Chapitre 4

Théorèmes énergétiques en élasticité linéarisée

1 Formulations fortes et faibles d'un problème d'élasticité linéarisé

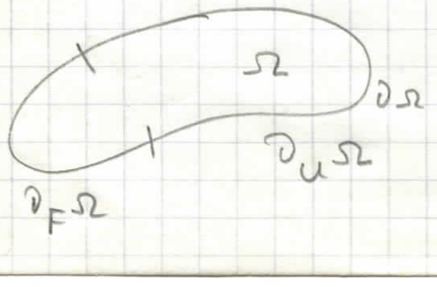
1-1 Equations locales et condition aux limites

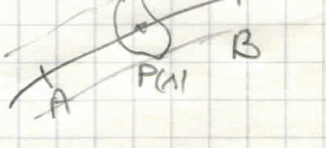
- On considère dans ce chapitre des milieux élastiques, tridimensionnels ou élancés (au sens du chapitre 3) dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations qui permet :
  - la linéarisation physique et géométrique de la loi de comportement
  - l'écriture linéarisée du problème sur la configuration de référence connue.

  On suppose également que :
  - les effets d'inertie sont négligeables
  - l'état de référence est naturel.

- Les équations et conditions aux limites d'un tel problème s'écrivent :
  - Equation d'équilibre et condition aux limites en effort :

milieu 3D	milieu élancé
• $\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}(x) + \rho\,\underline{f}(x) = \underline{0}$ dans Ω	$\frac{d}{ds}(\{\tau(s)\}) + \{f\} = \{0\}$
• $\underline{\underline{\sigma}}(x)\cdot\underline{n} = \underline{F}^d$ sur $\partial_F\Omega$	$\{\tau\}(s=A) = \{F^d\}_A$





- Relation de comportement

$$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\rho w(\varepsilon) \right) = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) \qquad \forall x \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}}^T u \right)$$

$$\{\mathcal{T}(s)\} = \frac{\partial(\rho w(\{\varepsilon\}))}{\partial\{\varepsilon\}} \qquad \forall s$$

$$\{\mathcal{E}\} = \frac{d}{ds}(\{\mathcal{U}\})$$

- Liaisons cinématiques

$$\underline{u}(x) = \underline{u}^d \qquad \forall \underline{x} \in \partial_u \Omega$$

$$\{\mathcal{U}(s=B)\} = \{\mathcal{U}^d\}$$

Pour une présentation unifiée des résultats ce chapitre qui seront valables qu'il s'agisse d'un milieu 3D ou élancé, nous adoptons les notations suivantes =

- Domaine géométrique occupé par le milieu dans sa configuration non déformée
  Ω , $\partial\Omega$ sa frontière $= \partial_u \Omega + \partial_{\mathcal{T}} \Omega$
- Déplacement scalaire, vecteur torseur. $= \mathcal{U}$
- Déformation $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{U})$
- Vitesse virtuelle $\mathcal{V}^*$, déplacement virtuel u^*

Efforts extérieurs = f^d, F^d traction surfacique

Efforts intérieurs $\mathcal{S}$

avec $\mathcal{T}$ est associé à $\mathcal{S}$ comme $\underline{T} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{n}$ est associé à $\underline{\underline{\Pi}}$

Condition aux limites. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^d$ sur $\partial_u \Omega$

$\mathcal{T} = F^d$ sur $\partial_{\mathcal{T}} \Omega$

Tenseur d'élasticité $\mathcal{C}$ $\quad (\mathcal{S} = C\, \mathcal{E})$

• 1.2 Principe des travaux virtuels

Comme indiqué précédemment, l'hypothèse des petites perturbations adoptée dans ce chapitre, permet une écriture des équations sur la configuration non déformée du milieu. En conséquence, l'écriture du principe des puissances virtuelles est également ramené sur la configuration non déformée.

On rappelle que pour un milieu tridimensionnel, ce principe s'écrit :

$\forall \underline{\underline{\sigma}}$ continu, symétrique vérifiant l'équilibre (et régulier)

$\forall \underline{v}^*$ continu et régulier sur Ω

$$-\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}^*)\, d\Omega + \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v}^*\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\ \underline{v}^*\, ds = 0$$

avec $\underline{\underline{d}}(v^*) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} v^* + \underline{\underline{\nabla}} v^{*T}\right)$

Compte-tenu que l'on considère des problèmes quasi-statiques et que $\mathcal{P}_a(v^*) = 0$.

