Equation de la déformée

Sous l'action de la flexion, la ligne moyenne de la poutre va se déformer et son équation caractéristique après déformation est $\vec{u} = u_y(x)\ \vec{y}$

La ligne moyenne après déformation est aussi appelée **déformée**.

La valeur de la déformée en un point est appelée **flèche**.

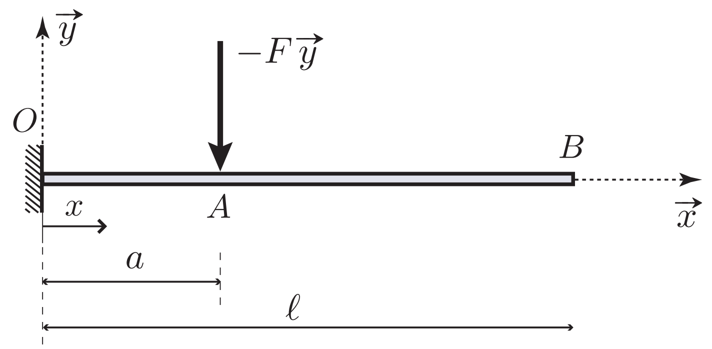
Pour une section symétrique, la relation de comportement entre la flèche et le moment fléchissant est $M_z(x) = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\omega_z(x)}{\mathrm{d}x}$

Si l'on se place dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli (effets de l'effort tranchant négligés) on a la relation $\omega_z(x) = \dfrac{\mathrm{d}u_y(x)}{\mathrm{d}x} \implies M_z(x) = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2}$

L'intégration de cette équation et la prise en compte des C.L. $\implies$ $\boxed{u_y(x)}$

Exple de calcul d'équation de la déformée :

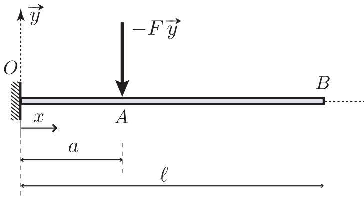
Déterminer pour la poutre ci-dessous le déplacement transverse $u_y(x)$ en tout point de la poutre.



Le moment fléchissant pour cette poutre est:

$$0 < x < a \ : \quad M_z^{①}(x) = F(x-a)$$

$$a < x < \ell \ : \quad M_z^{②}(x) = 0$$



$0 < x < a \ :$

$$M_z^{①}(x) = EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z^{①}(x)}{\mathrm{d}x} = F(x-a) \quad \Longrightarrow \omega_z^{①}(x) = \frac{F}{EI_{Gz}}\left(\frac{x^2}{2} - ax\right) + C_1$$

Encastrement en $x = 0$ $\qquad \omega_z^{①}(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$

d'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli $\quad \omega_z^{①}(x) = \dfrac{\mathrm{d}u_y^{①}(x)}{\mathrm{d}x}$

$$\Longrightarrow u_y^{①}(x) = \frac{F}{EI_{Gz}}\left(\frac{x^3}{6} - a\frac{x^2}{2}\right) + C_2$$

Encastrement en $x = 0$ $\qquad u_y^{①}(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

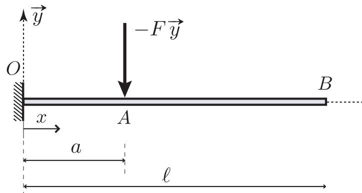
finalement $\qquad \boxed{u_y^{①}(x) = \dfrac{Fx^2}{6EI_{Gz}}(x - 3a)}$

$a < x < \ell \ :$

$$M_z^{②}(x) = EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z^{②}(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_z^{②}(x) = \overline{C}_1$$

d'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli $\quad \omega_z^{②}(x) = \dfrac{\mathrm{d}u_y^{②}(x)}{\mathrm{d}x}$

$$\Longrightarrow u_y^{②}(x) = \overline{C}_1 x + \overline{C}_2$$



Conservation de l'intégrité de la structure en $x = a$ impose :

i) la continuité de la rotation de la section droite $\omega_z^{②}(a) = \omega_z^{①}(a)$

