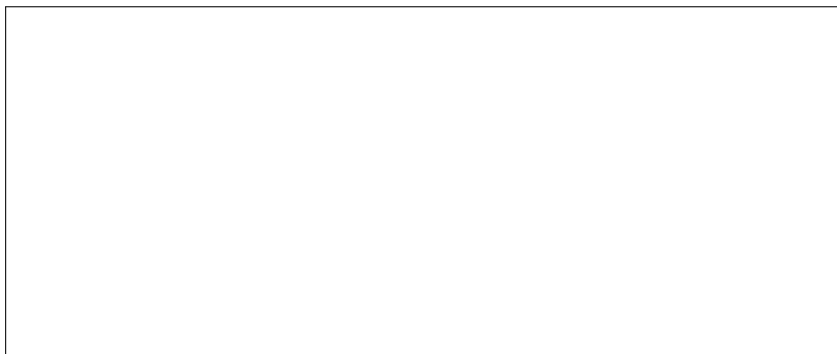


2A002, Bases de Thermodynamique

Partiel du 16/10/2017 - Durée 1h30. Tout document interdit.



- Inscrivez votre numéro d'anonymat **sur chacune des feuilles**.
- Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.
- Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
- Les sacs et manteaux doivent être déposés dans un coin de l'amphi ou de la salle pendant l'examen.
- Cet énoncé contient 11 pages. Les pages paires servent de brouillon.
- Ne pas dégrafer le sujet.
- Répondez directement sur le sujet.

Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, ajoutez une feuille par exercice en précisant votre numéro d'anonymat ainsi que l'exercice concerné.

brouillon

Exercice 1.

Soit la différentielle suivante $\delta S(T, V) = N\bar{C}_v \frac{dT}{T} + NR \frac{dV}{V}$, où \bar{C}_v , N , R sont des constantes données.

1. Montrer mathématiquement que δS est une différentielle totale exacte.

2. Exprimer alors les dérivées partielles $(\frac{\partial S}{\partial T})_V$ et $(\frac{\partial S}{\partial V})_T$ de la fonction d'état S en fonction des variables T et V .

3. En intégrant le système précédent et en utilisant la donnée $S(T_0, V_0) = S_0$, calculer la fonction $S(T, V)$.

brouillon

Exercice 2.

On considère N moles de gaz parfait, initialement à l'état d'équilibre 0, (V_0, p_0) .

1. Sur le diagramme de Clapeyron ci-dessous, donner l'allure des transformations (A) et (B) suivantes, partant chacune de l'état 0 :

Transformation (A) : Détente isotherme réversible permettant de passer à l'état d'équilibre 1 défini par (V_1, p_1) .

Transformation (B) : refroidissement isochore réversible suivi d'un échauffement isobare réversible, permettant de rejoindre le même état d'équilibre 1 que précédemment.



2. Comparer qualitativement, à partir des schémas, les travaux échangés entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A), (B). Laquelle des 2 transformations est-elle la plus intéressante en terme de travail mécanique ? Justifier la réponse.

3. Après avoir précisé leur signe, comparer qualitativement les quantités de chaleur Q_A et Q_B échangées entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B). Justifier la réponse.

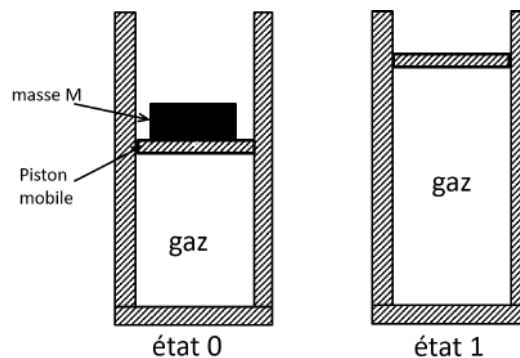
4. Application. Donner l'expression du travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B), et faire les applications numériques en choisissant parmi les données et résultats suivants : $V_0 = 0.5 \text{ m}^3$, $p_0 = 10 \text{ bar}$, $V_1 = 2 \text{ m}^3$, $NR = 500 \text{ J.K}^{-1}$, $\gamma = 1.4$, $C_v = 1250 \text{ J.K}^{-1}$, $\ln(4) \simeq 3/2 = 1.5$.

brouillon

Exercice 3

On considère N moles de gaz parfait, enfermées dans un cylindre vertical de section S , fermé par un piston de masse négligeable qui peut coulisser verticalement sans frottement. Le cylindre et le piston sont adiabatiques. On note $\gamma = \bar{C}_p / \bar{C}_v$ le rapport des capacités calorifiques molaires, et R la constante universelle du gaz parfait. L'atmosphère ambiante est caractérisée par sa température T_a et sa pression p_a , supposées constantes. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. (Question préliminaire.) Donner les expressions de \bar{C}_p et de \bar{C}_v en fonction R et γ .