Dans ce cas, v^* est un champ de déplacement virtuel u^* et $\underline{\underline{d}}(v^*)$ s'écrit $\underline{\underline{\varepsilon}}(u^*)$.

Par ailleurs pour éviter des confusions par la suite, le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ ici correspondant à un tenseur symétrique quelconque vérifiant l'équilibre mais pas nécessairement la solution du problème sera noté $\underline{\underline{\sigma}}^*$

On énonce alors le théorème dit des travaux virtuels :
(au lieu de puissance du fait que les intégrales correspondent ici à des énergies et non des puissances avec des champs de déplacements virtuels u^* et non de vitesse)

$\forall \underline{\underline{\sigma}}^*$ symétrique, régulier, satisfaisant l'équilibre
$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \rho f^d = \underline{0}$

$\forall \underline{u}^*$ continu et régulier sur Ω :

$$-\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(u^*)\, d\Omega + \int_\Omega \rho f^d \cdot u^* + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \cdot u^*\, ds = 0$$

Avec les notations génériques introduites précédemment, le principe des travaux virtuels pour un milieu élastique (3D ou élancé) s'écrit

$$\begin{cases} \forall \sigma^* \text{ continus, réguliers satisfaisant l'équilibre local.} \\ \forall u^* \text{ réguliers} \\ -\int_\Omega \sigma^* \, \varepsilon(u^*) \, d\Omega + \int_\Omega f^d u^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} \tau^* u^* \, ds = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$\forall \sigma^*$ continus, réguliers satisfaisant l'équilibre local et la condition aux limites en effort sur $\partial_\tau \Omega$

$\forall u^*$ réguliers

$$0 = -\int_\Omega \sigma^* \, \varepsilon(u^*) \, d\Omega + \int_\Omega f^d u^* \, d\Omega + \int_{\partial_\tau \Omega} F^d u^* \, ds + \int_{\partial_u \Omega} \tau^* u^* \, ds$$

il s'agit d'une équation globale qui traduit l'équilibre et la condition aux limites en effort.

• 1.3 Formulations "globales" des équations et conditions aux limites

Résoudre le problème d'équilibre local énoncé au § 1.1 revient à trouver : un couple (σ, u) tel qu'il satisfasse :

1. les liaisons cinématiques

$$u = u^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega$$

2. l'équilibre et conditions aux limites en effort :

$$0 = -\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon(u^*) \, d\Omega + \int_\Omega f \, u^* \, d\Omega + \int_{\partial_\tau \Omega} F^d u^* \, ds + \int_{\partial_u \Omega} \tau \, u^* \, ds$$

$\forall u^*$ quelconque.

3- loi de comportement

$\mathcal{S} = C\ \mathcal{E}(u)$ dans Ω.

— On introduit les espaces de champs admissibles suivants

$\mathcal{U}ad = \mathcal{U}ad(u^d) = \{ u^*$, continus réguliers sur Ω / $u^* = u^d$ sur $\partial_u \Omega \}$

$\mathcal{U}ad^0 = \mathcal{U}ad(0) = \{ u^*$, continus réguliers sur Ω / $u^* = 0$ sur $\partial_u \Omega \}$

$\mathcal{U}ad(u^d)$ espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles par le problème avec les déplacements imposés u^d

$\mathcal{U}ad(0)$ espace des champs de déplacement cinématiquement admissible à zéro

Remarque : - $\mathcal{U}ad(u^d)$ est un espace affine
- $\mathcal{U}ad^0$ un espace vectoriel
- Tout champ $u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)$ s'écrit

$$u^* = \lambda \underbrace{u^0}_{\in\, \mathcal{U}ad(0)} + \underbrace{u^{*1}}_{\in\, \mathcal{U}ad(u^d)}$$

