Chapitre 2.

Le Principe des Puissances Virtuelles pour les milieux continus

- le principe des puissances virtuelles (PPV) a été formulé par d'Alembert au XVIII^e. Il peut être vu comme une reformalisation des équations fondamentales de la dynamique sous une forme intégrale. On dira qu'il s'agit d'une formulation dualisée des lois de Newton : les efforts s'exerçant sur un milieu continu sont définis par la puissance qu'ils peuvent potentiellement (virtuellement) développer dans un mouvement virtuel.
Si l'on veut se rendre compte du poids d'un objet, on va le soulever, des efforts de frottement dans un mécanisme, on va chercher à le déplacer (ou encore d'une tension dans un cable). Cela peut apparaître comme une voie détournée mais qui est en fait physique

- Cette formulation dualisée, équivalente aux équations locales du mouvement est efficace pour construire des modélisations de milieux continus spécifiques. On l'utilisera au chapitre 3 pour formuler les équations des milieux curvilignes
Elle est aussi à la base des méthodes de résolution approchée et notamment numériques de problèmes de mécanique des solides et en particulier de la méthode des éléments finis.

1. Mouvement Virtuel d'un milieu continu.

Soit Ω_t un milieu continu dans sa configuration actuelle à un instant t fixé, $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen adopté

- On définit le mouvement virtuel de ce milieu à l'instant t par la donnée d'un champ de vecteur quelconque en tout point de Ω_t. Ce champ est appelé vecteur vitesse virtuelle et noté

$$\left\{ \underline{v}^*(\underline{x},t) \quad \text{en tout } \underline{x} \in \Omega_t \right.$$

$\underline{v}^*$ définit un mouvement potentiel du point M, virtuel, c'est un vecteur arbitraire, quelconque auquel on attribue l'interprétation physique de vitesse (sans rapport avec la véritable vitesse)

Il ne vérifie pas en particulier forcément les conditions cinématiques auxquelles est soumis le champ de vitesse réel.

L'espace des mouvements virtuels est un espace vectoriel. Les champs virtuels sont supposés réguliers dans Ω_t

- Un champ virtuel est rigidifiant sur Ω si il s'écrit sous la forme $\underline{v}^*(\underline{x},t) = \underline{v}_0^*(t) + \underline{\omega}_0(t)^* \wedge \underline{x} = \underline{v}_0^* + \underline{\underline{\Omega}}_0^* \cdot \underline{x}$

avec $\underline{v}_0^*(t)$ vitesse virtuelle au point O

$\underline{\omega}_0^*(t)$ vitesse de rotation au point O.

et ${}^t\underline{\underline{\Omega}}_0^* = -\underline{\underline{\Omega}}_0$

Nous allons traduire les équations de la dynamique sous forme de deux intuitions fondamentales

1) dans tout mouvement virtuel (ou réel), il doit y avoir égalité entre la puissance développée par les efforts d'accélération et la puissance des efforts intérieurs et extérieurs.

2) les efforts intérieurs ne peuvent pas développer de puissance dans un mouvement rigidifiant qui respecte les formes et donc dans lequel les différents points matériels restent dans la même position relative les uns par rapport aux autres

2. Définitions des puissances virtuelles développées sur le milieu

- Les efforts extérieurs sont de deux types :

les forces volumiques $\rho(\underline{x})\,\underline{f}(\underline{x},t)$

et les forces surfaciques exercées sur $\partial\Omega$ $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{\underline{\Pi}}(\underline{x},t)\,\underline{n}(\underline{x})$

avec $\underline{n}$ normale extérieure unitaire

On pose donc naturellement pour la puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs sur le domaine Ω dans le mouvement virtuel $\underline{v}^*$

$$\mathcal{P}_e^*(\underline{v}^*) \int_\Omega \rho(\underline{x})\,\underline{f}(\underline{x},t)\cdot\underline{v}^*(\underline{x},t)\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\cdot\underline{v}^*(\underline{x},t)\,ds$$

