Vibration et Ondes (4AM03)
Contrôle continu du 22 Octobre 2018
Partie *Vibrations des systèmes discrets*

Durée 1h30 - Sans document ni calculatrice

Vibrations d'un avion en vol

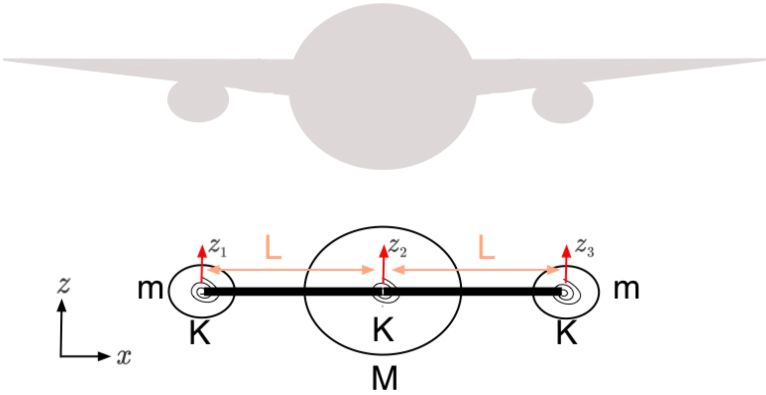

FIGURE 1 – Modèle, dimensions et variables

L'objectif du problème est de modéliser les vibrations transversales d'un avion en vol de croisière. L'avion est modélisé comme un système à trois degrés de liberté : la masse centrale (corps de l'appareil) et deux masses latérales (ailes + turboréacteurs). L'avion vole à vitesse constante et on ne s'intéresse qu'aux vibrations transversales dans la direction z (cf figure 1). On note M la masse de la partie centrale et m la masse d'une aile avec un turboréacteur. La structure de l'appareil est modélisée par des ressorts en torsion dont la raideur est notée K. Ces différentes grandeurs sont présentées sur la figure 1.

Les déplacements des masses par rapport à leurs positions d'équilibre statiques sont repérés par les variables $z_1(t)$, $z_2(t)$ et $z_3(t)$. Ces coordonnées généralisées sont rassemblées dans le vecteur $\mathbf{q} = (z_1 z_2 z_3)^t$.

On se place dans l'hypothèse des petites déformations et on néglige l'amortissement.

1. Quelle est l'énergie cinétique du système ?

Solution:

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{z}_1^2 + M\dot{z}_2^2 + m\dot{z}_3^2\right)$$

2. En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$.

Solution:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

3. On considère le sous-système présenté à la figure 2, montrer que l'énergie potentielle d'un ressort en torsion peut s'écrire : $U_t = \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(\Delta z)^2$

Solution: L'énergie potentielle d'un ressort en torsion est :

$$U_t = \frac{1}{2}K\theta^2$$

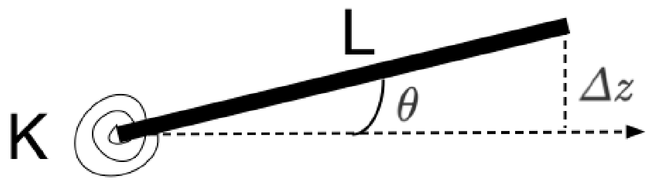

Figure 2 – Schématisation d'un ressort en torsion

On se place dans l'hypothèse des petits déplacements : $\sin\theta \approx \theta \approx \frac{\Delta z}{L}$, on en déduit que

$$U_t = \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(\Delta z)^2$$

4. Quelle est l'énergie potentielle associée à la structure.

Solution:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(z_2-z_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(z_1-z_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(z_2-z_3)^2 + \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}(z_3-z_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}\left(2z_1^2 + 4z_2^2 + 2z_3^2 - 4z_1z_2 - 4z_2z_3\right) \end{aligned}$$

5. En déduire la matrice de raideur $\mathbf{K}$ en fonction de $k = \frac{2K}{L^2}$.

Solution:

$$\mathbf{K} = k\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calculer les fréquences propres du système.

