

Méthodes de calcul de structures en aéroélasticité

Angela Vincenti

angela.vincenti@upmc.fr

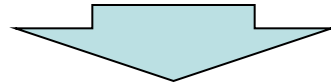
Maitre de Conférences à Institut Jean Le Rond d'Alembert

Recherche : calcul et optimisation de structures, composites et anisotropie

1. Problèmes de calcul de structures : statique et dynamique
2. Méthode de résolution par éléments finis (MEF)
 - i. problème d'élasto-statique
 - ii. problème dynamique
3. Applications à l'aéroélasticité statique et dynamique

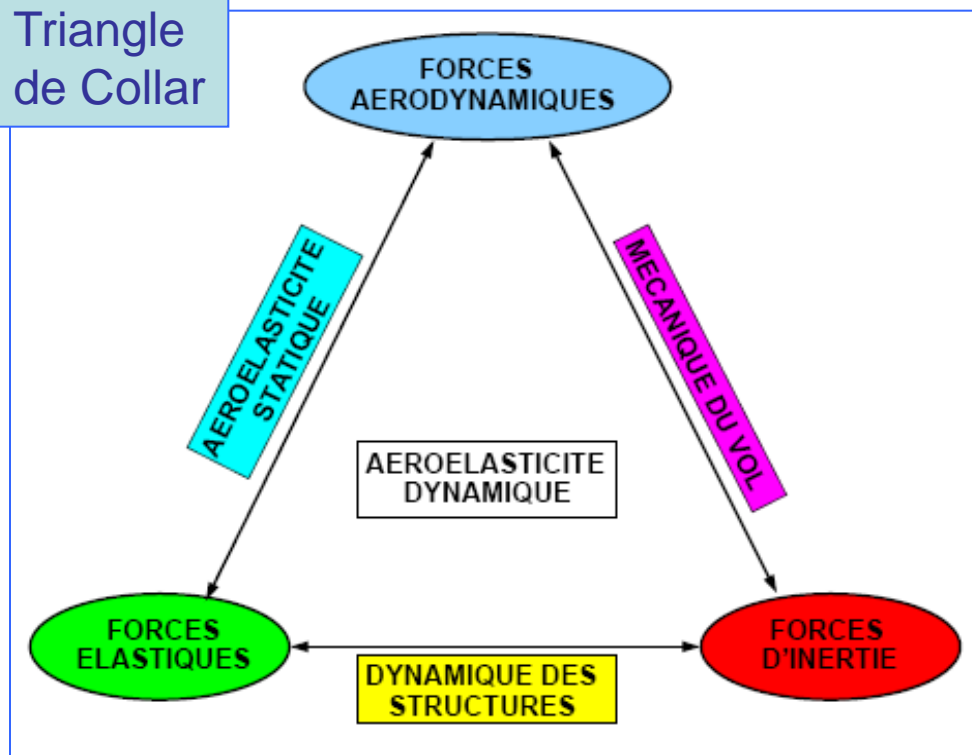
Aéroélasticité : interaction fluide-structure

Aéroélasticité statique et dynamique : étude de la réponse d'un corps déformable (élastique) dans un écoulement gazeux (si l'écoulement est fluide, on parle plutôt de *hydroélasticité*)



Interaction fluide/structure

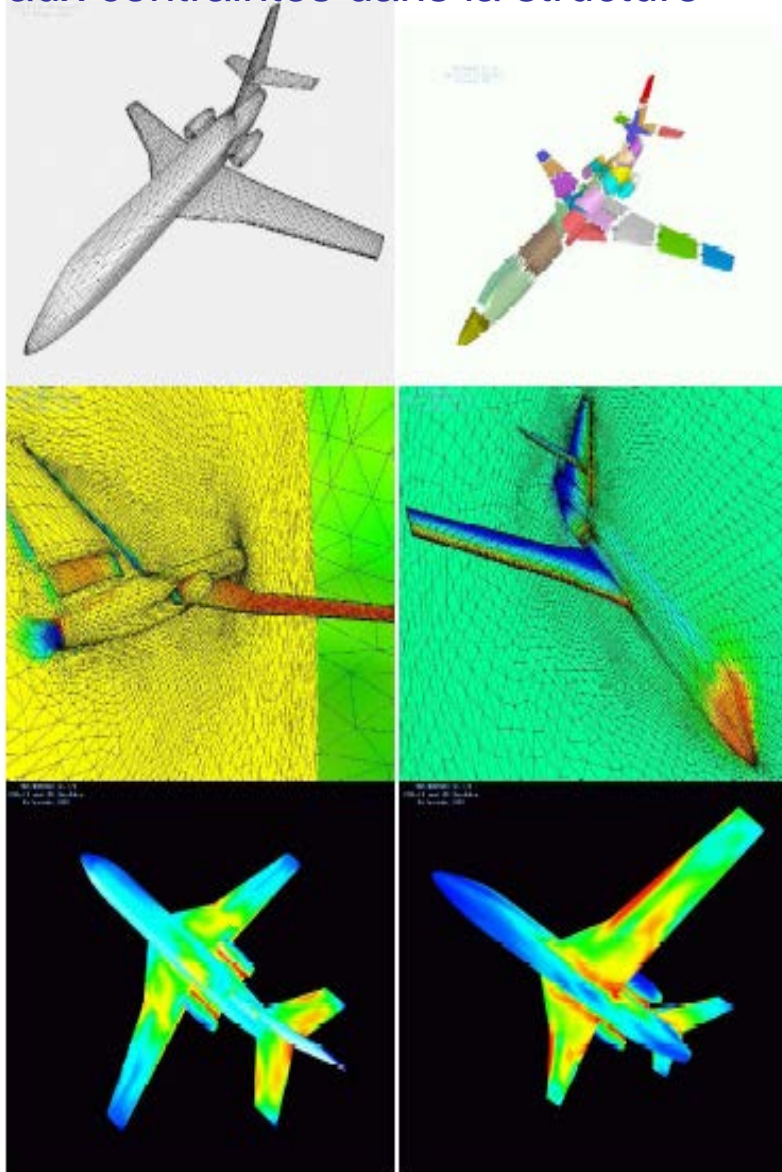
Triangle
de Collar



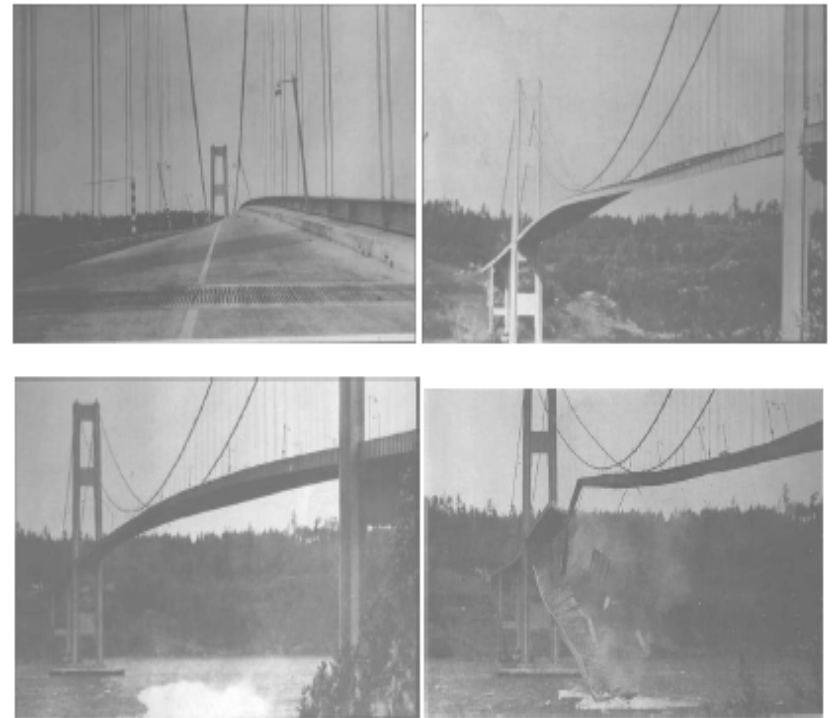
Domaines :

- Aéronautique
- Génération de l'énergie (turbomachines, nucléaire)
- Génie Civil
- Biomécanique
- Acoustique Musicale
- ...

Simulation 3D d'un avion : de l'écoulement aux contraintes dans la structure



Effondrement du pont de Tacoma



Conception de voiles de bateau



Calculs couplés fluide-structure : principe

Formulation d'un problème d'interaction fluide-structure :

2 systèmes d'équations aux dérivées partielles («**fluide**» et «**structure**»)-
écriture des équations différente selon les modèles adoptés :
massif 2D ou 3D, poutres, plaques, etc.)

avec :

conditions limites sur chaque sous-domaine («fluide» et «structure»)

et :

conditions à l'interface entre les 2 domaines

Méthodes de résolution (approchées) :

«**fluide**» : volumes finis

«**structure**» : éléments finis

«**fluide**»&«**structure**» : "monolithique" (couplage intrinsèque et total) ou
méthodes avec couplage plus ou moins fort

Couplage (définition) : stratégie mise en œuvre pour interaction et
échange d'informations itératifs entre les deux résolutions dans chaque
sous-système «fluide» & «structure»

