

SORBONNE UNIVERSITÉ

MU5MEF03 TRAVAIL PRATIQUE - COMPMech - 2021/2022

Analyse de simulations de turbulence homogène isotrope

Auteur :

Valentin DUVIVIER

[valentin.duvivier@etu.sorbonne-
universite.fr](mailto:valentin.duvivier@etu.sorbonne-universite.fr)

Superviseurs :

Paola CINNELLA
Aurélien BIENNER

27 novembre 2021



Introduction

Présentation TP

Le TP *Analyse de simulations de turbulence homogène isotrope* consiste en l'étude numérique et le post-process d'un écoulement à travers une grille ; ainsi que les propriétés qui l'accompagne (concentration dans l'espace, évolution temporelle de la turbulence, etc).

L'écoulement se décompose comme suit :

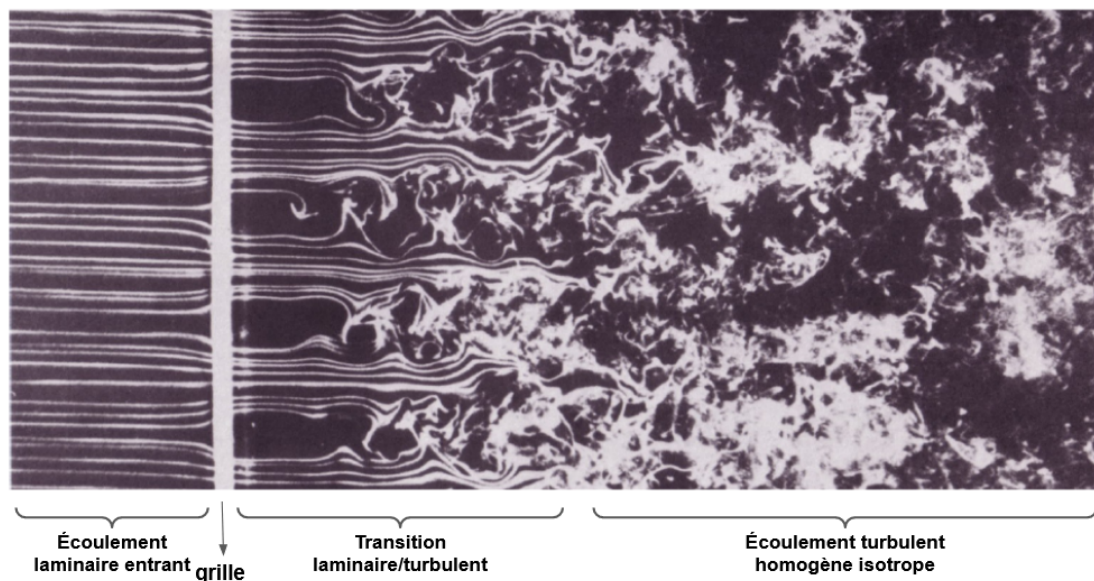


FIGURE 1 – Écoulement à travers une grille uniforme

Notre étude porte sur la partie où l'écoulement est entièrement turbulent. On va chercher à étudier et vérifier des propriétés d'évolution et de concentration de l'écoulement. Pour ce faire on fera appel à du post-process de mesures expérimentales et numériques.

Les mesures expérimentales ont été faite pour :

- Une grille de taille de maille $M = 5.08\text{cm}$
- $Re_M = \frac{U_0 M}{\nu} \approx 3400$

Objectifs

La liste précise des objectifs de ce TP :

- *familiarisation avec des notions de base en turbulence isotrope*
- *réalisation du post-traitement d'une simulation numérique*
- *comparaison des résultats numériques et expérimentaux et analyse des possibles différence*

Questionnaire

Expérience Comte-Bellot & Corrsin

1.

Comme discuté en introduction, la simulation physique de l'écoulement à travers une grille se décompose (pour l'écoulement en aval de la grille) en une partie de transition laminaire/turbulent et une partie de turbulence (supposées homogènes).

Dans notre cas, étant donné qu'on cherche à étudier le régime turbulent homogène, on place nos capteurs de mesures en aval de la phase laminaire/turbulente, soit à $\frac{x}{M} = 40$.

Il conviendra de vérifier qu'à cette position l'écoulement laminaire n'influe plus.

2.

Afin de déterminer les composantes de vitesses dans les 3 directions, il est nécessaire de calculer la transformée de fourier dans les 3 directions.

