Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 4 : les vagues

Exercice 1 : Vagues et tsunamis

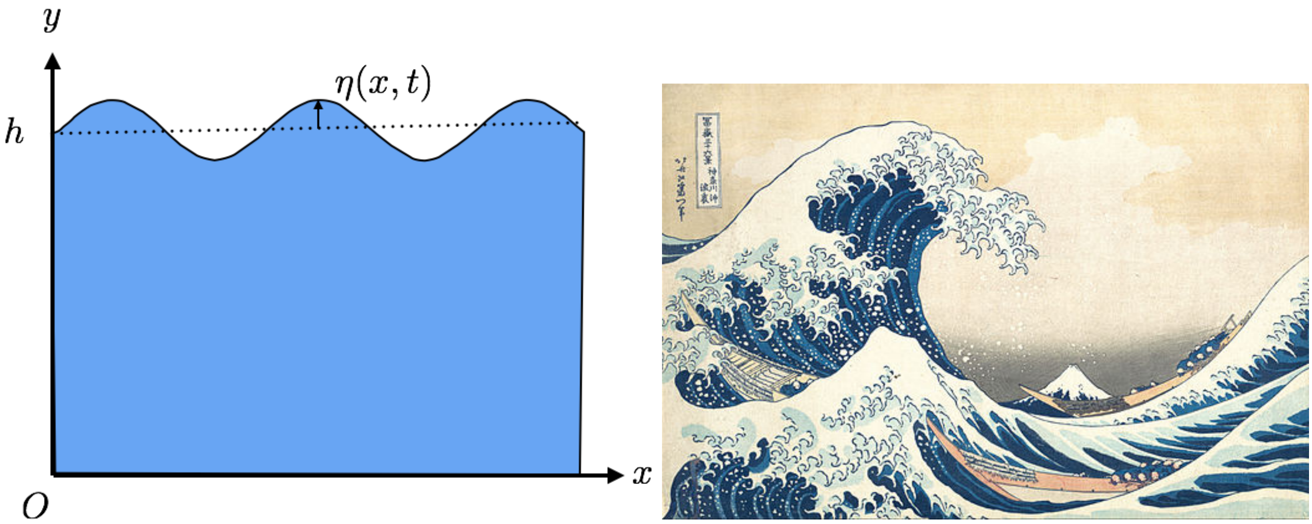

Figure 1 – Schématisation du problème

1. Rappeler la relation de dispersion des ondes de gravité.
2. Calculer la vitesse de phase des ondes de gravité.
3. On s'intéresse aux deux cas limites suivants :
   — $kh << 1$
   — $kh >> 1$
   Justifier et associer les expressions "propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde" à ces deux cas limites.
4. On rappelle que $\tanh(kh) \approx 1$ si $kh >> 1$ et que $\tanh(kh) \approx kh$ si $kh << 1$. Que vaut la vitesse de phase dans ces deux régimes (les ondes sont-elles dispersives) ?
5. **A la plage** On s'intéresse à la propagation des vagues à la plage. En observant les vagues on s'aperçoit qu'elles arrivent toutes les 8s sur le rivage. Si on suppose que la hauteur de l'eau est égale à 1m , quelle est la longueur d'onde des vagues ?
6. **Tsunami** On s'intéresse maintenant au cas d'un tsunami généré par un tremblement de terre sous-marin en plein océan (on suppose que la profondeur de l'océan est de 4km). On suppose que la

longueur d'onde associée au tsunami est de 100km. Dans quel régime est-on ("propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde") ? Quelle est la vitesse de propagation du tsunami (à exprimer en m/s et aussi en km/h) ?

7. **Le mascaret** Le mascaret est une onde de marée qui remonte le long de certain fleuve les jours de grandes marées. Quelle est la vitesse à laquelle remonte cette vague (on suppose qu'elle fait 2m de haut et que la longueur d'onde est environ 10m) dans un fleuve dont la profondeur est 2m ?

