

# MSX02 - Épreuve de Vibrations

Durée : 2h

## Documents et calculatrices interdits

L'objet de cette étude est le comportement vibratoire d'une structure de type "satellite" présentée sur la Fig. 1. Dans la première partie on s'intéressera au comportement global du système, dans lequel chacun des trois sous-ensembles est considéré comme un solide rigide. Dans la deuxième partie on se concentrera sur l'étude de vibrations de torsion d'une des ailes du satellite. Les deux parties sont largement indépendantes.

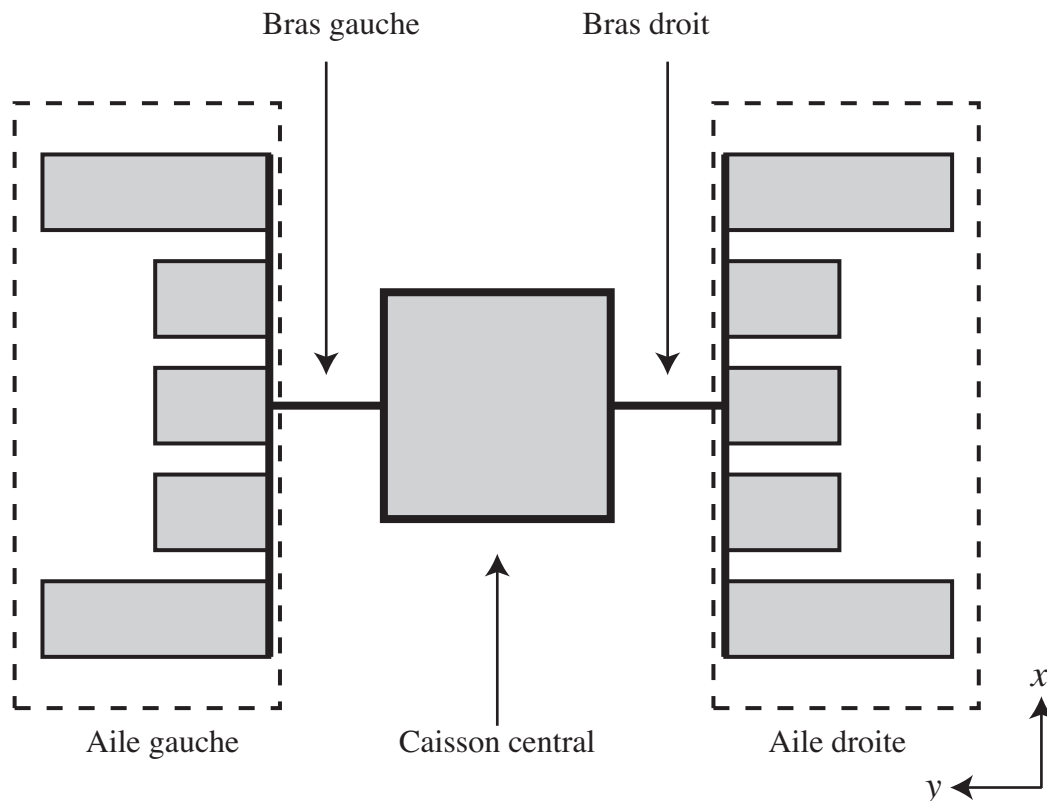


FIG. 1. Structure "satellite" étudiée.

### 1 - Comportement vibratoire global du satellite

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'au mouvement suivant l'axe  $x$  des trois sous-ensembles du système. Lors des calculs de pré-dimensionnement un modèle très simplifié est utilisé. La déformation du caisson et la déformation à l'intérieur des ailes sont supposées négligeables devant la déformation due aux bras de connexion. De même les effets d'inertie dus à la rotation d'un des sous-ensemble sont négligés. Suivant cette idée, **seul le mouvement de translation selon  $x$  est étudié**. Le caisson central (respectivement chacune des ailes) est donc modélisé par un solide rigide de masse  $M$  (respectivement  $m$ ), cf Fig. 2. Les bras de liaison entre le caisson et les ailes sont modélisés par des ressorts linéaires dirigés suivant  $x$  (on néglige la rotation obtenue par la flexion des bras). On notera  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  les déplacements de l'aile gauche, du caisson, de l'aile droite à partir de leur position d'équilibre.

