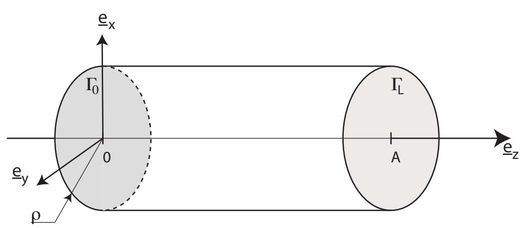
TD 3 -Torsion, flexion et principe de superposition

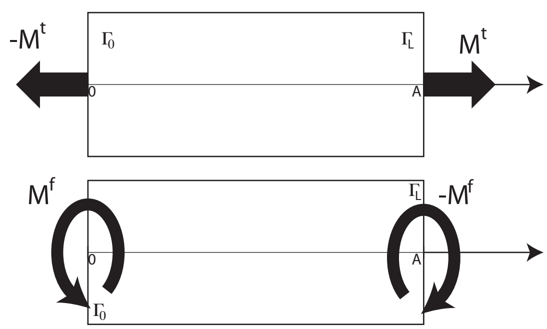
Un arbre mécanique cylindrique de révolution autour de l'axe $\underline{e}_z$, de section circulaire et de rayon ρ, de longueur L est soumis à ses deux extrémités $\Gamma_0 : z = 0$ et $\Gamma_L : z = L$ à des efforts surfaciques $(\underline{t}_0, \underline{t}_L)$ dont les torseurs aux points O et A sont de la forme suivante:

$$\{\mathcal{T}(\Gamma_0, O)\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M}(O) = -M^t.\underline{e}_z + M^f.\underline{e}_y \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{T}(\Gamma_L, A)\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M}(A) = M^t.\underline{e}_z - M^f.\underline{e}_y \end{array} \right\}.$$

La surface latérale est libre d'effort et les efforts volumiques sont négligés. L'arbre est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé μ et λ.





Partie 1 : Équations du problème de mécanique

1.1 Déterminer les efforts surfaciques $\underline{t}_0^f$ et $\underline{t}_L^f$, portés par $\underline{e}_z$ et linéaires en x, qui permettent de retrouver les conditions de chargement de flexion.

1.2 Déterminer les efforts $\underline{t}_0^t$ et $\underline{t}_L^t$, portés par $\underline{e}_\theta$ et linéaires en r, qui permettent de retrouver les conditions de chargement de torsion.

1.3 Discuter de l'unicité de la solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ suivant les cas :
- le chargement est défini de manière globale $(\{\mathcal{T}(\Gamma_0, O))\}, \{\mathcal{T}(\Gamma_L, A)\})$;
- le chargement est défini de manière locale suivant les questions 1.1 et 1.2.

1.4 Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'élastostatique régulier sur la base des questions 1.1 et 1.2, en différentiant les équations concernant l'admissibilité statique, l'admissibilité cinématique et le comportement.

1.5 Par utilisation du thèorème de superposition, montrer que ce problème peut être décomposé en deux problèmes distincts de torsion et de flexion.

Écrire les équations et conditions aux limites de ces deux problèmes.

Partie 2 : Résolution du problème de torsion par approche en déplacement

2.1 Le champ de déplacement est recherché sous la forme : $\underline{u}(M) = \alpha\, r\, z \underline{e}_\theta$. Justifier ce choix.

2.2 Déterminer le tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ associé, puis le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction du champ de déplacement et des coefficients matériaux.

2.3 En utilisant les conditions aux limites propres à ce problème de torsion ; déterminer un couple solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$.

Partie 3 : Résolution du problème de flexion par approche en contraintes

3.1 Le champ de contraintes est recherché sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(x) \end{pmatrix}_{(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)} .$$

Vérifier que la contrainte proposée est statiquement admissible.

Déterminer $\sigma_{zz}(x)$ à l'aide des conditions aux limites.

3.2 Écrire les équations permettant d'exprimer la déformation en fonction de la contrainte. En déduire la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ dans notre cas d'étude.

3.3 Trouver une solution en déplacement associée.

Partie 4 : Assemblage des deux solutions

4.1 Écrire la solution complète du problème de torsion-flexion composée.

4.2 La limite d'élasticité du matériau est σ_0. Déterminer en utilisant le critère de Von Mises le couple maximal admissible dans un cas de flexion pure, dans un cas de torsion pure et dans un cas de flexion-torsion composée les moments $\underline{M}^t_{0,L}$ et $\underline{M}^f_{0,L}$ ont même norme.