

Chapitre 1.

Principe de résolution approché

d'un problème d'élasticité linéarisé en statique

• 1- Formulation forte du problème

■ 1.1 Rappel des équations locales

- On considère une structure élastique qui occupe dans sa configuration de référence le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On convient de noter $\partial\Omega$ la frontière de Ω et de distinguer deux parties Γ_U et Γ_F telles que $\partial\Omega = \Gamma_U \cup \Gamma_F$, $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$ (parties disjointes). Un point de Ω est repéré par ses coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$

- La structure est constituée d'un matériau élastique homogène.

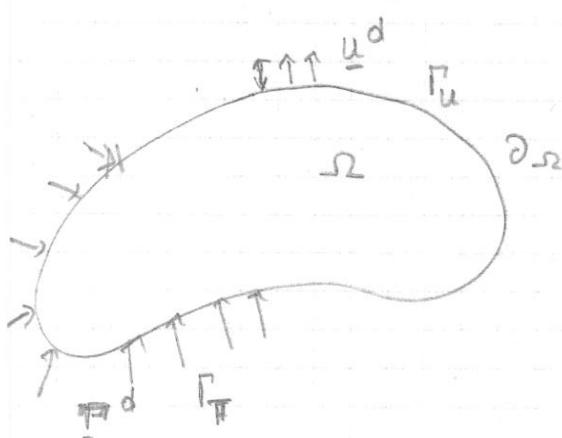
Elle est en équilibre sous l'action d'une densité massique d'effets

$f(x) = (f_1(x)f_2(x)f_3(x))$ généralement les effets de pesanteur et d'une densité superficielle d'effets $T^d(u)$ exercée sur la partie Γ_F de la frontière par le milieu environnant.

La structure est par ailleurs soumise à un déplacement imposé

$u^d(x)$ exercé par le milieu extérieur sur la partie Γ_U .

Le déplacement est nul si la structure est encastrée sur Γ_U .



- Sous ces sollicitations la structure se déforme. On suppose que les sollicitations sont telles que :

- les déplacements subis par les points de la structure sont petits devant les

dimensions de la structure

- les gradienti de déplacements (deformations) sont petits

Par ailleurs, on suppose que la structure ne subit aucune variation de température

On se place donc dans le cadre des transformations infinitésimales et des petits déplacements (hypothèse HPP). Les équations d'équilibre et loi de comportement peuvent être linéarisées et écrits sur la configuration non déformée de la structure.

Dans ce cadre, les inconnues du problème sont :

- le champ de déplacement $\underline{u}(x) \quad x \in \Omega$
- le champ de déformation linéarisée $\underline{\epsilon}(x) \quad x \in \Omega$
- le champ de contrainte $\underline{\sigma}(x) \quad x \in \Omega$, symétrique

qui satisfont les équations locales suivantes : (formulation forte)

$$\text{Équilibre} \quad \left| \begin{array}{l} \text{div } \underline{\sigma}(x) + \rho f(x) = 0 \\ \forall x \in \Omega \end{array} \right.$$

$$\text{Loi de comportement : } \underline{\sigma}(x) = \underline{\underline{\epsilon}}(x) : \underline{\epsilon}(x) \quad x \in \Omega$$

élastique linéaire

$$\text{Équation de compatibilité : } \underline{\epsilon}(x) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u}(x) + \underline{\nabla} \underline{u}(x)) \quad x \in \Omega$$

$$\text{Condition aux limites en déplacement : } \underline{u}(x) = \underline{u}^d(x) \quad x \in \Gamma_u$$

$$\text{en effort : } \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{n} = T^d(x) \quad x \in \Gamma_T$$

Dans ces équations, on distingue des équations

- purement "cinématique" portant sur le champ de déplacement (seulement, c'est la condition aux limites de déplacement $\underline{u} = \underline{u}^d$ sur Γ_u)
- purement "statique" au sens où elles portent uniquement sur le tenseur des contraintes, ce sont les équations d'équilibre et condition aux limites en effort imposé

■ 1.2 Espace des champs cinématiquement et statiquement admissibles

Compte tenu de la remarque précédente, il est intéressant de reformuler les équations du problème d'équilibre en introduisant les ensembles de fonctions suivants (associés au problème)

- $C(\underline{u}^d) = \{ \underline{v}(u) \text{ champs de vecteurs définis sur } \Omega, \text{ régulier et satisfaisant } \underline{v}(u) = \underline{u}^d(u) \quad u \in \Gamma_u \}$

$C(\underline{u}^d)$ est appelé l'espace des déplacements cinématiquement admissibles pour le problème. On y intègre outre la régularité les conditions aux limites cinématiques (en déplacement) imposées du problème.

En absence de condition aux limites en déplacement, cet espace se réduit à $C = \{ \underline{v}(u) \text{ régulier dans } \Omega \}$

La régularité, notion restée floue volontairement dans ce cours, indique que les champs $\underline{v}(u)$ sont à minima continus dans Ω (ou continus par morceaux) pour assurer la continuité du milieu lors de la déformation et également continûment différentiables 2 fois. En fait une régularité plus faible est suffisante (voir cours EDP L3.)

On notera de façon similaire l'espace

$C(0) = \{ \underline{v}(u) \text{ régulier vérifiant } \underline{v}(u) = 0 \quad u \in \Gamma_u \}$ l'espace des champs cinématiquement admissibles à zéro

Il s'agit en fait de l'espace vectoriel associé à l'espace affine $C(\underline{u}^d)$.

- $\mathcal{S}(T^d, f) = \{ \underline{\varepsilon}(u) \text{ défini sur } \Omega, \text{ régulier, symétrique}$
 $\text{div } \underline{\varepsilon}(u) + Pf(u) = 0 \text{ sur } \Gamma \}$
- $\underline{\varepsilon}(u) \cdot \underline{n}(u) = T^d(u) \quad u \in \mathcal{F} \quad \}$

$\mathcal{S}(T^d, f)$ est appelé l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles pour le problème considéré

Le problème d'équilibre peut être formulé de la façon suivante.

