TD1 : Réponse thermoélastique d'une structure cylindrique à section rectangulaire

1ère partie : Mise en équations du problème

- CORRECTION -

1 Application d'un chargement en pression

1.1 Equations du problème (formulation forte).

- **Rappel** : hypothèse des déformations planes = valable quand la structure possède une dimension beaucoup plus grandes que les deux autres. On peut alors faire l'hypothèse suivante sur la forme du champ de déplacement : il ne possède pas de composante suivant $\underline{e}_3$ et toutes ses composantes ne dépendent pas de x_3.

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et donc } \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{grad}}^t(\underline{u})\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Loi de comportement** Comportement élastique linéaire homogène isotrope $\rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ et pour exprimer $\mathbb{A}$ on peut utiliser la loi de Hooke. On est ici dans le cadre d'un problème en déformations planes donc on se limite à l'étude de :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Attention $\sigma_{33} \neq 0 \qquad \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$

- **Equilibre -** Problème d'élasticité HHP linéaire.

$$\underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) - \rho g \underline{e}_2 = \underline{0}$$

Ce qui en cartésien et en déformations planes se réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \end{cases} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho g \end{Bmatrix}$$

- **Conditions aux limites**

  – En $x_2 = H$, Conditions aux limites de chargement.

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_2 = -p\underline{e}_2 \quad \forall x_1 \in [0,L]$$

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix} = -p\underline{e}_2$$

  Soit en résumé :

$$\begin{cases} \sigma_{12}\left(x_1,H\right) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,L] \\ \sigma_{22}\left(x_1,H\right) = -p \end{cases}$$

  – En $x_1 = L$, Conditions aux limites de chargement (surface libre)

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_1 = 0 \quad \forall x_1 \in [0,L]$$

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soit en résumé :

$$\begin{cases} \sigma_{11}\left(L, x_2\right) = 0 & \forall x_2 \in [0, H] \\ \sigma_{12}\left(L, x_2\right) = 0 \end{cases}$$

– <u>En $x_1 = 0$</u>, Conditions aux limites mixtes (symétrie)

$$\underline{n}_e = -\underline{e}_1 \quad \text{et donc} \quad \underline{u}.\underline{n}_e = 0$$

De plus la composante tangentielle du vecteur contrainte $\underline{\sigma}_T\left(0, x_2\right)$ doit également être nulle. Avec

$$\underline{\sigma}_T = \left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e\right) - \left(\underline{n}_e.\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e\right)\underline{n}_e = \left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e\right) - \sigma_N \underline{n}_e$$

Soit en résumé :

$$\begin{cases} u_1\left(0, x_2\right) = 0 & \forall x_2 \in [0, H] \\ \sigma_{12}\left(0, x_2\right) = 0 \end{cases}$$

– <u>En $x_2 = 0$</u>, Conditions aux limites mixtes.

Il existe un contact entre la pièce et la surface rigide avec force de rappel élastique symbolisant le frottement

$$\underline{n}_e = -\underline{e}_2 \quad \text{et donc} \quad \underline{u}.\underline{n}_e = u_2(x_1, 0) = 0$$

Mais on a également :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e\right) = \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ N \end{Bmatrix}}_{\underline{R}} \qquad \text{avec } \underline{R} = \underbrace{F\underline{e}_1}_{\underline{F}} + \underbrace{N\underline{e}_2}_{\underline{N}}$$

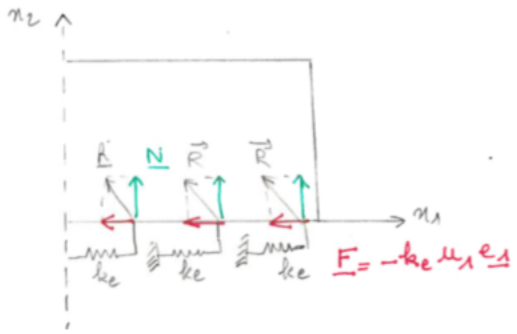

Figure 1: Représentation schématique des efforts de réaction

$$\underline{F}.\underline{e}_1 = \left(-k_e \underline{u}_T\right).\underline{e}_1 = \left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}_e\right).\underline{e}_1 \quad \text{où } \underline{u}_T = u_1\underline{e}_1 \text{ et où } \underline{F} \text{ est un effort surfacique}$$

donc

$$-\sigma_{12}(x_1, 0) = -k_e u_1(x_1, 0)$$

Soit en résumé :

$$\begin{cases} u_2(x_1, 0) = 0 & \forall x_1 \in [0, L] \\ \sigma_{12}(x_1, 0) = k_e u_1(x_1, 0) \end{cases}$$