Solution: On cherche les racines de l'équation $det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2) = 0$:

$$\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 = \begin{pmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{pmatrix}$$

$$(k-m\omega^2)\left((2k-\omega^2 M)(k-\omega^2 m) - k^2\right) + k\left(-k(k-\omega^2 m)\right) = 0$$

La première racine est obtenue pour $k - m\omega^2 = 0$, soit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ou $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ Les deux autres racines s'obtiennent en résolvant

$$\begin{aligned} (2k-\omega^2 M)(k-\omega^2 m) - 2k^2 &= 0 \\ -2km\omega^2 - Mk\omega^2 + Mm\omega^4 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux autres racines sont donc

- $\omega_0^2 = 0$
- $\omega_2^2 = \frac{Mk+2mk}{Mm}$

donc on a $f_0 = 0$, $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mk+2mk}{Mm}}$

Pour tout le reste du problème, on considère que $M = 2m$ et on note $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ les trois pulsations propres du système.

7. Calculer les modes propres du système.

Solution:

— mode correspondant à la pulsation $\omega^2 = 0$
On cherche Z_1, Z_2, Z_3 tels que

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— mode correspondant à la pulsation $\omega^2 = \frac{k}{m}$
On cherche Z_1, Z_2, Z_3 tels que

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 0 & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— mode correspondant à la pulsation $\omega^2 = \frac{2k}{m}$
On cherche Z_1, Z_2, Z_3 tels que

$$\begin{pmatrix} -k & -k & 0 \\ -k & -2k & -k \\ 0 & -k & -k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Représenter et analyser succinctement les 3 modes propres.

Solution:

— Mode 1 : corps rigide
— Mode 2 : rotation autour de la masse centrale
— Mode 3 : "battement des ailes"

9. Montrer que la matrice modale peut s'écrire

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelles relations mathématiques caractérisent cette base modale ?

Solution:
Ce sont les relations d'orthogonalité

$$\mathbf{Z_i^t M Z_j} = M_i \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Z_i^t K Z_j} = K_i \delta_{ij}$$

où les M_i et K_i sont respectivement les masses et les raideurs modales.

10. Calculer la matrice masse modale $\mathbf{M_p}$ et la matrice de raideur modale $\mathbf{K_p}$

Solution:

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} 4m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 4m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 8k \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

11. A $t = 0$, une bourrasque de vent déplace la masse 1 de sa position d'équilibre de telle sorte que $z_1(t=0) = Z_1$, toutes les autres positions étant à l'équilibre et les vitesses initiales nulles. On note $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}^t$ les coordonnées modales. En passant dans la base modale, établir l'expression générale de l'évolution temporelle des modes propres en mouvement libre. En déduire celle des coordonnées généralisées : $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$.

Solution:
L'équation matricielle du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0}$$

En passant dans la base modale, on arrive au système découplé

$$\mathbf{\ddot{p}} + \mathbf{\Delta p} = \mathbf{0}$$

Qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1(t) = 0 \\ \ddot{p}_2(t) + \omega_2^2 p_2(t) = 0 \\ \ddot{p}_3(t) + \omega_3^2 p_3(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(t) = B_1 t + A_1 \\ p_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) \\ p_3(t) = A_3 \cos(\omega_3 t) + A_3 \sin(\omega_3 t) \end{cases}$$