2. Dans l'état d'équilibre initial noté (0), la température est donnée $T_0 = T_a$, et une masse M est en place sur le piston. Exprimer la pression du gaz p_0 en fonction des données.

Partie I

3. On retire brusquement la masse M (voir Figure ci-dessus). L'état d'équilibre obtenu en fin de transformation est noté (1). Que peut-on dire de la transformation (donner 3 qualificatifs) ?

4. Exprimer la pression du gaz p_1 à l'équilibre final en fonction des données.

brouillon

5. Exprimer le travail W_{01} et la quantité de chaleur Q_{01} échangés par le gaz avec le milieu extérieur, d'abord en fonction de p_0, p_1, V_0 et V_1 , puis en fonction de $p_1/p_0, N, R, T_1$ et T_0 .

6. Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{01} du gaz en fonction de T_0, T_1, N, R et γ .

7. Dédire des questions précédentes que la température T_1 s'exprime en fonction de T_0, p_1, p_0 et γ , par

$$T_1 = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0}\right) \frac{T_0}{\gamma}$$

brouillon

Partie II - Cette partie peut être traitée indépendamment, en utilisant le résultat donné à la question 7.

8. On suppose maintenant que la masse M est en fait constituée de 2 masses plus petites m_1 et m_2 que l'on peut retirer séparément. On repart de l'équilibre initial, état (0), mais cette fois on retire brusquement la masse m_1 , de telle sorte que dans l'état final noté (0'), la pression soit $p_{0'} = p_0/2$. Donner l'expression de la température $T_{0'}$ en fonction de T_0 et γ .

9. En repartant de l'état initial (0'), on retire brusquement la masse m_2 . A l'état final (1'), la pression p_1 est la même que dans l'état (1). Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (0') et (1').

10. Donner l'expression de la température finale $T_{1'}$ en fonction de T_0 , p_1 , p_0 et γ .

11. En utilisant les résultats des questions précédentes, comparer T_1 et $T_{1'}$. Conclure.

Exercice 1.

Soit la différentielle suivante $\delta S(T, V) = N\bar{C}_v \frac{dT}{T} + NR \frac{dV}{V}$, où \bar{C}_v , N , R sont des constantes données.

1. Montrer mathématiquement que δS est une différentielle totale exacte.

On a $\delta S(T, V) = X(T, V) dT + Y(T, V) dV$
 avec $X = \frac{N\bar{C}_v}{T}$ et $Y = \frac{NR}{V}$ -
 donc $\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{N\bar{C}_v}{T}\right)\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{NR}{V}\right)\right)_V = 0$
 $\Rightarrow \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V$ égalité de Schwarz $\Rightarrow \delta S$ est totale exacte

2. Exprimer alors les dérivées partielles $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ de la fonction d'état S en fonction des variables T et V .

δS totale exacte $\Rightarrow \delta S = dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$
 Par identification avec $dS = \frac{N\bar{C}_v}{T} dT + \frac{NR}{V} dV$,
 on trouve $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{N\bar{C}_v}{T}$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{NR}{V}$

3. En intégrant le système précédent et en utilisant la donnée $S(T_0, V_0) = S_0$, calculer la fonction $S(T, V)$.

$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{N\bar{C}_v}{T} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{NR}{V} \end{cases} \Rightarrow \text{(par intégration en } T\text{): } S(T, V) = N\bar{C}_v \ln T + g(V)$
 $\Downarrow \text{(calcul de dérivée partielle)}$
 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{NR}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = g'(V)$
 $\xrightarrow{\text{égalité}} g'(V) = \frac{NR}{V} \Rightarrow g(V) = NR \ln V + K$
 $\Rightarrow S(T, V) = N\bar{C}_v \ln T + NR \ln V + K$
 or $S(T_0, V_0) = S_0 \Rightarrow N\bar{C}_v \ln T_0 + NR \ln V_0 + K = S_0$
 $\Rightarrow K = S_0 - N\bar{C}_v \ln T_0 - NR \ln V_0$
 $\Rightarrow S(T, V) = N\bar{C}_v \ln \frac{T}{T_0} + NR \ln \frac{V}{V_0} + S_0$

