Sorbonne Université, M1 SPI: MF2A & CompMech - 2018-2019

# 4AF16/MFC: Cours de Mécanique des Fluides Compressibles

In [1]:

```
from scipy.optimize  import fsolve
from pylab           import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

## Fonctions Python MFC-Chap2 utilisées dans l'exercice (cf Chap. II) ##
def func_A_Ac(x,gam,A_Ac):
    # total to static temperature
    out =  A_Ac - 1./x * ( 2./(gam+1.) *(1. + 0.5*(gam-1)*x**2))**(0.5*(gam+1)
/(gam-1))
    return out

def func_jump_P(gam,M1):
    # pressure  jump (LIB_ipynb = ODCn_v2)
    out =  1 + 2*gam/(gam+1)*(M1**2-1.)
    return out

def func_Pt_P(gam,M):
    # total to static pressure (LIB_ipynb = isentropic_flow_v2)
    out =  (1+0.5*(gam-1)*M**2)**(gam/(gam-1))
    return out
```

# Examen Intermédiaire - 7 nov. 2018 - Enoncé et correction

## Exercice 1. Questions de Cours

1) Afin de caractériser l'évolution de cet écoulement, compléter les relations ci-dessous au moyen des opérateurs :$>$, $<$ et $=$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\dots$ | $M_0$ | $\dots$ | $M_1$ | $M_1$ | $\dots$ | $M_2$ | $\dots$ | $1$ |
| $P_0$ | $\dots$ | $P_1$ | $\dots$ | $P_2$ | $U_0$ | $\dots$ | $U_1$ | $\dots$ | $U_2$ |
| $\rho_0$ | $\dots$ | $\rho_1$ | $\dots$ | $\rho_2$ | $T_0$ | $\dots$ | $T_1$ | $\dots$ | $T_2$ |
| $e_0$ | $\dots$ | $e_1$ | $\dots$ | $e_2$ | $s_0$ | $\dots$ | $s_1$ | $\dots$ | $s_2$ |
| $P_{t_0}$ | $\dots$ | $P_{t_1}$ | $\dots$ | $P_{t_2}$ | $h_{t_0}$ | $\dots$ | $h_{t_1}$ | $\dots$ | $h_{t_2}$ |
| $\rho_{t_0}$ | $\dots$ | $\rho_{t_1}$ | $\dots$ | $\rho_{t_2}$ | $a_{t_0}$ | $\dots$ | $a_{t_1}$ | $\dots$ | $a_{t_2}$ |

2) On mesure le nombre de Mach en aval de l'ODC au moyen d'un tube de pitot.

a) Etablir une relation permettant de calculer $M_1$.

b) Combien de solutions admet la relation établie à la question précédente ?

c) A quel régime d'écoulement correspondent-elles ? Laquelle est physiquement non-admissible et pourquoi ?

3) On considère les équations du modèle Euler 1D écrites sous forme globale de part et d'autre d'une ODC droite.

a) Montrer que : $\dfrac{a_1^2}{\gamma - 1} + \dfrac{U_1^2}{2} = \dfrac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_c^2$

b) Exprimer alors le rapport $(U_1/a_c)^2$ en fonction du nombre de Mach amont.

c) En déduire la relation de saut en vitesse.

**Réponses aux questions 1 à 3 :** *Voir Cours et démonstrations des chapitres Ecoulements isentropiques et ODC droites.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $<$ | $M_0$ | $<$ | $M_1$ | $M_1$ | $>$ | $M_2$ | $<$ | $1$ |
| $P_0$ | $>$ | $P_1$ | $<$ | $P_2$ | $U_0$ | $<$ | $U_1$ | $>$ | $U_2$ |
| $\rho_0$ | $>$ | $\rho_1$ | $<$ | $\rho_2$ | $T_0$ | $>$ | $T_1$ | $<$ | $T_2$ |
| $e_0$ | $>$ | $e_1$ | $<$ | $e_2$ | $s_0$ | $=$ | $s_1$ | $<$ | $s_2$ |
| $P_{t_0}$ | $=$ | $P_{t_1}$ | $>$ | $P_{t_2}$ | $h_{t_0}$ | $=$ | $h_{t_1}$ | $=$ | $h_{t_2}$ |
| $\rho_{t_0}$ | $=$ | $\rho_{t_1}$ | $>$ | $\rho_{t_2}$ | $a_{t_0}$ | $=$ | $a_{t_1}$ | $=$ | $a_{t_2}$ |

## Exercice 2. Tuyère hypersonique

On désire dimensionner une soufflerie hypersonique, de type convergent-divergent, alimentée par un réservoir amont contenant de l'air au repos ($r = 287$ J/Kg/K et $\gamma = 1.4$) et dont la tempérenture est de 3000 K. La section d'essai, dans laquelle est située une maquette d'une navette spatiale, est constituée d'un conduit à section constante placé en sortie du divergent. L'écoulement, de gaz parfait, est stationnaire, non-visqueux et non pesant.

