Corrigé de l'épreuve du 5 mars 2014

Alignement des centres instatanés de rotation (CIR)

(i) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{I}_{21} \in 2/1)$ et $\vec{V}(\mathrm{I}_{10} \in 1/0)$.

Par définition du CIR, $\vec{V}(\mathrm{I}_{21} \in 2/1) = \vec{0}$ et $\vec{V}(\mathrm{I}_{10} \in 1/0) = \vec{0}$.

(ii) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1)$ à l'aide de $\vec{\Omega}_{21}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}}$ puis $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0)$ à l'aide de $\vec{\Omega}_{10}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}$.

On utilise la relation de torseur :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1) &= \vec{V}(\mathrm{I}_{21} \in 2/1) + \vec{\Omega}_{21} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{21} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}},\\ \vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0) &= \vec{V}(\mathrm{I}_{10} \in 1/0) + \vec{\Omega}_{10} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}.\end{aligned}$$

(iii) Écrire une relation entre $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/0)$, $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1)$ et $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0)$.

La loi de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/0) = \vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/1) + \vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 1/0)$$

(iv) En déduire une relation entre ω_{21}, ω_{10}, $\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}$ qui prouve que les points I_{21}, I_{20} et I_{10} sont alignés.

Dans la relation précédente, on a $\vec{V}(\mathrm{I}_{20} \in 2/0) = \vec{0}$ par définition du CIR. En utilisant les relations obtenues en (ii), on trouve :

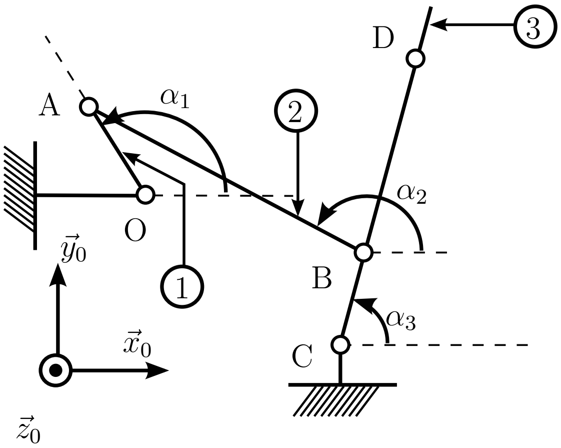
$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{\Omega}_{21} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}\\ &= \vec{z} \wedge (\omega_{21}\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}} + \omega_{10}\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}})\end{aligned}$$

Cette relation implique que $\omega_{21}\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}} + \omega_{10}\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}}$ est colinéaire à $\vec{z}$. Or pour le mouvement plan sur plan considéré, les CIR sont dans un plan perpendiculaire à $\vec{z}$ et, par conséquent, $\omega_{21}\overrightarrow{\mathrm{I}_{21}\mathrm{I}_{20}} + \omega_{10}\overrightarrow{\mathrm{I}_{10}\mathrm{I}_{20}} = \vec{0}$ ce qui montre que I_{21}, I_{20} et I_{10} appartiennent à une même droite. Noter que si ω_{10} et ω_{21} sont connus, la relation trouvée permet, si l'on connait 2 CIR, de déterminer la position du troisième.

Batteur à houle

Cinématique analytique

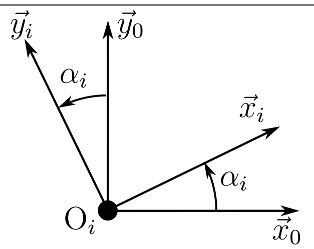
1) Dessiner les diagrammes de changement de base. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{10}$, $\vec{\Omega}_{20}$ et $\vec{\Omega}_{30}$ de la roue (1), de la bielle (2) et du bras (3) par rapport au bâti (0).



$$\alpha_1 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{OA}}}),$$
$$\alpha_2 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{BA}}}),$$
$$\alpha_3 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{CB}}}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r_1 \vec{x}_1,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \ell_2 \vec{x}_2,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = r_3 \vec{x}_3,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = R_3 \vec{x}_3.$$

FIGURE 1 – Schéma cinématique du sous-système $(1 \cup 2 \cup 3)$.

Les diagrammes de changement de base font à chaque fois intervenir la base de $\mathcal{R}_0$ et sont de la forme ci-contre avec $\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}$, $\mathrm{O}_2 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{O}_3 = \mathrm{C}$. Les vecteurs vitesse de rotation sont $\vec{\Omega}_i = \dot{\alpha}_i \vec{z}_0$ $(i = 1, 2, 3)$.



