

## 2A002, Bases de Thermodynamique

Lundi 18 juin 2018 – Durée : 2 heures.

Tout document interdit. Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.

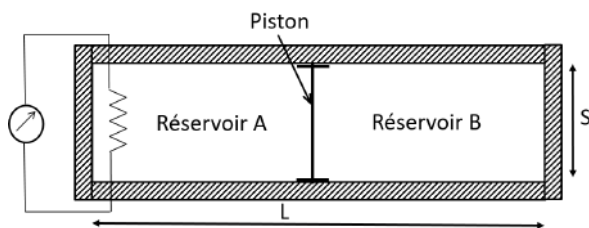
### Exercice 1 – Cylindre à deux compartiments. Piston diatherme (barème indicatif : 8 points)

Un cylindre fermé horizontal de longueur totale intérieure  $L$  et de section intérieure  $S$  est divisé en deux compartiments  $A$  et  $B$  par un piston d'épaisseur négligeable, coulissant librement sans frottement. Les parois du cylindre sont adiabatiques, la paroi du piston est diatherme. Une résistance est placée dans le réservoir  $A$ , prête à être alimentée. On néglige dans tout l'exercice les capacités thermiques du piston et de la résistance chauffante.

Les compartiments  $A$  et  $B$  contiennent chacun  $N$  moles de gaz parfait. On note  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques du gaz,  $R$  la constante universelle des gaz parfaits.

Initialement le système est à l'équilibre, et le gaz du compartiment  $A$  est à la température  $T_A^0 = T_0$  et à la pression  $p_A^0 = p_0$  données. Ensuite, le gaz du compartiment  $A$  est porté très lentement à la température  $T_A^1 = T_1$  à l'aide de la résistance chauffante, et on note  $Q$  l'apport de chaleur correspondant (Figure 1). La transformation est supposée réversible pour  $A$  et pour  $B$ . On note (1) l'état final.

Pour les applications numériques :  $S = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $T_1 = 400 \text{ K}$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $R = 8.31 \simeq \frac{25}{3} \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .



1. Caractériser totalement, en fonction des données, l'état initial (0) du gaz dans le compartiment  $A$  ainsi que dans le compartiment  $B$  : température, pression, volume, nombre de moles. Justifier les résultats.  
Effectuer les applications numériques en unités SI (tous les calculs sont simples et se font effectués sans calculatrice).
2. Faire de même pour l'état final (1) de  $A$  et  $B$  et effectuer les applications numériques.
3. On considère le système constitué du gaz à l'intérieur du compartiment  $A$ . Exprimer en fonction des données la variations d'énergie interne  $\Delta U_A$ , le travail  $W_A$  et la quantité de chaleur  $Q_A$  échangés avec le milieu extérieur.  
Effectuer les applications numériques.
4. Faire de même pour le système constitué du gaz à l'intérieur du compartiment  $B$ , et exprimer en fonction des données  $\Delta U_B$ ,  $W_B$  et  $Q_B$ . Effectuer les applications numériques.
5. On considère le système constitué par l'ensemble des gaz des compartiments  $A$  et  $B$ . Calculer la quantité de chaleur  $Q$  apportée par la résistance chauffante et effectuer l'application numérique. Donner l'expression, en fonction des données, de la variation d'entropie  $\Delta S$  de ce système, de l'entropie échangée avec le milieu extérieur  $S_{tr}$  et de la production d'entropie  $S_{pr}$ . Faire les applications numériques (indication :  $\ln(4/3) \simeq 0.28$ ).
6. Représenter la transformation (01) pour le gaz contenu dans le compartiment  $A$  et pour le gaz contenu dans le compartiment  $B$  sur un diagramme de Clapeyron.
7. On repart de l'état initial, et on n'alimente plus la résistance. On effectue maintenant le chauffage du compartiment  $A$  par contact avec une source de chaleur maintenue à la température  $T_1$  (la paroi gauche du cylindre est rendue diatherme). Faire un schéma de cette nouvelle expérience. L'état final des contenus des compartiments  $A$  et  $B$  est-il modifié ?

Pour le système constitué par l'ensemble des gaz des compartiments  $A$  et  $B$ , donner à nouveau l'expression en fonction des données, de la variation d'entropie, de l'entropie échangée avec le milieu extérieur et de la production d'entropie. Commenter le résultat.

**Exercice 2 – Questions de cours** (*barème indicatif : 5 points*)

Soit un système constitué par  $N$  moles d'un gaz parfait dont la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  est constante.

