

Cas physique : écoulement 1D à vitesse constante

La variable scalaire Φ est transportée par convection et diffusion dans un écoulement à vitesse constante et connue (u) traversant un domaine mono-dimensionnel représenté sur la figure 3, où figurent les conditions limites du problème.

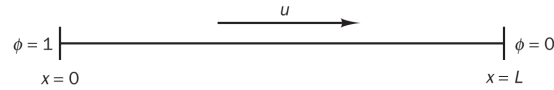


Figure 1: Problème physique.

Soit à résoudre le problème de transport 1D par convection-diffusion

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad \text{pour } 0 < x < L,$$

avec $\Phi(0) = \Phi_A = 1, \quad \Phi(L) = \Phi_B = 0$

La solution analytique du problème s'écrit

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \left(\exp \left(\frac{\rho u x}{\Gamma} \right) - 1 \right) / \left(\exp \left(\frac{\rho u L}{\Gamma} \right) - 1 \right)$$

On utilisera un maillage décalé à faces centrées (voir figure 2 en 1D). L'intégration sur un volume de contrôle ($\Omega_P = [w, e]$) en 1D conduit à écrire :

$$\oint_w^e \rho u \Phi dx = \oint_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad \oint_w^e u dS = 0 \quad (1)$$

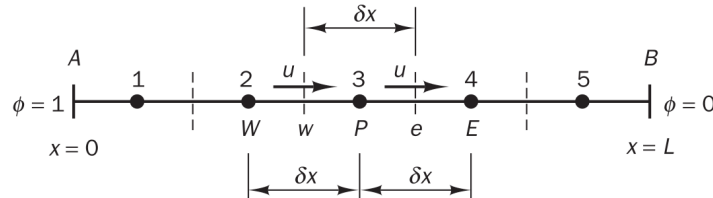


Figure 2: Exemple de discrétisation du domaine physique (ici, 5 volumes de contrôle). Maillage décalé à faces centrées. Les flèches indiquent la composante u de vitesse.

Aux nœuds courants, on peut maintenant ré-écrire l'équation (1) de la manière suivante :

$$\Gamma_e \frac{d\Phi}{dx} \Big|_e - \Gamma_w \frac{d\Phi}{dx} \Big|_w - ((\rho u)_e \Phi_e - (\rho u)_w \Phi_w) = 0 \quad (2)$$

Choix des méthodes numériques:

- approximation des gradients aux interfaces : schémas centrés d'ordre 2 ;
- approximation du scalaire Φ aux interfaces : interpolation centrée d'ordre 2 ;
- propriétés physiques (ρ, Γ) aux interfaces : moyenne harmonique $\left(\Gamma_e = \frac{2\Gamma_P\Gamma_E}{\Gamma_E + \Gamma_P} \right)$.

Travail à faire

On prendra $\Gamma = 0.1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ constants, $L = 1 \text{ m}$.

- Codage**
1. Ecrire le code de calcul résolvant le système matriciel ($\mathcal{A}\Phi = \mathbf{b}$) correspondant au cas proposé pour une équation de diffusion pure. Pensez à modifier \mathcal{A} et \mathbf{b} en fonction des conditions limites.
 2. Tester le code pour 5 volumes de contrôle répartis régulièrement. Vous pouvez vous aider de la partie *Résultats* présentées ci-dessous.
 3. Ajouter le terme advectif avec $u_1 = 0.1 \text{ m/s}$. Vous pouvez vous aider de la partie *Résultats* présentées ci-dessous.
 4. Tester le code avec une vitesse u_1 négative.

Analyse des résultats Vous illustrerez vos commentaires de figures et de tableaux.

1. Tester le code pour $u_1 = 0.1 \text{ m/s}$ et $u_2 = 2.5 \text{ m/s}$. Que se passe t'il ?
2. Pour u_2 , que se passe t'il quand on augmente le nombre de volumes de contrôle ($N_{VF} = (5, 10, 50)$) répartis régulièrement.
3. Modifier le maillage. On prendra une répartition en cosinus

$$x_c = (x_B - x_A) * (0.5 - 0.5 * \cos(\frac{j\pi}{n})) \quad \text{pour } j \in [0 : N_{VF} + 1]$$

Que se passe t'il ?