$\mathcal{S}ad = \mathcal{S}_{ad}(f^d, F^d) = \{ \mathcal{S}^*$, continus dans Ω et réguliers tels que
$$0 = \int_\Omega - \mathcal{S}^* \mathcal{E}(u^*)\, d\Omega + \int_\Omega f^d u^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F^d . u^* ds + \int_{\partial_u \Omega} \tau^* u^* ds \quad \forall u^* \}$$

ou encore de façon équivalente :

$\mathcal{S}ad = \mathcal{S}ad(f^d, F^d) = \{ \mathcal{S}^*$, continus et réguliers sur Ω tels que
$$0 = -\int_\Omega \mathcal{S}^* \mathcal{E}(u^*)\, d\Omega + \int_\Omega f^d u^* d\Omega + \int_{\partial_\tau \Omega} F^d u^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{U}ad(0) \}$$

$\mathcal{S}ad$ espace des champs statiquement admissibles pour le problème avec f^d, F^d imposés.

Comme précédemment, on définit également

$\mathcal{S}ad^0 = \mathcal{S}ad(0,0) = \{ \mathcal{S}^* \text{ continus et réguliers sur } \Omega \text{ satisfaisant}$

$$0 = -\int_\Omega \mathcal{S}^* \, \mathcal{E}(u^*) \, d\Omega \qquad \forall \, u^* \in \mathcal{U}ad^0 \}$$

espace des champs statiquement admissible à zéro

Résoudre le problème local équivaut avec ces notations

à trouver : $(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \in \mathcal{U}ad(\mathcal{U}^d) \times \mathcal{S}ad(f^d, F^d)$ tel que

$$\mathcal{S} = C \; \mathcal{E}(\mathcal{U}) \quad \text{en tout point de } \Omega$$

soit donc trouver un couple de champs de déplacement et d'effort internes cinématiquement admissibles qui sont associés par la loi de comportement

• 1.4. Propriétés de l'opérateur d'élasticité

- On supposera dans toute la suite que l'opérateur d'élasticité C est symétrique et défini positif, c'est à dire
  - $\forall \, \mathcal{E} \qquad (C\mathcal{E}) \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot (C\mathcal{E}) = \mathcal{E} \, C \, \mathcal{E}$
  - $\exists \, \alpha_0 > 0$ tel que $\qquad \mathcal{E} \, C \, \mathcal{E} \geq \alpha_0 \, \mathcal{E} \, \mathcal{E} \quad \forall \, \mathcal{E}$ et en tout pt.

- C est inversible, de sorte que la loi de comportement s'écrit

$$\mathcal{S} = C \, \mathcal{E} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{E} = C^{-1} \mathcal{S}$$

C^{-1} est appelé opérateur de souplesse, de complaisance.

C " " de raideur.

C^{-1} est également symétrique et défini positif

- On admet donc l'existence d'une densité d'énergie élastique (potentiel) $w(\mathcal{E})$ telle que $\mathcal{S} = \dfrac{\partial w}{\partial \mathcal{E}}$

soit $w(\varepsilon) = \frac{1}{2}\, \varepsilon\, C\, \varepsilon$

$w(\varepsilon)$ est une forme quadratique définie positive

ainsi que l'existence d'un potentiel "dual"

$w^*(\sigma)$ tel que $\varepsilon = \frac{\partial w^*}{\partial \sigma}(\sigma)$

soit $w^*(\sigma) = \frac{1}{2}\, \sigma\, C^{-1}\, \sigma$

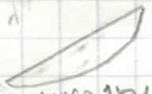
ou encore $w^*(\sigma) = \sigma\, \varepsilon - w(\varepsilon)$ (transformée de Legendre-Fenchel de ψ.

avec $\sigma = C\,\varepsilon$

– les potentiels sont des fonctions strictement convexes

ie vérifient $\forall \varepsilon^1 \; \forall \varepsilon^2 \quad \forall \lambda^1 > 0 \; \forall \lambda^2 > 0 \,/\, \lambda^1 + \lambda^2 = 1$

$$w(\lambda^1 \varepsilon^1 + \lambda^2 \varepsilon^2) < \lambda^1 w(\varepsilon^1) + \lambda^2 w(\varepsilon^2)$$