2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ du point A dans le mouvement de la roue par rapport au bâti. Exprimer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{A} \in 1/0)$ et en déduire le torseur des accélérations.

On peut par exemple utiliser la relation de torseur

$$\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0) = \vec{\Omega}_{10} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dot{\alpha}_1 \vec{z}_0 \wedge (r_1 \vec{x}_1)$$

soit finalement $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0) = r_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}_1$.
Le vecteur accélération s'obtient par dérivation :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{A} \in 1/0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}_1)\Big|_0 = r_1 \left(\ddot{\alpha}_1 \vec{y}_1 + \dot{\alpha}_1 \frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \right) = r_1 (\ddot{\alpha}_1 \vec{y}_1 - \dot{\alpha}_1^2 \vec{x}_1).$$

Le torseur des accélerations n'existe tout simplement pas !!

3) Exprimer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ au point B et au point D. Quelle est la nature de ce torseur ?

Par définition du torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\}_{\mathrm{B}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{30} \\ \vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_3 \vec{z} \\ \vec{\Omega}_{30} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CB}} = r_3 \dot{\alpha}_3 \vec{y}_3 \end{array} \right\}.$$

Au point D, le torseur vaut :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\}_{\mathrm{D}} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_3 \vec{z} \\ R_3 \dot{\alpha}_3 \vec{y}_3 \end{array} \right\}.$$

Ce torseur est un glisseur sauf dans le cas particulier où le mécanisme est au repos.

4) Calculer la dérivée vectorielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Big|_0$ par rapport au bâti (garder les expressions en bases mobiles : le changement de repère n'est pas demandé).

On dérive le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\big)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r_1\vec{x}_1 - \ell_2\vec{x}_1 - r_3\vec{x}_3\big)\Big|_0$$
$$= r_1\dot{\alpha}_1\vec{y}_1 - \ell_2\dot{\alpha}_2\vec{y}_2 - r_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3.$$

Pas besoin de projeter dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à ce stade.

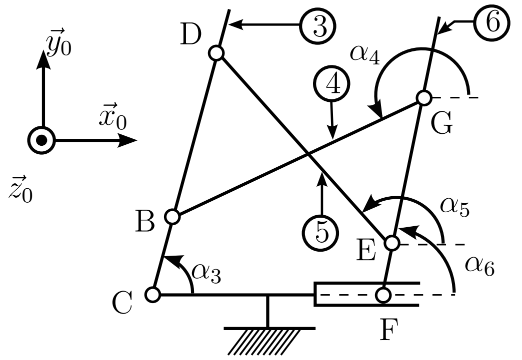
5) Que vaut le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{C} \in 3/0)$? En déduire, à l'aide de la question précédente, deux relations scalaires entre les angles α_1, α_2 et α_3 (et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\alpha}_3$).

Le point C est fixe dans $\mathcal{R}_3$ et dans $\mathcal{R}_0$, et donc $\vec{V}(\mathrm{C} \in 3/0) = \vec{0}$. Ce vecteur vitesse coïncide avec la dérivée calculée à la question précédente, ce qui donne $r_1\dot{\alpha}_1\vec{y}_1 - \ell_2\dot{\alpha}_2\vec{y}_2 - r_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 = \vec{0}$. La projection dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ se traduit par 2 relations scalaires :

$$r_1\dot{\alpha}_1(\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0) - \ell_2\dot{\alpha}_2(\vec{y}_2 \cdot \vec{x}_0) - r_3\dot{\alpha}_3(\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_0) = 0,$$
$$r_1\dot{\alpha}_1(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0) - \ell_2\dot{\alpha}_2(\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_0) - r_3\dot{\alpha}_3(\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_0) = 0.$$

Les diagrammes de changement de base permettent d'expliciter les différentes projections :

$$-r_1\dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1 + \ell_2\dot{\alpha}_2 \sin\alpha_2 + r_3\dot{\alpha}_3 \sin\alpha_3 = 0,$$
$$r_1\dot{\alpha}_1 \cos\alpha_1 - \ell_2\dot{\alpha}_2 \cos\alpha_2 - r_3\dot{\alpha}_3 \cos\alpha_3 = 0.$$



$$\alpha_3 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{CB}}}), \quad \alpha_4 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{GB}}}),$$
$$\alpha_5 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{ED}}}), \quad \alpha_6 = (\widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{FG}}}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = r_3\vec{x}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = R_3\vec{x}_3,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \ell_4\vec{x}_4, \qquad \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \ell_5\vec{x}_5,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = r_6\vec{x}_6, \qquad \overrightarrow{\mathrm{FG}} = R_6\vec{x}_6.$$

FIGURE 2 – Schéma cinématique du sous-système $(3 \cup 4 \cup 5 \cup 6)$.

