Examen de Structures Elancées - Partie Poutres (9 mars 2020)

`Durée de l'épreuve : 2h00. Corrado Maurini.`

`Les documents de cours et les téléphones portables sont interdits.`
`Le soin apporté à la représentation graphique des résultats sera valorisé dans l'évaluation.`

Exercice 1 : Poutres consoles

Les poutres en Figure 1 sont élastiques, isotropes, homogènes et sans déformations inélastiques. Leur section droite est rectangulaire de largeur b et épaisseur t.

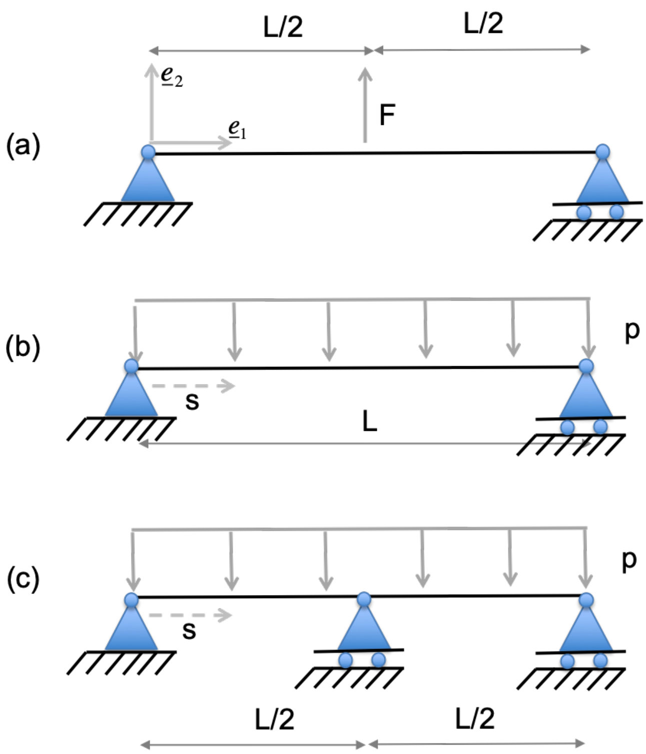

Figure 1 – Poutres consoles.

En utilisant un modèle d'Euler-Bernoulli en H.P.P., déterminer les diagrammes des efforts de cohésion N, T et M pour

1. La poutre en figure 1(a),
2. La poutre en figure 1(b),
3. La poutre en figure 1(c). *Conseil "gestion du temps" : vous pouvez traiter ce cas à la fin de l'épreuve, après avoir avoir répondu aux autres questions des Exercices 1 et 2.*

Représenter les résultats graphiquement.

4. Pour la poutre en figure 1(a), déterminer la distribution des contraintes σ_{11} et σ_{12} dans l'épaisseur, au point de l'axe le plus sollicité. Représenter les résultats graphiquement. Utiliser la théorie de Jourawsky pour σ_{12}. Quels sont les points les plus sollicités de la structure ?
5. Pour une poutre en acier de longueur $L = 1m$, épaisseur $h = 0.1m$, et largeur $b = 2h$, quel est l'ordre de grandeur de la charge F maximale supportable en régime élastique ?

Exercice 2. Câble d'une ligne à haute tension.

On se propose de modéliser un câble d'une ligne à haute tension. On modélise le câble comme un fil faiblement extensible et on utilise un modèle simplifié dans le cadre de l'approximation des *rotations modérées*. Le câble de masse linéique ρ, module de Young E et section d'aire S est suspendu entre deux appuis (les pylônes). Le ressort linéique de raideur k modélise la raideur des appuis et du système d'ancrage du câble sur les pylônes. Soit d la distance entre les appuis quand le ressort k est au répos et L la longueur du câble.