Calculs couplés fluide-structure : architecture

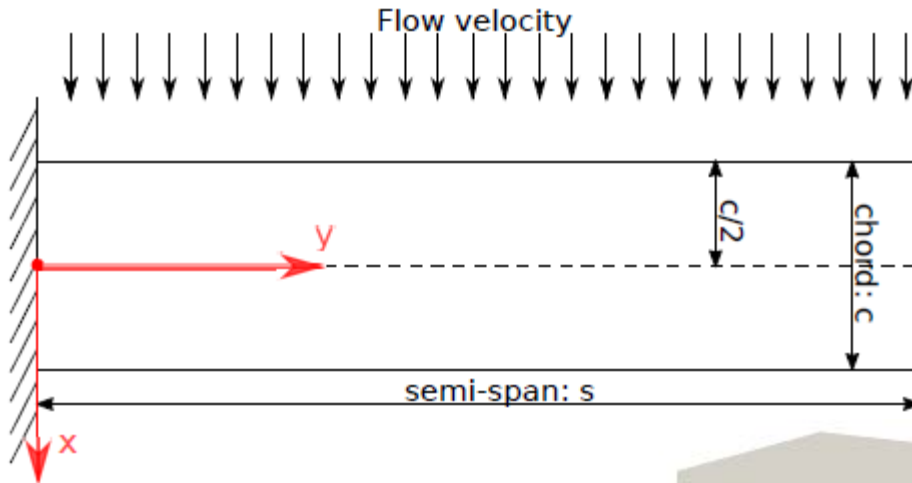
Stratégie de résolution couplée «fluide»-«structure» :

- successions ou itérations de calculs séparées «fluide» et «structure»
- méthodes de résolution différentes et appropriées pour chaque sous-domaine
- échange de variables à l'interface «fluide»-«structure» (surface 3D ; pas d'interaction volumique entre les deux sous-domaines)

Plateforme de calcul couplé «fluide»-«structure» = 4 *blocs*

1. Algorithme de dynamique des structures (CSD : Computational Structural Dynamics)
2. Code de dynamique des fluides (CFD : Computational Fluid Dynamics)
3. Interface de couplage des espaces (maillages différents)
4. Algorithme de couplage en temps (échange informations entre itérations de calcul : couplage plus ou moins fort)

Flottement d'une aile droite en composite (1)

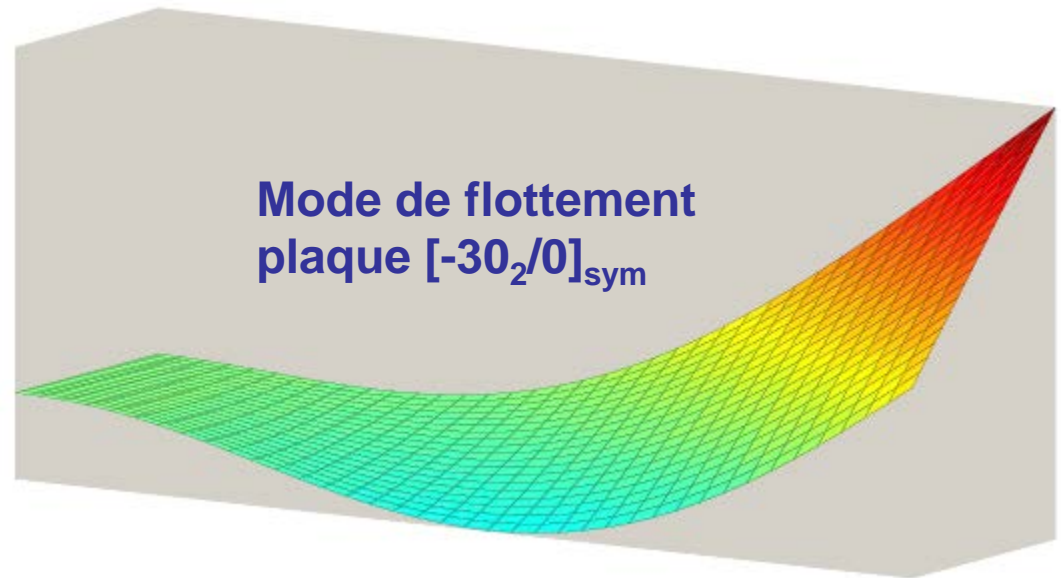


Calcul de la vitesse critique et des modes de flottement d'une aile droite (plaque) composite stratifiée

Modèle de plaque stratifiée

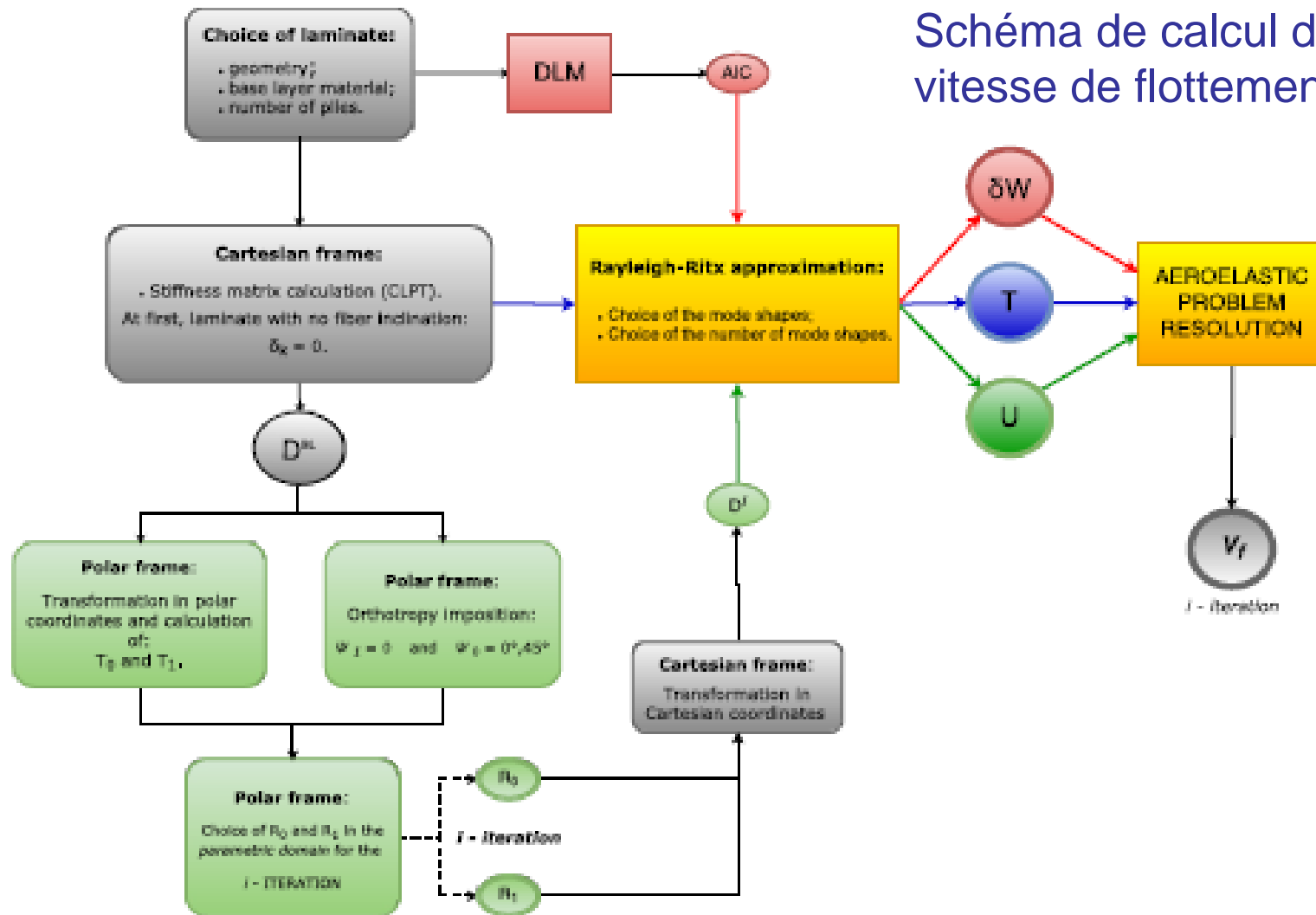
Calcul structure: approximation
Ritz-Galerkin

Calcul fluide: méthode DLM
(Doublet Lattice Method)



(stage M2 F. Didonfrancesco, Inst. d'Alembert, 2016)

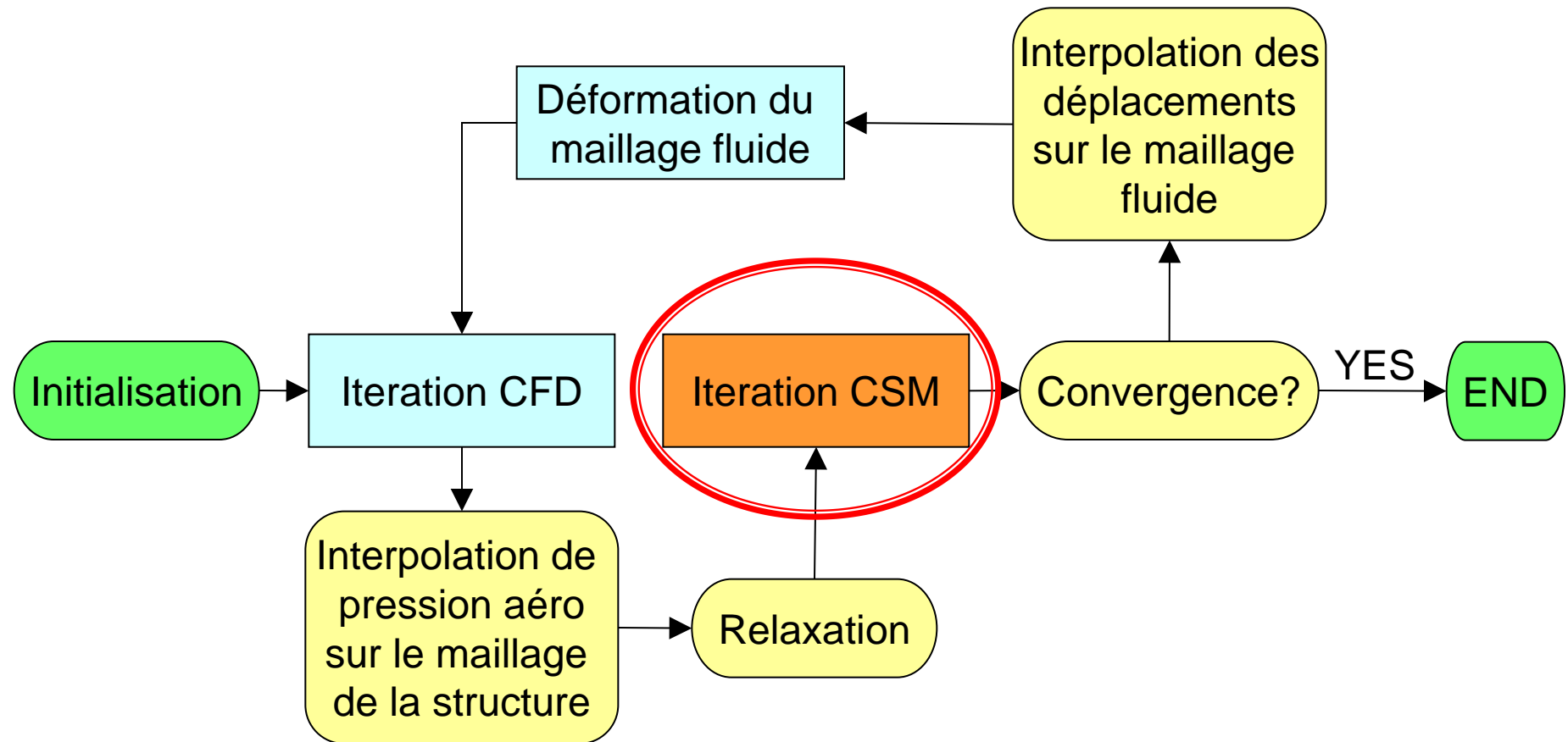
Flottement d'une aile droite en composite (2)