$w(\lambda^1\varepsilon^1+\lambda^2\varepsilon^2)$

et $\forall \sigma^1 \; \forall \sigma^2 \quad \forall \lambda^1 > 0 \; \forall \lambda^2 > 0 \,/\, \lambda^1 + \lambda^2 = 1$

$$w^*(\lambda^1 \sigma^1 + \lambda^2 \sigma^2) < \lambda^1 w^*(\sigma^1) + \lambda^2 w^*(\sigma^2)$$

ou encore pour des fonctions deux fois continûment différentiables ce qui est le cas ici

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon \varepsilon}\, \varepsilon\, \varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon \;, \qquad \frac{\partial^2 w^*}{\partial \sigma \partial \sigma}\, \sigma\, \sigma > 0 \; \forall \sigma$$

Remarque : en élasticité 3D isotrope ces propriétés se traduisent par

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\lambda (\mathrm{trace}\, \varepsilon)^2 + 2\mu\, \varepsilon : \varepsilon\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda (\mathrm{trace}\, \varepsilon)^2 + \frac{\mu}{2}\, \mathrm{trace}\, (\varepsilon^2)\right]$$

avec $\mu > 0$ et $3\lambda + 2\mu > 0$

15. Existence et unicité de la solution

Admettons l'existence de la solution à ce stade et intéressons nous à l'unicité. Considérons deux couples solutions du problème formulé précédemment (u^1, σ^1) et (u^2, σ^2). Ces couples satisfont =

$u^1 = u^2 = u^d$ sur $\partial_u \Omega$

$$-\int_\Omega \sigma^1 \, \mathcal{E}(u^v) \, d\Omega + \int_\Omega f^d u^v \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F^d u^v \, ds \quad \forall u^v \in \mathcal{U}ad(0)$$

$$-\int_\Omega \sigma^2 . \, \mathcal{E}(u^v) \, d\Omega + \int_\Omega f^d u^v \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F^d u^v \, ds \quad \text{"} \quad \text{"}$$

d'où en soustrayant ces deux égalités

$$\int_\Omega (\sigma^1 - \sigma^2) \, \mathcal{E}(u^v) d\Omega = 0 \quad \forall u^v \in \mathcal{U}ad(0)$$

en prenant $u^v = u^1 - u^2 \in \mathcal{U}ad(0)$ on a :

$$\int_\Omega (\sigma^1 - \sigma^2) \, \mathcal{E}(u^1 - u^2) \, d\Omega = 0$$

or $\mathcal{E}(u^1 - u^2) = C^{-1} (\sigma^1 - \sigma^2)$ car $\mathcal{E}(u^1) = C^{-1} \sigma^1$
$\mathcal{E}(u^2) = C^{-1} \sigma^2$

d'où $0 = \int_\Omega (\sigma^1 - \sigma^2) \, C^{-1} \, (\sigma^1 - \sigma^2) \, d\Omega \geq \beta_0 \int_\Omega (\sigma^1 - \sigma^2)(\sigma^1 - \sigma^2) \, d\Omega$
≥ 0

et donc $\int_\Omega (\sigma^1 - \sigma^2) \, (\sigma^1 - \sigma^2) \, d\Omega = 0 \Rightarrow \sigma^1 = \sigma^2$

On obtient donc l'unicité des "contraintes"

Par ailleurs $\sigma^2 - \sigma^1 = C \, (\mathcal{E}(u^1) - \mathcal{E}(u^2))$

d'où $\int_\Omega \mathcal{E}(u^1 - u^2) \, C \, \mathcal{E}(u^1 - u^2) \, d\Omega = 0$

et de façon analogue $\mathcal{E}(u^1) - \mathcal{E}(u^2) = 0$ en tout point

d'où unicité des déformations

En revanche l'unicité du champ de déplacement n'est pas toujours assurée, De l'unicité des déformations, on déduit seulement $\{ \; u^1 - u^2 \in R^0$

avec $R^0 = \mathcal{R} \cap \mathcal{U}ad(0)$

et $\mathcal{R} = \{ \, \rho$ déplacements tel que $\mathcal{E}(\rho) = 0 \, \}$

$\{$ le déplacement est donc non unique, défini à un déplacement de corps rigide près (rigidifiant) admissible à zéro.

