

# 4AM101 Mécanique des Milieux Continus - partie Fluides Travaux Dirigés 2020-21

5 octobre 2020

## I Révisions

### 1 Paradoxe de d'Alembert

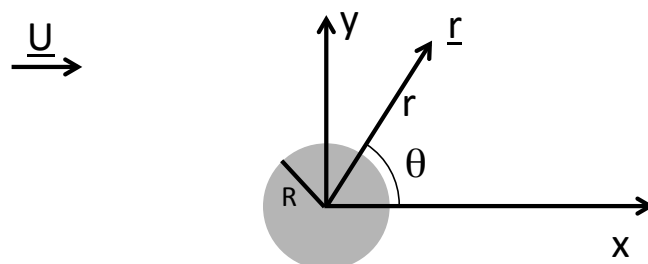


FIGURE 1 –

On considère l'écoulement de fluide parfait isovolume stationnaire irrotationnel d'un fluide de masse volumique  $\rho$  autour d'un cylindre infiniment long à section circulaire de rayon  $R$ . On se place dans le référentiel du cylindre, supposé galiléen. Loin du cylindre, l'écoulement est homogène, de champ de vitesse :  $\underline{u} = U\underline{e}_x$ , et sa pression est homogène de valeur  $p_0$ . Le but de cet exercice est de déterminer la force exercée sur le cylindre.

#### a) Préambule

1. Montrez que l'écoulement est potentiel.

- Montrez que le potentiel des vitesses  $\Phi$  vérifie l'équation de Laplace  $\Delta\Phi = 0$ .
- Ecrivez la relation entre la pression  $p$ , la vitesse  $\underline{u}$  dans l'écoulement,  $U$  et  $p_0$  (la gravité est négligée).
- On suppose le cylindre absent. Montrez qu'à une constante près,  $\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r}$ .

### b) Cylindre immobile

- Le domaine d'étude est l'ensemble du fluide. Le cylindre est immobile. Ecrivez les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement.
- Déterminez  $A$  pour que l'écoulement dérivant du potentiel

$$\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r} + \frac{A \underline{e}_x \cdot \underline{r}}{r^2}$$

vérifie  $\Delta\Phi = 0$  et les conditions aux limites. En déduire l'expression de  $\underline{u}$  sous la forme  $\underline{U} + \underline{v}$

- Le bilan de quantité de mouvement pour la matière contenue dans un volume  $V$  fixe dans le référentiel d'étude, limité par la surface  $S$ , et contenant le cylindre s'écrit, dans l'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \underline{u} dV \right) = - \iint_S \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS + \iint_S -p \underline{n} dS + \underline{F}$$

où  $\underline{F}$  est la force exercée par l'opérateur sur le cylindre. Dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, exprimez la résultante des forces exercées par l'écoulement sur le cylindre  $\underline{F}'$ .  $F'_y$  est appelée la portance,  $F'_x$  la traînée.

- En choisissant pour  $V$  un cylindre concentrique de rayon  $r \rightarrow \infty$ , et en évaluant comment se comporte chaque intégrand apparaissant dans l'expression de  $\underline{F}'$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , montrez que  $\underline{F}' = \underline{0}$ .

L'absence de traînée sur un obstacle immergé dans un écoulement de fluide parfait,  $F'_x = 0$ , constitue le **paradoxe de d'Alembert**. En effet, on constate expérimentalement qu'à grand nombre de Reynolds  $Re = \frac{UR}{\nu}$ , c'est-à-dire lorsque les forces visqueuses sont a priori petites devant l'inertie du fluide, la traînée est toujours non nulle<sup>1</sup>, plus précisément  $F'_x \sim \rho R^2 U^2$ . Ce paradoxe se maintient lorsque le cylindre n'est pas à section circulaire.

### c) Cylindre tournant

Le cylindre tourne maintenant à vitesse angulaire constante  $\Omega$ . On suppose que l'écoulement peut être écrit comme la superposition de l'écoulement autour d'un cylindre immobile et d'un écoulement tourbillonnaire, de potentiel des vitesses associé  $\frac{\gamma}{2\pi}\theta$ .

$$\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r} + \frac{A \underline{e}_x \cdot \underline{r}}{r^2} + \frac{\gamma}{2\pi} \theta$$

---

1. Ce paradoxe est une des manifestations de la nature singulière des écoulements à grand nombre de Reynolds : l'écoulement de fluide parfait ("1/Re = 0") est très différent de l'écoulement à grand nombre de Reynolds (1/Re → 0). Cette UE va permettre de lever ce paradoxe.

1. Montrez que l'écoulement tourbillonnaire est isovolume. On donne  $\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$ . Est-il irrotationnel ?
2. Montrez que la composante tourbillonnaire de l'écoulement est orthoradiale. Exprimez la circulation de l'écoulement autour d'un cercle  $C_r$  de centre  $O$  rayon  $r$  :  $\Gamma_u(r) = \oint_{C_r} \underline{u} \cdot d\underline{l}$ .
3. En absence d'écoulement "extérieur"  $\underline{U}$ , et en supposant alors que le cylindre entraîne le fluide par adhérence, reliez  $\gamma$  à  $\Omega$  et  $R$ .
4. En présence de l'écoulement extérieur, vérifiez que le champ de vitesse résultant vérifie toujours la condition d'imperméabilité du cylindre. Vérifie-t-il la condition d'adhérence ?
5. On note  $\underline{u} = \underline{U} + \underline{v} + \underline{w}$  où  $\underline{w}$  est le champ de vitesse de l'écoulement tourbillonnaire. En choisissant de nouveau pour  $V$  un cylindre de rayon  $r \rightarrow \infty$  pour évaluer  $\underline{F}'$ , et en évaluant comment se comporte chaque intégrand apparaissant dans l'expression de  $\underline{F}'$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , montrez que

$$\underline{F}' = -\rho \iint_S [\underline{w}(\underline{U} \cdot \underline{n}) - \underline{n}(\underline{U} \cdot \underline{w})] dS$$

6. En utilisant l'identité  $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ , en déduire que la force par unité de longueur exercée sur le cylindre vaut  $-\rho U \Gamma_u \underline{e}_y$ .  
Y-a-t-il une traînée ? Exprimer la portance  $F'_y$  par unité de longueur en fonction de  $\rho$ ,  $\Omega$ ,  $U$  et  $R$ .

## 2 Écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire isovolume d'un fluide de masse volumique  $\rho$ , viscosité dynamique  $\mu$ , dans une conduite cylindrique de section circulaire de rayon  $R$ , de longueur infinie. Quelle est la "perte de charge linéique" (diminution de pression dans le sens de l'écoulement par unité de longueur) ? L'axe de la canalisation est  $(Ox)$ . L'écoulement se fait dans le sens des  $x$  croissants. On adopte les coordonnées cylindriques naturelles  $(r, \theta, x)$ .

1. Ecrire la condition d'écoulement isovolume, l'équation de Navier-Stokes et la condition aux limites auxquelles obéit le champ de vitesse.
2. On recherche la solution sous la forme d'un écoulement axisymétrique parallèle :  $\underline{u} = u(r, x) \underline{e}_x$ . En déduire que  $u = u(r)$ , puis que  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ .
3. Déduire de la projection de l'équation de Navier-Stokes selon  $(Ox)$  que  $\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$ . On notera  $\frac{dp}{dx} = -K$ .
4. Intégrer cette équation pour déterminer  $u(r)$  en fonction de  $r$ ,  $K$  et  $\mu$ . Tracer  $u(r)$ .
5. Calculer le débit volumique  $Q_v$  et l'exprimer en fonction de  $K$ ,  $R$  et  $\mu$ .

## II Analyse dimensionnelle

### 1 Traînée aérodynamique exercée sur un objet

Une application directe de l'analyse dimensionnelle concerne l'estimation de la force s'opposant au mouvement d'un objet dans un fluide, appelée "force de traînée". Nous considérons ici un objet ayant une unique dimension caractéristique  $D$  et se déplaçant à une vitesse  $U\mathbf{e}_x$  dans un fluide infiniment étendu, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$ . La vitesse  $U$  est supposée très faible devant la vitesse du son  $c$ , et la force de traînée est notée  $\underline{T} = -T\mathbf{e}_x$ .

1. Appliquer les étapes suivantes, détaillées dans le cours, pour déterminer la loi d'échelle suivie par la traînée  $T$ .
  - (a) (Analyse physique) Identifier les paramètres pertinents, en justifiant pourquoi la vitesse du son  $c$  n'en fait pas partie.
  - (b) Choisir une classe de système d'unité (SU) et l'utiliser pour exprimer les dimensions des paramètres pertinents.
  - (c) Identification des grandeurs dimensionnellement indépendantes avec lesquelles seront construites les grandeurs sans dimension.
  - (d) Construire les grandeurs sans dimension.
  - (e) Appliquer le théorème  $\pi$  et obtenir une loi d'échelle pour la force de traînée.
2. Donner un exemple d'objet ayant en première approximation "une unique dimension caractéristique  $D$ ", ainsi qu'un autre en ayant deux (disons  $D_1$  et  $D_2$ ) ? En adaptant la question précédente, déterminer la loi d'échelle suivie par la traînée dans ce cas.
3. La fonction inconnue introduite par le théorème  $\pi$  peut s'obtenir expérimentalement. La variation du coefficient de traînée

$$C_D = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$$

d'une sphère lisse et d'un cylindre lisse est représentée sur la figure 2 en fonction du nombre Reynolds, avec  $S$  l'aire de la plus grande section de l'objet perpendiculairement à la direction de l'écoulement ("maître-couple").

- (a) Déterminer à partir de la figure 2 des expressions simplifiées pour  $C_D$  dans le cas d'une sphère, dans les régimes  $Re \ll 1$  et  $Re \in [10^3, 5 \times 10^5]$ .
- (b) Relier  $C_D$  à la fonction inconnue introduite par application du théorème  $\pi$ .
- (c) Simplifier l'expression de  $T$  pour une sphère dans les régimes  $Re \ll 1$  et  $Re \in [10^3, 5 \times 10^5]$ .
- (d) Comment varie la traînée exercée sur un ballon de football lors d'une passe si sa vitesse augmente d'un facteur 2 ? Même question pour une bactérie approximativement sphérique de diamètre  $1 \mu\text{m}$  se déplaçant dans l'eau à une vitesse  $U \simeq 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On rappelle  $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  pour l'air et  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  pour l'eau.

