Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 21 novembre 2017

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé
Le barème est donné à titre indicatif

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours ***(8 points)***

1. Donner la définition d'un problème bien posé.
2. Donner un exemple d'équation aux dérivées partielles linéaire parabolique.
3. Soit l'équation $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$. Déterminer le domaine sur lequel l'équation est elliptique.
4. Soit le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty] \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (a) Quel est le domaine de dépendance de la solution u au point $(2,2)$?
   (b) Tracer graphiquement le domaine (ou région) d'influence de l'intervalle $[-2, 6]$.
5. On veut modéliser la température d'une tige de métal mince, de longueur 10 cm.
   (a) Donner l'équation aux dérivées partielles régissant ce phénomène. On appellera $u(x,t)$ la température en tout point x de la tige et à l'instant t ($t \geqslant 0$).
   (b) Sachant que la tige est isolée aux deux éxtremités écrire les conditions aux frontières.
   (c) A l'instant initial, $t = 0$, la température dans la tige est donnée par la fonction $u_0(x)$. Ecrire la condition initiale.
6. Enoncer (sans démonstration) le principe de maximum pour l'équation de la chaleur.

Exercice 1 ***(3.5 points)***
Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$yu_x - xu_y = 0, \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^*$$

avec $u = u(x,y)$.
(i) S'agit-il d'une équation linéaire ou non-linéaire ? (justifier votre réponse).
(ii) Donner l'équation des courbes caractéristiques. Caractériser ces courbes et tracer graphiquement quelques caractéristiques. Comment se comporte la solution $u(x,y)$ le long de ces courbes ?
(iii) Déterminer la solution générale sachant qu'on a la condition auxiliaire $u(x,0) = \sin(x)$.

Exercice 2 ***(5.5 points)***
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \qquad (1) \\ u(x,0) &= \Phi(x), \ -\infty < x < \infty, \qquad (2) \\ u_t(x,0) &= \Psi(x), \ -\infty < x < \infty. \qquad (3) \end{aligned}$$

i) Préciser le type de l'équation (1).
ii) Déterminer la solution générale de l'équation (1) en passant par une factorisation de l'opérateur associé en deux opérateurs d'ordre 1 (i.e. décomposer $u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = (\partial_x - \alpha\partial_t)(\partial_x + \beta\partial_t)u$ avec α et β à identifier).
iii) On cherche maintenant à obtenir la solution de l'équation (1) en utilisant la forme canonique. Pour cela, en effectuant un changement de variables : $\xi = x - \frac{1}{5}t$, $\eta = x + \frac{1}{4}t$ montrer qu'on obtient la forme canonique (ou standard) suivante :

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Déterminer ensuite la solution générale de l'équation (1).
iv) Utiliser les données initiales (2) et (3) et montrer qu'on obtient l'expression suivante pour la solution $u(x,t)$, analogue à la formule de d'Alembert : $u(x,t) = \frac{1}{9}\left[4\Phi(x+\frac{1}{4}t) + 5\Phi(x-\frac{1}{5}t)\right] + \frac{20}{9}\int_{x-\frac{1}{5}t}^{x+\frac{1}{4}t} \Psi(s)\mathrm{d}s$.

Exercice 3 ***(3 points)***
On considère le problème initial et aux limites pour l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x(2-3x) \end{aligned}$$

a) Montrer que, pour tout $0 < x < 1$, $t > 0$, nous avons les inégalités :

$$-1 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{3}$$

b) Utiliser le principe de maximum pour démontrer l'unicité de la solution du problème de Dirichlet précédent.
c) Utiliser une méthode de type énergie pour démontrer que l'intégrale $\int_0^1 u^2(x,t)\mathrm{d}x$ est strictement décroissante par rapport à la variable t. Donner une interprétation physique de ce résultat.