ii) la continuité du déplacement $u_y^{②}(a) = u_y^{①}(a)$

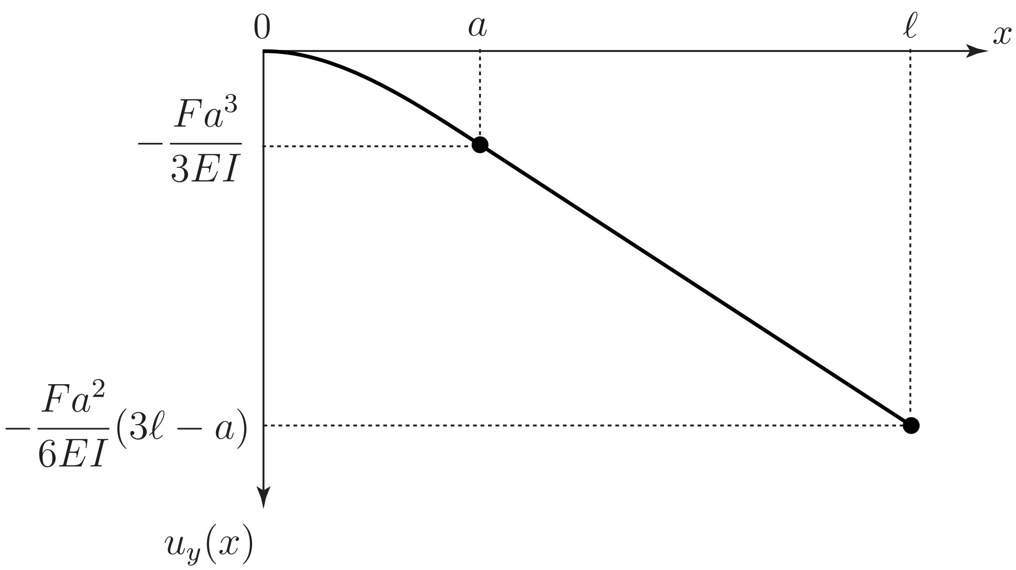
i) $\overline{C}_1 = \dfrac{F}{EI_{Gz}}\left(\dfrac{a^2}{2} - a^2\right) = -\dfrac{Fa^2}{2EI_{Gz}}$

$$\Longrightarrow \boxed{u_y^{②}(x) = -\frac{Fa^2}{6EI_{Gz}}(3x - a)}$$

ii) $\overline{C}_1 a + \overline{C}_2 = -\dfrac{Fa^3}{2EI_{Gz}} + \overline{C}_2 = \dfrac{Fa^3}{6EI_{Gz}}(1-3) \quad \Longrightarrow \quad \overline{C}_2 = \dfrac{Fa^3}{6EI_{Gz}}$

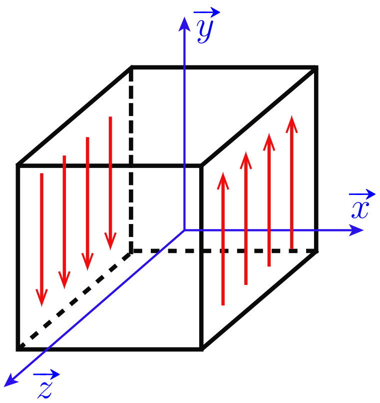
$0 < x < a$: $$u_y^{①}(x) = \frac{Fx^2}{6EI_{Gz}}(x - 3a)$$

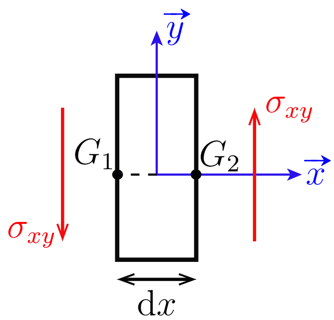
$a < x < \ell$: $$u_y^{②}(x) = -\frac{Fa^2}{6EI_{Gz}}(3x - a)$$



Effort tranchant :

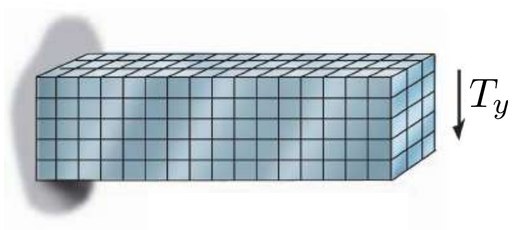
Etude des contraintes verticales σ_{xy} $(T_y \neq 0)$



