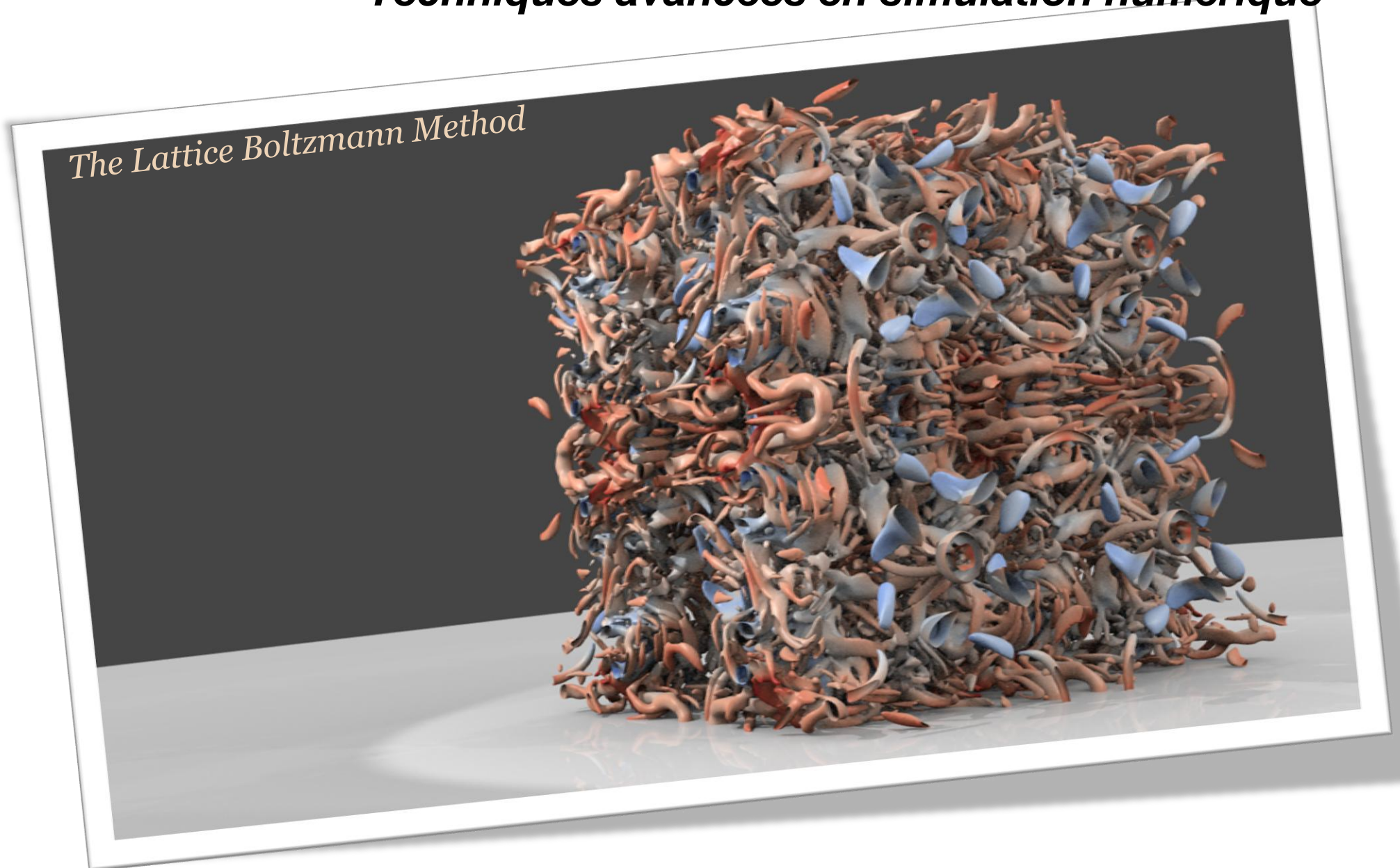


Master Mécanique des fluides: *Techniques avancées en simulation numérique*



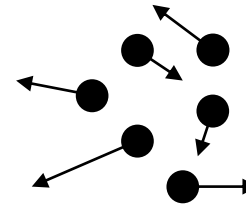
Introduction à la Méthode de Boltzmann sur Réseau (**L**attice **B**oltzmann **M**ethod)

- L'Equation de Boltzmann
- Le Développement de Chapman-Enskog
- Discrétisation des Vitesses
- Discrétisation en espace et en temps
- Modélisation de la Turbulence
- Conditions aux limites
- Les schémas classiques D2Q9 et D3Q27

L'équation de Boltzmann

Approche statistique d'un écoulement:

Fluide = ensemble de particules se
mouvant à des vitesses \mathbf{c} différentes



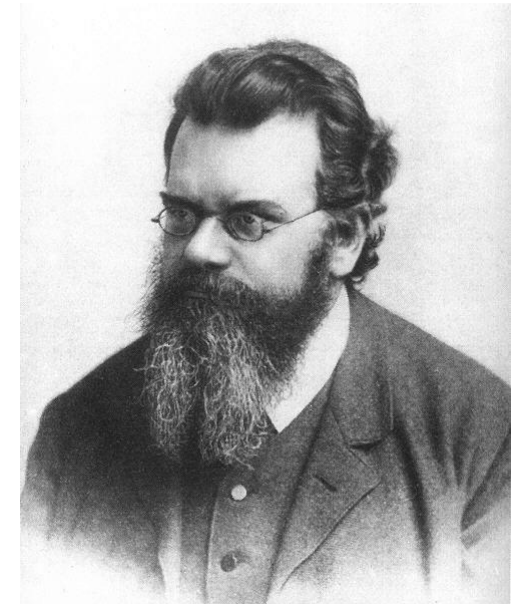
Formalisme de la physique statistique :

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$$

Densité de particules ayant une vitesse \mathbf{c} au point \mathbf{x} et au temps t .

L'évolution des fonctions de distribution f est régie par
l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$



Ludwig Boltzmann
1844-1906



L'équation de Boltzmann

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\text{Propagation des particules}} + \underbrace{\frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i}}_{\substack{\text{Forces} \\ \text{extérieures} \\ \text{négligées}}} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}}_{\text{Collision entre les particules}}$$

En prenant en compte toutes les valeurs de vitesses possibles pour les particules on peut facilement remarquer le lien entre la densité du fluide et les fonctions de distribution:

$$\rho = \int_{\mathcal{R}^3} f d\mathbf{c} \quad \text{Somme de toutes les fonctions de distribution en un point.}$$

De manière analogue, on a:

$$\rho \mathbf{u} = \int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{c} f d\mathbf{c} \quad \text{Vitesse en un point}$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} |\mathbf{c}|^2 f d\mathbf{c} \quad \text{Energie interne et énergie cinétique}$$

Ce sont les « **moments** » des fonctions de distribution

L'opérateur de collision: Effet statistique des collisions entre particules.

Historiquement Boltzmann défini cet opérateur en considérant les particules comme des sphères dures et en faisant certaines hypothèses de collision élastiques, il arrive aux résultats:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int d\mathbf{c}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| [\underbrace{f(\mathbf{c}'_1)}_{\text{Après collision}} \underbrace{f(\mathbf{c}'_2)}_{\text{Après collision}} - \underbrace{f(\mathbf{c}_1)}_{\text{Avant collision}} \underbrace{f(\mathbf{c}_2)}_{\text{Avant collision}}]$$

=> Forme complexe de l'opérateur. Les hypothèses de construction ne permettent pas la description des gaz denses (même l'air).... Pas très adapté à l'aérodynamique. Par contre, bon pour la description des gaz à faible densité (haute atmosphère).

Il faut trouver une autre façon de décrire l'effet des collisions.

L'équation de Boltzmann

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int d\mathbf{c}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| [\underbrace{f(\mathbf{c}'_1)}_{\text{Après collision}} \underbrace{f(\mathbf{c}'_2)}_{\text{Après collision}} - \underbrace{f(\mathbf{c}_1)}_{\text{Avant collision}} \underbrace{f(\mathbf{c}_2)}_{\text{Avant collision}}]$$

« Quel serait la forme des fonctions de distribution qui annule l'opérateur de collision ? »

« Que se passe-t-il lorsque le gaz est en équilibre thermodynamique (pas de collision entre particule) ? »

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = 0 \quad \longrightarrow \quad f^{eq}(\mathbf{c}'_1) f^{eq}(\mathbf{c}'_2) = f^{eq}(\mathbf{c}_1) f^{eq}(\mathbf{c}_2)$$

$$\ln f^{eq}(\mathbf{c}'_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}'_2) = \ln f^{eq}(\mathbf{c}_1) + \ln f^{eq}(\mathbf{c}_2)$$

On peut montrer que les fonctions de distributions à l'équilibre vérifient une propriété d'invariant de collision. Elles peuvent alors s'écrire sous la forme:

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \rho \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2k_B T} (\mathbf{c} - \mathbf{u})^2 \right]$$

C'est la distribution de Maxwell-Boltzmann

L'équation de Boltzmann

En 1954, Bathnagar Gross et Krook, proposent de définir un opérateur de collision très simple traduisant le fait qu'après une collision, les particules atteignent un équilibre en un temps caractéristique λ . Ils définissent alors:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{1}{\lambda}[f - f^{eq}] \quad \text{C'est l'opérateur de collision BGK}$$

Dans ces conditions, l'équation de Boltzmann s'écrit:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda}[f - f^{eq}]$$

C'est l'équation de Boltzmann-BGK

Le Développement de Chapmann Enskog

« Quel est le liens entre l'équation de Boltzmann-BGK et les équations de Navier-Stokes ? »

On peut commencer à répondre en constatant que:

$$\int_{\mathcal{R}^3} \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]} d\mathbf{c} \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

**Equation de continuité
(conservation de la masse)**

$$\int_{\mathcal{R}^3} \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]} \mathbf{c} d\mathbf{c} \longrightarrow \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + P_{ij})}{\partial x_i} = 0$$

$$\int_{\mathcal{R}^3} \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]} |\mathbf{c}^2| d\mathbf{c} \longrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u_i E + u_j P_{ij} + q_i)}{\partial x_i} = 0$$

Le Développement de Chapmann Enskog

$$P_{ij} = \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f d\mathbf{c} \quad q_i = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{c}$$

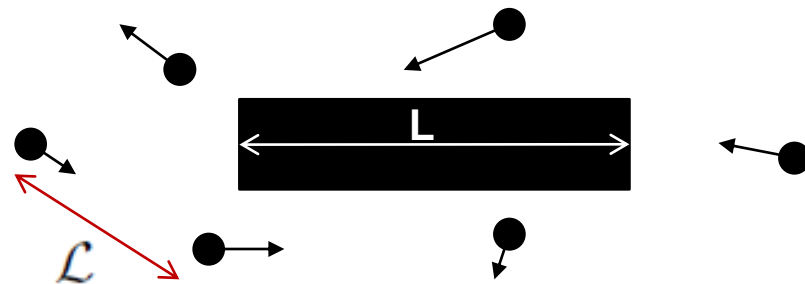
Problème: P et q dépendent des fonctions de distributions. On ne peut donc pas calculer explicitement leur valeur.

Pour ça, Chapman et Enskog propose une technique de fermeture en développant les fonctions de distribution en terme du nombre de Knudsen.

Le Nombre de Knudsen

$$\epsilon = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\lambda_0 \sqrt{r T_0}}{L}$$

Exprime le rapport entre le libre parcours moyen des particules et une dimension caractéristique.



