2A001 - Dynamique du Solide Rigide **Année 2018-2019**

Écrit du Jeudi 14 mars 2019
Durée 2h

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (–2 points possibles).
Aucun point ne sera attribué à une réponse écrite au crayon papier.

Pour la partie graphique, tout tracé non justifié sur la copie ne sera pas comptabilisé ...
Inversement, un tracé erroné basé sur une bonne justification sera récompensé !

Questions de cours

1. Donner la définition d'un solide indéformable.
2. Soient un repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et deux points matériels A et B. On a $\vec{V}(\mathrm{A}/\mathcal{R}) = -\vec{x}$ et $\vec{V}(\mathrm{B}/\mathcal{R}) = \vec{x}$ à un instant donné. Est-il légitime de considérer que A et B appartiennent, à cet instant, à un même solide indéformable ?
3. Donner un exemple de mouvement pour lequel le centre instantané de rotation n'est pas défini.
4. Énoncer le Principe des Actions Réciproques (statique).
5. Le mouvement (hélicoïdal) d'un solide S de centre de masse C par rapport à $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ admet pour torseur cinématique $\{\mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathcal{R})\}_{\mathrm{C}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega_z \\ 0 & 0 & V_z \end{Bmatrix}$. Quelle est la forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathcal{R}')\}_{\mathrm{C}}$ où $\mathcal{R}' = (\mathrm{C}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$?

Problème de Cinématique : présentation du mécanisme

On considère un mécanisme constitué de 5 solides indéformables :

— **Le bâti** (0) **:** confine le mécanisme complet dans une cavité circulaire de centre O, de rayon R et contenue dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On lui associe le repère $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

— **La tige** T_1 **:** de longueur L_1, d'extrémités O, B et en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0).

— **Le roue** D_1 **:** de rayon R_1, en liaison pivot d'axe $(\mathrm{A}, \vec{z}_0)$ avec la tige T_1.

— **Le roue** D_2 **:** de rayon R_2, en liaison pivot d'axe $(\mathrm{B}, \vec{z}_0)$ avec la tige T_1. D_2 est en contact avec D_1 au point C et en contact avec le bâti en D.

— **La tige** T_2 **:** de longueur L_2, d'extrémités E et F. T_2 est en liaison pivot d'axe $(\mathrm{E}, \vec{z}_0)$ avec la roue D_1 et en liaison glissière d'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_2)$ avec un solide auxiliaire lui-même en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0).

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Pour paramétriser la cinématique du mécanisme, on introduit les vecteurs unitaires et angles suivants (cf. FIGURE 2) :

— $\overrightarrow{OA} = \ell_1 \vec{u_1}$, $\vec{v_1} = \vec{z_0} \wedge \vec{u_1}$ et $\theta_1 = (\vec{x_0}, \vec{u_1})$;
— $\overrightarrow{AE} = d\vec{x_1}$, $\vec{y_1} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_1}$ et $\alpha_1 = (\vec{x_0}, \vec{x_1})$;
— $\vec{x_2}$ est attaché à D_2 et orthogonal à $\vec{z_0}$; $\vec{y_2} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_2}$ et $\alpha_2 = (\vec{x_0}, \vec{x_2})$;
— $\overrightarrow{FE} = L_2 \vec{u_2}$, $\vec{v_2} = \vec{z_0} \wedge \vec{u_2}$ et $\theta_2 = (\vec{x_0}, \vec{u_2})$.

Les angles définis ci-dessus sont orientés dans le sens direct.

