

Dynamique et modélisation de la turbulence

1. Introduction et rappels mathématiques

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

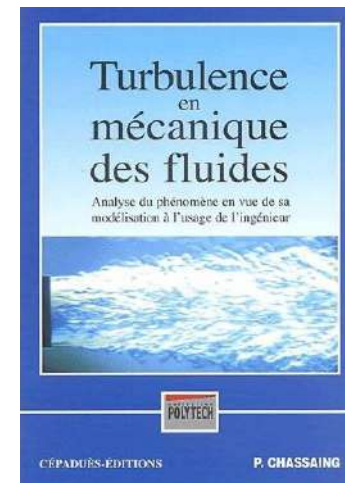
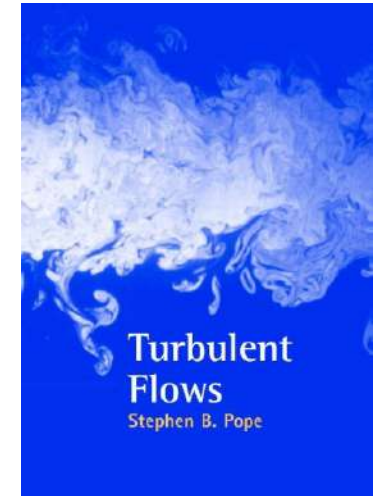
Planning du cours

1. Notions introductives et rappels mathématiques (29/9/2021)
2. Dynamique de la vorticité et turbulence (6/10/2021)
3. Traitement statistique de la turbulence, échelles turbulentes (13/10/2021)
4. Turbulence homogène et isotrope (20/10/2021)
5.  coulements cisailés libres (27/10/2021)
6. **TP: Turbulence homogène et isotrope** (13/11/2021)
7. Turbulence de paroi (20/11/2021)
8. Méthodes numériques et expérimentales (27/11/2021)
9. **Examen**: semaine du 6 décembre

Note = 0,3* (Rendus TP) + 0,7*(Examen)

Supports de cours

- Planches
- Livres:
 - Stephen B. POPE (2000), TURBULENT FLOWS, Cornell University
 - C. BAILLY & G. COMTE-BELLOT (2003), TURBULENCE, CNRS Editions
 - P. CHASSAING (2000) TURBULENCE EN MECANIQUE DES FLUIDES, Cépaduès
- Mes contacts : mail paola.cinnella@Sorbonne-universite.fr
- Skype : paola_cinnella



1. Introduction

Définition d'écoulement turbulent

Comment définir la turbulence?

Pas de définition rigoureuse. Description phénoménologique (Pope, 2000).

1. Irrégularité et imprévisibilité:

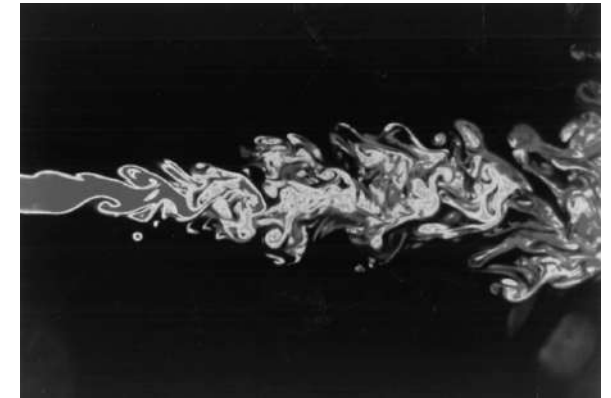
- Etat de mouvement irrégulier en temps et en espace
- Des petites perturbations sur les conditions initiales et aux limites sont amplifiées jusqu'à rendre une description déterministe de l'écoulement impossible
- Comportement (en apparence) aléatoire → mouvement chaotique

2. Diffusivité accrue

- Intensification des échanges de masse, quantité de mouvement et énergie

3. Fluctuations 3D de la vorticité $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$

- Un écoulement turbulent est toujours **rotationnel**
- Tourbillons cohérents (*eddies*), mais localisés de façon "aléatoire"
- L'énergie est transférée des grandes aux petites échelles de l'écoulements par effet des interactions entre structures tourbillonnaires (mécanisme de cascade)



Two-dimensional image of an axisymmetric water jet, obtained by the laser-induced fluorescence technique.

(From R. R. Prasad and K. R. Sreenivasan, Phys. Fluids A, 2:792–807, 1990)



Smoke flow visualization of dynamic stall on an airfoil pitching in a wind tunnel

(From S. Schreck and M. Robinson, FEDSM2007-37651, pp. 1129-1140)

Définition d'écoulement turbulent

4. Phénomène dissipatif :

- Les contraintes visqueuses opèrent un travail de déformation des particules fluides contribuant à augmenter l'énergie interne du fluide au dépens de l'énergie cinétique
- Richardson (1922) : « structures tourbillonnaires » et mécanisme de « cascade »

*“Big whorls have little whorls,
which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity.”*

- L'énergie mécanique est généralement fournie au fluide sur des échelles spatiales et temporelles macroscopiques
- Un phénomène de « cascade » transfère l'énergie à des échelles de plus en plus petites
- L'énergie est finalement dissipée à l'échelle moléculaire par la viscosité
- Notion de « dissipation de l'énergie cinétique »

5. Régime de mouvement

- La turbulence est un régime de mouvement, c.à.d. une caractéristique de l'écoulement et non une propriété du fluide



Dissipation d'énergie cinétique
fournie par un agitateur



Eruption du volcan Etna (Sicile)

Définitions alternatives

- Le régime turbulent est une **condition irrégulière d'écoulement** dans laquelle les différentes grandeurs présentent des variations chaotiques en espace et en temps que l'on peut, d'un point de vue statistique, caractériser par leur valeurs moyennes (Hinze, 1975)
- La turbulence est caractérisée par une **large plage d'échelles spatio-temporelles** (Bradshaw, 1974)
- La turbulence est un phénomène **continu** (Tennekes & Lumley, 1983)
 - Les plus petites échelles présentes dans un écoulement turbulent sont toujours beaucoup plus grandes que l'échelle moléculaire

Irrégularité et imprévisibilité

- Écoulement laminaire dans une conduite : solution exacte des équations de Navier-Stokes

- Vitesse moyenne

$$U_b = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u (2\pi r \, dr)$$

- Frottement pariétal

$$\tau_w = 4\rho\nu \frac{U_b}{R}$$

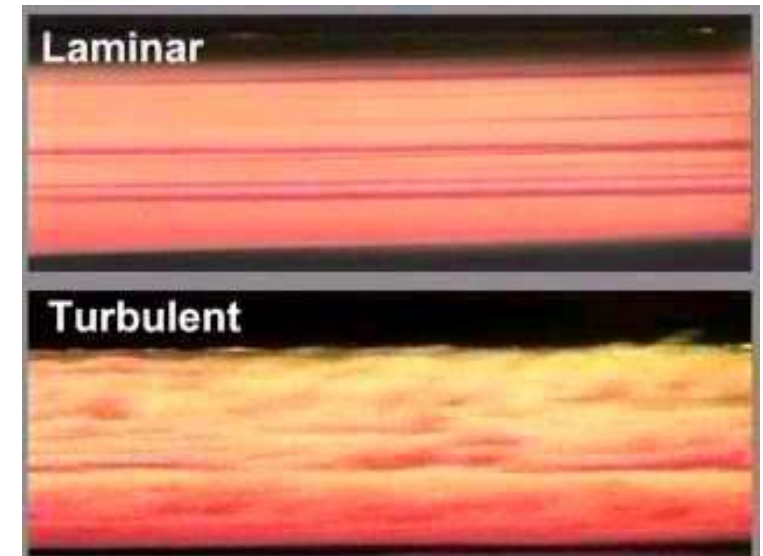
- Coefficient de frottement à la paroi:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_b^2}$$

$$Re = \frac{RU_b}{\nu}$$

\Rightarrow

$$c_f = \frac{8}{Re}$$

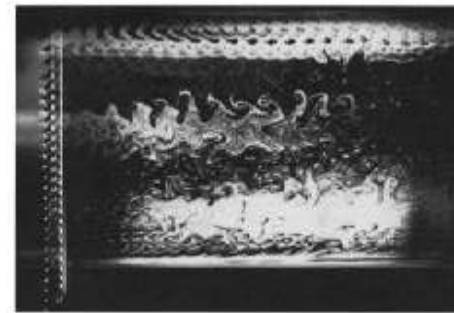
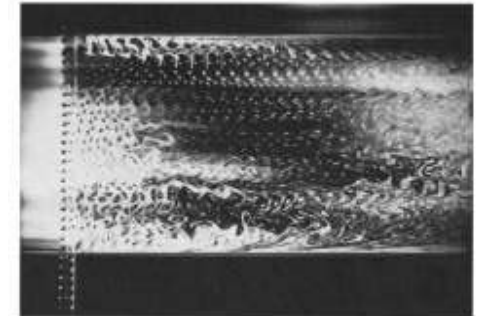
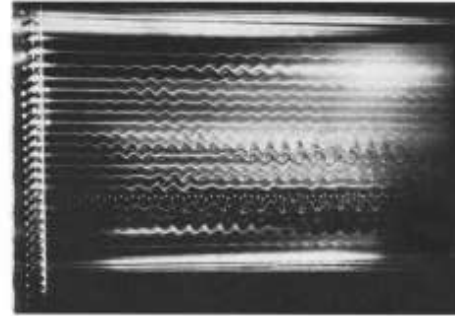
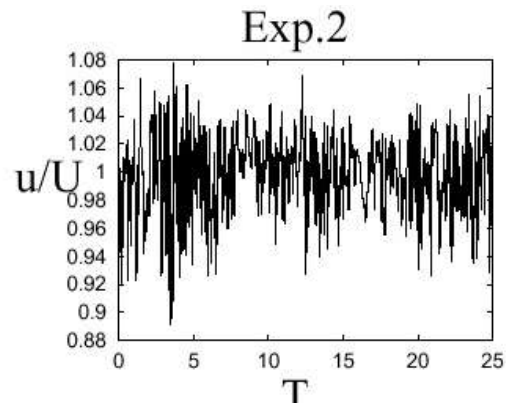
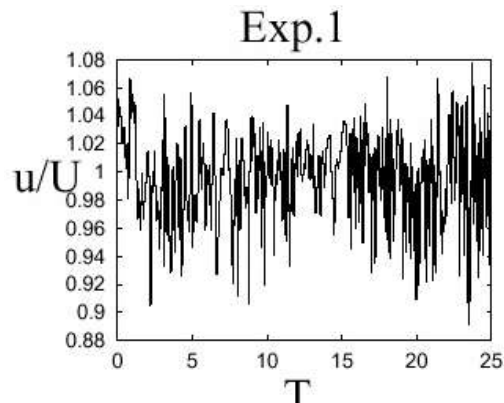


- Re = **nombre de Reynolds** \rightarrow rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses

- Comportement irrégulier observé à partir d'un **Reynolds critique** ($Re_c = 2100$ pour une conduite circulaire)

Irrégularité et imprévisibilité

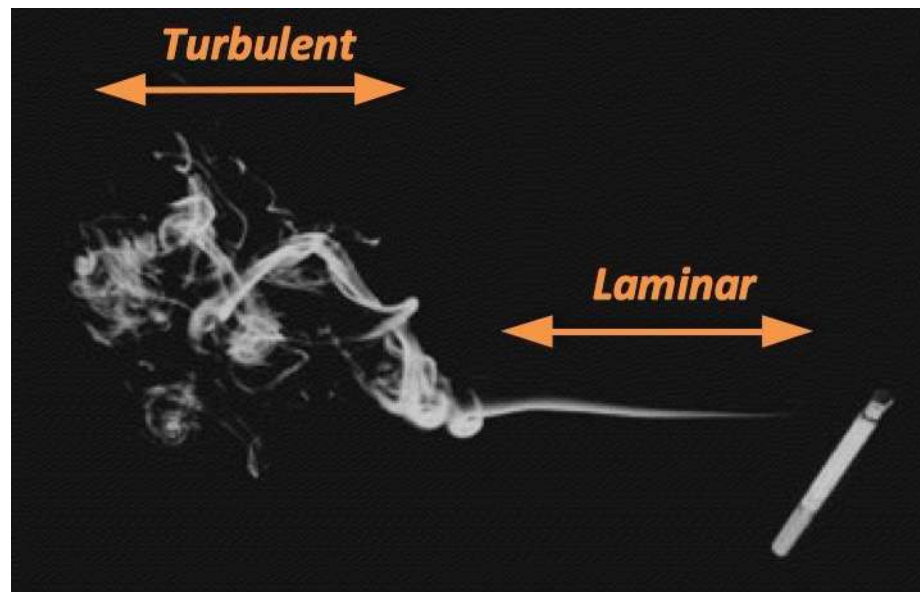
- Comportement erratique du champ de vitesse
- Mouvement tridimensionnel
- Régime instationnaire
- Non-reproductible
 - Deux répétitions de la même expérience donnent lieu à des signaux différents



The Onset of Two-Dimensional Grid Generated Turbulence in Flowing Soap Films
Maarten A. Rutgers, Xiao-lun Wu, and Walter I. Goldberg

