# 2A004 Statique et dynamique des fluides
# TD (Problèmes et aide à la résolution)

J-M Fullana

27 décembre 2018

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 1 : Maths pour des fluides**

### Exercice 1.1 : Fonctions à plusieurs variables

1. Calculer les dérivées partielles (premières et secondes) de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y, z) = 5x^2 - 12xy + 7y^3 + xz$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Que ce qu'on peut dire des dérivées croisées ?

### Exercice 1.2 : Opérateurs

1. Calculer $\vec{u} = \vec{grad}\ f$.
2. Calculer $div(\vec{u})$.
3. On se place à 2D, montrer que si le vecteur $\vec{u}$ derive d'un potentiel alors $rot(\vec{u}) = 0$.
4. Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe-il des fonctions $f(x, y)$, de deux variables telles que l'on ait, en tout point $(x, y)$
$$\vec{grad}\ f(x, y) = (x^2y^2, y + \alpha x^3 y)$$
Tracer $z = f(x, y)$ pour $z = 0$. Tracer $\vec{grad}\ f(x, y)$. Vérifier que $\vec{grad}\ f(x, y)$ est un vecteur dirigé dans le sens des $f(x, y)$ croissants.
5. Plus simple, si l'on a des cercles $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ (pour chaque valeur de $R > 0$) vérifier que $\vec{grad}\ f(x, y)$ est un vecteur dirigé dans le sens des $f(x, y)$ croissants.
6. Tracer le champ de vitesses et calculer le rotationnel pour deux champs "équivalents" à 2 dimensions (attention, coordonnées polaires, la composante $z$ du rotationnel est $(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta})$
   - $\vec{u} = \frac{A}{r}\ e_\theta$
   - $\vec{u} = Br\ e_\theta$
7. Discuter les deux cas.
8. (problème d'examen) Modèle de tornade

**Solution de l'exercice 1.2.**

1.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 12y + z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12x + 21y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x$$
Les dérivées secondes se calculent directement.
**Important** : $\frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = -12$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial_y \partial_x} = -12$, c'est pas de la chance ! !, ceci est dû au théorème de Schwarz, "Soit f, une fonction numérique de $N$ variables, définie sur un ensemble ouvert U de $R^N$. Si les dérivées partielles existent à l'ordre p et sont continues en un point x de U, alors le résultat d'une dérivation à l'ordre p ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux p variables considérées."

2. $\vec{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z$, c'est un vecteur.
3. $div(\vec{u})$ est $div(\vec{grad}\ f)$ soit $\nabla\nabla f$ le Laplacien de la fonction $f$, alors $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ un scalaire.
4. Qu'un vecteur $\vec{u}$ derive d'un potentiel cela veut dire que $\vec{u} = \vec{grad}\ \phi$, $\phi$ étant une fonction quelconque (exemple le potentiel gravitationnel et le vecteur $\vec{g}$). Pour le cas à 2 dimensions, $rot(\vec{u}) = rot(\vec{grad}\ \phi)$ soit
$$rot(\vec{u}) = \nabla \wedge \vec{u} = (\frac{\partial^2 \phi}{\partial_x \partial_y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial_y \partial_x})e_z = 0.$$
5. Nous avons
$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y + \alpha x^3 y$$
on intègre la 1er équation par rapport à $x$ donc $f(x, y) = 1/3x^3y^2 + h(y)$ et puis on la dérive par rapport à $y$ ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial y} = 2/3x^3y + \frac{dh(y)}{dy}$. Nous avons deux expression de $\frac{\partial f}{\partial y}$ donc
$$\frac{dh(y)}{dy} = y + x^3 y(\alpha - 2/3)$$
comme $h$ ne dépend que de $y$ cette dernière expression à un sens uniquement si $\alpha = 2/3$ (ce résultat peut être trouvé par le théorème de Schwarz). Finalement $h(y) = 1/2y^2 + A$ et donc
$$f(x, y) = 1/3x^3y^2 + 1/2y^2 + A$$
$A$ étant une constante. Voir la Figure **??**
6. Fait en cours. Même si les deux écoulements tournent autour de l'axe $z$ dans l'un des cas il est irrotationnel, c'est à dire que la particule fluide ne tourne pas sur elle même.

**Exercice 1.3 : Intégrales**

1. Soit une ligne de longueur $L$ le long l'axe $x$
   — calculer $F_t = \int_L p dx$ avec $p$ constant ($[p] = F/l$)
   — calculer $F_t = \int_L p dx$ avec $p = Ax$, $A$ constant.
2. Calculer les moments par rapport à l'origine $O$.
3. Où doit-on placer une force ponctuelle (entre 0 et $L$) pour avoir le même moment par rapport à l'origine ?

**Solution de l'exercice 1.3.**

1. dans le 1er cas on peut sortir $p = A$ de l'intégrale donc $A\int_0^L dx = AL$, dans le 2de cas nous devons intégrer $\int_0^L Axdx = AL^2/2$.
2. le moment est $\mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$ soit le produit vectoriel entre la distance du point où on veut calculer le moment et le point d'application. C'est une quantité vectorielle qui dépend du point où on la calcule. Pour une force constante nous devons calculer $\int_0^L Axdx$ et pour une force linéaire $\int_0^L Ax^2dx$.
3. Dans ce cas on connait la résultante de la force $F_R$ et le moment calculés $M_0$ précédemment on doit chercher la distance $d$ tel que $F_R d = M_0$. cela donne $d = 1/2L$ et $d = 2/3L$. point d'application

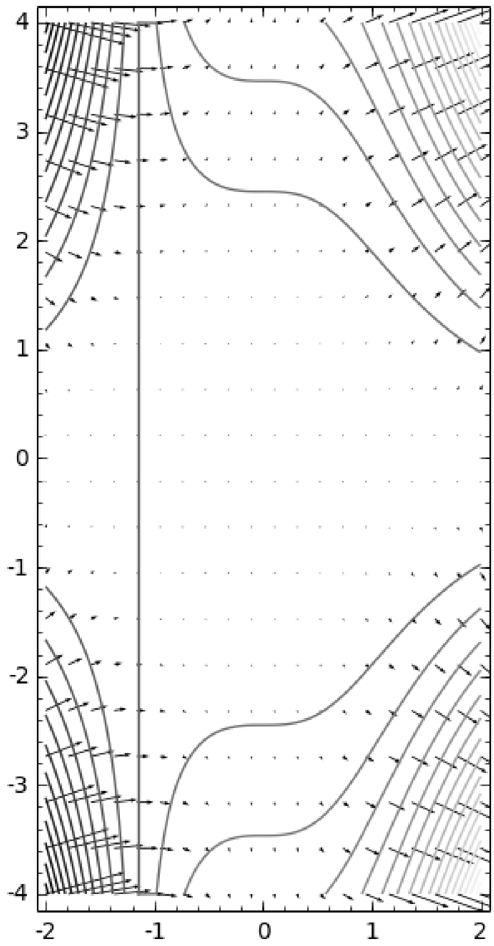



FIGURE 1 – $f(x, y)$ et gradient

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 2 : Statique des fluides**

### Exercice 2.1 : Piscine

Nous allons calculer les forces dues à la pression $\mathbf{dF} = -p\mathbf{n}dS$ sur le fond de deux piscines. On suppose que $p(z) = \rho g z$. La coordonné verticale est $z$ et l'horizontale $x$. Ici on ne tient pas compte de la coordonnée $y$ dirigée vers l'intérieur de la page et l'on a supposé que la pression atmosphérique est égale à 0.

1. Figure 1 (gauche). Calculer la force due à la pression sur le fond d'une piscine de section rectangulaire ($h \times L$).
2. Figure 1 (droite). Calculer la force due à la pression sur le fond d'une piscine de section circulaire de rayon $R$. Aide : $\int_0^\pi sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$.

### Solution de l'exercice 2.1.

1. la pression sur le fond de la piscine est constante et égale à $\rho g L$ d'après le point précédent la force est $F_z = -\rho g L^3$ car nous avons aussi une longueur $L$ dans la direction perpendiculaire au plan du papier.

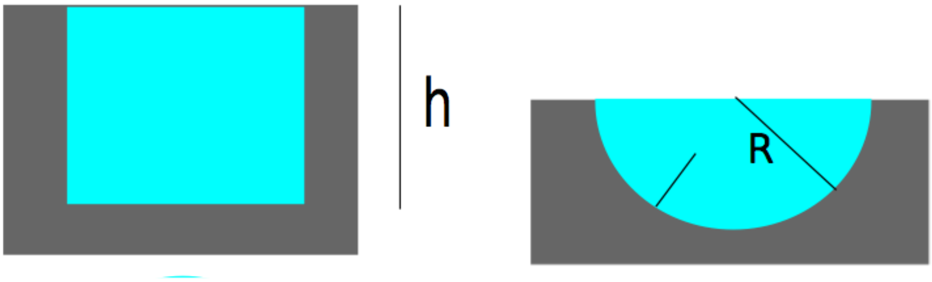



FIGURE 2 – Statique : (gauche) Piscine rectangulaire (droite) Piscine à section circulaire de rayon $R$

2. Ici la pression est $p(\theta) = \rho g R \sin\theta$ et la projection de la normale sur $z$, $n_z = \sin\theta$ alors la force résultante est $\int_0^\pi \int_0^L \rho g R \sin^2\theta R d\theta dy$ où $dS = Rd\theta dy$ dans notre cas. Pour la direction $x$ la résultante est $\int_0^\pi \int_0^L \rho g R \cos\theta \sin\theta R d\theta dy$ qui doit être égale à zéro par symmétrie.

**Exercice 2.2 : Barrage**

La plaque en forme de $L$ inversé (de profondeur constant et égal à $b$) peut pivoter autour du point $O$ (pris comme l'origine des coordonnées), déterminer la valeur de la force $P$ pour éviter la fuite de liquide. Pour simplifier les calculs vous pouvez écrire que $P_{atm} = 0$ (justifiez).

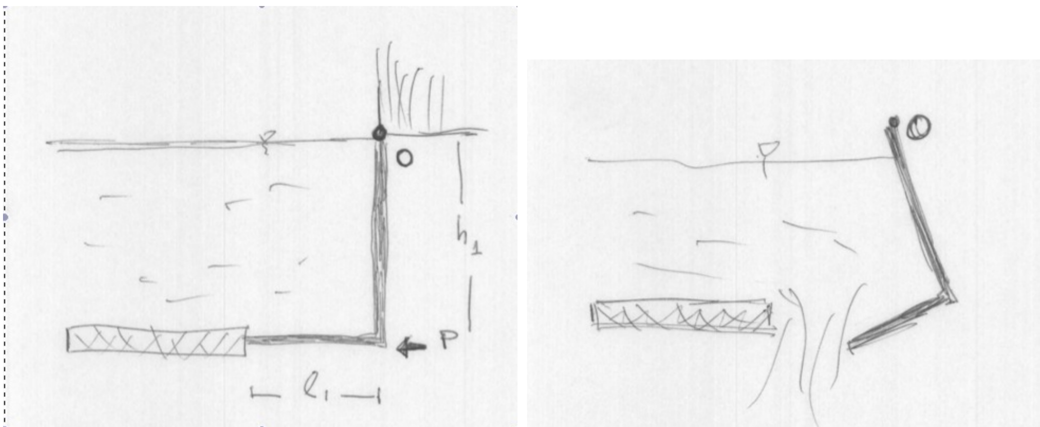



FIGURE 3 – Barrage

**Solution de l'exercice 2.2.** On doit calculer les forces $F = \int_S -p\vec{n}dS$ et les moments sur les deux surfaces, une horizontale $S_1$ et l'autre verticale, $S_2$ de longueurs caractéristiques $l_1$ et $h_1$. On suppose la profondeur dans la direction $y$ égale à $b$ pour le calcul des surfaces. La pression est

$$p(z) = P_0 - \rho g z$$

$P_0$ est une pression de référence que l'on suppose 0 pour les calculs. Rappel : vous pouvez aussi définir une variable $\bar{P} = p - p_{atm}$.

— Forces : pour la plaque horizontale la pression est constante et égale à $p(z = -h_1) = \rho g h_1$ et la force $F_1 = -\rho g h_1 l_1 b e_z$. Nous avons en réalité fait $F = pS$ $S$ étant la surface $l_1 b$. Vous pouvez aussi remarquer que $l_1 h_1 b$ est un volume et $\rho g l_1 h_1 b$ le poids de ce volume...
Pour la plaque verticale nous devons intégrer $F = \int_0^b \int_0^{-h_1} \rho g z dz dy$ (le signe - de $p$ se compense avec le signe - de la normale $e_x$) donc $F_2 = 1/2 \rho g h_1^2 b e_x$.

— Point d'application des forces : $F_1, d_1 = (-l_1/2, -h_1)$, $F_2, d_2 = (0, -2/3h_1)$ et $P, d_p = (0, -h_1)$. Somme des forces et moments

$$R_0 e_y + F_1 e_z + F_2 e_x + P e_y = 0$$
$$\vec{d_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{d_2} \wedge \vec{F_2} + \vec{d_p} \wedge \vec{P} = 0$$

La 1ere équation donne $P = -1/2\rho g h_1^2 b e_x$ (l'effort de $F_1$, selon l'axe $z$ est supporté par le point d'attache $O$, $R_O$). La 2eme équation donne aussi une valeur pour $P$, celle-ci est la bonne car la 1ere ne tient pas compte des moments.

**Exercice 2.3 : Récipient en rotation**

*(problème de l'écrit d'octobre 2012)*
Un récipient cylindrique de rayon $R$ rempli d'eau jusqu'une hauteur $H$ est soumis à une rotation constante $\omega$ autour de l'axe $z$. Le système a alors deux forces de volume : la force de pesanteur égale à $-\rho g\ e_z$ et la force centripète égale à $\rho\omega^2 r\ e_r$,

1. quelle est l'expression de la forme **locale** de l'équation fondamentale de la statique des fluides ? (rappel $\vec{grad} p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z$)
2. Intégrez les équations du point 1 et montrez : que la pression est une fonction de $r$ et de $z$ soit $p = p(r, z)$ et que les courbes isobares (à pression constante) sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe $z$.
3. Représentez la surface libre du fluide dans les cas limites $w$ grand et $w$ petit.
4. La pression sur le fond au centre du récipient, augmente-telle avec la rotation ? Justifiez.
5. Sans faire des calculs, comment calculeriez vous la hauteur de la surface libre aux bords du récipient en rotation ($r = R$) ?