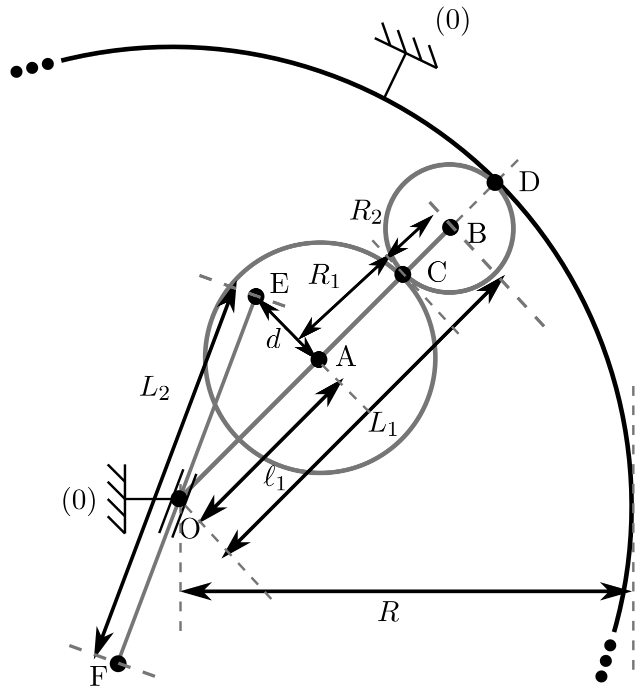

FIGURE 1 – Schéma du mécanisme et données géométriques. On note que $\ell_1 + R_1 + R_2 = L_1$ et que $R = L_1 + R_2$.

L'objectif de cette étude est de caractériser, dans le repère de travail $\mathcal{R}_0$, le mouvement de la tige T_2 (*"sortie"*) en supposant connu celui de T_1 (*"entrée"*). L'analyse du système complet sera décomposée en quatre parties : le sous-système $\{0, T_1, D_1, D_2\}$ sera étudié dans un premier temps (parties 1 et 2) et la tige T_2 sera considérée seule par la suite (parties 3 et 4).

1 Cinématique Analytique

1. Dessiner le diagramme de changement de base faisant intervenir l'angle θ_1.
2. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}(T_1/0)$, $\vec{\Omega}(D_1/0)$, $\vec{\Omega}(D_2/0)$ et $\vec{\Omega}(T_2/0)$.

Solution :

$$\vec{\Omega}(T_1/0) = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}(D_1/0) = \dot{\alpha}_1 \vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}(D_2/0) = \dot{\alpha}_2 \vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}(T_2/0) = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

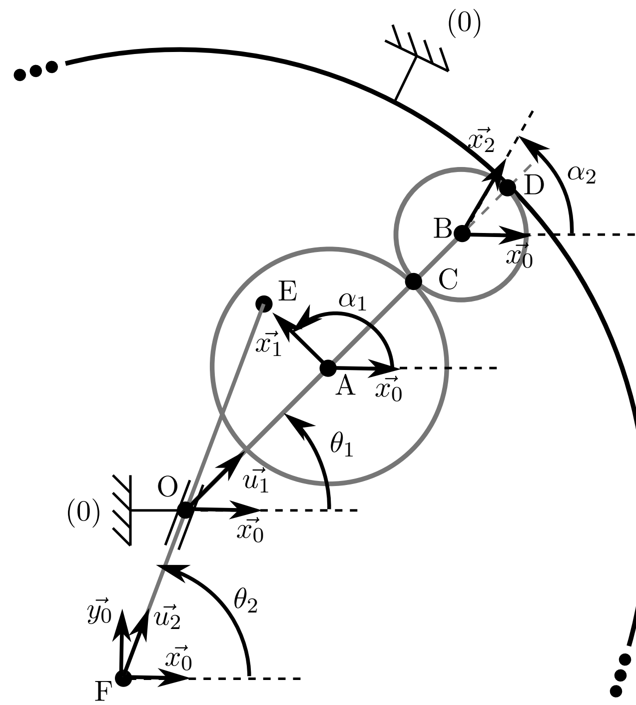

FIGURE 2 – Angles et vecteurs unitaires permettant de paramétriser la cinématique.

3. Exprimer les vitesses $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$, $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$, $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1)$ puis $\vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0)$.