Diffusivité accrue

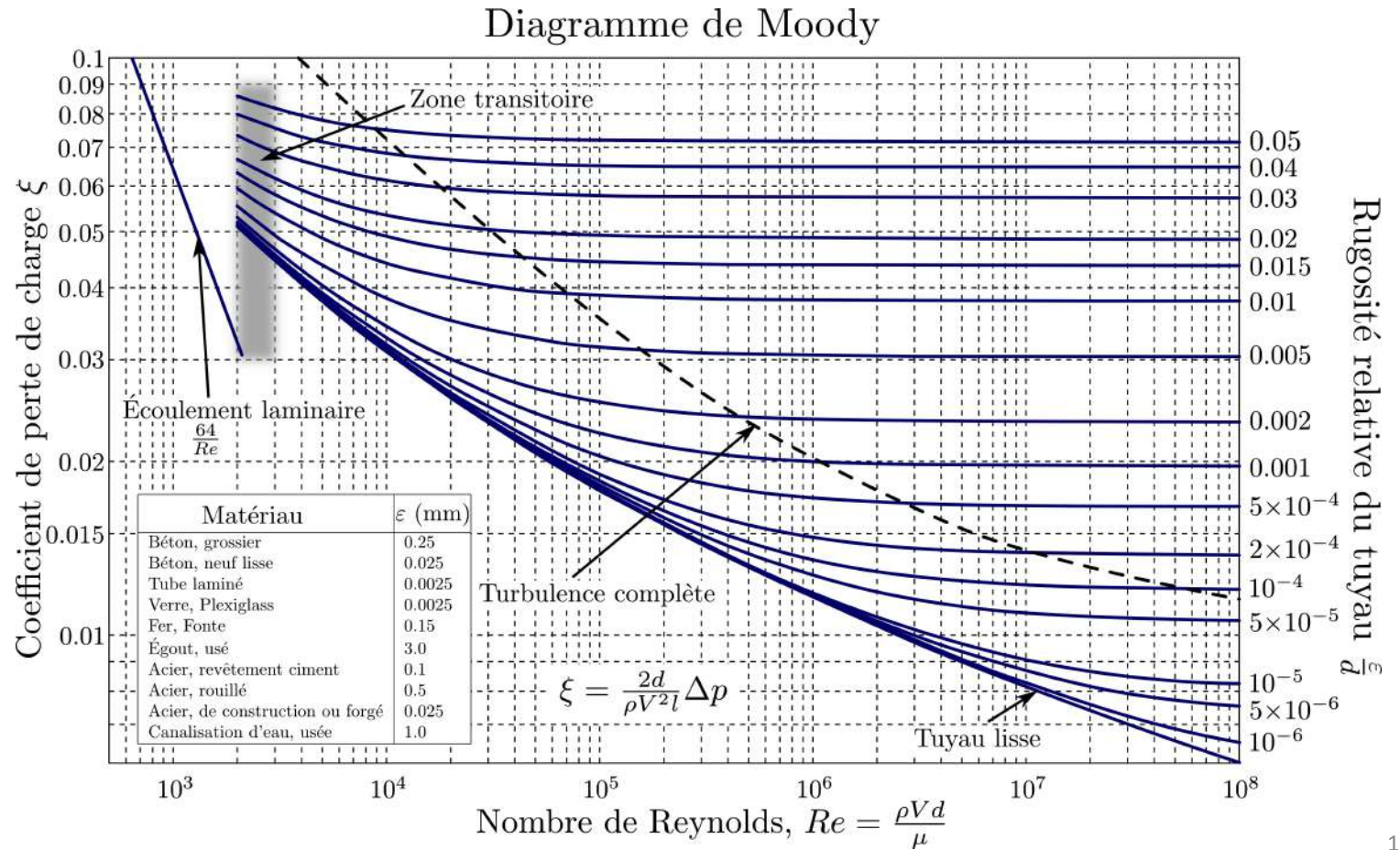
- Diffusion de la fumée d'une cigarette dans une pièce :
 - L'odeur est ressentie dans toute la pièce après quelques secondes
 - Calcul à partir du temps caractéristique de la diffusion moléculaire : de l'ordre de 10 jours!
- La raison de ce paradoxe est la **turbulence**:
 - Les fluctuations turbulentes du champ de vitesse transportent la fumée beaucoup plus efficacement que le mouvement d'agitation moléculaire du fluide



Diffusivité accrue

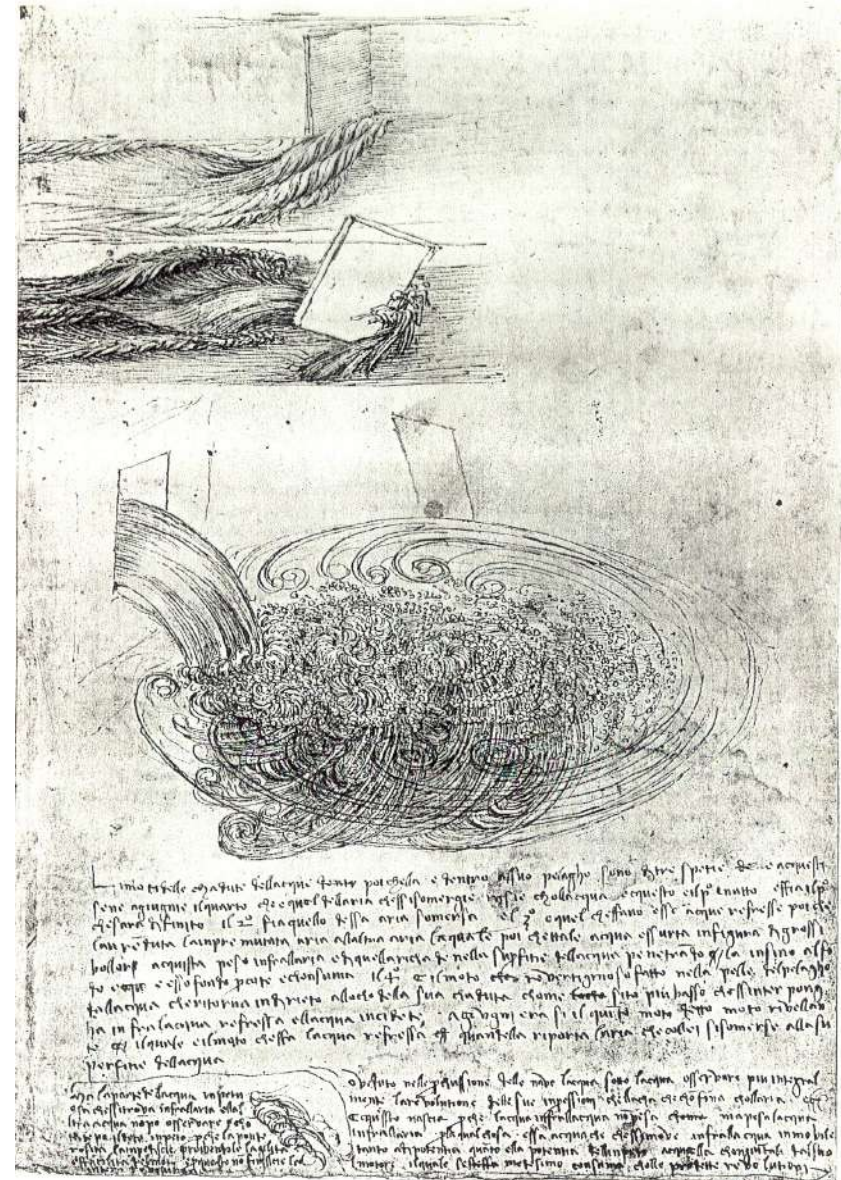
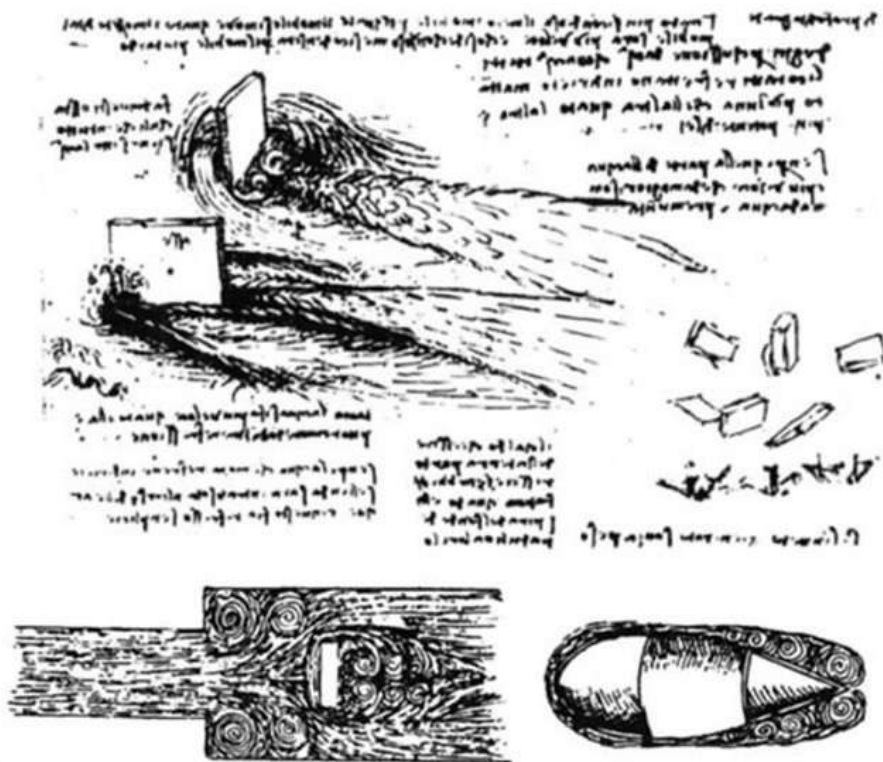
- Régime turbulent : forte augmentation du frottement pariétal

Pertes de charge dans une conduite
(Wikipedia.fr)



Un peu d'histoire

- Premières études par **Leonard de Vinci**
 - État de mouvement irrégulier et imprévisible
 - Codex Leicester (1510)



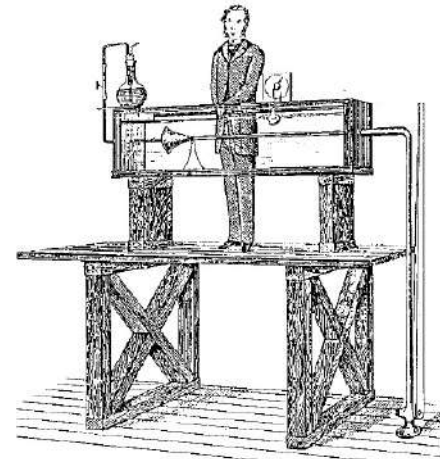
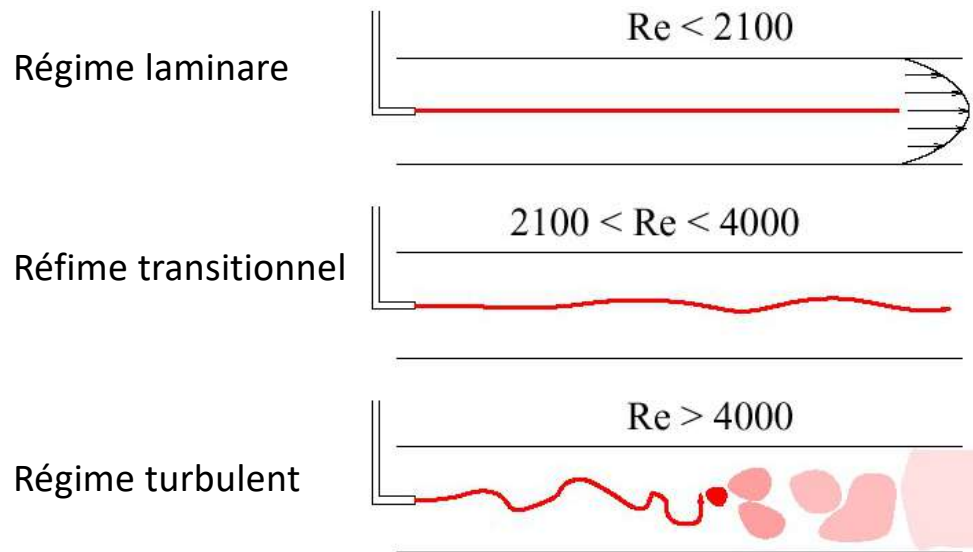
Un peu d'histoire (cont.)

- Premières observations d'un écoulement turbulent en suivant une démarche scientifique par Hagen (1839)
 - Ecoulement d'eau dans des conduites circulaires
 - Deux régimes :
 - Laminaire (ou Hagen-Poiseuille) → l'écoulement sortant est transparent
 - Turbulent → l'écoulement sortant est opaque et la surface du jet est plissée
 - Il observe que la limite entre les deux régimes dépend de la vitesse et de la viscosité du fluide
- J. Boussinesq (1877)
 - Les contraintes turbulentes sont proportionnelles au cisaillement moyen → « hypothèse de Boussinesq »

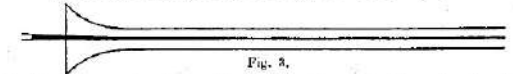


Un peu d'histoire (cont.)

