

Notes du cours Mécanique des Fluides (L2 : 2A004)

J.-M. Fullana

Institut Jean Le Rond d'Alembert

Université Pierre et Marie Curie

2018-2019 S1

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 1.1 | Fluide : définition | 5 |
| 1.2 | Hypothèse de milieu continu | 5 |
| 1.3 | Masse volumique | 6 |
| 1.4 | Compressibilité | 8 |
| 1.5 | Viscosité | 9 |
| 2 | Statique des fluides | 13 |
| 2.1 | Loi fondamentale de la statique des fluides | 13 |
| 2.2 | Efforts volumiques | 13 |
| 2.3 | Efforts surfaciques | 14 |
| 2.4 | Pression | 14 |
| 2.5 | Dimensions et unités | 16 |
| 2.6 | Formule de la divergence | 17 |
| 2.7 | Équation fondamentale de la statique des fluides | 17 |
| 2.7.1 | Forme globale | 17 |
| 2.7.2 | Loi sous forme locale | 18 |
| 2.7.3 | Champ de la pesanteur | 19 |
| 2.8 | Conditions aux limites | 20 |
| 2.8.1 | Paroi solide | 20 |
| 2.8.2 | Interface entre deux fluides non miscibles | 22 |
| 2.9 | Théorème d'Archimède | 23 |
| 2.10 | Forces et moments | 24 |
| 2.11 | Stabilité des corps flottants | 25 |
| 2.12 | Mesure de la pression | 25 |
| 2.12.1 | Baromètre | 25 |
| 2.12.2 | Manomètre | 25 |
| 3 | Equilibre des interfaces | 26 |
| 3.1 | Vases communicantes et montée capillaire | 26 |
| 3.2 | La tension de surface | 27 |
| 3.3 | La loi de Laplace (1805) | 29 |
| 3.4 | Longueur capillaire | 31 |
| 3.5 | Loi de Jurin | 32 |
| 3.6 | Montée capillaire près d'une paroi | 34 |
| 3.7 | Mouillage | 36 |
| 4 | Cinématique des Fluides | 37 |
| 4.1 | Hypothèse de milieu continu | 37 |
| 4.2 | Description de Lagrange | 38 |
| 4.3 | Description d'Euler | 40 |
| 4.4 | Comparaison des approches | 44 |
| 4.5 | Types d'écoulement | 44 |
| 4.5.1 | Écoulement plan | 45 |
| 4.5.2 | Écoulement stationnaire | 45 |
| 4.5.3 | Écoulement incompressible | 45 |
| 4.5.4 | Écoulement irrotationnel | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.6 | Lignes de courant | 46 |
| 4.7 | Tube de courant | 49 |
| 4.8 | Ligne d'émission | 49 |
| 4.9 | Circulation | 49 |
| 4.10 | Fonction de courant | 50 |
| 4.10.1 | Fonction de courant : coordonnées polaires | 53 |
| 4.11 | Potentiel de vitesses | 53 |
| 4.12 | Déformations d'un élément de fluide | 55 |
| 5 | Ecoulements potentiels et Potentiel Complexe | 60 |
| 5.1 | Unicité du champ de vitesses | 60 |
| 5.2 | Additivité des solutions | 60 |
| 5.3 | Exemples d'écoulements potentiels | 60 |
| 5.4 | Solide de Rankine | 63 |
| 5.5 | Potentiel Complexe | 63 |
| 5.6 | Transformation conforme | 67 |
| 5.7 | Transformation de Joukovski | 68 |
| 6 | Lois de conservation | 71 |
| 6.1 | Théorème du transport de Reynolds | 71 |
| 6.2 | Conservation de masse | 73 |
| 6.3 | Bilan de la quantité de mouvement | 77 |
| 6.4 | Equation d'Euler | 78 |
| 6.4.1 | Fluide parfait et incompressible | 78 |
| 6.4.2 | Fluide parfait et compressible | 78 |
| 6.4.3 | Approximation de Bousinesq | 78 |
| 6.5 | Théorème de Bernoulli | 78 |
| 6.6 | Applications du théorème de Bernoulli | 81 |
| 6.6.1 | Tube de Venturi | 81 |
| 6.6.2 | Tube de Pitot | 81 |
| 6.6.3 | Formule de Torricelli | 81 |
| 6.6.4 | Ondes de surface | 81 |
| 6.7 | Théorème des quantités de mouvement | 83 |
| 7 | Fluides visqueux | 87 |
| 7.1 | Transport de la quantité de mouvement | 87 |
| 7.2 | Effort sur une interface | 87 |
| 7.3 | Modèles pour τ | 87 |
| 7.4 | Équation de mouvement | 88 |
| 7.5 | Équation de Navier-Stokes | 91 |
| 7.6 | Nombre de Reynolds | 93 |
| 7.7 | Similitude dynamique | 94 |
| 7.8 | Écoulements dans des tubes cylindriques | 97 |
| A | Mathématiques | 99 |
| A.1 | Notion de gradient, de divergence, de rotationnel | 99 |
| A.2 | Opérateurs | 106 |

1 Introduction

Nous allons commencer par la caractérisation de l'objet dont l'on veut étudier. Nous n'oublions pas que nous sommes intéressés à des variables macroscopiques (vitesses, pressions, températures,...) mais un regard sur la façon qui ont les molécules se s'arranger entre elles est très instructif.

Prenons deux molécules isolées, la force autour d'elles est d'origine électromagnétique et due aux interactions entre les électrons et le noyau de chaque molécule. On l'appelle *force intermoléculaire*. Pour des petites valeurs de la distance d entre les centres des molécules la force est soit (i) attractive, quand des échanges d'électron sont possibles alors nous avons donc une liaison chimique qui apparaît, soit (ii) répulsive dans le cas contraire. La force répulsive décroît rapidement avec la distance d et devient attractive à une distance d_0 appelé distance d'équilibre ($d_0 \sim 3 - 4 \cdot 10^{-10} m$). Au delà, pour des grandes valeurs de la distance d la force intermoléculaire est toujours attractive mais très faible. La Figure 13 présente le comportement typique de la force intermoléculaire.

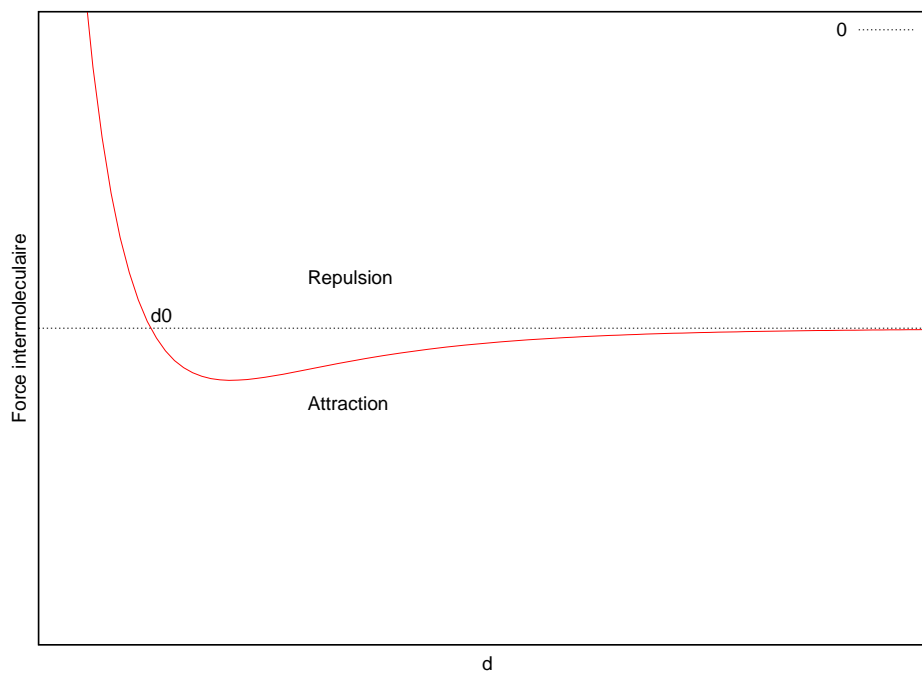


FIGURE 1 – Force intermoléculaire en fonction de la distance d entre les centres des molécules.

La connaissance de la masse et de la densité des molécules de chaque substance permet de calculer la distance moyenne entre leurs centres. Pour des substances composées des molécules simples le calcul montre que dans la phase gazeuse, à des pressions et températures normales, cette distance est de l'ordre de $10 d_0$ tandis que pour la phase liquide et solide est de l'ordre de d_0 .

Nous pouvons déjà avancer d'une manière heuristique un comportement caractéristique des substances suite au calcul des distances moyenne et à la connaissance de la forme de la fonction des forces intermoléculaires : dans les phases solides et liquides les molécules seront plus difficiles à rapprocher car étant autour de la position d'équilibre les forces nécessaires pour les déplacer sont très grandes, ce qui est en réalité proportionnelle à la pente au point d'équilibre sur la Figure 13, car nous nous rappelons de $F = -\frac{dV}{dr}$.

La Figure 2 montre schématiquement les structures internes d'un solide, d'un liquide et d'un gaz.

Dans les solides ce phénomène est dû au bien connu arrangement périodique du réseau cristallin, dans les liquides, dont la physique microscopique est moins connue, il est probablement dû à la forme compacte des amas des molécules. Par contre dans les phases gazeuses les forces nécessaires pour concentrer un ensemble de molécules est moindre. Donc nous pouvons dire que la capacité à rapprocher des molécules,

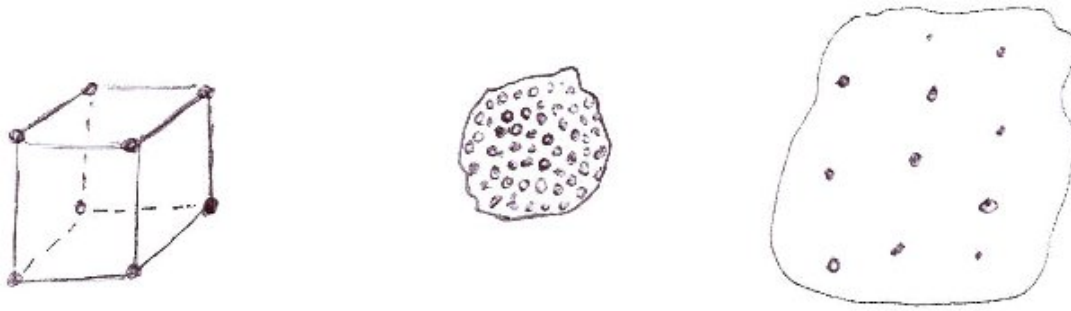


FIGURE 2 – Schéma des structures internes d’un solide, d’un liquide et d’un gaz.

disons $\Delta\rho$ d’une densité ρ

$$\Delta\rho/\rho$$

mesure en quelque sorte la compressibilité d’une substance et de ce point de vue

- les solides sont très proches aux liquides, très peu compressibles,
- et différents de la phase gazeuse, plus compressible.

Nous rappelons que dans le cas de la dynamique des gaz jusqu’une vitesse de l’ordre de 0.3 de la vitesse du son (Mach 0.3) l’écoulement peut être considéré comme incompressible. Sauf dans les études des écoulements dans les turbines ou dans l’aérospatiale, l’étude des écoulements incompressibles représente la plupart de thèmes de recherche scientifique.

Une autre propriété de l’état de la matière qui différencie les fluides des solides est la fluidité, soit la capacité à se déformer suite à des efforts tangentiels. Bien que la connaissance de l’état liquide est encore incomplète il semblerait que les amas de molécules sont partialement ordonnés permettant le glissement de petits groupes les uns sur les autres ce qui donne la “fluidité” connue de la phase liquide. Il est de même pour les états gazeux dont les interactions entre les molécules sont très faibles. En revanche le réseau cristallin de l’état solide ne permet pas le glissement des molécules entre elles donnant la “rigidité” macroscopique. Nous avons donc que du point de vue de la fluidité

- les gaz sont très proches aux liquides, ils peuvent “fluer”,
- et différents de la phase solide, plus rigide.

1.1 Fluide : définition

Il n’est pas évident d’avoir une définition précise de fluide d’autant plus que des matériaux comme le sable, le dentifrice (et même le sang!) pourtant courants ont un comportement “bizarre”

Leur comportement dépend du niveau d’effort tangentiel appliqué, une manière d’y introduire une quantification c’est de définir la notion de contrainte, une force par unité de surface F/A .

Nous pouvons donc élargir la caractérisation des matériaux en prenant en compte le niveau des contraintes, par exemple pour le sable nous avons

1.2 Hypothèse de milieu continu

Nous allons étudier les fluides à une échelle plus grande que l’échelle moléculaire mais plus petite que la dimension caractéristique de l’objet étudié. Nous introduisons l’hypothèse de milieu continu

| contrainte tangentielle | comportement |
|-------------------------|--------------|
| faible | solide |
| élevée | fluide |

TABLE 1 – Comportement du sable

un milieu est considéré comme continu si l'échelle de description du phénomène néglige les caractéristiques individuelles de chaque molécule tout en pouvant définir un élément matériel (dans notre cas une particule de fluide) que l'on peut suivre dans son mouvement et que l'on peut attacher des grandeurs cinématiques (position, vitesse, ...) et thermodynamiques (masse volumique, température, pression) qui peuvent être considérés constants.

L'hypothèse de milieu continu définit donc un modèle mathématique utilisé pour représenter de manière simple et maniable une réalité extrêmement complexe. Il est intéressant déjà remarquer que les prédictions de ce modèle ne seront correctes que dans la mesure où les vérifications expérimentales se feront sur de petits volumes macroscopiques, mais qui contiendront encore un nombre suffisamment grand de molécules pour que la mesure soit encore une moyenne statistiquement significative.

La Figure 28 présente la variation de la valeur d'une grandeur quelconque en fonction de la taille du volume caractéristique.

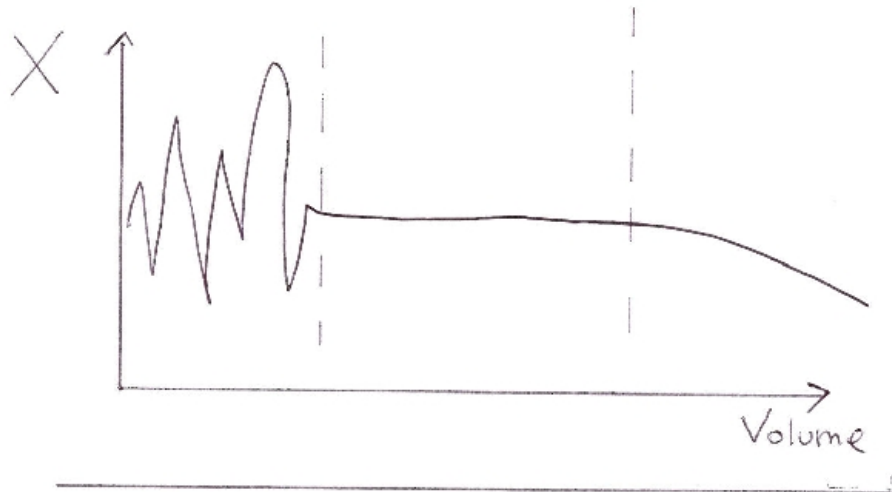


FIGURE 3 – Variation de la grandeur X en fonction de la taille de l'échantillon.

1.3 Masse volumique

La densité volumique ou masse volumique d'un fluide mesure la quantité de masse dans une unité de volume et elle est généralement indiquée par le symbole ρ .

Plus formellement : soit $\delta\mathcal{V}$ un petit volume de fluide centré en un point M de coordonnées (x, y, z) , on note δm la masse de ce volume élémentaire. La masse volumique du fluide contenu dans $\delta\mathcal{V}$ est alors définie par

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta\mathcal{V}} \quad (1)$$

si cette limite existe. Dans le Système International (SI) l'unité de mesure de la masse volumique est kg/m^3 . Quelques valeurs

Nous savons par expérience que l'on peut modifier facilement la densité d'un gaz en changeant la température ou la pression. Pour un liquide l'effet c'est moins important mais pas de la moindre importance. Le phénomène physique est le même dans les deux cas, un fluide chauffé s'expande (les forces d'origine thermique augmentent et donc la séparation moyenne des molécules dans un volume élémentaire par conséquent augmente) et donc la densité diminue. Quand une portion de fluide est chauffée elle devient plus légère et elle aura tendance à remonter donc à établir un écoulement fluide (fluide en mouvement). Ce phénomène est à l'origine des mouvements dans l'atmosphère et dans les océans et il est utilisé dans nombreuses applications pratiques (ex. montgolfière).

La Figure 4 présente la variation de la densité de l'eau et de l'air en fonction de la température. Pour des grandes températures le comportement suit une loi qui n'est pas linéaire mais qui peut être approchée localement par une relation de type

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \alpha\Delta T \quad (2)$$

où α est généralement négatif (la densité décroît quand la température augmente).

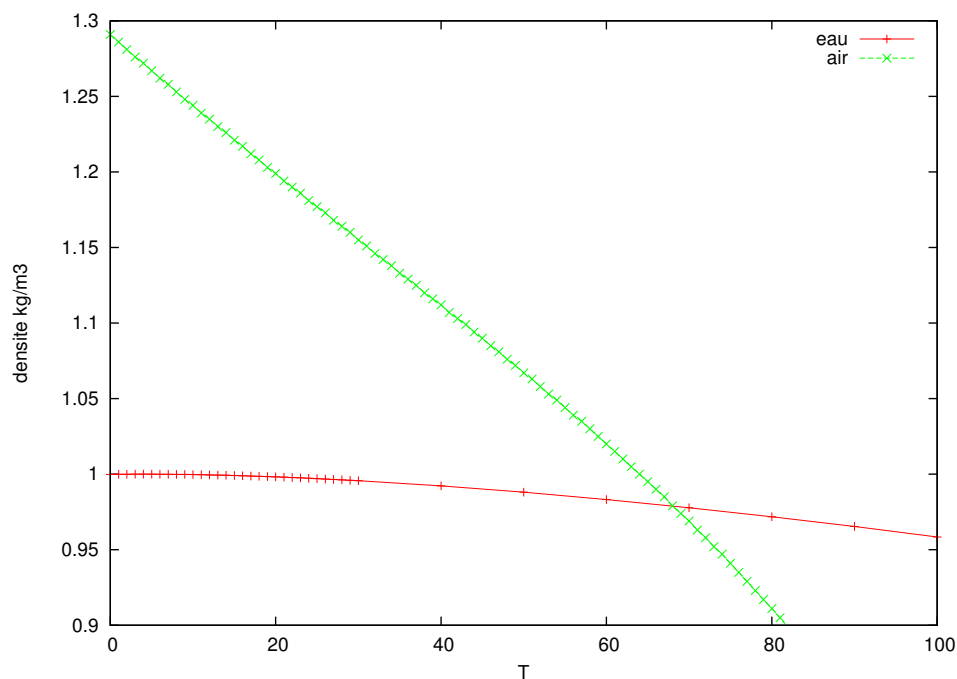


FIGURE 4 – Variation de la densité de l'eau et de l'air en fonction de la température.

La Figure 5 montre le comportement de l'eau quand la densité s'approche de zéro. La variation de la densité de l'eau présente un maximum autour de la température $T = 4\text{ }^{\circ}\text{C}$, cette anomalie (car tous les liquides équivalents continuent à avoir une densité croissante quand la température diminue) est en fait responsable de la survivance des formes de vie dans l'eau dont la notre...

La Figure 6 présente le cas "anormal" de l'eau, les fonds des lacs et de l'océan sont toujours à une température de $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ permettant le développement de la vie marine. En particulier, dans les pôles la glace, plus légère que l'eau remonte pour faire une couche (même en faire des continents!) et l'eau à $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ descend vers le fond. La couche de glace fait aussi office d'écran empêchant le froid d'être en contact avec l'eau liquide.

Dans le cas "normale" (Figure 7), nous pourrions imaginer que l'eau en surface devenant glace tombe vers le fond permettant une nouvelle couche de liquide d'être en contact avec le froid, le processus donnant finalement un bloc de glace entier...

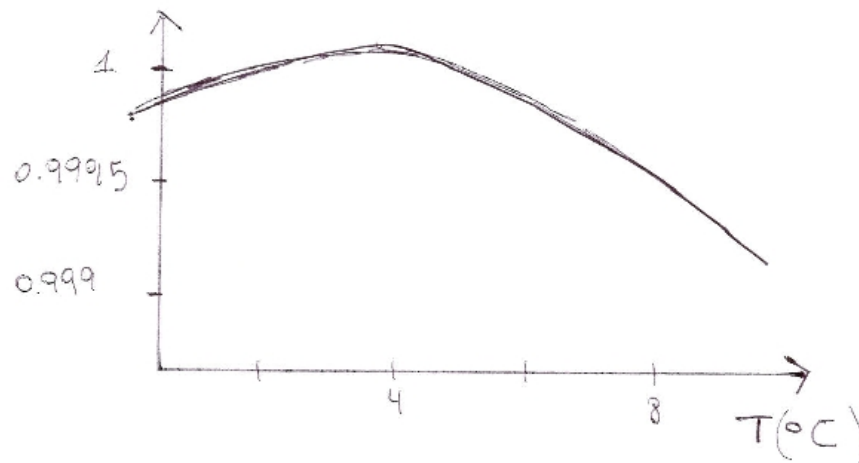


FIGURE 5 – Densité de l'eau près de zéro.



FIGURE 6 – Comportement de l'eau "anomale".

1.4 Compressibilité

Nous avons parlé du fait qu'une propriété des fluides comme la compressibilité pouvait être expliquée qualitativement par le biais des forces mises en jeu aussi bien pour un liquide que pour un gaz. En supposant qu'un fluide occupe un volume de référence V nous pouvons nous demander qu'il sera devenu après avoir appliquée une différence de pression dp , la variation de volume dV permet de définir le module de compressibilité

$$K = -\frac{dp}{dV/V}$$

le signe négatif vient du fait qu'une pression positive donne une diminution de volume. Le coefficient de compressibilité β est relié à K par $\beta = 1/K$. Si nous utilisons la définition de la masse m , $m = \rho V$ nous obtenons que $dV/V = -d\rho/\rho$ donc

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho}.$$

Dans le cas des liquide K a une valeur très grande de l'ordre de 10^9 Pa . Pour avoir une idée des grandeurs mises en jeu disons que $1 \text{ atm} = 10^6 \text{ Pa}$ et qu'un mètre d'eau est équivalent à 10^4 Pa .



FIGURE 7 – Comportement de l’eau “normale”.

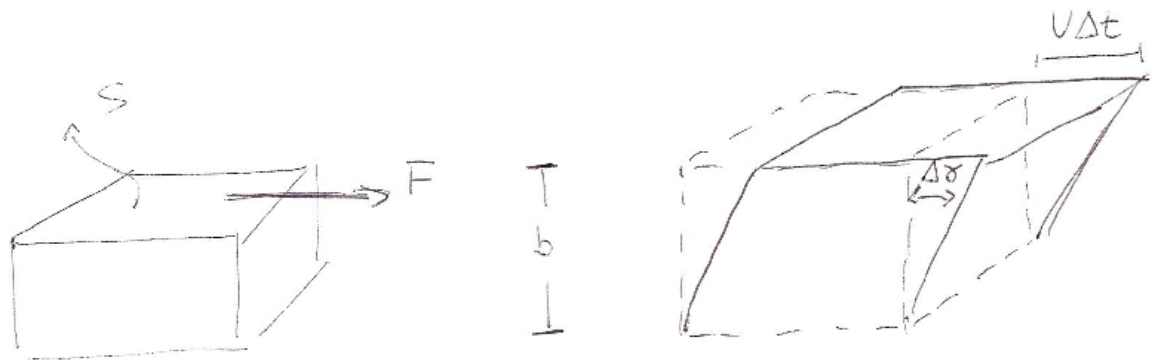


FIGURE 8 – Schéma de la déformation d’une particule de fluide

Ceci nous dit que les variations de volume d’un liquide avec la pression peuvent être négligées, nous avons donc en pratique que les liquides sont *incompressibles*. Cette propriété sera très importante dans la description cinématique et dynamique d’un écoulement fluide.

Dans le cas d’un gaz la valeur de K dépend du type de transformation utilisée (T constant ou p constant), par exemple pour une transformation isotherme nous avons $p/\rho = cte$ donc

$$\frac{dp}{d\rho/\rho} = p.$$

1.5 Viscosité

Si nous considérons une particule de fluide comme celle de la Figure 8(a) et nous appliquons sur la surface S une force F (une contrainte tangentielle) que nous dénotons τ , la particule se déformera comme il est montré sur la Figure 8(b).

Si nous assumons que la surface supérieure sous l’action de la contrainte τ se déplace à vitesse constante dans un temps Δt elle se déplacera d’une distance $U\delta t$. La déformation angulaire est donc $\tan(\Delta\gamma) = U\Delta t/b \sim \Delta\gamma$. Pour la vitesse de déformation angulaire dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$ nous avons

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \frac{U}{b} = \frac{dU}{dy}. \quad (3)$$

Si nous effectuons un nombre élevé d’expériences nous allons remarquer que les valeurs de τ sont toujours proportionnels à l’effort appliqué à travers d’une constante μ qui dépend

- du fluide considéré
- de la température.

Nous pouvons donc écrire

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}. \quad (4)$$

Cette relation linéaire entre la vitesse de déformation et l'effort est caractéristique d'une classe de fluides appelés *fluides newtoniens*. La constante μ définit la viscosité dynamique. Cette relation est aussi la plus simple que l'on peut imaginer et décrit correctement un grand nombre de fluides comme l'eau, le gaz dans des conditions non critiques, les hydrocarbures, etc.

Par contre pour les fluides "bizarres" cette relation n'est plus valable et comme le montre la Figure 9

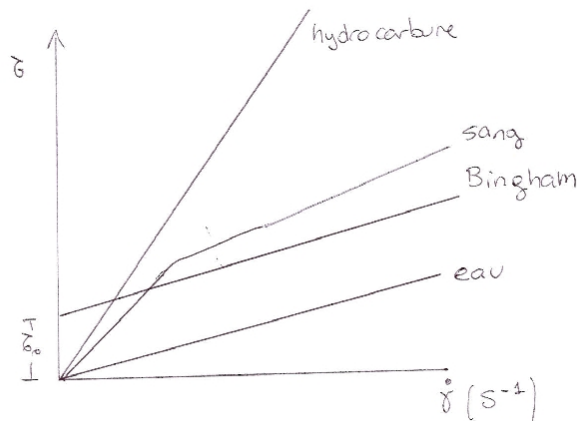


FIGURE 9 – Diagramme d'effort/déformation pour des différents fluides.

Le sable pour être décrit par un modèle de fluide dit de Bingham avec une relation linéaire mais décale de l'origine montrant l'existence d'une contrainte seuil $\tau - \tau_0 = \mu\dot{\gamma}$ pour $\tau > \tau_0$. Il y a des fluides comme le sang pour lesquelles la viscosité dépend aussi de l'effort

$$\tau = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (5)$$

en particulier pour les petits $\dot{\gamma}$ le sang est très visqueux mais il devient "très fluide" dès que les contraintes augmentent.

La Figure 10 présente les rhéologies du sang et de l'eau. La rhéologie est une discipline qui étudie les comportements mécaniques des matériaux.

Une manière intuitive de comprendre la relation entre les efforts et le cisaillement est de revoir le cas d'un déplacement à vitesse constante de la partie supérieure d'un fluide initialement au repos. Après le démarrage ($t = 0^+$) seules les molécules près de la partie supérieure se mettent en mouvement, à cause de l'agitation thermique les molécules en mouvement vont transmettre de la quantité de mouvement dans les couches inférieures. La Figure 11 présente un schéma de la situation.

Le processus se terminera dans un état d'équilibre dynamique où les couches supérieures du fluide auront une vitesse égale à U et celles proches de la paroi égale à zéro. Dans l'analyse de cet exemple il paraît évident que le mouvement chaotique des molécules causent le transfert de la quantité de mouvement et donc que c'est un processus de *diffusion*. La capacité d'un fluide à diffuser de la quantité de mouvement est mesurée par le coefficient de viscosité dont l'unité peut être tirée de l'équation (4) soit $N \cdot s/m^2$. Le mécanisme microscopique qui génère la viscosité justifie le fait que cette quantité dépend fortement de la température T . Par contre le sens des variations est différent pour l'air et pour les liquides comme le montre la Figure 12.

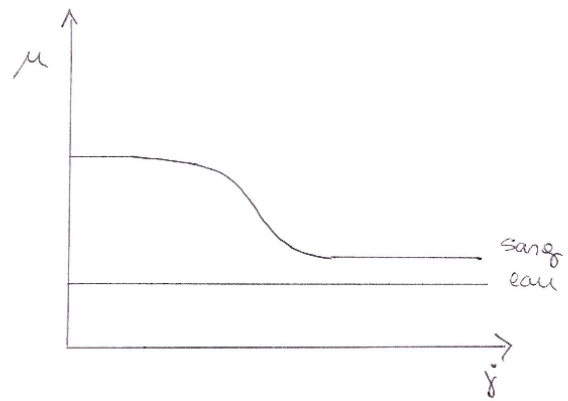


FIGURE 10 – Rhéologie du sang et de l'eau.

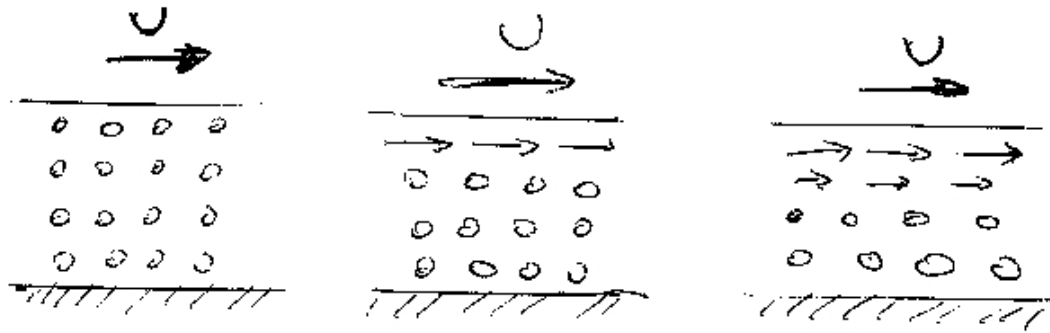


FIGURE 11 – Transfert de quantité de mouvement.

Nous avons que

- pour l'air, qui est milieu dispersé, la viscosité croît avec la température, l'agitation thermique aide à la diffusion de la quantité de mouvement,
- pour les liquides, cet effet est contre-carré par un effet opposé : la diminution des liens moléculaires entre les molécules voisines ce qui augmente la mobilité des molécules donc la fluidité et par conséquent une diminution de la viscosité. Un exemple est l'huile dans une poêle mise à chauffer : au fur et à mesure que la température augmente l'huile gagne en mobilité se comportant comme de l'eau quand est très chaud.

Plus tard nous allons utiliser la quantité suivante

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (6)$$

la viscosité *cinématique* de dimension l^2/s . De l'équation précédente (6) nous notons que ν doit avoir une dépendance de la pression car la densité ρ y est associée. Un fluide qui se comprime voit sa densité augmentée et conséquemment une viscosité cinématique qui diminue. Ce phénomène est beaucoup plus important dans les gaz car les liquides sont, en général, incompressibles.