(stage M2 F. Didonfrancesco, Inst. d'Alembert, 2016)

Calculs couplés fluide-structure : exemple

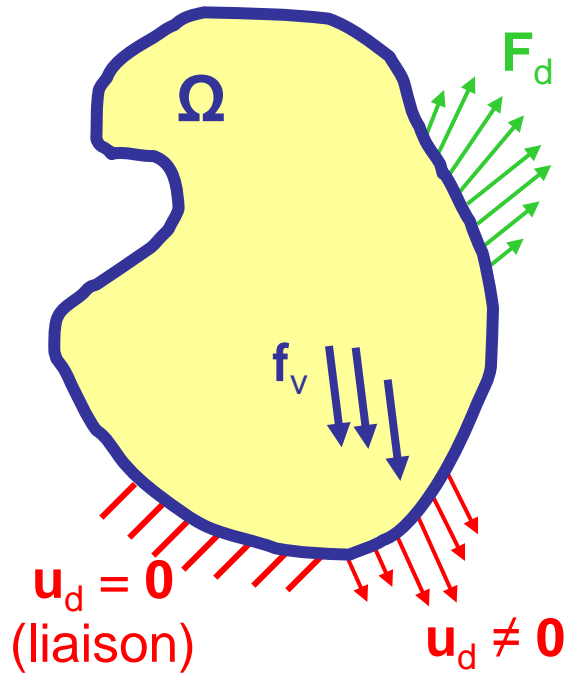
Exemple de procedure de couplage en aéroélasticité statique en grands déplacements (Palacios & Cesnik, AIAA 2005-1945) :



Méthodes de calcul en mécanique des structures

1. Introduction : formulation des problèmes d'équilibre en mécanique des structures élastiques (statique et dynamique)
2. Méthodes de résolution approchées :
 - Ritz-Galerkin
 - éléments finis
3. La méthode des éléments finis
4. Intégration en temps des équations de la dynamique
5. Analyse modale
6. Exemples d'applications aux phénomènes aéroélastiques :
 - panel flutter
 - aile souple
7. Outils de calcul associés : codes éléments finis (projet)

Introduction : le problème élastique en HPP



Structure : domaine Ω

Frontière $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_f\Omega$

Forces volumiques \mathbf{f}_v

Forces surfaciques \mathbf{F}_d sur $\partial_f\Omega$

Déplacements imposés \mathbf{u}_d sur $\partial_u\Omega$

Formulation forte de l'équilibre (éqs. locales)

(P) Trouver (u, σ) tels que partout dans Ω :

(équilibre) $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma + f_v = \rho \gamma \end{array} \right.$

(comportement) $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = C\varepsilon(u) = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) I + 2\mu \varepsilon(u) \end{array} \right.$

étant : $\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^t u)$

et respectant les conditions limites:

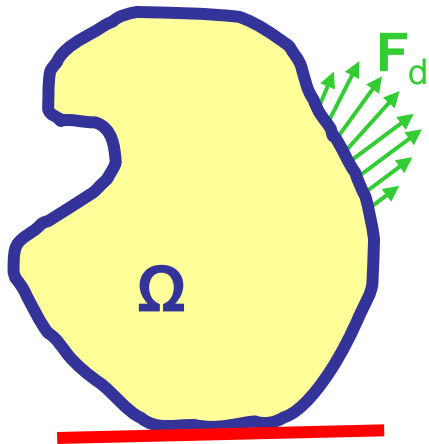
$u = u_d \quad \text{sur } \partial_u\Omega$

$\sigma n = F_d \quad \text{sur } \partial_f\Omega$

et les conditions initiales:

$$u(x, y, z; t = 0) = u_0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z; t = 0) = v_0$$

Autres conditions limites : contact, symétries, ...

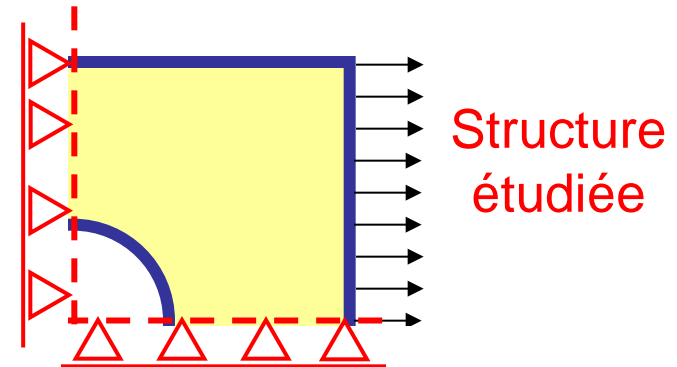
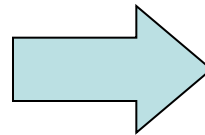
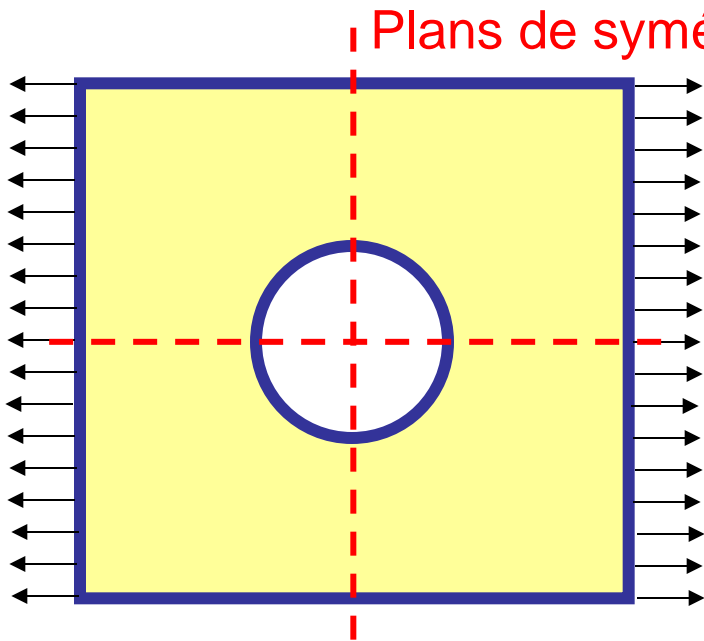


$u \cdot n = 0$
(contact)

Remarque : exception de conditions limites mixtes
Exemple 1 : contact sans frottement

$$\begin{aligned} u \cdot n &= 0 && \text{sur } \partial_{\text{contact}} \Omega \\ (\sigma n) \cdot \tau &= 0 && \text{sur } \partial_{\text{contact}} \Omega \end{aligned}$$

Exemple 2 : symétries



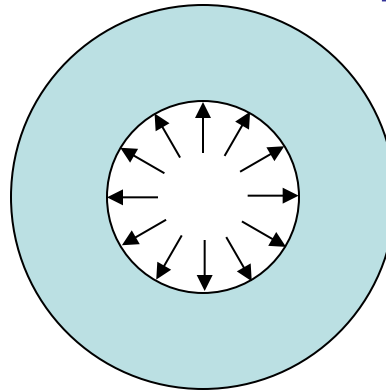
$$\begin{aligned} u \cdot n &= 0 && \text{sur } \partial_{\text{symétrie}} \Omega \\ (\sigma n) \cdot \tau &= 0 && \text{sur } \partial_{\text{symétrie}} \Omega \end{aligned}$$

Formulation forte et résolution analytique

Résolution : recherche des champs (u, σ) solution du problème (P)

La résolution analytique des problèmes d'élasticité, statique ou dynamique, est possible par des méthodes en déplacements ou en contraintes dans le cas de symétries particulières (symétries axiale ou sphérique, etc.)

Exemple :
tube sous pression



En alternative : méthodes de résolution approchées

Méthode de Ritz-Galerkin

Méthode des éléments finis

Méthode des différences finies

Méthodes des volumes finis

...

