Non-linéarités géométriques Flambement

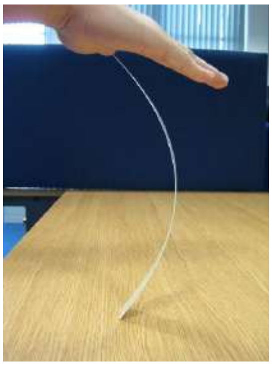
Introduction

On s'intéresse aux **non-linéarités géométriques** en regardant le problème de **flambement** d'une poutre droite.

Exemple de la règle :

Si l'on prend une règle que l'on met en **compression**, au début la règle reste droite mais en augmentant lentement la force de compression F à partir d'une certaine valeur pour la force de compression ($F > F_c$) on constate que la règle se dérobe à l'effet normal de compression en fléchissant transversalement.

Cette valeur F_c est appelée **charge de flambement** ou **charge critique de flambement**.



Tous les éléments de structure **longs et minces** ont des comportements similaires en compression. La **charge de flambement** F_c est alors un élément fondamental pour le **dimensionnement** de certaines structures.

flambement thermique d'un rail
de chemin de fer

flambement d'une colonne
génie-civil

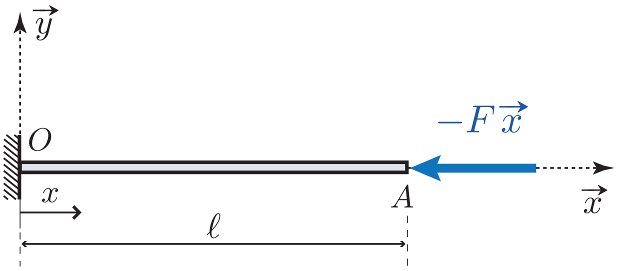
Le flambement peut conduire brutalement à la rupture d'une structure élancée

<u>Cadre de l'étude :</u>

L'étude du flambement fait appel aux **non-linéarités de type géométrique** (grands déplacements et grandes rotations), toutefois on reste dans le **cadre des petites déformations** et la **loi de comportement reste linéaire** (pas de non-linéarités matérielles).

Problème de flambement d'Euler

On considère une poutre droite élastique **flexible** (grands déplacements et grandes rotations) et **inextensible** (sa longueur reste inchangée) soumise à une force de compression $-F\vec{x}$.

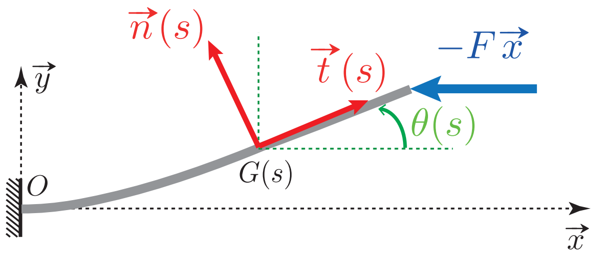


$\boxed{F \leq F_c}$

Son extrémité O est encastrée. La section droite est supposée constante, le poids propre de la poutre est négligé et le matériau est homogène.

Les déplacements ne sont plus considérés comme petits

$\Longrightarrow$ les équations d'équilibre contrairement aux chapitres précédents doivent être écrites sur la **configuration actuelle** ou **configuration déformée** et non sur la configuration de référence non déformée.



$F > F_c$

$\theta(s)$: angle tangent

Equations d'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{R}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{f}(s) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{R}}(s) = \vec{C} = \vec{\mathcal{R}}(\ell) = -F\vec{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{OG}}{\mathrm{d}s} = \cos\theta(s)\vec{x} + \sin\theta(s)\vec{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}(s)}{\mathrm{d}s} + (\cos\theta(s)\vec{x} + \sin\theta(s)\vec{y}) \wedge (-F\vec{x}) = \vec{0}$$

pour un problème plan $\vec{\mathcal{M}}(s) = M_z(s)\vec{z}$

donc en projetant suivant $\vec{z}$ on obtient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}M_z(s)}{\mathrm{d}s} + F\sin\theta(s) = 0}$