**Solution de l'exercice 2.3.**

1. $\frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r$, $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -g$, donc $p = p(r, z)$.
2. $p(r, z) = 1/2\omega^2 r^2 - gz + A$, une isobare est une courbe à $P = cte$ donc
$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + B$$
A et B constantes.
3. do it!!
4. Sur le fond au centre $r = 0$ donc $p = -gz + A$ et pour une augmentation de $\omega$, l'hauteur $z$ au centre diminue.
5. $z_R = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + B$ et si $z_R$ dépasse les bords du récipient l'eau déborde...

**Exercice 2.4 : Archimède**

*question bonus écrit 2013*
Quelle proportion du volume total $V_T$ d'un iceberg est visible ? Un glaçon qui fond dans un verre d'eau fait-il augmenter le niveau d'eau ? ($\rho_g = 0.9\rho_e$)

**Solution de l'exercice 2.4.** Le poids de l'iceberg est $\rho_g g V_T$ la force d'Archimède est

$$\int_S -p\vec{n} dS = -\int_{V_1} \rho_e g dV$$

l'intégrale sur le volume immergé $V_I$, alors l'équilibre donne

$$\rho_e g V_I = \rho_g g V_T$$

soit $\frac{V_I}{VT} = \frac{\rho_g}{\rho_e} = 0.9$. Pour le verre d'eau la masse $m$ étant conservée nous avons $m = \rho_g V_T = \rho_e V_e$ où $V_e$ est le volume de la glace transformée en eau, donc $V_e = \frac{\rho_g}{\rho_e} V_T$ et le niveau d'eau reste inchangé.

**Exercice 2.5 : Crève-tonneau**

Pascal en 1646 a fait l'expérience suivante : il a inséré un tube de 10 $m$ de long dans un tonneau rempli d'eau à rasbord. Il montre que quand un verre d'eau est ajouté dans le tube l'augmentation de pression fait exploser le tonneau.

1. Analysez le phénomène
2. si le tube a $0.2cm^2$ de section de combien d'eau avez vous besoin pour remplir le tube ?
3. si le tonneau a 1 $m$ de haut et 0.5 $m$ de diamètre, quelle est la pression sur la face supérieure (le couvercle) avant et après le remplissage du tube ?
4. et si l'on gèle le liquide à l'intérieur du tube.

Crève-tonneau de Pascal.

**Solution de l'exercice 2.5.**

1. Pour le tonneau seul avec un trou de $0.2cm^2$ de section sans le tube nous avons qu'à la surface libre la pression est la pression atmosphérique. Sur la partie supérieure du tonneau il n'y a pas de force mis à part le poids du couvercle. Si nous introduisons le tube de $10m$ et nous le remplissons d'eau la pression sur la partie inférieure du couvercle est maintenant $\rho g H + P_a$ avec $H = 10m$.
2. avec un verre d'eau on peut le remplir, car $1000cm \cdot 0.2cm^2 = 200cm^3$.
3. la pression est donc $1000Kg/m^3 \cdot 9.8m/s^2 \cdot 10m$ soit 1 Bar qui est égal à $1kg/cm^2$. Cette pression appliquée au couvercle donne $1962kg$ ! ! ! Le tonneau donc explose...
4. ? ? ? ?

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 3 : Cinématique**

**Exercice 3.1 :**

On considère le mouvement plan d'un fluide défini dans la représentation eulerienne par :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= -k_o\ y\ \exp(-\alpha t) \\ v(x,y,t) &= +k_o\ x \end{cases}$$

où $k_o$ et $\alpha$ sont des constantes avec $\alpha > 0$.

1. Quelle est la dimension de $k_o$ et de $\alpha$ ?
2. Déterminer et tracer les lignes de courant à $t = 0$ et quand $t \to +\infty$.
3. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(x,y,t)$.

**Solution de l'exercice 3.1.**

1. $k_o$ et de $\alpha$ ont la dimension $[\frac{1}{T}]$.
2. les lignes de courant sont les courbes définies par
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$
soit pour $t = 0$
$$k_0 x dx + k_0 y dy = 0$$
$$1/2(x^2 + y^2) = C$$
ce sont des cercles centrés en (0,0), $x^2 + y^2 = R^2$. Pour $t \to \infty$ ce sont des droites parallèles à l'axe $y$.
3. $\Gamma = \frac{D\vec{u}}{Dt}$ donc
$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$
et finalement
$$\Gamma_x = k_0(\alpha y - k_0 x)e^{-\alpha t}$$
$$\Gamma_y = -k_0^2 y e^{-\alpha t}$$

**Exercice 3.2 :**

Soit un milieu continu $\Omega$ en mouvement plan par rapport au référentiel $R_0(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. La position d'une particule M(x,y,z) de $\Omega$ est définie par :

$$\begin{cases} x(x_o,y_o,z_o,t) &= -\tan(at)y_o + x_o \\ y(x_o,y_o,z_o,t) &= \tan(at)x_o + y_o \\ z(x_o,y_o,z_o,t) &= z_o \end{cases}$$

où $M_0(x_o, y_o, z_o)$ est la position de la particule à l'instant $t = 0$.

1. De quelle représentation du mouvement s'agit-il ?
2. Déterminer la vitesse au point M d'une particule.
3. Déterminer et tracer la trajectoire d'un point M au cours du temps.
4. Donner la représentation eulérienne du mouvement.

**Solution de l'exercice 3.2.**

1. Représentation lagrangienne du mouvement (les positions des particules en fonction des positions initiales et du temps).
2. par définition

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -y_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{sin(at)}{cos(at)}\right] = -\frac{ay_0}{cos^2(at)}$$
$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = x_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{sin(at)}{cos(at)}\right] = \frac{ax_0}{cos^2(at)}$$
$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

3. Les trajectories sont ls courbes dont les équations sont obtenues en éliminant le temps $t$ de la formulation de Lagrange. Nous avons $\tan(at) = \frac{x_0 - x}{y_0}$ et $\tan(at) = \frac{y - y_0}{x_0}$ et, donc finalement $y = \frac{x_0 - x}{y_0} x_0 + y_0$, des droites dans le plan avec $z = z_0$.
4. Représentation Eulerienne : il faut éliminer les conditions initiales des vitesses $u, v, w$ calculées précédemment alors

$$x_0 = \frac{x + y\tan(at)}{1 + \tan^2(at)}$$
$$x_y = \frac{y - x\tan(at)}{1 + \tan^2(at)}$$

et finalement

$$u = -a[y - x\tan(at)]$$
$$v = a[x + y\tan(at)]$$
$$w = 0$$

**Exercice 3.3 :**

Soit un milieu continu $\Omega$ en mouvement plan par rapport au référentiel $R_0(O, \vec{e_x}, \vec{e_z}, \vec{e_z})$. La vitesse eulérienne d'une particule M(x,y,z) de $\Omega$ est définie par :

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) &= V_0(1 - e^{-\alpha t}) + \omega y \\ v(x,y,z,t) &= V_0(1 + e^{-\alpha t}) - \omega x \\ w(x,y,z,t) &= 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les lignes de courant pour les instants $t = 0$ et $t = +\infty$
2. Calculer la divergence de $\vec{u}(x, y, z, t)$. Que peut-on conclure sur l'écoulement.
3. Calculer l'accélération du point M, $\vec{\Gamma}(x, y, z, t)$.

**Solution de l'exercice 3.3.**

1. Les lignes de courant sont données par $vdx - udy = 0$
   (a) $t = 0$ alors $(-\omega x + 2V_0)dx = wydy$ donc
   $$y^2/2 + A = -x^2/2 + 2V_0 x/\omega + B$$
   alors nous avons $y^2 + (x - \frac{2V_0}{\omega})^2 = 2(C + \frac{4V_0^2}{\omega^2})$ des cercles concentrique centrées en $x = \frac{2V_0}{\omega}$ et $Y = 0$.
   (b) $t \to \infty$ nous avons $(-\omega x + V_0)dx = \omega y + V_0$ donc $-\omega x^2/2 + V_0 x + A = \omega y^2/2 + V_0 y + B$, encore un cercle!!
2. $div(\mathbf{u}) = 0$ l'écoulement est incompressible.
3. l'accélération est
   $$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
   $$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$
   car $w = 0$.

**Exercice 3.4 :**

On considère le mouvement plan d'un fluide défini dans la représentation eulerienne par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 4\omega(x + 2y) \\ v(x, y, t) = -4\omega(x + y) \end{cases}$$

où $\omega$ est une constante.

1. Le champ de vitesse est il stationnaire ? incompressible ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant.
3. Calculer le rotationnel du champ de vitesse.
4. Calculer la dérivée particulaire de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$

**Solution de l'exercice 3.4.** Faire!! (problème classique d'examen...)

1. Oui, il n'ay pas de dépendance explicite en temps. $div(\mathbf{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ donc incompressible.
2. Les lignes de courant sont données par $vdx - udy = 0$ ou en utilisant la fonction de courant $\psi$ (car incompressible).
3. faire
4. $E_c = 1/2\left(16\omega^2(x + 2y)^2 + 16\omega^2(x + y)^2\right)$ alors
   $$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{\partial E_c}{\partial t} + u\frac{\partial E_c}{\partial x} + v\frac{\partial E_c}{\partial y}$$

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 4 : Cinématique**

**Exercice 4.1 :**

Soit le mouvement plan d'un milieu continu défini par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(x,y,t) & = & \omega y \\ v(x,y,t) & = & -\omega x + a\omega^2 t \end{cases}$$

où $a$ et $\omega$ sont deux constantes positives.

1. Déterminer les lignes de courant à l'instant $t$. Indiquer le sens de parcours.
2. Déterminer les trajectoires
3. Examiner le cas $a = 0$. Dessiner les vecteurs vitesses aux points $A = (1,0)$, $B = (2,1)$ et $C = (0,2)$.
4. En prenant comme variables de Lagrange $(x_0, y_0)$, position de la particule à l'instant $t = 0$, exprimer $x$ et $y$ en fonction des variables $(x_o, y_o, t)$.
5. Calculer l'accélération de la particule située en $(x,y)$ à l'instant $t$ en variables d'Euler $(x,y,t)$ et en variables de Lagrange $(x_o, y_o, t)$.
6. On associe à chaque particule une température $T$ telle que $T = T_o(x^2 + a^2\omega t)\frac{1}{a^2}$. Calculer $\frac{DT}{Dt}$.

**Solution de l'exercice 4.1.**

1. Les lignes de courant sont données par la solution à l'équation $vdx - udy = 0$ donc
$$(-\omega x + a\omega^2 t)dx - \omega y dy = 0$$
$$-1/2\omega x^2 + a\omega^2 tx + A - 1/2\omega y^2 dy = 0$$
$$y^2 + x^2 - 2\omega tx = C$$
donc c'est un cercle $y^2 + (x - a\omega t)^2 = R^2$ avec $R^2 = C + a^2\omega^2 t^2$ dont la coordonnée $x$ et le rayon changent.
2. Pour les trajectoires nous devons (1) intégrer les équations en se rappelant que $u = dx/dt$ et $v = dy/dt$ (2) trouver les conditions initiales. Soit le système
$$\frac{dx}{dt} = \omega y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\omega x + a\omega^2 t$$
Nous ne pouvons pas l'intégrer directement. Si nous dérivons la 1er équation par rapport au temps nous avons $\frac{d^2x}{dt^2} = \omega\frac{dy}{dt}$ que nous pouvons remplacer dans le 2de. Alors
$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = a\omega^2 t$$
C'est une équation différentielle à coefficients constants. Alors la solution est $x = x_H + x_P$ soit une solution homogène et une solution particulière. Pour la solution homogène (voir plus bas) nous avons $x_H = A\cos(\omega t + \phi)$. Pour la solution particulière on propose une solution en polynômes de $t$ car c'est la forme du seconde membre, alors $x_P = B + Ct$. En remplaçant t dans la solution on trouve $B = 0$ et $C = a\omega$ donc
$$x = A\cos(\omega t + \phi) + a\omega t$$
On trouve $y$ à partir de $\frac{dx}{dt} = \omega y$ et les conditions initiales avec $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

3. Faire.
4. C'est bien les trajectoires...
5. Pour Lagrange l'accélération est juste $\frac{d^2x}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt}$ en utilisant le résultat précédent. Pour Euler il faut utiliser la dérivée convective ou particulaire

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

6. Pour une fonction scalaire nous devons appliquer la dérivée convective (qui donne une fonction scalaire!!! attention)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}$$

**Solution d'équations différentielles à coefficients constants.** Soit

$$x^{''} + \omega^2 x = 0$$

le polynôme caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$ avec racines complexes $r = \pm i\omega$, la solution générale est donc

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

L'identité d'Euler nous dit que

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

alors la solution générale peut être écrire comme

$$x(t) = A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

Par un choix judicieux des constants $A$ et $B$ nous pouvons trouver deux solutions indépendantes

1. $A = B = 0.5$ alors $x(t) = \cos(\omega t)$
2. $A = i0.5 = -B$ alors $x(t) = \sin(\omega t)$

Les deux solutions sont solution du problème général et linéairement indépendantes donc nous pouvons alors écrire

$$x(t) = D\cos(\omega t) + E\cos(\omega t)$$

qui peut s'écrire aussi

$$x(t) = D\cos(\omega t + \phi)$$

**Exercice 4.2 :**

Soit le mouvement plan d'un milieu continu défini par le champ de vitesse :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= \omega x \\ v(x,y,t) &= -\omega y \quad \text{où } \omega \text{ est une constante.} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de courant $\psi$ et tracer quelques lignes de courant.
2. Vérifier que $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$. Déterminer la fonction potentiel des vitesses $\varphi$ et tracer quelques équipotentielles.
3. Montrer que les lignes de courant sont perpendiculaires aux lignes équipotentielles.

