

Examen de première session du Mardi 8 janvier 2019.

Durée de l'épreuve : 2h00.

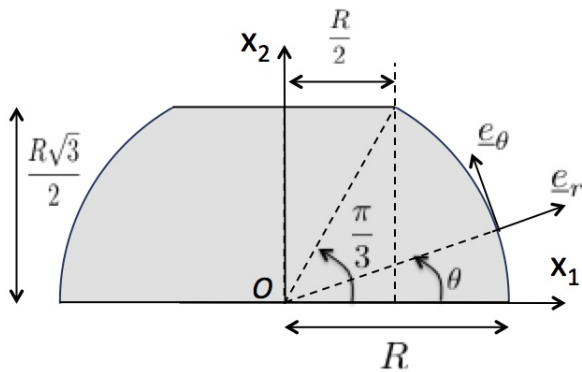
Les documents de cours et calculatrices ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.

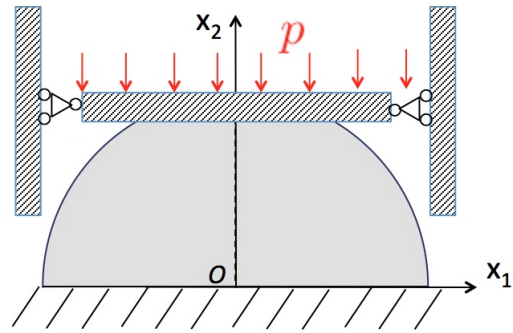
Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

Présentation du problème

On se propose d'étudier la déformation d'un joint en caoutchouc. Dans le repère $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et en l'absence de chargement la section transverse du joint est constituée d'un demi disque de rayon R tronqué en son sommet. Elle est représentée en Figure ?? . Du point de vue géométrique on définit également la base mobile $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ permettant de décrire aisément le demi-disque tronqué.



(a) Géométrie du joint



(b) Schéma du chargement et des conditions aux limites du joint

FIGURE 1 – Représentation schématique du joint et de son chargement.

La dimension de la structure dans la direction \underline{e}_3 est très grande devant R de sorte que l'on peut se placer sous l'hypothèse de déformations planes dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, soit :

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}$$

les autres composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant nulles.

La structure est constituée d'un matériau dont la loi de comportement est élastique linéaire et peut donc être représentée par le tenseur de rigidité \mathbb{A} tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Plus précisément le matériau est homogène et isotrope et son comportement est décrit par la loi de Hooke dont les coefficients de Lamé sont notés λ et μ .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I_d}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le joint est parfaitement collé (i.e. encastré) sur sa partie basse à une paroi rigide fixe. Sur la partie supérieure du joint est posée paroi rigide qui cette fois est mobile mais libre de se déplacer dans la direction \underline{e}_2 uniquement. Le coefficient de frottement entre le joint et la paroi est supposé nul de sorte que le joint puisse glisser sans frottement le long de la paroi. Un effort de pression constant d'intensité p connue est appliqué sur la paroi mobile. En raison de la rigidité de cette dernière l'effort de pression est intégralement retransmis au joint. Les frontières droites et gauche du joint sont libres d'effort. L'ensemble de ces conditions aux limites et de chargement sont schématiquement représentées à la Figure ?? . Enfin les efforts de pesanteurs sont négligés devant les efforts de pression en jeu. Le joint est en équilibre sous ce chargement et l'hypothèse des petites perturbations est supposée vérifiée.

L'objectif du problème est de déterminer le déplacement vertical (ou course) de la paroi rigide après la mise en pression du joint.

Formulations du problème

1. Expliquer pourquoi on peut se limiter à l'étude du système équivalent de section Ω décrit en Figure ?? afin de résoudre le problème proposé.

L'axe \underline{e}_2 est un axe de symétrie pour la géométrie du joint, pour son chargement ainsi qu'un axe de symétrie matérielle car le matériau constituant le joint est isotrope.

On rappelle qu'en l'absence d'efforts de pesanteur l'équilibre du système réduit est traduit par l'équation suivante :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1)$$

Sous ces mêmes hypothèses la loi de comportement peut s'écrire sous forme matricielle à l'aide de la notation de Voigt :

$$\{\sigma\} = [A] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

où $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^t$ et $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^t$.

