Examen de 4AM01 Mécanique des Milieux Continus
Partie Mécanique des Fluides

Mercredi 8 janvier 2020 – Durée : **3h**
sans document ni appareil électronique

1 Oscillations d'une sphère liquide

Vous allez étudier les oscillations de forme d'une sphère fluide de masse volumique ρ et de diamètre D supposée isolée dans un espace infini. Sous l'effet d'une perturbation initiale, la sphère commence se déformer de manière oscillante. Ces oscillations résultent des effets combinés de son inertie et d'une force de rappel. Vous allez déterminer la dépendance de la période T des oscillations en fonction des paramètres du problème dans deux situations limites.

1.1 Cas où D est "petit"

Si le diamètre de la sphère fluide est suffisamment petit, on peut négliger les forces d'attraction gravitationnelle exercées par le fluide sur lui-même. Dans ce cas, c'est la tension de surface σ du fluide qui est à l'origine de la force de rappel des déformations oscillantes de la sphère. La tension de surface a la dimension d'une énergie par unité de surface.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminez la loi d'échelle reliant T aux paramètres pertinents.

> **Solution:**
> $T = f(D, \rho, \sigma)$: $n = 4$, $k = 3$ donc la loi peut s'écrire en fonction d'une seule grandeur sans dimensions Π : $F(\Pi) = 0$, soit $\Pi =$ constante (un zéro de F).
> D, ρ et σ étant dimensionnellement indépendants, on peut adimensionner T avec eux : $\Pi = TD^{-3/2}\sigma^{1/2}\rho^{-1/2}$.
> Donc :
> $$T \propto \sqrt{\frac{\rho D^3}{\sigma}}$$

2. *"Si on double le diamètre de la sphère on double la période des vibrations"* : validez ou contestez cette phrase en justifiant votre réponse.

> **Solution:** Phrase fausse car T n'est pas proportionnelle à D.

1.2 Cas où D est “grand”

Si le diamètre de la sphère fluide est suffisamment grand, comme dans le cas d'une étoile, ce sont les forces d'attraction gravitationnelle exercées par le fluide sur lui-même qui jouent le rôle de force de rappel des déformations oscillantes de la sphère, tandis que l'effet de la tension de surface peut être négligé. La force d'attraction entre deux corps fait intervenir la constante gravitationnelle $G = 6 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1}s^{-2}.

3. Par analyse dimensionnelle, déterminez la loi d'échelle reliant T aux paramètres pertinents.

> **Solution:**
> $T = f(D, \rho, G)$: $n = 4$, $k = 3$ donc la loi peut s'écrire en fonction d'une seule grandeur sans dimensions Π $F(\Pi) = 0$, soit $\Pi =$ constante (un zéro de F).
> D ρ et G étant dimensionnellement indépendants, on peut adimensionner T avec eux : $\Pi = TD^0G^{1/2}\rho^{1/2}$.
> Donc :
> $$T \propto \frac{1}{\sqrt{\rho G}}$$

4. T dépend-elle de D ?

> **Solution:** Non.

1.3 Diamètre de transition

On peut imaginer que la transition entre les deux régimes d'oscillation d'une sphère fluide a lieu pour un diamètre D^* tel que les forces de rappel dues à la tension de surface sont du même ordre de grandeur que les celles dues à la gravité.

5. Construisez une grandeur sans dimension impliquant les deux forces de la forme $\Pi = \sigma\ G^\alpha\ \rho^\beta D^\gamma$ en déterminant α, β et γ.

> **Solution:** $\Pi = \sigma G^{-1}\rho^{-2}D^{-3}$.

6. déterminez l'expression de D^* satisfaisant $\Pi = 1$.

> **Solution:**
> $$D^* = \left(\frac{\sigma}{G\rho^2}\right)^{1/3}$$

7. Déterminez la valeur de D^* pour une sphère d'eau ($\rho = 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, $\sigma = 7 \times 10^{-2}$ N m^{-1}).

> **Solution:** $D^* = 10$ m.