Simulation 512

Cette simulation s'inscrit dans une modélisation de l'écoulement turbulent dans un cube L^3 avec $L = 8.73\text{cm}$ via $512 \times 512 \times 512$ points. Dans ce domaine, on étudie l'écoulement turbulent.

1.

L'évolution de T_u en fonction de $\frac{tU}{M}$ nous indique comment évolue la turbulence moyenne en fonction de la position dans le domaine.

T_u : facteur rapport turbulence/vitesse d'entrée, i.e. fonction qui décroît lorsque x augmente.

$\frac{tU}{M}$: position adimensionnée (pour se faire correspondre les unités) dans le domaine.

La courbe ci-dessous montre cette évolution :

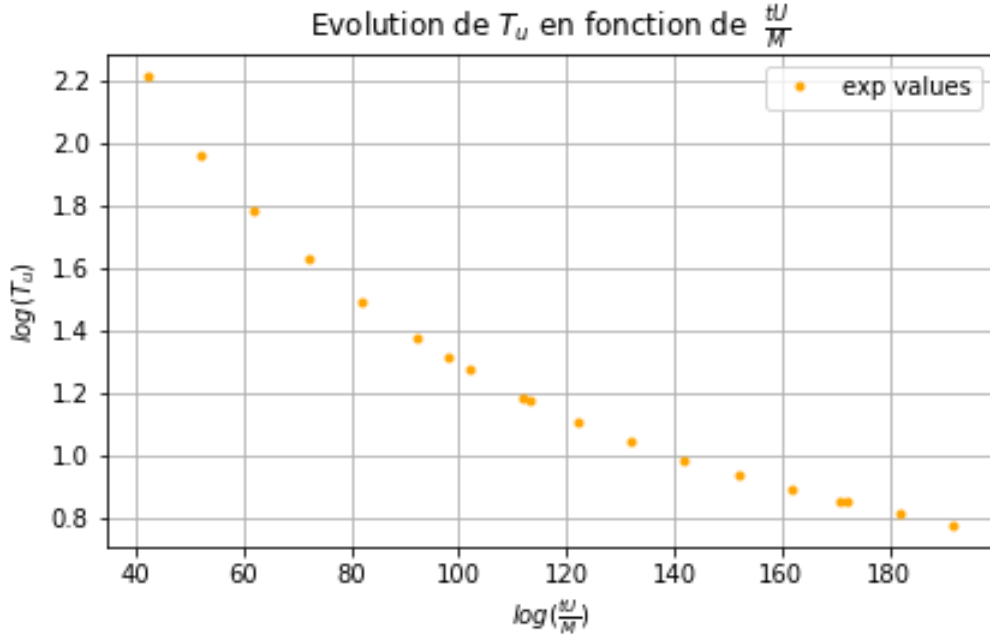


FIGURE 2 – Écoulement à travers une grille uniforme

On remarque assez distinctement que la vitesse turbulente décroît avec le temps (et donc la position dans le tube), soit donc la turbulence qui "s'éteint" avec le temps.

Par ailleurs, cette décroissance se fait en puissance (non-linéaire). Dans la question suivante, on cherche à mieux comprendre cette loi d'évolution.

2.

On cherche à écrire T_u par combinaison de la loi analytique suivante et de l'expression même de T_u :

$$\frac{U_0^2}{u_{rms}'^2} = A \left(\frac{x - x_0}{M} \right)^{n_d}$$

avec $A \in \mathbb{R}$, x_0 une origine virtuelle et n_d le coefficient de décroissance.

Il vient :

$$T_u = \frac{u_{rms}'}{U_0} = \sqrt{\frac{u_{rms}'^2}{U_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \times \left(\frac{x - x_0}{M} \right)^{-\frac{n_d}{2}}$$

3.

En traçant la figure 2 dans une échelle log-log et grâce à une interpolation numérique linéaire (courbe bleu), on obtient la courbe suivante :