Exercice 2 : Vagues et ondes stationnaires

Dans ce problème, on s'intéresse à des ondes stationnaires créées dans une cuve à eau (cf Figure 2). Les notations sont celles du cours.

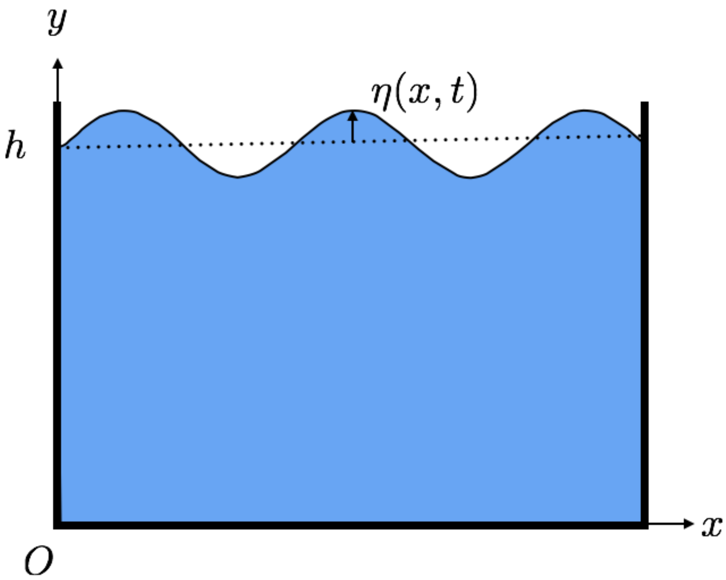

Figure 2 – Ondes stationnaires dans une cuve

1. Rappeler l'équation de Laplace, la condition de sol rigide et la condition à la surface. On exprimera ces relations pour le potentiel des vitesses $\phi(x, y, t)$. Ces relations sont-elles toujours valables pour cette configuration ?
2. Justifier le fait que pour cette configuration, on cherche la solution sous la forme de variables séparées : $\phi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$.
3. Montrer que
$$\phi(x, y, t) = \cosh(kx)(C\cos(kx) + D\sin(kx))T(t)$$
4. Montrer que la fonction $T(t)$ vérifie l'équation $T'' + \omega^2 T = 0$ et trouver la solution de cette équation.
5. D'après les questions précédentes et en effectuant quelques manipulations algébriques (non demandées ici), on suppose que la solution peut se mettre sous la forme :
$$\phi(x, y, t) = H\cosh(ky)\cos(kx)\cos(\omega t).$$
Quelle est la hauteur des vagues ?
6. Quelles sont les trajectoires des particules fluide dans cette configuration ?
7. le schéma de la figure 2 est-il correct ?

Exercice 3 : Ondes capillaires

Figure 3 – Ondes gravito-capillaires

Lors de l'étude des vagues (ou ondes de gravité) faites en cours, nous avons négligé l'effet de capillarté qui peut exister à la surface d'un liquide (à cause de la tension de surface, la surface du liquide peut ne pas être plane). Dans ce problème, on se propose de voir l'influence de la tension de surface sur une interface eau/air, on parle alors d'ondes gravito-capillaires (c'est à dire des ondes dues à la gravité et à la capillarité du liquide). Dans l'étape de modélisation, la tension de surface peut être prise en compte via une modification de la pression à la surface du liquide. Les équations sont alors modifiées et on obtient une équation de dispersion plus complète que lorsque seules les ondes de gravité sont considérées :

$$\omega^2 = \left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right) k \tanh(kh) \tag{1}$$

où T est la tension de surface qui se mesure en $\mathrm{N.m^{-1}}$.