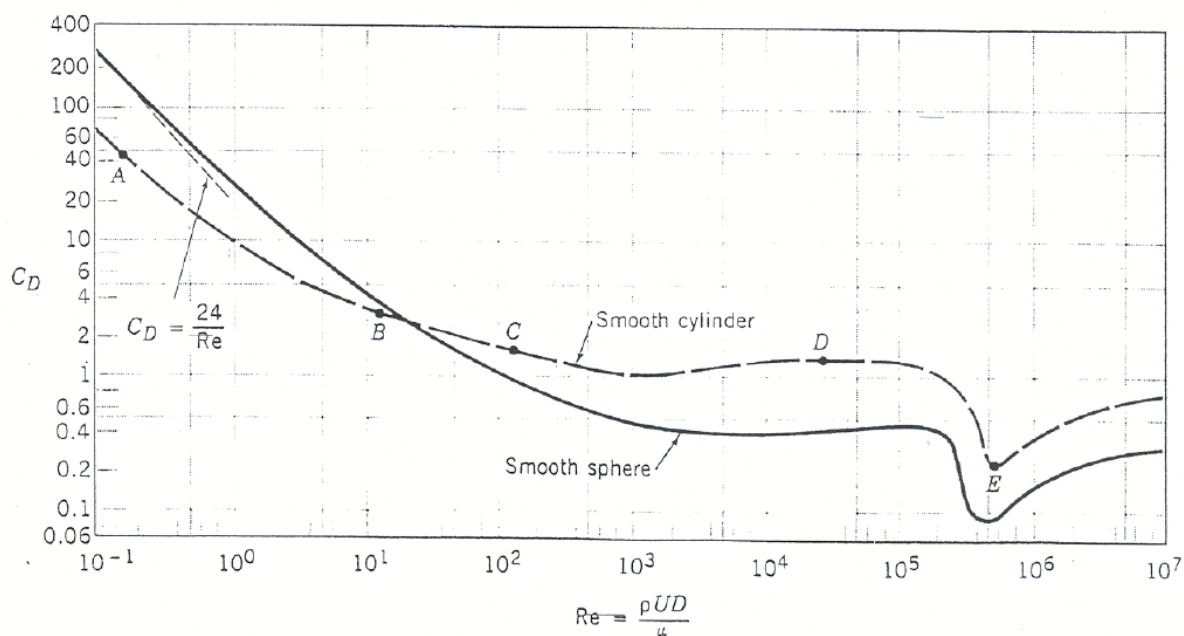


FIGURE 2 – Variation du coefficient de traînée d’une sphère et d’un cylindre en fonction de  $Re$  dans des régimes fortement subsoniques.

## 2 Vagues

On cherche à utiliser l’analyse dimensionnelle pour déterminer des propriétés des vagues sur Terre puis sur d’autres planètes. On rappelle l’accélération de la pesanteur à la surface de la Terre  $g = 9.81$  SI.

1. Sur Terre, la longueur d’onde  $\lambda$  d’une vague de fréquence 1 Hz dans l’océan vaut 1.6 m. Par analyse dimensionnelle, déterminez la longueur d’onde d’une vague de fréquence 2 Hz.
2. Déterminez une expression pour l’accélération de la pesanteur  $g$  d’une planète en fonction de ses caractéristiques qui peuvent être trouvées dans le tableau ci-dessous et de la constante de gravitation  $G$ . On rappelle que  $G$  est telle que la force d’attraction gravitationnelle entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$  séparées de  $d$  vaut  $F = Gm_1m_2/d^2$ .
3. Calculez la valeur de l’accélération de la pesanteur  $g_M$  sur la surface de Mars connaissant celle sur Terre ainsi que certaines des données du tableau ci-dessous.

Planète	Masse (kg)	Rayon	Distance au soleil	Durée d’un jour
Terre	$6.1 \times 10^{24}$	6371 km	$150 \times 10^6$ km	24 h
Mars	$6.4 \times 10^{23}$	3390 km	$228 \times 10^6$ km	24 h et 40 mn

4. S'il y avait de l'eau sur Mars, quelle serait la longueur d'onde d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan ?

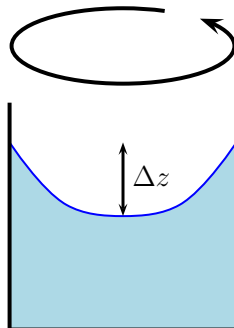
### 3 Théorème de Pythagore

L'aire d'un triangle rectangle  $ABC$ ,  $S_{ABC}$ , est complètement déterminée par la longueur de son hypoténuse  $c$  et par l'un de ses angles non droits, par exemple le plus petit,  $\phi$ . Cette observation va nous permettre de démontrer le théorème de Pythagore.

1. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'échelle liant  $S_{ABC}$ ,  $c$  et  $\phi$ .
2. Considérons un triangle  $ABC$  rectangle en  $C$ , et notons  $(CH)$  sa hauteur passant par  $C$ . Celle-ci divise le triangle  $ABC$  en deux triangles  $HAC$  et  $HCB$ . On suppose sans perdre de généralité que l'angle  $\phi$  correspond à l'angle au point  $A$ . Faire un schéma de ce triangle, puis exploiter la loi d'échelle déterminée à la question précédente pour démontrer le théorème de Pythagore.

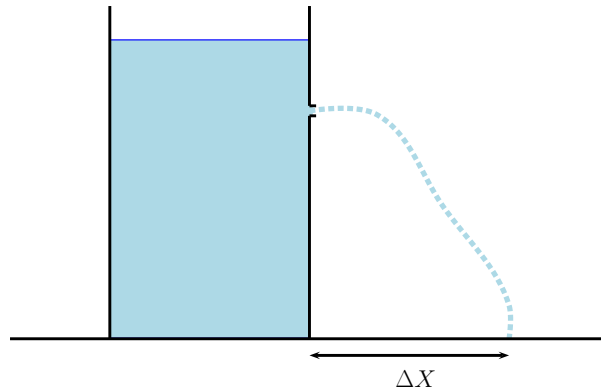
### 4 Mise en rotation d'un verre d'eau

Un verre d'eau est déposé sur un support tournant à vitesse constante. On constate que sa surface se déforme : par analyse dimensionnelle, exprimer la différence de hauteur maximale observée  $\Delta z$  en fonction des paramètres du problème



### 5 Fuite de citerne

Une balle percute une citerne contenant plusieurs dizaines de mètres cubes d'eau : il se crée alors un jet représenté très schématiquement ci-dessous. Obtenir une loi d'échelle pour la distance  $\Delta X$  mise par l'eau avant de toucher le sol en fonction des paramètres pertinents.



## 6 Collision Terre-Lune

On interrompt brusquement le mouvement de rotation de la Lune autour de la Terre. Au bout de quel temps la collision Lune-Terre se produit-elle ?

## 7 Distance de freinage

Une voiture lancée à la vitesse  $V$  pile et part en dérapage jusqu'à son arrêt. Quelle est la distance de freinage ?

## 8 Disparition d'une bulle de vide

Une "bulle de vide" de rayon initial  $R = 1$  mm est créée brusquement dans de l'eau à pression atmosphérique (par impact laser par exemple). Quel est la durée de sa rétractation conduisant à sa disparition ?

## 9 Pression au centre de la Terre

Quel est l'ordre de grandeur de la pression  $P_0$  au centre de la Terre ? Pour simplifier, on pourra la considérer comme une sphère liquide de rayon  $R = 610^3$  km, de masse volumique homogène  $\rho \simeq 510^3$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ . On rappelle la valeur de la constante gravitationnelle :  $\mathcal{G} = 6 \times 10^{-11}$  m $^3$   $\cdot$  kg $^{-1}$   $\cdot$  s $^{-2}$ .

## 10 Similarité dynamique et modèle réduit

On cherche à dimensionner le moteur d'un navire en eaux profondes, c'est-à-dire déterminer sa puissance requise en fonction de la vitesse de déplacement du navire. Ceci nécessite de déterminer la force exercée par l'eau sur le navire en fonction de sa vitesse et de ses caractéristiques (dimensions et forme de la coque).

Pour déterminer cette force, on souhaite réaliser des essais en bassin sur un modèle réduit du bateau.

### a) Surface mouillée

L'expérience montre que les paramètres pertinents pour caractériser l'influence de la géométrie d'un navire sur la force qu'il subit de la part de l'eau lorsqu'il avance sont :

- sa longueur  $L$
  - son volume immergé (“volume de carène”)  $V$ , qui dépend de sa masse  $m$ , appelée “déplacement”
1. Quelle est la relation entre le déplacement et le volume de carène? Pour répondre à cette question, considérez l'équilibre du navire flottant à l'arrêt.

L'objectif de cette section est de se convaincre que la surface de carène du navire  $S$ , c'est-à-dire l'aire de la surface mouillée de sa coque, qui intervient dans l'expression de la force subie par le navire en mouvement, s'exprime en fonction de  $L$  et  $V$ .

Pour cela, considérons une carène (partie du navire sous la surface de l'eau) en forme de cylindre de section demi-circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$ .

2. Exprimez  $S$  en fonction de  $V$  et  $L$ .
3. Déduisez-en l'expression de  $S$  en fonction de  $V$  et de la  **finesse**  de la carène  $\varphi$ , grandeur sans dimension caractérisant sa géométrie :

$$\varphi = \frac{L}{V^{1/3}}$$

4. De même, déduisez-en l'expression de  $S$  en fonction de  $L$  et de  $\varphi$ .
5. De manière générale, montrez que  $S$  peut toujours s'exprimer comme :

$$S = L^2 \mathcal{F}(\varphi),$$

$\mathcal{F}$  dépendant des détails de la forme géométrique de la carène.

### b) Première analyse dimensionnelle

Lorsqu'un navire avance dans l'eau, sa carène déplace de l'eau en générant un écoulement complexe dont deux caractéristiques peuvent être distinguées :

- l'eau déplacée est soulevée (vague d'étrave), ce qui génère des vagues qui exercent des contraintes sur la coque du navire. La dynamique des vagues fait intervenir l'inertie de l'eau de masse volumique  $\rho$  et la gravité  $g$  qui ramène l'eau à l'horizontale.
- un écoulement autour de la coque se produit sous la surface. Les contraintes exercées par l'écoulement sur la coque impliquent classiquement l'inertie de l'eau et sa viscosité  $\mu$ .

On négligera toujours l'effet de l'air sur le navire.

6. Par analyse dimensionnelle, montrez que :

$$R = \frac{1}{2} \rho S U^2 F(\text{Fr}, \text{Re}, \varphi)$$

où  $\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}$  est le nombre de Froude et  $\text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}$  le nombre de Reynolds. Ces choix de GSD ont une origine historique et pratique.



**c) Première tentative d'exploitation des mesures sur maquette en bassin**

On ne connaît a priori pas cette fonction  $F$ . Pour déterminer  $R$ , on peut :

- construire un modèle réduit de navire, c'est-à-dire une maquette du navire ayant la même finesse que le navire, mais une longueur  $L'$  très inférieure à celle du navire  $L$  et un volume de carène  $V'$  très inférieur à celui du navire  $V$ ,
  - faire naviguer la maquette dans le bassin d'essai rempli d'eau de mer à une vitesse  $U'$  telle que  $Fr = Fr'$  et  $Re = Re'$ ,
  - mesurer la résistance  $R'$  subie par la maquette et en déduire la valeur de la résistance  $R$  que devrait subir le navire en mouvement à la vitesse  $U$ .
7. Montrez qu'il n'y a pas de valeurs de  $L'$ ,  $V'$  et  $U'$  autres que  $L$ ,  $V$  et  $U$  qui permettent de satisfaire  $Fr = Fr'$  et  $Re = Re'$ . Cette première approche ne permet donc pas d'exploiter des mesures sur maquette pour déterminer  $R$ .