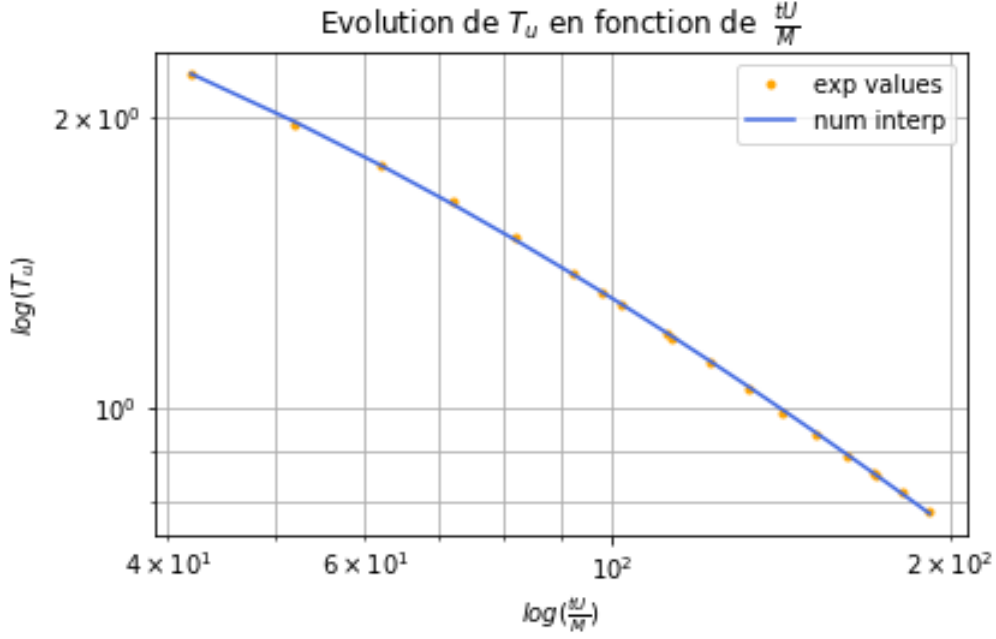


FIGURE 3 – Écoulement turbulent à travers une grille uniforme

Après l'interpolation numérique linéaire on trouve alors les coefficients suivants :

- $n_d \approx 2$
- $A \approx 2e^{-5}$
- $\frac{x_0}{M} \approx -43$

T_u décroît donc à la puissance -1 . tandis que l'origine de l'étude se trouve à $\frac{x_0}{M} \approx -43$.

4.

Ce dernier point indique que l'on peut voir notre simulation comme une simulation où la grille se situerait à $\frac{x}{M} = -43$ et donc où la perturbation serait initiée en ce point, et on en étudie le comportement à partir de $\frac{x}{M} = 0$.

Selon ce modèle, l'écoulement est donc perturbé par la grille à $\frac{x}{M} = -43$ et on l'étudie à partir de $\frac{x}{M} = 0$.

Ce décalage assure que l'on soit assez éloigné du comportement laminaire, comme discuté à la Q1.

5.

L'énergie cinétique est le carré de la fluctuation moyenne telle que k_t (énergie cinétique) est plus grand là où la fluctuation est plus importante.

Il est alors clair que les turbulences seront maximales près de la position de grille et nulles loin de celle-ci (écoulement redevenu stationnaire).

Nous cherchons à étudier l'évolution de k_t le long du domaine :

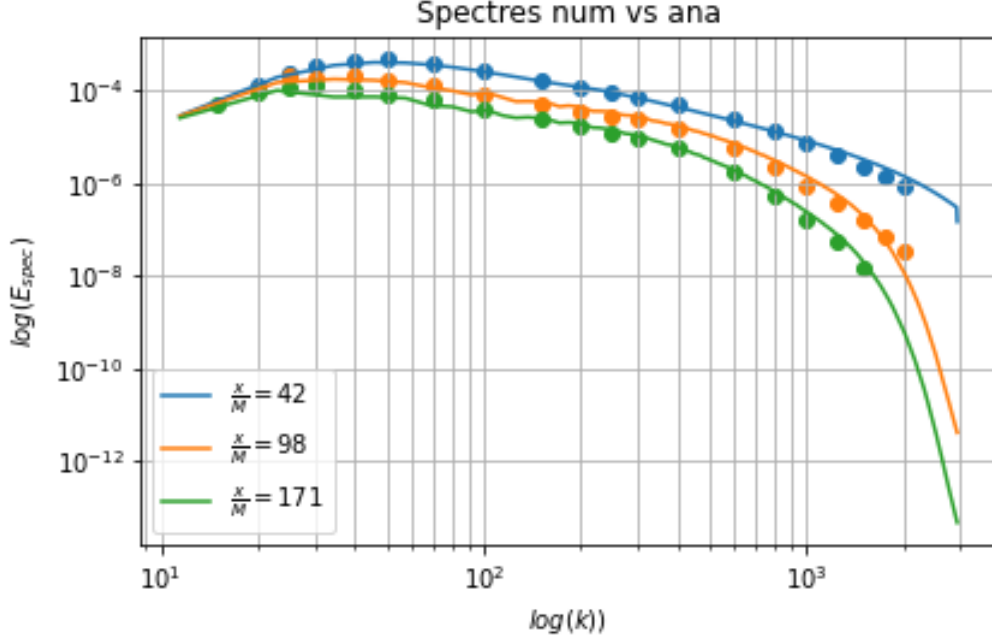


FIGURE 4 – Évolution de l'énergie cinétique pour différentes longueurs d'ondes k , à 3 positions $\frac{x}{M}$ différentes

Note : nous confirmons que la position $\frac{x}{M} = 42$ est bien dans la régime turbulent étant donné que les turbulences y sont maximales.