L'existence est admise (Voir cours de L3 EDP, Théorème de LAX-MILGRAM) et est rappelée ici :

- si mesure $(\partial_u \Omega) > 0$, c'est à dire comporte au moins trois points non alignés, on peut établir l'existence de la solution en déplacement et en contrainte et plus généralement en $\mathcal{U}$ et $\mathcal{S}$

- si mes $(\partial_u \Omega) = 0$, soit $\partial\Omega = \partial_T \Omega$ alors la solution existe sous une condition nécessaire :

$$- \int_\Omega \mathcal{S} \cdot \varepsilon(e)\, d\Omega + \int_\Omega f^d e\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} F^d e\, ds = 0 \quad \forall e \in R^0$$

comme $\varepsilon(e) = 0$ par caractérisation même des champs $e \in R^0$ (et donc $e \in R$)

la condition nécessaire s'écrit :

$$\int_\Omega \underline{f}^d e\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{F}^d e\, ds = 0 \quad \forall e \in R^0 = R \cap \mathcal{U}ad(0)$$

Remarque : Pour un milieu continu 3D cette condition s'interprète de la façon suivante $\underline{e} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{OM}$, soit

$$\left(\int_\Omega \underline{f}^d\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{F}^d\, ds\right) \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \left(\int_\Omega \underline{OM} \wedge \underline{f}^d\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{F}^d\, ds\right) = 0$$

$\forall\ \underline{a}$ et $\underline{b}$ soit

$$\int_\Omega \underline{f}^d\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{F}^d\, ds = \underline{0}$$

et $$\int_\Omega \underline{OM} \wedge \underline{f}^d\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{F}^d\, ds = \underline{0}$$

Les deux conditions traduisent en fait l'équilibre global de la structure : $\Sigma\, [\mathcal{C}]$ efforts extérieurs $= [0]$

L'ensemble de ces résultats d'existence et d'unicité s'écrivent sous la forme.

Théorème :

1) si mesure $(\partial_u \Omega) > 0$ (avec sur $\partial_u \Omega$ $u = u^d$)

il existe une solution en déplacement et en contraintes
et cette solution est unique

2) si mesure $(\partial_u \Omega) = 0$
et si $\int_\Omega f^d \rho \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} F^d \rho \, ds = 0 \quad \forall \rho \in R^0 = R \cap U_{ad}(0)$

la solution existe, elle est unique en contrainte
le déplacement solution u est défini à un mouvement
de corps rigide près admissible à zéro
$u + \rho$ avec $\rho \in R^0$ est aussi solution

3) Si il existe $\rho_0 \in R^0$ tel que
$$\int_\Omega f^d \rho_0 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} F^d \rho_0 \, d\Omega \neq 0$$
alors le problème n'admet pas de solution

1.6. Formulation en erreur en loi de comportement

Introduisons la fonctionnelle $\phi(u^*, \sigma^*)$ définie par

$$\psi(u^*, \sigma^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\sigma^* - C\,\varepsilon(u^*))\, C^{-1}\, (\sigma^* - C\,\varepsilon(u^*))\, d\Omega$$

Cette fonctionnelle représente une mesure (au sens de l'énergie) de l'écart à la loi de comportement

Compte-tenu des propriétés du tenseur de souplesse C^{-1}

- $\psi(u^*, \sigma^*) \geq 0 \quad \forall u^* \ \forall \sigma^*$
- $\psi(u^*, \sigma^*) = 0 \iff \sigma^* = C\,\varepsilon(u^*)$

De sorte que le problème d'élasticité formulé précédemment s'écrit encore sous la forme globale

$$\begin{cases} (u, \sigma) \in \mathcal{U}ad(u^d) \times \mathcal{S}ad(f^d, F^d) \text{ tels que} \\ \psi(u, \sigma) = 0 \end{cases}$$

ou encore en exploitant le fait que $\psi(u^*, \sigma^*) \geq 0 \quad \forall u^* \forall \sigma^*$

$$\begin{cases} (u, \sigma) \in \mathcal{U}ad(u^d) \times \mathcal{S}ad(f^d, F^d) \ / \\ \psi(u, \sigma) = \underset{\substack{u^* \in \mathcal{U}ad(u^d) \\ \sigma^* \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)}}{\mathrm{Min}} \left(\psi(u^*, \sigma^*) \right) \end{cases}$$

le couple solution du problème minimise l'erreur en loi de comportement sur les espaces admissibles $\mathcal{U}ad \times \mathcal{S}ad$

