1°) Equations et Conditions aux limites

- $\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ avec $r_i^2 < x_1^2 + x_2^2 < r_e^2$
  $0 < x_3 < h$

- $\underline{\underline{\sigma}}(x) = \lambda \,\mathrm{trace}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(x)\, \mathbb{1} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

  avec
  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T)$

- sur $x_3 = 0$ et $x_3 = h$ $\quad \underline{n} = \pm e_3 \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$

- sur $r = r_i$ $\quad \underline{n} = -\underline{e}_r \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p_i\, \underline{n}$

- sur $r = r_e$ $\quad \underline{n} = \underline{e}_r \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p_e\, \underline{n}$

- Problème régulier, de type II, le déplacement (s'il existe) est défini à un déplacement de corps rigide près.
- les déformations et contraintes sont uniques
- Existence : $\displaystyle\iint_{r=r_i} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS + \iint_{r=r_e} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \underline{0}$

2°) Solution en contraintes planes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ pour être solution doit satisfaire les équations d'équilibre

$\Rightarrow \exists\, \chi(x_1, x_2)$ telle que $\begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} \end{cases}$ (cf exo 1 et cours.)

Pour qu'il existe un champ de déplacement associé au champ de déformation lié à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement, les équations de Michelle Beltrami doivent être satisfaites :

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Sigma_{,ij} = 0 \qquad (\underline{f} = \underline{0} \text{ ici}) \text{ en tout point}$$

soit
$$\Delta \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} =$$
$$\Delta \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} = 0$$

les autres equations sont automatiquement satisfaites

d'où
$$\Delta(\chi_{,22}) + \frac{1}{1+\nu}(\Delta\chi)_{,11} = 0$$
$$\Delta(\chi_{,11}) + \frac{1}{1+\nu}(\Delta\chi)_{,22} = 0$$
$$-\Delta(\chi_{,12}) + \frac{1}{1+\nu}(\Delta\chi)_{,12} = 0$$

soit donc $(\Delta\chi)_{,22} = (\Delta\chi)_{,12} = (\Delta\chi)_{,11} = 0$ en tout point $\underline{x}\in\Omega$

soit $\Delta\chi = ax_1 + bx_2 + c$ en tout point de $\Omega$.

3°) Resolution

$$\Delta\chi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr}\right) = ar\cos\theta + br\sin\theta + c \qquad \forall r, \forall\theta.$$

$\Rightarrow a = b = 0$

et donc
$$\Delta\chi = c = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr}\right)$$

d'où
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr}\right) = cr$$
$$r\frac{d\chi}{dr} = \frac{Cr^2}{2} + D$$
$$\frac{d\chi}{dr} = C\frac{r}{2} + \frac{D}{r}$$

d'où
$$\chi(r) = \frac{Cr^2}{4} + D\log r + E \qquad \forall\ r \in ]r_i, r_e[$$

d'où
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} = \dfrac{C}{2} + D\left[\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{r^4}\right] \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} = \dfrac{C}{2} - D\left[\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{r^4}\right] \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} = +2D\dfrac{x_1 x_2}{r^4} \end{cases}$$

en effet
$$\chi_{,r} = C\frac{r}{2} + \frac{D}{r}$$
$$\chi_{,1} = \frac{d\chi}{dr}\times\frac{x_1}{r} = \frac{C}{2}x_1 + \frac{D}{r^2}x_1$$
$$\chi_{,11} = \frac{C}{2} + \frac{D}{r^2} - 2\frac{D}{r^3}\frac{x_1^2}{r} = \frac{C}{2} - \frac{D}{r^4}\left[+2x_1^2 - x_2^2 - x_1^2\right] = \frac{C}{2} - \frac{D}{r^4}(x_1^2 - x_2^2).$$

$$X_{,2} = \frac{C}{2} x_2 + \frac{D}{r^2} x_2$$

$$X_{,22} = \frac{C}{2} - 2\frac{D}{r^4}\frac{x_2^2}{r} + \frac{D}{r^2} = \frac{C}{2} + \frac{D}{r^4}\left[x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2\right] = \frac{C}{2} + \frac{D}{r^4}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

$$X_{,12} = -2\frac{D}{r^3}\frac{x_1}{r}x_2 = -2D\frac{x_1 x_2}{r^4}$$

Reste à vérifier les conditions aux limites en effort :

$$\begin{cases} -\sigma_{11}\cos\theta - \sigma_{12}\sin\theta = +p_i\cos\theta \\ -\sigma_{12}\cos\theta - \sigma_{22}\sin\theta = p_i\sin\theta \end{cases} \quad \text{en } r = r_i$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta = -p_e\cos\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta = -p_e\sin\theta \end{cases} \quad \text{en } r = r_e$$

On peut aussi travailler en cylindriques ! avec produit tensoriel par exemple

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{C}{2} \boxed{+} \frac{D}{r^2} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{C}{2} \boxed{-} \frac{D}{r^2} \end{cases} \qquad (e_r, e_\theta, e_3)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\cos\theta\sin\theta.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\cos\theta\sin\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -\sigma_{11}\cos\theta\sin\theta + \sigma_{22}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}\cos^2\theta - \sigma_{12}\sin^2\theta = \sigma_{\theta r}$$

les conditions aux limites se réduisent à :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{C}{2} \boxed{+} \frac{D}{r_i^2} = -p_i \\ \frac{C}{2} \boxed{+} \frac{D}{r_e^2} = -p_e \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{2} = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad \boxed{D = \boxed{-}\,\frac{r_i^2 r_e^2\,(p_i - p_e)}{r_e^2 - r_i^2}}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est solution du problème, il n'y a aucune C.L en déplacement à vérifier calcul de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1-\nu}{E}\frac{C}{2} - \frac{1+\nu}{E}\frac{D}{r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{E}\frac{C}{2} + \frac{1+\nu}{E}\frac{D}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = -\nu\frac{C}{E} = \left(-\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0$$

Calcul de $\underline{u}$ intégration en cylindriques (avec formulaire)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1-\nu}{E}\frac{C}{2} - \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{D}{r^2} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1-\nu}{E}\frac{C}{2} + \frac{1+\nu}{E}\frac{D}{r^2} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E}C \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

on recherche $\underline{u}$ sous la forme

$$\underline{u} = \underline{u}^{part}(r,z) + \underline{e}$$

(avec $\underline{u}^{part}(r,z) = u_r(r)\,\underline{e_r} + u_z(z)\,\underline{e_z}$)

particulier

$$\begin{cases} \underline{u} = \left(\frac{1-\nu}{E}\frac{C}{2}r + \frac{1+\nu}{E}\frac{D}{r}\right)\underline{e_r} - \frac{\nu}{E}C\,z\,\underline{e_z} \quad \text{vérifie les équations} \\ \underline{e} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{OM} \end{cases}$$

attention expression en cartésien

4°) Tube mince - formule du tonnelier

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{C}{2} \boxed{-} \frac{D}{r^2} = \frac{p_i\, r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right)$$

on pose $\frac{e}{2} = x$ $\quad r_e = R + x \quad r_i = R - x \quad r^2 = R^2 + O(x)$

$$r_e^2 - r_i^2 = 4Rx$$

en ne gardant que les termes principaux on obtient

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i\frac{R}{2x} = p_i\frac{R}{e}$$