

Ecoulements turbulents librement cisailés

Ce travail dirigé se consacre à la recherche de solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes moyennées pour un jet plan libre. Seule une petite catégorie d'écoulements, comme les couches de mélange, les sillages ou les jets, admet ce type de solution.

Le développement naturel d'un sillage et d'un jet libre est illustré sur les figures 1,1. Après une région de transition au voisinage du corps ou de la tuyère, d'une longueur de l'ordre de quelques diamètres/hauteurs du jet, on trouve une zone dite pleinement développée présentant un caractère autosimilaire, qui implique par exemple que les profils des vitesses moyennes dans la direction transversale ont une allure identique, indépendante de la position axiale à laquelle on observe le champ de vitesse.

On se propose ici de déterminer de façon analytique les propriétés de la zone pleinement développée d'un sillage et d'un jet plan. On suppose que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé pour que l'écoulement soit turbulent, mais que le nombre de Mach est suffisamment petit pour que l'écoulement reste incompressible.

Équations de Navier-Stokes moyennées

1. *Rappeler les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement pour le champ moyen pour des écoulements 2D (noter x_1 et y_2 les coordonnées axiale et transverse, respectivement).*

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i^2} \quad (2)$$

2. *Rappeler la loi de comportement de Boussinesq pour le tenseur de Reynolds.*

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\rho \nu_i \bar{S}_{ij}$$

$$\text{avec } \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \text{ le tenseur de déformation moyen.}$$

Simplification des équations moyennées

On se propose de simplifier les équations du champ moyen en négligeant les termes de faible amplitude. On introduit les échelles suivantes pour caractériser l'écoulement :

- U : échelle de vitesse moyenne axiale ;
- L : échelle de longueur axiale ;
- V : échelle de vitesse transversale ;
- l : échelle de longueur transversale ;
- q : échelle des fluctuations de vitesse.

On suppose également que l'élargissement du jet est lent dans la direction axiale (x_1) et que le nombre de Reynolds du jet est élevé. Par ailleurs on rappelle que le jet possède une extension infinie dans la direction latérale (x_3).

3. Estimer le rapport entre les échelles l et L , et définir le nombre Ul/ν .

Les écoulements considérés ont une variation lente suivant x_1 , donc $l \ll L$. La quantité Ul/ν correspond au nombre de Reynolds $Re_l = Ul/\nu \gg 1$, par hypothèse.

Notons que, *a fortiori*, le nombre de Reynolds basé sur L : $Re_L = UL/\nu \gg Re_l \gg 11$.

4. À l'aide des hypothèses précédentes et de l'équation de continuité montrer que l'échelle de vitesse moyenne transversale est petite devant l'échelle de vitesse moyenne axiale et que l'on a

$$V \sim \frac{l}{L}U \quad (3)$$

En partant de l'équation de continuité et comme x_3 est une direction homogène (*i.e.* $\bar{u}_3 = 0$) on a

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}}_{\sim V/l} = 0 \quad (4)$$

On en déduit que $V \sim \frac{l}{L}U$, c'est à dire $V \ll U$, puisque $l \ll L$.

5. Montrer que l'équation de quantité de mouvement peut être réécrite sous la forme approchée suivante

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2') \quad (5)$$

En déduire que l'échelle des fluctuations de vitesse est telle que

$$q \sim \sqrt{\frac{l}{L}}U \quad (6)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant x_1 s'écrit

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2)}_{(A) \sim U^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2)}_{(B) \sim UV/l \sim U^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1'^2)}_{(C) \sim q^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2')}_{{(D)} \sim q^2/l} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}}_{(E)} = \quad (7)$$

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}}_{(F) \sim \nu U/L^2 = (1/Re_L)(U^2/L)} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2}}_{(G) \sim \nu U/l^2 = (1/Re_L)(L/l)^2(U^2/L)} \quad (8)$$

On a donc les rapports d'amplitudes suivants : $(F) \ll (A)$ et $(C) \ll (D)$. On garde pour l'instant les autres termes :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2') \quad (9)$$

De plus, comme le jet est turbulent, il est nécessaire que le terme (D) possède une amplitude suffisante pour le champ moyen soit effectivement affecté par la turbulence. On peut donc supposer que $[(A),(B)] \sim (D)$. En d'autres termes, on a