2 - Théorèmes de l'énergie

2.1 Energies potentielle et complémentaire

Définitions : Soient $W(u^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(u^*)\, C\, \varepsilon(u^*)\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega w(\varepsilon)\, d\Omega$

énergie élastique de déformation

$$\phi(u^*) = \int_\Omega f u^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F^d u^* ds$$

Travail des efforts imposés dans le déplacement u^* donnés

et $E_p(u^*) = W(u^*) - \phi(u^*)$ énergie potentielle totale

Définition Soient $W^*(\sigma^*) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma^* C^{-1} \sigma^* d\Omega = \frac{1}{2} \int_\Omega w^*(\sigma^*) d\Omega$

énergie élastique complémentaire.

$$\phi^*(\sigma^*) = \int_{\partial_u \Omega} \sigma^* u^d ds$$

travail des efforts (intérieurs) dans le champ de déplacement donné

et $E_c(\sigma^*) = W^*(\sigma^*) - \phi^*(\sigma^*)$

énergie complémentaire totale
ou énergie élastique en contrainte totale

Propriété de découplage de la formulation en écart à la loi de comportement

la formulation globale en écart à la loi de comportement

$$\begin{cases} u \in U_{ad}(u^d) \quad \sigma \in S_{ad}(f^d, F^d) \\ \Psi(u, \sigma) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\sigma - C\,\varepsilon(u))\, C^{-1} (\sigma - C\,\varepsilon(u))\, d\Omega \end{cases} = \underset{\substack{u^*, \sigma^* \\ \in U_{ad} \in S_{ad}}}{\mathrm{Min}} \Psi(u^*, \sigma^*)$$

s'écrit également de façon équivalente

$u \in U_{ad}(u^d)$, $\sigma \in S_{ad}(f^d, F^d)$

$$\Psi(u, \sigma) = \underset{u^* \in U_{ad}(u^d)}{\mathrm{Min}} \left(E_p(u^*) \right) + \underset{\sigma^* \in S_{ad}(f^d, F^d)}{\mathrm{Min}} \left(E_c(\sigma^*) \right)$$

preuve : Par définition de Ψ et des différentes énergies, on a :

$$\Psi(u^*, \sigma^*) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma^* C^{-1} \sigma^* d\Omega - \int_\Omega \sigma\, \varepsilon(u^*)\, d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega \varepsilon(u^*)\, C\, \varepsilon(u^*)\, d\Omega$$

de par les propriétés de symétrie de C et C^{-1}

$\forall u^* \in U_{ad}(u^d) \quad \forall \sigma^* \in S_{ad}(f^d, F^d)$

de sorte que $\Psi(u^*, \sigma^*) = W^*(\sigma^*) + W(u^*) - \int_\Omega \sigma^* \varepsilon(u^*) d\Omega.$

or $\displaystyle\int_\Omega \sigma^* \varepsilon(u^*)\, d\Omega = \int_\Omega f^d u^* \, d\Omega + \int_{\partial_\sigma \Omega} F^d u^* \, ds + \int_{\partial_u \Omega} \tau^* u^d \, ds$

d'après le principe des travaux virtuels (§ 1.2)

d'où $\displaystyle\int_\Omega \sigma^* \varepsilon(u^*)\, d\Omega = \phi(u^*) + \phi^*(\sigma^*)$

et donc $\psi(u^*, \sigma^*) = \underbrace{W(u^*) - \phi(u^*)}_{Ep(u^*)} + \underbrace{W^*(\sigma^*) - \phi^*(\sigma^*)}_{Ec(\sigma^*)}$

$\forall u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)$ et $\forall \sigma^* \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)$

2.2 Théorème de minimisation de l'énergie potentielle

De la propriété de découplage établie précédemment, on peut énoncer le résultat suivant :