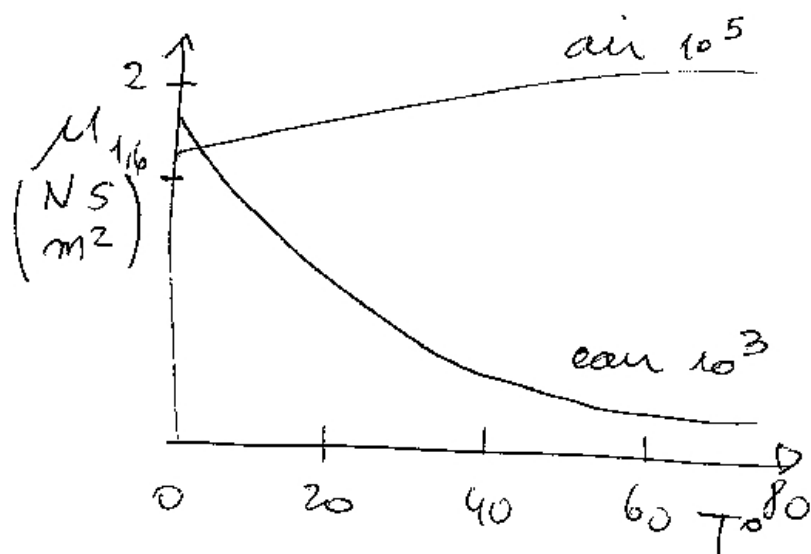


FIGURE 12 – Variation de la viscosité en fonction de la température.

2 Statique des fluides

2.1 Loi fondamentale de la statique des fluides

Il existe une chronologie galiléenne t et un repère galiléen R tels que le milieu D est en équilibre dans ce repère et pour cette chronologie si et seulement si, quel que soit le système matériel D , le torseur¹ des efforts extérieurs appliqués à D est nul (c'est-à-dire si et seulement si la résultante et le moment en un point P des efforts extérieurs sont nuls).

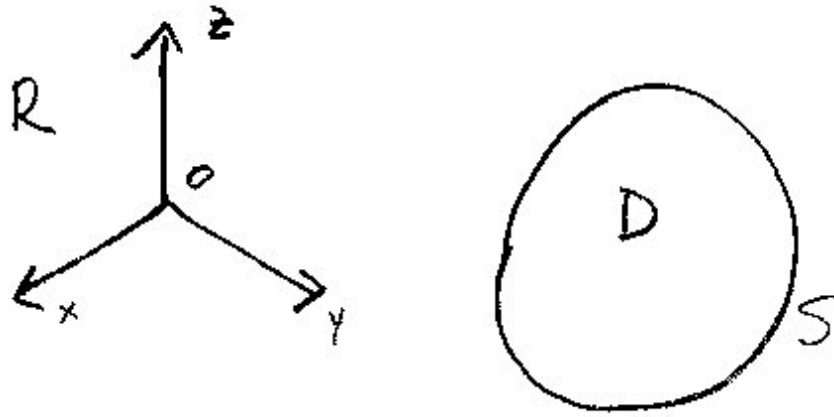


FIGURE 13 – Loi fondamentale de la statique des fluides.

Pour appliquer la loi il faut préciser la nature des efforts extérieurs appliqués au domaine.

1. efforts volumiques (par unité de volume)
2. efforts surfaciques (par unité de surface)

2.2 Efforts volumiques

Ce sont des efforts, notés par suite, \vec{f} qui s'exercent à l'intérieur de chaque point du domaine D .

$$\vec{f}(x_0; y_0; z_0) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta V} \quad (7)$$

Types de forces

1. la gravité
2. d'origine électrique
3. magnétique.

Dans le cas de la gravité on écrit

$$\vec{f} = \rho \vec{g} \quad (8)$$

où \vec{g} est l'accélération de la pesanteur et ρ la masse volumique.

1. Un torseur est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

2.3 Efforts surfaciques

Notés F qui sont exercés par l'extérieur du domaine D par l'intermédiaire de sa surface S . La nature de la surface S peut être différent, exemples

1. une surface fictive à l'intérieur du fluide
2. une surface marquant la frontière entre deux fluides,
3. une surface frontière avec un solide.

2.4 Pression

L'expérience montre que si l'on fait un trou dans un récipient rempli de liquide, le liquide s'écoule perpendiculaire à la paroi. Et ceci indépendamment de la forme du trou et de la position du récipient. Pascal, à partir de cette observation a formulé trois hypothèses relative à la pression dans un fluide au repos.

Hypothèse 1 *On admet que ce produit à la frontière du récipient se produit encore à l'intérieur.* Autrement si S est une surface fictive (non nécessairement matérielle) qui sépare un domaine D en deux sous-domaines D_1 et D_2 alors le fluide dans D_2 exerce sur D_1 une force normale à S en tout point P de S .

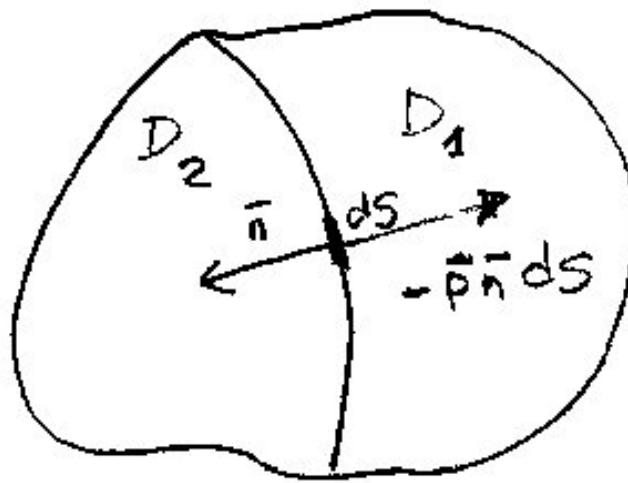


FIGURE 14 – Forces à l'intérieur du domaine.

Pour exprimer cette force on introduit le vecteur unitaire \vec{n} normal et dirigé vers l'extérieur de D_1 , c'est-à-dire le vecteur normal unitaire dirigé vers le milieu qui agit et on écrit la force exercée par D_2 sur un élément de surface dS de D_1 :

$$dF_{D_2 \rightarrow D_1} = -p\vec{n}dS \quad (9)$$

La quantité $-p\vec{n}$ apparaît donc comme une **force par unité de surface**.

Hypothèse 2 Le scalaire p est indépendant de la direction \vec{n} . Si on fait passer par un point M deux surfaces

S et S' avec les deux normales \vec{n} et \vec{n}' séparant respectivement le domaine D en D_1 et D_2 et en D'_1 et D'_2 (voir figure), on peut dire que :

- la force exercée par D_2 sur D_1 en M et par unité de surface est égale à $-p\vec{n}$,
- la force exercée par D'_2 sur D'_1 en M et par unité de surface est égale à $-p\vec{n}'$

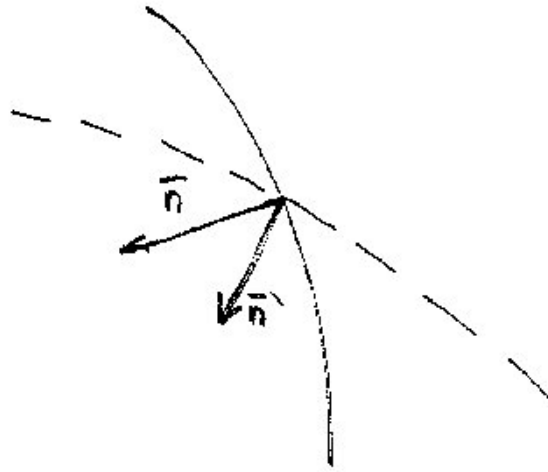


FIGURE 15 – Indépendance de la pression.

Le scalaire p ne dépend donc que du point M : $p = p(x, y, z)$ et est appelé pression.

Plus sur INDÉPENDANCE DE LA PRESSION

Si dans un fluide à l'équilibre nous prenons un volume de forme de prisme comme le montre la Figure 16 nous pouvons faire un bilan de forces en supposant que les composantes de la pression dépendent de la direction, dans ce cas nous aurions les composantes de p , p_x , p_y et p_z toutes différentes.

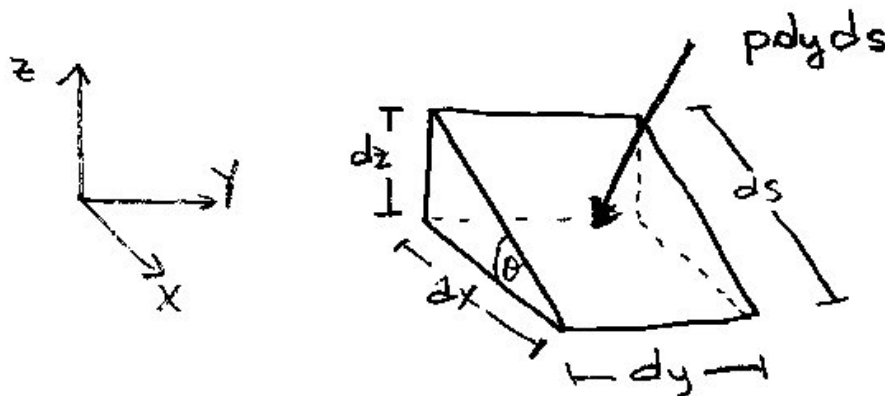


FIGURE 16 – Indépendance de la pression.

Nous avons pour chaque axe

- selon x une surface $dS = dydz$ de normale $-\mathbf{e}_x$ avec une pression p_x d'un côté et de l'autre une surface $dS = dsdy$ et une normale $\sin \theta$ (la projection du plan incliné sur l'axe x) avec une pression p donc

$$p_x dzdy - p \sin \theta dsdy = 0$$

- selon y , c'est plus simple car nous avons la même surface et la même pression sur les deux côtés $dS = (dzdx)/2$ mais avec des normales de signe différent

$$p_y(dzdx)/2 - p_y(dzdx)/2 = 0$$

- selon z une surface $dS = dydx$ de normale $-\mathbf{e}_z$ avec une pression p_z d'un côté et de l'autre une surface $dS = dsdy$ et une normale $\cos \theta$ (la projection du plan incliné sur l'axe z) avec une pression p donc

$$p_z dx dy - p \cos \theta dy ds = \rho g(dx dy dz)/2$$

mais nous avons les relation trigonométriques suivantes : $ds \cos \theta = dx$ et $ds \sin \theta = dz$ donc si l'on fait tendre le volume vers zéro sans modifier la forme $dx, dy, dz \rightarrow 0$ nous avons sur un point de l'espace $p_x = p$, $p_y = p_y$ et $p_z = p$ donc

$$p_x = p_y = p_z = p$$

la pression est une seule et, surtout, elle est indépendante de l'angle θ donc de la normale à la surface. Il faut noter que $p_y = p_y$ est du au fait de cette configuration particulière, il suffit de faire tourner le prisme de $\pi/2$ sur l'axe z par exemple pour trouver $p_x = p_x$ et $p_y = p_z = p$, le scalaire p est bien indépendant de la direction.

Cette démonstration met aussi en évidence le fait que le volume tend vers zéro plus rapidement que la surface ce qui a des conséquences quand on étudie des objets petits.

Hypothèse 3 *Dans un fluide, la pression est positive.*

La pression p décrit les efforts à l'intérieur du fluide : on dit que l'on a donné une description des efforts intérieurs (c'est-à-dire que l'on a produit un modèle qui permet de décrire des efforts intérieurs. En statique des fluides les efforts intérieurs sont déduits par ce seul scalaire p . Il est important de noter que si la pression a la dimension d'une force par unité de surface, ce n'en n'est pas une ! En effet, la pression étant une quantité scalaire, elle ne peut être une force (qui est, naturellement, une quantité vectorielle).

Remarque donc sur les unités

$[p] = F/A$ mais c'est un scalaire !

2.5 Dimensions et unités

Comme nous l'avons vu ci-dessus, la pression a la dimension d'une force par unité de surface. Dans le système international, l'unité de la pression est le Pascal (Pa). Un Pascal correspond à la pression p générée par une force de module F de un newton (N) agissant sur une surface d'un mètre carré. Par conséquent, on peut écrire que : $1Pa = 1N.m^2$.

D'autres unités sont parfois utilisées pour mesurer la pression. On peut citer par exemple :

•

- le torr ou millimètre de mercure : $1 \text{ torr (mm Hg)} = 133,322 \text{ Pa}$
- le bar : $1 \text{ bar} = 100 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$,
- l'atmosphère : $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$

Ordres de grandeur

On peut donner quelques ordres de grandeur de pression :

- seuil de l'audition humaine : $2 \cdot 10^{-5}$ Pa
- pression atmosphérique terrestre : $1,013 \cdot 10^5$ Pa
- pression atmosphérique sur Mars : 10^3 Pa
- pression au coeur du soleil : de l'ordre de $2,5 \cdot 10^{16}$ Pa.

2.6 Formule de la divergence

Deux lemmes qui vont nous servir pour les démonstrations suivantes.

Lemme 1 : Formule de la divergence (Green-Ostrogradsky)

Soit un champ vectoriel $c(x, t)$ continûment différentiable et un domaine D délimité par une surface fermée S

$$\int \int_S \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_D \text{div}(\vec{c}) dV \quad (10)$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire extérieur à D . Par conséquent le flux à travers une surface fermée S du champ vectoriel $c(x, t)$ n'est rien d'autre que l'intégrale sur tout le volume délimité par S de la divergence de $c(x, t)$.

Lemme 2 Soit $f(x, t)$ une fonction définie et continue sur un domaine D de R^3 . Alors si :

$$\int \int \int_D f(x, t) dV = 0 \quad (11)$$

on a $f(x, t) = 0$ dans D . L'intégrale (équation (11)) s'applique pour tout dV il est donc impossible de satisfaire cette relation autrement.

2.7 Équation fondamentale de la statique des fluides

On s'intéresse dans ce paragraphe à un milieu matériel fluide et à une partie D de celui-ci. On note S la surface de D et \vec{n} le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur de D . Plus particulièrement, le fluide est au repos et soumis à une force volumique f donnée. Compte-tenu des paragraphes précédents, D est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs suivants :

1. des efforts volumiques f qui s'exercent en chaque point intérieur à D ,
2. des efforts de pression exercés sur la surface de D par le fluide qui l'entoure.

2.7.1 Forme globale

On peut donc écrire la relation suivante pour les résultantes :

$$\int \int \int_D \vec{f} dV + \int \int_S -p \vec{n} dS = 0 \quad (12)$$

et pour les moments en un point A :

$$\int \int \int_D A\vec{M} \wedge \vec{f} dV + \int \int_S A\vec{M} \wedge -p \vec{n} dS = 0 \quad (13)$$

2.7.2 Loi sous forme locale

L'objet de ce paragraphe est construire des lois sous forme locales à partir des relations globales. Pour cela nous allons utiliser les deux lemmes précédents.

Résultantes

Soit \vec{e} un vecteur constant, multiplions scalairement la forme globale pour les résultantes, nous avons

$$\int \int \int_D \vec{e} \cdot \vec{f} dV - \int \int_S \vec{e} \cdot p \vec{n} dS = 0. \quad (14)$$

Où nous avons rentré directement le vecteur \vec{e} dans les intégrales car constant. En utilisant le 1er lemme avec $\vec{c} = p\vec{e}$ il vient alors

$$\int \int \int_D \vec{e} \cdot \vec{f} dV - \int \int \int_D \text{div}(p\vec{e}) dV = 0. \quad (15)$$

Si l'on utilise la relation $\text{div}(p\vec{e}) = p \text{div}(\vec{e}) + \vec{e} \cdot \vec{\text{grad}} p$ nous avons

$$\int \int \int_D \vec{e} \cdot \vec{f} dV - \int \int \int_D \vec{e} \cdot \vec{\text{grad}} p dV = 0, \quad (16)$$

car $\text{div}(\vec{e}) = 0$ (vecteur constant). Soit encore

$$\int \int \int_D \vec{e} [\vec{f} - \vec{\text{grad}} p] dV = 0. \quad (17)$$

En vertu du lemme 2 nous pouvons en déduire que

$$\vec{f} = \vec{\text{grad}} p \quad (18)$$

Plus sur LA FORME LOCALE On peut arriver au même résultat en considérant un volume élémentaire en forme de parallélépipède dont les faces sont parallèles aux axes cartésiens x , y et z . Le bilan de forces donne

- volume (seul la gravité est prise en compte) : $g\Delta x\Delta y\Delta z$
- Surface, les forces de pression sur chaque pair d'aire élémentaire, par exemple $\Delta x\Delta y$ pour deux pressions $p(x, y, z)$ et $p(x, y, z + \Delta z)$ ce qui donne une force totale sur l'axe z égale à $\Delta x\Delta y(p(x, y, z + \Delta z) - p(x, y, z))$.
- Le même calcul sur les axes x et y permet de retrouver la solution

$$\vec{g} = \vec{\text{grad}} p. \quad (19)$$

Moments

De la même manière on peut traiter la forme globale des moments.

En utilisant la forme locale pour les résultants, on montre simplement que la relation précédente est toujours satisfaite. Par conséquent, la relation globale portant sur les moments et qui est issue de la loi fondamentale de la statique des fluides, ne permet pas d'obtenir une équation locale supplémentaire.

Plus sur PREUVE Soit \mathbf{e} un vecteur constant, multiplions scalairement la forme globale pour les moments

$$\int_D \mathbf{e}(\vec{A} \vec{M} \wedge \vec{f}) dV + \int_S \mathbf{e}(\vec{A} \vec{M} \wedge -p \vec{n}) dS = 0$$

les propriétés du produit mixte nous permettent de trouver l'expression suivante

$$\int_D (\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) \vec{f} dV - \int_S p(\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) \vec{n} dS = 0$$

Le théorème de la divergence nous dit que nous pouvons écrire l'intégrale de surface comme une intégrale de volume, donc

$$\int_D (\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) \vec{f} dV - \int_D \mathbf{div}[p(\mathbf{e} \wedge A\vec{M})] dV = 0$$

et en utilisant la relation $\mathbf{div}[a(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})] = a\mathbf{div}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{grad} a$ nous avons

$$\int_D (\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) \vec{f} dV - \int_D (\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) \mathbf{grad} p dV = 0$$

Si l'on regroupe les termes

$$\int_D (\mathbf{e} \wedge A\vec{M}) (\vec{f} dV - \mathbf{grad} p) dV = 0$$

ce qui est toujours satisfait car $\vec{f} dV = \mathbf{grad} p$.

2.7.3 Champ de la pesanteur

Il s'agit de la forme particulière que prend la loi locale lorsque l'on restreint les efforts volumiques aux efforts de pesanteur. Dans ce cas $\vec{f} = \rho \vec{g}$ et la loi de bilan locale devient :

$$\rho \vec{g} = \mathbf{grad} p. \quad (20)$$

Il faut savoir que cette relation est rarement satisfaite.

Exemple 2.1. HYDROSTATIQUE

Pour un liquide, dans la plupart des situations, on peut supposer que la masse volumique est constante. Le fluide est alors dit incompressible. Si l'on se restreint à des efforts volumiques qui sont uniquement des efforts de pesanteur, la loi fondamentale de la statique se réduit à la forme que nous avons vu

$$\rho \vec{g} = \mathbf{grad} p. \quad (21)$$

Si l'on suppose l'axe z vertical nous avons $\vec{g} = -g\mathbf{e}_z$. L'équation précédente s'écrit

$$-\rho g \mathbf{e}_z = \mathbf{grad} p. \quad (22)$$

En projetant sur les trois axes du repère :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (25)$$

Des deux premières relations on déduit que la pression ne dépend ni de x ni de y , donc que nous avons forcément $p = f(z)$. De la dernière égalité trouvons

$$p(z) = -\rho g z + \alpha \quad (26)$$

où α est une constante. Les surfaces isobares sont donc des surfaces horizontales.

Plus sur PRESSION DE L'AIR En se donnant une pression de référence à une altitude donnée, on peut calculer la constante d'intégration α . En prenant $p = P_{atm}$ en $z = 0$, la pression atmosphérique au niveau du sol, on obtient

$$p(z) = P_{atm} - \rho g z. \quad (27)$$

Nous pouvons calculer l'ordre de grandeur, $P_{atm} = 10^5 Pa$, donc pour l'air $\rho = 1.3 kg m^{-3}$ avec $g \sim 10 m s^{-2}$ on obtient $\rho g z = 130 Pa$ pour $z = 10 m$. Ce terme est toujours négligeable devant la pression atmosphérique. Pour des expériences à l'échelle d'un laboratoire on peut considérer que la pression atmosphérique est constante.

Exemple 2.2. ATMOSPHERE ISOTHERME Une modélisation très simplifiée de l'atmosphère terrestre peut être proposée en considérant celle-ci comme un gaz parfait au repos à la température uniforme T_0 . La loi d'état donne : $p = \rho r T_0$ et la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{r T_0} p(z). \quad (28)$$

Donc, la solution est

$$p(z) = p_0 e^{\frac{g z}{r T_0}}. \quad (29)$$

Exemple 2.3. DÉCROISSANCE LINÉAIRE DE LA TEMPÉRATURE On peut encore améliorer le modèle en supposant que la température varie avec l'altitude selon un gradient constant $T(z) = T_0(1 - a z)$. Alors nous devons résoudre l'équation différentielle suivante

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{r T_0(1 - a z)} p(z).$$

2.8 Conditions aux limites

Nous allons décrire le comportement d'un fluide au repos au niveau d'une limite qui peut être une paroi solide ou une surface de contact avec un autre fluide. Pour cela, nous allons utiliser une conséquence importante de la loi fondamentale de la statique (et plus généralement de la loi fondamentale de la dynamique que nous introduirons dans les deux derniers chapitres de ce cours, dans le cas d'un fluide, mais que vous avez déjà utilisée en mécanique du solide rigide). Il s'agit du principe de l'action et de la réaction :

Si un système matériel S_1 exerce des efforts sur un système matériel S_2 alors S_2 exerce sur S_1 des efforts de résultante et de moment en un point opposés.

2.8.1 Paroi solide

On considère un fluide contenu dans un récipient dont la surface de la paroi est S et on note dS l'élément de surface centré en un point M . Le récipient exerce sur le fluide, la densité surfacique d'effort

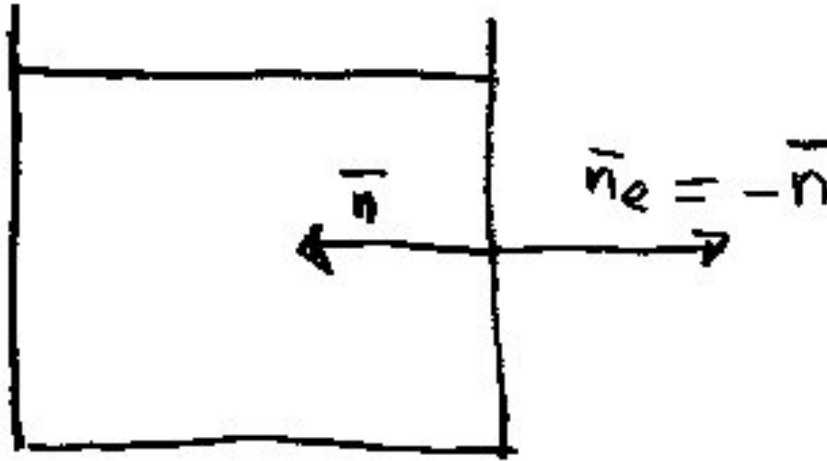


FIGURE 17 – Paroi solide.

dF_e et le fluide exerce sur la paroi la force élémentaire $-p\vec{n}dS$ d'après la relation qui définit les efforts de pression.

D'après le principe de l'action et de la réaction, on peut écrire :

$$dF_e = -(-p\vec{n}dS) = p\vec{n}dS \quad (30)$$

où \vec{n} est le **vecteur normal unitaire orienté de la paroi vers le fluide**. La force exercée par la paroi sur le fluide est donc

$$\vec{F}_e = \int \int_S p\vec{n}dS \quad (31)$$

et de manière équivalente on peut écrire que la force totale exercée par le fluide sur la paroi est

$$\vec{F} = -\vec{F}_e = \int \int_S -p\vec{n}dS \quad (32)$$

où, encore \vec{n} est le **vecteur normal unitaire orienté de la paroi vers le fluide**. De la même manière, le moment des efforts exercés en un point O de la paroi solide par le fluide est

$$\vec{M}_0 = \int \int_S O\vec{M} \wedge (-p\vec{n})dS \quad (33)$$

Exemple 2.4. PISCINE Nous allons calculer la force totale exercée par le fluide sur une des parois latérales de longueur L d'une piscine dont la normale \mathbf{n} est $-\mathbf{e}_x$. La pression est donnée par $\int \int_S -p\vec{n}dS$ (on prend l'axe z vers le bas, la gravité est donc positive!) donc

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

Dans la suite de l'exercice nous supposons que $p_0 = 0$. la force totale est

$$F_T = \int_0^L p(z)dz = \rho g \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^L$$

$$F_T = \rho g \frac{L^2}{2}$$

dans la direction des x positifs. Le fluide pousse la paroi comme nous l'espérons.

2.8.2 Interface entre deux fluides non miscibles

Soient deux fluides au repos, notés 1 et 2, séparés par une interface S ; on note dS l'élément de surface centré en un point M . Soit M , un point de cette interface et \vec{n} le vecteur normal unitaire en M , orienté du fluide 1 vers le fluide 2. La pression dans le fluide 1 est notée p_1 et celle dans le fluide 2 est notée p_2 .

Si l'on utilise la relation on peut écrire que :

— l'action du fluide 1 sur l'élément de surface dS du fluide 2 est : $-p_1(-\vec{n}) = p_1\vec{n}$,

— l'action du fluide 2 sur l'élément de surface dS du fluide 1 est : $-p_2\vec{n}$,

Le principe de l'action et de la réaction donne donc :

$$-p_2\vec{n} = p_1\vec{n}$$

donc

$$p_1 = p_2$$

soit la **continuité de la pression à l'interface entre deux fluides**.

Exemple 2.5. EQUILIBRE Les liquides de la Figure sont notés 1 et 2 avec des masses volumiques différentes et séparés par une interface S , d'après ce que nous venons d'énoncer nous avons $p_1 = p_2$ sur S . Si nous étudions la différence de pression de deux points A et B sur l'interface des deux cotés 1 et 2 nous trouvons directement

$$p_1(A) - p_1(B) = -\rho_1 g(z_A - z_B)$$

pour le fluide 1 et

$$p_2(A) - p_2(B) = -\rho_2 g(z_A - z_B)$$

pour le fluide 2. La continuité de la pression à l'interface simplifie les deux équations précédentes

$$(\rho_2 - \rho_1)g(z_A - z_B) = 0$$

donc

$$z_A = z_B$$

Si les masses volumiques sont les mêmes cette relation n'a pas d'effets (il n'y pas d'interface...). Alors

- en présence de la gravité seule l'interface de deux fluides non miscibles est horizontale,
 - de manière équivalente nous pouvons dire que cette interface est orthogonale à la direction du vecteur gravité \mathbf{G} ,
 - alors, l'interface est toujours plane en réalité ? Pensez à des forces différentes qui peuvent exister.
 - quid de la surface de la mer sur la Terre vu de l'espace ? Elle n'est pas plane, elle suit la forme de la Terre ? Pourquoi ?
-

2.9 Théorème d'Archimède

Une application du principe fondamental de la statique.

Dans le champ de la pesanteur, tout corps immergé dans un fluide au repos reçoit de la part de celui-ci une force de poussée verticale, orientée de bas en haut et dont l'intensité est égale à l'intensité du poids du volume de fluide déplacé. Cette force s'applique au centre de poussée P qui est le centre d'inertie du volume de fluide déplacé. En général ce point est distinct du centre d'inertie G du solide immergé. On appelle fluide déplacé le volume de fluide qui occuperait la place du solide immergé si ce dernier était retiré du fluide.

Dans le cas où le solide est soumis uniquement aux efforts de pesanteur, les points P et G sont situés sur une même verticale ou confondus et la masse du fluide déplacé est égale à la masse du solide immergé.

Remarque : la poussée d'Archimède résulte des efforts de pression. Plus on s'enfonce dans le fluide plus la pression augmente et ainsi l'intensité des efforts croît lorsque la profondeur augmente. Ceci génère une force dirigée vers le haut

Démonstration Pour le cas d'un solide totalement immergé dans un fluide la démarche proposée peut, néanmoins, être étendue au cas d'un solide partiellement immergé.

Considérons un domaine fluide D délimité par une surface S et étudions l'équilibre de ce domaine. Il est soumis aux efforts suivants :

- Efforts de pesanteur appliqués au centre d'inertie P d'un volume de fluide D . Les éléments de réduction de ce torseur au point P sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} M_D \vec{g} \\ 0 \end{array} \right\}_P$$

- Efforts de pression appliqués sur S , le torseur au point O quelconque est :

$$\left\{ \begin{array}{c} \int \int_S -p \vec{n} dS \\ \mathcal{M}_p \end{array} \right\}_O$$

A l'équilibre, on écrit que la somme du torseur des efforts de pression exercés sur S et du torseur des efforts de pesanteur exercés le domaine fluide D est nulle. On a donc une égalité pour les résultantes et une égalité pour les moments en O :

$$\begin{aligned} M_D \vec{g} - \int \int_S p \vec{n} dS &= 0 \\ \mathcal{M}_0 + (M_D \vec{g} \wedge \vec{PO}) &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant on remplace le domaine fluide D dont on vient d'étudier l'équilibre, par un corps solide C dont la géométrie est rigoureusement identique à celle du domaine fluide D . Les efforts de pressions exercés sur le corps solide C sont donc exactement les efforts de pression appliqués sur S que l'on a introduit ci-dessus et dont on a démontré que le torseur est égal à l'opposé du torseur des efforts de pesanteur exercés le domaine fluide D . Ceci démontre la première partie du théorème et, par conséquent, que les efforts de pression exercés par le fluide sur le solide C se mettent sous la forme d'une force de poussée verticale, orientée du bas vers le haut et dont l'intensité est celle du poids du volume de fluide déplacé.

Pour le corps solide C soumis aux efforts seuls de la pesanteur nous avons

$$\begin{aligned} M_D \vec{g} - M_C \vec{g} &= 0 \\ (M_D \vec{g} \wedge \vec{PO}) + (M_C \vec{g} \wedge \vec{GO}) &= 0 \end{aligned}$$

La première égalité découle de la définition des efforts de pression ; on peut modifier la seconde égalité en se rappelant que $\vec{PO} + \vec{GO} = \vec{PG}$ et donc

$$(M_D \vec{g} \wedge \vec{PG}) = 0.$$

Par conséquent P et G sont sur la même droite verticale.

Plus sur DEMONSTRATION Si nous prenons un cube de côté h à l'intérieur d'un fluide de la même masse volumique ρ

1. la force sur les parois horizontales se compensent une à une car ils sont à la même verticale donc à la même pression,
2. la force nette F_N dans la direction verticale est due à la différence des forces exercées sur la partie haute de pression p_1 et la partie basse de pression p_2 , soit par l'équation

$$F_N = p_2 h^2 - p_1 h^2 = (p_2 - p_1) h^2$$

soit par

$$F_N = \rho g h^2$$

car $p_2 - p_1 = \rho g h$ ce qui compense exactement la "poids" du cube $\rho g V$ avec V le volume égale à h^3 . Si nous remplaçons le cube de fluide par un autre matériel de densité différente ρ_m nous avons, suivant le même raisonnement,

$$F_N - F_V = (\rho - \rho_m) g h^3$$

alors le cube va monter ou descendre en fonction de la différence de densités $\rho - \rho_m$

3. un corps peut être à l'équilibre à l'intérieur d'un fluide si (1) il est homogène et de la même densité que le fluide ou (2) il est non homogène et la densité moyenne est la même que celle du fluide.