1. Rappeler la relation générale qui existe entre la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k.
2. Quelle est la relation de dispersion des ondes de gravité seules ?
3. Montrer que si la longueur d'onde est bien plus grande que la longueur capillaire ($l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$), alors les effets capillaires deviennent négligeables.
4. On donne $T = 7.10^{-2}\mathrm{N.m^{-1}}$, estimer la longueur capillaire l_c au-dessus de laquelle les effets capillaires sont négligeables.
5. On suppose que la hauteur d'eau sans pertubration h est de l'ordre du mètre. Si on souhaite observer des effets capillaires importants, dans quel régime faut il se placer : $kh \ll 1$ ou $kh \gg 1$?
6. On suppose qu'on est dans ce régime jusqu'à la fin du problème. Montrer que la relation de dispersion se simplifie :
$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$
7. Calculer la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires.
8. Montrer que la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires à un minimum en $k = \frac{2\pi}{l_c}$.
9. Estimer la valeur numérique de la plus petite vitesse de phase possible pour les ondes gravito-capillaires (on donne $\sqrt[4]{28} = 2.3$).

Exercice 4 : Etude des vagues en eau peu profonde et profondeur variable

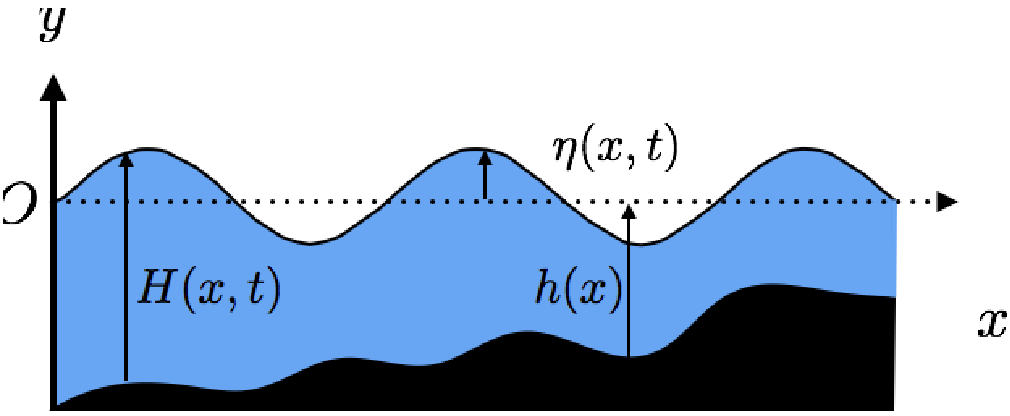

Figure 4 – Propagation de vagues avec une profondeur variable

On cherche à modéliser la propagation de vagues dans un cas où la profondeur est variable. En prenant comme référence $y = 0$ pour une configuration sans vague, on note (voir 4 :

- $h(x)$ la profondeur de l'eau dans une configuration sans vague,
- $H(x,t)$ la hauteur totale de l'eau avec vagues (état de base + perturbation) au point x et à l'instant t,
- $\eta(x,t)$ la hauteur des vagues (on remarque que $\eta(x,t) = H(x,t) - h(x)$).

Une des hypothèses fondamentales utilisées pour la modélisation de ce problème est de ne considérer que le cas pour lequel la profondeur est très faible devant la longueur d'onde des vagues $h(x) << \lambda$. On note le champ de vitesse : $\underline{V}(x,y,t) = u(x,y,t)\underline{e_x} + v(x,y,t)\underline{e_y}$. D'après l'hypothèse précédente, on supposera que u (composante horizontale de la vitesse du fluide) est de la forme :

$$u(x,y,t) = u(x,t).$$

On suppose que la masse volumique en tout point (x,y) de l'eau et à tout instant t est constante $\rho(x,y,t) = \rho_0$ et on néglige tout les phénomènes de viscosité.
Enfin, on donne le champ de pression dans le fluide :

$$p(x,y,t) = \rho_0 g(\eta(x,t) - y) + P_0$$

avec P_0 la pression atmosphérique (supposée constante).

1. En projetant l'équation d'Euler (bilan de quantité de mouvement) suivant $\underline{e_x}$, montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2}$$

2. En faisant un bilan de masse sur la tranche de fluide d'épaisseur dx, montrer que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

3. Les deux équations précédentes sont non-linéaires. On rappelle que $|u(x,t)| << 1$ et $|\eta(x,t)| << 1$. Linéariser les équations précédentes et montrer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

4. Montrer qu'on peut écrire une équation de propagation pour la fonction $\eta(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{5}$$

5. Calculer la relation de dispersion de cette équation
6. Calculer la vitesse de phase associée. Monter que si la profondeur est constante, alors $c_\phi = \sqrt{gh}$. Est ce cohérent avec les résultats du cours ?