Espaces U_{ad} et S_{ad} de recherche de solutions u et σ

Espace cinématiquement admissible (C.A.) U_{ad}

$$U_{ad} = \{w \mid w \text{ régulier ; } w = u_d \text{ sur } \partial_u \Omega\}$$

Espace cinématiquement admissible (C.A.) à zéro U_{ad}^0

$$U_{ad}^0 = \{v \mid v \text{ régulier ; } v = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega\}$$

Espace statiquement admissible (S.A.) S_{ad}

$$S_{ad} = \left\{ \tau \mid \begin{array}{l} \tau \text{ régulier et symétrique ;} \\ \operatorname{div} \tau + f_v = \rho \gamma \text{ dans } \Omega ; \\ \tau n = F_d \text{ sur } \partial_f \Omega \end{array} \right\}$$

Formulation faible : formulation variationnelle (1)

Formulation faible : "écriture **globale**" du problème sur le domaine Ω

Equation d'équilibre vérifiée sur tout le domaine $\Omega \Rightarrow \operatorname{div} \sigma + f_v - \rho \gamma = 0$

Annulation de l'énergie associée pour tout champ v dans U_{ad}^0

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f_v - \rho \gamma) \cdot v \, d\Omega = 0 \quad , \quad \forall v \in U_{ad}^0$$

Quelques manipulations mathématiques :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f_v - \rho \gamma) \cdot v \, d\Omega &= \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} f_v \cdot v \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v \, d\Omega = \dots \end{aligned}$$

Formulation faible : formulation variationnelle (2)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot v \, d\Omega = (\text{intégr. par parties}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma v) \, d\Omega - \int_{\Omega} \sigma : \operatorname{grad}(v) \, d\Omega =$$

$$= (\sigma \text{ tenseur symétrique}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma v) \, d\Omega - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega =$$

$$= (\text{formule de Stokes}) = \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega = (\text{cond. limites en force})$$

$$= \int_{\partial\Omega} \cancel{\sigma n \cdot v} \, d\Gamma + \int_{\partial\Omega} F \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega = \left(\text{condition } v \in U^0_{ad} \right)$$

$$= (\text{loi de compt.}) = \int_{\partial\Omega} F_d \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Omega} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f_v - \rho \gamma) \cdot v \, d\Omega =$$

$$= - \int_{\Omega} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f_v \cdot v \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v \, d\Omega$$

Formulation faible : formulation variationnelle (3)

$$\int_{\Omega} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f_v \cdot v \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v \, d\Omega, \forall v \in U_{ad}^0$$

Forme bi-linéaire en u, v :
$$A(u, v) = \int_{\Omega} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega$$

Forme linéaire en v :
$$L(v) = \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f_v \cdot v \, d\Omega.$$

Formulation variationnelle en déplacements (cas statique) :

(P) Trouver $u \in U_{ad}$ tel que :

$$A(u, v) = L(v), \forall v \in U_{ad}^0$$

Formulation faible : minimiser l'erreur en RdC

Formulation faible : "écriture **globale**" du problème sur le domaine Ω

Loi de comportement vérifiée sur tout le domaine $\Omega \Rightarrow \sigma - C\varepsilon(u) = 0$

Erreur en Relation de Comportement $e(w, \tau)$

$$e(w, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\tau - C\varepsilon(w)] : C^{-1} [\tau - C\varepsilon(w)] d\Omega$$

$$\text{Propriétés : } \begin{cases} e(w, \tau) \geq 0 & \forall (w, \tau) \in U_{ad} \times S_{ad} \\ e(w, \tau) = 0 & \text{ssi } w \equiv u \text{ et } \tau \equiv \sigma \end{cases}$$

Formulation globale par la minimisation de l'erreur en RdC :

(P) Trouver $(u, \sigma) \in U_{ad} \times S_{ad}$ tels que :

$$\underset{(w, \tau) \in U_{ad} \times S_{ad}}{\text{minimiser}} \quad e(w, \tau)$$

Erreur en RdC : manipulations mathématiques...

$$\begin{aligned} e(w, \tau) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\tau - C\varepsilon(w)] : C^{-1} [\tau - C\varepsilon(w)] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau : C^{-1} \tau d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} C\varepsilon(w) : \varepsilon(w) d\Omega - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(w) d\Omega = \dots \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon(w) d\Omega = (\text{étant } \tau \text{ symétrique : } \tau : \varepsilon(w) = \tau : \text{grad}(w))$$

$$= \int_{\Omega} \tau : \text{grad}(w) d\Omega = (\text{intégration par parties}) = \int_{\Omega} \text{div}(\tau w) d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \tau \cdot w d\Omega =$$

$$= (\text{formule de Stokes}) = \int_{\partial\Omega} \tau n \cdot w d\Gamma - \int_{\Omega} \text{div} \tau \cdot w d\Omega = (\text{conditions limites})$$

$$= \int_{\partial_u \Omega} \tau n \cdot u_d d\Gamma + \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot w d\Gamma - \int_{\Omega} \text{div} \tau \cdot w d\Omega = (\text{équilibre local})$$

$$= \int_{\partial_u \Omega} \tau n \cdot u_d d\Gamma + \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot w d\Gamma + \int_{\Omega} f_v \cdot w d\Omega - \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot w d\Omega$$

Erreur en RdC : découplage w - τ

$$e(w, \tau) = E_p(w) + E_p^*(\tau)$$

étant $E_p(w)$, énergie potentielle du champ de déplacements w (w est C.A.) :

$$E_p(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C \varepsilon(w) : \varepsilon(w) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot w d\Omega - \int_{\Omega} f_v \cdot w d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot w d\Gamma$$

et $E_p^*(\tau)$, énergie complémentaire du champ de contraintes τ (τ est S.A.) :

$$E_p^*(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau : C^{-1} \tau d\Omega - \int_{\partial_u \Omega} \tau n \cdot u_d d\Gamma$$

$$\text{Propriétés : } \begin{cases} e(u, \sigma) = 0 & \text{ssi } (u, \sigma) \text{ solution de } (P) \\ e(u, \sigma) = \min_{U_{ad} \times S_{ad}} e(w, \tau) = \min_{U_{ad}} E_p(w) + \min_{S_{ad}} E_p^*(\tau) \end{cases}$$

Approche en déplacements : minimiser $E_p(w)$

**Recherche de la solution «champ de déplacements u »
(minimisation de l'énergie potentielle E_p) :**

(P) Trouver $u \in U_{ad}$ tel que :

$$E_p(u) = \min_{w \in U_{ad}} E_p(w)$$

Méthodes de résolution approchées

Méthode de Ritz-Galerkin (début XXème)

Méthode des éléments finis (1950 – ...)

Méthode des différences finies

Méthodes des volumes finis

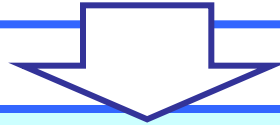
...

Principes : discrétisation et approximation

Méthode de Ritz-Galerkin (1)

Choix d'une base de «champs de déplacements» :

$$u^{(D)}(\underline{x}) \in U_{ad} ; \varphi^k(\underline{x}) \in U_{ad}^0, (k = 1, \dots, N)$$



Approximation du champ de déplacements solution :

$$v(\underline{x}) = u^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi^k(\underline{x}) = u^{(D)}(\underline{x}) + \{\alpha\}^t \cdot \{\varphi\}, v(\underline{x}) \in U_{ad}$$

Fonctions de base ou de forme : $u^{(D)}, \varphi^k$ (\underline{x} : point dans Ω)

Déplacements généralisés ou

degrés de liberté (d.d.l.) : N paramètres réels α_k ($k = 1, \dots, N$)

Inconnues du problème : N paramètres réels α_k ($k = 1, \dots, N$)

Méthode de Ritz-Galerkin (2)

Expression de l'énergie potentielle $E_p(v)$:

$$E_p(v) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^t \cdot [K] \{\alpha\} - \{\alpha\}^t \{F\} + E_p(u^{(D)}) = E_p(\{\alpha\})$$

étant :

Matrice de rigidité $[K]$ (carrée $N \times N$, symétrique, positive*)

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon(\varphi^i) : C \varepsilon(\varphi^j) d\Omega \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

Vecteur des forces généralisées $\{F\}$ ($1 \times N$)

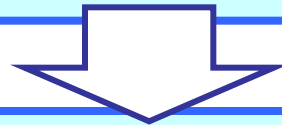
$$F_i = - \int_{\Omega} \varepsilon(u^D) : C \varepsilon(\varphi^i) d\Omega + \int_{\Omega} f_v \cdot \varphi^i d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot \varphi^i d\Gamma$$

Méthode de Ritz-Galerkin (3)

(*) Si aucun des φ_k n'est un champ rigidifiant, alors $E_p(\{\alpha\})$ est strictement convexe, et elle admet un minimum unique

Minimisation de $E_p(\{\alpha\})$:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \{\alpha\}} = 0 \quad \Rightarrow \quad [K]\{\alpha\} = \{F\} \quad \Rightarrow \quad \{\alpha\}^{\min} = [K]^{-1}\{F\}$$



Solution approchée $u^h(\underline{x})$ (C.A.):

$$u^h(\underline{x}) = u^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^{\min} \varphi^k(\underline{x}) = u^{(D)}(\underline{x}) + \{\alpha\}^{\min} \cdot \{\varphi\}$$



Calcul des contraintes : $\sigma_N(\underline{x}) = C\varepsilon(u^h(\underline{x}))$

Méthode de Ritz-Galerkin (4)

Intérêt de la méthode de Ritz-Galerkin :

- problème approché discret : N paramètres réels α_k
- choix libre des fonctions de base φ_k

Limites de la méthode de Ritz-Galerkin :

- **méthode globale** : fonctions φ_k définies sur tout Ω ➡
- difficultés à trouver des fonctions φ_k qui respectent les conditions d'admissibilité cinématique
- intégrales calculées sur l'ensemble du domaine Ω
- matrice de rigidité $[K]$ pleine, toutes les composantes K_{ij} sont non nulles ($[K]$ difficile à inverser)