- Expérience de O. Reynolds (1883)
 - Ecoulement dans une conduite transparente
 - Nombre « de Reynolds » : $Re = \frac{DV}{\nu}$

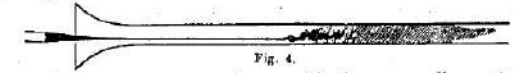


The general results were as follows:—
 (1) When the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube, Fig. 3.



(2) If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinuosity.

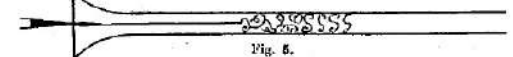
(3) As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the



colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water, as in Fig. 4.

Any increase in the velocity caused the point of break down to approach the trumpet, but with no velocities that were tried did it reach this.

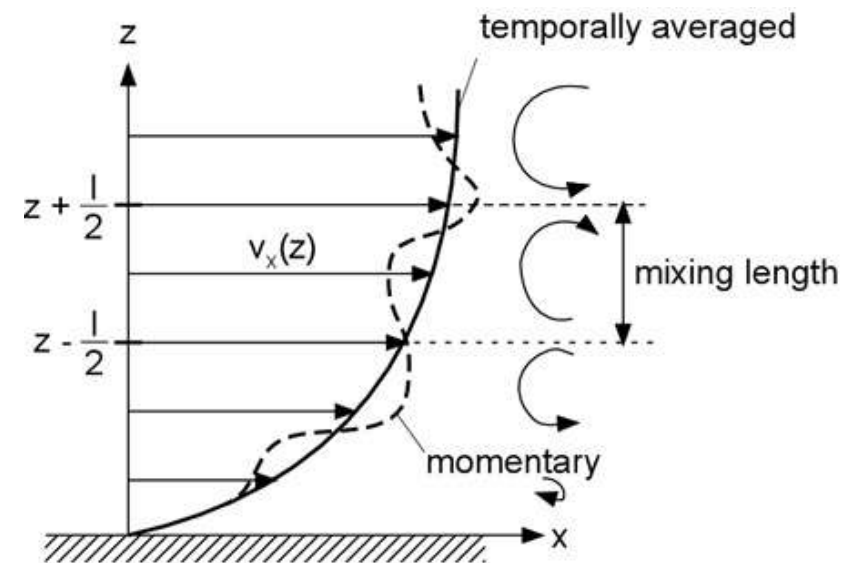
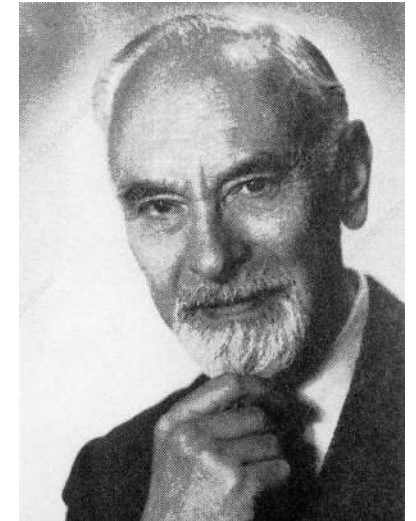
On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies, as in Fig. 5.



- Trop grande complexité de l'écoulement turbulent :
 → **Analyse « statistique »** : variables décomposées en une partie moyenne et une fluctuation
- Turbulence vue comme un phénomène « aléatoire »

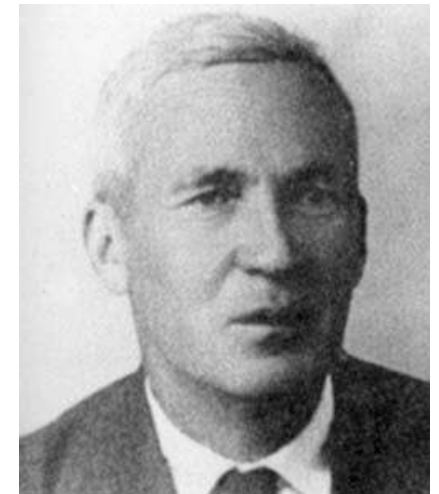
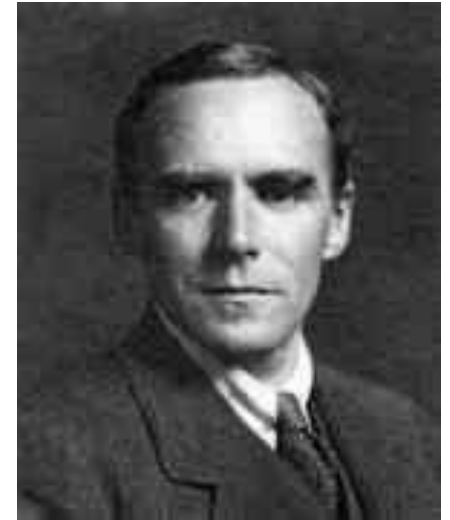
Un peu d'histoire (cont.)

- L. Prandtl (1925) introduit la notion de **viscosité tourbillonnaire** (*eddy viscosity*)
 - Coefficient de proportionnalité dans la relation linéaire effort/taux de déformation proposée par Boussinesq
 - Introduction de la notion de « longueur de mélange » par analogie au libre parcours moyen des molécules
 - Analogie entre le mouvement erratique de « paquets » turbulents (*eddies*) et le mouvement d'agitation chaotique des molécules
 - Cette notion est encore utilisée (à des degrés différents) dans de nombreux modèles de turbulence modernes



Un peu d'histoire (cont.)

- Le mathématicien anglais G. I. Taylor dans les années 1930s introduit des outils statistiques avancés (corrélations, transformées de Fourier et spectres), notamment pour l'étude de la turbulence homogène et isotrope
 - La turbulence est traitée comme un [phénomène aléatoire](#)
- En 1941 le mathématicien russe A. Kolmogorov publie trois articles (en russe) qui posent les bases de la théorie de la turbulence et qui sont encore aujourd'hui utilisés pour tester d'autres résultats théoriques, numériques ou expérimentaux.
 - Résultats basés en grande partie sur l'analyse dimensionnelle→ Ils seront discutés dans la suite du cours



Equations de Navier-Stokes

- Même en régime turbulent, l'écoulement reste régi par les équations de Navier-Stokes
- Pour un écoulement incompressible à propriétés constantes, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ (continuité)} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \text{ (q. mvt)} \end{cases}$$

Notation vectorielle

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} \end{cases}$$

Notation en composantes cartésiennes

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ (continuité)} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \text{ (q. mvt)} \end{cases}$$

Formulation adimensionnelle $\left(Re = \frac{UL}{\nu} \right)$

+ conditions initiales et aux limites

- Paradoxe : équations déterministes—Solutions aléatoires??

Systèmes dynamiques chaotiques

- Certains systèmes non linéaires déterministe sont très sensibles aux perturbations, même infinitésimales (premières études par J.H. Poincaré)
 - Une petite perturbation du système donne lieu à des solutions (localement) complètement différentes
 - Bien que différentes, ces solutions conservent certaines propriétés communes

- **Exemple** : système de Lorentz (1963)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

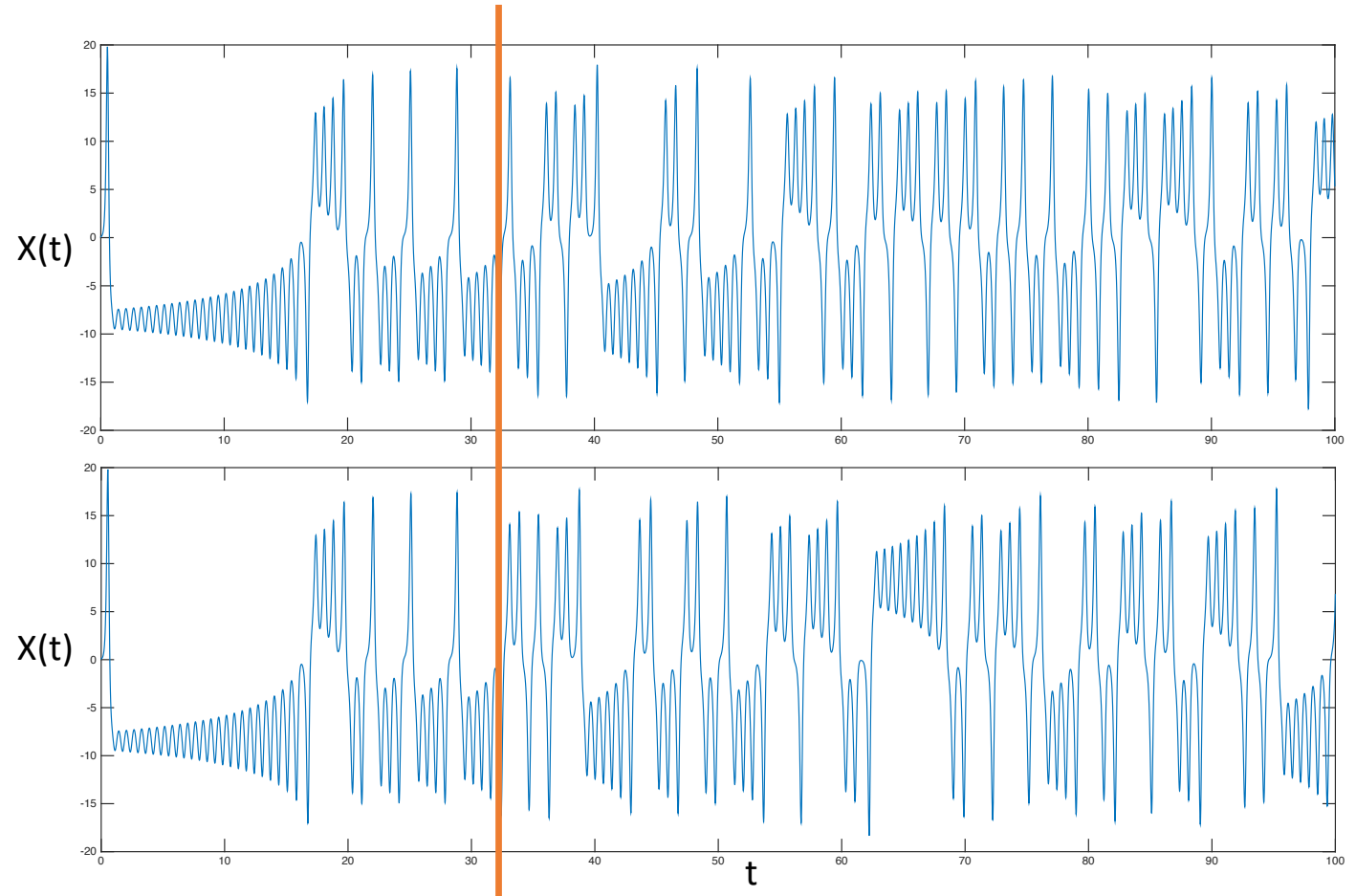
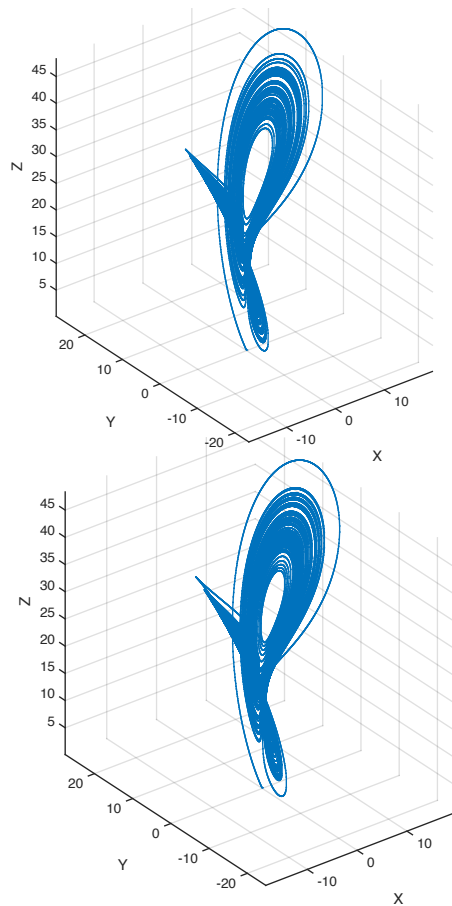
$$\text{avec } \sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 35$$

- Conditions initiales :

$$\begin{aligned}x(0) &= 0.5 & ; y(0) &= 0.1; & z(0) &= 0.3 \\ x(0) &= 0.5 & ; y(0) &= 0.1 + 10^{-6}; & z(0) &= 0.3\end{aligned}$$

Solutions pour des conditions initiales perturbées

Attracteur de Lorentz



Ecoulements régis par les équations de NS

- Perturbations expérimentales

- Impuretés
- Petites fluctuations de la pression, vitesse, température, etc.
- Petites variations de la géométrie

- Perturbations numériques

- Erreurs d'arrondi et de troncature, erreurs sur les conditions initiales et aux limites

→ Cependant : la turbulence n'est pas un phénomène complètement stochastique

- Les approches statistiques peuvent s'avérer inadéquates

Cascade de l'énergie (Kolmogorov, 1941)

