□ Partie 1- Cinématique — vitesse eulérienne en tout point $\underline{x}$ à l'instant t

$v_1(\underline{x},t)=\alpha$; $v_2(\underline{x},t) = 2\beta t\, x_1$ $\quad v_3(\underline{x},t)=0$

avec α, β constantes positives

▷ 1.1 Unités de α, β

$[\underline{v}] = \frac{m}{s}$ (longueur en mètre / seconde temps en) $\Rightarrow$ $[\alpha] = \frac{m}{s}$

↓ vitesse

$\Rightarrow$ $[2\beta t x_1] = \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $[\beta] = \frac{m}{s\, s\, m} = \frac{1}{s^2}$

. mouvement instationnaire — $\underline{v}(\underline{x},t)$ dépend explicitement du temps

. accélération en description eulérienne

. 1^{e} méthode $\underline{\gamma} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ d'où

$\underline{\gamma}$ dérivée de la vitesse par rapport au temps

$$\begin{cases} \gamma_1(\underline{x},t) = \frac{dv_1}{dt} = 0 \\ \gamma_2(\underline{x},t) = 2\beta x_1 + 2\beta t \frac{dx_1}{dt} = 2\beta x_1 + 2\beta t\, v_1 \\ \gamma_3(\underline{x},t) = \frac{dv_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

d'où $\underline{\gamma} = (2\beta x_1 + 2\beta\alpha t)\, \underline{e}_2 = 2\beta(x_1+\alpha t)\,\underline{e}_2$

. 2^{e} méthode : $\underline{\gamma} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$ (formule de la dérivée particulaire)

$$\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}=0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}=0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}=2\beta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}=0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}=0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0 \end{pmatrix}_{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3}$$

$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 2\beta x_1\, \underline{e}_2$

dérivée partielle en t à x fixé

$$\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}\cdot\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta t x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta t\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\left\{ \underline{\gamma} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}\cdot\underline{v} = 2\beta x_1\, \underline{e}_2 + 2\beta t\alpha\, \underline{e}_2 = 2\beta(x_1+\alpha t)\,\underline{e}_2 \right.$

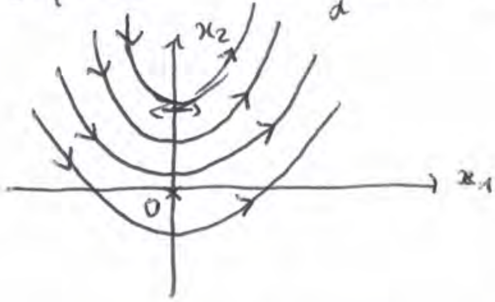
▷ 1.2 Equations des lignes de courant

Par définition, ce sont les lignes qui à un instant t fixé sont colinéaires en tout point au vecteur vitesse, soit ici solutions de

$$\left\{ \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \quad \text{et } dx_3 = 0 \right.$$

soit $\begin{cases} \alpha\, dx_2 = 2\beta t x_1 dx_1 \\ x_3 = C^{ste} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha x_2 = \beta t x_1^2 + C^{te} \\ x_3 = C^{te} \end{cases}$ t fixé

il s'agit d'une famille de paraboles planes dans les plans $x_3 = C^{ste}$
d'équation $x_2 = \frac{\beta}{\alpha} t x_1^2 + C$



→ sens de parcours :
- $v_1 > 0$ car $\alpha > 0$
- $v_2 = 2\beta t x_1 > 0$ pour $x_1 > 0$
  < 0 pour $x_1 < 0$
  car $\beta > 0$ $t > 0$

13 Representation lagrangienne du mouvement

par definition de la vitesse eulerienne, on a

$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ soit $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha \\ \frac{dx_2}{dt} = 2\beta t x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases}$

la representation lagrangienne s'obtient en intégrant ce système différentiel avec les conditions initiales $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

soit donc : $x_1 = \alpha t + C_1$ or $t=0$ $x_1 = X_1 \Rightarrow C_1 = X_1$

d'où $x_1 = \alpha t + X_1$

et donc $\frac{dx_2}{dt} = 2\beta t(\alpha t + X_1) \Rightarrow x_2 = 2\beta\alpha \frac{t^3}{3} + 2\beta X_1 \frac{t^2}{2} + C_2$

or ~~à~~ $t=0$ $x_2 = X_2$ d'où $C_2 = X_2$

et donc $x_2 = \frac{2}{3}\beta\alpha t^3 + \beta X_1 t^2 + X_2$

et enfin $x_3 = C_3 = X_3$ d'après la condition initiale, d'où

la représentation lagrangienne du mouvement :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha t + X_1 \\ x_2(t) = \frac{2}{3}\beta\alpha t^3 + \beta X_1 t^2 + X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