2. Donner les équations traduisant les conditions aux limites qui viennent compléter la formulation forte du problème réduit Figure ?? constituée des équations (??) et (??).

Remarque : On pourra utiliser la base cartésienne ou la base cylindrique indifféremment pour faciliter l'écriture.

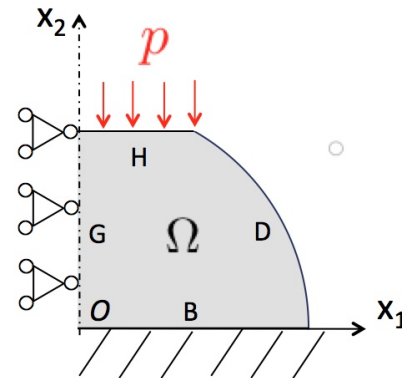


FIGURE 2 – Représentation schématique du système réduit

- Frontière B : CL en déplacement imposé (adhésion parfaite = **encastrement sur paroi fixe**).

$$\underline{u}(x_1, 0) = \underline{0} \quad \forall x_1 \in [0, R]$$

- Frontière H : CL en efforts imposés (**pression normale**).

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2}).(\underline{e}_2) = -p\underline{e}_2 \quad \forall x_1 \in [0, R/2]$$

$$\begin{cases} \sigma_{12}\left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ \sigma_{22}\left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = -p \end{cases} \quad \forall x_1 \in [0, R/2]$$

- Frontière D : CL en efforts (**surface libre**).

$$\underline{\underline{\sigma}}(r = R, \theta).(\underline{e}_r) = \underline{0} \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(R, \theta) = 0 \\ \sigma_{\theta r}(R, \theta) = 0 \end{cases} \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

- Frontière G : CL **de symétrie**.

$$\underline{u}(x_1 = 0, x_2).(-\underline{e}_1) = 0 \rightarrow \boxed{u_1(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \left[0, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right]}$$

$$\underline{\sigma}_T(x_1 = 0, x_2) = \underline{0}$$

$$\underline{\sigma}_T(x_1 = 0, x_2) = \underline{\underline{\sigma}}(0, x_2).(-\underline{e}_1) - ((-\underline{e}_1).\underline{\underline{\sigma}}.(-\underline{e}_1))(-\underline{e}_1)$$

$$\underline{\sigma}_T(x_1 = 0, x_2) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$$\boxed{\sigma_{21}(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \left[0, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right]}$$

3. Définir l'ensemble des champs cinématiquement admissibles : \mathcal{U}_{ad}

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(x_1, x_2) \text{ réguliers et donc continus tels que :} \\ \underline{v}(x_1, 0) = \underline{0} \quad \forall x_1 \in [0, R] \\ v_1(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \left[0, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right] \end{array} \right\}$$

4. En partant de l'équation d'équilibre (??) Montrer que la formulation faible du problème s'écrit sous la forme :

Trouver $\underline{u}(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dS = -p \int_0^{R/2} v_2 \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) dx_1 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}$$

On choisit un champ test $\underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}$. On multiplie l'équation d'équilibre par \underline{v} puis on intègre :

$$\int_V \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} dV = 0$$

On réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} &= \sigma_{ij,j} v_i \\ &= (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - (\sigma_{ij} v_{i,j}) \\ &= (\sigma_{ji} v_i)_{,j} - (\sigma_{ji} v_{i,j}) \\ &= \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_V \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} dV &= \int_V \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) dV - \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) dV \\ &= \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS - \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV \end{aligned}$$

car $\underline{\underline{grad}}(\underline{v}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) + \underline{\underline{\omega}}(\underline{v})$ et $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}}(\underline{v}) = 0$ car $\underline{\underline{\omega}}(\underline{v})$ est antisymétrique et $\underline{\underline{\sigma}}$ symétrique.

