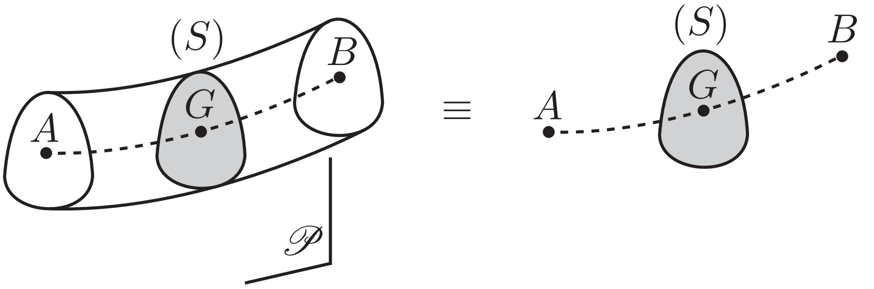
Statique des milieux curvilignes

Définition d'un milieu curviligne

Les structures étudiées sont des solides dont **une dimension est prépondérante par rapport aux autres** => modélisation unidimensionnelle

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie géométrique G décrit la courbe $\widehat{AB}$.

Le plan de (S) reste normal à la courbe $\widehat{AB}$.



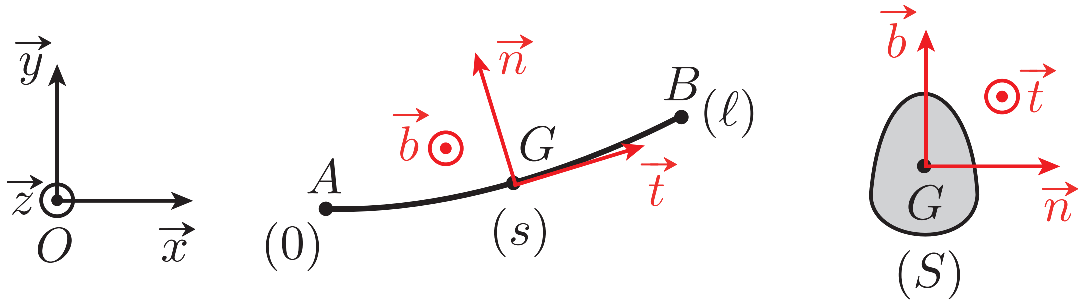
L'aire (S) est appelée **section droite** de la poutre.

La courbe $\mathscr{C} \equiv \widehat{AB}$ est appelée **fibre moyenne** de la poutre.

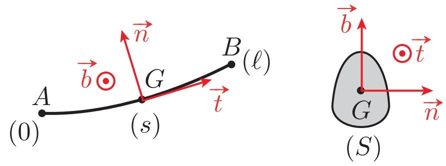
La poutre est donc totalement définie par sa fibre moyenne et par sa section droite.

Pour les poutres à section variable, il faut aussi se donner la forme de l'évolution le long de la fibre moyenne.

Toutes les fonctions considérées seront définies sur l'arc $\widehat{AB}$ et le point G sera repéré par s l'**abscisse curviligne** le long de la fibre moyenne.



Trièdre de Frénet



Soit une courbe $\mathscr{C}$ (arc régulier et orienté de A vers B), paramétrée par l'abscisse curviligne s $(0 < s < \ell)$. A chaque point $G(s)$ de $\mathscr{C}$ on associe le **vecteur tangent unitaire** en $G(s)$ à la courbe $\mathscr{C}$:

$$\vec{t}\,(s) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}(s)}{\mathrm{d}s}$$

$$\|\vec{t}\,(s)\|^2 = 1 \quad \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}{\Longrightarrow} \quad \vec{t}\,(s).\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}\,(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}\,(s)}{\mathrm{d}s} \neq \vec{0} \ \perp \ \mathscr{C}$$