De façon analogue, pour tout sous-système $\omega \subset \Omega_t$ on a :

$$\mathcal{P}_e^{*\omega}(\underline{v}^*) = \int_\omega \rho\,\underline{f}(\underline{x},t)\cdot\underline{v}^*(\underline{x},t)\,d\omega + \int_{\partial\omega} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\cdot\underline{v}^*(\underline{x},t)\,ds$$

puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs à ce sous système dans le mouvement virtuel $\underline{v}^*$

- Par définition, la puissance virtuelle développée par les efforts d'accélération sur le domaine Ω (ou un sous-système ω) dans le mouvement virtuel est donnée par :

$$\mathcal{P}_a^*(\underline{v}^*) = \int_\Omega \rho(\underline{x})\,\underline{\gamma}(\underline{x},t)\cdot\underline{v}^*(\underline{x},t)\,d\Omega$$

- La définition de la puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs est moins triviale et ne va se justifier qu'a posteriori par équivalence du P.PV et des équations du mouvement

$$\mathcal{P}_i^*(\underline{v}^*) = -\int_\Omega \sigma_{ij}(x,t)\,\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j}\,d\Omega \qquad \text{avec } \Sigma \text{ sur } i,j \text{ repeté}$$

3 Enoncé du principe des puissances virtuelles

le principe des puissances virtuelles est constitué de 2 enoncés

Dans un référentiel galilein et pour tout système materiel ω d'un milieu continu à l'instant t =

1) $\mathcal{P}_a^*(\underline{v}^*) = \mathcal{P}_e^*(\underline{v}^*) + \mathcal{P}_i^*(\underline{v}^*)$ $\forall\, \underline{v}^*$ champ virtuel regulier.

$$\int_\omega \rho\,\underline{\gamma}\cdot\underline{v}^*\,d\omega = \int_\omega \rho\,\underline{f}\cdot\underline{v}^*\,d\omega + \int_{\partial\omega} \underline{T}\cdot\underline{v}^*\,ds - \int_\omega \sigma_{ij}\,\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j}\,d\omega$$

$\forall\, \underline{v}^*$
$\forall\, \omega \subset \Omega$

2) $\mathcal{P}_i^*(\underline{v}^*) = 0$ $\forall\, \underline{v}^*$ mouvement rigidifiant virtuel

4- Equivalence entre le P.P.V et les equations de la dynamique

Le PPV est équivalent aux equations locales du mouvement

$$\begin{cases} \underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{f} = \rho\,\underline{\gamma} & \text{dans } \Omega \text{ ou } \omega. \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ symetrique} & \\ \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{T} & \text{sur } \partial\Omega \text{ ou } \partial\omega \end{cases}$$

Preuve : On etablit tout d'abord l'implication PPV $\Rightarrow$ equation

a) Considerons l'enoncé 2

$\mathcal{P}_i^*(\underline{v}^*) = 0$ $\forall\, \underline{v}^*$ rigidifiant

$$\underline{v}^* = \underline{v}_0^* + \underline{\omega}_0^* \wedge \underline{x} = \underline{v}_0^* + \underline{\underline{\Omega}}_0\,\underline{x}$$

avec ${}^t\underline{\underline{\Omega}}_0 = -\underline{\underline{\Omega}}_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} = \Omega_{0ij}$

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = 0 \iff 0 = \int_\omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} d\omega = \int_\omega \sigma_{ij} \Omega^0_{ij} \, d\omega$$

or $\sigma_{ij} \Omega^0_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \Omega^0_{ij} + \sigma_{ji} \Omega^0_{ji})$ $\quad i, j$ muets

d'où $\sigma_{ij} \Omega^0_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) \Omega^0_{ij}$ $\quad$ car $\Omega^0_{ji} = -\Omega^0_{ij}$

de sorte que $\quad \mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = 0 \Rightarrow \int_\omega (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) \Omega^0_{ij} \, d\omega = 0 \quad \forall \Omega^0$

d'où $\quad \underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} \quad \underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique