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{q^2}{l} \quad \rightarrow \quad q \sim \sqrt{\frac{l}{L}}U \quad (10)$$

Enfin, loin des parois, on peut supposer que la diffusion visqueuse soit faible devant la diffusion turbulente, ce qui permet de négliger le terme (G) devant le terme (D). Au final, on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2') \quad (11)$$

6. En partant de l'équation de quantité de mouvement suivant x_2 , montrer que la pression est donnée par

$$\bar{p} + \overline{\rho u_2'^2} = p_\infty \quad (12)$$

où p_∞ est la pression loin du sillage ou du jet ($x_2 \rightarrow \infty$). En déduire que le gradient de pression longitudinal est de l'ordre de

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \sim \frac{U^2}{L} \frac{l}{L} \quad (13)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant x_2 s'écrit

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1 \bar{u}_2)}_{(A) \sim UV/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_2^2)}_{(B) \sim V^2/l \sim UV/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{u_1' u_2'})}_{(C) \sim q^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_2'^2})}_{(D) \sim q^2/l} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}}_{(E)} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2}}_{(F) \sim \nu V/l^2 = (1/\text{Re}_L)(L/l)(UV/L)} \quad (14)$$

On a dans un premier temps (F) << (A). En utilisant $q \sim \sqrt{l/L}U$ et $V \sim (l/L)U$ on montre ensuite que

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{U}_1 \bar{U}_2)}_{(A) \sim (U^2/L)(l/L)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{U}_2^2)}_{(B) \sim (U^2/L)(l/L)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{u_1' u_2'})}_{(C) \sim (U^2/L)(l/L)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_2'^2})}_{(D) \sim U^2/L} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}}_{(E)} = 0 \quad (15)$$

On remarque donc que le terme prépondérant est le terme (D) puisqu'il est plus grand d'un ordre de grandeur (l/L) que les termes (A), (B) et (C). Ainsi, on a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_2'^2}) = 0 \quad (16)$$

En intégrant cette équation suivant x_2 de la position x_2 à l'infini on obtient

$$\bar{p} + \overline{\rho u_2'^2} = p_\infty \quad (17)$$

En dérivant par rapport à x_1 on a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_1} \quad (18)$$

En terme d'ordre de grandeur on a donc

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \sim \frac{q^2}{L} = \frac{U^2}{L} \frac{l}{L} \quad (19)$$

7. Simplifier à nouveau l'équation de quantité de mouvement suivant x_1 et montrer que le champ moyen est régi par le système d'équations :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_1' u_2'}) \quad (21)$$

On a :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2)}_{(A) \sim U^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2)}_{(B) \sim (l/L)(U^2/L)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_1' u_2'})}_{(D) \sim (l/L)(U^2/L)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}}_{(E) \sim (l/L)(U^2/L)} = 0 \quad (22)$$

Donc la variation de pression dans la direction x_1 ((E)) est négligeable devant la variation de la vitesse axiale moyenne dans la direction x_1 ((A)). Ainsi, on a bien

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_1' u_2'}) \quad (23)$$

8. Montrer que, pour un jet, la quantité de mouvement selon x_1 :

$$I = \int_0^\infty \rho \overline{u_1^2} dx_2 \quad (24)$$

se conserve dans toute section transverse.

On a

$$\frac{dI}{dx_1} = \int_0^\infty \rho \frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x_1} dx_2 \quad (25)$$

D'après l'équation (21) on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx_1} &= -\rho \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u_1} \overline{u_2} + \overline{u_1' u_2'}) dx_2 \\ &= -\rho [\overline{u_1} \overline{u_2} + \overline{u_1' u_2'}]_0^\infty \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

car le fluide à l'infini est au repos et puisque sur l'axe $\overline{u_2}$ et $\overline{u_1' u_2'}$ sont nuls par symétrie.

9. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement montrer que :

$$\int_0^\infty \rho \overline{u_1} (U_\infty - \overline{u_1}) dx_2 = \frac{D}{2} \quad (27)$$

avec D la force de traînée s'exerçant sur le corps.

On considère un volume de contrôle autour du corps, avec surface d'entrée verticale loin en amont du corps et surfaces supérieur et inférieur très éloignées du corps (telles que la vitesse est égale à la vitesse à l'infini et la pression est égale à la pression à l'infini), surface de sortie verticale située très en aval du corps (telle que la pression est égale à la pression à l'infini mais la vitesse présente encore un déficit par rapport à U_∞) et une surface interne correspondant à la surface du corps.

