Contrôle continu : Mercredi 5 mars 2014
Durée 2h

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (-2 points possibles).

Alignement des centres instatanés de rotation (CIR)

On considère trois solides (0), (1) et (2) respectivement fixes dans les repères $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On suppose le mouvement plan sur plan de sorte que $\vec{z}$ soit un vecteur fixe dans les trois repères. On note I_{ij} le CIR et $\vec{\Omega}_{ij} = \omega_{ij}\vec{z}$ le vecteur vitesse de rotation de i par rapport à j. Il s'agit ici d'établir la propriété d'alignement des CIR qui stipule que I_{10}, I_{20} et I_{21} appartiennent à une même droite. On procédera en quatre étapes :

(i) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{I}_{21} \in 2/1)$ et $\vec{V}(\mathrm{I}_{10} \in 1/0)$.

(ii) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1)$ à l'aide de $\vec{\Omega}_{21}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}}$ puis $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0)$ à l'aide de $\vec{\Omega}_{10}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}$.

(iii) Écrire une relation entre $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/0)$, $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1)$ et $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0)$.

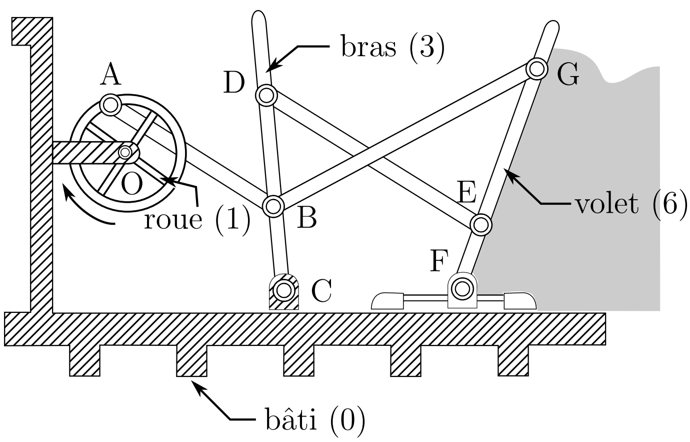
(iv) En déduire une relation entre ω_{21}, ω_{10}, $\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}$ qui prouve que les points I_{21}, I_{20} et I_{10} sont alignés.

Batteur à houle

Un batteur à houle est un dispositif placé à l'intérieur d'un bassin ou d'un canal permettant de générer des vagues d'amplitude et de fréquence données. On se propose d'analyser un tel système en tant qu'ensemble de solides (on se s'intéresse pas aux vagues).

Nous considérons un batteur de type volet plan à double articulation ; on le modélise de la manière suivante :

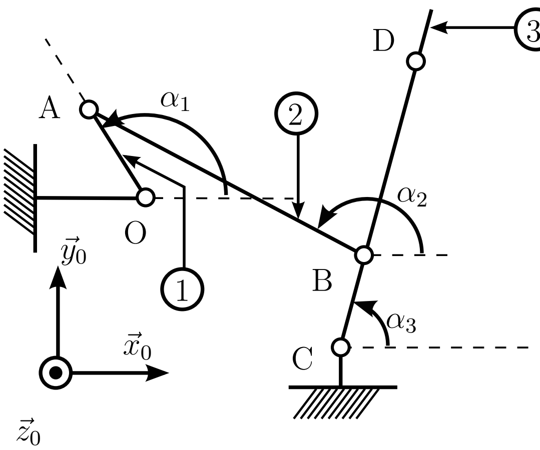
- un bâti (0) auquel est attaché le référentiel $(\mathrm{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ noté $\mathcal{R}_0$;
- une roue (1) reliée par une liaison pivot (parfaite) en O au bâti ;
- un bras (3) relié par une liaison pivot (parfaite) en C au bâti ;
- un volet (6) rélié par une liaison pivot glissante d'axe $\vec{x}_0$ en F au bâti.
- une bielle (2) reliée en A à la roue et en B au bras par deux liaisons pivot.
- deux bielles (4) et (5) reliées au bras en B et D et au volet en G et E par des liaisons pivot (parfaites).



Toutes les liaisons pivot sont d'axe $\vec{z}$. La roue est actionnée par un moteur.

Cinématique analytique

Dans les questions 1 à 5, on considère uniquement le sous-système $(1 \cup 2 \cup 3)$. Les longueurs r_1, ℓ_2, r_3 et R_3 et les angles α_1, α_2 et α_3 sont indiqués sur la Figure 1.



$$\alpha_1 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}),$$
$$\alpha_2 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}),$$
$$\alpha_3 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r_1 \vec{x}_1,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \ell_2 \vec{x}_2,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = r_3 \vec{x}_3,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = R_3 \vec{x}_3.$$

Figure 1 – Schéma cinématique du sous-système $(1 \cup 2 \cup 3)$.

