Module LU3ME003 : Equations aux dérivées partielles de la mécanique 2

TD 3-4 - Exercice2 : Eléments de correction

1. Montrons que $H_0^1(]0,1[)$ est un sous-espace vectoriel (sev) de $H^1(]0,1[)$.

   - $$H_0^1(]0,1[) \text{ est un } \mathbb{R}\text{sev de } H^1(]0,1[) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} H_0^1(]0,1[) \neq \emptyset \\ \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[), v_1 + v_2 \in H_0^1(]0,1[) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in H_0^1(]0,1[), \lambda v_1 \in H_0^1(]0,1[) \end{cases}$$

   - $H_0^1(]0,1[)$ n'est pas vide, car il contient l'élément nul 0_{H^1} : $0_{H^1} \in H^1(]0,1[)$ et $0_{H^1}(0) = 0_{H^1}(1) = 0$
   - $\forall (v_1, v_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $v_1, v_2 \in H^1(]0,1[)$.
     L'espace $H^1(]0,1[)$ est un espace vectoriel, donc $(v_1 + \lambda v_2) \in H^1(]0,1[)$.
     De plus, $(v_1+\lambda v_2)(0) = v_1(0)+\lambda v_2(0) = 0$, car $(v_1, v_2) \in H^1(]0,1[)\times H^1(]0,1[)$. De même $(v_1+\lambda v_2)(1) = 0$
     Finalement, $(v_1 + \lambda v_2) \in H_0^1(]0,1[)$.

Montrons que l'espace est complet. On utilise la définition. Un espace est complet si toute suite de Cauchy et une suite convergente. On considère donc $v_n \in H_0^1(]0,1[)$ une suite de Cauchy dans $H_0^1(]0,1[)$, par rapport à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. Comme $H_0^1(]0,1[) \in H^1(]0,1[)$, v_n est une suite de Cauchy dans $H^1(]0,1[)$. Mais l'espace $H^1(]0,1[)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace complet (résutat de cours). Donc la suite v_n est une suite convergente dans $H^1(]0,1[)$. Il existe alors $v \in H^1(]0,1[)$ telle que $\|v_n - v\|_{H^1} \to 0$ pour $n \to \infty$. Pour finaliser la démonstration il faut vérifier que $v \in H_0^1(]0,1[)$, c'est-à-dire $v(0) = v(1) = 0$.

Remarque: Pour démontrer que $H_0^1(]0,1[)$ est complet il suffit de démontrer que $H_0^1(]0,1[)$ est fermé. Pour cela on se base sur la propriété suivante: tout espace fermé dans un espace complet est complet. Ceci revient donc à prendre une suite de $H_0^1(]0,1[)$, convergente au sens de la norme et de montrer que sa limite est une fonction de $H_0^1(]0,1[)$.

On revient maintenant à la démonstration, c'est-à-dire il reste à prouver que $v(0) = v(1) = 0$.

On utilise la propriété 1 (TD3) des fonctions de $H^1(]0,1[)$. On a alors pour tout x dans]0,1[

$$v(0) = v(x) + \int_x^0 v'(t)\,dt \quad \forall x \in]0,1[$$
$$0 = v_n(x) + \int_x^0 v_n'(t)\,dt \quad \forall x \in]0,1[$$

En faisant la diffrence de ces deux équation et en prenant la valeur absolue, on obtient

$$\begin{aligned} |v(0)| &\leqslant |v(x) - v_n(x)| + \left| \int_0^x v'(t) - v_n'\,dt \right| \quad \forall x \in]0,1[\quad \text{d'après l'inégalité triangulaire pour } |.| \\ &\leqslant |v(x) - v_n(x)| + \int_0^x |v'(t) - v_n'(t)|\,dt \quad \forall x \in]0,1[\\ &\leqslant |v(x) - v_n(x)| + \int_0^1 |v'(t) - v_n'(t)|\,dt \quad \forall x \in]0,1[, \quad \text{car } |v'(t) - v_n'(t)| > 0 \text{ et } \ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