- Energie injectée par l'écoulement moyen dans les “grandes échelles”
- Energie transférée des grandes aux “petites échelles” (fluctuations)
- Energie dissipée à l'échelle “moléculaire”

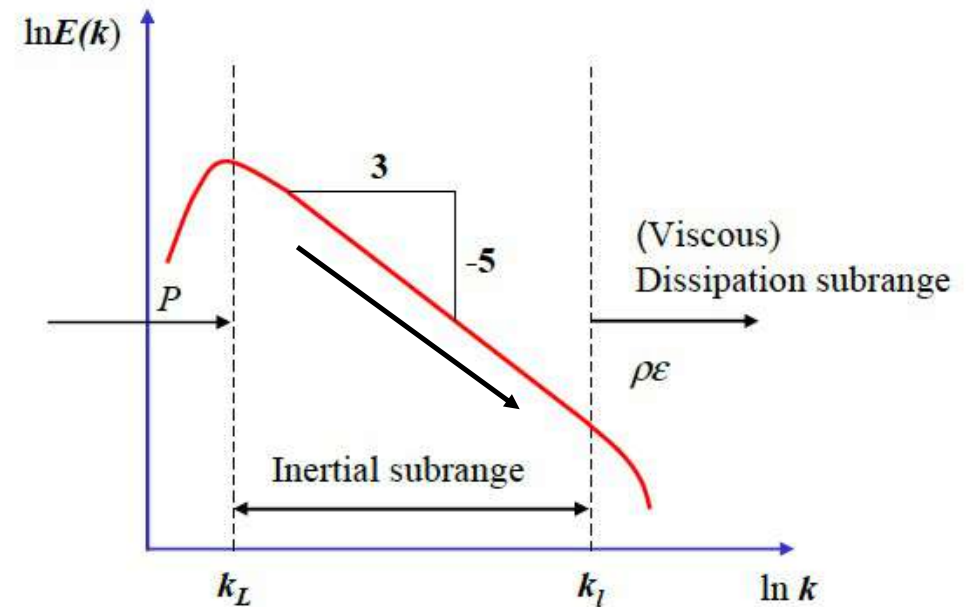
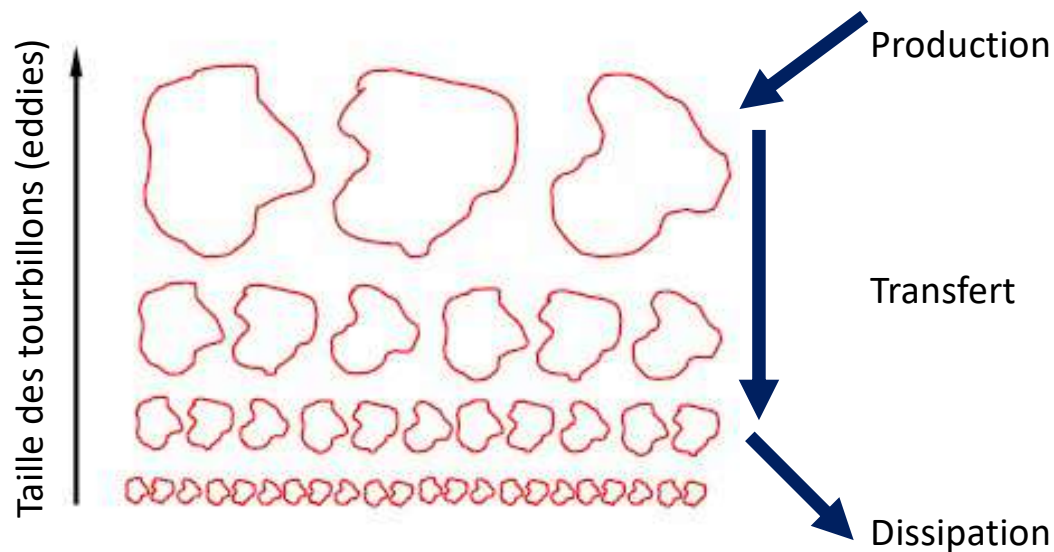


Illustration du mécanisme de cascade à l'aide d'une équation-modèle

- Equation de Burgers (dérivée à partir de NS pour un écoulement 1D sans gradient de pression)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \nu = \frac{1}{Re}$$

- Nous recherchons une solution analytique sous la forme d'une série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx), \quad k = 2\pi/L_k$$

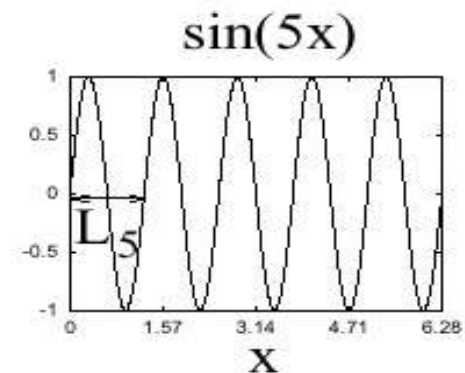
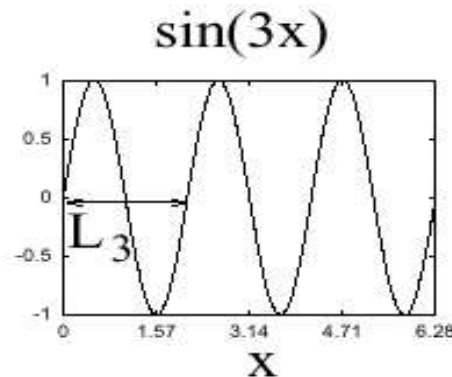
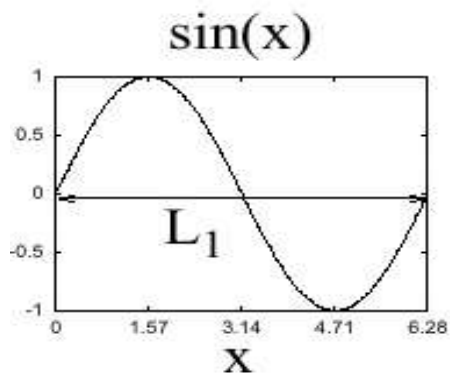


Illustration du mécanisme de cascade à l'aide d'une équation-modèle (cont.)

- On injecte le développement en série dans l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k \cos(kx),$$

Termes linéaires :
→ pas de création de nouvelles harmoniques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx),$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_l(t) A_m(t) m \sin(lx) \cos(mx) =$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \}.$$

Terme non linéaire :
→ création de nouvelles harmoniques d'ordre supérieur (cascade) ou inférieur (rétro-propagation)

- On obtient finalement une équation différentielle qui donne l'évolution des coefficients de Fourier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \} = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx).$$

Illustration du mécanisme de cascade à l'aide d'une équation-modèle (cont.)

- Etude simplifiée : écoulement avec une seule harmonique à l'état initial

$$A_k(t) \sin kx$$

- On injecte dans Burgers et on néglige dans un premier temps les termes non linéaires (cas $Re \rightarrow 0$) :

$$\dot{A}_k \sin kx = -k^2 \nu A_k \sin kx$$

- Après intégration :

$$A_k(t) = \exp(-k^2 \nu t)$$

→ L'amplitude de l'harmonique décroît autant **plus rapidement** que le **nombre d'onde est grand**
(c.à.d. la structure est petite)

Illustration du mécanisme de cascade à l'aide d'une équation-modèle (cont.)

- On regarde maintenant l'effet des termes non linéaires et on néglige les termes visqueux (cas $Re \rightarrow \infty$)
- Au voisinage de la condition initiale on peut écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0 + \Delta t) \approx \frac{u(x, \Delta t) - u_0(x)}{\Delta t} = \frac{u(x, \Delta t) - A_k \sin kx}{\Delta t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} = -A_k (\sin kx) k A_k (\cos kx)$$

d'où

$$u(x, \Delta t) = A_k \sin kx - \frac{\Delta t k}{2} A_k^2 \sin 2kx$$

- Apparition d'une nouvelle harmonique de longueur d'onde double (structure plus petite) après un temps infinitésimal
- Nombres de Reynolds intermédiaires :
compétition entre les termes nonlinéaires (création d'harmoniques) et les termes visqueux (dissipation)
 - La cascade s'arrête lorsque le temps caractéristique de la dissipation est plus rapide que celui de formation d'une nouvelle structure

Nonlinéarité des équations de Navier-Stokes

- Le raisonnement précédent s'applique aux termes non linéaires (convectifs) des équations de NS :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

- Considérons l'exemple très simple d'un écoulement à très grand Reynolds et sans gradient de pression :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t_0) = A \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \\ u_2(x_1, x_2, t_0) = B \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \end{cases} \quad (Ak_1 + Bk_2 = 0)$$

En développant en série de Taylor on trouve :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) + (t - t_0) \partial_t \mathbf{u}|_{t_0} + \dots \quad \text{with} \quad \partial_t \mathbf{u}|_{t_0} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|_{t_0}$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= A \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \\ &+ (t - t_0) \frac{k_1 A^2}{2} \left[\cos(2k_1 x_1) \sin^2(k_2 x_2) + \sin(2k_1 x_1) \cos^2(k_2 x_2) \right] + \dots \end{aligned}$$

→ Génération de nouvelles harmoniques

Quelle est la plus petite harmonique supportée par l'écoulement?

Echelle visqueuse

- Comme pour Burgers, le mécanisme est arrêté par la **viscosité moléculaire**
 - Plus la structure est petite, plus les gradients sont importants, plus l'action de la viscosité est efficace
- Soit u_η la vitesse de la plus petite structure, $k_\eta \sim \frac{1}{l_\eta}$ son nombre d'onde, l_η sa taille caractéristique
 - Pour cette structure les termes nonlinéaires sont négligeables devant les termes visqueux (régime à la Stokes) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} \text{ avec } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \sim \frac{u_\eta^2}{l_\eta} \quad \text{et} \quad \nu \nabla^2 \mathbf{u} \sim \frac{u_\eta}{l_\eta^2} \quad \text{telles que } Re_\eta = \frac{u_\eta l_\eta}{\nu} \sim 1$$

- Les échelles visqueuses u_η, l_η , connues comme **échelles de Kolmogorov**
 - Elles sont les plus petites échelles pouvant être créées dans l'écoulement
 - Echelle de Kolmogorov beaucoup plus grande que le libre parcours moyen (l_{mfp}) des molécules :
$$Kn = \frac{l_{mfp}}{l_\eta} \ll 1$$
 - La turbulence reste un **phénomène continu**
- La sensibilité des équations de NS aux conditions initiales et aux limites (CLI) → difficulté à prévoir le comportement d'un écoulement turbulent sur de longues périodes
 - Des perturbations différentes font apparaître des harmoniques différentes sur un temps infinitésimal, et ainsi de suite
→ Effet « papillon » connu en météorologie!

Origine de la turbulence

- La capacité (ou pas) d'un écoulement à générer de nouvelles structures ou à les amortir est liée à la notion **de stabilité hydrodynamique**

- Landau & Lifshitz, 1959 : La turbulence est un état d'instabilité permanente

« Yet not every solution of the equation of motion, even if it is exact, can actually occur in Nature. The flow that occurs in Nature must not only obey the equations of fluid dynamics but also be stable. »

- Un écoulement laminaire devient instable au delà d'un certain nombre de **Reynolds critique**
 - L'écoulement produit de nouvelles structures plus rapidement qu'il ne les dissipe
- Cependant, la théorie de la stabilité ne prédit pas la turbulence
- A noter que la turbulence **ne peut pas s'auto-entretenir** : elle s'alimente d'énergie injectée par l'environnement
 - Cisaillement, gradients de température, de densité, ...
 - Si le mécanisme est retiré, la turbulence et l'écoulement redevient laminaire