**d) Distinction entre résistance de vague et traînée hydrodynamique**

L'expérience montre que la résistance  $R$  est approximativement la somme de deux contributions (voir la figure 3) :

- une "résistance de vague"  $R_1$  associée au rayonnement d'énergie par le bateau sous forme de vagues, pratiquement indépendante de la viscosité,
  - une traînée hydrodynamique  $R_2$  associée à la dissipation d'énergie par viscosité au sein de l'eau et pratiquement indépendante de la génération du sillage de vagues, donc de la gravité.
8. En appliquant le théorème II successivement à  $R_1$  et  $R_2$ , montrez que  $R$  peut s'écrire sous la forme :

$$R = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S U^2 F_1(\Pi_1, \varphi)}_{R_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho S U^2 F_2(\Pi_2, \varphi)}_{R_2}$$

Exprimez  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

**e) Exploitation de plusieurs mesures sur maquettes**

Cette distinction permet de mettre en oeuvre un autre protocole de mesures :

- mesurer la résistance totale  $R'$  subie par une maquette
- mesurer la demi-résistance hydrodynamique  $R'_2$  subie par une maquette symétrisée (voir plus loin).
- en déduire la résistance de vague  $R'_1 = R' - R'_2$

9. On considère la maquette de dimension  $L'$  fixée.  $L$ ,  $\varphi$ , et  $U$  étant fixés, quelle valeur de vitesse  $U'$  doit-on choisir pour que  $Fr = Fr'$  ? Montrez alors que  $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{L'^3}{L^3}$ .

En fait, lors d'une mesure sur maquette en bassin d'essai, on ne mesure pas  $R'_1$  mais  $R' = R'_1 + R'_2$ . Pour mesurer  $R'_2$ , on construit une maquette symétrisée, c'est-à-dire obtenue par symétrisation du volume de carène de la maquette du navire, voir la

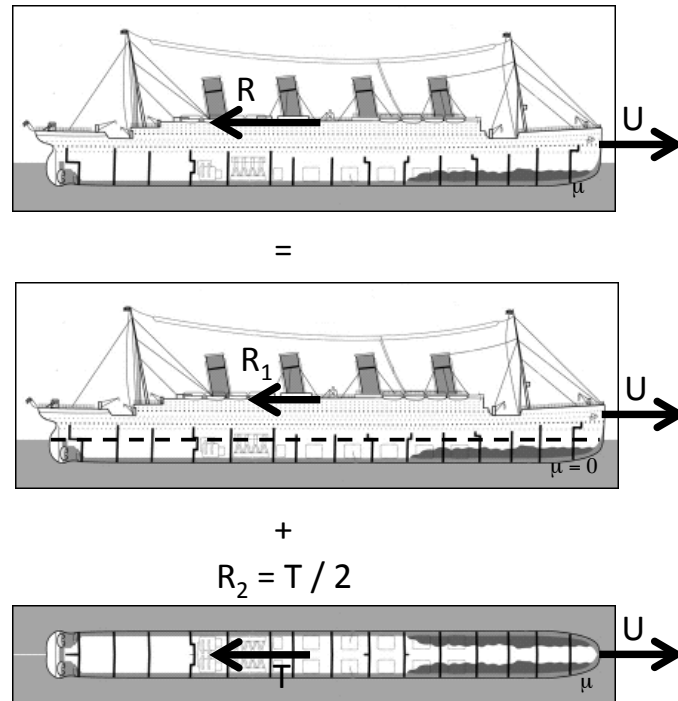


FIGURE 3 – Vue en coupe du Titanic. La résistance totale  $R$  subie par le navire est approximativement la somme de la résistance de vague  $R_1$  associée au rayonnement d'énergie par le bateau sous forme de vagues, pratiquement indépendante de la viscosité, et de la trainée hydrodynamique  $R_2$  associée à la dissipation d'énergie par viscosité au sein de l'eau et pratiquement indépendante de la génération du sillage de vagues, donc de la gravité.  $R_2$  peut être déterminée en construisant une maquette obtenue par symétrisation du volume de carène (partie immergée de la coque) de la maquette du navire, voir dessin du bas, et en mesurant la trainée  $T$  qu'elle subit dans une soufflerie hydrodynamique (canal entièrement rempli d'eau, donc sans surface libre ni vagues). On a alors :  $R_2 = T/2$ .

figure 3. On mesure la trainée hydrodynamique  $T$  que subit la maquette symétrisée dans un canal hydrodynamique au sein duquel elle est entièrement immergée (pas de surface libre, pas de vagues). On a alors :  $R'_2 = T/2$ . On en déduit  $R'_1 = R' - R'_2$  et enfin  $R_1$ .

10. Reste à déterminer  $R_2$ . Pour cela, on réutilise la maquette symétrisée de dimension  $L'$ . Quelle nouvelle valeur de  $U'$  faut-il choisir pour vérifier  $Re = Re'$  ? Montrez alors que  $R_2 = R'_2$ .

## 11 Impact d'une coque sur l'eau

Lorsqu'un hydravion amerrit trop violemment sur l'eau, il rebondit, ce qui est très dangereux pour sa structure. Le ricochet d'une pierre rasant l'eau est précisément aussi son rebond sur la surface de l'eau. Ce phénomène est exploité depuis le XVII<sup>e</sup> siècle et de manière systématique depuis le XIX<sup>e</sup> siècle pour augmenter la portée des tirs des canons de marine; en effet, un tir effectué au ras de l'eau peut permettre au boulet, à l'obus ou à la grenade sous-marine de rebondir plusieurs fois sur la surface de l'eau. Tous ces phénomènes indiquent qu'un objet impactant la surface de l'eau peut subir de la part de celle-ci une force qui excède largement la poussée d'Archimède. Nous allons étudier ce phénomène dans un cas particulier, celui d'une coque prismatique, c'est-à-dire bidimensionnelle et autosimilaire (sans échelle de longueur caractéristique), comme celle adoptée pour la coque des bombardiers d'eau (voir la figure 4), de nombreux autres hydravions et de leurs flotteurs.



FIGURE 4 – Hydravion bombardier d'eau “Canadair”. Notez la forme prismatique de la coque.

On considère donc une coque longue en forme de prisme à faces planes, d'angle  $\alpha$  (figure 5). A l'instant  $t = 0$ , elle impacte la surface de l'eau (de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\mu$ ) avec une vitesse verticale  $U$  que l'on suppose constante durant l'impact. On suppose l'impact suffisamment violent pour que le déplacement de l'eau dans le champ de pesanteur puisse être négligé durant le temps de l'analyse du choc. La gravité est donc négligée. Par contre, on suppose l'impact suffisamment lent pour que l'écoulement de l'eau puisse être considéré comme isovolume. Enfin, compte tenu des très grandes valeurs du nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$  usuellement rencontrées dans ces phénomènes, on modélisera l'écoulement comme un écoulement bidimensionnel de fluide parfait, de plus irrotationnel. L'air au-dessus de l'eau est à la pression  $P_0$ .

1. On se place dans le référentiel terrestre. L'écoulement est-il stationnaire? potentiel? Quelle équation le potentiel des vitesses  $\varphi$  vérifie-t-il?
2. Quelles sont les conditions aux limites imposées à l'écoulement? On supposera pour simplifier que, l'air étant de masse volumique et de viscosité très faibles devant celles de l'eau, son mouvement ne conduit à aucune variation notable de la contrainte qu'il

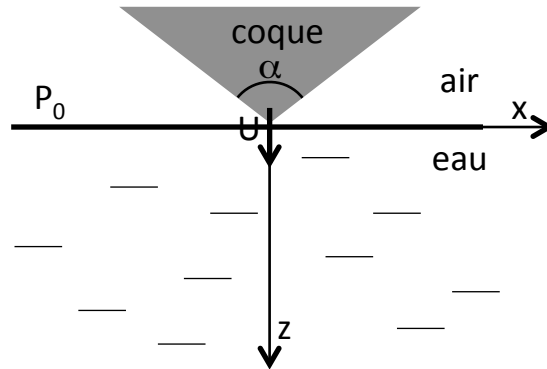


FIGURE 5 – Géométrie de l’impact vertical d’une coque prismatique sur la surface de l’eau. Le repère  $(O, x, z)$  est fixe dans le référentiel terrestre.

exerce sur la surface de l’eau, ce qui se traduit par la condition  $P = P_0$  à la surface durant l’impact.

3. Quelle inégalité doit vérifier quel nombre pour que l’hypothèse d’écoulement isovolume soit vérifiée ?
4. En appliquant le théorème de Bernoulli à cet écoulement et en évaluant l’ordre de grandeur des termes intervenant dans le théorème, montrez par un raisonnement en ordre de grandeur que l’on peut négliger la gravité dans la description de l’impact pendant une durée  $\tau$  telle que  $\tau \sim \frac{U}{g}$  (régime purement inertiel de l’impact). Réécrire la forme simplifiée du théorème de Bernoulli dans ce régime en employant la perturbation de pression  $p = P - P_0$ .
5. Appliquez le théorème II pour proposer une loi d’échelle pour la force par unité de longueur instationnaire  $f(t)$  subie par la coque. Comment  $f$  varie-t-elle avec  $t$  ? Quelle expression en ordre de grandeur a-t-elle à la fin du régime purement inertiel ?

On souhaite maintenant exploiter l’analyse dimensionnelle pour simplifier l’écriture du “problème hydrodynamique”, c’est-à-dire le modèle décrivant l’écoulement à l’origine de cette force.

6. Appliquez le théorème II pour proposer une loi d’échelle pour  $\varphi$  qui fasse intervenir des variables d’espace adimensionnées  $\tilde{x} = \frac{x}{Ut}$  et  $\tilde{z} = \frac{z}{Ut}$ . Idem pour  $\underline{u}$  et  $p$ .

## 7. Transformation du domaine d’étude

- (a) En considérant à ce stade que la surface libre reste plane durant l’impact, quelle est l’équation de la surface libre dans les coordonnées  $(x, z)$ , dans ces coordonnées adimensionnées ?
- (b) Quelle est l’équation cartésienne de la surface de la coque dans les coordonnées  $(x, z)$  ? Dans les coordonnées adimensionnées  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  ?