14 Vitesse et accélération lagrangienne

1ère méthode $\underline{V} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(\underline{X}, t)$. soit ici à partir de la représentation lagrangienne

$\begin{cases} V_1(\underline{X}, t) = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \alpha \\ V_2(\underline{X}, t) = 2\beta\alpha t^2 + 2\beta X_1 t \end{cases}$ $V_3(\underline{X}, t) = 0$

soit $\{ \underline{V}(X, t) = \alpha \underline{e}_1 + 2\beta t(X_1 + \alpha t)\, \underline{e}_2$

et $\underline{\Gamma} = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{X},t)$

$\Gamma_1(\underline{X},t) = 0$

$\Gamma_2(\underline{X},t) = 4\beta\alpha t + 2\beta X_1$ soit $\left\{ \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = 2\beta(X_1 + 2\alpha t)\,\underline{e_2} \right.$

$\Gamma_3(\underline{X},t) = 0$

2ᵉ méthode : en revenant à la vitesse eulérienne et en injectant la représentation lagrangienne

- $\underline{V}(\underline{X},t) = \underline{v}(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t),t)$

$$\begin{cases} V_1(\underline{X},t) = \alpha \\ V_2(\underline{X},t) = 2\beta t(\alpha t + X_1) \\ V_3(\underline{X},t) = 0 \end{cases} \qquad \underline{V}(\underline{X},t) = 2\beta t(\alpha t + X_1)\,\underline{e_2}$$

on retrouve bien évidemment l'expression trouvée précédemment

- $\underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \underline{\gamma}(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t),t)$

$$\begin{cases} \Gamma_1(\underline{X},t) = 0 \\ \Gamma_2(\underline{X},t) = 2\beta(\alpha t + X_1 + \alpha t) \\ \Gamma_3(\underline{X},t) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = 2\beta(2\alpha t + X_1)\,\underline{e_2}$$

□ 1.5 Equation de la trajectoire

s'obtient en éliminant le temps dans la représentation lagrangienne, soit

$x_1(t) = \alpha t + X_1 \Rightarrow \qquad t = \frac{x_1 - X_1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$

d'où $\quad x_2(t) = \frac{2}{3}\beta\alpha\left(\frac{x_1 - X_1}{\alpha}\right)^3 + \beta X_1\left(\frac{x_1 - X_1}{\alpha}\right)^2 + X_2$

et $\quad x_3 = X_3$

soit $\quad x_2 = X_2 + \frac{\beta}{\alpha^2}(x_1 - X_1)^2\left[X_1 + (x_1 - X_1)\frac{2}{3}\right] \quad ; \quad x_3 = X_3$

d'où
$$\begin{cases} x_2 = X_2 + \frac{\beta}{3\alpha^2}(x_1 - X_1)^2\left[2x_1 + X_1\right] \\ x_1 \geq X_1 \qquad \text{car } \alpha > 0 \ t > 0 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

équation de la trajectoire du point P qui se trouvait en (X_1, X_2, X_3) à $t = 0$.

la trajectoire est de nature différente des lignes de courant ce qui est attendu, le mouvement n'étant pas stationnaire

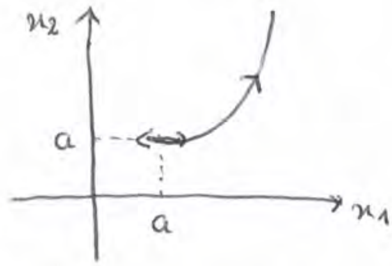
Particule P_1 $(X_1 = a,\ X_2 = a,\ X_3 = 0)$

sa trajectoire a pour équation
$$\begin{cases} x_1 \geq a \\ x_2 = a + \dfrac{\beta}{3\alpha^2}(x_1 - a)^2(2x_1 + a) \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

étude de $x_2 = f(x_1)$

dérivée $\dfrac{dx_2}{dx_1} = (x_1 - a)\dfrac{6\beta}{3\alpha^2}x_1 \geq 0$ pour $x_1 \geq a$ $\Rightarrow$ fonction croissante

