**Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique**
**Examen du 21 Mai 2019 - Session1**

***Durée 2h00 - Sans document ni calculatrice***
***L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé***

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

## Questions de cours

1. Definissez le noyau et l'image d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ avec $E$ et $F$ deux espaces vectoriels.
2. Si $\varphi$ (l'application précédente) est linéaire et bijective, que peut-on dire du noyau et de l'image ? Si, de plus, les espaces $E$ et $F$ sont de dimension finie, que peut-on dire sur leur dimensions ?
3. On considère une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions d'une telle équation soient linéairement indépendantes. Quelle est la forme de la solution générale pour une telle équation ?
4. Décrivez deux méthodes apprises en cours pour déterminer la solution particulière d'une équation différentielle linéaire non-homogène.
5. Donner le développement en série entière de $f(x) = (x+1)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Précisez son rayon de convergence.
6. **Bonus :** Donner l'expression de la série de Fourier $SF(f)$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, de période $T = 2$, définie par $f(x) = |x|$, pour $x \in [-1, 1]$ et prolongée par périodicité sur $\mathbb{R}$. On calculera les coefficients de la série $a_0$, $a_n$, $b_n$, $\forall n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 1

Soit la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$ et les sous-espaces propres associés. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
*Indication : Pour le calcul du déterminant $det(A - \lambda I)$ on pourra faire apparaître le facteur $(\lambda + 1)$ sur une colonne.*
2. Donner la matrice diagonale semblable à $A$, notée $A'$, ainsi que la matrice de passage $P$. Précisez la relation qui relie $A$, $A'$ et $P$.
3. En utilisant la question précédente, calculer le déterminant $det(A)$ en fonction des valeurs propres de la matrice $A$ et vérifier si $A$ est inversible.

**Exercice 2 : Choisir parmi les exercices 2a et 2b. Un seul sera noté.**

## Exercice 2a

Soit $a$ un nombre réel non nul. On considère l'équation différentielle linéaire non-homogène, de fonction inconnue $y(x)$ réelle, $x \in ]0, \infty[$ :

$$x^{a+1}y'' + (2a+1)x^a y' + a^2 x^{a-1} y = -1 \tag{1}$$

1. Donner les solutions de (1) pour $a = 0$.
2. On suppose désormais $a > 0$. On résout d'abord l'équation homogène associée.

   **a)** Vérifier que $y_1(x) = x^{-a}$ est solution de l'équation homogène :

   $$x^{a+1}y'' + (2a+1)x^a y' + a^2 x^{a-1} y = 0 \tag{2}$$

   **b)** En effectuant dans (2), le changement de fonction inconnue :

   $$y_2(x) = z(x)x^{-a}$$

   trouver l'équation différentielle vérifiée par $z$ et résoudre cette équation.

   **c)** Vérifiez que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes. En déduire la solution générale de l'équation homogène (2).

   **d)** On revient dans l'équation nonhomogène (1). Trouver une solution particulière de (1) en vous inspirant de la question 1. Déduire ensuite la solution générale de (1).

## Exercice 2b

On souhaite résoudre le système différentiel linéaire, à coefficients constants, non-homogène suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= y + 4e^{-3t} \\ y'(t) &= 4x + e^{-t} \end{cases}$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions réelles inconnues.

1. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Montrer que le système différentiel peut s'écrire sous la forme

   $$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{3}$$

   avec $A$ une matrice carrée 2x2 et $B(t)$ une matrice 2x1 que l'on précisera.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A$, et en déduire la solution générale du système différentiel homogène $Y_h'(t) = AY_h(t)$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ?
3. Trouver une solution particulière du système non-homogène (3) sous la forme $Y_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} e^{-t}$, avec $a, b, c, d$ des constantes réelles qu'on va déterminer par identification.
4. Donner la solution générale du système non-homogène (3).

**Exercice 3**

On considère l'équation différentielle suivante, où $y = y(x)$ est la fonction inconnue :

$$2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1 \tag{4}$$

On cherche une solution de l'équation (4), développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Etablir une relation de récurrence entre les coefficients $a_n$ et $a_{n-1}$.
2. Déterminer $a_0$. En déduire y(0).
3. Sans calculer $y(x)$ que peut-on dire sur l'unicité d'une telle solution ? Justifier votre réponse.
4. Trouver l'expression de $a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}*$ et en déduire $y(x)$.
5. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Justifier votre réponse. Quel est le domaine de convergence de la série ?
6. **Bonus :** On note $R$ le rayon de convergence de cette série. Etudier la convergence de la série en $x = R$ et $x = -R$. En déduire le domaine de définition de la solution $y(x)$.