RAPPEL DU
N° DE PLACE

Examen du 18 Mai 2016

Elements de corrigé

Cas 1 $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

1) $\operatorname{div}(\vec{V} v) = \underbrace{(\operatorname{div} \vec{V})}_{0} v + \vec{V} \cdot \underbrace{\operatorname{grad} v}_{\nabla v} = \vec{V} \cdot \nabla v$

2) On multiplie l'équation (1) par $v \in H^1_0(\Omega)$ et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega \left(-\operatorname{div}(D(x)\nabla u) + \vec{V}\cdot\nabla u\right) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(D(x)\nabla u) \cdot v \, dx = \int_\Omega -\operatorname{div}(D(x)\nabla u \cdot v) \, dx + \int_\Omega D(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \underbrace{\int_{\partial\Omega} -\vec{n} \cdot D(x) \nabla u \cdot \underset{0}{v} \, ds}_{=0} + \int_\Omega D(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx ;$$

La formulation variationnelle obtenue est :

$$\underbrace{\int_\Omega D(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \vec{V}\cdot\nabla u \cdot v \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v}_{L(v)}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

$$\int_\Omega (\vec{V}\cdot\nabla u) v \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{V} u) \cdot v \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{V} u v) - \int_\Omega \vec{V} \cdot u \cdot \nabla v \, dx = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot u \underset{0}{v} \cdot \vec{n} \, ds}_{0} - \int_\Omega \vec{V} \cdot (u \nabla v) \, dx$$

Donc $\int_\Omega \vec{V} \cdot (v \nabla u) \, dx = -\int_\Omega \vec{V} \cdot (u \nabla v) \, dx \Longrightarrow$

$$\boxed{\int_\Omega \vec{V}\cdot(v\nabla u)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}\cdot(v\nabla u - u\nabla v)\,dx}$$

On remplace dans l'expression de a_1 et on trouve.

$$\boxed{a_1(u,v) = \int_\Omega D(x)\,\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}\cdot(v\nabla u - u\nabla v)\,dx}$$

3) Cours.

4) Cours

5) a_1 est une forme bilinéaire si a_1 est linéaire par rapport à chacune des variables.

$$a_1(\lambda u_1+u_2,v) = \int_\Omega D(x)\,\nabla(\lambda u_1+u_2)\cdot\nabla v\,dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}\,(v\nabla(\lambda u_1+u_2) - (\lambda u_1+u_2)\nabla v)\,dx =$$
$$= \lambda\Big[\int_\Omega D(x)\,\nabla u_1\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}\,(v\nabla u_1 - u_1\nabla v)\,dx\Big] +$$
$$+\int_\Omega D(x)\,\nabla u_2\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}\,(v\nabla u_2 - u_2\nabla v)\,dx$$
$$= \lambda a_1(u_1,v) + a_1(u_2,v)$$

De même, on vérifie que $a_1(u,\lambda v_1+v_2) = \lambda a_1(u,v_1) + a_1(u,v_2)$

Pour démontrer la continuité il faut montrer que $\exists M>0$ t.q.

$$|a_1(u,v)| \leq M\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},\quad \forall u,v\in H^1_0(\Omega).$$

$$|a_1(u,v)| \leq \Big|\int_\Omega D(x)\,\nabla u\cdot\nabla v\,dx\Big| + \Big|\int_\Omega \vec{V}\cdot v\nabla u\,dx\Big|$$

On va estimer chaque intégrale :

RAPPEL DU N° DE PLACE

$$\left|\int_\Omega D(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \leq \int_\Omega |D(x)|\,|\nabla u\cdot\nabla v|\,dx \quad (*)$$

On sait que $0 < D_0 \leq D(x) \leq D_1$, $\forall x\in\Omega$.
(hypothèse).

$\Rightarrow |D(x)| \leq D_1$.

