Examen du Lundi 4 janvier 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures. Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction. Les deux problèmes sont indépendants et de poids similaire.

Problème d'élasticité : tenue d'un réservoir sphérique en pression

On considère un réservoir sphérique creux de rayons intérieur R_i et extérieur R_e tels que $0 < R_i < R_e$, (Figure). Un point du réservoir est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) rapportées au système de coordonnées sphériques $(\,O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi\,)$, (formulaire).

Ce réservoir est en équilibre sous l'action d'une pression uniforme p_e répartie sur sa surface extérieure $r = R_e$. La surface intérieure $r = R_i$ est libre d'efforts, les efforts volumiques sont supposés négligeables et le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est supposé valide.

Le matériau constitutif est un milieu homogène, élastique linéaire et isotrope, caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ.

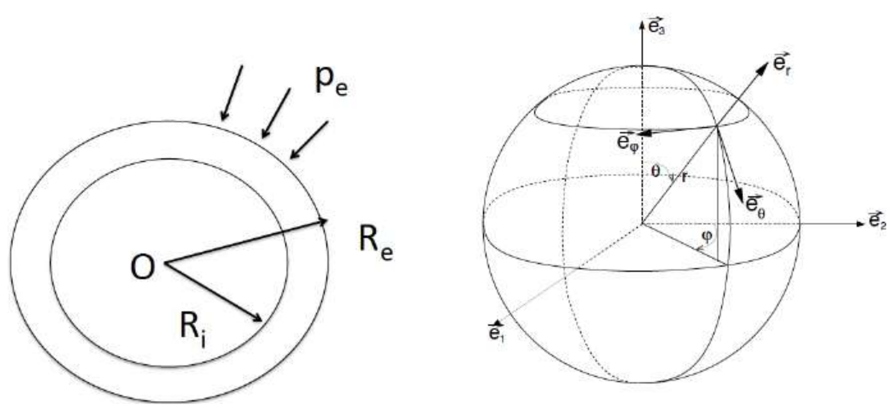

Figure 1: Géométrie de la structure : Coupe du réservoir - Système de coordonnées sphériques.

1.1 Ecrire les équations satisfaites par les champs de déplacements $\underline{\xi}(r, \theta, \varphi)$, déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(r, \theta, \varphi)$ et contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi)$ en tout point du réservoir.

Donner les conditions aux limites du problème.

1.2 Montrer, en utilisant le calcul indiciel, que le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ doit nécessairement vérifier en tout point de la pièce l'équation de Lamé-Navier :

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\underline{\xi}) - \mu\,\underline{\mathrm{rot}}\,(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\xi}\,) \;=\; \underline{0},$$

où div, $\underline{\text{grad}}$ et $\underline{\text{rot}}$ désignent respectivement les opérateurs divergence, gradient et rotationnel.

On rappelle la relation $\underline{rot}(\underline{rot}\,\underline{\xi}) = \underline{grad}\,(div\ \underline{\xi}) - \underline{\Delta}\,\underline{\xi}$.

1.3 On recherche le champ de déplacement solution sous la forme :

$$\underline{\xi}(r,\theta,\varphi) \;=\; f(r)\,\underline{e}_r,$$

où f est une fonction scalaire qui dépend uniquement de la variable radiale r.

Justifier ce choix.

Etablir l'équation différentielle que la fonction $f(r)$ doit nécessairement satisfaire pour conduire à un déplacement solution et l'intégrer.

1.4 En déduire les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(r,\theta,\varphi)$ et celles du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,\varphi)$ associés à ce champ de déplacement.

On vérifiera que le champ de contraintes solution peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,\varphi) \;=\; \left[\,(3\,\lambda+2\,\mu\,)\,A-\frac{4\,\mu B}{r^3}\right]\underline{e}_r\otimes\underline{e}_r+\left[\,(3\,\lambda+2\,\mu\,)\,A+\frac{2\,\mu B}{r^3}\right]\Big(\underline{e}_\theta\otimes\underline{e}_\theta+\underline{e}_\varphi\otimes\underline{e}_\varphi\Big),$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel de deux vecteurs et où A et B sont des constantes.