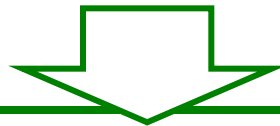


Vers la méthode des éléments finis

Introduction à la méthode des éléments finis (MEF)

Caractéristiques de la MEF :

- inspirée par la méthode de Ritz
- **approximation** et **discrétisation** du domaine $\Omega \Rightarrow \Omega^h = \bigcup \Omega_e$
- régions élémentaires de forme simple Ω_e ($e = 1, \dots, E$)
- **approximation locale** (élémentaire) des déplacements



- intégrales calculées sur des régions élémentaires simples :
par exemple composantes K_{ij} calculées sur $\Omega_i \cup \Omega_j$
- toutes les composantes K_{ij} sont non nulles si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$
- plus facile de prendre en compte les conditions limites en déplacements (admissibilité cinématique)

MEF : discrétisation et approximation du domaine

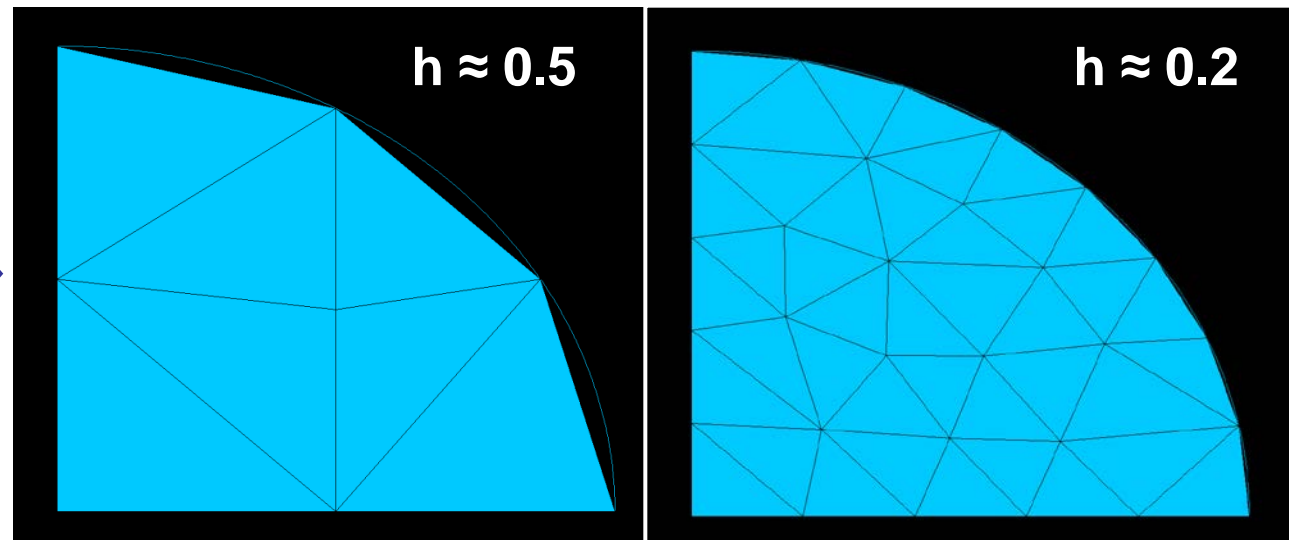
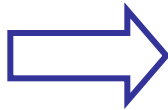
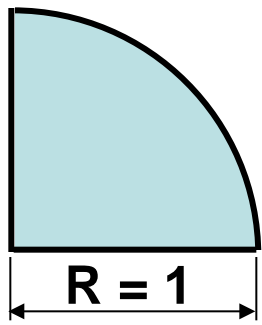
Eléments Ω_e : régions géométriques de forme simple

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^E \Omega_e$$

En 1D : segments - **En 2D** : triangles ou quadrangles

En 3D : tétraèdres, cubes, prismes, ...

Exemples :

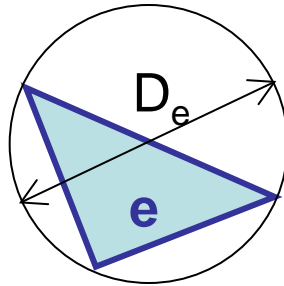


MEF : le maillage Ω^h

Maillage Ω^h : union des éléments Ω_e

Noeuds : points sommets des éléments (N noeuds)

Paramètre de finesse du maillage h : diamètre maximal parmi tous les éléments du maillage



$$h = \max D_e$$

- Frontière de Ω approximée par une suite de segments (côtés des éléments sur la frontière du domaine)
- Approximation de plus en plus précise avec h petit
- Si Ω de forme polygonale, alors il est possible : $\Omega^h \equiv \Omega$

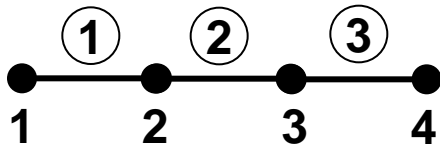
MEF : représentation du maillage Ω^h

Table des coordonnées nodales : liste des numéros et coordonnées des nœuds du maillage

Table de connectivité : liste des numéros et nœuds sommets des éléments

Exemples :

Poutre



Connectivité :

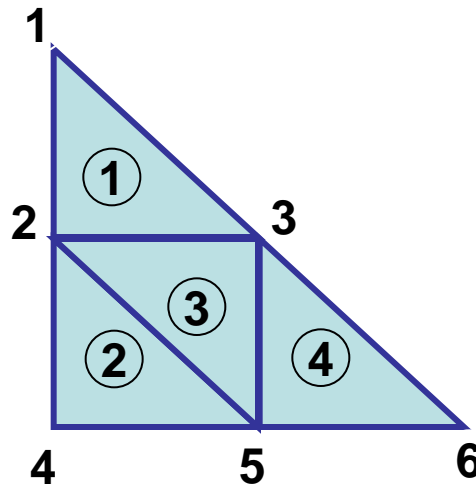
e, n_1, n_2

1, 1, 2

2, 2, 3

3, 3, 4

Barrage a section triangulaire



Connectivité :

e, n_1, n_2, n_3

1, 1, 2, 3

2, 2, 4, 5

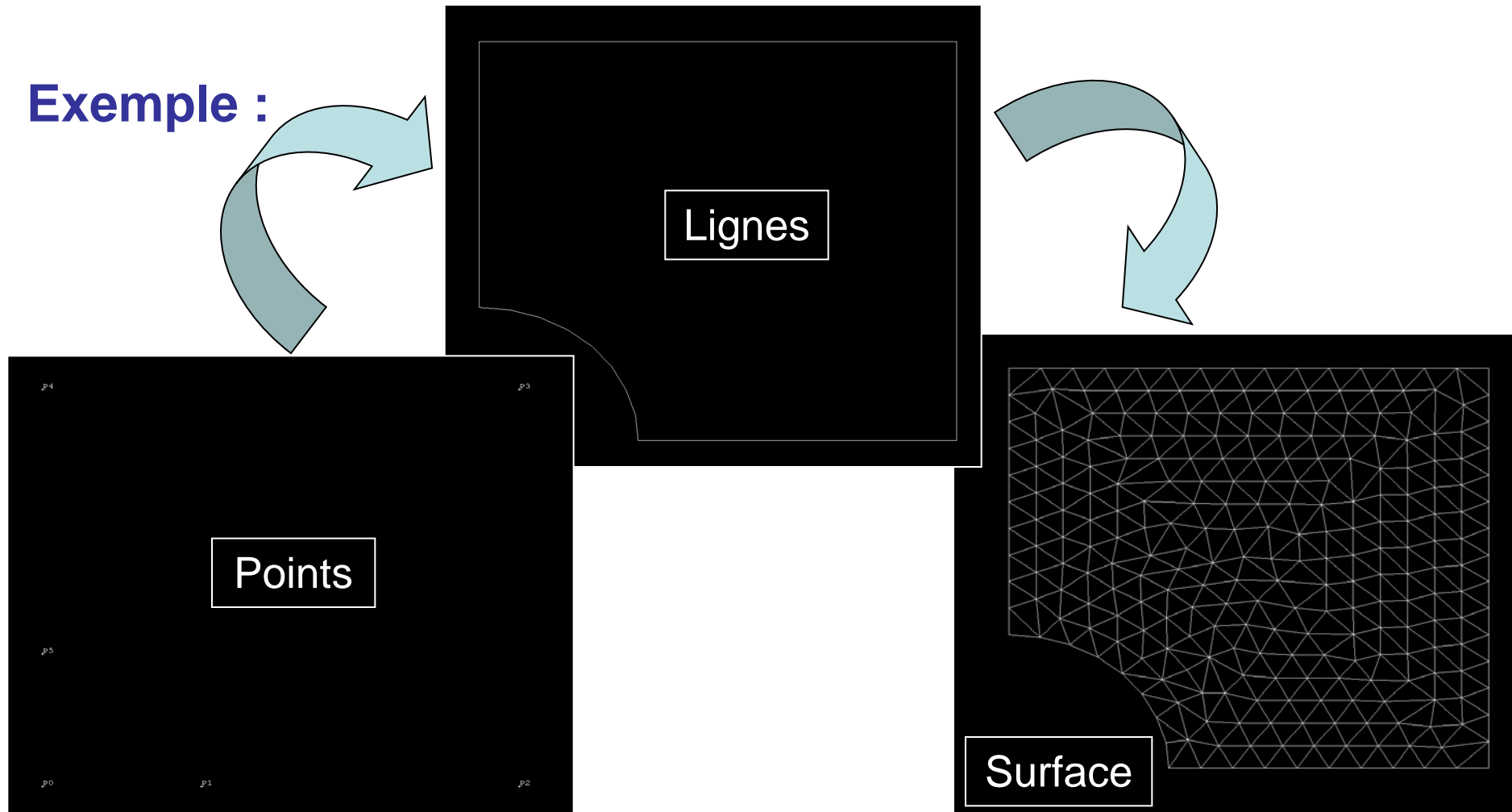
3, 5, 3, 2

4, 3, 5, 6

MEF : construction du maillage Ω^h (codes EF)