$\dfrac{dx_2}{dx_1} = 0$ en $x_1 = a$; la courbe passe par le point (a, a) avec une tangente horizontale en ce point
 x_1 x_2



Particule P_2 $X_1 = -a,\ X_2 = a,\ X_3 = 0$

sa trajectoire a pour équation $x_1 \geq -a$
$$x_2 = a + \frac{\beta}{3\alpha^2}(x_1 + a)^2(2x_1 - a)$$

étude de $x_2 = f(x_1)$

dérivée : $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{2\beta}{3\alpha^2}(x_1 + a)(3x_1)$

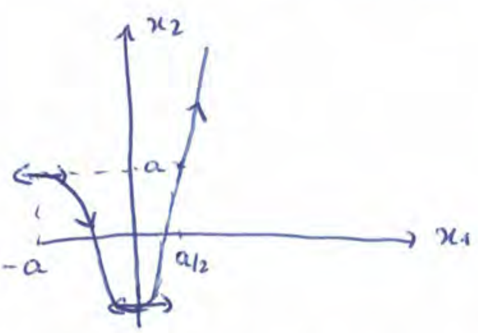
$\dfrac{dx_2}{dx_1} < 0$ pour $-a < x_1 < 0$ fonction decroissante

$\dfrac{dx_2}{dx_1} > 0$ pour $x_1 > 0$ fonction croissante

dérivé nulle en $x_1 = -a$ et $x_1 = 0$

en $x_1 = 0$ $x_2 = a - \dfrac{\beta}{3\alpha^2}a^3$ $\left(\text{si } \dfrac{3\alpha^2}{\beta} < a^2 \quad x_2 < 0\right)$
$= a - \dfrac{\beta}{3\alpha^2}a^3$

en $x_1 = a/2$ $x_2 = a$



□ Partie 2 - Caractérisation de la transformation

2.1 Tenseur gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}}(X, t) = \underline{\underline{\nabla}}_X(\underline{x}(X, t)) \quad \text{soit } F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}$$

d'où $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \beta t^2 & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = 1 & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = 0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1 \end{pmatrix}_{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3}$

- soit $\left\{ \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3} \right.$ $= \underline{\underline{F}}(t)$ la transformation est homogène

Elle s'écrit sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\,\underline{X} + \underline{c}(t)$ avec $\underline{c}(t) = \alpha t\,\underline{e}_1 + \frac{2}{3}\alpha\beta t^3\,\underline{e}_2$

Tout segment de droite reste droit dans la transformation

- Soit Ω_0 volume à $t=0$ Ω_t son transformé à t, on a :

$$|\Omega_t| = \det \underline{\underline{F}}(t)\,|\Omega_0| = |\Omega_0| \quad \text{ici} \quad \det \underline{\underline{F}}(t) = 1$$

la transformation conserve les volumes

2.2 Tenseurs de dilatation et de Green-Lagrange

$\left\{ \underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta^2 t^4 & \beta t^2 & 0 \\ \beta t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\underline{e}_1 \underline{e}_2 \underline{e}_3} \right.$

$\left\{ \underline{\underline{E}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 t^4}{2} & \frac{\beta t^2}{2} & 0 \\ \frac{\beta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \right.$

2.3 Dilatations

Soit $d\underline{M}_0 = dl_0\,\underline{n}_0$ un élément infinitésimal de matière porté par $\underline{n}_0$ (vecteur unitaire), de longueur dl_0 (à partir de $\underline{X}$), $d\underline{M}$ son transformé de longueur dl.

$$d\underline{M} \cdot d\underline{M} = dl^2 = (dl_0)^2\,\underline{n}_0\,\underline{\underline{C}}\,\underline{n}_0 \quad \text{soit} \quad \left\{ \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\underline{n}_0\,\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)\,\underline{n}_0} \right.$$

la transformation étant homogène cette relation est vraie pour tout vecteur indépendamment du point $\underline{X}$

$\lambda_1 = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\underline{e}_1\,\underline{\underline{C}}\,\underline{e}_1} = \sqrt{1+\beta^2 t_*^4}$ à $t = t^*$