2.10 Forces et moments

Le Principe Fondamental de la Statique que la sommes des forces et la somme des moments dans un point O

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ \sum \mathcal{M}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Définition de moment d'une force par rapport à un point O

c'est une grandeur vectorielle qui traduit la capacité d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point O

$$\mathcal{M}_0 = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

Le vecteur moment est un vecteur normal au plan formé par la force \vec{F} et la droite \vec{OP} .

Exemple : statique d'une barre rigide. Si l'on connaît les forces F_1 et F_2 où faut-il placer la force F_3 pour avoir l'équilibre ?

2.11 Stabilité des corps flottants

La position du centre d'inertie G du solide détermine la stabilité du corps flottant, trois positions sont donc possibles

1. stable : le centre de poussée P est en dessus du centre d'inertie G . Si l'on perturbe le système il retourne à l'équilibre.
2. instable : le centre d'inertie G est en dessus du centre de poussée P . Si l'on perturbe le système il s'éloigne à l'équilibre.
3. Indifférent : le centre de poussée P et d'inertie G sont confondus.

2.12 Mesure de la pression

2.12.1 Baromètre

Torricelli 1643

2.12.2 Manomètre

Exemple 2.6. MESURE DE LA MASSE VOLUMIQUE

3 Equilibre des interfaces

3.1 Vases communicantes et montée capillaire

Nous pouvons montrer que dans le cas des vases communicantes (voir Figure 18 (a)) le deux interfaces doivent être à la même hauteur, en partie parce que les surfaces à pression constante sont perpendiculaires à l'horizontale dans le cas où seules les forces de pesanteur agissent. Si l'on prend un point du fond dans la verticale au point A , la pression p_f est

$$p_f = p_0 + \rho g h_A$$

où p_0 est la pression atmosphérique et h_A la cote du point A si l'on prend la cote du fond comme référence. De la même manière nous avons, pour un point du fond dans la verticale au point B

$$p_f = p_0 + \rho g h_B$$

où on a garde la même pression p_f pour signifier que la différence de pression entre deux points quelconques du fond doit être nulle car ils ont tous la même pression car nous sommes dans un cas de statique (si les points étaient à des pressions différentes un écoulement se mettrait en place ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de la statique des fluides).

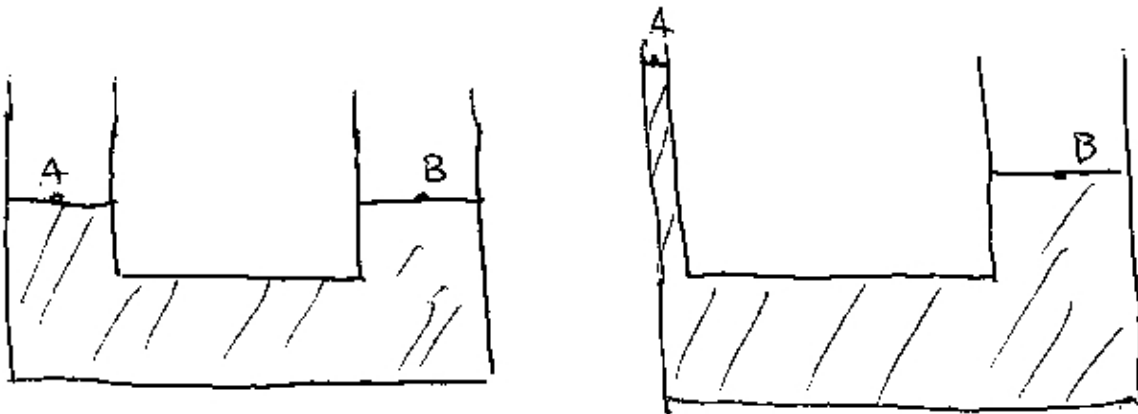


FIGURE 18 – (a) Vases communicantes. (b) Vases communicantes avec montée capillaire.

Par contre si l'on répète la même expérience avec des tubes de diamètres de plus en plus petits il se produit un phénomène en peu anti-intuitif : le niveau de liquide du tube de petit diamètre augmente ce qui est en total contradiction avec l'hypothèse de la statique des fluides telle que nous la connaissons (Figure 18 (b)). C'est le phénomène de montée capillaire, et il va nous obliger à traiter le problème différemment.

La montée capillaire mit le monde scientifique sens dessus dessous pendant des longues années :

- Léonardo Da Vinci (1452) déduit que l'existence de sources dans la montagne est liée à un réseau de fins capillaires capables de hisser l'eau.
- Jacques Rohault (1620) interprète la montée capillaire comme la résultante de l'incapacité de l'air à circuler correctement dans le tube (donc une dépression).
- Giovanni Borelli (1608) montre que la hauteur atteinte par le liquide est inversement proportionnel au rayon du tube.
- Vers 1600 Francis Hauksbee est le premier à étudier de façon systématique le phénomène, il remarque que :

1. la montée se fait aussi bien dans l'air que dans le vide,
2. l'effet n'est pas confiné à une géométrie cylindrique,
3. l'effet est observé avec des autres solides et liquides,
4. la hauteur ne dépend pas de l'épaisseur du tube.

Mais remarquons que celui qui est passé à la postérité c'est James Jurin qui montre que à son tour que la hauteur atteinte est en proportion réciproque du diamètre du tube. Finalement c'est Laplace en 1805 qui a mis tout le monde d'accord en démontrant que la tension de surface est à l'origine du phénomène.

3.2 La tension de surface

Nous allons regarder le phénomène de tension de surface ou tension d'interface avec trois points de vue différentes : celui de la physique, celui de la thermodynamique et finalement celui de la mécanique.

Physique La molécules d'un liquide s'attirent et cette attraction l'emporte sur l'agitation thermique, on dit que le liquide est une état condensé. La Figure 19 nous montre une vue d'artiste des molécules à l'intérieur d'un liquide (a) et à l'interface (b).

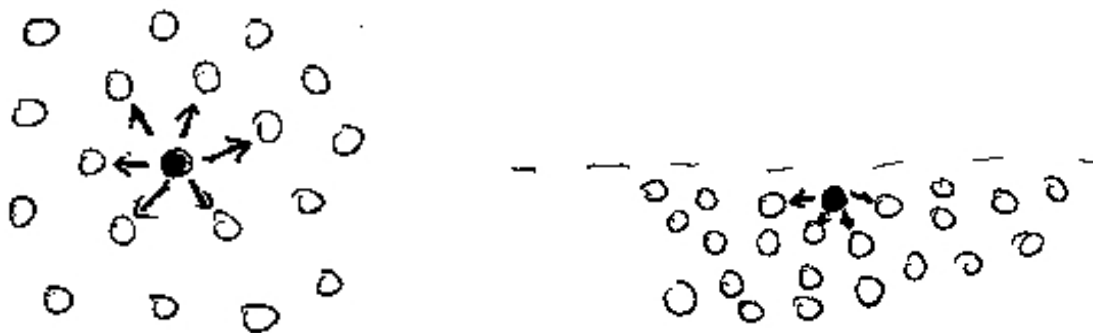


FIGURE 19 – (a) Des molécules à l'intérieur d'un liquide et (b) à l'interface.

A l'intérieur du liquide, juste par un raisonnement de symétrie, les molécules sont dans un état dont la somme des forces dans un point donné (par exemple sur une molécule) est nulle. Les molécules de l'interface sont dans un état énergétique défavorable, de l'énergie U nécessaire à la cohésion elles ont perdu en moyenne la moitié donc $\sim \frac{1}{2}U$. Pour la physique la tension de surface mesure ce "défaut" d'énergie. Une estimation est

$$\gamma \sim \frac{1}{2} \frac{U}{a^2}$$

où a^2 mesure la surface exposée par la molécule. La table 2 présente quelques valeurs.

Thermodynamique En thermodynamique nous connaissons les deux principes

1. Conservation de l'énergie : qui nous dit que la variation de l'énergie interne ΔE par unité de masse d'un fluide est reliée à la somme de la chaleur Q apportée au système et du travail W réalisé, donc

$$\Delta E = Q + W$$

| | force | γ |
|---------|---------------|----------|
| huile | van der Walls | 20 mN/m |
| eau | liaisons H | 72 mN/m |
| mercure | metal liquide | 500 mN/m |

TABLE 2 – Valeurs de γ .

2. le deuxième principe nous dit que dans une transformation réversible existe une variable d'état S appelée entropie tel que

$$T\delta S = \delta Q.$$

Pour les besoins de l'étude des systèmes on définit souvent une fonction d'état extensive dont la variation permet d'obtenir le travail utile susceptible d'être fourni par un système thermodynamique fermé, à température constante, appelée, énergie libre ou énergie d'Helmholtz F

$$F = E - TS.$$

Pour un système composé de deux fluides de volumes constants V_1 et V_2 et de densités massiques constantes ρ_1 et ρ_2 séparés par une interface de surface A à température T constante l'énergie d'Helmholtz s'écrit

$$F = \rho_1 V_1 F_1 + \rho_2 V_2 F_2 + \gamma A$$

et la variation d'énergie libre est

$$\delta F = \gamma \delta A$$

car les reste des variables sont des constantes. Nous avons donc

$$\gamma = \frac{\partial F}{\partial A}.$$

Le tension de surface est donc l'énergie nécessaire à fournir au système pour augmenter la surface d'une unité. L'unité est par conséquent E/L^2 .

Mécanique La mécanique voit la tension de surface comme une force. Observons d'abord l'étirement d'une interface plane comme le montre la Figure 20.

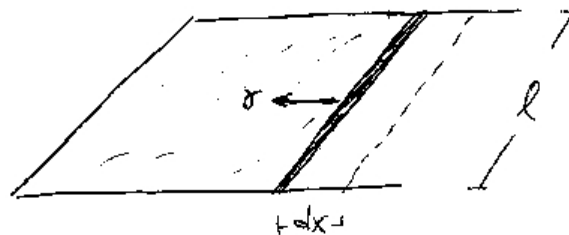


FIGURE 20 – Membrane.

En déplaçant la tige sur les axes parallèles du cadre nous fournissons un travail qui égal à

$$dW = Fdx = 2\gamma l dx$$

où nous avons défini une force par unité de longueur γ qui est la force de rappel du système quand on s'écarte de l'équilibre.

La tension de surface γ est une force par unité de longueur **normale** à la tige, dans le plan de la surface et **dirigée vers le liquide**.

Le trois points de vue sur le même phénomène sont condensés sur la table 3

| | définition | unités | |
|-----------------|------------------------------|---------------------------------|---------|
| physique | défaut d'énergie de cohésion | $1/2U/a^2$ | E/L^2 |
| thermodynamique | énergie par unité de surface | $\frac{\partial F}{\partial A}$ | E/L^2 |
| mécanique | force par unité de longueur | | F/L |

TABLE 3 – Définitions de la tension de surface

3.3 La loi de Laplace (1805)

Nous allons maintenant utiliser la notion de tension de surface des mécaniciens pour étudier l'effet de ces forces sur une surface quelconque ce qui donnera naissance au Théorème de Laplace de 1805.

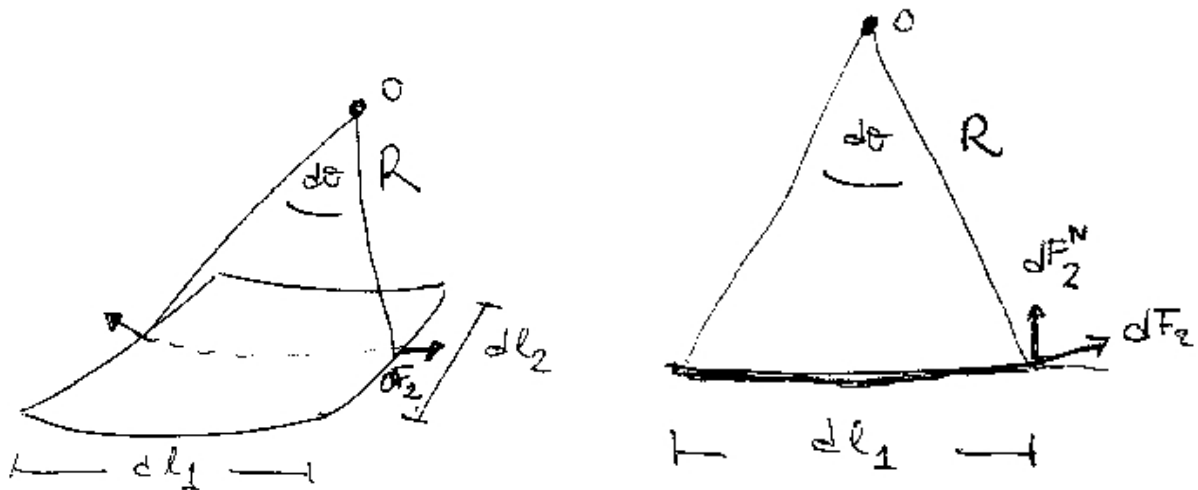


FIGURE 21 – (a) Vue de la surface infinitésimale. (b) Vue de la projection sur l'axe 2, on remarque que la projection des forces de tension de surface pointent vers l'intérieur de la surface.

La Figure 21 (a) présente une portion de surface d'une sphère de longueurs orthogonales dl_1 et dl_2 . Les rayons de courbure principaux (et donc aussi orthogonaux) de cette surface sont R_1 et R_2 .

La Figure 21 (b) montre en détail le plan médian parallèle au côté de longueur dl_1 dans la direction de l'application de la force dF_2 sur le côté de longueur dl_2 . Cette force peut être exprimée par la relation suivante

$$dF_2 = \gamma dl_2$$

où γ c'est la force par unité de surface donc la tension de surface. Cette force suit la direction de la ligne médiane et peut être décomposée en deux directions : normale et tangentielle. Nous nous intéressons

aux forces normales à la surface $dl_1 dl_2$. Pour dF_2 , elle s'écrit

$$dF_2^N = \gamma dl_2 \sin(d\theta) = \gamma dl_2 d\theta$$

car $\sin(d\theta) \sim d\theta$ pour $d\theta$ petit (la surface $dl_1 dl_2$ est infinitésimale). Nous pouvons exprimer par un raisonnement géométrique $d\theta = \frac{dl_1}{R_1}$ où R_1 est le rayon de courbure dans la direction de dl_1 , nous avons finalement

$$dF_2^N = \gamma dl_2 \frac{dl_1}{R_1}.$$

De la même manière on trouve dans la direction orthogonale

$$dF_1^N = \gamma dl_1 \frac{dl_2}{R_2}.$$

Ces forces normales doivent être contre-balancées (nous sommes en équilibre !) par les forces de pression d'un et d'autre côté de la surface, à savoir $p_1 dl_1 dl_2$ et $p_2 dl_1 dl_2$ donc

$$\begin{aligned} \Delta p \, dl_1 dl_2 &= dF_1^N + dF_2^N = \gamma \, dl_1 dl_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \Delta p &= \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

La quantité $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est indépendante du système de coordonnées choisi. Les rayons de courbure sont des grandeurs algébriques, R est positif si le cercle est à l'intérieur de la surface, et négatif dans le cas contraire. Ce résultat est le théorème de Laplace de 1805,

l'accroissement de la pression hydrostatique Δp qui se produit quand on traverse la surface de séparation de deux fluides est égal au produit de la tension de surface γ par la courbure de la surface $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\Delta p = \gamma \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Deux points sont très importants dans la compréhension du théorème de Laplace

1. Par construction la projection des forces dues à la tension de surface sont vers l'intérieur de la surface (voir Figure 21(b)) donc les forces du au terme $\Delta p \, dl_1 dl_2$ doivent les contre-balancer car nous sommes à l'équilibre ; ce qui implique que la pression à l'intérieur de la surface convexe est plus élevée que celle existante à l'extérieur.
2. La courbure $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est un cas général de la définition de la courbure d'un fonction donnée f

$$\frac{1}{r} = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

La courbure est une quantité algébrique qui mesure le caractère courbé d'un objet, le signe dépend du côté de la courbe où on se place (convexe ou concave).

1. goutte de rayon R : la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R}$ donne $2/R$ nous avons donc

$$\Delta p = 2\gamma \frac{1}{R}$$

Nous pouvons retrouver le résultat par le principe des travaux virtuels ; le travail dW nécessaire pour déplacer l'interface de dR est

$$dW = -p_1 dV_i - p_0 dV_e + \gamma dA$$

où $dV_i = -dV_e$ sont les surfaces intérieur et extérieur respectivement, et $dA = 8\pi R dR$. La condition d'équilibre mécanique d'écrit $dW = 0$ ce qui donne $\Delta p = 2\gamma \frac{1}{R}$.

2. bulle de savon : nous avons deux interfaces air/liquide et liquide/air donc

$$p_l - p_0 = 2\gamma \frac{1}{R}$$

$$p_1 - p_l = 2\gamma \frac{1}{R}$$

soit

$$\Delta p = p_1 - p_0 = 4\gamma \frac{1}{R}.$$

3. deux bulles de rayon différent connectées par un tube comme le montre la Figure 23(a), si l'on ouvre la valve qui les sépare de quel côté s'écoulera le fluide ?

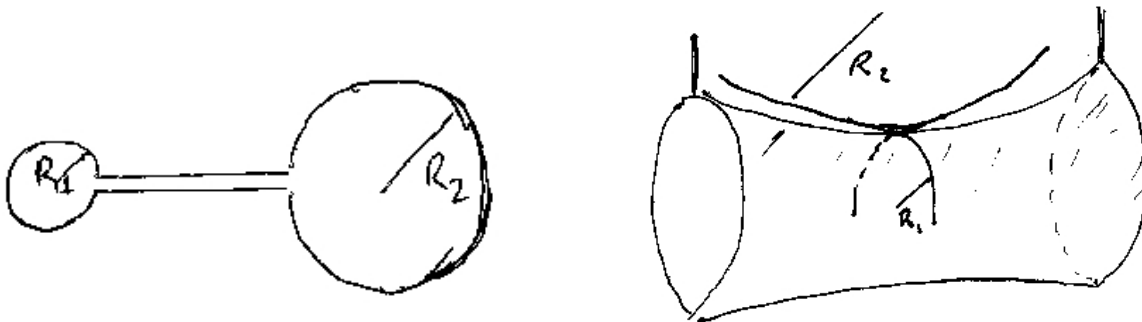


FIGURE 22 – (a) Deux bulles connectées. (b) Catenoïde.

4. la surface d'un liquide tendu sur deux anneaux (Figure 23(b)) forme une courbe appelée *catenoïde* comme les deux pressions des deux cotés sont les mêmes (la pression atmosphérique) nous avons

$$0 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

donc les rayons se compensent pour donner une courbure moyenne nulle.

3.4 Longueur capillaire

Nous allons étudier une goutte qui s'étale sur une surface comme le montre la Figure 23. La pression hydrostatique est, en ordre de grandeur

$$\rho gh$$

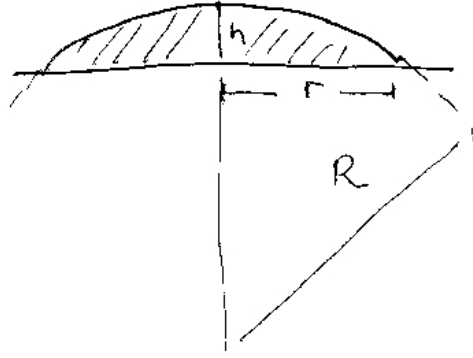


FIGURE 23 – Goutte étalée.

et la pression capillaire

$$2\gamma \frac{1}{R}$$

si l'on suppose que la goutte ne perd pas beaucoup sa forme sphérique. De l'autre côté nous avons par la géométrie du problème que $r^2 + (R - h)^2 = R^2$ ce qui donne à l'ordre $\mathcal{O}(h^2)$

$$r^2 = 2Rh.$$

Le rapport entre les pressions hydrostatique et capillaire définit un nombre sans dimension qui quantifie ces forces, c'est le nombre de Bond (B)

$$B = \frac{\rho g r h}{2\nu/R}$$

Pour un nombre de Bond de l'ordre de 1 nous avons un équilibre entre les forces de pesanteur et capillaires et cet équilibre définit une longueur caractéristique, l_c appelée *longueur capillaire*

$$l_c = \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^{1/2}$$

Pour l'eau cette longueur est de l'ordre de $3mm$.

3.5 Loi de Jurin

La montée capillaire dans tube de petit diamètre peut s'expliquer maintenant par la loi de Laplace. La Figure 24 présente le schéma d'une montée capillaire dans un tube de rayon r et d'angle de contact θ_E .

Nous allons étudier la pression au point 1, juste en-dessous de l'interface qui sépare le liquide et l'air (qui est à pression atmosphérique p_a). D'abord on calcule la pression p_1 par la loi de Laplace, après par l'hydrostatique classique si l'on connaît la pression p_2 au point 2 :

— loi de Laplace : la pression au point 1 est

$$p_1 - p_a = \frac{-2\gamma}{R}$$

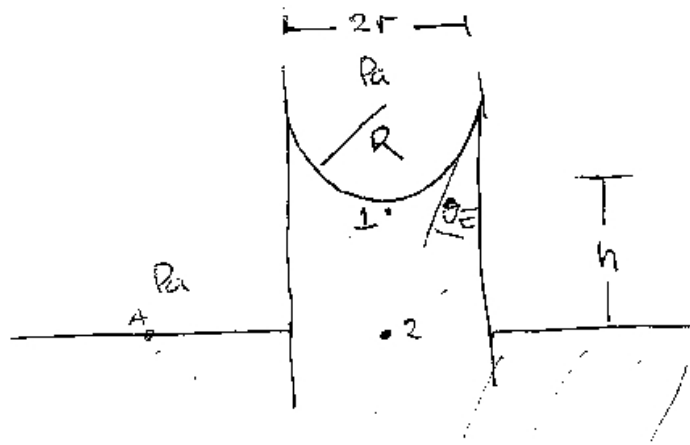


FIGURE 24 – Loi de Jurin.

où le 2 vient du fait que les deux courbures sont égales et de valeur R et le signe moins du fait que la sphère qui sert à déterminer le rayon de courbure est à l'extérieur du fluide. (Si l'on se plaçait à l'extérieur il faudrait faire $p_a - p_1 = \frac{2\gamma}{R}$ car on traverse l'interface de l'extérieur au point 1 et, dans ce cas, la sphère qui sert à déterminer le rayon de courbure est à l'intérieur de mon domaine.)

— par la statique classique on sait que

$$p_2 = p_1 + \rho gh$$

c'est à dire, le point 2 supporte le poids de la colonne de hauteur h plus la pression au point 1.

— et, finalement, on peut montrer que la pression au point 2 est la pression atmosphérique par le raisonnement suivant soit A un point sur la surface plane en dehors du tube capillaire, la pression à une profondeur l est $p_A + \rho gl$ avec $p_A = p_a$ la pression atmosphérique. Un point B avec la même cote l sous le point 2 doit avoir la même pression car on est dans un cas statique et si les pressions sur une même profondeur étaient différentes un écoulement serait mis en route en contradiction avec les hypothèses de la statique des fluides (pas de forces et pas de moments résultants) donc nous avons

$$p_A + \rho gl = p_2 + \rho gl$$

$$p_A = p_2$$

$$p_a = p_2$$

le point 2 est aussi à la pression atmosphérique!! (p_1 doit donc être en dépression...).

En égalant les deux expressions de la pression au point 1 nous avons

$$\rho gh = \frac{2\gamma}{R}$$

soit

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_E}{r}$$

où on a utilisé le fait de que $r = R \cos \theta_E$, avec la définition de la longueur capillaire nous avons la loi de Jurin pour la montée capillaire dans un tube cylindrique de rayon r

$$h = \frac{2l_c^2}{r} \cos \theta_E.$$

Plus sur LOI DE JURIN VIA LES FORCES

Nous pouvons raisonner en termes de forces (Figure 25) pour établir la loi de Jurin, le poids de la colonne de hauteur m est

$$\rho g h \pi r^2$$

où πr^2 c'est la section du capillaire. La ligne de contact a une longueur de $2\pi r$ (le périmètre mouillé par le liquide), et la composante de la force capillaire est $\gamma \cos \theta_E$ (la projection verticale qui vient contre-balancer le poids), nous avons donc

$$\rho g h \pi r^2 = \gamma \cos \theta_E 2\pi r$$

ce qui nous permet de retrouver le résultat de la loi de Jurin

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_E}{\rho g r}$$

avec toujours la définition de la longueur capillaire.

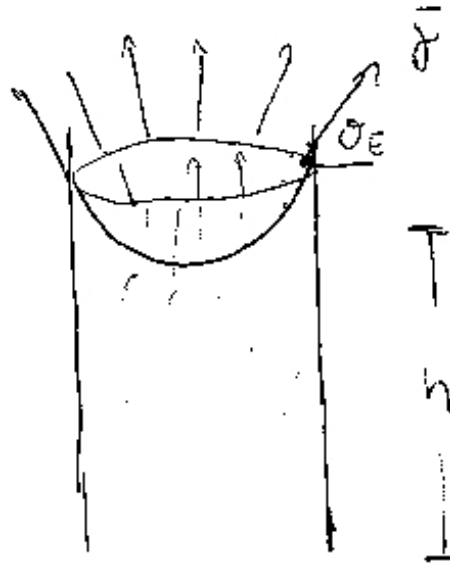


FIGURE 25 – Loi de Jurin (forces)

3.6 Montée capillaire près d'une paroi

L'observation précise d'un fluide près d'une paroi solide nous montre que le fluide essaye de "ramper" sur la paroi comme le montre la Figure 27.

C'est la montée capillaire, nous pouvons analyser la pression pour un point sous l'interface de coordonnées $x, z(x)$ pour essayer de trouver la courbe $z(x)$ et en particulier la valeur $h = z(0)$. Nous avons donc

— la pression Laplace

$$p_1 - p_0 = \frac{\gamma}{R(x)}$$

où $R(x)$ c'est le rayon de courbure donné par l'équation $\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}$ car le rayon orthogonal est infini (une droite dans la direction orthogonale aux axes x, z),

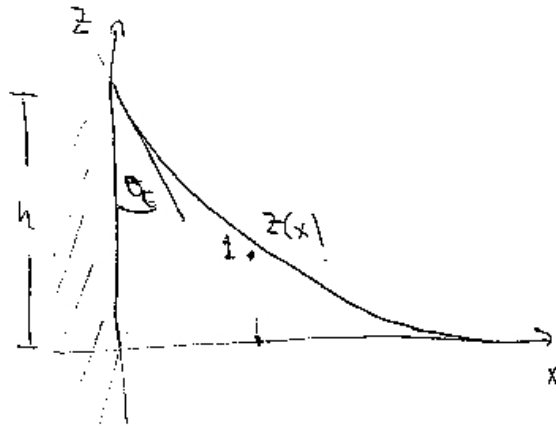


FIGURE 26 – Montée capillaire près d'une paroi.

— la pression dans le point 1 par la statique classique

$$p_0 - p_1 = \rho g z.$$

Avec l'égalité des deux expressions nous trouvons

$$z = l_c^2 \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}},$$

qui est équation différentielle difficile à résoudre. La solution donne, pour $z(0) = h$

$$h^2 = 2l_c^2(1 - \sin \theta_E).$$

Plus sur LA MONTÉE VIA LES FORCES Si nous définissons une surface de contrôle comme le montre la Figure 27, nous pouvons faire le balance de forces selon l'axe x appliquées sur la paroi.

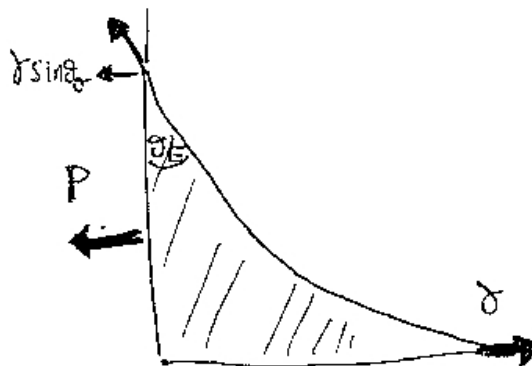


FIGURE 27 – Montée capillaire près d'une paroi (forces).

Nous avons

$$P + \gamma \sin \theta_E = \gamma$$

où P est la force des pressions qui peut être calculé par l'intégrale entre 0 et h par la formule classique

$$\int_0^h \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g z^2$$

Nous trouvons finalement

$$\frac{1}{2} \rho g z^2 + \gamma \sin \theta_E = \gamma$$

soit

$$h^2 = 2l_c^2(1 - \sin \theta_E).$$

Exemple du jet (robinet)

3.7 Mouillage

Le contact de trois phases (solide, liquide, gaz) donne lieu à une mécanique de fluides assez particulière, le mouillage où l'étude de l'étalement d'un liquide sur un solide. Nous allons étudier deux types de mouillage

1. le mouillage total quand le liquide cherche à s'étaler sur le solide,
2. partiel dans le cas contraire.

Lorsque on pose une goutte sur un solide la goutte peut s'étaler (par exemple sur le verre) ou rester formant une goutte (sur le plastique). Une grandeur qui peut distinguer entre le deux cas c'est le paramètre d'étalement S qui donne une relation sur les trois tensions superficielles mises en jeu

$$S = \gamma_{SO} - (\gamma_{SL} + \gamma)$$

où γ_{SO} est la tension superficielle solide/air, γ_{SL} la tension superficielle solide/liquide et γ celle que nous connaissons, la tension superficielle liquide/air.

La Figure montre les deux cas (a) $S < 0$ pour le mouillage partiel et (b) $S > 0$ pour le mouillage total.

Mouillage total Si S est positif le liquide s'étale complètement, l'angle de contact est voisin de zéro $\theta_E \sim 0$. L'état final c'est un film d'épaisseur nanoscopique.

4 Cinématique des Fluides

Nous étudions dans ce chapitre le mouvement d'une particule de fluide sans tenir compte des forces qui sont à l'origine de ce mouvement.

4.1 Hypothèse de milieu continu

Une particule de fluide est définie comme un élément de fluide de volume dont la taille caractéristique l est

1. très petite ($l \ll L$) devant l'échelle L qui caractérise le système étudié et
2. très grande ($l \gg \lambda$) devant λ le libre parcours moyen des molécules présentes dans le volume caractéristique.

Nous introduisons l'hypothèse de milieu continu

milieu continu un milieu est considéré comme continu si l'échelle de description du phénomène néglige les caractéristiques individuelles de chaque molécule tout en pouvant définir un élément matériel (dans notre cas une particule de fluide) que l'on peut suivre dans son mouvement et que l'on peut attacher des grandeurs

1. cinématiques (position, vitesse, ...) et
2. thermodynamiques (masse volumique, température, pression)

qui peuvent être considérés constants.

L'hypothèse de milieu continu définit donc un modèle mathématique utilisé pour représenter de manière simple et maniable une réalité extrêmement complexe. Il est intéressant déjà remarquer que les prédictions de ce modèle ne seront correctes que dans la mesure où les vérifications expérimentales se feront sur de petits volumes macroscopiques, mais qui contiendront encore un nombre suffisamment grand de molécules pour que la mesure soit encore une moyenne statistiquement significative.

La Figure 28 présente la variation de la valeur d'une grandeur quelconque en fonction de la taille du volume caractéristique.