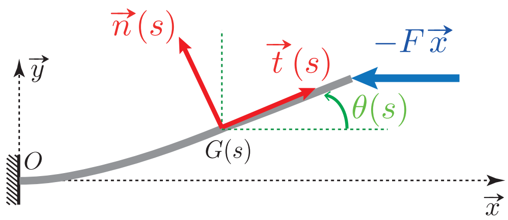
d'après la loi de comportement linéaire : $M_z(s) = EI_{Gz}\,\gamma_z(s) = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}$

Rq : si la configuration initiale est une poutre courbe de courbure C_0 alors

$$M_z(s) = EI_{Gz}\,(\gamma_z(s) - C_0)$$

ici on part de la **configuration initiale droite** et comme le **matériau** est **homogène** :

$$\boxed{EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2} + F\sin\theta(s) = 0}$$



Conditions aux limites :

en $s=0$ encastrement : $\boxed{\theta(0)=0}$

en $s=\ell$ libre d'effort : $M_z(\ell)=EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\theta(\ell)}{\mathrm{d}s}=0$ d'où $\boxed{\theta'(\ell)=0}$

Le problème non-linéaire (**Elastica**) à résoudre est donc :

$$(\mathscr{P})\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{F}{EI_{Gz}}\sin\theta(s)=0 & \forall\, 0<s<\ell\\ \theta(0)=0 \quad \text{et} \quad \theta'(\ell)=0\end{cases}$$

Résolution complète complexe

Calcul des charges critiques et modes de flambement :

Pour le calcul de la charge critique de flambement, il n'est pas nécessaire de résoudre le problème non-linéaire $(\mathscr{P})$, on peut le **linéariser** au voisinage de $\theta(s)=0$ étant solution du problème.

Le problème non-linéaire $(\mathscr{P})$ devient alors $(\mathscr{P})_b$: problème de bifurcation

$$\sin\theta(s)\approx\theta(s)$$

$$(\mathscr{P})_b\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{F}{EI_{Gz}}\theta(s)=0 & \forall\, 0<s<\ell\\ \theta(0)=0 \quad \text{et} \quad \theta'(\ell)=0\end{cases}$$

$(\mathscr{P})_b$ est un problème aux **valeurs propres** avec la force F la valeur et $\theta(s)$ le **mode propre**.

Solution de $(\mathscr{P})_b$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2} + \frac{F}{EI_{Gz}}\theta(s) = 0$$

$$\theta(s) = A\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right)$$

or $\theta(0) = 0$ donc $\boxed{A = 0}$ soit $\theta(s) = B\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right)$

$\theta'(\ell) = 0$ donc $B\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\ell\right) = 0$ ⟶ $\cancel{B = 0}$ ~~(solution triviale)~~

⟶ $\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\ell\right) = 0$

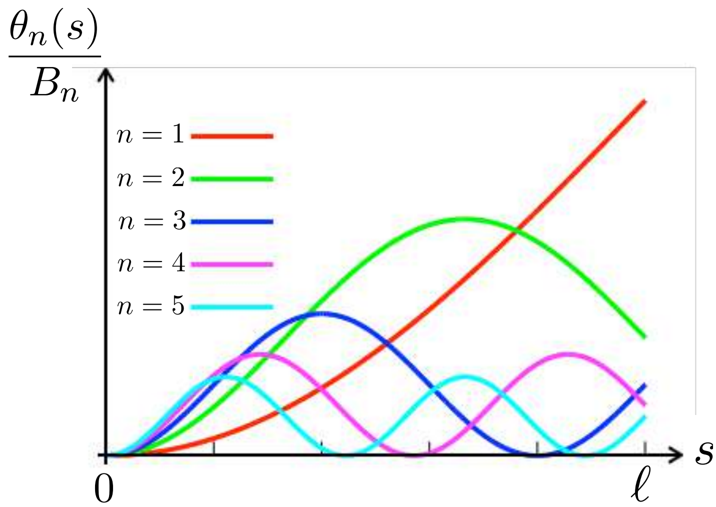
$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{F_n}{EI_{Gz}}}\ell = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

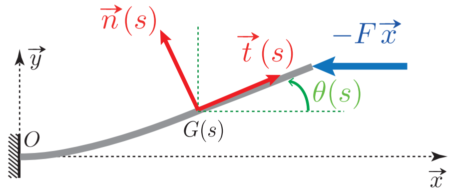
d'où $\frac{F_n}{EI_{Gz}} = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\ell^2}$ donc $\boxed{F_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\ell^2}EI_{Gz}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

charge critique de flambement d'ordre n

Le mode propre associé est $\boxed{\theta_n(s) = B_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}s\right)}$

mode de flambement associé avec $B_n \in \mathbb{R}$ arbitraire





Rq : Le mode de flambement donne seulement l'allure de la forme flambée **au voisinage de la charge de flambement**. L'amplitude et la forme exactes de la forme flambée déterminées lorsque le problème non-linéaire sera complètement résolu.