Le libre parcours moyen défini la distance moyenne durant laquelle les particules ne subissent aucune collision

**$\epsilon > 1$ peu d'effet des collisions sur l'obstacle
 (gaz de faible densité)**

**$\epsilon < 1$ fort effet des collisions sur l'obstacle
 (gaz dense)**

Le Développement de Chapmann Enskog

On peut faire apparaître le nombre de Knudsen dans l'équation de Boltzmann-BGK en utilisant des grandeurs sans dimension:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{c}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{1}{\epsilon \tilde{\lambda}} [\tilde{f} - \tilde{f}^{eq}]$$

Développement en nombre de Knudsen des fonctions de distribution:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

On peut alors injecter ce développement dans l'équation de Boltzmann-BGK en gardant les terme d'ordre 0 et 1 et identifier les termes de même ordre en epsilon:

$$\begin{aligned} \text{Termes en } \epsilon^{-1} : \quad & f^{(0)} = f^{eq} \\ \text{Termes en } \epsilon^0 : \quad & \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(1)} \\ \text{Termes en } \epsilon^1 : \quad & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(2)} \end{aligned}$$

Le Développement de Chapmann Enskog

Ainsi à l'ordre 0 en epsilon on trouve

$$P_{ij}^0 = \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f^{eq} d\mathbf{c}$$

$$q_i^0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f^{eq} d\mathbf{c}$$

Que l'on peut expliciter puisqu'ils dépendent cette fois de la fonction d'équilibre (qui est connue), on trouve:

$$P_{ij}^0 = \rho r T \delta_{ij}$$

$$q_i^0 = 0$$

=> On retrouve les équations d'Euler !

Et à l'ordre 1 en epsilon on trouve

On trouve cette fois:

$$P_{ij}^{(1)} = P_{ij}^0 + \epsilon \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f^{(1)} d\mathbf{c}$$

$$P_{ij}^{(1)} = p \delta_{ij} - \tau \rho r T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \tau \rho r T \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$q_i^{(1)} = q_i^0 + \epsilon \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}^3} (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f^{(1)} d\mathbf{c}$$

$$q_i^{(1)} = -\frac{D+2}{2} \tau \rho r T \frac{\partial r T}{\partial x_i}$$

=> On retrouve les équations de Navier-Stokes en posant:

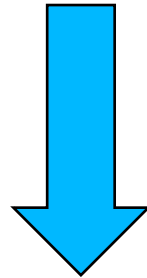
$$\mu = \tau \rho r T \quad \text{Coeff de viscosité}$$

$$\kappa = \frac{D+2}{2} \tau \rho r T \quad \text{Coeff de diffusivité thermique}$$

Le Développement de Chapmann Enskog

Conclusion:

- Les **équations d'Euler** sont une approximation de l'équation de Boltzmann-BGK à l'ordre 0 en nombre de Knudsen.
- Les **équations de Navier-Stokes** sont une approximation de l'équation de Boltzmann-BGK à l'ordre 1 en nombre de Knudsen.



***Les équations de la mécanique des milieu continues sont valables pour les faibles nombre de Knudsen
c'est-à-dire
pour les milieu suffisamment denses par rapport à la taille de l'objet étudié.***

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} [f - f^{eq}]$$

But: Résoudre numériquement l'équation de Boltzmann-BGK !

Problème: Les variables ***c_i*** représentent les vitesses des particules et varient dans un espace continue de dimension infini (toutes les valeurs réelles possibles)

Condition: Il faut donc restreindre l'espace des vitesses à un ensemble discret et fini !

Comment ?: En utilisant un développement polynomial de la fonction d'équilibre et une quadrature de Gauss. Il faut donc assurer l'égalité des moments continus et discrets:

$$\int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq} d\mathbf{c} = \frac{\rho(2rT)^{(a_1+a_2+a_3)/2}}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^N \frac{(u'_i)^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=1}^H \sigma_k(\xi_k)^{a_i} H_n(\xi_k)}_{\text{Solutions de la quadrature de Gauss-Hermite}} \right) \rightarrow \text{Nombre de vitesses discrètes}$$

Moments continus *Moments discrets*

Solutions de la quadrature de Gauss-Hermite

Les vitesses discrètes sont donc obtenues en résolvant la quadrature de Gauss. En pratique, il existe plusieurs solutions entraînant différentes valeurs de H

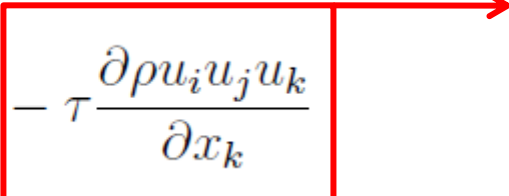
On obtient toujours H^D vitesses discrètes ou D est le nombre de dimensions d'espace.

✓ **H=5** : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 4 => 125 vitesses discrètes qui dépendent de la Température => Non acceptable.

Hypothèse isotherme:

✓ **H=4** : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 3 => 64 vitesses mais incompatibilité de maillage cubique.

✓ **H=3** : Egalité des moments jusqu'à l'ordre 2 => 27 Vitesses mais erreur sur les moments d'ordre 3:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \tau \frac{\partial \rho u_i u_j u_k}{\partial x_k}$$


$\mathcal{O}(M^3)$

Limitation à l'étude des écoulements à faible nombre de Mach (faiblement compressible)

Ainsi, dans l'hypothèse des *écoulements isothermes faiblement compressibles*, on peut résoudre l'équation de Boltzmann-BGK à vitesses discrètes:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} [f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}]$$

Où la fonction d'équilibre s'écrit:

$$f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_{\alpha}}{(rT)} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_{\alpha})^2}{2(rT)^2} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2(rT)} \right)$$

Les coefficients dépendent du modèle choisit.

Les moments se calculent alors facilement de façon discrète:

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$$

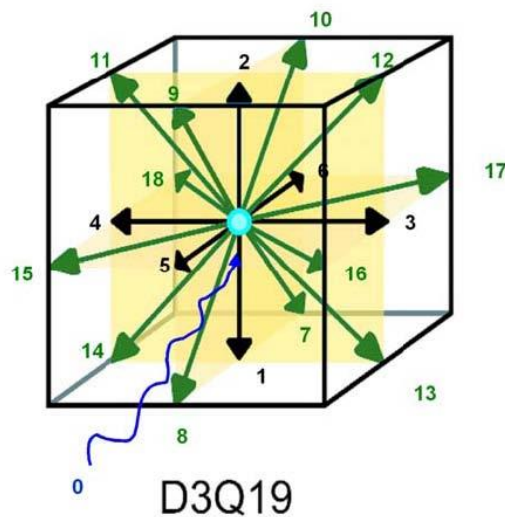
$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\mathbf{c}_{\alpha}|^2 f_{\alpha}$$

Discrétisation de Vitesses

En 3D, on peut montrer que certaines vitesses du modèles à 27 vitesses ne « servent » à rien. On peut alors utiliser 19 vitesses seulement, c'est le modèle **D3Q19** (3 dimensions et 27 vitesses)

Les coefficients sont alors donnés par:



α	1	2-7	8-19
$\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$ $(0, \pm 1, 0)$ $(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, \pm 1)$ $(\pm 1, \pm 1, 0)$ $(\pm 1, 0, \pm 1)$
ω_α	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Obtention d'un
réseau cubique de
vitesses: $\Rightarrow rT = 1/3$

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_\alpha \left(1 + 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha + \frac{9}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_\alpha)^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{u}|^2 \right)$$

Discrétisation de l'espace et du temps

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha - f_\alpha^{eq}]$$

Equation de Boltzmann-BGK à vitesses discrètes mais continue en espace et en temps.

Certaines études utilisent les méthodes de discrétisation classiques (schéma en espace et en temps avec différences finies ou volume finis). Mais on peut remarquer que le membre de gauche de l'équation est linéaire et représente une équation de propagation. Ainsi on peut utiliser une discrétisation dans laquelle l'espace et le temps sont couplés, traduisant le fait que les particules se déplacent à une vitesse caractéristique c . On obtient alors:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \underbrace{c_\alpha \Delta t}_{\text{couplage}}, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} [f_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha s, t + s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + c_\alpha s, t + s)] ds$$

Calcul de l'intégrale avec la méthode des trapèze
 + changement de variable

$$g_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t))$$

Equation de Boltzmann sur réseau (**LBM** pour **L**attice **B**oltzmann **M**ethod)

$$g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_\alpha(\mathbf{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] + O(\Delta t^3)$$

$$\tau_g = \tau + \frac{1}{2} \text{ et } g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}$$

Discrétisation de l'espace et du temps

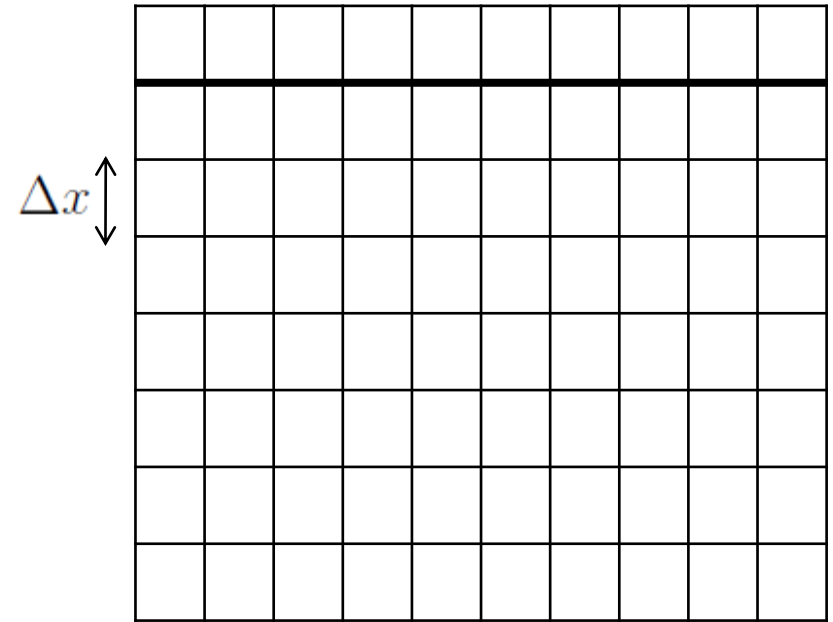
$$g_{\alpha}(\mathbf{x} + c_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) = g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - g_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)] + O(\Delta t^3)$$

En pratique, la LBM fixe un certain nombre de paramètres :

✓ La *vitesse du son* lié au réseau s'exprime sous la forme:

$$\hat{c}_0 = \sqrt{\widehat{rT}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

✓ Le fluide simulé possède donc un coefficient gamma égale à l'unité. Ceci n'est pas très restrictif sous les hypothèses de faible compressibilité



La LBM impose (par construction un maillage structuré uniforme) carré en 2D ou cubique en 3D

Discrétisation de l'espace et du temps

L'algorithme de la LBM s'écrit alors sous la forme:

$$g_{\alpha}(i + \hat{c}_{\alpha}, t + 1) = g_{\alpha}(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_{\alpha}(i, t) - g_{\alpha}^{eq}(i, t)) \quad \hat{\Delta}t = \hat{\Delta}x = 1$$

On choisit de faire une simulation dans un domaine L comportant Nx mailles d'un fluide de viscosité donnée nu. La vitesse du son est également fixé à c0.

On a donc:

$$\Delta x = \frac{L}{N_x}$$

$$c_0 = \hat{c}_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t \sqrt{3}}$$

Fixé

Permet de calculer



$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c_0 \sqrt{3}}$$

$$\hat{\tau}_g = \frac{\nu \sqrt{3}}{\Delta x c_0} + \frac{1}{2}$$

Conséquence: Le CFL est toujours constant et vaut:

$$CFL = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = \hat{c}_0 \frac{\hat{\Delta}t}{\hat{\Delta}x} = \hat{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sim 0.577$$

En pratique, le modèle BGK n'est pas utilisé pour les écoulements à hauts Reynolds car il souffre d'instabilité (Peu dissipatif).

Aujourd'hui de nombreux modèles de collision existent et permettent de circonvenir aux problèmes inhérents à BGK:

- * **Modèle MRT (2000)**: Chaque moment est relaxé à l'équilibre par un temps caractéristique propre. La collision se fait alors dans l'espace des moments.

- * **Techniques de Régularisation (2011)** basées sur une renormalisation de l'équilibre à chaque itérations.

- * **Moment centraux (2013)**: Translation des moments par rapport au référentiel du mouvement moyen.