La forme intégrale de l'équation de continuité s'écrit alors (les flux de masse à travers la surface du corps et la surface haute et basse sont nuls) :

$$-\int_{-\infty}^\infty \rho U_\infty dx_2 + \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1} dx_2 = 0 \quad (28)$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^\infty \rho U_\infty dx_2 = \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1} dx_2 \quad (29)$$

La forme intégrale de l'équation de quantité de mouvement dans la direction x_1 est :

$$-\int_{-\infty}^\infty \rho U_\infty^2 dx_2 + \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1^2} dx_2 = -D \quad (30)$$

car la contribution de la pression et des contraintes visqueuses sur la surface lointaine est nulle (pour la pression) ou négligeable (pour les contraintes visqueuses), tandis que l'intégrale des forces visqueuses et de pression sur le corps est, par définition, égale à la force horizontale exercée par le corps sur le fluide, i.e. $-D$.

On peut écrire encore :

$$-U_\infty \int_{-\infty}^\infty \rho U_\infty dx_2 + \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1^2} dx_2 = -D \quad (31)$$

et, en injectant la relation (29) :

$$-U_\infty \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1} dx_2 + \int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1^2} dx_2 = -D \quad (32)$$

En réarrangeant les termes :

$$\int_{-\infty}^\infty \rho \overline{u_1} (U_\infty - \overline{u_1}) dx_2 = D \quad (33)$$

ou bien, pour un corps symétrique par rapport à x_1 :

$$\int_0^\infty \rho \overline{u_1} (U_\infty - \overline{u_1}) dx_2 = \frac{D}{2} \quad (34)$$

Solution autosimilaire pour un jet plan

Afin de résoudre le système d'équations (20-21), on cherche des solutions autosimilaires de la forme :

$$\overline{U}_1 = U_m(x_1)f(\eta) \quad (35)$$

$$\overline{U}_2 = U_m(x_1)g(\eta) \quad (36)$$

$$-\overline{u'_1 u'_2} = U_m^2(x_1)h(\eta) \quad (37)$$

où $U_m(x_1)$ est la vitesse moyenne sur l'axe du jet. La quantité $\eta = x_2/\delta(x_1)$ est la distance transversale normalisée par la demi-largeur du jet. La demi-largeur est telle que $\overline{U}_1(\eta) = U_m(x_1)/2$.

16. À l'aide des résultats expérimentaux fournis sur la figure 2, montrer que l'hypothèse d'autosimilarité de l'écoulement est valide.

Les courbes se superposent...

17. Montrer dans un premier temps que la vitesse transversale est donnée par l'expression :

$$\overline{U}_2 = - \int_0^{x_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} dx'_2 \quad (38)$$

L'intégration de l'équation de continuité dans la direction x_2 de 0 à x_2 donne directement le résultat. À noter que par symétrie on a $\overline{U}_2 = 0$ pour $x_2 = 0$.

18. Montrer ensuite que

$$\overline{U}_1 \overline{U}_2 + \int_0^{x_2} \frac{\partial \overline{U}_1^2}{\partial x_1} dx'_2 = -\overline{u'_1 u'_2} \quad (39)$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant x_1 dans la direction x_2 de 0 à x_2 donne directement le résultat. À noter que par symétrie on a $\overline{U}_2 = 0$ et $\overline{u'_1 u'_2}$ pour $x_2 = 0$.

19. Montrer que la demi-largeur δ du jet varie linéairement avec la position axiale. On écrira :

$$\frac{\delta}{h} = a \frac{x_1 - x_0}{h} \quad (40)$$

où h est la hauteur du jet à la sortie de la tuyère.

