19 Février 2016

MASTER SDI - MECANIQUE
M2 – MODELISATION ET SIMULATION EN MECANIQUE DE STRUCTURES

EXAMEN DU COURS DE « CONCEPTION ET OPTIMISATION DE STRUCTURES COMPOSITES »

DUREE : 3 HEURES
DOCUMENTS NON ADMIS

EXERCICE 1 – MAXIMISATION DE LA RESISTANCE D'UN STRATIFIE ANGLE-PLY

Dans les applications, on cherche souvent à construire des stratifiés qui ont des propriétés de symétries élastiques données : par exemple, l'orthotropie en membrane et en flexion, ainsi que le découplage. Une manière simple, bien que limitative, d'obtenir ces propriétés est de construire des stratifications angle-ply équilibrées.

1. Donner la définition de stratifié angle-ply équilibré (on note α l'angle de la stratification).
2. On traitera l'étude des stratifications dans le cadre de la théorie classique de plaques stratifiées (CLPT). Rappeler les hypothèses à la base de cette théorie et les équations fondamentales dans le cas général : relation de comportement de plaques stratifiées et expression des tenseurs de rigidité en membrane, couplage et flexion.

On considère une couche de base orthotrope caractérisée par les propriétés élastiques T_0^{CB}, T_1^{CB}, R_0^{CB}, R_1^{CB}, $\Phi_0^{CB} = \Phi_1^{CB} = 0$.

3. A partir des formules générales de la CLPT pour le comportement de membrane exprimées en polaire (voir formulaire joint), particulariser ces formules pour le cas de couches identiques (on notera h_{tot}/n l'épaisseur d'une couche, où h_{tot} est l'épaisseur totale du stratifié et n le nombre de couches constitutives) de propriétés données (T_0^{CB}, T_1^{CB}, R_0^{CB}, R_1^{CB}, $\Phi_0^{CB} = \Phi_1^{CB} = 0$).
   Montrer que les composantes isotropes dépendent uniquement des composantes isotropes T_0^{CB} et T_1^{CB} de la couche de base, de l'épaisseur h_{tot} et du nombre de couches n, et non pas de la stratification.
4. Appliquer les formules obtenues au point précédent au cas d'un stratifié angle-ply ($\delta_k = \pm\alpha$) équilibré : exprimer les paramètres polaires T_0^*, T_1^*, R_0^*, R_1^*, Φ_0 et Φ_1 du comportement de membrane normalisé par rapport à l'épaisseur totale de la plaque, $\mathbf{A}^*$, en fonction des propriétés de la couche de base (paramètres polaires notés CB) et de l'angle de stratification α.
   En limitant la variation de l'angle de stratification α dans l'intervalle [0°,45°], montrer que le comportement de membrane est toujours orthotrope avec $\Phi_1 = 0$.
   Dire pour quelles valeurs de l'angle α on a la forme d'orthotropie avec $\Phi_0-\Phi_1 = 0$ ($K = 0$) ou $\Phi_0-\Phi_1 = \pi/4$ ($K = 1$). Montrer donc que l'on peut introduire le paramètre polaire R_K^*, tel que :
   $$R_K^* = (-1)^K R_0^* = R_0^{CB} \cos 4\alpha$$

On considère que le stratifié angle-ply est soumis à une sollicitation en membrane de traction bi-axiale, soit $\mathbf{N} = [N_x, N_y, 0]^t$: l'état de contraintes dans les couches sera alors $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, 0]^t$ où $\sigma_x = N_x/h_{tot}$ et $\sigma_y = N_y/h_{tot}$.

On veut déterminer la valeur de l'angle de stratification qui maximise la résistance du stratifié et pour cela nous cherchons à minimiser le critère de résistance de Tsai-Hill dans les couches en fonction de l'angle α.

On note X, Y et S les contraintes maximales admissibles pour la couche de base orthotrope, respectivement dans les directions 1 et 2 d'orthotropie et en cisaillement dans le plan de la couche. On pose : $X= 30Y$, $S = 2Y$ (valeurs typiques pour une couche de base en carbone-époxyde unidirectionnelle).