- Théorème : Parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles ($u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)$), le champ de déplacement solution (u) du problème minimise la fonctionnelle énergie potentielle totale, soit :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}ad(u^d) \\ Ep(u) = \min\limits_{u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)} Ep(u^*) = \min\limits_{u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)} \left[W(u^*) - \phi(u^*)\right] \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}ad(u^d) \\ W(u) - \phi(u) \leqslant W(u^*) - \phi(u^*) \quad \forall u^* \in \mathcal{U}ad(u^d) \end{cases}$$

Ce résultat se déduit de la formulation globale en écart à la loi de comportement :

$$\psi(u, \sigma) = Ep(u) + Ec(\sigma) \leq \min_{u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)} Ep(u^*) + \min_{\sigma^* \in \mathcal{S}ad} Ec(\sigma^*)$$

Ce résultat peut également s'obtenir en exploitant ~~des~~ la propriété de convexité de la densité d'énergie w

En revenant aux expressions des énergies on a :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}ad(u^d) \\ \frac{1}{2}\int_\Omega \mathcal{E}(u)\, C\, \mathcal{E}(u)\, d\Omega - \int_\Omega f^d u\, d\Omega - \int_{\partial_F\Omega} F^d u\, ds \\ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \mathcal{E}(u^*)\, C\, \mathcal{E}(u^*)\, d\Omega - \int_\Omega f^d u^*\, d\Omega - \int_{\partial_F\Omega} F^d u^*\, ds \\ \forall u^* \in \mathcal{U}ad(u^d) \end{cases}$$

En élasticité 3D isotrope cela s'écrit

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}ad(u^d) \\ \int_\Omega \frac{\lambda}{2}(\mathrm{trace}\, \mathcal{E}(u))^2 + \mu\, \mathrm{trace}[\mathcal{E}(u)]^2]\, d\Omega - \int_\Omega \underline{f}^d \cdot \underline{u}\, d\Omega - \int_{\partial_F\Omega} \underline{F}^d \cdot \underline{u}\, ds \\ \leq \int_\Omega \frac{1}{2}(\mathrm{trace}\, \mathcal{E}(u^*))^2 + \mu\, \mathrm{trace}([\mathcal{E}(u^*)]^2)\, d\Omega - \int_\Omega \underline{f}^d \cdot \underline{u}^*\, d\Omega - \int_{\partial_F\Omega} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^*\, ds \\ \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}ad(u^d) = \{\underline{v} \text{ continu dans } \Omega \text{ et régulier} \,/\, \underline{v}^* = \underline{u}^d \text{ sur } \partial_u\Omega \end{cases}$$

ou encore on peut utiliser l'expression suivante pour l'énergie potentielle

$$W(u) = \int_\Omega \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{trace}\, \mathcal{E})^2 + \mathrm{trace}(\mathcal{E}^2)\right]$$

2.3 Théorème de minimisation de l'énergie complémentaire

- Théorème : Parmi tous les champs de contraintes statiquement admissible, le champ solution σ du problème minimise l'énergie complémentaire totale, soit :

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d) \\ E_c(\sigma) = \underset{\sigma^* \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)}{\mathrm{Min}} E_c(\sigma^*) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \in Sad(f^d, F^d) \\ W^*(\underline{\underline{\sigma}}) - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}) \leq W^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in Sad(f^d, F^d) \end{cases}$$

ou encore

$$\underline{\underline{\sigma}} \in Sad(f^d, F^d)$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}\, C^{-1} \underline{\underline{\sigma}}\, d\Omega - \int_{\partial_u\Omega} \underline{T} u^d\, ds \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^*\, C^{-1} \underline{\underline{\sigma}}^*\, d\Omega - \int_{\partial_u\Omega} \underline{T}^* u^d\, ds$$

