MASTER SPI - MECANIQUE
M2 – MODELISATION ET SIMULATION EN MECANIQUE DE STRUCTURES

EXAMEN DE« CONCEPTION ET OPTIMISATION DE STRUCTURES COMPOSITES »

DOCUMENTS NON ADMIS

QUESTIONS GENERALES SUR LES REGLES DE CONCEPTION DE STRATIFIES

Justifier les réponses à chaque question en donnant des courtes explications basées sur les formules de la théorie des stratifiés et le lien entre composantes polaires et cartésiennes.

Question 1 : si un stratifié est à couplage thermo-élastique nul (**V**=**O**), quelle propriété est satisfaite par le tenseur de couplage élastique **B** ?

Question 2 : on considère une couche de base renforcée par un tissu équilibré (fibres tissées à 0° et 90° en égale quantité dans les deux directions) : quelle est la propriété de symétrie élastique d'une telle couche et comment cette propriété est exprimée en termes des composantes Q_{ij} du tenseur de rigidité ? En déduire la condition en termes de composantes polaires de la couche. Et quelle propriété pour le comportement de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$ pour la couche ? Comment cette propriété s'écrit en termes des composantes polaires de $\boldsymbol{\alpha}$?

Question 3 : on construit des stratifiés en utilisant des couches renforcées en tissus équilibrés (comme ceux de la question précédente). Quelle est la propriété de symétrie élastique de ces stratifiés ? et quelles propriétés pour les comportements thermo-élastiques ?

Question 4 : montrer que un stratifié *cross-ply* est orthotrope aussi bien pour son comportement de membrane que de flexion. Ecrire les expressions des composantes polaires des tenseurs **A** et **D** pour des tels stratifiés en fonctions des composantes polaires de la couche de base et expliquer comment on observe le comportement orthotrope de ces tenseurs. Quelle autre règle de conception est généralement utilisée pour obtenir l'orthotropie de membrane ?

EXERCICE 1 – ETUDE D'UN STRATIFIE ISOTROPE

La conception de stratifiés composites isotropes peut avoir un intérêt dans le cas où on cherche à remplacer un matériau métallique par un stratifié composite dans la fabrication de structures. Une manière de construire des stratifiés isotropes est de réaliser des empilements avec N orientations (N = 3, 4, etc.) $\delta_k = 2k\pi/N$ avec $k = 0, \ldots, N\text{-}1$. Par exemple, pour N = 3, on placera les couches aux angles δ_1 = 0°, δ_2 = 60°, δ_3 = 120° soit δ_3 = -60°.

Ou encore pour N = 4, on placera les couches aux angles δ_1 = 0°, δ_2 = 45°, δ_3 = 2 45° = 90°, δ_4 = 3 45°= 135° soit δ_4 = −45°.

On veut étudier le comportement de ce type de stratifications.

1. On rappelle que le comportement élastique d'une couche ou le comportement d'une plaque stratifiée est décrit par des tenseurs de rigidité ou souplesse, et que pour ces derniers on peut donner une représentation cartésienne ou polaire. Rappeler les conditions satisfaites par les paramètres polaires dans le cas d'un comportement isotropes : quelles composantes polaires sont nulles dans ce cas ?

2. On traitera l'étude des stratifications dans le cadre de la théorie classique de plaques stratifiées (CLPT). Rappeler les hypothèses à la base de cette théorie et les équations

fondamentales dans le cas général : relation de comportement de plaques stratifiées et expression des tenseurs de rigidité en membrane, couplage et flexion.

On considère le stratifié constitué de couches du même matériau de propriétés élastiques T_0^{CB}, T_1^{CB}, R_0^{CB}, R_1^{CB}, $\Phi_0^{\mathrm{CB}} = \Phi_1^{\mathrm{CB}} = 0$.

3. A partir des formules générales de la CLPT pour le comportement de membrane exprimées en polaire (voir formulaire joint), particulariser ces formules pour le cas de couches identiques (on notera h_{tot}/n l'épaisseur d'une couche, où h_{tot} est l'épaisseur totale du stratifié et n le nombre de couches constitutives) de propriétés données (T_0^{CB}, T_1^{CB}, R_0^{CB}, R_1^{CB}, $\Phi_0^{\mathrm{CB}} = \Phi_1^{\mathrm{CB}} = 0$).
   Montrer que les composantes isotropes dépendent uniquement des composantes isotropes T_0^{CB} et T_1^{CB} de la couche de base, de l'épaisseur h_{tot} et du nombre de couches n, et non pas de la stratification.
4. Appliquer les formules obtenues au point précédent au cas d'un stratifié [0/60/−60] et montrer que dans ce cas on obtient que les composantes polaires R_0 et R_1 de membrane pour le stratifié sont nulles, et donc que le stratifié est isotrope.
   On notera T_0 et T_1 les composantes polaires isotropes du tenseur de membrane **A** du stratifié. A partir des relations liant composantes cartésiennes et polaires pour un tenseur de l'élasticité (voir formulaire joint), donner les expressions des composantes cartésiennes A_{ij} (i, j = 1, 2, 6) en fonction de T_0 et T_1. Calculer ensuite le tenseur réduit $\mathbf{A}^*$ et l'exprimer en termes de T_0^{CB} et T_1^{CB}.
5. Appliquer les formules obtenues au point 3 au cas d'un stratifié [0/45/90/−45] et montrer que dans ce cas aussi on obtient que les composantes polaires R_0 et R_1 de membrane pour le stratifié sont nulles, et donc que le stratifié est isotrope.
   Par analogie avec les calculs faits au point précédent, en déduire que les deux stratifiés ont le même comportement de membrane.