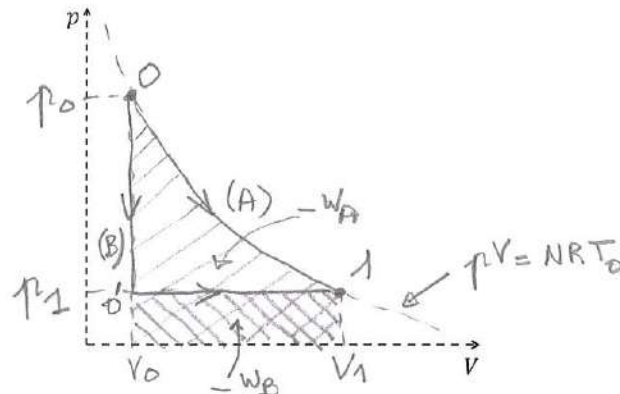
Exercice 2.

On considère N moles de gaz parfait, initialement à l'état d'équilibre 0, (V_0, p_0) .

1. Sur le diagramme de Clapeyron ci-dessous, donner l'allure des transformations (A) et (B) suivantes, partant chacune de l'état 0 :

Transformation (A) : Détente isotherme réversible permettant de passer à l'état d'équilibre 1 défini par (V_1, p_1) .

Transformation (B) : refroidissement isochore réversible suivi d'un échauffement isobare réversible, permettant de rejoindre le même état d'équilibre 1 que précédemment.



2. Comparer qualitativement, à partir des schémas, les travaux échangés entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A), (B). Laquelle des 2 transformations est-elle la plus intéressante en terme de travail mécanique ? Justifier la réponse.

On a $W_A = -\int_0^1 p dV$ avec $dV > 0 \Rightarrow W_A < 0$
 $W_B = -\int_0^1 p dV$ avec $dV > 0 \Rightarrow W_B < 0$
 W étant représenté par "aire sous la courbe $p(V)$ ", on voit $|W_B| < |W_A|$ et donc $W_A < W_B$ - La transformation (A) est + intéressante car le gaz "fournit" + de travail

3. Après avoir précisé leur signe, comparer qualitativement les quantités de chaleur Q_A et Q_B échangées entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B). Justifier la réponse.

Transformation (A) : On a $W_A + Q_A = \Delta U_A = 0$ (GP + Transf. isotherme)
 $\Rightarrow Q_A = -W_A > 0$
 Transformation (B) : On a $W_B + Q_B = \Delta U_B = \Delta U_A = 0$ (initial et final)
 donc $Q_B = -W_B < -W_A = Q_A$ [car $W_A < W_B \Rightarrow -W_B < -W_A$]

4. Application. Donner l'expression du travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B), et faire les applications numériques en choisissant parmi les données et résultats suivants : $V_0 = 0.5 \text{ m}^3$, $p_0 = 10 \text{ bar}$, $V_1 = 2 \text{ m}^3$, $NR = 500 \text{ J.K}^{-1}$, $\gamma = 1.4$, $C_v = 1250 \text{ J.K}^{-1}$, $\ln(4) \simeq 3/2 = 1.5$.

$W_A = -\int_0^1 p dV = -\int_0^1 \frac{NRT_0}{V} dV = -NRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = -p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$
 AN : $W_A = -10^6 \times 0.5 \ln \frac{2}{0.5} = -10^6 \times 0.5 \times 1.5 = -0.75 \times 10^6 = -750 \text{ kJ}$
 $W_B = -\int_0^1 p dV = -\int_0^1 p_1 dV = -p_1 (V_1 - V_0)$
 AN : on a $p_1 V_1 = p_0 V_0 = NRT_0 \Rightarrow p_1 = p_0 \frac{V_0}{V_1}$ AN $p_1 = 10^6 \frac{0.5}{2} = 2.5 \times 10^5 \text{ Pa}$
 $\Rightarrow W_B = -2.5 \times 10^5 (2 - 0.5) = -2.5 \times 1.5 \times 10^5 = -3.75 \times 10^5 = -375 \text{ kJ}$

