

Hydrodynamique

Arnaud Antkowiak

v0.20.10₁₅

Table des matières

1	Les équations de l'hydrodynamique	5
1.1	Les forces	5
1.1.1	La pression	5
1.1.2	Les contraintes	6
1.1.3	Les forces de volume	7
1.2	L'équilibre des fluides	7
1.3	Le mouvement des fluides	9
1.3.1	Différentiation suivant le mouvement	9
1.3.2	Notion de flux diffusif et convectif	9
1.3.3	Advection	9
1.3.4	Diffusion	10
1.4	Équation de bilan d'une quantité intégrée	10
1.4.1	Variation de volume d'un domaine matériel et dérivation d'une intégrale	10
1.4.2	Conservation d'une quantité. Application à la conservation de la masse	11
1.4.3	Conservation d'un scalaire passif pouvant diffuser. Équation de convection-diffusion	13
1.4.4	Équation de conservation de la quantité de mouvement.	13
1.5	Lois constitutives	13
1.6	L'équation de Navier-Stokes	15
2	Les conditions limites	17
2.1	Flux aux frontières : imperméabilité et imbibition	17
2.2	Conditions phénoménologiques : adhérence aux parois et continuité	19
3	Les interfaces	21
3.1	Où est l'interface ?	21
3.1.1	Condition limite cinématique.	21
3.1.2	Géométrie des surfaces I. La normale.	22
3.2	Capillarité	22
3.2.1	Cohésion	22
3.2.2	Tension de surface	23
3.2.3	Géométrie des surfaces II. La courbure.	24
3.3	Saut de pression de Young-Laplace	25
3.3.1	Tension de surface ?	27
3.3.2	(dis-)continuité des contraintes	28
3.4	Forme d'équilibre d'un ménisque	28
4	Analyse perturbative	31
4.1	Écoulement au-dessus d'une bosse	31

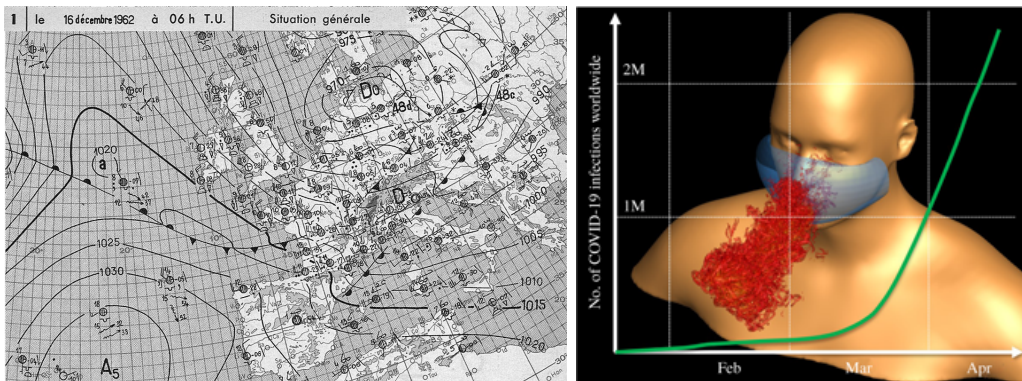
Chapitre 1

Les équations de l'hydrodynamique

Si les équations gouvernant le mouvement (ou l'équilibre) des fluides peuvent sembler complexes de prime abord, elles traduisent en fait des principes très simples de conservation de masse (la masse d'une particule fluide $m(t)$ est constante), de quantité de mouvement (la quantité de mouvement d'une particule fluide obéit à la seconde loi de Newton $m\gamma = \Sigma \mathbf{F}$) et d'énergie (l'énergie d'une particule fluide obéit aux premier et second principe de la thermodynamique). Dans cette introduction, on s'attache à expliciter ces grandes lois de conservation et obtenir les équations gouvernant le mouvement des fluides qui en découlent.

1.1 Les forces

Les fluides sont, tout comme les autres milieux continus, le siège de forces conditionnant leur équilibre (lorsque leur contribution totale est nulle) ou leur mise en mouvement. Si chacune des particules fluides composant l'écoulement est sujette à des forces de volume classiques, elles sont également soumises à des **forces de surface** appelées **contraintes** comme par exemple la pression (Fig. 1.1) que nous examinons maintenant.



la part du fluide l'entourant. Comme la portion de fluide est à l'équilibre, cela implique que la résultante des efforts de pression est égale en intensité et opposée en direction au poids. Si, toujours dans notre expérience de pensée, nous remplaçons la portion fluide par un objet solide, l'action des forces extérieures est inchangée et la résultante des efforts de pression correspond donc toujours en intensité au poids de fluide "déplacé" par le solide. Cette résultante des efforts de pression correspond à la poussée d'Archimède (Lighthill, 1986). Bien entendu, si le solide est plus dense (ou moins dense) que le fluide environnant, il y aura alors mise en mouvement et perte d'équilibre.

La pression est une force par unité de surface qui est **normale** à l'interface¹. Ce type de forces distribuées continûment dans le fluide est une spécificité des milieux continus ; on parle de **contraintes**. Ici, l'expression de la la contrainte correspondante est donc :

$$d\mathbf{f} = -p\mathbf{n} dS \quad (1.1)$$

Le signe moins traduit ici l'état de compression dans lequel se trouvent généralement les fluides (autrement dit la pression est une quantité positive, sauf dans certains cas de mise sous tension de liquide).

▷ **La pression vue comme une force de volume.** Sur la figure 1.2 on illustre l'action des forces de pression s'exerçant sur une petite portion de fluide cylindrique, de base S et de hauteur dn s'appuyant sur deux isobares de niveaux p et $p + dp$. L'action des forces de pression sur les côtés du cylindre est nulle par symétrie, si bien que la résultante est la somme des contributions exercées sur les faces extrêmes : $S p$ et $-S (p + dp)$ (on compte ici arbitrairement les forces comme positives si elles sont orientées selon le gradient de pression), soit $-S dp$. Si on rapporte cette force au volume de l'élément, soit $S dn$, on voit que l'action des forces de pression peut être perçue comme celle d'une force volumique d'intensité $-\frac{\partial p}{\partial n}$ dirigée selon ∇p . Autrement dit, les forces de pression peuvent être comprises comme des forces volumiques d'intensité $-\nabla p$; c'est là le sens de ce terme apparaissant dans les équations d'Euler et de Navier-Stokes. Il s'agit donc là

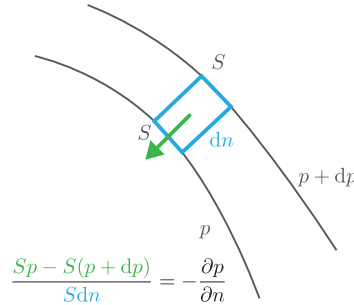


FIG. 1.2 : En effectuant un bilan de forces sur une portion de volume $S dn$ s'appuyant sur deux isobares (de niveau p et $p + dp$), on voit que l'action des forces de pression peut être vue comme celle d'une force par unité de volume d'intensité $-\frac{\partial p}{\partial n}$.

d'une lecture physique du théorème de la divergence qui nous aurait permis d'écrire directement :

$$-\iint_{\partial V} p\mathbf{n} dS = -\iiint_V \nabla p dV$$

1.1.2 Les contraintes

Dans le cas général d'un fluide en écoulement, la contrainte n'a plus de raison d'être alignée avec la normale – et d'ailleurs elle ne l'est pas. Comme multiplier par un scalaire \mathbf{n} ne peut donner qu'un vecteur aligné avec \mathbf{n} , et comme multiplier vectoriellement \mathbf{n} ne peut donner qu'un vecteur orthogonal à \mathbf{n} , il nous faut trouver

1. On peut le voir comme une définition d'un fluide, c'est-à-dire un milieu ne pouvant résister au cisaillement (Prandtl & Tietjens, 1957). Une contrainte de cisaillement mettrait donc systématiquement le fluide en écoulement. En effet on peut montrer que si la contrainte de pression n'est pas alignée avec la normale l'équilibre est rompu (Batchelor, 1967, §1.3).

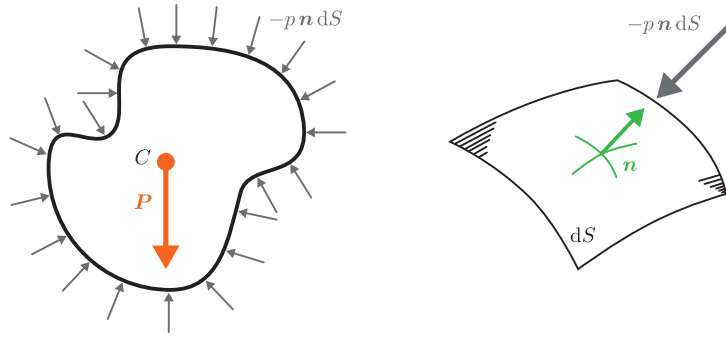


FIG. 1.3 : Gauche : à l'équilibre dans le champ de pesanteur, toute portion de fluide ressent des forces de pression qui contrebalancent exactement l'action du poids \mathbf{P} . Droite : La contrainte de pression s'exerce normalement à chaque élément de surface.

un autre moyen d'obtenir un vecteur pouvant être orienté arbitrairement à partir de la connaissance de \mathbf{n} . L'objet mathématique permettant de réaliser cette opération est le tenseur à deux dimensions. En utilisant les notations d'Einstein, cela donne :

$$df_i = \sigma_{ij} n_j dS \quad (1.2)$$

Il faut bien retenir que cet objet permet juste d'obtenir un vecteur $d\mathbf{f}$ non nécessairement aligné avec \mathbf{n} . Néanmoins il est bien sûr possible de retrouver une contrainte alignée avec \mathbf{n} . Par exemple, le tenseur des contraintes correspondant à un fluide au repos (éq. 1.1) est

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.3)$$

On peut montrer dans le cas général que le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est nécessairement symétrique, i.e. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (Batchelor, 1967). L'idée de la démonstration est de conduire un bilan de moment cinétique sur une particule fluide ; le seul terme dominant de cette équation fait intervenir la partie antisymétrique de $\boldsymbol{\sigma}$. Comme il n'est pas équilibré, il est nécessairement nul. Une exception toutefois : dans le cas de figure très particulier d'une densité de couples, comme dans certains colloïdes magnétiques, ce terme peut être équilibré et le tenseur peut devenir non-symétrique (voir par exemple l'étude de Soni *et al.*, 2019).

1.1.3 Les forces de volume

Les fluides sont aussi naturellement sujets à des forces de volume, qui peuvent être de nature magnétique, électrostatiques, gravitaires, ou résulter d'effets non-inertiels (pseudo-forces centrifuge, de Coriolis). En notant \mathbf{F} la force volumique **massique** s'exerçant à l'échelle de la particule fluide, on a donc la force volumique totale s'exerçant sur une portion V de fluide qui s'écrit :

$$\iiint_V \rho \mathbf{F} dV \quad (1.4)$$

▷ **En résumé.** La force totale s'exerçant sur une portion V de fluide est donc la somme des forces de surface et de volume :

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \iiint_V \rho \mathbf{F} dV \quad (1.5)$$

1.2 L'équilibre des fluides

À l'équilibre, les forces de volume et de pression s'exerçant sur toute partie V du fluide se compensent :

$$\iiint_V \rho \mathbf{F} dV - \iint_{\partial V} p \mathbf{n} dS = \mathbf{0}$$

soit, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\iiint_V (\rho \mathbf{F} - \nabla p) dV = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

Cette relation étant vérifiée pour tout domaine fluide, on a alors nécessairement au niveau local :

$$\rho \mathbf{F} = \nabla p \quad (1.7)$$

On retrouve ici la force de pression exprimée comme une force volumique $-\nabla p$.

