Ecrit intermédiaire du lundi 5 novembre 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.
Les différents exercices sont indépendants.
Barême indicatif : exercice 1 : 3 points, exercice 2 : 6 points, exercice 3 : 9 points, 2 points pour la rédaction.

Exercice 1 : Calcul indiciel

1.1 Rappeler les expressions en écriture indicielle des composantes du gradient $\underline{\mathrm{grad}}\, f$ d'une fonction scalaire $f(\underline{x})$, des composantes du rotationnel $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}$ d'un vecteur $\underline{v}(\underline{x})$, de celles du produit vectoriel $\wedge$ de deux vecteurs $\underline{u}(\underline{x})$ et $\underline{v}(\underline{x})$ et des composantes du tenseur gradient $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}$ d'un vecteur $\underline{v}(\underline{x})$.

1.2 Etablir, en utilisant le calcul indiciel, la relation suivante pour un vecteur $\underline{v}(\underline{x})$:

$$(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v})\,\underline{v} \;=\; \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{v}^2 \;+\; \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} \wedge \underline{v}$$

On rappelle la formule : $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqk} \;=\; \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$, *où* ϵ_{ijk} *désignent les composantes du tenseur de permutation et* δ_{ij} *le symbole de Krönecker.*

1.3 En déduire que dans le cas d'un champ de vitesse $v(\underline{x},t)$ irrotationnel, l'accélération associée dérive d'un potentiel $\Phi(\underline{x},t)$. On notera $V(\underline{x},t)$ le potentiel dont dérive le champ de vitesse.

Exercice 2 : Déformations

On étudie la déformation de la pièce qui occupe à l'instant $t = 0$ le domaine géométrique :

$$\Omega_0 \;=\; \{\,\underline{X}\,/\,0 \,\leq\, X_1 \,\leq\, L,\; 0 \,\leq\, X_2 \,\leq\, L,\; 0 \,\leq\, X_3 \,\leq\, H\,\},$$

où α, L et H sont des grandeurs données positives sous la transformation suivante :

$$x_1 \;=\; X_1 + \alpha\, X_2\, X_3, \quad x_2 \;=\; X_2 \,-\, \alpha\, X_1\, X_3, \quad x_3 \;=\; X_3.$$

2.1 Calculer les composantes du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ à un instant t donné en un point M_0 de coordonnées $\underline{X}$ à l'instant $t = 0$.

La transformation est-elle toujours définie ?

La transformation est-elle homogène ?

2.2 Etudier la transformation de la base $X_3 \;=\; 0$ de la pièce, puis celle de la section terminale $X_3 \;=\; H$.

Représenter la déformée de cette section. Identifier la nature de la transformation.

2.3 Déterminer la variation relative de volume subie par la pièce.

2.4 Calculer les composantes des tenseurs de dilatation $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ et de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$.

2.5 En déduire les dilatations subies par des vecteurs infinitésimaux de matière portés par les trois directions $\underline{e}_i$, pour $i = 1,2,3$.

Décrire les variations angulaires subies par des vecteurs infinitésimaux de matière portés par les trois directions $\underline{e}_i$, pour $i = 1,2,3$. .

2.6 Former le vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{X})$, ainsi que les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}$.

A quelles conditions sur le paramètre $\eta(t) \;=\; \alpha\,\mathrm{Max}(L,H)$, l'hypothèse des petites transformations est-elle satisfaite ?

2.7 Calculer les composantes du tenseur de déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$.

Calculer les allongements relatifs subis par les vecteurs infinitésimaux de matière portés par les trois directions $\underline{e}_i$, pour $i = 1, 2, 3$, ainsi que les variations angulaires.

Comparer les résultats obtenus à ceux de la question 2.5. Commenter.

Exercice 3 : Cinématique - Taux de déformations

On considère le mouvement défini par sa vitesse eulérienne :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \;=\; \alpha\, x_1\, \underline{e}_1 \;+\; \beta\, x_2\, \underline{e}_2,$$

où $\underline{x}$ désigne la position d'une point quelconque à l'instant t et où α et β sont deux constantes données telles que $\alpha \neq 0$ et $\beta > 0$

3.1 Calculer le champ d'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne de deux manières.

3.2 Déterminer les équations des lignes de courant à l'instant $t = t^*$.

Etudier la nature de ces lignes, les représenter et préciser le sens de parcours dans les quatre cas :

Cas 1 : $\alpha = \beta$, Cas 2 : $\alpha = -\beta$, Cas 3 : $\alpha = \beta\,/\,2$, Cas 4 : $\alpha = -\beta\,/\,2$.

On rappelle que $\alpha \neq 0$ *et* $\beta > 0$.

3.3 Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement.

On notera $\underline{X}$ la position à l'instant $t = 0$ d'un point situé en $\underline{x}$ à l'instant t.

3.4 Donner l'équation de la trajectoire d'une particule située à $t = 0$ en $\underline{X}$.

Commenter la nature de la trajectoire dans les cas explicités en question 3.2.

3.5 Calculer par deux manières les champs de vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et d'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ en description lagrangienne.

3.6 On considère le domaine défini à l'instant $t = 0$ par $\Omega_0 \;=\; \{\underline{X}\,/\,X_1^2 \,+\, X_2^2 \,\leq\, R^2,\; 0 \,\leq\, X_3 \,\leq\, H\,\}$, où R et H sont des grandeurs données positives et on note $V(0)$ son volume.

On désigne par $\Omega(t)$ la transformée de ce domaine à l'instant t et par $V(t)$ son volume.

Calculer $\frac{d}{dt}V(t)$. En déduire l'expression du volume $V(t)$ en fonction du temps et des grandeurs α, β R et H.

Tracer et commenter l'évolution de $V(t)$ en fonction du temps dans les deux cas 1 et 2.

3.7 Donner l'expression des points du domaine $\Omega(t)$ à un instant t donné. Préciser la nature géométrique du domaine $\Omega(t)$.

Comment évolue ce domaine au cours du temps ?

Que devient ce domaine dans le Cas 1 : $\alpha = \beta$? Commenter son évolution temporelle dans ce cas.

3.8 Calculer les composantes du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$.

Interpréter mécaniquement les expressions de ces composantes.

3.9 Rappeler l'équation locale de conservation de la masse du domaine matériel $\Omega(t)$.

En déduire l'expression de sa masse volumique $\rho(\underline{x}, t)$ en supposant qu'à l'instant $t = 0$ la masse volumique ρ_0 du domaine est uniforme.