- * **Cumulant (2016)**: Définition non linéaire des moments (cumulants). Chaque moments est définie par rapport aux ordres inférieurs.

Discrétisation de l'espace et du temps

Algorithme générale:

1. Initialisation du domaine physique (ρ et \mathbf{u}) et calcul des fonctions d'équilibre.
2. Initialisation des fonctions de distributions:

$$g_{\alpha} = f_{\alpha}^{eq}$$

3. Boucle temporelle

Boucle sur l'espace et sur les alpha

$$g_{\alpha}(i + \hat{c}_{\alpha}, t + 1) = g_{\alpha}(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_{\alpha}(i, t) - g_{\alpha}^{eq}(i, t))$$

Calcul des conditions aux limites

***Calcul des nouvelles variables
macroscopiques***

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}$$

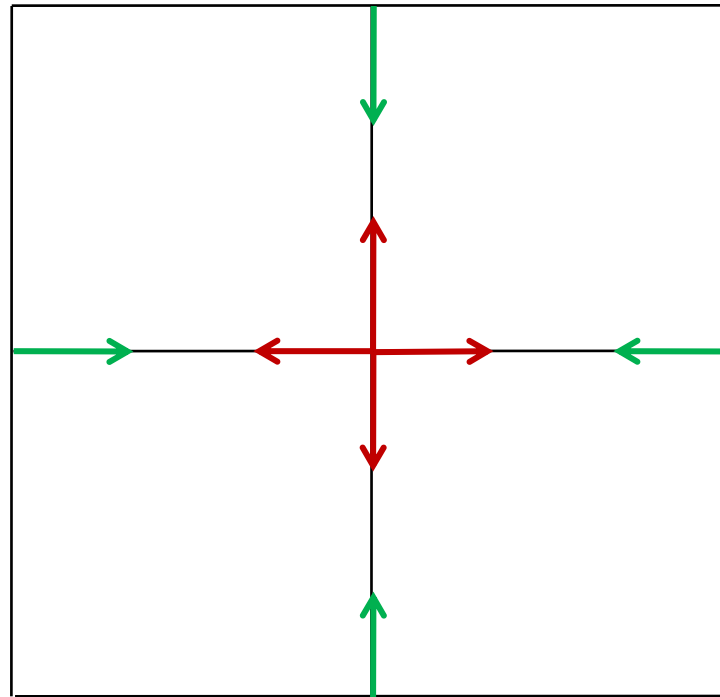
***Calcul de la nouvelle fonction
d'équilibre:***

$$f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega_{\alpha} \left(1 + 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_{\alpha} + \frac{9}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_{\alpha})^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{u}|^2 \right)$$

Les principales étapes de l'algorithme LBM sont la collision et la propagation:

Exemple avec 4 vitesses:

Itération n

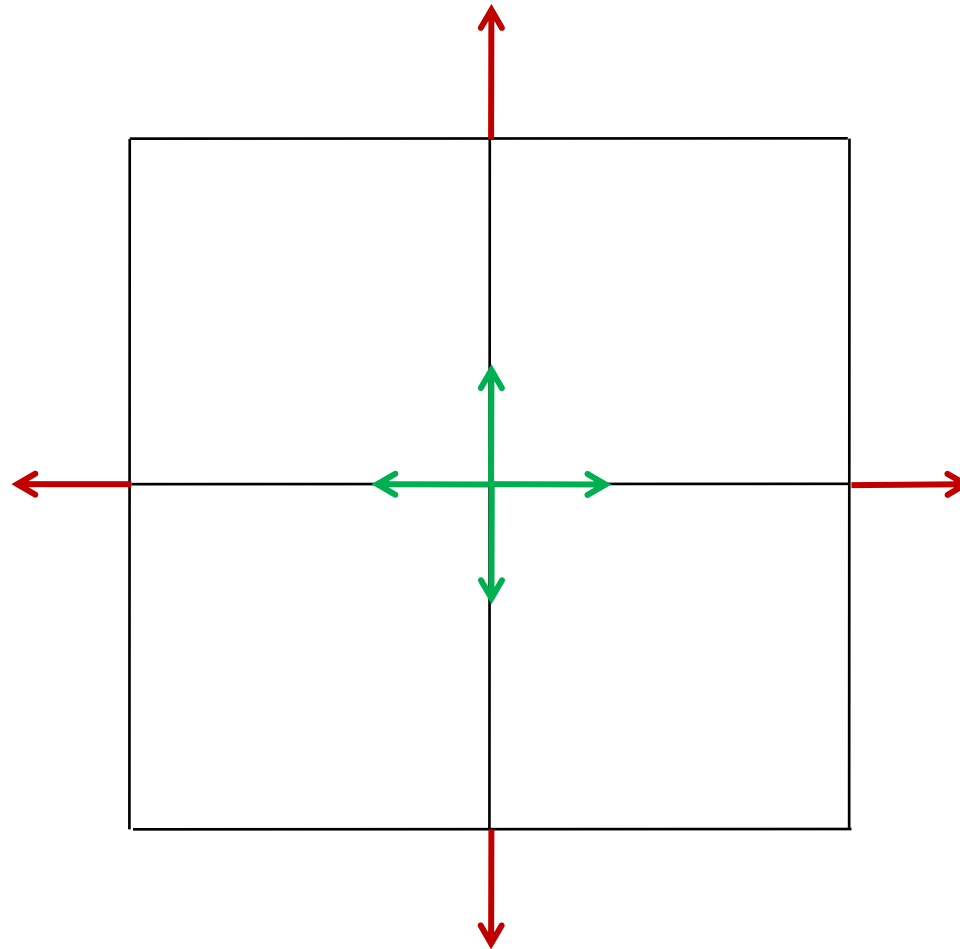


Toutes les grandeurs sont connues

Propagation

Exemple avec 4 vitesses:

Itération $n+1$

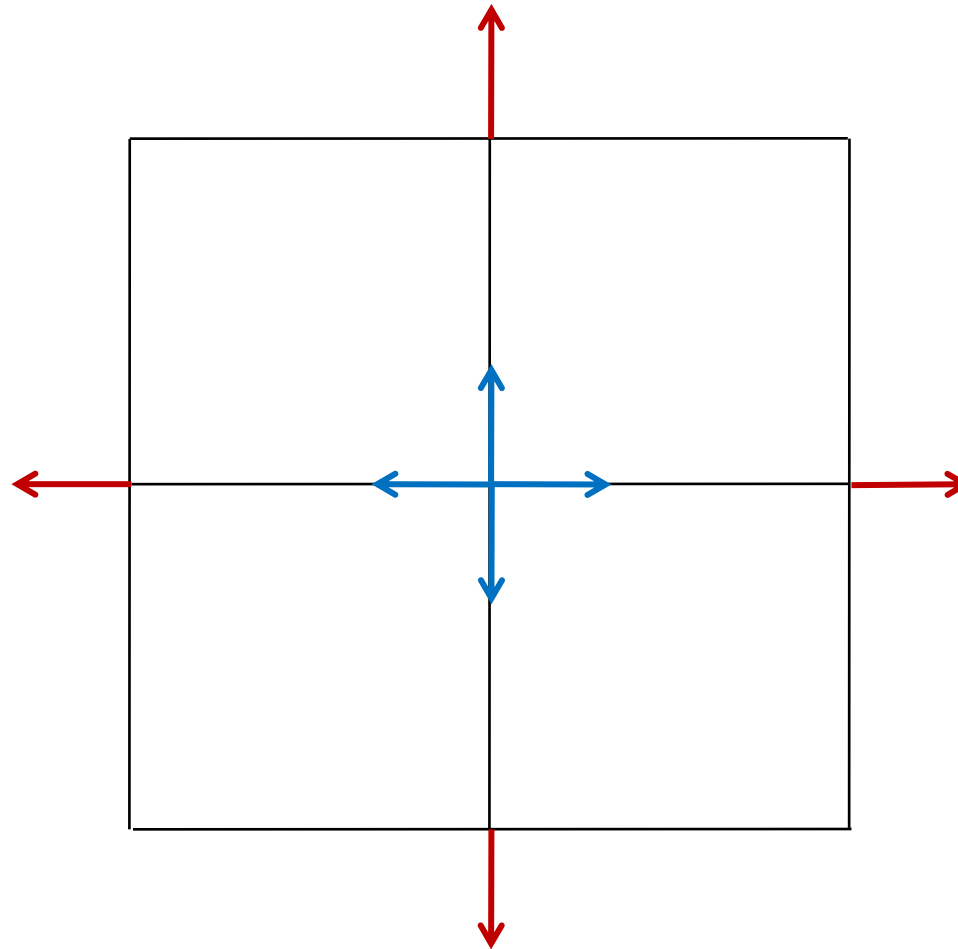


Propagation des fonctions sur les mailles voisines

Collision

Exemple avec 4 vitesses:

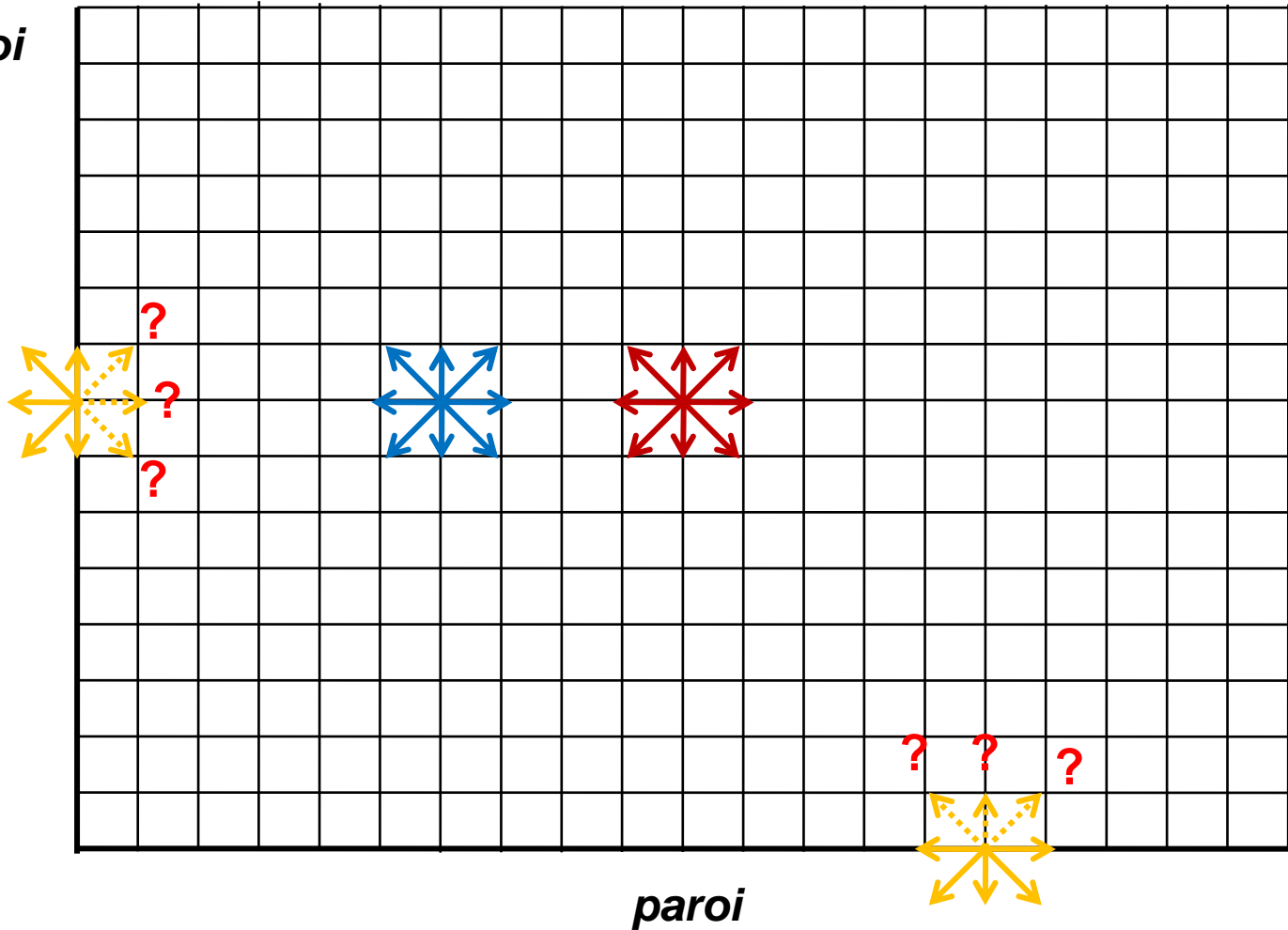
Itération $n+1$



Calcul de l'opérateur de collision en chaque point => Les nouvelles fonctions de distributions sont connues

