Université Pierre et Marie Curie
Master MF2A - ENSAM module 5AF38

TD - Réponse d'un profil à une rafale aérodynamique discrète

Un profil, disposé dans un écoulement uniforme de vitesse U_∞ est soumis à une rafale aérodynamique discrète arbitraire d'intensité w_G. Les forces aérodynamiques générées par le mouvement arbitraire de la structure sont décrites par l'opérateur incompressible instationnaire. On notera $z(t)$ la position verticale instantannée du profil (unique coordonnée généralisée, positive suivant l'axe vertical ascendant) de corde $2b$ dont la m. Les opérateurs mécaniques de raideur et d'amortissement seront négligés.

1. Donner l'expression des forces d'inerties de l'opérateur mécanique en fonction de $s = U_\infty * t/b$ (on notera $\dot{z} = dz/dt$ et $z' = dz/ds$)
2. Partant de l'expression générale de la portance pour une rafale arbitraire $L_G(s)$ puis intégrant par parties, montrer que:

$$L_G(s) = 2\pi\rho U_\infty b \int_0^s w_G(\tau)\frac{d\psi^{kus}}{d\tau}(s-\tau)d\tau \tag{1}$$

3. On veut démontrer que l'expression de la portance pour un profil en mouvement arbitraire $L_M(s)$ peut être décrite dans le cas présent par:

$$L_M(s) = -\pi\rho U_\infty^2\left[z''(s) + 2\int_0^s z''(\tau)\psi^{wag}(s-\tau)d\tau\right] \tag{2}$$

- montrer que le 1ier terme du membre de droite résulte de la modélisation de l'écoulement non-portant
- retrouver le terme intégro-différentiel à partir de la relation générale exprimant la contribution de l'écoulement (à circulation non-nulle) obtenue pour un mouvement arbitraire (on supposera $z'(0) = 0$).
4. Etablir l'équation différentielle décrivant le mouvement du profil

5. On suppose que $z(0) = z'(0) = 0$ et on notera la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction $q(s)$ par $\bar{q}(p) = \mathcal{L}(q(s))$. Donner l'expression générale de la solution dans l'espace de Laplace en fonction des paramètres du problème.
6. Afin de déterminer complètement la solution, on propose d'utiliser les approximations usuelles suivantes:

$$\begin{aligned}\psi^{kus}(s) &= 1 - 0.5\mathrm{e}^{-\alpha_1 s} - 0.5\mathrm{e}^{-\alpha_2 s}\\ \psi^{wag}(s) &= 1 - b_1\mathrm{e}^{-\beta_1 s} - b_2\mathrm{e}^{-\beta_2 s}\end{aligned} \tag{3}$$

où $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ et $b_{1,2}$ sont des constantes positives.
Montrer que la solution peut alors se mettre sous la forme: $\bar{z}(p) = c_1\dfrac{\bar{w}_G(p)}{U_\infty}\dfrac{f(p)}{g(p)}$ où c_1 est fonction des paramètres aéroélastiques du problème. On se limitera a donner le degré des polynômes $f(p)$ et $g(p)$ sans en préciser les coefficients.
7. Donner la forme générale de la solution dans l'espace physique. (Le calcul complet des coefficient n'est pas demandé)

8. Donner l'expression de l'accélération $\ddot{z}_S$ correspondant à la solution $\ddot{z}$ dans le cas particulier où on suppose que $\psi^{kus}(s) = 1$, $\psi^{wag}(s) = 0$ et les effets de masse virtuels sont négligéables. A quel cas de figure est-on alors ramené ?
9. Exprimer $\bar{z}(p)$ dans le cas $\psi^{kus}(s) = 1$, $\psi^{wag}(s) = 1$ et en considérant $w_G(0) = 0$. Donner la relation intégrale définissant $\ddot{z}$ sachant que $\mathcal{L}^{-1}(1) = \delta(s)$ (fonction Dirac)
10. Reprennant la question 3, calculer l'intégrale permettant de déterminer $\frac{\ddot{z}}{\ddot{z}_S}$ dans le cas d'une rafale de type marche définie par $w_G(s) = w_0\mathbf{1}(s)$. Tracer et commenter l'allure de la courbe $\ddot{z}/\ddot{z}_S$ pour différentes combinaisons des paramtètres aéroélastiques.

Formulaire mathématique: transformées de Laplace

$f(x) \quad (x \geq 0)$	$F(p) = \mathfrak{L}(f(x))$
$af(x) + bg(x)$	$aF(p) + bG(p)$
$f'(x)$	$pF(p) - f(0)$
$f''(x)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\int_0^x f(u)g(x-u)\mathrm{du}$	$F(p)G(p)$
1	$1/p$
x	$1/p^2$
e^{ax}	$1/(p-a)$
$a^{-1}\sin(ax)$	$(p^2+a^2)^{-1}$
$\cos(ax)$	$p/(s^2+a^2)$
$e^{ax}f(x)$	$F(p-a)$
$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(\alpha_k)}{g'(\alpha_k)e^{\alpha_k x}}$	$\frac{F(p)}{G(p)}$ $F(p)$: polynôme de degré inférieur à n $G(p) = (p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)$