retrouve la solution $y(t)$ de l'équation (3).
3. Trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (2), en utilisant la méthode de variation des constantes. Pour cela, rappeler le principe de la méthode et préciser le système d'équations vérifié par les fonctions inconnues.
4. Donner la solution générale de l'équation non-homogène (2).

Corrigé

1. L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, dont les racines sont complexes, $r_1 = i$, $r_2 = -i$. La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène est :

$$y_h(t) = A \cos t + B \sin t, \quad , A, B = ctes$$

2. Le système dans les variables y, z est :

$$\begin{cases} y' & = & z \\ z' & = & -y \end{cases}$$

(a) Avec les notations de l'énoncé, le système s'écrit :

$$Y'(t) = AY(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b) Les valeurs propres de A sont solutions de $det(A - \lambda I) = 0$,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = i$ est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
Le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = -i$ est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.
La solution générale complexe est

$$Y_c(t) = C_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

ou alors

$$Y_c(t) = C_1 \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) + C_2 \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right)$$

La solution réelle est combinaison linéaire des partie rélle et partie imaginaire

$$Y_r(t) = A \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Leftarrow y(t) = A\cos t + B \sin t$$

3. On cherche maintenant une solution aprticulière avec la méthode de variation des constantes :

$$y_p(t) = A(t)\cos t + B(t) \sin t$$

avec $A'(t)$, $B'(t)$ solutions du système de Cramer :

$$\begin{cases} A'(t)\cos t + B'(t)\sin t = 0 \\ A'(t)(-\sin t) + B'(t)\cos t = t^2 \cos t \end{cases}$$

$$A'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ t^2 \cos t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = -t^2 \sin t \cos t; \quad B'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & t^2 \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = t^2(\cos t)^2$$

$$A(t) = \int -t^2 \sin t \cos t dt = \frac{(\cos(2t)t^2)}{4} - \frac{(\sin(2t))t}{4} - \frac{\cos(2t)}{8}$$
$$B(t) = \int t^2 (\cos t)^2 dt = \frac{(\sin(2t)t^2)}{4} + \frac{(\cos(2t))t}{4} - \frac{\sin(2t)}{8} + \frac{t^3}{6}$$

4. La solution générale de l'équation non-homogène est donc

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ...$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante, où $y = y(x)$ est la fonction inconnue :

$$4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{5}$$

1. Précisez le type d'équation différentielle (linéaire, non linéaire) et son ordre.
2. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ? Sans résoudre l'équation, donner la forme de la solution générale en fonction d'une base de l'espace de solutions.
3. On cherche maintenant une solution de l'équation (5), développable en série entière, du type $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   a) Etablir une relation de récurrence entre les coefficients a_n et a_{n-1}.
   b) En prenant $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$, constante arbitraire, donner l'expression du coefficient général a_n en fonction de λ et n.
   c) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Justifier votre réponse.
   d) En utilisant le développement de la fonction $\cosh x$,
   $$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   déduire une expression explicite de $y_1(x)$. Vérifiez que $y_1(x)$ est une fonction de classe C^∞ sur le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
4. **Bonus :** Trouver une deuxième solution de l'équation (5) de la forme $y_2(x) = y_1(x)u(x)$ de sorte que $y_1(x), y_2(x)$ soient linéairement indépendante. y_2 ainsi obtenue est-elle de classe C^∞ sur le domaine de convergence du développement de y_1 ?

5. **Bonus :** Trouver la solution générale de l'équation (5). Est-elle développable en série entière ? Justifier votre réponse.

Corrigé

1. C'est une équation linéaire d'ordre 2.
2. L'espace des solutions est de dimension 2. Soit (y_1, y_2) une base de solutions. Alors la solution générale est de la forme :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. **a)** Soit $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Alors,

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On remplace dans l'équation (5) :

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

On change d'indice dans la première somme et on regroupe les trois sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [4n(n+1) a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n + 2a_1 - a_0 = 0$$

D'où :

$$a_1 = \frac{a_0}{2}, \quad 2(n+1)(2n+1) a_{n+1} = a_n, \forall n \geq 1$$

La relation de récurrence est :

$$a_n = \frac{1}{2n(2n-1)} a_{n-1}$$

b) On trouve :

$$a_n = \frac{1}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 21} a_0 = \frac{1}{(2n)!} \lambda$$

On obtient :

$$y_1 = \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}\right)$$

c) Le rayon de convergence peut être calculé avec le critère de d'Alemebert :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=0\Longrightarrow R=\infty$$

La série est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.

d) On utilise l'indication. Si on pose $x=t^2$, pour $x\geq 0$ on trouve

$$y_1(x)=\lambda\cosh\sqrt{x}$$

Pour $x\leq 0$, on pose $x=-t^2$, avec $t=\sqrt{-x}$ et donc

$$y_1(x)=\lambda(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!})=\lambda\cos t=\lambda\cos\sqrt{-x}$$

Pour chaque branche y_1 est une fonction de classe C^∞. Le problème se pose en 0. On vérifie facilement que y_1 est continue en 0 , dérivable en 0 avec la dérivée continue etc pour toutes les dérivées.

4. **Bonus :** Soit $y_2(x)=y_1(x)u(x)$. Alors,

$$y_2'=y_1'u+y_1u'$$

$$y_2''=y_1''u+2y_1'u'+y_1u''$$

En remplaçant dans l'équation on trouve que u vérifie :

$$2xy_1u''+(4xy_1'+y_1)u'=0$$

On pose $u'=v$ et on trouve v par séparation de variables

$$\frac{v'}{v}=-\frac{2y_1'}{y_1}-\frac{1}{2x}\Longrightarrow v(x)=C\frac{1}{y_1^2\sqrt{x}}$$

On intgre de nouveau et on remplace les constates par 1. Pour $x\geq 0$

$$u(x)=\frac{\sinh\sqrt{x}}{\cosh\sqrt{x}}\Longrightarrow y_2(x)=\sinh\sqrt{x}$$

Pour $x\leq 0$,

$$y_2(x)=\sin\sqrt{-x}$$

La fonction y_2 n'est pas dérivable en 0 donc elle n'est pas de classe C^∞ sur le domaine de convergence de la fonction.

5. **Bonus :** La solution générale est donc

$$y(x)=\lambda y_1(x)+\mu y_2(x),$$

Elle n'est pas développable en série entière car elle est la somme de deux fonctions, une développable en série entière et la deuxième non.