Mailleur automatique dans chaque code EF
basé sur la définition d'entités géométriques

Exemple :



MEF : régularité du maillage Ω^h

L'association des nœuds et des éléments constitue le support permettant la définition :

- d'une approximation Ω^h du domaine Ω pour le calcul des intégrales de l'énergie (voir formulations globales)
- d'une approximation $v^h(x)$ de tout champ de déplacements cinématiquement admissible

Régularité et conformité du maillage Ω^h

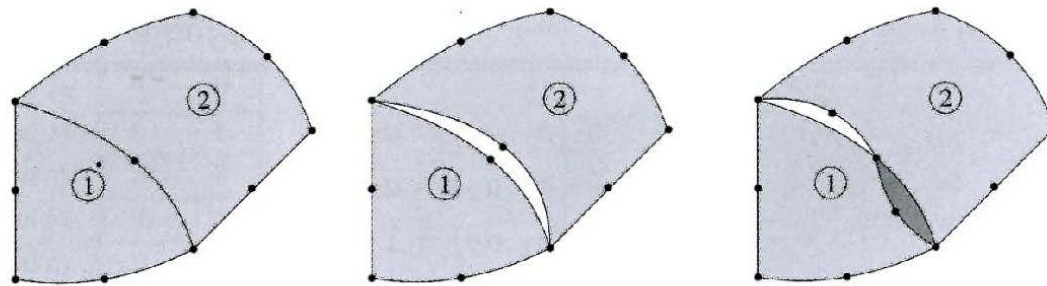


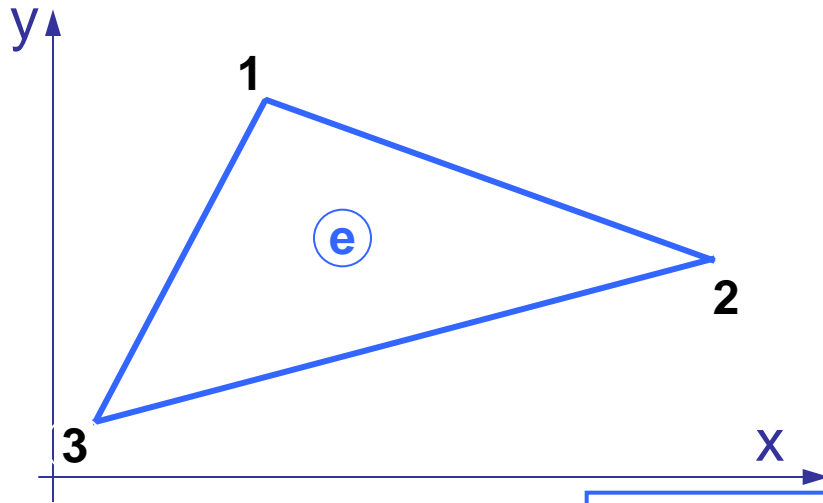
Figure 2.8: Raccord conforme (gauche) ou non conforme (milieu et droite) de deux éléments.

(figure extraite de «Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis», M. Bonnet, A. Frangi, Eds de l'Ecole Polytechnique)

MEF : approximation des déplacements (1)

Interpolation des déplacements nodaux $u^{(i)}$
par les fonctions de forme $N_i(\underline{x})$ de l'élément

Exemple : élément "e" triangle à 3 nœuds (P1 ou linéaire)

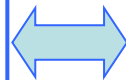


Coord. nodales : $x^{(i)}, y^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$)
(connues)

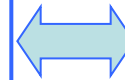
Dépl. nodaux : $u^{(i)}, v^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$)
(inconnus)

Dépl. dans "e" : $\underline{u}(\underline{x}) = (u(\underline{x}), v(\underline{x}))$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) \underline{u}^{(i)}$$



$$\begin{pmatrix} u(\underline{x}) \\ v(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) u^{(i)} \\ \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) v^{(i)} \end{pmatrix}$$



$$\underline{u}(\underline{x}) = [\mathbf{N}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\}$$

MEF : approximation des déplacements (2)

Vecteur des inconnues nodales ou degrés de liberté $\{\mathbf{U}^e\}$

Dimension : N (nombre nœuds élémentaires) x d.d.l. par nœud

Cas du triangle P1(2D) : 3 nœuds, 2 d.d.l./nœud \rightarrow 6 d.d.l. élémentaires

$$\{\mathbf{U}^{(e)}\} = \left[u^{(1)}, v^{(1)}, u^{(2)}, v^{(2)}, u^{(3)}, v^{(3)} \right]^t$$

Matrice des fonctions de forme $[\mathbf{N}^e]$

Dimension-lignes : dimension du vecteur $\mathbf{u}(\underline{x})$

Dimension-colonnes: dimension de $\{\mathbf{U}^e\}$

Cas du triangle P1(2D) : $[2 \times 6]$

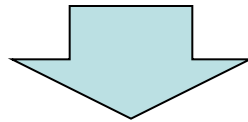
$$[\mathbf{N}^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_1(\underline{x}) & 0 & N_2(\underline{x}) & 0 & N_3(\underline{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\underline{x}) & 0 & N_2(\underline{x}) & 0 & N_3(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

MEF : approximation des déplacements (3)

Fonctions de forme (d'interpolation) : $N^{(i)}(\underline{x}) = N^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$)
(à déterminer, de degré dépendant du type d'élément choisi)

Interpolation (cas du triangle à 3 nœuds, linéaire) :

$$\mathbf{u}(x^{(k)}, y^{(k)}) = \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}^{(k)}) \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3)$$



$$N_i(\underline{x}^{(k)}) = 1 \text{ si } i = k \quad ; \quad N_i(\underline{x}^{(k)}) = 0 \text{ si } i \neq k$$

Pour déterminer chaque fonction de forme $N_i(x, y)$ (cas $i = 1$) :

$$N_1(\underline{x}) = a_1 + b_1 x + c_1 y \text{ avec : } \begin{cases} N_1(x^{(1)}, y^{(1)}) = 1 \\ N_1(x^{(2)}, y^{(2)}) = 0 \\ N_1(x^{(3)}, y^{(3)}) = 0 \end{cases}$$

MEF : approximation des déplacements (4)

Fonctions de forme (cas du triangle à 3 nœuds, linéaire)

Cas du nœud 1 : calcul de $N_1(x,y)$

(résolution système linéaire d'équations, voir page précédente)

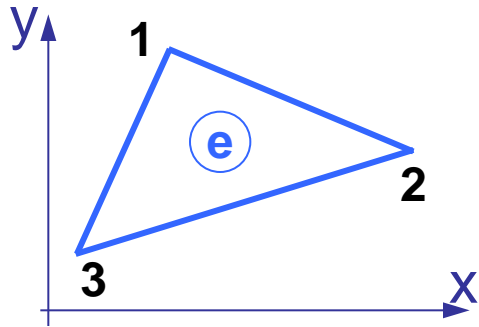
$$N_1(\underline{x}) = a_1 + b_1 x + c_1 y \text{ avec : } \begin{cases} a_1 = (1/2A)(x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)}) \\ b_1 = (1/2A)(y^{(2)} - y^{(3)}) \\ c_1 = (1/2A)(x^{(3)} - x^{(2)}) \end{cases}$$

où A est l'aire du triangle

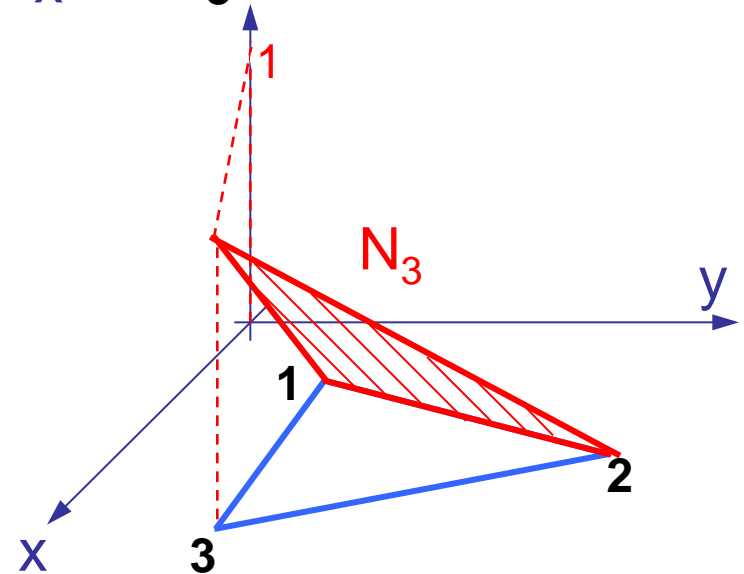
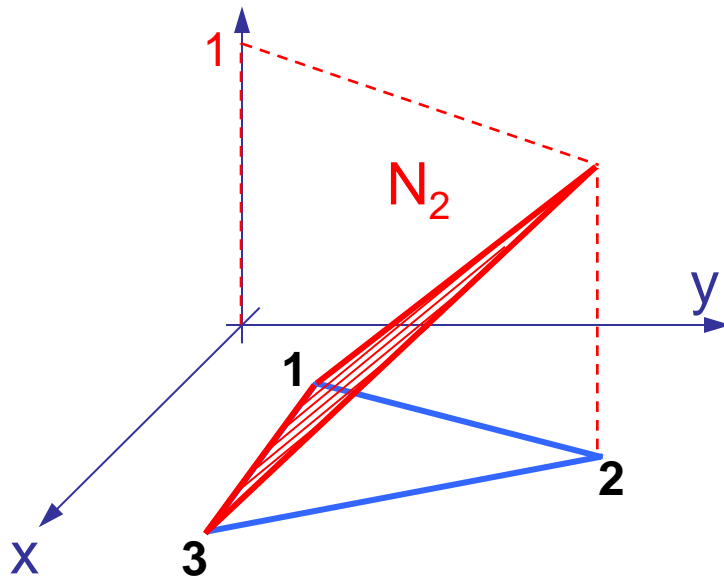
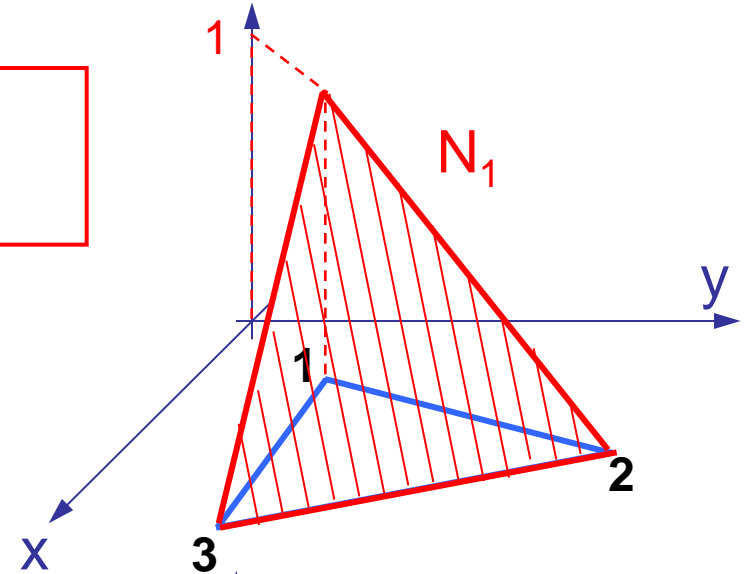
En permutant les indices 1, 2 et 3, on obtient l'expression des autres fonctions de forme $N_2(x,y)$ et $N_3(x,y)$