- (c) Représentez la géométrie de l'impact pour  $t > 0$  en coordonnées adimensionnées  $\tilde{x}$  et  $\tilde{z}$ . Les frontières du domaine d'étude sont-elles dépendantes du temps dans les coordonnées adimensionnées  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  ?
8. **Transformation des conditions aux limites** - En notant  $\tilde{u}$  le champ de vitesse adimensionnée et  $\tilde{p}$  la pression adimensionnée, comment se transforment les conditions imposées à l'écoulement par la coque ? par la surface libre ?
9. **Transformation de l'équation potentielle** - En notant  $\tilde{\varphi}$  le potentiel des vitesses adimensionné, quelle relation y-a-t-il entre  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\varphi}$  ? Quelle équation  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z})$  vérifie-t-il ?
10. **Transformation de la relation de Bernoulli dans le régime inertiel** - Montrez d'abord que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = U^2 \left( \tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} \right)$ . En déduire que la relation de Bernoulli dans le régime inertiel se réécrit :

$$\left( \tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}} \right) + \frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{p} = 0$$

11. **Synthèse** - La description de l'écoulement en coordonnées adimensionnées dépend-elle explicitement du temps ? Quel est le bénéfice de l'emploi de ces coordonnées adimensionnées ?

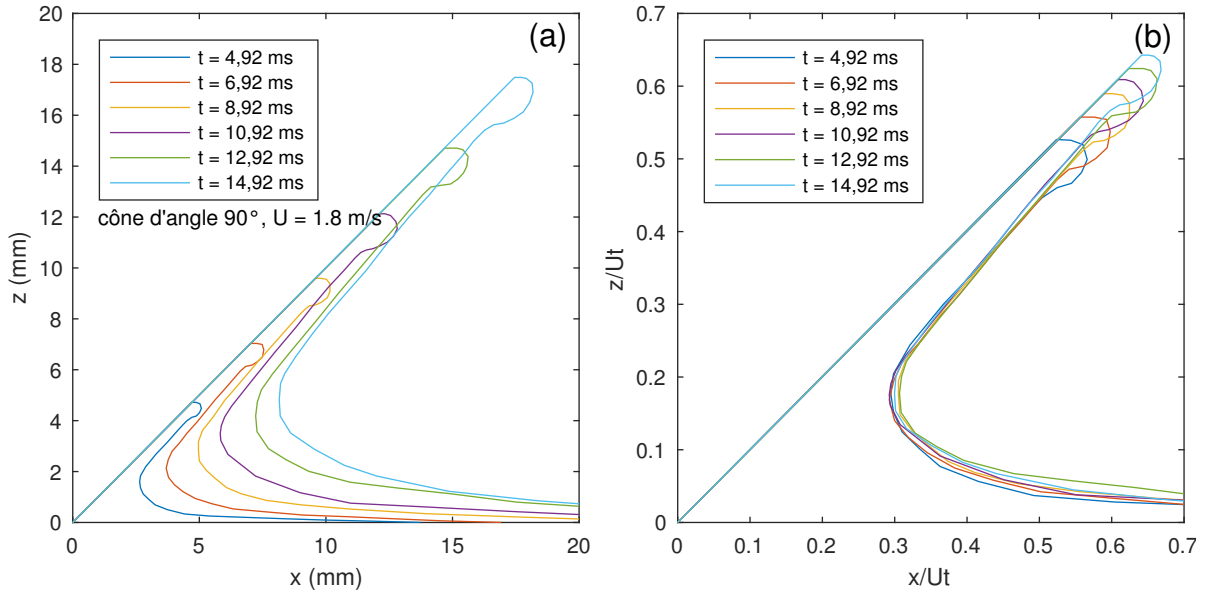


FIGURE 6 – (a) Formes de la surface libre de l'eau filmée de côté à différents instants après le début de l'impact d'un cône d'angle  $\alpha = 90^\circ$  à la vitesse  $U = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (b) Les mêmes formes de surface libre représentées en coordonnées adimensionnées  $(\tilde{x}, \tilde{z})$ . Expériences réalisées au cours de leur stage de recherche à l'Institut d'Alembert par Gaétan Labrosse et Shady Masry, étudiants en Master 1 en 2017-2018.

**Postlude** - Pour simplifier, nous avons supposé que la surface libre restait plane durant l'impact, ce qui est irréaliste : en effet, le cône s'enfonçant dans l'eau, celle-ci est projetée

vers le haut (c'est la vague d'étrave). Or, pour que l'adimensionnement permette de simplifier le problème en le rendant stationnaire, il faut que les conditions aux limites représentées en coordonnées adimensionnées, en particulier la forme de la surface libre, soient indépendantes du temps. Cette forme étant difficile à déterminer analytiquement, elle peut par contre être déterminée expérimentalement. L'expérience consiste à filmer avec une caméra rapide la surface de l'eau contenue dans un aquarium durant l'impact d'un cône métallique d'angle  $\alpha = 90^\circ$ . Sur la figure 6 a sont représentées les formes de la surface libre de l'eau filmée de côté à différents instants après le début d'un impact à la vitesse  $U = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sur la figure 6 b sont représentées les mêmes formes en coordonnées adimensionnées. On constate que dans cette représentation, les formes se superposent avec précision (sauf au contact du cône où ce sont probablement les effets capillaires et visqueux qui modifient les conditions d'écoulement) : la forme de la surface libre est donc bien indépendante du temps en coordonnées adimensionnées. Cette observation valide notre hypothèse et rend pertinente l'approche adoptée pour simplifier ce problème.

### III Invariance d'échelle

#### 1 Coulage d'un mur de béton (extrait du partiel du 6 novembre 2017)

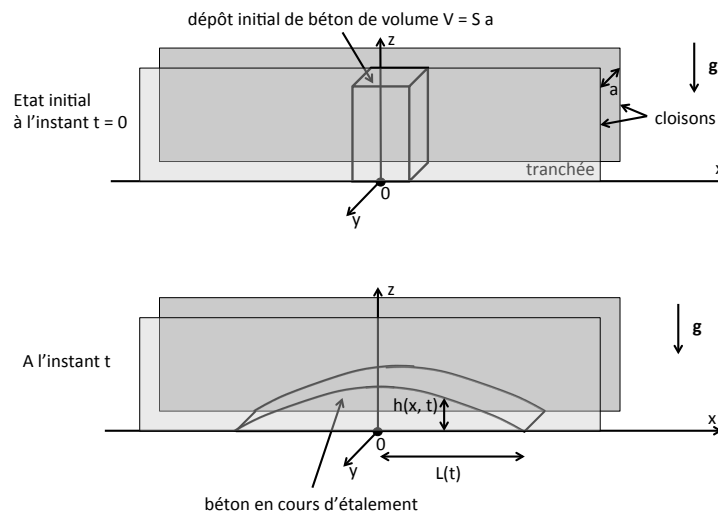


FIGURE 7 –

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur  $a$ , comme schématisé sur la figure 9. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume  $V$  au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de "prendre" (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique de cisaillement  $\mu$ . L'accélération de la gravité est notée  $\mathbf{g}$ . On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon  $(Oy)$  et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan  $(Oxz)$ . La forme du volume de béton est donc entièrement donnée par sa hauteur  $h$  fonction de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ .

### a) Analyse dimensionnelle

1. Exprimez l'aire  $S$  de la portion de cloison mouillée par le béton en fonction de  $V$  et de  $a$  et justifiez pourquoi  $S$  est constante au cours de l'écoulement.
2. On suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon  $(Oy)$ . Déduisez-en quel paramètre géométrique n'a pas d'influence sur l'étalement du béton.
3. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'évolution temporelle de la demi-longueur de la flaque de béton  $L$  (cf. figure 9) exprimée à l'aide de grandeurs sans dimension. Compte tenu de la nature bidimensionnelle de l'écoulement du béton, vous considérerez la surface mouillée  $S$  plutôt que son volume  $V$  comme paramètre pertinent. Pour former les grandeurs sans dimensions, vous emploierez  $g$ ,  $S$  et  $\rho$  en justifiant préalablement pourquoi vous pouvez choisir ces trois grandeurs.

### b) Recherche de solution invariante d'échelle dans un régime d'écoulement lent

L'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique des équations décrivant l'écoulement du béton permettent de mettre en évidence l'existence d'un régime quasistatique (frein inertiel négligeable devant le frein visqueux) lorsque la flaque, de demi-longueur  $L(t)$ , est déjà bien étalée ( $|\frac{\partial h}{\partial x}| \ll 1$ ), pour lequel l'approximation à l'ordre dominant du problème s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = D \frac{\partial^2 (h^4)}{\partial x^2} \text{ pour } 0 \leq x \leq L(t) \\ h(x, t) = 0 \text{ pour } x > L(t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $D = \frac{g}{12\nu}$ ,  $\nu = \mu/\rho$ , sachant que :

— l'épaisseur de béton est nulle au bord de la flaque :

$$h(x = L(t), t) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

— le sommet de la flaque reste au milieu des cloisons, en  $x = 0$  :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (3)$$

— le volume de béton est constant :

$$\int_0^{+\infty} h(x, t) \, dx = S/2 \quad \forall t \quad (4)$$

1. Expliquez pourquoi ce problème {équation aux dérivées partielles (1), conditions (2, 3, 4)} est a priori bien posé, c'est-à-dire que le nombre de conditions aux limites et initiales est en accord avec l'ordre de l'e.d.p. Vous vous souviendrez avec profit de la diffusion de la chaleur dans un barreau dans lequel une quantité d'énergie donnée est déposée initialement en son milieu, étudiée en cours.
2. Afin de déterminer si ce problème admet une solution auto-similaire, on cherche une solution invariante d'échelle. Pour cela, on définit le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x' / x = x^* x' \\ t \mapsto t' / t = t^* t' \\ h \mapsto h' / h = h^* h' \\ D \mapsto D' / D = D^* D' \\ S \mapsto S' / S = S^* S' \end{array} \right.$$

où  $\{x^*, t^*, h^*, D^*, S^*\}$  sont des facteurs de changement d'échelle<sup>2</sup>. Déterminez les deux relations entre facteurs d'échelle imposés par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (1, 2, 3, 4).

3. Le groupe des changements d'échelle laissant invariant le problème est donc à 3 paramètres libres. En choisissant comme paramètres libres  $t^*$ ,  $D^*$  et  $S^*$ , montrez que les deux autres paramètres s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} h^* = \left( \frac{S^{*2}}{D^* t^*} \right)^{1/5} \\ x^* = (S^{*3} D^* t^*)^{1/5} \end{array} \right. \quad (5)$$

4. En écrivant que la solution  $h(t, x, D, S)$  de ce problème invariant par ce groupe de changements d'échelle est aussi invariante par ce même groupe, puis en choisissant comme changements d'échelle particuliers  $D^* = 1/D'$  et  $S^* = 1/S'$ , montrez que :

$$\left( \frac{D' t'}{S'^2 t^* t'} \right)^{1/5} h' = f \left( t^* t', (t^* t')^{1/5} \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

En déduire que :

$$\left( \frac{D' t'}{S'^2} \right)^{1/5} h' = g \left( \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

$h$  est donc autosimilaire, sa variable d'auto-similarité étant  $\eta = \frac{x}{(S^3 D t)^{1/5}}$

5. L'extrémité de la flaque est définie par (2). Montrez que l'abscisse  $L$  de cette extrémité est telle que :

$$L(t) = \eta_0 \left( S^3 \frac{g}{12\nu} t \right)^{1/5}$$

où  $\eta_0$  est une constante dont vous donnerez la signification.