Puis :

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV = \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS \quad (3)$$

Par unité d'épaisseur le membre de droite devient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dl &= \begin{cases} \int_0^R \underline{\underline{\sigma}}(x_1, 0) \cdot (-\underline{e}_2) \cdot \underbrace{\underline{v}(x_1, 0)}_{=0} dx_1 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}(R, \theta) \cdot \underline{e}_r}_{=0} \cdot \underline{v}(R, \theta) R d\theta \\ + \int_0^{R/2} \underline{\underline{\sigma}} \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{v} \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) dx_1 \\ + \int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}(0, x_2) \cdot (-\underline{e}_1) \cdot \underline{v}(0, x_2)}_{=-\sigma_{11}(0, x_2) \underbrace{v_1(0, x_2)}_{=0} - \sigma_{21}(0, x_2) \underbrace{v_2(0, x_2)}_{=0}} dx_2 \end{cases} \\ \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS &= \int_0^{R/2} -p \cdot v_2 \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) dx_1 \end{aligned}$$

Par unité d'épaisseur le membre de gauche devient :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dS = \int_{\Omega} (\mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dS = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dS$$

par symétrie du tenseur de rigidité élastique.

Au final l'équation (??) simplifiée permet d'accéder à la formulation faible du problème :
 Trouver $\underline{u}(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) dS = -p \int_0^{R/2} v_2 \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) dx_1 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}$$

Résolution par la méthode des éléments finis

Représentation paramétrique

Dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ le demi joint est maillé à l'aide de deux éléments représentés sur la Figure ?? . Les deux éléments numérotés (1) et (2) sont des triangles à six nœuds (T6).

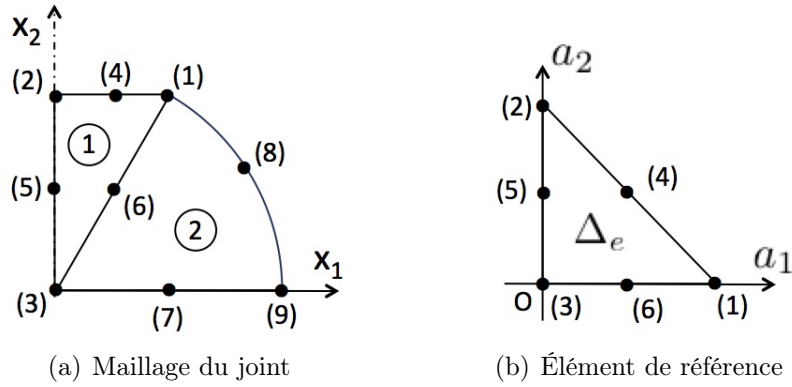


FIGURE 3 – Définition du maillage à deux T6 et de l'élément de référence associé

Les matrices des coordonnées du maillage $[T]$, et de connectivité du maillage $[connec]$ sont données et valent :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{4} & \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{R\sqrt{3}}{4} \\ \frac{R}{4} & \frac{R\sqrt{3}}{4} \\ \frac{R}{2} & 0 \\ \frac{R\sqrt{3}}{2} & R \\ \frac{2}{R} & \frac{2}{0} \end{bmatrix} \quad [connec] = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (3) & (9) & (6) & (7) & (8) \end{bmatrix}$$

L'élément de référence associé à ces deux éléments est le triangle à six nœuds noté Δ_e représenté à la Figure ??.

On rappelle ci-dessous les fonctions de forme de l'élément :

$$\begin{cases} N_1 = a_1 (2a_1 - 1) \\ N_2 = a_2 (2a_2 - 1) \\ N_3 = (1 - a_1 - a_2) (1 - 2a_1 - 2a_2) \\ N_4 = 4a_1 a_2 \\ N_5 = 4a_2 (1 - a_1 - a_2) \\ N_6 = 4a_1 (1 - a_1 - a_2) \end{cases}$$

5. Justifier l'emploi d'éléments de type T6 pour le maillage.

Outre une représentation plus fine des champs solution grâce à des fonctions d'interpolation de degré supérieur, l'utilisation de T6 permet de minimiser l'écart à la géométrie réelle du joint en offrant la possibilité d'avoir des frontières courbes.

6. Énoncer les propriétés que doivent vérifier les fonctions de forme pour assurer la conformité de l'élément.