4. Tracer le nombre de Péclet local ou (Reynolds local $Re_\delta = \frac{\rho_i u_i \delta_i}{\Gamma_i}$) sur le maillage.

Pour aller plus loin ... Passer le code en 2D. On prendra les conditions limites suivantes :

$$v = u \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \phi(0, y) &= 1; & \phi(L, y) &= 0; \\ \phi(x, 0) &= 0; & \phi(x, L) &= 1 \end{aligned}$$

Tracer la distribution de $\phi(s)$ le long de la diagonale DD', où $D=(0, L)$, $D'=(L, 0)$ et s est l'abscisse curviligne depuis le point D le long de DD'.

Remarque : comment créer un tableau de matrices par bloc avec la bibliothèque `scipy` ?

N-dimensional laplacians can be expressed as Kronecker product of 1D laplacians:

```
import scipy.sparse as sp
def laplacian2D(N):
    diag=np.ones([N*N])
    mat=sp.spdiags([diag,-2*diag,diag],[-1,0,1],N,N)
    I=sp.eye(N)
    return sp.kron(I,mat,format='csr')+sp.kron(mat,I)
```

Résultats

Le problème se met sous la forme $a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + S_u$, avec $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$. Ici, du fait de l'incompressibilité, on a $F_e = F_w$. Les coefficients sont donnés ci-dessous pour 5 volumes de contrôle en tenant compte des conditions limites. On note $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$ et $F = \rho u$.

nœud	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	$D - \frac{F}{2}$	$-(2D + F)$	$(2D + F)\Phi_A$
2, 3, 4	$D + \frac{F}{2}$	$D - \frac{F}{2}$	0	0
5	$D + \frac{F}{2}$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F)\Phi_B$

cas n° 1 : problème de diffusion pure On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. On obtient :

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1.00 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1.00 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1.00 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.5 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

cas n° 2 : problème de convection - diffusion, $u_1 = 0.1 \text{ m/s}$ On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $F = \rho u_1 = 0.1 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, et $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. On obtient :

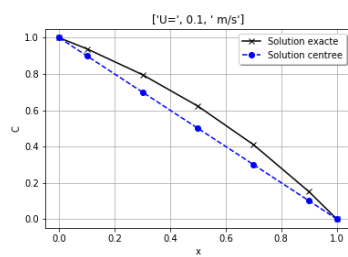
$$\begin{bmatrix} -1.55 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0.55 & -1.00 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & -1.00 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0.55 & -1.00 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 & -1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9421 \\ 0.8006 \\ 0.6276 \\ 0.4163 \\ 0.1579 \end{bmatrix}$$

cas n° 3 : problème de convection - diffusion, $u_2 = 2.5 \text{ m/s}$ On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : $F = \rho u_2 = 2.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, et $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. On obtient :

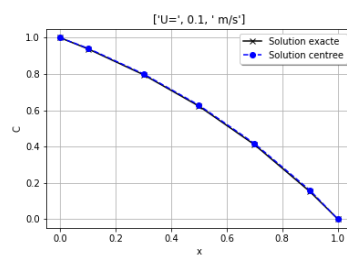
$$\begin{bmatrix} -2.75 & -0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 1.75 & -1. & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 1.75 & -1. & -0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.75 & -1. & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1.75 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0356 \\ 0.8694 \\ 1.2573 \\ 0.3521 \\ 2.4644 \end{bmatrix}$$

Cas #	max(dev)	(xp)	mean(error)
Cas n°1	0.1225	(0.5)	0.201
Cas n°2	0.0073	(0.9)	0.012
Cas n°2	1.5465	(0.9)	1.701

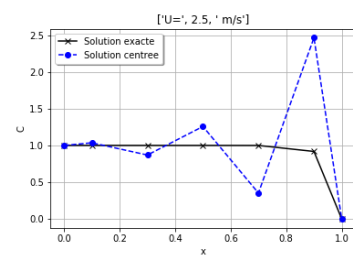
Table 1: Comparaison avec la solution exacte. Différence maximale (position) et erreur L2.



Cas n° 1



Cas n° 2



Cas n° 3

Figure 3: Comparaison avec la solution exacte. Champs solutions Φ_i pour les différents cas.