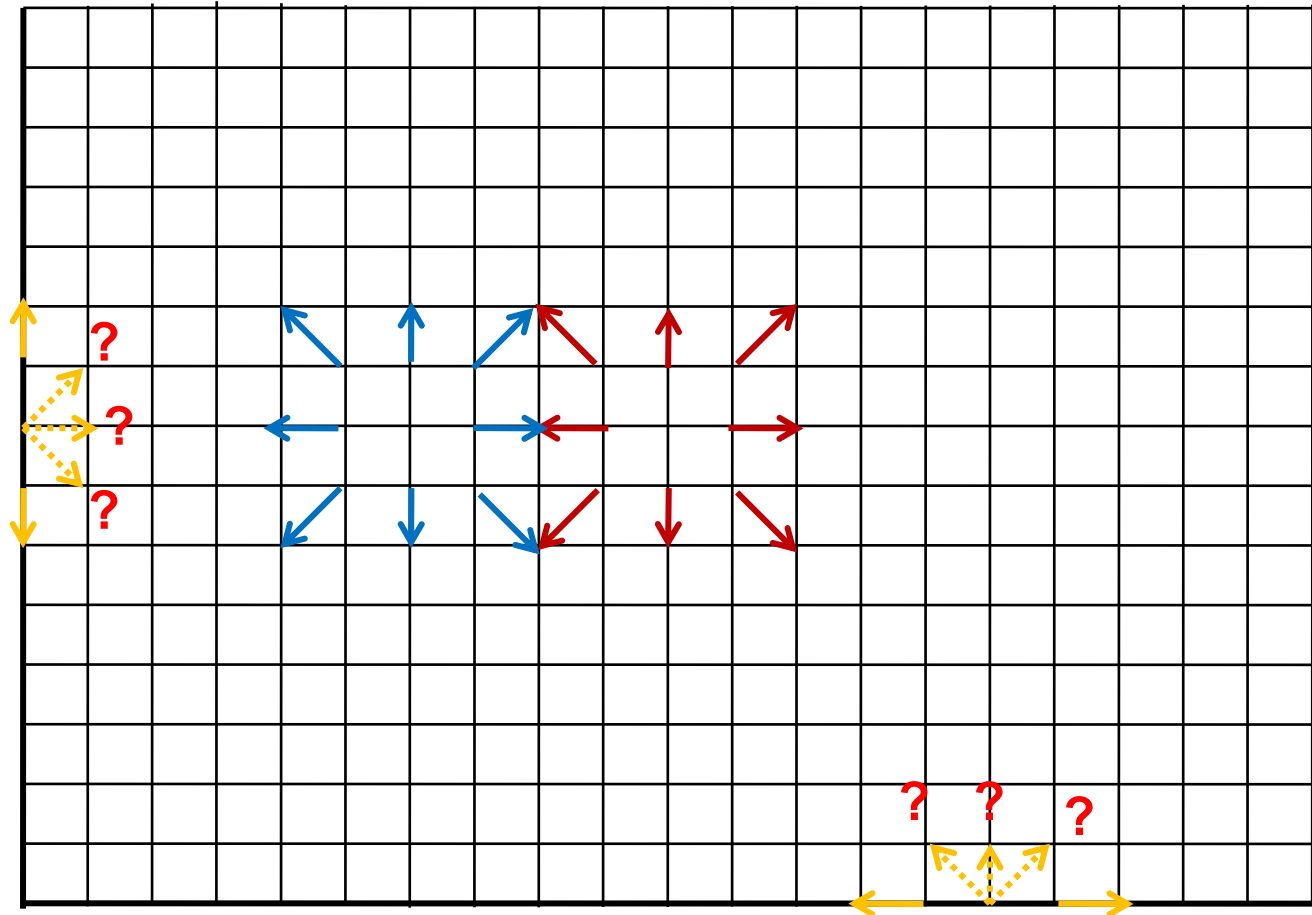
*Aux frontières du domaine de calcul (paroi, entrée, sortie...)
certaines fonctions de distribution sont inconnues.*

paroi



*Aux frontières du domaine de calcul (paroi, entrée, sortie...)
certaines fonctions de distribution sont inconnues.*

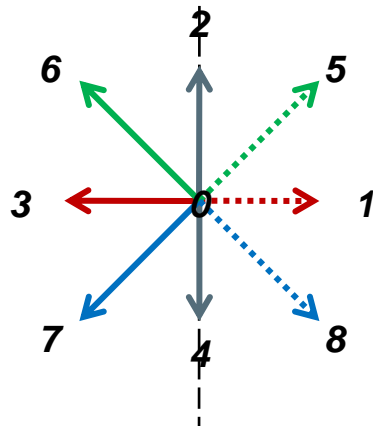
paroi



paroi

Plusieurs techniques sont utilisées:

1 – On remplace les fonctions inconnues par leur symétrique à la paroi avant la collision (**Bounce-back** method):

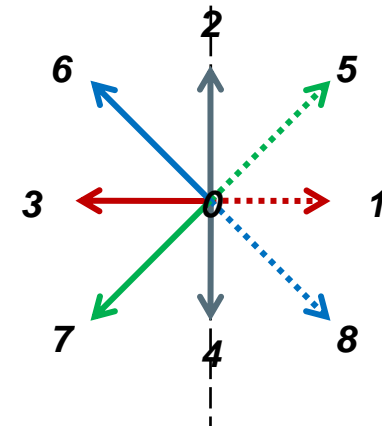


Rebond sans frottement:

$$1' = 3$$

$$5' = 6$$

$$8' = 7$$



Rebond avec frottement:

$$1' = 3$$

$$5' = 7$$

$$8' = 6$$

2 – Techniques utilisant une fonction d'équilibre modifiée à la paroi:

- On prend une valeur particulière de $\tau_g=1$ à la paroi:

$$g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha(i, t) - \frac{1}{\hat{\tau}_g} (g_\alpha(i, t) - g_\alpha^{eq}(i, t)) \xrightarrow{\hat{\tau}_g = 1} g_\alpha(i + \hat{c}_\alpha, t + 1) = g_\alpha^{eq}(i, t)$$

- Pour que le schéma reste juste, on défini une nouvelle fonction d'équilibre à la paroi prenant en compte les gradients amonts.

$$g_\alpha^{eq*}(x, t) = g_\alpha^{eq} + \epsilon \rho (r_\alpha c_{\alpha, i} c_{\alpha, j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + s_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k})$$

- On calcul les coefficients des cette nouvelles fonction d'équilibre grâce à l'égalité des moments.
- On calcul la nouvelle fonction d'équilibre en fixant par exemple une vitesse nulle à la paroi.

3 – Techniques type *immersed-boundary*:

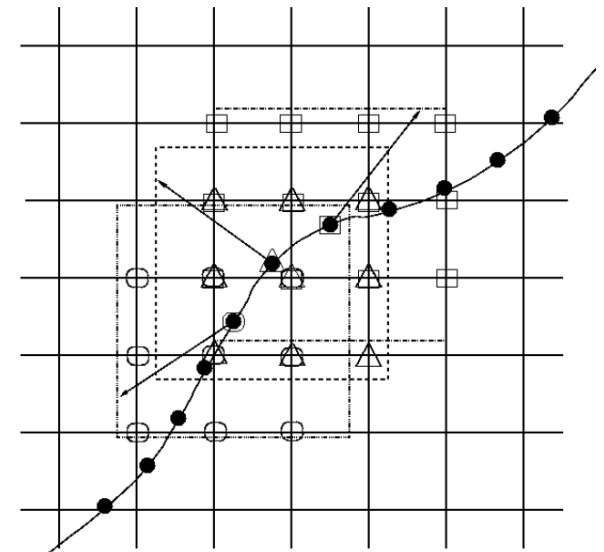
On ajoute un terme dit de « forçage » à l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \boxed{\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{e}} f} = \frac{1}{\tau} (f^{(eq)} - f)$$

Avec: (Guo et al. 2002)

$$F_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \omega_i \left[\frac{\mathbf{e}_i - \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^4} \mathbf{e}_i \right] \cdot \mathbf{f}_{ib}$$

Le terme de forçage est calculé en fonction de la condition au limite à imposer et appliqué au points voisins de la paroi.



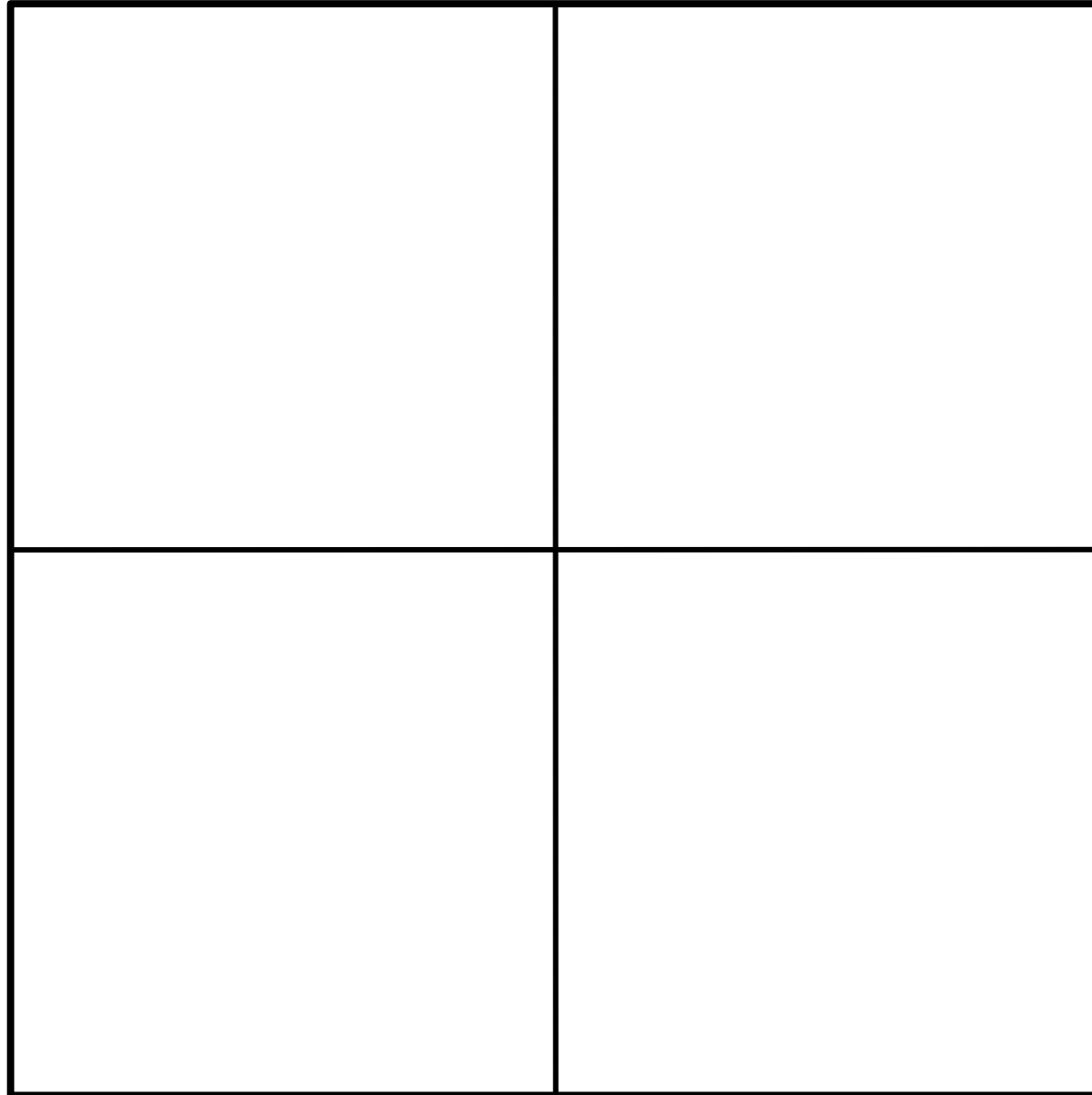
Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:

Principe:

- ✓ Diviser une zone en 4 zones égales (en 2D) ou 8 zones (en 3D).
- ✓ Deux zones adjacentes ont un rapport de taille 2 au maximum.