**Données du problème**

In [2]:

```
#air
r     = 287
gam   = 1.4

#reservoir condition
T_t0 = 3000
print 'The reservoir total temperature for air is:', T_t0,'K'
```

```
The reservoir total temperature for air is: 3000 K
```

---

*1) Faire un shéma de la configuration étudiée et décrire le régime de l'écoulement.*

**Réponse** : Compte-tenu de la configuration étudiée, l'écoulement est supersonique isentropique en sortie de divergent, le col est bloqué et le débit maximum.

---

*2) On souhaite effectuer des mesures de pression sur la maquette pour un nombre de Mach en entrée de la section d'essai égal à $M = 20$. Calculer la vitesse correspondante.*

**Réponse** :

La vitesse s'exprime comme : $U = Ma = M\sqrt{\gamma r T}$

Or $T = T_t\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{-1}$

Comme $T_t = T_t0 = 3000$ K car l'écoulement est isentropique entre l'entrée et la section d'essai, on a donc

$$U = M\sqrt{\gamma r T_{t0}}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right]^{-1/2} \qquad (E.1)$$

*A.N* :

In [3]:

```
M = 20
T = T_t0/(1+ (gam-1)*0.5*M**2)
U = M*(gam*r*T)**(0.5)
print 'Test section velocity at Mach',M,'for air :',U,"m.s-1"
```

```
Test section velocity at Mach 20 for air : 2439.79355532 m.s-1
```

---

*3) Déterminer la valeur de la vitesse théorique maximale atteignable en entrée de la veine d'essai. Comparer sa valeur avec le résultat de la question précédente.*

**Réponse** : L'équation (E.1) se ré-écrit sous la forme : $U = M\sqrt{\gamma r T_{t_0}}\left[M^2\left(\frac{1}{M^2}+\frac{\gamma-1}{2}\right)\right]^{-1/2}$

De sorte que : $lim_{M\to\infty} U = \left(\frac{2\gamma r T_{t_0}}{\gamma-1}\right)^{1/2}$.

*A.N* :

In [4]:

```
U_lim = ((2.*gam*r*T_t0)/(gam-1))**(0.5)
print 'Theoretical maximum speed in the test section for air:',U_lim,"m.s-1"
print "Relative difference :", (U-U_lim)/U_lim*100,"%"
```

```
Theoretical maximum speed in the test section for air: 2454.994908
35 m.s-1
Relative difference : -0.619201000009 %
```

---

*4) Donner la valeur de la température statique en entrée de la section d'essai. En quoi la température observée compromet-elle la bonne réalisation des mesures sur la maquette ?*

**Réponse** : On peut calculer immédiatement la température en entrée de la section d'essai à partir de la question (1).

*A.N* :

In [5]:

```
print 'Test section static temperature for air:',T,"K"
```

```
Test section static temperature for air: 37.037037037 K
```

La valeur obtenue est bien en deçà de la température de liquéfaction de l'air (de 50 K sous condition de faibles pressions) et donc le milieu fluide devient diphasique (mélange de gaz et de gouttes) ce qui va fausser les mesures sur la maquette.

*5) Calculer la valeur de la température du réservoir permettant de maintenir la température statique de la veine d'essai au dessus de 50 K.*

Posons $\alpha = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$. Pour éviter le changement de phase pour l'air, on doit donc avoir la condition : $T > 50. \Rightarrow T_{t_0} > 50\alpha$.

**Réponse** :

_A.N. :

In [6]:

```
alpha        = 1+ (gam-1)*0.5*M**2
T_liquid_air = 50
print "Minimal inlet stagnation temperature for air :", T_liquid_air*alpha,'K'
```

```
Minimal inlet stagnation temperature for air : 4050.0 K
```

Il est manifeste qu'il est impossible d'effectuer une telle montée en température du réservoir.

*6) En pratique, aucune installation ne permet d'obtenir cette valeur de température dans le réservoir. C'est pourquoi il n'existe pas de soufflerie hypersonique à $M = 20$ fonctionnant avec de l'air. Sachant que la température de la veine d'essai ne doit pas descendre en dessous de 2.2 K dans le cas d'un écoulement d'hélium ($\gamma = 1.67$, $r = 2078.5$ J/Kg/K), donner la nouvelle valeur de la température minimale qu'on doit imposer dans le réservoir. Qu'en déduisez vous ?*

**Réponse** :

In [7]:

```
#helium
r    = 2078.5
gam  = 1.67

alpha        = 1+ (gam-1)*0.5*M**2
T_liquid_air = 2.2
print "Minimal inlet stagnation temperature for helium :", T_liquid_air*alpha,
'K'
```

```
Minimal inlet stagnation temperature for helium : 297.0 K
```

Contrairement au cas de l'air, la température de chauffage du réservoir permettant d'éviter tout risque de liquéfaction de l'hélium à Mach 3 est réalisable.

