Devoir surveillé

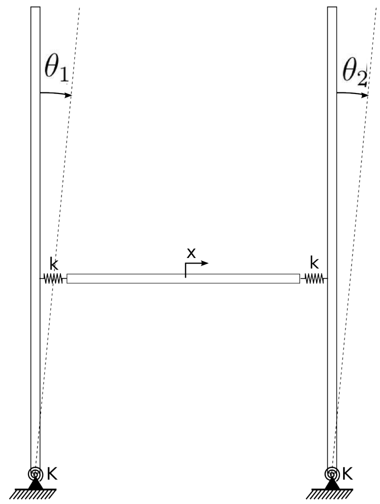
—

vibrations des systèmes discrets

Sans document — sans calculatrice

Vibrations des poteaux de rugby

On souhaite étudier les vibrations des poteaux de Rugby à l'aide d'un modèle à 3 degrés de liberté. Les deux poteaux verticaux sont assimilés à des poutres rigides de longueur L, de masse M, de moments d'inertie $I = \frac{ML^2}{3}$ et le poteau horizontal a une masse m et est situé à une hauteur h. Les poteaux verticaux sont fixés au sol par des ressorts de torsion identiques de raideur K. Le poteau horizontal est fixé aux deux poteaux verticaux par des ressorts identiques de raideur k. On ne s'intéresse ici qu'aux mouvements dans le plan (x, y), c'est-à-dire aux rotations des poteaux verticaux autour de leur point d'accroche et à la translation horizontale du poteau horizontal. On note x le déplacement horizontal de la poutre horizontale et θ_1 et θ_2 les angles de rotation des deux poutres verticales. Le déplacement x et les angles de rotation θ_1 et θ_2 décrivent de petits mouvements pris par rapport aux positions d'équilibre statique. On notera $\boldsymbol{q} = {}^t(x, \theta_1, \theta_2)$ le vecteur de coordonnées généralisées.



Données numériques :

- $\star$ $L = 7.35$ m
- $\star$ $h = 3$ m
- $\star$ $M = 100$ kg
- $\star$ $m = 40$ kg
- $\star$ $k = 10000$ N/m
- $\star$ $K = 100$ Nm/rad

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique associée au mouvement de la structure.

L'énergie cinétique associée au mouvement de la poutre horizontale a pour expression

$$T_h = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

L'énergie cinétique associée au mouvement des poutres verticales a pour expression

$$T_v = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}_2^2.$$

On a donc

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}_2^2.$$

2. Déduire de la première question l'expression de la matrice d'inertie du système.

La matrice d'inertie a pour expression

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M\dfrac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & M\dfrac{L^2}{3} \end{pmatrix}$$

.

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle du système.

L'énergie potentielle a pour expression

$$U = \frac{1}{2}K(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}k(x - h\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(x - h\theta_2)^2.$$

4. Déduire de la question précédente l'expression de la matrice de raideur du système.

La matrice de raideur a pour expression

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2k & -kh & -kh \\ -kh & K + kh^2 & 0 \\ -kh & 0 & K + kh^2 \end{pmatrix}$$

.

1 Mouvement libre : modes et fréquences propres

5. Comment procède-t-on pour identifier les fréquences propres du système ?

On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques : $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{X}e^{i\omega t}$. Cela donne le système linéaire :

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}.$$

Il faut s'assurer que les solutions $\boldsymbol{q}$ sont non nulles en résolvant l'équation aux valeurs propres :

$$\left| \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \right| = 0.$$

On obtient 3 valeurs propres : les carrés des pulsations propres ω_j. Les fréquences propres sont les $f_j = \dfrac{\omega_j}{2\pi}$.

6. Comment procède-t-on pour identifier les modes propres ?

Pour chacune des racines obtenues ω_j^2, on obtient le vecteur propre associé $\boldsymbol{X}_j$ en résolvant l'équation :

$$(\boldsymbol{K} - \omega_j^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{X}_j = 0.$$

7. La résolution numérique donne les résultats suivants :

Mode	**1**	**2**	**3**
Pulsations propres (rad/s)	ω_1 **0,2**	ω_2 **7,1**	ω_3 **23,4**
Modes propres	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$
	3	**0**	**-30**
	1	**-1**	**1**
	1	**1**	**1**

En déduire les valeurs des fréquences propres des modes et faire une représentation graphique des modes propres.

8. Donner la matrice modale $\boldsymbol{X}$.

La matrice modale a pour expression

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -30 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Mouvement forcé : réponse au contact du ballon avec un poteau

Lors de la transformation de l'essai de la victoire de la France en finale de la coupe du monde de rugby 2015, le buteur français, complètement excentré, envoie directement le ballon sur l'extrémité du poteau de gauche. Le contact est alors assimilé à une force ponctuelle orientée selon l'horizontale qui va mettre en vibrations le système.