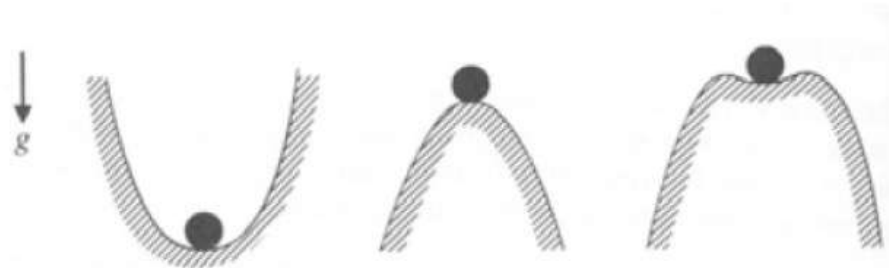
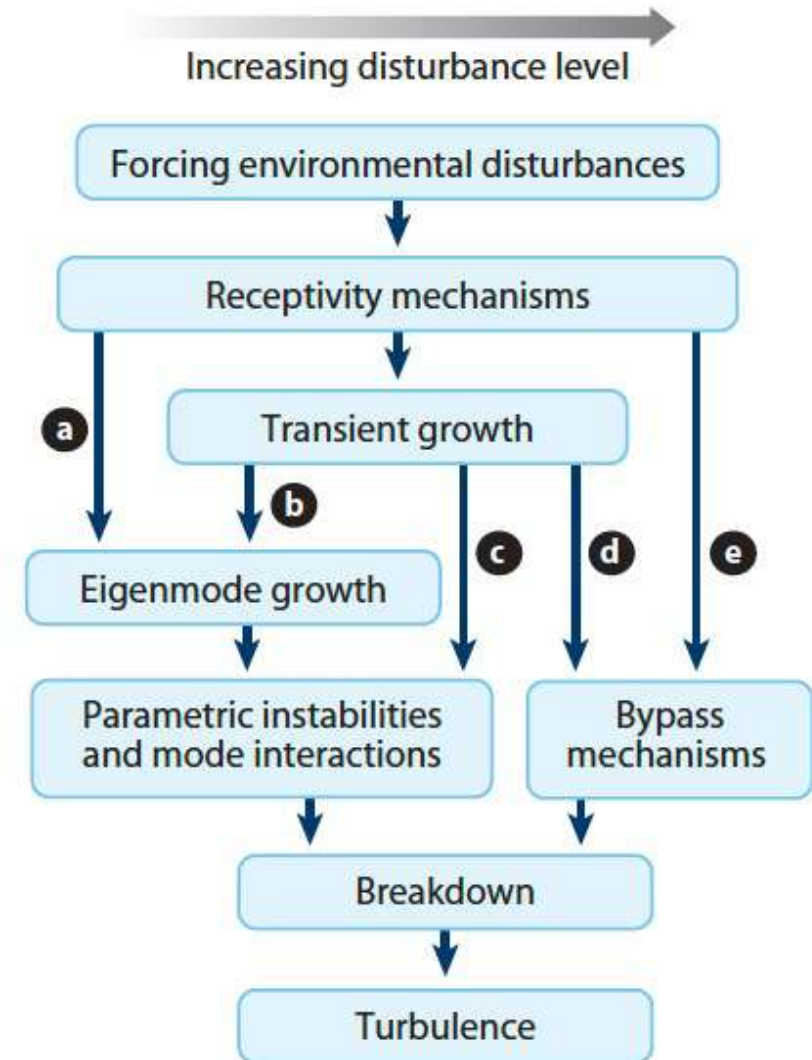


Illustration de la notion de stabilité

Instabilité et transition

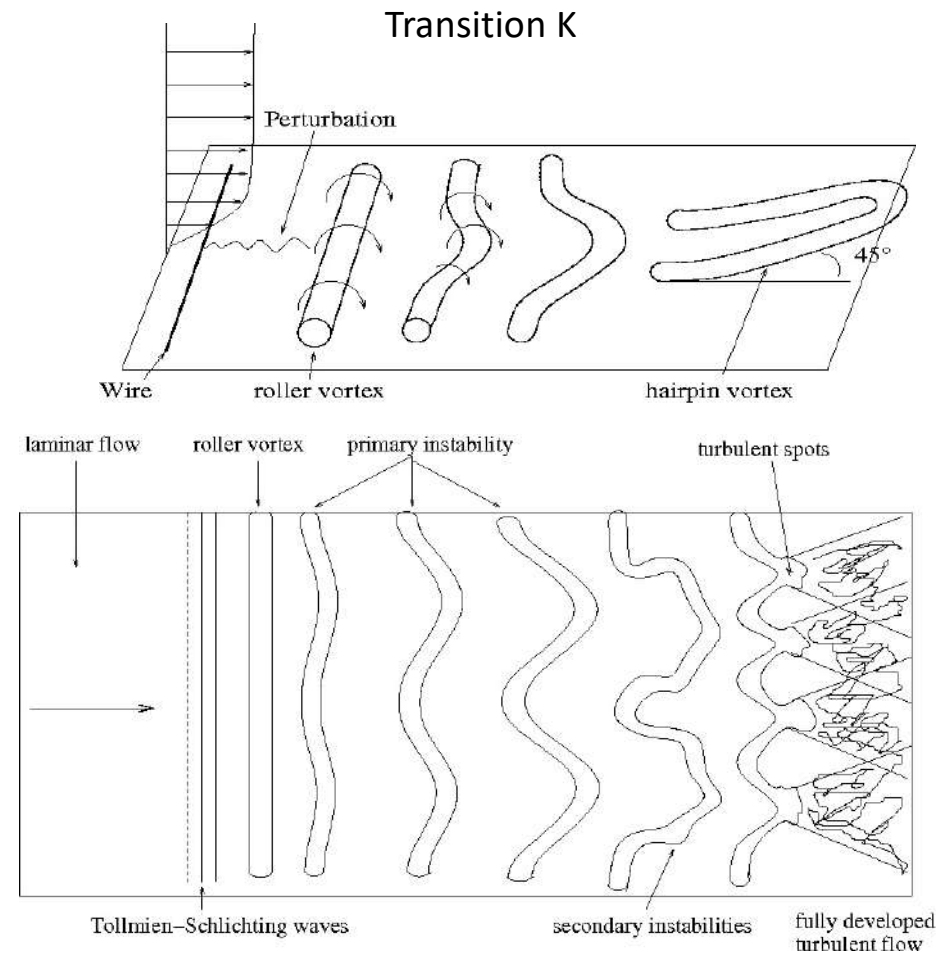
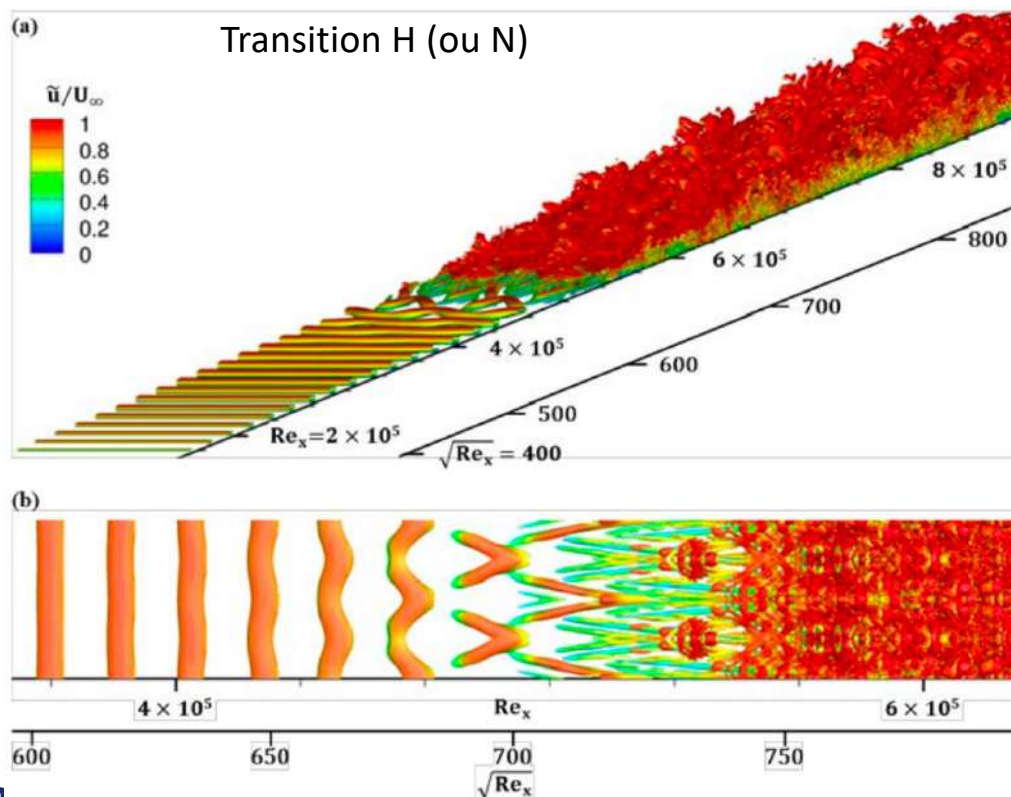
- Il existe de nombreuses routes vers la turbulence à partir d'une condition laminaire instable
- Il existe plusieurs façons de créer un même écoulement turbulent
 - Une fois qu'un écoulement est devenu turbulent, il est impossible de déterminer son origine → irréversibilité
- Par exemple, seulement pour un écoulement de couche limite, on a une grande variété de « scénarios »



Fedorov, 2011

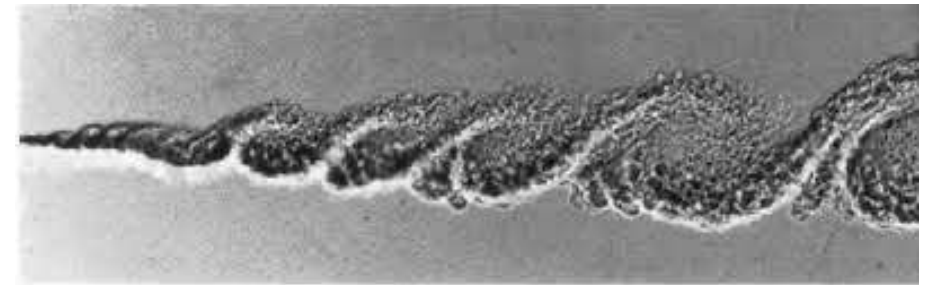
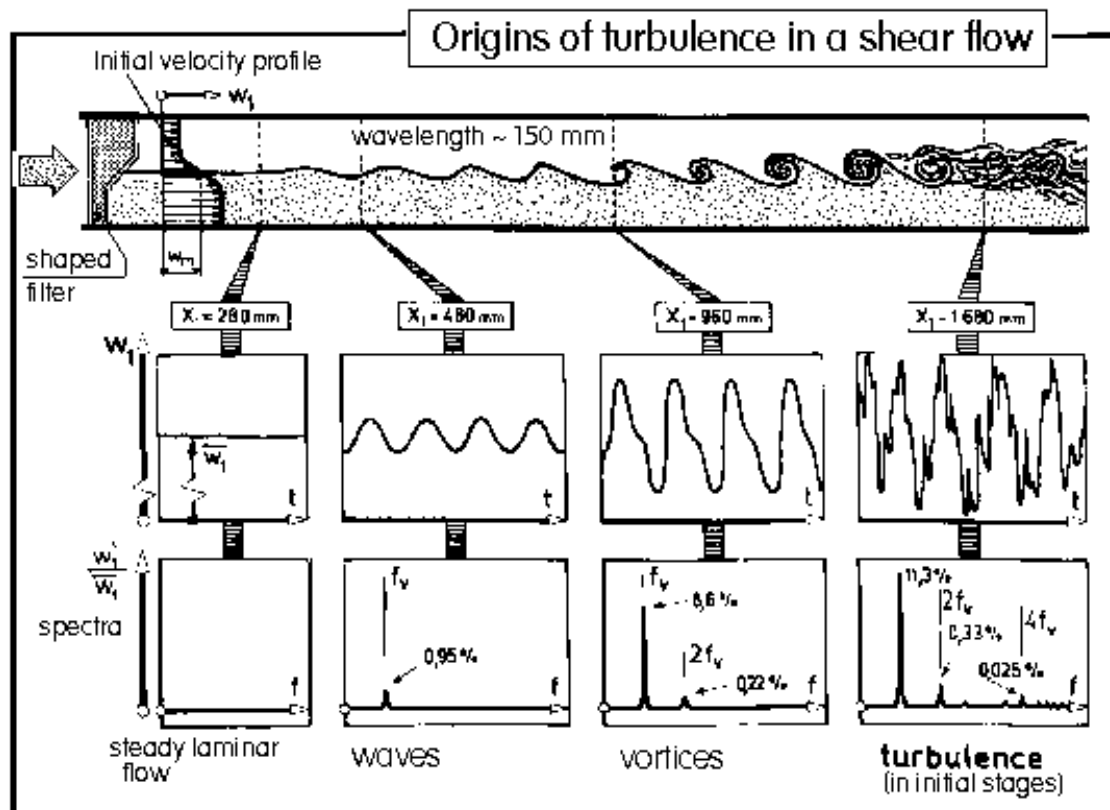
Exemples de transition vers la turbulence

- Exemple de transition « modale »
d'une couche limite (un scénario parmi d'autres)