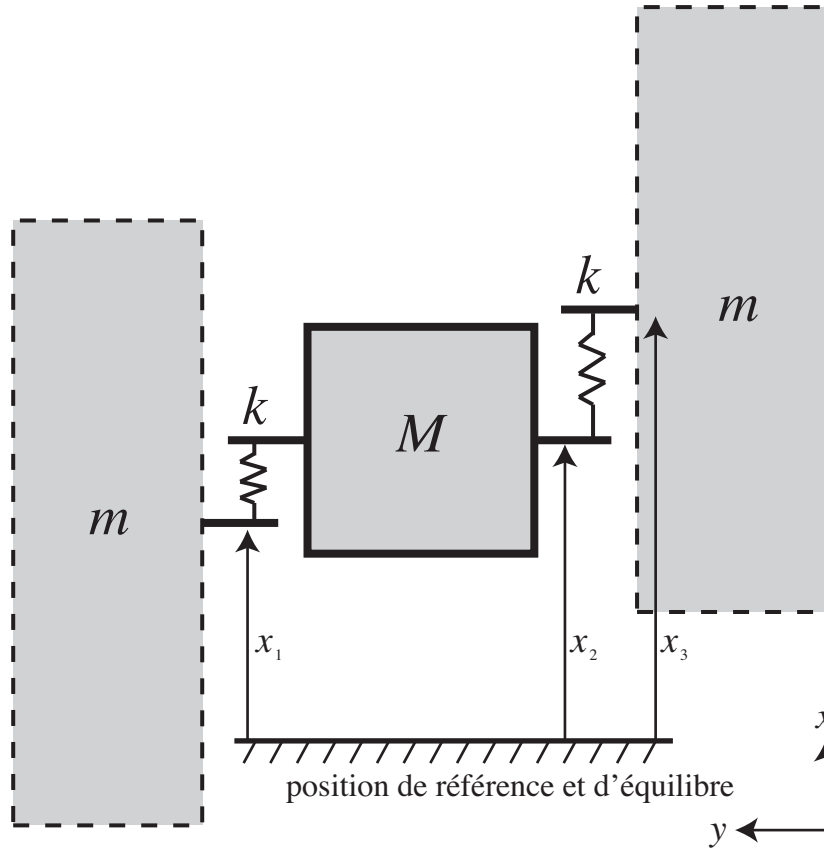


FIG. 2. Modèle global simplifié de la structure étudiée.

**Question 1 :** Exprimer l'énergie potentielle du système.

**Question 2 :** Exprimer l'énergie cinétique du système.

**Question 3 :** Dédire, en appliquant la méthode de Lagrange, les équations de mouvement.

*Si vous n'avez pas réussi à répondre à la question précédente, vous pouvez continuer le sujet en obtenant les équations de mouvement par la méthode de votre choix.*

**Question 4 :** Mettre les équations de mouvement sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{X}} + \mathbf{K}\underline{X} = \underline{0} \quad (1)$$

dans laquelle le vecteur  $\underline{X}$  est égal à  $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ .

Préciser les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

**Question 5 :** On cherche les pulsations propres associées au problème précédent. Écrire le problème aux valeurs propres généralisées correspondant à l'équation matricielle précédente.

**Question 6 :** En déduire l'équation vérifiée par une pulsation propre  $\omega_i$ . Donner les solutions de cette équation en fonction de  $k$ ,  $M$  et  $m$ .

**Question 7 :** Calculer les modes propres associés aux pulsations propres trouvées. On normalisera chacun des modes de telle sorte que la première composante de chaque mode soit égale à 1.

**Question 8 :** Calculer l'énergie de déformation du mode de plus basse fréquence. Interpréter ce résultat.

## 2 - Étude des vibrations de torsion d'une aile

Cette partie est consacrée à l'étude des vibrations de torsion d'une des ailes. Une aile est formée d'une structure porteuse sur laquelle sont disposés cinq panneaux, voir Fig. 3, les deux panneaux extrêmes étant de dimension supérieures aux trois panneaux centraux. La structure porteuse peut être considérée comme une poutre de longueur  $2L$ , de module d'Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$ , de module de cisaillement  $G$ , d'inertie géométrique de section  $I$  (suivant  $x$ ), de section  $S$ , de masse volumique  $\rho$ . Dans cette étude de pré-dimensionnement, plusieurs modèles simplifiés seront utilisés pour prendre en compte les panneaux. L'étude consiste à établir dans un premier temps les équations pour la poutre, et ensuite à y appliquer des modélisations différentes pour les panneaux. Ainsi dans le premier modèle les panneaux sont négligés, seule la poutre exerce des effets dynamiques. Dans le second modèle, on considère que les effets d'inertie des panneaux internes (plus petits) sont négligeables, mais on conserve les effets d'inertie dues au panneaux externes.

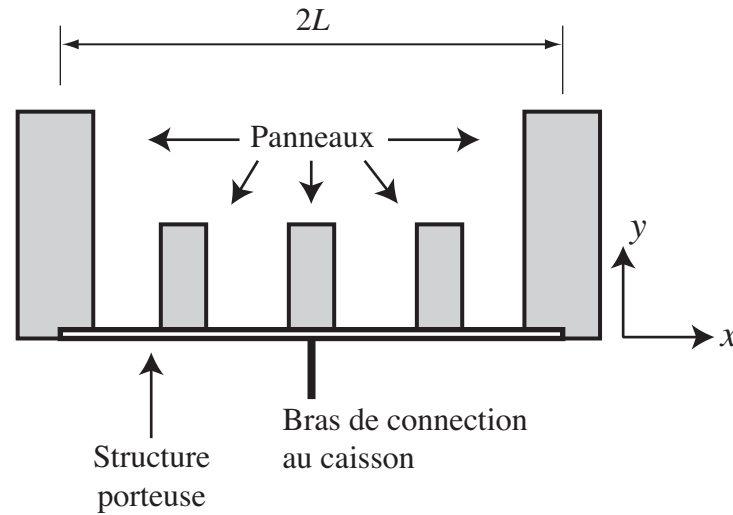


FIG. 3. Structure porteuse supportant les panneaux.