2 Écoulement de Hele-Shaw

On établit un écoulement de type “Poiseuille” entre deux parois planes parallèles, supposées infiniment étendues et séparées de la distance $2h$, comme schématisé en haut de la figure 1. Cette géométrie d'écoulement est appelée “écoulement de Hele-Shaw”. Elle se rencontre couramment en microfluidique et est aussi utilisée pour modéliser les écoulement bidimensionnels dans les milieux poreux.

On adopte les coordonnées cartésiennes représentées sur la figure 1 telles que la direction de l'écoulement imposé est parallèle à l'axe (Ox) et l'axe (Oz) est perpendiculaire aux parois. L'écoulement est induit par une différence de pression entre l'amont (côté $x < 0$) et l'aval (côté $x > 0$). On insère entre les deux parois un obstacle constitué d'une plaque solide de longueur L parallèle au plan (Oxz) et d'épaisseur négligeable, comme schématisé sur la figure 1.

Le but de ce problème est de déterminer et de résoudre les équations simplifiées qui gouvernent l'écoulement établi entre les deux parois autour de la plaque.

L'écoulement étant supposé symétrique par rapport à la plaque, le domaine d'étude est choisi comme :

$$-L \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L,\ -h \leq z \leq h$$

L'écoulement, stationnaire, est supposé suffisamment lent pour être isovolume, si bien que le fluide, de viscosité cinématique ν, est considéré comme étant de masse volumique homogène ρ.

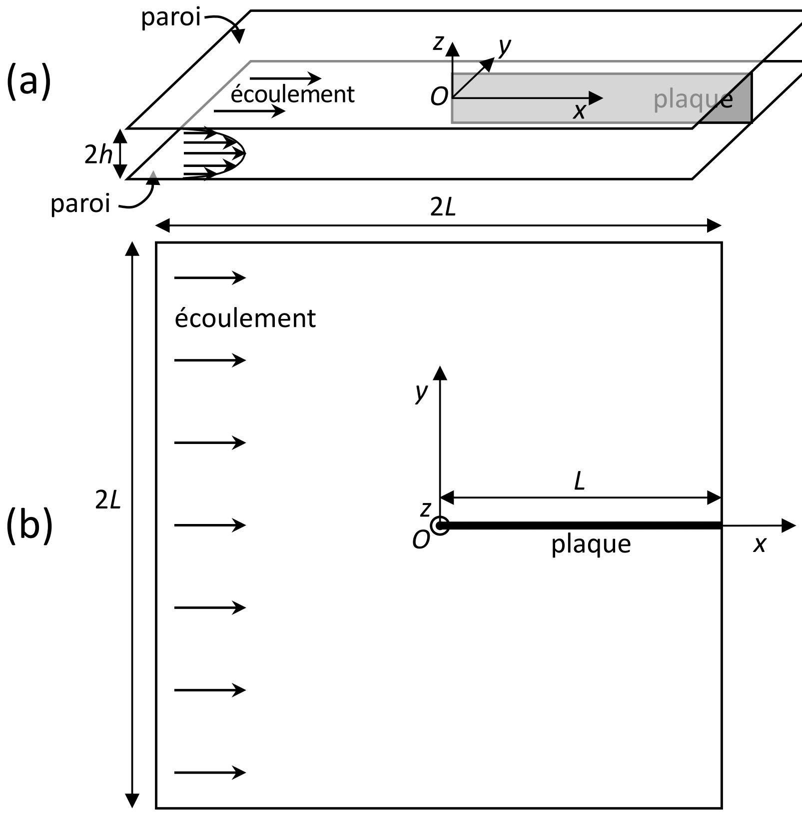

FIGURE 1 – Géométrie de l'écoulement de Hele-Shaw (a) en perspective cavalière, (b) en vue du dessus.

