Sorbonne Université - ENSAM
Master MF2A - Aéroélasticité module 5MEF10

TD3 - Impact d'une rafale sur un avion rigide

On désire étudier la réponse d'un avion supposé rigide et de masse m à une rafale aérodynamique discrete 1D suivant la direction de l'écoulement x. Dans le repère lié à l'avion, il n'existe qu'un seul degré de liberté z, correspondant au déplacement vertical de l'avion* en fonction de l'intensité de la rafale $w_G(t)$.

1. Donner l'équation du mouvement du système dynamique.
2. L'opérateur aérodynamique considéré ici est donné par:

$$L(t) = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S \frac{dC_L}{d\alpha}\left(\frac{w_G(t)}{U_\infty} + \frac{\dot{z}}{U_\infty}\right)$$

a) Distinguer dans l'expression ci-dessus, les effets de portance relatifs au déplacement de la structure par rapport à ceux engendrés par la rafale

b) Avons-nous fait ici l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, quasi-stationnaire ou instationnaire ?

c) Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme : $\ddot{z}(t) = -\lambda(w_G + \dot{z})$ où on donnera l'expression de λ en fonction des données du problème.

3. Supposant que $z(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0$, résoudre l'équation ci-dessus dans l'espace de Laplace, puis, en revenant dans l'espace physique, montrer que le déplacement vertical de l'avion est donné par :

$$z(t) = \int_0^t w_G(u)\left[\mathrm{e}^{-\lambda(t-u)} - 1\right] du$$

4. Considérons à présent une rafale caractérisée par:

$$w_G(t) = w_0 \text{ pour } t > 0 \qquad \text{et} \quad w_G(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Avec w_0 constant. De quel type de rafale modèle s'agit-il ?
Montrer alors que l'évolution temporelle du déplacement vertical de l'avion s'obtient par:

$$z(t) = \frac{w_0}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - w_0 t$$

5. Etablir l'expression du facteur de charge $\Delta n = |\ddot{z}(t)|/g$ dans le cas de cette rafale ainsi que sa valeur maximale.

*$z > 0$ pour un mouvement descendant

Formulaire mathématique: transformées de Laplace

$f(x) \quad (x \geq 0)$	$F(p) = \mathfrak{L}(f(x))$
$af(x) + bg(x)$	$aF(p) + bG(p)$
$f'(x)$	$pF(p) - f(0)$
$f''(x)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\int_0^x f(u)g(x-u)\mathrm{du}$	$F(p)G(p)$
1	$1/p$
x	$1/p^2$
e^{ax}	$1/(p-a)$
$a^{-1}\sin(ax)$	$(p^2+a^2)^{-1}$
$\cos(ax)$	$p/(s^2+a^2)$
$e^{ax}f(x)$	$F(p-a)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(\alpha_k)}{g'(\alpha_k)e^{\alpha_k x}}$	$\frac{F(p)}{G(p)}$
	$F(p)$: polynôme de degré inférieur à n
	$G(p) = (p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)$

Correction du problème

1. Equation de la dynamique dans le domaine temporel: $m\ddot{z}(t) = -L(t)$

2. Le terme de gauche dand l'expression de $L(t)$ correspond á la portance relative à l'impact de la rafale alors que le terme de droite en $\dot{z}$ est relatif à la portance générée par le propre mouvement de la strcuture. Notons que ce terme se déduit du modèle incompressible de Theodorsen dans lequel on a négligé les effets de masse ajouté (inertie aérodynamique) tout en considérant une configuration quasi-stationnaire $C(k) = 1$.

L'équation de la dynamique peut alors s'écrire sous forme compacte : $\ddot{z}(t) = -\lambda(w_G + \dot{z})$ où λ désigne l'unique paramètre aéromécanique du problème :

$$\lambda = \frac{\rho_\infty U_\infty S}{2m}\frac{dC_L}{d\alpha} \tag{1}$$

3. Posons $\bar{z}(p) = \mathcal{L}[z(t)]$ et $\bar{w}_G(p) = \mathcal{L}[w_G(t)]$. La solution du problème dans l'espace de Laplace est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{z}(p) &= -\lambda\frac{\bar{w}_G}{p(p+\lambda)} \\ &= -\bar{w}_G\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\lambda}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

où on a tenu compte des conditions initiales en vitesse et déplacement. D'après les tables, on a que : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\lambda}\right] = 1 - e^{-\lambda t}$.
La solution dans le domaine temporel s'obtient alors à partir du produit de convolution suivant :

$$z(t) = \int_0^t w_G(u)\left(e^{-\lambda(t-u)} - 1\right)du \tag{3}$$

4. Dans le cadre de la rafale de type marche, on a $w_G(t) = w_0$ pour $t > 0$. L'intégration de la relation précédente donne alors immédiatement :

$$z(t) = \frac{w_0}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] - w_0 t \tag{4}$$

Le facteur de charge est donc donné par $\Delta n = \frac{|\ddot{z}(t)|}{g} = \frac{|w_0\lambda e^{-\lambda t}|}{g}$. La valeur maximale de ce dernier étant obtenue pour $t = 0$:

$$\Delta n^{\max} = \frac{w_0}{g}\frac{\rho_\infty U_\infty S}{2m}\frac{dC_L}{d\alpha} \tag{5}$$

** Variante: tenir compte des effets de masse ajoutée, les calculs sont faisables et l'impact sur le facteur de charge pourrait alors être intéressants à discuter.*