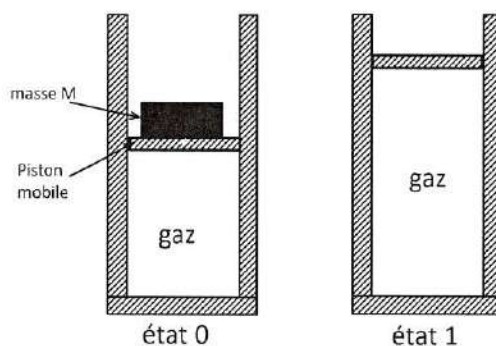
Exercice 3

On considère N moles de gaz parfait, enfermées dans un cylindre vertical de section S , fermé par un piston de masse négligeable qui peut coulisser verticalement sans frottement. Le cylindre et le piston sont adiabatiques. On note $\gamma = \bar{C}_p / \bar{C}_v$ le rapport des capacités calorifiques molaires, et R la constante universelle du gaz parfait. L'atmosphère ambiante est caractérisée par sa température T_a et sa pression p_a , supposées constantes. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. (Question préliminaire.) Donner les expressions de \bar{C}_p et de \bar{C}_v en fonction R et γ .

$$\text{Relation de Mayer : } \bar{C}_p - \bar{C}_v = R \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\bar{C}_p}{\bar{C}_v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{C}_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \\ \bar{C}_v = \frac{R}{\gamma - 1} \end{cases}$$



2. Dans l'état d'équilibre initial noté (0), la température est donnée $T_0 = T_a$, et une masse M est en place sur le piston. Exprimer la pression du gaz p_0 en fonction des données.

$$\text{Equilibre mécanique du piston} \Rightarrow p_0 = p_a + \frac{Mg}{S}$$

Partie I

3. On retire brusquement la masse M (voir Figure ci-dessus). L'état d'équilibre obtenu en fin de transformation est noté (1). Que peut-on dire de la transformation (donner 3 qualificatifs)?

Il s'agit d'une détente adiabatique irréversible.

\updownarrow $V \uparrow, p \downarrow$ \updownarrow pas d'échange de chaleur \nwarrow brusque

4. Exprimer la pression du gaz p_1 à l'équilibre final en fonction des données.

$$\text{Equilibre mécanique du piston} \Rightarrow p_1 = p_a$$

5. Exprimer le travail W_{01} et la quantité de chaleur Q_{01} échangés par le gaz avec le milieu extérieur, d'abord en fonction de p_0 , p_1 , V_0 et V_1 , puis en fonction de p_1/p_0 , N , R , T_1 et T_0 .

$$\begin{aligned}
 W_{01} &= - \int_0^1 p_{\text{ext}} dV \quad \text{or } p_{\text{ext}} = p_a = \text{constante pendant la transformation} \\
 \Rightarrow W_{01} &= - p_a (V_1 - V_0) = - p_1 (V_1 - V_0) \\
 &= - p_1 V_1 + p_1 V_0 = - NRT_1 + \frac{p_1}{p_0} p_0 V_0 \\
 &= - NRT_1 + \frac{p_1}{p_0} NRT_0 = NR \left[-T_1 + \frac{p_1}{p_0} T_0 \right] \\
 Q_{01} &= 0 \quad (\text{transformation adiabatique})
 \end{aligned}$$

6. Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{01} du gaz en fonction de T_0 , T_1 , N , R et γ .

$$\begin{aligned}
 \Delta U_{01} &= N \bar{C}_v (T_1 - T_0) \quad (\text{Variation d'énergie interne d'1 Gaz parfait}) \\
 \Rightarrow \Delta U_{01} &= \frac{NR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)
 \end{aligned}$$

7. Dédire des questions précédentes que la température T_1 s'exprime en fonction de T_0 , p_1 , p_0 et γ , par

$$T_1 = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} \right) \frac{T_0}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
 1^{\text{er}} \text{ principe} &\Rightarrow \Delta U_{01} = W_{01} + Q_{01} = W_{01} \\
 \Rightarrow \frac{NR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) &= NR \left(-T_1 + \frac{p_1}{p_0} T_0 \right) \\
 \Rightarrow T_1 - T_0 &= -(\gamma - 1) T_1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} T_0 \\
 \Rightarrow (1 + \gamma - 1) T_1 &= \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} \right) T_0 \\
 \Rightarrow T_1 &= \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} \right) \frac{T_0}{\gamma}
 \end{aligned}$$