Cas particuliers :

- $k_e = 0$: correspond à $\underline{F} = 0$, contact sans frottement.
- $k_e \to \infty$: correspond à $\underline{u}_T = \underline{0}$ sur l'interface du dessous. Comme on a également $u_N = 0$ on a un frottement infini (blocage). Cela correpond donc au cas ou le solide est parfaitement collé au support rigide.

1.2 Champs admissibles.

Champs admissibles :

$$\mathcal{U} = \left\{ \ \underline{v}(x_1, x_2) \text{ réguliers et continus } \ \right\}$$

Champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(x_1, x_2) \text{ réguliers et continus tels que :} \\ v_1(0, x_2) = 0 \quad \forall\, x_2 \in [0, H] \\ v_2(x_1, 0) = 0 \quad \forall\, x_1 \in [0, L] \end{array} \right\}$$

Champs cinématiquement admissibles à zéro :

Toutes les valeurs imposées en déplacement étant nulles on se trouve dans le cas particulier où l'ensemble des champs cinématiquement admissibles est confondu avec l'ensemble des champs cinématiquement admissibles à zéro :

$$\mathcal{U}^0_{ad} = \mathcal{U}_{ad}$$

1.3 Formulation faible du problème.

On choisit un champ test $\underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}$. On multiplie l'équation d'équilibre par $\underline{v}$ puis on intègre :

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right).\underline{v} - \rho g \underline{e}_2.\underline{v}\, d\Omega = \underline{0} \\ \underbrace{\displaystyle\int_\Omega \underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{v}\, d\Omega}_{(a)} - \underbrace{\displaystyle\int_\Omega \rho g \underline{e}_2 \underline{v}\, d\Omega}_{(b)} = \underline{0} \end{array}$$

On s'occupe tout d'abord du terme (a). On réalise une intégration par parties :

$$\begin{array}{rcl} \underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right).\underline{v} & = & \sigma_{ij,j} v_i \\ & = & (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - (\sigma_{ij} v_{i,j}) \\ & = & (\sigma_{ji} v_i)_{,j} - (\sigma_{ji} v_{i,j}) \\ & = & div(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \end{array}$$

Ainsi (a) se réécrit :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{v}\, d\Omega & = & \displaystyle\int_\Omega div\left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}\right)\, d\Omega - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v})\, d\Omega \\ & = & \displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}\right).\underline{n}_e\, dS - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega \end{array}$$

Car on rappelle que $\underline{\underline{grad}}(\underline{v}) = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$, or $\underline{\underline{\sigma}}$ est une quantité symétrique et $\underline{\underline{\omega}}$ une quantité antisymétrique donc $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}} = 0$ On prend maintenant en compte le caractère 2D du problème. Tout d'abord on travaille par unité d'épaisseur sachant que les champs ne dépendent pas de x_3 et que $v_3 = 0$. Ainsi on simplifie le premier terme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 \\ \sigma_{12} v_2 + \sigma_{22} v_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}\right).\underline{n}_e \ = \ \sigma_{11} v_1 n^e_1 + \sigma_{12} v_2 n^e_1 + \sigma_{21} v_1 n^e_2 + \sigma_{22} v_2 n^e_2$$

on va ensuite exprimer l'ensemble de ces termes sur les différentes frontières du domaine :

- En $x_2 = H$: $\underline{n}_e = \underline{e}_2 \quad \rightarrow \quad \displaystyle\int_0^L (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2)\, dx_1 \ = \ -\int_0^L p v_2(x_1, H) dx_1$
- En $x_1 = L$: $\underline{n}_e = \underline{e}_1 \quad \rightarrow \quad \displaystyle\int_0^H (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2)\, dx_2 = 0$
- En $x_1 = 0$: $\underline{n}_e = -\underline{e}_1 \quad \rightarrow \quad \displaystyle\int_0^H (-\sigma_{11} v_1 - \sigma_{12} v_2)\, dx_2 = 0$