On revient dans $(*)$:

$$\underline{\left|\int_\Omega D(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right|} \leq \int_\Omega D_1 |\nabla u\cdot\nabla v|\,dx \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq D_1 \underbrace{\sqrt{\int_\Omega(\nabla u)^2 dx}}_{\leq \|u\|_{H^1}}\ \underbrace{\sqrt{\int_\Omega(\nabla v)^2 dx}}_{\leq \|v\|_{H^1}}$$

$$\underline{\leq D_1 \|u\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}} \quad \forall u,v\in H^1_0(\Omega)$$

On estime la 2ème intégrale :

$$\left|\int_\Omega \vec{V}\cdot v\nabla u\,dx\right| \leq \int_\Omega |V_i|\,\left|v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|dx \quad (**)$$

$\vec{V}\in(C^1(\bar\Omega))^3$, $\bar\Omega$ = domaine borné $\Rightarrow \vec{V}$ est bornée

$\Rightarrow \exists M_1, M_2, M_3$ t.q. $|V_i(x)| \leq M_i$, $i\in\{1,2,3\}$

On revient dans $(**)$:

$$\underline{\left|\int_\Omega \vec{V}\cdot v\nabla u\,dx\right|} \leq \int_\Omega M_i\left|v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|dx \underset{\text{Cauchy-Schwarz.}}{\leq} \cancel{M_i\sqrt{\int_\Omega v^2dx}}$$

$$\leq M_i\sqrt{\int_\Omega v^2dx}\sqrt{\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx} \leq \cancel{\max\{M_1,M_2,M_3\}}$$

$$\leq \max\{M_1,M_2,M_3\}\ \|v\|_{L^2}\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2}\right)$$

$$\underline{\leq \max\{M_1,M_2,M_3\}\ \|v\|_{H^1}\,\|u\|_{H^1}}$$

En conclusion :

$$|a_1(u,v)| \leq \underbrace{\left(D_1 + \max\{M_1, M_2, M_3\}\right)}_{>0} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u,v \in H^1_0$$

Donc a_1 = continue.

• <u>coercivité</u> :

$$a_1(v,v) = \int_\Omega D(x) \nabla v \cdot \nabla v \, dx \geq \int_\Omega D_0 (\nabla v)^2 dx$$

On utilise maintenant l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega v^2 dx \leq C \int_\Omega (\nabla v)^2 dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\|v\|^2_{H^1} = \int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega (\nabla v)^2 dx \leq (C+1) \int_\Omega (\nabla v)^2 dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{D_0}{C+1} \|v\|^2_{H^1} \leq D_0 \int_\Omega (\nabla v)^2 dx$$

Donc $\exists\, \alpha > 0$, $\alpha = \frac{D_0}{C+1}$ t.q.

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

6) La forme a n'est pas symétrique car.

$a_1(v,u) \neq a_1(u,v)$ puisque

$$\underbrace{\int_\Omega \vec{V}(u\nabla v - v\nabla u)\, dx}_{\text{contribution à } a_1(v,u)} = \underbrace{-\int_\Omega \vec{V}(v\nabla u - u\nabla v)\, dx}_{\text{contribution à } a_1(u,v)}$$

$$\neq \int_\Omega \vec{V}(v\nabla u - u\nabla v)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$\Rightarrow a_1(v,u) \neq a_1(u,v)$.

7) L est une forme linéaire car

$$L(\lambda v_1+v_2) = \int_\Omega f(\lambda v_1+v_2)\,dx = \lambda\int_\Omega f v_1\,dx + \int_\Omega f v_2\,dx$$

$$= \lambda L(v_1) + L(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$$

- continuité :

$$|L(v)| \leq \int_\Omega |f v|\,dx \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\int_\Omega f^2 dx}}_{\|f\|_{L^2}} \underbrace{\sqrt{\int_\Omega v^2 dx}}_{\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}}$$

$$\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donc $\exists M = \|f\|_{L^2}$ t.q.

$$|L(v)| \leq M\|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

8) Oui. On applique le théorème de Lax-Milgram
car on a déjà vérifié les hypothèses :

$$\begin{cases} (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}) = \text{espace de Hilbert} \\ a_1 - \text{bilinéaire, continue, coercive} \\ L - \text{linéaire, continue} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists u \in H_0^1$ tq. $\quad a_1(u,v) = L(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

9) On a déjà montré que si u est solution du (PC) alors u = solution du (PV).
Soit u solution du (PV). Alors $\gamma_0(u) = 0$ pp sur $\partial\Omega$
donc la condition limite est satisfaite.
D'autre part, u vérifie la formulation variationnelle.

$$a_1(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Comme $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$,

$$a_1(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

En faisant une intégration dans le sens inverse au celui de la question 2 on a :

