Partiel
Partie Mécanique des Fluides

Lundi 9 décembre avril 2019 – Durée : **2h**
sans document ni appareil électronique

1 Analyse dimensionnelle des vagues

On cherche à utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer des propriétés des vagues sur Terre puis sur d'autres planètes. On rappelle l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre $g = 9.81$ SI.

1. Sur Terre, la longueur d'onde λ d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan vaut 1.6 m. Par analyse dimensionnelle, déterminez la longueur d'onde d'une vague de fréquence 2 Hz.
2. Déterminez une expression pour l'accélération de la pesanteur g d'une planète en fonction de ses caractéristiques qui peuvent être trouvées dans le tableau ci-dessous et de la constante de gravitation G. On rappelle que G est telle que la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 séparées de d vaut $F = Gm_1m_2/d^2$.
3. Calculez la valeur de l'accélération de la pesanteur g_{M} sur la surface de Mars connaissant celle sur Terre ainsi que certaines des données du tableau ci-dessous.

Planète	Masse (kg)	Rayon	Distance au soleil	Durée d'un jour
Terre	6.1×10^{24}	6371 km	150×10^6 km	24 h
Mars	6.4×10^{23}	3390 km	228×10^6 km	24 h et 40 mn

4. S'il y avait de l'eau sur Mars, quelle serait la longueur d'onde d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan ?

2 Amortissement d'un vortex

La photographie de la NASA ci-dessous met en évidence les vortex créés aux extrémités des ailes d'un avion en mouvement. Ces structures peuvent persister plusieurs minutes dans le sillage des avions et limitent la fréquence d'utilisation des pistes de décollage. Ce sujet décrit l'un des premiers modèles de dissipation de vortex, le *vortex de Lamb-Oseen*, pour lequel l'écoulement est laminaire. Bien que celui-ci soit en réalité turbulent, ce modèle peut encore être raisonnablement utilisé en supposant que l'effet de la turbulence revient à modifier artificiellement la valeur de la viscosité.

L'écoulement étudié est supposé bidimensionnel et son étude est réalisée en utilisant les coordonnées polaires (r, θ). L'air est un fluide supposé newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν ($\nu = \mu/\rho$, avec μ la viscosité dynamique) homogènes, et de pression au repos homogène P_{atm}. Le champ de vitesse est cherché sous la forme orthoradiale suivante : $\mathbf{v} = v(r,t)\ \mathbf{e}_\theta$. Enfin, on adopte les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

- le champ de vitesse initiale est donné par :

$$v(r > 0, 0) = \frac{\alpha}{r} \tag{1}$$

  avec α une constante,
- le champ de vitesse reste défini au centre :

$$v(0, t > 0) = 0 \tag{2}$$

- “suffisamment loin” de l’avion, le fluide est au repos, soit :

$$v(\infty, t) = 0 \tag{3}$$

  et :

$$p(\infty, t) = P_{\text{atm}} \tag{4}$$

Un formulaire à la fin de cet énoncé contient plusieurs résultats mathématiques nécessaires à la résolution de ce problème.

2.1 Analyse dimensionnelle

On s’intéresse à deux propriétés de l’écoulement pour $t > 0$: le rayon $r_c(t)$ auquel la vitesse est maximale, et la différence de pressions $\Delta p(t)$ entre le cœur du vortex et l’air au repos. Ces deux grandeurs quantifient l’effet du vortex sur un avion pénétrant dans le vortex, à savoir sa taille caractéristique, qui définit l’extension de la zone de perturbation, et la force exercée par le vortex sur l’avion qui tend à le dévier de sa trajectoire.

1. Par analyse dimensionnelle, proposez une relation entre $r_c(t)$ et les grandeurs pertinentes dont il dépend.
2. De même, par analyse dimensionnelle, proposez une relation entre $\Delta p(t)$ et les grandeurs pertinentes dont il dépend.

2.2 Solution invariante d’échelle

Il est possible de déterminer la solution exacte à ce problème en la cherchant sous une forme invariante d’échelle.

3. L’écoulement considéré est-il stationnaire ?
4. En utilisant le formulaire donné en fin d’énoncé, montrez que l’écoulement est isovolume.