1. Donner l'expression en variables  $(T, V)$  de la chaleur élémentaire  $\delta Q$  et du travail élémentaire  $\delta W$  échangés avec l'extérieur lors d'une transformation réversible.
2. En déduire l'expression en variables  $(T, V)$  de la variation élémentaire d'énergie interne et de la variation élémentaire d'entropie.
3. Montrer mathématiquement que la variation élémentaire d'énergie interne et la variation élémentaire d'entropie sont des différentielles totales exactes.
4. Déduire des questions précédentes que l'énergie interne du gaz parfait est donnée par  $U(T, V) = C_v T + K_1$ , et que son entropie est  $S(T, V) = C_v \ln T + NR \ln V + K_2$ , avec  $K_1, K_2$  des constantes réelles.
5. Reprendre le déroulé des questions 1,2,3,4 dans le cas d'un solide rigide dont la capacité calorifique est constante et notée  $C$ . En déduire que l'énergie interne de ce solide est donnée par  $U(T, V) = CT + K_3$  et que son entropie est  $S(T, V) = C \ln T + K_4$ , avec  $K_3, K_4$  des constantes réelles.

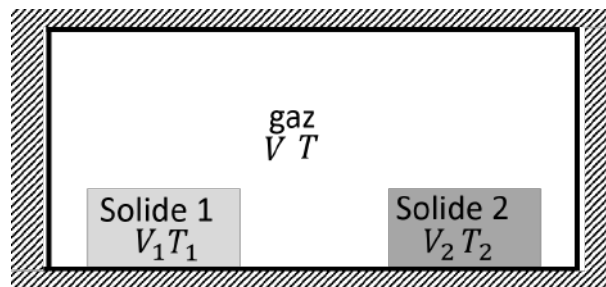
**Exercice 3 – Système en contact avec deux sources à température variable** (*barème indicatif : 7 points*)

Dans cet exercice on pourra utiliser les résultats des questions de cours précédentes.

On considère  $N$  moles d'un gaz parfait dont la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  est constante, initialement en équilibre à la température  $T_0$ , occupant le volume  $V_0$ . Ce gaz est placé dans une enceinte rigide adiabatique, dans laquelle on a placé deux solides identiques, de capacité calorifique constante notée  $C$ , de volume constant  $V_1 = V_2$ , l'un à la température initiale  $T_{10}$ , l'autre à la température initiale  $T_{20}$  (avec  $T_{10} \neq T_{20}$ , différentes de  $T_0$ ). Dans l'équilibre final, le gaz ainsi que les solides sont à la même température  $T_f$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- (a) Les solides sont de bons conducteurs thermiques, si bien que leur température est (spatialement) uniforme pendant toute l'évolution du système. On note  $T_1$  la température du solide 1 et  $T_2$  celle du solide 2. Ces deux températures évoluent pendant la transformation.
- (b) La capacité calorifique du gaz est négligeable devant celle des solides.



1. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système constitué de l'ensemble (gaz + solide 1 + solide 2), et en appliquant l'hypothèse (b), exprimer la température  $T_f$  uniquement en fonction de  $T_{10}$  et  $T_{20}$ .
2. Donner l'expression en fonction des données de la variation d'entropie de chacun des deux solides et du gaz. Pourquoi peut-on considérer que la variation d'entropie du gaz est négligeable ?
3. On considère le système constitué de l'ensemble (gaz + solide 1 + solide 2). Pour ce système, donner l'expression en fonction des données de la variation d'entropie  $\Delta S$ , de l'entropie échangée avec le milieu extérieur  $S_{tr}$ , et de la production d'entropie  $S_{pr}$ . Calculer le signe de la production d'entropie. Le second principe est-il respecté ?
4. En appliquant le premier principe au système constitué par le solide 1 seul, donner l'expression de la quantité de chaleur élémentaire échangée entre le solide 1 et le gaz lors de la transformation. Faire de même pour le système constitué du solide 2 seul. En déduire alors, en utilisant l'hypothèse (a), l'entropie échangée entre le système constitué par le gaz seul et son milieu extérieur.
5. Donner alors la production d'entropie pour le système constitué par le gaz seul. Commenter le résultat obtenu.

### Exercice 1.

①

1)  $p_A^0 V_A^0 = N R T_A^0$  (loi des G.P.)

or  $V_A^0 = 10 \times 10^{-4} \times 0.5 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

$$p_A^0 = p_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_A^0 = T_0 = 300 \text{ K}$$

$$\Rightarrow N = \frac{p_A^0 V_A^0}{R T_A^0} = \frac{10^5 \times 5 \times 10^{-4} \times 8}{25 \times 8 \times 10^2} = \frac{10^{-1}}{5} = 0.02$$

$$p_B^0 = p_A^0 \text{ (car piston à l'équilibre)}$$

$$T_B^0 = T_A^0 \text{ (car piston diatherme).}$$

$$V_B^0 = \frac{N R T_B^0}{p_B^0} = V_A^0 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