On introduit l'expression (38) dans l'équation (39) pour obtenir

$$\begin{aligned} -\overline{u'_1 u'_2} &= -\overline{U}_1 \int_0^{x_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} dx'_2 + \int_0^{x_2} \frac{\partial \overline{U}_1^2}{\partial x_1} dx'_2 \\ &= -\overline{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_2} \overline{U}_1 dx'_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_2} \overline{U}_1^2 dx'_2 \end{aligned} \quad (41)$$

On introduit la solution autosimilaire :

$$-\overline{u'_1 u'_2} = -U_m f \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_2} U_m f dx'_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_2} f^2 U_m^2 dx'_2 \quad (42)$$

et on écrit l'équation en $x_2 = \delta$:

$$-\overline{u'_1 u'_2}(x_1, x_2 = \delta) = -U_m f(1) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta U_m f dx'_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\delta f^2 U_m^2 dx'_2 \quad (43)$$

Le changement de variable $x'_2 = \delta \cdot \eta'$ donne ensuite

$$\begin{aligned} -\overline{u'_1 u'_2}(x_1, x_2 = \delta) &= -U_m f(1) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^1 \delta U_m f d\eta' + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^1 \delta f^2 U_m^2 d\eta' \\ &= -U_m \frac{d}{dx_1} (U_m \delta) \underbrace{f(1) \int_0^1 d\eta'}_{A = \text{cte}} + \frac{d}{dx_1} (U_m^2 \delta) \underbrace{\int_0^1 f^2 d\eta'}_{B = \text{cte}} \end{aligned} \quad (44)$$

En divisant par U_m^2 on obtient,

$$-\frac{\overline{u'_1 u'_2}}{U_m^2}(x_1, x_2 = \delta) = h(1) = -A \underbrace{\frac{1}{U_m} \frac{d}{dx_1}(U_m \delta)}_{\beta(x_1)} + B \underbrace{\frac{1}{U_m^2} \frac{d}{dx_1}(U_m^2 \delta)}_{\alpha(x_1)} \quad (45)$$

Comme $h(1)$ est une constante, on a donc nécessairement $\alpha(x_1) = \text{cte}$ et $\beta(x_1) = \text{cte}$. Cette condition peut être reformulée suivant

$$\frac{d\delta}{dx_1} + \frac{2\delta}{U_m} \frac{dU_m}{dx_1} = \text{cte} \quad (46)$$

$$\frac{d\delta}{dx_1} + \frac{\delta}{U_m} \frac{dU_m}{dx_1} = \text{cte} \quad (47)$$

Ces deux relations impliquent que

$$\frac{d\delta}{dx_1} = \text{cte} \quad (48)$$

De façon générique on écrit,

$$\frac{\delta}{h} = a \frac{x_1 - x_0}{h} \quad (49)$$

- 20.** En invoquant la conservation de la quantité de mouvement dans une section du jet, montrer que la vitesse moyenne sur l'axe peut se mettre sous la forme

$$\frac{U_m}{U_j} = b \sqrt{\frac{h}{x_1 - x_0}} \quad (50)$$

Comme $d\delta/dx_1 = \text{cte}$, d'après (46) on a

$$\frac{\delta}{U_m} \frac{dU_m}{dx_1} = \text{cte} \quad (51)$$

C'est à dire que

$$\frac{dU_m}{U_m} \propto \frac{dx_1}{(x_1 - x_0)} \quad (52)$$

i.e.

$$d[\ln(U_m)] \propto d[\ln(x_1 - x_0)] \quad (53)$$

On a donc U_m qui varie comme une puissance n de x_1 : $U_m \propto (x_1 - x_0)^n$, où x_0 est une constante. La conservation de la quantité de mouvement montre ensuite que

$$\frac{dI}{dx_1} = 0 \quad (54)$$

C'est à dire,

$$I = U_m^2 \delta \int_0^\infty f^2 d\eta = \text{cte} \quad (55)$$

En d'autres termes on a $U_m^2 \delta = \text{cte}$, ou encore $x_1^{2n+1} = \text{cte}$. On en déduit que $n = -1/2$ et que la vitesse moyenne sur l'axe varie comme

$$U_m \propto \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_0}} \quad (56)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{U_m}{U_j} = b \sqrt{\frac{h}{x_1 - x_0}} \quad (57)$$

Profil transversal des vitesses moyennes

Afin de fermer le système d'équations (20-21) on introduit un modèle de viscosité turbulente pour le tenseur des contraintes de Reynolds :

$$-\overline{u'_1 u'_2} = \nu_t \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \quad (58)$$

où ν_t est la viscosité turbulente.