Expliciter les relations que doivent satisfaire les constantes A et B pour que le champ de contraintes soit solution du problème.

Achever la résolution du problème. Conclure sur la dépendance du champ de contraintes avec les caractéristiques du matériau.

Quels sont les signes des composantes radiale σ_{rr} et circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$?

1.5 Représenter les cercles de Mohr et déterminer la contrainte tangentielle maximale τ_{max} en un point quelconque de la pièce

Sachant que la pièce supporte la charge tant que $\tau_{max} < \sigma_S$ en tout point, σ_S étant une donnée caractéristique du matériau, en quel(s) point(s) de la pièce, la rupture s'initie-t-elle en premier lieu?

Montrer que la pression p^* limite supportable par la pièce est donnée par :

$$p^* \;=\frac{4}{3}\,(\,1\;-\;\frac{R_i^3}{R_e^3}\,)\,\sigma_S.$$

Commenter ce résultat.

1.6 *Question Bonus*

Considérons maintenant une sphère pleine en équilibre sous une pression uniforme p exercée radialement sur sa surface. Rappeler la forme du tenseur des contraintes.

Montrer que le critère de Tresca n'est jamais violé dans ce cas. Qu'en déduit-on sur la résistance à la compression radiale d'une sphère pleine ?

Comparer la résistance à la compression d'une sphère pleine à celle d'une sphère présentant un micro-défaut en son centre.

On exploitera les résultats de la question 1.5 en faisant tendre le rayon intérieur R_i vers zéro.

Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient d'une fonction scalaire :

$$\underline{grad} f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\,\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Divergence d'un vecteur :

$$\mathrm{d}iv\,\underline{u}(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\,\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r\,\tan\theta}$$

Rotationnel d'un vecteur :

$$\underline{rot}\,\underline{u}(r,\theta,\varphi) = (\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r\,\tan\theta})\,\underline{e}_r + (\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r})\,\underline{e}_\theta$$

$$+(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta})\underline{e}_\varphi$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\varphi)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r\,\tan\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_\theta}{r\,\tan\theta} + \dfrac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$

Problème de mécanique des fluides : Ecoulement d'un fluide visqueux dans un canal avec des parois poreuses

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien, homogène de densité volumique ρ constante et de viscosité dynamique μ. L'écoulement s'effectue entre les parois d'un canal constitué de deux plaques planes séparées d'une épaisseur h selon la direction $\underline{e}_2$, (Figure 2). Le canal est de longueur L dans la direction $\underline{e}_1$ et cette longueur est supposée grande devant l'épaisseur h, de sorte que le champ de vitesse peut être considéré comme indépendant de la variable x_1. Cet écoulement est par ailleurs supposé stationnaire et plan (dans le plan $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$), de sorte que le champ de vitesse est de la forme :

$$\underline{v}(x_1, x_2, x_3, t) \;=\; v_1(x_2)\,\underline{e}_1 \;+\; v_2(x_2)\,\underline{e}_2.$$

L'écoulement est créé par un gradient de pression longitudinal suivant la direction $\underline{e}_1$, constant et nécessaire pour produire un mouvement longitudinal. On désigne par P_0 la pression uniforme imposée en $x_1 = 0$ et par P_L celle exercée à l'extrémité $x_1 = L$ avec $P_0 \;>\; P_L$.

Les deux parois $x_2 = 0$ et $x_2 = h$ du canal sont fixes et "poreuses". Cette porosité permet de procéder à une injection et une aspiration uniforme de la façon suivante :

- La paroi inférieure $x_2 = 0$ injecte de manière uniforme et stationnaire le même fluide que celui qui circule dans le canal, et ce en tout point de la paroi. Cette émission de fluide se traduit par la donnée de la composante transverse v_2 de la vitesse dans le canal sur la paroi, soit :

$$v_2(0) \;=\; \underline{v}\,.\underline{e}_2 \;=\; V_W,$$

où V_W est une donnée constante > 0, qui représente la "vitesse de transpiration".