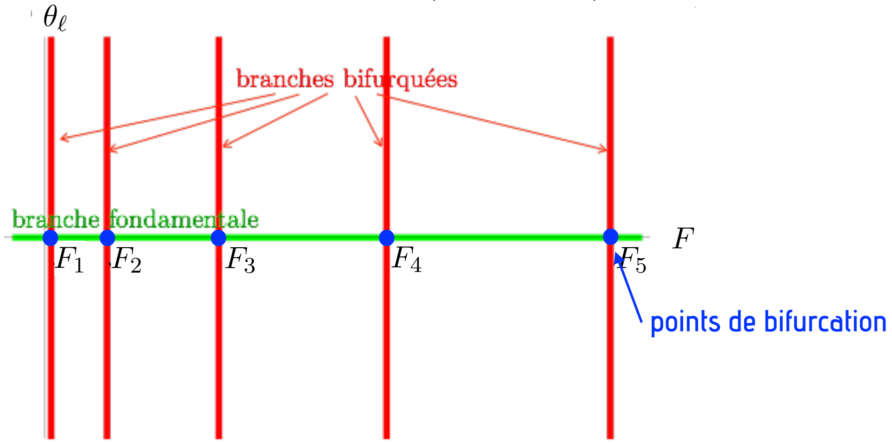
Diagramme de bifurcation :

On va regarder ce qui se passe en $s = \ell$: $\theta(\ell) = \theta_\ell = B \sin\left(\sqrt{\dfrac{F}{EI_{Gz}}}\,\ell\right)$

$\theta(\ell) = 0 \longrightarrow B = 0$: $\theta_\ell = 0$ (branche fondamentale)

$\theta'(\ell) = 0 \longrightarrow \cos\left(\sqrt{\dfrac{F}{EI_{Gz}}}\,\ell\right) = 0$ pour $F_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4\ell^2} EI_{Gz}$, $n \in \mathbb{N}^*$

(branches bifurquées)



Rq : Les branches bifurquées ne sont que des approximations (linéarisation) des vraies branches bifurquées. Seuls les points de bifurcation sont exacts.

Mécanique des Milieux Continus 1 - MEC430 - Cours X (J.J. Marigo)

$F_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4\ell^2} EI_{Gz}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ **charge critique de flambement d'ordre** n

$$\Longrightarrow \quad F_1 = \frac{\pi^2}{4\ell^2} EI_{Gz} \ , \ F_2 = \frac{9\pi^2}{4\ell^2} EI_{Gz} \ , \ldots$$

En pratique seule la 1ère charge critique (ici F_1) peut être supporté par la poutre.

La plus faible valeur de F est désignée par F_c .

Elle correspond à la charge de flambement, ici $\boxed{F_c = \dfrac{\pi^2}{4\ell^2} EI_{Gz}}$

Rq : $F_c \nearrow$ si $EI_{Gz} \nearrow$ ou $\ell \searrow$

On peut atteindre dans certains cas la seconde charge de flambement (ou les suivantes) en imposant des conditions aux limites supplémentaires. Par exemple en empêchant le déplacement transverse au centre de la poutre.

Résolution du problème complet non-linéaire :

$$(\mathcal{P}) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2} + \frac{F}{EI_{Gz}} \sin\theta(s) = 0 \\ &\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta'(\ell) = 0 \end{aligned}} \qquad \forall\, 0 < s < \ell$$

Calcul de l'intégrale 1ère :

$$\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}^2\theta(s)}{\mathrm{d}s^2} + \frac{F}{EI_{Gz}} \sin\theta(s)\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{F}{EI_{Gz}} \cos\theta(s) = \text{cste } \forall s$$

