Sorbonne Université-Licence d'Ingénierie Mécanique 2018-2019

Equations aux Dérivées Partielles 2

Examen du 15 Mai 2019

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel. La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Questions de cours.

1. Donner les propriétés de l'application trace $\gamma_0(u)$, avec $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ étant un ensemble ouvert, borné, de frontière régulière.
2. Rappeler la définition de l'espace $H_0^1(\Omega)$, avec Ω défini dans la question 1.
3. Rappeler l'inégalité de Poincaré sur l'espace $H_0^1(\Omega)$.
4. Soit la fonction $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$, $B(0,1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ étant la boule ouverte centrée en 0 de rayon 1, $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in L^2(B(0,1))$ si et seulement si $\alpha > -1$.
Indication : On utilisera pour cela l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ qui est convergente si et seulement si $a < 1$.

Problème

On considère le problème de conduction thermique dans une structure contenant une inclusion. On note $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine occupé par la structure et K la partie occupée par l'inclusion ($K \subset \Omega$). On suppose le domaine Ω borné, régulier et le domaine K connexe. On note ω la partie complémentaire $\omega = \Omega \setminus K$, ω est supposé régulier. On désigne par $\partial\Omega$ la frontière de Ω et par ∂K la frontière de K (cf. Figure ci-dessous).

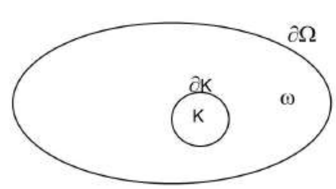

FIGURE 1 – Géometrie de la structure

L'inclusion est constituée d'un matériau homogène, isotrope, parfaitement conducteur et ne contient pas de source de chaleur. Le matériau conducteur constitutif du domaine ω est également homogène, isotrope et de conductivité k (k constante et $k > 0$). Dans le domaine ω il y a une source de chaleur, connue, notée $f = f(x)$. On suppose la structure Ω thermiquement isolée de l'extérieur.

Pour un tel système, la température d'équilibre u vérifie le système :

$$\textbf{(PC)} \quad \begin{cases} -k\Delta u &= f, \quad \text{dans } \omega = \Omega \setminus K, \\ u &= C_u, \quad \text{sur } \partial K, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds &= 0, \end{cases}$$

où C_u est une constante réelle inconnue à déterminer et n désigne la normale au bord considéré, extérieure au domaine ω .

1. Donner une interprétation physique des équations et des conditions limites du problème **(PC)**. De quel type de problème mathématique s'agit-il (classe d'équations aux dérivées partielles, type de conditions aux limites) ?
2. Montrer que si le problème **(PC)** admet une solution alors la donnée f doit satisfaire la condition nécessaire d'existence suivante :

   $$\int_\omega f dx = 0$$

   Sous cette condition, la solution, si elle existe, est-elle unique ? Justifier votre réponse.

   Dans la suite on considérera sans démonstration l'inégalité de Poincaré-Wirtinger suivante :
   Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\omega)$:

   $$\|v - m(v)\|_{L^2(\omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\omega)}, \text{ avec}$$

   $$m(v) = \frac{\int_\omega v dx}{\int_\omega 1 dx} \text{ et } \|\nabla v\|_{L^2(\omega)} = \sqrt{\int_\omega \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 dx}$$

3. On introduit l'espace fonctionnel V suivant :

   $$V = \{v \in H^1(\omega), \text{ tel que } \int_\omega v dx = 0 \text{ et } v = C_v = \text{constante réelle quelconque sur } \partial K\}$$

   Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $H^1(\omega)$.

4. Montrer que $< u, v >_V$ défini ci-après est un produit scalaire sur V.

$$< u, v >_V = \int_\omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

   Montrer que la norme associée $\|u\|_V$ est équivalente sur l'espace V à la norme de $H^1(\omega)$ usuelle. On rappelle que

$$\|v\|_{H^1(\omega)} = \sqrt{\int_\omega v^2 dx + \int_\omega \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 dx}$$

   Indication : On utilisera pour cela l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

5. *Question bonus. On pourra utiliser le résultat par la suite.*
   Montrer que l'espace V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_V$ et la norme associée $\| \cdot \|_V$.

6. Montrer que si u est solution du problème **(PC)** alors u est solution du problème variationnel sur l'espace V :

$$\textbf{(PV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de :} \\ \quad a(u, v) = L(v) \; \forall v \in V. \end{array} \right.$$

   et préciser les applications $a(u, v)$ et $L(v)$. On donnera également leurs domaines de définition et domaines de valeurs.

7. Sous la condition nécessaire d'existence de la question 2 et pour $f \in L^2(\omega)$, établir l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel sur V. On précisera le théorème d'existence et unicité utilisé et on vérifiera avec soin toutes ses hypothèses.

8. Quel est le problème de minimisation **(PM)**, dont on montrera l'équivalence avec le problème variationnel **(PV)** ?