Sorbonne Université
MU4MEF03 – Écoulements compressibles et aérodynamique incompressible

Année universitaire 2019-2020
Master SPI – MF2A & CompMech

Devoir à la maison

À rendre sur Moodle pour le mercredi 11 mars 2020

REDIGER PARTIE 1 ET PARTIE 2 SUR DEUX COPIES SEPAREES

PARTIE 1 : Aérodynamique incompressible

A – Avions bi-plans

Terminer l'exercice de TD sur les voilures bi-plan (TD 4, Exercice 1, Question 3).

B – Avions avec ailes en tandem

Des ailes en tandem sont des paires d'ailes situées l'une derrière l'autre. Contrairement à l'avion bi-plan qui a été très important dans l'histoire de l'aéronautique, très peu d'avions avec ailes en tandem ont été développés entre la libellule de Blériot en 1907 (figure 1a) et l'avion de reconnaissance américain Proteus de Scaled Composites en 1998 (figure 1b). On se propose ici d'examiner les propriétés de portance de ce type de voilure. On considère le problème dans l'approche bi-dimensionnelle. Deux profils NACA 0008 identiques, de longueur de corde c, sont placés l'un derrière l'autre sur l'axe x, le bord de fuite du premier étant placé à une distance d du bord d'attaque du second (figure 2a). L'écoulement est supposé incompressible, de vitesse amont V_∞, et fait un angle $\alpha > 0$ supposé petit avec l'axe x.

(a) (b)

FIGURE 1 – *Deux exemples d'avions avec ailes en tandem : (a) le Blériot VI, (b) le Proteus.*

1. *Modélisation* – On remplace les deux profils par deux tourbillons ponctuels de circulation Γ_1 et Γ_2, disposés comme le montre la figure 2b.
   (a) Justifier la position des deux tourbillons, et expliquer l'utilité des deux points C_1 et C_2.
   (b) Donner la vitesse verticale $V_z(x)$ en tout point de l'axe x.

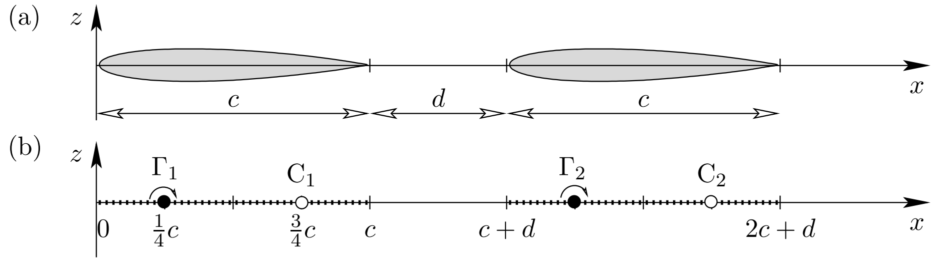


FIGURE 2 – *Modélisation bi-dimensionnelle du tandem (a) à l'aide de deux profils d'aile, (b) à l'aide de deux tourbillons ponctuels.*

(c) Obtenir le système d'équations vérifiées par Γ_1 et Γ_2. En posant $\Gamma_0 \equiv \pi c \alpha V_\infty$ montrer que le système s'écrit :

$$\begin{cases} \Gamma_1 - \dfrac{1}{1+2\delta}\,\Gamma_2 = \Gamma_0\,, \\ \dfrac{1}{3+2\delta}\,\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

où δ est un paramètre à préciser.

2. *Portance du tandem* – On examine maintenant le système (1).
   (a) Exprimer Γ_1 et Γ_2 à l'aide de δ et de Γ_0.
   (b) En déduire les portances L'_1 et L'_2 des deux ailes par unité de longueur suivant l'envergure.
   (c) Examiner les cas limites et les interpréter physiquement.
   (d) Que vaut la portance totale L' ? Commenter le résultat, en particulier par rapport au cas du bi-plan.

3. *Portance du Proteus* – La figure 3 montre une vue de dessus du Proteus et fournit un certain nombre de données. Dans cette partie, **on se place en vol de croisière**.

- Aile avant (aussi appelée aile canard) : surface alaire $A_1 = 16$ m^2, envergure $b_1 = 17$ m.
- Aile arrière : $A_2 = 28$ m^2, envergure $b_2 = 24$ m.
- Vitesse et altitude de croisière : $V_\infty = 100$ m/s à $z = 6000$ m.
- À l'altitude $z = 6000$ m : la température est $T = 250$ K, la pression $p = 0.47 \cdot 10^5$ Pa, la masse volumique de l'air $\rho = 0.66$ kg/m^3, et sa viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}$ m^2/s.
- Masse maximale de l'avion chargé : $m = 5700$ kg.