6) Tracer les nouveaux diagrammes de changement de base et donner les vecteurs vitesse de rotation associés.

Les diagrammes de changement de base et les vecteurs vitesse de rotation sont les mêmes que pour la question 1 ; on introduit de nouvelles origines $\mathrm{O}_4 = \mathrm{G}$, $\mathrm{O}_5 = \mathrm{E}$ et $\mathrm{O}_6 = \mathrm{F}$ pour les repères $\mathcal{R}_i$ $(i = 4, 5, 6)$.

7) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{B} \in 4/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{D} \in 5/0)$ (choisir la base la plus commode).

B et D sont des centres de liaisons pivot. On en déduit $\vec{V}(\mathrm{B} \in 4/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{D} \in 5/0) = \vec{V}(\mathrm{D} \in 3/0)$. Les expressions de ces vecteurs ont été obtenues question 3).

8) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{G} \in 4/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{B} \in 4/0)$ à l'aide de la relation de torseur.

Relation de torseur pour le mouvement 4/0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{G} \in 4/0) &= V(\mathrm{B} \in 4/0) + \vec{\Omega}_{40} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BG}} \\ &= r_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 - \ell_4\dot{\alpha}_4\vec{y}_4.\end{aligned}$$

9) Exprimer $\vec{V}(\mathrm{E} \in 5/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{D} \in 5/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{G} \in 6/0)$ en fonction de $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0)$ à l'aide de la relation de torseur.

Relation de torseur pour le mouvement 5/0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{E} \in 5/0) &= V(\mathrm{D} \in 5/0) + \vec{\Omega}_{50} \wedge \overrightarrow{\mathrm{DE}} \\ &= R_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 - \ell_5\dot{\alpha}_5\vec{y}_5\end{aligned}$$

et pour le mouvement 6/0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{G} \in 6/0) &= \vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0) + \vec{\Omega}_{60} \wedge \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0) + \vec{\Omega}_{60} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{EF}} + \overrightarrow{\mathrm{FG}}) \\ &= \vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0) + (R_6 - r_6)\dot{\alpha}_6\vec{y}_6.\end{aligned}$$

10) À l'aide des questions précédentes, trouver deux relations scalaires entre α_3, α_4, α_5 et α_6 (et leurs dérivées).

Les deux questions précédentes nous ont permis d'exprimer $\vec{V}(\mathrm{G} \in 4/0) = \vec{V}(\mathrm{G} \in 6/0)$ de deux manières différentes. Ainsi, on a

$$\vec{V}(\mathrm{G} \in 6/0) = r_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 - \ell_4\dot{\alpha}_4\vec{y}_4 = \vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0) + (R_6 - r_6)\dot{\alpha}_6\vec{y}_6.$$

Mais $\vec{V}(\mathrm{E} \in 6/0) = \vec{V}(\mathrm{E} \in 5/0) = R_3\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 - \ell_5\dot{\alpha}_5\vec{y}_5$, d'où

$$\ell_5\dot{\alpha}_5\vec{y}_5 - \ell_4\dot{\alpha}_4\vec{y}_4 = (R_3 - r_3)\dot{\alpha}_3\vec{y}_3 + (R_6 - r_6)\dot{\alpha}_6\vec{y}_6.$$

En projetant sur $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on trouve les relations demandées :

$$\begin{aligned}-\ell_5\dot{\alpha}_5\sin\alpha_5 + \ell_4\dot{\alpha}_4\sin\alpha_4 &= -(R_3 - r_3)\dot{\alpha}_3\sin\alpha_3 - (R_6 - r_6)\dot{\alpha}_6\sin\alpha_6, \\ \ell_5\dot{\alpha}_5\cos\alpha_5 - \ell_4\dot{\alpha}_4\cos\alpha_4 &= (R_3 - r_3)\dot{\alpha}_3\cos\alpha_3 + (R_6 - r_6)\dot{\alpha}_6\cos\alpha_6.\end{aligned}$$

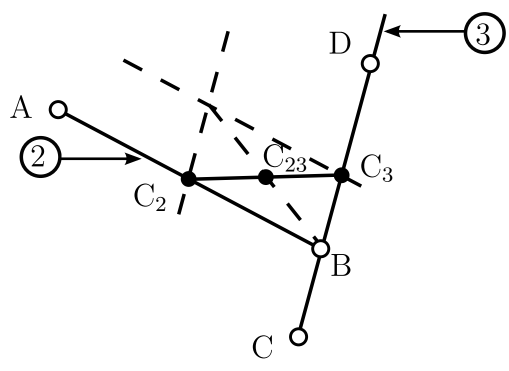
Cinématique graphique

1) Trouver le centre de masse C_{32} des solides (2) et (3) supposés être des tiges homogènes de masses identiques à l'instant considéré.