Pour étaler le plus rapidement possible le béton dans la tranchée, vaut-il mieux fractionner le versement du béton ou le verser d'un seul coup ?

6. En comparant ce résultat et celui donné par l'analyse dimensionnelle, exprimez  $\Pi$  en fonction de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  dans ce régime quasistatique aux temps longs.

---

2.  $L$  n'est ni une variable du problème ni un de ses paramètres mais une des caractéristiques de sa solution, donc on ne lui impose pas de changement d'échelle autre que celui imposé à  $x$ .



## IV Analyse en ordre de grandeur et analyse physique

### 1 Forces de lubrification

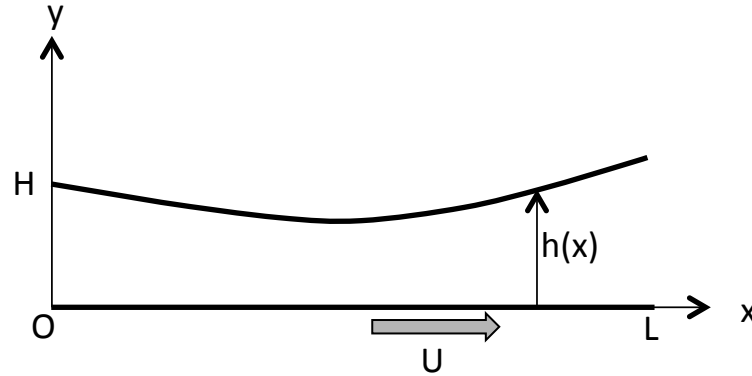


FIGURE 8 –

On considère l'écoulement stationnaire isovolume d'un fluide visqueux (masse volumique  $\rho$ , viscosité dynamique  $\mu$ ) entre deux parois séparées d'une distance  $\sim H$  petite devant leur longueur  $L$ , une paroi inférieure plane mobile à la vitesse  $U$  et une paroi supérieure fixe, non parallèle à la paroi inférieure. L'objectif de l'exercice est d'exprimer les contraintes exercées par le fluide sur la paroi supérieure pour mettre en évidence l'existence d'une force de portance exercée par l'écoulement sur la paroi supérieure.

Pour simplifier, on considère un écoulement bidimensionnel. Dans le repère  $(Oxyz)$  lié à la surface fixe, la paroi plane inférieure, supposée infinie, se confond avec le plan  $(Oxz)$ . La surface supérieure non plane et fixe est invariante par translation dans la direction  $(Oz)$  et sa forme est décrite par la fonction  $y = h(x)$  où  $h(x) \sim H$ . Sa longueur dans la direction  $(Ox)$  vaut  $L$ . Comme  $H \ll L$ , on note  $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$ .

La vitesse de la paroi plane s'écrivant  $\underline{U} = U\mathbf{e}_x$ , l'écoulement est noté  $\underline{u} = u(x, y)\mathbf{e}_x + v(x, y)\mathbf{e}_y$ , et sa pression  $p(x, y)$ .

En amont ( $x \leq 0$ ) et en aval ( $x \geq L$ ), le fluide est supposé au repos à la pression  $P_a$ .

#### a) Etude de l'écoulement

1. Le domaine d'étude étant l'espace entre les deux parois, c'est-à-dire la portion d'espace située entre les deux surfaces solides limitée par les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ , écrire les équations (sous leur forme scalaire) régissant l'écoulement et les conditions aux limites qui lui sont imposées.
2. Adimensionner les variables, puis les inconnues du problème (vous noterez  $\bar{x}$  la variable  $x$  adimensionnée). On notera  $V$  l'échelle de  $v$ ,  $\delta p$  l'échelle de  $p$ .

3. En adimensionnant l'équation de conservation de la matière, montrez que  $V = \varepsilon U$ .
4. Adimensionnez l'équation de Navier-Stokes en utilisant comme notation  $\text{Re} = \frac{UH}{\nu}$ ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  et procédez aux simplifications automatiques.
5. Adimensionnez les conditions aux limites.
6. Quelle est la direction principale de l'écoulement du fluide ? Quel est le moteur de l'écoulement ? Quels sont les freins, les conséquences de l'écoulement ? En raisonnant sur la projection de l'équation de Navier-Stokes le long de la direction principale de l'écoulement, montrez que :

$$\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim \sup \left( 1, \frac{\delta p}{\rho U^2} \right)$$

7. On suppose que le régime d'utilisation de ce dispositif est tel que  $\varepsilon \text{Re} \ll 1$ . Justifiez qu'on peut alors fixer  $\frac{\delta p}{\rho U^2} = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}}$  et en déduire qu'en ne conservant que les termes prépondérants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned}$$

Intégrez cette dernière équation et exprimez  $u$  en fonction de  $\bar{h}$ ,  $\bar{y}$  et  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$ . Identifiez les écoulements génériques correspondants et tracez les profils de vitesse correspondants.

8. Exploitez la conservation de la matière pour exprimer  $\bar{v}$  en fonction de  $\bar{p}$  et ses dérivées,  $\bar{h}$  et ses dérivées,  $\bar{y}$ , et d'une fonction  $f(\bar{x})$  indéterminée à ce stade.
9. En exploitant les conditions aux limites portant sur  $v$ , montrez que :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{\bar{h}^3}{6} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

puis que :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{6}{\bar{h}^2} + \frac{c}{\bar{h}^3},$$

$c$  constante.

10. En exprimant le débit volumique  $\bar{Q}$  de l'écoulement dans la direction  $(Ox)$  de la gauche vers la droite, montrez que  $c = -12\bar{Q}$ .
11. En exploitant les conditions aux limites portant sur  $\bar{p}$ , exprimez  $\bar{Q}$  en fonction de  $\bar{h}(\bar{x})$ . Dans quel sens est orienté le transport de matière ?

## b) Contraintes

12. Montrez que le vecteur  $\nabla f$  est orthogonal aux courbes iso-valeur de la fonction  $f(x, y)$ . En déduire que le vecteur unitaire normal à la surface solide fixe de forme  $y = h(x)$  et orienté vers le fluide est :

$$\underline{n} = \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_x + \frac{-1}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_y,$$

où  $h'$  est l'autre notation de  $\frac{dh}{dx}$ .

13. Adimensionnez  $\underline{n}$  pour montrer qu'en ne conservant que les termes prépondérants,

$$\underline{n} = \varepsilon \bar{h}' \underline{e}_x - \underline{e}_y.$$

On rappelle que la contrainte  $\underline{T}$  exercée par le fluide sur la surface solide a pour expression :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \Big|_{\text{paroi}} \cdot \underline{n}$$

où  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{\underline{D}}$ ,  $\underline{\underline{D}} = (\underline{\nabla}\underline{u} + \underline{\nabla}\underline{u}^T)$ . Adimensionnez  $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}$ , puis  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  en ne considérant que la partie dépendant de l'écoulement de  $p - P_a = \delta p \bar{p}$ , et procédez aux simplifications automatiques. En déduire l'expression de  $\underline{T}$  en ne tenant compte que des termes prépondérants.

Montrez que la contrainte verticale est bien plus grande que la contrainte horizontale. C'est cet effet qui est exploité sur les paliers de machines tournantes ou les patins hydrauliques, et qui explique qu'on peut glisser sur un trottoir mouillé ou qu'une feuille de papier puisse glisser sur une table : les forces de portance exercées par le fluide lubrifiant cisailé entre une surface fixe et une surface mobile non parfaitement parallèles peuvent être très grandes, bien plus que les forces de frottement.

## 2 Coulage d'un mur de béton

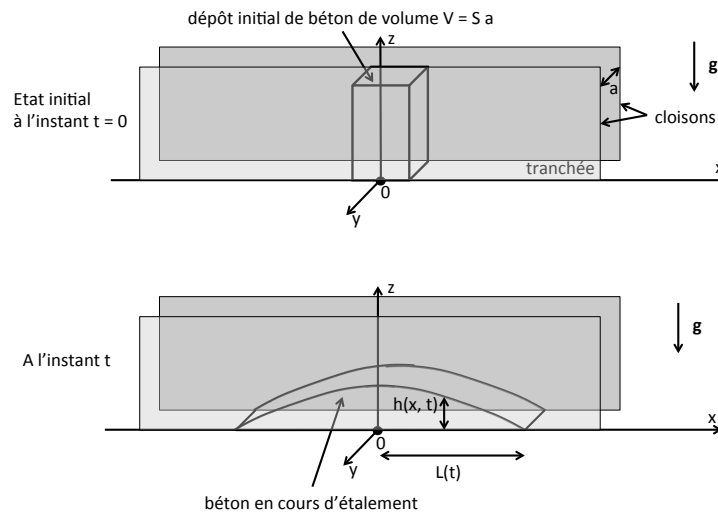


FIGURE 9 –

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur  $a$ , comme schématisé sur la figure 9. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume  $V$  au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités

de la tranchée avant de “prendre” (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique de cisaillement  $\mu$ . L'accélération de la gravité est notée  $\underline{g}$ . On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon  $(Oy)$  et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan  $(Oxz)$ . En conséquence, la forme du volume de béton est entièrement donnée par sa hauteur  $h$  (hauteur de sa surface libre) fonction de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ . Enfin, on suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon  $(Oy)$ . Son champ de vitesse  $\underline{u}$ , inscrit dans le plan  $(Oxz)$ , ainsi que son champ de pression  $P$  sont donc fonctions de  $x$ ,  $z$  et  $t$  seulement.

### a) Modélisation de l'écoulement

#### Mise en équations

##### *Equations-bilan*

1. L'écoulement du béton est-il stationnaire ?

On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que non seulement il puisse être considéré comme isovolume mais aussi que l'accélération du béton puisse être négligée dans l'analyse de son écoulement (hypothèse d'évolution quasistationnaire). Les équations de bilan de matière et de quantité de mouvement s'expriment donc sous la forme simplifiée :

$$0 = \nabla \cdot \underline{u} \quad (15)$$

$$\underline{0} = -\nabla P + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underline{g} \quad (16)$$

Dans le repère orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_z)$  associé aux coordonnées cartésiennes  $(x, z)$ , on note  $\underline{u} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_z$  et  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ .

2. Ecrivez les trois équations scalaires liant  $u$ ,  $v$  et  $P$  résultant de l'expression de (15) et (16) en coordonnées cartésiennes.

