Cours 1

Méthodes numériques pour la dynamique, MU4MEM02

Master 1 Mécanique des Fluides et Applications

—

Introduction aux volumes finis

Faculté des Sciences et Ingénierie, Sorbonne Université

Section 1

Principe des volumes-finis

Méthode des volumes finis : principe

Problème physique et équations modèles

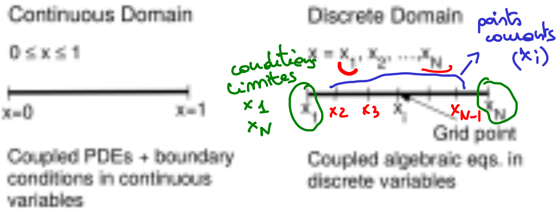
Un problème physique

- équations modèles (description continue) et des variables (typiquement $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$) ;
- domaine spatial et temporel d'étude ;
- des conditions frontières à appliquer aux limites du domaine physique.

Approche numérique

- domaine de calcul à discrétiser ▶ maillage à définir ;
- des variables de calcul : champs (typiquement $\mathbf{V}(i, j, k, n)$, $p(i, j, k, n)$) ;
- schémas de discrétisation des équations ;
- méthodes de résolution des systèmes (si besoin).

Discrétisation du domaine physique (cas 1D)



Les valeurs des variables ne sont pas forcément connues hors les points du maillage. Cela dépend des méthodes de discrétisation spatiale (formulation faible (EF) VF : fonction test). hypothèse = fonctions tests.

Méthode des volumes finis : principe

Problème physique et équations modèles

Dans ce cours, on considère

- des écoulements incompressibles 2D stationnaire pour un fluide newtonien (propriétés physiques constantes : ρ, μ, ν) ; $\nu = \mu / \rho$ viscosité cinématique
- un domaine de calcul avec un système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x, y)$;
- deux champs de variables le vecteur vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (u, v)(x, y)$, et la pression $p(x, y)$.

Equations modèles : éq. de Navier Stokes

Formulation dite non-conservative

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(ρu) $$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

(ρv) $$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Formulation conservative (idée de flux)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

inertie

$$\left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Méthode des volumes finis : principe

Maillage et volume fini

Un maillage structuré

- notation géographique
- vocabulaire : nœuds, faces, cellules (ou volumes élémentaires / finis) / de contrôle)

Sur un volume de contrôle Ω_i,

- Φ_P : valeur de Φ approchée au nœud courant P de Ω_i : $\Phi_P = \dfrac{1}{|\Omega_P|} \int_{\Omega_P} \Phi dV$. continue
- intégration numérique basée Φ_P et/ou Φ_{NB} aux nœuds voisins : $\int_{\Omega_P} \Phi dV \simeq |\Omega_P| \sum_{i=(P,NB)} \omega_i \Phi_i$
  ω_i sont des poids, déterminés par la formule de quadrature retenue (par ex. quadrature de Newton-Cotes : point milieu, trapèze, Simpson, etc...).

montée en ordre de l'approximation

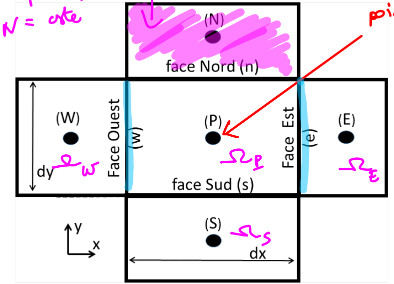
Cellule élémentaire ou *volume de contrôle*

notation géographique (cas 2D)

x : ouest → est
y : sud → nord

Ω_N surface d'influence du point (N)
Φ_N = cte

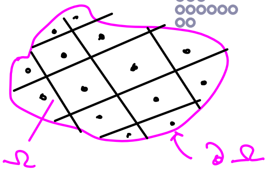
point courant



Ici = ordre 2
Φ continue par morceaux

Méthode des volumes finis : principe

Exemple : cas du transport de scalaire



$\sum \Omega_i = \Omega$

Equation de transport d'un scalaire Φ

domaine global

par un écoulement donné $\mathbf{V}$ sur un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$

éq. locale :

$$\underbrace{\mathrm{div}\,(\mathbf{V}\Phi)}_{\text{transport advectif}} = \underbrace{\mathrm{div}\,(\Gamma\ \mathbf{grad}\ \Phi)}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{S}_{\text{source volumique locale}}$$

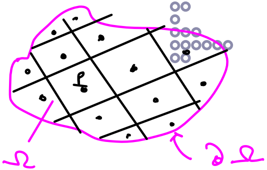
- si $\Phi = 1$: équation de conservation de la masse, (continuité)
- si $\Phi = u, v$: équations de conservation de la quantité de mouvement, écrites sous la forme conservative.