→cf cours (partition de l'unité, valeurs aux nœuds et sur les arêtes, image d'un nœud,...)

7. Montrer que la représentation paramétrique de l'élément ① s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{Ra_1}{2} \\ x_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} (a_1 + a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = N_1 x_1^{(1)} + N_2 x_1^{(2)} + N_3 x_1^{(3)} + N_4 x_1^{(4)} + N_5 x_1^{(5)} + N_6 x_1^{(6)} \\ x_2 = N_1 x_2^{(1)} + N_2 x_2^{(2)} + N_3 x_2^{(3)} + N_4 x_2^{(4)} + N_5 x_2^{(5)} + N_6 x_2^{(6)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 (2a_1 - 1) \frac{R}{2} + 4a_1 a_2 \frac{R}{4} + 4a_1 (1 - a_1 - a_2) \frac{R}{4} \\ x_2 = a_1 (2a_1 - 1) \frac{R\sqrt{3}}{2} + a_2 (2a_2 - 1) \frac{R\sqrt{3}}{2} + 4a_1 a_2 \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ \quad + 4a_2 (1 - a_1 - a_2) \frac{R\sqrt{3}}{4} + 4a_1 (1 - a_1 - a_2) \frac{R\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = R \left[a_1^2 - \frac{a_1}{2} + a_1 a_2 + a_1 - a_1^2 - a_1 a_2 \right] \\ x_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \left[2a_1^2 - a_1 + 2a_2^2 - a_2 + 4a_1 a_2 + 2a_2 - 2a_1 a_2 - 2a_2^2 + 2a_1 - 2a_1^2 - 2a_1 a_2 \right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{Ra_1}{2} \\ x_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} (a_1 + a_2) \end{cases}}$$

8. Construire la matrice jacobienne $[J^{(1)}(a_1, a_2)]$ de l'élément ① et calculer le jacobien associé. Que constatez-vous ? Était-ce attendu ?

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & 0 \\ \frac{R\sqrt{3}}{2} & \frac{R\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad J = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 2 \times \text{Aire de } \textcircled{1}$$

Le jacobien est constant et vaut deux fois l'aire du triangle. Le degré des fonctions d'interpolation ne permettait pas de prévoir cela a priori, le jacobien d'un T6 étant de base un polynôme de degré un. Néanmoins la forme géométrique de la maille de $\textcircled{1}$ (triangle réel à bords droits i.e. sans courbure sur les côtés) permettait d'entrevoir ce résultat.

9. Calculer la matrice $\left[J^{\textcircled{1}}(a_1, a_2)\right]^{-1}$ matrice inverse de la matrice jacobienne de l'élément $\textcircled{1}$

$$\left[J^{\textcircled{2}}\right]^{-1} = \frac{4}{R^2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{R\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{R\sqrt{3}}{2} & \frac{R}{2} \end{bmatrix} \quad \boxed{\left[J^{\textcircled{2}}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R\sqrt{3}} \end{bmatrix}}$$

Représentation des champs locaux de déplacement, déformation et contrainte

On choisit de travailler avec des éléments T6 isoparamétriques de sorte que le déplacement en tout point des éléments réels \textcircled{i} ($i \in \{1, 2\}$) pourra être interpolé à l'aide des fonctions de formes et des déplacements des noeuds uniquement.

10. Donner la taille et la forme de la matrice d'interpolation $\left[N_e^{\textcircled{i}}\right]$ telle que :

$$\{\underline{u}\} = \left[N_e^{\textcircled{i}}\right] \left\{U^{\textcircled{i}}\right\}$$

où le vecteur $\left\{U_e^{\textcircled{i}}\right\}$ est le vecteur des déplacements des noeuds de \textcircled{i} ($i \in \{1, 2\}$) dans l'espace réel. On donnera également la taille de $\left\{U_e^{\textcircled{i}}\right\}$.