Remarque : seuls les masses volumiques et champs de force tels que $\rho \mathbf{F}$ pouvant s'écrire comme un gradient permettent d'avoir un équilibre hydrostatique (contre-exemple : instabilité barocline lorsque les iso- p diffèrent des iso- ρ , autrement dit lorsque la pression n'est pas une simple fonction de ρ).

▷ **Cas des forces conservatives.** Les forces conservatives sont celles dérivant d'un potentiel Ψ tel que :

$$\mathbf{F} = -\nabla \Psi, \quad (1.8)$$

c'est-à-dire

$$-\rho \nabla \Psi = \nabla p, \quad (1.9)$$

et donc

$$\nabla \rho \times \nabla \Psi = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

Les iso- ρ (isopycnes) sont donc confondues avec les équipotentiellles, elles-mêmes confondues avec les isobares.

Conséquence : dans un tel système, une surface libre correspondant par exemple à $p = 0$ sera également une équipotentielle $\Psi = \text{const.}$

▷ **Exemple : équilibre d'un fluide en rotation.** Considérons un récipient contenant un liquide mis en rotation dans le champ de pesanteur à la fréquence angulaire Ω (l'axe de rotation est vertical, selon \mathbf{e}_z). Dans le référentiel en rotation, chaque particule fluide est donc soumise à la pesanteur mais aussi à la pseudo-force centrifuge

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = -\rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.11)$$

Ici, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$; il vient

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = \rho \Omega^2 r \mathbf{e}_r = -\rho \nabla \Psi_{\text{cent}}, \quad (1.12)$$

où

$$\Psi_{\text{cent}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2). \quad (1.13)$$

Si on ajoute les effets de pesanteur $\Psi_{\text{grav}} = gz$ alors

$$\Psi_{\text{tot}} = \Psi_{\text{grav}} + \Psi_{\text{cent}} = gz - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2). \quad (1.14)$$

On remarque que les équipotentiellles sont des paraboloides. Ainsi, si la surface libre est caractérisée par $p = 0$ elle adoptera une forme de paraboloïde également :

$$z_{\text{surf}} = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{g} r^2 + \text{const.} \quad (1.15)$$

▷ **Exercice : Équilibre d'une étoile.** On s'intéresse ici à l'équilibre d'une sphère fluide autogravitante. La force massique de gravité \mathbf{F} s'exerçant sur chaque particule fluide dérive du potentiel de gravitation Ψ tel que :

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho, \quad (1.16)$$

où G est la constante de gravitation universelle. À l'aide de l'équation de l'hydrostatique, et en supposant que le fluide a une masse volumique constante² ρ_0 , montrer que le profil radial de pression satisfait

$$p(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 (R^2 - r^2), \quad (1.17)$$

où R est le rayon de l'astre.

2. Il s'agit là d'une approximation très forte sur le profil de masse volumique, qui conviendrait davantage à une planète comme la Terre qu'à une étoile. Dans le TD, on s'intéresse à des lois d'état polytropiques plus réalistes de la situation rencontrées dans les étoiles. (non traité en 2020)

1.3 Le mouvement des fluides

Après avoir décrit la nature des forces en jeu dans un fluide ainsi que les conditions de son équilibre, intéressons-nous désormais au mouvement des fluides. Afin de pouvoir exprimer les lois de conservation pilotant ce mouvement, il nous faut tout d'abord être capable de décrire la variation d'une quantité attachée à une particule fluide, par exemple la concentration d'un colorant ou la quantité de mouvement.

1.3.1 Différentiation suivant le mouvement

Prenons l'exemple d'un champ de concentration $c(\mathbf{x}, t)$. La variation de concentration associée à une particule fluide suivie dans son mouvement est :

$$c(\mathbf{x} + \mathbf{u} \delta t, t + \delta t) - c(\mathbf{x}, t) = \delta t \underbrace{\left(\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c \right)}_{\frac{Dc}{Dt}} + \mathcal{O}(\delta t^2), \quad (1.18)$$

où l'on a fait apparaître le taux de variation de concentration de la particule $\frac{Dc}{Dt}$, à distinguer de $\frac{\partial c}{\partial t}$ qui mesurerait la variation de c en une position fixe (eulérienne) de l'espace, sans suivre la particule fluide. L'opérateur $\frac{D}{Dt}$ est appelé **dérivée particulaire** (ou matérielle, ou convective, ou lagrangienne) :

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c. \quad (1.19)$$

À titre d'illustration, l'équation régissant le champ de concentration transporté par un fluide en mouvement en l'absence d'effets de diffusion est donc simplement :

$$\frac{Dc}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c = 0. \quad (1.20)$$

On notera enfin que l'accélération d'une particule fluide s'écrit simplement $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$.

1.3.2 Notion de flux diffusif et convectif

Lors d'écoulements, les fluides transportent la masse, mais également les espèces chimiques, l'énergie et la quantité de mouvement. Une notion fondamentale pour décrire les modes de transport correspondant est celle de **flux** (de matière, de quantité de mouvement, d'énergie). Le flux vectoriel \mathbf{j} permet de caractériser le transfert d'une quantité à travers une surface orientée $\delta A \mathbf{n}$ par unité de temps :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \delta A \quad (1.21)$$

1.3.3 Advection

Le premier mode de transport de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie est l'advection. Supposons qu'un certain champ, par exemple à nouveau de concentration c pour se fixer les idées, soit **transporté** par le fluide à la vitesse³ \mathbf{u} , i.e. chaque particule conserve sa concentration. Considérons l'élément de surface **fixe** δA représenté sur la figure 1.4. La quantité de matière c traversant la surface⁴ pendant un court instant δt est $(c \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \delta A \delta t$. Ainsi la quantité de matière traversant δA par unité de surface et de temps est donc $\mathbf{j}_{\text{adv}} \cdot \mathbf{n}$ où

$$\mathbf{j}_{\text{adv}} = c \mathbf{u} \quad (1.22)$$

est **flux** de matière lié à l'advection. Si maintenant l'élément de surface est **mobile** et se déplace à la vitesse \mathbf{w} , le flux d'advection se généralise à

$$\mathbf{j}_{\text{adv}} = c (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \quad (1.23)$$

On notera que dans le cas d'un domaine **matériel**, i.e. se déplaçant à la même vitesse que le fluide, on aura $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ et le flux d'advection devient nul par construction.

3. La vitesse \mathbf{u} est la vitesse de l'espèce, qui inclue les effets diffusifs. Dans les mélanges, les vitesses d'espèces sont en général différentes et les flux diffusifs apparaissent dans la conservation de la masse.

4. On utilise ici le fait que le volume d'un cylindre penché de côté $\|\mathbf{u}\| \delta t$ est le même que celui d'un cylindre droit de même hauteur $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$. Il s'agit du principe de Cavalieri – qui peut également être montré avec une intégration simple.

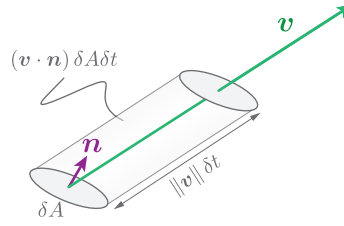


FIG. 1.4 : Une portion de surface δA de normale \mathbf{n} est traversée par un volume de fluide $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \delta A \delta t$ pendant δt . Ce volume est donc compté positivement si \mathbf{u} pointe dans le même demi-espace que \mathbf{n} (donc si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$), et négativement dans le cas contraire.

1.3.4 Diffusion

De plus, même sans écoulement préalable, de simples déséquilibres de matière (concentration d'espèce), d'énergie ou quantité de mouvement vont donner spontanément naissance à des transferts. On quantifie ces échanges **diffusifs** par unité de surface et de temps par le **flux diffusif** \mathbf{j}_{diff} . Même si une modélisation fine de ces échanges est très complexes, des relations phénoménologiques (contraintes par des arguments thermodynamiques) permettent malgré tout d'en avoir une représentation simple, comme avec la loi de Fick du transport de matière par exemple (voir §1.5).

1.4 Équation de bilan d'une quantité intégrée

Les flux caractérisent des échanges à travers des surfaces. On peut donc, grâce à eux, déterminer l'évolution d'une quantité c contenue dans un domaine de façon très générale⁵ :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V c \, dV}_{\text{Variation}} = - \underbrace{\oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Échange}} + \underbrace{\iiint_V \varphi \, dV}_{\text{Production}}, \quad (1.24)$$

c'est-à-dire que la variation de la quantité intégrée dans V est donnée par un bilan des entrées/sorties dans le domaine et de l'éventuelle production/destruction de c au sein de V . Avant d'aller plus avant dans l'écriture des lois de conservation, il nous faut préciser le sens de la dérivation d'intégrale qui apparaît au membre de gauche. Si le volume considéré est fixe, la dérivation peut directement passer sous l'intégrale, mais si le domaine est mobile ou déformable ce n'est pas si simple.

1.4.1 Variation de volume d'un domaine matériel et dérivation d'une intégrale

Nous allons maintenant donner un sens à la dérivation d'une intégrale conduite sur un domaine déformable. Pour commencer, nous considérons le cas particulier mais très courant de domaine **matériel**, i.e. suivant un même ensemble de particules au cours du temps. Au cours du temps, ce domaine voit son volume varier comme indiqué sur la figure 1.5, soit comme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V dV = \oint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \left(= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \right). \quad (1.25)$$

▷ **Signification de la divergence.** La relation précédente va nous permettre de donner un sens à la divergence du champ de vitesse \mathbf{u} . En effet, considérons pour cela un volume matériel $\tau(t)$ constitué des mêmes particules fluides. Le bilan précédent peut se réécrire à l'aide du théorème de la divergence comme :

$$\frac{d\tau}{dt} = \iint \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.26)$$

$$= \iiint \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV. \quad (1.27)$$

5. Cette relation est obtenue sur des considérations **physiques**.

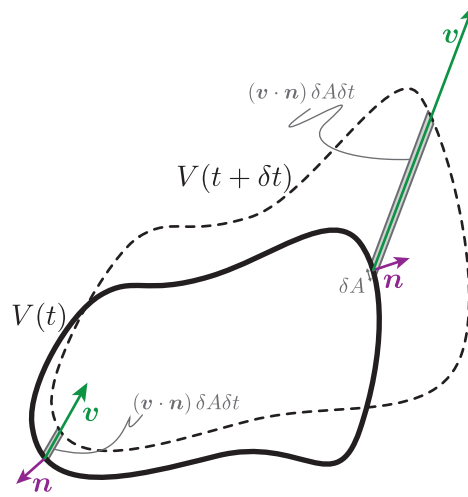


FIG. 1.5 : Un volume matériel est transporté par un champ de vitesse \mathbf{u} . Chaque portion δA de la frontière du domaine est advectée par \mathbf{u} et donne lieu à un changement de volume $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \delta A \delta t$ pendant δt . Il en résulte que le taux de variation totale du volume $\frac{dV}{dt}$ est donné par $\iint (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$.

Ainsi, dans la limite où $\tau(t)$ est très petit (en fait, suffisamment petit pour que l'on puisse considérer $\nabla \cdot \mathbf{u}$ constant sur le domaine), on pourra écrire

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.28)$$

La divergence du champ de vitesse peut donc être comprise comme le taux de variation volumique de volume d'une particule fluide.