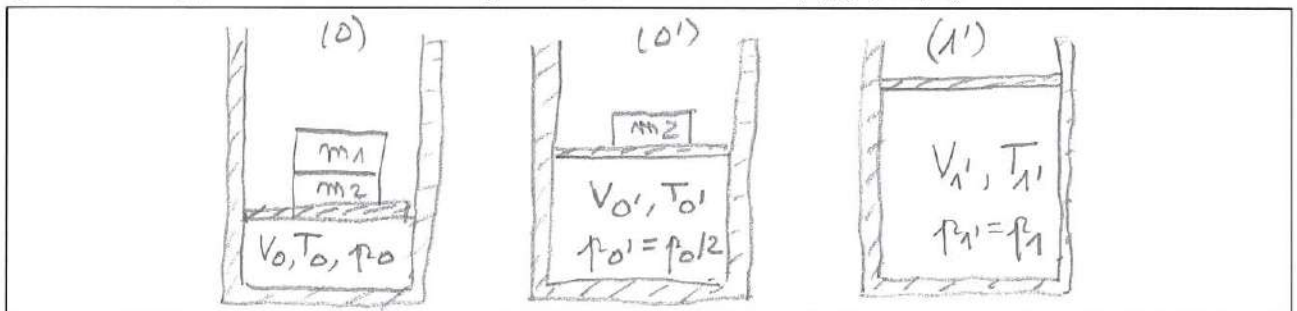
Partie II - Cette partie peut être traitée indépendamment, en utilisant le résultat donné à la question 7.

8. On suppose maintenant que la masse M est en fait constituée de 2 masses plus petites m_1 et m_2 que l'on peut retirer séparément. On repart de l'équilibre initial, état (0), mais cette fois on retire brusquement la masse m_1 , de telle sorte que dans l'état final noté (0'), la pression soit $p_{0'} = p_0/2$. Donner l'expression de la température $T_{0'}$ en fonction de T_0 et γ .

On réutilise l'expression donnée et démontrée en question 7 :

$$T_{0'} = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_{0'}}{p_0}\right) \frac{T_0}{\gamma} = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{1}{2}\right) \frac{T_0}{\gamma} = \frac{(1 + \gamma)}{2} \frac{T_0}{\gamma}$$

9. En repartant de l'état initial (0'), on retire brusquement la masse m_2 . A l'état final (1'), la pression p_1 est la même que dans l'état (1). Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (0') et (1').



10. Donner l'expression de la température finale $T_{1'}$ en fonction de T_0 , p_1 , p_0 et γ .

On réutilise l'expression donnée et démontrée en question 7 :

$$T_{1'} = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_{0'}}\right) \frac{T_{0'}}{\gamma} = \left(1 + (\gamma - 1) \frac{2p_1}{p_0}\right) \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2} T_0$$

11. En utilisant les résultats des questions précédentes, comparer T_1 et $T_{1'}$. Conclure.

Regardons si $T_{1'} < T_1$?

$$\left(1 + (\gamma - 1) \frac{2p_1}{p_0}\right) \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2} T_0 < \left(1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0}\right) \frac{T_0}{\gamma} ?$$

$$\Rightarrow \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2p_1}{p_0}\right] (\gamma + 1) < 2\gamma \left[1 + (\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0}\right] ?$$

$$\Rightarrow \gamma + 1 + (\gamma^2 - 1) \frac{2p_1}{p_0} < 2\gamma + 2\gamma(\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} ?$$

$$\Rightarrow (2\gamma^2 - 2 - 2\gamma^2 + 2\gamma) \frac{p_1}{p_0} < \gamma - 1 ?$$

$$\Rightarrow 2(\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} < (\gamma - 1) ?$$

$$\Rightarrow p_1 < \frac{p_0}{2} = p_{0'} ? \text{ oui } \Rightarrow$$

$T_{1'} < T_1$
Le gaz s'échauffe
moins si la transformation
est en 2 temps -