La matrice d'interpolation est la même pour les deux éléments :

$$\{\underline{u}\} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \dots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & 0 & N_6 \end{bmatrix}}_{Dim=2 \times 12} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(6)} \\ u_2^{(6)} \end{Bmatrix}}_{Dim=12 \times 1}$$

$$\left[N_e^{\textcircled{i}}\right] = \begin{bmatrix} a_1(2a_1 - 1) & 0 & a_2(2a_2 - 1) & 0 & \dots & 4a_1(1 - a_1 - a_2) & 0 \\ 0 & a_1(2a_1 - 1) & 0 & a_2(2a_2 - 1) & \dots & 0 & 4a_1(1 - a_1 - a_2) \end{bmatrix}$$

On donne l'expression de la matrice $[D_N]$ des dérivées des fonctions de forme telle que :

$$[D_N]_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial a_j}$$

$$[D_N] = \begin{bmatrix} (4a_1 - 1) & 0 \\ 0 & (4a_2 - 1) \\ 4(a_1 + a_2) - 3 & 4(a_1 + a_2) - 3 \\ 4a_2 & 4a_1 \\ -4a_2 & 4(1 - a_1 - 2a_2) \\ 4(1 - a_2 - 2a_1) & -4a_1 \end{bmatrix}$$

On cherche maintenant à construire la matrice $\left[B_e^{(1)}\right]$ permettant de calculer les déformations dans l'élément à partir des déplacements aux nœuds de la façon suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \left[B_e^{(1)}\right] \{U^{(1)}\}$$

11. Donner la dimension de la matrice $\left[B_e^{(1)}\right]$.

$\text{Dim}\left[B_e^{(1)}\right] = 3 \times 12$. Ceci correspond à 3 composantes de déformation en déformations planes et 2 composantes de déplacement par nœuds pour 6 nœuds dans l'élément.

12. En utilisant la définition de $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ donner l'expression des termes de la première ligne de la matrice $\left[B_e^{(1)}\right]$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial N_k u_1^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_1} &= \frac{\partial N_k}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_k}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = [D_N]_{k1} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{k2} [J]_{21}^{-1} \\ \varepsilon_{11} &= \sum_{k=1}^6 \left([D_N]_{k1} \underbrace{[J]_{11}^{-1}}_{\frac{2}{R}} + [D_N]_{k2} \underbrace{[J]_{21}^{-1}}_{-\frac{2}{R}} \right) u_1^{(k)} \\ \varepsilon_{11} &= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^6 ([D_N]_{k1} - [D_N]_{k2}) u_1^{(k)} \\ \varepsilon_{11} &= \left\{ \frac{2}{R} \left[(4a_1 - 1)u_1^{(1)} - (4a_2 - 1)u_1^{(2)} + 4(a_2 - a_1)u_1^{(4)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{(4(1 - a_1 - 2a_2) - 4a_2)}_{4(1-a_1-3a_2)} u_1^{(5)} + \underbrace{(4(1 - a_2 - 2a_1) + 4a_1)}_{4(1-a_2-a_1)} u_1^{(6)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left[B_e^{(1)}\right]_{1j} = \frac{2}{R} \begin{bmatrix} (4a_1 - 1) & 0 & -(4a_2 - 1) & 0 & 0 & 0 & 4(a_2 - a_1) & 0 & 4(1 - a_1 - 3a_2) & 0 & 4(1 - a_2 - a_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Contributions élémentaires à l'énergie de déformation et calcul du second membre élémentaire

13. Établir l'expression matricielle de $\mathcal{E}^{(1)}$, la contribution de l'élément (1) au calcul de l'énergie de la structure définie par :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \int_{(1)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV$$

On l'exprimera en fonction de $\left[Be^{(1)}(a) \right]^t$, $[A]$, et des restrictions des vecteurs de déplacement test et solution à l'élément (1) , soit $\left\{ V_e^{(1)} \right\}$ et $\left\{ U_e^{(1)} \right\}$ respectivement.