Principe de la méthode des volumes-finis

- forme intégrale des équations locales de conservation appliquée à chaque volume de contrôle Ω_i (pour $i \in [1:N]$ avec N le nombre total de cellules) ;
- équation discrète : $\int_{\Omega_i} \mathrm{div}\,(\mathbf{V}\Phi)\,dV = \int_{\Omega_i} \mathrm{div}\,(\Gamma\ \mathbf{grad}\ \Phi)\,dV + \int_{\Omega_i} S dV$

  En appliquant le théorème de la divergence : $\oint_{\partial\Omega_i} \Phi\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS = \oint_{\partial\Omega_i} \Gamma\ \mathbf{grad}\ \Phi\cdot\mathbf{n}dS + \int_{\Omega_i} SdV.$

  Flux advection Flux diffusif



Méthode des volumes finis : principe

Exemple : cas du transport de scalaire

Principe de la méthode des volumes-finis

- Equation discrète pour chaque Ω_i : $\oint_{\partial\Omega_i} \Phi \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS = \oint_{\partial\Omega_i} \Gamma\, \textbf{grad}\ \Phi\cdot\mathbf{n}dS + \int_{\Omega_i} SdV.$
- Résolution numérique sur l'ensemble des Ω_i pour $i \in [1:N]$ pour décrire Ω ;
- Un ensemble de relations entre Φ_P et Φ_{NB}, de la forme

$$\boxed{a_P\Phi_P = \sum_{N_{NB}} a_{NB}\underbrace{\Phi_{NB}}_{\text{voisins}} + b_P}$$

sous forme matricielle $(\mathcal{A}\Phi = \mathbf{b})$

les inconnues

$$\begin{bmatrix} a_{P_1} & & -a_{NB} \\ & \ddots & \\ -a_{NB} & & a_{P_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Les coefficients a_{ij} et b_i dépendent de

- du type de maillage retenu,
- du choix de la formule de quadrature,
- du choix des schémas de discrétisation appliqués aux différents termes de l'équation,
- des conditions limites.

Méthode des volumes finis : principe

Exemple : cas du transport de scalaire

Principe de la méthode des volumes-finis

- Equation discrète pour chaque Ω_i : $\oint_{\partial\Omega_i} \Phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial\Omega_i} \Gamma \textbf{ grad } \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_i} S dV.$
- Résolution numérique sur l'ensemble des Ω_i pour $i \in [1 : N]$ pour décrire Ω ;
- Un ensemble de relations entre Φ_P et Φ_{NB}, de la forme

$$\boxed{a_P \Phi_P = \sum_{N_{NB}} a_{NB} \Phi_{NB} + b_P}$$

Les coefficients a_{ij} et b_i dépendent de

- du type de maillage retenu,
- du choix de la formule de quadrature,
- du choix des schémas de discrétisation appliqués aux différents termes de l'équation,
- des conditions limites.

sous forme matricielle $(\mathcal{A}\Phi = \mathbf{b})$

$\mathcal{A}$ est une matrice creuse. Pour un schéma centré,

- 3 à 7 diagonales non-nulles suivant la dimension du problème ;
- le nombre de cellules voisines (N_{NB}) de la cellule courante P variant de 2 (cas 1D), 4 (cas 2D) à 6 (cas 3D).

Section 2

Problèmes de diffusion stationnaire

Problème de diffusion stationnaire 1D

Positionnement du problème

Equation modèle : transport par diffusion

$$\underbrace{\text{div}(\Gamma \ \textbf{grad} \ \Phi)}_{\text{Diffusion}} + S_\Phi = 0$$

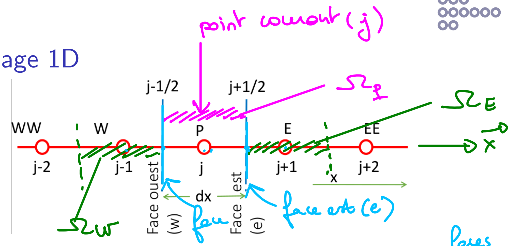
↳ t. source

- intégration sur un volume de contrôle Ω_P quelconque : $\oint_{\partial\Omega_P} \Gamma \ \textbf{grad} \ \Phi . \textbf{n} dS + \int_{\Omega_P} S_\Phi dV = 0$

Deux termes à estimer :

- flux de diffusion : $\oint_{\partial\Omega_P} \mathcal{F}_\Phi . \textbf{n} dS = \oint_{\partial\Omega_P} \overbrace{\Gamma \ \textbf{grad} \ \Phi}^{\text{flux}} . \textbf{n} dS$;
- terme source : $\int_{\Omega_P} S_\Phi dV$

Maillage 1D



faces

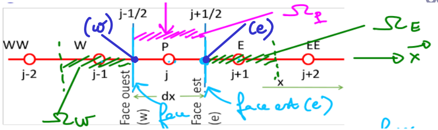
- intégration sur le volume de contrôle (VC) $[w, e]$;
- l'équation locale devient $\boxed{\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi . \textbf{n} dS + \int_w^e S_\Phi dx = 0}$

Méthodologie de résolution

1. Evaluer $\mathcal{F}_\Phi$ sur les faces du VC ;
2. Vérifier la continuité des flux $\mathcal{F}_\Phi|_{w(P)} = \mathcal{F}_\Phi|_{e(W)}$
3. Calculer le terme source ;
4. Appliquer les conditions limites du problème ;
5. Assembler le système matriciel, puis résolution

Problème de diffusion stationnaire 1D

Calcul des intégrales



Intégrale de volume : terme source $\overline{S}_\Phi$

Sur le volume de contrôle Ω_P,

volume

$$\overline{S}_\Phi = \int_{\Omega_P} S_\Phi dV = \underbrace{S_{\Phi,P}}_{} |\Omega_P|$$

valeur moyenne

L'expression de $\overline{S}_\Phi$ dépend :

- des schémas de discrétisation ;
- du schéma de quadrature ;
- du type de variables contenues (scalaires, composantes de vitesse) ;
- si $S_{\Phi,P}$ dépend de Φ_P, alors on cherche à linéariser tel que $\overline{S}_\Phi = S_C + S_P \Phi_P$ où S_C et S_P sont des constantes à déterminer.