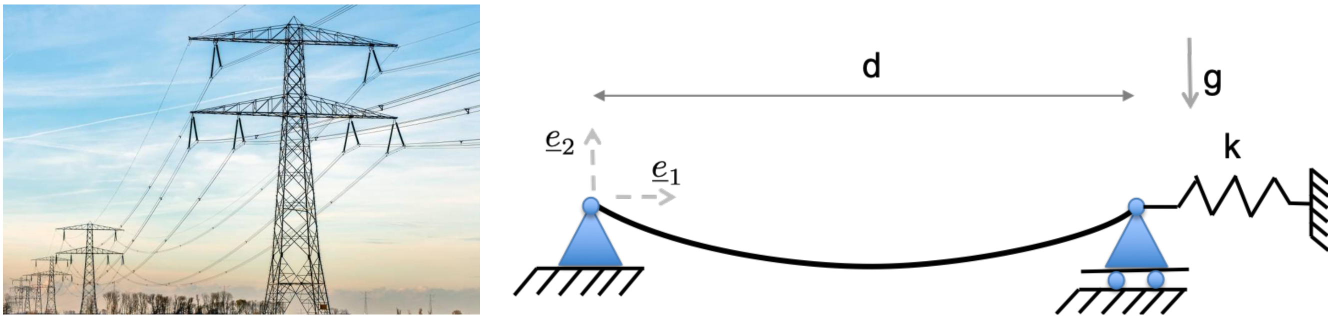

FIGURE 2 – Câble pesant de longueur L. Le réssort k modélise la rigidité du système d'attache du câble et du pylône. On suppose que le réssort est au répos quand la distance entre les appuis dans la figure de droite est d.

On dénote par $\{\underline{x}(s) = (s + u(s))\underline{e}_1 + v(s)\underline{e}_2,\ \ s \in (0, L)\}$ la configuration actuelle du cable, $(u(s), v(s))$ étant les composantes horizontales et verticales du déplacement par rapport à une configuration de référence horizontale $\{\underline{x}_R(s) = s\,\underline{e}_1\ s \in (0, L)\}$.

1. Donner l'expression géométriquement exacte de l'extension $e(s)$ du câble en fonction de u et v. Montrer que pour des faibles extensions et dans l'approximation des rotations modérées on peut utiliser l'expression approchée suivante

$$e(s) = u'(s) + \frac{v'(s)^2}{2}. \tag{1}$$

   On utilisera dans le reste de l'exercice l'expression (1).
2. Donner l'expression de la densité linéique de déformation élastique du câble.
3. Donner l'expression de l'énergie élastique du ressort k. Le réssort est au répos quand la distance entre les appuis est d.
4. Donner l'expression de l'énergie potentielle totale de la structure $\mathcal{E}(u, v)$, incluant l'effet de la pesanteur.
5. Calculer la dérivée directionnelle de l'énergie par rapport à u.
6. Calculer la dérivée directionnelle de l'énergie par rapport à v.
7. Donner l'espace des fonctions et variations admissibles pour u et v et la formulation variationnelle de la condition d'équilibre du câble.
8. A l'aide de l'approche variationnelle, montrer que u et v à l'équilibre doivent satisfaire le système

d'équations suivant :

$$\frac{dN(s)}{ds} = 0, \quad N(L) + k(u(L) + L - d) = 0, \quad u(0) = 0 \tag{2a}$$

$$-\frac{d(Nv'(s))}{ds} + p = 0, \quad v(0) = 0,\ v(L) = 0 \tag{2b}$$

$$\text{avec} \quad N(s) = ES\,e(s), \qquad e(s) = u'(s) + \frac{v'(s)^2}{2} \tag{2c}$$

où $p = \rho g S$.

9. Montrer que $N(s) = N_0$ est une constante. Résoudre le système (2) et donner l'expression de $u(s)$ et $v(s)$ à l'équilibre en fonction de la valeur de l'effort normal N_0. Représenter graphiquement (qualitativement) la configuration d'équilibre du câble et commenter les résultats. Donner l'expression du déplacement à l'extrémité $u(L)/L$ et de la flèche $v(L/2)/L$ en fonction de N_0.
10. Déterminer l'équation à résoudre pour calculer N_0 en fonction de ρ, E, S, L, d, k.
Note : La résolution explicite de cette équation dans le cas general n'est pas demandée. Il s'agit d'une équation cubique qui peut être résolue numériquement.
11. Pour le cas $ES \to \infty$ et $k \to \infty$, déterminer la valeur de N_0 et l'expression correspondante de la flèche $v(L/2)$ en fonction de d, L, ρ, g, S.
12. Discuter de l'effet d'une dilatation thermique sur la configuration du câble. La flèche serait-elle plus grande en été ou en hiver. Comment varierait-elle avec la température dans l'hypothèse $ES \to \infty$ et $k \to \infty$?