Solution : O correspond au lieu de la liaison pivot entre T_1 et (0), on a donc $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_1/0) = \vec{0}$. Par la loi de torseur, on obtient

$$\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) = \vec{\Omega}(T_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{v_1} \qquad \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) = \vec{\Omega}(T_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{v_1}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) &= \vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0) + \vec{\Omega}(D_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_1 \vec{z_0} \wedge (R_1 \vec{u_1}) \\ &= (\ell_1 \dot{\theta}_1 + R_1 \dot{\alpha}_1) \vec{v_1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0) &= \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_2 \vec{z_0} \wedge (-R_2 \vec{u_1}) \\ &= (L_1 \dot{\theta}_1 - R_2 \dot{\alpha}_2) \vec{v_1}. \end{aligned}$$

D'après la loi de composition des vitesses

$$\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1) = \vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0) - \vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) = \big((L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1 \dot{\alpha}_1 - R_2 \dot{\alpha}_2\big) \vec{v_1}.$$

Enfin

$$\vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_2 \vec{z_0} \wedge (R_2 \vec{u_1}) = (L_1 \dot{\theta}_1 + R_2 \dot{\alpha}_2) \vec{v_1}.$$

4. Exprimez les conditions de roulement sans glissement entre D_1 et D_2, puis entre D_2 et (0). En déduire deux relations scalaires faisant intervenir $\dot{\theta}_1$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et les données géométriques du problème.

Solution : Les conditions de roulement sans glissement sont

$$\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1) = \vec{0} \qquad \qquad \vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0) = \vec{0}$$

d'où

$$\begin{cases} (L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1\dot{\alpha}_1 - R_2\dot{\alpha}_2 = 0 \\ L_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\alpha}_2 = 0 \end{cases}.$$

5. Déterminez $\dot{\alpha}_1$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ (et des grandeurs géométriques).

Solution : D'après la question précédente

$$(L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1\dot{\alpha}_1 + L_1\dot{\theta}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_1\dot{\alpha}_1 = (2L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1.$$

D'après la FIGURE 1, on a $2L_1 - \ell_1 = L_1 + R_1 + R_2 = R + R_2$ et on peut donc écrire $\dot{\alpha}_1 = \frac{R+R_2}{R_1}\dot{\theta}_1$.

2 Cinématique Graphique

On suppose $\dot{\theta}_1 > 0$ et $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)\| = 1.5$ cm. Vous réaliserez les constructions sur la FIGURE 3.

1. Identifier les centres instantanés de rotation (CIR) des mouvements $T_1/0$, D_2/D_1 et $D_2/0$.

Solution : T_1 et (0) sont en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$. Ainsi, le CIR du mouvement $T_1/0$ est le point O.

D_2 roule sans glisser sur D_1 (resp. (0)) en C (resp. en D). Par conséquent, le CIR D_2/D_1 (resp. $D_2/0$), se trouve en C (resp. D).

2. Construire le vecteur $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$.

Solution : O étant le CIR de $T_1/0$, la vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ a pour support la droite perpendiculaire à (OA) passant par A. Le sens et la norme de $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ sont tirés de l'énoncé.

3. Déterminer graphiquement $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{C} \in T_1/0)$.

Solution : $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{C} \in T_1/0)$ ont leur support perpendiculaire à (OA). Leur construction s'obtient aisément à l'aide du triangle des vitesses (de sommet O).

4. Déterminer graphiquement $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0)$.

Solution : Notons d'abord que $\vec{V}(\mathrm{B} \in D_2/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ puisque B est le lieu de la liaison pivot D_2-T_1. Le vecteur $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$ se déduit de $\vec{V}(\mathrm{B} \in D_2/0)$ par le triangle des vitesses de sommet D (CIR de $D_2/0$).

5. Déterminer graphiquement la position du CIR du mouvement $D_1/0$.

Solution : Il est clair que le CIR de $D_1/0$ est un point de la droite (OA).

D'une part, d'après la loi de composition des vitesses $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$. D'autre part, $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ car A est le lieu de la liaison pivot D_1-T_1. Ainsi, le mouvement $D_1/0$ est parfaitement connu en A et en C.

En utilisant le triangle des vitesses, on obtient le CIR de $D_1/0$ à l'intersection de (OA) et de la droite passant par les extrémités de $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0)$.