On va majorer le dernier terme en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a

$$\int_0^1 |v'(t) - v_n'(t)|\ dt = \left|\int_0^1 |v'(t) - v_n'(t)|.1\ dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 |v'(t) - v_n'(t)|^2\ dt}\ \sqrt{\int_0^1 |1|^2\ dt}$$
$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 |v'(t) - v_n'(t)|^2\ dt} = ||v' - v_n'||_{L^2}$$

D'où

$$|v(0)| \leqslant |v(x) - v_n(x)| + ||v' - v_n'||_{L^2}.$$

et ce pour tout x entre 0 et 1. En intégrant sur $x \in]0,1[$:

$$|v(0)| = \int_0^1 |v(0)|\, dx \leqslant \int_0^1 |v(x) - v_n(x)|\, dx + \int_0^1 ||v' - v_n'||_{L^2}\, dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $x \longmapsto |v(x) - v_n(x)|$ et $x \longmapsto 1$, on a:

$$\int_0^1 |v(x) - v_n(x)|\ dx = \left|\int_0^1 |v(x) - v_n(x)|.1\ dx\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 |v(x) - v_n(x)|^2\ dx}\ \sqrt{\int_0^1 |1|^2\ dx} = ||v - v_n||_{L^2}.$$

D'où

$$|v(0)| \leqslant ||v - v_n||_{L^2} + ||v' - v_n'||_{L^2} \leqslant 2||v - v_n||_{H^1} \to 0 \text{ pour } n \to \infty \Longrightarrow v(0) = 0.$$

En utilisant le même raisonnement, on démontre que $v(1) = 0$. En conclusion, $H_0^1(]0,1[)$ est un sev fermé de $H^1(]0,1[)$ que l'on peut munir de la norme $||\cdot||_{H^1}$ et du produit scalaire $< \cdot,\cdot >_{H^1}$ usuels sur $H^1(]0,1[)$ pour lui fournir une structure d'espace de Hilbert.

2. On va démontrer l'inégalité de Poincaré. Soit $v \in H_0^1(]0,1[)$. On peut alors écrire pour tout $x \in]0,1[$

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)dt = \int_0^x v'(t)dt \text{ car v(0) = 0}$$

On a donc en module

$$|v(x)| \leqslant \left|\int_0^x v'(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |v'(t)|dt \leqslant \int_0^1 |v'(t)|dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 |v'(t)|^2\, dt}\ \sqrt{\int_0^1 |1|^2\ dt} = ||v'||_{L^2}$$

en utilisant dans l'ordre l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, le fait que $0 < x < 1$ et la positivité de l'intégrande pour changer les bornes puis Cauchy-Schwartz. Ceci étant vrai pour tout $x \in]0,1[$, on peut mettre au carré et intégrer l'inégalité précédente entre 0 et 1. On obtient

$$\int_0^1 |v(x)|^2 dx \leqslant ||v'||_{L^2}^2$$

que l'on peut réécrire

$$||v||_{L^2} \leqslant ||v'||_{L^2}$$

soit l'inégalité demandée avec C=1. Ce résultat se généralise pour des fonctions de plusieurs variables.
Inégalité de Poincaré:
Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\exists C > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad ||v||_{L^2}^2 = \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \leqslant C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx = C\, ||\nabla v||_{L^2}^2$$

3. On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ solution du problème continu:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in]0,1[, \quad \text{avec } f \in L^2(]0,1[) \quad \text{et } u(0) = u(1) = 0.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x) = f(x)\, v(x) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ \forall x \in]0,1[\\
\Longrightarrow\ & \int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2}(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \\
\Longrightarrow\ & \left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[).
\end{aligned}$$

Or

$$\left[-\frac{du}{dx}(x)\, v(x)\right]_0^1 = 0, \quad \text{car} \quad v \in H_0^1(]0,1[) \Longrightarrow v(0) = v(1) = 0.$$