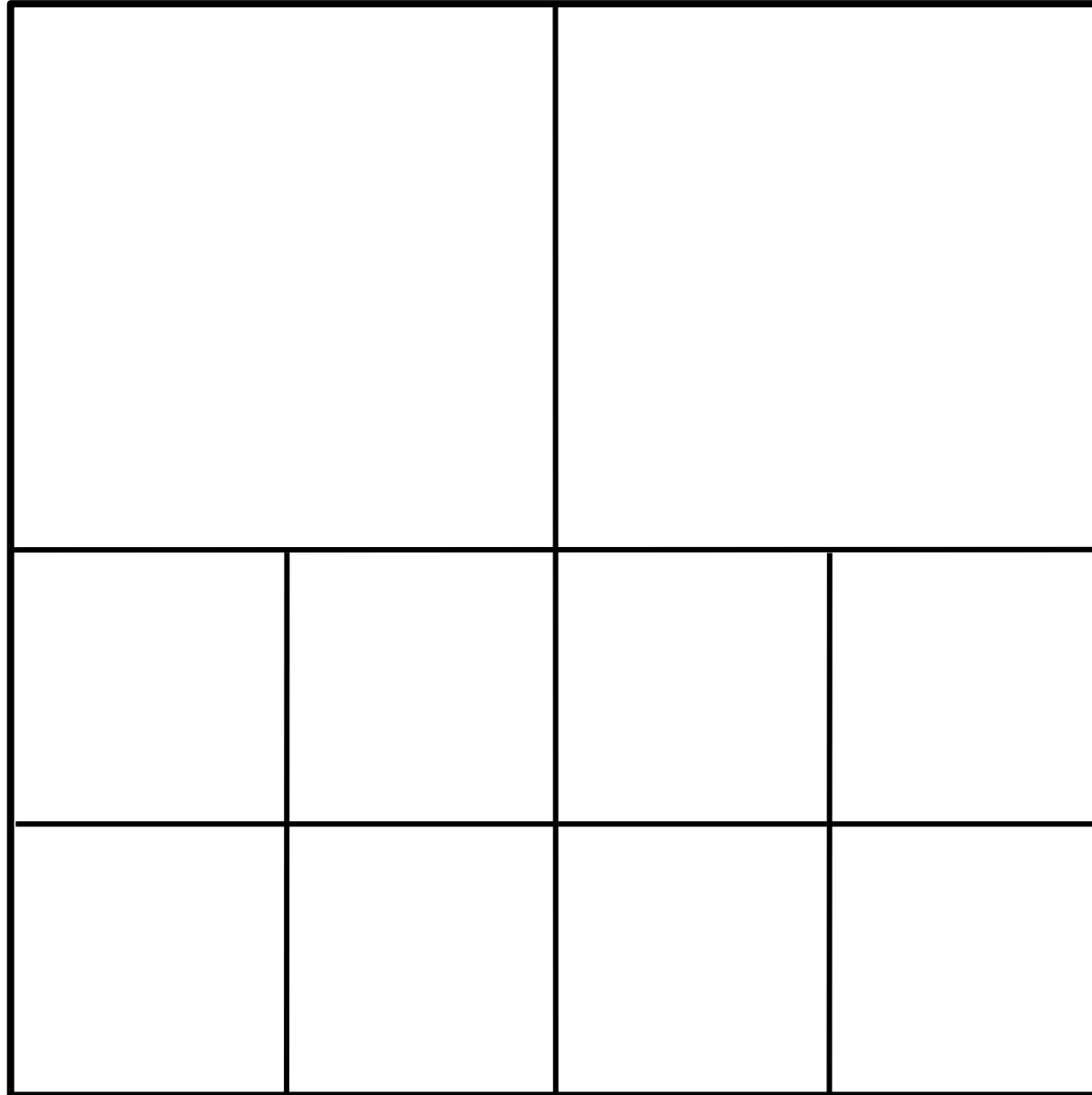
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



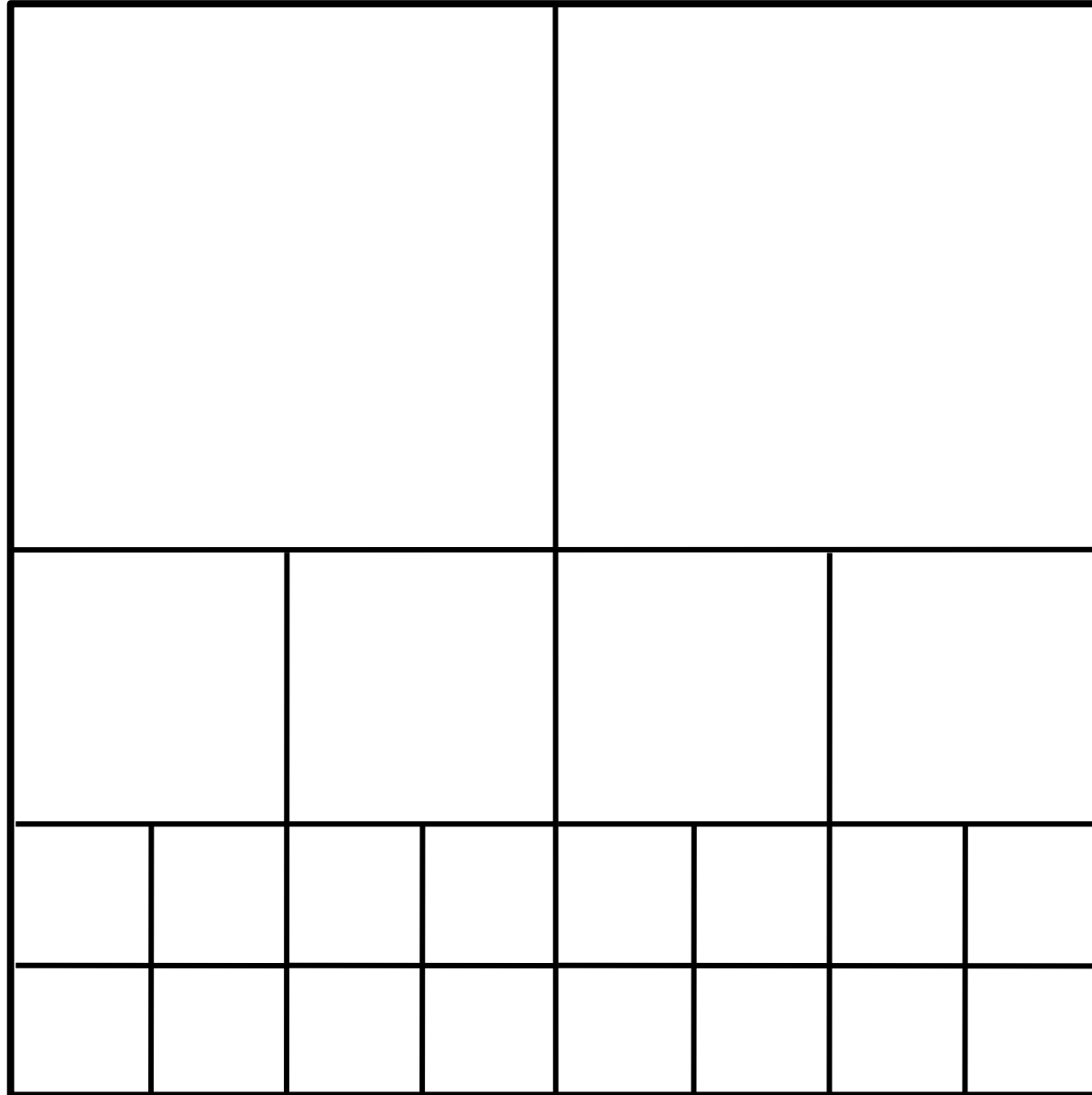
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



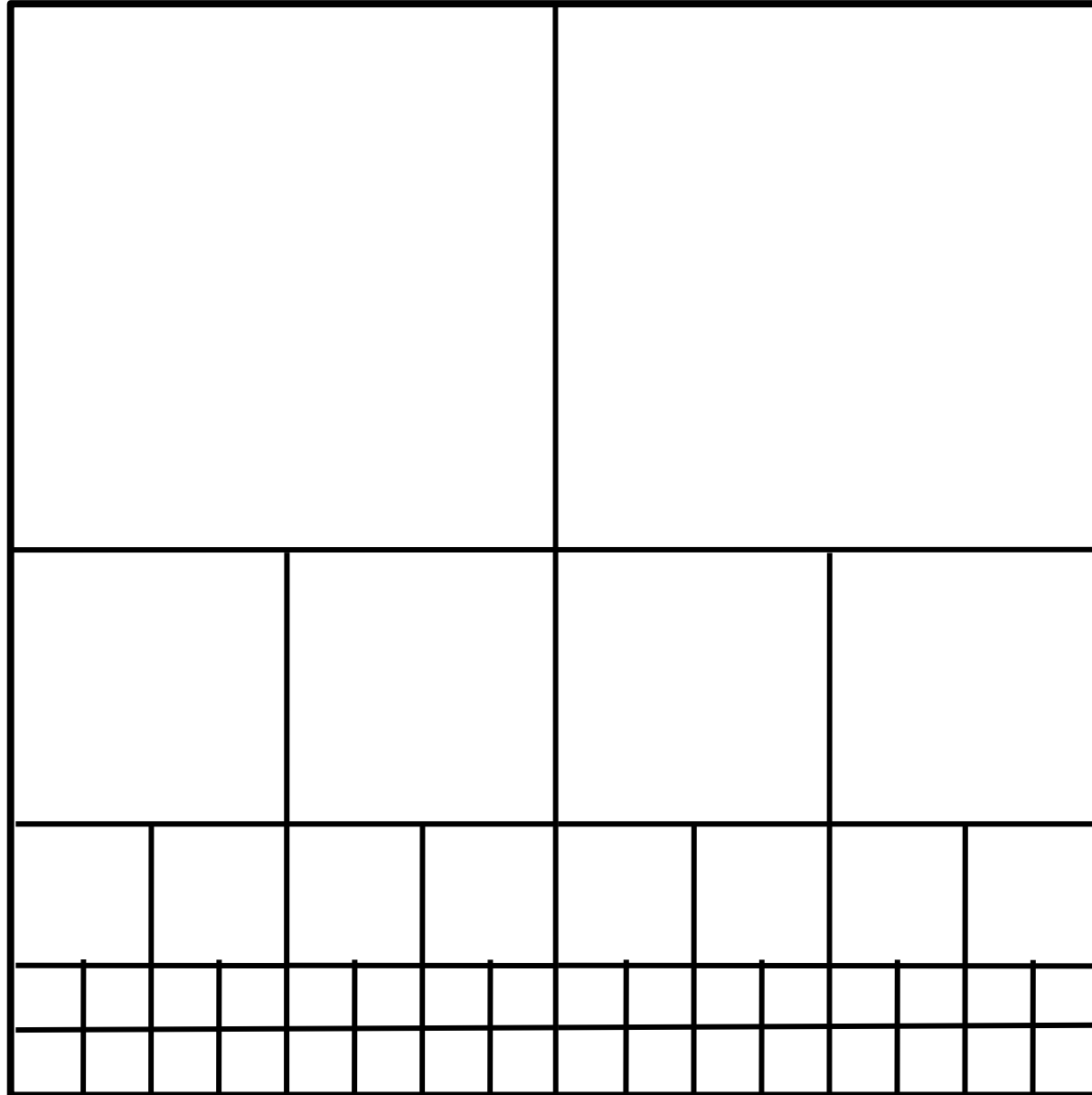
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