**Solution de l'exercice 4.2.**

1. $div(\mathbf{u}) = 0$ il existe donc une fonction de courant $\psi$
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
2. les lignes équipotentielles sont solution de
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
3. il faut calculer $\mathbf{g}rad(\phi) \cdot \mathbf{g}rad(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} = -vu + uv = 0$

**Exercice 4.3 : Ecoulement instationnaire**

Soit le mouvement plan d'un milieu défini par le champ des vitesses suivant :
$$\begin{cases} u(x,y,t) = \omega x + at \\ v(x,y,t) = -\omega y \quad \text{où } \omega \text{ est une constante.} \end{cases}$$
avec a et $\omega$ constantes

1. Déterminer les lignes de courant et les trajectoires en indiquant les sens de parcours.
2. Que remarque-ton lorsque $a = 0$ ?
3. Calculez l'accélération de deux manières.

**Solution de l'exercice 4.3.**

1. $div(\mathbf{u}) = 0$ il existe donc une fonction de courant $\psi$ tel que
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
alors $\psi = (\omega x + at)y + f(x)$ et en dérivant $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega y + f^{'}(x)$ qui doit être comparé à la composante $-v = \omega y$ donc $f = A$. Nous avons donc
$$\psi = (\omega x + at)y + A$$
qui donne des courbes type $y \sim 1/x$. Les trajectoires sont solution de
$$\frac{dx}{dt} = \omega x + a\omega t$$
$$\frac{dy}{dt} = -\omega y$$
ce qui est direct à calculer car ce sont deux équations différentielles à coefficients constants. Cela donne $y = Ae^{-\omega t}$ et $x = Be^{\omega t} - \frac{at}{\omega} - \frac{a}{\omega^2}$.

2. Lorsque $a = 0$ les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.
3. Pour Lagrange l'accélération est juste $\frac{d^2x}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt}$ en utilisant le résultat précédent. Pour Euler il faut utiliser la dérivée convective ou particulaire

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

**Exercice 4.4 :**

On considère le mouvement d'un fluide défini dans la représentation lagrangienne par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & (a-h)\mathrm{e}^{-t/\tau} + h(1-t/\tau) \\ y(t) & = & (b+h)\mathrm{e}^{-t/\tau} - h(1+t/\tau) \\ z(t) & = & c \end{array}\right.$$

où $h$ et $\tau$ sont des constantes.

1. Que représentent $a$, $b$, $c$ ?
2. Déterminer le champ de vitesse (représentation eulérienne).
3. Déterminer le champ d'accélération de deux manières différentes.

**Solution de l'exercice 4.4.**

1. Les conditions initiales (il suffit de faire $t = 0$).
2. Représentation Eulerienne : il faut éliminer les conditions initiales des vitesses $u, v, w$ calculés par dérivation

$$u = \frac{-t}{\tau}(a-h)\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1/\tau$$
$$v = \frac{-t}{\tau}(b+h)\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1/\tau$$
$$w = 0$$

   Nous pouvons remplacer $(a-h)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ par $x - h(1-t/\tau)$ et $(b+h)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ par $y + h(1+t/\tau)$ et c'est fini.

3. Pour Lagrange l'accélération est juste $\frac{d^2x}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt}$ en utilisant l'énoncé. Pour Euler il faut utiliser la dérivée convective ou particulaire

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 5 : Écoulement potentiel, potentiel complexe**

## Exercice 5.1 : Ecoulement potentiel

1. Qu'appelle-t-on écoulement potentiel ?
2. On étudie l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon $R$. Le champ des vitesses s'écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} u_r &= U_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos\theta \\ u_\theta &= -U_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin\theta \end{cases}$$

où $U_0$ est une constante positive.

a) L'écoulement est il plan, stationnaire, incompressible, irrotationnel ?
b) Déterminer le potentiel des vitesses $\varphi(r, \theta)$ et la fonction de courant $\psi(r, \theta)$. Vérifier que les lignes de courant et les équipotentielles sont orthogonales.
c) Représenter les lignes de courant.

**Solution de l'exercice 5.1.**

1. Un écoulement est dit **potentiel** si il existe une fonction $\phi$ telle que $\vec{U} = gr\vec{a}d\ \phi$. $\phi$ est la fonction potentiel des vitesses.
2. L'écoulement est plan et stationnaire.

$$div\ \vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_u) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$
$$= \frac{U_0}{r}(1 + \frac{R^2}{r^2})\ cos\ \theta - \frac{U_0}{r}(1 + \frac{R^2}{r^2})\ cos\ \theta = 0$$

l'écoulement est donc incompressible.

$$\vec{rot}\ \vec{U} = e_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$
$$= \frac{-U_0}{r}(1 - \frac{R^2}{r^2})\ sin\ \theta + \frac{U_0}{r}(1 - \frac{R^2}{r^2})\ sin\ \theta = 0$$

L'écoulement est irrotationnel.

3. Fonction de courant $\psi$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

soit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_0(r - \frac{R^2}{r})\ cos\ \theta$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = U_0(1 + \frac{R^2}{r^2})\ sin\ \theta$$

soit $\psi = U_0(r - \frac{R^2}{r})\ sin\ \theta + g(r)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial r} = U_0(1 + \frac{R^2}{r^2})\ sin\ \theta + g^{'}(r)$. Donc $g^{'}(r) = 0$ et $g(r) = C$. Nous avons

$$\psi = U_0(r - \frac{R^2}{r})\ sin\ \theta + C$$

4. Calculer $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$
5. Les lignes de courant sont données par

$$U_0(r - \frac{R^2}{r})\ sin\ \theta = C$$

La courbe $\psi = 0$ est donnée par

$$(r - \frac{R^2}{r})\ sin\ \theta = 0$$

soit

(a) $sin\theta = 0$ c'est à dire deux droites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (en coordonnées polaires)

(b) $r - \frac{R^2}{r} = 0$ c'est à dire un cercle $r = R$.

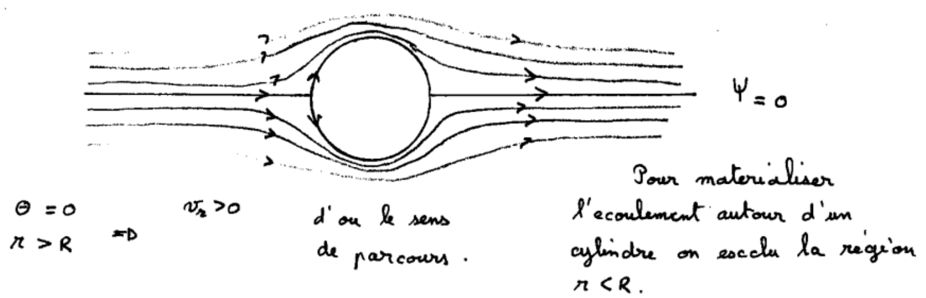



Figure 4 – Ecoulement autour d'un cylindre.

**Exercice 5.2 : Exercice 2**

On considère un écoulement plan, stationnaire, d'un fluide incompressible de masse volumique $\rho$. On utilisera soit les coordonnées cartésiennes $(x, y)$, soit les coordonnées polaires $(r, \theta)$ avec $x = r\ \cos\theta$ et $y = r\ \sin\theta$. La fonction de courant associée à cet écoulement est, dans un système de coordonnées polaires :

$$\psi = U\left(\frac{h\,\theta}{2\,\pi}\ -\ r\,\sin\theta\right) \tag{1}$$

avec $-\pi < \theta < \pi$ et où $U$ et $h$ sont des constantes positives ayant respectivement les dimensions d'une vitesse et d'une longueur.

1. Déterminer les composantes en coordonnées cartésiennes du champ de vitesse. Montrer que l'on peut l'interpréter comme la superposition de deux champs que l'on précisera et dont on donnera une interprétation physique.

2. Déterminer, si il existe, le potentiel des vitesses associé à cet écoulement.
3. Donner une approximation du champ de vitesse lorsque $r$ est petit devant $h$. En, déduire la valeur du débit massique traversant un petit cercle centré à l'origine
4. Construire la ligne de courant $\psi = 0$. Montrer qu'elle comporte deux branches qui se rejoignent en un point $A$ dont on déterminera les coordonnées. Quelle est la vitesse du fluide en ce point.

5. Interpréter l'écoulement ainsi obtenu. Quel rôle particulier joue dans l'écoulement cette ligne $\psi = 0$ ?

**Solution de l'exercice 5.2.**

1. La vitesse est $u_r e_r + u_\theta e_\theta = u e_x + v e_y$

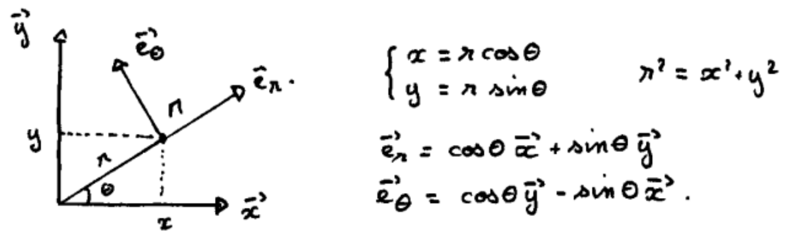



Figure 5 – Changement de coordonnées.

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$u_r = \frac{1}{r} U\left(\frac{h}{2\pi} - r cos\theta\right)$$
$$u_\theta = U sin\theta$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \tfrac{Uk}{2\pi r}\ e_r - U cos\theta\ e_r + U sin\theta\ e_\theta \\ &= \tfrac{Uk}{2\pi r}\ e_r - U\ e_x \end{aligned}$$

une source plus un écoulement rectiligne uniforme dans la direction $-e_x$.

## Exercice 5.3 : Potentiel complexe

On considère la fonction complexe $f(z) = a\, z^n$ où $a$ et $n$ sont deux réels positifs.

1. Déterminer les fonctions de courant, $\psi$, et potentiel $\varphi$, ainsi que les composantes de la vitesse $u$ et $v$ en fonctions des variables $r$ et $\theta$.
2. Donner les équations des courbes équipotentielles et des lignes de courant. Donner les équations des courbes $\psi = 0$ et $\varphi = 0$.
3. Tracer les lignes de courant dans le cas $n < 1$ : on traitera les cas $n = \frac{2}{3}$ et $n = \frac{1}{2}$. Que matérialise l'écoulement dans ce cas ?
4. Dans le cas $n > 1$, on considère le cas particulier $n = 2$. Comment peut-on matérialiser l'écoulement dans ce cas ? Tracer les points d'égale vitesse.

**<u>Rappels en coordonnées cylindriques</u>**

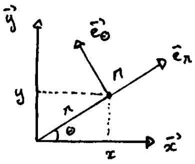
$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{v} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 5.3.**

ercice n°12.

$$\Psi = U\left(\frac{h\theta}{2\pi} - r\sin\theta\right) \quad \text{avec} \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

1- On note la vitesse $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$.




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{y} - \sin\theta\,\vec{x}.$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r}U\left\{\frac{h}{2\pi} - r\cos\theta\right\} = \frac{Uh}{2\pi r} - U\cos\theta \\ v_\theta = U\sin\theta. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\vec{v} = \frac{Uh}{2\pi r}\vec{e}_r - U\cos\theta\,\vec{e}_r + U\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$= \frac{Uh}{2\pi r}\vec{e}_r - U\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) + U\sin\theta\,(\cos\theta\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_x)$$

$$= \underbrace{\frac{Uh}{2\pi r}\vec{e}_r}_{\text{source}} - \underbrace{U\vec{e}_x}_{\text{écoulement rectiligne uniforme}}.$$

Par conséquent :

$$\vec{v} = \frac{Uh}{2\pi r}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) - U\vec{e}_x.$$

$$= \frac{Uh}{2\pi r^2}(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y) - U\vec{e}_x.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{Uh\,x}{2\pi(x^2+y^2)} - U \\ v = \frac{Uh\,y}{2\pi(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

2- L'écoulement est plan et stationnaire.

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \frac{Uh}{2\pi}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\vec{e}_z = \vec{0}.$$

L'écoulement est donc irrotationnel. ⟹ il existe donc une fonction

courant : $\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta.$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Uh}{2\pi r} - U\cos\theta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = U\sin\theta \times r \end{cases} \Rightarrow \varphi(r,\theta) = \frac{Uh}{2\pi}\ln r - Ur\cos\theta + g(\theta).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = U\sin\theta\, r + g'(\theta).$$

Par identification $g'(\theta) = 0 \Rightarrow g(\theta) = \text{cste}$. On a donc :

$\varphi(r,\theta) = \frac{Uh}{2\pi}\ln r - Ur\cos\theta + \alpha$ où $\alpha$ est une constante.

3- $\vec{v} = \frac{Uh}{2\pi r}\vec{e}_r - U\cos\theta\,\vec{e}_r + U\sin\theta\,\vec{e}_\theta.$

Dans le cas $r \ll h \Rightarrow$ le terme en $\frac{h}{r}$ est prépondérant.

Par conséquent : $\vec{v} \simeq \frac{Uh}{2\pi r}\vec{e}_r.$

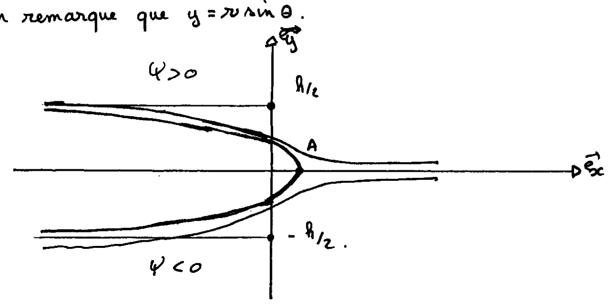
Le débit massique est donc donné par :

$$q_m = \iint_S \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\,\vec{v}\cdot\vec{e}_r\,r\,d\theta\,dz.$$

$$\simeq \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\frac{Uh}{2\pi r}\,r\,d\theta\,dz = \rho Uh \qquad q_m \simeq \rho Uh.$$

4- $\Psi = 0 \Leftrightarrow U\left(\frac{h\theta}{2\pi} - r\sin\theta\right) = 0.$

On remarque que $y = r\sin\theta$.




· $x = 0$ : $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

· $\theta \to \pi \Rightarrow r \to h/2$ et $\theta \to -\pi \Rightarrow r \to -\frac{h}{2}$.

· $\theta = 0 \Rightarrow y = 0$ et $x > 0$.

On note A ce point.