On sait que : $\theta(\ell) = \theta_\ell \quad$ et $\quad \theta'(\ell) = 0 \implies -\dfrac{F}{EI_{Gz}} \cos\theta_\ell = \text{cste}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{F}{EI_{Gz}}\left(\cos\theta(s) - \cos\theta_\ell\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s} = \pm\sqrt{\frac{2F}{EI_{Gz}}}\sqrt{\cos\theta(s) - \cos\theta_\ell}$$

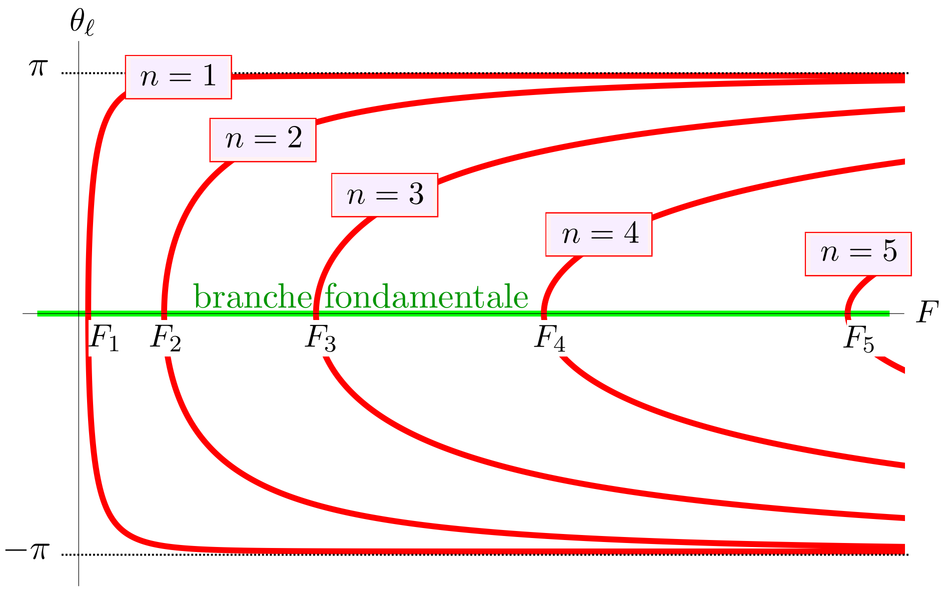
$$\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\sqrt{\cos\theta(s) - \cos\theta_\ell}} = \pm\sqrt{\frac{2F}{EI_{Gz}}}\,\mathrm{d}s \text{ avec } \theta(0) = 0$$

$$\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\sqrt{\cos\overline{\theta} - \cos\theta_\ell}} = \pm\sqrt{\frac{2F}{EI_{Gz}}}\; s$$

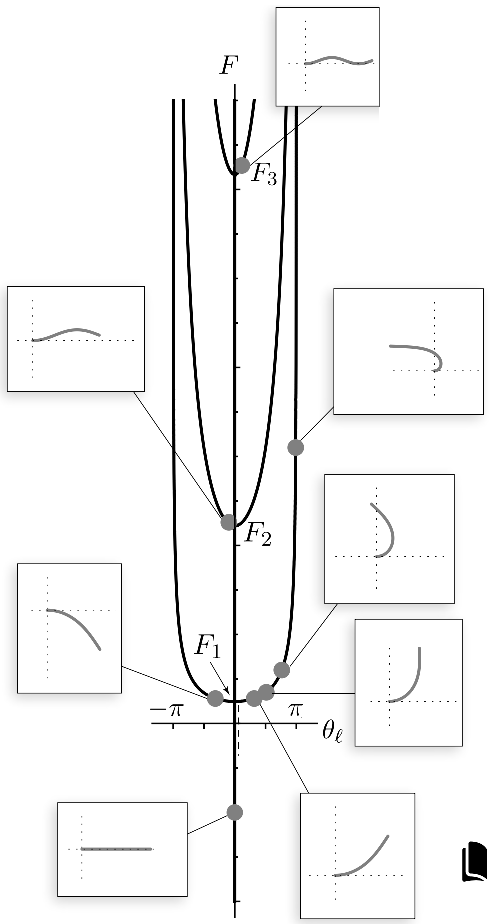
en $s = \ell$: $\boxed{\displaystyle\int_0^{\theta_\ell} \frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\sqrt{\cos\overline{\theta} - \cos\theta_\ell}} = \pm\sqrt{\frac{2F}{EI_{Gz}}}\; \ell}$

