

## Hydrodynamique *Conditions aux limites*

### 1 Conditions limites d'imperméabilité sur un obstacle



FIG. 1 : **Déflexion liquide par obstacle.** Gauche : une bille hydrophobe impacte un réservoir d'eau à  $\approx 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et induit un splash (corolle de liquide) à l'impact (Eggers, 2007). Droite : un écoulement sur obstacle dans un canal à vagues donne lieu au phénomène de *ressaut hydraulique* (Science Education Resource Center at Carleton College<sup>1</sup>).

▷ **Impact.** Un obstacle sphérique de rayon  $R$  impacte un réservoir liquide à vitesse  $-U_{\text{impact}}\mathbf{e}_z$ . À l'impact, le fluide est violemment mis en mouvement par l'impacteur.

1. En supposant que l'impacteur conserve sa vitesse lors du choc, déterminer la position du centre  $C$  de la sphère au cours du temps, en supposant qu'à  $t = 0$ ,  $C$  se situe en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . En déduire l'équation de la surface de la sphère pour tout temps dans le référentiel du laboratoire (i.e. le référentiel fixe).
2. Calculer l'expression du vecteur normal  $\mathbf{n}$  en tout point de la sphère pour tout temps dans un repérage cartésien.
3. En notant  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  la vitesse du fluide, déterminer l'expression de la condition d'imperméabilité valide à la surface de la sphère.

▷ **Écoulement au-dessus d'un obstacle.** On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'une rivière au-dessus d'un obstacle, tel qu'illustré sur la figure 1. On suppose pour simplifier l'écoulement uniforme loin en amont de l'obstacle,  $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x$ , et invariant par translation (i.e. 2D) dans la direction transverse. La direction verticale est portée par  $\mathbf{e}_y$  et on note les composantes du champ de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v)$ . L'élévation du fond est donnée par la fonction  $y = f(x)$ .

4. Déterminer la normale au fond de la rivière.
5. Exprimer la condition d'imperméabilité valide au fond.
6. Tracer schématiquement l'allure de la vitesse verticale au fond dans le cas d'un obstacle localisé (par exemple de forme gaussienne). Commenter.

### 2 Écoulement autour d'un cylindre aspirant

On s'intéresse dans cet exercice à structure de l'écoulement autour d'un cylindre pouvant aspirer (ou souffler) le fluide l'avoisinant. Il s'agit là d'un modèle rudimentaire de turbovoile (voir cours).

Dans tout l'exercice, on suppose l'écoulement invariant par translation (2D), incompressible et irrotationnel. On note  $\mathbf{u} = (u, v)$  les composantes du champ de vitesse et on introduit la fonction de courant  $\psi$  telle que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

On emploiera selon la situation les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

1. <https://serc.carleton.edu/NAGTWorkshops/geomorph/emriver/index.html>

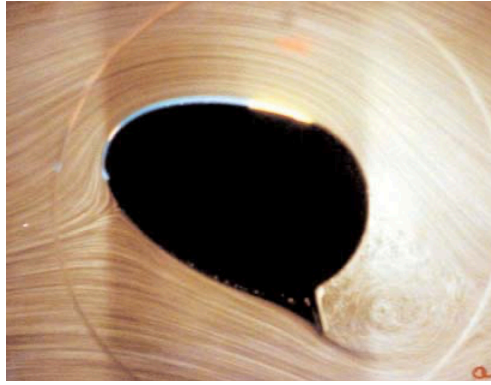


FIG. 2 : Maquette de turbovoile à l'ONERA. L'aspiration à travers la paroi du cylindre permet d'assurer le recollement de l'écoulement.