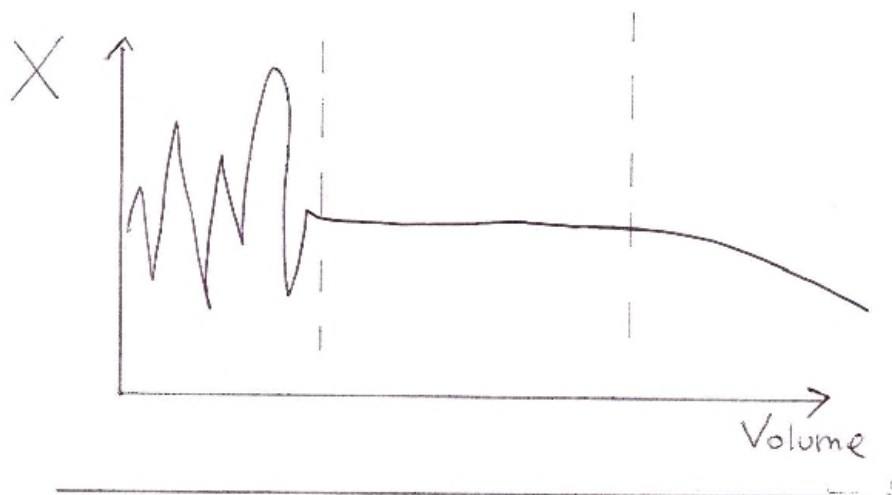


FIGURE 28 – Variation de la grandeur X en fonction de la taille de l'échantillon.

Ordres de grandeurs des échelles Les valeurs des échelles L et l dépendent du problème étudié. Pour une aile d'avion L est de l'ordre du mètre mais elle vaut quelques millimètres pour un vaisseau dans la micro-circulation sanguine. Aussi le libre parcours moyen λ dépend de la structure de la matière et des conditions de pression-température surtout dans le cas des gaz. Dans un gaz à pression ambiante, λ est de l'ordre du millimètre mais à faible pression peut devenir très grand. Si $L \sim \lambda$ nous sommes en présence d'un régime moléculaire et la notion de continuité de la matière disparaît, il faut donc regarder le régime de Knudsen mais c'est une autre affaire.

4.2 Description de Lagrange

Une fois la particule fluide définie nous pouvons lui attacher des grandeurs

1. thermodynamiques (température, pression) et
2. cinématique (position, vitesse, accélération).

Alors si la particule de fluide occupe une position \bar{X}_0 à $t = 0$ et une position \bar{X} pour un temps t quelconque comme le montre la Figure 29

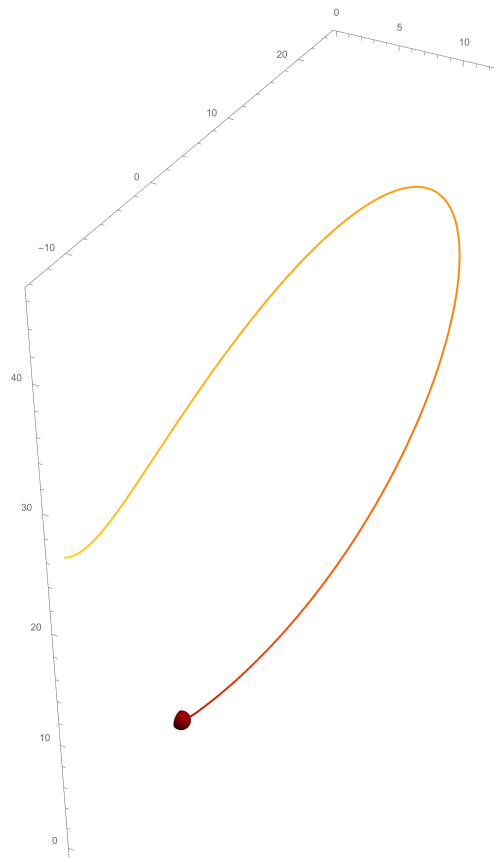


FIGURE 29 – Trajectoire d'une particule fluide.

nous pouvons établir, sous certaines hypothèses, que les deux positions, initiale et finale, sont reliées par une fonction \mathcal{F} comme ceci

$$\bar{X} = \mathcal{F}(\bar{X}_0, t_0, t)$$

où la fonction \mathcal{F}

1. est supposée continue et continûment dérivable autant de fois que nécessaire (on dit qu'elle appartient à une classe C^∞)
2. est supposée bijective, c'est à dire qu'il existe l'inverse \mathcal{F}^{-1} tel que

$$\bar{X}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\bar{X}, t_0, t)$$

On peut écrire aussi en composantes

$$\begin{aligned}x &= f(\bar{X}_0, t_0, t) \\y &= g(\bar{X}_0, t_0, t) \\z &= h(\bar{X}_0, t_0, t)\end{aligned}$$

où la position initiale \bar{X}_0 est (x_0, y_0, z_0) bien entendu. On peut l'écrire de manière simplifiée

$$\begin{aligned}x &= f(\bar{X}_0, t) \\y &= g(\bar{X}_0, t) \\z &= h(\bar{X}_0, t)\end{aligned}$$

ce qui définit la formulation de Lagrange où les variables du système sont la position initiale et le temps, et les inconnues les trois composantes de la position de la particule en cours du temps

| variables | inconnues |
|----------------|--------------------|
| \bar{X}_0, t | $x(t), y(t), z(t)$ |

TABLE 4 – Formulation de Lagrange

Dans la description de Lagrange, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement dans le temps. La vitesse de la particule fluide est alors caractérisée par la dérivée de sa position

$$\bar{v} = \frac{\partial \mathcal{F}(\bar{X}_0, t_0, t)}{\partial t}$$

ou encore en composantes

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{X}_0, t_0, t) \\v &= \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{X}_0, t_0, t) \\w &= \frac{\partial h}{\partial t}(\bar{X}_0, t_0, t)\end{aligned}$$

Dans la pratique, le point de vue lagrangien correspond à des observations faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement sans modifier l'écoulement (ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules).

De la même manière nous pouvons définir l'accélération de la particule fluide comme la dérivée seconde de sa position

$$\bar{\Gamma} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\bar{X}_0, t_0, t)}{\partial t^2}.$$

Trajectoire La notion de trajectoire d'une particule fluide est directement associée à la formulation de Lagrange, en effet, la trajectoire d'une particule fluide placée à une position \bar{X}_0 à $t = 0$ est définie comme l'ensemble de points $\bar{X}(t)$ au cours du temps entre t_0 et t . La détermination de la trajectoire de la particule fluide revient à déterminer la fonction \mathcal{F} , et si l'on connaît \mathcal{F} on a une description complète du mouvement du fluide.

En pratique la formulation de Lagrange est plutôt utilisée dans l'étude des solides flexibles. Imaginons la difficulté de suivre une particule fluide dans un système ouvert (une particule marquée dans la Seine), au bout d'un temps fini elle disparaîtra du champ d'observation. Une condition pour l'application de l'approche de Lagrange serait que la différence entre la position finale et initiale de la particule soit plus petite que la longueur de l'objet étudié, $|\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0| \leq L$.

Exemple 4.1. FORMULATION DE LAGRANGE

$$\begin{aligned}x &= z_0 t + x_0 \\y &= x_0 \sin(\omega t) + y_0 \\z &= z_0\end{aligned}$$

dans ce cas nous avons donc la position de la particule fluide $(x(t), y(t), z(t))$ au cours du temps et fonction de sa position initiale. Remarques que pour $t = 0$ nous trouvons la particule dans sa position initiale. Nous pouvons maintenant calculer la vitesse et l'accélération en dérivant cette fonction.

Plus sur FORMULATION DE LAGRANGE ?

$$\begin{aligned}x &= zt + x_0 \\y &= x_0 \sin(\omega t) + y_0 \\z &= z_0\end{aligned}$$

dans ce cas nous n'avons pas une formulation de Lagrange car la variable z apparaît dans le second membre des équations!!

4.3 Description d'Euler

La connaissance de la vitesse du fluide $\mathbf{v}(\bar{X}, t) = (u, v, w)$ à un instant t dans une position fixe de l'espace (\bar{X}) est une variable pertinente pour décrire le mouvement d'un fluide. A un instant plus tard t' , la vitesse au même point sera $\mathbf{v}(\bar{X}, t')$.

C'est la vitesse que nous percevons lorsque nous regardons s'écouler une rivière, la Seine, du haut d'un pont à un point fixe. Un observateur au repos par rapport au référentiel de la vitesse (le pont) observe un point de la surface de la rivière, ceci est équivalent aux études expérimentales réalisées avec des sondes fixes.

Nous avons défini la représentation d'Euler où les variables sont la position dans l'espace et le temps et maintenant les inconnues sont les composantes de la vitesse u , v et w comme il est présenté dans la Table 5

Champ de vecteurs Si à chaque point de l'espace on associe une vitesse nous pouvons définir des champs de vecteurs comme le montre la Figure 30

| variables | inconnues |
|--------------|--------------------|
| \bar{X}, t | $u(t), v(t), w(t)$ |

TABLE 5 – Formulation d'Euler

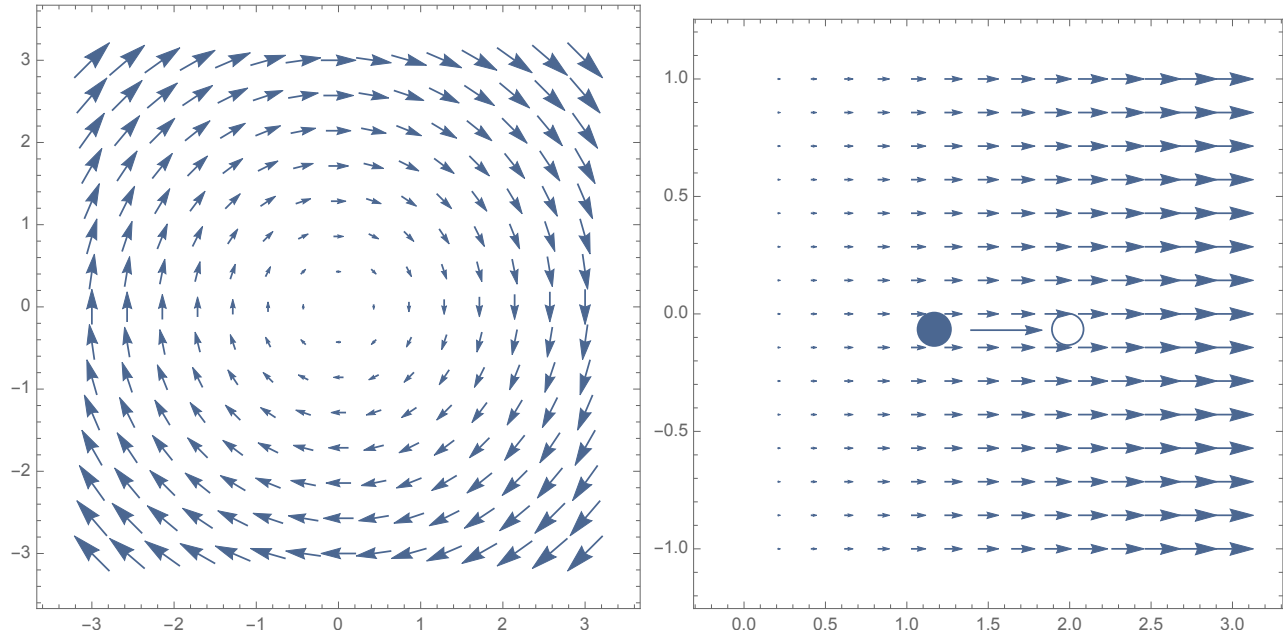


FIGURE 30 – Deux champs de vecteurs à 2 dimensions.

Si le champ de vecteurs ne dépend pas du temps nous allons observer la même figure à tout temps t , en revanche si le champ de vecteurs dépend du temps nous aurons une représentation différente pour chaque temps t . En observant les champs de la Figure 30 nous pouvons remarquer que la inhomogénéité spatiale des champs va néanmoins faire changer la vitesse des particules malgré le fait que le champs ne dépendent pas du temps, il apparaît donc une nouvelle notion d'accélération. Les sources de l'accélération sont présentées dans la Table 6.

| | | |
|--------|--------------|----------------|
| temps | stationnaire | instationnaire |
| espace | homogène | non homogène |

TABLE 6 – Causes de l'accélération d'une particule fluide.

Dérivée convective La Figure 30 (droite) présente une particule (cercle bleu) qui se déplace avec l'écoulement, nous observons qu'il y a deux contributions à l'accélération de la particule

1. la 1ere contribution est la variation au cours du temps de la vitesse dans un point donnée, en effet si la particule est à une position \mathbf{X}_1 , pour deux temps différents t et t' nous pouvons évaluer $\mathbf{v}(X_1, t)$ et $\mathbf{v}(X_1, t')$ et

$$\text{si } \mathbf{v}(X_1, t) = \mathbf{v}(X_1, t') \Rightarrow \text{stationnarité}$$

et l'écoulement ne dépend pas du temps.

2. la 2de contributions est due à la non uniformité spatiale du champs de vitesses, c'est à dire que si la vitesse dans un autre point \mathbf{X}_2

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{v}(X_1, t)\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

pour le même temps t est différente

$$\mathbf{v}(X_1, t) \neq \mathbf{v}(X_2, t)$$

Alors la variation de la vitesse (au 1er ordre) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v} &= \mathbf{v}(X_2, t') - \mathbf{v}(X_1, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z \end{aligned}$$

en divisant par δt et en prenant la limite $\delta t \rightarrow 0$ nous avons

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} w$$

où les composantes de la vitesse \mathbf{v} sont (u, v, w) . Cette dernière expression, qui définit l'accélération dans la formulation d'Euler, peut être écrite comme

$$\Gamma = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

que c'est la dérivée convective ou particulaire. Nous pouvons définir directement l'opérateur dérivation convective

$$\frac{D\Diamond}{dt} = \frac{\partial \Diamond}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Diamond$$

Se rappelant de la définition de l'opérateur ∇ en coordonnées cartésiennes $\mathbf{v} \cdot \nabla$ s'écrit ²

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \quad \text{ou} \quad u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

L'accélération du champs de vitesses est donc en composantes

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

L'opérateur dérivation convective peut être appliqué soit à un vecteur (comme la vitesse) soit à un scalaire comme par exemple pour la température T

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T$$

dans ce cas l'objet résultant est aussi un scalaire

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

2. On remarque l'algèbre de opérateurs est non commutative, $\mathbf{v} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{v}$

Plus sur DÉRIVATION D'UNE FONCTION DANS LES VARIABLES D'EULER

Nous voulons dériver $T(\mathbf{X}, t)$ par rapport aux variables d'Euler, nous ne devons pas oublier que \mathbf{X} est aussi une fonction des coordonnées initiales \mathbf{X}_0 et donc $T(\mathcal{F}(\mathbf{X}_0, t), t)$. Alors

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

et alors avec la définition de la vitesse (u, v, w) nous retrouvons la résultat précédent.

Exemple 4.2. 1D Soit une formulation de Lagrange en 1D

$$x = x_0(1 + 2t)^{1/2}$$

nous pouvons vérifier que $x(t = 0) = x_0$. Comme nous savons que $u = \frac{dx}{dt}$ alors

$$u = x_0(1 + 2t)^{-1/2}$$

Maintenant nous devons éliminer la condition initiale x_0 . Pour cela nous utilisons la première équation donc

$$x_0 = x(1 + 2t)^{-1/2}$$

et finalement en remplaçant x_0 dans l'équation de u

$$u = x(1 + 2t)^{-1}$$

Exemple 4.3. 2 D Soit une formulation d'Euler

$$u = x$$

$$v = y$$

alors nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned}$$

qui a comme solution

$$\begin{aligned} x &= Ae^t \\ y &= Be^t \end{aligned}$$

avec A et B constantes. Nous avons donc la position de la particule fluide en fonction du temps et des conditions initiales (les constantes A et B). On voit que le rapport $\frac{x}{y}$ est constant donc la solution de la trajectoire est une droite.

$$y = Cx$$

avec C une constante. La Figure

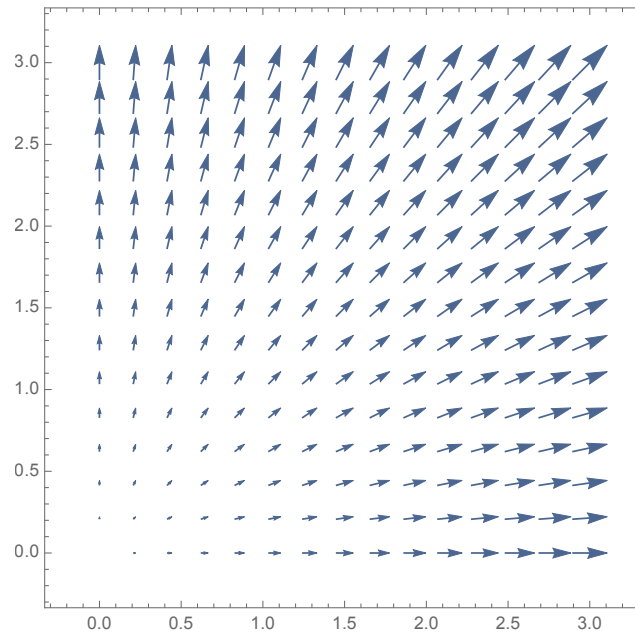


FIGURE 31 – Champ de vecteurs à 2 dimensions (du problème 2D).

Exemple 4.4. 3D Soit une formulation de Lagrange

$$x = z_0 \omega t + x_0$$

$$y = y_0 \omega t + y_0$$

$$z = z_0$$

le passage aux variables d'Euler se fait

1. en dérivant le système

$$u = z_0 \omega$$

$$v = y_0 \omega$$

$$w = 0$$

avec $(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

2. en éliminant les conditions initiales, $z_0 = z$ et $y_0 = \frac{y}{(1+\omega t)}$

$$u = z\omega$$

$$v = \frac{y\omega}{(1+\omega t)}$$

$$w = 0$$

4.4 Comparaison des approches

La Table suivant recapitule les deux approches, de Lagrange et d'Euler.

4.5 Types d'écoulement

Nous allons présenter quelques définitions qui permettront de caractériser les écoulements dans les variables d'Euler, c'est à dire par l'observation du champ de vitesses.

| | description Lagrange | description Euler |
|--------------|--|--|
| point de vue | trajectoire de la particule | champ de vitesses |
| variables | $\mathbf{X}(t) = x(t), y(t), z(t)$ | $\mathbf{v}(t) = u(t), v(t), w(t)$ |
| accélération | $\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}(\bar{X}_0, t_0, t)$ | $\mathbf{\Gamma} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ |

TABLE 7 – Formulation de Lagrange et d'Euler

4.5.1 Ecoulement plan

Un écoulement plan est défini par un champ de vitesse à 2D, les composantes des la vitesse se réduisent à 2

$$\mathbf{v} = u(x, y, t)e_x + v(x, y, t)e_y$$

Exemple 4.5. PLAN ?

$$\text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega t) \\ v = xy \\ w = A \end{array} \right. \quad \text{non} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega t) \\ v = xy \\ w = z \end{array} \right. \quad \text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega t) \\ v = xy \cos(y) \end{array} \right.$$

4.5.2 Ecoulement stationnaire

Un écoulement stationnaire est un écoulement dont le champ de vitesse ne dépend pas **explicitement** du temps

Exemple 4.6. STATIONNAIRE ?

$$\text{non} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega t) \\ v = xy \\ w = A \end{array} \right. \quad \text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega x) \\ v = xy \\ w = z \end{array} \right. \quad \text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega x) \\ v = xy \cos(y) \end{array} \right.$$

4.5.3 Ecoulement incompressible

Un écoulement incompressible est un écoulement dont la divergence du champ de vitesse est nulle

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0$$

où un coordonnées cartésiennes

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

c'est donc un scalaire.

Exemple 4.7. INCOMPRESSIBLE ?

$$\begin{array}{l} \text{non} \left\{ \begin{array}{l} u = x \sin(\omega t) \\ v = xy \\ w = A \end{array} \right. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sin(\omega t) + x \neq 0 \\ \\ \text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = -y \\ w = A \end{array} \right. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1 - 1 = 0 \end{array}$$

4.5.4 Écoulement irrotationnel

Un écoulement irrotationnel est un écoulement dont le rotationnel du champ de vitesse est nul

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

où un coordonnées cartésiennes

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) e_x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) e_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) e_z$$

c'est donc un vecteur. Dans le cas particulier d'un écoulement plan dans les plan x, y nous avons

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) e_z$$

qui sera très utilisé par la suite. On remarque que la seule composante du vecteur rotationnel est perpendiculaire au plan x, y .

Exemple 4.8. IRROTATIONNEL ?

$$\begin{array}{l} \text{non} \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = xy \end{array} \right. \quad \nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) e_z = y - 0 = y \neq 0 \\ \\ \text{oui} \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = -y \end{array} \right. \quad \nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) e_z = 0 - 0 = 0 \end{array}$$

4.6 Lignes de courant

Un manière d'étudier un écoulement globalement est de tracer les lignes de courant.

définition les lignes de courant à un instant donné sont les courbes tangentes au vecteur vitesse \mathbf{v} en tout point.

La Figure 32 présente un schéma de la reconstruction des lignes de courant.

Si le champ de vitesse dépend du temps (écoulement instationnaire) les lignes du courant sont différentes à chaque instant.

Construction mathématique Soit

$$d\mathbf{l} = dx e_x + dy e_y + dz e_z$$

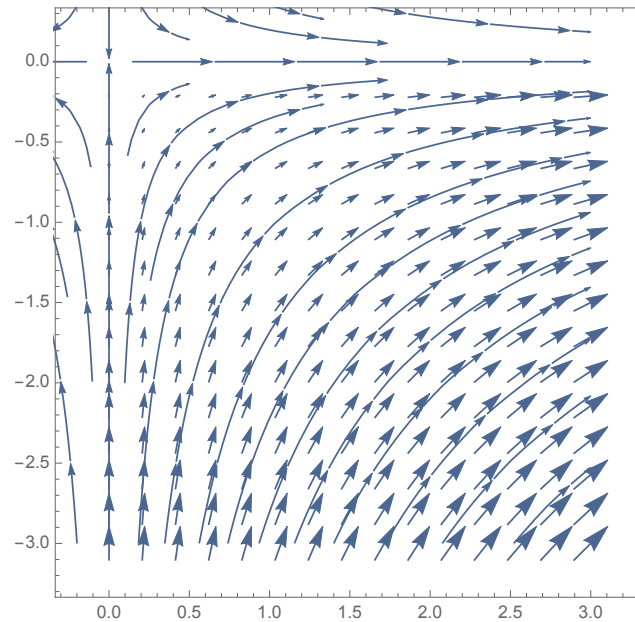


FIGURE 32 – Lignes de courant

le vecteur tangente à une courbe \mathcal{C} à un point donné et à l'instant t . Soit aussi

$$\mathbf{v} = ue_x + ve_y + we_z$$

le vecteur vitesse au même point et au même instant. Le vecteur \mathbf{v} est tangent à la courbe \mathcal{C} si

$$\mathbf{v} \wedge d\mathbf{l} = 0.$$

Donc

$$\mathbf{v} \wedge d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne finalement les relations suivantes

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Dans le cas d'un écoulement à 2 dimensions nous avons

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

et la connaissance de $u(x, y, t)$ et de $v(x, y, t)$ permet d'intégrer l'équation pour trouver des courbes de niveau

$$F(x, y, t) = 0$$

Important

1. ne pas confondre ligne de courant et trajectoire
 - ligne de courant : construite à un temps donné pour des particules différentes
 - trajectoire : c'est la même particule qui est suivie au cours du temps

2. dans le cas d'un écoulement stationnaire (qui ne dépend pas du temps) les lignes de courant coïncident avec les trajectoires car

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

pour les lignes de courant et

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

pour les trajectoires. La différence est que nous avons un sens horaire. Dans le cas stationnaire les deux approches sont équivalentes.

3. un écoulement dans les variables d'Euler peut être stationnaire mais la trajectoire dépend du temps!!. Soit un champ de vitesse simple

$$\begin{aligned} u &= U_0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

l'intégration de ce champ pour trouver les trajectoires donne

$$\begin{aligned} x(t) &= U_0 t + x_0 \\ y(t) &= y_0 \end{aligned}$$

Exemple 4.9. LIGNES DE COURANT I

Soit le champ de vitesse $\begin{cases} u = y \\ v = -x \end{cases}$

Alors

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

est

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \text{soit} \quad xdx + ydy = 0$$

L'intégration de $xdx + ydy = 0$ donne

$$x^2 + y^2 = C$$

soit des cercles de rayon $C^{1/2}$ (chaque constante C donne un cercle différent) centrés en 0,0. La représentation des vecteurs et les courbes de niveaux des solutions sont donnés dans la Figure 33.

Exemple 4.10. LIGNES DE COURANT II Même cas (mais avec un signe différent.

Soit le champ de vitesse $\begin{cases} u = x \\ v = y \end{cases}$

Alors

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

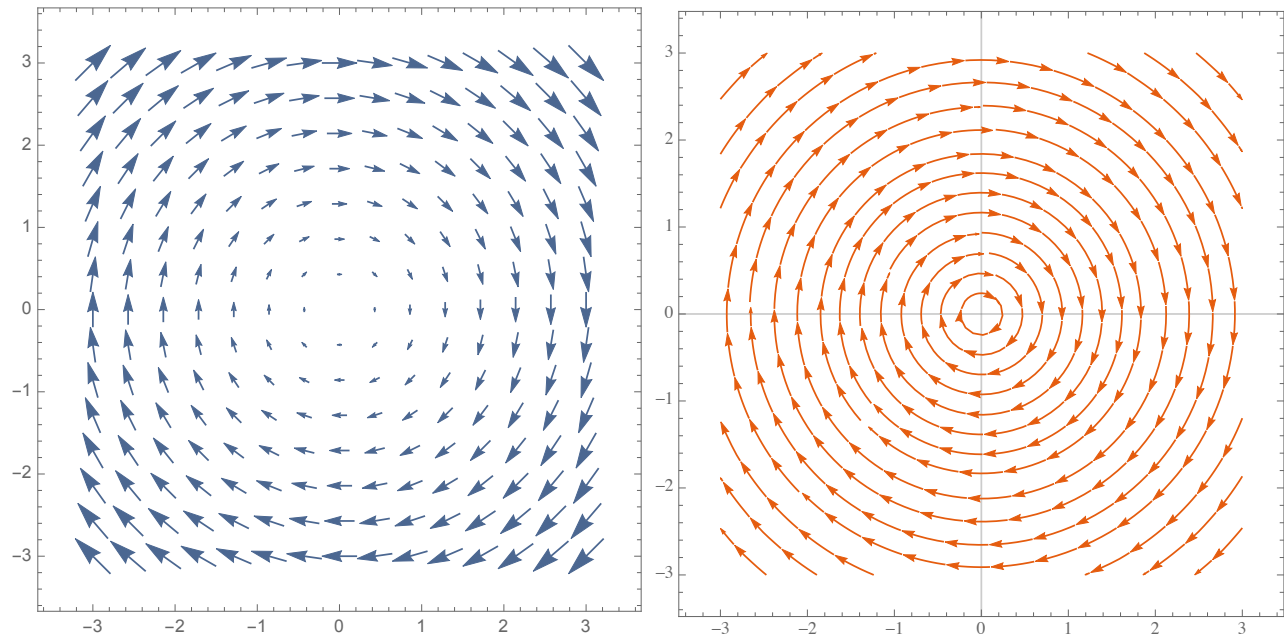


FIGURE 33 – (a) Champs de vecteurs. (b) Lignes de courant.

est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

L'intégration donne

$$\begin{aligned}\ln x - \ln y &= C_1 \\ y &= C_2 x\end{aligned}$$

soit des droites centrés en $0, 0$. La représentation des vecteurs et les courbes de niveaux des solutions sont donnés dans la Figure 34.

Remarque importante Nous avons remarqué que la connaissance des lignes des courant donne un vision assez complète du champs de vitesse mais elle ne fourni pas la direction de l'écoulement, il est nécessaire donc d'y ajouter le champs de vecteurs.

4.7 Tube de courant

Un tube de courant est la surface constituée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée. Cela implique qu'il n'y a pas de flux qui traverse le tube de courant.

4.8 Ligne d'émission

4.9 Circulation

Pour un champ de vecteurs \mathbf{v} la circulation Γ est l'intégrale de ligne le long d'un ligne \mathcal{C} reliant deux point \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} d\mathbf{l}$$

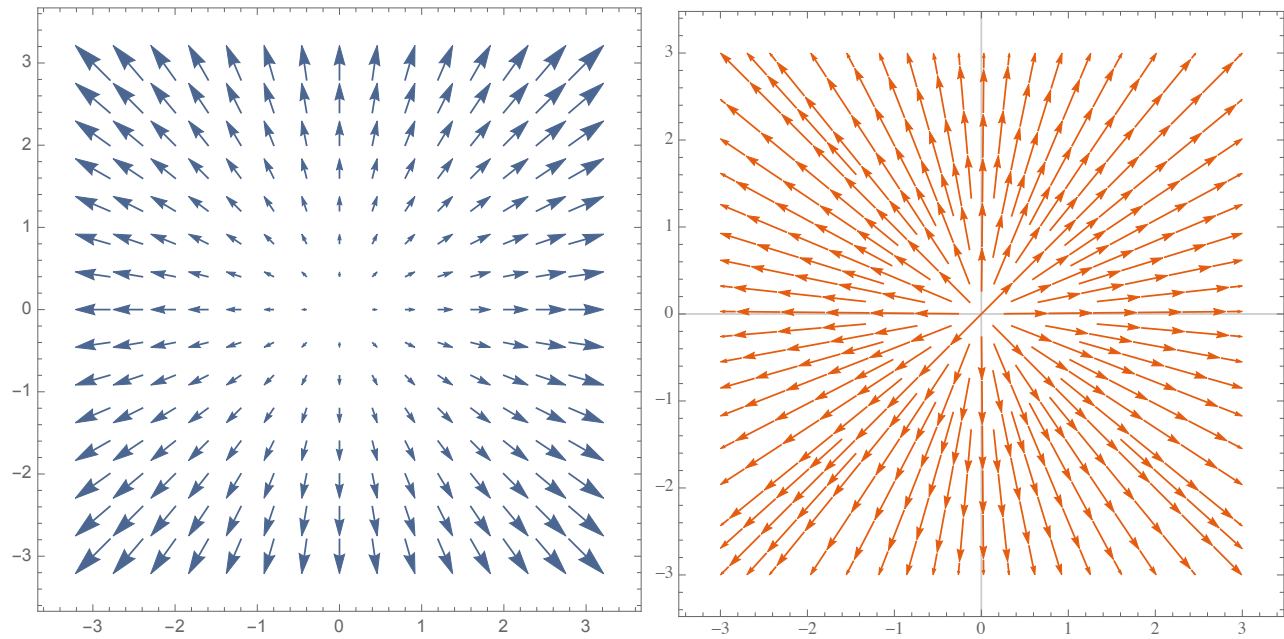


FIGURE 34 – (a) Champs de vecteurs. (b) Lignes de courant.

où \mathbf{dl} est le vecteur tangent à l'arc de courbe orienté \mathcal{C} et l est l'abscisse curviligne. L'arc \mathcal{C} s'écrit de manière paramétrique comme $x = x(l), y = y(l)$ alors

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \mathbf{dl} = \int_{\mathcal{C}} (ue_x + ve_y + wE_z)(dxe_x + dyey + dze_z)$$

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} (udx + vdy + wdz)$$

4.10 Fonction de courant

Si nous avons un écoulement instationnaire, plan et incompressible le champ de vitesse est de la forme

$$\mathbf{v} = u(x, y)e_x + v(x, y)e_y$$

et vérifie la propriété de $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Cette relation exprime que

$$udy - vdx$$

est une différentielle totale exacte³, il existe donc une fonction ψ telle que

$$\psi = udy - vdx$$

3. Une forme différentielle est dite exacte, si il existe une fonction f dont la différentielle totale est $df = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ où les fonctions A et B sont reliées aux dérivées partielles de f par $A = \partial_x f$ et $B = \partial_y f$.

fonction de courant La fonction ψ est appelée fonction de courant et elle est reliée aux composantes de la vitesse par

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Plus sur PREUVE

1. si la divergence du vecteur vitesse \mathbf{v} est nulle nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

en remplaçant par les composantes de ψ on trouve

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

égale à zéro pour tout ψ .