Exemples de transition vers la turbulence

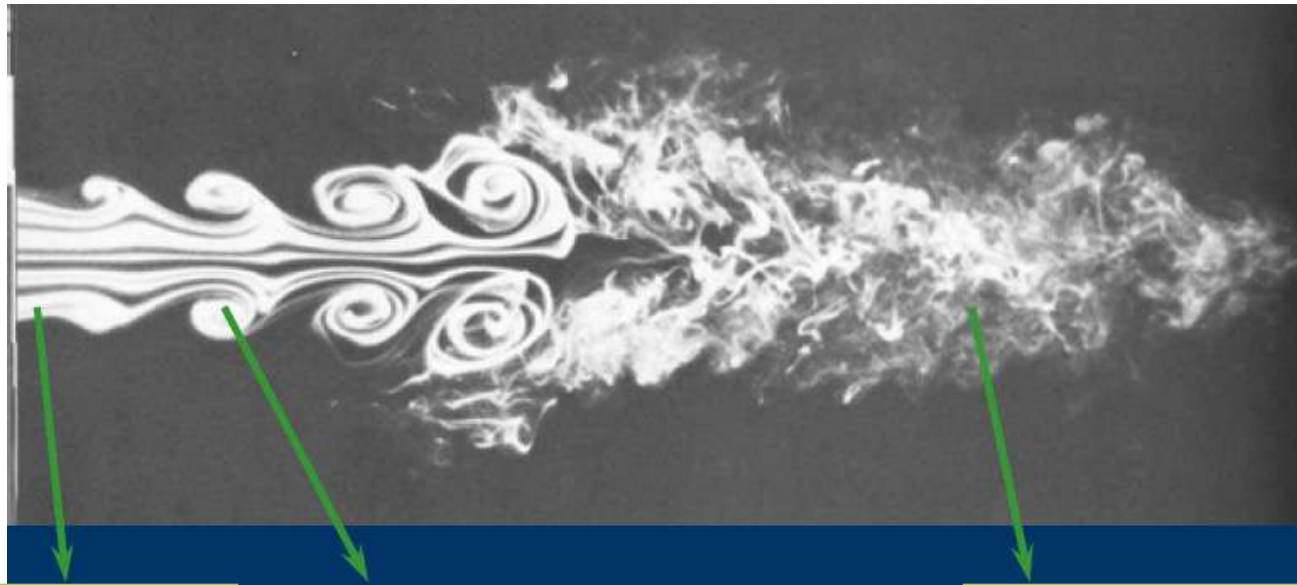
- Transition d'une couche de mélange



M. Van Dyke, An Album of Fluid Motion, 1982

Exemples de transition vers la turbulence

- Transition d'un jet plan

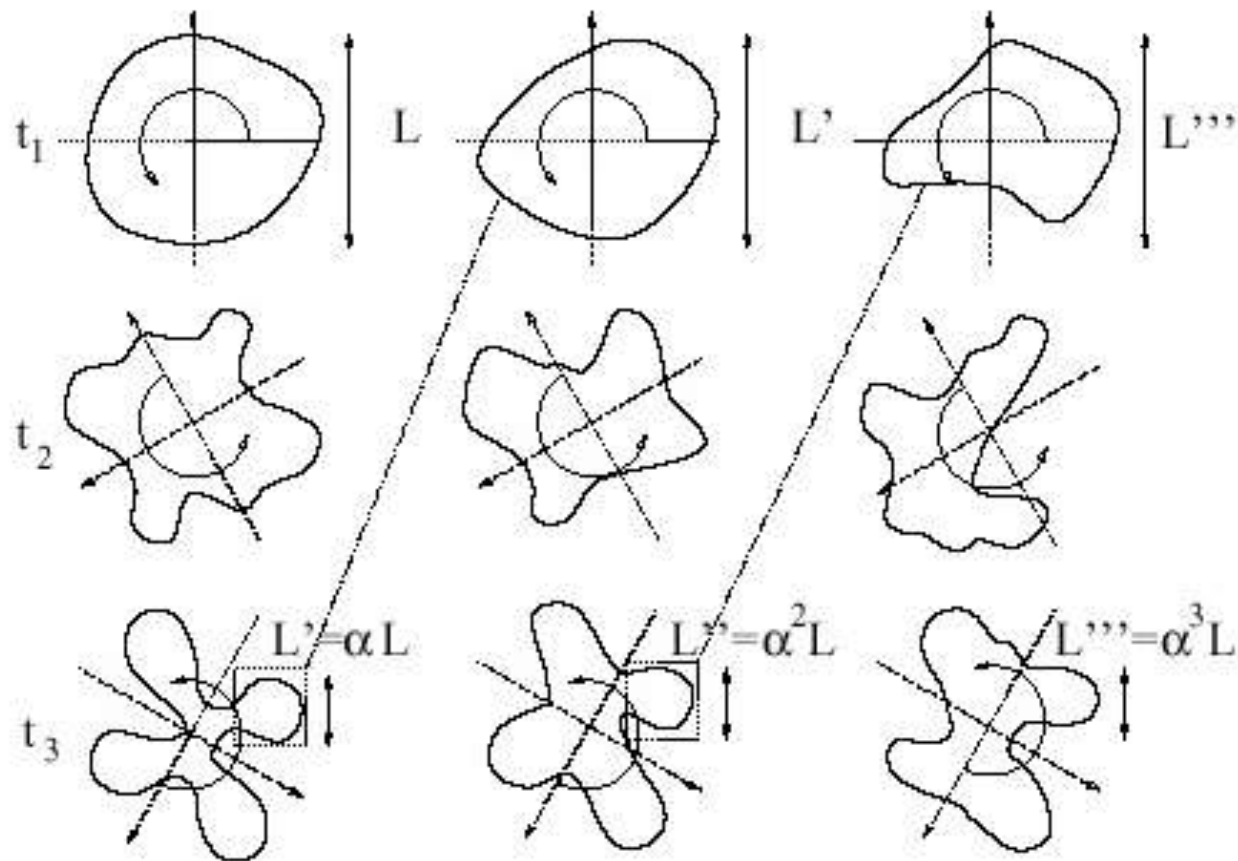


Laminar flow

Spatial/temporal growth
of instabilities → leads to
transition

Turbulent flow

Instabilité des tourbillons et mécanisme de cascade



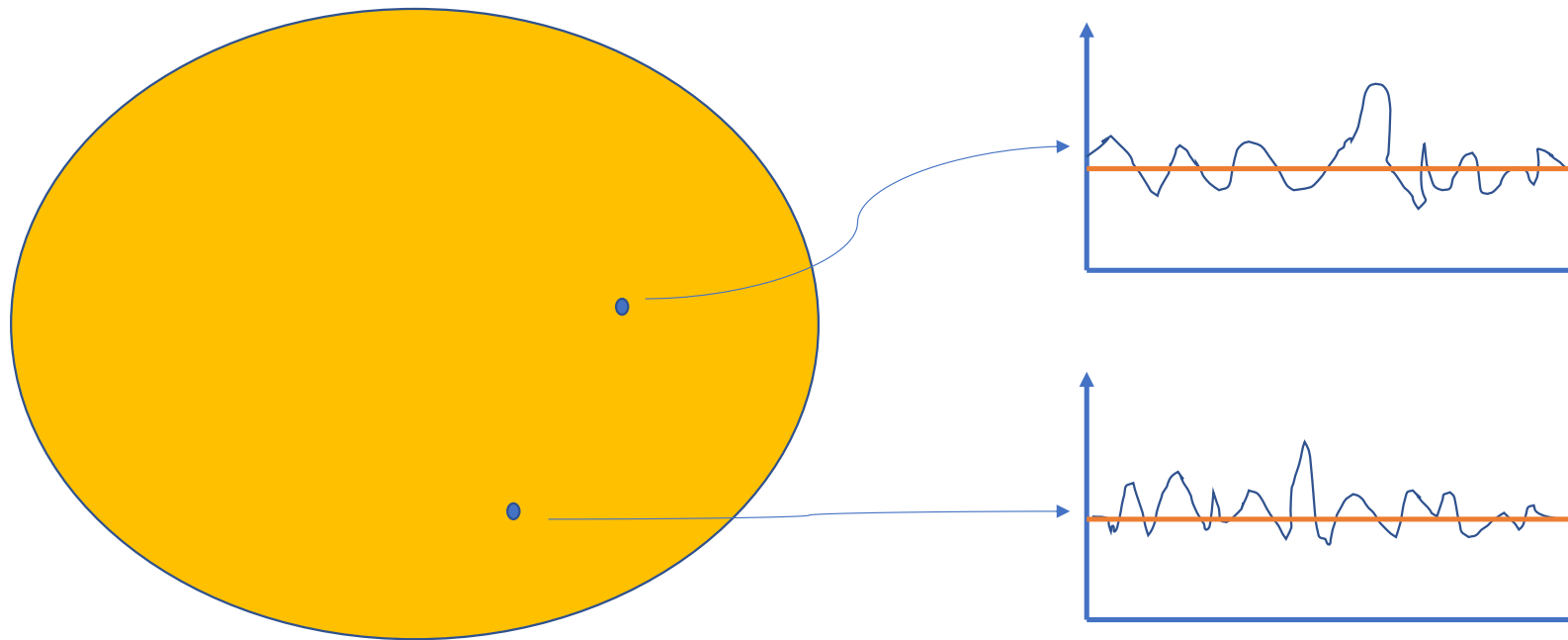
2. Rappels mathématiques

Description statistique de la turbulence

- Pour un écoulement turbulent, des perturbations infinitésimales des conditions initiales et aux limites (CIL) entre deux réalisations d'un même écoulement se traduisent en deux résultats différents
- Ce comportement est modélisé comme **aléatoire** :
 - A un jeu de CIL J donné correspond une réalisation aléatoire de l'écoulement
 - On note $\Omega(J)$ l'espace de toutes les réalisations possibles (« **univers** »)
 - On suppose que cet espace est doté d'une σ -algèbre
 - Collection de sous-ensembles de Ω tel que :
 - ✓ Il contient l'ensemble vide \emptyset et Ω
 - ✓ Pour tout sous-ensemble A , *tel que* $X - A \in \Omega$
 - ✓ Toute union dénombrable de sous-ensembles de Ω est contenue dans Ω
 - On introduit une mesure de probabilité sur Ω , $P: \Omega \rightarrow [0,1]$ *telle que*
 - $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $\forall X, Y \in \Omega$, $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

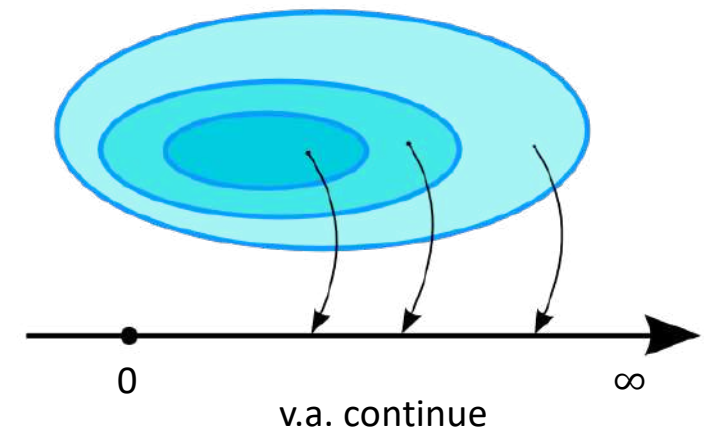
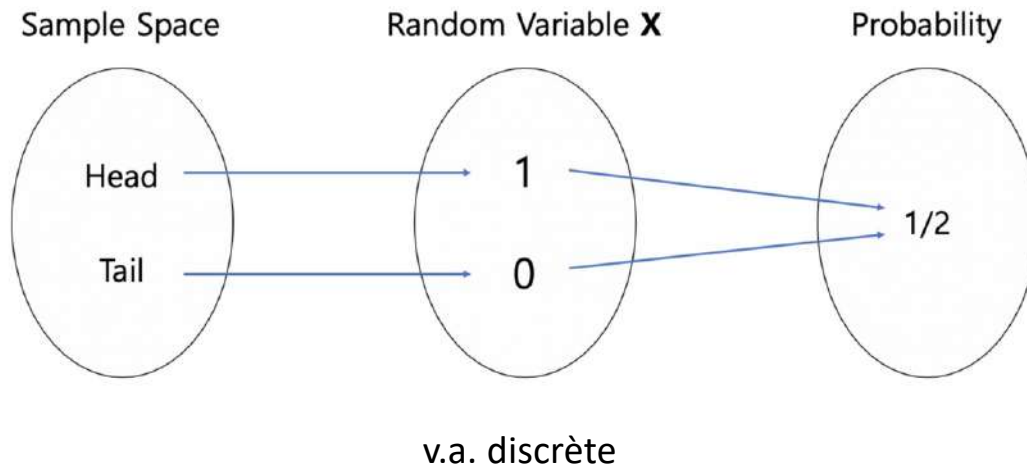
Espace des évènements

- Soit $\omega \in \Omega$ une réalisation de l'écoulement (évènement)
- On peut associer à tout ω un résultat (par exemple une réalisation du champ de vitesse, pression, etc.)



Variables, signaux et fonctions aléatoires

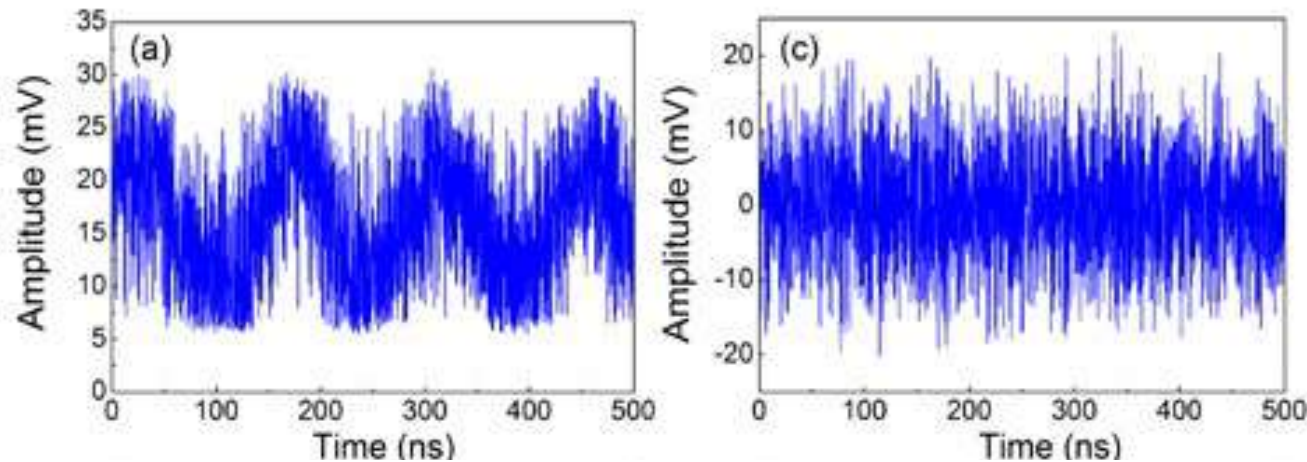
- **Variables aléatoires** (v.a.) fonction X de $\Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \rightarrow X(\omega)$
 - V.a. **Discrète** : ensemble de valeurs dénombrable (fini ou infini)
 - V.a. **Continue** : ensemble de valeurs infini et non dénombrable



Variables, signaux et fonctions aléatoires

▪ Signal aléatoire (s.a.)