On définit les repères $\mathcal{R}_1 = (\mathrm{O}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $\mathcal{R}_2 = (\mathrm{A}, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{R}_3 = (\mathrm{C}, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, respectivement liés aux solides (1), (2) et (3), et tels que les bases $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_0)$ soient orthonormées directes.

1) Dessiner les diagrammes de changement de base. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{10}$, $\vec{\Omega}_{20}$ et $\vec{\Omega}_{30}$ de la roue (1), de la bielle (2) et du bras (3) par rapport au bâti (0).

2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ du point A dans le mouvement de la roue par rapport au bâti. Exprimer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{A} \in 1/0)$ et en déduire le torseur des accélérations.

3) Exprimer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ au point B et au point D. Quelle est la nature de ce torseur ?

4) Calculer la dérivée vectorielle $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|_0$ par rapport au bâti (garder les expressions en bases mobiles : le changement de repère n'est pas demandé).

5) Que vaut le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{C} \in 3/0)$? En déduire, à l'aide de la question précédente, deux relations scalaires entre les angles α_1, α_2 et α_3 (et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\alpha}_3$).

Dans toute la suite, on considère le sous-système $(3 \cup 4 \cup 5 \cup 6)$ dont le schéma cinématique est donné Figure 2. On se donne les repères $\mathcal{R}_4 = (\mathrm{G}, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$, $\mathcal{R}_5 = (\mathrm{E}, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{R}_6 = (\mathrm{F}, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_0)$, respectivement liés aux solides (4), (5) et (6), et munis de bases $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_0)$ orthonormées directes.

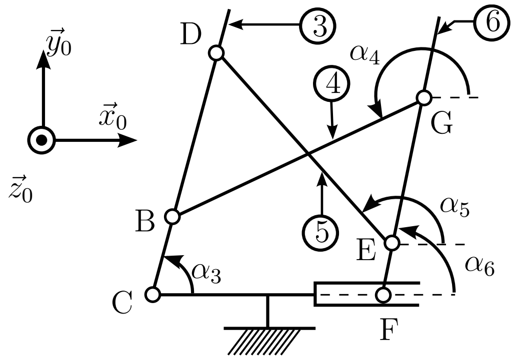
6) Tracer les nouveaux diagrammes de changement de base et donner les vecteurs vitesse de rotation associés.

7) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{B} \in 4/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{D} \in 5/0)$ (choisir la base la plus commode).

8) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{G} \in 4/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{B} \in 4/0)$ à l'aide de la relation de torseur.

9) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{E} \in 5/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{D} \in 5/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{G} \in 6/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0)$ à l'aide de la relation de torseur.

10) À l'aide des questions précédentes, trouver deux relations scalaires entre α_3, α_4, α_5 et α_6 (et leurs dérivées).



$$\alpha_3 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}), \quad \alpha_4 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{GB}}}),$$

$$\alpha_5 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{ED}}}), \quad \alpha_6 = (\vec{x}_0, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{FG}}}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = r_3\vec{x}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = R_3\vec{x}_3,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \ell_4\vec{x}_4, \qquad \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \ell_5\vec{x}_5,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = r_6\vec{x}_6, \qquad \overrightarrow{\mathrm{FG}} = R_6\vec{x}_6.$$

FIGURE 2 – Schéma cinématique du sous-système $(3 \cup 4 \cup 5 \cup 6)$.

Cinématique graphique

La page 4 de cet énoncé doit être remise avec le cahier de composition.

Les constructions seront accompagnées d'une justification rédigée. En particulier, pour chaque tracé de vecteur vitesse, vous préciserez comment identifier le support.

1) Trouver le centre de masse C_{32} des solides (2) et (3) supposés être des tiges homogènes de masses identiques à l'instant considéré.

2) Construire $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ de sorte que $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)\| = 3$ cm et que $\dot{\alpha}_1 < 0$.

3) Construire $\vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$ et en déduire $\vec{V}(\mathrm{D} \in 3/0)$.

4) Identifier le CIR I_{53} du mouvement de la bielle (5) par rapport au bras (3) puis le CIR I_{65} du mouvement du volet (6) par rapport à la bielle (5). En déduire une droite sur laquelle se trouve le CIR I_{63} *(Indication : utiliser la propriété d'alignement des CIR)*.