9. Exprimer la puissance des efforts extérieurs.

La puissance des efforts extérieurs a pour expression

$$P = F\delta(t)v_1,$$

où la vitesse de l'extrémité du poteau 1 a pour expression

$$v_1 = L\dot{\theta}_1.$$

10. Déduire de la question précédente que le vecteur des efforts généralisés a pour expression

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ FL\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner ensuite l'expression de la transformée de Laplace du vecteur $\boldsymbol{Q}$.

Le vecteur des efforts généralisés a donc pour expression

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ FL\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et sa transformée de Laplace s'écrit

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ FL \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Écrire l'équation matricielle du mouvement en régime d'oscillations forcées.

L'équation matricielle du mouvement en régime d'oscillations forcées a pour expression

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}.$$

12. Donner l'expression de la formule permettant de calculer les matrices modales d'inertie et de raideur (ne pas faire le calcul).

On a

$$\boldsymbol{M}_p = {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{K}_p = {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}.$$

13. Écrire l'équation matricielle du mouvement en régime d'oscillations forcées dans la base modale. On notera $\boldsymbol{p}$ le vecteur de coordonnées modales.

On introduit le changement de variable $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{p}$ dans l'équation du mouvement :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\ddot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}.$$

On multiplie à gauche par la transposée de $\boldsymbol{X}$ et on obtient

$$\boldsymbol{M}_p\ddot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}.$$

14. Écrire l'équation matricielle du mouvement en régime d'oscillations forcées dans la base modale dans l'espace de Laplace. On considérera que les conditions initiales sont toutes nulles.

On a dans l'espace de Laplace l'équation suivante :

$$(s^2\boldsymbol{M}_p + \boldsymbol{K}_p)\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{Q}}.$$

15. Les matrices $\boldsymbol{M}_p$ et $\boldsymbol{\Delta}_p$ sont mises sous les formes respectives

$$\boldsymbol{M}_p = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{\Delta}_p = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}.$$

Donner les expressions des coordonnées du vecteur de coordonnées modales dans l'espace de Laplace en fonction des masses modales m_i et des pulsations propres ω_i.

On a

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{\Delta}_p + s^2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{M}_p^{-1t}\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{Q}},$$

Sachant que

$${}^t\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{Q}} = FL\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on en déduit

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = FL\begin{pmatrix} \dfrac{1}{m_1(s^2+\omega_1^2)} \\ -\dfrac{1}{m_2(s^2+\omega_2^2)} \\ \dfrac{1}{m_3(s^2+\omega_3^2)} \end{pmatrix},$$

16. Donner l'expression du vecteur de coordonnées modales dans le domaine temporel.

En utilisant la transformée de Laplace d'un sinus, on obtient directement

$$\boldsymbol{p}(t) = FL\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{m_1\omega_1} \\ -\dfrac{\sin(\omega_2 t)}{m_2\omega_2} \\ \dfrac{\sin(\omega_3 t)}{m_3\omega_3} \end{pmatrix},$$

17. En déduire l'expression du vecteur de coordonnées généralisées.

En utilisant la transformée de Laplace d'un sinus, on obtient directement

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{p}(t) = FL\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{m_1\omega_1} - 30\dfrac{\sin(\omega_3 t)}{m_1\omega_3} \\ \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{m_1\omega_1} - \dfrac{\sin(\omega_2 t)}{m_2\omega_2} + \dfrac{\sin(\omega_3 t)}{m_1\omega_3} \\ \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{m_1\omega_1} + \dfrac{\sin(\omega_2 t)}{m_2\omega_2} + \dfrac{\sin(\omega_3 t)}{m_1\omega_3} \end{pmatrix}.$$

18. Qui gagnera la coupe du monde ?

Rappels sur les transformées de Laplace

Définition : $f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{st}\mathrm{d}t$

Linéarité : $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 \tilde{f}_1(s) + \alpha_2 \tilde{f}_2(s)$

TL des dérivées : $\begin{cases} \dot{f}(t) \longleftrightarrow s\tilde{f}(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) \longleftrightarrow s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \end{cases}$

Propriétés de décalage : $\begin{cases} f(t-t_0)\Pi(t-t_0) \longleftrightarrow \tilde{f}(s)e^{-st_0} \\ f(t)e^{-t\omega_0} \longleftrightarrow s^2\tilde{f}(s+\omega_0) \end{cases}$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\Pi(t)t^n e^{\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-\omega_0)^{n+1}}$$

$$\Pi(t)\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\Pi(t)\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\Pi(t)e^{-at}\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$\Pi(t)e^{-at}\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$