##### *Conditions aux limites*

3. **Conditions au fond de la tranchée** - Traduisez l'imperméabilité du fond de la tranchée et l'adhérence du béton sur le fond.
4. **Condition cinématique à la surface** - La surface libre du béton peut être décrite comme la surface isovaleur zéro de la fonction  $f(x, z, t) = z - h(x, t)$ . Exprimez le vecteur unitaire normal à la surface libre du béton orienté vers le haut  $\underline{n}$  en fonction de  $h$  et ses dérivées partielles.
5. Le caractère constant de  $f$  le long de la surface libre se traduit par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u}|_{s.l.} \cdot \nabla f = 0$$

où  $|_{s.l.}$  indique que la grandeur est évaluée à l'endroit de la surface libre. Montrez que :

$$v|_{s.l.} = \frac{\partial h}{\partial t} + u|_{s.l.} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (17)$$

6. **Condition dynamique à la surface** - La viscosité et l'inertie de l'air sont tellement faibles devant celles du béton que tout se passe pour l'écoulement comme si l'air au-dessus du béton liquide restait immobile à la pression atmosphérique  $P_0$ . Sous cette hypothèse, la continuité de la contrainte à la surface libre du béton  $\underline{\mathbb{T}}|_{\text{s.l.}}$  s'écrit :

$$\underline{\mathbb{T}}|_{\text{s.l.}} = \underline{\underline{\sigma}}|_{\text{s.l.}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = -P_0 \underline{\mathbf{1}} \quad (18)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes qui a pour expression intrinsèque  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\mathbf{1}} + 2\mu\underline{\underline{\mathbb{D}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{D}}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\nabla}\underline{\mathbf{u}}^T)$ ,  $\underline{\mathbf{1}}$  étant le tenseur identité. Montrez que :

$$\left(-P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{s.l.}} n_x + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{s.l.}} n_z = -P_0 n_x \quad (19)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{s.l.}} n_x + \left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)\bigg|_{\text{s.l.}} n_z = -P_0 n_z \quad (20)$$

### Formulation intégrale de la conservation de la matière

7. En intégrant par rapport à  $z$  de l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, montrez que :

$$v(x, h(x, t), t) = - \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz \quad (21)$$

8. Montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \right) = \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz + u(x, h(x, t), t) \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \quad (22)$$

Pour cela, vous pourrez éventuellement utiliser la fonction  $H(x, z) = \int_0^z u(x, z') dz'$  et évaluer  $\frac{dH(x, z(x))}{dx}$ , puis rajouter la variable  $t$  et remplacer  $z(x)$  par  $h(x, t)$ .

9. Déduisez de (17), (21) et (22) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \right) \quad (23)$$

### b) Adimensionnement

Le béton occupe initialement un volume  $V$  approximativement parallélépipédique de largeur  $a$ , de longueur  $2L_0$  et de hauteur  $h_0$ , voir la figure 9, avec  $h_0 \ll L_0$ .

Dans la suite, vous effectuerez les adimensionnements suivants :  $x = L_0 \bar{x}$ ,  $z = h_0 \bar{z}$ ,  $u = U \bar{u}$  ( $U$  échelle de vitesse inconnue à ce stade),  $v = V \bar{v}$  ( $V$  échelle de vitesse inconnue à ce stade)  $p = P_0 + \delta P \bar{p}$  ( $P_0$  est la pression de l'air, supposée constante,  $\delta P$  est l'échelle de pression inconnue à ce stade), où  $\bar{\alpha}$  est la notation de la partie analytique de la variable  $\alpha$ ,  $\alpha$  pouvant être  $x, z, t, u, v, P$ . Vous n'adimensionnez pas  $t$  à ce stade.

10. Adimensionnez l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, puis appliquez-lui le Principe de Non Simplification Abusive pour proposer une relation entre  $U$  et  $V$  faisant intervenir le paramètre  $\varepsilon = h_0/L_0$ .
11. Adimensionnez les deux équations scalaires de bilan de quantité de mouvement écrites à la question 2 en effectuant les simplifications automatiques, en utilisant la relation entre  $U$  et  $V$  établie à la question 10 et en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes :  $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$ ,  $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$  et  $\varepsilon$ .
12. Adimensionnez les conditions au fond de la tranchée.
13. Adimensionnez (23). Déduisez-en une échelle  $T$  pour  $t$  et adimensionnez  $t$ .

### c) Analyse physique

14. Appliquez le Principe de Non Simplification Abusive à l'équation de bilan de quantité de mouvement correspondant à la direction principale de l'écoulement pour proposer une valeur pour  $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$ .
15. Considérez maintenant l'autre direction de l'écoulement.
  - (a) Quel sont les termes moteurs, de frein, les conséquences de l'écoulement ?
  - (b) En déduire une relation valable en ordre de grandeur entre  $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$ ,  $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$  et  $\varepsilon$ .
  - (c) En déduire les lois d'échelles suivantes :

$$\begin{aligned}\delta P &= \rho g h_0 \\ U &= \frac{\rho g h_0^3}{\mu L_0}\end{aligned}$$

16. Montrez qu'en ne retenant que les termes dominants, l'adimensionnement des relations 19 et 20 en tenant compte des lois d'échelles données en question 15c conduit à :

$$\bar{p}|_{s.l.} = 0 \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right|_{s.l.} = 0 \quad (25)$$

17. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants les équations de bilan s'écrivent finalement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1 \quad (28)$$

18. Déterminez  $\bar{p}$ .
19. En intégrant (27), montrez que :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} \left( \frac{\bar{z}}{2} - \bar{h} \right)$$

20. En injectant cette expression de  $\bar{u}$  dans l'expression adimensionnée de  $\frac{\partial h}{\partial t}$  trouvée en question 13, déterminez l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit  $\bar{h}$ .

# V Problèmes singuliers

## 1 Contrôle de couche limite

Nous avons mis en évidence qu'au sein d'un écoulement à grand nombre de Reynolds (noté  $Re$ ) autour d'une plaque une couche limite visqueuse laminaire s'établit le long de la plaque. Or cette couche limite laminaire se déstabilise et devient turbulente au-delà de  $Re \simeq 5 \times 10^5$ , ce qui affecte fortement l'écoulement et augmente notablement la force de traînée subie par la plaque. Dans le contexte de l'aéronautique, il est crucial de repousser à des valeurs plus élevées de  $Re$  cette transition laminaire-turbulent. Le but de ce problème est d'étudier une technique de stabilisation de la couche limite visqueuse par aspiration. Dans un premier temps, vous allez ré-établir les propriétés de la couche limite visqueuse se développant le long d'une plaque plane à grand nombre de Reynolds. Dans un second temps, vous étudierez l'effet sur l'écoulement d'une aspiration du fluide à travers la plaque.

### a) Écoulement à $Re \gg 1$ le long d'une plaque plane

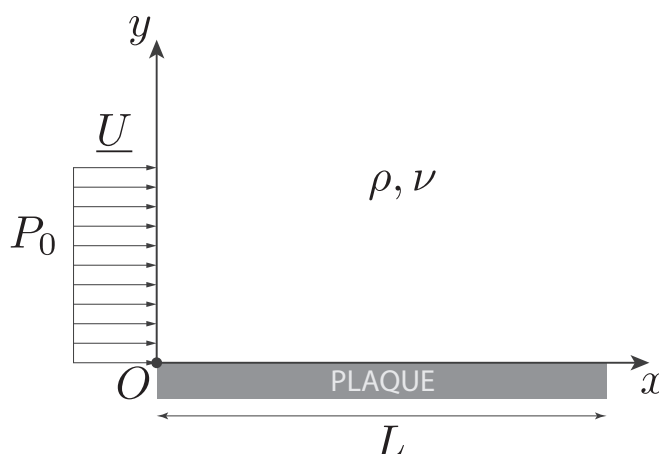


FIGURE 10 – Géométrie de l'écoulement autour d'une plaque plane.

On considère une plaque plane rectangulaire d'épaisseur négligeable qui se déplace à vitesse constante  $U$  avec un angle d'incidence nul dans un fluide homogène au repos de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . Dans le référentiel de la plaque, l'écoulement incident sur la plaque est donc stationnaire, parallèle et homogène de vitesse  $U$  et de pression  $P_0$ , voir la figure 10.

On suppose l'écoulement isovolume, bidimensionnel plan et stationnaire. En utilisant les coordonnées cartésiennes associées au repère orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ , le champ de vitesse du fluide s'écrit  $\underline{u} = u(x, y) \underline{e}_x + v(x, y) \underline{e}_y$  et le champ de pression  $p(x, y)$ . L'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (30a)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (30b)$$

Le domaine d'étude est défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq L \end{cases} \quad (31a)$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq L \end{cases} \quad (31b)$$

1. La plaque est imperméable et le fluide au contact de la plaque adhère à la plaque par viscosité. Ecrivez les conditions imposées à  $u$  et  $v$  le long de la plaque.
2. Donnez les expressions de  $u$ ,  $v$  et de  $p$  à la verticale du bord d'attaque de la plaque, c'est-à-dire le long du segment défini par  $\{x = 0, 0 < y \leq L\}$ .

On considère la situation correspondant à  $Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1$ , où  $L$  est la corde de la plaque, voir la figure 10. Dans ce régime, l'observation indique qu'à une distance de l'ordre de  $L$  l'écoulement n'est pas perturbé par la plaque, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} \underline{u}(x, y = L) = \underline{U} \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \\ \underline{p}(x, y = L) = P_0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (32a)$$

$$\begin{cases} \underline{p}(x, y = L) = P_0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (32b)$$

**Adimensionnement du problème à l'échelle de la plaque** Pour adimensionner les équations (29) et (30), vous noterez

- $\bar{z}$  la partie analytique de  $z$ ,  $z$  pouvant être  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  ou  $p$ ,
- $V$  l'échelle de  $v$  et  $\delta p$  l'échelle de  $p$ .

3. Définissez les adimensionnements de  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  et  $p$ .
4. Adimensionnez l'équation (29) et justifiez brièvement pourquoi  $V \sim U$ . Dans la suite, vous poserez  $\boxed{V = U}$ .
5. Adimensionnez les équations (30a) et (30b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions  $\frac{\delta p}{\rho U^2}$  et  $Re$ .
6. Adimensionnez les conditions imposées à  $u$ ,  $v$  et  $p$  aux limites du domaine d'étude.

**Solution de type écoulement parfait** Comme  $Re \gg 1$ , on peut supposer les effets de la viscosité négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque.

7. Sous ces hypothèses, quelle condition à la limite disparaît ? Ré-écrivez les équations scalaires modifiées sous ces hypothèses sous leur forme adimensionnée. Quel est le nom de l'équation vectorielle correspondante ?



8. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que  $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$ . Dans la suite, vous poserez  $\boxed{\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1}$ .
9. Vérifiez par le calcul que l'écoulement homogène non perturbé  $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$  est une solution exacte de ce problème simplifié.
10. Quel comportement non physique cette solution présente-elle ?