2. A partir de la propriété suivante

$$\text{div}(\text{rot} A) = 0$$

en effet si A est un vecteur de composantes A_x, A_y, A_z nous avons (pour les composantes x et y)

$$\text{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_y$$

en prenant $\mathbf{A} = \psi(x, y) e_z$ nous avons

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{v} = u e_x + v e_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} e_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} e_y$$

Physique Les lignes de courant sont données par les courbes $\phi = \text{constante}$.

Plus sur PHYSIQUE

Les lignes de courant sont données par l'équation

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

c'est à dire

$$u dy - v dx = 0$$

$$d\psi = 0 \Rightarrow \psi = \text{cte}$$

Exemple 4.11. LIGNES DE COURANT Soit le champ de vitesses $\begin{cases} u = U \\ v = 0 \end{cases}$ avec U une constante.

L'écoulement est plan et instationnaire. On sait déjà que les lignes de courant seront parallèles à l'axe x car nous n'avons qu'une seule composante de la vitesse.

La divergence est nulle car $\nabla \mathbf{v} = 0$ nous pouvons donc déterminer la fonction de courant ψ en résolvant le système suivant

$$\begin{aligned} u = U &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = 0 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Alors

1. de la première égalité nous avons

$$\psi(x, y) = Uy + f(x)$$

car l'intégration par rapport à y fait apparaître une constante mais qui ne dépend de x .

2. la deuxième équation nous dit que $\frac{df(x)}{dx} = 0$ alors

$$f(x) = A$$

avec A constante. Donc la solution est

$$\psi(x, y) = Uy + A$$

la constante A dépend de chaque ligne de courant. On trouve l'équation des droites parallèles à l'axe x

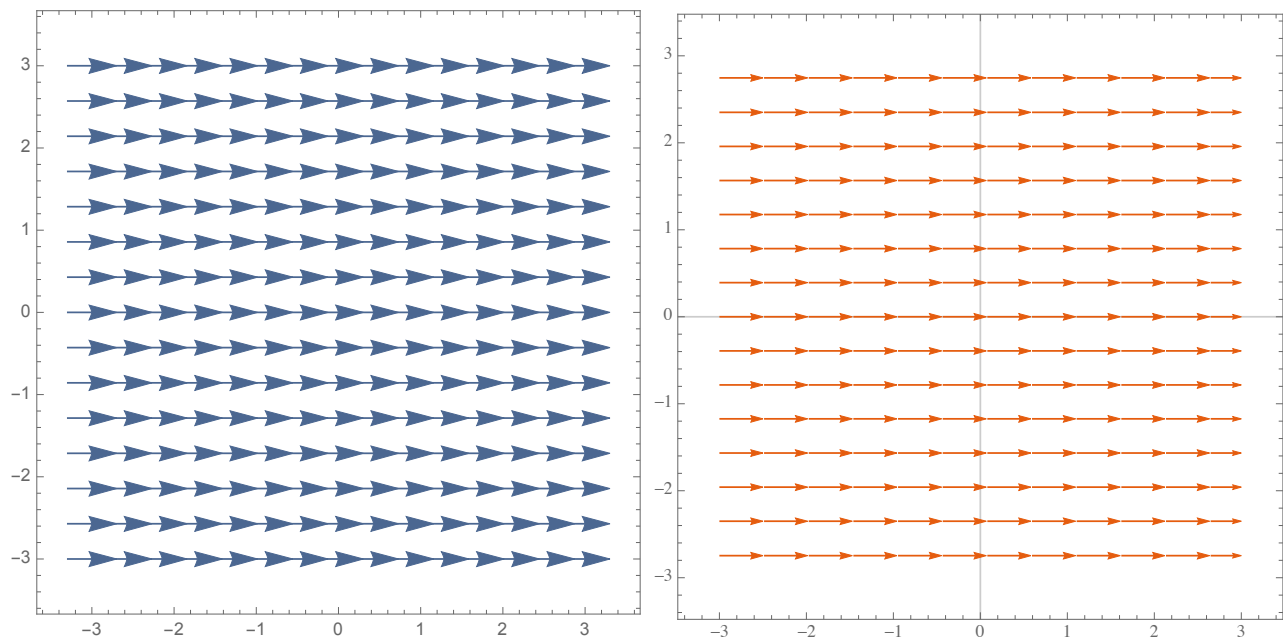


FIGURE 35 – (a) Champs de vecteurs $u = U$. (b) Lignes de courant.

4.10.1 Fonction de courant : coordonnées polaires

Très souvent nous avons affaire à de écoulement avec une symétrie de rotation, dans ces cas les coordonnées polaires r, θ (ou cylindriques si nous sommes à 3 dimensions) sont plus adaptées. La procédure pour trouver la fonction de courant ψ reste la même. La divergence du champ de vitesse \mathbf{v} s'écrit

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

où v_r, v_θ, v_z sont les composantes de la vitesse \mathbf{v} en coordonnées cylindriques (les coordonnées polaires sont un sous-ensemble). Si la divergence est nulle il existe une fonction de courant ψ tel que

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

comme nous pouvons vérifier en remplaçant dans l'expression de la divergence.

Exemple 4.12. Puits ou source Soit le champ de vitesses

$$\begin{cases} v_r = \frac{KU_0}{r} \\ v_\theta = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

avec $r \geq 0$ et avec K et U_0 constantes. L'écoulement est plan, instationnaire et incompressible si l'on croit à la définition précédente. Il existe donc une fonction de courant donnée par

$$\begin{aligned} \frac{KU_0}{r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ 0 &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Alors

1. la première équation donne

$$\psi = KU_0\theta + f(r)$$

2. et la seconde nous dit que $f(r)$ est une constante car il n'y pas de dépendance en la variable r .

Alors

$$\psi(\theta) = KU_0\theta + A$$

où A est une constante.

4.11 Potentiel de vitesses

Dans le cas d'un écoulement plan et stationnaire, et en plus qui vérifie la propriété $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ on peut définir une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^1 tel que

$$\mathbf{v} = \text{grad} \phi$$

appelée potentiel de vitesses. En effet on a par définition

$$\text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} e_y$$

dans le cas bi-dimensionnel comme $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}) = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) e_z = \mathbf{0}$$

La relation précédente peut s'écrire donc

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

Propriétés

— Si l'on calcule la circulation Γ

$$\Gamma = \int_{X_1}^{X_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) = \int_{X_1}^{X_2} d\phi = \phi(X_2) - \phi(X_1)$$

— Si l'écoulement est incompressible ($\text{div}(\mathbf{v}) = 0$) la fonction ϕ est une fonction harmonique,

$$\Delta \phi = 0$$

Lignes équipotentiellles Les courbes équipotentiellles sont des courbes avec ϕ constant. Ces courbes sont orthogonales aux lignes de courant en tout point, en effet

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = d\phi$$

Mais sur une ligne équipotentielle la fonction ϕ est constante et donc $d\phi = 0$. Le long de ces lignes on a $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Les équipotentiellles sont donc des courbes orthogonales à la vitesse en tout point donc aux lignes de courant.

Les courbes ϕ et ψ ce sont des fonctions scalaires, pour connaître l'angle qui "forment" dans chaque point de l'espace, on est amenés à calculer les deux gradients, pour ϕ et pour ψ . En effet les gradients étant des vecteurs orthogonaux aux courbes de niveau, l'angle qui forment sera l'angle des courbes de niveau. Alors

$$\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} e_y \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} e_y \right) = -uv + vu = 0$$

Exemple 4.13. Puits ou source - À NOUVEAU - Soit le champ de vitesses

$$\begin{cases} v_r = \frac{KU_0}{r} \\ v_\theta = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

avec $r \geq 0$ et avec K et U_0 constantes. L'écoulement est plan, instationnaire et incompressible. Le rotationnel pour la composante z est

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) e_z = 0$$

il existe donc une fonction ϕ , le potentiel de vitesses tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{KU_0}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Alors

1. la première équation donne

$$\phi = KU_0 \ln r + f(\theta)$$

2. et la seconde nous dit que $f(\theta)$ est une constante car il n'y pas de dépendance en la variable θ .

Alors

$$\phi(r) = KU_0 \ln r + A$$

où A est une constante. Ce sont des cercles concentriques.

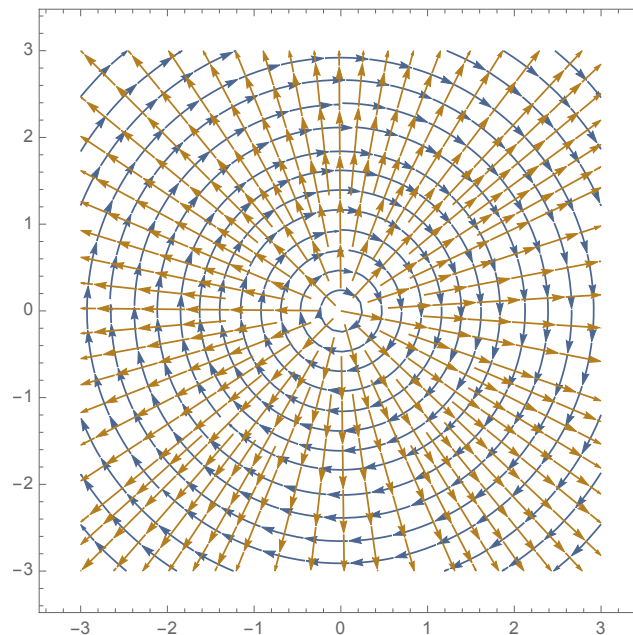


FIGURE 36 – ψ and ϕ .

4.12 Déformations d'un élément de fluide

Avant commencer à étudier la déformation d'un élément fluide rappelons la notation d'Einstein qui dit que quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, nous avons de manière implicite une sommation sur cet indice. Par exemple nous écrivons le vecteur vitesse \mathbf{U} dans la base cartésienne comme

$$\mathbf{U} = ue_x + ve_y + we_z$$

Si l'on suppose, sans perte de généralité que la base est e_1, e_2, e_3 (donc ici $e_x = e_1, e_y = e_2, e_z = e_3$) et que les composantes sont u_1, u_2, u_3 (de façon équivalente $u = u_1, v = u_2, w = u_3$) le vecteur vitesse \mathbf{U} s'écrit indistinctement

$$\mathbf{U} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1,3} u_i e_i$$

$$\mathbf{U} = u_i e_i$$

$$\mathbf{U} = u_i$$

les deux dernières lignes utilisent la notation d'Einstein, dans la dernière on suppose le base implicite. De la même manière nous avons les opérateurs connus

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} \, p &= \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \mathit{div}(\mathbf{U}) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \mathbf{rot} \, \mathbf{u} &= e_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \text{matrice carré}(A) &= A_{ij} \\ \text{matrice identité}(I) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

où de la même manière x_1, x_2, x_3 est x, y, z .

Déformations Le mouvement d'une particule fluide peut être décomposé en

1. une translation,
2. une rotation,
3. et une déformation.

Par rapport à un solide rigide, nous avons un mouvement de plus les déformations. Compte tenu de la définition d'un fluide en tant qu'élément de fluide qui se déforme sous l'action d'une contrainte dû à l'écoulement, nous pouvons expliquer les rotations et déformations en utilisant les termes du gradient du champ de vitesses.

Nous allons d'abord étudier le champs de vitesses autour d'un point O . En considérant la situation représentée sur la figure, soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la vitesse au point O (de vecteur position \mathbf{x}), et soit $\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)$ la vitesse dans le même temps à un point voisin à proximité P (vecteur position $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$). Le développement de Taylor au 1er ordre en trois dimensions (x, y, z) conduit à la relation suivante

$$\begin{aligned}du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz\end{aligned}$$

Cette équation peut être écrite de manière compacte en utilisant la notation indicielle présentée auparavant comme suit

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

avec, bien entendu i et j allant de 1 à 3, et où $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ les composantes de la vitesse et de même pour les trois coordonnées x_i . Le terme $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ peut être écrit en forme d'une matrice 3x3,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

c'est le **tenseur des gradient de vitesse**. Il peut être décomposé en deux tenseurs :

1. un tenseur symétrique S , appelé **tenseur des déformations**

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

2. et un tenseur anti symétrique R appelé **tenseur des rotations**

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Le terme diagonal du tenseur symétrique S donne une idée des elongations des éléments fluide, par exemple, observons l'effet de S_{11} sur un élément fluide comme le montre la Figure.

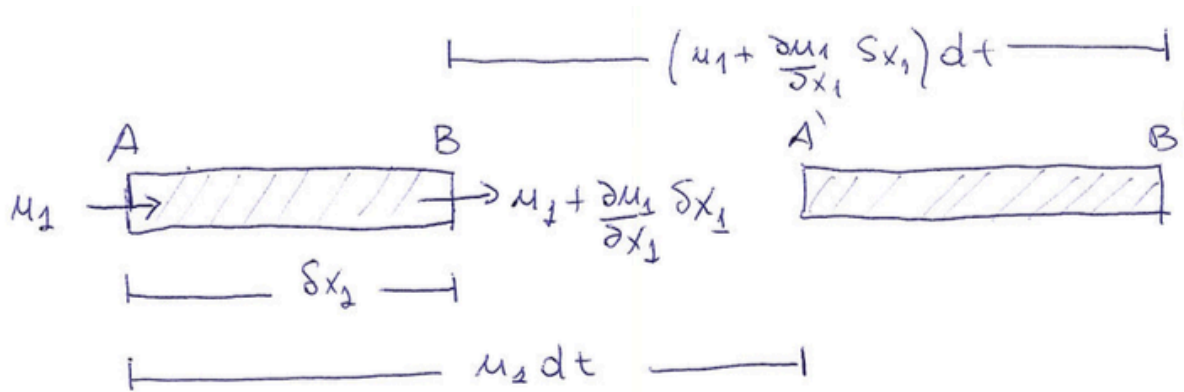


FIGURE 37 – Déformation d'un élément fluide selon l'axe x .

L'expression de S_{11} est $\frac{\partial u}{\partial x}$ si l'on revient à l'écriture en composantes. D'après la Figure le changement δx de l'élément fluide dans le champ de vitesses est

$$\frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt}(\delta x) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left(\frac{A'B' - AB}{AB} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Si l'on fait de même dans les 3 directions nous pouvons trouver que le changement du volume δV de l'élément de fluide est

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

soit la somme des éléments diagonales du tenseur de déformations, où, de manière équivalente la divergence du vecteur \mathbf{v} , $\text{div } \mathbf{v}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{v}$

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

dans le cas d'un écoulement à divergence nulle, dit incompressible la variation du volume élémentaire est aussi nulle, on peut dire que le volume se conserve lors des déformations. Nous ferons le lien avec la conservation de la masse.

Plus sur PREVUE Nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt}(\delta x) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{\delta y} \frac{D}{Dt}(\delta y) &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{\delta z} \frac{D}{Dt}(\delta z) &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

l'addition des trois elongations donne

$$\frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{D}{Dt}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{D}{Dt}(\delta z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

soit

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Les termes hors diagonal de S_{ij} représentent les déformations de cisaillement que changent l'orientation des lignes initialement parallèles comme le montre la Figure 38

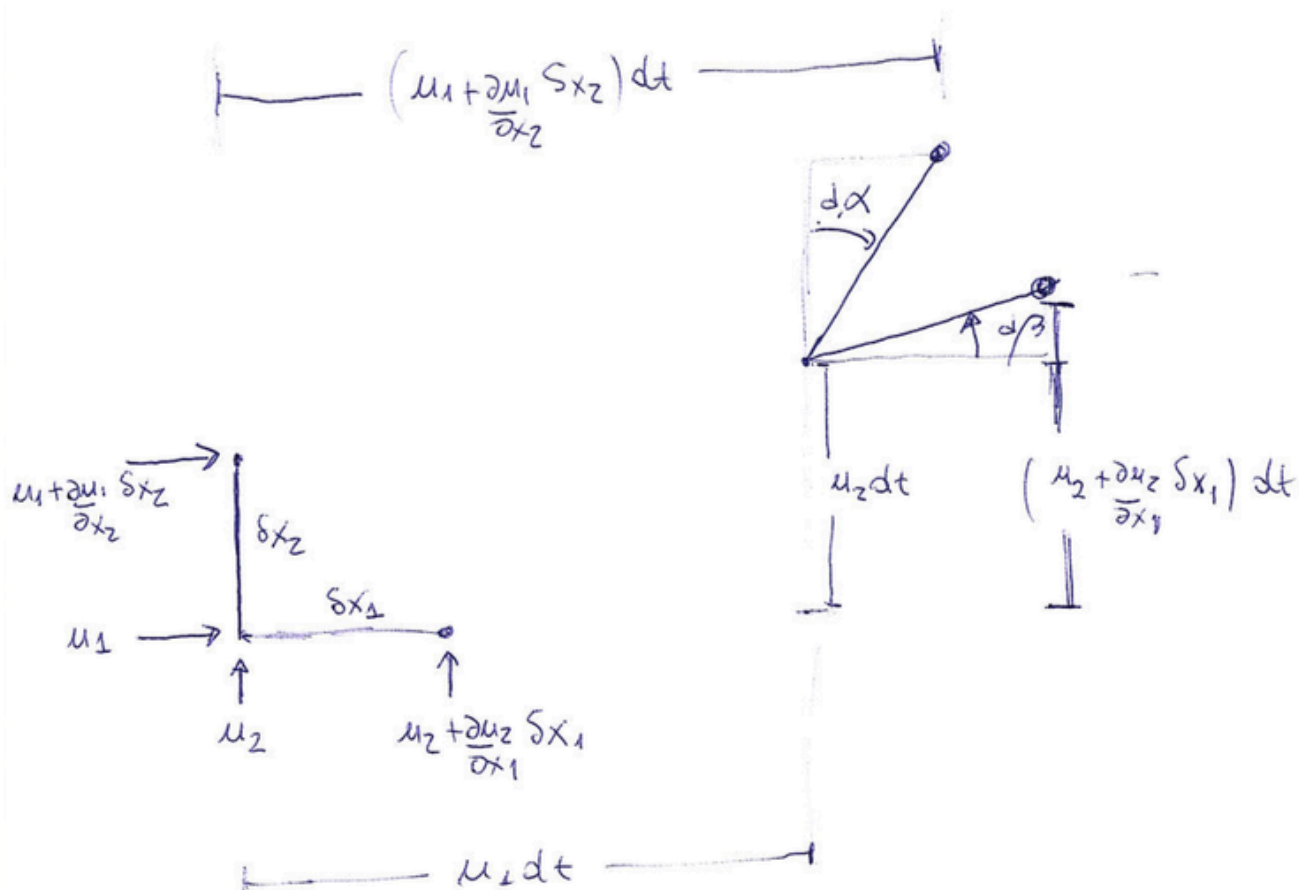


FIGURE 38 – Déformation d'un élément fluide selon l'axe x et y .

La Figure 38 permette d'écrire la vitesse angulaire relative des deux droites comme

$$\frac{1}{2} \frac{D(\alpha + \beta)}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{2dt} \left(\frac{1}{\delta y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta y dt \right) + \frac{1}{\delta x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x dt \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Nous pouvons donc remarquer que les termes hors diagonale de tenseur S_{ij} déformant par le biais d'un rotation l'élément de fluide. Si nous faisons la même analyse mais avec $\frac{1}{2} \frac{D(-\alpha + \beta)}{Dt}$ nous pouvons conclure que

$$\frac{1}{2} \frac{D(-\alpha + \beta)}{Dt} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

soit l'un des termes du tenseur de rotation. Nous remarquons également que si les deux vitesses angulaires sont les mêmes il n'y pas de déformation et que, en conséquence $\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$.

Le tenseur des rotations est anti symétrique donc

1. les éléments diagonaux sont égaux à zéro, et
2. les éléments hors diagonal sont égaux et de signe opposé.

Si l'on rappelle de la définition du vecteur rotationnel de la vitesse

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) e_x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) e_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) e_z$$

on peut l'écrire comme le vecteur vorticité $\omega = \nabla \wedge \mathbf{v}$

$$\omega = \nabla \wedge \mathbf{v} = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z.$$

Alors il est directe d'écrire le tenseur de rotations R_{ij} comme

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

et pour un écoulement plan,

$$\omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{vmatrix}$$

Maintenant si l'on regarde la Figure et l'on étudie comme se suivent des lignes initialement parallèles

$$\frac{1}{2} \frac{D(-\alpha + \beta)}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{2dt} \left(-\frac{1}{\delta y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta y dt \right) + \frac{1}{\delta x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x dt \right) \right) = \frac{\omega_z}{2}$$

donc le tenseur des rotations R_{ij} représente le double des rotations de l'élément fluide. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) l'élément ne tourne pas sur lui même car pour tout temps $\alpha = \beta$.

5 Ecoulements potentiels et Potentiel Complexe

Les écoulements potentiels sont caractérisés par le fait que le rotationnel de la vitesse \mathbf{v} est nul soit

$$\text{rot} \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = 0$$

dans cette situation le champ de vitesse \mathbf{v} dérive alors d'un potentiel de vitesse ϕ avec

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \mathbf{v}$$

Nous notons qu'en absence de viscosité un champ irrotationnel à un instant donné reste irrotationnel à tout instant t ultérieur. Si l'écoulement est aussi incompressible nous avons $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ alors

$$\text{div}(\text{grad} \phi) = \Delta \phi = 0$$

le champ de vitesse vectoriel peut être trouvé à partir de la solution de l'équation de Laplace.

5.1 Unicité du champ de vitesses

Dans un écoulement fluide potentiel (simplement connexe, pour être plus précis), il existe un seul champ de vitesse pour des conditions aux limites données. La preuve est par l'absurde, nous supposons qu'il existent deux champs ϕ_1 et ϕ_2 dont les vitesses satisfassent les mêmes conditions aux limites et nous calculons la quantité positive suivant sur tout le domaine S

$$\int_V (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 dV \quad (34)$$

avec la nouvelle variable $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Nous trouvons

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi dV = \int_V \text{div}(\mathbf{u}\phi) dV - \int_V \phi \text{div}(\mathbf{u}) dV \quad (35)$$

$$= \int_S \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (36)$$

où nous avons utilisé le théorème de la divergence pour l'intégrale de surface et le fait de que l'écoulement est incompressible. Cette dernière intégrale est zéro en présence d'un solide (la vitesse normale sur le solide est nulle) et le champ de vitesse s'annule à l'infini. Donc $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

5.2 Additivité des solutions

Par suite de la linéarité de l'équation de Laplace, des combinaisons linéaires de solutions de celle-ci la vérifieront également. On peut donc construire un champ de vitesse d'un problème potentiel en superposant des solutions simples.

5.3 Exemples d'écoulements potentiels

Écoulement parallèle uniforme L'écoulement est donnée par une seule composante de la vitesse par exemple à 2 dimensions

$$u = U_0 \quad (37)$$

$$v = 0 \quad (38)$$

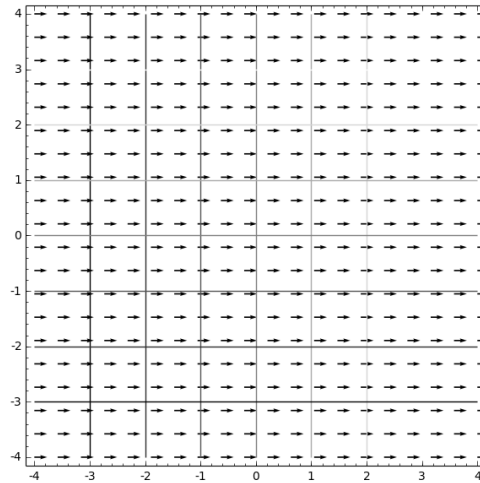


FIGURE 39 – ϕ , ψ et champ de vitesses pour une écoulement parallèle uniforme.

Tourbillon Un écoulement plan autour d'un axe s'appelle écoulement tourbillonnaire, en coordonnées polaires nous avons

$$u_r = 0 \quad (39)$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (40)$$

La fonction de courant ψ et le potentiel de vitesses ϕ sont

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (42)$$

On obtient

$$\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi r} \quad (43)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_0} \quad (44)$$

Si l'on calcule la circulation de la vitesse autour d'un cercle de rayon r

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma \theta}{2\pi r} r d\theta = \Gamma \quad (45)$$

Γ représente la circulation.

Source C'est un écoulement à partir (ou vers) un point donné, le champ de vitesse est

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad (46)$$

$$u_\theta = 0 \quad (47)$$

La fonction de courant ψ et le potentiel de vitesses ϕ sont

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (49)$$

Donc

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{r}{r_0} \quad (50)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (51)$$

Si l'on évalue le flux de la vitesse à travers d'un cercle de rayon r

$$\int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl = \int_0^{2\pi} r u_r d\theta = Q \quad (52)$$

Q représente donc le débit traversant un cerce de rayon r .

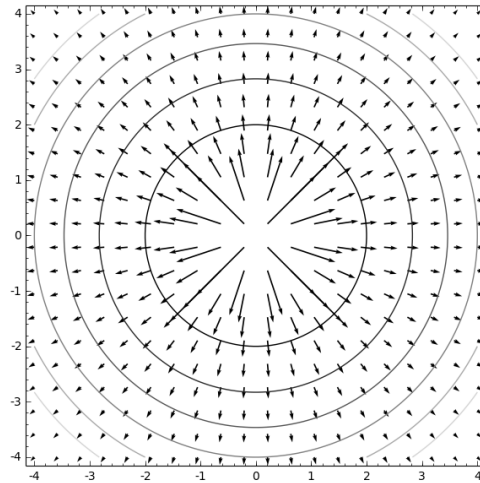


FIGURE 40 – ϕ , ψ et champ de vitesses pour une source ($Q > 0$).

Dipôle Si l'on pose cote à cote un puits et une source de la même intensité Q situés sur l'axe x aux positions r_1 et r_2 nous avons le potentiel de vitesses suivant

$$\phi_1 = \frac{Q}{2\pi} \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| \quad (53)$$

$$\phi_2 = -\frac{Q}{2\pi} \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \quad (54)$$

Dans un point $\mathbf{r} > (r_1, r_2)$ nous pouvons développer les expressions précédentes en rapprochant la source du puits $d = r_2 - r_1 \rightarrow 0$ car

$$\phi_1 = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{\partial(\log r)}{\partial r} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) - |\mathbf{r}| + \dots \right) \quad (55)$$

donc

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \frac{d \cos \theta}{r} \quad (56)$$

5.4 Solide de Rankine

C'est l'écoulement autour d'un obstacle solide avec une symétrie de révolution autour de la direction de l'écoulement. Nous allons voir un cas dans le TD 1 où la fonction de courant associée à l'écoulement est, dans un système de coordonnées polaires :

$$\psi = U \left(\frac{h\theta}{2\pi} - r \sin \theta \right) \quad (57)$$

avec $-\pi < \theta < \pi$ et où U et h sont des constantes positives ayant respectivement les dimensions d'une vitesse et d'une longueur.

5.5 Potentiel Complexe

Dans le cas d'écoulement

- plan
- stationnaire
- incompressible
- irrotationnel

nous avons l'existence d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel de vitesses ϕ . Alors on se place dans un plan complexe \mathcal{C} avec une variable complexe z

$$z = x + iy$$

avec i dessinant la partie imaginaire et $i^2 = -1$. Pour la suite nous rappelons la définition de $\bar{z} = x - iy$, le complexe conjugué de z , et les propriétés de base pour exprimer la variable complexe dans le plan réel, comme

1. passage coordonnées polaires-cartésiennes

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

2. passage coordonnées cartésiennes-polaires

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \text{atan}(y/x)$$

3. les relations

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$$

$$\bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta = re^{-i\theta}$$

$$\text{car } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ (formule d'Euler)}$$

Nous pouvons définir la fonction $f(x, y)$

$$f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

appelée **potentiel complexe** de l'écoulement. Une propriété importante est que

$$f(x, y) = f(z).$$

Nous sommes en présence de fonctions analytiques, une fonction est dite analytique si elle satisfait la condition de Cauchy-Riemann :

1. la fonction $f = \phi + i\psi$ est analytique si

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La conclusion est que toute fonction f analytique décrit un écoulement plan, stationnaire, incompressible et irrotationnel tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e(f) &= \phi \\ \mathcal{I}m(f) &= \psi\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la dérivée de f par rapport à z . A partir de $z = x + iy$ nous avons la relation inverse

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)\end{aligned}$$

Ces relations permettent de faire le changement de variables $(x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$ et comme nous savons que $f(x, y) = f(z)$ la différentielle de df peut s'exprimer de deux manières différentes

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ df &= \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.\end{aligned}$$

En utilisant les définitions de x et y nous pouvons remplacer dx et dy dans la première relation de df alors

$$df = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(d\bar{z} - dz)$$

soit en regroupant les termes

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Par comparaison avec la deuxième expression de df on trouve que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons remplacer les dérivées par rapport à x et y de la fonction $f = \phi + i\psi$, pour $\frac{\partial f}{\partial z}$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

et finalement si l'on revient aux définitions de u et v

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv$$

C'est à dire que la dérivée selon z de la fonction f donne les composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes. Nous avons défini la vitesse complexe w

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} = u - iv$$

Calculons maintenant la circulation complexe $\bar{\Gamma}(z)$ sur un contour fermée \mathbf{C}

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(z) &= \int_{\mathbf{C}} w(z) dz = \int_{\mathbf{C}} (u - iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\mathbf{C}} (u dx + v dy) + i \int_{\mathbf{C}} (u dy - v dx) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\bar{\Gamma}(z) = \int_{\mathbf{C}} \mathbf{u} d\mathbf{l} + i \int_{\mathbf{C}} \mathbf{u} n d\mathbf{l} = \Gamma + iQ$$

Le premier terme représente la circulation Γ , le second, le débit Q de fluide.

Exemple 5.1. POTENTIEL COMPLEXE Soit la fonction, suivante

$$f(z) = -\frac{k}{2\pi z}$$

avec k une constante réelle positive. Nous cherchons

1. la fonction de courant ψ et le potentiel de vitesses ϕ ,

$$f(z) = f(r, \theta) = \phi(r, \theta) + i\psi(r, \theta)$$

donc avec $z = re^{i\theta}$

$$f(z) = -\frac{k}{2\pi z} = -\frac{k}{2\pi r} e^{-i\theta} = -\frac{k}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

alors

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= -\frac{k}{2\pi r} \cos \theta \\ \psi(r, \theta) &= \frac{k}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned}$$

2. on peut calculer la vitesse à partir du potentiel de vitesses, $\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\phi)$ soit

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{k}{2\pi r^2} \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{k}{2\pi r^2} \sin \theta \end{aligned}$$

3. avec la vitesse complexe w

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{k}{2\pi z^2} = \frac{k}{2\pi r^2} e^{-i2\theta}$$

et comme $w = u - iv$ nous avons

$$u = \frac{k}{2\pi r^2} \cos(2\theta)$$

$$v = \frac{k}{2\pi r^2} \sin(2\theta)$$

il suffit maintenant de remplacer $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = \text{atan}(y/x)$ pour avoir les vitesses en coordonnées cartésiennes.