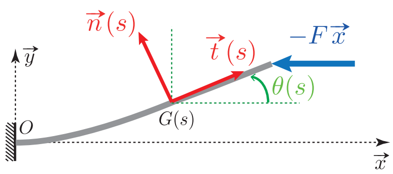
relation entre la force appliquée F et θ_ℓ qui se résout par exemple via une **méthode de tir**

$\implies$ diagramme de bifurcation pour le problème non-linéaire complet



- Pas de branche pour les $F<0$. Le flambement d'une poutre ne peut avoir lieu qu'en compression.
- Chaque branche coupe la branche fondamentale au point de bifurcation trouvé dans l'analyse linéaire.
- Branches symétriques $\Longrightarrow$ poutre peut flamber aussi bien pour $\pm\theta_\ell$.
- Si $F \leq F_c$: la poutre reste rectiligne; si $F \geq F_c$: flexion $\perp$ à l'axe de la section droite
- Toutes les branches convergent vers $\pm\pi$ quand F tend vers $+\infty$





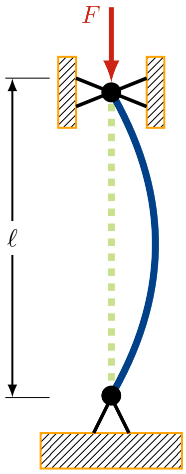
$$\vec{t}(s) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}s} = \cos\theta(s)\,\vec{x} + \sin\theta(s)\,\vec{y}$$

Après résolution du problème, on obtient la configuration d'équilibre par une simple intégration :

$$\overrightarrow{OG}(s) = \left(\int_0^s \cos\theta(\zeta)\,d\zeta\right)\vec{x} + \left(\int_0^s \sin\theta(\zeta)\,d\zeta\right)\vec{y}$$

Influence des conditions aux limites :

On prend maintenant le cas de la **poutre bi-articulée**



On part de : $\theta(s) = A\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right)$

Conditions aux limites :

en $s = 0$: $M_z(0) = EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\theta(0)}{\mathrm{d}s} = 0$ d'où $\theta'(0) = 0$

en $s = \ell$: $M_z(\ell) = EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\theta(\ell)}{\mathrm{d}s} = 0$ d'où $\theta'(\ell) = 0$

comme : $\theta'(s) = \sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\left\{-A\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}s\right)\right\}$

$\theta'(0) = 0 \implies \boxed{B = 0}$

$\theta'(\ell) = 0 \implies A\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\ell\right) = 0$

- $\cancel{A = 0}$ ~~(solution triviale)~~
- $\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\ell\right) = 0$

$\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI_{Gz}}}\ell\right) = 0 \implies \sqrt{\frac{F_n}{EI_{Gz}}}\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

donc $F_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}EI_{Gz}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ **charge critique de flambement d'ordre n pour la poutre bi-articulée**

$$\implies F_c = F_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2}EI_{Gz}$$