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in Sad(f^d, F^d)$$

En élasticité 3D isotrope, ce résultat s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} \in Sad(f^d, F^d)$$

$$\int_\Omega \frac{1+\nu}{2E} \operatorname{trace} \sigma^2 - \frac{\nu}{2E}(\operatorname{trace} \sigma)^2\, d\Omega - \int_{\partial_u\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}^d\, ds$$

$$\leq \int_\Omega \frac{1+\nu}{2E} \operatorname{trace}(\sigma^{*2}) - \frac{\nu}{2E}(\operatorname{trace} \sigma^*)^2\, d\Omega - \int_{\partial_u\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot n \cdot u^d\, ds$$

$$\forall \sigma^* \in Sad(f^d, F^d)$$

ou encore on peut utiliser l'expression de

$$W^*(\sigma) = \int_\Omega \frac{1}{4\mu} \operatorname{trace}(\sigma^2) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(\operatorname{trace} \sigma)^2\, d\Omega$$

• 2.4 Théorème de la double inégalité et formule de Clapeyron

En exploitant le fait que $\Psi(u, \underline{\underline{\sigma}}) = 0 = E_p(u) + E_c(\underline{\underline{\sigma}})$

(découplage de l'énergie en écart à la loi de comportement

et le fait que le couple solution annulle cette énergie cf 2.1)

on obtient la double inégalité suivante :

Théorème : le couple solution $(u, \mathcal{S})$ d'un problème d'élasticité satisfait la double inégalité suivante :

$u \in \mathcal{U}ad(u^d)$, $\mathcal{S} \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)$ et

$$-E_c(\mathcal{S}^*) \leq -E_c(\mathcal{S}) = E_p(u) \leq E_p(u^*) \qquad \forall u^* \in \mathcal{U}ad(u^d)$$
$$\forall \mathcal{S}^* \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)$$

ou encore $u \in \mathcal{U}ad(u^d)$, $\mathcal{S} \in \mathcal{S}ad(f^d, F^d)$ et

$$-W^*(\mathcal{S}^*) + \phi^*(\mathcal{S}^*) \leq -W^*(\mathcal{S}) + \phi^*(\mathcal{S}) = W(u) - \phi(u) \leq W(u^*) - \phi(u^*)$$

L'énergie potentielle totale de tout champ de déplacement admissible cinématiquement est supérieure ou égale à l'énergie potentielle totale en contrainte de tout champ statiquement admissible

Remarques : 1) Ces inégalités permettent de construire des encadrements de certains modules élastiques (rigidité à la torsion, compression, en choisissant des champs tests admissibles optimaux.

2) On peut également construire des solutions approchées en recherchant la meilleure solution dans un espace de fonctions de forme donnée (Méthode de Ritz, éléments finis, spectrales)

Enfin, on peut également énoncer le résultat suivant :

Théorème Formule de Clapeyron.

Pour toute solution $(u, \mathcal{S})$ du problème d'équilibre élastique l'énergie élastique $W(u)$ du champ de déplacement est égale à l'énergie complémentaire $W^*(\mathcal{S})$ (énergie élastique du champ de contrainte (solution) :

$$W(u) = W^*(\mathcal{S})$$

et est égale à la moitié du travail de tous les efforts extérieurs dans le champ de déplacement solution

$$W(u) = W^*(\sigma) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} f^d u \, d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial_T \Omega} F^d u \, ds + \frac{1}{2}\int_{\partial_u \Omega} \sigma \, u^d \, ds$$
$$= \frac{1}{2}\Phi(u) + \frac{1}{2}\Phi^*(\sigma)$$

preuve : On utilise le principe des travaux virtuels rappelé en début de chapitre en utilisant $u^* = u$ solution, $\sigma^* = \sigma$ on a

$$-\int_{\Omega} \sigma . \varepsilon(u) \, d\Omega + \int_{\Omega} f^d u \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} F^d u \, ds + \int_{\partial_u \Omega} \sigma \, u^d \, ds = 0$$

soit $\int_{\Omega} \varepsilon(u) \, C \, \varepsilon(u) \, d\Omega = \Phi(u) + \Phi^*(\sigma^*)$ car $\sigma = C \, \varepsilon(u)$

ou encore $\int_{\Omega} \sigma \, C^{-1} \sigma \, d\Omega = \Phi(u) + \Phi^*(\sigma^*)$ car $\varepsilon(u) = C^{-1}\sigma$

d'où $2W(u) = \Phi(u) + \Phi^*(\sigma^*)$

et $2W^*(\sigma) = \Phi(u) + \Phi^*(\sigma^*)$

d'où la formule de Clapeyron.