Nous allons présenter des exemples déjà vus

— $f(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z$ alors

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{m}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

et nous trouvons

$$\phi = \mathcal{R}e(f(z)) = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \mathcal{I}m(f(z)) = \frac{m}{2\pi} \theta$$

soit une source ou un puits en fonction du signe de m .

— $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$, de la même manière

$$\phi = \mathcal{R}e(f(z)) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = \mathcal{I}m(f(z)) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

un vortex ou tourbillon.

— un doublet

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z + \epsilon) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - \epsilon) = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{z + \epsilon}{z - \epsilon} \right)$$

si l'on fait le développement limité pour $\epsilon \rightarrow 0$

$$f(z) = \frac{C}{z}$$

ce qui donne

$$f(z) = \frac{C}{r} e^{-i\theta}$$

et en coordonnées cartésiennes

$$\psi = -\frac{Cy}{x^2 + y^2}$$

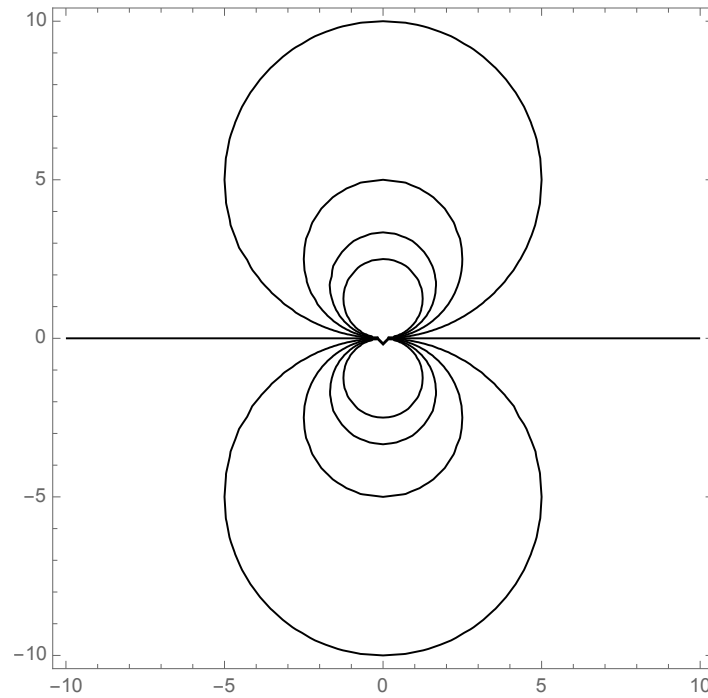


FIGURE 41 – Dipôle d'équation $\psi = -\frac{Cy}{x^2+y^2}$.

5.6 Transformation conforme

Considérons deux variables complexes z et Z et faisons l'hypothèse de que la variable Z est une fonction analytique de z soit

$$Z = g(z)$$

Nous pouvons faire correspondre des lignes d'un plan dans l'autre, en particulier les lignes de courant ψ et le potentiel de vitesses ϕ .

La propriété fondamentale de la transformation conforme ainsi définie est qu'elle conserve les angles. Dans un point Z_0 d'image z_0 nous essayons d'évaluer l'angle entre les deux segments δz_1 et δz_2 ce qui donne

$$\delta Z_1 = g'(z_0)\delta z_1$$

$$\delta Z_2 = g'(z_0)\delta z_2$$

alors si $g'(z_0)$ est fini nous avons

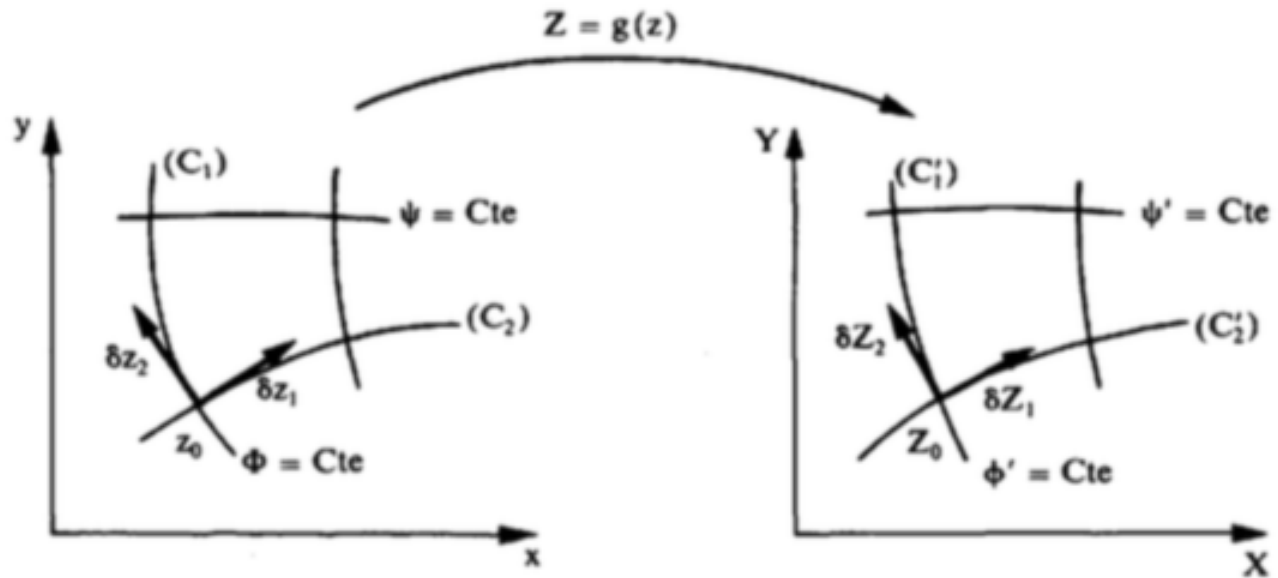
$$\begin{aligned} \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} &= \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} e^{(arg(\delta Z_2) - arg(\delta Z_1))} \\ \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} &= \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|} e^{(arg(\delta z_2) - arg(\delta z_1))} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} = \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|}$$

et

$$arg(\delta Z_2) - arg(\delta Z_1) = arg(\delta z_2) - arg(\delta z_1)$$

FIGURE 42 – Transformation $Z = g(z)$ entre deux plans complexes.

L'angle entre deux courbes dans le plan Z est donc égal à l'angle des courbes images dans le plan z , sauf aux points spécifiques de point z_0 tels que la dérivée $g'(z_0)$ soit zéro ou infini. On en déduit que les courbes des lignes de courant ψ et du potentiel de vitesses ϕ constantes sont des réseaux orthogonaux dans l'espace image.

Si le potentiel complexe $f(z)$ caractérise un écoulement dans un domaine du plan (x, y) et que $h(Z)$ représente la transformation inverse de la transformation conforme $Z = g(z)$ alors la fonction :

$$f(h(Z)) = F(Z)$$

décrit un écoulement dans le plan (X, Y) dont les équipotentielles et les lignes de courant sont respectivement les images obtenues par la transformation des équipotentielles et des lignes de courant dans le plan (x, y) . Les obstacles dans le plan objet, correspondent, par la loi de transformation, à des obstacles dans le plan image. Il est donc possible d'obtenir directement la vitesse et le potentiel complexe par la transformation $g(z)$.

5.7 Transformation de Joukovski

C'est une transformation d'un plan complexe dans autre plan complexe (transformation conforme) permettant de passer d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire à un écoulement autour d'un profil d'aile à deux dimensions. La transformation est

$$Z = f(z) = z + \frac{R^2}{z}$$

avec Z et z des nombres complexes et R un nombre réel. Un cercle de rayon r_1 dans le plan (x, y) en polaires écrit comme $z = r_1 e^{i\theta}$ est transformé dans une ellipse dans le plan (X, Y) , en effet

$$Z = X + iY = r_1 e^{i\theta} + \frac{R^2}{r_1 e^{i\theta}} = \left(r_1 + \frac{R^2}{r_1}\right) \cos \theta + i \left(r_1 - \frac{R^2}{r_1}\right) \sin \theta$$

ce qui donne finalement

$$\frac{X^2}{\left(r_1 + \frac{R^2}{r_1}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r_1 - \frac{R^2}{r_1}\right)^2} = 1$$

soit une ellipse dans le plan (X, Y) dont les foyers sont $X = \pm 2R$.

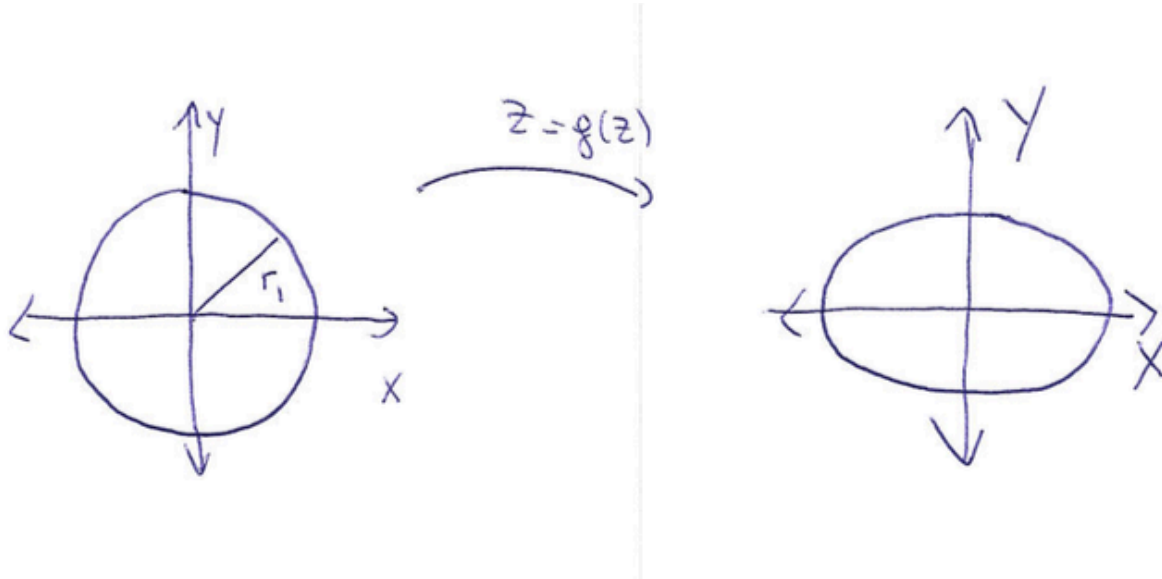


FIGURE 43 – Transformation d'un cercle dans une ellipse.

Dans le cas où $r_1 = R$ le paramètre de la transformation on a

$$Z = 2R \cos \theta$$

et l'ellipse devient le segment de droite de coordonnées $Y = 0$ et $X = \pm 2R$. On remarque ici que la dérivée de la fonction $g(z)$ (soit $g'(z) = 1 - \frac{R^2}{z^2}$) s'annule aux points $z = \pm R$ ce qui implique le non conservation des angles aux points $X = \pm 2R$.

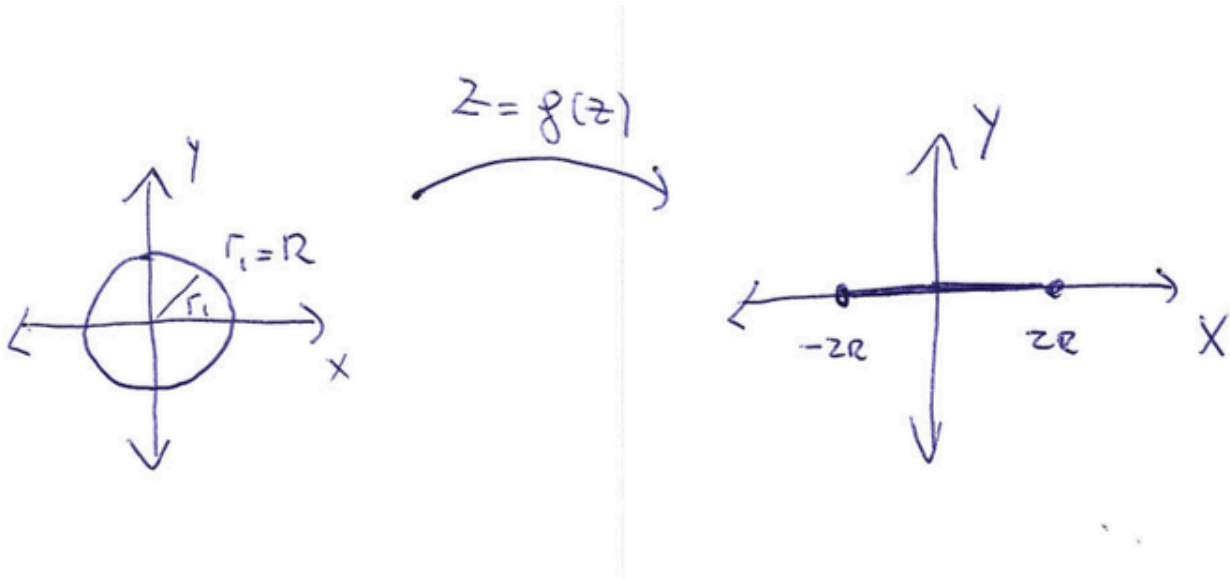


FIGURE 44 – Transformation d'un cercle dans un segment.

Pour la tranformation d'un écoulement parallèle uniforme

$$F(Z) = UZ$$

avec la tranformation $Z = z + \frac{R^2}{z}$ devient

$$f(z) = Uz + \frac{R^2}{z}$$

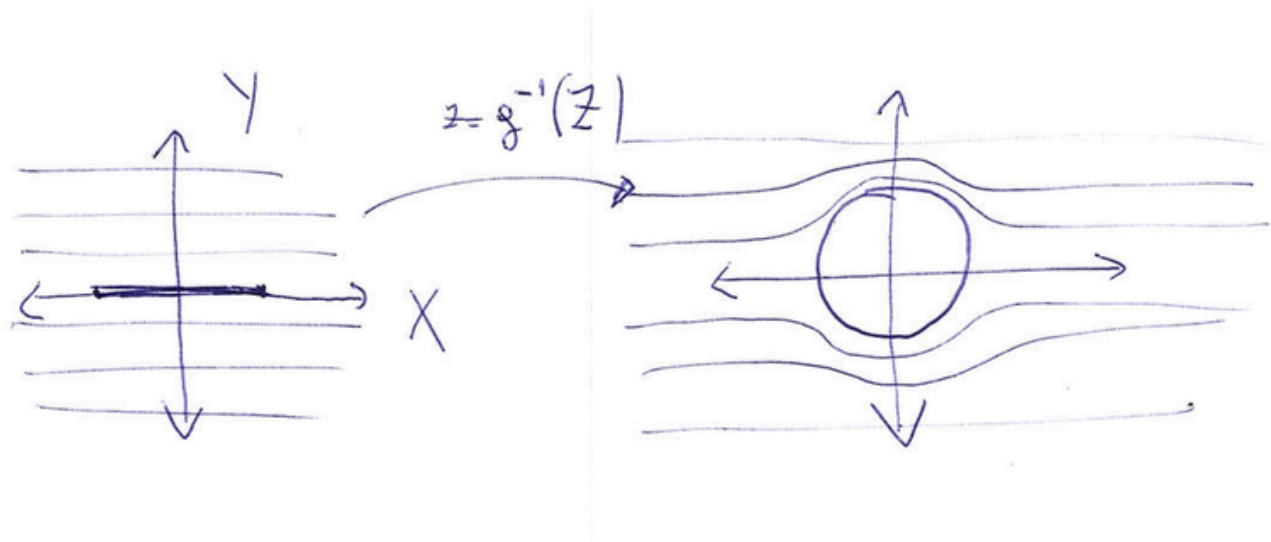


FIGURE 45 – Transformation d'un écoulement autour d'un plan dans un écoulement autour d'un cylindre.

n

6 Lois de conservation

La mécanique de fluides est basée sur les lois de conservation pour

- masse
- quantité de mouvement
- énergie

Ces lois peuvent apparaître

- soit dans une forme globale ou intégrale dont le domaine d'application est toute la région d'étude,
- soit dans une forme locale ou différentielle avec une application dans tout point de l'espace.

Nous sommes intéressées dans la variation des fonctions dépendent du temps et de l'espace dans une région d'un volume \mathcal{V} délimitée par une surface \mathcal{S} . Comme le volume (et donc la surface) se déplace avec l'écoulement nous avons en réalité des fonctions de type $\mathcal{V}(t)$ et $\mathcal{S}(t)$ et nous devons calculer des intégrales à l'intérieur du volume. La difficulté réside dans le fait que les bornes d'intégration varient avec le temps, pour une fonction $F(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t)$$

Pour la conservation de la masse nous utiliserons $F(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$ et pour la conservation de la quantité de mouvement $F(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}$.

6.1 Théorème du transport de Reynolds

Pour établir le bilan de masse d'un volume élémentaire de fluide il sera nécessaire de calculer la différenciation par rapport au temps d'intégrales sur des volumes arbitraires. Le théorème du transport de Reynolds est l'extension en trois dimensions du théorème de Leibniz pour la différenciation d'une fonction dépendant d'une seule variable et du temps.

La Figure 46 présente le cas à 1 dimension.

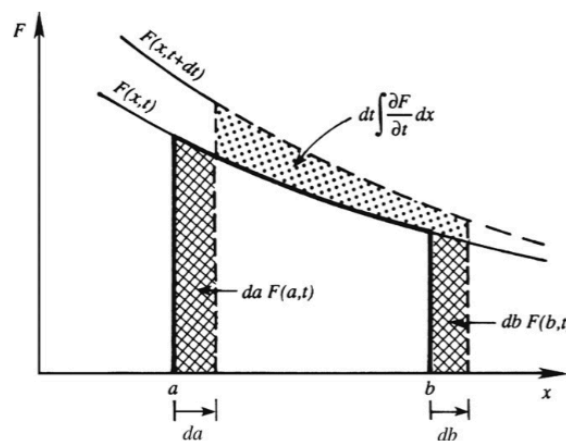


FIGURE 46 – Intégration 1D avec bornes variables.

Nous voulons calculer la dérivée par rapport au temps de l'intégrale $\int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx$ dont les limites $a(t)$ et $b(t)$ sont fonction du temps. Dans le cas de limites constantes nous savons le faire, on introduit simplement la dérivée à l'intérieur de l'intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_a^b F(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} dx$$

Dans le cas de limites qui varient avec le temps le théorème de Leibniz nous dit que

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} F(b, t) - \frac{da}{dt} F(a, t)$$

où a , b et F sont évalués au temps t .

On peut généraliser cette intégration pour un volume $\mathbf{V}(t)$ à 3 dimensions

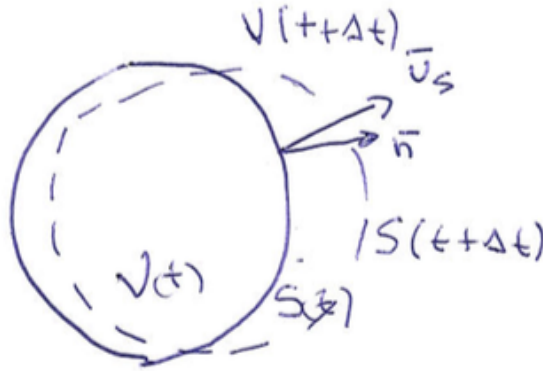


FIGURE 47 – Intégration 3D avec bornes variables.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} F(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_S n dS$$

Plus sur PREUVE

Soit une fonction $F(\mathbf{x}, t)$, le taux de changement est

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \right]$$

Comme la surface se déplace à une vitesse \mathbf{u}_S , il apparaît un flux proportionnel à $F(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_S$ donc

$$\int_{V(t+\Delta t)} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV = \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \Delta t \int_{S(t)} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{u}_S n dS$$

En remplaçant nous trouvons

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - F(\mathbf{x}, t) dV] + \int_{S(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{u}_S n dS$$

Soit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} F(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_S n dS$$

Cette identité est valable pour n'importe quel fonction sur un volume dont la frontière se déplace avec une vitesse \mathbf{u}_s . Lors de l'application de cette identité dans un écoulement nous allons être en face à, au moins, deux vitesses, la vitesse de l'écoulement \mathbf{u} et la vitesse de la frontière \mathbf{u}_s , et, en plus un flux la traversant...

6.2 Conservation de masse

Alors nous allons essayer de fixer les idées sur l'évolution de la masse volumique. Soit un volume δV élémentaire enfermant une masse δm , la définition de masse volumique est

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V}$$

si la limite est bien définie.

Pour la masse m nous pouvons avancer la définition suivante : soit un domaine de fluide $\mathcal{V}(t)$ que l'on suit dans son mouvement et soit ρ la masse volumique du fluide à l'intérieur du domaine la masse est l'intégrale

$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho dV$$

nous voulons donc évaluer

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

La manière la plus générale de la conservation de la masse dit que le taux de changement à l'intérieur du volume $\mathcal{V}(t)$ doit être égale au flux qui traverse les frontières $\mathcal{S}(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathcal{S}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \mathbf{n} dS = 0 \quad (58)$$

où $\mathbf{u} - \mathbf{u}_s$ dit que la frontière peut avoir une vitesse différente que celle du fluide. Cette dernière relation est valable pour toute frontière, fixe ou se déplaçant avec une vitesse égale ou pas à celle du fluide.

Nous avons deux cas qui présentent un intérêt particulier, quand le volume de contrôle est fixe ($\mathbf{u}_s = 0$) et quand le volume de contrôle se déplace à la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$. Nous étudions ce deux cas dans une géométrie académique : un écoulement entre deux plaque parallèles.

1. un volume fixe, soit $\mathbf{u}_s = 0$, le volume et la surface de contrôle ne dépendent pas du temps.

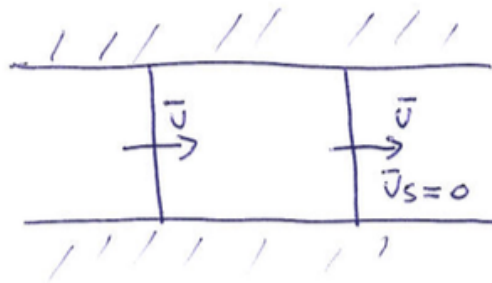


FIGURE 48 – Volume de contrôle fixe ($\mathbf{u}_s = 0$).

Le théorème du transport de Reynolds nous dit que l'on

$$\int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV$$

et donc

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} n dS = 0$$

Plus sur LA CONSERVATION DE MASSE

Dans le cas d'un écoulement stationnaire incompressible, ρ constante, nous avons

$$\int_S \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} n dS = 0$$

Nous allons appliquer la forme globale sur le volume de contrôle composé par l'entrée (section S_1 et vitesse u_1), la sortie (section S_2 et vitesse u_2) et les parois latérales S_p , alors nous pouvons décomposer l'intégrale précédente comme

$$\int_{S_1} \mathbf{u} n dS + \int_{S_2} \mathbf{u} n dS + \int_{S_p} \mathbf{u} n dS = 0 \quad (59)$$

déjà la dernière intégrale est égale à zéro car le vecteur vitesse (dans la direction x) est orthogonal à la normale à la paroi (dans la direction y). Pour les deux autres intégrales nous pouvons écrire

$$S_1 \begin{cases} \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{n} = -\mathbf{e}_x \end{cases}$$

et

$$S_2 \begin{cases} \mathbf{u} = u_2 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \end{cases}$$

alors

$$u_1 S_1 = u_2 S_2$$

C'est bien ce que l'on observe dans la Figure 48, la variation de la masse sur le volume de contrôle, fixe dans le référentiel absolu, est compensée par la masse qui traverse les surfaces d'entrée et de sortie.

2. un volume matériel, $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}$ avec \mathbf{u} la vitesse du fluide.

Alors dans l'équation (58) le deuxième terme est zéro et le premier peut être développé en utilisant le théorème du transport de Reynolds

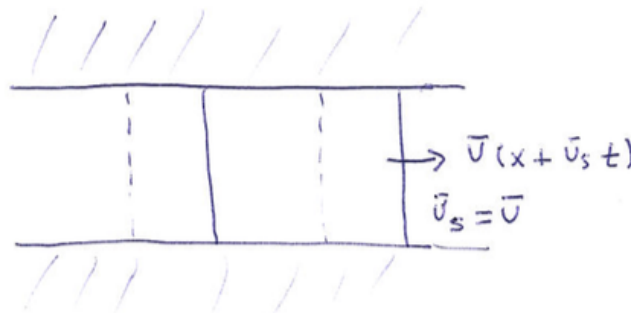
$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} n dS = 0$$

La différence avec le cas précédent est que les limites changent avec le temps. Nous pouvons maintenant le théorème de la Divergence pour écrire

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}) dV = 0$$

et en extraire la forme locale de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}) = 0$$

FIGURE 49 – Volume matériel ($\mathbf{u}_s = \mathbf{u}$).

Formes locales de la conservation de la masse L'équation que nous venons de trouver

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}) = 0 \quad (60)$$

est la 1ère forme locale de la conservation de la masse aussi appelée équation de continuité. En termes mathématiques $\nabla(\rho\mathbf{u})$ est la divergence du flux de densité de masse $\rho\mathbf{u}$. Ces termes sont souvent appelés termes de transport car il transfère des quantités d'une région à une autre du volume d'étude sans y faire de contribution réelle. Si l'on développe $\nabla(\rho\mathbf{u})$ nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \text{grad}(\rho) = 0 \quad (61)$$

où on peut reconnaître la dérivée particulière ou convective, alors nous avons la 2de forme locale de la conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla(\mathbf{u}) = 0 \quad (62)$$

Remarques Quelques remarques sur la conservation de la masse

1. l'équation

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla(\mathbf{u}) = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla(\mathbf{u}) \quad (63)$$

qui décrit le changement de masse avec le temps. Il peut dépendre de la température, de la pression ou bien de la chimie (par exemple l'eau salée)

2. soit un petit volume δV de masse volumique constante, nous avons $\delta m = \rho \delta V$ alors

$$\frac{d\delta m}{dt} = \rho \frac{d\delta V}{dt} + \delta V \frac{d\rho}{dt} \quad (64)$$

$$\frac{d\delta m}{dt} = \rho \frac{d\delta V}{dt} + \delta V \rho \text{div}(\mathbf{u}) \quad (65)$$

et comme la masse se conserve nous avons

$$\text{div}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} \quad (66)$$

3. si $\frac{D\rho}{Dt}$ nous parlons d'un fluide incompressible et donc

$$\nabla(\mathbf{u}) = 0 \quad (67)$$

Les liquides sont en pratique incompressibles, le gaz qui est un fluide compressible peut être traité dans un écoulement comme incompressible à condition que le nombre de Mach soit inférieur à 0.3 (le nombre de Mach est le rapport entre la vitesse typique de l'écoulement et la vitesse du son dans le même milieu)

4. si $\nabla(\mathbf{u}) = 0$ nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\rho) = 0$$

une équation de transport. Si nous nous plaçons à une dimension et nous étudions l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (68)$$

nous observons que toute fonction de type $\rho = \rho(x - u t)$ est transportée sans se déformer dans la direction x à une vitesse u . En effet comme $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho'(-)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'$ le résultat est direct.

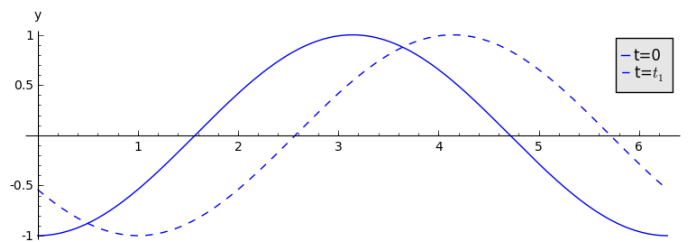


FIGURE 50 – Transport 1D.

Débit massique et volumique

Si nous avons une surface fixe \mathcal{S} dont l'orientation est déterminée par le vecteur normal \mathbf{n} le débit massique est

$$q_m = \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

où \mathbf{u} est le vecteur vitesse. L'unité est

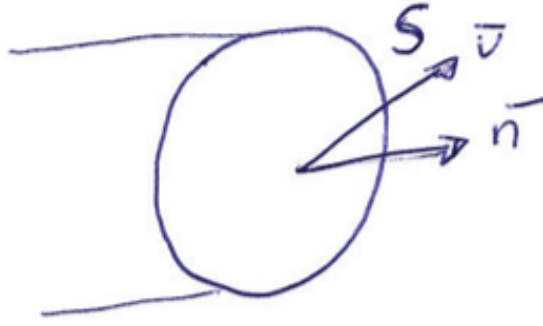
$$[q_m] = [\rho][u][S] = \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} L^2 = \frac{M}{T}$$

Il s'agit donc de la masse de fluide qui traverse la surface \mathcal{S} par unité de temps.

Le débit volumique q_v est défini de la même manière

$$q_v = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

et c'est le volume de fluide qui traverse la surface \mathcal{S} par unité de temps.

FIGURE 51 – Débit massique à travers une surface \mathcal{S} fixe.

6.3 Bilan de la quantité de mouvement

Nous pouvons maintenant appliquer la même approche pour la quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$. Nous partons du théorème de transport de Reynolds pour une fonction $F = \rho f$ avec f arbitraire, dans un volume matériel, alors

$$\int_{V(t)} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t)f)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} (\rho(\mathbf{x}, t)f) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

par l'application du théorème de la Divergence

$$\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t)f)}{\partial t} + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t)f \mathbf{u}) \right] dV = 0$$

et si l'on développe le terme entre parenthèses

$$\frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t)f)}{\partial t} + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t)f) = f \left[\frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t))}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \rho(\mathbf{x}, t)) \right] + \rho \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(f) \right]$$

où nous pouvons reconnaître la conservation de la masse et la définition de la dérivée particulaire, donc

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) f dV = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{Df}{Dt} dV$$

Un premier résultat important est, en prenant $f = \mathbf{u}$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV$$

Dans le cas d'un fluide sans viscosité nous avons vu que les forces présentes sont les efforts de volume dus à la pesanteur et les efforts de surface dus à la pression. Nous pouvons donc écrire le bilan de quantité de mouvement comme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} dV + \int_{S(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \mathbf{f} dV + \int_{S(t)} -p \mathbf{n} dS$$

où

- nous avons indiqué explicitement $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)$ que la vitesse de la frontière peut être différente que celle de l'écoulement,
- les forces de volume sont dans le terme \mathbf{f} , la gravité dans notre cas,
- les seules forces de surface sont dues à la pression, le terme $-p \mathbf{n} dS$

6.4 Equation d'Euler

Revenons maintenant au premier résultat sur la quantité de mouvement pour établir une forme locale. Pour un volume matériel nous avons donc

$$\int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \mathbf{f} dV + \int_{S(t)} -p \mathbf{n} dS$$

Nous pouvons écrire le dernier terme du second membre en utilisant le théorème de la Divergence, nous avons

$$\int_{V(t)} \left[\rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} + \mathbf{grad} p \right] dV = 0$$

soit l'équation d'Euler

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \mathbf{grad} p$$

6.4.1 Fluide parfait et incompressible

Nous avons dans ce cas, le bilan de masse ou équation de continuité, le bilan de quantité de mouvement ou équation d'Euler et une loi d'état, la masse volumique ρ constante

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} - \mathbf{grad} p \\ \rho &= cte \end{aligned}$$

Nous avons 5 équations avec 5 inconnues, avec des conditions aux limites nous sommes capables de résoudre ce problème.