▷ **La dérivation d'intégrale.** Nous nous sommes maintenant dotés des outils permettant de donner un sens à la dérivation d'intégrale d'un domaine matériel $V(t)$. Intéressons-nous à la variation de la quantité :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \theta dV.$$

Pour éclairer cette quantité, divisons mentalement le domaine en une multitude de petits cubes ou particules fluides élémentaires. Lors du mouvement du domaine fluide, la valeur de θ changera pour toutes les particules fluides au taux $\frac{D\theta}{Dt}$, mais par ailleurs l'élément d'intégration dV changera également avec un taux $(\nabla \cdot \mathbf{u}) dV$. Autrement dit⁶⁷ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \theta dV = \iiint_{V(t)} \frac{D\theta}{Dt} dV + \iiint_{V(t)} \theta \underbrace{\frac{DdV}{Dt}}_{(\nabla \cdot \mathbf{u})dV} \quad (1.29)$$

1.4.2 Conservation d'une quantité. Application à la conservation de la masse

Grâce à l'élucidation de la dérivation de l'intégrale précédente, on peut désormais utiliser l'équation (1.24) traduisant la conservation générale d'une quantité tant pour un domaine fixe que pour un domaine mobile. On peut être amené à considérer un domaine mobile par exemple pour établir l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'un domaine fluide. Un bilan sur un domaine fixe peut également présenter un intérêt, par exemple pour écrire l'évolution d'une quantité passant à travers un élément de maillage fixe dans un code numérique. En fonction de l'application, on adoptera le point de vue le plus adapté.

6. Cette relation est obtenue sur des considérations **mathématiques**.

7. On notera que cette relation peut directement être étendue au cas où le domaine ne se déplace pas à la même vitesse que le fluide (vitesse fictive, propagation de flamme, bilan dans un domaine se déplaçant avec une onde). Dans ce cas, il suffit simplement de remplacer \mathbf{u} par la vitesse du domaine \mathbf{w} .

Pour clarifier l'emploi des bilans sur domaines fixe et mobile, on s'intéresse maintenant à l'expression de la conservation de la masse (sans production ni destruction de masse), d'abord sur un domaine fixe puis sur un domaine mobile.

1. **Conservation de la masse dans un domaine fixe** V_{fixe} . L'équation de bilan (1.24) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{\text{fixe}}} \rho dV = - \oint_{\partial V_{\text{fixe}}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.30)$$

Le domaine étant fixe, on peut faire entrer la dérivation dans l'intégrale :

$$\iiint_{V_{\text{fixe}}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial V_{\text{fixe}}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.31)$$

et, en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\iiint_{V_{\text{fixe}}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0 \quad (1.32)$$

On notera que le fait que ce type de bilan soit vrai pour tout domaine implique la nullité de l'intégrande :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.33)$$

Et on obtient l'**équation de continuité**⁸ qui traduit la conservation de la masse. On notera que ce type de raisonnement mettant en avant la validité d'une expression intégrale pour tout volume pour en déduire une relation vérifiée à l'échelle de la particule fluide est très courant. Dans la suite, on emploiera directement ce type de raisonnement sous le nom de *passage au local*.

2. **Conservation de la masse dans un domaine matériel** $V(t)$. Cette fois, il n'y a plus de terme de flux car aucune particule fluide n'entre ni ne sort dans le domaine matériel, par construction. L'équation de bilan (1.24) s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_{V(t)} \rho dV}_{m(t)} = 0. \quad (1.34)$$

Mais cette fois, comme le domaine est mobile, il faut appliquer la procédure de dérivation de l'intégrale vue précédemment :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = \iiint_{V(t)} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0 \quad (1.35)$$

En passant au local, on retrouve à nouveau l'équation de continuité (1.33).

▷ **Conservation d'une quantité massique.** Grâce à la relation de continuité, il est possible d'obtenir une expression simplifiée du transport d'une quantité massique ξ (i.e. telle que la quantité associée à une particule fluide soit $\rho\xi$) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \xi dV = \iiint_{V(t)} \rho \frac{D\xi}{Dt} dV \quad (1.36)$$

On laisse le soin au lecteur de démontrer cette relation.

▷ **Le fluide incompressible.** Un cas de figure récurrent et de grans intérêt général est celui de l'**évolution incompressible** où l'on suppose non pas que le fluide a une masse volumique constante, mais plutôt que chaque particule fluide conserve sa masse volumique, c'est-à-dire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.37)$$

Un champ de vitesse \mathbf{u} satisfaisant cette propriété de divergence nulle est qualifié de *solénoïdal*.

8. Cette dénomination est employée depuis longtemps, mais n'est finalement pas vraiment justifiable...

1.4.3 Conservation d'un scalaire passif pouvant diffuser. Équation de convection-diffusion

Considérons à nouveau un champ de concentration c convecté dans un domaine par un champ de vitesse \mathbf{u} . Du fait de l'agitation moléculaire, ce champ est également sujet au phénomène de diffusion, caractérisé par le flux \mathbf{j}_{diff} . À nouveau, on peut obtenir l'équation gouvernant l'évolution du champ de deux manières différentes :

1. En considérant un **domaine fixe** V_{fixe} . Dans ce cas, et en l'absence de source/puits de concentration, on écrira simplement que la variation totale est donnée par la somme des flux entrants et sortants :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{\text{fixe}}} c \, dV = - \oint_{\partial V_{\text{fixe}}} (\mathbf{j}_{\text{conv}} + \mathbf{j}_{\text{diff}}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

soit

$$\iiint_{V_{\text{fixe}}} \frac{\partial c}{\partial t} \, dV = - \iiint_{V_{\text{fixe}}} \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\text{conv}} + \mathbf{j}_{\text{diff}}) \, dS,$$

En anticipant sur §1.5 et en écrivant le flux diffusif à l'aide de la loi de Fick $\mathbf{j}_{\text{diff}} = -D\nabla c$ on obtient après passage au local :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \nabla \cdot (D\nabla c) \quad (1.38)$$

Pour un écoulement incompressible avec un coefficient de diffusion constant, cette équation se ramène à l'équation classique d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c = D\nabla^2 c.$$

2. En considérant un **domaine matériel** V_{mat} . Cette fois, par construction (voir §1.3.3), il n'y a plus de flux convectif à travers la frontière du domaine mais seulement un flux diffusif :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{\text{mat}}} c \, dV = - \oint_{\partial V_{\text{mat}}} \mathbf{j}_{\text{diff}} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

soit, en dérivant l'intégrale sur le domaine matériel :

$$\iiint_{V_{\text{mat}}} \frac{Dc}{Dt} + c(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dV = \iiint_{V_{\text{mat}}} \nabla \cdot (D\nabla c) \, dS,$$

Cette relation étant vraie pour tout domaine, on retrouve la forme de l'équation locale (1.38).

1.4.4 Équation de conservation de la quantité de mouvement.

La conservation de la quantité de mouvement pour un domaine fluide correspond simplement à la deuxième loi de Newton $m\gamma = \Sigma \mathbf{F}$, il ne faut jamais l'oublier ! Écrivons cette loi pour un domaine matériel $V(t)$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{\text{mat}}} \rho u_i \, dV = \oint_{\partial V_{\text{mat}}} \sigma_{ij} n_j \, dS + \iiint_{V_{\text{mat}}} \rho F_i \, dV \quad (1.39)$$

soit, en passant au local :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad (1.40)$$

1.5 Lois constitutives

La dérivation des lois de conservation a fait apparaître des flux et des contraintes dont la forme précise reste encore à déterminer. Pour progresser dans cette détermination, considérons tout d'abord la situation suivante : en l'absence de tout mouvement macroscopique, un liquide contient un colorant c distribué de façon inhomogène, avec des zones plus ou moins concentrées. Même s'il n'y a pas de mouvement d'ensemble, les chocs entre molécules vont amener les molécules du colorant migrer aléatoirement dans le liquide. Ainsi, du fait de la distribution inhomogène de colorant, il y aura plus de particules traversant une surface δA en

provenance d'une zone très concentrée que l'inverse. Il en résulte un transport net de molécules de colorant des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées, qui sera actif tant que le déséquilibre de concentration sera présent : c'est le processus de **diffusion**. Il peut sembler délicat de prime abord de tenter une description exacte des mouvements de particules de colorant d'un point statistique. Mais d'un point de vue phénoménologique, il est clair que la diffusion ne sera active que s'il existe un gradient ∇c de concentration. L'idée des **lois de type gradient** est de supposer que les composantes du vecteur flux \mathbf{j}_{diff} dépendent linéairement de ∇c , i.e. :

$$(j_{\text{diff}})_i = k_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}. \quad (1.41)$$

Pour un fluide isotrope, il est de plus raisonnable de considérer qu'en l'absence d'axes privilégiés, le flux sera aligné avec ∇c et de signe opposé (de sorte à rétablir l'équilibre plutôt que l'accentuer!), soit :

$$\mathbf{j}_{\text{diff}} = -k \nabla c, \quad (1.42)$$

c'est-à-dire :

$$k_{ij} = -k \delta_{ij}. \quad (1.43)$$

On retrouve là la forme générale du transport de matière (Fick) et d'énergie (Fourier) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Loi de Fick :} & \mathbf{j}_{\text{matière}} = -D \nabla c \\ \text{Loi de Fourier :} & \mathbf{j}_{\text{énergie}} = -k \nabla T \end{array} \right. \quad (1.44)$$

$$(1.45)$$

▷ **Diffusion de quantité de mouvement et contrainte visqueuse.** Le cas de la diffusion de la quantité de mouvement est un peu plus complexe du fait de la nature vectorielle de $\rho \mathbf{u}$. Considérons pour débiter la situation simple d'un écoulement plan parallèle $(U(y), 0, 0)$. Du fait des chocs intermoléculaires, il y a **diffusion** verticale de quantité de mouvement horizontale. Comme précédemment, on suppose que le flux est linéaire avec le gradient de quantité de mouvement, c'est-à-dire :

$$j_{\text{diff}} = -\mu \frac{dU}{dy}, \quad (1.46)$$

Il est à noter que ce flux vertical de quantité de mouvement horizontale a la dimension de :

quantité de mouvement volumique \times volume/aire/temps

soit $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$ c'est-à-dire d'une contrainte. Cette similitude dimensionnelle n'est pas le fruit du hasard : c'est bien par l'établissement d'une contrainte que la quantité de mouvement est transférée, en vertu de la seconde loi de Newton. On peut en effet réécrire (1.46) comme

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{dU}{dy}, \quad (1.47)$$

soit la contrainte horizontale s'exerçant sur une surface de normale verticale⁹. Le coefficient de proportionnalité μ caractérisant l'efficacité du transfert de quantité de mouvement est la *viscosité dynamique*.

▷ **Expression générale du tenseur des contraintes d'un fluide Newtonien.** Dans le cas d'un écoulement quelconque, il est à prévoir que le tenseur des contraintes dépende de chaque composante du gradient des vitesses¹⁰, soit :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \alpha_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (1.48)$$

Si l'on décompose le tenseur gradient des vitesses en partie symétrique \mathbf{e} (traduisant une déformation) et antisymétrique $\boldsymbol{\omega}$ (traduisant une rotation solide) :

$$u_{i,j} = e_{i,j} + \omega_{i,j} \quad \text{avec} \quad e_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \omega_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

9. on notera la différence de signe dans les expressions (1.46) et (1.47) provenant de la convention de notation des contraintes.

10. C'est cette dépendance linéaire au cisaillement qui qualifie le fluide de Newtonien. On peut envisager (et d'ailleurs il existe) des relations plus complexes, non linéaires, entre contraintes et cisaillement. La **rhéologie** est la discipline qui traite de ces comportements particuliers non-newtoniens.

on s'aperçoit que la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ ne peut le faire dépendre de $\boldsymbol{\omega}$: il n'y a pas de diffusion de quantité de mouvement (i.e. pas de contraintes visqueuses) dans un écoulement en rotation solide. Il en résulte :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + A_{ijkl} e_{kl}. \quad (1.49)$$

Des considérations additionnelles sur l'isotropie du fluide que nous ne développerons pas ici permettent de réduire considérablement le nombre de coefficients de cette expression pour parvenir finalement à :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}. \quad (1.50)$$

1.6 L'équation de Navier-Stokes

Ayant maintenant élucidé la structure du tenseur des contraintes (1.50) on peut réécrire l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement (1.40) :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}) \quad (1.51)$$

Cette équation porte le nom d'*équation de Navier-Stokes*.