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(D(x)\nabla u)\psi\,dx + \int_\Omega(\vec{V}\cdot\nabla u)\psi\,dx = \int_\Omega f\psi\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega\left[\left(-\operatorname{div}(D(x)\nabla u)\right) + \vec{V}\nabla u - f\right]\psi\,dx = 0$$

$\forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$\left(-\operatorname{div}(D(x)\nabla u) + \vec{V}\nabla u - f\right) \in L^2(\Omega)$

$\Rightarrow$ théorème du cours

$$-\operatorname{div}(D(x)\nabla u) + \vec{V}\cdot\nabla u - f = 0 \text{ pp de } \Omega$$

Donc u est solution du (PC)

10) Si u est solution du (PV) alors

$$a_1(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En particulier, pour $v = u$ on a

$$\boxed{a_1(u, u) = L(u)} \quad (i)$$

a_1 étant coercive, $\exists \alpha > 0$ tq.

$$\boxed{a_1(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2} \quad (ii)$$

L étant continue, ~~$\exists M > 0$ tq~~. on a vu que

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \quad \forall v$$

Pour $v = u$ on a aussi $\boxed{|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1}}$ (iii)

De (i), (ii), (iii) on a :

$$\alpha\|u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1} \Rightarrow \|u\| \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\alpha}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{\alpha}.}$$

Cas 2 : $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$.

RAPPEL DU N° DE PLACE

11) On reprend les calculs de la question 2 du cas 1.

Comme $\operatorname{div}(u\vec{V}) = (\operatorname{div}\vec{V})\,u + \vec{V}\cdot\nabla u$

le terme qui change est :

$$\int_\Omega (\vec{V}\cdot\nabla u)\,v\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}(v\nabla u - u\nabla v)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div}\vec{V})\,uv\,dx.$$

La nouvelle formulation variationnelle est :

$$\underbrace{\int_\Omega D(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V}(v\nabla u - u\nabla v)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div}\vec{V})\,uv\,dx}_{= a_2(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v\,dx}_{L(v)}.$$

Donc $a_2(u,v) = a_1(u,v) + a(u,v)$.

12) $$a(v,v) = \int_\Omega D(x)(\nabla v)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div}\vec{V})\,v^2\,dx.$$

$$\int_\Omega D(x)|\nabla v|^2\,dx \geq D_0 \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx$$ compte tenu des propriétés de $D(x)$.

On utilise l'inégalité de l'énoncé :

$$\frac{1}{2}(\operatorname{div}\vec{V}) \leq \frac{D_0-\varepsilon}{C_0} \Rightarrow \int_\Omega \frac{1}{2}(\operatorname{div}\vec{V})\,v^2\,dx \leq \int_\Omega \frac{D_0-\varepsilon}{C_0}\,v^2\,dx.$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega \frac{1}{2}\operatorname{div}(\vec{V})\,v^2\,dx \geq -\frac{D_0-\varepsilon}{C_0}\int_\Omega v^2\,dx \geq (-D_0+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx$$

On revient dans l'expression de $a_2(v,v)$:

$$a_2(v,v) \geq D_0 \int_\Omega (\nabla v)^2 dx + (-D_0+\varepsilon) \int_\Omega (\nabla v)^2 dx = \varepsilon \int_\Omega (\nabla v)^2 dx.$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{C_0+1} \left(\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega (\nabla v)^2 dx \right) = \frac{\varepsilon}{C_0+1} \|v\|_{H^1}^2.$$

Donc a_2 est coercive.

13). $a_2(u,v) = a_1(u,v) + c(u,v)$.

$\left.\begin{array}{l} a_1 \text{ étant bilinéaire} \\ c \text{ étant bilinéaire} \end{array}\right\} \Rightarrow a_2$ est bilinéaire.

$$|a_2(u,v)| \leq |a_1(u,v)| + |c(u,v)| \leq \underbrace{M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}}_{\text{démontré à la question (5)}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{D_0-\varepsilon}{C_0} \left| \int_\Omega uv \right| dx}_{\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}}$$

$$\leq \max \left\{ M, \frac{D_0-\varepsilon}{C_0} \right\} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

ce qui prouve la continuité de a_2.

a_2 est donc bilinéaire, continue et coercive, les hypothèses du th. de Lax-Milgram sont vérifiées (l'espace est le même que celui du cas 1 et l'application L est la même).

Le problème a donc une solution unique.