21. Montrer que la fonction $f(\eta)$ est solution de l'équation :

$$\frac{1}{c} f' + \frac{a}{2} f \int_0^\eta f d\eta' = 0 \quad (59)$$

où c et a sont des constantes. On admettra que la solution de cette équation est de la forme

$$f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(d\eta)} \quad (60)$$

avec $d = \sqrt{ac}/2$. À l'aide de la définition de la demi-largeur du jet, montrer que

$$d = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0.88 \quad (61)$$

On part de l'équation (45)

$$-\frac{\overline{u'_1 u'_2}}{U_m^2} = h(\eta) = \frac{1}{U_m^2} \frac{d}{dx_1} (U_m^2 \delta) \int_0^\eta f^2 d\eta' - \underbrace{\frac{1}{U_m} \frac{d}{dx_1} (U_m \delta)}_{a/2 = \text{cte}} f \int_0^\eta f d\eta' \quad (62)$$

Le premier terme au second membre est nul car la conservation de la quantité de mouvement impose que $U_m^2 \delta = \text{cte}$. Par ailleurs, d'après le modèle de viscosité turbulente, on a

$$-\frac{\overline{u'_1 u'_2}}{U_m^2} = \frac{\nu_t}{U_m} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \underbrace{\frac{\nu_t}{U_m \delta}}_{c = \text{cte}} \underbrace{\frac{df}{d\eta}}_{f'} \quad (63)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{c} f' + \frac{a}{2} f \int_0^\eta f d\eta' = 0 \quad (64)$$

La solution est

$$f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(d\eta)} \quad (65)$$

De plus, comme en $x_2 = \delta$, i.e. en $\eta = 1$, on a $\overline{U}_1 = U_m/2$, la fonction f est telle que $f(1) = 1/2$. Par conséquence d est donnée par

$$d = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0.88 \quad (66)$$

On admettra que le profil de la vitesse moyenne transversale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\overline{U}_2}{U_m} = g(\eta) = \frac{a}{2d} \left[\frac{2d\eta}{\cosh^2(d\eta)} - \tanh(d\eta) \right] \quad (67)$$

Les fonctions $f(\eta)$ et $g(\eta)$ sont tracées sur la figure 3.

22. Tracer l'allure des lignes de courant associées au champ moyen à l'intérieur et au voisinage du jet.

Cf. figure 4.

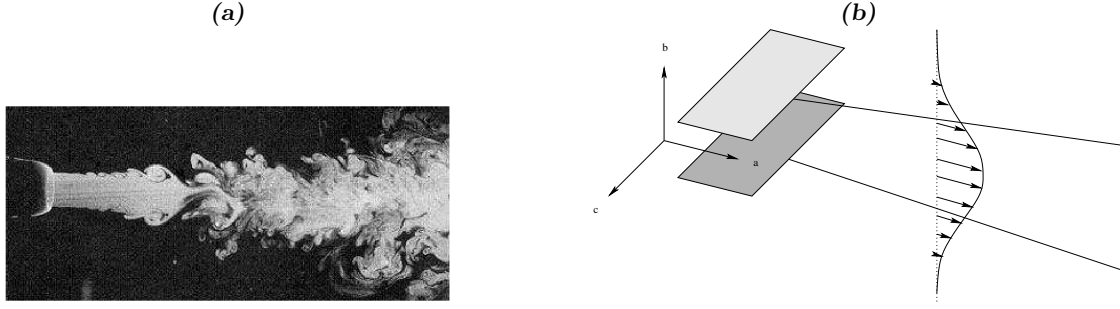


FIGURE 1 – (a) Visualisation d'un jet rond turbulent pour un nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la buse D de $Re_D \approx 10^4$. (b) Vue schématique du jet plan et du système de coordonnées. Directions : x_1 = "axiale", x_2 = "transversale", x_3 = "latérale".

