# Cinématique et lois de comportement des milieux curvilignes élastiques

## Cinématique, déformations des poutres curvilignes

### Hypothèses cinématiques :

On suppose que les sections droites de la poutre se déplacent **sans déformation**.

$\Longrightarrow$ elles ont un **déplacement de solide rigide**

(sections droites dimension faible par rapport à la longueur de la poutre)

$$\boxed{\vec{u}(M \in S(s)) = \vec{u}(G(s)) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM}}$$

déplacement rotation du centre de gravité $G(s)$ de la section droite $(S)$

**Torseur déplacement** défini par : $\left\{\mathcal{U}(s)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(G(s)) = \vec{u}(s) \end{array} \right\}_G$

### Déformations :

**Torseur des déformations** : $\left\{\mathcal{D}(s)\right\} = \left\{ \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{U}(s)}{\mathrm{d}s} \right\}_G$

Cherchons ses éléments de réduction en $G$

- Sa résultante :

$$\left\{\mathcal{U}(s)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(G(s)) = \vec{u}(s) \end{array} \right\}_G$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}(s)}{\mathrm{d}s}}$$ rotation unitaire de la section droite

- Son moment :

on dérive le moment de $\left\{\mathcal{U}(s)\right\}$ en $\mathrm{O}$ **point fixe**

$$\vec{u}(O) = \vec{u}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\omega} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{u}(0)}{\mathrm{d}s} = \vec{\varepsilon}(0) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}(s)}{\mathrm{d}s} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}s}}_{\vec{t}(s)} \wedge \vec{\omega}(s) + \overrightarrow{OG} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}(s)}{\mathrm{d}s}$$

donc $\vec{\varepsilon}(0) = \vec{\varepsilon}(s) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\gamma}(s)$ avec le **vecteur déformation**

$$\boxed{\vec{\varepsilon}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s)}$$

$\Longrightarrow$ torseur des déformations : $\left\{\mathcal{D}(s)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}(s)}{\mathrm{d}s} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s) \end{array} \right\}_G$



Dans le repère de Frénet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(s) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\omega_t(s)\vec{t} + \omega_n(s)\vec{n} + \omega_b(s)\vec{b}\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}\omega_t(s)}{\mathrm{d}s}\vec{t} + \frac{\mathrm{d}\omega_n(s)}{\mathrm{d}s}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}\omega_b(s)}{\mathrm{d}s}\vec{b} + \omega_t(s)\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} + \omega_n(s)\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} + \omega_b(s)\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

or $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}(s)}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}(s)}{R_c(s)}$ ; $\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}(s)}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} + \dfrac{\vec{b}(s)}{R_t(s)}$ ; $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}(s)}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\vec{n}(s)}{R_t(s)}$

On trouve alors $\boxed{\vec{\gamma}(s) = \gamma_t(s)\vec{t} + \gamma_n(s)\vec{n} + \gamma_b(s)\vec{b}}$

avec
$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_t(s) &= \frac{\mathrm{d}\omega_t(s)}{\mathrm{d}s} - \frac{\omega_n(s)}{R_c(s)} \\ \gamma_n(s) &= \frac{\mathrm{d}\omega_n(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_t(s)}{R_c(s)} - \frac{\omega_b(s)}{R_t(s)} \\ \gamma_b(s) &= \frac{\mathrm{d}\omega_b(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_n(s)}{R_t(s)} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{\varepsilon}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s)$$

or $\quad \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s) = \vec{t}(s) \wedge \left[\omega_t(s)\,\vec{t} + \omega_n(s)\,\vec{n} + \omega_b(s)\,\vec{b}\right] = \omega_n(s)\,\vec{b} - \omega_b(s)\,\vec{n}$

par analogie avec $\vec{\gamma}(s)$ :

$$\boxed{\vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t(s)\,\vec{t} + \varepsilon_n(s)\,\vec{n} + \varepsilon_b(s)\,\vec{b}}$$

avec
$$\left\{\begin{array}{lcl}
\varepsilon_t(s) & = & \dfrac{\mathrm{d}u_t(s)}{\mathrm{d}s} - \dfrac{u_n(s)}{R_c(s)} \\
\varepsilon_n(s) & = & \dfrac{\mathrm{d}u_n(s)}{\mathrm{d}s} + \dfrac{u_t(s)}{R_c(s)} - \dfrac{u_b(s)}{R_t(s)} - \omega_b(s) \\
\varepsilon_b(s) & = & \dfrac{\mathrm{d}u_b(s)}{\mathrm{d}s} + \dfrac{u_n(s)}{R_t(s)} + \omega_n(s)
\end{array}\right.$$