- En $x_2 = 0$: $\underline{n}_e = -\underline{e}_2 \quad \rightarrow \quad \int_0^L (-\sigma_{12}v_1 - \sigma_{22}v_2)\, dx_1 \;=\; -\int_0^L ku_1(x_1,0)v_1(x_1,0)dx_1$

Le deuxième terme est quant à lui restreint aux termes suivants :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \;=\; \sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}$$

En insérant la loi de comportement (Hooke) :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \;=\; \left(\lambda\varepsilon_{ll}(\underline{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\underline{u})\right)\varepsilon_{ij}(\underline{v})$$

Enfin on simplifie le terme (b)

$$\int_0^L \int_0^H \rho g \underline{e}_2 \underline{v}\, dx_1 dx_2 \;=\; \int_0^L \int_0^H \rho g v_2\, dx_1 dx_2$$

Au final la formulation faible se réécrit :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}^0_{ad}$ tel que $a\left(\underline{u},\underline{v}\right) = l\left(\underline{v}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}$, où

- a est la forme bilinéaire suivante :

$$a\left(\underline{u},\underline{v}\right) = \int_0^L \int_0^H \left(\lambda\varepsilon_{ll}(\underline{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\underline{u})\right)\varepsilon_{ij}(\underline{v})dx_1dx_2 + \int_0^L ku_1(x_1,0)v_1(x_1,0)dx_1$$

- l est la forme linéaire suivante :

$$l(\underline{v}) = -\int_0^L \int_0^H \rho g v_2\, dx_1dx_2 - \int_0^L pv_2(x_1,H)dx_1$$

1.4 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle est la réécriture du problème sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle. Dans notre problème écrit uniquement en déplacements on cherche à minimiser l'énergie potentielle I sur l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles :

avec :

$$I\left(\underline{u}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \int_0^H \left(\lambda\varepsilon_{ll}(\underline{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\underline{u})\right)\varepsilon_{ij}(\underline{u})dx_1dx_2}_{\text{Energie de déformation}} + \underbrace{\int_0^L ku_1(x_1,0)u_1(x_1,0)dx_1 - \int_0^L \int_0^H \rho g u_2\, dx_1dx_2 + \int_0^L pu_2(x_1,H)dx_1}_{\text{Travail des efforts extérieurs}}$$

On cherche donc à trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}^0_{ad}$ tel que :

$$I\left(\underline{u}\right) = argMin_{\underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}}\left(I(\underline{v})\right) \qquad \text{soit} \qquad I\left(\underline{u}\right) \leqslant I\left(\underline{v}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}$$

Le champ de déplacement $\underline{u} \in \mathcal{U}^0_{ad}$ qui réalise la minimisation de l'énergie potentielle est tel que pour tout champ admissible $\underline{v} = \underline{u} + \eta\underline{w}$ la variation de l'énergie potentielle est nulle à l'ordre un en η :

$$\frac{d}{d\eta} I(\underline{v} + \eta\underline{w})|_{\eta=0} = 0$$

Que l'on réécrit :

$$< I'\left(\underline{u}\right), \left(\underline{w}\right) >= 0$$

1.5 Unicité du champ solution.

Pour vérifier l'unicité du champ solution on propose de raisonner par l'absurde. Ainsi on suppose qu'il existe deux solutions $\underline{u}$ et $\underline{u}*$ du problème. On a donc :

$$\begin{cases} \underline{u} \in \mathcal{U}^0_{ad} \qquad a\left(\underline{u},\underline{v}\right) \;=\; l(\underline{v}) \;\; \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad} \\ \underline{u}* \in \mathcal{U}^0_{ad} \qquad a\left(\underline{u}*,\underline{v}\right) \;=\; l(\underline{v}) \;\; \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad} \end{cases}$$

La bilinéarité de a donne :

$$a\left(\underline{u}-\underline{u}*,\underline{v}\right)=0\quad\forall\underline{v}\in\mathcal{U}_{ad}^{0}$$

Comme $\underline{v}$ est quelconque on peut choisir $\underline{v}=\underline{u}-\underline{u}*$ de sorte que :

$$a\left(\underline{u}-\underline{u}*,\underline{u}-\underline{u}*\right)=0\quad\forall\underline{v}\in\mathcal{U}_{ad}^{0}$$

$$a\left(\underline{u}-\underline{u}*,\underline{u}-\underline{u}*\right)=\int_0^L\int_0^H\left(\lambda\varepsilon_{ll}(\underline{u}-\underline{u}*)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\underline{u}-\underline{u}*)\right)\varepsilon_{ij}(\underline{u}-\underline{u}*)dx_1dx_2+\int_0^L k\left[u_1(x_1,0)-u_1*(x_1,0)\right]^2dx_1=0$$