Trouver $(u, \underline{\varepsilon}) \in \mathcal{C}(u^0) \times \mathcal{S}(T^d, f)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}(u) = \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) \quad u \in \Omega \\ \text{avec } \underline{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u)^T(u) \quad u \in \Omega \end{array} \right.$$

ou encore le couple solution (déplacement, contraintes) du problème d'équilibre est le couple, qui parmi les champs admissibles en déplacement et en contraintes, est relié par la loi de comportement en tout point du milieu :

■ 1.3. Propriétés du tenseur de rigidité

- L'existence de l'énergie intime (voir cours HMC solides), la symétrie de $\underline{\underline{\alpha}}$ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ conduisent aux propriétés de symétrie suivantes sur le tenseur de rigidité :

$$\alpha_{ijkh} = \alpha_{ijkh} = \alpha_{ijhk} = \alpha_{khij} \\ (\text{symétrie } \underline{\underline{\alpha}}) \quad (\text{symétrie } \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (\text{existence de } \Psi)$$

- Le tenseur de rigidité est associé à une forme quadratique

définie positive :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \text{ symétrique} \\ \text{si } \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}} \end{array} \right.$$

Cette propriété vient également de l'existence de l'énergie intérieure

$$\left(\mathcal{P}\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ et } \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} (\mathcal{P}\Psi) \right)$$

On utilisera la notation de Voigt

$$\{\sigma\} = [A] \{\varepsilon\}$$

avec $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$

le tenseur $\underline{\underline{Q}}$ s'identifie alors à

$[A]$, la matrice de rigidité (6×6) qui compte tenu des symétries indiquées dépend de 21 coefficients indépendants (dans le cas le plus général de matériau anisotrope)

■ 1.4 Quelques remarques complémentaires

Pour que le problème d'équilibre soit mathématiquement bien posé il est nécessaire que

— les surfaces Γ_U et Γ_F soient d'intersection vide et constituent une partition de la frontière $\partial\Omega$ soit $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset \quad \Gamma_U \cup \Gamma_F = \partial\Omega$

- En tout point de $\partial\Omega$, on doit connaître :
 - soit 3 composantes du champ de déplacement $\underline{u} = u^a$
 - soit 3 " " " de vecteur contrainte $\underline{\underline{\tau}}.n = t^a$
- ou encore 3 données mixtes (ex: 2 composantes du déplacement indépendantes et 1 composante du vecteur contrainte scalaire)

ceci pour un problème posé sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

| Pour des problèmes en contraintes planes ou déformations planes qui sont reformulés sur des domaines bidimensionnels, le nombre de composantes données se réduit à 2 |

= si la mesure de $\Gamma_u \neq 0$; c'est à dire s'il existe au moins 3 points non alignés sur Γ_u avec des déplacements imposés connus : t_i (eventuellement nul) en ce pointi, le problème d'équilibre est dit de type 1.

On peut montrer que dans ce cas, (cours EDP L3)

le problème admet (sous réserve de régularité sur les données (U^0, T^0, f) suffisante) une solution unique en déplacement et en contraintes

= si la mesure de $\Gamma_u = 0$ et que les effets imposés par le milieu environnant T^0 sont connus en tout point x de $\partial\Omega$, le problème est dit de type 2.

On montre que dans ce cas, le problème n'a pas toujours de solution. Il existe une solution sous la condition nécessaire que le torseur des effets extérieurs est nul, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{E} f(u) dw + \int_{\partial\Omega} T^0 ds = 0 \\ \int_{\Omega} \underline{\Omega} M \wedge \mathbf{E} f(u) dw + \int_{\partial\Omega} \underline{\Omega} M \wedge T^0 ds = 0 \end{array} \right.$$

c'est à dire que le milieu est bien équilibré.

Sous cette condition, il existe une solution ($\underline{u}, \underline{\Gamma}$) au problème unique en contrainte, mais pas unique en déplacement.

$\underline{u} + \underline{\varrho}$ avec $\underline{\varrho}$ déplacement de corps rigide est aussi solution ($\underline{\varrho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{OM}$)

Le problème ne disposant pas de condition aux limites en déplacement imposé, les mouvements de corps rigide ne sont pas bloqués.

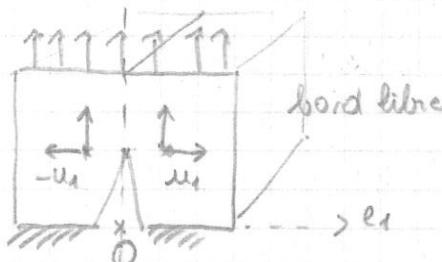
- Enfin si en tout point du bord, les données sont des données mixtes en déplacements et en effets, la solution du problème ne sera pas unique non plus en déplacement mais le sera en contraintes. On parle de problèmes de type 3. (Par exemple sur $\partial\Omega$ $u_3 = 0$ et $T_{13} = T_1^0, T_{23} = T_2^0$)

Pour ces problèmes, le déplacement est défini à un déplacement de corps rigide compatible avec les liaisons cinématiques près, soit $\underline{u} + \underline{\varrho}$ est solution avec $\underline{\varrho}$ déplacement de corps rigide tel que $\varrho_3 = 0$ sur $\partial\Omega$, par exemple.

Il faudra donc être très attentif à bien poser le problème en bloquant les déplacements de corps rigide au besoin avant de se lancer dans sa résolution numérique, faute de quoi on peut tomber sur des problèmes non inversibles ou encore exhiber une solution particulière parmi l'ensemble des solutions.