La valeur caractéristique de la pression du fluide est notée P_0. Le moteur de l'écoulement est la différence de pression entre amont et aval contrôlée par l'expérimentateur définie comme :

$$\begin{cases} p(-L, y, -h \leq z \leq h) &= P_0 + \delta P \ \forall y & \text{(1a)} \\ p(L, y, -h \leq z \leq h) &= P_0 - \delta P \ \forall y & \text{(1b)} \end{cases}$$

où $\delta P \ll P_0$.
En notant U_0 la vitesse maximale du fluide en amont de l'obstacle, atteinte selon la direction (Ox) dans le plan $z = 0$ (voir la figure 1), les conditions expérimentales sont telles que les trois inégalités suivantes sont vérifiées* :

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1, \quad \mathcal{R} = \frac{LU_0}{\nu} \gg 1, \quad \varepsilon\mathcal{R} \ll 1$$

En utilisant le repère orthonormé $(O,\ \underline{e}_x,\ \underline{e}_y,\ \underline{e}_z)$ définissant les coordonnées cartésiennes (x, y, z), le champ de vitesse du fluide s'écrit $\underline{u} = u(x, y, z)\ \underline{e}_x + v(x, y, z)\ \underline{e}_y + w(x, y, z)\ \underline{e}_z$ et le champ de pression $p(x, y, z)$.
En ne tenant pas compte la gravité puisqu'elle n'est pas le moteur de l'écoulement, l'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & \text{(3a)} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) & \text{(3b)} \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) & \text{(3c)} \end{cases}$$

2.1 Ecoulement à l'échelle de l'obstacle

2.1.1 Adimensionnement du problème à l'échelle de l'obstacle

Dans un premier temps, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de l'obstacle. On rappelle que ceci consiste à opérer sur toutes les variables du problème un changement de variable $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ défini par $\alpha = \alpha_\mathrm{m} + A\bar{\alpha}$, α pouvant être x, y, z u, v, w ou p, et où

— α_m est la valeur caractéristique de α dans le domaine d'étude,
— A est son échelle caractéristique de variation dans le domaine d'étude, appelée échelle,
— $\bar{\alpha}$ est la partie analytique de α, variable adimensionnée d'ordre unité dans son domaine de définition.

*. La dernière condition garantit que l'écoulement de Poiseuille est établi à partir d'une distance de l'entrée de l'écoulement bien plus petite que L, si bien que l'écoulement incident sur l'obstacle est bien un écoulement de Poiseuille établi.

1. Proposez un adimensionnement des variables d'espace x, y et z permettant de décrire le domaine d'étude et donnez les domaines de variation des parties analytiques correspondantes.

Solution: **sur 3 points**
x, y et z s'annulent dans le domaine d'étude donc leurs valeurs caractéristiques s'identifient à leurs échelles donc $x = L\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [-1\ 1]$, $y = L\bar{y}$ avec $\bar{y} \in [0\ 1]$, $z = h\bar{z}$ avec $\bar{z} \in [-1\ 1]$.

2. Proposez un adimensionnement pour u, v, w et p en justifiant votre choix. Vous noterez V_0 l'échelle (inconnue) de v, W_0 l'échelle (inconnue) de w.

Solution: **sur 2 points**

— La vitesse du fluide s'annule aux parois donc la limite inférieure de $|u|$, $|v|$ et $|w|$ est 0 donc leur valeur caractéristique s'identifie à leur échelle (**0,5 point**).

— u prend la valeur maximale U_0 en amont de l'obstacle donc l'échelle de u est U_0 (**0,5 point**) et on peut donc poser : $u = U_0\bar{u}$ (**0,5 point**).

— On pose $v = V_0\,\bar{v}$ et $w = W_0\,\bar{w}$ (**0,5 point**)

— La valeur caractéristique de la pression du fluide vaut P_0 et son échelle caractéristique de variation entre l'amont et l'aval du domaine est δP donc on choisit comme échelle δP et : $p = P_0 + \delta P\,\bar{p}$ (**0,5 point**).

3. Adimensionnez l'équation (2) et reliez V_0 et W_0 à U_0.

Solution: **sur 2 points**

$$\frac{U_0}{L}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{L}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{W_0}{h}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Par hypothèse, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \sim \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \sim 1$. Principe de Non Simplification Abusive : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il convient de ne pas trop simplifier sa description donc il convient de supposer qu'aucun terme dans l'équation ne domine a priori, donc $\frac{U_0}{L} \sim \frac{V_0}{L} \sim \frac{W_0}{h}$ donc on peut poser : $V_0 = U_0$ et $W_0 = \varepsilon U_0$.

