

```
In [1]: from IPython.display import Image
```

SU - Master SPI : MF2A/CompMech

MEF03 - MFC: Mécanique des Fluides Compressibles

Jean-Camille Chassaing, Sorbonne Université

Appendice A - Aide-mémoire de thermodynamique

L'objectif de ce chapitre est de présenter un bref rappel des éléments fondamentaux de la théorie de la thermodynamique à l'échelle macroscopique qui traite de l'étude des échanges d'énergie (travail, chaleur) entre corps matériels et les changements d'états de la matière.

Ces notions seront utilisées dans les chapitres suivants pour établir les modèles de mécanique des fluides caractérisant les écoulements supersoniques du cours.

Ce rappel ne se substitue en aucune matière à un manuel détaillé sur la thermodynamique des gaz.

1. Définitions élémentaires

Système : Corps solide, liquide ou gazeux délimité par une surface fermée marquant la frontière entre le système et le milieu extérieur.

Etat d'un système : Ensemble minimal de données permettant à tout instant de connaître toutes les grandeurs macroscopique du système.

Variables extensives et intensives : Les variables thermodynamiques décrivant le système peuvent être de deux types: Une variable **extensive** est proportionnelle à la quantité de matière du nombre de moles (masse, volume, entropie, enthalpie). Une variable **intensive** est indépendante de quantité de matière du système (température, pression, masse volumique,...)

Variable d'état : quantité dépendante uniquement de l'état initial et de l'état final quelque soit le chemin utilisé (cad, son intégrale est indépendante du chemin d'intégration). Elles sont extensives (enthalpie h, l'énergie interne e, l'entropie s).

ATTENTION :

- La dérivée d'une variable (ou encore fonction) d'état F est notée: dF et ∂F sa dérivée partielle.
- La dérivée d'une fonction qui n'est pas une fonction d'état sera notée: δF (variation de chaleur par exemple)

Remarque : D'un point de vue mathématique, les variations d'une fonction d'état sont représentées par des différentielles totales exactes

Equation d'état: Ensemble complet de paramètres suffisant pour décrire l'état dans lequel se trouve un système thermodynamique.

Système bivariant : Son état est entièrement défini par sa composition chimique, sa masse et deux variables d'état indépendantes.

Equilibre thermodynamique : Toutes les variables thermodynamiques du système sont indépendantes du temps

Nature d'un système : **isolé** : pas d'échanges avec le milieu extérieur, **fermé**: pas d'échanges de matière avec l'extérieur, **ouvert** : le système peut échanger de la matière avec l'extérieur.

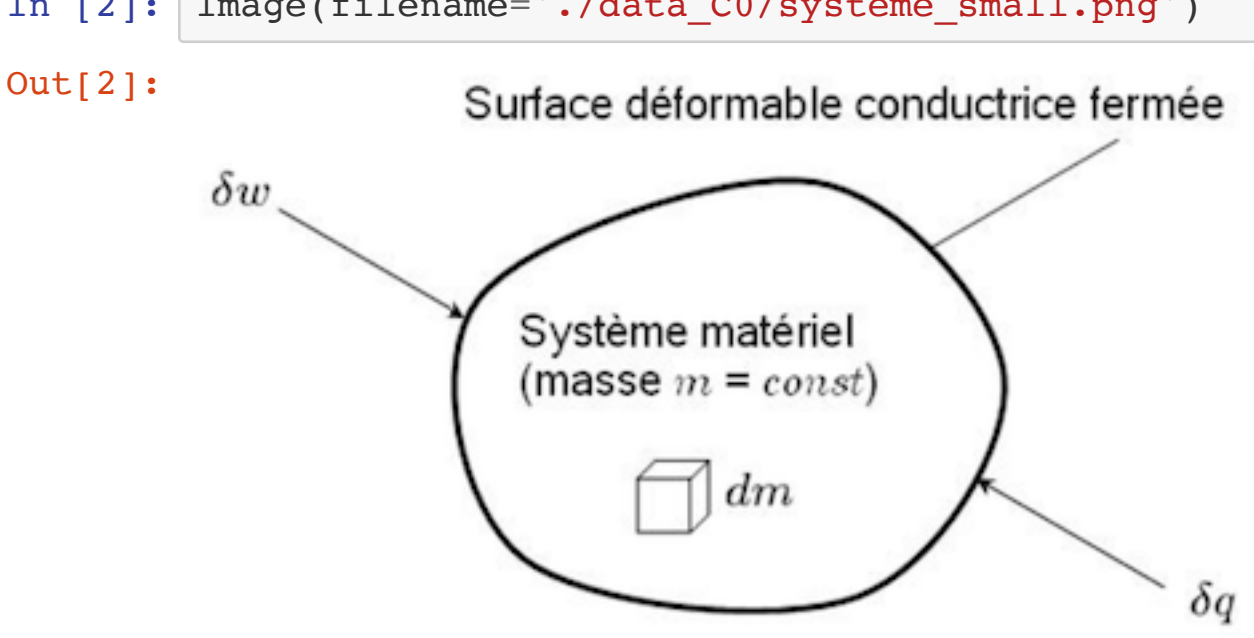
2. Premier Principe de la thermodynamique