3 Cinématique Analytique (suite)

1. Expliquer pourquoi la liaison équivalente T_2-0 ne peut être traitée comme une liaison pivot glissière et justifier que le torseur cinématique du mouvement de T_2 par rapport à $\mathcal{R}_0$ soit de la forme :

$$\{\mathcal{V}(T_2/\mathcal{R}_0)\}_\mathrm{O} = \begin{Bmatrix} 0\vec{u_2} + 0\vec{v_2} + \Omega_z \vec{z_0} \\ U\vec{u_2} + 0\vec{v_2} + 0\vec{z_0} \end{Bmatrix}.$$

Solution : Pour une pivot-glissière l'axe du glissement est aligné avec l'axe de rotation ce qui n'est pas le cas ici.

D'après l'énoncé, le solide auxiliaire peut translater selon $(\mathrm{O}, \vec{u_2})$ par rapport à T_2 et tourner autour de $\vec{z_0}$ par rapport à (0). Le torseur cinématique de la liaison équivalente T_2-0 (sans prendre en compte le solide auxiliaire) est bien de la forme proposée.

2. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$.

Solution :

$$\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) + \vec{\Omega}(D_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_1 + d\dot{\alpha}_1 \vec{y}_1.$$

3. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{F} \in T_2/0)$.

Solution :

$$\vec{V}(\mathrm{F} \in T_2/0) = \vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) + \vec{\Omega}(T_2/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_1 + d\dot{\alpha} \vec{y}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{v}_2.$$

4. **(Bonus)** Expliquer comment trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ à partir des résultats précédents. Vous ne chercherez pas à mener à bien les calculs.

Solution : D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0) &= \vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0) + \vec{\Omega}(T_2/0) \wedge (\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}) \\ &= \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_1 + d\dot{\alpha}_1 \vec{y}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \wedge (-d\vec{x}_1 - \ell_1 \vec{u}_1) \end{aligned}$$

La liaison T_2-0 impose que $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0) \cdot \vec{v}_2 = 0$ et la relation recherchée entre $\dot{\theta}_2$ (vitesse de sortie) et $\dot{\theta}_1$ (vitesse d'entrée) s'obtient en projetant l'expression obtenue ci-dessus selon $\vec{v}_2$.

Une autre approche consisterait à partir d'une relation de la fermeture $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EO}} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, on obtiendrait, toujours en projetant selon $\vec{v}_2$, une relation entre θ_2, θ_1 et α_2.

4 Cinématique Graphique (suite)

On considère toujours $\dot{\theta}_1 > 0$ et $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)\| = 1.5$ cm. Vous utiliserez la Figure 4 pour les constructions.

1. Construire le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$ sur la Figure 4. Reporter de plus le centre instantané de rotation du mouvement de D_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$ construit sur la Figure 3.
2. Construire $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$.

Solution : On connaît le CIR du mouvement de D_1 par rapport à (0) et $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$. L'équiprojectivité entre A et E permet de trouver $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$.

Une autre technique consiste à tracer le cercle de centre O et de rayon OE. Désignons par E′ l'intersection de ce cercle et de la droite (OA). En utilisant le triangle des vitesses de sommet O, on construit $\vec{V}(\mathrm{E}' \in D_1/0)$ à partir de $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$. L'obtention de $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$ se déduit du CIR de $D_1/0$ et de l'égalité $\|\vec{V}(\mathrm{E}' \in D_1/0)\| = \|\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)\|$.

Le support de $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$ est la droite (EF). Du fait de l'existence d'une liaison pivot en E entre D_1 et T_2, on a $\vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0) = \vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$. On en déduit $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$ par équiprojectivité entre E et O.

Remarque : Si vous n'avez pas obtenu le CIR de $D_1/0$ lors de la partie 2, prendre $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) = \overrightarrow{\mathrm{EE}'}$ pour le tracé sur Figure 4.

3. Déterminer graphiquement la position du CIR du mouvement $T_2/0$.

Solution : Le CIR de $T_2/0$ est à l'intersection de la perpendiculaire à $\vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0)$ passant par E et de la perpendiculaire à (EF) passant par O.