2)  $p_A^1 V_A^1 = N R T_A^1 = N R T_1$  or  $T_B^1 = T_A^1$  (piston diatherme)  
et  $p_B^1 = p_A^1$  (piston à l'équilibre)

$$\Rightarrow V_A^1 = V_B^1 = V_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$p_A^1 = p_B^1 = \frac{N R T_1}{V_A^1} = \frac{10^{-1} \times 25}{5} \times \frac{400}{5 \times 10^{-4}} = \frac{4}{3} \times 10^5 = \frac{4}{3} \text{ bar}$$
$$= \frac{4}{3} \times 10^5 \text{ Pa} = 1,33 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

$$T_A^1 = T_B^1 = 400 \text{ K}.$$

3)  $\Delta U_A = C_V (T_A^1 - T_A^0) = \frac{N R}{\gamma - 1} (T_A^1 - T_A^0)$

$$W_A = 0 \text{ (car } dV = 0)$$

$$\Rightarrow Q_A = \Delta U_A \text{ (1er principe)}$$

$$\text{AN: } \Delta U_A = \frac{10^{-1} \times 25}{5} \times \frac{1}{\left(\frac{5}{3} - 1\right)} \times 100 = \frac{500 \times 10^{-1}}{3 \left(\frac{5}{3} - 1\right)} = \frac{500 \times 10^{-1}}{5 - 3}$$

$$= 250 \text{ J} = Q_A$$

4) de même  $\Delta U_B = \frac{N R}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_B^0) = \Delta U_A = 250 \text{ J}$

$$W_B = 0 \text{ et } Q_B = \Delta U_B = 250 \text{ J}$$

$$5) \quad \Delta U_{A+B} = \Delta U_A + \Delta U_B = \underbrace{W_{A+B}}_{=0} + Q \quad (2)$$

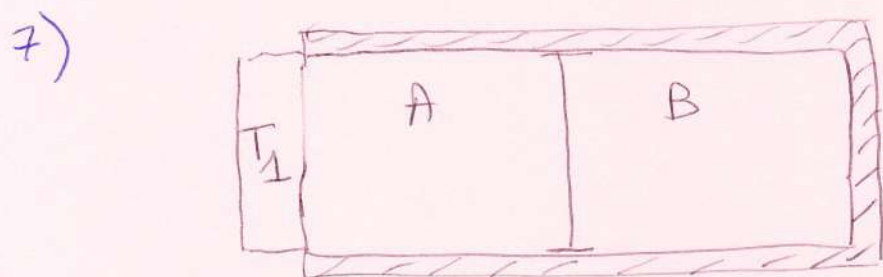
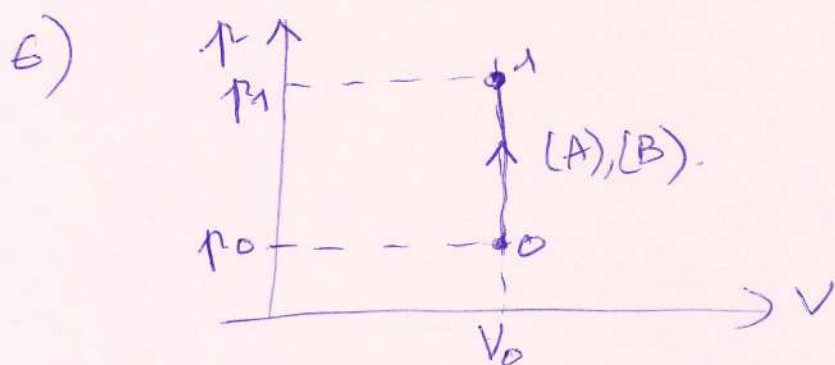
$$\Rightarrow Q = \Delta U_A + \Delta U_B = 500 \text{ J.}$$

$$\Delta S_{A+B} = \frac{2NR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} \quad (\text{gaz parfait}) = \int_0^1 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

$$S_{\text{tr}} = \int_0^1 \frac{\delta Q}{T} = \Delta S_{A+B}$$

$$\text{AN} \quad S_{\text{tr}} = \Delta S_{A+B} = 0.14 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{pr}} = 0. \quad (\text{logique car la transf. est réversible})$$



Même  tat final car  $\hat{m} \cdot T_A^2 = T_B^2 = T_1^2$   
 et  $p_A^2 = p_B^2 \Rightarrow$  même  tat.

$$\Delta S_{(A+B)} = \frac{2NR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

$$Q = \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{2NR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$$

$$S_{\text{tr}} = \frac{Q}{T_1} = \frac{2NR}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{pr}} = \Delta S_{(A+B)} - S_{\text{tr}} = \frac{2NR}{\gamma-1} \left[ \ln \frac{T_1}{T_0} - 1 + \frac{T_0}{T_1} \right]$$

On montre  $S_{\text{pr}} > 0 \Rightarrow$  Transf. irréversible.