Un exemple de condition aux limites mixte.

per \rightarrow conditions de symétrie dans une structure qui présente



- une symétrie de chargement

- " " géométrique

- " " de comportement

exemple d'une symétrie / aux plans $x_1 = 0$ (structure isolope)

dans ce cas

$$\{ u_1(x_1, x_2, x_3) = -u_1(-x_1, x_2, x_3)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_2(-x_1, x_2, x_3)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(-x_1, x_2, x_3)$$

On peut dans ce cas réécrir le problème sur une partie de la structure (ce qui conduit à des économies en terme de résolution numérique) en posant le problème uniquement sur la partie de la pièce $x_1 > 0$.

la condition aux limites sur le plan $x_1=0$ s'écrit :

$$\{ u_1(0, x_2, x_3) = 0$$

$$\sigma_{12}(0, x_2, x_3) = 0$$

$$\sigma_{13}(0, x_2, x_3) = 0$$

soit

$$\{ u_N = 0 \text{ déplacement normal}$$

$$\sigma_T = 0$$

composante tangentielle
du vecteur contraintes

les conditions aux limites en effet proviennent du fait que

$$\epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) = -\epsilon_{12}(-x_1, x_2, x_3) \text{ idem en } \epsilon_{13}$$

et de la loi de Hooke pour un milieu isolope ($\sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12}$)

- Dans le cas d'une structure précontrainte, la loi de comportement devient :

$$\{ \underline{\sigma} = \underline{\Omega} : \underline{\epsilon} + \underline{\sigma}^0 \text{ où } \underline{\sigma}^0 \text{ est le tenseur de précontrainte}$$

- Dans le cas d'une structure soumise à un chargement thermique ou hydraulique, la loi de comportement devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \underline{\Omega} : (\underline{\varepsilon} - \alpha \Delta T - \beta \Delta m) \\ \text{avec } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \text{ tenseurs de dilatation thermique ou hydrique} \\ \text{d'ordre 2, } \Delta T = T - T_0 \text{ variation de température imposée} \\ \text{et } \Delta m = m - m_0 \text{ variation d'humidité} \end{array} \right.$$

Remarque: Cette loi se réécrit sous la forme d'une loi de comportement avec précontrainte : $\underline{\sigma} = \underline{\Omega} : \underline{\varepsilon} + \underline{\Pi}^0$

$$\text{avec } \underline{\Pi}^0 = -(\underline{\Omega} : \underline{\varepsilon}) \Delta T - \underline{\Omega} : \underline{\beta} \Delta m$$

2. Formulations faible et variationnelle du problème

2.1 Formulation faible du problème d'équilibre

Nous nous proposons de transformer le problème local ou formulation forte du problème d'équilibre sous une forme équivalente, duale (à l'image de ce qui a été fait dans le cours de MHC, chapitre des Puissances Virtuelles)

Il existe plusieurs variantes de cette formulation faible selon que le champ test utilisé est arbitraire ou bien cinématiquement admissible à zéro. Le principe d'obtention est identique :

On choisit ici $\underline{w}^0 \in C(0)$ espace des champs admissibles à zéro cinématiquement, et on multiplie l'équation d'équilibre par une fonction test $\underline{w}^0 \in C(0)$, puis on intègre sur Ω . En exploitant la formule de Green, on obtient alors la formulation suivante

\underline{u} solution $\in C(u^d)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\Omega} = \underline{\varepsilon}(\underline{w}^0) \, d\omega = \int_{\Omega} \underline{\sigma}_f(x) \cdot \underline{w}^0(x) \, d\omega + \int_{\Gamma_F} \underline{T}^0 \cdot \underline{w}^0(x) \, ds$$

$\forall \underline{w}^0 \in C(0)$

équivalente à la formulation forte.

ou encore $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0)$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\epsilon}(\underline{v} - \underline{u}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{\epsilon} f \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \, ds \\ \quad + \int_{\Gamma} \underline{T}^0 \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \, ds \\ \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \underline{u}$ solution des équations fortes

Cette dernière formulation s'écrit mathématiquement sous la forme

$$\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0)$$

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = l(\underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0)$$

$$\text{avec } a(\underline{u}, \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\epsilon}(\underline{w}) \, d\Omega$$

$$l(\underline{w}) = \int_{\Gamma} \underline{\epsilon} f \cdot \underline{w} \, ds + \int_{\Gamma} \underline{T}^0 \cdot \underline{w} \, ds$$

$a(\cdot, \cdot)$ est une application bilinéaire symétrique

$l(\cdot)$ est une forme linéaire

(On rentre dans le cadre du cours d'EDP de L3)

Sur le plan mécanique, on remarque que le terme

- $\int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\epsilon}(\underline{w}) \, d\Omega$ représente - la puissance des effets intérieurs dans un champ \underline{w} virtuel de déplacements admissible

$\int_{\Gamma} \underline{\epsilon} f \cdot \underline{w} \, ds + \int_{\Gamma} \underline{T}^0 \cdot \underline{w} \, ds$ la puissance des effets extérieurs dans un champ de déplacement virtuel admissible

On retrouve donc le P.P.V vu en cours de M7C. La démarche de construction de la formulation faible est plus générale et peut s'appliquer à tout problème elliptique (cf cours EDP L3)

preuve détaillée de l'équivalence :

1) soit \underline{u} solution de la formulation forte :

$\underline{u} \in \mathcal{C}(u^d)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{\Pi}(x) + \underline{e}_f(x)) \cdot \underline{w}(x) dx = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

$$\text{soit } - \int_{\Omega} \underline{\Pi}(u) : \underline{\nabla} \underline{w} dx + \int_{\partial\Omega} (\underline{\Pi}(u) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{w} ds + \int_{\Gamma} \underline{e}_f(x) \cdot \underline{w} dx = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

en utilisant la formule de Green et/ou d'intégration par

$$\text{partie} \quad \int_{\Omega} T_{ij,j} w_i dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} w_i) dx - \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j w_i ds - \int_{\Omega} T_{ij} e_j(w) dx \quad (\text{par symétrie de } \underline{\Pi})$$

$$\text{comme } \underline{w} \in \mathcal{C}(0) \quad \underline{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ de sorte que } \int_{\partial\Omega} \underline{\Pi} \cdot \underline{n} \cdot \underline{w} ds$$

$$= \int_{\Gamma} \underline{\Pi} \cdot \underline{n} \cdot \underline{w} ds = \int_{\Gamma} \underline{T}^0 \cdot \underline{w} ds \quad \text{car } \underline{\Pi} \text{ est la solution associée à } \underline{u} \text{ et donc vérifie la condition}$$

aux limites en effectuée sur Γ . On obtient donc :

$\underline{u} \in \mathcal{C}(u^d)$ et satisfait (en injectant la loi de comportement

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\Pi}(u) : \underline{\Omega} : \underline{\varepsilon}(w) dx = \int_{\Omega} \underline{e}_f \cdot \underline{w} dx + \int_{\Gamma} \underline{T}^0 \cdot \underline{w} ds \\ \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0) \end{array} \right.$$

2) Reciproque : \underline{u} vérifie la formulation faible

donc $\underline{u} \in \mathcal{C}(u^d)$ et donc $\underline{u} = u^d$ sur Γ_0 .

