Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 17 Mai 2017 - Session1

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Définisez le noyau et l'image d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ avec E et F deux espaces vectoriels.
2. Enoncer le théorème du rang.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
4. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donner le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et précisez son rayon de convergence.
5. Donner l'expression de la série de Fourier $SF(f)$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ sur la période principale $[-\pi, \pi]$. Préciser les coefficients de la série a_0, a_n, b_n, $\forall n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

On considère le système différentiel linéaire, à coefficients constants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 5x + 3y \\ y' & = & x + 3y \end{array}\right. \tag{1}$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions réelles inconnues.

1. Ecrire le système différentiel précédent sous forme matricielle $Y' = AY$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vecteur inconnu de dimension 2 et A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?
3. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Trouver les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
4. Donner la matrice de passage P à la base de diagonalisation de A ainsi que la matrice diagonale D
5. L'ensemble des solutions du système est-il un espace vectoriel ? Si oui, quelle est la dimension de cet espace ? En utilisant les questions précédentes déduire la solution générale du système différentiel (1).

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $y(x)$ réelle, $x \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4} \tag{2}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (2). Précisez les deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ qui génèrent l'espace des solutions de l'équation homogène. Calculer leur Wronskien $W(y_1, y_2)$. En déduire que (y_1, y_2) est une famille libre.
2. On cherche une solution particulière de l'équation non homogène (2) de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, avec $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) & = & \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4} \end{array} \right.$$

   Montrer que le déterminant du système est le Wronskien $W(y_1, y_2)$ trouvé précédemment. Résoudre le système et déterminer $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$. En déduire $C_1(x)$ et $C_2(x)$, puis $y_p(x)$.
3. Trouver la solution générale pour l'équation différentielle (2).

Exercice 3 (Cet exercice contient deux parties indépendantes)

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x \tag{3}$$

dont l'inconnue vérifie la conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Partie I : Résolution directe de l'équation différentielle

1. La solution vérifiant l'équation différentielle et les conditions initiales est-elle unique ? Justifier votre réponse.
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (3).
3. Trouver une solution particulière de l'équation (3). On pourra utiliser la méthode des coefficients indéterminés.
4. Trouver ensuite la solution de l'équation (3) vérifiant les conditions initiales.

Partie II : Résolution à l'aide du développement en série entière
On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme de fonction développable en série entière, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Donner le développement en série entière de e^x.
2. En remplaçant $f(x)$ et e^x dans (3) par leurs développements en série entière, établir une relation de récurrence entre les coefficients a_n, a_{n+1} et a_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer a_0 et a_1 à l'aide des conditions initiales. Puis calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.
4. En utilisant les questions précédentes calculer a_n, $n \in \mathbb{N}$ et écrivez ensuite le développement en série entière de f.
   Indication : On considérera les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.
5. Trouver le rayon de convergence de cette série. Précisez le critère utilisé.