5. Montrez que p ne dépend pas de θ. En déduire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) \tag{5}$$

6. Montrez que l'ordre des différentes dérivées partielles est en accord avec le nombre de conditions pour le problème défini par l'équation (5) munie des conditions (1), (2), (3).
7. Afin de déterminer si ce problème (5), (1), (2), (3) admet une solution invariante d'échelle, on définit le changement d'échelles consistant en le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} r \mapsto r' & / & r & = & r^* r' \\ t \mapsto t' & / & t & = & t^* t' \\ v \mapsto v' & / & v & = & v^* v' \\ \nu \mapsto \nu' & / & \nu & = & \nu^* \nu' \\ \alpha \mapsto \alpha' & / & \alpha & = & \alpha^* \alpha' \end{array}\right.$$

   r^*, t^*, v^*, ν^* et α^* étant les facteurs de changement d'échelle ou *facteurs d'échelle*. Déterminer les deux relations entre facteurs d'échelle imposées par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (5), (1), (2), (3).
8. En imposant que la solution à ce problème $v = f(r, t, \nu, \alpha)$ soit aussi invariante d'échelle, montrez que

$$v' = \frac{\alpha'}{r'} G(\eta),$$

   avec $\eta = \frac{r'^2}{\nu' t'}$ une variable d'auto-similarité.
9. Compte tenu de la forme de la solution invariante d'échelle $v = \frac{\alpha}{r} G(\eta)$ avec $\eta = \frac{r^2}{\nu t}$, montrez que l'équation différentielle ordinaire vérifiée par la fonction G est de la forme :

$$G'' + \beta G' = 0,$$

   avec β un nombre dont on donnera la valeur.
10. Quelles contraintes sur la fonction G les conditions aux limites et la condition initiale imposent-elles ?
11. Intégrer l'équation précédente pour déterminer l'expression exacte de $G(\eta)$.
12. En déduire l'expression de la solution v du problème en fonction de r et t. Donnez les deux expressions asymptotiques de $v(r, t)$ pour $r \to 0$ et $r \to \infty$. Dans quelles gammes de valeurs de r sont-elles valables ? A quels types d'écoulement ces deux comportements asymptotiques correspondent-ils ?

Rayon caractéristique du vortex - On s'intéresse maintenant au rayon $r_c(t)$ auquel la vitesse est maximale, appelé rayon caractéristique du vortex.

13. Déterminer une équation permettant de déterminer $r_c(t)$. A l'aide du formulaire, obtenir l'expression approchée de $r_c(t)$. Confrontez ce résultat à celui obtenu par analyse dimensionnelle en question 1.
14. Tracez $r \mapsto v(r, t)$ pour deux instants t_1 et t_2, $0 < t_1 < t_2$.

Champ de pression - On s'intéresse maintenant au champ de pression au sein de l'écoulement $p(r,t)$.

15. Montrez que :
$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$$
16. Le coeur du vortex est-il le lieu d'une dépression ou bien d'une surpression ?
17. Établir une expression intégrale pour la différence de pression entre le coeur du vortex et l'extérieur $\Delta p(t) = p(0,t) - p(\infty,t)$ puis effectuer le calcul à l'aide de l'annexe. Confrontez ce résultat à la prédiction de l'analyse dimensionnelle trouvée en question 2.

Formulaire

Équations bilan en coordonnées polaires

Pour un champ de vitesse bidimensionnel $\mathbf{v} = u(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_r + v(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_\theta$ et un champ de pression bidimensionnel $p(r,\theta,t)$:

— Opérateur divergence :
$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{6}$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement isovolume (équation de Navier-Stokes) :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \tag{7}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{8}$$

Quelques solutions numériques approchées

Quelques solutions numériques suivantes seront utiles à la résolution de ce problème (d'autres non) :

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-x/4}\right)^2}{x^2}\mathrm{d}x \simeq 0.346 \qquad \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-4x}\right)^2}{x^2}\mathrm{d}x \simeq 5.55$$
$$1 = e^{-x/4}\left(1 + \frac{x}{2}\right) \to x \simeq 5 \qquad 1 = e^{-4x}\left(1 + 8x\right) \to x \simeq 0.314$$