Par ailleurs en intégrant par parties (en sens inverse cette fois), on a :

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(u) : \underline{\Omega} : \underline{\varepsilon}(w) dx = \int_{\Omega} \underline{\Pi} : \underline{\varepsilon}(w) dx = \int_{\Omega} \underline{\Pi} : \underline{\nabla} \underline{w} dx$$

en posant $\underline{\Pi} = \underline{\Omega} : \underline{\varepsilon}(u)$, symétrique

$$\text{et donc } = \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} w_i) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\tau_{ij})}{\partial x_j} w_i dx$$

$$\text{d'où } \int_{\partial\Omega} \underline{\Pi} \cdot \underline{n} \cdot \underline{w}^0 ds - \int_{\Omega} \underline{\operatorname{div}} \underline{\Pi} \cdot \underline{w}^0 dx = \int_{\Omega} \underline{\rho f} \cdot \underline{w}^0 dx + \int_{\Gamma} \underline{I^d} \cdot \underline{w}^0 ds$$

$$\forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

soit $\int_{\Omega} (\underline{\Pi} \cdot \underline{n} - \underline{I^d}) \cdot \underline{w}^0 dx = \int_{\Omega} (\underline{\operatorname{div}} \underline{\Pi} + \underline{\rho f}) \cdot \underline{w}^0 dx$

comme $w=0 \text{ sur } \Gamma_u$ $\forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$ (*)

- On choisit $\underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$ telle que $\underline{w}^0 = 0$ sur Γ_f

on obtient alors :

$$\underline{\operatorname{div}} \underline{\Pi}(\underline{u}) + \underline{\rho f}(\underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in \Omega \quad \text{avec } \underline{\Pi} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\mathbb{E}}(\underline{u})$$

on retrouve ainsi l'équation d'équilibre

$$\underline{\mathbb{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} u + \underline{\nabla} u^T)$$

. Puis on revient à la formulation (x) et on a

$$\int_{\Gamma} (\underline{\Pi} \cdot \underline{n} - \underline{I^d}) \cdot \underline{w}^0 ds = 0 \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

donc \underline{w}^0 quelconque sur Γ_f

d'où $\underline{\Pi} \cdot \underline{n} = \underline{I^d}$ sur Γ_f ce qui fournit la condition aux limites du problème fort et donc l'implication est bien réalisée

Remarques concernant l'existence et l'unicité d'une solution du problème sous sa formulation faible :

- Le théorème de Lax-Milgram s'applique ici

soit H un espace de Hilbert, muni de la norme $\|\cdot\|$

soit a une application bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R}

symétrique, continue et coercive

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall u \in H \quad \forall v \in H \quad |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u \in H \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

soit L une application linéaire de H dans \mathbb{R}

continue $\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall w \in H \quad |L(w)| \leq \beta \|w\|$

alors $\exists ! \underline{u} \in H$ tel que

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = l(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in H$$

sous réserve de régularité sur le domaine Ω et les domaines $(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \underline{u}^0)$

Ici la coercivité provient de la propriété de définité positive des termes de rigidité. L'espace $H = \{ \underline{v} \in (\mathbb{L}^2(\Omega))^3, (\nabla \underline{v}) \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^9 \}$

- les questions d'unicité discutées précédemment se justifient

Soit un problème avec mes $(\Gamma u) \neq 0$ sur $\Gamma u : \underline{u} = \underline{u}^0$
montrons que la solution \underline{u} est bien unique

on raisonne par l'absurde $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ deux solutions du problème sous sa formulation faible

$\underline{u}_1 \in \mathcal{C}(\underline{u}^0)$ $\underline{u}_2 \in \mathcal{C}(\underline{u}^0)$ et vérifient

$$a(\underline{u}_1, \underline{w}^0) = l(\underline{w}^0) \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

$$a(\underline{u}_2, \underline{w}^0) = l(\underline{w}^0) \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

$$\Rightarrow a(\underline{u}_1 - \underline{u}_2, \underline{w}^0) = 0 \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

puissons $\underline{w}^0 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2 \in \mathcal{C}(0)$ on a $a(\underline{u}_1 - \underline{u}_2, \underline{u}_1 - \underline{u}_2) = 0$

$$\text{soit } \int_{\Omega} \underline{\underline{E}}(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{E}}(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \, dx = 0$$

comme $\underline{\underline{Q}}$ est définie positive $\Rightarrow \underline{\underline{E}}(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) = \underline{\underline{0}}$

ou $a(\underline{u}_1, \underline{u}_1)$ coercive

d'où $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{\underline{0}}$ déplacement de corps rigide

or $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{\underline{0}}$ sur Γu qui comporte au moins 3 points

non alignés $\Rightarrow \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{\underline{0}}$ d'où unicité

Si le problème est un problème de type 2. $\text{mes}(\Gamma u) = 0$, le problème ne comporte pas de condition aux limites cinématiques
dans ce cas, le début du raisonnement fait l'absurde reste

correct jusqu'à $\underline{u} = \underline{u}_2(\underline{u}) = \underline{\varphi}(\underline{u})$ pour car

mais ce ne permet d'annuler le corps rigide

le déplacement est donc défini à un déplacement de corps rigide près.

En revanche $\underline{\varphi}(\underline{u}) = \underline{\varphi}(\underline{u}_1)$ car $\underline{\varphi}(\underline{\varphi}) = 0$

et donc les contraintes sont elles uniques.