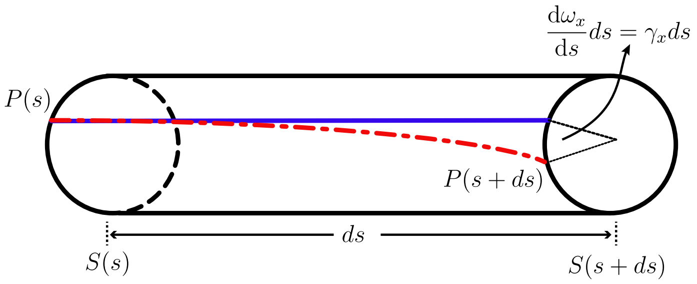


## Interprétation physique de $\vec{\gamma}$ et $\vec{\varepsilon}$

$(\vec{t} = \vec{x}, \vec{n} = \vec{y}, \vec{b} = \vec{z})$

$R_t(s) \longrightarrow \infty \;\; ; \;\; R_c(s) \longrightarrow \infty$

$$\gamma_t = \gamma_x = \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}s}$$

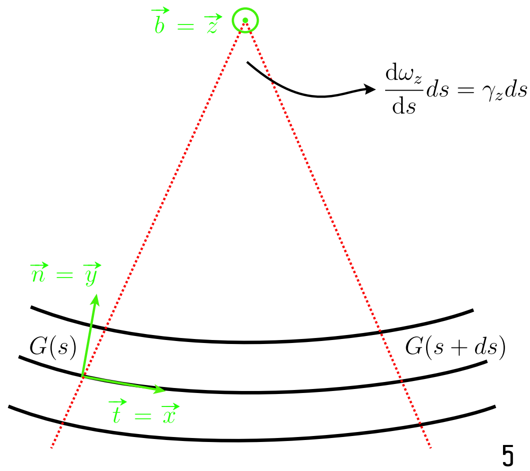



$\gamma_t$ **déformation unitaire de torsion** définie à un gauchissement de la section droite près (voir partie Solides du cours)

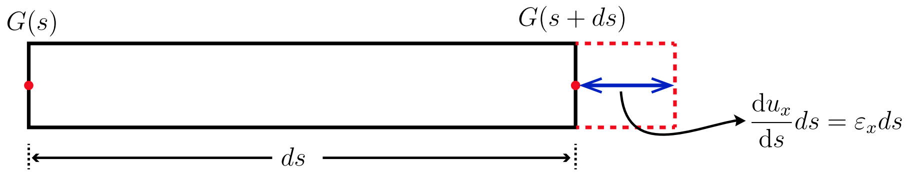
$$\gamma_b = \gamma_z = \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}s}$$

On peut utiliser le même raisonnement pour $\gamma_n$

$\gamma_b, \gamma_n$ sont les **rotations unitaires de flexion** (changement d'angle)



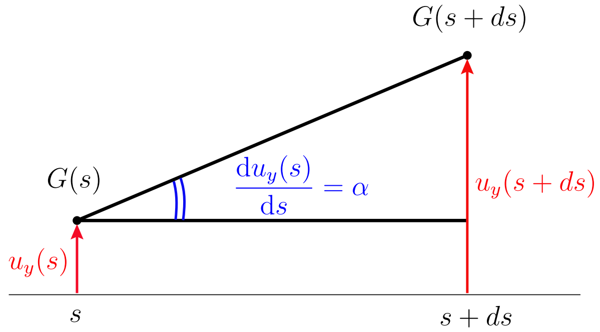
$$\varepsilon_t = \varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}s} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}).\vec{x} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}s}$$




$\varepsilon_t$ est l'**allongement unitaire** $\equiv \varepsilon_{xx}$ en 3D

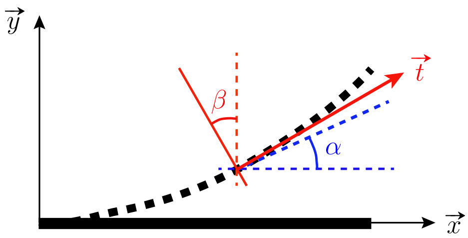
$$\varepsilon_n = \varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}s} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}).\vec{y} = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}s} - \omega_z$$

* $\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}s}$ : rotation du vecteur $\overrightarrow{G(s)G(s+ds)}$ dans le plan $(xy)$ notée ici $\alpha$






* $\vec{x} \wedge \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \wedge \vec{x})$ : variation du vecteur tangent $\vec{t}$ lié à la section droite




