2A004 Statique et dynamique des fluides.

Écrit du 27 octobre 2016, 2H, sans documents.

I - Cours

1. Rappelez la forme globale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
2. Écrivez la forme locale pour la force de gravité $\mathbf{g}$ dans un repère cartésien.
3. Donnez la définition d'une approche de Lagrange .
4. Donnez la définition d'une approche d'Euler.

Solution de l'exercice 0.0.

1. $\int_V \mathbf{f}\ dV + \int_S -p\ \mathbf{n} dS = 0$
2. $\mathbf{f} = \mathbf{g}rad(p)$

II - Statique

Un solide hémisphérique de rayon R (une démi-sphère) est posé sur le fond d'un récipient contenant une hauteur H d'un liquide de masse volumique ρ, la pression à l'air libre est notée p_0 (Figure 1 (gauche)). Nous allons déterminer la résultante des forces de pression sur la surface du solide (on ne tient pas compte ici du poids du solide).

1. Établir l'équation de la pression suivante $p(z) = p_0 + \rho g(H - z)$ pour un z quelconque (Figure 1 (droite)).
2. En désignant p_1 la pression sur le fond du récipient et $z = R\cos(\theta)$ la relation entre la cote z et l'angle θ donner l'équation pour la pression en fonction de θ et p_1.
3. Sur la surface du solide la composante de la normale sur l'axe z est $\mathbf{n_z} = \cos(\theta)\mathbf{e_z}$ et l'élément de surface $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$, donner l'expression intégrale de $dF = -\int_S p\mathbf{n} dS$ en prenant soin de bien déterminer les limites d'intégration selon θ et ϕ.
4. Calculez la force totale selon la direction z due à la pression sur les parois du solide.
5. En se rappelant de l'expression du volume d'une sphère ($V_S = \frac{4}{3}\pi R^3$) donner une explication physique aux deux forces trouvées.

[aide : ϕ c'est l'angle de symétrie autour de l'axe z, pour les intégrations $\frac{d\left(\cos(\theta)^3/3\right)}{d\theta} = -sin(\theta)\cos(\theta)^2$ et $\frac{d\left(\cos(\theta)^2/2\right)}{d\theta} = -sin(\theta)\cos(\theta)$]

Solution de l'exercice 0.0.

1. $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ avec la condition aux limites $p(H) = p_0$ donne $p(z) = p_0 + \rho g(H - z)$.
2. $p_1 = p(z = 0) = p_0 + \rho g H$ donc $p(\theta) = p_1 - \rho g R\cos(\theta)$.
3. $F = \int_\phi \int_\theta [p_1 - \rho g R\cos(\theta)]\ \cos(\theta) R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi\ \mathbf{e_z}$. Les limites d'intégration sont $[0, \pi/2]$ pour θ et $[0, 2\pi]$ pour ϕ.
4. $F = (-\pi R^2 p_1 + \frac{2}{3}\rho g\pi R^3)\mathbf{e_z}$.
5. $F = (-\pi R^2 p_1 + \frac{1}{2}\rho g V_S)\mathbf{e_z}$ et l'on a une force qui ne dépend pas de la forme de la surface du solide sinon de la surface d'appui et du volume, et on remarque que le 2eme terme est la force d'Archimède...

III - Cinématique I

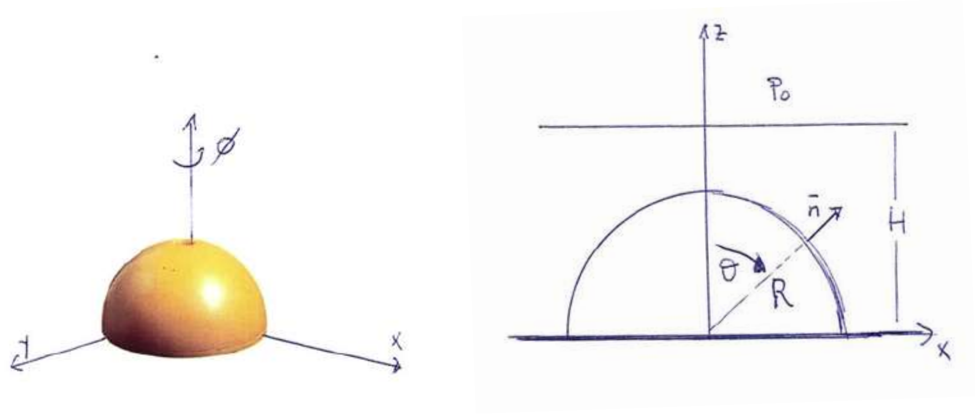

FIGURE 1 – Démi-sphère : (gauche) Vue 3D. (droite) Vue 2D et notations.