4. Adimensionnez les équations (3a), (3b) et (3c) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta P}{\rho U_0^2}$, $\mathcal{R}$ et ε.

Solution: **sur 6 points**

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} + \cancel{\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)}\right] \quad \textbf{(2 points)}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} + \cancel{\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)}\right] \quad \textbf{(2 points)}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\varepsilon^{-2}\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} + \cancel{\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}\right)}\right] \quad \textbf{(2 points)}$$

5. Procédez aux simplifications automatiques.

Solution: (**2 points**) Termes barrés dans les équations de la solution à la question précédente.

2.1.2 Analyse physique

6. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, que vous expliciterez, montrez que $\frac{\delta P}{\rho U_0^2} \sim \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}$. Dans la suite, vous poserez $\boxed{\dfrac{\delta P}{\rho U_0^2} = \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}}$.

Solution: **sur 6 points**
La direction principale de l'écoulement est (Ox) (**1 point**). Analyse physique de l'équation (3a) :

— comme indiqué en début d'énoncé, le moteur de l'écoulement est le gradient de pression qui est d'ordre de grandeur $\frac{\delta P}{\rho U_0^2}$ (**1 point**),

— un premier frein de l'écoulement est le frottement visqueux induit par l'adhérence du fluide aux parois immobiles, d'ordre de grandeur $\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}$ (**1 point**),

— un second frein de l'écoulement est l'inertie du fluide, d'ordre de grandeur l'unité (**1 point**).

Le moteur devant être compensé par la combinaison des deux freins, on a :

$$\text{moteur} \sim \text{Sup(frein 1, frein 2), soit :}$$

$$\frac{\delta P}{\rho U_0^2} \sim \text{Sup}(\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}, 1) \ (\textbf{1 point})$$

Or $\mathcal{R}\varepsilon \ll 1$ donc $\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-1} \gg 1$ donc $\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \gg \varepsilon^{-1} \gg 1$. Donc :

$$\frac{\delta P}{\rho U_0^2} \sim \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \ (\textbf{1 point})$$

7. Déduisez-en une expression de U_0 en fonction de δP, $\mu = \rho\nu$, h et L.

Solution:

$$\frac{\delta P}{\rho U_0^2} = \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1} \Rightarrow U_0 = \frac{\delta P\, h^2}{L\,\mu} \ (\textbf{2 points})$$

8. En considérant maintenant l'écoulement selon la direction (Oz), montrez qu'en première approximation $\bar{p}$ ne dépend pas de $\bar{z}$.

Solution: **sur 2 points**
$\frac{\delta P}{\rho U^2} \sim \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \gg 1$ donc $\varepsilon^{-2}\frac{\delta P}{\rho U^2} \gg \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \gg 1$ (**1 point**). Donc en ne conservant que les termes dominants dans l'équation (3c), celle-ci se simplifie en :

$$0 = -\varepsilon^{-2}\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \text{ soit } \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \ (\textbf{1 point})$$

9. Ecrivez les équations du problème simplifié.

Solution: **sur 3 points**
Le problème simplifié s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \ (\textbf{1 point}) & (4a) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \qquad (\textbf{1 point}) & (4b) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} = \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \qquad (\textbf{1 point}) & (4c) \end{cases}$$

avec $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$.

10. Ecrivez les conditions imposées à l'écoulement aux frontières solides du domaine d'étude (conditions aux limites) sous forme dimensionnée puis adimensionnée.

