Montrer que l'équation d'Euler vérifiée par le point de minimum $u \in H_0^1(\Omega)$ de :

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla v^2 dx - \int_\Omega fv dx \right\}$$

est précisément la formulation variationnelle :

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv dx}_{L(v)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

Rappel : $J'(u) = 0$

$$(PV) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H_0^1(\Omega) \\ a(u,v) = L(v) \end{cases}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla v^2 dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$$

avec a : bilinéaire, symétrique, cont, coercive.

L : linéaire, continue.

On veut montrer que $J'(u) = 0$

Autrement dit si la dérivé au sens de Frechet est 0.

alors $J(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f v dx$.

$$J(u+v) = J(u) + \underbrace{L(u)}_{J'(u)} + o(v)$$

$$J(u+v) \overset{\text{déf. de } J}{=} \frac{1}{2} a(u+v, u+v) - L(u+v)$$

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

$$J(u+v) = \underbrace{\frac{1}{2} a(u,u) - L(u)}_{J(u)} + \frac{1}{2} a(v,v) + a(u,v) - L(v)$$

$$J(u+v) = J(u) + \underbrace{a(u,v) - L(v)}_{\langle J'(u), v\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v)}_{\sigma(v)}$$

On a montré que:

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega (Du\,Dv - f v)\,dx$$

De plus : $\sigma(v) = \frac{1}{2} a(v,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega Dv^2\,dx$.

et $\lim_{v\to 0} \frac{\sigma(v)}{\|v\|} \longrightarrow 0$

$$\sigma(v) \overset{\text{a-cont.}}{\leq} M \cdot \|v\|$$

L'éq. d'Euler : Au point de min : $\langle J'(u), v\rangle = 0$

$$\iff \int_\Omega Du\,Dv\,dx = \int_\Omega f v\,dx.$$

On a donc montré que l'éq. d'Euler nous amène à cette formulation variationnelle (associée à une pb. de conduction stationnaire : $-\Delta u = f$) avec cond. bord.