6.4.2 Fluide parfait et compressible

De la même manière

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} - \mathbf{grad} p \\ p &= \rho r T \end{aligned}$$

Ici il y a encore 5 équations scalaires mais 6 inconnues!! La température fait son apparition et le système est inconsistent. L'équation manquante est celle qui relie la température au champ de vitesse : l'équation d'énergie. Nous avons besoin d'un bilan d'énergie donc mais cela ne sera pas traité pour le moment.

6.4.3 Approximation de Bousinesq

6.5 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli établit la conservation de l'énergie mécanique sous les hypothèses de l'équation d'Euler :

1. absence de viscosité, donc les efforts de pression sont les seuls présents,

2. fluide incompressible, donc masse volumique constante,
3. écoulement stationnaire, pas de dépendance en temps,
4. la pesanteur comme force volumique

sous ces hypothèses la quantité

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z + p$$

est constante le long de toute ligne de courant.

Plus sur PREUVE le point de départ est la conservation de l'énergie cinétique

$$e_c = \frac{1}{2}\rho U^2 \quad (69)$$

et nous cherchons l'évolution dans le temps

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \frac{\partial e_c}{\partial t} \frac{1}{2}\rho U^2 = \rho \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (70)$$

A l'aide de l'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = -\mathbf{grad} p - \rho g e_z$$

nous pouvons écrire

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot (-\rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \mathbf{grad} p - \rho g e_z) \quad (71)$$

Comme $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{grad}(U^2/2)$ et la pesanteur peut être écrite comme le gradient d'un potentiel, $\rho g e_z = \mathbf{grad}(gz)$ on a

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \left(\rho \frac{U^2}{2} + \mathbf{grad} p + \rho g z \right) \quad (72)$$

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \left(\rho \frac{U^2}{2} + p + \rho g z \right) \quad (73)$$

L'hypothèse de stationnarité nous dit que

$$-\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \left(\rho \frac{U^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0 \quad (74)$$

donc que le gradient de la quantité $\rho \frac{U^2}{2} + p + \rho g z$ est constante et perpendiculaire au vecteur vitesse \mathbf{u} dans chaque point de l'espace (donc perpendiculaire aux lignes de courant). Point important, la constante dépend de chaque ligne de courant.

Une deuxième version du théorème de Bernoulli est pour un fluide qui, en plus, est irrotationnel ($(\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0)$) est que la quantité

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z + p$$

est constante **partout** dans le fluide.

Plus sur PREUVE la relation vectorielle suivante

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{grad} \left(\frac{U^2}{2} \right) - \mathbf{u} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{u})$$

permet de re-écrire l'équation d'Euler comme

$$\mathbf{grad} \left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{u})$$

alors si l'écoulement est irrotationnel ($\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0$) nous avons le résultat désiré.

Si l'écoulement est instationnaire sachant que $\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\phi)$ nous pouvons écrire une version instationnaire le théorème de Bernoulli,

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho gz + p = cte$$

Point de stagnation Quand une ligne de courant arrive perpendiculairement sur un solide nous avons $U = 0$ car pour un fluide parfait $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ alors on peut écrire le théorème de Bernoulli à partir d'un point 1 éloigné

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + p_1 = p_s \quad (75)$$

p_s étant la pression sur le solide et où nous avons supposé que la cote z est la même pour les deux points. Le point ainsi défini se nomme *point de stagnation* et de cette manière nous pouvons calculer la pression sur le solide (et donc éventuellement la force).

Forme globale Comme nous avons un fluide incompressible pour une fonction scalaire α on peut écrire $div(\alpha \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\alpha) + \alpha div(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\alpha)$. De cette manière

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho gz + p \right) = div \left(\mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho gz + p \right) \right) \quad (76)$$

Alors l'équation

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \left(\rho \frac{U^2}{2} + p + \rho gz \right) \quad (77)$$

peut être intégrée sur un volume fixe V en utilisant le théorème de la divergence donnant

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e_c dV = - \int_S \rho \frac{U^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_S p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{u} g dV \quad (78)$$

où nous reconnaissons dans le second membre (1) le flux d'énergie à travers de la surface de contrôle S , (2) le travail des forces de pression et (3) l'apport en énergie des forces extérieures.

6.6 Applications du théorème de Bernoulli

6.6.1 Tube de Venturi

6.6.2 Tube de Pitot

6.6.3 Formule de Torricelli

6.6.4 Ondes de surface

Le théorème de Bernoulli instationnaire nous dit que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + gy + p = C \quad (79)$$

avec C une constante pour le cas de la Figure, une couche liquide sur le plan $y = 0$ et d'hauteur moyen h . Nous voulons trouver des solutions d'ondes progressives linéaires. De ce fait on suppose que la vitesse U est petite et que l'on donc négliger le terme en U^2 dans le théorème de Bernoulli.

La fonction ϕ étant harmonique, elle est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \phi = 0 \quad (80)$$

avec les conditions aux limites suivantes est se rappelant que $\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\phi)$

- la vitesse sur le fond est nulle $\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=0} = 0$
- la vitesse du fluide à l'interface est nulle à la vitesse de l'interface (donc à la variation de h avec les temps).

Nous cherchons une solution en variables séparées de type $\phi(x, y, t) = f(x-ct)h(y)$ car nous cherchons une solution d'onde dans la direction x . Nous pouvons appliquer la séparation de variables car

$$\Delta \phi = f''h + h''f = 0 \quad (81)$$

et donc

$$\frac{f''}{f} = -\frac{h''}{h} = Cte \quad (82)$$

De la solution de f nous trouvons que la constante vaut $-k^2$. Avec cela la solution pour h est cosh on a finalement

$$\phi = Ae^{i(kx-\omega t)} \cosh(ky). \quad (83)$$

Nous allons étudier le comportement de cette solution à l'interface libre $y = h$, l'équation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + p_0 - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C \quad (84)$$

Nous avons utilisé la loi de Laplace $p - p_0 = \gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ et le fait de que l'un des rayons de courbature est infini. (on suppose des ondes dans une seule direction, des **ondes planes**). Aussi pour des petites déformations de l'interface nous approchons $\frac{1}{R} \sim \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. En dérivant l'équation précédente par rapport au temps nous avons

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=h} = 0 \quad (85)$$

En rapportant l'équation 83 nous trouvons la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh) \quad (86)$$

Types d'ondes En se rappelant de la définition de longueur capillaire $l_c = (\frac{\gamma}{\rho g})^{1/2}$ nous pouvons ré-écrire la relation de dispersion précédente compte tenu de la vitesse de phase de l'onde $c = \frac{\omega}{k}$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) (1 + k^2 l_c^2) \quad (87)$$

Nous nous plaçons dans le cas où l'épaisseur h de la couche de fluide est plus grande que la longueur capillaire l_c (3 mm pour l'eau). Si h est plus grand que la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ nous avons des ondes en **eaux profondes**, et

$$kh \gg 1. \quad (88)$$

Alors $\tanh(kh) \sim 1$ est la relation devient

$$c^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 l_c^2) \quad (89)$$

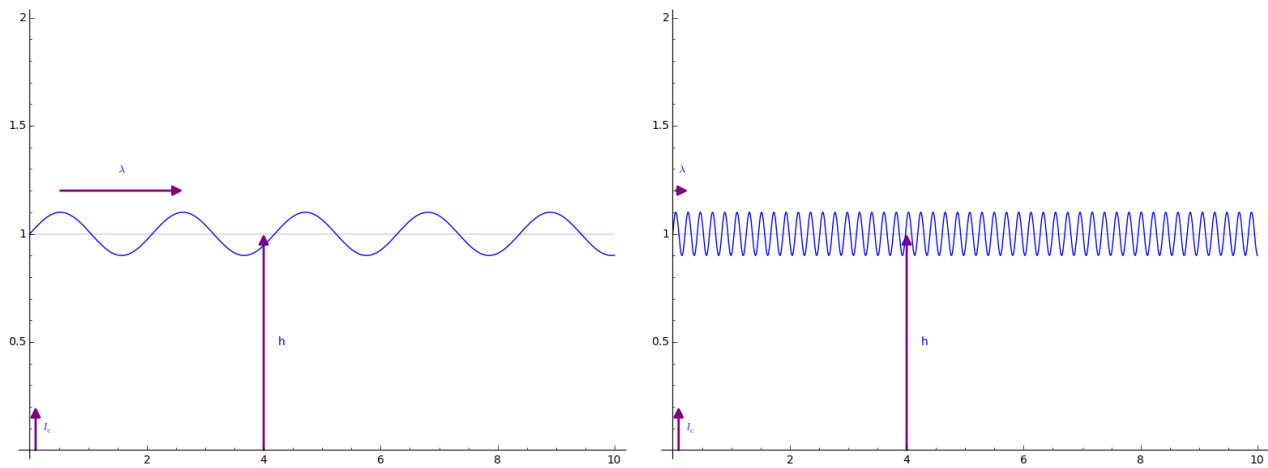


FIGURE 52 – Ondes en eaux profondes (a) ondes de gravité (b) ondes capillaires.

Deux cas possibles

1. des ondes de surfaces gouvernées par la gravité dont la longueur d'onde λ est plus grande que la longueur capillaire l_c , alors $kl_c \ll 1$ et nous avons

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \quad (90)$$

c'est la houle à la surface de la mer.

2. des ondes de surface gouvernées par les forces capillaires où la longueur d'onde λ est courte et alors

$$c = \left(\frac{\gamma k}{\rho}\right)^{1/2} \quad (91)$$

Nous pouvons aussi calculer la limite des deux cas précédents qui donne la vitesse minimale : c'est quand la longueur d'onde est égale à la longueur capillaire, $\lambda = l_c$.

Il existe aussi le cas où la longueur d'onde λ est aussi grande par rapport à la profondeur d'eau h , nous sommes en présence d'un cas dit des **eaux peu profondes** ou *shallow water* en anglais. Dans ce cas $\tanh(kh) \sim kh$ est alors nous avons la vitesse d'onde suivante

$$c = (gh)^{1/2} \quad (92)$$

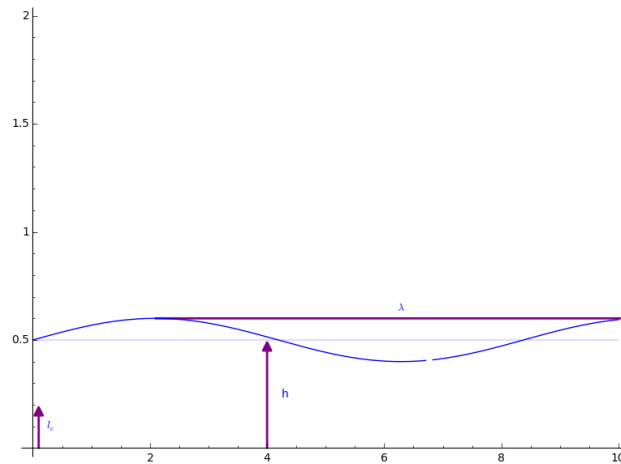


FIGURE 53 – Ondes en peu eaux profondes ou shallow water

La figure 53 suivant présente le cas d’eaux peu profondes

La figure 54 pour la relation de dispersion complète montre tous les cas. Nous observons deux zones celle des ondes capillaires et celle des ondes de gravité, la séparation est donnée par le nombre d’onde $k \sim \frac{1}{l_c}$. A gauche de cette valeur nous aurons une autre limite $k \sim \frac{1}{h}$ qui délimite la zone des eaux peu profondes ou shallow water.

6.7 Théorème des quantités de mouvement

Alors pour un volume matériel ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_S$) nous avons le théorème suivant :

Définition Pour tout fluide parfait (viscosité négligeable) et incompressible d’un écoulement stationnaire soumis à la pesanteur pour tout domaine de fluide \mathcal{V} limité par une surface de contrôle \mathcal{S} nous avons

$$\int_{S(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = m_V \mathbf{g} + \int_{S(t)} -p \mathbf{n} dS$$

où m_V est la masse du volume de fluide. On l’appelle aussi le *théorème des efforts globaux*. Notez que nous avons le même résultat pour un volume fixe dans l’espace

Exemple 6.1. CANAL DIVERGENT Calculons les efforts sur le divergent de la Figure. Nous avons en entrée

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$$

$$p = p_1$$

et en sortie

$$\mathbf{u} = u_2 \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$$

$$p = p_2$$

La 1ere intégrale peut se calculer en deux fois, une sur l’entrée, l’autre sur la sortie car le vecteur vitesse est orthogonal aux normales à la paroi, alors

$$\int_{S(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -u_1^2 A_1 + u_2^2 A_2$$

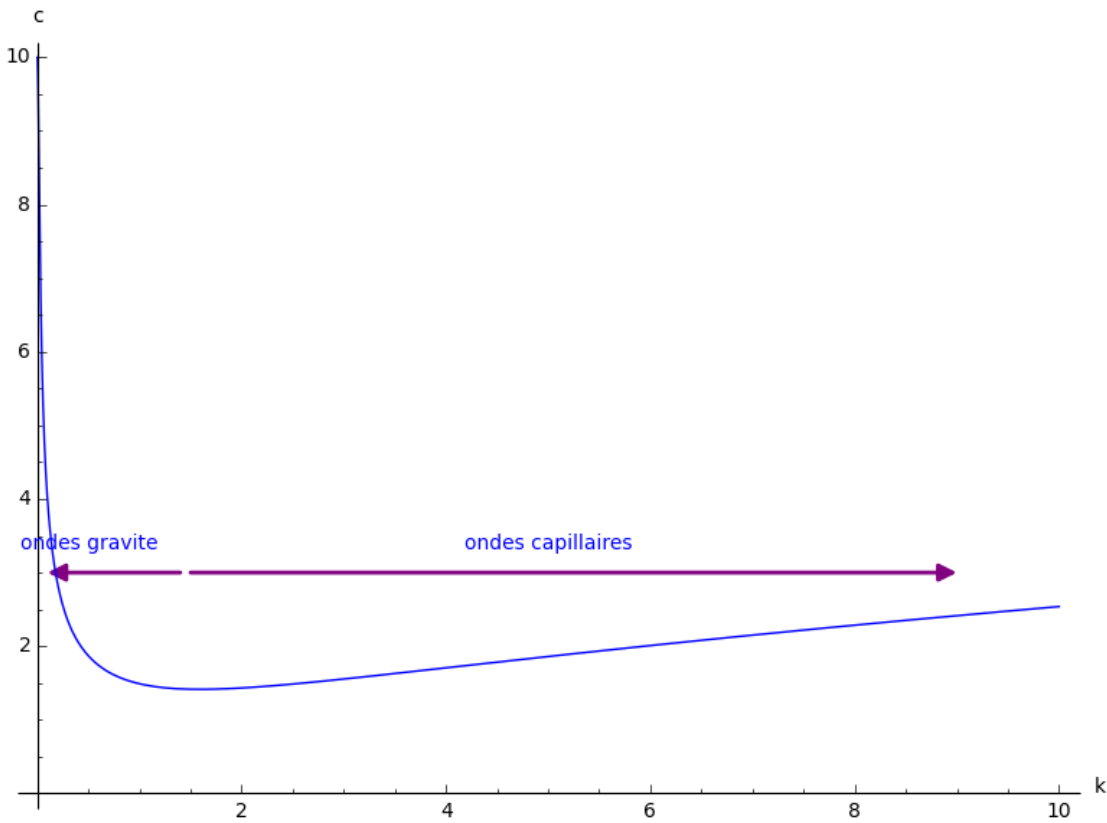


FIGURE 54 – Équation de dispersion.

avec A_1 et A_2 les surfaces d'entrée et sortie. La 2eme intégrale se divise en trois, entrée, sortie et paroi, car les efforts du fluide se font sentir sur la paroi, donc

$$m_V \mathbf{g} + \int_{S(t)} -p \mathbf{n} dS = -m_V g e_y + \int_{S_1} -p \mathbf{n} dS + \int_{S_2} -p \mathbf{n} dS + \int_{S_p} -p \mathbf{n} dS$$

L'intégrale $\int_{S_p} -p \mathbf{n} dS$ peut s'interpréter comme la résultante des efforts du solide sur le fluide, alors si nous cherchons la résultante des efforts du fluide sur le solide, c'est $R_{f \rightarrow s} = -\int_{S_p} -p \mathbf{n} dS$. En définitive

$$(-u_1^2 A_1 + u_2^2 A_2) e_x = -m_V g e_y + (p_1 S_1 - p_2 S_2) e_x - R_{f \rightarrow s}$$

Notez que

1. la composante y des efforts du fluide sur le solide c'est bien le poids de l'eau contenu dans le volume, $R_{f \rightarrow s}^y = -m_V g$,
2. si $A_1 = A_2$ la composante x des efforts du fluide sur le solide est nulle.

Exemple 6.2. UNE FUSÉE

Nous nous plaçons dans un volume de contrôle qui se déplace avec la fusée, la vitesse de la fusée est une fonction du temps $b(t)$ dans la direction z .

Les équations de conservation de masse et quantité de mouvement sont

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{S(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \mathbf{n} dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} dV + \int_{S(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \mathbf{n} dS &= \int_{V(t)} \mathbf{f} dV + F_d \end{aligned}$$

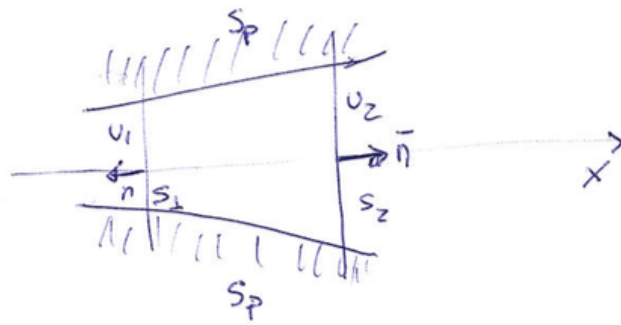


FIGURE 55 – Volume de contrôle dans un canal divergent.

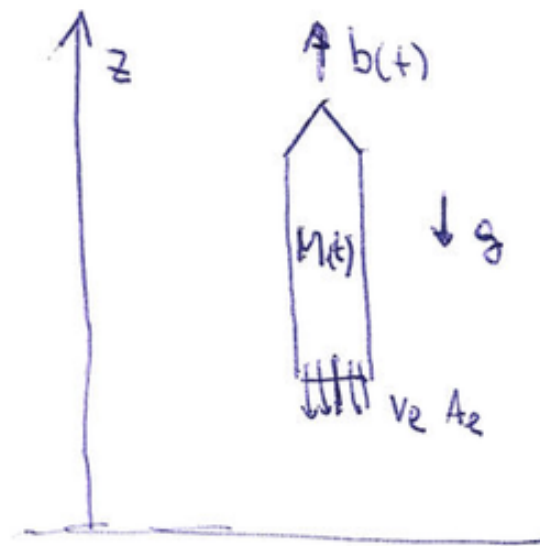


FIGURE 56 – Volume de contrôle dans une fusée.

La vitesse est $\mathbf{u} = u_z \mathbf{e}_z = (-V_e + b(t)) \mathbf{e}_z$ et la masse de la fusée $M = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} dV$ alors les équations deviennent

$$\frac{dM}{dt} + \rho V_e A_e = 0$$

$$\frac{dM b(t)}{dt} + \rho(-V_e + b(t)) V_e A_e = -Mg + F_d$$

Nous pouvons éliminer $\rho V_e A_e$ pour avoir

$$\frac{dM b(t)}{dt} + (-V_e + b(t)) \frac{-dM}{dt} = -Mg + F_d$$

qui peut être simplifié dans

$$M \frac{d^2 z_b}{dt^2} = -V_e \frac{dM}{dt} - Mg + F_d$$

où z_b est la position de la fusée. Si l'on connaît la variation de la masse de la fusée avec le temps $M(t)$ et la force de friction F_d on peut résoudre le problème. Pour la force de friction on utilise

classiquement $F_d = \frac{1}{2}\rho u_f^2 A C_d$ avec u_f la vitesse de la fusée, A la surface typique de la section et C_d le coefficient de traînée.

7 Fluides visqueux

7.1 Transport de la quantité de mouvement

Nous avons deux types de transport de la quantité de mouvement

1. convectif : c'est le théorème de la quantité de mouvement, le flux $\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ est transporté dans la direction de l'écoulement.
2. diffusif : le flux est transporté dans la direction transverse à l'écoulement comme dans les plaques parallèles ou dans un cylindre en rotation.

Plus sur CYLINDRE EN ROTATION

Observations avec un cylindre extérieur fixe et intérieur qui se met en mouvement

1. le champ de vitesse est azimutal et dépend de la coordonnée radiale $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_\theta$
2. le fluide près de la paroi a la vitesse de la paroi
3. au fur et à mesure que le cylindre interne se met en marche les couche successives de fluide selon la direction r se mettent en marche et perpendiculairement au mouvement qui se fait dans la direction azimutale.
4. finalement tout le fluide est en mouvement sauf le fluide près de la paroi externe qui est au repos

La quantité de mouvement a été transférée de manière diffusive et perpendiculaire au mouvement.

Ce transport est assuré par la viscosité du fluide.

7.2 Effort sur une interface

Dans un fluide parfait les efforts sur une interface sont normaux, sur la Figure les efforts de \mathcal{D}_2 sur \mathcal{D}_1 c'est la pression.

Dans le cas d'un fluide réel (avec viscosité) l'effort est normal et aussi tangentiel alors

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dS + \tau\mathbf{t}dS \quad (93)$$

La composante tangentielle $\tau\mathbf{t}dS$ dépend donc de τ qui modélise les efforts transverses à l'écoulement. Nous savons par expérience que si la vitesse tangentielle de \mathcal{D}_2 est plus élevée que dans \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 entraîne \mathcal{D}_1 ou de la même manière \mathcal{D}_1 ralenti \mathcal{D}_2 . L'expression de τ donne le modèle du fluide.

7.3 Modèles pour τ

Il y a des différents modèles pour τ le plus simple possible étant le modèle newtonien dont l'expression dans un cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles est

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} \Big|_{y=y_0} \quad (94)$$

on rappelle que

- cette expression ne décrit pas tous les fluides, il y a des autres modèles
- la viscosité est constante
- c'est la définition d'un écoulement newtonien

Les unités sont force par unité de surface (comme la pression)

$$[\tau] = FL^{-2} = ML^{-1}T^{-2} \quad (95)$$

comme $\frac{dU}{dy}$ est un cisaillement d'unités T^{-1} nous avons pour la viscosité

$$[\mu] ML^{-1}T^{-1} \quad (96)$$

des $Pa \cdot s$ dit des Poiseuille. Dans les unités cgs l'unité c'est la Poise [Po] (1 Po = 0.1 Pa s). C'est le coefficient de viscosité dynamique, il dépend des grandeurs thermodynamiques comme la température et la masse volumique.

7.4 Équation de mouvement

Nous allons écrire le bilan de masse et de quantité de mouvement pour un écoulement visqueux plan, de masse volumique constante ($\rho = cte$), sans gravité. Le moteur ici c'est le gradient de pression (connu). La symétrie du problème nous fait chercher une solution de type

$$\mathbf{u} = u(y)\mathbf{e}_x \quad (97)$$

$$p = p(x, y) \quad (98)$$

Le bilan de masse ($div(\mathbf{u}) = 0$) est automatiquement vérifié par le champ de vitesses proposé.

Pour le bilan de quantité de mouvement nous allons étudier un petit carré de $dx \cdot dy$ comme le montre la Figure

Sur les cotés BC et AD la vitesse est normale donc $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et il nous reste que la pression $p(x + dx) - p(x)$ selon la direction x .

Les cotés AB et CD ont deux composantes, normale et tangentielle alors

— AB

$$dF = -p(x, y)dx dz(-\mathbf{e}_y) + \mu \frac{dU(y)}{dy}(-\mathbf{e}_x)dx dz \quad (99)$$

— CD

$$dF = -p(x, y + dy)dx dz\mathbf{e}_y + \mu \frac{dU(y + dy)}{dy}\mathbf{e}_x dx dz \quad (100)$$

Le principe fondamental de dynamique appliqué sur notre volume d'étude est masse x accélération égale somme des forces,

$$\rho dx dy dz \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \sum F \quad (101)$$

donc

$$\rho dx dy dz \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -(p(x + dx, y) - p(x, y))\mathbf{e}_x dy dz - (p(x, y + dy) - p(x, y))\mathbf{e}_y dx dz + \quad (102)$$

$$\mu [dU(y + dy) - dU(y)] dx dz \mathbf{e}_x \quad (103)$$

En divisant les deux membres par $dx dy dz$ et en faisant la limite $dx dy dz \rightarrow 0$ nous avons selon x et y

$$(e_x) \quad \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (104)$$

$$(e_y) \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (105)$$

ce qui donne l'équation de Navier-Stokes

EULER + VISCOSITE = NAVIER STOKES

Nous allons résoudre le problème de plaques parallèles sous les hypothèses suivantes

- stationnaire
- sans gravité
- le moteur de l'écoulement est le gradient de pression

Alors nous avons

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (106)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (107)$$

La deuxième équation nous dit que la pression est une fonction de la variable x seulement donc $p = p(x)$. cela nous permet d'utiliser la séparation de variable dans la première équation, en effet comme $p = p(x)$ nous avons

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (108)$$

nous avons maintenant une dérivée droite pour la pression car nous savons qu'elle est une fonction de la variable x seulement, l'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{dp}{dx} = -K \quad (109)$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -K \quad (110)$$

où $-K$ est le gradient de pression connu (le signe moins est utilisé pour rappeler que la direction de l'écoulement est dans le sens négatif du gradient).

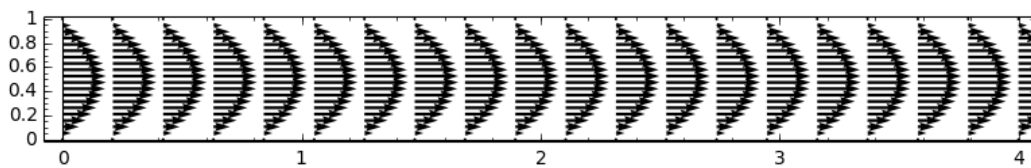


FIGURE 57 – Profil parabolique entre deux plaques parallèles. Le profil est invariant par translation sur l'axe x .

La solution de $\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -K$ est simplement une parabole en y , le profil de vitesses est trouvé par intégration

$$u(y) = -\frac{K}{2\mu} y^2 + Ay + B \quad (111)$$

où les constantes A et B dépendent des conditions aux limites. Dans le cas de deux plaques fixes placées à $y = 0$ et $y = h$ nous aurons

$$u(0) = 0$$

$$u(h) = 0$$

La première équation donne $B = 0$ et la seconde $A = -\frac{K}{2\mu}h$ ce qui donne

$$u(y) = -\frac{K}{2\mu}(y^2 - yh)$$

Nous pouvons vérifier que les deux conditions aux limites sont satisfaites et que la vitesse est parabolique avec un maximum au centre.

La vitesse maximale est $u(y = h/2)$ égale à $u_{max} = \frac{Kh^2}{4\mu}$. Le débit qui traverse une surface peut être donc calculé à partir de $Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ alors

$$Q = -\frac{K}{2\mu} \int_0^h (y^2 - yh) dy$$

$$Q = \frac{Kh^3}{12\mu}$$

Avec une des parois en mouvement nous avons par exemple

$$u(0) = U_0$$

$$u(h) = 0$$

avec U_0 une vitesse constante. La solution du problème est maintenant

$$u(y) = -\frac{K}{2\mu}(y^2 - yh) + \frac{U_0}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

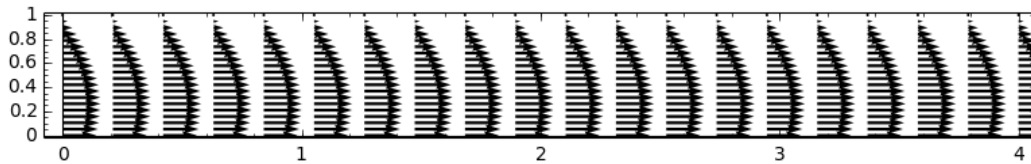


FIGURE 58 – Profil parabolique + linéaire entre deux plaques parallèles. Le profil est invariant par translation sur l'axe x .

Nous remarquons que dans cette situation nous avons deux moteurs : le gradient de pression et le mouvement de la plaque (la condition au limite) et que dans le cas $K = 0$, c'est à dire en absence de gradient de pression nous pouvons avoir un mouvement fluide, linéaire dans ce cas

$$u(y) = \frac{U_0}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

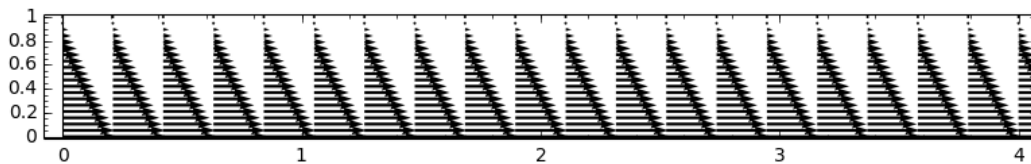


FIGURE 59 – Profil linéaire entre deux plaques parallèles en absence de gradient de pression ($k = 0$) Le profil est invariant par translation sur l'axe x .

Vitesse débitante La vitesse débitante c'est le rapport entre le débit et la surface perpendiculaire à l'écoulement,

$$U_d = \frac{Q}{S} \quad (112)$$

donne une vitesse caractéristique de l'écoulement.

Perte de charge La charge est la quantité $p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho U^2$ qui est constante pour un fluide parfait (Théorème de Bernoulli). Si le gradient de pression est $K = \frac{\Delta p}{L}$ étant L une longueur caractéristique (par exemple entre deux points de mesure le long de l'axe x) nous pouvons écrire dans le case des parois fixes

$$\Delta p = \frac{12\mu Q}{h^3 b} \quad (113)$$

où b est la profondeur du canal dans la direction z dont on ne voit que la projection x, y . En se rappelant que $Q = U_d h b$ et en faisant apparaître l'énergie $\frac{1}{2}\rho U_d^2$ nous trouvons

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U_d^2} = \frac{L}{h} \frac{24}{Re} \quad (114)$$

où $Re = \frac{\rho U_d h}{\mu}$ c'est un nombre sans dimension caractérisant l'écoulement, appelé nombre de Reynolds dont on parlera plus loin et $\frac{L}{h}$ un rapport de longueurs. Le *coefficient de frottement* C_f est

$$C_f = \frac{24}{Re} \quad (115)$$

dans le cas des plaques parallèles.

7.5 Équation de Navier-Stokes

Sur un élément de surface dS dans un fluide on analyse la force exercée par le fluide situé du côté extérieur, nous savons que la contrainte est la valeur de la force divisée par l'unité de surface. Nous avons vu qu'en hydrostatique (un fluide au repos) la seule force présente est normale et c'est donnée par la pression.

Par contre dans le cas d'un fluide en mouvement nous avons montré qu'une contrainte tangentielle y fait son apparition. Pour écrire la résultante des toutes les forces, normales et tangentielles nous avons besoin

1. d'un vecteur unitaire \mathbf{n} qui donne l'orientation de l'élément de surface dS
2. des trois composantes de la force : une normale à la surface et deux tangentielles.

De manière générale à 3 dimensions dans un repère cartésien x, y, z cela donne neuf coefficients que l'on peut mettre sous forme d'une matrice 3x3 (le tenseur des contraintes)

$$\sigma_{ij} \quad (116)$$

signifie la composante suivant la direction i de la contrainte sur la surface orientée suivant la direction j .