FIGURE 3 – *Vue de dessus du Proteus et données.*

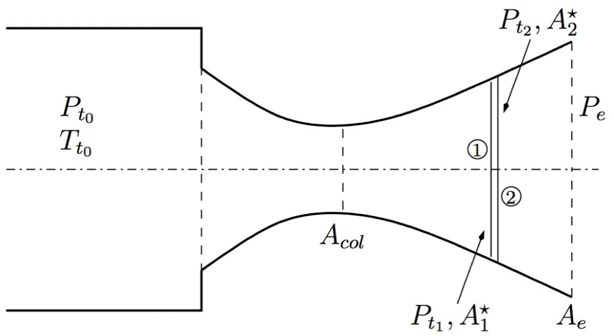
On fait les hypothèses suivantes : les deux ailes sont indépendantes, le profil est le NACA0008, la corde est égale à la corde moyenne $\bar{c} \approx 1$ m, l'envergure totale est $b = b_1 + b_2$. Quel doit être l'angle d'incidence pour que la portance compense le poids maximal de l'avion ?

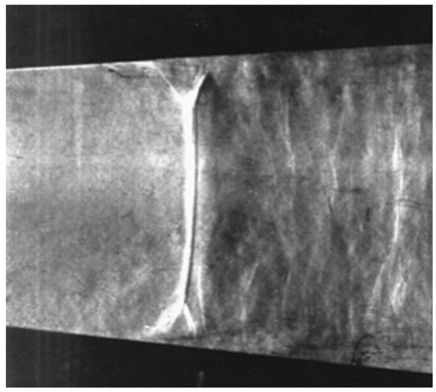
Sorbonne Université **Année universitaire 2019-2020**
Master SPI – Parcours MF2A & CM

PARTIE 2 : Mécanique des fluides compressibles

Calcul de la position d'une onde de choc dans une tuyère de Laval

On désire étudier le fonctionnement d'une tuyère d'éjection d'un moteur fusée qu'on assimilera à une tuyère de section convergente-divergente. Le gaz, de coefficient polytropique γ, sera considéré comme thermodynamiquement et calorifiquement parfait. Les conditions génératrices du réservoir placé en amont du dispositif seront notées par P_{t_0} et T_{t_0}. Dans tous l'exercice, on considèrera le cas de figure où une onde de choc droite est présente dans la section divergente de la tuyère. La géométrie $A(x)$ de la tuyère est connue. On cherche à déterminer la position de l'onde de choc connaissant la pression statique en sortie de veine P_e ainsi que P_{t_0} et T_{t_0}.





1. On considère un écoulement stationnaire, monodimensionnel d'un fluide non-visqueux.
   — Démontrer que, dans ces conditions, le débit massique $\dot{m}$ à travers une section d'aire A s'écrit :
$$\dot{m} = \frac{P_t}{\sqrt{rT_t}} AM\sqrt{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad (1)$$
   — En quoi le modèle d'écoulement présenté sur le schéma est-il idéalisé par rapport au cas réel (voir photo).

2. On désigne A^* la section critique (c.a.d la taille de la section permettant de ramener l'écoulement d'un nombre de Mach M au conditions soniques)
   — montrer à partir de la relation (1) que $P_t A^* = Cte$ où on donnera l'expression du terme constant.
   — Etablir alors les relations suivantes :
$$P_{t_1} A_1^* = P_{t_2} A_2^*, \qquad A_1^* = A_{col}^*, \qquad A_2^* = A_e^* \qquad (2)$$
   On prendra bien soin d'expliquer chaque étape de la démonstation.
   — Montrer qu'on peut finalement exprimer le groupement $\frac{P_e A_e}{P_{t_e} A_e^*}$ en fonction de grandeurs connues.

3. Etablir par ailleurs une équation de la forme :
$$\frac{P_e A_e}{P_{t_e} A_e^*} = f(M_e, \gamma) \qquad (3)$$
   où M_e désigne le nombre de Mach au niveau de la section de sortie A_e. Expliciter la fonction f.

4. Montrer que cette relation conduit à une équation bicarrée : $aM_e^4 + bM_e^2 + c = 0$ dont les coefficients seront exprimés en fonction des données de l'exercice. [1]
5. Supposant désormais que M_e est connu, comment pouvons-nous calculer le rapport P_{t_e}/P_e ? Exprimer ensuite le saut de pression totale P_{t_2}/P_{t_1} en fonction des rapports de pression totale à statique connus.
6. Exprimer P_{t_2}/P_{t_1} en fonction de γ et M_1 seulement. Quelles méthodes proposez-vous pour déterminer M_1 ?
7. Supposant M_1 déterminé, établir l'expression permettant de trouver la section au niveau de l'onde de choc A_{choc}. Que vous manque-t-il pour trouver la position de l'onde de choc ?
8. Etablir l'expression de M_e en résolvant l'équation bicarrée introduite lors de la question 3.

Formulaire : Relations de saut

Remarque. L'indice 1 est utilisé pour repérer les grandeurs en amont du choc et l'indice 2 pour les grandeurs en aval du choc.

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \tag{4}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \tag{5}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma - 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{6}$$

1. l'expression de la solution n'est pas demandée pour l'instant.