De plus $\Psi = 0 \Leftrightarrow \frac{h\theta}{2\pi} - r\sin\theta = 0$

$$\Leftrightarrow r = \frac{h\theta}{2\pi\sin\theta}$$

On se place dans le cas où $\theta \ll 1$ ($\theta$ au $\mathcal{V}(0)$) :

$$r = \frac{h\theta}{2\pi(\theta + O(\theta^3))} = \frac{h}{2\pi}\frac{1}{[1 + O(\theta^2)]} = \frac{h}{2\pi} + O(\theta^2). \quad (*)$$

Quand $\theta = 0$ $r_A = \frac{h}{2\pi}$.

· Calculons la vitesse en ce point :

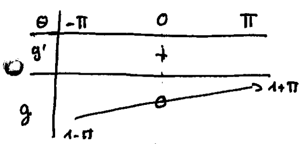
$\vec{v} = \frac{Uh\,2\pi}{2\pi h}\vec{e}_r - U\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_\theta = \vec{0}$ : point d'arrêt.

5- D'après (*), au voisinage de A $r \simeq \frac{h}{2\pi}$ : cercle

· La fonction de courant est :

$$\Psi(r,\theta) = \left(\frac{h\theta}{2\pi} - r\sin\theta\right)U.$$

Par conséquent : $\Psi\left(\frac{h}{2\pi},\theta\right) = \frac{Uh}{2\pi}(\theta - \sin\theta).$




$\Psi\left(\frac{h}{2\pi},\theta\right) \ge 0 \Leftrightarrow \theta \ge 0.$

· On modélise ainsi un écoulement autour d'un obstacle.

6- La courbe $\Psi = 0$ matérialise le corps de l'obstacle.

7- Pour calculer la pression en tout point, on utilise les équations d'Euler : $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\mathrm{grad}}\,p + \cancel{\rho\vec{g}}$ négligeable

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho\left\{\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right\} = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho\left\{\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right\} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\left\{v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right\} \\ \frac{\partial p}{\partial\theta} = -\rho r\left\{v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\left\{\frac{-U^2\sin^2\theta}{r} + \frac{U\sin\theta}{r}U\sin\theta + \left(\frac{Uh}{2\pi r} - U\cos\theta\right)\left(\frac{-Uh}{2\pi r^2}\right)\right\} \\ \frac{\partial p}{\partial\theta} = -\rho r\left\{0 + \frac{U\sin\theta}{r}U\cos\theta + \frac{U^2h}{2\pi r^2}\sin\theta - \frac{U^2}{r}\sin\theta\cos\theta\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial\theta} = -\rho\frac{U^2h}{2\pi r}\sin\theta \\ \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\left\{-\frac{U^2h^2}{4\pi^2r^3} + \frac{U^2h}{2\pi r^2}\cos\theta\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho U^2\left\{\frac{-1}{r}\sin^2\theta + \frac{h\cos\theta}{2\pi r^2} - \frac{h^2}{4\pi^2r^3}\right\} \\ \frac{\partial p}{\partial\theta} = \rho U^2\{-\sin\theta\cos\theta\}. \end{cases}}$$

$$\Rightarrow p(r,\theta) = \rho U^2\frac{h}{2\pi r}\cos\theta + g(r).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho U^2h}{2\pi r^2}\cos\theta + g'(r).$$

$$= -\frac{\rho U^2h}{2\pi r^2}\cos\theta + \frac{\rho U^2h^2}{4\pi^2r^3}$$

$$\Rightarrow g'(r) = \frac{\rho U^2h^2}{4\pi^2r^3} \quad \Rightarrow g(r) = \frac{\rho U^2h^2}{4\pi^2}\left(-\frac{1}{2r^2}\right) + \alpha$$

$$\Rightarrow p(r,\theta) = \rho U^2\frac{h}{2\pi r}\cos\theta - \frac{\rho U^2h^2}{8\pi^2r^2} + \alpha$$

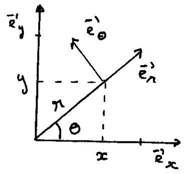
quand $r \to \infty$ $p \to p_0$.

$$\Rightarrow p(r,\theta) = p_0 - \rho U^2\left\{\frac{h^2}{8\pi^2r^2} - \frac{h\cos\theta}{2\pi r}\right\}$$

Exercice 13

1- $f = \varphi + i\psi$

On pose $z = re^{i\theta}$




$f(z) = az^n = ar^n e^{in\theta}$

$= ar^n\,[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(r,\theta) = ar^n\cos(n\theta) \\ \psi(r,\theta) = ar^n\sin(n\theta). \end{cases}$$

On calcule la vitesse à partir du potentiel $\varphi$ : $\vec v = \vec{\mathrm{grad}}\,\varphi$

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = anr^{n-1}\cos(n\theta) \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = anr^{n-1}\sin(n\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec v = anr^{n-1}\{\cos(n\theta)\,\vec e_r - \sin(n\theta)\,\vec e_\theta\}$$

**Remarque :** une autre manière de faire est d'utiliser la vitesse complexe : $w = u - iv = \dfrac{df}{dz}$ avec $\vec v = u\vec e_x + v\vec e_y$

2-. Les lignes de courant sont les courbes $\psi = $ cste i.e. :

$ar^n\sin(n\theta) = $ cste.

La courbe $\psi = 0$ est donc donnée par $ar^n\sin(n\theta) = 0$.

$\Leftrightarrow n\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ — Le point singulier $r = 0$ est exclu.

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{n}$

On doit avoir $0 \leq \theta < 2\pi \Rightarrow 0 \leq \dfrac{k\pi}{n} < 2\pi$

$\Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \text{et } k < 2n. \end{cases}$

Les lignes de courant $\psi = 0$ sont donc données par :

$$\theta = \frac{k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < 2n.$$

• Les lignes équipotentielles sont les courbes $\varphi = $ cste i.e. :
$ar^n\cos(n\theta) = $ cste.

La courbe $\varphi = 0$ est donnée par :

$ar^n\cos(n\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0$

$\Leftrightarrow n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$

On se restreint à $0 \leq \theta < 2\pi$

$\Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} < 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq k\pi < \dfrac{4n\pi - \pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{1}{2} \\ \text{et } k < 2n - \frac{1}{2}. \end{cases}$

On a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < 2n - \frac{1}{2}.$$

3 - Cas $n < 1$ : $n = \frac{2}{3}$.

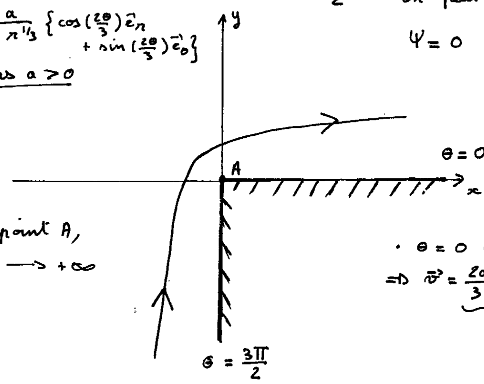
Compte-tenu de la question 2, dans ce cas, la ligne de courant $\psi = 0$ est donnée par :

$\theta = \frac{3}{2}k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < \frac{4}{3}$

On a donc : $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. Pour ces valeurs de $\theta$, on peut admettre l'existence d'une paroi $\psi = 0$

$\vec v = \dfrac{2a}{3r^{1/3}}\{\cos(\frac{2\theta}{3})\,\vec e_r + \sin(\frac{2\theta}{3})\,\vec e_\theta\}$

cas $a > 0$




au point A, $|\vec v| \longrightarrow +\infty$

• $\theta = 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow \vec v = \underbrace{\frac{2a}{3}}_{>0} r^{-1/3}\,\vec e_r$

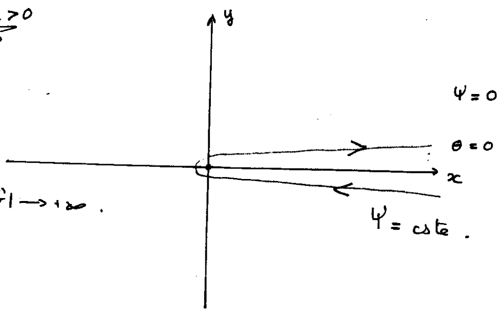
• Cas $n < 1$ : $n = \frac{1}{2}$.

La ligne de courant $\psi = 0$ est donnée par :

$\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < 1$

ie : $\theta = 0$

cas $a > 0$




A : $|\vec v| \longrightarrow +\infty$.

La vitesse est donnée par :

$\vec v = \dfrac{a}{2\sqrt r}\{\cos(\frac{\theta}{2})\,\vec e_r + \sin\frac{\theta}{2}\,\vec e_\theta\}$

• en $\theta = 0$ : $\cos(\frac{\theta}{2}) = 1 \Rightarrow \vec v\cdot\vec e_r > 0$

• en $\theta = 2\pi$ : $\cos(\frac{\theta}{2}) = -1 \Rightarrow \vec v\cdot\vec e_r < 0$

Dans le cas $\frac{1}{2} \leq n < 1$, on obtient un écoulement autour d'un angle.

**Remarque :** pas d'interprétation physique dans le cas $n < \frac{1}{2}$.

4- Cas $n > 1$ : $n = 2$.

La ligne de courant $\psi = 0$ est donnée par :

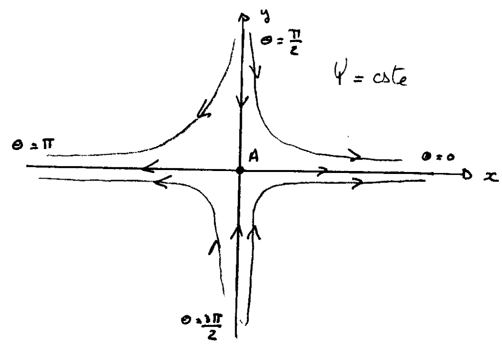
$\theta = \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < 4$

i.e. : $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

et la vitesse est : $\vec v = 2ar\{\cos(2\theta)\,\vec e_r + \sin(2\theta)\,\vec e_\theta\}$

[redacted]

$a > 0$




Cette fois-ci, en A, $|\vec v| \longrightarrow 0$

Ecoulement dans un angle.

Exercice 14 $\quad f(z) = \dfrac{-k}{2\pi z}$

1- On pose $z = re^{i\theta}$

$f = \dfrac{-k}{2\pi r}e^{-i\theta} = \dfrac{-k}{2\pi r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \varphi + i\psi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(r,\theta) = \dfrac{-k}{2\pi r}\cos\theta \\ \psi(r,\theta) = \dfrac{+k}{2\pi r}\sin\theta. \end{cases}$$

$w = \dfrac{df}{dz} = u - iv \qquad \vec v = u\vec e_x + v\vec e_y$

$= \dfrac{+k}{2\pi z^2} = \dfrac{+k}{2\pi r^2}e^{-2i\theta} = \dfrac{+k}{2\pi r^2}\{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)\}$

$= \left\{\dfrac{+k}{2\pi r^2}\cos(2\theta)\right\} - i\left\{\dfrac{+k}{2\pi r^2}\sin(2\theta)\right\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{k}{2\pi r^2}\cos(2\theta) \\ v = \dfrac{k}{2\pi r^2}\sin(2\theta). \end{cases}$$

2- Pour tracer les lignes de courant et les équipotentielles il est plus simple d'exprimer leur équation en coordonnées cartésiennes.

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 6 : Dynamique des fluides parfaits**

## Exercice 6.1 : Ecoulement incompressible / fluide incompressible

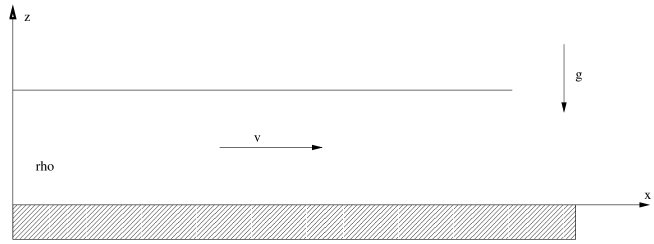



FIGURE 6 – Ecoulement le long d'une plaque

Soit un fluide parfait de masse volumique $\rho$ en écoulement stationnaire le long d'une plaque (voir figure 3).

1. (a) Écrire la loi de conservation de la masse sous forme globale puis locale.
   (b) Montrez que l'écoulement d'un fluide incompressible ($\rho = cste$) est toujours incompressible ($div(\vec{u}) = 0$) dès lors que l'écoulement satisfait au principe de conservation de la masse. Qu'en est-il de la réciproque ?
   (c) A quelle condition un fluide compressible peut-il être en écoulement incompressible ?
2. Dans un repère cartésien $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, écrivez les équations du mouvement du fluide : les **équations d'Euler**.
3. Si l'écoulement est stationnaire et si toutes les lignes de courant sont parallèles à l'axe $(O, \vec{x})$ que deviennent les équations ci dessus ?
4. En déduire que si le fluide s'écoule de façon stationnaire et parallélement à la direction $(O, \vec{x})$, alors dans le plan perpendiculaire à cette direction (plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$), la pression suit la loi de l'hydrostatique.

**Solution de l'exercice 6.1.**

1.

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{S}(t)} \rho \mathbf{u} \mathbf{n} dS = 0$$

et par le théorème de la divergence

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla(\rho \mathbf{u}) dV = 0$$

sous la forme locale nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0$$

et avec la définition de la dérivée particulaire

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla(\mathbf{u}) = 0$$

pour un fluide incompressible la loi d'état $\rho = cte$ implique que $\rho\nabla(\mathbf{u}) = 0$ et donc que

$$\nabla(\mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

La réciproque est pas toujours vraie, supposons un fluide en écoulement incompressible ($\nabla(\mathbf{u}) = 0$) alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\ \mathbf{grad}(\rho) = 0$$

dans le cas d'un écoulement stationnaire il en reste $\mathbf{u}\ \mathbf{grad}(\rho) = 0$ où $\rho = cte$ est solution mais par l'unique car il suffit d'avoir $\mathbf{u} \perp \mathbf{grad}(\rho)$. Par exemple l'atmosphère.