- Considérons l'énoncé 1

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) + \mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = \mathcal{P}_a(\underline{v}^*) \quad \forall \underline{v}^*$$

$$-\int_\omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} d\omega + \int_\omega \rho f_i \cdot v_i^* \, d\omega + \int_{\partial\omega} T_i \cdot v_i^* \, ds = \int_\omega \rho \gamma_i v_i^* \, d\omega \quad \forall v^*$$

On rappelle la formule de Green et d'intégration par parties

$$\int_\omega f_{,i} \, d\omega = \int_{\partial\omega} f n_i \, ds$$

$$\int_\omega (fg)_{,i} \, d\omega = \int_\omega f_{,i} g \, d\omega + \int_\omega f g_{,i} \, d\omega = \int_{\partial\omega} f g n_i \, ds$$

qui se généralise à des tenseurs

$$\int_{\partial\omega} \sigma_{ij} n_j v_i^* \, ds = \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i^*) \, d\omega = \int_\omega \sigma_{ij} v^*_{i,j} \, d\omega + \int_\omega \sigma_{ij,j} v_i^* \, d\omega$$

d'où

$$-\int_{\partial\omega} \sigma_{ij} n_j v_i^* \, ds + \int_\omega \sigma_{ij,j} v_i^* \, d\omega + \int_\omega \rho f_i v_i^* \, d\omega + \int_{\partial\omega} T_i v_i^* \, ds = \int_\omega \rho \gamma_i v_i^* \, d\omega \quad \forall v^*$$

soit $\quad \int_\omega (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \gamma_i) v_i^* \, d\omega + \int_{\partial\omega} (T_i - \sigma_{ij} n_j) v_i^* \, ds = 0 \quad \forall \underline{v}^*$

- choisissons tout d'abord $\underline{v}^*$ dans ω quelconque, tel que $\underline{v}^* = \underline{0}$ sur $\partial\omega$

alors $\quad \int_\omega (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \gamma_i) v_i^* \, d\omega = 0 \quad \forall \underline{v}^*$ quelconque dans ω

et donc $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \gamma_i \quad i=1,2,3 \quad \forall x \in \omega \subset \Omega$

on obtient donc l'équation du mouvement dans sa formulation locale

- revenons maintenant à l'intégrale précédente

$$\int_\omega (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \gamma_i)\, v_i^* \, d\omega + \int_{\partial\omega} (T_i - \sigma_{ij} n_j)\, v_i^* \, ds = 0 \quad \forall \underline{v}^*$$

d'après l'équation du mouvement, il reste

$$\int_{\partial\omega} (T_i - \sigma_{ij} n_j)\, v_i^* \, ds = 0 \quad \forall \underline{v}^*$$

d'où $\quad T_i = \sigma_{ij} n_j \quad$ en tout point de $\partial\omega$

on retrouve ainsi la caractérisation du vecteur contrainte

ou si l'on écrit le PPV, la condition aux limites sur $\partial\Omega$

- Inversement considérons maintenant les équations locales de la dynamique et multiplions par $\underline{v}^*$ champ quelconque et intégrons sur ω

$$\int_\omega \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \gamma_i \right) v_i^* \, d\omega = 0 \quad \forall \underline{v}^*$$