Numéro d'anonymat :

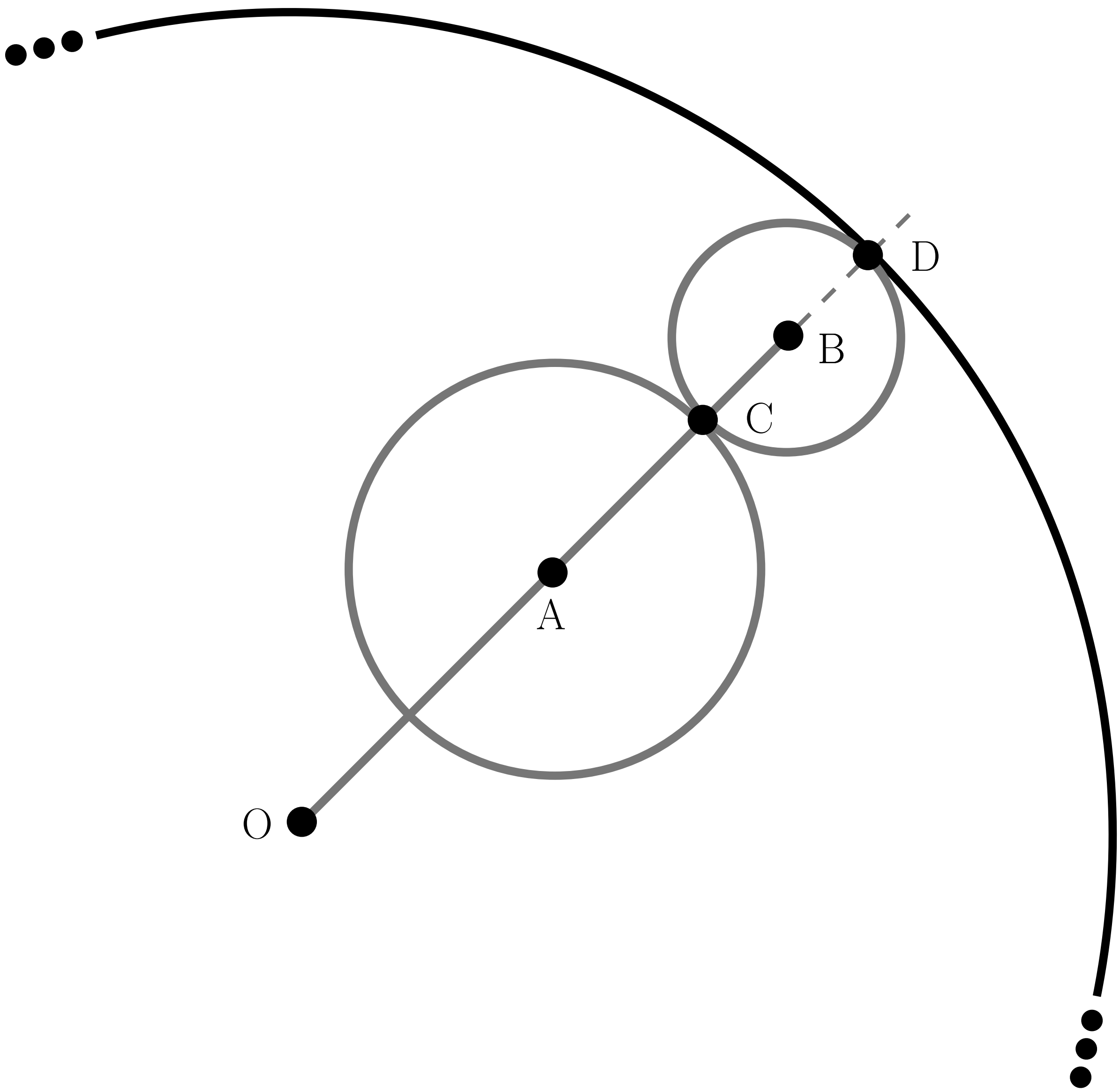

Figure 3 – À Rendre Avec Votre Copie.