2.

$$(e_x)\ \ \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$(e_y)\ \ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$(e_z)\ \ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{4}$$

3. si nous avons une écoulement stationnaire avec $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ nous avons

$$(e_x)\ \ \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5}$$

$$(e_y)\ \ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{6}$$

$$(e_z)\ \ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{7}$$

4. la projection sur les axes $y, z$ nous donne la loi de l'hydrostatique $p(z) = p_0 - \rho g z$. Nous remarquons que la projection sur l'axe $x$ nous donne "Bernoulli" car à une dimension $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$ et donc $\frac{1}{2}\rho u^2 + p = cte$.

## Exercice 6.2 : Ondes planes

On va étudier les ondes planes à une dimension à partir des équations d'Euler compressibles (voir cours). On va étudier pour cela un champ de vitesses de type $\mathbf{u} = u(x,t)e_x$.

1. donnez les équations de continuité (conservation de la masse) et de conservation de la quantité de mouvement. On propose étudier un gaz parfait dont l'équation d'état est $p = \rho r T$ avec $r$ la constante universelle des gaz et $T$ la température, supposée constante et égale à $T_0$. La condition $T = T_0$ est-elle nécessaire ? Si la température n'est pas constante il vous manque une équation ?
2. on va linéairiser les équations autour d'une position d'équilibre $u = u_0 + u^{'}(x,t)$ et $\rho = \rho_0 + \rho^{'}(x,t)$ avec $u^{'} << u_0$ et $\rho^{'} << \rho_0$. Sans perte de généralité on peut prendre $u_0 = 0$. Donner les équations résultantes.
3. Eliminez l'une des deux équations pour montrer que l'équation pour $\rho^{'}$ satisfait une équation d'onde.
4. Trouvez la vitesse de l'onde et comparez la à la vitesse du son dans l'air ($p_{atm} = 10^5\ Pa$).
5. On propose une solution de type $\rho^{'} = \bar{\rho}e^{\omega t - kx}$, trouvez la relation de dispersion $\omega = f(k)$.
6. Calculez la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Conclusion ?.

**Solution de l'exercice 6.2.**

1. Les équations sont

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$
$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$p = \rho r T_0$$

Si la temperature est constante on peut résoudre les équations, sinon il nous faut une équation pour l'énergie.

2. on remplace $u = u_0 + u^{'}(x,t)$ et $\rho = \rho_0 + \rho^{'}(x,t)$ et l'on garde les termes d'ordre 1. Donc

$$\frac{\partial \rho^{'}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u^{'}}{\partial x} = 0$$
$$\rho_0 \frac{\partial u^{'}}{\partial t} + rT_0 \frac{\partial \rho^{'}}{\partial x} = 0$$

3. on dérive la 1ere par rapport au temps et la 2de par rapport au temps pour éliminer la dérivée croisée en $u^{'}$. Il nous reste

$$\frac{\partial^2 \rho^{'}}{\partial t^2} - \frac{rT_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho^{'}}{\partial x^2} = 0$$

une équation d'onde.

4. Les unités de $rT_0$ c'est $[\frac{L^2}{T^2}]$ une vitesse au carré donc $c = (rT_0)^{0.5}$. A partir de la loi d'état on trouve que $rT_0 = \frac{p_{atm}}{\rho_0}$ donc $c \sim (10^5)^{0.5} = 316.22\ m/s$.
5. si lo'n remplace $\rho^{'} = \bar{\rho}e^{\omega t - kx}$ dans l'équation d'onde on trouve $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ la relation de dispersion.
6. $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c$ sont les mêmes, des ondes non dispersives donc.

**Exercice 6.3 : Pression et Bernoulli**

Considérons un fluide parfait en écoulement plan, stationnaire, incompressible et irrotationnel. Compte-tenu de ces propriétés, le potentiel des vitesses $\varphi$ existe et on peut ainsi définir l'écoulement par :

$$\varphi \;=\; \frac{K}{4}\left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)$$

1. Déterminez le champ des vitesses correspondant. Quelle est la dimension du coefficient $K$ ?
2. Quelle condition sur l'écoulement nous autorise à construire une fonction de courant ? Montrez que l'on peut l'obtenir, à une constante près, sous la forme :

$$\psi \;=\; K\left(x^3y - xy^3\right)$$

3. Construisez, en les orientant, les lignes de courant obtenues pour l'équation $\psi = 0$. Déduisez-en la forme de l'écoulement étudié.
4. On suppose que la pression en O vaut $p_o$. A l'aide des équations d'Euler, montrez que la pression dans tout l'espace s'écrit :

$$p(x,y) = p_o - \frac{\rho\, K^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)^3$$

5. Retrouvez une expression analogue à l'aide du théorème de Bernoulli. Quel problème se pose pour des lignes de courant différentes des celles associées à l'équation $\psi = 0$ ?

**Solution de l'exercice 6.3.**

1. $\mathbf{u} = \mathbf{grad}\phi$ donc

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{8}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{9}$$

donc

$$u = Kx(x^2 - 3y^2) \tag{10}$$
$$v = Ky(y^2 - 3x^2) \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

La dimension de $K$ est $L^{-2}S^{-1}$.

2. comme $div(\mathbf{u}) = 0$ il existe la fonction $\psi$ tel que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{13}$$
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{14}$$

En intégrant la 1ère équation par rapport à $y$ et en dérivant le résultat par rapport à $x$ on trouve

$$\psi = K(x^3y - xy^3) + A \tag{15}$$

avec $A$ une constante.

3. La Figure suivante présente les courbes $\psi$ constant et le champ de vitesse, dans $[0, \pi/4]$ c'est l'écoulement potentiel dans un coin.

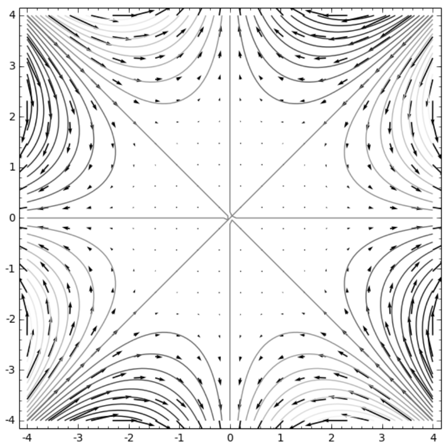



FIGURE 7 – Fonction $\psi = K\left(x^3y - xy^3\right)$ et champ de vitesses.

4. à partir des équations d'Euler à 2 dimensions

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

si l'on remplace par

$$u = Kx(x^2 - 3y^2)$$
$$v = Ky(y^2 - 3x^2)$$

nous avons

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3K^2 \left(x^5 + 2\,x^3y^2 + xy^4\right)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 3K^2 \left(x^4y + 2\,x^2y^3 + y^5\right)$$

Maintenant on doit intégrer la 1ère équation par rapport à $x$ et dériver le résultat pour trouver

$$p(x, y) = p_0 - \frac{1}{2}\rho K \left(x^2 + y^2\right)^3$$

5. pour un fluide parfait, stationnaire et pesant dans un écoulement incompressible nous savons que la quantité

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z + p$$

se conserve le long d'une ligne de courant. Donc

$$p(x, y) = cte - \frac{1}{2}\rho U^2$$

avec $U^2 = u^2 + v^2 = K^2\Big(\left(x^2 - 3\,y^2\right)^2 x^2 + \left(3\,x^2 - y^2\right)^2 y^2\Big)$ donc

$$p(x, y) = cte - \frac{1}{2}\rho K \left(x^2 + y^2\right)^3$$

la constante étant la pression au point $(x, y) = (0, 0)$ l'origine, $p_0$. Pour les autres lignes de courant la constante n'est pas la même. Nous remarquons que l'origine est un **point d'arrêt**.

### Exercice 6.4 : Oscillations d'un liquide dans un tube en U

Dans un tube en U de section constante. Au repos, le liquide est au même niveau dans les deux branches ; ce niveau sera pris comme référence. On provoque des oscillations de sorte que le niveau varie de $x$ sur les deux cotés.

1. Rappeler les équations de Bernoulli instationnaires. Multipliez l'équation par **dl** parallèle à une ligne de courant.
2. Donner une expression pour la vitesse dans le tube. Est-elle la même partout ?
3. Intégrez l'équation entre deux points $A$ et $B$ sur les surfaces libres et trouvez l'équation de mouvement.
4. Calculer la fréquence propre et la solution de l'équation différentielle.
5. Dans le cas d'un écoulement visqueux, quel terme faudrait-il ajouter ?

**Solution de l'exercice 6.4.**

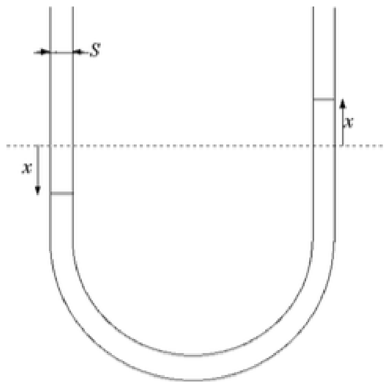



FIGURE 8 – Oscillations d'un tube en U

1.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{grad}\left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

2. La vitesse est la même partout (fluide incompressible) alors $v = \dot{x}$, la coordonnée $x$ étant les positions de la surface libre à gauche et à droite du tube en U.
3. Alors le long d'un ligne de courant

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{dl} + \mathbf{grad}\left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) \cdot \mathbf{dl} = 0$$

donne

$$\int_B^A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{dl} + \left[\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right]_B^A = 0$$

$A$ et $B$ étant les positions repérées par $x_A = -x$ et $x_B = x$, les vitesse sont $v_A = v_B = \dot{x}$ et nous avons la pression atmosphérique de deux cotés du tube en U. Comme $v = \dot{x}$ l'accélération est $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \ddot{x}$ ce qui donne

$$\ddot{x}L + 2gx = 0$$

4. La solution de $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ avec $\omega^2 = \frac{2g}{L}$ est

$$x(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ la fréquence angulaire. On peut résoudre le problème si l'on se donne deux conditions initiales, par exemple $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, alors

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

5. C'est un terme en $\dot{x}$ proportionnel à la longueur $L$ et à la viscosité

$$\ddot{x}L + k(\mu, L)\dot{x} + 2gx = 0$$

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 7 : Dynamique des fluides parfaits - II**

## Exercice 7.1 : Principe d'un vaporisateur

On considère le dispositif décrit par la figure 5. Dans la conduite 1-2, de l'air, considéré comme un fluide parfait incompressible non pesant de masse volumique $\rho_a$ s'écoule de façon stationnaire. On note 1 le point d'entrée de la conduite de section $S_1$ et 2 le point de la conduite de section $S_2 < S_1$. On suppose que l'écoulement est uniforme par tranches en tout point de la conduite.

Au point 2, un tube très mince plonge dans un réservoir d'eau (**fluide au repos** parfait, incompressible de masse volumique $\rho_e$) de volume très grand (son niveau ne varie pas). La présence du tube ne perturbe pas l'écoulement de l'air dans la conduite.

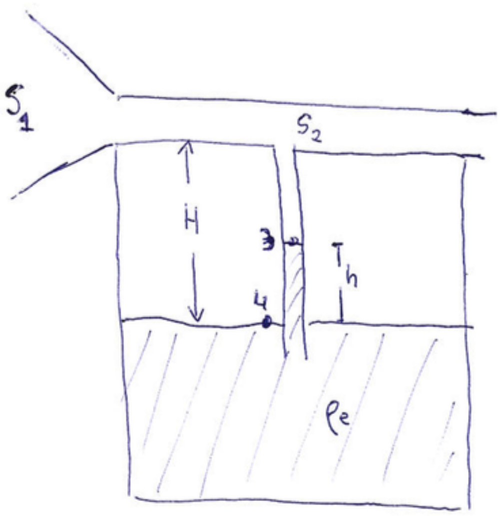



Figure 9 – Vaporisateur

On désigne par $Q$ le débit volumique dans la conduite et par $P_{atm}$ la pression atmosphérique.

1. Calculer le débit volumique d'air s'écoulant dans la conduite.
2. Calculer la pression au point 2 en fonction de $Q$, $S_1$, $S_2$. La comparer avec la pression au point 1. Ce résultat était-il prévisible ? Comment l'observe-t-on ?.
3. Que vaut la pression au point 3 ? Au point 4 ? Calculer la côte $h$ atteinte par le niveau de l'eau dans le tube en fonction de $Q$, $S_1$, $S_2$.
4. Calculer la valeur minimale du débit $Q$ pour que le niveau de l'eau atteigne le point 2. Que se passe-t-il si le débit est supérieur ?

**Solution de l'exercice 7.1.**

1. conservation de la masse sous forme globale

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u}\mathbf{n} dS = 0$$

comme l'écoulement est stationnaire et le fluide incompressible il en reste

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}\mathbf{n} dS = 0$$

donc comme sur $S_1$ à l'entrée nous avons $\mathbf{u} = V_1\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{n} = -\mathbf{e_x}$ et sur $S_2$ l'équivalent $\mathbf{u} = V_2\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e_x}$ on a

$$Q = V_1S_1 = V_2S_2$$

2. On applique le théorème de Bernoulli entre 1 te 2, soit

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

avec $z_1 = z_2$ et $p_1 = p_{atm}$ soit

$$p_2 = p_{atm} + \frac{\rho}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right)$$

Si l'on exprime les vitesses en fonction du débit $Q$ on trouve

$$p_2 = p_{atm} + \frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{S_2^2 - S_1^2}{S_1^2 S_2^2}\right)$$

Finalement comme $\frac{\rho Q^2}{2} > 0$ et $\left(\frac{S_2^2 - S_1^2}{S_1^2 S_2^2} < 0\right)$ on a

$$p_2 - p_{atm} \leq 0$$

la pression au point 2 est plus faible que la pression atmosphérique, on est en dépression.

3. comme la masse volumique de l'air est beaucoup plus petite que celle de l'eau nous pouvons dire que $p_3 \sim p_2$. Au point 4 la pression est celle de réservoir soit la pression atmosphérique $p_4 = p_{atm}$. Alors à partir de la forme locale de statique des fluides $\mathbf{grad}p = \rho_e\mathbf{g}$ on a

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 + \rho_e g h \\ p_{atm} &= p_2 + \rho_e g h \end{aligned}$$

Donc

$$h = \frac{\rho Q^2}{2\rho_e g}\frac{(S_1^2 - S_2^2)}{S_1^2 S_2^2}$$

4. La valeur minimale de $Q$ est obtenue pour $h = H$ soit à partir de l'équation précédente avec $h = H$. Quand le débit $Q$ dépasse cette valeur l'eau rentre dans le canal où le cisaillement de l'air crée des gouttelettes qui forment la vaporisation

**Exercice 7.2 : Clepshydre**

On veut réaliser une horloge à eau (figure 6) mesurant le temps de variation de niveau au cours de la vidange. Pour cela, considérons un récipient dont la section horizontale, $A$, varie en fonction de la cote $z$ au dessus d'un orifice percé au fond (voir figure 3). L'écoulement est supposé irrotationnel et incompressible et l'eau est considérée comme un fluide parfait. La pression de l'air est $P_{atm}$.