Finalement, u est solution du problème variationnel:

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \quad \text{tel que} \quad a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

$$\text{avec} \begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx \\ L(v) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \end{cases}$$

4. - $a:\ H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique: $\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[), a(u,v) = a(v,u)$.
   - $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire: $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique et linéaire par rapport à une des deux variables $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u_1,u_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$, $\forall v \in H_0^1(]0,1[)$,
   $a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1,v) + a(u_2,v)$.
   - $a(\cdot,\cdot)$ est continue:

   $$\begin{aligned}
   \forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),\ |a(u,v)| &= \left|\int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{dx}(x)\, dx\right| = |< u', v' >_{L^2}| \\
   &\leqslant ||u'||_{L^2}\, ||v'||_{L^2} \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
   &\leqslant ||u||_{H^1}\, ||v||_{H^1}
   \end{aligned}$$

   Donc $\exists M = 1 > 0 \,/\, \forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),\ |a(u,v)| \leqslant M\, ||u||_{H^1}\, ||v||_{H^1}$.
   Donc $a(\cdot,\cdot)$ est continue de $H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.
   - $a(\cdot,\cdot)$ est H-coercive (ou H-elliptique):
   Montrons que $\exists \alpha_0 > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \alpha_0\, ||v||_{H^1}^2$.
   $\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}(x)\right)^2 dx = ||v'||_{L^2}^2$.
   Or on a par la question 3

   $$\begin{aligned}
   & \exists C > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ ||v||_{L^2}^2 \leqslant C\, ||v'||_{L^2}^2. \\
   & \text{Or} \quad ||v||_{H^1}^2 = ||v||_{L^2}^2 + ||v'||_{L^2}^2 \Longrightarrow ||v||_{H^1}^2 \leqslant C\, ||v'||_{L^2}^2 + ||v'||_{L^2}^2 = (1+C)\, ||v'||_{L^2}^2.
   \end{aligned}$$

   que l'on peut aussi écrire $||v'||_{L^2}^2 \geqslant \frac{1}{1+C} ||v||_{H^1}^2$. D'où par ce qui précède

   $$\exists \alpha_0 = \frac{1}{1+C} > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \alpha_0\, ||v||_{H^1}^2, \quad \text{car} \quad a(v,v) = ||v'||_{L^2}^2.$$

   Dans ce cas précis, on sait que C=1 convient(voir question 3) et donc

   $$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \frac{1}{2}\, ||v||_{H^1}^2.$$

- $L: H_0^1(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $L(\cdot)$ est linéaire: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[),\ L(\lambda v_1 + v_2) = \lambda L(v_1) + L(v_2)$.
- $L(\cdot)$ est continue:

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ |L(v)| = \left| \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \right| \leqslant ||f||_{L^2}\, ||v||_{L^2} \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$
$$\leqslant ||f||_{L^2}\, ||v||_{H^1}, \quad \text{car} \quad ||v||_{H^1}^2 = ||v||_{L^2}^2 + ||v'||_{L^2}^2$$

Donc $\exists M = ||f||_{L^2} > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ |L(v)| \leqslant M\, ||v||_{H^1}$.

Finalement $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, continue, symétrique et H-coercive sur $H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$ et $L(\cdot)$ est une forme linéaire, continue sur $H_0^1(]0,1[)$.

5. Montrons l'unicité et l'existence de la solution du problème variationnel.

- unicité:
Supposons que u_1 et u_2 sont solutions du problème variationel,

$$\text{alors} \quad \begin{cases} a(u_1, v) = L(v), & \forall v \in H_0^1(]0,1[) \\ a(u_2, v) = L(v), & \forall v \in H_0^1(]0,1[) \end{cases}$$

On a $a(u_1 - u_2, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$ par linéarité de $L(\cdot)$ et bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$.
En prenant $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(]0,1[)$ ($H_0^1(]0,1[)$ espace vectoriel), on a $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$.
Par coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, $\exists \alpha_0 > 0 \,/\, a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant \alpha_0\, ||u_1 - u_2||_{H^1}^2$.
D'où $||u_1 - u_2||_{H^1}^2 = 0 \implies u_1 - u_2 = 0_{H_0^1}$ par propriéré de la norme $||\cdot||_{H^1}$.
On en déduit que $u_1 = u_2$ et la solution est unique.