**Développements asymptotiques raccordés** Pour déterminer une solution plus satisfaisante, vous allez employer la méthode des développements asymptotiques raccordés, c'est-à-dire :

- supposer qu'à  $Re \gg 1$  les effets de la viscosité sont négligeables presque partout sauf au voisinage d'une singularité que vous allez supposer située sur la plaque,
- déterminer la solution du problème dans ce voisinage puis la raccorder à la solution du problème déterminée précédemment qui est *a priori* valable en-dehors de ce voisinage.

Le voisinage de la plaque dans lequel les effets de la viscosité sont supposées notables, appelé domaine singulier et noté D.S., est d'épaisseur notée  $\delta \ll L$ . Dans l'objectif de résoudre le problème dans le domaine singulier, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de ce domaine et en faire l'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique.

Le domaine singulier est donc défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad \begin{matrix} (33a) \\ (33b) \end{matrix}$$

Pour adimensionner les équations (29) et (30), vous noterez :

- $\tilde{z}$  la partie analytique de  $z$ ,  $z$  pouvant être  $y$ ,  $u$ ,  $v$  ou  $p$  (l'extension du domaine selon  $x$  étant inchangée, vous utiliserez l'adimensionnement précédemment utilisé pour  $x$  qui implique  $\bar{x}$ ),
- $U_1$  l'échelle de  $u$ ,  $V_1$  l'échelle de  $v$  et  $\delta p_1$  l'échelle de  $p$ .

11. Définissez les adimensionnements de  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  et  $p$  adaptés à l'étude dans le domaine singulier.

Compte tenu de la simplicité de la solution approchée visée ici, le raccordement de la solution à la frontière entre le domaine singulier et l'extérieur du domaine singulier, appelé domaine extérieur et noté D.E., s'écrit :

$$\lim_{y \gg \delta} (\text{solution dans le D.S.}) = \lim_{y \rightarrow 0} (\text{solution dans le D.E.})$$

12. Montrez que :

- $\boxed{U_1 = U}$  et  $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$ ,
- $\boxed{\delta p_1 = \delta p}$  et  $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 0$ .

13. On note  $\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{L}} \ll 1$ . Adimensionnez l'équation (29) et justifiez brièvement pourquoi

$$V_1 \sim \varepsilon U$$

Dans la suite, vous poserez  $\boxed{V_1 = \varepsilon U}$ .

14. Adimensionnez les équations (30a) et (30b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions  $\frac{\delta p}{\rho U^2}$ ,  $\varepsilon$  et  $\text{Re}$  et procédez aux simplifications automatiques.
15. Adimensionnez les conditions imposées à la solution au contact de la plaque.
16. Dans le domaine singulier, on considère précisément que les effets de la viscosité sont notables. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que :

$$\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1$$

Dans la suite, vous poserez  $\boxed{\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} = 1}$ . Déduisez-en l'expression de  $\delta$  en fonction de  $L$  et de  $\text{Re}$ .

17. En considérant maintenant la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement principal, montrez qu'en première approximation  $\tilde{p}$  ne dépend pas de  $\tilde{y}$ . En déduire  $\tilde{p} = 0$ .
18. Réécrivez le système d'équations et les conditions aux limites auxquelles obéissent  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  dans le D.S (problème de couche limite le long d'une plaque plane). Ce problème est-il bien posé ?

**Traînée visqueuse** On rappelle que la contrainte pariétale  $\underline{T}_p$  exercée par le fluide sur la plaque a pour expression :

$$\underline{T}_p = \underline{\sigma} \Big|_{\text{plaque}} \cdot \underline{n}$$

où  $\underline{\sigma} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{D}$  est le tenseur des contraintes,  $\underline{1}$  est le tenseur identité,  $\underline{n}$  est le vecteur normal à la plaque orienté vers le fluide et

$$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}}$$

19. Montrez que la composante horizontale de la contrainte pariétale  $T_{p,x}$  a pour expression :

$$T_{p,x}(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) \right)$$

20. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants,  $T_{p,x}$  a pour expression approchée :

$$T_{p,x}(x) = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0)$$

21. La solution invariante d'échelle du problème de couche limite le long d'une plaque plane (solution de Blasius) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0) = \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}}$$

où  $C$  est une constante d'ordre unité. Montrez que la trainée par unité de largeur exercée par l'écoulement sur la plaque sur ses deux faces :

$$f_T = 2 \int_0^L T_{p,x}(x) dx$$

a pour expression :

$$f_T = 4C\rho U^2 L \text{Re}^{-1/2} = 4C\rho \nu^{1/2} U^{3/2} L^{1/2}$$

## b) Effet d'une aspiration du fluide

**Préambule** On considère maintenant que la plaque est percée d'une multitude de trous reliés à un dispositif d'aspiration, comme schématisé sur la figure 11. Leur densité surfacique est telle que tout se passe comme si le fluide pénétrait dans la plaque avec une vitesse verticale  $\underline{v}_0$  homogène le long de la plaque, petite en comparaison de  $U$  :

$$v(x, 0) = -v_0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \quad \text{avec} \quad v_0 > 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\eta = \frac{v_0}{U} \ll 1} \quad (34)$$

sans que le fluide glisse le long de la plaque :

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \quad (35)$$

Les conditions expérimentales étudiées dans la partie 1 sont inchangées. Par conséquent, tous les résultats établis jusqu'à la question 6 incluse s'appliquent à cette situation, exceptée l'adimensionnement de la condition 34.

22. Adimensionnez la condition (34) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle de la plaque faits au paragraphe a).

Comme  $\text{Re} \gg 1$  et  $\eta \ll 1$ , pour approcher la solution de ce problème, on peut dans un premier temps supposer les effets de la viscosité et de l'écoulement d'aspiration pariétale négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait ( $\text{Re}^{-1} = 0$ ) et non aspiré ( $\eta = 0$ ) et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque. L'écoulement homogène non perturbé  $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$  est une solution exacte de ce problème simplifié.

23. Quels comportements non physique cette solution présente-elle ?

Pour déterminer une solution plus satisfaisante, l'approche du paragraphe a) peut être mise en oeuvre : après avoir scindé le domaine d'étude en domaine singulier près de la plaque et domaine extérieur, on applique la méthode des développements asymptotiques raccordés. Avec les mêmes notations et les mêmes choix de relations entre échelles, l'écoulement dans le domaine singulier où les effets de la viscosité sont notables vérifie :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (36)$$

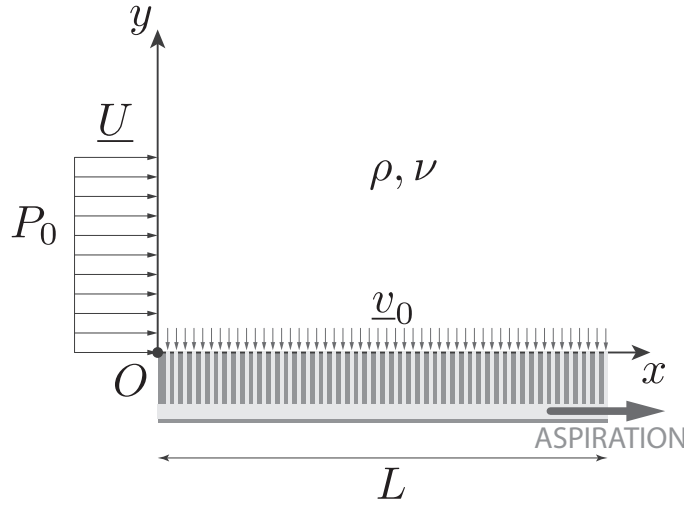


FIGURE 11 – Schéma de la plaque percée d'une multitude de trous aspirant le fluide en écoulement.

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (37)$$

avec comme conditions aux limites :

- l'adhérence du fluide à la plaque :  $\tilde{u}(0 \leq \tilde{x} \leq 1, 0) = 0$
- la condition (34) adimensionnée de manière adéquate (voir question suivante).
- le raccordement à la frontière entre D.S. et D.E. :  $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \tilde{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$

24. Montrez que l'adimensionnement de la condition (34) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle du D.S. faits au paragraphe a) s'écrit :

$$\tilde{v}(\tilde{x}, 0) = -\eta \operatorname{Re}^{1/2}$$

Dans la suite, on définit  $\boxed{\alpha = \eta \operatorname{Re}^{1/2} = \frac{\eta}{\varepsilon}}.$

**Recherche d'une solution invariante d'échelle** Mis en confiance par l'efficacité de la recherche de solution invariante d'échelle dans la situation de la partie 1 qui permet de mettre en évidence la solution de Blasius, on applique cette technique à ce problème.

25. En imposant un changement d'échelle à toutes les grandeurs impliquées dans ce problème de la forme  $a = a^* a'$ , où  $a$ , qui est la grandeur de départ, peut être  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\alpha$ ,  $a'$  est la notation pour la grandeur dilatée par changement d'échelle, et  $a^*$  le facteur de changement d'échelle, montrez que le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à un seul paramètre libre.
26. Exprimez les facteurs de changement d'échelle laissant le problème invariant en fonction de  $\alpha^*$  choisi comme le paramètre libre.
27. La solution du problème invariant par changement d'échelles étant elle-même invariante par ce même groupe de changements d'échelle,

- listez les grandeurs dont dépend  $\tilde{u}$  sous la forme  $\tilde{u} = f(\dots)$ ,  $f$  fonction inconnue,
  - opérez les changements d'échelle sur toutes les grandeurs impliquées dans cette relation,
  - exprimez tous les facteurs de changements d'échelle en fonction de  $\alpha^*$ ,
  - choisissez enfin une valeur particulière pour  $\alpha^*$ ,
- pour montrer finalement que :

$$\tilde{u} = f(\alpha^2 \bar{x}, \alpha \tilde{y})$$

28. Procédez de même pour  $\tilde{v}$ .

Il se trouve qu'il existe une solution particulière exacte à ce problème qui est indépendante de  $\bar{x}$ . En posant  $\xi = \alpha \tilde{y}$ , on écrit cette solution sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u} = F(\xi) \\ \tilde{v} = -\alpha G(\xi) \end{cases} \quad \begin{matrix} (38a) \\ (38b) \end{matrix}$$

$F$  et  $G$  étant deux fonctions à déterminer.

29. Réécrivez le problème (36, 37) et ses conditions aux limites comme un système d'équations différentielles couplées impliquant les fonctions inconnues  $F$  et  $G$ .
30. Résolvez ce système pour montrer que :

$$\begin{cases} F(\xi) = 1 - \exp(-\xi) \\ G(\xi) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (40a) \\ (40b) \end{matrix}$$

31. Cette solution n'a de sens que si elle rejoint la solution dans le domaine extérieur avant la sortie de la couche limite, c'est-à-dire pour  $\tilde{y} \sim 1$ . Montrez que ceci nécessite  $\alpha \gtrsim 1$ .
32. Exprimez la solution  $\tilde{u} = F(\xi)$  en variables dimensionnées pour montrer que :

$$u = U \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\ell}\right) \right]$$

où  $\ell$  est une longueur caractéristique dont vous établirez l'expression. Quelle est l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse en présence d'aspiration ? Varie-t-elle avec  $x$  ?

