Corrigé 3A002 $\boxed{\text{Déc 2016}}$ ER2 ①

Exo1)

i) ondes $(c=2)$

ii) On cherche la sol. $u(x,t) = X(x)T(t)$

L'EDP (2) devient :

$$XT'' = 4X''T \quad \Big| : 4XT$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & ① \\ T'' + 4\lambda X = 0 & ② \end{cases}$$

Cas $\lambda < 0$: Soit $\lambda = -\beta^2$

① devient : $X'' - \beta^2 X = 0$

et $X(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x)$

De plus $X'(0) = X'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow \beta A \underbrace{\sinh(\beta 0)}_{=0} + B\beta \underbrace{\cosh(\beta 0)}_{1} = 0$$

$B\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{B=0}$.

et $\beta A \underbrace{\sinh(\beta)}_{>0} = 0$ donc $\boxed{A=0}$ $\Rightarrow$ ~~sinon~~ sol. triviale $\underline{u=0.}$

impossible!

Cas $\lambda = 0$: $X'' = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ax + B$

$X'(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ donc $X(x) = B$

$X'(1) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ sol. constante.

Cas $\lambda > 0$: Soit $\lambda = \beta^2$

Sol. $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$X'(0) = 0 \Leftrightarrow \beta B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = 0}$

$X'(1) = 0 \Leftrightarrow -\beta A \sin(\beta) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = m\pi$ $\forall m = 1, 2, \ldots$

$A \neq 0$ sinon sol. triviale

Donc la fonct propre sera:

$$\boxed{X_m(x) = A_m \cos(m\pi x)}, \ \forall m = 1, 2, \ldots$$

ii) La sol. de l'EDO (2) est:

$$T_m(t) = C_m \cos(m\pi t) + D_m \sin(m\pi t).$$

La sol. par superposition est:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m\pi x)\left(C_m \cos(m\pi t) + D_m \sin(m\pi t)\right)$$

Comme

$$u(x,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

on a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m\pi x) \times C_m$

Par identification on a :

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{2}}$$

et $\boxed{C_2 = \frac{1}{2}}$

Donc $C_m = 0$, $\forall m = 1, 3, 4, 5, \ldots$

ii) suite.

De plus on a la vitesse initiale :

$$u_t(x,0) = \frac{1}{4}\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(3\pi x).$$

Donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} - m\pi C_m \cos(m\pi x) \underbrace{\sin(m\pi \cdot 0)}_{=0} + D_m m\pi \cos(m\pi x) \times$

$$\times \underbrace{\cos(m\pi \cdot 0)}_{=1} = \frac{1}{4}\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(3\pi x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} m\pi D_m \cos(m\pi x) = \frac{1}{4}\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(3\pi x).$$

Par identification, les seuls termes $\neq 0$ sont pour $m=1$ et $m=3$.

On a alors :

$$\pi D_1 \cos(\pi x) = \frac{1}{4}\cos(\pi x) \Leftrightarrow \boxed{D_1 = \frac{1}{4\pi}}$$

et $3\pi D_3 \cos(3\pi x) = -\frac{1}{4}\cos(3\pi x)$

$$\boxed{D_3 = -\frac{1}{12\pi}} \quad \text{et } D_m = 0,\ \forall m \neq 1,3$$

Sol. générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \cos(\pi x)\sin(\pi t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

$$\cos(2\pi t) - \frac{1}{12\pi}\cos(3\pi x)\sin(3\pi t)$$

iii) Les fct. propres $X_m(x)$ sont des séries en $\sin$.

Ex 2

i) $u_t = K u_{xx}$

ii) $$u(x,0) = \begin{cases} T_0 & \text{si } 0 < x \leq \frac{\ell}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0.$$

iii) On résoud par séparation de var. le pb :

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx}, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \quad \text{C.L. Dirichlet homogène} \\ u(x,0) = \begin{cases} T_0, & \text{si } 0 < x \leq \frac{\ell}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases} \end{cases}$$

On peut écrire directement la sol. par superposition :

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{\ell^2}Kt}$$

ou alors la calculer :

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$. On a :

$$XT' = KX''T \quad \Big| : KXT$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{KT} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \lambda > 0 \; ; \; \lambda = \beta^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{de sol. } X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T' + \beta^2 k T = 0 & \text{de sol: } T(t) = B e^{-\beta^2 k t} \end{cases}$$

De plus $\underbrace{X(0) = 0}$ et $X(\ell) = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{C = 0} \qquad X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \quad \text{et } \lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2}$$

Donc la sol. par superposition est:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{\ell^2}kt}$$

On utilise la. C.i pour obtenir une expression de B_m.

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) = \phi(x)$$

avec $\phi(x) = \begin{cases} T_0, & 0 < x \leq \frac{\ell}{2} \\ 0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases}$

On utilise la rélation d'orthogonalité et on obtient la formule des coeff. de séries de Fourier en sin:

$$B_m = \frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} T_0 \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx =$$

$$= \frac{2T_0}{\ell}\underbrace{\left[-\frac{\ell}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\right]_0^{\frac{\ell}{2}}}_{= \frac{\ell}{m\pi}\left[1 - \cos\frac{m\pi}{2}\right]}$$

$$= \frac{2T_0}{m\pi}\underbrace{\left[1 - \cos\frac{m\pi}{2}\right]}_{= 2\sin^2\left(\frac{m\pi}{4}\right)} = \frac{4T_0}{m\pi}\sin^2\left(\frac{m\pi}{4}\right)$$

Sol. générale:

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}\sin^2\left(\frac{m\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{\ell^2}kt}$$

Ex 3) On résoud : $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1,\theta) = 1 + \cos(2\theta) - 2\cos(3\theta) \end{cases}$.

sur le disque $D = \{(r,\theta) \mid r \leq 1\}$.

La sol. par séparation de var. est :

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Comme

$$u(1,\theta) = 1 + \cos(2\theta) - 2\cos(3\theta) \text{ on a :}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] = 1 + \cos(2\theta) - 2\cos(3\theta)$$

Par identification : $\boxed{b_n = 0}$ (on n'a pas de termes en sin).

$$\frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 2}$$

et $\boxed{a_2 = 1}$ et $\boxed{a_3 = -2}$ $(a_n = 0, \forall n \neq 2 \text{ et } 3)$

La sol. générale :

$$u(r,\theta) = 1 + r^2 \cos(2\theta) - 2r^3 \cos(3\theta).$$