L'étude de la figure 4 permet d'observer que l'énergie cinétique des différentes échelles diminue avec le temps (i.e. avec $\frac{x}{M}$ qui augmente).

Par ailleurs, nous pouvons voir qu'avec l'augmentation de $\frac{x}{M}$, le maximum énergétique va vers la gauche, ce qui signifie que l'énergie max va vers les échelles les plus grandes. Il semble donc que l'énergie des petites structures a été dissipé et que les structures les plus grandes deviennent les plus énergétique.

Enfin, par superposition des résultats numériques et expérimentaux, il vient une quasi-parfaite superposition des résultats. De faibles différences aux grandes longueurs d'ondes peuvent s'expliquer par un manque de précision à cette échelle, i.e. difficulté de faire des mesures pour les petits vortex.

6.

La valeur d'onde k dépend de la taille du domaine et de la discretization associée. Ainsi :

- la taille de structure la plus grande est associée à la longueur d'onde la plus petite.

Avec un domaine de taille L , $k_{min} = \frac{1}{L}$

- k_{max} quand à lui est défini par la taille du maillage. Il vient dx la taille du maillage donné par $dx = \frac{L}{nb_{points}}$ et donc $k_{max} = \frac{1}{2 \times dx}$

La formule donnant k_{max} vient du fait *qu'il faut généralement 2 points par période (i.e. $2 \times dx$) pour correctement capter le contenu fréquentiel d'un signal périodique.*

On retrouve bien $k_{min} \approx 11$ Hz et $k_{max} \approx 2932$ Hz.

7.

Voir la figure 4.

8.

On cherche à tracer l'échelle intégrale L_f en fonction de $\frac{x}{M}$.

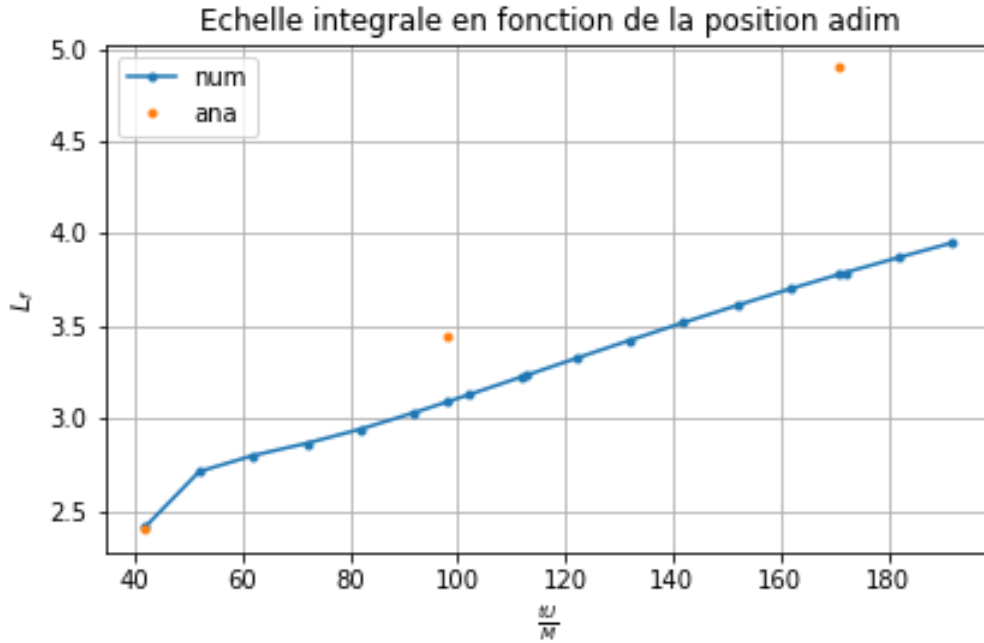


FIGURE 5 – Évolution de l'échelle intégrale L_f en fonction de $\frac{x}{M}$

Il apparaît que plus on avance dans l'écoulement, plus l'énergie trouve son **maximum** dans les grandes échelles et non pas dans les plus petites.