- La paroi supérieure en $x_2 = h$ aspire le fluide avec un débit identique, la composante transverse de la vitesse dans le canal sur cette paroi étant aussi égale à V_W, soit :

$$v_2(h) \;=\; \underline{v}\,.\underline{e}_2 \;=\; V_W.$$

Enfin, les forces de volume sont supposées négligeables.

Les données du problème sont : ρ, μ, h, L, V_W, P_0, P_L.

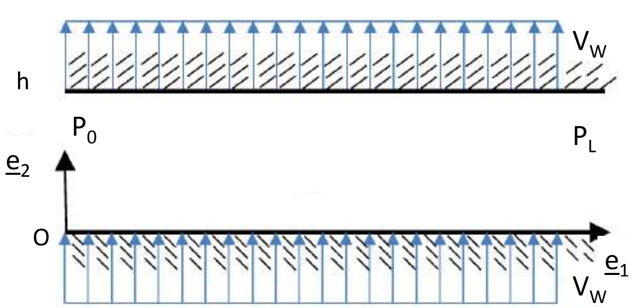

Figure 2: Géométrie du canal à parois poreuses - Ecoulement plan avec injection et aspiration.

2.1 Rappeler l'équation locale de conservation de la masse.

En déduire que la vitesse transverse v_2 est identique en tout point de l'écoulement.

En exploitant les conditions aux limites, préciser sa valeur.

2.2 Rappeler la forme générale de l'équation de Navier-Stokes.

En déduire que, pour l'écoulement considéré, la pression $p(x_1, x_2, x_3, t)$ est une fonction affine de la variable x_1, de la forme :

$$p(x_1, x_2) \;=\; -\,K\,x_1 \;+\, A,$$

où $-\,K$ est le gradient de pression longitudinal et A une constante. On exprimera ces deux constantes en fonction des données P_0, P_L et L.

Montrer que la composante longitudinale v_1 selon $\underline{e}_1$ du champ de vitesse satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\nu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} \;-\; V_W \frac{dv_1}{dx_2} \;=\; -\frac{K}{\rho}, \tag{1}$$

dans laquelle on a introduit la viscosité cinématique $\nu = \mu\,/\rho$.

2.3 Rechercher la solution de l'équation homogène associée (second membre nul) sous la forme :

$$v_1^{hom}(x_2) \;=\; C\,e^{\alpha\,x_2},$$

avec C et α des constantes. Déterminer les constantes α.

Rechercher une solution particulière sous la forme $v_1^{part}(x_2) \;=\; C_3\,x_2 \,+\, C_4$, où C_3 et C_4 sont des constantes. Déterminer la constante C_3.

Vérifier alors que l'équation (1) est satisfaite en prenant v_1 sous la forme suivante :

$$v_1(x_2) \;=\; C_1 \;+\; C_2\,e^{\frac{V_W\,x_2}{\nu}} \;+\; \frac{K}{\rho V_W}\,x_2,$$

où C_1, C_2 sont des constantes indéterminées à ce stade.

2.4 En achevant la résolution du problème, établir alors que v_1 a pour expression:

$$v_1(x_2) = \frac{Kh}{\rho V_W}\Big(\frac{x_2}{h} - \frac{1 - e^{\frac{V_W x_2}{\nu}}}{1 - e^{\frac{V_W h}{\nu}}}\Big).$$

2.5 Déterminer le champ de contraintes dans l'écoulement.

Calculer la densité d'effort surfacique exercée par le fluide sur la paroi inférieure $x_2 = 0$.

En déduire la puissance nécessaire pour injecter le fluide à travers une surface unitaire de la paroi $x_2 = 0$.

2.6 *Question Bonus*

Examiner pour le champ de vitesse le cas limite d'une injection légère (V_W tendant vers 0).

Commenter le résultat après avoir esquissé la forme du champ de vitesse v_1.