L'énergie élémentaire peut ici s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \int_{(1)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_{(1)} \underline{\underline{\sigma}} : {}^{2D} \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_{(1)} \{ \sigma \}^t \cdot \{ \varepsilon(\underline{v}) \} dV$$

Avec la loi de comportement + $[A]$ symétrique :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \int_{(1)} \{ \varepsilon(\underline{u}) \}^t [A]^t \{ \varepsilon(\underline{v}) \} dV = \int_{(1)} \{ \varepsilon(\underline{u}) \}^t [A] \{ \varepsilon(\underline{v}) \} dV$$

$$\mathcal{E}^{(1)} = \int_{(1)} \{ V_e \}^t [Be^{(1)}]^t [A] [Be^{(1)}] \{ U_e^{(1)} \} dV = \left\{ V_e^{(1)} \right\}^t \int_{(1)} [Be^{(1)}]^t [A] [Be^{(1)}] dV \left\{ U_e^{(1)} \right\}$$

14. En déduire la dimension de la matrice de rigidité de l'élément (1) $\left[K_e^{(1)} \right]$ telle que :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \left\{ V_e^{(1)} \right\}^t \left[K_e^{(1)} \right] \left\{ U_e^{(1)} \right\}$$

et donner son expression sous forme d'une intégrale sur l'espace de référence en fonction de $[Be^{(1)}]$, $[A]$ et R .

$\left[K_e^{(1)} \right]$ est de dimension 12×12 .

$$\left[K_e^{(1)} \right] = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \int_{\Delta_e} [Be^{(1)}]^t [A] [Be^{(1)}] da_1 da_2$$

Le jacobien est ici exceptionnellement constant, il peut sortir de l'intégrale, mais pas $[Be^{(1)}]$ dont les termes dépendent explicitement de a_1 et a_2 .

On s'intéresse désormais au calcul du second membre élémentaire $\left\{ F_e^{(1)} \right\}$. On commence donc par construire $W_{surf}^{(1)}$ la contribution élémentaire de l'élément (1) au travail des efforts surfaciques extérieurs :

$$W_{surf}^{(1)} = -p \int_0^{\frac{R}{2}} \underline{v} \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) \underline{e}_2 \cdot dx_1$$

La frontière chargée de l'élément est une barre à trois nœuds (B3) isoparamétrique pour laquelle on choisit l'élément de référence représenté à la Figure ?? et dont les fonctions de forme sont reportées en Figure ?? :

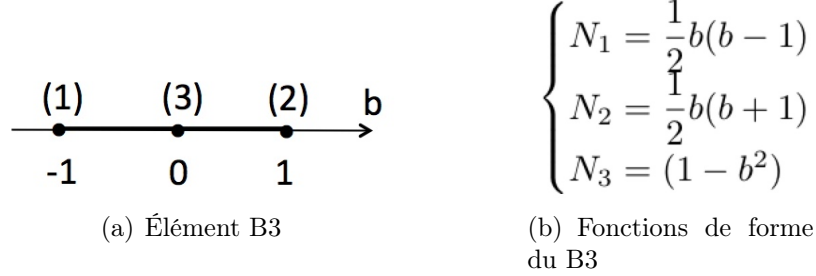


FIGURE 4 – Élément représentatif de la frontière chargée de l'élément 1 et fonctions de forme associées

15. Donner l'expression matricielle du travail $W_{surf}^{(1)}$ en fonction de $\left[\hat{N}_e^{(1)}(b)\right]$, $\left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\}$, \hat{J}_e et R ;
 où $\left[\hat{N}_e^{(1)}(b)\right]$, $\left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\}$ et \hat{J}_e sont respectivement les restrictions des fonctions de formes, des déplacements et du jacobien de (1) à sa frontière chargée. Identifier dans la formule obtenue l'expression des forces nodales équivalentes $\left\{F_{e\,surf}^{(1)}\right\}$ telles que :

$$W_{surf}^{(1)} = \left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\}^t \left\{F_{e\,surf}^{(1)}\right\}$$

$$W_{surf}^{(1)} = -p \int_0^{\frac{R}{2}} \left(\left[\hat{N}_e^{(1)}(b)\right] \left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\} \right)^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} dx_1$$

$$W_{surf}^{(1)} = \left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\}^t \left(-p \int_0^{\frac{R}{2}} \left[\hat{N}_e^{(1)}(b)\right]^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} dx_1 \right)$$

$$W_{surf}^{(1)} = \left\{\hat{V}_e^{(1)}\right\}^t \underbrace{\left(-p \int_{-1}^1 \left[\hat{N}_e^{(1)}(b)\right]^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} J_e(b) db \right)}_{\left\{F_{e\,surf}^{(1)}\right\}}$$