$-(\vec{\omega} \wedge \vec{x})_y = \omega_z$ : rotation dans le plan $(xy)$ de la section droite notée $\beta$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}s} - (\vec{\omega} \wedge \vec{x})_y = \alpha - \beta$$

compare les rotations de la tangente à la fibre $G(s)G(s+ds)$ et de la section droite

représente l'effet de l'**effort tranchant** $\equiv \varepsilon_{xy}$ en 3D

**Rq:** Si $\alpha - \beta \neq 0$ la section droite ne reste pas $\perp$ à la déformée de la ligne moyenne

On peut utiliser le même raisonnement pour $\varepsilon_b = \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}s} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}).\vec{z} = \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}s} + \omega_y$

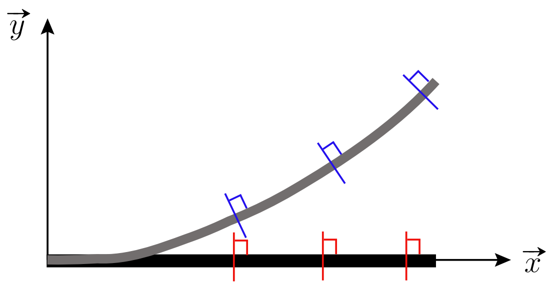
représente l'effet de l'**effort tranchant** $\equiv \varepsilon_{xz}$ en 3D

## Hypothèse d'Euler-Bernoulli

On néglige l'effet de l'effort tranchant dans la déformation $\Longrightarrow$ $\varepsilon_n(s) = \varepsilon_b(s) = 0$

dans ce cas : $\alpha = \beta$

Toute section droite reste perpendiculaire à la déformée de la ligne moyenne au cours de la déformation




Rq: Négliger les efforts tranchants $T_n$ et $T_b$ dans les lois de comportement $\not\Leftrightarrow$ disparaissent dans les équations d'équilibre



## Cas des poutres droites tridimensionnelles

On considère une poutre droite ( $s \equiv x$ $\vec{t} = \vec{x}$ )

$$\vec{u}(M \in S(s)) = \vec{u}(G(s)) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM}$$

avec $$\vec{u}(M(x,y,z)) = \begin{pmatrix} u_x^M(x,y,z) \\ u_y^M(x,y,z) \\ u_z^M(x,y,z) \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{u}(G(x)) = \begin{pmatrix} u_x^G(x) \\ u_y^G(x) \\ u_z^G(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ u_y(x) \\ u_z(x) \end{pmatrix}$$

et $$\vec{\omega}(x) = \begin{pmatrix} \omega_x(x) \\ \omega_y(x) \\ \omega_z(x) \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_x^M(x,y,z) = u_x(x) + z\ \omega_y(x) - y\ \omega_z(x) \\ u_y^M(x,y,z) = u_y(x) - z\ \omega_x(x) \\ u_z^M(x,y,z) = u_z(x) + y\ \omega_x(x) \end{cases}$$

Modèle de Timoshenko

## Calcul des déformations

Sous HPP, les déformations s'écrivent : $\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{u} + {}^T\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{u}\right)$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} + z\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x} - y\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x} \\ 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y^M}{\partial x} = -\omega_z + \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - z\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} \\ 2\varepsilon_{xz} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z^M}{\partial x} = \omega_y + \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + y\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{cases}$$

soit $$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



allongement unitaire dans la direction de la ligne moyenne

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x + z\,\gamma_y - y\,\gamma_z}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} + z\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x} - y\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x} \\ 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y^M}{\partial x} = -\omega_z + \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - z\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} \\ 2\varepsilon_{xz} = \dfrac{\partial u_x^M}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z^M}{\partial x} = \omega_y + \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + y\,\dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} \end{cases}$$

où $\varepsilon_x = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$ ; $\gamma_y = \dfrac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}$ ; $\gamma_z = \dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$

distorsions

$\boxed{2\varepsilon_{xy} = \varepsilon_y - z\,\gamma_x}$ et $\boxed{2\varepsilon_{xz} = \varepsilon_z + y\,\gamma_x}$

où $\varepsilon_y = \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z$ ; $\varepsilon_z = \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y$ ; $\gamma_x = \dfrac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}$

normalement $\sigma_{yy}$ et $\sigma_{zz}$ non nulles (d'après loi de cpt $\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \mathrm{Tr}\overline{\overline{\varepsilon}}\;\overline{\overline{1}}$ )

mais négligées par cohérence avec la théorie des milieux curvilignes (dimensions transversales petites devant la dimension longitudinale)

$$\Longrightarrow \quad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$