2.1 Enoncé

Soit un système fermé contenant une substance homogène isotrope :

La somme de l'énergie fournie sous forme de chaleur δq et de travail δW à une masse de gaz m est égale à la variation de son énergie interne totale de_i

```
In [2]: Image(filename='./data_C0/systeme_small.png')
```



Pour une particule élémentaire de mass dm , le 1er principe s'écrit :

$$de_i = d(e + e_c + e_p) = \delta q + \delta W$$

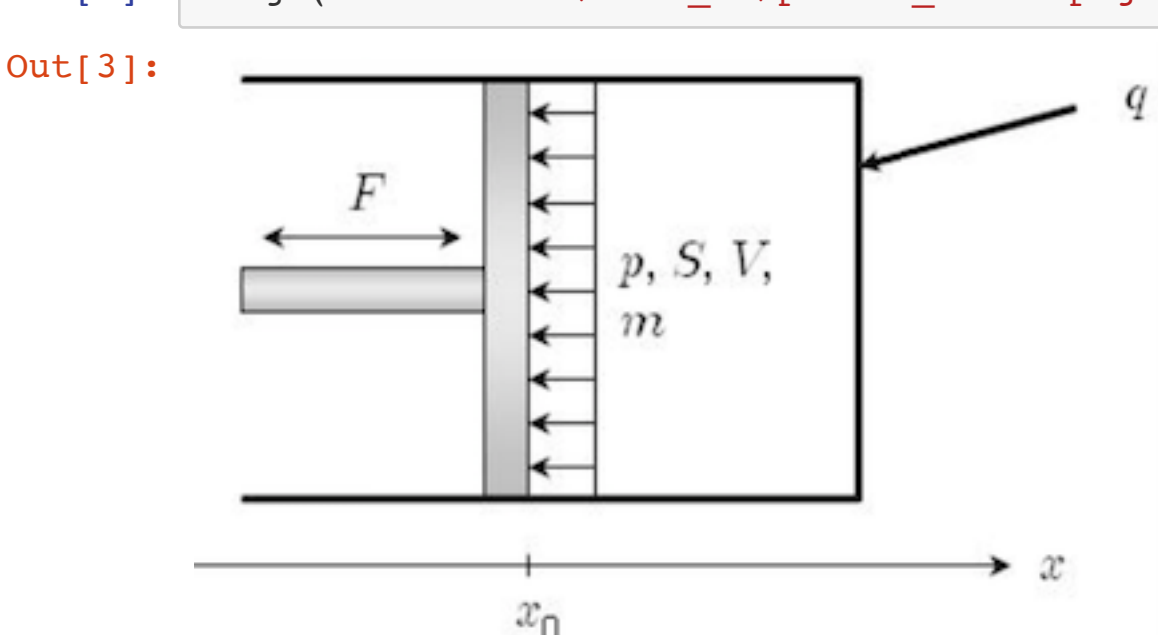
avec

- δq : Chaleur spécifique fournie par le milieu extérieur
- δW : Travail spécifique fourni par les forces mécaniques extérieures
- de_i : variation d'énergie interne spécifique totale
- de : variation d'énergie interne spécifique
- de_c : variation d'énergie cinétique spécifique
- de_p : variation d'énergie potentielle spécifique

2.2 Travail mécanique

Hypothèse : Sytème homogène isotrope. $e_p = e_c = 0$, déplacement **lent** d'un piston dans un tube et **sans frottement**. La dernière hypothèse permet d'assurer que le processus de transformation est **REVERSIBLE**. Autrement dit, les états intermédiaires au cours du déplacement du piston sont tous des états d'équilibre et le système peut évoluer à tout instant dans un sens ou dans l'autre.

```
In [3]: Image(filename='./data_C0/piston_small.png')
```



Résultat: **Le travail des forces de pression s'exprime par** : $\delta W = -pdv$

avec dv la variation de volume massique ($v = 1/\rho$ = vol d'un corps comparé à sa masse = V/m [m3.kg-1]) et ρ la masse volumique.

Le 1er principe s'exprime alors : $de = \delta q - pdv$

2.3 Transfert de chaleur δq

Pour une évolution **adiabatique** : $\delta q = 0$ (pas d'échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur).

Remarque 1: Un transfert de chaleur δq non nul implique une variation de température dT du système.

Définition : Le coefficient de chaleur spécifique est défini par : $c = \frac{\delta q}{dT}$.

Remarque 2: La variable q n'étant pas une fonction d'état, c dépend de la transformation subie par le système.

Remarque 3: A l'aide du 1er principe, on obtient que : $c = \frac{\partial e}{\partial T} + p \frac{\partial v}{\partial T}$

Il est alors très courant de faire usage des chaleurs spécifiques à pression constante c_p et volume constant c_v .