**Question 9 :** Rappeler les équations locales d'une poutre à section circulaire constante sollicitée en torsion dynamique. On notera  $\theta(x, t)$  la rotation d'une section de la poutre autour de la ligne moyenne, et  $M(x, t)$  le moment de torsion correspondant.

**Question 10 :** À partir de ces équations, démontrer que l'équation d'onde vérifiée à l'intérieur de la poutre en mode libre par  $\theta(x, t)$  prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

**Question 11 :** Préciser la célérité  $c_0$  des ondes de torsion dans la poutre en fonction des paramètres géométriques et matériaux de la poutre. Dans un souci de simplification, on néglige le gauchissement des sections (hypothèse classique).

**Question 12 :** Comparer cette célérité à la célérité des ondes de traction-compression qui se propageraient dans la même poutre.

**Question 13 :** On décompose la rotation  $\theta(x, t)$  en onde stationnaire :

$$\theta(x, t) = f(x) g(t) \quad (3)$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $f$  et celle vérifiée par  $g$ .

**Question 14 :** Préciser la forme générale des solutions  $f$  et  $g$  des équations précédentes. En déduire la relation entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $k$  (auss appelé *relation de dispersion*) des ondes de torsion.

**Question 15 :** Préciser le nombre de conditions aux limites nécessaires pour pouvoir résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $f$ . Qu'en est-il des conditions nécessaires pour résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $g$  ?

### 1<sup>er</sup> modèle

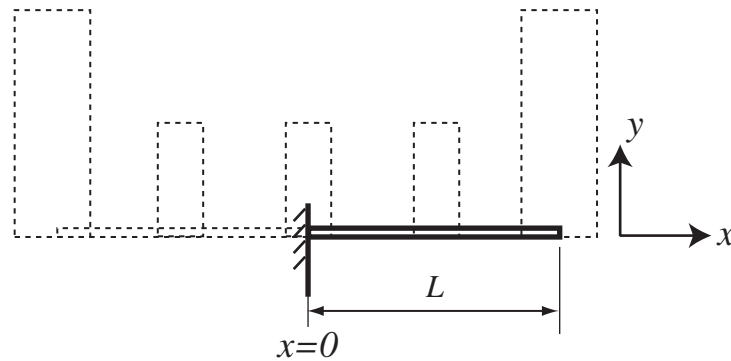


FIG. 4. Premier modèle : les panneaux sont négligés.

Dans ce premier modèle, les effets d'inertie des panneaux sont négligés. Compte tenu de la symétrie, on se décide à traiter le problème uniquement sur la moitié de la poutre considérée comme encastrée en son milieu, voir Fig. 4.

**Question 16 :** Écrire les conditions aux limites du problème.

**Question 17 :** Résoudre et exprimer les pulsations propres de ce modèle en fonction de  $c_0$ ,  $L$ ,  $\pi$ .

## 2<sup>e</sup> modèle

Le second modèle prend en compte les effets d'inertie des panneaux externes, qui sont modélisés par une inertie ponctuelle  $J$  solidaire de la poutre en  $x = L$ . Par contre l'influence des panneaux internes, d'inertie plus faible, est négligée.

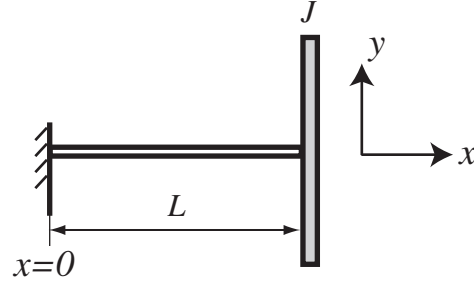


FIG. 5. Deuxième modèle : les panneaux internes sont négligés, les panneaux externes sont assimilés à une inertie  $J$ .

**Question 18 :** Montrer que la condition limite en  $x = L$  peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta}(L, t) = -\beta \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) \quad (4)$$

où on précisera la valeur de  $\beta$ .

**Question 19 :** En déduire que le vecteur d'onde  $k$  vérifie une équation de la forme :

$$k L \tan(k L) = \alpha \quad (5)$$

où on précisera la valeur de la constante  $\alpha$  en fonction des paramètres matériaux et géométriques du problème.

**Question 20 :** Retour sur hypothèses : les modèles précédents ont été menés avec l'hypothèse d'encastrement pour prendre en compte la symétrie de l'aile du satellite. Expliquer les limites de ce choix en relation avec les modes propres et les fréquences propres obtenus.