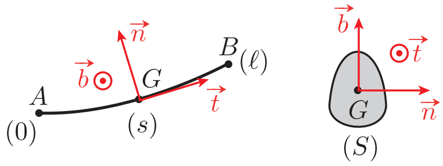
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}\,(s)}{\mathrm{d}s} = \mathsf{C}(s)\ \vec{n}\,(s)} \quad \text{où} \quad \mathsf{C} > 0 \ \text{ est la } \textbf{courbure}$$

Le **vecteur normal principal** à $\mathscr{C}$ en $G(s)$ est défini par~:

$$\vec{n}\,(s) \stackrel{\text{def}}{=\!=} R_c(s)\ \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}\,(s)}{\mathrm{d}s} \quad \text{avec} \quad R_c(s) = \frac{1}{\mathsf{C}(s)} \quad \text{le } \textbf{rayon de courbure}$$

On appelle **vecteur binormal** à $\mathscr{C}$ en $G(s)$:

$$\boxed{\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)}$$



afin de compléter le trièdre direct de Frénet $\left(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right)$.

On appelle $R_t(s)$ le **rayon de torsion** de $\mathscr{C}$ en $G(s)$ défini par~:

$$\boxed{\frac{1}{R_t(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}(s) . \frac{\mathrm{d}\vec{n}(s)}{\mathrm{d}s}}$$

Après dérivation on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{n}(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} + \frac{\vec{b}(s)}{R_t(s)}} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{b}(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\vec{n}(s)}{R_t(s)}}$$

L'orientation de $\vec{n}(s)$ est arbitraire. On **choisit** de le prendre directement $\perp$ à $\vec{t}(s)$ donc

$$(\vec{t}, \vec{n}) = +\frac{\pi}{2}$$

=> $R_c > 0$ si $\vec{n}$ est orienté vers la concavité de la courbe $\overparen{AB}$.

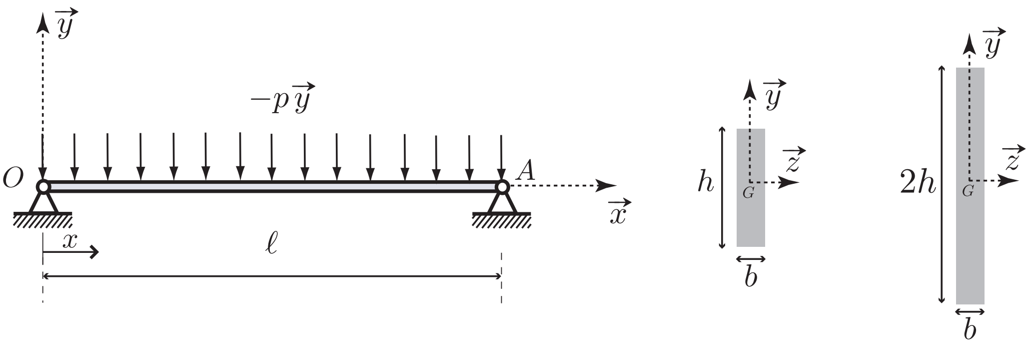
Caractéristiques géométriques des sections planes

Les sections prévues pour ces éléments sont-elles **suffisantes** pour que les contraintes qui leur sont appliquées et les déformations qui en résultent **n'excèdent pas les contraintes et les déformations admissibles**?

Pour le calcul des contraintes agissant sur les sections planes des éléments d'une structure et la détermination des déformations

$\Longrightarrow$ Connaissance des **caractéristiques géométriques** de ces sections

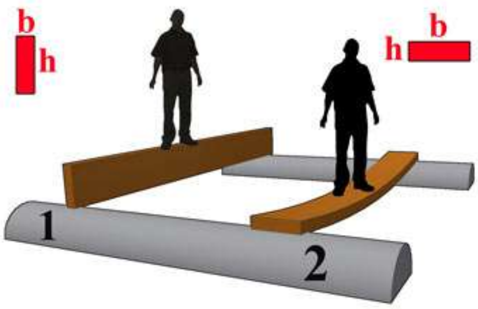
Pour un chargement donné, les déformations et les contraintes dépendront des sections transversales qui composent les poutres de la structure