En appliquant la formule de Green, on a :

$$\int_{\partial\omega} \sigma_{ij} v_i^* n_j \, ds - \int_\omega \sigma_{ij} v_{i,j}^* \, d\omega + \int_\omega \rho f_i v_i^* \, d\omega = \int_\omega \rho \gamma_i v_i^* \, d\omega \quad \forall \underline{v}^*$$

or $\sigma_{ij} n_j v_i^* = T_i v_i^*$ sur $\partial\omega$ d'après la condition aux limites

d'où $\forall \underline{v}^*$

$$\underbrace{\int_{\partial\omega} T_i v_i^* \, ds + \int_\omega \rho f_i v_i^* \, d\omega}_{\mathcal{P}_e^*(\underline{v}^*)} \; \underbrace{- \int_\omega \sigma_{ij} v_{i,j}^* \, d\omega}_{\mathcal{P}_i^*(\underline{v}^*)} = \underbrace{\int_\omega \rho \gamma_i v_i^* \, d\omega}_{\mathcal{P}_a(\underline{v}^*)}$$

d'où l'énoncé 1 du PPV.

De plus formons $\int_\omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \, d\omega$ pour $\underline{v}^*$ vitesse virtuelle rigidifiante

$$\underline{v}^* = \underline{v}_0^* + \underline{\omega}_0^* \wedge \underline{x} \Rightarrow \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} = \Omega_{0ij}^* = -\Omega_{0ji}^*$$

d'où $$\int_\omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} d\omega = \int_\omega \sigma_{ij} \Omega_{ij}^* d\omega$$

comme $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique d'après les équation locales

on a : $\sigma_{ij} \overset{o}{\Omega}{}^*_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \overset{o}{\Omega}{}^*_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ji} \overset{o}{\Omega}{}^*_{ji} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \big(\underbrace{\overset{o}{\Omega}{}^*_{ij} + \overset{o}{\Omega}{}^*_{ji}}_{= 0} \big)$

(i,j muets)

d'où $P_i(\underline{v}^*) = 0 \quad \forall \underline{v}^*$ rigidifiant -

Remarque 1 : Compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, on peut définir la puissance développée par les effets intérieurs par

$$\begin{cases} P_i(\underline{v}^*) = -\int_\omega \sigma_{ij}\, d_{ij}(\underline{v}^*)\, d\omega = -\int_\omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}^*)\, d\omega \\ \text{avec } \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}^* + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}^* \right) \end{cases}$$

Remarque 2 : - L'énoncé 1 du PPV correspond à une formulation faible des équation locales, les champs virtuels $\underline{v}^*$ étant des fonction tests arbitraire (cf cours de maths L3 ou méthodes numériques)

- Le principe de la méthode des éléments est de prendre comme fonctions tests (champs vitesses virtuelles) des fonctions polynomiales (fonction de forme)

5- Une première application du PPV : Justification de la loi de comportement d'un solide élastique

Supposons que Ω soit un solide élastique et que les hypothèses des petites transformation et petits déplacements soient applicables

Nous avons admis au chapitre 1 que la loi de comportement s'écrit $\quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} (\rho_0 \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T))$ où $\rho_0 \Psi$ est l'énergie élastique volumique (Ψ énergie massique)

Nous allons justifier cette relation moyennant une hypothèse raisonnable

On admet que ~~dans~~ un processus quasi-statique, le travail des forces extérieures est égal à la variation de l'énergie élastique (peut se justifier avec le 1er principe de la thermodynamique)

soit :

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt}(\rho\Psi)\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v}\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{v}\, ds$$

$\underline{v}$ étant ici la vitesse réelle

de sorte que en appliquant le PPV

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt}(\rho\Psi)\, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v})\, d\Omega .$$

($\mathcal{P}_a(\underline{v}) = 0$ équilibre quasi-statique)

cette égalité est aussi vraie sur $\omega \subset \Omega$

or $$\int_{\Omega} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v})\, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\mathcal{E}}}}(\underline{u})\, d\Omega$$

$$\underline{v} = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \dot{\mathcal{E}}(\underline{u})$$

d'où $$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}(\rho\Psi)\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \underline{\underline{\Pi}} : \frac{d}{dt}(\underline{\underline{\mathcal{E}}}(\underline{u}))\right] d\Omega = 0$$

soit $$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\mathcal{E}}}}(\rho\Psi) \quad \text{presque partout dans } \Omega$$