Exercice 5 : Aménagement sous-marin de l'entrée d'un port

On reprend les notations et les résultats de l'exercice précédent. Pour éviter l'ensablement d'un port, une marche a été aménagée à son entrée. Ainsi, le sable qui vient du large est bloqué par la marche (on suppose que le sable est entrainé au fond de l'eau). On cherche à caractériser les conséquences de cet aménagement sur la hauteur des vagues dans le port. On modélise la géométrie du problème de la façon suivante :

— vers le large, on considère un fond plat de hauteur h_1,

— vers le port, on a un fond plat de hauteur h_2 (avec $h_2 < h_1$).

On note $\eta_1(x,t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_1 et $\eta_2(x,t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_2. On suppose que le changement de hauteur d'eau entraine l'apparition d'une onde transmise (T est le coefficient de transmission en amplitude) et d'une onde réfléchie (R est le coefficient de réflexion en amplitude).

Les conditions de continuité en $x = 0$ pour ce problème sont :

— continuité de la hauteur des vagues $(\eta_1(x=0,t) = u_2(x=0,t))$

— continuité du débit $(u_1(x=0,t)h_1 = u_2(x=0,t)h_2)$

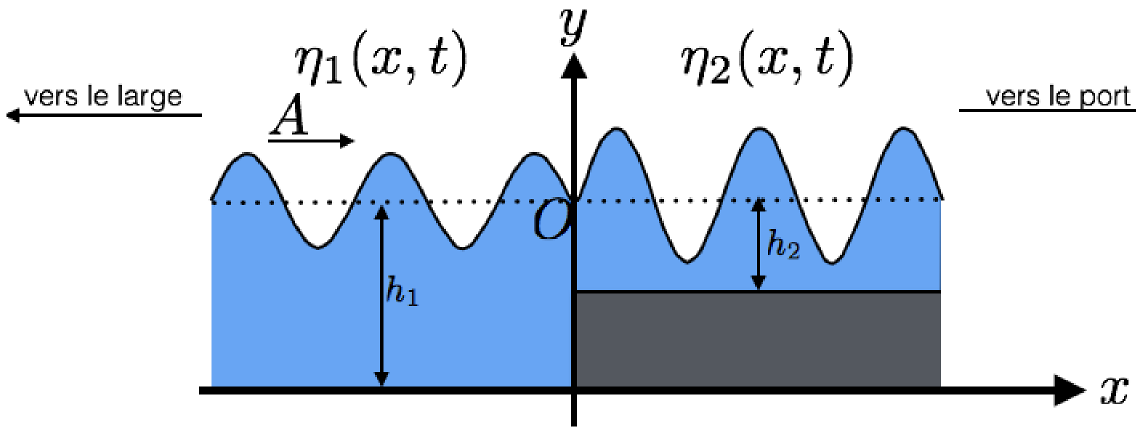

Figure 5 – Propagation de vagues en eau peu profonde

1. Donner les équations des ondes que doivent satisfaire $\eta_1(x,t)$ et $\eta_2(x,t)$ et les vitesses de phases c_1 et c_2 dans ces deux cas.

2. Donner les expressions de η_1 et η_2.
3. En utilisant la continuité de la hauteur des vagues en $x = 0$, trouver une première relation entre les coefficients de réflexion et de transmission.
4. Exprimer $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ en fonction des données du problème.
5. En utilisant la continuité du débit en $x = 0$, trouver une deuxième relation entre R et T.
6. Déduire des questions précédentes les expressions de R et T en fonction des vitesses c_1 et c_2.
7. Exprimer T en fonction de h_1 et h_2.
8. Quelle va être la conséquence de l'aménagement du fond sous-marin sur la hauteur des vagues dans le port. Commenter.