Comme les solides sont assimilés à des tiges homogènes, C_2 se trouve au milieu de (2) et C_3 au milieu de (3).
Par définition du centre de masse, on a :

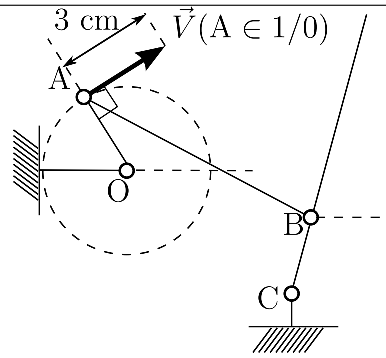
$$(m_2 + m_3)\overrightarrow{\mathrm{MC}_{23}} = m_2\overrightarrow{\mathrm{MC}_2} + m_3\overrightarrow{\mathrm{MC}_3}, \quad \forall \mathrm{M}$$

où m_2 et m_3 sont les masses de (2) et (3). Si $m_2 = m_3$, on a simplement $\overrightarrow{\mathrm{MC}_{23}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{MC}_2} + \overrightarrow{\mathrm{MC}_3}), \forall \mathrm{M}$.
En choisissant le point particulier $\mathrm{M} = \mathrm{C}_2$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{C}_{23}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3}$ ce qui indique que C_{23} est au milieu du segment $[\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3]$.



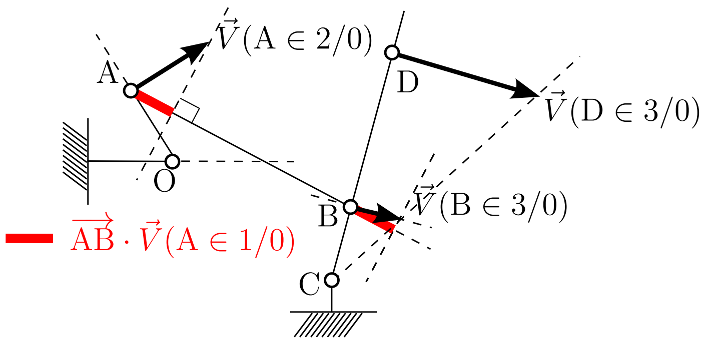
2) Construire $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ de sorte que $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)\| = 3$ cm et que $\dot{\alpha}_1 < 0$.

La roue (1) est en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0). Par conséquent, le support de $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ est la droite perpendiculaire à (OA) qui passe par A (càd la tangente au cercle de centre O et de rayon r_1). La roue (1) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ($\dot{\alpha}_1 < 0$), ce qui détermine le sens de $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$.



3) Construire $\vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$ et en déduire $\vec{V}(\mathrm{D} \in 3/0)$.

Le support de $\vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$ est la droite perpendiculaire à (CB) passant par B. D'après l'équiprojectivité appliquée au solide (2) dans son mouvement par rapport au bâti, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{V}(\mathrm{A} \in 2/0) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{V}(\mathrm{B} \in 2/0)$. Comme (2) et (1) sont en liaison pivot en A et (3) et (2) sont en liaison pivot en B, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$. Pour $\vec{V}(\mathrm{D} \in 3/0)$, on utilise le triangle des vitesses de sommet C (c'est le plus pratique car C, B et D sont alignés).



4) Identifier le CIR I_{53} du mouvement de la bielle (5) par rapport au bras (3) puis le CIR I_{65} du mouvement du volet (6) par rapport à la bielle (5). En déduire une droite sur laquelle se trouve le CIR I_{63} *(Indication : utiliser la propriété d'alignement des CIR)*.