1. Calculer la vitesse $V$ ainsi que le débit volumique $q_v$ de l'eau à travers la veine liquide contractée (en effet, la section de la veine est légérement inférieure à celle de l'orifice) de section $s$ supposée très petite devant la section horizontale $A$ du récipient. On supposera la cote de cette section confondue avec celle de l'orifice.

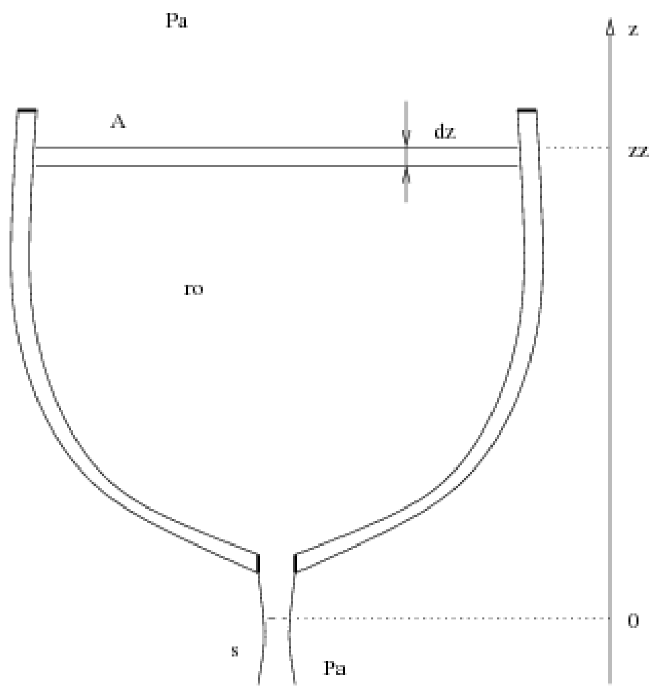



FIGURE 10 – Horloge à eau.

2. La variation de la section horizontale du réservoir suit une loi du type :
$$\frac{A}{A_o} = \left(\frac{z}{z_o}\right)^{\alpha}$$
où $A_o$ est la section à une cote de référence arbitraire $z_o$ et $\alpha$ est un réel. Exprimez la loi donnant la variation de la cote de l'eau en fonction du temps , $dz/dt$.
3. Déduire le temps $\Delta t$ nécessaire pour passer d'une cote $z_1$ à une cote $z_2$ en fonction de $\alpha$, de l'accélération de la pesanteur $g$, de $A_o$, $s$, $z_o$, $z_1$ et $z_2$.
4. Pour quelle valeur de $\alpha$ la variation de la cote en fonction du temps est-elle linéaire ?
5. Sachant que le récipient présente une symétrie de révolution, et que son rayon $R$ à la cote $z = 50\,cm$ vaut $30\,cm$, calculer pour cette valeur de $\alpha$, le temps correspondant à une variation de cote de $1\,cm$. On donne : $g = 10\,m.s^{1}$ et $s = 15\,10^{-6}\,m^2$.

**Solution de l'exercice 7.2.**

1. On applique la conservation de la masse sous forme globale pour un écoulement stationnaire
$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{un} dS = 0$$
avec sur la surface $A$ $\mathbf{u} = -V_A\mathbf{e_z}$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e_z}$ et sur la sroite de liquide de surface $s$ l'équivalent $\mathbf{u} = -V_s\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{n} = -\mathbf{e_z}$ on a
$$Q = V_A A = V_s s$$
Le fluide est parfait, incompressible et l'écoulement stationnaire nous pouvons donc utiliser le théorème de Bernoulli su rune ligne de courant entre un point de la surface $A$ et la sortie $s$
$$\frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho U_s^2 + \rho g z_s + p_s$$
où $p_A = p_s = p_{atm}$. Aussi puisque $s << A$ la conservation de la masse nous dit que $V_S >> V_A$ et que l'on peut donc négliger le terme $V_A^2$ dans l'équation de Bernoulli. Nous trouvons
$$V_s = \sqrt{2gz}$$
car $z_A - z_s = z(t)$ le niveau de la surface libre.

2. La conservation du débit volumique donne

$$Q = V_A A = s\sqrt{2gz}$$

De plus $V_A$ est la variation de la surface libre au cours du temps égale à $\frac{dz}{dt}$. Alors

$$-\frac{dz}{dt}A = s\sqrt{2gz}$$

le signe moins vient du fait que la surface libre descend par rapport aux axes choisis. Comme $\frac{A}{A_0} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha$ nous trouvons l'équation différentielle suivante

$$\frac{dz}{dt} = \beta z^{(1/2-\alpha)}$$

avec $\beta = -\frac{s z_0^\alpha \sqrt{2g}}{A_0}$. On sépare alors les variables et l'on intègre entre $t_1$ et $t_2$ pour $z_1$ et $z_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \beta dt = \int_{z_1}^{z_2} z^{(\alpha-1/2)} dz$$

La solution est

$$\beta \Delta t = \frac{1}{\alpha + 1/2}\left[z_2^{(\alpha+1/2)} - z_1^{(\alpha+1/2)}\right]$$

3. La variation de la cote $z$ en fonction du temps est linéaire si $\alpha = 1/2$,

$$\beta \Delta t = [z_2 - z_1]$$

soit

$$\Delta t = \frac{A_0}{s\sqrt{2gz_0}}\Delta z$$

4. pour l'application numérique vous devez trouver qu'un centimètre donne 60 sec.

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 8 : Dynamique des fluides parfaits III : Quantité de mouvement**

## Exercice 8.1 : Plaque inclinée

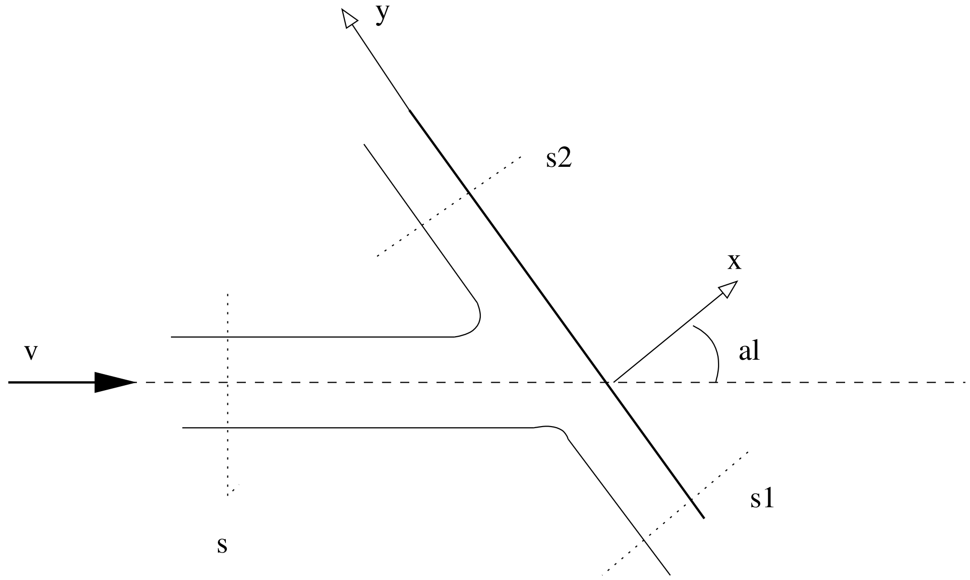



FIGURE 11 – Plaque inclinée

On considère l'écoulement d'un jet d'eau sur une plaque inclinée d'un angle $\alpha$ par rapport à la verticale (voir figure 7). Soit $S$ la section droite du jet incident où la pression peut être considérée comme constante et égale à la pression atmosphérique $P_{atm}$ et où la répartition de la vitesse peut-être considérée comme uniforme et égale à $V$. On désigne par $q_v$ le débit volumique incident par unité de largeur. Soit $S_1$ et $S_2$ les deux sections droites des jets de parois situées après l'impact et où l'on peut faire les mêmes hypothèses. On désigne par $q_{v1}$ et $q_{v2}$ les débits et par $V_1$ et$V_2$ les vitesses correspondantes. On néglige les forces de pesanteur.

1. Déterminez l'expression de la résultante $\vec{R}$ des forces subies par la plaque. Expliciter ses composantes $R_x$ et $R_y$.
2. En négligeant les effets de viscosité, déterminez $q_{v1}$ et $q_{v2}$ en fonction de $q_v$ et $\alpha$.

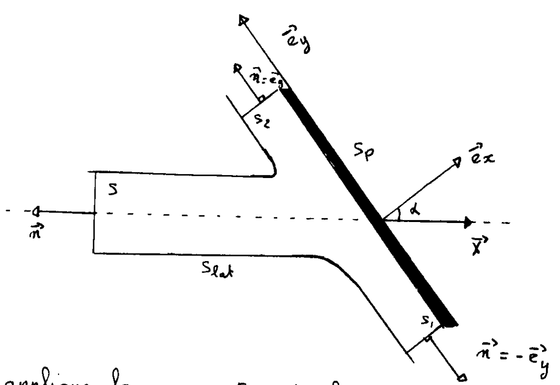
**Exercice 8.2 : Étude d'un confluent**

On considère un réservoir ouvert à l'air libre de grande dimension auquel est raccordée une conduite circulaire de rayon $R_1$. Cette conduite se termine par un tronçon horizontal dont l'extrémité se trouve à $H_1$ au dessous de la surface libre du réservoir (figure 8). On admettra que la vitesse et la pression sont uniformes dans chaque section droite de la conduite (approximation des écoulements par tranches). L'écoulement est supposé stationnaire et l'eau est considérée comme un fluide parfait de masse volumique $\rho$ constante.

1. Calculer la pression $P_1$ à l'extrémité horizontale de la conduite en fonction de la pression atmosphérique $P_{atm}$ ; du débit volumique $Q_v$ et de $H_1$.
2. Une deuxième conduite, de rayon $R_2$ raccordée à un deuxième réservoir (également ouvert à l'air libre) et lui aussi terminé par un tronçon horizontal (dont l'extrémité se trouve à $H_2$ au dessous de la surface libre du réservoir) vient s'ajouter à la première conduite pour en alimenter une troisième de rayon $R_3 = R_1$. Les débits volumiques dans les conduites 1 et 2 sont imposés et valent $Q_{v1}$ et $Q_{v2}$. Quelle doit être la valeur de $H_2$ pour que les pressions $P_1$ et $P_2$ soient égales ? Calculer la vitesse $V_3$ dans la conduite 3 en utilisant l'équation de conservation de la masse.
3. Calculer les composantes horizontales $R_x$ et $R_y$ de la résultante des forces exercées par le fluide sur le confluent en fonction de $V_1$, $V_2$, $R_1$, $R_2$, $\theta$, $P_1$, $P_2$. On appliquera le théorème des quantités de mouvement au domaine fluide D (représenté en pointillé sur la figure b) qui entoure une zone de mélange visqueuse où le théorème de Bernoulli ne s'applique pas.

**Solution de l'exercice 8.2.**

## Exercice 7.




1- • On applique la conservation de la masse sous forme globale au domaine fluide $\mathcal{D}$ compris entre $S$, $S_1$, $S_2$ et $S_{lat}$ :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \iint_{\partial\mathcal{D}} \rho \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0 \qquad (*)$$

Si on suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible, $(*)$ se réduit à la conservation du débit volumique :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0 \iff \iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S}\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_{lat}\cup S_p}\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

La dernière intégrale est nulle car la surface du jet $S_{lat}$ est un tube de courant : on a donc $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ sur $S_{lat}$. Sur $S_p$ : on a non pénétration $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.
Pour calculer les trois autres intégrales on fait l'hypothèse d'un écoulement par tranches :

sur $S_1$ : $\begin{cases} \vec{n} = -\vec{e}_y \\ \vec{v} = -V_1 \vec{e}_y & V_1 \text{ cste} > 0 \\ p = p_1 & p_1 \text{ cste} \end{cases}$ sur $S_2$ : $\begin{cases} \vec{n} = +\vec{e}_y \\ \vec{v} = V_2 \vec{e}_y & V_2 \text{ cste} > 0 \\ p = p_2 & p_2 \text{ cste} \end{cases}$

sur $S$ : $\begin{cases} \vec{n} = -\vec{X} = -(\cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_y) & \text{: vecteur constant.} \\ \vec{v} = +V\vec{X} & V \text{ cste} > 0. \\ p = \text{cste} \end{cases}$

Par conséquent :

$$\iint_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S} \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

$$\iff \iint_{S_1} -V_1\vec{e}_y\cdot(-\vec{e}_y)\, dS + \iint_{S_2} V_2\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y\, dS + \iint_{S} V\vec{X}\cdot(-\vec{X})\, dS = 0.$$

$$\iff \underline{V_1 S_1 + V_2 S_2 = VS.}$$

• On applique le théorème des quantités de mouvement au domaine fluide $\mathcal{D}$ en négligeant le poids de $\mathcal{D}$ :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = -\iint_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\, dS. \qquad \text{avec } \vec{T} = p\vec{n} \text{ pour un fluide parfait}$$