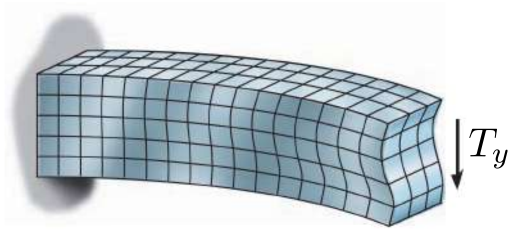


$$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{S}$$

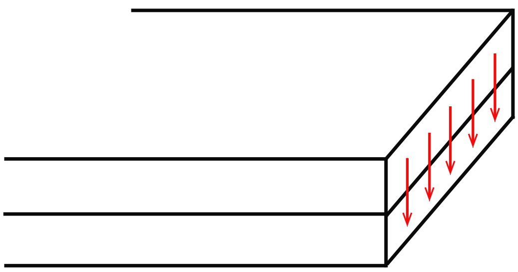
Cette expression **n'est pas exacte** car les contraintes tangentielles ne sont pas uniformes sur la section mais dépendent de y

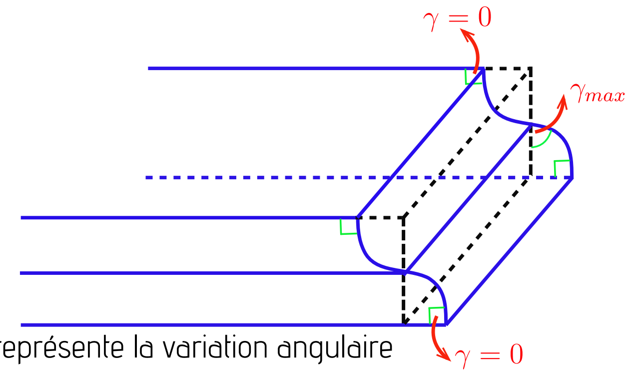


avant déformation



après déformation

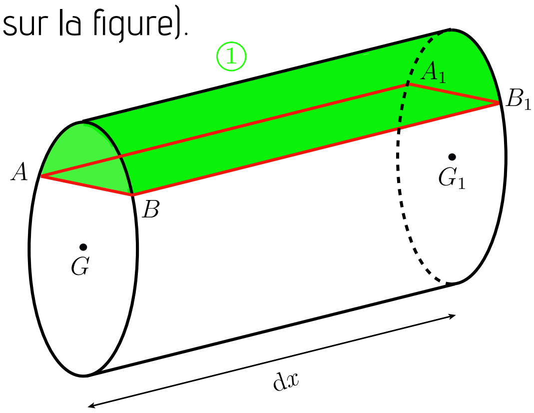


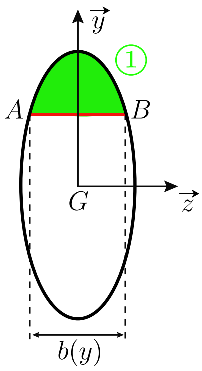


γ représente la variation angulaire

L'effort tranchant génère des contraintes de cisaillement qui ont pour effet de **gauchir** les sections droites. Ce gauchissement est plus important au niveau de l'axe neutre et s'annule aux fibres extrêmes.

En réalité, il faut isoler dans une poutre fléchie horizontale un petit volume dont on étudie l'équilibre. Ce volume (en vert) est compris entre deux sections droites distantes de dx , le dessus de la poutre où ne s'exerce aucune force et une surface de coupure (en rouge sur la figure).





pour les sections pleines, la **formule de Bredt ou Jourawski** : $\boxed{\sigma_{xy}(x,y) = \dfrac{T_y(x)\ m(y)}{I_{Gz}\ b(y)}}$

$m(y) = \iint_{①} y\,dS$: moment statique/$(G\vec{z})$ de la partie de la section au dessus du niveau considéré

I_{Gz} : moment quadratique/$(G\vec{z})$ de la section totale

$b(y)$: largeur variable de la section au niveau où l'on calcule T_y

On admet que la relation liant σ_{xy} et T_y reste valable en remplaçant l'aire S par l'**aire corrigée** S_r **(aire réduite)** et donnée par :

$$S_r = \frac{{I_{Gz}}^2}{\displaystyle\int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{m(y)^2}{b(y)}\, dy}$$

$K = \dfrac{S}{S_r} > 1$: **facteur de cisaillement** qui caractérise la distribution des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant

- **section rectangulaire :** $K = \dfrac{6}{5} = 1.2$
- **section circulaire :** $K = \dfrac{10}{9} = 1.11$
- **section en profilé I :** $K = 2 \text{ à } 3$

Remarque :

Les déformations dues à l'effort tranchant sont généralement faibles donc pour des poutres de formes massives S et S_r diffèrent peu.