Dans le cas particulier (mais de grand intérêt général) d'écoulement incompressible sans gradient de viscosité, cette équation se ramène à :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.52)$$

ou, sous forme vectorielle :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)}_{m\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}}_{\Sigma \mathbf{F}}. \quad (1.53)$$

Chapitre 2

Les conditions limites

Après avoir vu au chapitre précédent l'expression des principes de conservation de la masse (équation de continuité) et de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes), il convient d'examiner les conditions limites associées à ces équations. Ces conditions limites correspondent soit à l'expression de principes de conservation (e.g. pas de flux de matière à une paroi), soit à des processus physiques particuliers qui se déroulent en proche surface (continuité de la température, des vitesses tangentielles). Dans les deux cas, ces conditions limites vont être capitales dans la détermination des écoulements.

2.1 Flux aux frontières : imperméabilité et imbibition

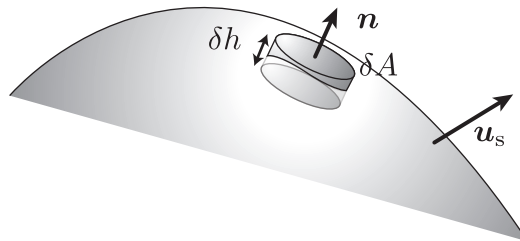


FIG. 2.1 : On effectue un bilan sur un volume élémentaire situé à cheval sur la frontière solide.

Considérons un solide se déplaçant dans un fluide à la vitesse \mathbf{u}_s (éventuellement dépendante du temps) et effectuons un bilan de masse sur un petit volume cylindrique de base δA et de hauteur δh à cheval entre le fluide et le solide (Fig. 2.1). Faisons maintenant tendre δh vers 0 de sorte à ce que l'élément ait une masse nulle. Ainsi, la variation de masse de l'élément est nécessairement zéro, ce qui veut dire que le flux de masse du côté fluide doit être équilibré par le flux de masse du côté solide :

$$-(\mathbf{j}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{fluide}}) \delta A - (\mathbf{j}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}}) \delta A = 0. \quad (2.1)$$

Posons arbitrairement $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\text{fluide}} = -\mathbf{n}_{\text{solide}}$, il vient :

$$-\mathbf{j}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{j}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.2)$$

En l'absence d'effets de mélange, la vitesse \mathbf{u} du fluide tient compte des effets diffusifs (il s'agit de la vitesse de l'espèce) et le flux de masse se résume au flux convectif. Attention : comme nous nous plaçons dans le référentiel du solide, la vitesse relative du fluide est $\mathbf{u} - \mathbf{u}_s$, de sorte que le flux de masse du côté fluide s'écrive :

$$\mathbf{j}_{\text{fluide}} = \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s). \quad (2.3)$$

▷ **La paroi imperméable.** Un cas de figure extrêmement courant est celui d'un solide **imperméable**, c'est-à-dire dans lequel le fluide ne peut pénétrer ; le flux de masse de fluide dans le solide est alors nul et

on a $\mathbf{j}_{\text{solide}} = \mathbf{0}$. La conservation de la masse exprimée à la frontière d'une telle paroi imperméable se réduit alors à :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \quad (2.4)$$

C'est la **condition d'imperméabilité** d'un objet (ou d'une paroi), qui comme son nom l'indique, traduit simplement le fait que le fluide ne pénètre pas le solide et qui s'exprime par la **continuité des vitesses normales**.

Note : dans le cas particulier (mais très courant !) d'une objet solide fixe, cette condition devient $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

▷ **Paroi perméable.** La discussion précédente s'étend naturellement au cas des parois perméables. Celles-ci peuvent correspondre à des tissus biologiques perméables à certains solutés, à des matériaux pouvant être imbibés par des solvants, des terrains trempés par la pluie ou encore des profils portants percés à des fins de contrôle de couche limite (comme la turbovoile de Cousteau et Malavard illustrée dans la séquence vidéo du cours).

Le flux de masse au sein de la paroi n'est désormais plus nul et sa détermination requiert de connaître le type d'écoulement au sein du solide. Supposons toutefois la vitesse d'imbibition $\mathbf{u}_{\text{imbib}}$ constante et connue (correspondant par exemple au cas d'une aspiration à débit imposé). La conservation de la masse à une paroi perméable mobile s'écrira alors :

$$\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n} = \rho(\mathbf{u}_{\text{imbib}}) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.5)$$

soit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{\text{imbib}}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

▷ **Condition limite sur un champ de concentration à une paroi.** Les conditions limites à appliquer sur l'équation de transport d'un champ de concentration (1.38) peuvent être obtenues suivant le même principe. Imaginons pour cela un champ de concentration transporté par un écoulement \mathbf{u} au sein duquel un solide (imperméable) se meut à la vitesse \mathbf{u}_s . Dans le référentiel du solide le flux de matière à travers une surface $\delta A \mathbf{n}$ quelconque est :

$$\mathbf{j}_{\text{matière}} = \mathbf{j}_{\text{conv}} + \mathbf{j}_{\text{diff}} = c(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) - D \nabla c. \quad (2.7)$$

La condition d'imperméabilité de la paroi au champ de concentration c s'écrit donc :

$$c(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n} - D \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.8)$$

car le flux de matière est nul dans le solide. En utilisant la condition d'imperméabilité du champ de vitesse (2.4), cette relation se réduit à :

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\partial c}{\partial n} = 0. \quad (2.9)$$

▷ **Transfert de masse à une interface : évaporation.** Un dernier exemple d'obtention de conditions limites à partir d'une équation de bilan est la condition de continuité du flux de masse à travers une interface liquide-gaz, dans le cas où le liquide s'évapore.

Effectuons un bilan de masse sur le même type d'élément de volume que celui considéré précédemment : un petit élément cylindrique de base δA et de hauteur δh à cheval sur l'interface se déplaçant à \mathbf{u}_i . On fait tendre la hauteur δh de l'élément vers 0, de sorte à ce que la masse de l'élément tende vers 0 également. Le bilan de masse sur cet élément s'écrit :

$$\mathbf{j}_{\text{conv. liquide}} = \mathbf{j}_{\text{conv. gaz}} + \mathbf{j}_{\text{diff. gaz}} \quad (2.10)$$

soit :

$$\rho_\ell (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} = \rho_v (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} - D \nabla \rho_v \cdot \mathbf{n} \quad (2.11)$$

Si l'évaporation est très violente (e.g. front de combustion), le flux est dominé par les effets de convection et

$$\mathbf{u}_g \sim \underbrace{\frac{\rho_\ell}{\rho_v}}_{\gg 1} \mathbf{u}_\ell$$

c'est-à-dire que l'écoulement (dit de Stefan) induit dans la vapeur est beaucoup plus violent que celui dans le liquide. Dans l'autre limite, où l'évaporation est très lente (cas d'une goutte d'eau séchant librement), c'est plutôt le terme diffusif qui domine.

2.2 Conditions phénoménologiques : adhérence aux parois et continuité

En plus des conditions précédentes découlant de principes de conservation, les fluides sont sujets à d'autres conditions limites, établies et confirmées sur des bases expérimentales et faisant l'objet d'un consensus, mais pas d'une démonstration exacte. Ces conditions phénoménologiques sont les conditions de **continuité des champs** aux interfaces, comme la vitesse, la température etc.

▷ **Une brève histoire de l'adhérence.** La condition d'adhérence, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$, a une histoire étonnante et pleine de rebondissements, dont nous traçons les grandes lignes dans ce qui suit ([Goldstein, 1950](#)). Au XVIII^e siècle, la description théorique des écoulements potentiels (correspondant à l'approximation d'écoulement parfait de fluide) était déjà bien place, mais les comparaisons avec les expériences étaient médiocres. Daniel Bernoulli en était bien conscient et attribuait les différences entre les écoulements (parfaits) prédits et ceux observés expérimentalement à une "condition d'adhérence" qui devait prévaloir aux parois. Coulomb démontra par la suite expérimentalement qu'un disque oscillant dans un liquide ne semblait pas particulièrement affecté par un changement de ses propriétés de surface (lisse, rugueuse ou recouverte de graisse), si bien qu'il lui semblait également que la vitesse de l'écoulement correspondait à celle du disque. Dans cette vision, le fluide a les mêmes propriétés en tout point de l'espace, et il satisfait simplement une condition additionnelle à la paroi.

Mais au cours du XIX^e siècle des théories concurrentes sont apparues. Girard proposa ainsi que la couche liquide touchant la paroi avait des propriétés physiques différentes l'amenant à adhérer au solide. La couche directement adjacente (composée de fluide "normal") pouvait quant à elle glisser parfaitement sur la première. Navier s'intéressa également au problème et avança une condition limite impliquant un glissement proportionnel à la contrainte de cisaillement $\beta u = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$, où le ratio μ/β a la dimension d'une longueur : la *longueur de glissement*. Il s'en suivit une période de relative confusion, où les grands théoriciens de l'époque (Poisson, Stokes) ont adopté alternativement l'une ou l'autre des conditions limites.

Au fil du temps cependant, des expériences fines conduites notamment par Couette ou Maxwell firent définitivement pencher la balance du côté de la condition d'adhérence. Maxwell suggéra sur des considérations moléculaires que si la condition de Navier est bien à l'œuvre, la longueur sur laquelle s'effectue le glissement est si petite – de l'ordre de quelques libre-parcours moyens – qu'il est très raisonnable de la considérer nulle, i.e. de considérer adhérence à la paroi : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$. Ceci est en particulier respecté dans les conditions usuelles des expériences et laboratoires, mais pas nécessairement dans des conditions de gaz raréfiés (e.g. rentrée dans l'atmosphère, vol hypersonique) ou d'écoulements de longues chaînes de polymères (écoulements en piste microfluidique), comme le confirment les expériences.

Au XX^e siècle, l'accord quasiment parfait entre les observations expérimentales et la prédiction utilisant la condition d'adhérence pour de nombreux écoulements, comme l'écoulement de Poiseuille, de Couette, la chute de la sphère de Stokes en fluide visqueux, le seuil d'instabilité dans l'expérience de Taylor-Couette... ont définitivement convaincu de la validité de cette condition.

Par ailleurs, les lois d'échelle sur la traînée d'un objet déduites de l'analyse dimensionnelle sur la base des échelles caractéristiques ρ, U, D et μ capturent l'évolution des efforts aérodynamiques sur une vaste plage d'échelles. Si une autre échelle de longueur (associée au glissement à la paroi) était pertinente dans la description des écoulements, les lois d'échelles s'en trouveraient modifiées.

On peut comprendre cette condition d'adhérence (continuité de \mathbf{u} de part et d'autre de l'interface) tout comme la condition de continuité des températures comme résultant d'équilibre à l'échelle moléculaire : les transferts extrêmement rapides entre molécules adjacentes induisent l'équilibrage instantané de la quantité de mouvement moyenne (vitesse) et de la vitesse d'agitation thermique (température) ([Batchelor, 1967](#)). À une interface entre un milieu I et un milieu II (solide-fluide, ou fluide-fluide), on aura donc :

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_{II} \quad \text{et} \quad T_I = T_{II} \quad (2.12)$$

Chapitre 3

Les interfaces

3.1 Où est l'interface ?

Une grande diversité d'écoulements est caractérisée par la présence d'interfaces : avalanches, rivières, océans, gouttelettes d'émulsions, de pluie ou d'encre etc. Nous le verrons, une interface entre un liquide et un autre fluide n'est pas juste une frontière immatérielle délimitant géométriquement les espaces occupés par les fluides. Une interface est **une zone active** où agissent des forces de tension, analogues à celles d'une membrane tendue.

Mais avant de préciser la nature de ces forces agissant à l'interface, il nous faut déjà être en mesure de savoir où se trouve cette interface ! En effet, une interface est par définition en mouvement constant et il nous faut commencer par être capable de la repérer dans le temps et l'espace : c'est le but de la *condition limite cinématique* qui va nous permettre de la traquer dans son mouvement.