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

où l'on a introduit la fonction d'état **enthalpie** $h = e + p/\rho$ afin d'obtenir une expression de c_p simple et facilement mesurable.

remarque 4: Expressions générales pour δq dans le cas d'une transformation **réversible** :

$$\delta q = c_v dT + \ell_v dv = c_p dT + \ell_p dP$$

avec ℓ_p et ℓ_v les coefficients calorimétriques de chaleur latente de dilatation à pression et volume constants :

$$\ell_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \quad \ell_p = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

En injectant les expressions de ℓ_v et ℓ_p dans celle de δq , on peut alors exprimer la différence $c_p - c_v$ comme suit :

$$c_p - c_v = \left[P + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \left[v - \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T \right] \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p$$

Définition: Le rapport γ des chaleurs spécifiques, ou encore coefficient adiabatique ou polytropique est défini par : $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

3 Second Principe de la thermodynamique

3.1 Enoncé

Définition : L'entropie s est une variable **d'état** extensive telle que sa variation au cours d'une évolution d'un système se décompose de la manière suivante :

$$ds = ds_e + ds_i$$

avec ds_e : Variation d'entropie dû aux échanges de chaleur avec l'extérieur telle que $ds_e = \frac{\delta q}{T}$

ds_i : Accroissement d'entropie relative à une processus **irréversible** à l'intérieur du système (transfert de chaleur interne, réaction chimique, onde de choc, viscosité,...)

Enoncé du second principe : Pour un système fermé, le second principe peut se formuler par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$ds_i \geq 0, \quad ds \geq \frac{\delta q}{T}$$

Soit encore, l'entropie d'un système isolé ne peut que croître au cours du temps

Cas particuliers :

- Transformation adiabatique : $ds_e = 0$
- Transformation réversible : $ds_i = 0$ et donc $ds = \frac{\delta q}{T}$
- Transformation isentropique : $ds = 0$ (=>adiabatique+réversible)

3.2 Relations de Gibbs

Soit une transformation réversible avec transfert de chaleur : $\delta q = Tds$.

Le 1er principe donne immédiatement : $de = Tds - pdv$.

Compte-tenu de la définition de l'enthalpie, sa variation s'exprime par : $dh = de + pdv + vdp$.

On obtient alors les **relations de Gibbs** :

$$Tds = de + pdv = dh - vdp$$

3.3 Variation d'entropie pour une transformation quelconque

Par intégration de transformations générales infinitésimales entre les états 1 et 2, la variation d'entropie résultante s'écrit, en vertu du 1er principe :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{de}{T} + \int_1^2 \frac{p}{T} dv + \Delta s_i$$

4 Application à un gaz dit 'parfait'

4.1 Loi d'état pour l'air

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à l'étude d'écoulement de gaz parfaits, satisfaisant la loi état sous la forme suivante :

$$p = \rho r T$$

Par application aux principes de la thermodynamique, on montre alors que, $e = e(T)$ et $h = h(T)$ **seulement**.

De plus, par conformité aux lois de Joule on a que :

$$de = c_v dT \quad \text{et} \quad dh = c_p dT$$

où la constante r dépend du gaz, avec $r = R/M$ et $R = 8,314 J K^{-1} mol^{-1}$ la constante universelle des gaz parfaits.

Pour de l'air, de masse molaire $M = 28,965338 \times 10^{-3} kg. mol^{-1}$, on a donc $r = 287,04 J/kg/K$.

Enfin, pour un gaz parfait, les chaleurs spécifiques à pression et volume constants sont liées par la relation de **Meyer**

$$c_p - c_v = r$$

En conséquence, on a immédiatement que :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

Pour l'air, le coefficient polytropique est : $\gamma = 1,4$

4.2 Variation d'entropie

Le système bivariant défini par $s = s(P, T)$ permet d'écrire la variation d'entropie sous la forme :

$$\Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

Considérant $s = s(v, T)$ on a alors

$$\Delta s = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

4.3 Transformation isentropique

Dans le cas d'un processus isentropique, la condition $\Delta s = 0$ permet d'établir les relations dites isentropiques

$$\left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-\gamma}$$

Sachant que $v = 1/\rho$ abouti immédiatement à la relation de Laplace :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = Cte$$

4.4 Célérité du son

Considérons un milieu au repos dont l'état est décrit par les variables : ρ_0 , P_0 et T_0 . Soit une petite perturbation de pression d'amplitude suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que l'évolution du milieu soit isentropique. La loi de Laplace stipule donc que la pression est uniquement fonction de la masse volumique, de sorte qu'on puisse effectuer un développement en série de Taylor au premier ordre autour des conditions de références :

$$\Delta P = P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0) + \dots$$

Définissant la grandeur thermodynamique a_0 telle que :

$$a_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

on voit immédiatement que $\Delta P = a_0^2 \Delta \rho$ où la dimension de la grandeur a_0 correspond au carré d'une vitesse, ce qui amène naturellement à la définition de la célérité du son.

Nous montrerons en exercice que, dans le cadre d'un gaz parfait, la célérité du son s'exprime indifféremment par :

$$a_0 = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}$$

Annexe 1 - Code python

```
In [4]: #define gaz properties
gam = 1.4
r = 287.05 #[r] = J/kg/K
```

Références

[1] H. Lumbroso, "Thermodynamique: Problèmes résolus, 1re année MPSI, PCST, TPC, TSI, PTSI", Dunod (4me ed.), 2000, ISBN-13: 978-2840741190