Intégrale de surface : terme diffusif $\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi.\mathbf{n}\, dS$

En 1D, $\mathcal{F}_\phi = \Gamma \dfrac{d\Phi}{dx}$, d'où

$$\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi.\mathbf{n}\, dS = \mathcal{F}_e - \mathcal{F}_w,$$

où $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_w$ sont calculés aux faces (e) et (w). On a :

$$\mathcal{F}_e = \Gamma_e \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_e \qquad \text{flux diffusif sur la face Est} \quad (1)$$

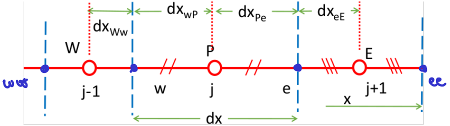
$$\mathcal{F}_w = \Gamma_w \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_w \qquad \text{flux diffusif sur la face Ouest} \quad (2)$$

Attention, le coefficient de diffusion Γ et le gradient scalaire $d\Phi/dx$ sont à évaluer sur les frontières (w, e).

Problème de diffusion stationnaire 1D

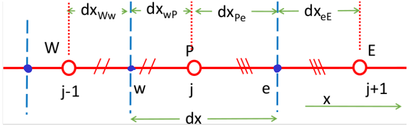
Deux distributions possibles de maillage

Distribution à nœuds centrés (NC)



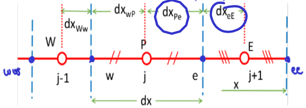
- les nœuds sont au milieu du VC.
- On définit les VC en premier, puis on place les nœuds au centre. On a alors $dx_{wP} = dx_{Pe}$.
- *Avantage* : les valeurs aux nœuds Φ_P correspondent à la moyenne de Φ sur le VC à l'ordre 2 au moins si on utilise des schémas de discrétisation centrés (car le nœud est au centre géométrique du VC).

Distribution à faces centrées (FC)

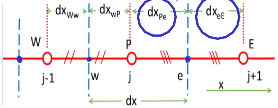


- les faces sont au milieu des nœuds.
- On définit la positions des nœuds, puis on place les faces sur la médiatrice des segments reliant les nœuds. On a $dx_{Ww} = dx_{wP}$ et $dx_{Pe} = dx_{eE}$.
- *Avantage* : les flux évalués sur les faces sont approchés à l'ordre 2 au moins, si on utilise des schémas de discrétisation centrés (car les faces sont au milieu des nœuds), ce qui peut être important pour les propriétés de conservation du schéma global.

Distribution à nœuds centrés (NC)



Distribution à faces centrées (FC)



Problème de diffusion stationnaire 1D

Approximation des flux diffusifs $\mathcal{F}_e$ et $\mathcal{F}_w$ sur les faces

$$\Gamma_e \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e = \mathcal{F}_e = \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_w = \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{dx_{Ww} + dx_{wP}}$$

- **développement de Taylor** autour du point (e) pour Φ_E et Φ_P,

$$\Phi_E = \Phi_e + dx_{eE}\Phi'_e + \frac{(dx_{eE})^2}{2}\Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{eE})^3) \qquad \text{et} \qquad \Phi_P = \Phi_e - dx_{Pe}\Phi'_e + \frac{(dx_{Pe})^2}{2}\Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{Pe})^3)$$

- différence des 2 équations :

$$\Phi_E - \Phi_P = (dx_{eE} + dx_{Pe})\Phi'_e + \frac{(dx_{eE}+dx_{Pe})(dx_{eE}-dx_{Pe})}{2}\Phi''_e + \mathcal{O}((dx_{Pe})^3, (dx_{eE})^3)$$

soit

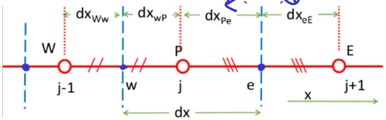
$$\boxed{\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e = \Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \frac{dx_{eE} - dx_{Pe}}{2}\Phi''_e + \mathcal{O}(dx^2)}$$

- la **distribution (nœuds ou faces centré-e-s)** modifie l'ordre d'approximation des dérivées aux faces :
  - Dans le cas à nœuds centrés (NC), on a $dx_{Pe} \neq dx_{eE}$: $\Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \mathcal{O}(dx)$ (premier ordre)
  - Dans le cas à faces centrées (FC), on a $dx_{Pe} = dx_{eE}$: $\Phi'_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}} + \mathcal{O}(dx^2)$ (second ordre)

Dans ce cours, nous retiendrons l'approche <u>à faces centrées</u> (FC).

Faces centrées

égales

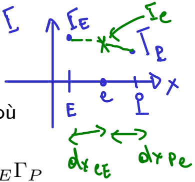


Problème de diffusion stationnaire 1D

Conservation des flux aux faces

- les scalaires sont définis aux nœuds (W, P, E), soient par ex. Γ_E, Γ_P et Γ_W les coefficients de diffusion ;
- la propriété de conservation du schéma $\Rightarrow$ la continuité du flux aux interfaces, soit $\mathcal{F}_\Phi|_{w(P)} = \mathcal{F}_\Phi|_{e(W)}$

  $F_{w^+} = F_{w^-}$
- on a deux méthodes :



La régression linéaire

- on pose $\dfrac{\Gamma_e - \Gamma_P}{dx_{Pe}} = \dfrac{\Gamma_E - \Gamma_e}{dx_{eE}}$, d'où

$$\Gamma_e = \frac{dx_{Pe}\Gamma_E + dx_{eE}\Gamma_P}{dx_{eE} + dx_{Pe}}$$

- dans le cas FC → moyenne arithmétique :

$dx_{eE} = dx_{Pe}$

$$\boxed{\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}}.$$

- on n'a pas la continuité des flux discrets.