3.1.1 Condition limite cinématique.

Pour décrire le mouvement d'une interface quelconque, comme une surface libre par exemple, commençons par introduire une fonction $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ arbitraire s'annulant à l'interface pour tout temps : pour tout point $\mathbf{x}_{\text{interf}}$ de l'interface, $\mathcal{S}(\mathbf{x}_{\text{interf}}, t) = 0$. Entre deux instants successifs, un point de l'interface se déplace de $d\mathbf{x} = \mathbf{u}_i \delta t$ et :

$$\underbrace{\mathcal{S}(\mathbf{x}_{\text{interf}} + \mathbf{u}_i \delta t, t + \delta t)}_0 \approx \underbrace{\mathcal{S}(\mathbf{x}_{\text{interf}}, t)}_0 + \delta t \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathcal{S} \right)}_{\frac{D_i \mathcal{S}}{Dt}} = 0.$$

Pour connaître la vitesse de l'interface \mathbf{u}_i^1 il nous suffit d'exprimer la condition de flux de masse au niveau de l'interface. S'il n'y a pas transfert de masse (e.g. évaporation) au niveau de l'interface, celle-ci s'écrit :

$$\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}, \quad (3.1)$$

de sorte que la condition cinématique décrivant le mouvement d'une surface libre s'écrive simplement :

$$\frac{D\mathcal{S}}{Dt} = 0 \quad (3.2)$$

▷ **Exemple : description d'une surface libre.** Considérons une surface libre comme celle de l'océan, caractérisée² par $z = \zeta(x, y, t)$. La surface est décrite à tout instant par l'annulation de la fonction³ :

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t). \quad (3.3)$$

La condition cinématique décrivant la position de la surface libre est donc :

$$\frac{D\mathcal{S}}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_z - u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.4)$$

1. On notera que dans l'expression de la variation de \mathcal{S} , seule la composante normale $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}$ de \mathbf{u}_i à l'interface est impliquée.

2. On suppose ici que l'interface est mono-valuée (pas de déferlement !).

3. On pourrait en imaginer d'autres, par exemple $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t) = \tanh(z - \zeta(x, y, t))$...

3.1.2 Géométrie des surfaces I. La normale.

Dans nombre de problèmes faisant intervenir des surfaces libres, déformables ou des parois de géométrie complexe, il faut être en mesure de fournir l'expression du vecteur normal. Une façon systématique d'obtenir l'expression de ce vecteur est de remarquer que la surface étant repérée par une isovaleur de \mathcal{S} , le vecteur normal est donc nécessairement colinéaire au **gradient** de \mathcal{S} :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \mathcal{S}}{\|\nabla \mathcal{S}\|} \quad (3.5)$$

▷ **Exemple : normale d'une surface libre.** Reprenons l'exemple précédent. On a :

$$\nabla \mathcal{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x}^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial y}^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

On notera que le sens de cette normale est a priori arbitraire et est choisi par convention (usuellement, convention de la normale extérieure, quand toutefois la notion d'extérieur a un sens!).

3.2 Capillarité

Après avoir vu les descriptions cinématiques des interfaces (i.e. comment les localiser) ainsi que les conditions limites résultant de la conservation de la masse et d'équilibres moléculaires (condition d'adhérence), nous nous intéressons maintenant aux aspects dynamiques des interfaces et plus particulièrement au phénomène de capillarité (de Gennes *et al.*, 2015).

Une interface entre deux fluides non miscibles, comme par exemple de l'eau et de l'air, est une frontière matérielle séparant les deux milieux. Mais une telle interface est en réalité bien plus qu'un simple lieu géométrique délimitant deux parties de l'espace ; une interface est **le siège de forces** dont la manifestation est visible dans des exemples quotidiens, comme l'agglomération de cheveux mouillés en touffe, le bobinage de soies d'araignée dans des gouttes de glu ou encore la sustentation de petits animaux aquatiques comme le Gerris (Figure 3.1).

3.2.1 Cohésion

L'origine microscopique du phénomène de tension de surface prend sa source dans les effets de **cohésion** des liquides. En effet, les atomes ou molécules qui constituent la matière interagissent via des forces de nature répulsive à très courte distance, mais attractive à plus longue portée. Si dans le cas d'un gaz, les distances intermoléculaires sont bien trop grandes pour que ces interactions aient un effet notable, ce n'est pas le cas des phases denses comme les liquides ; les molécules s'attirent toutes les unes les autres. C'est ce phénomène de cohésion de la matière qui est responsable de la forme arrondie des gouttes, de la courbure des ménisques ou de celle des films de savon. L'histoire du lien entre forces attractives et tension de surface est déjà présente dans les écrits de Newton, mais ce lien n'a été véritablement élucidé qu'avec Laplace en 1805 (de Laplace, 1805). Avec l'unique hypothèse de force attractive entre deux particules de matière décroissant avec leur distance, Laplace parvient à retrouver par le calcul toutes les formes d'équilibre d'interfaces, et expliquer le phénomène de montée capillaire de liquide dans les tubes, qui était incompris jusqu'alors (Rowlinson, 2005). Il met de plus en évidence un phénomène de saut de pression (contrainte normale) proportionnel à la courbure de l'interface, comme nous allons maintenant le voir.

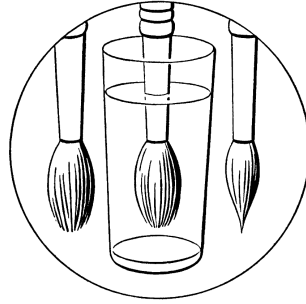


Fig. 1

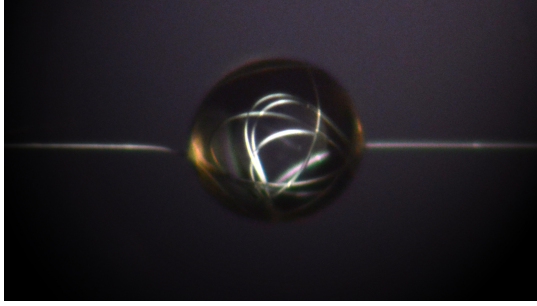


FIG. 3.1 : Haut : un pinceau mouillé et sorti de l'eau a ses poils collés, mais ceux-ci sont bien séparés si le pinceau est sec ou totalement immergé (Boys, 1890). Bas gauche : une goutte déposée sur un fil suffisamment fin comme celui d'une soie de capture d'araignée induit son bobinage en son sein (Eletto *et al.*, 2016). Bas droite : un insecte aquatique, le Gerris, peut marcher sur l'eau bien qu'il soit plus dense (photo par Ryoichi sur Flickr). Ces exemples sont des manifestations de la tension de surface exercée à des interfaces liquide-gaz.

3.2.2 Tension de surface

En parallèle des travaux de Laplace sur le lien entre cohésion et capillarité, Thomas Young est parvenu en 1805 également à un résultat identique à celui de Laplace sur le saut de pression au passage d'une interface, mais en empruntant un tout autre chemin (Young, 1805). Sur la base d'observations expérimentales de déformations de surfaces libres analogues à celles de membranes élastiques, Young postula l'existence d'une force de tension localisée à la surface du liquide, analogue en tout point à celle d'une tension de membrane, comme celle d'un ballon étiré. Ainsi, en suivant ce raisonnement, un petit élément de surface plat et rectangulaire de surface $\delta S = \delta \ell_1 \delta \ell_2$ tel que celui illustré sur la figure 3.2 serait sujet à une force totale :

$$(\gamma \delta \ell_2 - \gamma \delta \ell_2) \mathbf{e}_1 + (\gamma \delta \ell_1 - \gamma \delta \ell_1) \mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

en effet, toutes les forces se compensent ici deux à deux, car la surface est plane. Mais on pressent qu'il n'en sera pas de même dès lors que la surface sera courbe. Aussi, avant d'aller plus avant dans l'estimation de la force de tension de surface pour une surface générale, il convient de voir comment caractériser la courbure d'une surface.

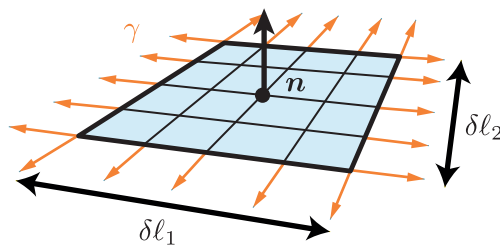


FIG. 3.2 : Une portion d'interface plane est sujette à une force de tension à sa périphérie.

3.2.3 Géométrie des surfaces II. La courbure.

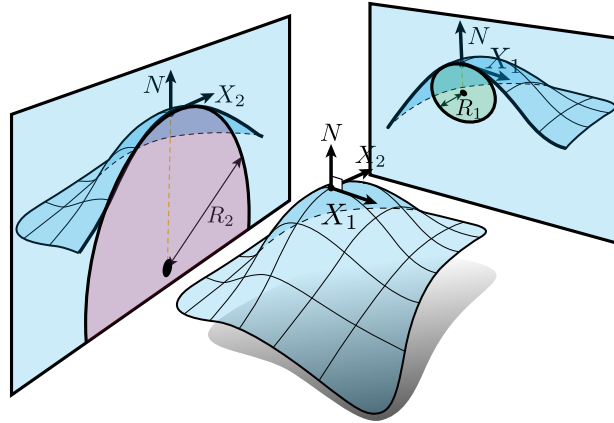


FIG. 3.3 : Une portion de surface courbe intersectée par un plan présente un rayons de courbure différent suivant l'orientation de ce plan.

Considérons la portion d'interface courbe représentée sur la figure 3.3. La courbure de la surface en un point donné est une quantité géométrique que l'on peut construire de la façon suivante : commençons par identifier la normale \mathbf{n} à la surface au point considéré, puis considérons deux plans orthogonaux contenant chacun \mathbf{n} . Chaque plan va intersecter la surface selon une courbe qui pourra être approximer par une cercle. Naturellement, le rayon du cercle sera différent dans le cas général dans chaque plan : on le notera par exemple R_1 dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ et R_2 dans le plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{n})$. La courbure moyenne (ou arithmétique) κ de la surface au point considéré est définie comme la somme des courbures des deux cercles :

$$\kappa \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.7)$$

Cette définition appelle deux remarques. La première concerne l'unicité de la définition de κ . En effet, on pourrait envisager deux autres plans orthogonaux contenant également \mathbf{n} , obtenus par simple rotation du système précédent autour de \mathbf{n} . Nous aurions alors deux autres valeurs pour R_1 et R_2 . De façon remarquable, on montre en géométrie des surfaces que si R_1 et R_2 ne sont effectivement pas définis de façon univoque, la somme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est quant elle indépendante du choix des plans ! La courbure κ est un invariant de la surface (sauf dans des cas mal définis, comme des surfaces avec des cusps ou coins). La seconde remarque concerne le signe de la courbure. Les rayons de courbure sont des quantités signées, considérés par convention positivement si le centre de courbure est à l'intérieur de la surface, et négativement sinon (pour différencier intérieur et extérieur, on conserve la convention de la normale extérieure). Il est donc possible d'avoir des surfaces de courbure négative.

▷ **Courbure d'une sphère** Pour illustrer notre propos, considérons une simple sphère de rayon R .

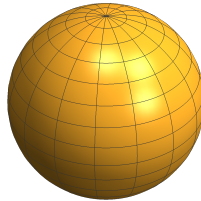


FIG. 3.4 : Une sphère.

En un point de la surface, le vecteur normal est donné par \mathbf{e}_r et les deux plans orthogonaux intersecteront chacun la sphère selon deux cercles (exacts) de rayon R chacun. En conséquence nous aurons

$$\kappa_{\text{sphère}} = \frac{2}{R}. \quad (3.8)$$

▷ **Extension au cas de surfaces générales.** L'approche précédente, bien que très visuelle et faisant un contact direct avec la signification de la courbure, présente néanmoins des limitations. En effet, au-delà des courbures de formes élémentaires (cylindre, cône, surface de révolution etc) il apparaît compliqué d'identifier les rayons de courbure dans le cas de surfaces plus générales, comme par exemple le champ de vagues décrit par l'équation (3.3).