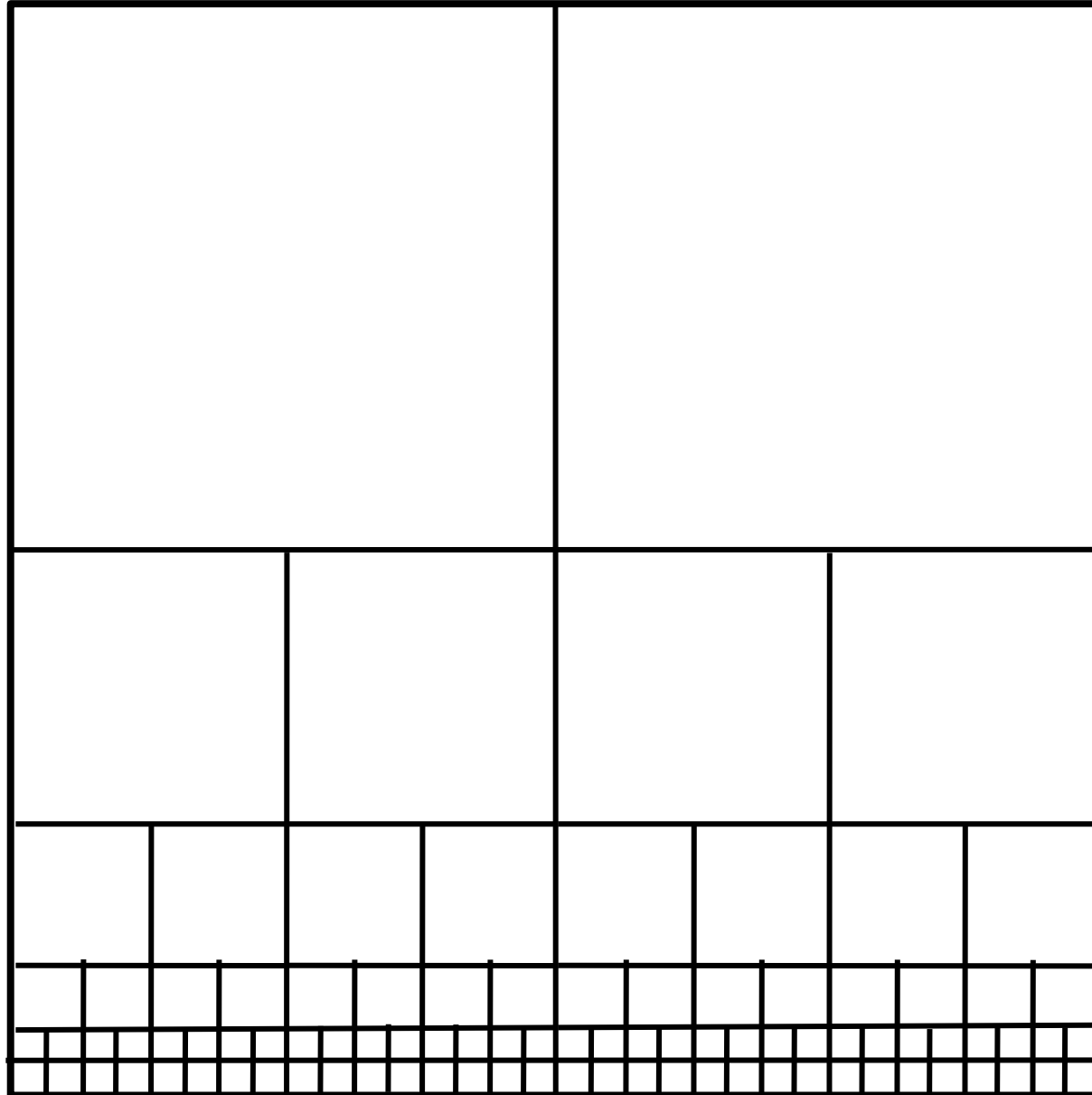
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



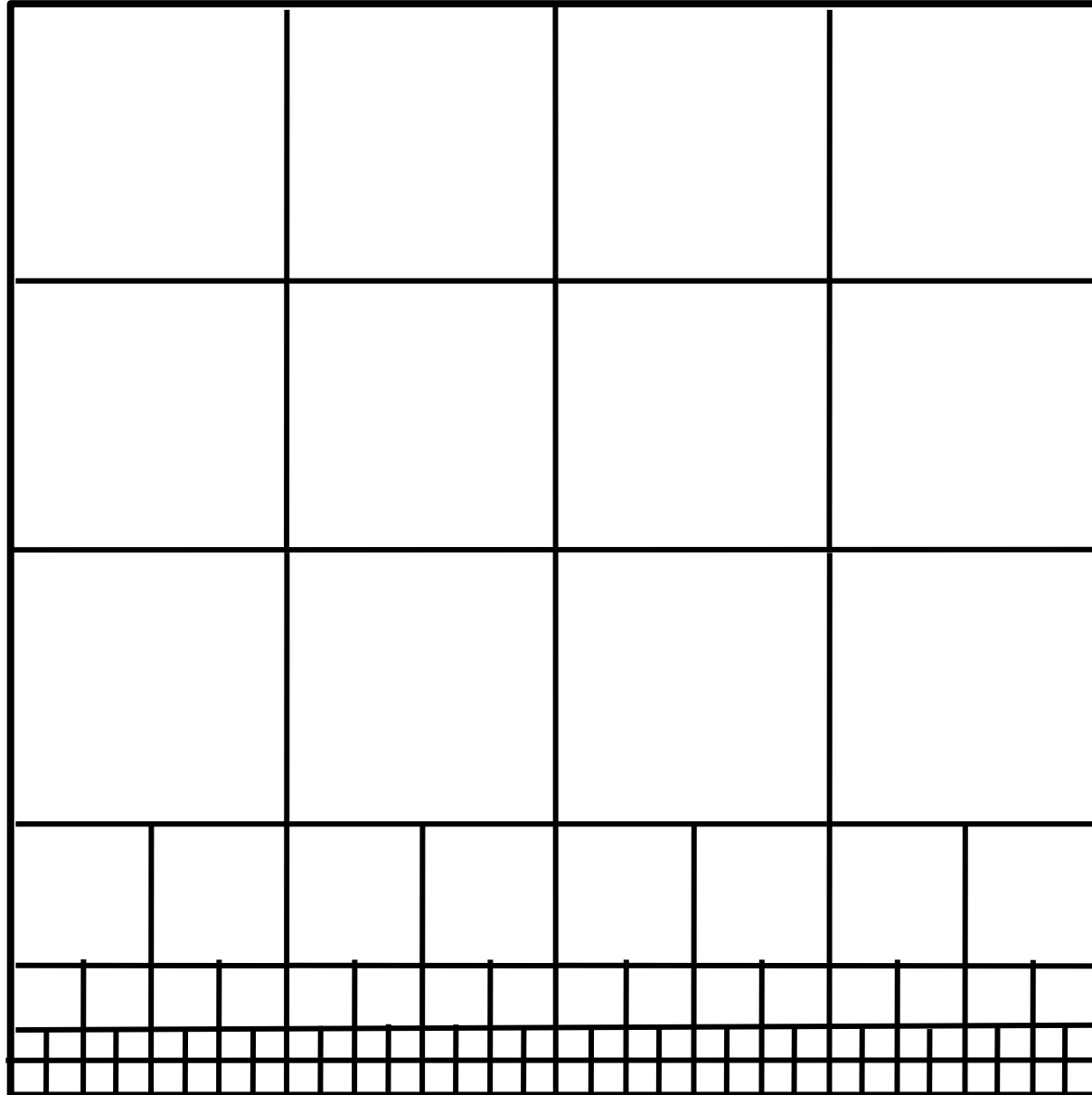
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



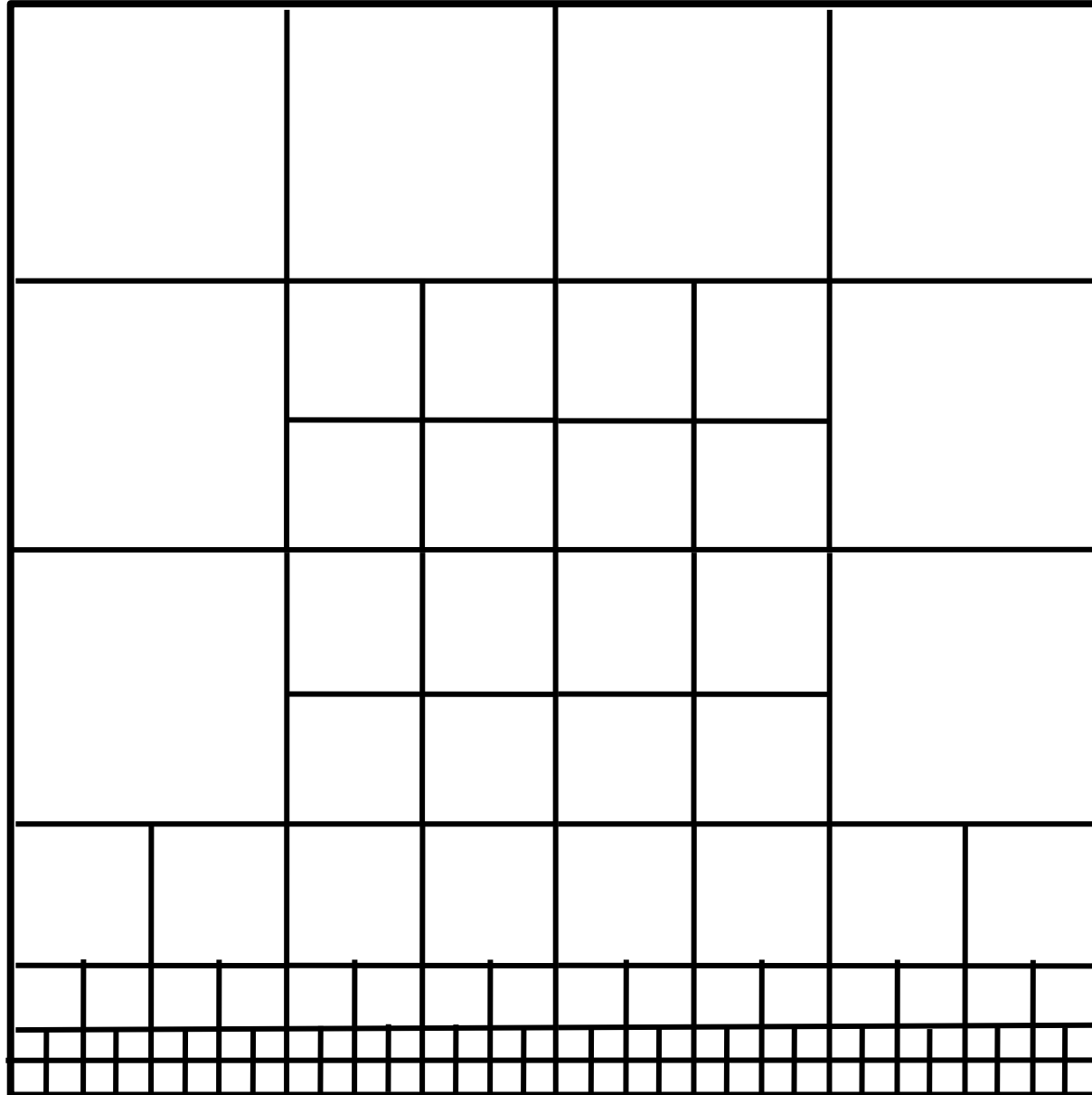
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