La solution pour les coordonnées généralisées est donc de la forme

$$\mathbf{q} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} A_1 + B_1 t \\ A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ A_3 \cos(\omega_3 t) + B_3 \sin(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} z_1(t) &= A_1 + B_1 t + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t) + B_3 \sin(\omega_3 t) \\ z_2(t) &= A_1 + B_1 t - A_3 \cos(\omega_3 t) - B_3 \sin(\omega_3 t), \\ z_3(t) &= A_1 + B_1 t - A_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \sin(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t) + B_3 \sin(\omega_3 t) \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont $\mathbf{q}^t(t=0) = (Z_1, 0, 0)$ et $\dot{\mathbf{q}}^t(t=0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
z_1(t=0) &= A_1 + A_2 + A_3 = Z_1, \\
z_2(t=0) &= A_1 - A_3 = 0, \\
z_3(t=0) &= A_1 - A_2 + A_3 = 0, \\
\dot{z}_1(t=0) &= B_1 + B_2\omega_2 + B_3\omega_3 = 0, \\
\dot{z}_2(t=0) &= B_1 - B_3\omega_3 = 0, \\
\dot{z}_3(t=0) &= B_1 - B_2\omega_2 + B_3\omega_3 = 0,
\end{aligned}$$

On en déduit que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ et que $A_1 = Z_1/4$, $A_2 = Z_1/2$ et $A_3 = Z_1/4$. Ainsi le mouvement dû à cette condition initiale s'écrit :

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= \frac{Z_1}{4}\left(1 + 2\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)\right) \\
z_2(t) &= \frac{Z_1}{4}\left(1 - \cos(\omega_3 t)\right), \\
z_3(t) &= \frac{Z_1}{4}\left(1 - 2\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)\right)
\end{aligned}$$

On suppose maintenant qu'à $t = 0$, l'appareil est dans sa position d'équilibre (positions et vitesses initiales nulles) mais que des turbulences viennent agir comme une force extérieure sinusoïdale de pulsation Ω s'appliquant simultanément sur les trois masses : $\mathbf{F}_{turb} = F_0 \sin(\Omega t)\mathbf{e_z}$.

12. Écrire alors le vecteur $\mathbf{Q}$ des efforts généralisés et celui $\mathbf{Q}_m$ des efforts modaux.

Solution:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} \sin(\Omega t) \qquad \mathbf{Q_m} = \mathbf{Z^t Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} \sin(\Omega t) = \begin{pmatrix} 3F_0 \\ 0 \\ F_0 \end{pmatrix} \sin(\Omega t)$$

13. Écrire les équations du mouvement forcé dans la base modale.

Solution:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p} = \mathbf{M_p^{-1} Q_m}$$

14. En déduire les expressions des coordonnées modales. Préciser quels modes contribuent au mouvement.

Solution: On cherche $\mathbf{p}$ sous la forme $\mathbf{p} = \mathbf{P}\sin(\Omega t)$ et on pose $\mathbf{Q_m} = \tilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{m}\sin(\Omega t)$:

$$-\Omega^2\mathbf{P}\sin(\Omega t) + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{P}\sin(\Omega t) = \mathbf{M_p^{-1}}\tilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{m}\sin(\Omega t)$$

donc

$$\mathbf{P} = (\boldsymbol{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{M_p^{-1}}\tilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{m}$$

comme

$$(\boldsymbol{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\Omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_3^2 - \Omega^2} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4m(\Omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m(\omega_2^2 - \Omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4m(\omega_3^2 - \Omega^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3F_0 \\ 0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{-3F_0}{4m\Omega^2} \\ 0 \\ \frac{F_0}{4m(\omega_3^2 - \Omega^2)} \end{pmatrix} \sin(\Omega t)$$

On constate que seuls deux modes sont mis en jeu pour ce forçage particulier : le mode de translation du corps rigide et le mode du "battement des ailes". Le mode de rotation n'est pas excité, ce qui est normal compte tenu de l'excitation en phase sur les 3 DLL.

15. Établir les relations entre les coordonnées généralisées et en déduire que le système se réduit à 2 degrés de liberté.

Solution:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Z}\mathbf{p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + p_3 \\ p_1 - p_3 \\ p_1 + p_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$z_1 = z_3 = \left(\frac{-3}{4m\Omega^2} + \frac{1}{4m(\omega_3^2 - \Omega^2)} \right) F_0 \sin \Omega t$$

$$z_2 = \left(\frac{-3}{4m\Omega^2} - \frac{1}{4m(\omega_3^2 - \Omega^2)} \right) F_0 \sin \Omega t$$

Les deux ailes se déplacent en phase (pas de rotation d'ensemble).