Pour ce qui est de la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux, les résultats numériques présentent une plus faible taille des structures les plus énergétiques.

Notre modèle ne reproduit peut être pas fidèlement la distribution énergétique (problème de taille de maille) ou bien ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs nécessaires (e.g. pas assez de frictions donc trop d'énergie vers les petites échelles).

Simulation 64

Dans cette section, on considère la même modélisation du problème, excepté que l'on discrétise le domaine qu'avec 64 points (i.e. 64^3 as 3D).

Le but va donc être de comparer les 2 modélisations : celle avec 512^3 points et celle avec 64^3 points.

1.

Similaire à la Q6, on trouve :

- $k_{min} = \frac{1}{L}$ (même que 512)
- $dx = \frac{L}{nb_{points}}$ donc $k_{max} = \frac{1}{2 \times dx}$ ($>$ que 512)

On remarque que k_{min} est inchangé alors que k_{max} a augmenté. On s'attend donc à moins bien modéliser les grands k , soit donc les structures de petites tailles.

2.

En utilisant les équations de Navier-Stokes, on retrouve les composantes de vitesses par combinaison des variables conservatives ρu_1 , ρu_2 , ρu_3 et de la variable conservative ρ .

3. 4.

On s'intéresse à la position $\frac{x}{M} = 98$. On y calcule alors les vitesses u_i , $i = 1, 2, 3$ en tout points du maillage via :

```
1  import numpy as np
2
3  u1, u2, u3 = np.ndarray((nx,ny,nz)), np.ndarray((nx,ny,nz)), np.ndarray((nx,ny,nz))
4  for k in range(nz):
5      for j in range(ny):
6          for i in range(nx):
7              u1[i][j][k] = rou1[i][j][k] / ro[i][j][k]
8              u2[i][j][k] = rou2[i][j][k] / ro[i][j][k]
9              u3[i][j][k] = rou3[i][j][k] / ro[i][j][k]
10
11 print('Finished')
```

On s'intéresse désormais au spectre énergétique de ces vitesses, calculées via :

```
1  import numpy as np
2
3  u1s = fft.fftn(u1)
4  u2s = fft.fftn(u2)
5  u3s = fft.fftn(u3)
```

5. 6.

On déduit du spectre des vitesses le spectre d'énergie cinétique :

```

1  import numpy as np
2
3  E_spec = np.zeros((kmax))
4  for k in range(nz):
5      for j in range(ny):
6          for i in range(nx):
7              ak2 = np.sqrt(akx[i]**2 + akz[i]**2 + akz[i]**2)
8              n_shell = np.round(ak2)
9              if n_shell>0 and n_shell<=kmax:
10                 n_shell = int(n_shell)
11                 E_spec[n_shell-1] += np.abs(u1s[i][j][k]**2 + u2s[i][j][k]**2 + u3s[i][j][k]**2)
12
13  # Renormalisation du spectre, i.e. *1/V
14  for k in range(kmax): E_spec[k] = E_spec[k]*fac

```

De ce code on déduit la comparaison suivante avec le fichier *es.dat* :