$\lambda_2 = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\underline{e}_2\,\underline{\underline{C}}\,\underline{e}_2} = 1$ et $\lambda_3 = \sqrt{\underline{e}_3\,\underline{\underline{C}}\,\underline{e}_3} = 1$

de sorte que l'on observe une dilatation $\frac{dl}{dl_0} = \lambda_1 > 1$ dans la direction $\underline{e}_1$ d'un vecteur porté à $t=0$ par $\underline{e}_1$. En revanche les vecteurs initialement portés par $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ conserve leur longueur dans la transformation

2-4 Variations angulaires

Soit $\underline{dM_0} = dl_0\, \underline{n_0}$ $\quad \underline{\delta M_0} = \delta l_0\, \underline{\tau_0}$ avec n_0 et τ_0 deux vecteurs unitaires

$\underline{dM}, \underline{\delta M}$ leurs transformés, on a

$$\underline{dM}\cdot\underline{\delta M} = dl\,\delta l \cos\theta = dl\,\delta l \sin\gamma = dl_0\,\delta l_0\ \underline{n_0}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{\tau_0}$$

avec θ l'angle entre $\underline{dM}$ et $\underline{\delta M}$ et $\gamma = \pi/2 - \theta$

soit donc

$$\sin\gamma = \frac{\underline{n_0}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{\tau_0}}{\sqrt{\underline{n_0}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{n_0}}\ \sqrt{\underline{\tau_0}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{\tau_0}}}$$

on a ici pour $\underline{n_0} = \underline{e_1}$, $\underline{\tau_0} = \underline{e_2}$

$$\sin\gamma = \cos\theta = \frac{\underline{e_1}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{e_2}}{\sqrt{\underline{e_1}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{e_1}}\ \sqrt{\underline{e_2}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}\,\underline{e_2}}} = \frac{\beta t_*^2}{\sqrt{1+\beta^2 t_*^4}\ \sqrt{1}}$$

ou encore

$$\sin\gamma = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\beta^2 t_*^4}}$$

$\cos\theta \neq 1$, $\cos\theta < 1$ fermeture de l'angle au cours du temps

lorsque $t_* \to \infty$ $\quad \sin\gamma = \cos\theta \to 1$ l'angle s'applatit

Partie 3 : Transformations infinitésimales

3.1 – Calcul du vecteur déplacement $\underline{\xi}(X,t)$

$\underline{\xi}(\underline{X},t) = \underline{x}(\underline{X},t) - \underline{X}$ soit ici

$$\begin{cases} \xi_1(\underline{X},t) = x_1 - X_1 = \alpha t \\ \xi_2(\underline{X},t) = x_2 - X_2 = \frac{2}{3}\beta\alpha t^3 + \beta X_1 t^2 \\ \xi_3(\underline{X},t) = 0 \end{cases}$$

- tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}_X\, \underline{\xi}(X,t)$

$$\underline{\underline{\nabla}}_X\, \underline{\xi}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial X_3} = 0 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial X_1} = \beta t^2 & \frac{\partial \xi_2}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial X_3} = 0 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial X_3} = 0 \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- tenseur des déformations linéarisées

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_X\, \underline{\xi}(\underline{X},t) + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_X\, \underline{\xi}(X,t)\right)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta t^2}{2} & 0 \\ \frac{\beta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3}$$

(symétrique)

3.2. Hypothèse des transformations infinitésimales.

• hypothèse valable si $|\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\xi}(x,t)| \ll 1$ en tout point et à tout instant t

soit donc ici $|\beta t^2| \ll 1 \quad \forall t$

Dans ce cas $\beta^2 t^4 \ll \beta t^2$ et donc $\underline{\underline{e}}(\underline{x},t) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta t^2}{2} & 0 \\ \frac{\beta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{e_1},\underline{e_2},\underline{e_3}}$

On retrouve $\underline{\underline{e}}(\underline{x},t) \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)$

3.3. Allongement relatif en transformation infinitésimale

• $\underline{dM}\cdot\underline{dM} - \underline{dM_0}\cdot\underline{dM_0} = dl^2 - dl_0^2 = 2\,\underline{n_0}\,\underline{\underline{e}}\,\underline{n_0}(dl_0)^2$ d'après formules de transport

soit $\frac{dl^2}{dl_0^2} = 1 + 2\,\underline{n_0}\,\underline{\underline{e}}\,\underline{n_0}$

et en transformation infinitésimale $\frac{dl}{dl_0} = 1 + \underline{n_0}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n_0}$

d'où $\left\{ \frac{dl-dl_0}{dl_0} = \underline{n_0}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n_0} \right.$ allongement relatif d'un élément de longueur initialement porté par $\underline{n_0}$

de sorte que $\frac{dl-dl_0}{dl_0} = \underline{e_1}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{e_1}$ allongement d'un élément porté à $t=0$ par $\underline{e_1}$

$= 0$ aucun allongement

de même dans chacune des directions car $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 = \varepsilon_{11}$.