16. En déduire que l'expression des forces nodales équivalentes $\left\{F_{e\,surf}^{(1)}\right\}$ est :

$$\left\{ F_{e\ surf}^{(1)} \right\} = -p \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} b(b-1) db \\ 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} b(b+1) db \\ 0 \\ \int_{-1}^1 (1-b^2) db \end{pmatrix}$$

Pour réaliser cette intégration on propose d'utiliser la méthode de Gauss Legendre telle que $\int_{-1}^1 f(b)db = \sum_g w_g f(b_g)$ et d'utiliser deux points de Gauss dont les coordonnées et poids sont donnés ci-dessous.

$$\begin{cases} b_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} ; w_1 = 1 \\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} ; w_2 = 1 \end{cases}$$

17. Justifier le choix d'utiliser deux points de Gauss.

Par la méthode de Gauss-Legendre, l'intégration est exacte si le degré du polynôme à intégrer n est inférieur ou égal à $2NPG - 1$. Ici le degré est de $n = 2$ il faut donc au moins deux points de Gauss pour réaliser une intégration exacte.

18. Calculer les forces nodales puis les dessiner sur l'élément.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} b(b-1) db = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} b(b+1) db = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 (1-b^2) db = \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

19. Quelle est la contribution élémentaire de l'élément (2) au travail des efforts surfaciques extérieurs $W_{surf}^{(2)}$?

Elle est nulle car l'élément ne partage qu'une arête avec la surface chargée par une densité surfacique d'efforts.

Assemblage et résolution

Après la phase d'assemblage, on obtient classiquement le système suivant à résoudre :

$$[K] \{U\} = \{F\},$$

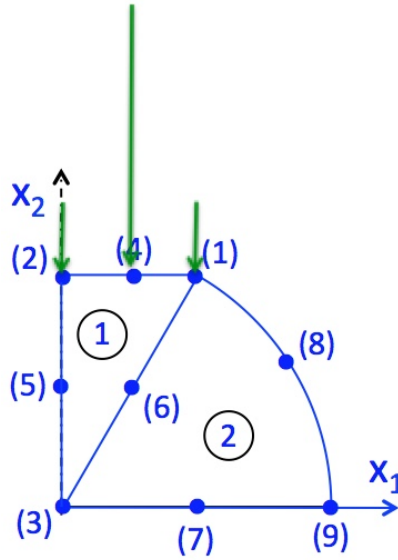


FIGURE 5 – Forces nodales équivalentes aux efforts de pression

où $[K]$ est la matrice de rigidité globale issue de l'assemblage des matrices élémentaires $\left[K_e^{(i)} \right]$, et $\{F\}$ le second membre global issu de l'assemblage des seconds membres élémentaires $\left\{ F_e^{(i)} \right\}$ où $i \in \{1, 2\}$

20. Quelle est la taille de $[K]$ et $\{F\}$ avant prise en compte des conditions aux limites en déplacement ?

$$\text{Dim}[K] = 18 \times 18 \text{ et } \text{Dim}\{F\} = 18 \times 1$$

21. Donner la dimension du vecteur $\{U\}$ et identifier les ddls connus dans le vecteur $\{U\}$. On mettra la réponse sous la forme " $U_i = u_j^{(k)} = \text{valeur}$ ", où i, j, k et valeur sont à identifier.

$$\text{Dim}\{U\} = 18 \times 1$$

Les ddls connus sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_3 = u_1^{(2)} = 0 \\ U_5 = u_1^{(3)} = 0 \\ U_6 = u_2^{(3)} = 0 \\ U_9 = u_1^{(5)} = 0 \\ U_{13} = u_1^{(7)} = 0 \\ U_{14} = u_2^{(7)} = 0 \\ U_{17} = u_1^{(9)} = 0 \\ U_{18} = u_2^{(9)} = 0 \end{array} \right.$$

On souhaite prendre en compte les conditions aux limites par la méthode du lagrangien augmenté.