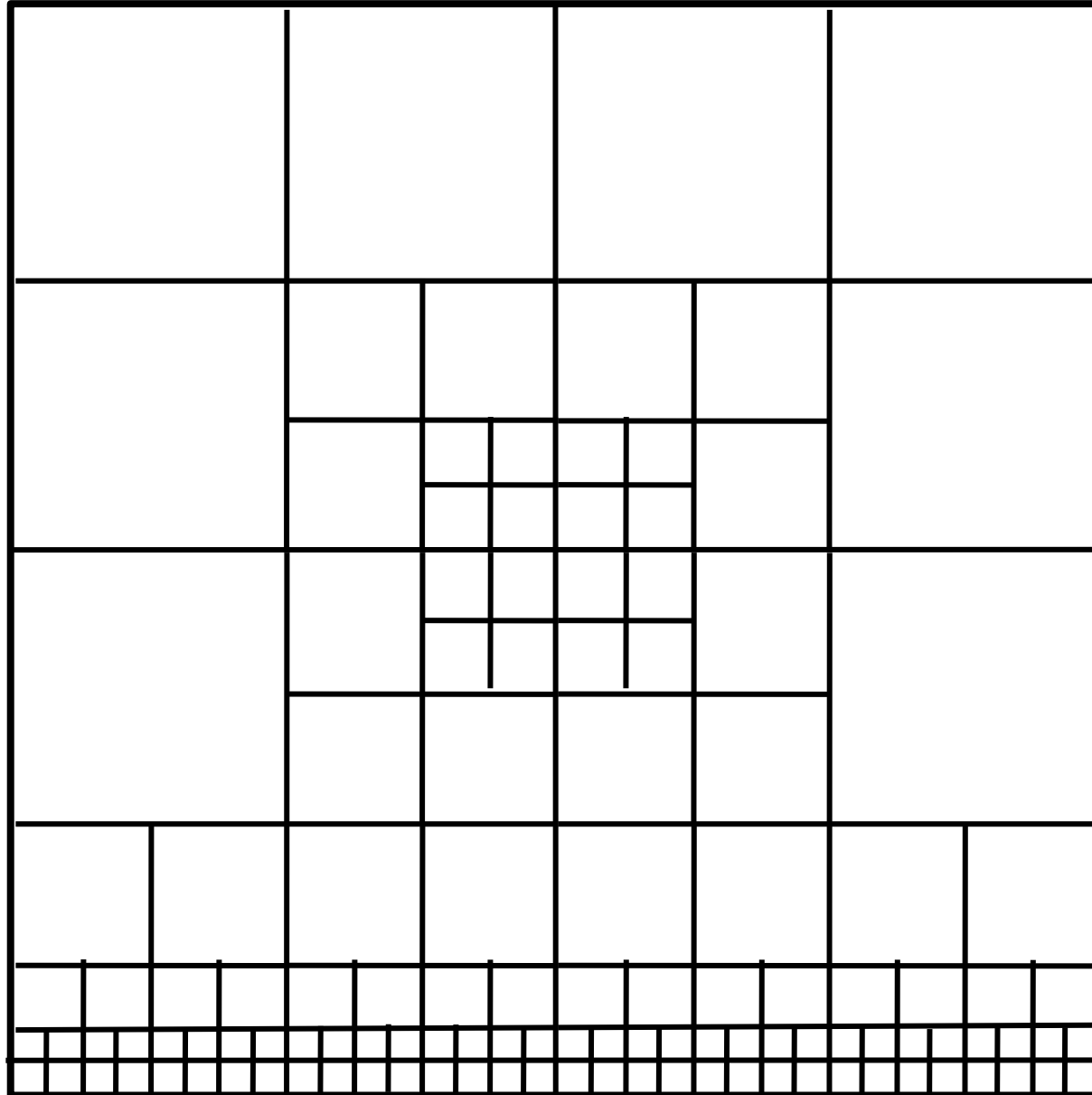
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



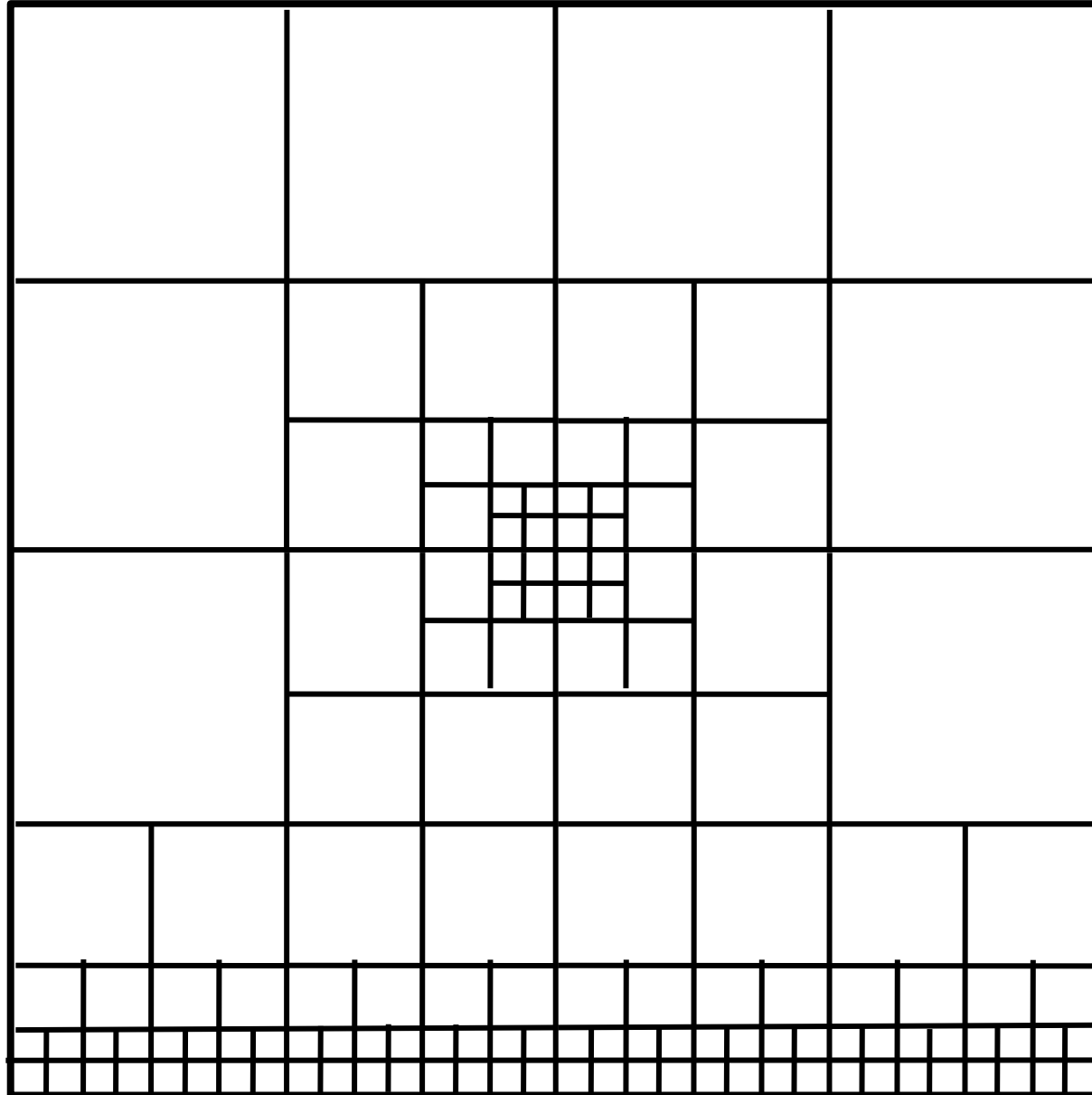
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



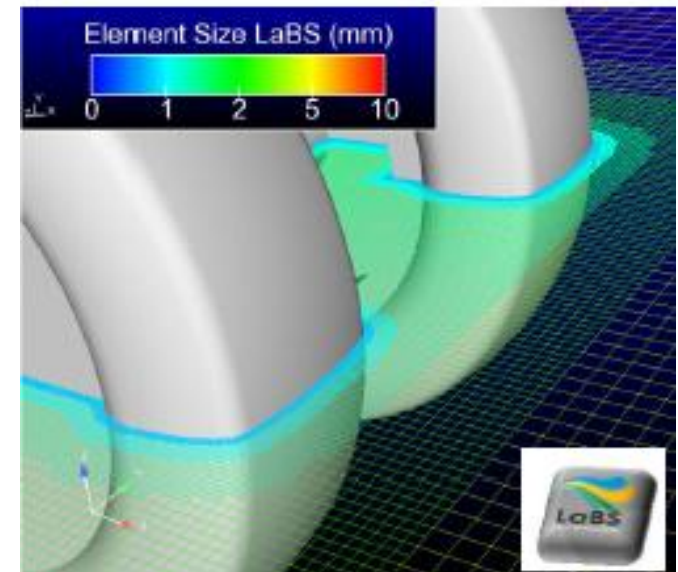
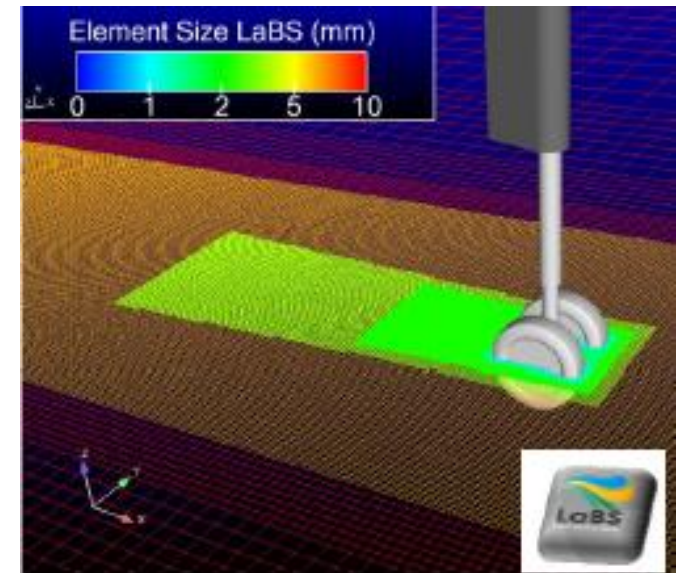
Raffinement des maillages

Les maillages LBM sont toujours structurés et utilisent souvent le raffinement en octree:



Raffinement des maillages

En pratique, on utilise des « Zones de résolutions » imbriquées les unes dans les autres en divisant la taille de maille par deux d'une zone à l'autre jusqu'à obtenir la zone de proche paroi qui possède les plus petites mailles (et donc le plus grand nombre de mailles).