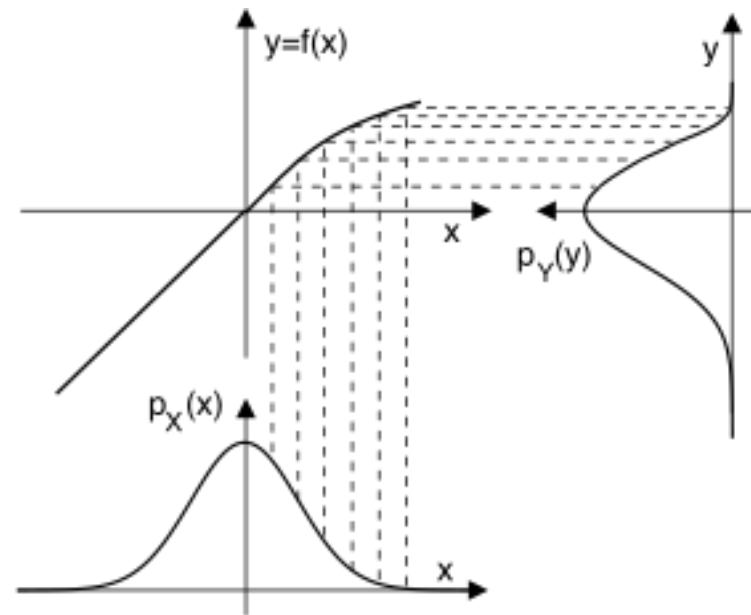
- Application associant à une variable réelle déterministe (temps, espace) une v.a. : $t \in \mathbb{R} \rightarrow X = X(t)$
- Toute valeur observée $x(t)$ est une réalisation de la v.a. $X(t)$
- Pour une réalisation de l'évènement $\omega \in \Omega$, la fonction $X(\omega, t)$ est appelée une **trajectoire** du signal aléatoire
 - **Stationnaire** : ses propriétés statistiques (moments) sont invariantes en temps
 - **Homogène** : ses propriétés statistiques sont invariantes en espace



s.a. instationnaire vs s.a. stationnaire

Variables, signaux et fonctions aléatoires

- **Fonction aléatoire** (f.a.) fonction f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : X \rightarrow f(X)$
 - Une fonction d'une (v.a.) $Y = f(X)$ est elle-même une variable aléatoire



s.a. instationnaire vs s.a. stationnaire

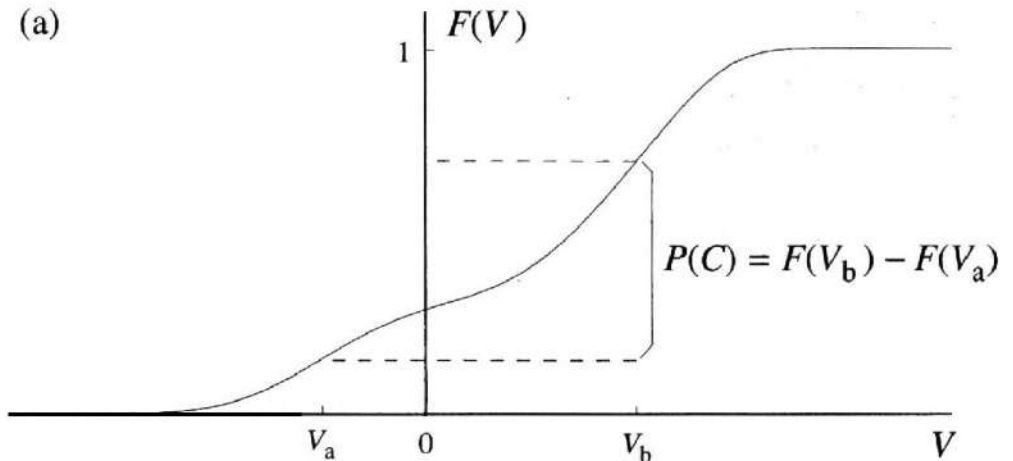
Lois de probabilité pour les v.a. continues

■ Fonction de répartition d'une v.a. X :

$$F_X(x) = P(X < x), \quad x \text{ réalisation donnée}$$

Propriétés

- $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
- $F_X(+\infty) = P(X < +\infty) = 1$
- $F_X(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$

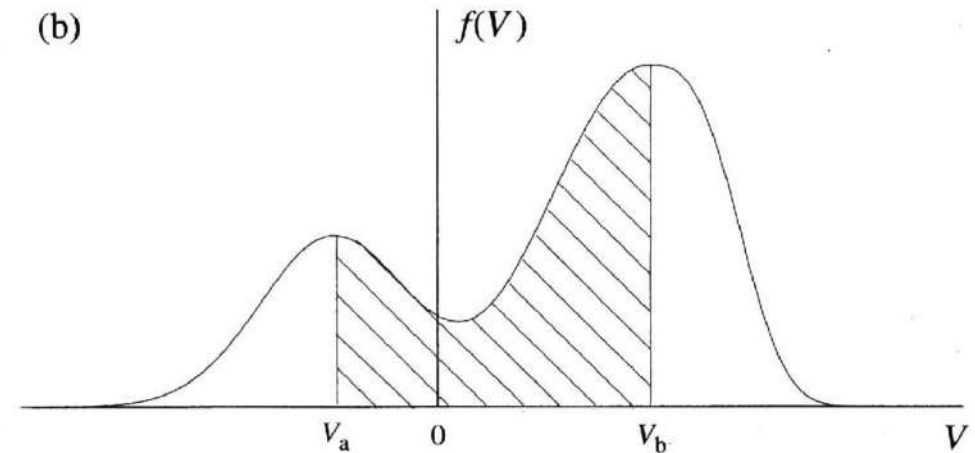


■ Fonction densité de probabilité $f_X(x)$ d'une v.a. :

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

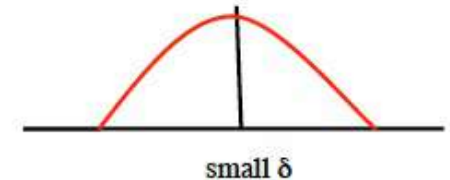
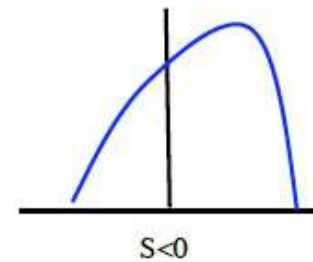
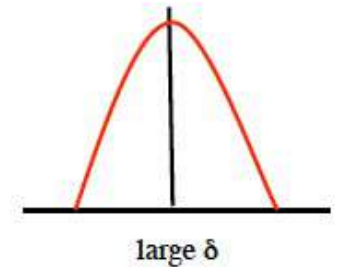
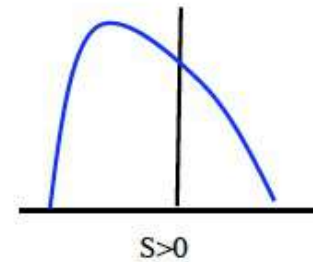
- Elle vérifie la propriété

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1$$



Moyenne et moments statistiques d'une v.a.

- Moyenne : $\mu_X = E[X] = \langle X \rangle = \int x p_X(x) dx$
- Moyenne quadratique : $E[X^2] = \langle X^2 \rangle = \int x^2 p_X(x) dx$
- Root mean square (r.m.s.) : $X_{rms} = \sqrt{\int x^2 p_X(x) dx}$
- Variance : $\text{var}[X] = \langle (X - \mu_X)^2 \rangle = \int (x - \mu_X)^2 p_X(x) dx$
- Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\text{var}[X]}$
- Coefficient de variation : $CoV = \sigma_X / \mu_X$
- Dissymétrie (*skewness*) : $\langle (X - \mu_X)^3 \rangle$
 - Coefficient de dissymétrie : $S = \frac{\langle (X - \mu_X)^3 \rangle}{\sigma_X^3}$
- Aplatissement (*flatness*) : $\langle (X - \mu_X)^4 \rangle$
 - Coefficient d'aplatissement : $\delta = \frac{\langle (X - \mu_X)^4 \rangle}{\sigma_X^4}$
- Pour une v.a. Gaussienne : $S = 0, \delta = 3$



Vecteurs aléatoires

▪ **Vecteur aléatoire** $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n: \omega \rightarrow W X(\omega) = (X_1(\omega) - \dots X_n(\omega))$

▪ Cas de 2 v.a. jointes

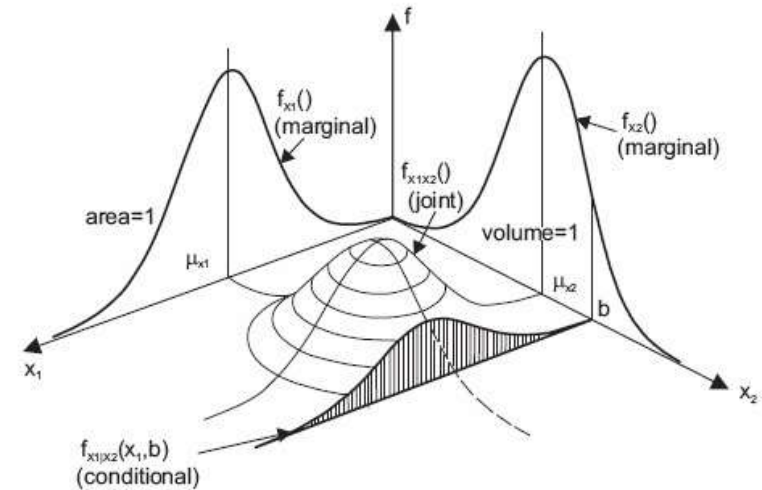
• **Fonction de répartition jointe** : $F_X(x_1, x) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)$

• **Densité de probabilité jointe** :

$$f_X(x_1, x_2) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{P(x_1 < X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 < X_2 < x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2} = \frac{\partial^2 F_X}{\partial x_1 \partial x_2}$$

• Densités de probabilité **marginale**s :

$$f_{X_1}(x_1) = \int f_X(x_1, x_2) dx_2; \quad f_{X_2}(x_2) = \int f_X(x_1, x_2) dx_1$$



▪ Moments croisés : $\langle X_1^m X_2^n \rangle = \iint x_1^m x_2^n f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

▪ **Covariance** : $\langle (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \rangle = \iint (x_1 - \mu_{X_1})(x_2 - \mu_{X_2}) f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

▪ **Coefficient de corrélation** : $r = \frac{\langle (X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}) \rangle}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}$

- $r = 1 \rightarrow$ relation linéaire entre X_1 et X_2
- $r = 0 \rightarrow$ variables décorrélées

Probabilités conditionnelles

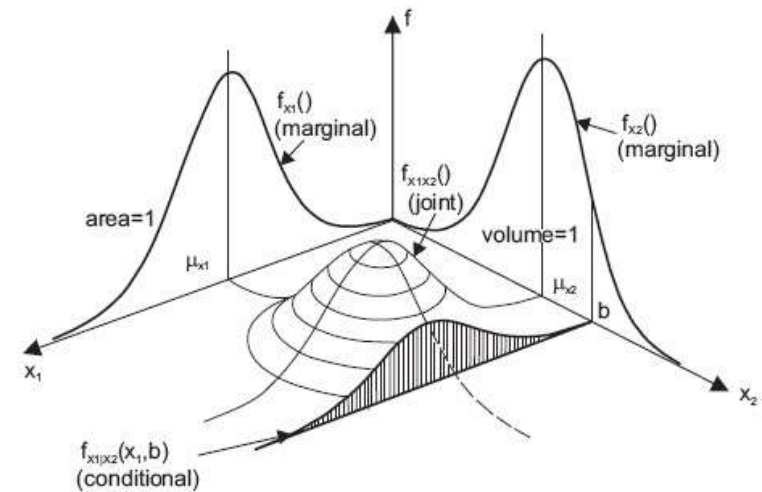
- Probabilité conditionnelle :

$$F_X(x_1|X_2 = B) = P(X_1 < x_1, X_2 = B) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1|B}(x_1) dx_1$$

avec $f_{X_1|B}(x_1) = f_X(x_1, B)/f_{X_2}(B)$ la **densité conditionnelle**

- Moyenne conditionnelle : $\langle X_1|X_2 = B \rangle = \int_{-\infty}^{x_1} x_1 f_{X_1|B}(x_1) dx_1$
- Variable indépendantes : $f_{X_1|B}(x_1) = f_{X_1}(x_1)$ pour tout B
 - Conséquence :