Numéro d'anonymat :

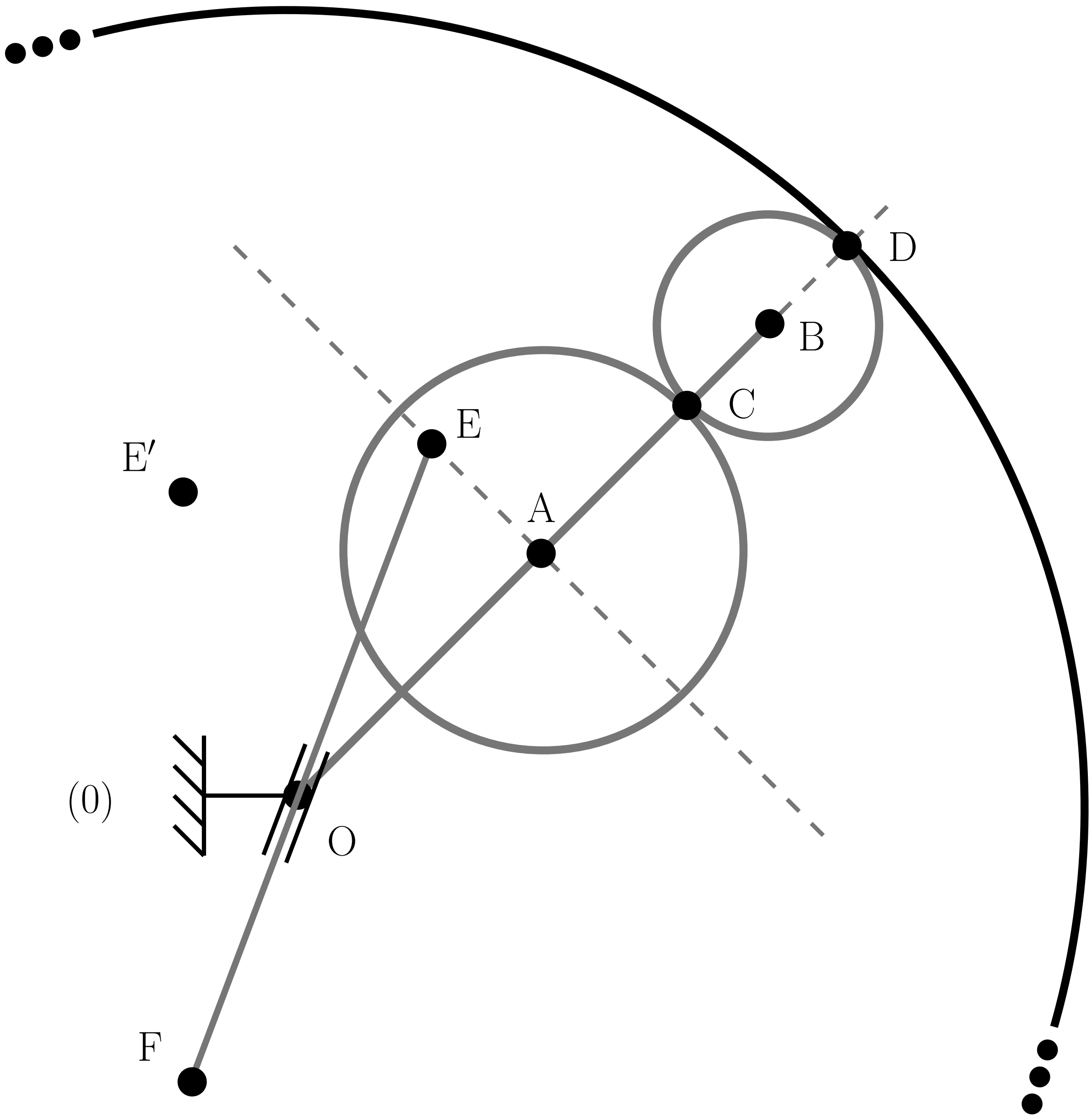

Figure 4 – À Rendre Avec Votre Copie.