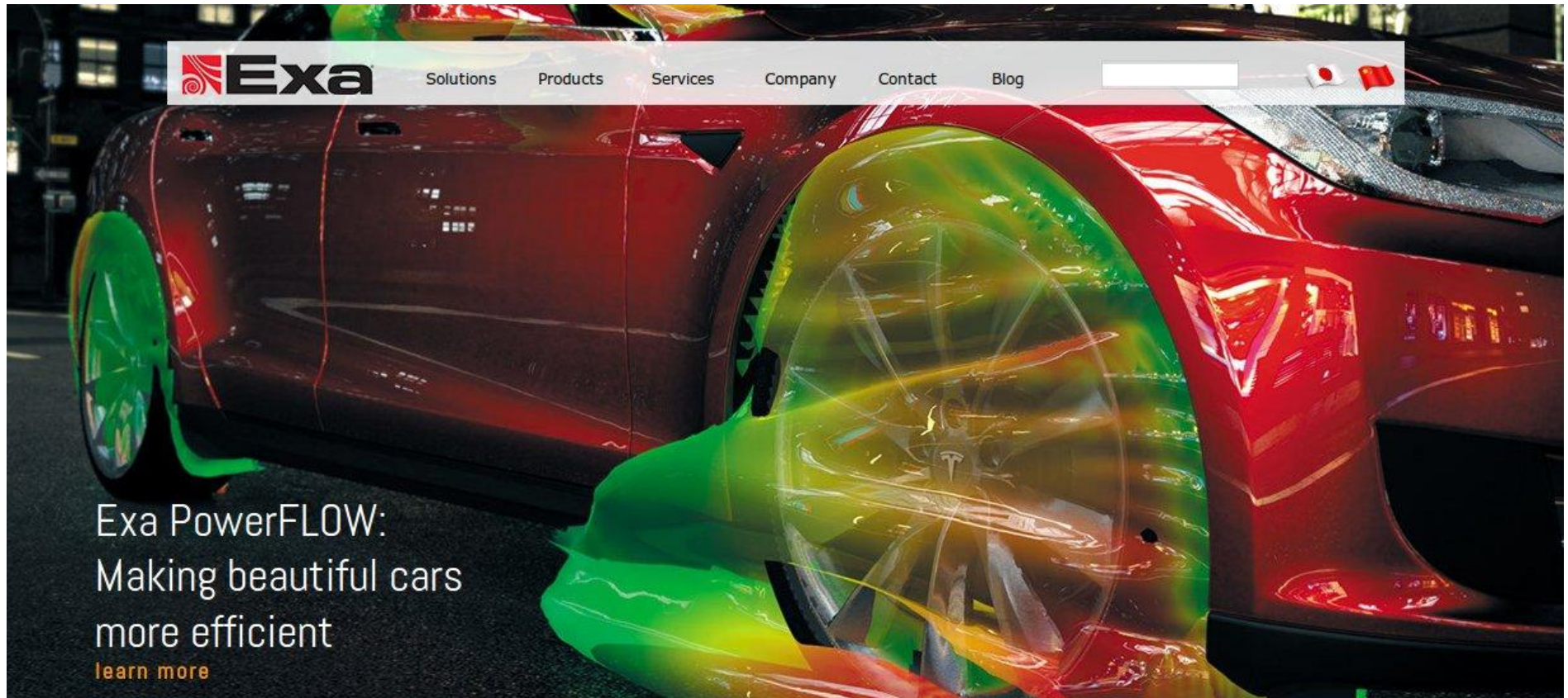
Avantages

1. *La LBM est d'ordre 2 en espace et en temps.*
2. *La LBM est un algorithme très rapide et très locale très facile à paralléliser.*
3. *Une seule équation générale permet de décrire l'évolution de toutes les grandeurs macroscopiques => Rapidité de calcul*
4. *Le schéma LBM est compressible et très peu dissipatif donc permet l'étude des phénomènes acoustiques et aéroacoustiques.*
5. *Les maillages sont structurés et uniforme donc simple a construire.*

Inconvénients

1. *Etant faiblement dissipative, la LBM peut être instable et particulièrement lorsque le paramètre $\tau u g$ est proche de 0.5 (cela correspond à une faible viscosité). En pratique certaines techniques permettent de stabiliser la méthode.*
2. *La LBM est limitée aux écoulements à faible nombre de Mach (<0.3) et isotherme.*

PowerFlow



1^{er} Code Industriel créé en 1995 par la société EXA basée à Lexington (MA-USA) et racheté par Dassault-Système en 2016.

Très utilisé par l'industrie Automobile (Ford, Audi, Peugeot,...)

Les codes industriels de la LBM:



PRODUCTS

LICENSING AND SERVICES

TECHNOLOGY

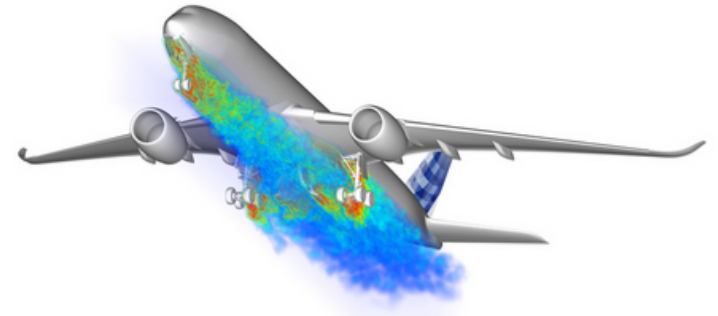
RESEARCH AND
DEVELOPMENT

SUPPORT CENTER

CONTACT US

Combining performance with accuracy

CLICK HERE



ProLB: high-fidelity CFD in exceptional turnaround times

ProLB is an innovative Computational Fluid Dynamics (CFD) software solution. Based on the Lattice-Boltzmann method, its successfully-validated solver performs inherently transient simulations of highly complex flows with a competitive turnaround time. **ProLB**'s accurate aerodynamic and aeroacoustic modeling allows engineers to make early design decisions that optimize and shorten the product development process.

Code créé en 2010 par des industriels et universitaires Français sous l'impulsion de Renault en collaboration avec Airbus, UPMC, CNRS et ENS. Il est aujourd'hui commercialisé par la société CS.



Les **Travaux Pratiques** sont sous forme de Notebook Jupyter. Les fichiers notebook sont à télécharger sur le moddle du cours. (fichier .ipynb)

Le principal avantage des notebooks est qu'ils peuvent contenir plusieurs type de contenu comme du python, du latex, du html.

Les compte-rendus de TP peuvent donc être rédigé sous forme de notebook (fichier .ipynb, .pdf ou html).



jupyter LBM_Pulse_Notebook Last Checkpoint: an hour ago (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Help Python 2

DynFluid Fluid Dynamics Laboratory ARTS ET MÉTIERS ParisTech le cnam

-- Introduction à la méthode de Boltzmann sur Réseau --

TP n°1

Etude d'un pulse de Pression

éléments de correction

simon.marie@lecnam.net

```
In [1]: #Import des modules utiles
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time

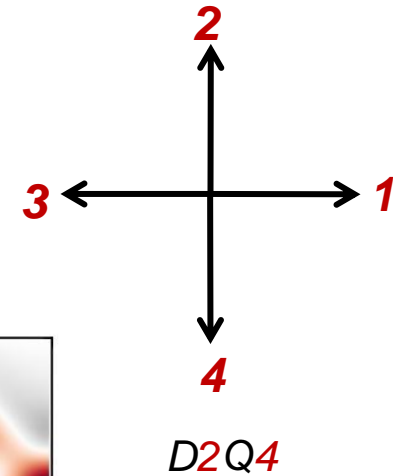
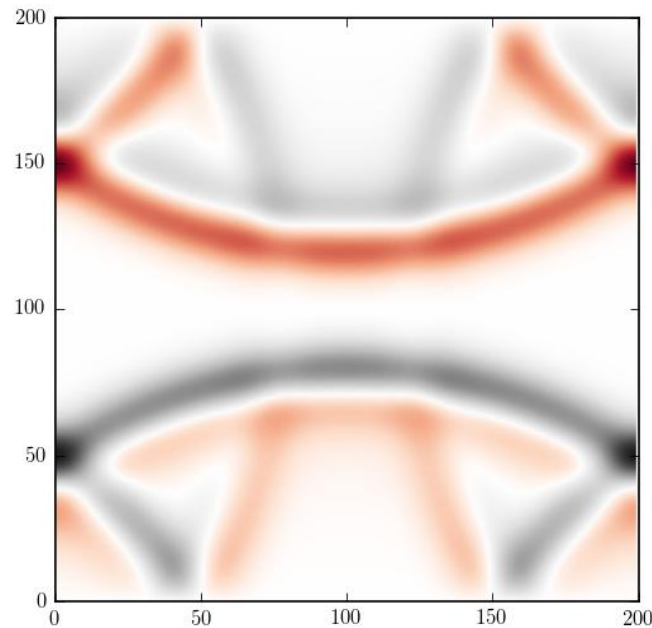
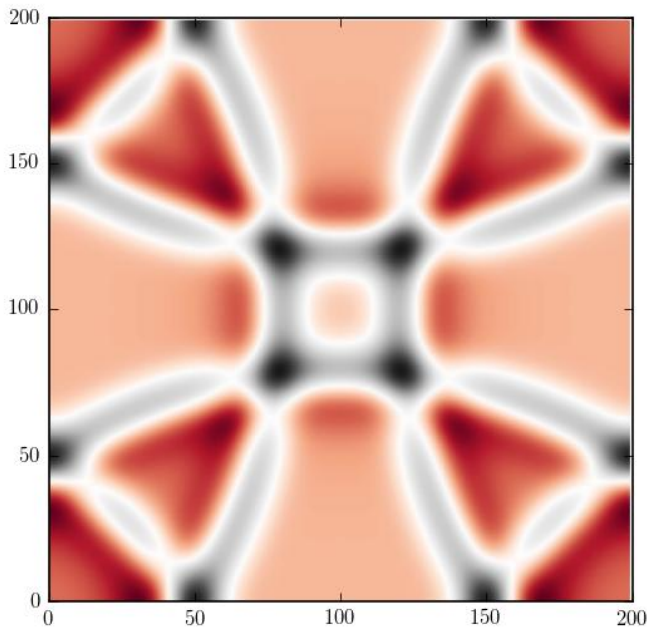
#Pour les animations
from matplotlib import animation
from JSAnimation.IPython_display import display_animation

%matplotlib inline
```

On se propose dans se TP de simuler numériquement l'apparition des franges d'interférences en aval de fentes d'Young acoustiques à l'aide d'un code Lattice Boltzmann D2Q4 écrit en Python

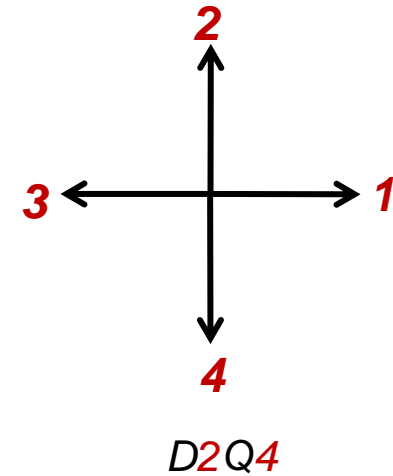
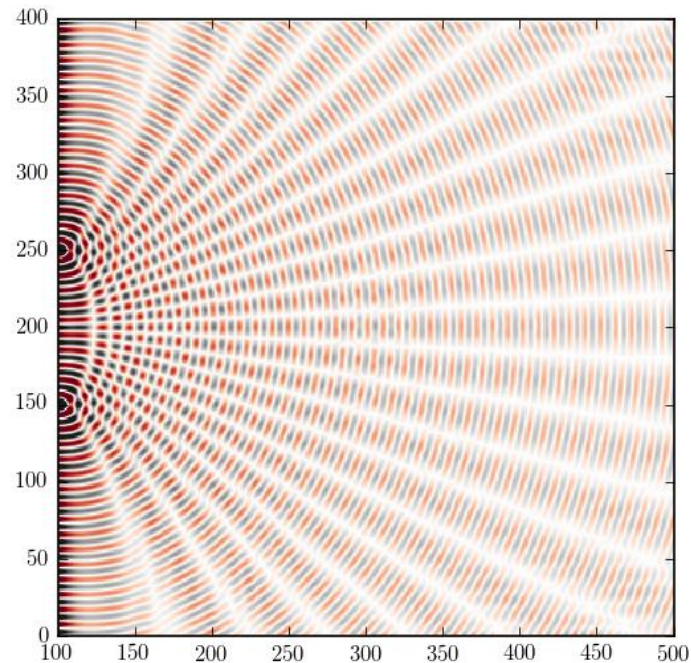
TP1: Le Pulse de Pression

Programmation du modèle D2Q4 pour la simulation d'un pulse de pression et comparaison avec solution analytique.



TP2: Les fentes d'Young.

Programmation du modèle D2Q4 pour la simulation du réseau d'interférences issue des fentes d'Young.



TP3: Le cylindre carré.

Programmation du modèle D2Q9 pour la simulation d'un écoulement autour d'un cylindre carré.