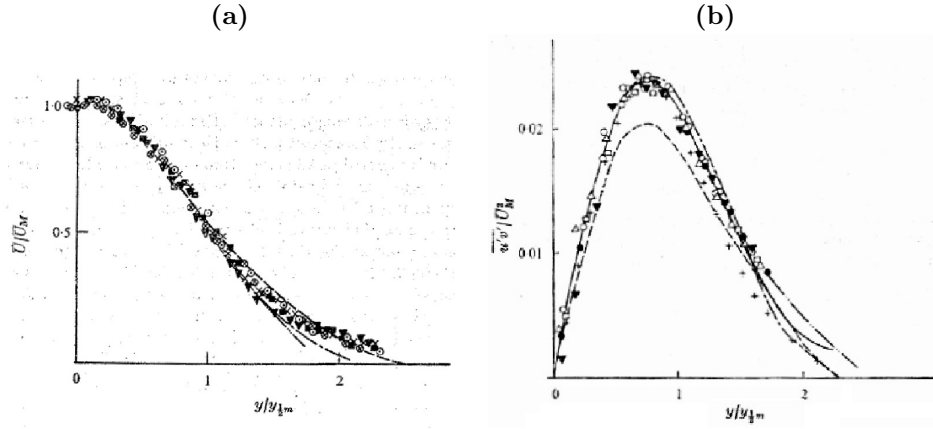


FIGURE 2 – Données expérimentales de Gutmark & Wygnanski (*Journal of Fluid Mechanics*, **73**, 1976) obtenues pour un jet plan. (a) Profil de la vitesse moyenne axiale normalisée par la vitesse sur l'axe \bar{U}_1/\bar{U}_m (\bar{U}/\bar{U}_M avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet η ($y/y_{1/2m}$ sur la figure), pour différentes positions axiales : \blacktriangledown , $x_1/h = 118$; \times , $x_1/h = 103$; \blacksquare , $x_1/h = 88$; \otimes , $x_1/h = 76$; \odot , $x_1/h = 65$. (h : hauteur initiale du jet). (b) Profil de la contrainte de Reynolds $\bar{u}'_1\bar{u}'_2/\bar{U}_m^2$ ($\bar{u}'v'/\bar{U}_M^2$ avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet η ($y/y_{1/2m}$ sur la figure), pour différentes positions axiales : \circ , $x_1/h = 143$; \triangle , $x_1/h = 129$; \blacktriangledown , $x_1/h = 118$; \square , $x_1/h = 106$; \bullet , $x_1/h = 95$;

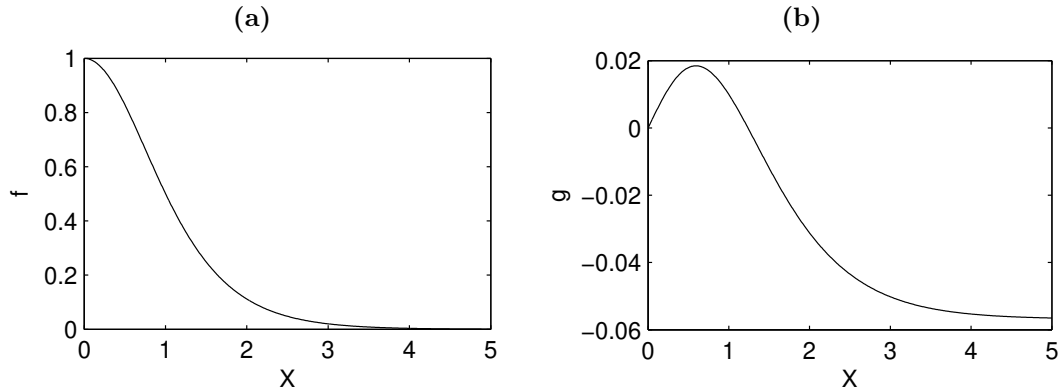


FIGURE 3 – Tracés des fonctions $f(\eta)$ et $g(\eta)$ (pour $a = 0.1$).

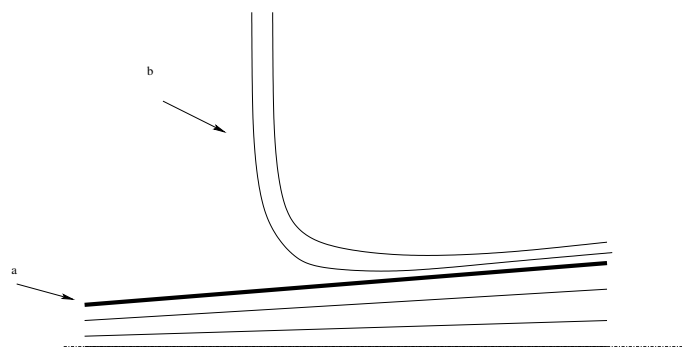


FIGURE 4 – Vue schématique des lignes de courant associées au champ moyen dans un jet turbulent.