On calcule chacune de ces deux intégrales :

$$\circ \iint_{\partial\mathcal{D}} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \iint_{S_1}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS + \iint_{S_2}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS + \iint_{S}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS + \underbrace{\iint_{S_{lat}\cup S_p}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS}_{=0 \text{ c } \vec{v}\cdot\vec{n} \text{ sur } S \text{ et sur}}$$

$$= \iint_{S_1} \rho(-V_1\vec{e}_y)\{-V_1\vec{e}_y\cdot(-\vec{e}_y)\}\, dS + \iint_{S_2} \rho V_2\vec{e}_y(V_2\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)\, dS + \iint_{S} \rho V\vec{X}(V\vec{X}\cdot(-\vec{X}))\, dS$$

$$= -\rho V_1^2 S_1 \vec{e}_y + \rho V_2^2 S_2 \vec{e}_y - \rho V^2 S \vec{X}$$

$$= \rho(V_2^2 S_2 - V_1^2 S_1)\vec{e}_y - \rho V^2 S(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y).$$

$$= \rho(V_2^2 S_2 + V^2 S\sin\alpha - V_1^2 S_1)\vec{e}_y - \rho V^2 S\cos\alpha\,\vec{e}_x.$$

$$\circ \iint_{\partial\mathcal{D}} -\vec{T}dS = \iint_{S_1} -\vec{T}dS + \iint_{S_2} -\vec{T}dS + \iint_{S} -\vec{T}dS + \iint_{S_{lat}} -\vec{T}dS + \iint_{S_p} -\vec{T}dS$$

Sur $S_1 \cup S_2 \cup S \cup S_{lat}$ : on peut supposer que l'hypothèse du fluide parfait est valide. Par contre, on doit tenir compte, a p

On a ainsi :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} -\vec{T}dS = \iint_{S_1} -p\vec{n}dS + \iint_{S_2} -p\vec{n}dS + \iint_{S_{lat}} -p\vec{n}dS + \iint_{S} -p\vec{n}dS + \iint_{S_p} -\vec{T}dS.$$

On ne sait pas calculer escplicitement la dernière intégrale mais on peut l'interpréter :

$$\iint_{S_p} -\vec{T}dS = \text{force escercée par la plaque sur le fluide}$$
$$= -\text{force escercée par le fluide sur la plaque}$$
$$= -\vec{R}_{f\to p}.$$

Par conséquent :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} -\vec{T}dS = \iint_{S_1\cup S_2\cup S\cup S_{lat}} -p\vec{n}dS - \vec{R}_{f\to p}.$$

En outre sur $S_1 \cup S_2 \cup S \cup S_\ell$ la pression est égale à la pression atmosphérique supposée constante. On a donc :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} -\vec{T}dS = \iint_{S_1\cup S_2\cup S\cup S_{lat}} -p_{atm}\vec{n}dS - \vec{R}_{f\to p}$$

$$= -\underbrace{\iint_{\partial\mathcal{D}} p_{atm}\vec{n}\, dS}_{\substack{=0 \\ \text{(pression homogène} \\ \text{sur une surface} \\ \text{fermée)}}} + \iint_{S_p} p_{atm}\vec{n}\, dS - \vec{R}_{f\to p}$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\mathcal{D}} -\vec{T}dS = p_{atm} S_p\, \vec{e}_x - \vec{R}_{f\to p}.$$

$$= -\{\vec{R}_{f\to p} - p_{atm} S_p \vec{e}_x\}.$$

D'autre part, la force escercée par l'atmosphère sur la plaque est : $\iint_{S_p} -p_{atm}\vec{e}_x\, dS = -p_{atm} S_p \vec{e}_x$ et donc $\{\}$ s'interprète comme la résultante $\vec{R}$ des efforts escercés par le jet et l'atmosphère sur la plaque.

On a donc finalement :

$$\underline{\vec{R} = \rho V^2 S\cos\alpha\,\vec{e}_x - \rho(V_2^2 S_2 + V^2 S\sin\alpha - V_1^2 S_1)\vec{e}_y.}$$

2- On a $q_v = VS$ $\quad q_{v_1} = V_1 S_1$ $\quad q_{v_2} = V_2 S_2$.

Si on néglige les effets de la viscosité près de la plaque, la force $\vec{R}$ doit être purement normale à la plaque. On doit donc avoir :

$$\rho(V_2^2 S_2 + V^2 S\sin\alpha - V_1^2 S_1) = 0$$

$$\iff q_{v_2} V_2 + q_v V\sin\alpha - q_{v_1} V_1 = 0. \quad (**)$$

Le fluide est alors parfait, pesant, incompressible et en écoulement stationnaire. On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli :

→ le long de la ligne de courant qui matérialise la paroi du jet entre $S$ et $S_1$ : $p_{atm} + \rho g z + \frac{\rho V^2}{2} = p_{atm} + \rho g z + \frac{\rho V_1^2}{2}$
$\Rightarrow V = V_1$.

→ entre $S$ et $S_2$ : $V = V_2$.

$(**)$ devient : $q_{v_2} - q_{v_1} = -q_v \sin\alpha$.

D'après 1) on a : $q_{v_1} + q_{v_2} = q_v$.

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{v_1} - q_{v_2} = q_v\sin\alpha \\ q_{v_1} + q_{v_2} = q_v \end{cases} \iff \begin{cases} q_{v_1} = \frac{q_v}{2}(1+\sin\alpha) \\ q_{v_2} = \frac{q_v}{2}(1-\sin\alpha). \end{cases}$$

ercice n°8.

1) L'écoulement est stationnaire et le fluide est parfait et, incompressible et pesant.

On peut applique le théorème de Bernoulli.

$$P_a + \rho g z_A + \frac{1}{2}V_A^2\rho = P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}V_1^2\rho$$

$$\Rightarrow P_1 = P_a + \rho g(z_A - z_1) + \frac{1}{2}\rho V_A^2 - \frac{1}{2}\rho V_1^2$$

$$\Rightarrow P_1 = P_a + \rho g H_1 + \frac{1}{2}\rho(V_A^2 - V_1^2).$$

La conservation du débit volumique donne:

$$V_A S_A = V_1(\pi R_1^2) = Q_v.$$

$$S_A >> S_1 \Rightarrow V_A << V_1 \Rightarrow V_A^2 - V_1^2 \simeq -V_1^2.$$

$$V_1 = \frac{Q_v}{\pi R_1^2}.$$

$$\Rightarrow P_1 = P_a + \rho g H_1 - \frac{\rho Q_v^2}{2\pi^2 R_1^4}$$

2) a) D'après la question précédente:

$$P_2 = P_a + \rho g H_2 - \frac{\rho Q_v^2}{2\pi^2 R_2^4}$$

$P_1 = P_2$

$$\Leftrightarrow \rho g H_1 - \frac{\rho Q_{v1}^2}{2\pi^2 R_1^4} = \rho g H_2 - \frac{\rho Q_{v2}^2}{2\pi^2 R_2^4}$$

$$H_2 = H_1 + \frac{\rho}{\rho g}\,\frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{Q_{v2}^2}{R_2^4} - \frac{Q_{v1}^2}{R_1^4}\right\}$$

$$\Rightarrow H_2 = H_1 + \frac{1}{2\pi^2 g}\left\{\frac{Q_{v2}^2}{R_2^4} - \frac{Q_{v1}^2}{R_1^4}\right\} = H_1 + \frac{1}{2g}\left\{V_2^2 - V_1^2\right\}.$$

b) On applique la loi de conservation de la masse au domaine D.

On a donc:

$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv + \iint_{\partial D}\rho\,\vec u\cdot\vec n\,dS = 0.$$

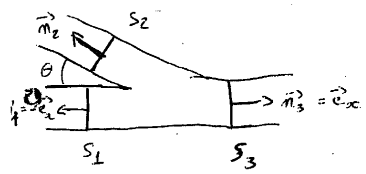
L'écoulement est stationnaire

$$\Rightarrow \iint_{\partial D}\rho\,\vec u\cdot\vec n\,dS = 0.$$

Le fluide est parfait ⇒ on a donc la condition de glissement à la paroi

$$\iint_{S_1}\vec u\cdot\vec n_1\,dS + \iint_{S_2}\vec u\cdot\vec n_2\,dS + \iint_{S_3}\vec u\cdot\vec n_3\,dS = 0.$$

On a fait l'hypothèse de l'écoulement par tranche ⇒ dans chaque ~~tranche~~ section $\vec u$ est cst et orienté suivant $\vec n$.




$$\vec u_1 = -V_1\vec n_1 \qquad \vec u_3 = +V_3\vec n_3$$

$$\vec u_2 = -V_2\vec n_2$$

$$\Rightarrow -V_1\iint_{S_1}dS - V_2\iint_{S_2}dS + V_3\iint_{S_3}dS = 0$$

$$\Rightarrow -V_1S_1 - V_2S_2 + V_3S_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3 = \frac{1}{S_3}\left\{S_1V_1 + S_2V_2\right\}} \quad \text{or:}$$

$$S_3 = \pi R_3^2$$
$$S_2 = \pi R_2^2$$
$$S_1 = \pi R_1^2 \quad \text{et } R_1 = R_3.$$

$$\Rightarrow V_3 = V_1 + \frac{S_2}{S_3}V_2 = V_1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}V_2.$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3 = V_1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}V_2.}$$

3) Appliquons le théorème des quantités de mouvement à D. L'écoulement étant stationnaire nous avons

$$\iint_S \rho\,\vec u(\vec u\cdot\vec n)\,dS = m\vec g - \iint_S p\vec n\,dS.$$

(m : masse du fluide dans D)

- Calcul de $-\iint_S p\vec n\,dS$.

$$-\iint_S p\vec n\,dS = -\iint_{S_1}p\vec n\,dS + \iint_{S_2}-p\vec n\,dS + \iint_{S_3}-p\vec n\,dS + \underbrace{\int_{paroi}-p\vec n\,dS}_{}$$

$$= -\vec R - \iint_{S_1}p\vec n\,dS + \iint_{S_2}-p\vec n\,dS - \iint_{S_3}p\vec n\,dS$$

↓ éc$^t$ par tranche.

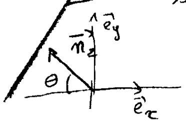
efforts exercés par la paroi sur le fluide = - efforts exercés par le fluide sur la paroi = $-\vec R$

$$= -\vec R - P_1\iint_{S_1}\vec n\,dS - \iint_{S_2}\vec n\,dS\,P_2 - P_3\iint_{S_3}\vec n\,dS$$

De plus sur $S_1$, $\vec n_1$ est constant et $\vec n_1 = \ldots$

même, sur $S_3$, $\vec n_3$ est constant et $\vec n_3 = \vec e_x$

sur $S_2$, $\vec n_2$ est constant et:




$$\vec n_2 = -\cos\theta\,\vec e_x + \sin\theta\,\vec e_y.$$

Par conséquent:

$$\iint_S -p\vec n\,dS = -\vec R + P_1\vec e_x\iint_{S_1}dS - P_3\vec e_x\iint_{S_3}dS - P_2(-\cos\theta\,\vec e_x + \sin\theta\,\vec e_y)\iint_{S_2}dS$$

$$= -\vec R + P_1S_1\vec e_x - P_3S_3\vec e_x + P_2S_2\cos\theta\,\vec e_x - P_2S_2\sin\theta\,\vec e_y.$$

$$= \left\{P_1\pi R_1^2 - P_3\pi R_3^2 + P_2\pi R_2^2\cos\theta - R_x\right\}\vec e_x + \left\{-P_2\pi R_2^2\sin\theta - R_y\right\}\vec e_y.$$

$$= \left[\pi R_1^2(P_1 - P_3) + \pi R_2^2P_2\cos\theta - R_x\right]\vec e_x + \left[-(R_y + P_2\pi R_2^2\sin\theta)\right]\vec e_y.$$

- Calcul de $\iint_S \rho\,\vec u(\vec u\cdot\vec n)\,dS$.

$$\iint \rho\vec u(\vec u\cdot\vec n)\,dS = \iint_{S_1}\rho\vec u(\vec u\cdot\vec n_1)\,dS + \iint_{S_2}\rho\vec u(\vec u\cdot\vec n_2)\,dS + \iint_{S_3}\rho\vec u\cdot(\vec u\cdot\vec n_3)\,dS + \underbrace{\iint_{paroi}\rho\vec u(\vec u\cdot\cancel{\vec n})\,dS}_{0 \text{ car glissement}}$$

$$= \rho\left\{-V_1(-V_1\vec n_1)S_1 - V_2(-V_2\vec n_2)S_2 + V_3S_3V_3\vec n_3\right\}.$$

$$= \rho\left\{V_1^2\,\vec n_1S_1 + V_2^2\,\vec n_2S_2 + V_3^2\,\vec n_3S_3\right\}$$

$$= \rho\left\{(V_3^2 - V_1^2)\vec e_xS_1 + S_2V_2^2(-\cos\theta\,\vec e_x + \sin\theta\,\vec e_y)\right\}.$$

conséquent :

$$\iint_S \rho \vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\,ds = \rho S_1 (V_3^2 - V_1^2)\vec{e}_x + \rho S_2 V_2^2 \sin\theta\, \vec{e}_y - \rho S_2 V_2^2 \cos\theta\, \vec{e}_x$$

$$= \rho\pi \left\{ R_1^2 (V_3^2 - V_1^2) - V_2^2 R_2^2 \cos\theta \right\} \vec{e}_x + \rho\pi V_2^2 R_2^2 \sin\theta\, \vec{e}_y .$$

On regroupe tout :

$$\rho\pi \left\{ R_1^2 (V_3^2 - V_1^2) - V_2^2 R_2^2 \cos\theta \right\} \vec{e}_x + \rho\pi V_2^2 R_2^2 \sin\theta\, \vec{e}_y = -mg\,\vec{e}_z$$

$$= -\vec{R} + \left\{ \pi R_1^2 (P_1 - P_3) + \pi R_2^2 P_2 \cos\theta \right\} \vec{e}_x + \left\{ -P_2 \pi R_2^2 \sin\theta \right\} \vec{e}_y .$$

sur $\vec{x}$ :

$$R_x = \pi R_1^2 (P_1 - P_3) + \pi R_2^2 P_2 \cos\theta + \rho\pi \left\{ R_1^2 (-V_3^2 + V_1^2) + V_2^2 R_2^2 \cos\theta \right\}$$

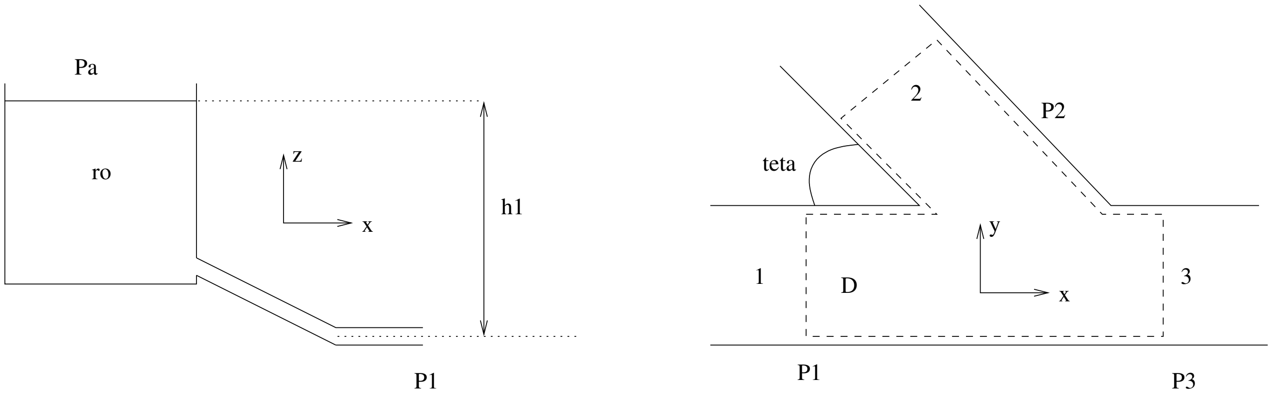
$$R_x = \pi R_1^2 (P_1 + \rho V_1^2) + \pi R_2^2 \cos\theta\, (P_2 + \rho V_2^2) - \pi R_1^2 (P_3 + \rho V_3^2) .$$

sur $\vec{y}$ :

$$R_y = -P_2 \pi R_2^2 \sin\theta - \rho\pi V_2^2 R_2^2 \sin\theta .$$

$$= -\pi R_2^2 \left\{ P_2 + \rho V_2 \right\} \sin\theta .$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_x &= \pi R_1^2 \left[ (P_1 + \rho V_1^2) - (P_3 + \rho V_3^2) \right] + \pi R_2^2 \cos\theta\, (P_2 + \rho V_2^2) \\ R_y &= -\pi R_2^2 \sin\theta\, \left\{ P_2 + \rho V_2 \right\} . \end{aligned}}$$




l1 l2

Figure 12 – Etude d'un confluent.