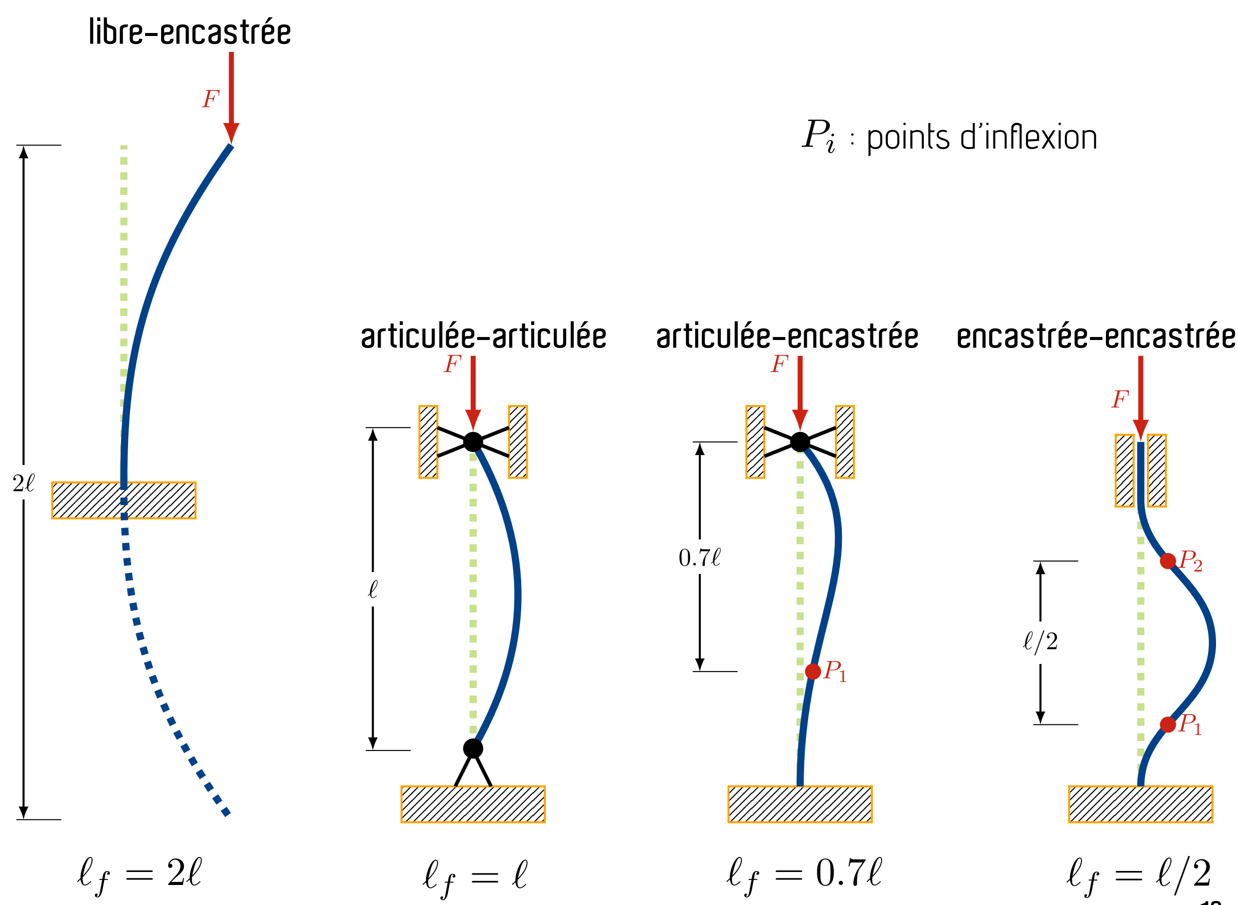
Le mode de flambement associé $\theta_n(s) = A_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}s\right)$ avec $A_n \in \mathbb{R}$ arbitraire

On veut généraliser les résultats établis pour la poutre bi-articulée aux poutres dont les conditions aux limites sont différentes en posant :

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2}{{\ell_f}^2}EI_{Gz}}$$

ℓ_f : **longueur de flambement** qui dépend de la nature des liaisons aux extrémités

ℓ_f : la plus grande distance séparant 2 points d'articulation ou d'inflexion réelle ou virtuelle de la fibre moyenne



Contrainte critique d'Euler :

A la force critique correspond une **contrainte critique** σ_c .
Pour une poutre parfaitement rectiligne, effort centré et matériau homogène :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2 E I_{Gz}}{{\ell_f}^2 S} \Longrightarrow \boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\ell_f}{r_z} \quad \textbf{élancement}$$

λ quantifie la sensibilité au flambement

$$\text{où} \quad r_z = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}} \quad \textbf{rayon de giration}$$

Si $\sigma_c < \sigma_\ell$ (σ_ℓ contrainte limite élastique)

pas de risque de flambement $\Longrightarrow$ **dimensionnement se fait en compression simple**

Si $\sigma_c > \sigma_\ell$ **ruine par flambement dès que σ atteindra σ_c**

Pour $\sigma_c = \sigma_\ell$ on obtient l'**élancement critique λ_c**

$$\sigma_\ell = \frac{\pi^2 E}{{\lambda_c}^2} \Longrightarrow \boxed{\lambda_c = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_\ell}}}$$

dépend des caractéristiques mécaniques du matériau

valeur à partir de laquelle la poutre doit être dimensionnée en flambement

Cas réel (imperfections) :

En réalité, la charge n'est jamais parfaitement centrée, le matériau n'est pas complètement homogène, la poutre n'est pas totalement rectiligne : il existe toujours des **imperfections**