*7) Obtenez et commenter la valeur du rapport de la section de sortie du divergent sur la section critique de la tuyère pour le cas d'un écoulement d'hélium.*

Compte-tenu de la relation entre la section courante et la section critique (voir eq. (5.1b) du Chap. II) :

$$\frac{A}{A_{\text{crit}}} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right]$$

et du fait que le col est bien sonique dans le cas présent ($A_{col} = A_c$), on alors calculer directement $\left.\frac{A}{A_c}\right|_{(air)}$ et $\left.\frac{A}{A_c}\right|_{(He)}$

*A.N* :

In [8]:

```
#gam = 1.67
c2= -0.5*(gam+1.)/(gam-1.)
Ac_over_A   = (M *(2./(gam+1)*(1.+0.5*(gam-1)*M**2))**c2)
print 'Section ratio for Helium at Mach ',M, ': A/A_c =', 1./Ac_over_A
```

```
Section ratio for Helium at Mach  20 : A/A_c = 493.984616044
```

Donc pour une tuyère dont le col est de 1mm^2, la veinne d'essai nécessaire à l'obtention d'un nombre de Mach égal à 3 sera 500 fois plus grande !

---

*8) Comparez avec le cas d'un écoulement d'air.*

In [9]:

```
gam = 1.4
c2= -0.5*(gam+1.)/(gam-1.)
Ac_over_A   = (M *(2./(gam+1)*(1.+0.5*(gam-1)*M**2))**c2)
print 'Section ratio for Air at Mach ',M, ': A/A_c =', 1./Ac_over_A
```

```
Section ratio for Air at Mach  20 : A/A_c = 15377.34375
```

Donc même si on était en mesure de chauffer le réservoir à plus de 6000 K, il faudrait une section d'essai 15000 fois plus grande que celle du col, ce qui est impossible à réaliser.

---

## Exercice 3. Diffuseurs d'une tuyère supersonique

On considère un banc expérimental supersonique constitué d'une conduite convergente-divergente alimentée par un réservoir dont le gaz est au repos. La soufferie, dite à circuit ouvert, débouche dans une atmosphère au repos de pression $P_{atm} = 101325$ Pa.

Le gaz considéré est de l'air et le régime étudié est tel que $M_e = 3$ en sortie du divergent. L'écoulement est stationnaire, non-visqueux et non pesant.

In [10]:

```
gam = 1.4
r   = 287

Patm=101325.
Me   = 3
```

---

1) **Configuration (a)** *: On suppose le jet supersonique débouche directement dans le milieu ambiant. Calculer la pression totale du réservoir $P{t0}^{(a)}$ requise pour obtenir cette condition de fonctionnement.*

**Réponse** : Les conditions de fonctionnement sont isentropiques donc :

$$P_{t_0}^a = P_{t_e} = P_e \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Par ailleurs la pression du jet est à la pression atmosphérique (conditions dites de jet adapté) d'où $P_e = P_{atm}$.

In [11]:

```
Pe = Patm
Pt0_a= Pe*(1+ (gam-1)*0.5*Me**2)**(gam/(gam-1))
print 'Total pressure in the reservoir: ', Pt0_a, 'Pa'
```

```
Total pressure in the reservoir:  3721943.03689 Pa
```

---

_2) **Configuration (b)** : On considère le cas où une ODC droite apparaît au niveau de la section de sortie du divergent, avec toujours $M_e = 3$ juste en amont de l'ODC. Calculer dans ses conditions la nouvelle pression totale du réservoir $P_{t_0}^{(b)}$ nécessaire pour obtenir $M_e$._

**Réponse** : On a :

$$P_{t_0}^b = \frac{P_{t_0}^b}{P_{t_e}} \times \frac{P_{t_e}}{P_e} \times \frac{P_e}{P_2} \times \frac{P_2}{P_a} \times P_a = 1 \times 37.21 \times \left(1 + \frac{2\gamma}{(\gamma+1)}(M_e^2 - 1)\right)^{-1} \times 1 \times P_a$$

*A.N* :

In [12]:

```
P2_Pe  = func_jump_P(gam,Me)
Pte_Pe = func_Pt_P(gam,Me)

print 'Total pressure in the reservoir with normal shock: ', Pte_Pe/P2_Pe*Patm
, 'Pa'
```

```
Total pressure in the reservoir with normal shock:  360188.035828
Pa
```

---

*3) Comparer les nombres de Mach dans le jet de sortie pour les deux configurations. Laquelle vous apparaît-elle comme envisageable d'un point de vue pratique ?*

**Réponse** : Le Mach aval du jet subsonique est donné par : $M_2^2 = \dfrac{2 + (\gamma - 1)M_e^2}{2\gamma M_e^2 - \gamma + 1}$.

---

*4) Calculer la production d'entropie pour chaque configuration et commenter le résultat obtenu.*

**Réponse** : a finir

---

**Annexe** : Formulaire

- Evolution du rapport $A/A_{\text{crit}}$ en fonction du nombre de Mach (cf Eq. 5.2 du Chap. II) :

$$\frac{A(x)}{A_{\text{crit}}} = \frac{1}{M(x)}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M(x)^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right]$$

- Relation de saut de pression statique à travers une ODC droite

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma+1)}(M_1^2 - 1)$$

# -- Fin de ce noteebook --

---

*Jean-Camille Chassaing, UPMC , 8 Nov. 2018*