Solution: **sur 4 points**
Le fluide adhère aux parois planes immobiles donc $\underline{u} = \underline{0}$ à ces parois soit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z = \pm h) &= 0 \ \forall x, y \text{ tels que } -L \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L \\ v(x, y, z = \pm h) &= 0 \ \forall x, y \text{ tels que } -L \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L \\ w(x, y, \pm h) &= 0 \ \forall x, y \text{ tels que } -L \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L \end{aligned}$$

(1 point)

Le fluide adhère à l'obstacle immobile donc :

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) &= 0 \ \forall z \text{ tel que } -h \leq z \leq h \text{ et } \ \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L \\ v(x, 0, z) &= 0 \ \forall z \text{ tel que } -h \leq z \leq h \text{ et } \ \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L \\ w(x, 0, z) &= 0 \ \forall z \text{ tel que } -h \leq z \leq h \text{ et } \ \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

(1 point)

soit, avec les adimensionnements choisis :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = \pm 1) &= 0 \ \forall \bar{x}, \bar{y} \text{ tels que } -1 \leq \bar{x} \leq 1,\ 0 \leq \bar{y} \leq 1 \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = \pm 1) &= 0 \ \forall \bar{x}, \bar{y} \text{ tels que } -1 \leq \bar{x} \leq 1,\ 0 \leq \bar{y} \leq 1 \\ \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = \pm 1) &= 0 \ \forall \bar{x}, \bar{y} \text{ tels que } -1 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1 \end{aligned}$$

(1 point)

et

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0, \bar{z}) &= 0 \ \forall \bar{z} \text{ tel que } -1 \leq \bar{z} \leq 1 \text{ et } \ \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ \bar{v}(\bar{x}, 0, \bar{z}) &= 0 \ \forall \bar{z} \text{ tel que } -1 \leq \bar{z} \leq 1 \text{ et } \ \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ \bar{w}(\bar{x}, 0, \bar{z}) &= 0 \ \forall \bar{z} \text{ tel que } -1 \leq \bar{z} \leq 1 \text{ et } \ \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \end{aligned}$$

(1 point)

11. Ecrivez les conditions aux limites imposées à la pression en amont et en aval du domaine d'étude sous forme adimensionnée.

Solution: **sur 2 points**

Les conditions aux limites amont et aval (1a) et (1b) s'écrivent sous forme adimensionnée $\bar{p}(-1, \bar{y}, -1 \leq \bar{z} \leq 1) = 1$ (**1 point**) et $\bar{p}(1, \bar{y}, -1 \leq \bar{z} \leq 1) = -1$ (**1 point**).

2.1.3 Résolution du problème simplifié

12. Intégrez chacune des équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent $\bar{u}$ et $\bar{v}$ pour montrer :

$$\begin{cases} \bar{u} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y})\,(1 - \bar{z}^2) & (5a) \\[2ex] \bar{v} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})\,(1 - \bar{z}^2) & (5b) \end{cases}$$

Solution: **sur 4 points (sachant que c'est deux fois le même calcul)**
En intégrant deux fois chaque équation par rapport à $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}^2 + f(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} + g(\bar{x}, \bar{y}) \text{ (\textbf{2 points})} \\ \bar{v} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}^2 + h(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} + k(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

où f, g, h, k sont des fonctions inconnues. Les conditions d'adhérence en $\bar{z} = \pm 1$ imposent $f = h = 0$, $g = -\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$ et $k = -\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$ (**2 points**).

13. Exprimez maintenant $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$ en tenant compte de (5a) et (5b), puis intégrez cette expression pour montrer finalement que $\bar{w} = 0$. Comment qualiferiez-vous cet écoulement ?

Solution: **sur 4 points**
$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2}\right)(1 - \bar{z}^2)$. En intégrant par rapport à $\bar{z}$: $w = f(\bar{x}, \bar{y})\left(\bar{z} - \frac{\bar{z}^3}{3}\right) + g(\bar{x}, \bar{y})$ où $f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2}\right)$ et g est une fonction inconnue. Les contraintes d'adhérence en $\bar{z} = \pm 1$ ne peuvent être satisfaites que si $f = 0$. Donc $w = 0$: l'écoulement est plan.

14. Montrez que la pression est une fonction harmonique, c'est-à-dire :

$$\bar{\Delta}\bar{p} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

Solution: **sur 1 point**
On vient de montrer que $f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2}\right) = 0$ donc $\bar{\Delta}\bar{p} = 0$: la pression est une fonction harmonique.