Heureusement, il existe une définition alternative de la courbure que l'on démontre en géométrie différentielle des surfaces, et qui va nous permettre de calculer aisément la courbure dans toutes les situations :

$$\kappa \equiv \nabla_s \cdot \mathbf{n}, \quad (3.9)$$

où l'opérateur ∇_s représente la divergence surfacique. En pratique, nous allons calculer la divergence (complète) du champ de vecteurs \mathbf{n} défini en tout point de l'espace, puis considérer uniquement la restriction de ce champ à l'interface. Un exemple va nous permettre d'éclairer ceci.

▷ **Courbure d'une sphère II.** Reprenons l'exemple précédent de la sphère. Pour déterminer \mathbf{n} , nous introduisons la fonction couleur $\mathcal{S}(r) = r - R$ dont le gradient normalisé donne $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ en tout point de l'espace, et notamment à la surface de la sphère. La divergence de \mathbf{e}_r s'écrit *en tout point de l'espace* :

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \times 1) = \frac{2}{r} \quad (3.10)$$

La restriction de champ à la surface de la sphère donne la courbure :

$$\kappa_{\text{sphère}} = \nabla \cdot \mathbf{e}_r|_{r=R} = \frac{2}{r} \Big|_{r=R} = \frac{2}{R}. \quad (3.11)$$

▷ **Courbure d'un champ de vagues.** Reprenons l'équation du champ de vagues (3.3). La divergence du champ de vecteur normal (3.6) en tout point de l'espace s'écrit :

$$\kappa = -\frac{\Delta_{\parallel} \zeta}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}} + \frac{\zeta_x (\zeta_x \zeta_{xx} + \zeta_y \zeta_{yx}) + \zeta_y (\zeta_x \zeta_{xy} + \zeta_y \zeta_{yy})}{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{3/2}}, \quad (3.12)$$

où $\Delta_{\parallel} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ représente l'opérateur laplacien horizontal, et on dénote dans la formule précédente la différentiation par un indice, soit $\zeta_{yy} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$. On voit qu'il aurait été difficile d'établir cette relation à l'aide de cercles tangentant la surface ! Notons enfin que dans la limite des faibles pentes, où ζ_x, ζ_y sont a priori beaucoup plus petits que 1, l'expression se simplifie drastiquement pour devenir

$$\kappa \simeq -\Delta_{\parallel} \zeta \quad \text{dans la limite des faibles pentes.} \quad (3.13)$$

Voici encore une manifestation de l'opérateur laplacien !

3.3 Saut de pression de Young-Laplace

Ayant maintenant clarifié la notion de courbure de surface, nous pouvons revenir à l'estimation de la force effective de tension de surface exercée sur une portion d'interface courbe. Pour cela, considérons la portion élémentaire de surface décrite sur la figure 3.5. Cette surface élémentaire est sous-tendue par deux arcs élémentaires de longueurs curviligne $\delta\ell_1$ et $\delta\ell_2$, et a donc une surface donnée au premier ordre par

$$\delta S = \delta\ell_1 \delta\ell_2.$$

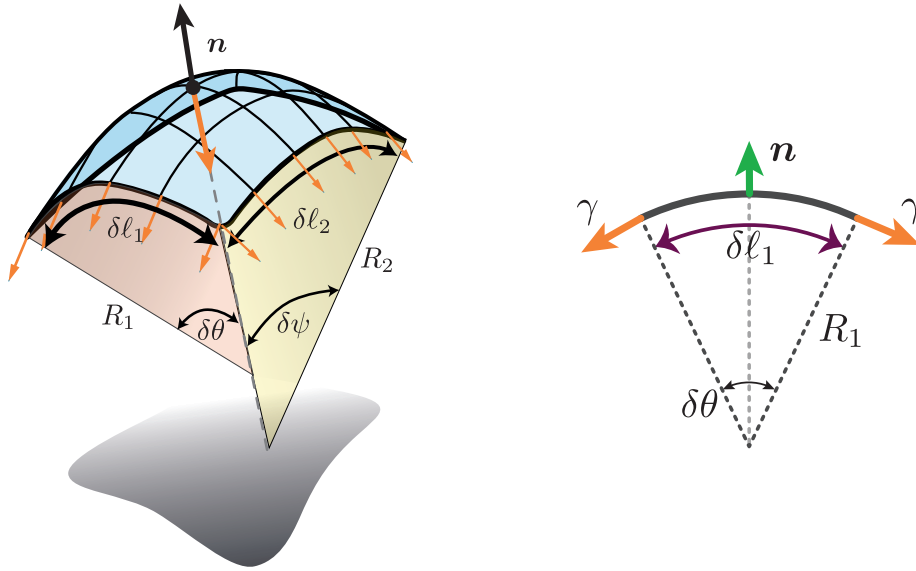


FIG. 3.5 : Gauche : une portion d'interface courbe est soumise à une force effective dépendant de la tension de surface et de sa géométrie $-\gamma\kappa \mathbf{n} \delta S$. Droite : visualisation des forces agissant sur une coupe de la surface, montrant que les contributions le long de la normale s'ajoutent.

Ces deux arcs élémentaires sont reliés aux deux rayons de courbure R_1 et R_2 par les angles infinitésimaux $\delta\theta$ et $\delta\psi$ représentés sur la figure 3.5 :

$$\begin{cases} \delta\ell_1 = R_1\delta\theta \\ \delta\ell_2 = R_2\delta\psi \end{cases} \quad (3.14a)$$

$$(3.14b)$$

Pour quantifier l'action des forces, commençons par considérer la coupe indiquée sur la figure 3.5 (droite). Les deux contributions d'intensité γ sont chacune inclinées de $\delta\theta/2$ par rapport à la tangente au point d'intérêt, si bien qu'en projection suivant la tangente \mathbf{t} et suivant la normale \mathbf{n} on obtient :

$$\begin{cases} \text{en projection suivant } \mathbf{t} : & \gamma \cos(\delta\theta/2) - \gamma \cos(\delta\theta/2) = 0 \\ \text{en projection suivant } \mathbf{n} : & -\gamma \sin(\delta\theta/2) - \gamma \sin(\delta\theta/2) \simeq -2\gamma\delta\theta/2 = -\gamma\delta\theta \end{cases} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

Ceci est valable pour chaque coupe le long du chemin $\delta\ell_2$, si bien que la contribution de la tension de surface pour ces deux faces opposées sera $-\gamma\delta\theta\delta\ell_2$ selon \mathbf{n} . On peut répéter ce raisonnement pour les deux autres faces, et on obtient la contribution totale de la tension de surface sur ce petit élément courbe :

$$\delta\mathbf{f}_{\text{cap}} = -\gamma(\delta\theta\delta\ell_2 + \delta\psi\delta\ell_1)\mathbf{n} \quad (3.17)$$

On peut réexprimer cette relation à l'aide des rayons de courbure (3.14) :

$$\delta\mathbf{f}_{\text{cap}} = -\gamma\left(\frac{1}{R_1}\delta\ell_1\delta\ell_2 + \frac{1}{R_2}\delta\ell_1\delta\ell_1\right)\mathbf{n}, \quad (3.18)$$

soit finalement

$$\delta\mathbf{f}_{\text{cap}} = -\gamma\kappa \mathbf{n} \delta S. \quad (3.19)$$

C'est-à-dire qu'un petit élément de surface courbe sera accéléré vers son centre de courbure avec une force d'intensité proportionnelle à la tension de surface et à la courbure. La force exercée sur un élément dépend donc de sa géométrie !

Arrêtons-nous un instant sur les conséquences de cette force. À partir de l'expression précédente, on serait tenté de dire que chaque élément de surface d'une gouttelette d'eau sphérique est accéléré vers son centre, et donc que la gouttelette s'effondre sur elle-même. Pour expliquer pourquoi les gouttelettes et autres interfaces peuvent rester à l'équilibre et lever ce paradoxe, il nous faut nous souvenir que les gouttelettes sont

constituées d'un liquide (e.g. l'eau) très difficilement compressible. En pratique, pour garantir cette incompressibilité⁴, un champ de pression va s'établir pour contrebalancer l'effet de la force de tension de surface ; en effet, un champ de pression est présent dans le liquide, même à l'équilibre. Comme vu au chapitre 1, la force de pression s'exerçant sur le petit élément de surface considéré s'écrira

$$\delta \mathbf{f}_{\text{pression}} = (p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}) \mathbf{n} \delta S$$

La condition d'équilibre de la portion d'interface s'écrira dès lors

$$\delta \mathbf{f}_{\text{cap}} + \delta \mathbf{f}_{\text{pression}} = \mathbf{0}, \quad (3.20)$$

c'est-à-dire

$$\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma \kappa. \quad (3.21)$$

Pour garantir l'équilibre, un **saut de pression** s'établit au passage d'une interface. Ce résultat étonnant, dû à Young et Laplace, a pour conséquence qu'une goutte de pluie millimétrique peut être en surpression de $\gamma \kappa \simeq 7 \times 10^{-2} \times \frac{2}{10^{-3}} = 140$ Pa par rapport à l'atmosphère, et une gouttelette de brouillard de taille micronique sera en surpression d'environ $\simeq 7 \times 10^{-2} \times \frac{2}{10^{-6}} = 1.4 \times 10^5$ Pa, soit 1.4 bars de plus que la pression atmosphérique !

3.3.1 Tension de surface ?

On a suivi dans l'analyse précédente le point de vue de Young selon lequel l'interface serait tendue par une tension constante γ , et on a retrouvé le résultat de Laplace du saut de pression au passage d'une interface courbe. Laplace n'avait pas supposé de tension distribuée à la surface mais seulement des forces d'interactions attractives entre molécules. Mais on a vu dans la partie précédente que l'on pouvait mathématiquement passer d'une représentation de forces tangentielles à l'interface à une force effective normale à celle-ci, et inversement. Notre démonstration est en fait l'expression d'une généralisation des formules de Frénet à 3 dimensions qui s'écrivent :

$$\oint_C \mathbf{p} d\ell = - \iint_A \kappa \mathbf{n} dS, \quad (3.22)$$

où \mathbf{p} est un vecteur tangent à l'interface et C un contour fermé sur une interface (Tryggvason *et al.*, 2011). Dès lors, on peut se poser la question de savoir si la tension de surface existe *vraiment*, ou si elle n'est juste qu'un analogue pratique permettant de décrire les interactions attractives entre molécules. Il est possible

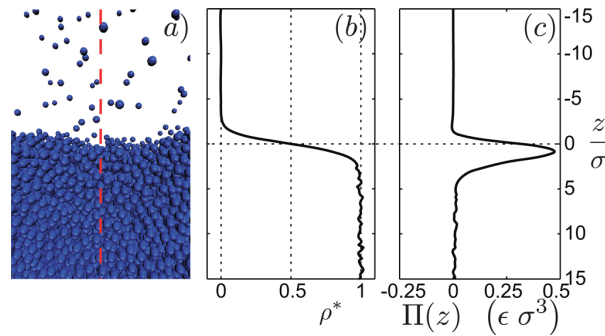


FIG. 3.6 : Des simulations de dynamique moléculaire montrent qu'au voisinage d'une interface, les molécules sont plus espacées que dans le cœur du liquide. Cette déplétion est associée à une augmentation de la force attractive entre molécules à la surface, qui se traduit macroscopiquement par la tension de surface (Marchand *et al.*, 2011).

désormais de conduire des simulations de dynamique moléculaire pour répondre à cette question, et, comme montré sur la figure 3.6, il existe bien une force parallèle à l'interface qui prend naissance dans une déplétion de l'interface en molécules : la tension de surface a donc bien une réalité physique ! (Berry, 1971 ; Marchand *et al.*, 2011).