Les indices i et j vont de 1 jusqu'à 3, ou par un soucis de simplification ils prennent les valeurs x, y, z . Ainsi

- σ_{yx} est la force suivant la direction Oy sur une surface dont le vecteur unitaire est \mathbf{n}_x , soit une contrainte tangentielle

— σ_{xx} est la force suivant la direction Ox sur une surface dont le vecteur unitaire est \mathbf{n}_x donc la force normale (qui peut associée à la pression nous verrons)

Nous pouvons utiliser ces faits pour re-écrire le tenseur σ comme la somme de deux tenseurs : τ qui tient compte des contraintes visqueuses et un autre qui contient les efforts normaux dus à la pression

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \quad (117)$$

Nous rappelons que

$$-p\delta_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} \quad (118)$$

Le tenseur de contraintes visqueuses τ

1. est égale à zéro en absence de viscosité $\mu = 0$
2. est égale à zéro en absence de vitesse $U = 0$ ou pour une vitesse constante partout.

La définition du tenseur τ donne le modèle de rhéologie du fluide, le cas le plus simple étant le modèle de fluide *newtonien* où la viscosité est constante et le tenseur τ est proportionnel aux gradients de la vitesse

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (119)$$

étant $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ le tenseur des gradients de vitesse. Nous remarquons que pour un écoulement entre deux plaques parallèles $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ ce qui est égale à $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$ car $\mathbf{u} = u(y)\mathbf{e}_x$ le même résultat que précédemment.

L'équation de Cauchy qui décrit le mouvement d'un milieu continu est

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \sigma \mathbf{n} dS \quad (120)$$

Pour le cas d'un fluide parfait $\mu = 0$ alors il nous reste que les efforts de pression donc $\sigma = -p\mathbf{I}$ et avec

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S -p \mathbf{n} dS \quad (121)$$

nous retrouvons l'équation d'Euler après l'utilisation du théorème de la divergence ($\int_S -p \mathbf{n} dS = \int_V -\mathbf{grad} p dV$)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p \quad (122)$$

Pour le cas d'un fluide visqueux nous devons ajouter la partie visqueuse du tenseur, τ alors,

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S -p \mathbf{n} dS + \int_S \tau \mathbf{n} dS \quad (123)$$

où par le théorème de la divergence

$$\int_S \tau \mathbf{n} dS = \int_V \text{div}(\tau) dV \quad (124)$$

et finalement

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (125)$$

l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible.

Plus sur $\text{div}(\tau)$

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\tau) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\
 &= \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\text{div}(\mathbf{u})) \\
 &= \nabla^2 \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

car le fluide est incompressible, $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$.

En 2 dimensions l'équation de Navier-Stokes (sans la gravité \mathbf{g}) s'écrit

$$(e_x) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (126)$$

$$(e_y) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (127)$$

Pour le cas des plaques parallèles que nous avons déjà étudié, stationnaire et avec une vitesse $u(y)$, nous remarquons que les termes d'inertie disparaissent, c'est une des caractéristiques des écoulements parallèles. Alors nous avons

$$(e_x) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (128)$$

$$(e_y) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (129)$$

les mêmes équations qu'avant.

7.6 Nombre de Reynolds

Osborne Reynolds a étudié l'écoulement dans un tube cylindrique de diamètre D en injectant sur l'axe un colorant. Il observe qu'à faible vitesse le colorant reste stable et transporté par l'écoulement sans l'écarter transversalement de sa position. Pour une vitesse plus importante des structures en forme de tourbillon se forment, provoquant la diffusion rapide du colorant qui à fur et à mesure de son déplacement remplit tout le tube. Il a observé que cette transition entre les deux états ne dépendait seulement de la vitesse U de l'écoulement sinon d'une combinaison de la vitesse, la nature de l'écoulement (sa viscosité μ) et du diamètre du tube. Cette combinaison est appelée maintenant le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (130)$$

En fait la transition vers l'état mélangé se fait toujours pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2400. De manière générale on dit que pour des nombres de Reynolds plus petits que 2000 l'écoulement est *laminaire* et que pour des nombres de Reynolds plus grands que 4000 l'écoulement est *turbulent*. La transition se fait entre les deux limites et dépend beaucoup de la qualité de l'expérience et de l'état de la paroi interne du tube. La Figure 61 présente les dessins du papier original de Reynolds (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935- 982).

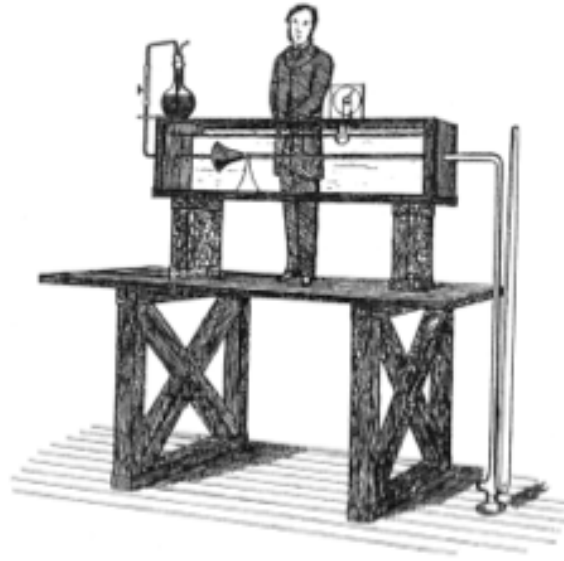


FIGURE 60 – Expérience de O. Reynolds (1886). An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935- 982)

Le nombre de Reynolds peut être vu comme le rapport entre les fluxes de quantité de mouvement, convectif et diffusif

$$\frac{\text{flux convectif}}{\text{flux diffusif}} \sim \frac{\rho U^2}{\frac{\mu U}{D}} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re \quad (131)$$

Dans un écoulement a petit nombre de Reynolds, les forces visqueuses sont dominants. Le profil d'écoulement résulte d'un équilibre entre les forces de frottement visqueux et les gradients de pression, comme le profil parabolique montré précédemment. Selon l'expression du nombre de Reynolds, on aura ce type d'écoulements soit à basse vitesse, soit dans des systèmes de très petite taille (ou les deux conditions ensemble), et aussi pour des fluides très visqueux. En général c'est un écoulements stable.

Au contrario dans les écoulements a grand nombre de Reynolds, le transport de quantité de mouvement par convection est plus importante que les forces visqueuses, et les termes non linéaires contenant des produits de composantes de la vitesse devient prépondérants. Ces écoulements sont beaucoup moins stables, on les appelé écoulements turbulents. En opposition au cas laminaire on les observe à grande vitesse, ou dans des fluides peu visqueux ou dans des systèmes de grande taille.

7.7 Similitude dynamique

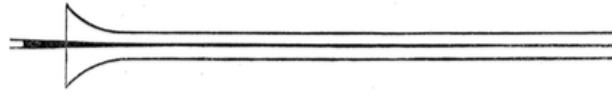
Une question qui se pose est comment le nombre de Reynolds apparait dans les équations de Navier-Stokes, le nombre de Reynolds étant un nombre sans dimension et il donc intéressant d'écrire les équations de Naviers-Stokes de manière adimensionnée.

Ceci met en lumière la notion de similitude, nous comprenons très bine la similitude géométrique représentée sur la Figure 62 (gauche) où des carrés de coté L_1, L_2, L_3 peuvent devenir tous le carré unitaire juste par un un changement de variables $L/L_i, i = 1, 2, 3$. On est en présence d'une similitude géométrique.

The general results were as follows :—

(1.) When the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube, fig. 3.

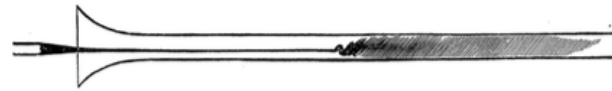
Fig. 3.



(2.) If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinuosity.

(3.) As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water, as in fig. 4.

Fig. 4.



Any increase in the velocity caused the point of break down to approach the trumpet, but with no velocities that were tried did it reach this.

On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies, as in fig. 5.

Fig. 5.



FIGURE 61 – Résultats de l'expérience. Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935- 982)

Dans le cas de l'équation de Navier-Stokes nous allons proposer une similitude dynamique par les changement de variables suivant

| | | | |
|---------|-----------|---------------|--------------------------|
| espace | (x,y,z) | L | longueur caractéristique |
| vitesse | U | U_0 | vitesse caractéristique |
| temps | t | $\frac{U}{L}$ | vitesse caractéristique |

TABLE 8 – Échelles caractéristiques.

Alors les opérateurs qui apparaissent dans l'équation de Navier-Stokes ont une loi d'échelle comme montré sur la Table où les variables avec tilde sont des sans dimension.

Si l'on remplace dans l'équation de Navier-Stokes (où nous avons enlevé les tildes pour souci de clarté) nous avons

$$\frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = -\frac{1}{\rho L} \text{grad } p + \mu \frac{U_0}{L^2} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (132)$$

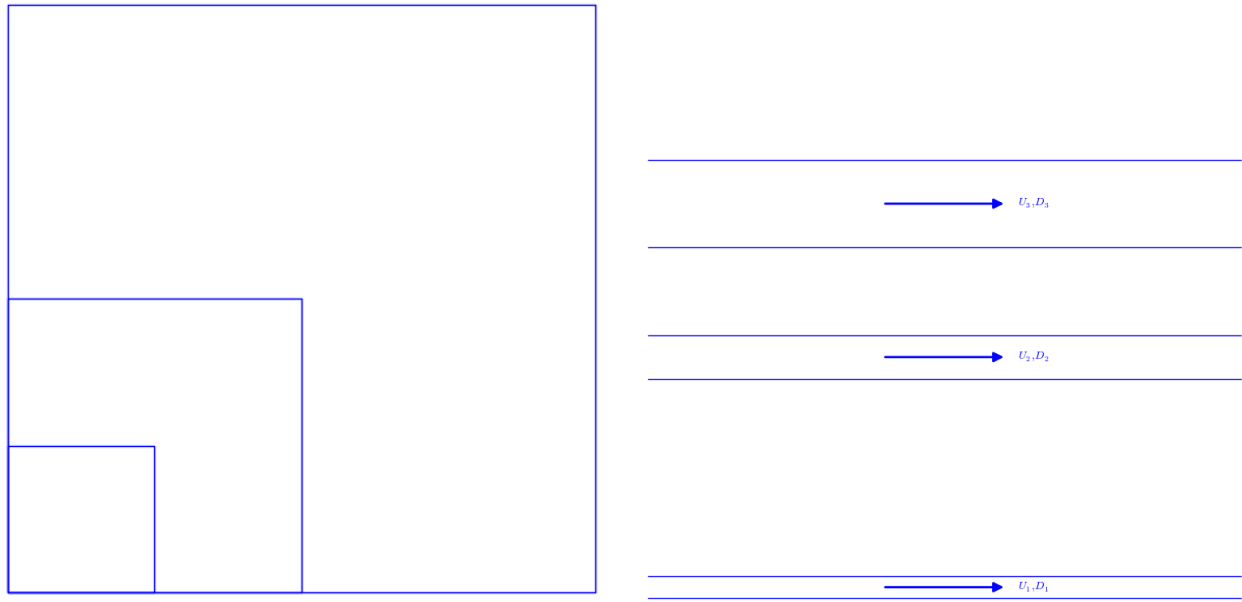


FIGURE 62 – Similitude géométrique et dynamique.

$$\nabla \left| \begin{array}{l} \frac{1}{L} \tilde{\nabla} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left| \begin{array}{l} \frac{U_0}{L} \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

TABLE 9 – Lois d'échelle pour les opérateurs.

en multipliant par L en en divisant par U_0^2 avec une loi d'échelle pour la pression égale à ρU_0^2 nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\mathbf{grad} \, p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (133)$$

l'équation de Navier-Stokes sans dimension où le nombre de Reynolds apparait naturellement. Nous observons que la valeur du nombre de Reynolds va "mesurer" l'importance du terme convectif par rapport au terme visqueux

$$\frac{\rho U^2}{\frac{\mu U}{D}} = \frac{\rho U D}{\mu} = R_e \quad (134)$$

Un grand nombre de Reynolds nous donne un modèle d'écoulement turbulent, plutôt à grandes vitesses, et par contre des petits Reynolds nous dit que les terme visqueux est le plus important. La notion la plus importante est

pour un même Reynolds on a un même écoulement.

En bref pour des Reynolds grands l'équation est l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\mathbf{grad} \, p \quad (135)$$

et pour des petits Reynolds on retrouve l'équation de Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{grad} \, p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (136)$$

qui est linéaire donc de plus facile résolution.

7.8 Écoulements dans des tubes cylindriques

L'écoulement dans des tubes cylindriques a un intérêt académique et surtout industriel car par exemple le gaz et le cru est transporté par ce biais et le réseau circulaire humain peut être modélisé par un système de tubes connectés.

L'écoulement est laminaire dans un cylindre de rayon R et de longueur infinie, la vecteur vitesse est parallèle à l'axe du cylindre (l'axe z). Compte-tenu de la géométrie, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Rien ne dépend de la coordonnée azimutale (θ) nous sommes en présence d'un écoulement axy-symétrique, et la solution cherchée est de la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u(r)\mathbf{e}_z \\ p &= p(r, z)\end{aligned}$$

L'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

doit être établie en coordonnées cylindriques. D'abord nous pouvons les simplifier

1. on suppose l'écoulement stationnaire, il n'y pas donc de dépendance en temps.
2. l'écoulement est parallèle, le terme $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ est nul

Il nous reste donc

$$0 = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Soit en coordonnées cylindriques (en oubliant la gravité)

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du(r)}{dr} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}\end{aligned}$$

car la vitesse ne dépend que de la variable r . Les conditions aux limites se réduisent à une seule, la vitesse doit être nulle sur la paroi du tube

$$u(r = R) = 0.$$

L'équation pour la pression sur l'axe r nous dit que la pression ne dépend que de la coordonnée axiale z alors cela implique que l'on peut séparer les variables exactement comme dans le cas des plaques parallèles, nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du(r)}{dr} \right) &= -K \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -K\end{aligned}$$

Les solutions sont

$$p(z) = p_0 - Kz \tag{137}$$

$$u_z(r) = \frac{Kr^2}{4\mu} - A \ln(r) + B \tag{138}$$

L'interprétation physique de K c'est le gradient de pression selon l'axe z , qui est le moteur de l'écoulement dans ce cas. La condition de vitesse nulle à la paroi $u(r = R) = 0$ n'est pas suffisante pour trouver les deux constantes A et B du profil de vitesses. Nous devons imposer une condition de régularité car la vitesse doit rester finie le long de l'axe du cylindre donc $A = 0$. Dans le cas de cylindres concentriques cette constante n'est plus nulle car la point $r = 0$ est dehors du domaine fluide. La solution est un profil parabolique comme attendu

$$u_z(r) = \frac{KR^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (139)$$

Nous pouvons vérifier que ce profil satisfait les conditions aux limites et que la vitesse est maximale sur l'axe ($r = 0$). Le débit qui traverse une surface $S = \pi R^2$ est

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi \int_0^R u_z(r) r dr$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} K$$

et si l'on associe K au gradient de pression $\frac{\Delta p}{L}$ nous retrouvons la loi de Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (140)$$

A Mathématiques

A.1 Notion de gradient, de divergence, de rotationnel

Notation vectorielle : utiliser une notation vectorielle permet une description claire et compacte de la mécanique des problèmes.

Fluides et solides

- scalaires : concentration, température, densité, viscosité
- vecteurs : vitesse, force
- tenseurs : contraintes, déplacement

Opérateurs vectoriels

- un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels
 - un opérateur différentiel est un opérateur agissant sur des fonctions différentiables
 - un opérateur différentiel linéaire du premier ordre fait intervenir que des dérivées partielles (ou différentielles) premières des champs,
- un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur (à trois composantes réelles), tandis qu'un champ de scalaires y associe un réel. Exemple.

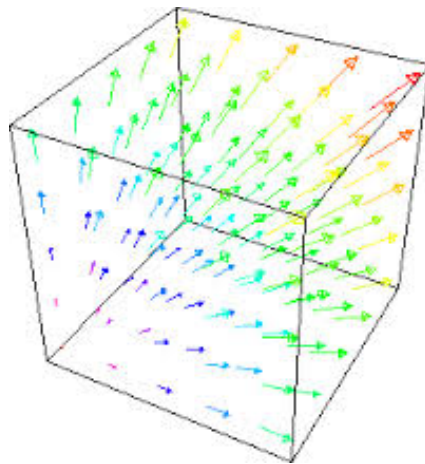


FIGURE 63 – Champ de vecteurs.

L'application d'opérateurs différentiels sur des champs vectoriels ou scalaires permet de décrire les phénomènes physique en mécanique de solides et fluides de manière compacte

Dans le cas d'une écriture sur un système de coordonnées (polaires, cylindriques, etc) l'expression qui en résulte est différente.

Il faut connaître l'expression que pour des coordonnées cartésiennes.

Nabla L'opérateur nabla ∇ est un opérateur différentiel qui s'écrit en coordonnées cartésiennes comme

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z$$

Nous allons l'appliquer sur un champ scalaire et sur un champ vectoriel.

Gradient Soit une fonction scalaire $f = f(x, y, z)$ l'application de l'opérateur nabla sur ce champ scalaire défini

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} e_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} e_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} e_z$$

un vecteur, souvent écrit

$$\vec{grad} f$$

- donne la pente locale de la fonction dans chaque direction
- la direction du gradient signale la pente maximale

Faire Soit la variation d'une fonction $f(x, y)$,

$$df = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

si l'on se place à $dr = dx e_x + dy e_y$ fixe, montrer que df pointe dans la direction de la plus grande variation.

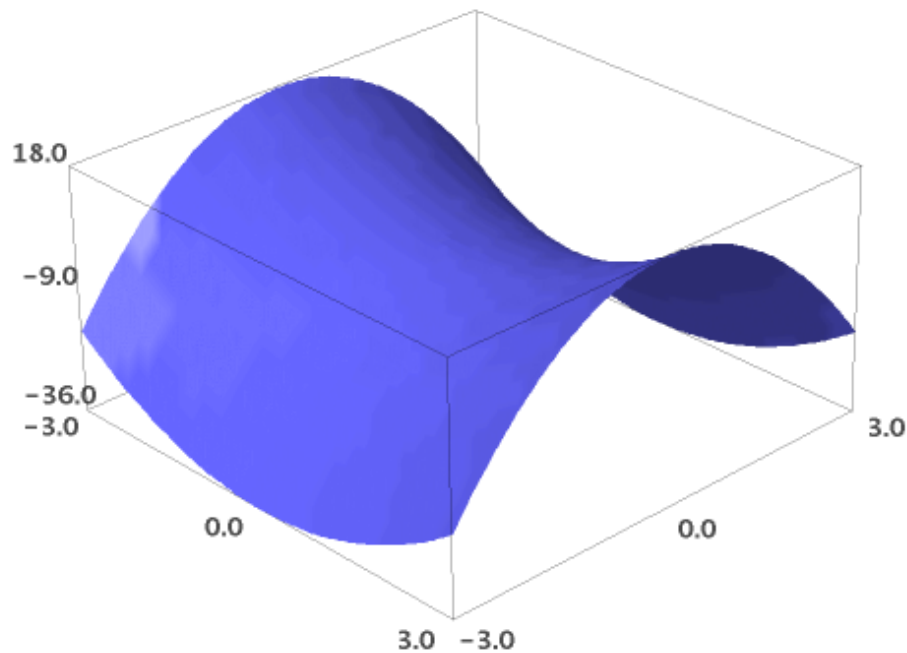
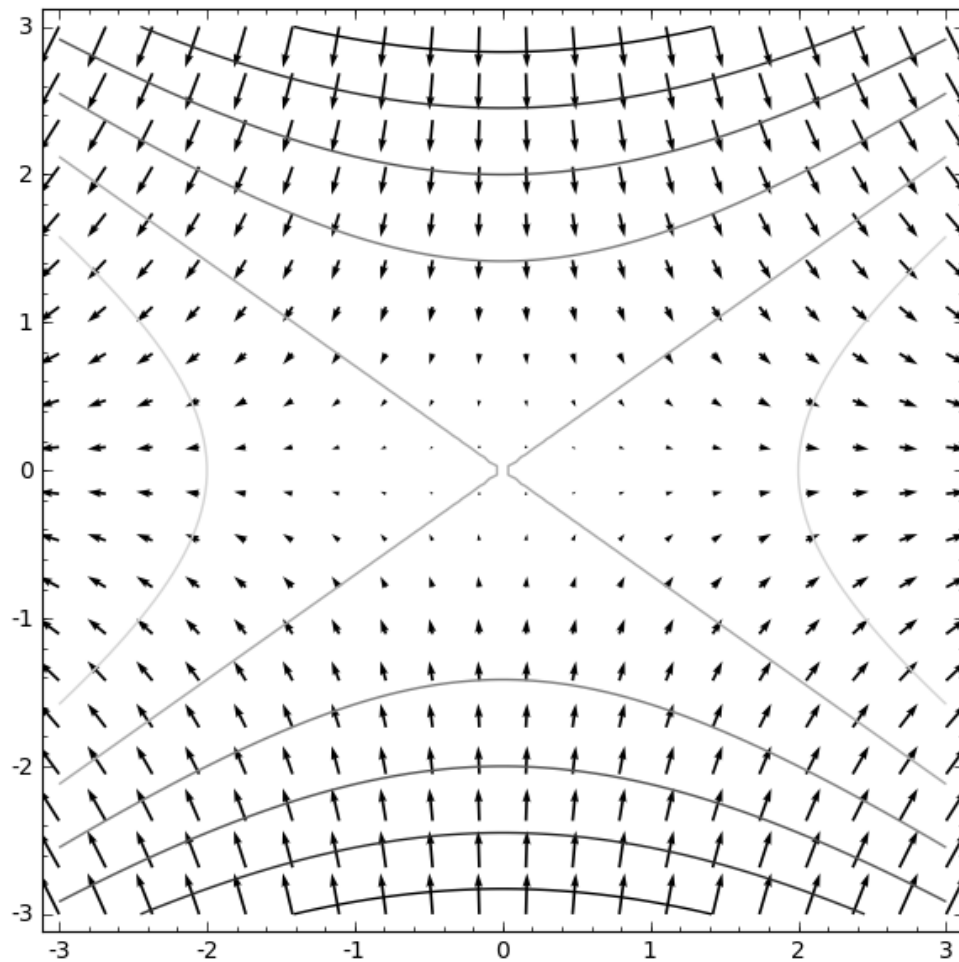


FIGURE 64 – Courbe $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$.

FIGURE 65 – Gradient $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$.

Important la dynamique des systèmes gouvernée par des gradients

- gradient de température : flux de chaleur
- gradient de concentration
- gradient de pression : écoulement

les fonctions gradient sont appelées aussi *conservatives*

Divergence Soit un vecteur $\vec{u} = ue_x + ve_y + we_z$ l'application de l'opérateur nabla sur ce champ vectoriel définit la

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

un scalaire souvent écrit

$$\text{div } \vec{u}$$

La divergence est un scalaire qui mesure la variation d'un volume (ou surface) dans un champ vectoriel.

Exemple à 2D dimensions si nous avons une surface A_0 à t_0 dans un champ de vecteurs \vec{u} et dans un temps postérieur t_1 elle est devenue A_1 nous aurons

$$A_1 - A_0 = \text{div } \vec{u}$$

un cas particulier est $\text{div } \vec{u} = 0$ où la surface est conservée.

Exemple :

soit $\vec{u} = 2xe_x - 2ye_y$ la divergence est

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

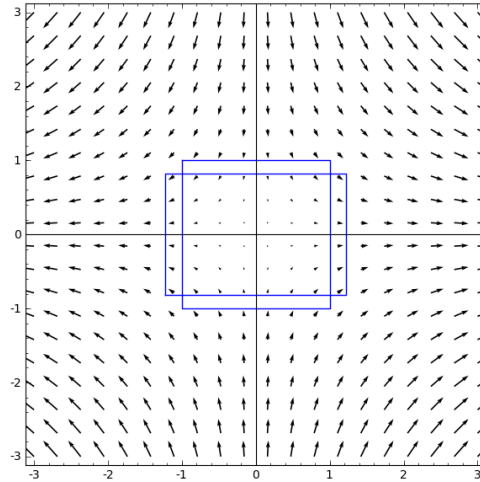


FIGURE 66 – Divergence zéro.

Faire A partir du champ de vecteurs $\vec{u} = 2xe_x - 2ye_y$

— calculer la trajectoire des points d'un carré par l'intégration de

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$$

— calculez la surface du carré en fonction du temps.

— Même pour $\vec{u} = 2xe_x - 4ye_y$

— Conclusion ?

Rotationnel Soit un vecteur $\vec{u} = ue_x + ve_y + we_z$ l'application du produit vectoriel \wedge entre l'opérateur nabla et ce champ vectoriel définit le

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

un vecteur souvent écrit

$$\text{rot } \vec{u}$$

Le rotationnel représente la rotation locale d'une particule de fluide.

En deux dimensions

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = e_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

soit un vecteur perpendiculaire au plan de l'écoulement.

Exemples

- Si le vecteur \vec{u} dérive d'un potentiel montrez que $\text{rot } \vec{u} = 0$
- Calculer le rotationnel pour deux champs "équivalents" (attention, coordonnées polaires)
 - $\vec{u}_\theta = \frac{A}{r} e_\theta$
 - $\vec{u}_\theta = Br e_\theta$

Laplacien L'application de nabla sur lui même donne le Laplacien, un opérateur

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

un opérateur souvent écrit

$$\nabla^2 = \Delta$$

qui peut être appliqué sur un scalaire ou sur un vecteur
scalaire f

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— ou

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} f)$$

(vérifier)

- donne la mesure de la différence entre la valeur locale de f et la valeur moyenne autour.
- fonction "lisse" ... courbure ? ($1/R$)

Forces sur une surface Soit une surface A caractérisée par un vecteur normal \vec{n} comme le montre la Figure

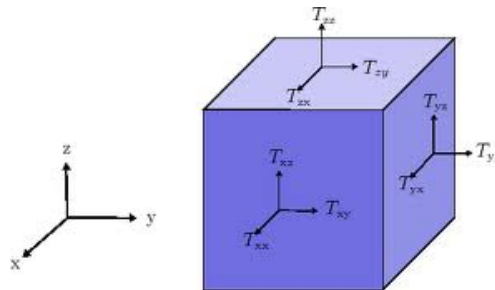


FIGURE 67 – Forces.

Cette force F peut être décomposée dans une force normale F_n et une force tangentielle F_t qui à la fois peut être décomposée dans deux directions orthogonales.

Nous pouvons donc écrire

$$F_{nn}, F_{nt_1}, F_{nt_2}$$

alors supposons nous trois faces d'un cube dans un repère cartésien.

Alors si nous avons 3 faces d'un cube en coordonnées cartésiennes

$$F_{xx}, F_{xy}, F_{xz}, F_{yx}, F_{yy}, F_{yz}, F_{zx}, F_{zy}, F_{zz}$$

où F_{xy} est interprété comme la force dans la direction y sur la normale x .

Nous sommes intéressés à la force par unité de surface, ce qui définit une contrainte σ

$$[\sigma] = F/A = \textit{pression}$$

Une manière compacte est

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

tenseur de contraintes...

Exemple : dans un fluide au repos seules les forces normales peuvent être présentes (car force tangentielle implique mouvement implique hors équilibre).

Contrainte normale

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \delta_{ij}$$

δ_{ij} est le delta de Kroenecker et introduit la notation indicielle.

Notation indicielle aussi notation d'Einstein.

On note

— un vecteur $\vec{u} = u_i$

— une matrice carré $A = A_{ij}$

La notation d'Einstein dit que si un index est répété il y a une sommation implicite

$$a_i b_{ij} = \sum_i a_i b_{ij}$$

Exemples

— delta de Kroenecker, $\delta_{ij} x_i x_j = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

— tenseur de contraintes σ_{ij}

Important symbole des permutations (ou de Levy-Civita)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si permutation paire} \\ -1 & \text{si permutation impaire} \\ 0 & \text{si deux index répétés} \end{cases}$$

Intéressant pour démonstrations, produit vectoriel par exemple

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j$$

propriété $\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$

développer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Intégrales Nous allons utiliser des intégration sur des surfaces, en générales des pression (ou des contraintes!!)

$$F = pA$$

ou

$$F = \int_S p dA$$

s'une manière plus générale

$$\vec{F} = \int_S \sigma_{ij} n_i dA = \int_S (-p) \delta_{ij} n_i dA$$

Calcul des trois composantes de la force \vec{F} sur une surface A

$$\vec{F} = \int_S \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} dA = -p A_x e_x - p A_y e_y - p A_z e_z$$

Forces et Moment PFS : Principe Fondamentale de la statique

Somme des forces = 0

$$\sum F = 0$$

Somme des moments = 0

$$\sum \mathcal{M}_0 = 0$$

définition et point d'application

Exemples

- solide rigide
- pression constante
- pression variable
- calcul du point d'application

Le gradient est une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace, du point du vue de la mathématique le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres, on peut l'écrire

$$\nabla f \quad \text{où} \quad \vec{\text{grad}} f \quad (141)$$

où f c'est une fonction. L'opérateur ∇ étant, en coordonnées cartésiennes

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x, \frac{\partial}{\partial y} e_y, \frac{\partial}{\partial z} e_z. \quad (142)$$

L'application sur une fonction $f(x, y, z)$ donne le vecteur

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) e_x, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) e_y, \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) e_z \quad (143)$$

que l'on appelle le gradient de $f(x, y, z)$.

La divergence d'un champ de vecteurs X mesure le défaut à ce que son flot préserve une forme volume V . La divergence de X , notée $\text{div } X$, est une fonction à valeurs réelles qui mesure la variation première de V le long des trajectoires du champ X . On l'écrit

$$\text{div}(\vec{X}). \quad (144)$$

En coordonnées cartésiennes cela donne $\text{div}(\vec{X}) = \nabla \cdot \vec{X}$ donc

$$\text{div}(\vec{X}) = \frac{\partial}{\partial x} X_x + \frac{\partial}{\partial y} X_y + \frac{\partial}{\partial z} X_z \quad (145)$$

où nous avons défini le vecteur $\vec{X} = X_x e_x + X_y e_y + X_z e_z$.

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel aux dérivées partielles qui, à un champ vectoriel tridimensionnel X , fait correspondre un autre champ noté

$$\text{rot } \vec{X} \quad \text{où} \quad \nabla \wedge X \quad (146)$$

On peut aussi l'écrire en composantes

$$\nabla \wedge X = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_x & X_y & X_z \end{vmatrix}.$$

Le rotationnel donne la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant ce point est non nulle quand son rotationnel ne l'est pas.

Remarque les opérations avec les opérateurs ne sont pas commutatives.

A.2 Opérateurs

Les facteurs d'échelle sont

— coordonnées cartésiennes ($u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$)

$$h_1 = 1 \quad h_2 = 1 \quad h_3 = 1$$

— coordonnées cylindriques ($u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = z$)

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$$

— coordonnées sphériques ($u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi$)

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

Le gradient du scalaire f est

$$\mathbf{grad} f = \nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3}$$

La divergence du vecteur A est

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right]$$

Le rotationnel du vecteur A est

$$\mathbf{rot} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] \\ \frac{1}{h_1 h_1 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\ \frac{1}{h_1 h_1 h_2} \left[\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right] \end{pmatrix}$$