2.1.4 Caractère potentiel de l'écoulement moyen

15. En écrivant

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{U}(\bar{x},\bar{y})\,(1-\bar{z}^2)\\ \bar{v} &= \bar{V}(\bar{x},\bar{y})\,(1-\bar{z}^2)\end{aligned}$$

exprimez la fonction potentiel Φ dont dérive l'écoulement "moyen" de Hele-Shaw $\underline{\bar{U}} = \bar{U}\underline{e}_x + \bar{V}\underline{e}_y$.

Solution: **sur 2 points**
Par identification :

$$\begin{aligned}\bar{U} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\\ \bar{V} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}\end{aligned}$$

donc $\underline{\bar{U}} = \underline{\bar{\nabla}}\left(-\frac{1}{2}\bar{p}\right)$, donc $\Phi = -\frac{1}{2}\bar{p}$.

16. (a) Montrez que $\underline{\bar{U}}$ obéit aux mêmes équations que l'écoulement bidimensionnel isovolume parfait stationnaire dans la même géométrie †.
(b) Quel est le caractère paradoxal (en apparence) de ce résultat ?
(c) Quelle différence existe-t-il néanmoins entre le champ de pression de l'écoulement de Hele-Shaw et celui de l'écoulement bidimensionnel isovolume parfait stationnaire ?

Solution: **sur 5 points**

(a) $\bar{p}$ étant harmonique, Φ est harmonique. $\underline{\bar{U}}$ dérive donc d'un potentiel harmonique, comme un écoulement parfait isovolume bidimensionnel dans la même géométrie (**1 point**).
(b) L'écoulement moyen de Hele-Shaw est dominé par la viscosité, néanmoins le champ de vitesse $\underline{\bar{U}}$ obéit aux mêmes équations qu'un écoulement bidimensionnel isovolume parfait, c'est-à-dire sans effets de viscosité, ce qui est paradoxal (**2 points**).
(c) Le champ de pression de l'écoulement de Hele-Shaw obéit à l'équation $\underline{\bar{\nabla}}\bar{p} \propto \underline{\bar{U}}$, tandis que celui de l'écoulement isovolume parfait obéit à l'équation d'Euler : $\underline{\nabla}p = -\rho\,\underline{u}\cdot\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}$. Du coup, les contraintes exercées par ces deux écoulements sur les obstacles n'ont rien en commun (**2 points**).

17. En considérant les conditions aux limites requises pour résoudre l'équation à laquelle obéit la pression, justifiez pourquoi on ne peut imposer à l'écoulement moyen $\underline{\bar{U}}$ que la condition d'imperméabilité le long de l'obstacle, et pas la condition de non-glissement.

†. Cette propriété est utilisée pour obtenir expérimentalement et visualiser les champs de vitesse d'écoulements bidimensionnels isovolumes parfaits.

Solution: sur 3 points
$\bar{p}$ étant harmonique, pour la déterminer il faut connaître aux frontières du domaine soit sa valeur, soit la valeur de son gradient dans la direction perpendiculaire aux frontières, c'est-à-dire la composante de la vitesse moyenne dans la direction normale à la frontière puisque $\underline{\bar{U}} = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}\bar{p}$. Ici, puisque l'écoulement est déclenché par une différence de pression contrôlée, la pression est fixée aux frontières du domaine d'étude (les côtés du carré sur la figure 1b), tandis que l'imperméabilité de la plaque impose que la composante de la vitesse dans la direction perpendiculaire à la plaque est nulle. Donc la solution ne tient pas compte de la condition de non-glissement le long de la plaque.

18. Montrez qu'un champ de pression ne dépendant que de x et variant linéairement selon x est solution, et déduisez-en la solution $\{\bar{U}, \bar{V}, \bar{p}\}$ en vérifiant qu'elle obéit à la condition d'imperméabilité de l'obstacle.

Solution: sur 3 points
$\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = a\bar{x}$, a constante, vérifie bien $\bar{\Delta}\bar{p} = 0$. Les conditions aux limites portant sur la pression en amont et en aval imposent $a = -1$. On en déduit $\bar{U} = \frac{1}{2}$, $\bar{V} = 0$, Cette dernière égalité respectant l'imperméabilité de l'obstacle.