**2A004 Statique et dynamique des fluides S1**

**Feuille d'exercices n° 9 : Dynamique des fluides visqueux**

## Exercice 9.1 : Nombre de Reynolds

1. Qu'est-ce que le nombre de Reynolds ? A quelle condition sur ce nombre peut-on adopter l'hypothèse des fluides parfaits ?
2. Sachant que $U_0$, $L_0$ sont la vitesse et la longueur caractéristiques d'un problème, écrivez l'équation de Navier-Stokes dans des variables sans dimension.
3. Faites le rapport entre le terme d'inertie et le terme visqueux.
4. Calculer le nombre de Reynolds dans les cas suivants. Conclusion ?
   - ▷ Avion en vol : $\nu_{air} = 15\ 10^{-6}\ m^2\ s^{-1}$, $U_o = 1000\ km/h$, $L = 3\ m$
   - ▷ Bille dans la glycérine : $\nu_{gly} = 6,8\ 10^{-4}\ m^2\ s^{-1}$, $U_o = 1\ cm/s$, $L = 5\ mm$
   - ▷ Déplacement d'une bactérie dans l'eau : $\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2\ s^{-1}$, $U_o = 1\ \mu m/s$, $L = 3\ \mu m$

**Solution de l'exercice 9.1.**

1. C'est le rapport entre les forces d'inertie $\rho U \nabla U$ et les forces de viscosité $\mu \nabla^2 U$. Pour des Reynolds grands le terme de viscosité devient négligeable par rapport au terme d'inertie et on peut adopter une hypothèse de fluide parfait.
2. les variables sans dimension sont $U^{`} = U/U_0$, $L^{`} = L/L_0$, ceci donne un temps sans dimensions $\tau = t/(U_0/L_0)$ et une pression $p^{`} = p/(\rho U_0^2)$. L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors

$$\frac{DU^{`}}{D\tau} = -\nabla^{`} p^{`} + \frac{1}{Re} \triangle^{`} U^{`}$$

3. $\frac{\rho U \nabla U}{\mu \nabla^2 U} = \frac{\rho U_0^2/L_0}{\mu U_0/L_0^2} = \frac{1}{Re}$
4. Faites !!!

## Exercice 9.2 : Écoulement entre deux plaques.

On admet que les écoulements de fluides visqueux incompressibles et non pesants sont décrits par les équations suivantes :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{grad}(p) + \mu \Delta \vec{u}$$

On considère un écoulement stationnaire, plan, d'un fluide visqueux de viscosité dynamique $\mu$ constante, non pesant et incompressible (figure 9). Ce fluide s'écoule entre deux plaques parallèles en mouvement dans leur plan.

On suppose que l'écoulement se fait avec une vitesse parallèle à $(O; \vec{e}_x)$.

1. A partir des équations de Navier Stokes et en utilisant les hypothèses faites sur l'écoulement, retrouvez les équations données dans le cours pour décrire un tel écoulement.
2. Quelles sont les conditions aux limites pour la vitesse pour ce problème ?
3. Exprimez le champs de vitesse et de pression en fonction d'une seule constante que l'on notera $K$. Quelle est l'interprétation physique de cette constante.

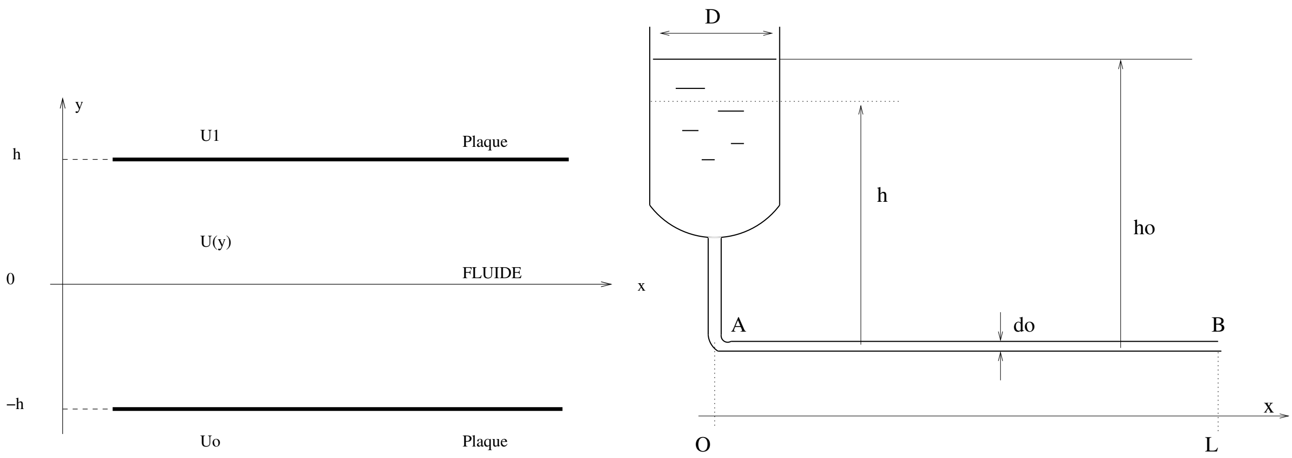



FIGURE 13 – Écoulement entre deux plaques (Ex 9.2). Viscosimètre (Ex. 9.3)

4. Calculez le débit volumique. Exprimez $K$ en fonction de $Q_v$.
5. Tracez le profil des vitesses dans les cas suivants :
   — $U_0 = 0$ , $U_1 = 0$.
   — $U_0 = 0$ , $U_1 = 1$.
   — $U_0 = -1$ , $U_1 = 1$.

**Solution de l'exercice 9.2.**

1. Projection sur les axes $x$ et $y$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

   pour un écoulement stationnaire et de la forme $((u(y), 0)$ ($v = 0$ !!, pas de vitesse verticale) il en reste

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2 u}{dy^2} \quad (1)$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

2. conditions aux limites, la vitesse à la paroi nulle (les parois ne bougent pas) $u(h) = 0$ et $u(-h) = 0$.
3. l'équation précédente sur $y$ nous dit que $p$ est une fonction de $x$, $p = p(x)$ alors

$$\frac{dp}{dx} = \mu\frac{d^2 u}{dy^2}$$

   et donc les deux termes sont égales à une même constante $K$

$$\frac{dp}{dx} = K$$
$$\mu\frac{d^2 u}{dy^2} = K$$

   La constant $K$ est le gradient de pression.

4. l'intégration de la 1ere équation donne

$$u(y) = \frac{K}{2\mu}y^2 + Ay + B$$

et les deux constantes $A$ et $B$ sont trouvées avec les conditions aux limites.

**Exercice 9.3 : Etude d'un viscosimètre**

On considère un viscosimètre à écoulement, constitué d'un récipient cylindrique de diamètre $D = 5$ cm relié à un tube horizontal fin de diamètre $d_o = 1$mm et de longueur $L = 50$ cm (voir figure **??**), et contenant un liquide visqueux et incompressible, de viscosité dynamique $\mu$ et de masse volumique $\rho$. Le liquide est surmonté d'air à la pression atmosphérique. En laissant s'écouler le liquide par le tube horizontal, le niveau de celui-ci dans le récipient baisse d'une hauteur $h_o - h$. L'écoulement dans le tube est supposé permanent (les variations du débit et de la pression dans le temps sont très faibles) et les effets dus aux extrémités du tube sont supposés négligeables.

1. On rappelle que dans l'hypothèse d'un écoulement permanent s'effectuant dans une conduite cylindrique et présentant une symétrie de révolution autour de l'axe de celle-ci, l'équation de bilan de quantité de mouvement se réduit, en négligeant les effets de pesanteur, à :

$$\frac{d\,p(x)}{dx} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\,u(r)}{dr}\right)$$

où $u(r)$ désigne la composante de vitesse selon l'axe $x$ de la conduite supposée indépendante de la coordonnée longitudinale $x$ , et $r$ est la coordonnée radiale. Établir l'expression de la vitesse $u$ en fonction de $r, r_o, \mu, \Delta p$ et $L$ où $r_o$ est le rayon de la conduite et $\Delta p = p_A - p_B$ est la différence de pression entre les extrémités du tube.

2. Montrer que le débit volumique dans la conduite dans la direction $\vec{e_x}$ s'écrit sous la forme :

$$q_v = \frac{\pi d_o^4}{128\mu L}\Delta P$$

3. En supposant que l'écoulement dans le récipient soit très lent, et que la pression à l'extrémité du tube horizontal diffère très peu de la pression atmosphérique, calculer la différence de pression $\Delta p$ en fonction de la hauteur du liquide $h$.

4. Donnezl'équation différentielle en $h$ régissant la variation de hauteur en fonction du temps $t$.

5. Intégrer cette équation et montrer que l'expression de $h$ peut se mettre sous la forme :

$$h = h_o e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$$

où $\Delta t = t - t_o$, $t_o$ étant l'instant initial, $h_o$ est la hauteur initiale et $\tau$ est :

$$\tau = \frac{32D^2\mu L}{\rho g d^4}$$

6. Quelle est la dimension de $\tau$ ? Comment varie $h$ dans les deux cas limites suivants :
   — $\tau$ tend vers l'infini.
   — $\tau$ tend vers zéro.

7. Calculer la viscosité du liquide sachant qu'il a fallu 46 minutes et 12 secondes pour que le niveau du liquide dans le récipient passe de 6 à 3 cm. On donne :$\ln 2 = 0.693$.

8. Calculer, en utilisant la question 2, la vitesse moyenne liée au débit, $\bar{U}$, en fonction de $\mu, d_o, \Delta p$ et $L$. En déduire la valeur de cette vitesse pour une hauteur $h = 3$ cm.
9. Vérifier que l'écoulement dans le tube est laminaire.

**Solution de l'exercice 9.3.**

1. nous avons

$$\frac{dp}{dx} = K$$
$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{rdu}{dr}\right) = K$$

La 1ere équation donne $p(x) = Kx + C$ avec $p(0) = P_0 + \rho gh(t)$ et $p(L) = P_0$ alors $p(x) = \frac{-\rho gh(t)}{L}x + \rho gh(t)$ et

$$K = \frac{-\rho gh(t)}{L}$$

La 2eme équation s'intégre deux fois pour donner

$$u(r) = \frac{K}{4\mu}r^2 + A\ln r + B \tag{3}$$

et nous avons une seule condition aux limites $u(r = r_0) = 0$. Nous avons aussi la condition de compatibilité qui impose $A = 0$, car $\ln(r)$ diverge pour $r = 0$. La solution est

$$u(r) = \frac{K}{4\mu}(r^2 - r_0^2) = \frac{\rho gh(t)}{4\mu L}(r_0^2 - r^2)$$

2. $q_v = \int_S \mathbf{un}dS$ soit

$$q_v = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \frac{\rho gh(t)}{4\mu L}(r_0^2 - r^2)rdrd\theta$$

ou

$$q_v = \frac{\pi d_0^4}{128\mu L}\Delta P$$

3. $p_A = p_0 + \rho gh$ et $p_B = p_0$ alors $\Delta P = \rho gh$
4. la conservation de la masse nous donne

$$\int_{S_A} \mathbf{Vn}dS + q_v = 0$$

car $\int_{S_B} \mathbf{Vn}dS$ est bien le débit sortant. Alors $\mathbf{V}$ sur $S_A$ est la dérivée de $h$ en fonction du temps,

$$\frac{dh}{dt}S_A + \frac{\pi d_0^4}{128\mu L}\rho gh = 0$$

soit

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{\tau}h = 0$$

avec $\tau = \frac{32D^2\mu L}{\rho gd^4}$ dont la solution est

5. 

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau}$$

6. $\tau$ est un temps caractéristique.Et
   — $\tau << 1$ l'écoulement est très lent et nous avons $h \sim h_0$
   — $\tau >> 1$ $h \sim 0$ le réservoir se vide rapidement
7. d'après la solution

$$\mu = \frac{\rho g d_0^4}{32D^2L}\frac{\Delta t}{ln(h_0/h)}$$

   donc $\mu \sim 10^{-3} kg.m^{-1}s^{-1}$.
8. $U_m = \frac{q_v}{\pi R^2}$
9. $R_e = \frac{\rho U_m D}{\mu}$