4. À noter : même si les fluides sont compressibles (ex : bulle) un champ de pression peut toujours s'établir pour contrebalancer l'effet de la force capillaire.

3.3.2 (dis-)continuité des contraintes

Grâce à la notion de contraintes, on peut étendre facilement le résultat précédent au cas des interfaces en mouvement. Pour cela, considérons un petit volume élémentaire sous forme de camembert s'appuyant de part et d'autre de l'interface comme dans la figure 2.1. En faisant tendre l'épaisseur du volume vers 0, sa masse – et donc sa quantité de mouvement – tendent vers 0 également. Il en résulte que la somme des forces s'exerçant sur ce volume doit être nulle. Nous avons déjà vu que la somme des effets interfaciaux était donnée par $-\gamma\kappa\mathbf{n}\delta S$. La contrainte exercée par le milieu extérieur s'écrit $\boldsymbol{\sigma}_{\text{ext}}\mathbf{n}_{\text{ext}}\delta S$, et de même la contrainte exercée par le milieu intérieur s'écrit $\boldsymbol{\sigma}_{\text{int}}\mathbf{n}_{\text{int}}\delta S$, avec $\mathbf{n}_{\text{ext}} = -\mathbf{n}_{\text{int}} = \mathbf{n}$. La condition d'équilibre de l'interface s'écrit donc :

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\text{ext}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{int}})\mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n}. \quad (3.23)$$

Il s'agit d'une relation tout à fait générale exprimant un **saut de contraintes normales** à l'interface. On notera que dans le cas statique où $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, cette relation devient :

$$\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma\kappa, \quad (3.24)$$

qui est naturellement le saut de pression de Laplace vu en (3.21).

3.4 Forme d'équilibre d'un ménisque

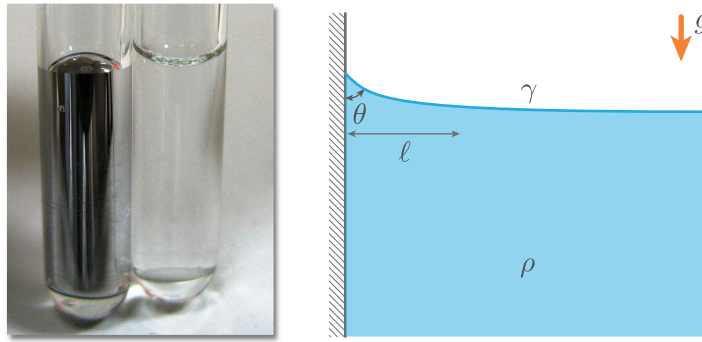


FIG. 3.7 : Gauche : du mercure ou de l'eau contenus dans un tube en verre présentent des ménisques très différents (Creative Commons). Droite : profil d'équilibre d'un ménisque, paramétré par l'angle de mouillage à la paroi.

Nous avons maintenant tous les éléments nous permettant de déterminer des formes d'interface sous influence de la tension de surface. À titre d'illustration nous allons nous intéresser dans cette dernière partie à la forme d'équilibre d'un ménisque. Un ménisque est la forme particulière qu'adopte une interface liquide-gaz au voisinage d'une paroi (figure 3.7 gauche). En effet, au contact d'une paroi, une interface présente un *angle de contact* qui dépend de la nature chimique du liquide et de la paroi : de l'eau ou de l'alcool sur du verre ou du métal auront des angles de contacts plus petits que $\frac{\pi}{2}$ (situation mouillante ou hydrophile) alors que de l'eau sur de la paraffine, une poêle anti-adhésive ou encore du mercure sur du verre auront des angles de contact supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. On qualifiera alors la situation de non-mouillante ou hydrophobe.

▷ **Équation du ménisque.** Au contact de la paroi, l'interface forme un angle θ , mais loin de la paroi, l'interface redevient plane sous l'influence de la gravité. Entre les deux, l'interface adoptera une forme de "drap tendu" par la tension de surface, sous influence de la gravité. Sur quelle échelle de longueur ℓ s'effectue ce raccord ? Nous pouvons commencer par l'estimer par analyse dimensionnelle. Ici $\ell = f(\rho, \gamma, g)$, et comme $[\gamma] = \text{MT}^{-2}$ l'application directe du théorème π nous informe que cette longueur de raccord sera proportionnelle à

$$\ell_{\text{gc}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (3.25)$$

qui est la longueur *gravito-capillaire* (parfois appelée simplement longueur capillaire).

Déterminons maintenant l'équation pilotant la forme de l'interface. À cette fin, commençons par introduire la coordonnée z dont l'origine sera à l'altitude de l'interface très loin du bord. On repérera l'altitude de l'interface en tout point par la fonction $z = h(x)$. Au niveau de l'interface, la relation de saut de pression de Laplace (3.21) nous permet d'écrire :

$$p(z = h) - P_{\text{atm}} = \gamma\kappa, \quad (3.26)$$

où $p(z = h)$ est la pression dans le liquide au niveau de l'interface, et P_{atm} représente la pression atmosphérique. Avant d'aller plus avant, remarquons que le centre de courbure de l'interface est à l'extérieur du liquide : elle sera donc négative, ce qui implique que la pression dans le liquide est *plus faible* que la pression atmosphérique.

Dans le liquide, l'équation de l'hydrostatique s'applique, à savoir $p(z) = P_{\text{atm}} - \rho gz$. On en déduit donc :

$$-\rho gh = \gamma\kappa, \quad (3.27)$$

ou encore

$$h = -\ell_{\text{gc}}^2 \kappa. \quad (3.28)$$

C'est l'équation de l'interface.

▷ **Profil d'équilibre dans la limite des faibles pentes.** Dans le cas général cette équation est difficile à résoudre car elle est non-linéaire. En effet, la courbure de l'interface s'écrit :

$$\kappa(x) = -\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}}. \quad (3.29)$$

Mais dans la limite des faibles pentes, ce qui correspond à des angles de contact proches de $\frac{\pi}{2}$, et est de toutes façons toujours vrai suffisamment loin de la paroi, $h' \ll 1$ et $\kappa \simeq -h''$. On voit que (3.28) admet alors des solutions exponentielles en $e^{x/\ell_{\text{gc}}}$ et en $e^{-x/\ell_{\text{gc}}}$. Seule cette dernière solution permet de revenir à un profil plat à l'infini ; l'interface admet alors dans cette limite l'équation :

$$h(x) = Ae^{-x/\ell_{\text{gc}}}, \quad (3.30)$$

où A est une constante déterminée par les conditions limites. Dans la limite des faibles pentes, on aura à la paroi $h' = -(\frac{\pi}{2} - \theta)$, donc

$$h(x) = \ell_{\text{gc}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) e^{-x/\ell_{\text{gc}}}. \quad (3.31)$$

▷ **Poids du ménisque.** Si on supprimait la paroi dans la figure 3.7 droite, l'interface reviendrait naturellement à la position $z = 0$. Il se pose donc la question de savoir qui soutient le poids du ménisque, car ce n'est pas la pression du liquide sous le ménisque. Le seul autre candidat est la paroi : la paroi exerce une force d'intensité γ parallèle à l'interface tirant sur le liquide. En projection verticale, cette force a une contribution $F_{\text{cap}} = \gamma \cos \theta$, qui doit nécessairement équilibrer le poids du ménisque.

On peut le vérifier par le calcul à l'aide de l'équation (3.28). Introduisons l'angle ϕ que forme localement l'interface avec l'horizontale ($\phi = \theta - \pi/2$). Lorsqu'on parcourt une portion élémentaire ds d'interface, cet angle change de $d\phi$ tel que $ds = R d\phi = -\frac{1}{\kappa} d\phi$, d'où on déduit $\kappa = -\frac{d\phi}{ds}$. L'équation du ménisque devient alors :

$$-\rho gh(s) = -\gamma \frac{d\phi}{ds}. \quad (3.32)$$

En remarquant que $\cos \phi = \frac{dx}{ds}$, on voit que le poids du ménisque peut s'écrire comme :

$$P = -\rho g \int_0^\infty h(x) dx = -\rho g \int_0^\infty h(s) \cos \phi ds. \quad (3.33)$$

Ainsi, en multipliant l'équation de l'interface par $\cos \phi$ il vient :

$$\underbrace{-\rho g \int_0^\infty h(s) \cos \phi ds}_P = -\gamma \int_0^\infty \cos \phi \frac{d\phi}{ds} ds = -\gamma [\sin \phi]_0^\infty = \gamma \sin \phi_0 = \underbrace{-\gamma \cos \theta}_{-F_{\text{cap}}}. \quad (3.34)$$

Chapitre 4

Analyse perturbative

Dans de nombreux cas de figures concrets, les écoulements ne sont pas idéaux, et il faut considérer l'influence d'une petite perturbation : légère variation de température, fluctuation de vitesse, imperfection dans la géométrie etc. On pourrait penser de prime abord qu'il faut nécessairement passer par l'expérimentation ou le calcul numérique pour quantifier l'influence de cette perturbation, mais ce n'est pas forcément le cas ; il est dans bien des cas toujours possible d'avoir une estimation analytique de la solution qui peut être bien plus riche en informations qu'un calcul numérique ! En effet, si la perturbation est "suffisamment petite" (nous allons dans le paragraphe suivant préciser ce qu'on entend par là), il est raisonnable de penser que la modification de l'écoulement sera également petite et il devient possible de rechercher la solution sous la forme d'un développement en puissance d'un petit paramètre : c'est l'idée de *développement asymptotique* dans le cadre de perturbations régulières (par opposition aux perturbations singulières comme les couches limites ou les chocs) (Hinch, 1991).

Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre une telle approche pour décrire l'influence d'une petite bosse sur un écoulement uniforme sur plaque plane.

4.1 Écoulement au-dessus d'une bosse

Nous considérons maintenant un écoulement sur une paroi presque plane : en $x = 0$ se trouve une petite bosse localisée, de faible épaisseur δ (par rapport à L , l'échelle naturelle de longueur de l'écoulement). Cette situation est en fait caractéristique d'un grand nombre de situations dont on illustre quelques-unes sur la figure 4.1.



FIG. 4.1 : **Des exemples d'écoulements sur bosse.** Gauche : Vue de l'aile rivetée d'un bombardier de la seconde guerre mondiale (cliché Peter Adams, Silicon Valley). Milieu : Dune s'érodant sous l'action du vent (Cliché Frans Lanting pour le National Geographic – Namib-Naukluft National Park, Namibie). Droite : sténose à un stade critique dans l'artère iliaque chez un homme de 41 ans (Ferrari *et al.*, 2004).

On suppose que les dimensions étudiées sont largement supérieures à l'échelle de couche limite, si bien que l'écoulement est considéré parfait. Loin de la paroi, l'écoulement tend vers un profil uniforme $\mathbf{u} = (U, 0)$. On décrit l'écoulement via le potentiel des vitesses ϕ , qui satisfait :

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.1)$$

C'est-à-dire que le système complet à résoudre est :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & \text{dans le fluide,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{à la surface de l'objet } y = \delta f(x/L), \text{ avec } \delta \ll L \\ \phi \rightarrow Ux & \text{au loin.} \end{cases} \quad (4.2)$$

En adimensionnant ce problème à l'aide des échelles naturelles L et U et en introduisant

$$\phi = UL\varphi, \quad (4.3)$$

$$x = L\bar{x}, \quad (4.4)$$

$$y = L\bar{y}, \quad (4.5)$$

$$\delta = L\varepsilon, \quad (4.6)$$

Le problème devient :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{dans le fluide,} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{à la surface de l'objet } \bar{y} = \varepsilon f(\bar{x}), \text{ avec } \varepsilon \ll 1 \\ \phi \rightarrow \bar{x} & \text{au loin en } \bar{x}, \bar{y} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.7)$$

Commençons par noter que le problème sans bosse, i.e. correspondant à $\varepsilon = 0$, admet la solution exacte triviale $\varphi_0 = \bar{x}$. On s'intéresse dans la suite à l'effet de la bosse sur l'écoulement, et particulièrement sur la composante horizontale du champ de vitesse (qui peut être comprise comme la vitesse juste à l'extérieur de la couche limite). Pour simplifier les écritures, on choisit d'abandonner les barres dans les notations ; étant entendu que nous nous intéressons ici au problème adimensionné.