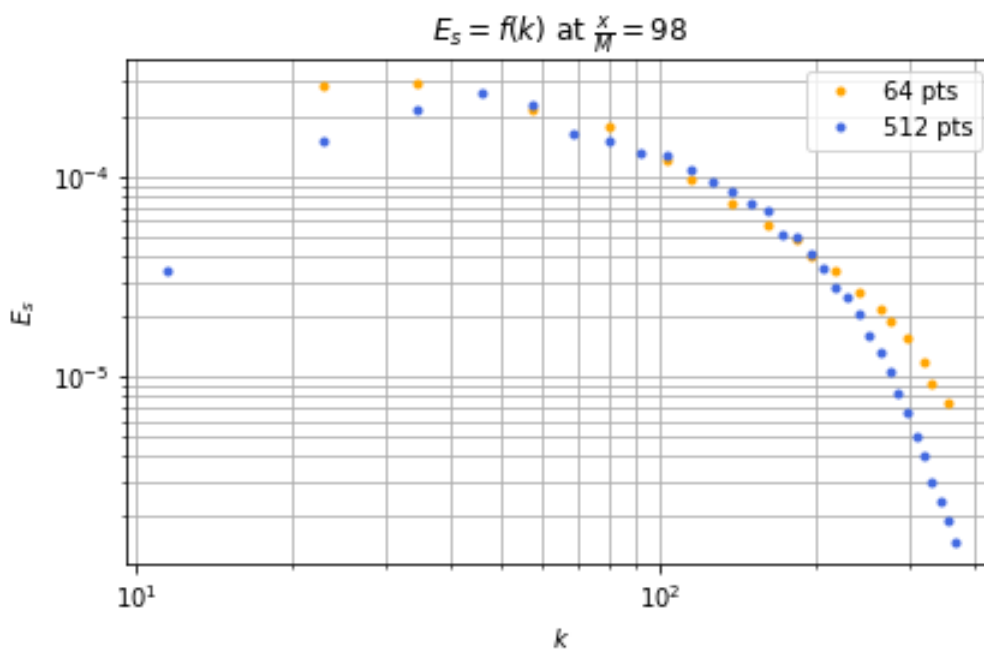


FIGURE 6 – Spectre d'énergie cinétique pour n=512pts et n=64pts à $\frac{x}{M} = 98$

Connaissant L_f on déduit k à partir de $k = \frac{1}{L_f}$. On remarque que l'énergie aux grands k est plus importante dans le cas 64 points. De même, à l'autre extrémité (i.e. $k \ll 1$), l'énergie est là aussi plus importantes aux grandes échelles.

Il apparaît ainsi une erreur numérique ou encore une répartition erronée de l'énergie dû à un maillage trop grossier.

7.

Nous traçons désormais l'évolution de l'énergie cinétique $k_t = \frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2}$:

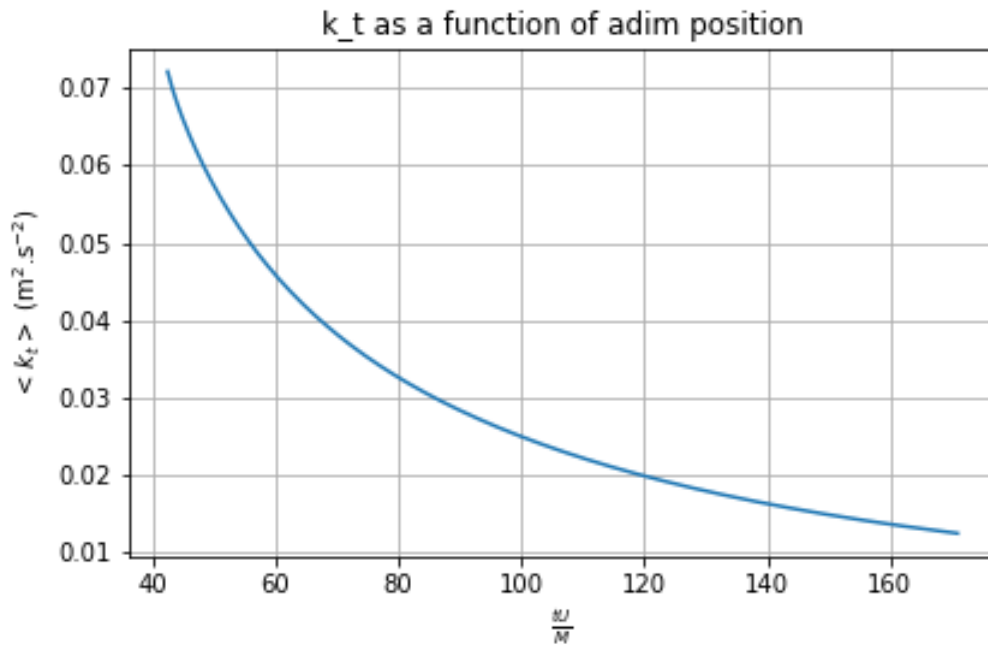


FIGURE 7 – Évolution de l'énergie cinétique k_t en fonction de $\frac{x}{M}$

Là où le graphe précédent nous indiquait quelles structures sont les plus énergétiques au cours de l'écoulement, la figure 7 nous indique que l'énergie moyenne diminue au cours du temps.

En fait, aux petites échelles l'énergie est dissipée et donc l'écoulement perd en énergie au cours du temps.

8.