2.2 Couche limite

La solution du problème simplifié dans la limite $\varepsilon \ll 1$, $\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \ll 1$ déterminée à la question 18 ne vérifie pas la condition d'adhérence au contact de l'obstacle et n'est donc pas physiquement satisfaisante : ce problème est donc singulier.

Pour déterminer une solution physiquement acceptable, nous allons donc supposer d'emblée que la singularité du problème est localisée le long de l'obstacle et qu'elle a des effets notables dans un domaine intérieur (couche limite) d'épaisseur caractértistique $\delta \ll L$. Le domaine intérieur est donc défini par :

$$0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \lesssim \delta,\ -h \leq z \leq h$$

2.2.1 Adimensionnement du problème à l'échelle de la couche limite

Dans un premier temps, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de la couche limite. Compte tenu de sa définition, on peut conserver les mêmes adimensionnements pour x et z : $x = L\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [0\ 1]$, $z = h\bar{z}$ avec $\bar{z} \in [-1\ 1]$. En posant $y = \delta\tilde{y}$, on a $\tilde{y} \in [0,\ \mathcal{O}(1)]$.

19. Proposez un adimensionnement pour u, v, w et p en justifiant votre choix. Vous noterez U_1 l'échelle (inconnue) de u, V_1 l'échelle (inconnue) de v, W_1 l'échelle (inconnue) de w et δP_1 l'échelle (inconnue) de p dans ce domaine, et $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ et $\tilde{p}$ les parties analytiques correspondantes.

Solution: sur 1 point
La vitesse du fluide s'annule au contact de l'obstacle, c'est-à-dire en $y = 0$, donc la limite inférieure de $|u|$, $|v|$ et $|w|$ est 0, donc leur valeur caractéristique s'identifie à leur échelle, ce qui permet de poser $u = U_1\tilde{u}$, $v = V_1\tilde{v}$ et $w = W_1\tilde{w}$. Enfin, $p = P_0 + \delta P_1\,\tilde{p}$.

20. Adimensionnez l'équation (2) et reliez V_1 et W_1 à U_1. Vous noterez $\frac{\delta}{L} = \eta \ll 1$.

Solution: **sur 2 points**

$$\frac{U_1}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_1}{\delta}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{W_1}{h}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Principe de Non Simplification Abusive : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il convient de supposer qu'aucun terme dans l'équation ne domine a priori, donc $\frac{V_1}{\delta} \sim \frac{U_1}{L} \sim \frac{W_1}{h}$ soit : $V_1 = \eta U_1$ et $W_1 = \varepsilon U_1$.

21. Ecrivez les conditions de raccord de la composante de la vitesse selon x et de la pression au passage du domaine intérieur au domaine extérieur. Déduisez-en :

$$U_1 = U_0, \ \delta P_1 = \delta P_0$$

et

$$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}, \bar{z}) = \frac{1}{2}(1 - \bar{z}^2) \tag{6}$$

$$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = -\bar{x}$$

Solution: **sur 4 points**
Les conditions de raccord concernent les grandeurs dimensionnées. La singularité étant située en $\bar{y} = 0$, compte tenu ces conditions s'écrivent :

$$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} U_1\, \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}, \bar{z}) = \lim_{\bar{y} \to 0} U_0\, \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = U_0 \frac{1}{2}(1 - \bar{z}^2) \ (\textbf{2 points})$$

$$\lim_{\tilde{y} \to +\infty} [\cancel{P_0} + \delta P_1\, \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}, \bar{z})] = \lim_{\bar{y} \to 0} [\cancel{P_0} + \delta P\, \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}] = \cancel{P_0} - \bar{x}\, \delta P \ (\textbf{2 points})$$

On égale enfin séparément échelles et parties analytiques, ce qui conduit aux résultats donnés.

Dans la suite, on suppose que dans la couche limite la composante transverse w du champ de vitesse est nulle et que p ne dépend pas de z, comme dans le domaine extérieur.