Imposition de la continuité des flux à l'interface (e), soit $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_e^- = \mathcal{F}_e^+$

l'inconnue

- on cherche : $\mathcal{F}_e = \Gamma_e \dfrac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}}$
- on a $\mathcal{F}_e^- = \Gamma_P \frac{\Phi_e - \Phi_P}{dx_{Pe}}$ et $\mathcal{F}_e^+ = \Gamma_E \frac{\Phi_E - \Phi_e}{dx_{eE}}$;
- si $\mathcal{F}_e^- = \mathcal{F}_e^+$, alors

$$\mathcal{F}_e = \frac{\Gamma_P\Gamma_E}{dx_{eE}\Gamma_P + dx_{Pe}\Gamma_E}(\Phi_E - \Phi_P) = \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_{eE} + \delta x_{Pe}}$$

- dans le cas FC → moyenne harmonqique :

$dx_{eE} + \delta x_{Pe} = 2\delta x_{eE} = 2\,\delta x_{Pe}$

$$\frac{2}{\Gamma_e} = \frac{1}{\Gamma_E} + \frac{1}{\Gamma_P} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\Gamma_e = \frac{2\Gamma_P\Gamma_E}{\Gamma_E + \Gamma_P}}$$

Problème de diffusion stationnaire 1D

Formulation générale aux nœuds courants

Après discrétisation, l'équation $\oint_w^e \mathcal{F}_\Phi.\mathbf{n}\, dS + \int_w^e S_\Phi dx = 0$ devient

fonction de la variable.

$$\underbrace{\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{dx_{Pe} + dx_{eE}}}_{\text{Flux Est}} - \underbrace{\Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{dx_{Pw} + dx_{wW}}}_{\text{Flux Ouest}} + \underbrace{(S_C + S_P\Phi_P)}_{\text{t. source linéarisé}} = 0$$

ou

$$\left(\underbrace{\frac{\Gamma_e}{dx_{PE}}}_{a_E} + \underbrace{\frac{\Gamma_w}{dx_{PW}}}_{a_W} - S_P\right)\Phi_P = \overbrace{\left(\frac{\Gamma_e}{dx_{PE}}\right)}^{a_E}\Phi_E + \overbrace{\left(\frac{\Gamma_w}{dx_{PW}}\right)}^{a_W}\Phi_W + S_C$$

on cherche le vecteur Φ :

Pour un nœud courant, on peut écrire $\boxed{a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + b_P}$ avec

sur les faces

a_W	a_E	a_P	b_P
$\frac{\Gamma_w}{dx_{PW}}$	$\frac{\Gamma_e}{dx_{PE}}$	$a_E + a_W - S_P$	S_C

linéarisation du terme source.

Problème de diffusion stationnaire 1D

Formulation matricielle

Pour un nœud courant, on peut écrire $\boxed{a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + b_P}$ avec $a_P = a_E + a_W - S_P$

Pb tri-diagonal.

condition limite en x_1

$$\begin{bmatrix} a^*_{P_1} & -a^*_{E_1} & & & & 0 \\ -a_{W_2} & a_{P_2} & -a_{E_2} & & & \\ & -a_{W_3} & a_{P_3} & -a_{E_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -a_{W_{N-1}} & a_{P_{N-1}} & -a_{E_{N-1}} \\ & & & & -a^*_{W_N} & a^*_{P_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^*_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \\ \Phi_{N-1} \\ \Phi^*_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^*_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b^*_N \end{bmatrix}$$

noeuds courants

condition limite en x_N

- les coefficients a^* et b^* dépendent des conditions limites ;
- Les coefficients a_{NB} sont tous positifs, où NB est l'ensemble des nœuds voisins de P ;
- En l'absence de terme source $S_P = 0$,
  - on a $a_P = \sum_{NB} a_{NB}$;
  - le coefficient a_P au point courant P est aussi positif ;
- Si $S_P \leq 0$ la matrice est à diagonale dominante.

Exercice : diffusion 2D stationnaire

On s'intéresse à la résolution de l'équation de diffusion bidimensionnelle stationnaire écrite sous la forme locale :

$$\nabla.(\Gamma \nabla \phi) + \overline{S} = 0 \longleftarrow \text{à écrire en 2D.}$$

La diffusivité du matériau Γ et le terme source $\overline{S}$ peuvent dépendre de la position (x, y), mais sont indépendants de $\Phi(x, y)$.

1. Faire un schéma de la maille courante en 2D.
2. Intégrer le terme source sur Ω_P.
3. Ecrire l'équation modèle sous forme intégrale.
4. Formulation générale.
   On introduit un maillage régulier en x et en y. Ecrire l'équation en chacun des nœuds courants sous la forme :
   $$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b_P,$$
   en précisant la valeur des coefficients a_P, a_E, a_W, a_S, a_N et b_P en fonction des valeurs de Γ et des paramètres géométriques Δx et Δy.