1. Montrer qu'un écoulement décrit par une telle fonction de courant satisfait automatiquement l'équation de conservation de la masse.
2. Montrer que la condition d'écoulement irrotationnel implique  $\Delta\psi = 0$ .
3. Vérifier que  $\psi_{\text{unif}} = ay$  et  $\psi_{\text{source}} = b\theta$  sont solutions élémentaire de  $\Delta\psi = 0$ . Quels sont les écoulements associés ?
4. Quelle est la fonction de courant d'un écoulement uniforme  $\mathbf{u} = (U, 0)$  ?
5. Comme vu dans le TD de Mécanique des Milieux Continus, on peut construire des solutions multipolaires complexes à partir des solutions élémentaires précédentes. Calculer les champs dipolaires  $\psi_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial x}\psi_{\text{source}}$  et  $\psi_{\perp} = \frac{\partial}{\partial y}\psi_{\text{source}}$ . Représenter les lignes de courants correspondantes sous Python.
6. Montrer qu'il est possible de construire l'écoulement parfait irrotationnel s'écoulant autour d'un cylindre de rayon  $R$  comme la superposition d'une contribution  $\psi_{\text{unif}}$  et d'une contribution dipolaire.
7. Proposer une modélisation de l'effet d'aspiration, qui sera caractérisée par une vitesse d'aspiration constante  $-u_{\text{aspi}}\mathbf{e}_r$  à la paroi.
8. Représenter les lignes de courant sous Python correspondantes aux cas  $u_{\text{aspi}}/U = 0.1, 0.5, 1$ .

### 3 Diffusion confinée d'une espèce chimique

Dans cet exercice on souhaite caractériser l'impact de la présence de parois sur le phénomène de diffusion d'un contaminant. Pour simplifier l'étude on suppose que la diffusion s'effectue suivant un seul axe (ce qui correspond au cas d'invariance par translation suivant deux directions d'espace ou de diffusion dans un tube), et on note  $c(x, t)$  le champ de concentration étudié.

On montre dans le cours de Mécanique des Milieux Continus qu'une solution particulière à l'équation de diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3)$$

présentant la propriété d'invariance d'échelle est :

$$c(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (4)$$

1. Vérifier que ce champ est solution de l'équation de diffusion.
2. Intégrer le champ de concentration total pour un temps donné. Quel sens donner à la constante  $M$  ?
3. Tracer sous Python l'évolution de ce champ pour différents instants (on posera  $M = 1$  et  $D = 1$ ).

Comme l'équation de diffusion est linéaire, toute combinaison linéaire de solutions élémentaires sera également solution. On se propose dans la suite d'utiliser cette propriété afin de construire des champs solutions respectant les conditions limites du problème, tout comme on utilise en électrostatique des charges "images" pour modéliser des surfaces équipotentielles ("métallisation" de la paroi).

▷ **Diffusion en présence d'une paroi imperméable** On place une quantité  $M$  de scalaire passif à distance  $\ell$  d'une paroi imperméable située en  $x = 0$ .

4. Quelle condition limite vérifie le champ de concentration en  $x = 0$  ?

5. Montrer, en plaçant une concentration fictive symétrique par rapport à la paroi, qu'il est possible de construire le champ de concentration solution respectant la condition d'imperméabilité. Donner l'expression de ce champ et tracer son évolution sous Python.

▷ **Diffusion en présence d'une paroi absorbante** On enduit maintenant la paroi précédente d'un réactif se recombinaut avec le champ de concentration, de sorte qu'à la paroi la condition d'absorption  $c(0, t) = 0$  soit maintenant vérifiée.

6. Proposer une construction permettant de trouver l'évolution du champ de concentration dans ces conditions.
7. Quel est le flux de concentration vers la paroi ?

▷ **Diffusion confinée** On s'intéresse maintenant à la diffusion du contaminant déposé initialement en  $x = 0$  lorsqu'il est confiné entre deux parois imperméables situées en  $x = \pm \ell$ .

8. Suffit-il de superposer trois solutions élémentaires pour modéliser l'influence des parois ? Pour répondre à cette question, on estimera le flux à chacune des parois.
9. Pour palier à ce problème, on se propose de modéliser le champ comme la superposition d'une infinité de solutions élémentaires initialement disposées en  $x = 2j\ell, j \in \mathbb{Z}$ .
10. Pour déterminer le poids de chacun des termes, écrire la condition limite de flux nul en  $x = \ell$ .
11. Tracer sous Python l'évolution du champ pour différents instants.
12. Quelle est la valeur asymptotique de la concentration dans l'entrefer ?

## Références

EGGERS, JENS 2007 Fluid dynamics : Coupling the large and the small. *Nat Phys* 3 (3), 145–146.