Taux de dissipation de l'énergie :

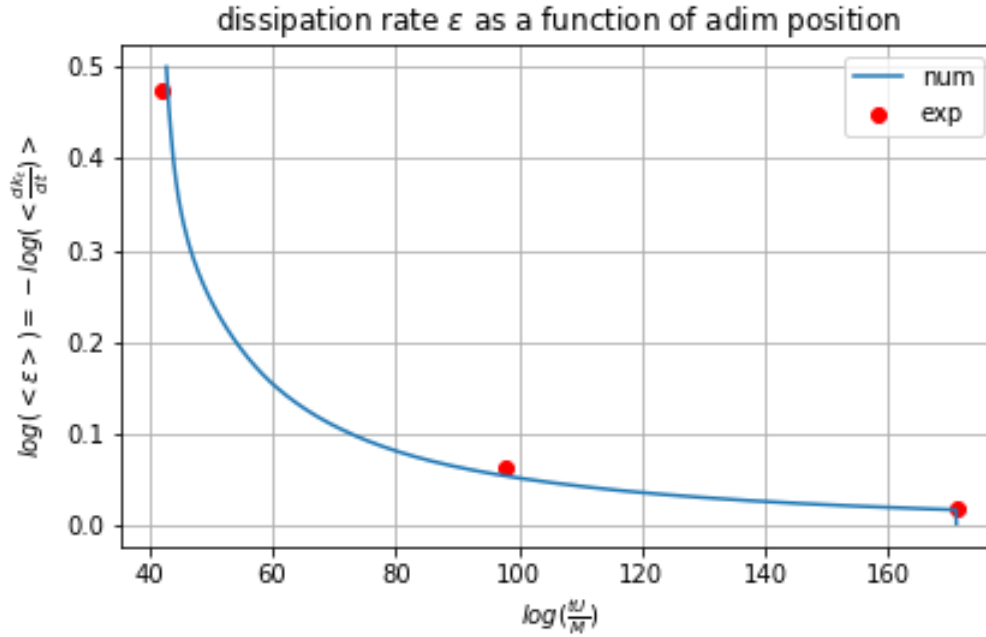


FIGURE 8 – Dissipation de l'énergie ϵ en fonction de $\frac{x}{M}$

On observe que la dissipation de l'énergie expérimentale est bien retrouvée numériquement. Il est important à ce stade de remarquer que l'étude expérimentale apparaît très consistante étant donné les résultats obtenus.

La superposition des résultats en différents points de l'écoulement confirme par la même occasion le modèle numérique.

9.

Epsilon est le taux de dissipation, il indique comment une concentration va se dissiper au cours du temps.

Dans le cas de la figure 1 (cf. sujet), le taux de dissipation retranscrit le taux de dissipation qui caractérise la transmission d'énergie des grandes vers les petites échelles.

10.

Sur la figure ci-contre on cherche une fois de plus à caractériser l'approche avec 64 points :

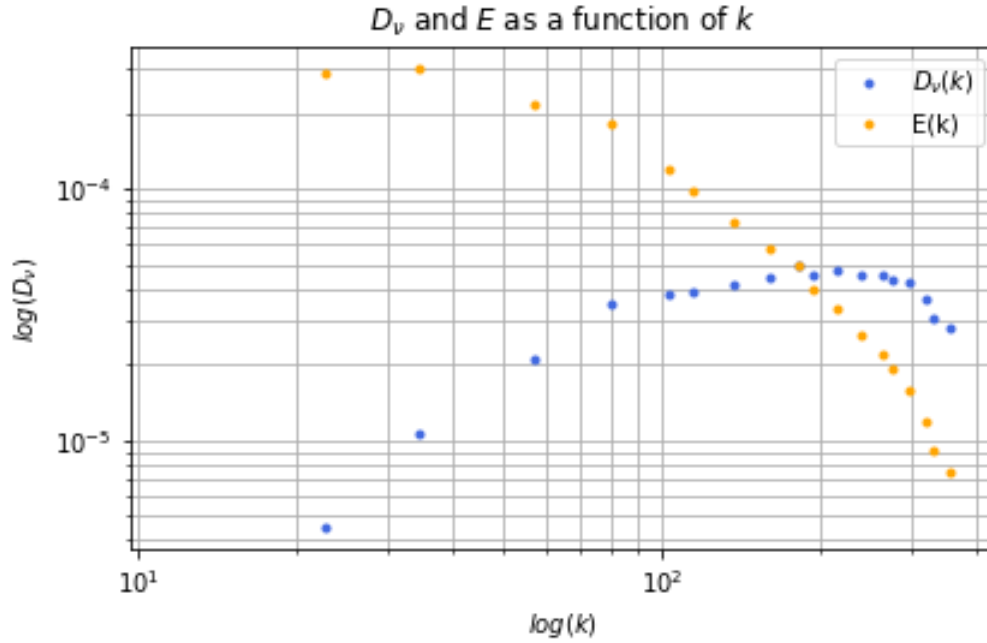


FIGURE 9 – D_ν et $E_{\frac{x}{M}=98}$ en fonction de $\frac{x}{M}$

On y remarque que tandis que l'énergie $E(k)$ est bien retranscrite, la variable D_ν est tronquée.