• Variation angulaire.

D'après ce qui précède en transformations infinitésimales $\sin\gamma = \cos\theta \simeq \theta = \dfrac{\underline{n_0}\cdot\underline{\tau_0} + 2\,\underline{n_0}\cdot\underline{\underline{e}}\cdot\underline{\tau_0}}{\sqrt{(\underline{n_0}\cdot\underline{n_0} + 2\,\underline{n_0}\,\underline{\underline{e}}\,\underline{n_0})}\sqrt{\underline{\tau_0}\cdot\underline{\tau_0} + 2\,\underline{\tau_0}\,\underline{\underline{e}}\,\underline{\tau_0}}}$

soit en HPP $\left\{ \theta \simeq \underline{n_0}\cdot\underline{\tau_0} + 2\,\underline{n_0}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\tau_0} \right.$ pour $\underline{n_0} = \underline{e_1}$ $\quad \underline{\tau_0} = \underline{e_2}$ $\quad \theta \simeq 2\varepsilon_{12}$

et donc $\theta \simeq 2\frac{\beta}{2}t_x^2 = \beta t_x^2$ $\qquad \tau_0 \quad n_0$ $\qquad \theta = 2\varepsilon_{12} = \beta t_x^2$

si l'on revient à la variation angulaire obtenue en 2.4, on a :

$$\cos\theta = \frac{\beta t_x^2}{\sqrt{1+\beta^2 t_x^4}}$$ si $\beta t_x^2 \ll 1$ on retrouve $\cos\theta \simeq \beta t_x^2 \simeq \theta$

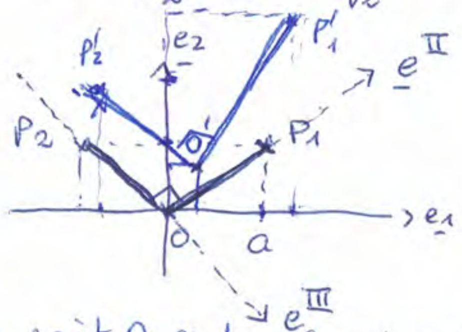
3.4. Déformations et directions principales linéarisées

$\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \lambda\underline{\underline{I}}) = -\lambda\left[\lambda^2 - \frac{\beta^2 t^4}{4}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\beta t^2}{2} \end{array} \right. \quad \lambda_3 = -\frac{\beta t^2}{2}$

directions principales : $\underline{\underline{\mathcal{E}}}\,\underline{e}^{I} = \lambda_i \underline{e}^{I}$

$\left(\lambda_1 = 0 \quad \underline{e}^{I} = \underline{e}_3\right)$; $\left(\lambda_2 = \beta\frac{t^2}{2} \quad \underline{e}^{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)\right)$

$\lambda_3 = -\beta\frac{t^2}{2} \quad \underline{e}^{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$



$$\underline{\underline{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix} \beta\frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_I, e_{II}, e_{III}}$$

les direction principales restent orthogonales dans la transformation.

le point O se transforme en $O' = (\alpha t, \frac{2}{3}\beta\alpha t^3)$, le point P_1 en $P_1' = (\alpha t + a, a + \frac{2}{3}\beta\alpha t^3 + \beta a t^2)$

et le point P_2 en $P_2' = (\alpha t - a, a + \frac{2}{3}\beta\alpha t^3 - \beta a t^2)$

les droites restent droites (transformation homogène) et l'angle $(\widehat{O'P_1', O'P_2'})$ droit

OP_1 et OP_2 correspondant aux direction principales. **Le segment $[OP_1]$ s'allonge dans la transformation (de $\beta\frac{t^2}{2}$) et le segment $[OP_2]$ se retracte ($\varepsilon_{II\,II} = -\beta\frac{t^2}{2} < 0$)**

Partie 4 : lien avec le taux de déformation eulérien.