33. Quelle est la principale différence avec la solution de Blasius pour la couche limite visqueuse en absence d'aspiration :

$$u = U f_B \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)$$

où  $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$  et  $f_B$  est une fonction telle que  $f_B(0) = 0$  et  $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} f_B(\eta) = 1$  ?

c) **Trainée visqueuse**

34. En utilisant l'expression de la composante horizontale de la contrainte pariétale  $T_{p,x}$  donnée dans la question 20, montrez que :

$$T_{p,x} = \rho v_0 U$$

## 2 Ecoulement dans un conduit sanguin

Le sang circule dans le circuit sanguin sous l'effet des impulsions de pression de la pompe que constitue le coeur. On constate expérimentalement que l'écoulement du sang est la superposition d'un écoulement permanent et d'un écoulement instationnaire pulsé. On se propose d'étudier cet écoulement.

Le sang est considéré comme incompressible, homogène, de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\mu$ , de viscosité cinématique  $\nu$ . Il est supposé s'écouler dans une conduite cylindrique rigide de section droite circulaire de rayon  $a$ , de longueur  $L$  très grande devant son rayon, qui représente une artère ou une veine. Le poids est négligé.

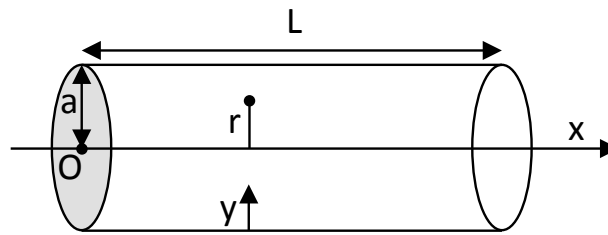


FIGURE 12 – Schéma du conduit sanguin.

On adopte les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  d'axe  $(Ox)$  coïncidant avec l'axe de la conduite, voir la figure 12.

**Equation** - Dans tout le problème on considère que  $L/a$  est assez grand pour que l'écoulement, stationnaire ou instationnaire, soit parallèle et axisymétrique : le champ de vitesse s'écrit donc :  $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_x$  où  $\mathbf{e}_x$  est le vecteur unitaire de l'axe  $(Ox)$ .

1. En vous aidant éventuellement du formulaire donné en fin d'énoncé, montrez que :
  - $u$  est indépendant de  $x$ ,
  - la pression du sang  $p$  est indépendante de  $r$ .
2. Montrez que le problème est gouverné par une seule équation (E) que vous donnerez.
3. Quelles est la condition à la limite imposée à la vitesse ?
4. Justifiez physiquement pourquoi la vitesse vérifie aussi  $\frac{\partial u}{\partial r}(r = 0, t) = 0 \forall t$ . Cette égalité peut être considérée comme une deuxième condition à la limite imposée à la vitesse.

**Ecoulement stationnaire** - On suppose ici l'écoulement stationnaire (ses champs sont indicés par l'indice 0) établi sous l'effet d'une différence de pression constante entre l'amont ( $x = 0$ ) et l'aval ( $x = L$ ) de la conduite telle que  $[p_0(L) - p_0(0)]/L = -K$  où  $p_0(0)$  et  $p_0(L)$  sont fixés tels que  $K$  est une constante positive. C'est l'écoulement de Poiseuille.

5. Dans quel sens le sang s'écoule-t-il ?

En utilisant les adimensionnements suivants :  $r = a \bar{r}$ ,  $x = L \bar{x}$ ,  $u_0(r) = U_0 \bar{u}_0(\bar{r})$  ( $U_0$  échelle inconnue à ce stade) et  $p_0 = p_0(0) - KL \bar{p}_0(\bar{x})$ , où  $\bar{z}$  est la notation de la partie analytique de  $z$ ,  $z = r, x, u_0$ ,

6. adimensionnez l'équation (E) écrite pour un écoulement stationnaire et les conditions aux limites imposées à la vitesse et à la pression,
7. ensuite montrez que  $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{x}$ ,
8. enfin déterminez  $\bar{u}_0(\bar{r})$  et choisissez  $U_0$  pour que  $\bar{u}_0 = 1 - \bar{r}^2$ . Exprimez la vitesse maximale.

**Ecoulement complet** - Du fait des contractions périodiques du coeur de période  $T$ , la pression présente aussi une composante instationnaire  $p_1(x, t)$  périodique de période  $T$  :

$$p(x, t) = p_0(x) + p_1(x, t)$$

En conséquence, la vitesse de l'écoulement présente aussi une composante instationnaire  $u_1(r, t)$  périodique de période  $T$  :

$$u(r, t) = u_0(r) + u_1(r, t)$$

$(u, p)$  étant solution de (E).

9. Montrez que  $u_1$  et  $p_1$  vérifient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (41)$$

et écrivez les conditions aux limites vérifiées par  $u_1$ .

10. En utilisant les adimensionnements suivants :  $r = a \bar{r}$ ,  $x = L \bar{x}$ ,  $t = T \bar{t}$ ,  $u_1(r, t) = \delta U \bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t})$  ( $\delta U$  échelle inconnue à ce stade),  $p_1(x, t) = \delta P \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t})$  ( $\delta P$  échelle fixée par la dynamique du coeur), où  $\bar{z}$  est la notation de la partie analytique de  $z$ ,  $z = r, x, t, u_1, p_1$ , adimensionnez l'équation (41) en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\text{Re} = \frac{a^2 \delta P}{\mu L \delta U} : \text{nombre de Reynolds}$$

$$\text{St} = \frac{\rho L \delta U}{T \delta P} : \text{nombre de Strouhal}$$

Adimensionnez les condition aux limites vérifiées par  $\bar{u}_1$ .

11. Identifiez les termes représentant le moteur de l'écoulement périodique, son (ses) éventuel(s) frein(s), sa (ses) éventuelle(s) conséquence(s).

12. Dans quelles conditions particulières portant sur  $Re$  et  $St$  les termes de l'équation sont-ils tous du même ordre de grandeur (problème complet) ? En déduire les expressions des valeurs particulières  $a^*$  de  $a$  et  $\delta U^*$  de  $\delta U$  correspondantes en fonction des données :  $\mu, \nu, \rho, L, \delta P, T$ . Evaluer numériquement  $a^*$  et  $\delta U^*$ . Les valeurs typiques des données pour le sang et la circulation sanguine sont :  $\mu \simeq 6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\rho \simeq 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $T \simeq 1 \text{ s}$ ,  $\delta P \simeq 1 \text{ kPa}$ ,  $L \simeq 1 \text{ m}$ .

**Ecoulement de fluide parfait** - On considère toujours la composante instationnaire de l'écoulement indicée par 1, qui obéit à l'équation (41), et on étudie toujours sa forme adimensionnée.

13. Quelles (in)égalités  $St$  et  $Re$  vérifient-ils dans l'hypothèse d'écoulement de fluide parfait (effets visqueux négligeables devant l'inertie) ? Montrez que cette situation se rencontre pour  $a \gg a^*$ . Cette hypothèse est-elle vérifiée pour la grosse artère aorte (de diamètre 2,5 cm), les plus petites artères (artérioles, de diamètre 2 mm) ?
14. Comment se simplifie l'équation (41) adimensionnée sous cette hypothèse d'écoulement de fluide parfait ? Le problème est-il bien posé ? S'attend-on à ce que la solution soit régulière ou singulière ?
15. Montrez que  $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} = f(\bar{t})$  où  $f$  est une fonction arbitraire. En déduire l'expression générale de  $\bar{p}_1$ .
16. On donne  $\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} \sin(2\pi \bar{t})$ . Déterminez l'expression de  $\bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t})$  compatible avec la condition à la limite en  $\bar{r} = 0$ . Quel est la nature de la composante de l'écoulement dépendant du temps ? Cette solution est-elle compatible avec la condition à la limite en  $\bar{r} = 1$  ?

**Résolution de la singularité de l'écoulement de fluide parfait** - Afin de déterminer une solution physiquement acceptable dans la limite  $Re \gg 1$ , vous allez mettre en oeuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le voisinage de la singularité de la solution que l'on pressent localisée à la paroi. On définit donc un domaine intérieur intégrant le lieu de la singularité, c'est-à-dire la paroi, d'extension radiale  $\delta$  telle que  $\delta \ll a$ , dans lequel vous résoudrez le problème complet puis effectuerez le raccord avec la solution dans le domaine extérieur.

17. Le domaine intérieur est donc défini radialement par  $r = a - y$  (voir la figure 12) où  $y = \delta \tilde{y}$ ,  $\tilde{y} \sim 1$ , et axialement par  $x = L\bar{x}$ ,  $\bar{x} \sim 1$ . En définissant  $\varepsilon = \delta/a$  et en utilisant les adimensionnements suivants, valables dans le domaine intérieur :  $u_1(r, t) = \delta U' \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})$ ,  $p_1(x, t) = \delta P' \tilde{p}_1(\tilde{y}, \bar{t})$ , où  $\tilde{z}$  est la notation de la partie analytique de  $z$ ,  $z = y, u_1, p_1$ , adimensionnez l'équation (41) et montrez que :

$$St' \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 Re'} \frac{1}{1 - \varepsilon \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( (1 - \varepsilon \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (42)$$

$$\text{où } Re' = \frac{a^2 \delta P'}{\mu L \delta U'} \text{ et } St' = \frac{\rho L \delta U'}{T \delta P'}.$$

18. Montrez que  $\varepsilon \ll 1$  et effectuez les simplifications permises par l'approximation de plan tangent.
19. Ecrivez la condition à la limite vérifiée par  $\tilde{u}_1$ .



20. Ecrivez les conditions de raccord imposées à  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{p}_1$ . En déduire les égalités vérifiées par les échelles et les parties analytiques des solutions. Montrez enfin que  $St' = St$  et  $Re' = Re$ .
21. Montrez que la condition de non-dégénérescence du problème dans le domaine intérieur impose  $\varepsilon \sim Re^{-1/2}$ . En déduire la forme simplifiée de l'équation (42) dans le domaine intérieur.

$\tilde{p}_1$  étant connue, cette e.d.p. linéaire inhomogène s'identifie à une équation de diffusion de  $\tilde{u}_1$  forcée qui est soluble analytiquement.

**Formulaire : équations bilan en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$**  - Pour un champ de vitesse axisymétrique  $\mathbf{v} = v(r, x, t) \mathbf{e}_r + u(r, x, t) \mathbf{e}_x$  et un champ de pression axisymétrique  $p(r, x, t)$  :

— Conservation de la matière au sein d'un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \right] \end{aligned}$$