Ainsi, une partie des données composant le spectre de dissipation D_ν sont manquantes : la dissipation prend en effet place aux petites échelles et n'est pas totalement capturée ici.

En sommes, l'échelle de Kolmogorov et une partie de l'échelle de Taylor (où la dissipation prend place) ne sont pas calculés, d'où le terme "*tronquées*".

11.

On calcule désormais les valeurs d'ensrophie et de taux de dissipation aux différents instants (cf. 'stats.dat') :

```

1  import numpy as np
2
3  enstrophie = []
4  for i in range(len(dict_stats['b1^2'])):
5      enstrophie.append((dict_stats['b1^2'][i] + dict_stats['b2^2'][i] + dict_stats['b3^2'][i]) / 2)
6
7  # -----
8
9  epsilon_2 = []
10 for i in range(len(enstrophie)):
11     epsilon_2.append(2 * nu_ref * enstrophie[i])

```

Il nous reste désormais à en tracer l'évolution le long de l'écoulement.

12.

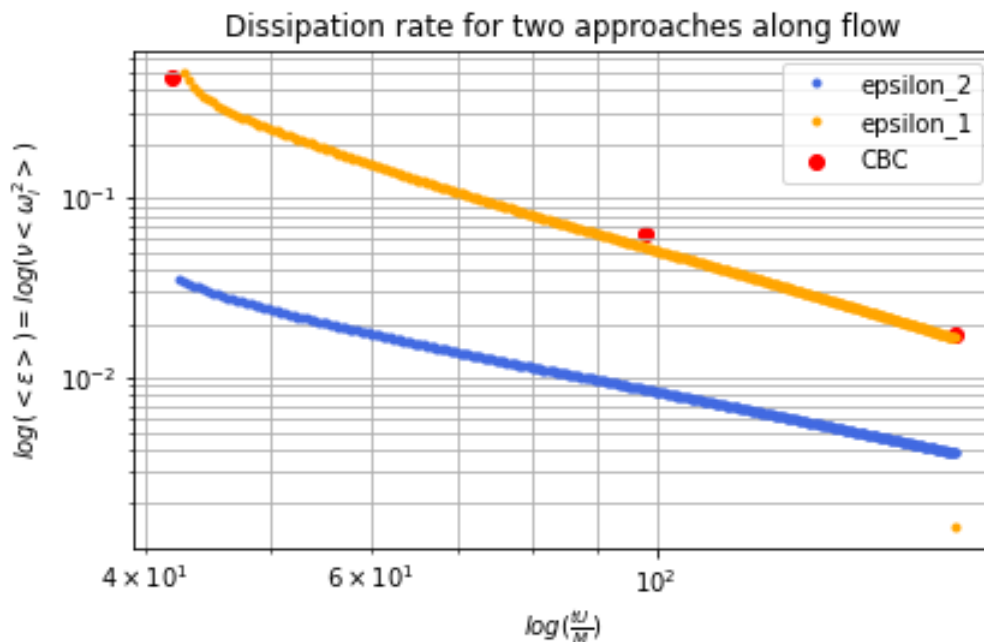


FIGURE 10 – Dissipation de l'énergie ϵ en fonction de $\frac{x}{M}$, avec 2 approches

Dans la figure (10) on superpose de nouveau les éléments de la figure (9), en y ajoutant une 2nde approche pour le calcul de ϵ .

On remarque que la loi d'évolution est respectée mais qu'il y a un décalage en ordonnée entre les 2 méthodes. En fait, il semble qu'avec un maillage de 64 points il y a une perte d'information sur la vorticité.

La **distribution de la vorticité** est **fauss e** pour un **maillage grossier**. Un maillage plus fin devrait corriger cette distribution.

Conclusion - 64 points Une brève conclusion sur le maillage avec 64 points est qu'un tel modèle numérique gagne assurément en temps de calcul mais ne retranscrit pas fidèlement les informations de l'écoulement.

Conclusion

Ce TP nous a permis de mettre en application les outils du cours à travers de multiples comparaisons et post-process de mesures expérimentales et numérique sur un écoulement de grille.

Au final, il conviendrait de travailler plus en profondeur l'aspect expérimentale pour mieux appréhender et expliquer les résultats discutés durant ce rapport.