.
.
.

- existence:
L'application $a(\cdot,\cdot)$ étant une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive, car continue et H-coercive:
$a(\cdot,\cdot)$ continue $\implies \exists M > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) = |a(v,v)| \leqslant M\, ||v||_{H^1}^2$,
$a(\cdot,\cdot)$ H-coercive $\implies \exists \alpha_0 > 0 \,/\, \forall v \in H_0^1(]0,1[),\ a(v,v) \geqslant \alpha_0\, ||v||_{H^1}^2$,

Donc $a(\cdot,\cdot)$ définit un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_1$ et on a:

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ 0 < \alpha_0\, ||v||_{H^1}^2 \leqslant a(v,v) \leqslant M\, ||v||_{H^1}^2.$$

La norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_1$, notée $||\cdot||_1$, est équivalente à $||\cdot||_{H^1}$.
Donc $H_0^1(]0,1[)$ est un Hilbert pour la norme $||\cdot||_1$. En effet, une suite converge avec la norme $||\cdot||_1$ si et seulement si elle converge avec la norme $||\cdot||_{H^1}$ (c'est une propriété générale des normes équivalentes). Comme toute suite de Cauchy converge pour la norme $||\cdot||_{H^1}$ alors toute suite de Cauchy converge pour la norme $||\cdot||_1$. On en déduit que l'espace $H_0^1(]0,1[)$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_1$ est complet. Donc $(H_0^1(]0,1[), (\cdot,\cdot)_1)$ est un espace de Hilbert. C'est dans cet espace que l'on va appliquer le thérème de Riesz.

L'application $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0,1[)$ muni de $||\cdot||_1$. On a en effet $|L(v)| \leqslant M\, ||v||_{H^1}$ et $||v||_{H^1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}||v||_1$ par ce qui précède. On a donc $|L(v)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\alpha_0}}||v||_1$ et donc L est continue pour la norme $||.||_1$. C'est en fait une propriété générale : si deux normes sont équivalentes, une application est continue pour l'une si et seulement si elle l'est pour l'autre.

On est donc dans le cadre d'application du théorème de représentation de Riesz d'une forme linéaire:

$$\exists!\, u \in H_0^1(]0,1[) \;/\; L(v) = (u,v)_1 = a(u,v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

D'où l'existence (et l'unicité!) d'une solution au problème variationnel.

Finalement, on a montré l'existence et l'unicité du u solution du problème variationnel.

6. On peut démontrer l'existence et l'unicité d'une solution avec le thèorème de Lax-Milgram. En effet d'après les questions 1 et 4

   - $H_0^1(]0,1[)$ muni du produit scalaire usuel $< f, g >_{H^1} = < f, g >_{L^2} + < f', g' >_{L^2}$ est un espace de Hilbert
   - l'aplication a(.,.) est une forme bilinéaire continue et coercive
   - l'application L(.) est linéaire et continue

   On peut donc appliquer le thèorème de Lax-Milgram :

   $$\exists!\, u \in H_0^1(]0,1[) \;/\; L(v) = a(u,v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[).$$

   Toutes les hypothèses sont importantes, en particulier le fait que l'on soit sur un espace de Hilbert. C'est pour cela que l'on travaille sur $H_0^1(]0,1[)$ et non pas sur les fonctions continues ou C^1 qui ne sont pas des espaces de Hilbert.