- la condition d'existence d'une solution pour les problèmes de type 2 énoncée précédemment provient de la formulation faible également on a pour un problème de type 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in \mathcal{B} \\ \text{al } \underline{u}, \underline{\varphi} \geq L(\underline{\varphi}) \quad \forall \underline{\varphi} \in \mathcal{C} \text{ régulier} \end{array} \right.$$

prenons $\underline{\varphi} = \underline{\varphi} \in \mathcal{B}$ alors $\text{al } \underline{u}, \underline{\varphi} \geq 0$ car $\underline{\varphi}(\underline{u}) = \underline{\varphi}(\underline{\varphi}) = 0$

$$\text{d'où } L(\underline{\varphi}) = 0 = \int_{\Omega} \underline{\varrho} f \cdot \underline{\varphi} \, dx + \int_{\Gamma} \underline{T}^d \cdot \underline{\varphi} \, ds = 0$$

$$\text{avec } \underline{\varphi} = \underline{\alpha} + \underline{b} \cap \partial M \quad \underline{\alpha}, \underline{b} \text{ quelconques}$$

d'où la condition nécessaire d'existence d'une solution :

$$\int_{\Omega} \underline{\varrho} f \, dx + \int_{\Gamma} \underline{T}^d \, ds = 0 \quad \int_{\Omega} \underline{\alpha} \cap \underline{\varrho} f \, dx + \int_{\Gamma} \underline{b} \cap \underline{T}^d \, ds = 0$$

- Remarque sur la mise en compte de terme de précontrainte dans la formulation faible

En présence d'un terme de précontrainte initial ou de contraintes induites par un chargement thermique initialisé, on a la formulation faible

$$\underline{u} \in \mathcal{B}(\underline{u}^d)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\varrho}(\underline{u}) : \underline{\alpha} : \underline{\varphi}(\underline{w}) \, dx &= \int_{\Omega} \underline{\varrho} f \cdot \underline{w} \, dx + \int_{\Gamma} \underline{T}^d \cdot \underline{w} \, ds \\ &= \int_{\Omega} \underline{\alpha}^0 : \underline{\varphi}(\underline{w}^0) \, dx \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{B}(0) \end{aligned}$$

● 2.2 Formulations variationnelles

Une formulation variationnelle est une formulation faible qui s'exprime sous forme de problème de minimisation d'une fonctionnelle ou de stationnarité. Dès que la formulation forte fait apparaître une forme bilinéaire symétrique, on peut alors établir une équivalence entre la formulation forte et la formulation variationnelle.

Pour le problème d'équilibre en élasticité linéaire étudié on a le résultat suivant :

formulation faible)	$\begin{cases} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d) \\ \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}) : \underline{\sigma} = \int_{\Omega} \epsilon f \cdot \underline{u}^d \, dx + \int_{\Gamma} T^d \cdot \underline{u}^d \, ds \\ \forall \underline{w}^d \in \mathcal{C}(0) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d) \\ I(\underline{u}) \leq I(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d) \\ I(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d)} I(\underline{v}) \end{cases}$	
formulation variationnelle avec	$I(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{v}) : \underline{\sigma} = \int_{\Omega} \epsilon f \cdot \underline{v} \, dx - \int_{\Gamma} \epsilon f \cdot \underline{v} \, ds - \int_{\Gamma} T^d \cdot \underline{v} \, ds$

Le champ \underline{u} solution du problème nous sa formulation forte ou faible équivalente réalise le minimum de la fonctionnelle $I(\underline{v})$ sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour le problème.

La fonctionnelle $I(\underline{v})$ s'interprète mécaniquement comme

l'énergie potentielle sur l'espace des champs admissibles. Elle est égale à l'énergie de déformation $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{v}}) : \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega$ moins le travail des efforts extérieurs.

Preuve de l'équivalence :

1) Soit $\underline{\underline{u}}$ solution de la formulation faible

alors $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$ et vérifie $a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{w}}) = L(\underline{\underline{w}}) \quad \forall \underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(0)$

d'où $I(\underline{\underline{w}}) - I(\underline{\underline{u}})$ avec $\underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$ il résulte

$$I(\underline{\underline{w}}) - I(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} a(\underline{\underline{w}}, \underline{\underline{w}}) - \frac{1}{2} a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{u}}) - L(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}})$$

$$= \frac{1}{2} a(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) + a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) - L(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) \quad \text{car } L \text{ est linéaire}$$

or $\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}} \in \mathcal{C}(0)$ et donc comme $\underline{\underline{u}}$ vérifie $a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{w}}) = L(\underline{\underline{w}})$ $\forall \underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(0)$

$$I(\underline{\underline{w}}) - I(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} a(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) : \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{w}} - \underline{\underline{u}}) d\Omega$$

≥ 0 par coercivité de l'application $a(\cdot, \cdot)$

ou encore propriété du tenseur de rigidité $\underline{\underline{\Omega}}$ de positivité

2) Reciproquement, on suppose $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$ et vérifie

$$I(\underline{\underline{u}}) \leq I(\underline{\underline{v}}) \quad \forall \underline{\underline{v}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$$

formons $\underline{\underline{w}} = (1-\lambda)\underline{\underline{u}} + \lambda\underline{\underline{v}}$ avec $\underline{\underline{v}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$ quelconque et $\lambda \in \mathbb{R}$.

sur Γ_0 $\underline{\underline{w}} = (1-\lambda)\underline{\underline{U}}^d + \lambda\underline{\underline{U}}^d = \underline{\underline{U}}^d$ donc $\underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{U}}^d)$

de sorte que $I(\underline{\underline{w}}) \geq I(\underline{\underline{u}})$ $\underline{\underline{u}}$ étant solution et ceci $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

voit en développant : $I(\underline{\underline{w}}) = \frac{1}{2} a(\underline{\underline{w}}, \underline{\underline{w}}) - L(\underline{\underline{w}})$

$$\begin{aligned} I(\underline{\underline{w}}) - I(\underline{\underline{u}}) &= \frac{(1-\lambda)^2}{2} a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{u}}) + \frac{\lambda^2}{2} a(\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{v}}) + 2\lambda(1-\lambda) a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) - (1-\lambda)L(\underline{\underline{u}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} a(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{u}}) + L(\underline{\underline{u}}) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} a(\underline{u}, \underline{u}) - \lambda a(\underline{u}, \underline{v}) + \frac{\lambda^2}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) + \lambda a(\underline{u}, \underline{v}) - \lambda^2 a(\underline{v}, \underline{v}) \\ + \lambda L(\underline{u}) - \lambda L(\underline{v}) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{\lambda^2}{2} a(\underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v}) + \lambda [a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) - L(\underline{v} - \underline{u})] \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

il s'agit d'un trinôme en λ : pour être $\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\Delta < 0$ soit donc

$$(a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) - L(\underline{v} - \underline{u}))^2 \leq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(u^0)$$

$$\text{et donc nécessairement } a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = L(\underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(u^0)$$

$$\text{ou encore } a(\underline{u}, \underline{w}^0) = L(\underline{w}^0) \quad \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0)$$

et donc \underline{u} vérifie la formulation faible.