$$f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0 \text{ pour } x > 1$$

$x$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\nearrow$

$$f(1) = 0.$$

$$pV = NRT$$

### Exercice 2

$$1) \delta Q = C_v dT + p dV = C_v dT + \frac{NRT}{V} dV$$

$$\delta W = -p dV$$

$$2) dU = C_v dT \quad dS = C_v \frac{dT}{T} + NR \frac{dV}{V}$$

$$3) \left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = 0 \quad \text{OK}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{C_v}{T} \right) \right)_T = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{NR}{V} \right) \right)_V = 0 \quad \text{OK.}$$

$$4) \begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_v \\ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = C_v T + f(V) \Rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = f'(V) \\ f'(V) = 0 \Rightarrow f(V) = K_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(T, V) = C_v T + K_1}$$

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{C_v}{T} \\ \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{NR}{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = C_v \ln T + f(V) \Rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = f'(V) \\ f'(V) = \frac{NR}{V} \Rightarrow f(V) = NR \ln V + K_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(T, V) = C_v \ln T + NR \ln V + K_2}$$

5) Solide rigide -

④

$$\delta Q = C dT + 0$$

$$\delta W = 0$$

$$\Rightarrow dU = C dT, \quad dS = C \frac{dT}{T}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_V = 0 = \left(\frac{\partial C}{\partial V}\right)_T$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = CT + f(V) \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = f'(V) \\ f'(V) = 0 \Rightarrow f(V) = K_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = CT + K_3$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C}{T} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = C \ln T + f(V) \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = f'(V) \\ f'(V) = 0 \Rightarrow f(V) = K_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = C \ln T + K_4$$

Ex 3

$$1) \quad \Delta U = C_v (T_f - T_0) + 2C (T_f - T_{10}) + C (T_f - T_{20}) = \underset{0}{Q} + \underset{0}{W}$$

$$\Rightarrow (C_v + 2C) T_f = C_v T_0 + C T_{10} + C T_{20}$$

$$T_f = \frac{C(T_{10} + T_{20}) + \overbrace{C_v T_0}^{\text{négl.}}}{\underbrace{C_v + 2C}_{\text{négligé}}} \approx \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$$

$$2) \quad \Delta S_g = C_v \ln \frac{T_f}{T_0} \quad \Delta S_1 = C \ln \frac{T_f}{T_{10}} \quad \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_{20}}$$

$$3) \quad \Delta S \approx C \left( \ln \frac{T_f}{T_{10}} + \ln \frac{T_f}{T_{20}} \right) = C \ln \frac{T_f^2}{T_{10} T_{20}} = C \ln \frac{(T_{10} + T_{20})^2}{4 T_{10} T_{20}}$$

$$S_{th} = 0$$

$$\Rightarrow S_{pr} = \Delta S = C \ln \frac{(T_{10} + T_{20})^2}{4 T_{10} T_{20}}$$

Signe de  $S_{pr}$  ?

(5)

$$(T_{10} + T_{20})^2 \geq 4 T_{10} T_{20} ?$$

$$\Leftrightarrow T_{10}^2 + T_{20}^2 + 2 T_{10} T_{20} \geq 4 T_{10} T_{20} ?$$

$$\Leftrightarrow T_{10}^2 + T_{20}^2 - 2 T_{10} T_{20} \geq 0 ?$$

$$\Leftrightarrow (T_{10} - T_{20})^2 \geq 0 \quad \underline{\text{oui}} \Rightarrow \text{2<sup>nd</sup> principe respecté}$$

Transformation irréversible

4) (solide 1)

$$dU = C dT_1 = \delta Q_{\text{solide 1} \rightarrow \text{gaz}} = -\delta Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{solide 1}}$$

(solide 2)

$$dU = C dT_2 = \delta Q_{\text{solide 2} \rightarrow \text{gaz}} = -\delta Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{solide 2}}$$

$$\begin{aligned} S_{tr \text{ gaz}} &= \int_0^1 \frac{\delta Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{solide 1}}}{T_1} + \int_0^1 \frac{\delta Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{solide 2}}}{T_2} \\ &= - \int_{T_{10}}^{T_f} \frac{C dT_1}{T_1} - \int_{T_{20}}^{T_f} \frac{C dT_2}{T_2} \\ &= -C \ln \frac{T_f}{T_{10}} - C \ln \frac{T_f}{T_{20}} = -C \ln \frac{T_f^2}{T_{10} T_{20}} \end{aligned}$$

5)  $\Delta S_{\text{gaz}} \approx 0$

$$\Rightarrow (\text{et } \Delta S_{\text{gaz}} = S_{tr \text{ gaz}} + S_{pr \text{ gaz}})$$

$$\Rightarrow S_{pr \text{ gaz}} = -S_{tr \text{ gaz}} = C \ln \frac{T_f^2}{T_{10} T_{20}} \quad \text{idem q. 3.}$$

les 2 solides se comportent comme des sources de chaleur -