On est dans le cas d'un problème en Déformation Planes donc :

$$\varepsilon_{ij}\left(\underline{u}-\underline{u}*\right)\varepsilon_{ij}\left(\underline{u}-\underline{u}*\right)=\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+2\varepsilon_{12}^2$$

$$\int_0^L\int_0^H\underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2}_{\geqslant 0}+\underbrace{2\mu}_{>0}\underbrace{\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+2\varepsilon_{12}^2\right)}_{\geqslant 0}dS+\int_0^L\underbrace{k}_{>0}\underbrace{\left[u_1(x_1,0)-u_1*(x_1,0)\right]^2}_{\geqslant 0}dx_1=0$$

Nécessairement il faut que :

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}\left(\underline{u}-\underline{u}*\right)=0\quad\forall i,j\quad\forall\underline{x}\in\Omega\qquad(1)\\ \left(u_1-u_1*\right)(x_1,0)=0\quad\forall x_1\in[0,L]\qquad(2)\end{cases}$$

La condition (1) implique que $(\underline{u}-\underline{u}*)$ est un mouvement de corps rigide : $\underline{u}-\underline{u}*=\underline{\rho}=\underline{a}\wedge\underline{x}+\underline{b}$. En indiciel : $\rho_i=\epsilon_{ijk}a_jx_k+b_i$.

$$\begin{cases}\rho_1\;=\;\epsilon_{123}a_2\underbrace{x_3}_{0}+\epsilon_{132}a_3x_2+b_1\;=\;-a_3x_2+b_1\\ \rho_2\;=\;\epsilon_{213}a_1\underbrace{x_3}_{0}+\epsilon_{231}a_3x_1+b_2\;=\;a_3x_1+b_2\end{cases}$$

La condition (2) implique que $\rho_1(x_1,0)=0\quad\rightarrow\quad b_1=0$.

On sait par ailleurs que $\underline{\rho}$ doit être cinématiquement admissible à zéro ($\underline{\rho}\in\mathcal{U}_{ad}^0$), ce qui impose que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases}\rho_1(0,x_2)=0\quad\forall x_2\in[0,H]\\ \rho_2(x_1,0)=0\quad\forall x_1\in[0,L]\end{cases}\qquad\rightarrow\qquad\begin{cases}-a_3x_2=0\quad\forall x_2\in[0,H]\ \text{ soit } a_3=0\\ b_2=0\end{cases}$$

On trouve donc $\underline{\rho}=(\underline{u}-\underline{u}*)=\underline{0}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Le problème est donc bien posé et il y a bien unicité de la solution.

→ Ecart à la loi de comportement = voir feuille annexe.

2 Couplage thermomécanique

En présence d'un champ de température seule la loi de comportement dans la formulation forte est affectée. Elle devient :

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{x}\right)=\mathbb{A}:\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{x}\right)-\alpha_T T\left(\underline{x}\right)\underline{\underline{Id}}\right]$$

Dans la formulation faible cela se traduit par l'apparition d'un terme supplémentaire :

Trouver $\underline{u}\in\mathcal{U}_{ad}^0$ tel que $a\left(\underline{u},\underline{v}\right)=l\left(\underline{v}\right)\quad\forall\underline{v}\in\mathcal{U}_{ad}^0$, où

- a est la forme bilinéaire suivante :

$$a\left(\underline{u},\underline{v}\right)=\int_0^L\int_0^H\left(\lambda\varepsilon_{ll}(\underline{u})\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\underline{u})\right)\varepsilon_{ij}(\underline{v})dx_1dx_2+\int_0^L ku_1(x_1,0)v_1(x_1,0)dx_1$$

- l est la forme linéaire suivante :

$$l(\underline{v})=\int_0^L\int_0^H\rho g v_2\,dx_1dx_2-\int_0^L pv_2(x_1,H)dx_1+\int_0^L\int_0^H\left(\alpha_T T\left(\underline{x}\right)\underline{\underline{Id}}\right):\mathbb{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right)dx_1dx_2$$