On considère que le stratifié isotrope est soumis à une sollicitation de traction simple, soit $\mathbf{N} = [N_x, 0, 0]^t$.

6. Afin de calculer la réponse en déformation du stratifié, il faut inverser la loi de comportement : rappeler les passages qui permettent de passer de la loi directe à la loi inverse et donc donner les expressions des tenseurs de souplesse **a**, **b** et **d** du stratifié. Quelles expressions on obtient si **B** = **O** ?
7. A partir de l'expression de $\mathbf{A}^*$ obtenue aux questions 4 et 5, calculer le tenseur de souplesse $\mathbf{a}^*$ en fonction des composantes polaires T_0^{CB} et T_1^{CB}.
8. On considère que les stratifications isotropes décrites aux points 4 et 5 soient réalisées de telle manière à avoir le découplage (**B** = **O**). Calculer dans ce cas la réponse du stratifié en déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et courbures $\boldsymbol{\kappa}$ à la sollicitation de traction simple et expliciter les composantes non nulles de ces tenseurs en termes de N_x, h, T_0^{CB} et T_1^{CB}.
9. Calculer les composantes polaires t, r et φ du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ (tenseur calculé au point précédent dans le repère du stratifié) puis exprimer de nouveau les composantes cartésienne de $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ dans un repère aligné avec l'angle d'orientation δ_k d'une couche de la stratification (repère d'orthotropie de la couche).

10. Pour une couche quelconque du stratifié considéré, on veut vérifier la résistance à la rupture et on utilisera pour cela un critère de déformations maximale, c'est-à-dire les trois relations :

$$\varepsilon_1 < X\varepsilon \qquad \varepsilon_2 < Y\varepsilon \qquad \varepsilon_6 < S\varepsilon$$

On pose ici $X\varepsilon = 0.005$; $Y\varepsilon = 0.02$; $X\varepsilon = 0.025$ (ces valeurs sont typiques d'une couche de base unidirectionnelle de type carbone-époxyde).

Expliciter les relations du critère de résistance dans les directions $\delta_k = 0°$, 90° et 45°. Montrer que si le critère est satisfait dans le cas $\delta_k = 0°$, alors il le sera aussi pour les autres angles.

FORMULAIRE

Relations polaires directes et inverses pour tenseurs d'ordre 2 (ici $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}$ ou $\mathbf{N} = \mathbf{L}$) :

$$\begin{array}{rcllll} 2T & = & L_{11} & +L_{22} & \\ 2Re^{2i\Phi} & = & L_{11} & -L_{22} & +2iL_{12} \end{array}$$

$$\begin{aligned} L_{xx} &= T + R\cos 2(\Phi - \delta) \\ L_{xy} &= R\sin 2(\Phi - \delta) \\ L_{yy} &= T - R\cos 2(\Phi - \delta) \end{aligned}$$

Relations polaires directes et inverses pour tenseurs d'élasticité (ici $\mathbf{Q} = \mathbf{L}$) :

$$\begin{aligned} L_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0\cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1\cos 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xxxy} &= R_0\sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1\sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xxyy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0\cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{xyxy} &= T_0 - R_0\cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{yyxy} &= -R_0\sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1\sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0\cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1\cos 2(\Phi_1 - \theta). \end{aligned}$$

Formules polaires en théorie de stratifiés : comportement de membrane (même forme des formules aussi pour une numérotation des couches de 1 à n : il suffit de changer les limites des sommes, les formules restant les mêmes)

$$\overline{T}_0 = \sum_{k=-p}^{p} T_{0_k}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{T}_1 = \sum_{k=-p}^{p} T_{1_k}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{R}_0 e^{4i\overline{\Phi}_0} = \sum_{k=-p}^{p} R_{0_k} e^{4i(\Phi_{0_k}+\delta_k)}(z_k - z_{k-1})$$

$$\overline{R}_1 e^{2i\overline{\Phi}_1} = \sum_{k=-p}^{p} R_{1_k} e^{2i(\Phi_{1_k}+\delta_k)}(z_k - z_{k-1})$$