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$



Estimateurs statistiques

- En pratique la densité de probabilité d'une variable aléatoire X n'est pas connue sous forme analytique. En revanche, on disposera d'un échantillon de N observations du phénomène
- Chaque répétition de l'expérience correspond aux mêmes conditions nominales et on suppose que les répétitions sont indépendantes entre elles
- Par conséquent les variables aléatoires $\{X_1, X_2 \dots X_N\}$ ont la même distribution et sont indépendantes (*i.i.d.*)
- La **moyenne d'ensemble** de X sur les N répétitions est

$$\langle X \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X^{(n)}$$

- Le théorème central limite indique que, pour $N \rightarrow \infty$, $\langle X_N \rangle \rightarrow \langle X \rangle$
- De la même façon, la variance de l'échantillon tend vers la variance de X

Définitions alternatives de moyenne

- La moyenne d'ensemble est la plus générale mais elle est difficile à utiliser en pratique
- On introduit alors d'autres moyennes, plus simples à utiliser d'un point de vue opérationnel

- Soit $x(\mathbf{r}, t)$ une réalisation d'un s.a. dépendant d'un vecteur position de l'espace \mathbf{r} et du temps t .
Sa **moyenne temporelle** est :

$$X_t(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(\mathbf{r}, t') dt'$$

pour un signal stationnaire

Hypothèse d'ergodicité : les statistiques du s.a. peuvent être déterminées en connaissant une seule de ses réalisations (trajectoire)

→ La moyenne temporelle est dans ce cas égale à la moyenne d'ensemble

- La **moyenne spatiale** ou volumique est :

$$X_V(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V x(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

- Pour un signal homogène en espace

- La moyenne statistique est un opérateur linéaire, et il commute avec les dérivées spatiales et temporelles

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial(t, x)} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial(t, x)} \langle X \rangle$$

- Propriétés de Reynolds :

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X} ; \overline{X'} = 0 ; \overline{\overline{X}Y'} = 0$$

avec $\overline{X} = \langle X \rangle$; $X' = X - \overline{X}$

Décomposition harmonique et analyse spectrale

- Soit $u(t)$ une fonction déterministe, non périodique, à valeurs complexes, définie sur $[-\infty, \infty]$ et absolument sommable, c.à.d:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt = K \text{ fini}$$

- Alors il existe une décomposition harmonique de $u(t)$, c.à.d. une superposition continue de sinusoïdes

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) \exp(i \omega t) d\omega$$

- Avec

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i \omega t) dt$$

- On reconnaît ci-dessus la **transformée de Fourier** et la **transformée de Fourier inverse** de h
- De la même façon on peut écrire la décomposition harmonique d'une fonction aléatoire
 - Dans ce cas, les transformées de Fourier directe et inverse sont à leur tour des f.a.

Densité spectrale d'énergie

- Considérons la moyenne quadratique ou **énergie** de $u(t)$:

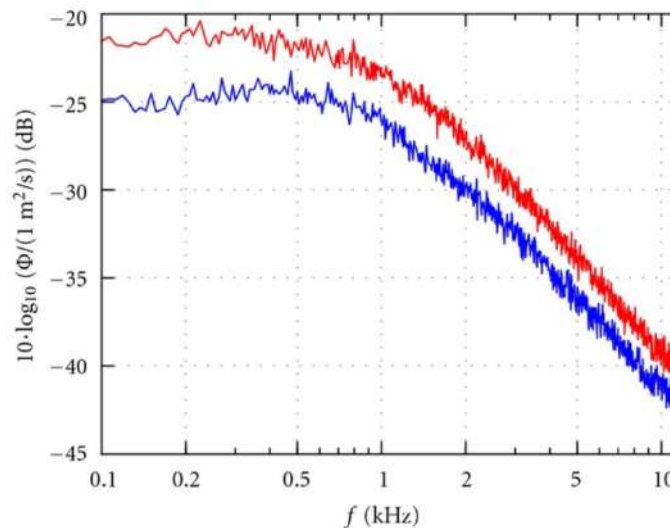
$$\bar{E} = \langle u(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)^2 dt \quad (\text{proportionnelle à l'énergie totale})$$

On considère une décomposition harmonique de $u(t)$. Le théorème de Parseval assure que :

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega$$

La quantité $E(\omega) = |\hat{u}(\omega)|^2$ est la densité spectrale d'énergie du signal.

$E(\omega)d\omega$ représente la quantité d'énergie contenue dans la bande de fréquence $d\omega$



Décomposition harmonique en espace

- Les résultats précédents sur les s.a. stationnaires en temps peuvent être transposés à des signaux homogènes en espace
- Soit $u(\mathbf{r})$ un s.a. homogène, fonction du vecteur position \mathbf{r} de l'espace Euclidien 3D.
- Sa décomposition harmonique s'écrit :

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_{D(\mathbf{k})} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \hat{u}(\mathbf{k}) dk_1 dk_2 dk_3$$

avec

- \mathbf{k} le vecteur d'onde,
 - $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$ les nombres d'onde dans les trois directions spatiales
 - λ_i les longueurs d'onde
- L'énergie est dans ce cas localisable en vecteur d'onde :

$$\bar{E} = \iiint_{D(\mathbf{k})} |\hat{u}(\mathbf{k})|^2 dk_1 dk_2 dk_3$$

Intensité turbulente

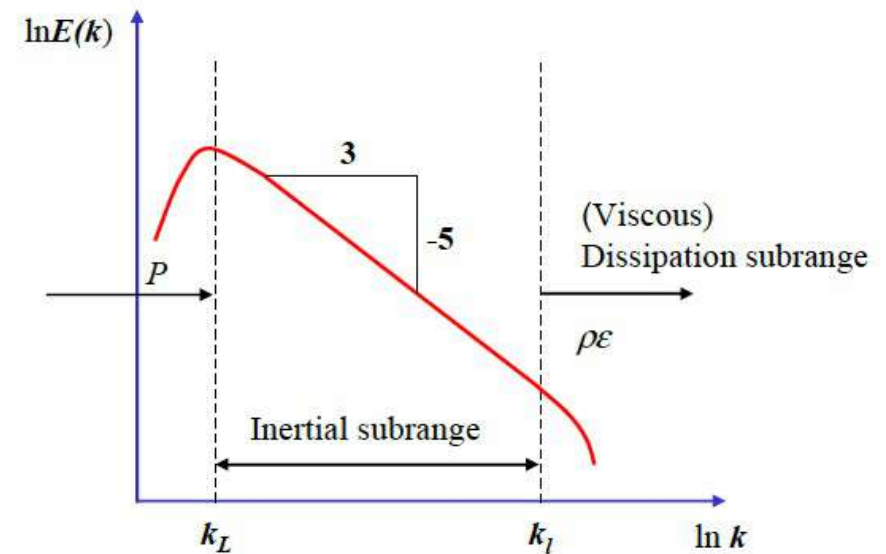
- On décompose le champs de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}=(u,v,w)$$

- On appelle intensité turbulente la quantité suivante :

$$I_t = \sqrt{|\mathbf{u}'|^2} / \bar{u}$$

- Energie cinétique turbulente : $K = \frac{1}{2} |\mathbf{u}'|^2$
- Spectre fréquence/nombre d'onde
- Echelles énergétiques
 - $u_{rms} \sim \sqrt{2K}$
 - $l \sim 1/k_L$



Exercice

■ Intensité turbulente en agitation gaussienne

- En un point d'une soufflerie, on mesure une vitesse moyenne de 20 m/s et une intensité turbulente $I_t=0.2\%$. Les fluctuations de vitesse étant réparties avec une approximation suffisante selon une loi normale, donner l'expression de cette loi

■ SOLUTION

- Pour une loi normale centrée (moyenne des fluctuations nulle), l'expression générale de la densité de probabilité ne dépend que de l'écart type.
- Dans notre cas : $\sqrt{|\mathbf{u}'|^2} = I_t \bar{\mathbf{u}} = 0.04 \text{ m/s}$
- La loi de probabilité des fluctuations s'écrit donc $f(u) \approx 9.97 \exp\left(-\frac{10000u^2}{32}\right)$

Corrélations spatio-temporelles

- Corrélation spatio-temporelle

$$R(x, x', t, t') = \frac{\langle u'(x, t) u'(x', t') \rangle}{\langle u'(x, t) u'(x, t) \rangle},$$

- Auto-corrélation en espace

$$R(\xi, t_0) = \frac{\langle u'(x, t_0) u'(x + \xi, t_0) \rangle}{\langle u'(x, t_0) u'(x, t_0) \rangle},$$

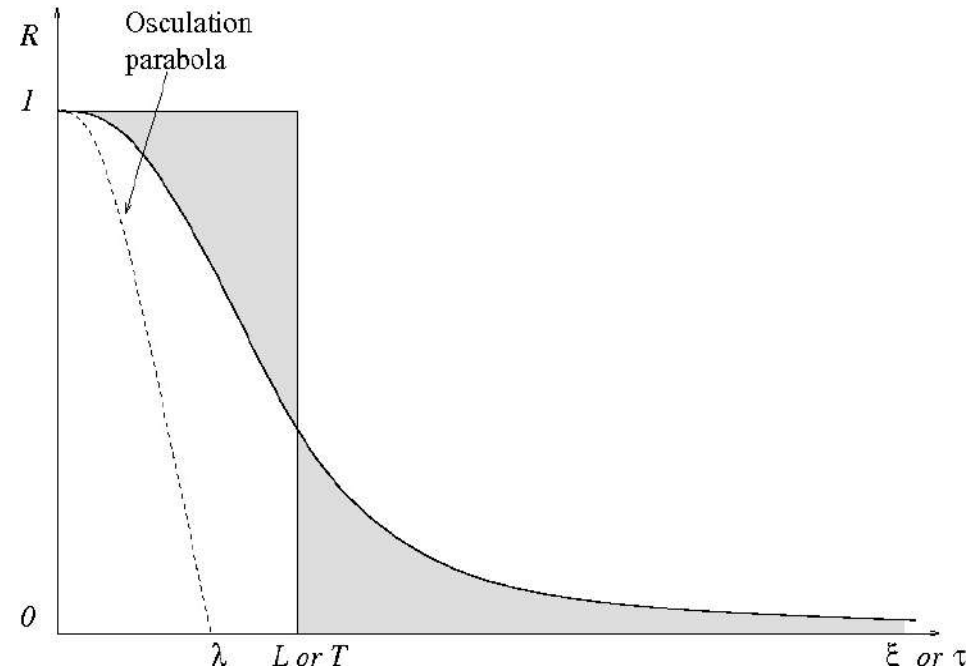
- Autocorrélation en temps

$$R(x_0, \tau) = \frac{\langle u'(x_0, t) u'(x_0, t + \tau) \rangle}{\langle u'(x_0, t) u'(x_0, t) \rangle},$$

- Echelles intégrales (macro-échelles de Taylor) : $L = \int_0^\infty R(\xi, t_0) d\xi$ $T = \int_0^\infty R(x_0, \tau) d\tau$

- Micro-échelle de Taylor

$$\lambda(t) := \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0}^{-1} \right]^{1/2}$$



3. Exercices

Equation de Burgers

- Chercher une solution approchée de l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

au voisinage de la condition initiale $(t_0 + \Delta t)$
 $A \sin kx$

- Que se passe-t-il à l'instant $t_0 + 2\Delta t$?
- Comment change l'amplitude d'une structure au cours du temps?
- Quels sont les paramètres importants dans l'évolution de la solution?

EXERCISES

- 3.1 With Q and R being random variables, and a and b being constants, use Eq. (3.20) to verify the relations

$$\langle a \rangle = a, \quad \langle aQ \rangle = a\langle Q \rangle, \quad (3.26)$$

$$\langle Q + R \rangle = \langle Q \rangle + \langle R \rangle, \quad \langle \langle Q \rangle \rangle = \langle Q \rangle, \quad (3.27)$$

$$\langle \langle Q \rangle \langle R \rangle \rangle = \langle Q \rangle \langle R \rangle, \quad \langle \langle Q \rangle R \rangle = \langle Q \rangle \langle R \rangle, \quad (3.28)$$

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle q \langle R \rangle \rangle = 0, \quad (3.29)$$

where $q \equiv Q - \langle Q \rangle$.

- 3.2 Let Q be defined by

$$Q = a + bU, \quad (3.30)$$

where U is a random variable, and a and b are constants. Show that

$$\langle Q \rangle = a + b\langle U \rangle, \quad (3.31)$$

$$\text{var}(Q) = b^2 \text{var}(U), \quad (3.32)$$

$$\text{sdev}(Q) = b \text{sdev}(U). \quad (3.33)$$

Show also that

$$\text{var}(U) = \langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2. \quad (3.34)$$

Next time...

- QCM de 10 minutes sur Wooclap
- Dans le prochain cours on s'intéressera au lien entre la turbulence et la dynamique de la vorticité
- TD sur la dynamique de la vorticité