22. Ecrivez les conditions aux limites imposées à l'écoulement au contact de l'obstacle pour les grandeurs adimensionnées.

Solution: **sur 2 points**
L'adhérence se traduit par :

$$\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0, -1 \leq \bar{z} \leq 1) = 0 \tag{7}$$

$$\tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0, -1 \leq \bar{z} \leq 1) = 0 \tag{8}$$

23. Adimensionnez les équations (3a) et (3b) et procédez aux simplifications automatiques pour montrer que :

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right] \tag{9}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\eta^{-2}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2}\right] \tag{10}$$

Solution: **sur 6 points : 2 par équation, 2 pour les simplifications automatiques**

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\bar{x}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2} + \cancel{\varepsilon^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\bar{x}^2}}\right]$$

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\,\eta^{-2}\,\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2} + \cancel{\varepsilon^2\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\bar{x}^2}}\right]$$

2.2.2 Principe de Moindre Dégénérescence dans la couche limite

Pour guérir la singularité du problème, il s'agit de tenir compte dans la couche limite d'effets qui étaient négligés dans le domaine extérieur.

24. En considérant la projection selon la direction de l'écoulement principal de l'équation de Navier-Stokes adimensionnée à l'échelle de la couche limite, quel terme ne peut pas être négligé dans la couche limite ? En déduire un ordre de grandeur pour δ puis fixer sa valeur et celle de η.

Solution: **sur 4 points**
Par rapport à la projection de l'équation de Navier-Stokes selon (Ox) adimensionnée à l'échelle du domaine extérieur établie en question 4, le seul terme différent est $\varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}$, qui représente le frottement visqueux dû à la proximité de l'obstacle. Or dans la couche limite, il faut tenir compte d'effets négligés dans le domaine extérieur, à savoir précisément le frottement visqueux dû à la proximité de l'obstacle qui assurera le non-glissement du fluide au contact de l'obstacle. Ceci conduit à égaler en ordre de grandeur les deux termes de frottement visqueux et à supposer donc que $\varepsilon^2\eta^{-2} \sim 1$, soit $\eta \sim \varepsilon$. On en déduit : $\boxed{\delta \sim h}$. Dans la suite on pose : $\delta = h$, soit $\eta = \varepsilon$.

2.2.3 Analyse physique

25. Reprenez les résultats de l'analyse physique menée à la question 6 pour simplifier l'équation (9) en ne conservant que les termes dominants.

Solution: **sur 4 points**
Comme $\frac{\delta P}{\rho U_0^2} = \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1} \gg 1$ et $\varepsilon^2\eta^{-2} = 1$, en ne conservant que les termes dominants, (9) se réécrit :

$$0 = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\bar{x}} + \left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\bar{z}^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}\right)$$

26. En considérant maintenant l'équation (10), montrez que $\tilde{p}$ ne dépend pas de $\tilde{y}$ puis que $\tilde{p} = -\bar{x}$.

Solution: **sur 4 points**
Comme $\frac{\delta P}{\rho U_0^2} = \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}$ et $\eta = \varepsilon \ll 1$, $\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\eta^{-2} \gg \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}$ donc en ne conservant que les termes dominants, (10) s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Donc $\tilde{p}$ ne dépend pas de $\tilde{y}$. Comme $\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = -\bar{x}$, $\tilde{p} = -\bar{x}$.

27. Ecrivez le problème simplifié (équations et conditions aux limites) dans la couche limite. Montrez que l'ordre des différentes dérivées partielles est en accord avec le nombre de conditions.

Solution: **sur 6 points**
Compte tenu de $\tilde{p} = -\bar{x}$, le problème simplifié s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = -1 \text{ (\textbf{2 points})}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} \text{ (\textbf{2 points})}$$

muni des conditions aux limites de la couche limite suivantes : (7), (8), (6) (**1 point**). L'edp sur $\tilde{u}$ est d'ordre 2 et est bien contrainte par deux conditions aux limites, tandis que l'edp sur $\tilde{v}$ est d'ordre 1 et est contrainte par une seule condition aux limites (**1 point**).