Section 3

Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Positionnement du problème

Equation modèle : transport par convection et diffusion

$$\underbrace{\mathrm{div}\,(\mathbf{V}\Phi)}_{\text{transport advectif}} = \underbrace{\mathrm{div}\,(\Gamma\ \mathbf{grad}\ \Phi)}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{S_\Phi}_{\text{source volumique locale}}$$

Remarques

- l'écoulement est considéré incompressible : div$(\vec{V}) = 0$;
- le champ de vitesse de vecteur $\mathbf{V}$ (en 2D, $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (u,v)(x,y)$) **est connu**.

L'intégration sur un volume de contrôle Ω_P conduit à :

Flux advection Flux de diffusion

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{V}.\mathbf{n}\,\Phi dS}_{\text{int. de surface}} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega_P} \Gamma\ \mathbf{grad}\ \Phi.\mathbf{n}\, dS}_{\text{int. de surf.}} + \underbrace{\int_{\Omega_P} S_\Phi\, dV}_{\text{int. de volume}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\oint_{\partial\Omega_P} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} dS = 0} \rightarrow \text{éq. de continuité}$$

Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Cas du gradient de pression → dans l'éq. de conservation de (ρu), (ρv)

- Toutes les variables scalaires sont positionnées aux nœuds du maillage ;
- Expressions des gradients discrets de pression :

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_P = \frac{P_e - P_w}{\partial x} = \frac{(P_E + P_P)/2 - (P_P + P_W)/2}{\partial x}$$

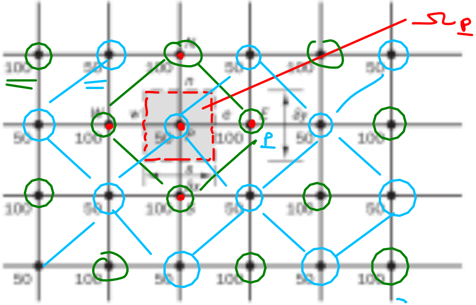
$$= \frac{P_E - P_W}{2\,\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_P = \frac{P_N - P_S}{2\,\partial y}$$

P_P n'apparait jamais

⇒ oscillations paires-impaires : existence de gradients de pression nuls, de manière analogue à un champ de pression uniforme. On superpose 2 champs de pression déconnectés.

Champ de pression en damier. maillage régulier
Les valeurs indiquées sur la figure correspondent aux valeurs de la pression en ces points.



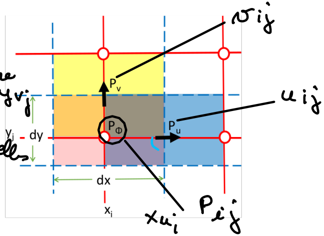
Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Maillage décalé

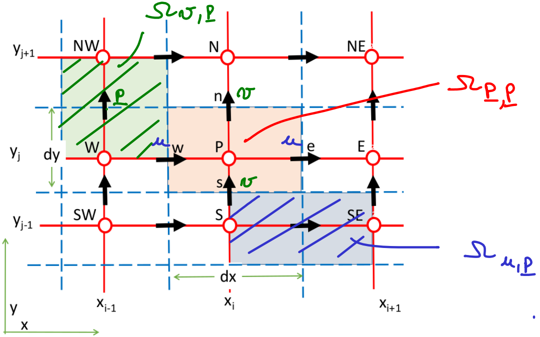
Décalage des variables scalaires et vectorielles (Harlow & Welch, 1965)

- les nœuds des composantes de vitesse (u, v) sont définis sur les frontières de Ω_Φ ;
- idem pour les gradients de pression (en 2D, $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(e,w)}$ et $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(n,s)}$) ;
- les nœuds courants et les VC de Φ, u, v sont décalés d'une demi maille.

3 grilles :
- 1 grille scalaire (x_i, y_j)
- 2 grilles vectorielles
$u(xu_i, y_j)$
$v(x_i, yv_j)$



Notations en maillage décalé.
Les nœuds rouges correspondent aux nœuds scalaires.



Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Cas 1D : intégration sur Ω_P

Le système d'équations en 1D s'exprime comme

$$
\left\{
\begin{aligned}
\oint_w^e \Phi\, u dx &= \oint_w^e \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \int_w^e S_\Phi\, dx \\
\oint_w^e u\, dS &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

éq. de continuité

Les équations se simplifient en :

flux d'advection

flux diffusifs

$$
\begin{aligned}
(u\Phi)_e - (u\Phi)_w &= \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_w + \int_w^e S_\Phi dx \\
u_e - u_w &= 0
\end{aligned}
$$

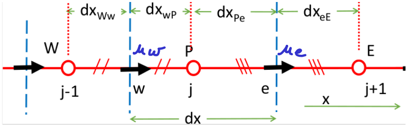
On définit les vitesses de diffusion et de transport sur les faces :

$\Gamma = [m^2/s]$

$$\boxed{\mathsf{D} = \frac{\Gamma}{dx}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathsf{F} = u},$$

Maillage décalé à faces centrées

Les flèches indiquent la composante u de vitesse.



soit aux frontières : (aux faces)

$\mathsf{D_e} = \dfrac{\Gamma_e}{dx_{PE}}$; $\mathsf{D_w} = \dfrac{\Gamma_w}{dx_{WP}}$

$\mathsf{F_e} = u_e$; $\mathsf{F_w} = u_w$.

Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Cas 1D : intégration sur Ω_P

Equations discrètes

$$
\begin{aligned}
(u\Phi)_e - (u\Phi)_w &= \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_w + \int_w^e S_\Phi dx \\
u_e - u_w &= 0
\end{aligned}
$$

- **Terme diffusif**

$$\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_w = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W)$$

- **Terme source** $\int_w^e S_\Phi dx = \overline{S}_P$

avec le maillage décalé : les vitesses sont définies aux faces, donc connues.

- **Terme convectif**

u_e // u_w //

$$(u\Phi)_e - (u\Phi)_w = F_e\Phi_e - F_w\Phi_w \quad \text{avec} \quad F_e = F_w$$

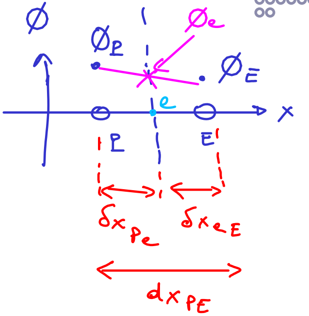
d'après l'équation de continuité.

Le problème s'écrit à ce stade :

$$F_e\Phi_e - F_w\Phi_w = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \overline{S}_P$$

▶ que valent Φ_e et Φ_w ?

Les scalaires sont non définis aux faces.



Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Cas 1D : interpolation des scalaires aux faces

Approche centrée

- approche classique et simple ;
- interpolation linéaire pour les scalaires transportés aux faces ;
- schéma centré pour les termes diffusifs.

Interpolation linéaire

- développements de Taylor autour du point e : approximation au second ordre

$$\Phi_e = \frac{dx_{Pe}\Phi_E + dx_{eE}\Phi_P}{dx_{PE}} + \mathcal{O}(dx^2);$$

- cas d'un maillage FC ($dx_{PE} = 2\,dx_{eE} = 2\,dx_{Pe}$) :

$$\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2} + \mathcal{O}(dx^2) \quad \text{et} \quad \Phi_w = \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} + \mathcal{O}(dx^2)$$

Problèmes de convection-diffusion stationnaire

Cas 1D : approche centrée

Equation discrète

$$F_e \frac{dx_{Pe}\Phi_E + dx_{eE}\Phi_P}{dx_{PE}} - F_w \frac{dx_{Ww}\Phi_P + dx_{wP}\Phi_W}{dx_{WP}} = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \overline{S}_P$$

ce qui se simplifie dans le cas d'un maillage à faces centrées (FC) :

$$\boxed{\frac{F_e}{2}(\Phi_E + \Phi_P) - \frac{F_w}{2}(\Phi_P + \Phi_W) = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + \overline{S}_P}$$

$$\text{soit } \left[\left(\mathrm{D_e} + \frac{\mathrm{F_e}}{2}\right) + \left(\mathrm{D_w} - \frac{\mathrm{F_w}}{2}\right)\right]\Phi_P = \left(\mathrm{D_e} - \frac{\mathrm{F_e}}{2}\right)\Phi_E + \left(\mathrm{D_w} + \frac{\mathrm{F_w}}{2}\right)\Phi_W + \overline{S_P}$$

= 0 (incompressible)

- On pose,
  $a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + b_P$;
- L'écoulement étant incompressible ($\mathrm{F}_e = \mathrm{F}_w$), le coefficient a_P se simplifie en $a_P = a_E + a_W$.

a_W	a_E	a_P	b_P
$\mathrm{D_w} + \frac{\mathrm{F_w}}{2}$	$\mathrm{D_e} - \frac{\mathrm{F_e}}{2}$	$a_E + a_W - (\mathrm{F}_e - \mathrm{F}_w)$	$\overline{S_P}$

Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

La variable scalaire Φ est transportée par convection et diffusion dans un écoulement à vitesse constante et connue u traversant un domaine 1D représenté sur la figure, où figurent les conditions limites du problème.

Soit à résoudre le problème de transport 1D par convection-diffusion (sans source)

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right), \quad 0 < x < L$$

$$\Phi(0) = \Phi_A = 1, \quad \Phi(L) = \Phi_B = 0$$ Dirichlet

avec $\Gamma = 0.1$ kg.m^{-1}.s^{-1} et $\rho = 1$ kg.m^{-3}, $L = 1$ m.
La solution analytique du problème est

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{\rho u x}{\Gamma}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho u L}{\Gamma}\right) - 1}$$

Au moyen de 5 ou 20 volumes de contrôle répartis régulièrement et d'une formulation basée sur une approche centrée pour discrétiser les flux diffusifs et advectifs, calculer la distribution de Φ en fonction de x, dans les trois cas suivants :

Cas n° 1 : $u_1 = 0.1$ m/s et $\delta x = 0.2$ m, d'où

5VC $\quad \Phi_1(x) = \dfrac{2.7183 - \exp(x)}{1.7183}$;

Cas n° 2 : $u_2 = 2.5$ m/s et $\delta x = 0.2$ m, d'où

5VC $\quad \Phi_2(x) = 1 + \dfrac{1 - \exp(15x)}{7.2 \cdot 10^{10}}$;

Cas n° 3 : $u_2 = 2.5$ m/s et $\delta x = 0.05$ m et $\Phi_2(x)$ inchangé.