Quel est le rapport entre les deux flèches? $(\text{cas } 1)$ $(\text{cas } 2)$

$$f_2 = \frac{f_1}{8}$$

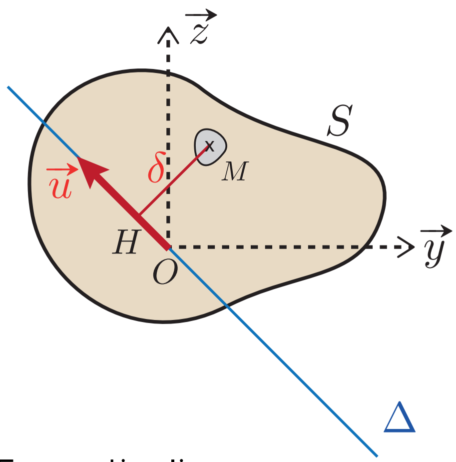
Pour une section rectangulaire la flèche est **inversement proportionnelle au cube de la hauteur**. En fait la flèche est inversement proportionnelle aux **inerties des sections transversales**. L'inertie d'une section caractérise la "**résistance**" de celle-ci aux déformations.



Construction charpente plancher

Moment statique

Soit une surface plane S et un système d'axes de son plan $\mathfrak{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Soit un point M de S et un petit élément de surface dS entourant ce point.
H est le projeté de M sur la droite Δ passant par O et dirigée suivant $\vec{u}$.



Le **moment statique** de la section S par rapport à l'axe Δ dans le plan $(O; \vec{y}, \vec{z})$ est la quantité~:

$$m_\Delta = \iint_S d(M, \Delta)\, dS = \iint_S \delta\, dS$$

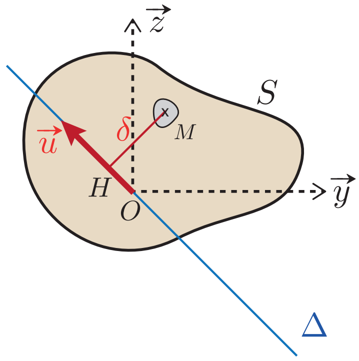
où δ est la distance du point M à l'axe Δ

En particulier :

$$m_{Oy} = \iint_S z\, dS \quad \text{et} \quad m_{Oz} = \iint_S y\, dS \qquad ([m^3]; \quad >0,\ <0 \text{ ou } =0)$$

Le moment statique permet de calculer les coordonnées du centre géométrique d'un solide.

Centre de gravité



Le **centre de gravité** de la section S est le barycentre G de l'ensemble des points M de S et vérifie :

$$\iint_S \overrightarrow{GM}\, dS = \vec{0}$$

Propriété du centre de gravité :

Les moments statiques d'une aire plane par rapport aux axes $G\vec{y}$ et $G\vec{z}$ qui passent par son centre de gravité G sont égaux à zéro : $m_{Gy} = m_{Gz} = 0$

Comme $\iint_S (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM})\, dS = \vec{0} \Rightarrow \iint_S \overrightarrow{OG}\, dS = \iint_S \overrightarrow{OM}\, dS$

donc $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{OM}\, dS = y_G \vec{y} + z_G \vec{z} \Rightarrow$

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_S y\, dS = \frac{m_{Oz}}{S}$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z\, dS = \frac{m_{Oy}}{S}$$

Pour des **configurations régulières**, la position du centre de gravité est connue ou facilement déterminée. On peut donc remplacer les intégrations par la sommation des moments statiques et des aires :

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i\ y_{G_i}}{\sum_{i=1}^{N} S_i} \qquad \text{et} \qquad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i\ z_{G_i}}{\sum_{i=1}^{N} S_i}$$

où S_i sont les aires des parties composant la section et y_{G_i} et z_{G_i} sont les distances respectives de leur centre de gravité aux axes $(O\vec{y})$ et $(O\vec{z})$