Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 20 juin 2018

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Qu'entendez-vous par *le principe de superposition* ?
2. Justifier la non-linéarité de l'équation : $u_x^2 + y^2 u_y = x - 2^y$.
3. Donnez l'équation des droites caractéristiques associée à l'équation $u_x - 2u_y = 0$. Tracez quelques courbes caractéristiques. Comment la solution se comporte-t-elle le long de ces droites ?
4. Donnez un exemple d'équation aux dérivées partielles linéaire elliptique.
5. Expliquez la notion de stabilité de la solution du problème aux conditions initiales (problème de Cauchy) pour l'équation des ondes en une variable spatiale.
6. Donner la solution fondamentale pour l'équation de la diffusion définie sur l'axe réel sachant que la donnée (temperature, concentration, ...) initiale est $\Phi(x)$.
7. Enoncez le principe de maximum pour une fonction harmonique.

Exercice 1

Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$u_{yy} - \sqrt{x} u_{xx} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

i) Préciser le type de l'équation.
ii) Proposer une factorisation de l'opérateur d'ordre deux associée a l'équation comme produit de deux opérateurs d'ordre un.
iii) Calculer la solution $u(x, y)$ de cette équation en utilisant la factorisation proposée en ii).

Exercice 2

Soit le problème aux conditions initiales et aux limites :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \ u_t(x, 0) = 0, \ 0 < x < l \tag{3}$$

i) De quelle équation de la mécanique s'agit-t-il ?
ii) Donner une interprétation physique des conditions aux limites (2).
iii) Déterminer la solution u(x, t) qui vérifie les conditions aux limites et initiales.
iv) Sans effectuer de calculs expliquer comment change la solution si on impose des conditions aux limites de type Neumann.

Exercice 3

(a) Utiliser la méthode de séparation des variables pour déterminer la solution générale du problème de Neumann pour la diffusion de la chaleur dans une barre isolée :

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer la solution de l'équation $u_t = 12u_{xx}$, $\forall 0 < x < \pi, \; t > 0$ avec les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) &= 1 + \cos^3 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Indication : $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.
(c) Étudier la limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t), \quad \forall 0 < x < \pi$, et donner une interprétation physique de votre étude. Est-ce que ce résultat était prévisible ?

Exercice 4
En résolvant l'équation de Laplace en coordonnées polaires :

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

dans l'anneau $(r,\theta), a \leqslant r \leqslant b$, avec $0 < a < b$, déterminer la température d'un anneau métallique fin qui vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(a,\theta) = u_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u(b,\theta) = u_1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{aligned}$$

Autrement dit, l'anneau est maintenu à la température constante u_0 sur sa frontière intérieure et respectivement u_1 sur sa frontière extérieure.