7. Supposons que l'on dispose d'une solution au problème variationnel. On ajoute comme contrainte $u \in H^2(]0,1[)$ qui est l'espace des fonctions deux fois faiblement dérivables avec dérivées dans L^2. Alors

   $$\forall v \in H_0^1(]0,1[), L(v) = a(u,v)$$

   Montrons que u est solution de l'équation différentielle initiale. On a pour tout v

   $$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

   On peut intégrer par partie le premier terme

   $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx &= \left[\frac{du}{dx}v\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx \\ &= \frac{du}{dx}(1)v(1) - \frac{du}{dx}(0)v(0) - \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx \\ &= -\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx \text{ car } v \in H_0^1(]0,1[)\end{aligned}$$

   La formule d'intégration par partie est valable car on travaille sur un espace de dimension 1 (voir annexe du sujet) et que $\frac{du}{dx}$ et v sont dans H^1. On a donc pour tout v

   $$-\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

   que l'on peut réécrire

   $$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \int_0^1 \left[\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\right] v(x) = 0$$

   ce qui impose que presque partout on ait

   $$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0$$

   et les conditions aux limites sont vérifiés car $u \in H_0^1$ et est donc nulle sur les bords.

8. (a) La meilleure approximation de u dans V_N est l'élément u_N de V_N le "plus proche" de u. Plus précisément, u_N est l'élément de V_N qui minimise la distance $||\cdot||_1$ entre u et V_N, c'est à dire

   $$||u - u_N||_1 \leqslant ||u - v||_1 \quad \forall v \in V_N.$$

Comme $|| \cdot ||_1$ est associée au produit scalaire $(.,.)_1$, on sait que u_N est la projection orthogonale de u sur V_N. D'après la caractérisation de la projection orthogonale (applicable, car V_N sev fermé de $H_0^1(]0,1[)$), il vient:

$$\begin{aligned}
& (u - u_N, v)_1 = 0 \quad \forall v \in V_N \\
\iff & (u_N, v)_1 = (u, v)_1 \quad \forall v \in V_N \quad \text{(linéarité de } (\cdot,\cdot)_1 \text{ par rapport à la première variable)} \\
\iff & a(u_N, v) = (u, v)_1 = L(v) \quad \forall v \in V_N \quad \text{(d'après (4) appliquée à } v \in V_N \subset H_0^1(]0,1[))
\end{aligned}$$

Donc on cherche $u_N \in V_N$ tel que $a(u_N, v) = L(v) \quad \forall v \in V_N$.

(b) Soit $(\varphi_i)_{i\in\{1,N\}}$ une base de V_N. $u_N \in V_N$, donc u_N peut s'écrire de manière unique sous la forme: $u_N = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, \varphi_i$.

On a $a(u_N, v) = L(v) \quad \forall v \in V_N$. Or $\varphi_j \in V_N \quad \forall j \in \{1, N\}$. C'est donc en particulier vrai pour $v = \varphi_j \quad \forall j \in \{1, N\}$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où} \quad & a(u_N, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad \forall j \in \{1, N\} \\
\implies & \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad \forall j \in \{1, N\}
\end{aligned}$$

En écrivant ces N équations sous forme matricielle, on a:

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_1,\varphi_N) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

On cherche $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $\mathbb{A}\, x = b$

$$\text{avec} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_1,\varphi_N) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N,\varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

- $\mathbb{A}^T = \mathbb{A} \implies \mathbb{A}$ est symétrique.
- $x^T \, \mathbb{A}\, x = a(u_N, u_N) \quad \forall u_N = x^T \, \Phi \in V_N \quad$ où $\quad x = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix}$

  donc $\quad x^T \, \mathbb{A}\, x \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \implies \mathbb{A}$ est positive.
  et $\quad \left[x^T \, \mathbb{A}\, x = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^N} \right] \quad \implies \mathbb{A}$ est définie.

D'où $\mathbb{A}$ est symétrique, définie, positive $\implies$ $\mathbb{A}$ est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Donc $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et le système linéaire correspondant est un système de Cramer. Il existe une unique solution à un tel problème.

