Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 11 mai 2015

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé
La barème fourni est à titre indicatif

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours / 4 points

1. Donnez la Formule de Moivre. (*Attention à bien préciser les hypothèses*)
2. Enoncez le théorème fondamental sur la diagonalisation (condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable).
3. Donnez la définition de la convergence uniforme sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'une suite de fonctions f_n vers une fonction f, où $f_n, f : I \to \mathbb{R}$.
4. Donnez la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donnez le développement en série entière de $f(x) = e^x$ et précisez son rayon de convergence.

Exercice 1 / 4 points

On considère le système différentiel linéaire, à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ y' &= x + 4y \end{cases}$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions réelles inconnues.

1. Ecrire le système différentiel précédent sous forme matricielle $Y' = AY$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vecteur inconnu de dimension 2, A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Trouver les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
3. En utilisant la question précédente, trouver deux solutions linéairement indépendantes du système différentiel et en déduire la solution générale du système.

Exercice 2 / 4,5 points

Soit l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = f(x) \tag{1}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène associée à (1).
2. Déterminer une solution particulière de (1) pour $f(x) = 3e^x + \cos(x)$, en vous inspirant de la forme du second membre. En déduire l'ensemble des solutions réelles de (1) dans ce cas.
3. On considère maintenant le second membre $f(x) = e^x \cos(2x)$.

i) Peut-on chercher une solution particulière pour (1) de la forme du second membre ? Justifiez votre réponse.

ii) On souhaite trouver une solution particulière pour (1) avec la méthode de variation des constantes. Préciser le principe de la méthode et le système d'équations vérifié par les fonctions inconnues.
Résoudre ce système et trouver ensuite une solution particulière rélle, puis déduire l'ensemble des solutions réelles pour l'équation non-homogène (1).

Exercice 3 / 4,5 points

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$? Justifier votre réponse.

   Exprimer avec une fonction usuelle :

$$f(x) = 3\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}\right).$$

2. Soit l'équation différentielle $g' = 2(3-g)$, avec la condition initiale $g(0) = 0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{si } -R < x < R.$$

   Déterminer les coefficients a_n et exprimer simplement g.

Exercice 4 / 3 points + bonus

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, vérifiant :

$$\forall |x| < R \quad f(x) - xf(\lambda x) = 1.$$

1. Déterminer a_0 et a_1 .
2. Ecrire une rélation de récurrence entre a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$ et montrer que pour $n \geqslant 2$, $a_n = \lambda^{n(n-1)/2}$.
3. *Question bonus :* On note désormais f_λ la série entière utilisant les coefficients a_n déterminés ci-dessus et R_λ son rayon de convergence. Déterminer R_λ en fonction de λ.
   Remarque : Pour certains λ il est possible d'obtenir $R_\lambda = 0$, ce qui signifie qu'il ne peut alors pas exister de série f, vérifiant les premières lignes de l'énoncé.
4. *Question bonus :* Exprimer f_1 et f_{-1} en fonction d'une fraction rationnelle.