▷ **Étape 1 : développement des champs.** La surface étant ici très faiblement déformée, on peut rechercher une solution sous la forme du développement suivant :

$$\varphi(x, y; \varepsilon) = \varphi_0(x, y) + \varepsilon \varphi_1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi_2(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.8)$$

Il s'agit du développement des champs en puissance du petit paramètre naturel ε , où l'on verra que terme d'ordre 0 correspond au profil uniforme. Les termes suivants vont avoir pour objet de corriger cette solution. Du fait de la linéarité de l'équation de Laplace, il apparaît que chaque terme du développement est un champ harmonique, qui doit décroître à grands y du fait de la condition limite à l'infini¹

▷ **Étape 2 : écriture des conditions limites.** Écrivons maintenant la condition limite valable à la paroi déformée. Pour cela, commençons par expliciter la condition d'imperméabilité. Celle-ci requiert de spécifier le vecteur normal \mathbf{n} . Pour cela, introduisons la fonction $\mathcal{S}(x, y) = y - \varepsilon f(x)$ qui va nous permettre d'obtenir le vecteur normal :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \mathcal{S}}{\|\nabla \mathcal{S}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 f'(x)^2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

On en déduit à la paroi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \equiv \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 f'(x)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.10)$$

qui se simplifie en :

$$-\varepsilon f'(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = \varepsilon f(x). \quad (4.11)$$

Notons cette relation limite

$$\mathcal{L}(x, y; \varepsilon) = 0 \quad \text{en} \quad y = \varepsilon f(x). \quad (4.12)$$

1. C'est là un point important : si $\phi \rightarrow \bar{x}$ loin de la paroi, cela implique que $\phi_0 \rightarrow \bar{x}$; la condition inhomogène à l'infini étant satisfaite avec le premier terme il en résulte que $\phi_1 \rightarrow 0$, $\phi_2 \rightarrow 0$, uswusf.

▷ **Étape 3 : transfert des conditions limites.** On peut avantageusement **transférer** cette relation valable sur la paroi déformée sur la paroi non déformée (paroi plane parfaite) en exploitant la petitesse de la déformation. Cette opération s'effectue à l'aide du développement de Taylor de φ autour de $y = 0$:

$$0 = \mathcal{L}|_{y=\varepsilon f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(x))^n}{n!} \frac{\partial^n \mathcal{L}}{\partial y^n} \Big|_{y=0} \quad (4.13)$$

soit

$$0 = -\varepsilon f'(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(x))^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial x \partial y^n} \Big|_{y=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon f(x))^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} \Big|_{y=0} \quad (4.14)$$

Substituons l'expression du potentiel (4.8) dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned} 0 \simeq & -\varepsilon f'(x) (\varphi_{0,x}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1,x}(x, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,x}(x, 0)) \\ & -\varepsilon f'(x) \times \varepsilon f(x) (\varphi_{0,xy}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1,xy}(x, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,xy}(x, 0)) \\ & -\varepsilon f'(x) \times \frac{1}{2} \varepsilon^2 f(x)^2 (\varphi_{0,xyy}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1,xyy}(x, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,xyy}(x, 0)) \\ & + (\varphi_{0,y}(y, 0) + \varepsilon \varphi_{1,y}(y, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,y}(x, 0)) \\ & + \varepsilon f(x) (\varphi_{0,yy}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1,yy}(x, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,yy}(x, 0)) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 f(x)^2 (\varphi_{0,yyy}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1,yyy}(x, 0) + \varepsilon^2 \varphi_{2,yyy}(x, 0)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où l'on a employé la notation compacte ' x ' ou ' y ' pour désigner la différentiation.

En collectant les termes du même ordre, il vient :

$$\begin{aligned} 0 \simeq & \varphi_{0,y}(x, 0) + \\ & \varepsilon (-f'(x) \varphi_{0,x}(x, 0) + \varphi_{1,y}(x, 0) + \varphi_{0,yy}(x, 0)) + \\ & \varepsilon^2 (-f'(x) \varphi_{1,x}(x, 0) - f'(x) f(x) \varphi_{0,xy}(x, 0) + \varphi_{2,y}(x, 0) + f(x) \varphi_{2,yy}(x, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 f(x)^2 \varphi_{0,yyy}(x, 0)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

C'est-à-dire, pour les deux premiers ordres :

$$\begin{aligned} \text{à l'ordre 0 : } & \varphi_{0,y}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_0(x, y) = x \quad \text{comme attendu,} \\ \text{à l'ordre 1 : } & \varphi_{1,y}(x, 0) = f'(x) \quad \text{en se servant de } \varphi_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'ordre 1 dépend donc spécifiquement de la forme de la bosse. Remarquons que **celle-ci se manifeste via un terme de “soufflage/aspiration” sur l'ordre 1** ; en effet ce terme traduit le déplacement du fluide qui évite la bosse pour satisfaire la condition d'imperméabilité.

Il n'existe pas de solution explicite générale à ce problème, mais on peut néanmoins déterminer une représentation intégrale de la solution grâce à l'analyse de Fourier. Pour aller plus avant dans cette direction, considérons une bosse symétrique (on peut tout à fait lever cette hypothèse si nécessaire), de sorte que $f(x)$ soit une fonction paire. Ainsi $f'(x)$ ainsi que le potentiel φ_1 seront des fonctions antisymétriques de x , et la composante horizontale du champ de vitesse u_1 sera quant à elle symétrique. Cette antisymétrie suggère un développement du type :

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} a(k) \sin(kx) e^{-ky} dk \quad (4.18)$$

Le facteur $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ joue ici uniquement le rôle de facteur de normalisation, et permettra d'utiliser avantageusement la transformée de Fourier en sinus d'une fonction $h(x)$:

$$\hat{F}[h] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} h(x) \sin(kx) dx \equiv \hat{h}(k) \quad (4.19)$$

et son inverse

$$F[\hat{h}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} \hat{h}(k) \sin(kx) dk \equiv h(x) \quad (4.20)$$

Pour déterminer le poids spectral $a(k)$ il convient d'exploiter la condition limite :

$$\varphi_{1,y}(x, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} ka(k) \sin(kx) dk = f'(x), \quad (4.21)$$

C'est-à-dire

$$-ka(k) = \hat{F}[f'] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} f'(x) \sin(kx) dx \quad (4.22)$$

Ainsi :

$$\varphi_1(x, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{F}[f']}{k} \sin(kx) e^{-ky} dk \quad (4.23)$$

et finalement :

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_{x=0}^{\infty} f'(s) \sin(ks) ds \right) \sin(kx) e^{-ky} dk \quad (4.24)$$

▷ **Un exemple : la bosse gaussienne.** Considérons une bosse gaussienne telle que

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{et donc} \quad f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad (4.25)$$

On a dès lors

$$-ka(k) = -2\hat{F}[xe^{-x^2}] = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} xe^{-x^2} \sin(kx) dx \quad (4.26)$$

En utilisant un catalogue de transformées de Fourier (pour ma part j'utilise Mathematica!) on trouve une expression analytique pour cette intégrale :

$$-ka(k) = -2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} k e^{-\frac{1}{4}k^2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} k e^{-\frac{1}{4}k^2}. \quad (4.27)$$

On a alors le champ à l'ordre 1 qui s'écrit :

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}k^2} \sin(kx) e^{-ky} dk \quad (4.28)$$

Rappelons-nous que la quantité intéressante pour des problèmes d'érosion ou de couche limite est la vitesse horizontale u_1 . Celle-ci s'écrit :

$$u_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} k e^{-\frac{1}{4}k^2} \cos(kx) e^{-ky} dk \quad (4.29)$$

Notons au passage que l'on a fait apparaître la transformation de Fourier symétrique (en cosinus), en accord avec la symétrie attendue de u_1 .

En $y = 0$, cette quantité s'écrit :

$$u_1(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} k e^{-\frac{1}{4}k^2} \cos(kx) dk \quad (4.30)$$

Là encore, utilisons un formulaire ou Mathematica, et nous trouvons que cette intégrale peut se réexprimer à l'aide de l'intégrale de Dawson $F(x)$ comme :

$$u_1(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2 - 4xF(x)), \quad (4.31)$$

où

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy \quad (4.32)$$

Bibliographie

- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BERRY, M V 1971 The molecular mechanism of surface tension. *Physics Education* **6** (2), 79–84.
- BOYS, CHARLES VERNON 1890 *Soap-bubbles and the forces which mould them. Being a course of three lectures delivered in the theatre of the London institution on the afternoons of Dec. 30, 1889, Jan. 1 and 3, 1890, before a juvenile audience*. Reprinted by Thomas Y. Crowell Company (1962).
- DE GENNES, PIERRE-GILLES, BROCHARD-WYART, FRANÇOISE & QUÉRÉ, DAVID 2015 *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin.
- ELETTRO, HERVÉ, NEUKIRCH, SÉBASTIEN, VOLLRATH, FRITZ & ANTKOWIAK, ARNAUD 2016 In-drop capillary spooling of spider capture thread inspires hybrid fibers with mixed solid–liquid mechanical properties. *Proc. Natl Acad. Sci. U.S.A.* **113** (22), 6143–6147.
- FERRARI, FERNANDO BOCCHINO, WOLOSKER, NELSON, ROSOKY, RUBEN AIZYN, DIPPOLITO, GIUSEPPE, WOLOSKER, ANGELA MARIA BORRI & PUECH-LEÃO, PEDRO 2004 Natural history of stenosis in the iliac arteries in patients with intermittent claudication undergoing clinical treatment. *Revista do Hospital das Clínicas* **59** (6), 341–348.
- GOLDSTEIN, SYDNEY 1950 *Modern developments in fluid dynamics : an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes*. Clarendon Press.
- HINCH, E.J. 1991 *Perturbation Methods*. Cambridge University Press.
- DE LAPLACE, PIERRE SIMON 1805 *Traité de mécanique céleste. Supplément au livre X*. Courcier, Paris.
- LIGHTHILL, JAMES 1986 An informal introduction to theoretical fluid mechanics. *The Institute of Mathematics & its Applications Monograph Series, Oxford : Clarendon Press, 1986* .
- MARCHAND, ANTONIN, WEIJS, JOOST H., SNOEIJER, JACCO H. & ANDREOTTI, BRUNO 2011 Why is surface tension a force parallel to the interface? *Am. J. Phys.* **79** (10), 999–1008.
- MITTAL, RAJAT, NI, RUI & SEO, JUNG-HEE 2020 The flow physics of COVID-19. *J. Fluid Mech.* **894**.
- PRANDTL, LUDWIG & TIETJENS, OSKAR KARK GUSTAV 1957 *Applied hydro-and aeromechanics*. Dover publications.
- ROWLINSON, JOHN SHIPLEY 2005 *Cohesion : a scientific history of intermolecular forces*. Cambridge University Press.
- SONI, VISHAL, BILILIGN, EPHRAIM S., MAGKIRIADOU, SOFIA, SACANNA, STEFANO, BARTOLO, DENIS, SHELLEY, MICHAEL J. & IRVINE, WILLIAM T. M. 2019 The odd free surface flows of a colloidal chiral fluid. *Nature Physics* **15**, 1188–1194.
- TRYGGVASON, GRÉTAR, SCARDOVELLI, RUBEN & ZALESKI, STÉPHANE 2011 *Direct numerical simulations of gas–liquid multiphase flows*. Cambridge University Press.
- YOUNG, THOMAS 1805 An essay on the cohesion of fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **95**, 65–87.