9. (a) Les fonctions φ_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, de P_1^K sont telles que:

$$\varphi_1(x) = a\,x + b \quad \text{avec} \left| \begin{array}{l} \varphi_1(0) = 1 \\ \varphi_1(1) = 0 \end{array} \right. \quad \implies \quad \varphi_1(x) = 1 - x$$

$$\varphi_2(x) = c\,x + d \quad \text{avec} \left| \begin{array}{l} \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_2(1) = 1 \end{array} \right. \quad \implies \quad \varphi_2(x) = x$$

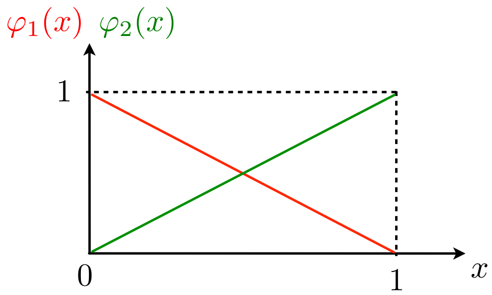

Figure 1: Fonctions de forme φ_1, φ_2 sur le segment $[0, 1]$.

(b) Discrétisation du segment $K = [0, 1]$ en $N + 1$ segments $[x_j, x_{j+1}]$. Un segment est un élément du maillage. Un point est un nœud du maillage.

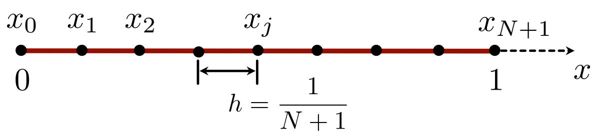

Figure 2: Discrétisation du segment $[0, 1]$.

Dimension de V_h: $\dim(V_h) = 2 \times (N+1) - (N+2) = N$, car le maillage est constitué de $N+1$ éléments avec 2 inconnues par élément, soit $2 \times (N + 1)$ inconnues sur tout le maillage et il y a N conditions de raccord et 2 conditions aux limites, soit $N + 2$ conditions à respecter. Alternativement, une fonction linéaire par morceau sur le maillage est exactement donnée par la valeur en chaque noeud (on fixe les extrémités des droites). Il y a N+2 noeuds mais les valeurs aux bords sont fixées, il reste donc N inconnues.

L'espace V_h est engendré par la base canonique $(\varphi_i)_{i\in\{1,N\}}$ telle que $\varphi_i \in V_h$ et $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, N\}$. La dimension de V_h est bien le cardinal de la base $(\varphi_i)_{i\in\{1,N\}}$: $\dim(V_h) = \text{Card}\left((\varphi_i)_{i\in\{1,N\}}\right) = N$.

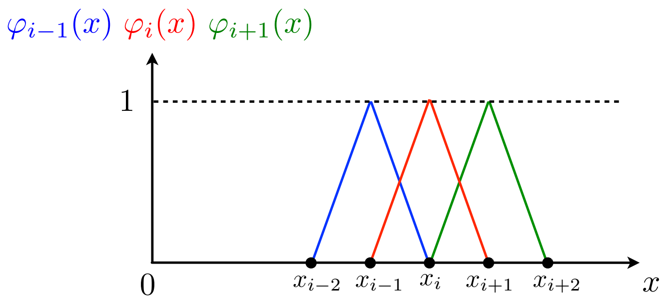

Figure 3: Fonctions de forme φ_{i-1}, φ_i, φ_{i+1}.