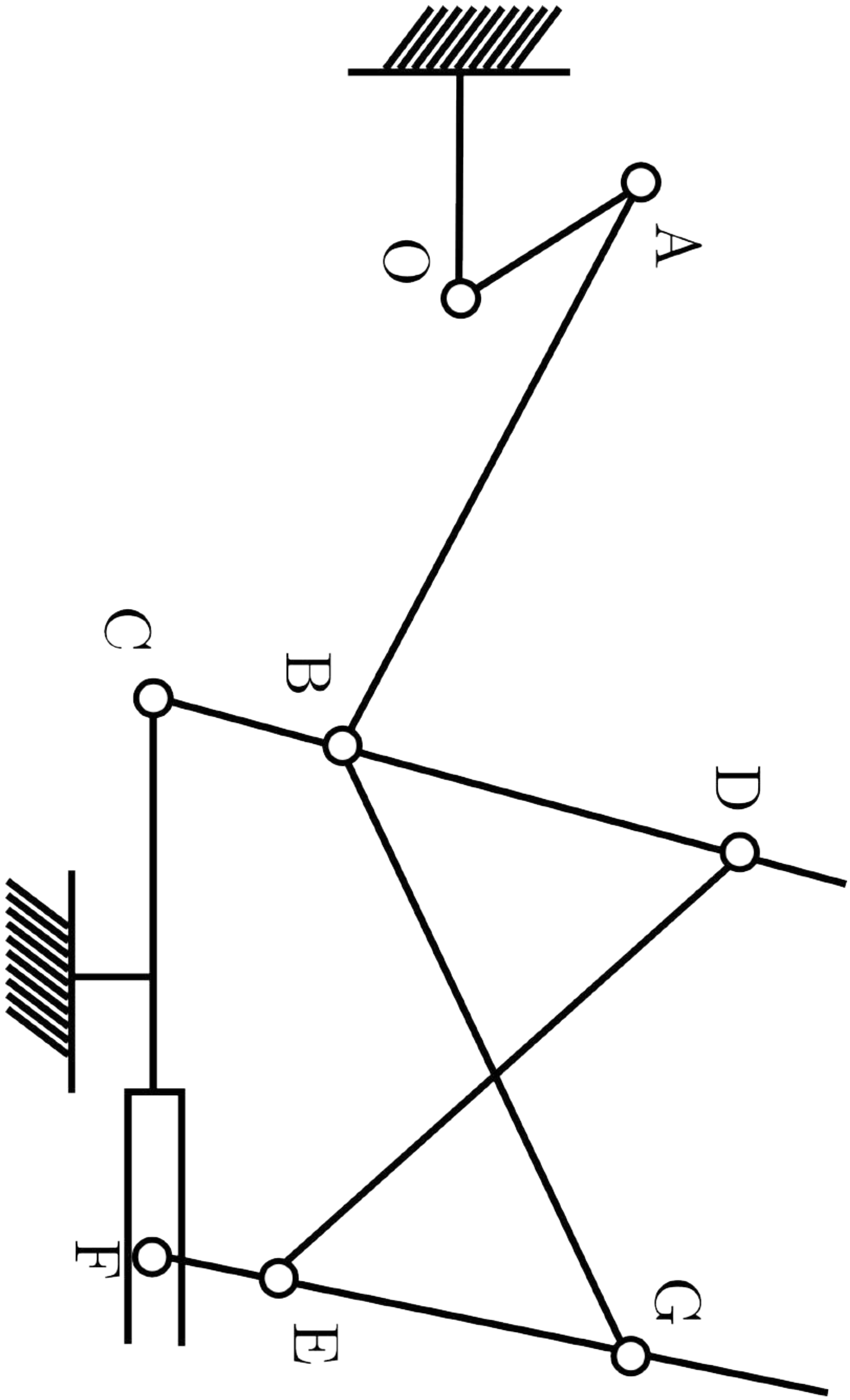
5) Identifier le CIR I_{64} du mouvement du volant (6) par rapport à la bielle (4) puis le CIR I_{43} du mouvement de la bielle (4) par rapport au bras (3). En déduire une droite sur laquelle se trouve le CIR I_{63} (distincte de celle de la question précédente). Placer I_{63} sur le schéma.

6) Trouver deux droites distinctes sur lesquelles se trouve I_{60}. Construire ce CIR sur le schéma.

7) Construire $\vec{V}(\mathrm{E} \in 3/0)$ sur le schéma.

8) Quelle droite constitue le support du vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/3)$?

9) En utilisant la loi de composition du vecteur vitesse, construire $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0)$ (on supposera que, pour la configuration représentée sur le schéma, le point E tourne autour de I_{60} dans le sens positif au cours du mouvement de (6) par rapport à (0), i.e que I_{60} se trouve sur la gauche si l'on se place en E et que l'on regarde dans la direction de $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0)$).


O
A
C
B
D
F
E
G