5. Exprimer les composantes polaires T et R de l'état de contraintes en fonction de N_x, N_y et h_{tot}. On suppose $N_x > N_y$: montrer dans ce cas que $\Phi = 0$.
6. Exprimer les composantes cartésiennes σ_1, σ_2, σ_6, du tenseur de contraintes dans les axes locaux des couches, en fonction des invariants polaires T, R et de l'angle α.
7. Injecter les expressions des composantes de contraintes déterminées au point précédent dans l'expression du critère de Tsai-Hill F_{TH} : cela donne le critère F_{TH} en fonction des paramètres de contraintes T et R ainsi que du paramètre de résistance Y et de l'angle α. Montrer que la valeur du critère est la même dans les couches à $+\alpha$. ou $-\alpha$. On rappelle que :

$$F_{\text{TH}} = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 \leq 1.$$

8. Afin de déterminer le stratifié angle-ply de résistance maximale, on cherche à minimiser le critère de Tsai-Hill par rapport à l'angle α. Pour cela, il faut :
   a. d'abord, déterminer les valeurs de l'angle α qui annulent la dérivée première de $F_{\text{TH}}(\alpha)$ (points stationnaires) : montrer qu'il peut exister jusqu'à trois valeurs de l'angle α solution ;
   b. ensuite, vérifier le signe de la dérivée seconde en ces points stationnaires pour discriminer entre maxima et minima locaux.

   On peut montrer qu'il y a une valeur critique ξ_{crit} du rapport $\xi = R/T$ telle que :
   - si $\xi < \xi_{\text{crit}}$, alors $\alpha_{\text{opt}} = 0°$;
   - si $\xi > \xi_{\text{crit}}$, alors α_{opt} est tel que : $\cos(2\alpha_{\text{opt}}) \approx (3600\ T) / (4608\ R)$
9. Rappeler la signification des composantes polaires T et R des contraintes et expliquer donc la signification du rapport $\xi = R/T$.

EXERCICE 2 – PLAQUE SANDWICH

On considère une plaque sandwich composée de deux peaux monocouches verre-époxydes d'épaisseur notée h_1, orientées suivant l'axe x, et d'une âme en mousse méta-acrylique d'épaisseur h. On supposera que h_1 est petit devant h.

La mousse méta-acrylique est supposée isotrope de module d'Young E_m et de coefficient de poisson ν_m. Les matrices de rigidité orthotropes des plis verre-epoxydes seront notées **Q**.

La plaque rectangulaire, de dimensions a et b, est en appuis simples sur les bords $x = 0$ et $x = a$, et est chargée par une pression constante p sur toute sa surface supérieure. On suppose que b est grand devant a.

1. Quelles hypothèses sur les comportements de l'âme et des peaux sont faites pour modéliser le sandwich ? Dans le cadre de la modélisation d'une plaque sandwich, définir les degrés de liberté et les déformations associées.

2. Calculez les propriétés de la plaque sandwich :
   - En membrane A,
   - En flexion D, on rappelle que pour une plaque sandwich :

   $$D = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} Q(\delta_k)(z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

   - En cisaillement transverse H.

   Justifiez que les matrices de couplages sont nulles.

2. En considérant les symétries du problème, déterminer M_x et Q_x en intégrant les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

   Montrer que les courbures κ_y et de κ_{xy} sont nulles en utilisant leurs définitions.

   En déduire que M_{xy} et Q_y sont aussi nuls.

3. Déterminer les contraintes de cisaillement transverse dans les peaux et dans l'âme.
4. Déterminer les contraintes planes dans les peaux et dans l'âme.

FORMULAIRE

Relations polaires directes et inverses pour tenseurs d'ordre 2 (ici **σ** = **L** ou **N** = **L**) :

$$\begin{aligned} 2T &= L_{11} + L_{22} \\ 2Re^{2i\Phi} &= L_{11} - L_{22} + 2iL_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{xx} &= T + R\cos 2(\Phi - \delta) \\ L_{xy} &= R\sin 2(\Phi - \delta) \\ L_{yy} &= T - R\cos 2(\Phi - \delta) \end{aligned}$$

Formules polaires en théorie de stratifiés : comportement de membrane (même forme des formules aussi pour une numérotation des couches de 1 à n : il suffit de changer les limites des sommes, les formules restant les mêmes)

$$\overline{T}_0 = \sum_{k=-p}^{p} T_{0_k}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{T}_1 = \sum_{k=-p}^{p} T_{1_k}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{R}_0 e^{4i\overline{\Phi}_0} = \sum_{k=-p}^{p} R_{0_k} e^{4i(\Phi_{0_k} + \delta_k)}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{R}_1 e^{2i\overline{\Phi}_1} = \sum_{k=-p}^{p} R_{1_k} e^{2i(\Phi_{1_k} + \delta_k)}(z_k - z_{k-1})$$