(c) Soit $u_h \in V_h$. u_h s'exprime de manière unique comme $u_h = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, \varphi_i$. Les cœfficients $\tilde{u}_i$ ont une signification simple: $u_h(x_j) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, \delta_{ij} = \tilde{u}_j \quad \forall j \in \{1, N\}$. $\tilde{u}_i$ est donc la valeur prise par u_h au point x_i.
La meilleure approximation de u dans V_h est la projection de u dans V_h (cf (6)), que l'on note $u_h =$

$\sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i \, \varphi_i$ et qui satisfait le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_1, \varphi_N) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N, \varphi_1) & \dots & \dots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

$$\text{où} \quad a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx \tag{1}$$

$$\text{avec} \quad \frac{d\varphi_i}{dx}(x) = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{h} & \text{sur} \quad [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & \text{sur} \quad [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right. , \quad \text{de même pour} \quad \frac{d\varphi_j}{dx}(x)$$

On voit ainsi que $a(\varphi_i, \varphi_j)$ sera nul dès lors que l'intersection des supports de φ_i et φ_j sera vide, c'est-à-dire que j sera différent de $i-1$, i ou $i+1$.
Sur un élément $[x_k, x_{k+1}]$ donné, il y aura donc 4 cas de figures:

- $\underline{i = k \text{ et } j = k}$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx = \frac{1}{h} = e_{11}$
- $\underline{i = k \text{ et } j = k+1}$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx = -\frac{1}{h} = e_{12}$
- $\underline{i = k+1 \text{ et } j = k}$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx = -\frac{1}{h} = e_{21}$
- $\underline{i = k+1 \text{ et } j = k+1}$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \, \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \, dx = \frac{1}{h} = e_{22}$

En formant la matrice élémentaire $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$ et en utilisant (**??**), on peut écrire $\mathbb{A}$ comme:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} e_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\mathbb{E}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbb{E}} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\mathbb{E}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix}$$

(d) $N=3$.

$$\text{vecteur solution} \quad u_h = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{matrice} \quad \mathbb{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{second membre} \quad b = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ L(\varphi_3) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{aligned} L(\varphi_i) &= \int_0^1 f(x)\, \frac{d\varphi_i}{dx}(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\, \frac{d\varphi_j}{dx}(x)\, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \left(\frac{1}{h}\right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \left(-\frac{1}{h}\right) dx \end{aligned} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx \\ \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx - \int_{x_3}^{x_4} f(x)\, dx \end{bmatrix}$$

<u>Bonus :</u> Èquivalence minimisation-solution. On veut montrer que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \iff I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose u solution de $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$.

$\forall v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\begin{aligned} I(v) - I(u) &= \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) - \frac{1}{2} a(u,u) + L(u) \\ &= \frac{1}{2}\, a(v-u, v-u) + a(u,v) - a(u,u) - L(v-u), \\ &\qquad \text{par linéarité de } L(\cdot) \text{ et bilinéarité de } a(\cdot,\cdot) \\ &= \frac{1}{2}\, a(v-u, v-u) + a(u, v-u) - L(v-u) \\ &= \frac{1}{2}\, a(v-u, v-u), \\ &\qquad \text{car } v-u \in H_0^1(]0,1[) \text{ espace vectoriel et, par hypthèse, } a(u, v-u) = L(v-u) \\ &\geqslant 0 \\ (&= 0 \quad \text{ssi} \quad u = v) \end{aligned}$$

D'où $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \implies I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose u solution de $I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$I(u+\alpha v) - I(u) = \frac{1}{2}\, a(u+\alpha v, u+\alpha v) - L(u+\alpha v) - \frac{1}{2}\, a(u,u) + L(u) \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\, a(u,u) + \frac{1}{2}\, a(\alpha v, \alpha v) + a(u, \alpha v) - \frac{1}{2}\, a(u,u) - L(u) - L(\alpha v) + L(u) \geqslant 0$$

D'où $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in H_0^1(]0,1[)$, $\quad P_v(\alpha) \geqslant 0$

avec $\quad P_v(\alpha) = \alpha^2\, \dfrac{a(v,v)}{2} + \alpha\, \left(a(u,v) - L(v)\right)$ polynôme du second degré

$\Longrightarrow \Delta = \left(a(u,v) - L(v)\right)^2 \leqslant 0 \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$

$\Longrightarrow a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$

D'où $I(u) \leqslant I(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[) \implies a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$