Note : mêmes lois d'interpolation et mêmes fonctions de forme pour approximer les vitesses et les accélérations

MEF : approximation des déplacements (5)

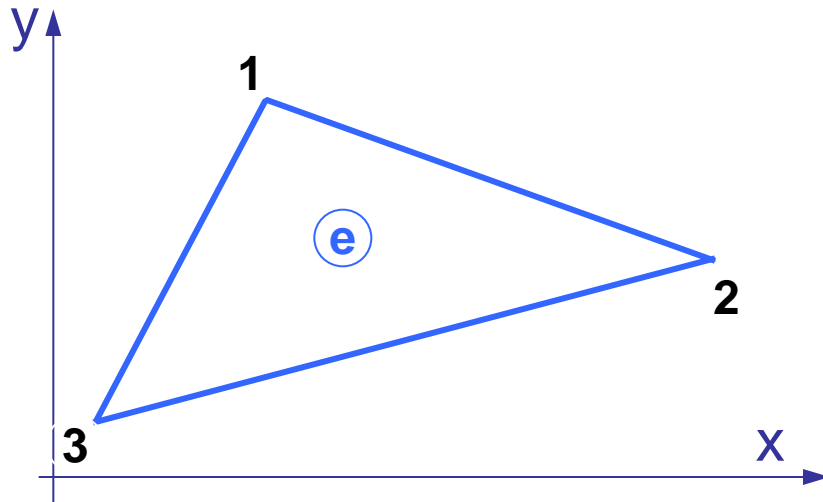


**Fonctions
de forme**

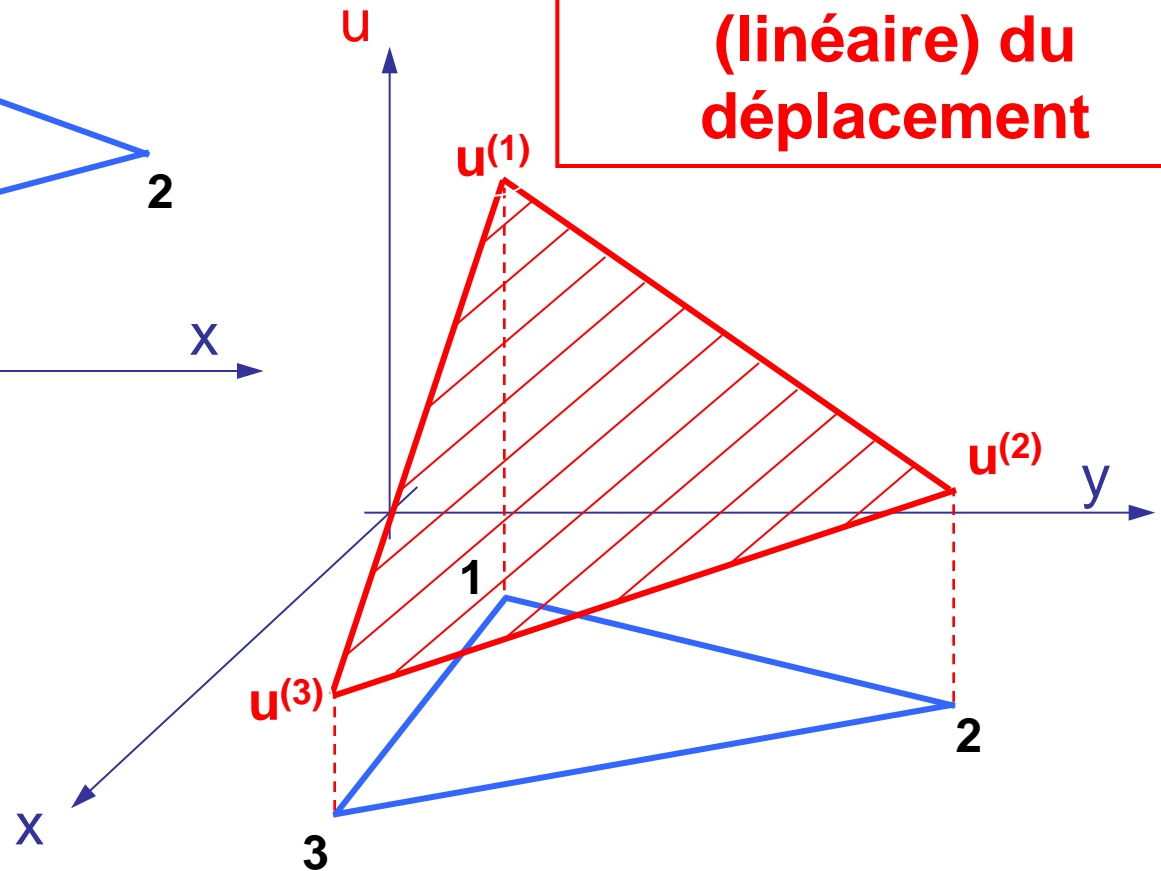


MEF : approximation des déplacements (6)

Un support élémentaire



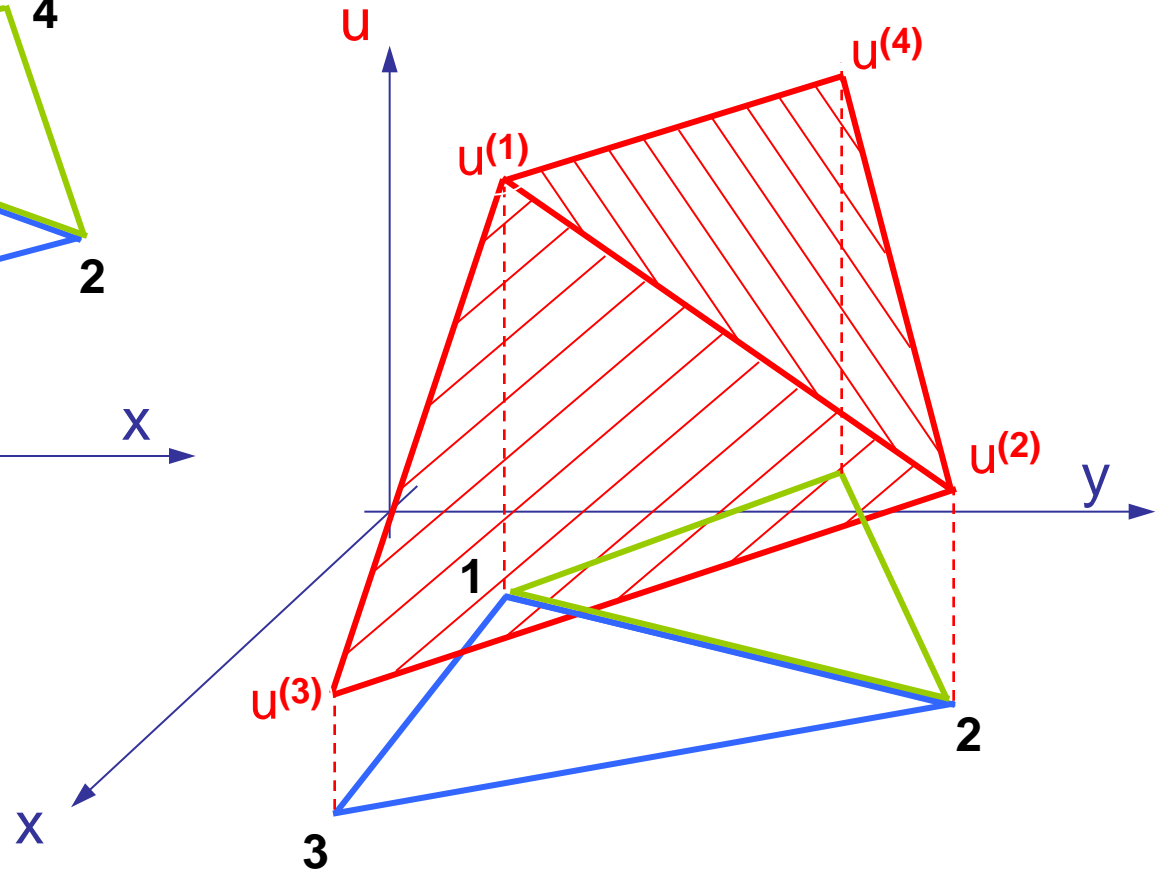
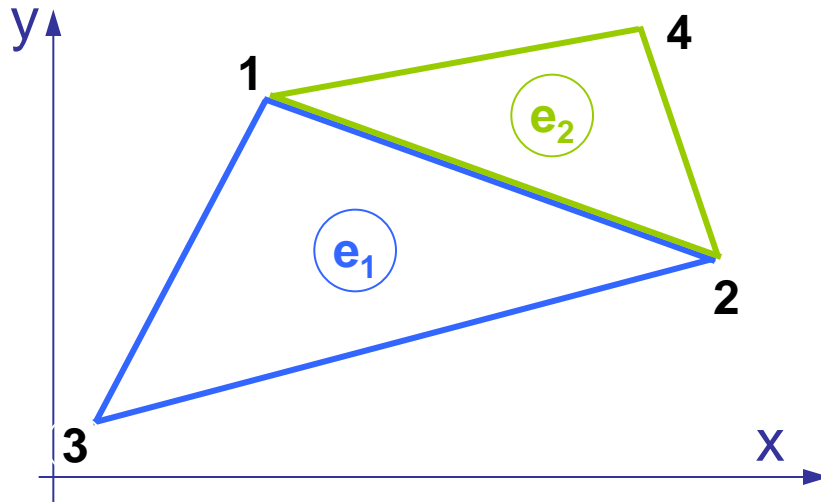
Approximation
(linéaire) du
déplacement