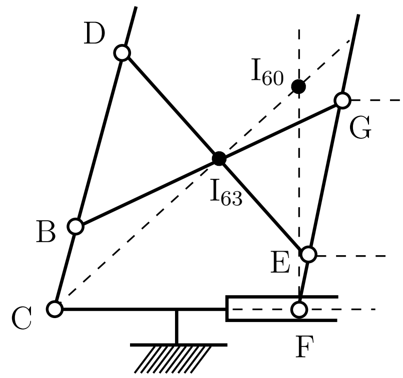
La bielle (5) et le bras (3) sont en liaison pivot en D et donc $\mathrm{I}_{53} = \mathrm{D}$. De même, le volet (6) et la bielle (5) sont en liaison pivot en E, d'où $\mathrm{I}_{65} = \mathrm{E}$. D'après la propriété d'alignement des CIR, I_{63} est sur la droite (DE).

5) Identifier le CIR I_{64} du mouvement du volet (6) par rapport à la bielle (4) puis le CIR I_{43} du mouvement de la bielle (4) par rapport au bras (3). En déduire une droite sur laquelle se trouve le CIR I_{63} (distincte de celle de la question précédente). Placer I_{63} sur le schéma.

Le volet (6) et le bielle (4) sont en liaison pivot en G et donc $\mathrm{I}_{64} = \mathrm{G}$. De même, la bielle (4) et le bras (3) sont en liaison pivot en B, d'où $\mathrm{I}_{43} = \mathrm{B}$. Toujours d'après la propriété d'alignement des CIR, I_{63} est sur la droite (BG). D'après la question précédente, I_{63} se trouve donc à l'intersection des droites (DE) et (BG).

6) Trouver deux droites distinctes sur lesquelles se trouve I_{60}. Construire ce CIR sur le schéma.

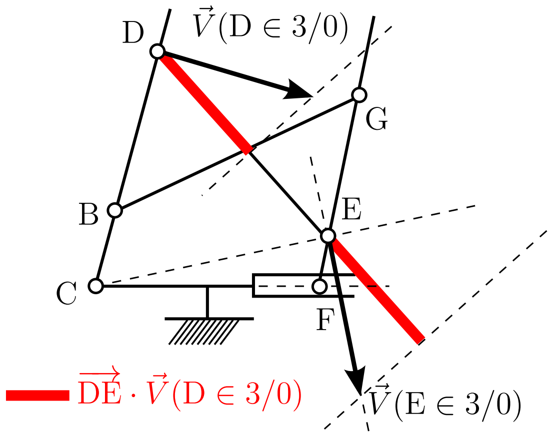
On utilise à nouveau la propriété d'alignement des CIR pour montrer que I_{60} se trouve sur la droite $(I_{63}I_{30})$ avec $I_{30} = C$ et $I_{63} = (DE) \cap (BG)$ obtenu à la question précédente.
D'autre part, comme (6) est en liaison pivot glissière avec (0), le vecteur vitesse $\vec{V}(F \in 6/0)$ a pour support la droite (CF). L'intersection de $(I_{63}B)$ avec la perpendiculaire à (CF) passant par F fournit le CIR I_{60}.



7) Construire $\vec{V}(E \in 3/0)$ sur le schéma.

Le support de $\vec{V}(E \in 3/0)$ est la droite perpendiculaire à (CE) qui passe par E. La vitesse $\vec{V}(D \in 3/0)$ étant connue, on va utiliser l'équiprojectivité

$$\overrightarrow{DE} \cdot \vec{V}(D \in 3/0) = \overrightarrow{DE} \cdot \vec{V}(E \in 3/0).$$



8) Quelle droite constitue le support du vecteur vitesse $\vec{V}(E \in 6/3)$?

Le support de $\vec{V}(E \in 6/3)$ est la droite perpendiculaire à $(I_{63}E)$ qui passe par E.

9) En utilisant la loi de composition du vecteur vitesse, construire $\vec{V}(E \in 6/0)$ (on supposera que, pour la configuration représentée sur le schéma, le point E tourne autour de I_{60} dans le sens positif au cours du mouvement de (6) par rapport à (0), i.e que I_{60} se trouve sur la gauche si l'on se place en E et que l'on regarde dans la direction de $\vec{V}(E \in 6/0)$).

Loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}(E \in 6/0) = \vec{V}(E \in 6/3) + \vec{V}(E \in 3/0).$$

Dans cette relation, on connaît $\vec{V}(E \in 3/0)$ et le support de $\vec{V}(E \in 6/3)$ et $\vec{V}(E \in 6/0)$. L'énoncé précise de plus le sens de $\vec{V}(E \in 6/0)$. Pour la construction, on intercale le vecteur connu entre les 2 supports (on fait en sorte que l'origine soit sur l'un et l'extrémité sur l'autre).