Nous avons les composantes de la vitesse (u, v, w) en coordonnées cartésiennes

$$u = 2y$$
$$v = 2x$$
$$w = 0$$

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ? Justifiez.
2. Donnez l'équation des lignes de courant.
3. Donnez l'équation du potentiel de vitesses si il existe.
4. Calculez l'accélération du champ de vitesses.
5. Soit une fonction scalaire $E = u^2 + v^2 + w^2$ calculez la dérivée $\frac{DE}{Dt}$.

Solution de l'exercice 0.0.

1. plan, stationnaire (il n'y pas le temps t), incompressible (la divergence est nulle) et irrotationnel (le rotationnel est aussi nul)
2. $\frac{dx}{v} = \frac{dy}{u}$ alors $2xdx - 2ydy = 0$ et l'on trouve $x^2 - y^2 = C$.
3. $\mathbf{grad}\phi = \mathbf{u}$ alors on intègre la composante x, $\phi = 2xy + A(y)$ et l'on dérive par rapport à y, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x + A^{'}(y)$ alors par identification on trouve $A^{'}(y) = 0$ donc $A(y) = Cte$. Finalement $\phi = 2xy + cte$.

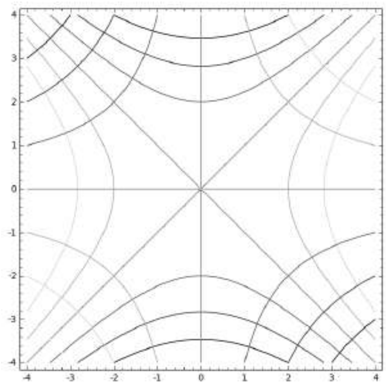

FIGURE 2 – ϕ et ψ.

4.

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 4x$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 4y$$

5. $E = 4(x^2 + y^2)$. $\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y}$, alors $\frac{DE}{Dt} = 16xy + 16xy = 32xy$.

IV - Cinématique II

Les ondes de gravitation engendrent des mouvements périodiques sur la surface des fluides, la propagation d'une telle onde suit le champ de vitesses suivant

$$u = \quad a\omega e^{ky}\cos(\omega t - kx)$$
$$v = \quad -a\omega e^{ky}\sin(\omega t - kx)$$

avec k, a, ω constants et $ka << 1$. Le liquide occupe la région des y négatifs.

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ?
2. Déterminer les lignes de courant pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Les dessiner sur la surface où $y = 0$.

aide : $\frac{d(\ln|\cos(\omega t - kx)|)}{dx} = k\frac{\sin(\omega t - kx)}{\cos(\omega t - kx)}$

3. Donnez la représentation de Lagrange, où compte tenu que les particules de fluides se déplacent très peu de leur position d'équilibre à la surface on peut supposer que dans les seconds membres des équations que vous devez intégrer $y = y_0$ et $x = x_0$.
4. Calculez l'accélération de la particule de fluide.

Solution de l'exercice 0.0.

1. plan, instationnaire et incompressible.
2. $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ alors

$$-\frac{\sin(\omega t - kx)}{\cos(\omega t - kx)}dx = dz$$

et

$$-\frac{1}{k}\ln|\cos(\omega t - kx)| = z + A$$

soit $e^{ky}\cos(\omega t - kx) = Cte$

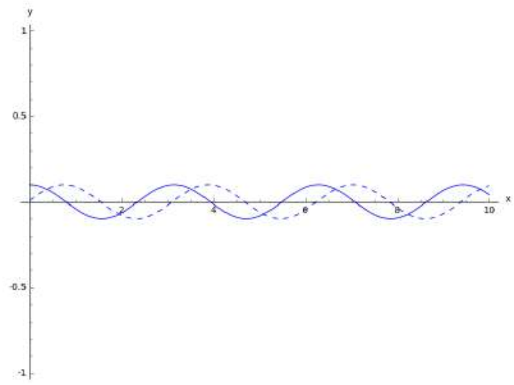

FIGURE 3 – Lignes de courant

3.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a\omega e^{ky_0}\cos(\omega t - kx_0)\\ \frac{dy}{dt} &= -a\omega e^{ky_0}\sin(\omega t - kx_0)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}x &= ae^{ky_0}\sin(\omega t - kx_0) + A\\ y &= -ae^{ky_0}\cos(\omega t - kx_0) + B\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2 e^{ky_0}\sin(\omega t - kx_0)\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a\omega^2 e^{ky_0}\cos(\omega t - kx_0)\end{aligned}$$

vous remarquerez que c'est un oscillateur harmonique..