Autre formulation variationnelle : sous forme de stationnarité d'une fonctionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0) \\ I(\underline{u}) \leq \underline{I}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0) \\ \langle I'(\underline{u}), \underline{w}^0 \rangle = 0 \\ \forall \underline{w}^0 \in \mathcal{C}(0) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \langle I'(\underline{u}), \underline{w}^0 \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\underline{u} + \lambda \underline{w}^0) - I(\underline{u})}{\lambda} \\ &= \frac{\partial I}{\partial \underline{u}}(\underline{u}) = 0 \end{aligned}$$

I' désigne ici l'application linéaire tangente associée à I

Première preuve: Par propriété de bilinéarité de a et L , on a :

$$\begin{aligned} I(\underline{u} + \lambda \underline{w}^0) - I(\underline{u}) &= \frac{1}{2} a(\underline{u} + \lambda \underline{w}^0, \underline{u} + \lambda \underline{w}^0) - L(\underline{u} + \lambda \underline{w}^0) \\ &\quad - \frac{1}{2} a(\underline{u}, \underline{u}) + L(\underline{u}) = \frac{1}{2} \lambda^2 a(\underline{w}^0, \underline{w}^0) + \lambda a(\underline{w}^0, \underline{u}) - \lambda L(\underline{w}^0) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \langle I'(\underline{u}), \underline{w}^0 \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\underline{u} + \lambda \underline{w}^0) - I(\underline{u})}{\lambda} = a(\underline{u}, \underline{w}^0) - L(\underline{w}^0)$$

De sorte que si \underline{u} est solution du problème faible et donc du problème variationnel d'après l'équivalence obtenue précédemment, on a

$$a(\underline{u}, \underline{w}) = L(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{B}(0)$$

$$\text{et donc } \langle I'(\underline{u}), \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{B}(0)$$

d' inversement.

Remarque : De la même manière que nous avons procédé à l'établissement de formulations faible et variationnelle en déplacement, il est possible de travailler en privilégiant l'inconnue champ de contrainte (revoir formulation énergétique cours de 13 structures élastiques)

Dans l'optique de construire des solutions approchées par éléments finis pour la suite, nous ne développons pas ces formulations en contraintes

- A noter qu'il existe également des formulations à deux champs ou encore formulations mixtes non développées dans ce cours en déplacement et valeur contrainte par exemple

On mentionnera la formulation suivante utile pour les estimations d'erreur lors de la construction de solutions approchées
On définit une fonctionnelle à deux champs

$$\left\{ \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\epsilon}}) = \int_{\Omega} [\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\epsilon}}(v)] : \underline{\underline{S}} : [\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\epsilon}}(v)] \, d\Omega \right.$$

$$\left. \text{avec } \underline{v} \in \mathcal{C}(U^d) \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}} \in \mathcal{L}(T^d, \mathbb{R}) \text{ et } \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Omega}}^{-1} \right)$$

- Cette fonctionnelle mesure l'écart à la satisfaction de la loi de comportement (mesure en terme d'énergie)

Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\epsilon}}) \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(U^d) \quad \forall \underline{\underline{\epsilon}} \in \mathcal{L}(T^d, \mathbb{R})$$

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\xi}}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{v})$$

De sorte que la solution du problème local vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d), \underline{\underline{\Omega}} \in \mathcal{S}(\underline{\Omega}^d, \underline{f}) \text{ et} \\ \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\underline{\Omega}}) = 0 \end{array} \right.$$

soit encore : $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d)$, $\underline{\underline{\Omega}} \in \mathcal{S}(\underline{\Omega}^d, \underline{f})$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\underline{\Omega}}) \leq \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\Omega}}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^d) \\ \forall \underline{\underline{\Omega}} \in \mathcal{S}(\underline{\Omega}^d, \underline{f}) \end{array} \right.$$

la solution minimale donc l'erreur en loi de comportement sur les champs cinématiquement et statiquement admissibles du problème

• 3. Approximations variationnelles

1. L'espace $\mathcal{C}(\underline{u}^d)$ des champs cinématiquement admissibles est un espace affine de dimension infinie. Rechercher le minimum de l'énergie potentielle sur un tel espace est en pratique impossible dans la majorité des situations en raison de la complexité géométrique des structures réelles.

Le principe de la recherche de solution approchée consiste à rechercher le minimum non pas sur l'espace $\mathcal{C}(\underline{u}^d)$ entier mais sur un sous-espace de $\mathcal{C}(\underline{u}^d)$ de dimension finie. Cette approche est appelée approche de Galerkin.

3.1 La Méthode de Galerkin pour la formulation faible en déplacement

On convient de noter \tilde{u}^d un prolongement de u^d (champ de déplacement imposé sur Γ_u) sur le domaine Ω . On parle aussi de relèvement c'est sur de $\mathcal{G}(u^d)$ particulier. Admettons qu'il soit donné.

Un élément quelconque de $\mathcal{G}(u^d)$ s'écrit alors :

$$v(x) = \tilde{u}^d(x) + w^0(x) \quad \text{avec } w^0 \in \mathcal{G}(0)$$

Rechercher la solution u du problème dans sa formulation faible revient alors à trouver $w^0(x)$ tel que :

$$a(\tilde{u}^d + w^0, w^0) = L(w^0) \quad \text{avec } w^0 \in \mathcal{G}(0) \text{ tel que}$$

$$a(\tilde{u}^d + w^0, w^0) = L(w^0) \quad \forall w^0 \in \mathcal{G}(0)$$

soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w^0 \in \mathcal{G}(0) \\ a(u^0, w^0) = L(w^0) = L(w^0) - a(\tilde{u}^d, w^0) \\ \forall w^0 \in \mathcal{G}(0) \end{array} \right.$$

soit

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(w^0) : \underline{\underline{\epsilon}}(w^0) dx = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}_f} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(w^0) dx + \int_{\Gamma_F} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(w^0) ds$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\tilde{u}^d) : \underline{\underline{\epsilon}}(w^0) dx$$

le problème est ainsi reformulé sur un espace vectoriel $\mathcal{G}(0)$ (et non un espace affine $\mathcal{G}(u^d)$)