MEF : approximation des déplacements (7)

Deux supports
élémentaires

Approximation du
déplacement



Champ de déplacement approché u^h continu par morceaux

MEF : vecteurs déformations et contraintes

Vecteur des déformations $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\}$ (notation de Voigt)

Cas de pb. continus en 2D (défo. ou contr. planes) :

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \right\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Vecteur des contraintes $\{\boldsymbol{\sigma}^e\}$ (notation de Voigt)

Cas de pb. continus en 2D (défo. ou contr. planes) :

$$\left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Equivalence énergie :

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \right\} \cdot \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \right\} d\Omega$$

MEF : matrice «relation de comportement» [C]

Matrice de comportement [C] : relation entre $\{\sigma^e\}$ et $\{\varepsilon^e\}$

$$\sigma = C\varepsilon(u) = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u)I + 2\mu \varepsilon(u) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \right\} = [\mathbf{C}] \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \right\}$$

Cas de pb. continus en 2D (déformations planes) :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

MEF : calcul des déformations (1)

Opérateur des déformations $[\mathbf{B}^e]$ tel que :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\}$$

Cas de pb. continus en 2D (défo. ou contr. planes) :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \stackrel{\text{par définition}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \stackrel{\text{approximation}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) u^{(i)} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) u^{(i)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) v^{(i)} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) v^{(i)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) u^{(i)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\underline{x}) v^{(i)} \right) \end{bmatrix} = \dots$$

MEF : calcul des déformations (2)

Opérateur des déformations $[\mathbf{B}^e]$ tel que :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\}$$

Cas de pb. continus en 2D (défo. ou contr. planes) :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\underline{x})}{\partial x} u^{(1)} + \frac{\partial N_2(\underline{x})}{\partial x} u^{(2)} + \frac{\partial N_3(\underline{x})}{\partial x} u^{(3)} \\ \frac{\partial N_1(\underline{x})}{\partial y} v^{(1)} + \frac{\partial N_2(\underline{x})}{\partial y} v^{(2)} + \frac{\partial N_3(\underline{x})}{\partial y} v^{(3)} \\ \frac{\partial N_1(\underline{x})}{\partial y} u^{(1)} + \dots + \frac{\partial N_1(\underline{x})}{\partial x} v^{(1)} + \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \\ \dots \\ u^{(3)} \\ v^{(3)} \end{Bmatrix}$$

MEF : contributions élémentaires à la formulation (P)

(P) Formulation variationnelle en déplacements (trouver u t.q.) :

$$\int_{\Omega} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega} f_v \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v d\Omega, \forall v \in U_{ad}^0$$

OU :

(P) Minimisation de l'énergie potentielle $E_p(w)$ ($u = \operatorname{argmin} E_p(w)$) :

$$E_p(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C \varepsilon(w) : \varepsilon(w) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot w d\Omega - \int_{\Omega} f_v \cdot w d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot w d\Gamma$$

Contribution élémentaires aux intégrales :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^{(e)}} \dots d\Omega$$

MEF : matrice de rigidité $[K_e]$ élémentaire (1)

Matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ t. q. :

de la formulation
variationnelle

$$\int_{\Omega_e} C \varepsilon(u) : \varepsilon(v) d\Omega = \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\}^t [K_e] \left\{ \mathbf{U}^{(e)} \right\}$$

de l'énergie
potentielle

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} C \varepsilon(w) : \varepsilon(w) d\Omega = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{W}^{(e)} \right\}^t [K_e] \left\{ \mathbf{W}^{(e)} \right\}$$


Propriétés de la matrice $[K_e]$:

- matrice carrée symétrique semi-définie positive
- dimensions (lignes et colonnes) : nombre total des d.d.l. élémentaires (même dimensions que vecteur $\{\mathbf{U}_e\}$)
- obtenue par intégration sur le support élémentaire (e) : triangle, quadrangle, segment, ...

MEF : matrice de rigidité $[\mathbf{K}_e]$ élémentaire (2)

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbf{K}_e]$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) d\Omega &= \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{B}_e] \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\} \right)^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}_e] \left\{ \mathbf{U}^{(e)} \right\} d\Omega = \\ &= \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\}^t \left(\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}_e] d\Omega \right) \left\{ \mathbf{U}^{(e)} \right\} \end{aligned}$$


$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_e]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}_e] d\Omega$$

MEF : matrice de masse $[\mathbf{M}_e]$ élémentaire (1)

Matrice de rigidité élémentaire $[\mathbf{M}_e]$ t. q. :

de la formulation
variationnelle

$$\int_{\Omega_e} \rho \gamma \cdot v \, d\Omega = \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\}^t [\mathbf{M}_e] \left\{ \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \right\}$$

de l'énergie
potentielle

$$\int_{\Omega_e} \rho \gamma \cdot w \, d\Omega = \left\{ \mathbf{W}^{(e)} \right\}^t [\mathbf{M}_e] \left\{ \ddot{\mathbf{W}}^{(e)} \right\}$$

Propriétés de la matrice $[\mathbf{M}_e]$:

- matrice carrée symétrique définie positive
- dimensions (lignes et colonnes) : nombre total des d.d.l. élémentaires (même dimensions que vecteur $\{\mathbf{U}_e\}$)
- obtenue par intégration sur le support élémentaire (e) : triangle, quadrangle, segment, ...

MEF : matrice de masse $[\mathbf{M}_e]$ élémentaire (2)

Calcul de la matrice de masse élémentaire $[\mathbf{M}_e]$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho \gamma \cdot v \, d\Omega &= \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{N}_e] \{ \mathbf{V}^{(e)} \} \right)^t \rho \left([\mathbf{N}_e] \{ \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \} \right) d\Omega = \\ &= \{ \mathbf{V}^{(e)} \}^t \left(\int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_e]^t \rho [\mathbf{N}_e] d\Omega \right) \{ \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \} \end{aligned}$$


$$[\mathbf{M}_e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_e]^t \rho [\mathbf{N}_e] d\Omega$$

MEF : vecteur élémentaire forces nodales $\{\mathbf{F}_v^{(e)}\}$ (1)

Contribution élémentaire $\{\mathbf{F}_v^{(e)}\}$ au vecteur forces nodales t. q. :

de la formulation
variationnelle

$$\int_{\Omega_e} f_v \cdot v \, d\Omega = \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\}^t \left\{ \mathbf{F}_v^{(e)} \right\}$$

de l'énergie
potentielle

$$\int_{\Omega_e} f_v \cdot w \, d\Omega = \left\{ \mathbf{W}^{(e)} \right\}^t \left\{ \mathbf{F}_v^{(e)} \right\}$$

Propriétés du vecteur $\{\mathbf{F}_v^{(e)}\}$:

- dimension : nombre total des d.d.l. élémentaires (même dimension que vecteur $\{\mathbf{U}_e\}$)
- obtenu par intégration sur le support élémentaire (e) : triangle, quadrangle, segment, ...

MEF : vecteur élémentaire $\{\mathbf{F}_v^{(e)}\}$ forces nodales (2)

Calcul du vecteur des forces nodales $\{\mathbf{F}_v^{(e)}\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} f_v \cdot v \, d\Omega &= \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{N}_e] \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\} \right)^t f_v \, d\Omega = \\ &= \left\{ \mathbf{V}^{(e)} \right\}^t \left(\int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_e]^t f_v \, d\Omega \right) \end{aligned}$$

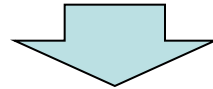


$$\left\{ \mathbf{F}_v^{(e)} \right\} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_e]^t f_v \, d\Omega$$

Même démarche pour le vecteur $\{\mathbf{F}_s^{(e)}\}$:

- contributions des éléments dont les côtés font partie de $\partial_f \Omega$
- intégration sur les côtés des éléments (intégrales de ligne en 2D)

ASSEMBLAGE ...



$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$