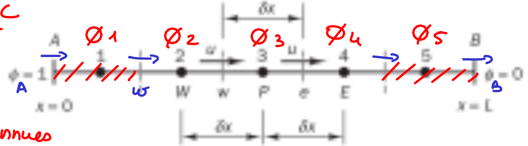
20VC

Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

Expressions littérales

Discrétisation du problème : maillage régulier pour 5 VC.

5VC



5 inconnues

Le problème se met sous la forme

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + S_C$$

avec $a_P = a_W + a_E + (\mathsf{F}_e - \mathsf{F}_w) - S_P$.

Les coefficients sont donnés pour 5 volumes de contrôle en tenant compte des conditions limites. On note $\mathsf{D} = \frac{\Gamma}{\delta x}$ et $\mathsf{F} = \rho u$ = constante

5 inconnues = $\varnothing_1, \varnothing_2, \varnothing_3, \varnothing_4, \varnothing_5$

3 noeuds courants : x_2, x_3, x_4

pour les noeuds courants, avec $a_P = a_E + a_W$

$$\underbrace{\frac{F_e}{2}(\Phi_E+\Phi_P)}_{F_e\varnothing_e} - \underbrace{\frac{F_w}{2}(\Phi_P+\Phi_W)}_{F_w\varnothing_w} = \underbrace{D_e(\Phi_E-\Phi_P)}_{\Gamma_e \left.\frac{d\varnothing}{dx}\right|_e} - \underbrace{D_w(\Phi_P-\Phi_W)}_{\Gamma_w \left.\frac{\partial\varnothing}{\partial x}\right|_w}$$

• noeud 1, on a $\varnothing_w = \varnothing_A$

$$\frac{F}{2}(\varnothing_2+\varnothing_1) - F\varnothing_A = D(\varnothing_2-\varnothing_1) - \Gamma \left.\frac{\partial\varnothing}{\partial x}\right|_A$$

$$= D(\varnothing_2-\varnothing_1) - \underbrace{\Gamma\frac{\varnothing_1-\varnothing_A}{\delta x/2}}_{2D}$$

$$\underbrace{\left(\frac{F}{2}+D+2D\right)}_{a_E - S_P}\varnothing_1 = \underbrace{\boxed{\left(D-\frac{F}{2}\right)}}_{a_E}\varnothing_2 + \boxed{(F+2D)\varnothing_A}$$

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C
CL 1	0	$\mathsf{D}-\frac{\mathsf{F}}{2}$	$-(2\mathsf{D}+\mathsf{F})$	$(2\mathsf{D}+\mathsf{F})\Phi_A$
2, 3, 4	$\mathsf{D}+\frac{\mathsf{F}}{2}$	$\mathsf{D}-\frac{\mathsf{F}}{2}$	0	0
CL 5	$\mathsf{D}+\frac{\mathsf{F}}{2}$	0	$-(2\mathsf{D}-\mathsf{F})$	$(2\mathsf{D}-\mathsf{F})\Phi_B$

$$A = \begin{bmatrix} a_P^* & -a_E^* & & \\ -a_W & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -a_E \\ & & -a_W^* & a_P^* \end{bmatrix} \qquad * : CL$$

Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

cas n° 1

On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : F $= \rho u_1 = 0.1$ kg.m^{-2}.s^{-1}, et D $= \Gamma/\Delta x = 0.5$ kg.m^{-2}.s^{-1}.

$a_P = a_W + a_E - S_P$

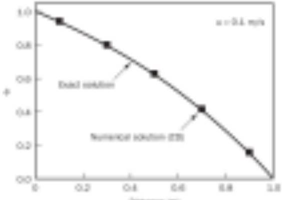
nœud	a_W	a_E	$-S_P$	$-S_C$	a_P
1	0	0.45	1.1 Φ_A	-1.1	1.55
2	0.55	0.45	0	0	1.0
3	0.55	0.45	0	0	1.0
4	0.55	0.45	0	0	1.0
5	0.55	0	0.9 Φ_B	-0.9	1.45

soit, sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1.55^* & -0.45^* & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55^* & 1.45^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0^* \end{bmatrix}$$

Cas 1 $\Rightarrow$ la solution numérique approche correctement la solution analytique.

Node	Distance x_i	Finite volume solution	Analytical solution	Difference	Percentage error
1	0.1	0.9421	0.9387	−0.003	−0.36
2	0.3	0.8006	0.7963	−0.004	−0.53
3	0.5	0.6276	0.6224	−0.005	−0.83
4	0.7	0.4163	0.4100	−0.006	−1.53
5	0.9	0.1579	0.1505	−0.007	−4.91

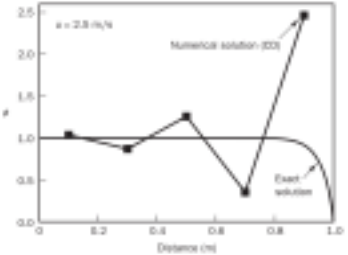


Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

cas n° 2

On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : F $= \rho u_2 = 2.5$ kg.m^{-2}.s^{-1}, et D $= \Gamma/\Delta x = 0.5$ kg.m^{-2}.s^{-1}.

nœud	a_W	a_E	S_P	S_C	a_P
1	0	-0.75	3.5 Φ_A	-3.5	2.75
2	1.75	-0.75	0	0	1.0
3	1.75	-0.75	0	0	1.0
4	1.75	-0.75	0	0	1.0
5	1.75	0	-1.5 Φ_B	1.5	0.25