On obtient la solution du problème en formant ensuite

$$u = u^0 + \tilde{u}^d$$

la méthode de Galerkin consiste à recherche la solution du problème en \underline{u}^h sur un sous espace de $\mathcal{C}(0)$ de dimension finie. On note \underline{u}^h une solution approchée, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^h \in \mathcal{C}^h(0) \subset \mathcal{C}(0) \\ a(\underline{u}^h, \underline{w}^h) = l(\underline{w}^h) \quad \forall \underline{w}^h \in \mathcal{C}^h(0) \subset \mathcal{C}(0) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{C}^h(0)$ nous espace vectoriel de dimension finie N

Soient $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{\varphi}_N$ une base de $\mathcal{C}^h(0)$ supposée connue. Trouver \underline{u}^h revient à trouver des scalaires N , composantes de \underline{u}^h sur la base solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \\ a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \underline{\varphi}_i(x), \underline{w}^h\right) = l(\underline{w}^h) \quad \forall \underline{w}^h \in \mathcal{C}^h(0) \end{array} \right.$$

soit encore en choisissant $\underline{w}^h = \underline{\varphi}_1, \underline{w}^h = \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{w}^h = \underline{\varphi}_N \in \mathcal{C}^h(0)$

on est ramené à trouver $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ solutions du système linéaire suivant

$$[K] \{ \xi \} = \{ F \}$$

$$\text{avec } \{ \xi \} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{Bmatrix} \quad K_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\varphi}_i(\underline{\varphi}_j); \underline{\varphi}_i : \underline{\varphi}_j \, dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} \underline{e} \cdot \underline{f} \cdot \underline{\varphi}_i \, dx + \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{\varphi}_i \, ds$$

$[K]$ une matrice

$N \times N$

$\{F\}$ vecteur

second membre

N colonnes

$$- \int_{\Gamma} \underline{\varphi}_i(\underline{u}^h) : \underline{\varphi}_i \, ds$$

$[K]$ est appellée matrice de rigidité et $\{F\}$ le vecteur force généralisé

Après résolution, on obtient une solution approchée du problème en formant :

$$\underline{u}(\underline{u}) = \underline{u}^d(\underline{u}) + \sum_{i=1}^N \xi_i \underline{\varphi}_i(\underline{u}) \quad \underline{u} \in \Sigma$$

- La méthode de Galerkin consiste donc à choisir a priori une représentation sur un ensemble fini de fonctions de la solution $\underline{u}^d, \underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}^N$, les inconnues du problème sont alors les coefficients ξ_1, \dots, ξ^N scalaires appelés déplacements généralisés solution du système linéaire défini précédemment $[K]\{\xi\} = \{f\}$

Remarque sur les propriétés du système linéaire :

- La matrice $[K]$ est symétrique par propriété de l'application bilinéaire qui découle elle-même de celles des coefficients d'élasticité

$$K_{ij} = a(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = a(\underline{\varphi}_j, \underline{\varphi}_i) = K_{ji}$$

- La matrice $[K]$ est positive

$$\begin{aligned} [K]\{\xi\} \cdot \{\xi\} &= \{f\}^T [K] \{f\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i \xi_j K_{ij} \\ &= a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \underline{\varphi}_i, \sum_{j=1}^N \xi_j \underline{\varphi}_j\right) \geq 0 \end{aligned}$$

par propriété de a

- La matrice $[K]$ est définie positive

$$[K]\{\xi\} \cdot \{\xi\} = 0 \Leftrightarrow \{f\}^T [K] \{f\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \underline{\varphi}_i, \sum_{j=1}^N \xi_j \underline{\varphi}_j\right) = 0 \quad \text{car } a \text{ est coercif}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \xi_i \underline{\varphi}_i(\underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in \Sigma$$

comme $\underline{\varphi}_i$ est une base $\Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_N = 0 \Rightarrow \{f\} = \{0\}$

- en conséquence le système linéaire est bien inversible

Attention; cette propriété est vraie si les déplacements de corps rigide ont bien été éliminés de la formulation.

□ 3.2 la méthode de Galerkin pour la formulation variationnelle

On reprend celle pour la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^0) \\ I(\underline{u}) \leq I(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{G}(\underline{u}^0) \end{array} \right.$$

On introduit comme précédemment $\bar{\underline{u}}^0$ le prolongement de \underline{u}^0 dans Ω . On recherche donc \underline{u} sous la forme $\underline{u} = \bar{\underline{u}}^0 + \bar{\underline{u}}$ avec $\bar{\underline{u}} \in \mathcal{G}(0)$ solution de

$$I(\bar{\underline{u}}^0 + \bar{\underline{u}}) \leq I(\bar{\underline{u}}^0 + \bar{\underline{v}}) \quad \forall \bar{\underline{v}} \in \mathcal{G}(0)$$

soit encore: $\bar{\underline{u}} \in \mathcal{G}(0)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\bar{\underline{u}}) \leq P(\bar{\underline{v}}) \\ \forall \bar{\underline{v}} \in \mathcal{G}(0) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{avec } P(\bar{\underline{v}}) &= \frac{1}{2} \alpha(\bar{\underline{v}}, \bar{\underline{v}}) - L(\bar{\underline{v}}) + a(\bar{\underline{v}}, \bar{\underline{u}}^0) \\ &= \frac{1}{2} \alpha(\bar{\underline{v}}, \bar{\underline{v}}) - l(\bar{\underline{v}}) \end{aligned}$$

la méthode de Galerkin propose de rechercher une approximation $\bar{\underline{u}}^h$ de $\bar{\underline{u}}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\underline{u}}^h \in \mathcal{G}^h(0) \subset \mathcal{G}(0) \\ P(\bar{\underline{u}}^h) \leq P(\bar{\underline{v}}^h) \quad \forall \bar{\underline{v}}^h \in \mathcal{G}^h(0) \subset \mathcal{G}(0) \end{array} \right.$$

Soit encore rechercher $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}^N$ rendant