4.1 Calcul indiciel

- $\frac{d}{dt}[\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)] = \underline{\underline{\nabla}}_x v(x,t)\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$, soit (i,α) quelconque.

$$\frac{d}{dt}(F_{i\alpha}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}[V_i(\underline{X},t)] = \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i(\underline{x},t))\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}F_{j\alpha} \quad (\forall i,\alpha)$$

soit donc $\left\{ \frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{\nabla}}_x v\ \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \right.$

- $\frac{d}{dt}[\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)] = {}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\ \underline{\underline{D}}(\underline{v})\ \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$.

$$\frac{d}{dt}(\underline{\underline{e}}(X,t)) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left({}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left({}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d({}^T\underline{\underline{F}})}{dt}\underline{\underline{F}} + {}^T\underline{\underline{F}}\frac{d\underline{\underline{F}}}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}^T\frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}})\,\underline{\underline{F}} + {}^T\underline{\underline{F}}\frac{d\underline{\underline{F}}}{dt}\right] = \frac{1}{2}\left[{}^T\underline{\underline{F}}\,{}^T\underline{\underline{\nabla}}_x v\,\underline{\underline{F}} + {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{\nabla}}_x v\,\underline{\underline{F}}\right], \text{ d'où}$$

$$\left\{ \frac{d}{dt}(\underline{\underline{e}}) = {}^T\underline{\underline{F}}\ \frac{1}{2}\left({}^T\underline{\underline{\nabla}}\underline{v} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{v}\right)\underline{\underline{F}} = {}^T\underline{\underline{F}}\ \underline{\underline{D}}(\underline{v})\,\underline{\underline{F}} \right.$$

- en multipliant par $\underline{\underline{G}}$ à droite et ${}^T\underline{\underline{G}}$ à gauche, on obtient

$${}^T\underline{\underline{G}}\ \frac{d}{dt}(\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \qquad \text{avec } \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$$

4.2 Calcul du gradient de vitesse et tenseur taux de déformation

$$\underline{\underline{\nabla}}_x v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \qquad (\underline{\underline{\nabla}}_x v)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{v}) = \frac{1}{2}\left({}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}\right)(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta t & 0 \\ \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3}$$

. vérification de la relation $\frac{d\underline{\underline{e}}}{dt} = {}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{D}}(\underline{v})\,\underline{\underline{F}}$

calculons ${}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{{}^T\underline{\underline{F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta t & 0 \\ \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{D}}(\underline{v})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta t^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{F}}}$

$${}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 2\beta^2 t^3 & \beta t & 0 \\ \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3}$$

or $\underline{\underline{e}}(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 t^4}{2} & \frac{\beta t^2}{2} & 0 \\ \frac{\beta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_1 e_2 e_3}$ d'après 2.2. on a bien $\frac{d\underline{\underline{e}}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{4\beta^2 t^3}{2} & \frac{2\beta t}{2} & 0 \\ \frac{2\beta t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.3 Calcul du taux de dilatation dans les directions $\underline{e}_1 \underline{e}_2 \underline{e}_3$.

. $\frac{\dot{\overline{dl}}}{dl_0} = \underline{n}_0\,\underline{\underline{D}}\,\underline{n}_0$ (voir cours) pour un élément $d\underline{M}_0 = dl_0\,\underline{n}_0$ $\underline{n}_0$ unitaire

d'où ici $\frac{\dot{\overline{dl}}}{dl_0} = 0$ dans chacune des direction $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

à rapprocher des allongements unitaires obtenus dans le cadre de la transformation infinitésimale. $\frac{dl - dl_0}{dl_0} = \underline{n}_0\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{n}_0$

. $\dot{\theta} = 2\,\underline{n}_0\,\underline{\underline{D}}\,\underline{v}_0$ soit ici $\dot{\theta} = 2D_{12} = 2\beta t$

cohérent avec $\theta \simeq \beta t^2$ trouvé en 3.3 dans le cas de la transformation infinitésimale.

4.4 Direction principales du tenseur taux de déformation

valeurs propres $\lambda_{III} = 0$ $\lambda_I = \beta t$ et $\lambda_{II} = -\beta t$

direction principales $\underline{e}_{III} = \underline{e}_3$ $\underline{e}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ $\underline{e}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$.

ce sont les mêmes directions principales que celles du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$