Node	Distance	Finite volume solution	Analytical solution	Difference	Percentage error
1	0.1	1.0356	1.0000	−0.035	−3.56
2	0.3	0.8694	0.9999	0.131	13.05
3	0.5	1.2573	0.9999	−0.257	−25.74
4	0.7	0.3521	0.9994	0.647	64.70
5	0.9	2.4644	0.9179	−1.546	−168.48

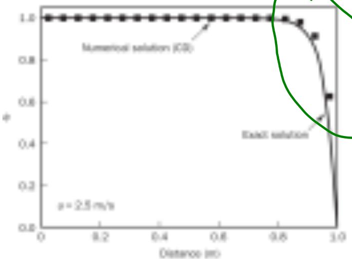
Cas 2 $\Rightarrow$ la solution numérique oscille par rapport à la solution analytique, et n'est pas bornée par les valeurs limites données pour Φ en $x = 0$ et $x = L$, ce qui n'est pas physique.

Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

cas n° 3

On a 20 volumes de contrôle. Les données du problème imposent : F $= \rho u_2 = 2.5$ kg.m^{-2}.s^{-1}, et D $= \Gamma/\Delta x = 2.0$ kg.m^{-2}.s^{-1}.

nœud	a_W	a_E	$-S_P$	$-S_C$	a_P
1	0	0.75	6.5 Φ_A	-6.5	7.25
2 - 19	3.25	0.75	0	0	4.0
20	3.25	0	5 Φ_B	-1.5	4.75



Cas 3 $\Rightarrow$ la solution numérique approche correctement la solution analytique. Il n'y a plus d'oscillations.

Exemple : écoulement 1D à vitesse constante

Conclusion

même pour un pb stationnaire

- Un schéma numérique peut diverger : oscillations de la solution qui n'est plus bornée par les conditions limites données ;

  ↓ δx

- L'augmentation du nombre de volumes de contrôle permet de remédier au problème. On peut remarquer que lorsque le rapport sans dimension F/D devient grand, des oscillations apparaissent. Il s'agit du **nombre de Péclet de maille** (pour les cas 1 de 3, on a $\mathrm{Pe}_1 = 0.2$, $\mathrm{Pe}_2 = 5$, et $\mathrm{Pe}_3 = 1.25$), qui peut varier en chaque du maillage ;
- Le nombre de Péclet compare les propriétés advectives et diffusives d'un écoulement : $\mathrm{Pe}_{ij} = \mathrm{F/D} = \rho u \delta x / \Gamma$, avec δ_x : taille du maillage dans la direction portée par u.

  ↳ dépend de (x, y)

$$F = \rho u \; ; \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \Longrightarrow \frac{F}{D} = \frac{\rho u_{ij} \Delta x_{ij}}{\Gamma_{ij}} \longrightarrow$$

homogène à un nombre de Reynolds / Péclet

coeff. de diffusion quelconque.

Γ anisotrope $\Gamma_x \neq \Gamma_y$

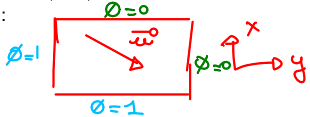
Exercice : mise en œuvre 2D

Soit Ω un domaine rectangulaire de longueur $L = 2m$ et de largeur $l = 1m$. On souhaite résoudre dans Ω l'équation stationnaire de transport par convection-diffusion de la quantité ϕ. On suppose que le coefficient de diffusion Γ est constant. Il est égal à $\Gamma_x = 0,1kgm^{-1}s^{-1}$ dans la direction x, et à $\Gamma_y = 0,2kgm^{-1}s^{-1}$ dans la direction y. L'équation de transport s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

sans t. source

La masse volumique du fluide est constante, égale à $\rho = 1kg/m^3$. Le champ des vitesses (u, v) est supposé connu avec $u = 0.3m/s$ et $v = -0.5m/s$ et doit satisfaire à l'équation de continuité :



$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad //$$

Les conditions aux limites choisies sont $\phi = 1$ en $x = 0$ et en $y = 0$, et $\phi = 0$ en $x = L$ et en $y = l$. On définit un maillage cartésien régulier, avec 4 volumes de contrôle suivant x et 3 volumes de contrôle suivant y.

x_1, x_2, x_3, x_4

$y_1, y_2, y_3 \Longrightarrow 12$ VC

Exercice : mise en œuvre 2D

1. Faire un schéma du domaine physique discrétisé. Représenter les conditions aux limites. On numérotera les volumes de contrôle suivant les indices (i, j), avec $i \in [1, 4]$ suivant la direction x, et $j \in [1, 3]$ suivant la direction j. On notera Δx et Δy les pas du maillage suivant les directions x et y respectivement.
2. Intégrer l'équation de transport sur un volume de contrôle courant (P) de façon à introduire la vitesse d'advection $(\mathcal{F} = \rho u)$ aux différentes faces du volume de contrôle.
3. Que déduit-on de l'intégration de l'équation de continuité sur ce même volume de contrôle ?
4. On pourra calculer les nombres de Péclet de maille Pe_x et Pe_y.
5. Ecrire l'équation discrète en utilisant un schéma centré sur le nœud courant (P).
6. Combien d'équations seront écrites ? Donnez la forme du système matriciel obtenu, sans calculer tous les coefficients, mais en indiquant les "0" par une case vide et éléments modifiés par les conditions limites. On placera les $a_k^{(i,j)}$, avec $k = (P, E, W, N, S)$.
7. Discuter les méthodes de résolution possibles.