22. Quelle est la taille de la matrice de rigidité augmenté à utiliser pour résoudre le système ?

La matrice de rigidité du système augmenté à résoudre est : 26×26 . Il faut rajouter les 8 équations liées aux 8 blocages en déplacement identifiés à la question précédente. La résolution des équations

supplémentaire permettra l'identification des efforts de réaction apparaissant au niveau des blocages.

Prise en compte du chargement dynamique

En réalité le chargement en pression dépend du temps et l'on souhaite prendre en compte cet effet. Ainsi la paroi mobile est soumise au champ de pression uniforme suivant : $p^*(t) = p + \pi(t)$, $\forall t \in [0, T]$. L'application de ce chargement nécessite de prendre en compte les forces d'inertie. On rappelle que la masse volumique du matériau est connue et notée ρ et que l'équation dynamique de la formulation forte s'écrit alors (en l'absence d'efforts de pesanteur) :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \forall t \in [0, T]$$

On note également \underline{U}_0 le champ de déplacement initial à l'instant $t = 0$ et $\underline{V}_0(\underline{x})$ le champ de vitesse initiale en tout point \underline{x} du joint tels que :

$$\underline{u}(\underline{x}, t = 0) = \underline{U}_0 = \underline{0} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\underline{x}, t = 0) = \underline{V}_0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega$$

23. Donner la formulation faible du nouveau problème ainsi défini. On pourra réutiliser des résultats établis à la question 4.

Trouver $\underline{u}(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dS + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \cdot \underline{v} dS = -p^*(t) \int_0^{R/2} v_2 \left(x_1, \frac{R\sqrt{3}}{2} \right) dx_1 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad} \quad \forall t \in [0, T]$$

et

$$\underline{u}(\underline{x}, t = 0) = \underline{U}_0 = \underline{0} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\underline{x}, t = 0) = \underline{V}_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Ce nouveau problème s'exprime sous la forme matricielle suivante en fonction de la matrice de rigidité $[K]$ introduite précédemment, de la matrice de masse de la section du joint notée $[M]$, du second membre $\{F\}$ maintenant dépendant du temps et des vecteurs des déplacements aux noeuds et accélérations aux noeuds.

$$[K] \{U(t)\} + [M] \{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

La matrice de masse $[M]$ est construite par assemblage des matrices de masse élémentaires $\left[M_e^{(i)} \right]$ $i \in \{1, 2\}$ selon le même procédé que $[K]$ de sorte que :

$$\{V\}^t [M] \{\ddot{U}(t)\} = \sum_{i=1}^2 \left\{ V_e^{(i)} \right\}^t \left[M_e^{(i)} \right] \left\{ \ddot{U}_e^{(i)}(t) \right\}$$

23. Donner l'expression de $\left[M_e^{(1)} \right]$ exprimée sur l'élément de référence Δ_e en fonction de sa matrice d'interpolation $\left[N_e^{(1)} \right]$, de ρ et de R .

$$\int_{\textcircled{1}} \rho \underline{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS = \rho \int_{\textcircled{1}} \left\{ V_e^{\textcircled{1}} \right\}^t \left[N_e^{\textcircled{1}} \right]^t \left[N_e^{\textcircled{1}} \right] \left\{ \ddot{U}_e^{\textcircled{1}} \right\} dS = \left\{ V_e^{\textcircled{1}} \right\}^t \underbrace{\left(\rho \int_{\textcircled{1}} \left[N_e^{\textcircled{1}} \right]^t \left[N_e^{\textcircled{1}} \right] dS \right)}_{\left[M_e^{\textcircled{1}} \right]} \left\{ \ddot{U}_e^{\textcircled{1}} \right\}$$

Sur l'élément de référence :

$$\left[M_e^{\textcircled{i}} \right] = \rho \int_{\Delta_e} \left[N_e^{\textcircled{1}} \right]^t \left[N_e^{\textcircled{1}} \right] J_e da_1 da_2 = \frac{\rho R^2 \sqrt{3}}{4} \int_{\Delta_e} \left[N_e^{\textcircled{1}} \right]^t \left[N_e^{\textcircled{1}} \right] da_1 da_2$$

Car le jacobien de $\textcircled{1}$ est constant.