$P(\{\xi\})$ minimal

$$\text{avec } P(\{\xi\}) = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K] \{\xi\} - \{\xi\}^T \{F\}$$

et $[K]$ de composantes $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

$$\{F\} \quad " \quad " \quad F_i = L(\varphi_i) - a(\varphi_i, \bar{\underline{u}}^0)$$

Soit encore $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P\{\xi\}}{\partial \xi_i} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{et donc } [\kappa] \{ \xi \} = \{ F \}$$

On retrouve le système linéaire obtenu par l'approximation de la formulation faible

o 3.3 Qualité de l'approximation

Soit \underline{u} la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in C(\underline{u}^d) \\ a(\underline{u}, \underline{v}^0) = l(\underline{v}^0) \quad \forall \underline{v}^0 \in \mathcal{C}(0) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u}^d + \underline{u}^0 \quad \text{avec } \underline{u}^0 \in \mathcal{C}(0) \\ a(\underline{u}^0, \underline{v}^0) &= l(\underline{v}^0) \\ \forall \underline{v}^0 \in \mathcal{C}(0) \end{aligned}$$

et \underline{u}^h l'approximation de \underline{u} :

$$\underline{u}^h = \underline{u}^d + \underline{u}^{h0}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0) \subset \mathcal{C}(0) \\ a(\underline{u}^{h0}, \underline{v}^h) = l(\underline{v}^h) \quad \forall \underline{v}^h \in \mathcal{C}(0) \subset \mathcal{C}(0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{v}^h) = 0 \quad \forall \underline{v}^h \in \mathcal{C}^h(0) \end{array} \right.$$

de sorte que en faisant la différence

$$a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{v}^{h0}) = 0 \quad \forall \underline{v}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0)$$

ou encore

$$a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{v}^{h0}) = 0 \quad \forall \underline{v}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0)$$

soit en notant $\Delta \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}^h$ l'erreur

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\Delta \underline{u}) : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}^{h0}) \, dx = 0 \quad \forall \underline{v}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0) \end{array} \right.$$

L'erreur $\Delta \underline{u}$ est orthogonal (au sens du produit scalaire associé à l'énergie de déformation) à tout champ de l'espace

$\mathcal{C}^h(0)$ d'approximation des champs circonscriptivement admissibles à 0.

On peut alors montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\Delta u, \Delta u) = a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{u} - \underline{u}^h) \leq a(\underline{u} - \underline{v}^h, \underline{u} - \underline{v}^h) \\ \text{et } \underline{v}^h = \underline{u}^h + \underline{v}^{h0} \text{ avec } \underline{v}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0) \end{array} \right.$$

c'est à dire que \underline{u}^h est la meilleure approximation de \underline{u} parmi les champs de la forme

$$\underline{u}^h = \underline{u}^d + \underline{\varphi}^h \text{ avec } \underline{\varphi}^h \in \mathcal{C}^h(0) \subset \mathcal{C}(0)$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, formons } a(\underline{u} - \underline{v}^h, \underline{u} - \underline{v}^h) &= a(\underline{u} - \underline{u}^h + \underline{u}^h - \underline{v}^h, \underline{u} - \underline{u}^h + \underline{u}^h - \underline{v}^h) \\ &= a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{u} - \underline{u}^h) + 2a(\underline{u} - \underline{u}^h, \underline{u}^h - \underline{v}^h) + a(\underline{u}^h - \underline{v}^h, \underline{u}^h - \underline{v}^h) \\ &= a(\Delta u, \Delta u) + 2a(\Delta u, \underline{u}^h - \underline{v}^h) + a(\underline{u}^h - \underline{v}^h, \underline{u}^h - \underline{v}^h) \\ &\quad \in \mathcal{C}^h(0) \end{aligned}$$

de sorte que d'après ce qui précéde :

$$a(\underline{u} - \underline{v}^h, \underline{u} - \underline{v}^h) = a(\Delta u, \Delta u) + \underbrace{a(\underline{u}^h - \underline{v}^h, \underline{u}^h - \underline{v}^h)}_{\geq 0}$$

de sorte que $a(\underline{u} - \underline{v}^h, \underline{u} - \underline{v}^h) \geq a(\Delta u, \Delta u)$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\mathcal{E}}(\underline{u} - \underline{u}^h) : \underline{\Omega} = \int_{\Omega} \underline{\mathcal{E}}(\underline{u} - \underline{u}^h) \, d\Omega \\ \leq \int_{\Omega} \underline{\mathcal{E}}(\underline{u} - \underline{v}^h) \, d\Omega \end{array} \right. \quad \text{avec } \underline{v}^h = \underline{u}^h + \underline{v}^{h0} \text{ avec } \underline{v}^{h0} \in \mathcal{C}^h(0) \text{ quelconque}$$

on a $\|\underline{u} - \underline{u}^h\| \leq \|\underline{u} - \underline{v}^h\|$ au sens de la norme énergie

o 3.4- Introduction à la méthode des éléments finis

La méthode de Galerkin nécessite de construire une base de l'espace $\mathcal{C}^h(0)$. Il est assez facile de construire une telle base à l'aide de fonctions polynomiales définies sur l'ensemble du

domaine Ω ou encore de fonctions trigonométriques. C'est l'approche des méthodes dites spectrales. Si l'on procède de cette façon, le calcul de $[K]$ et $[F]$ va nécessiter de procéder à des intégrations sur tout le domaine, intégrations qui peuvent être délicates pour des domaines de géométries quelconques. Par ailleurs, a priori les coefficients de la matrice sont non nuls. Le système linéaire à inverser possèdera une matrice "pleine" et les temps de calculs peuvent être longs et donc les calculs risquent d'être coûteux.

La méthode des éléments finis est une forme particulière de la méthode de Galerkin dans laquelle les fonctions de base sont polynomiales par sous-domaines et en dehors d'un petit domaine elles sont nulles. De cette façon, les intégrations numériques se réduisent à des intégrations sur des petits domaines que l'on va choisir simples. Par ailleurs la matrice de rigidité va comporter des zéros car les fonctions de base s'annulent en dehors d'une petite région. Enfin, les conditions aux limites cinématiques seront plus faciles à vérifier compte tenu du caractère local des fonctions de base.