Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 5-6 - Matrices, diagonalisation, valeurs propres, applications

Diagonalisation des matrices

Exercice 1

Soit $M(\mathcal{L})$ la matrice de l'application de dérivation écrite dans la base $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, trouvée dans l'exercice 0 du TD précédent (Exercice 0, TD 3-4). $M(\mathcal{L})$ est-elle diagonalisable ?

Corrigé :
La matrice de l'aplication est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche les valeurs propres de la matrice. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Les valeurs proprres sont donc $\lambda_1 = 1$ avec l'ordre de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 2$ avec l'ordre de multiplicité 1.
On cherche maintenant les espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2}.

$$E_{\lambda_1} = Ker(M - I), \quad E_{\lambda_2} = Ker(M - 2I)$$

Le rang de la matrice $M - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 2 car elle a 2 colonnes linéairement indépendantes ($C2$ et $C3$). On applique le théorème du rang :

$$dim(E_{\lambda_1}) = 3 - rg(E_{\lambda_1}) = 1$$

Comme $m_{\lambda_1} = 2$, $m_{\lambda_1} \neq dim(E_{\lambda_1})$. Avec le théorème fondamental de la diagonalisation on conclut que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soient les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont-elles diagonalisables ?
2. Si oui, déterminer les matrices A'_i diagonales semblables à A_i. Dans chaque cas, on déterminera la matrice de passage P_i.

Corrigé :
Pour chaque matrice on répond à la question en suivant les étapes :

i) Calcul du polynôme caractéristique et des ses racines qui seront les valeurs propres de la matrice.

$$P_1(\lambda) = det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda-3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} -\lambda-3 & -1 & -3 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -3-\lambda \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-\lambda-3) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda-3)(\lambda^2-1) = (3-\lambda)(-\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$,$\lambda_4 = 1$. Leur ordre de multiplicité est 1. Le polynôme a donc 4 valeurs propres simples distinctes. On dit qu'il est scidé sur $\mathbb{R}$. Alors la matrice A_1 est diagonalisable.

ii) Calcul des vecteurs propres asscociés et donc des espaces propres associés.

$$E_{-3} = Ker(A_1 + 3I)$$

On cherche donc les vecteurs colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que

$$(A_1 + 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $E_{-3} = Vect(1, -3, 3, 1)$ De même, $E_3 = Vect((1, 3, 3, 1))$,$E_{-1} = Vect((1, -1, -1, 1))$, $E_1 = Vect((1, 1, -1, -1))$.

A_1 étant diagonalisable, la matrice diagonale dans la base des vecteurs propres $B' = (v_{-3}, v_3, v_{-1}, v_1)$ est

$$A'_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A'_1 et A_1 sot reliées par la relation $A'_1 = P_1^{-1} A_1 P_1$, avec $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres.

Matrice A_2 :

$$det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $m_{\lambda_1} = 1$, $m_{\lambda_2} = 2$.

$$E_1 = Ker(A_1 - I) = Vect((1,1,1)), \quad E_{-1} = Ker(A_1 + I) = Vect((1,-1,0),(1,0,1))$$

La matrice est donc diagonalisable et :

$$A'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\,0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & \end{pmatrix}$$

Matrice A_3 :

$$det(A_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3$$

La matrice a une seule valeur propre, $\lambda_1 = 1$, triple $m_{\lambda_1} = 3$.
Pour répondre à la question de la diagonalisation, on fait le raisonnement suivant : si A_3 est diagonalisable, alors sa matrice diagonale est

$$A'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\,0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix} = P^{-1} A_3 P \Rightarrow A_3 = P A'_3 P^{-1} = P I P^{-1} = I$$

ce qui est faux. Par conséquent, A_3 n'est pas diagonalisable.

$$A'_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème spectral

$$A'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Cisaillement pur d'un solide élastique

En physique des matériaux déformables (élastiques), le cisaillement imposé à un solide (par exemple un cube) est un cas classique. On se propose ici de montrer que dans un cas très simple, les techniques de diagonalisation sont utiles pour des études physiques. Dans le cadre de cette étude, si le cisaillement est imposé selon $\boldsymbol{e_x}$, la matrice Gradient de la Transformation s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k(t)$ est une fonction régulière et positive du temps responsable du cisaillement.

1. Par définition, on pose $J = det(F)$ et on dit que la transformation est isovolume localement si $J = 1$. Que peut-on dire de la transformation ?
2. On définit la matrice de dilatation de Cauchy par $K = F^T * F$ où F^T est la transposée de F. Calculer K.
3. Donner les valeurs propres de K et écrire K dans sa base de vecteurs propres (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'importance).
4. Déterminer les vecteurs propres associés (application numérique pour $k = 1$) et esquisser la transformation.

Corrigé :

1. On a $J = 1$. La transformation est isovolumique localement (c'est à dire que les petites volumes ne sont pas affectés). Le solide entier lui va être étiré dans une direction, et comprimé dans une autre.
2. $$K = F^T * F = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ k(t) & k^2(t)+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Le polynôme caractéristique de K s'écrit

   $$P_K(X) = (1-X)(X^2 - X(2+k^2) + 1)$$

   1 est une valeur propre évidente. Le discriminant du polynôme de degré 2 s'écrit $\Delta = k^2(4+k^2)$ ce qui donne les valeurs propres

   $$\lambda_+ = \frac{2+k^2+k\sqrt{4+k^2}}{2}, \qquad \lambda_- = \frac{2+k^2-k\sqrt{4+k^2}}{2}$$

   Le polynôme est scindé simple puisqu'il possède trois valeurs propres distinctes $1, \lambda_+, \lambda_-$. Chaque sous-espace propre associé est de dimension 1. K est donc diagonalisable et s'écrit, dans sa base de vecteurs propres

   $$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_+ & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

   Il y a contraction dans la direction de λ_- et dilatation dans la direction de λ_+.

4. Pour la valeur propre 1, on trouve que le vecteur propre est $(e_z) = (0, 0, 1)$. Pour λ_+ et λ_- on résout
$$\begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ k(t) & k^2(t)+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_- \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
On trouve
$$y = x(\lambda_- - 1)/k$$
et donc le vecteur propre associé est
$$v_- = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$$
De même, pour λ_+ on trouve $y = x(\lambda_+ - 1)/k$ et donc le vecteur propre associé est $v_+ = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$. On peut vérifier que le produit scalaire de ces deux vecteurs propres est bien nul.

Exercice 4 - Matrice à paramètres *(Supplémentaire)

On considère la matrice suivante
$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Le but de l'exercice est de trouver à quelle(s) condition(s) portant sur les paramètres (a, b, c) la matrice B est diagonalisable.

1. Ecrire le polynôme caractéristique de B. En déduire les deux valeurs propres de B et leur ordre de multiplicité.
2. En veillant à ce que la dimension des sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres de B vérifient la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, donner les conditions que doivent vérifier (a, b, c).

Corrigé :

1. Le polynôme caractéristique est $P_B(X) = -(1+X)(1-X)^2$. Les racines sont 1 et -1. P_B n'est pas scindé simple : on ne peut pas en déduire que B est diagonalisable. -1 est racine simple et 1 est racine double.
2. Il faut que $dim(E_{-1}) = 1$ car -1 est racine simple. Calculons $rg(B+I)$:
$$B + I = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On ne peut pas conclure facilement : il faut que $rg(B+I) = 2$. Il faut que deux colonnes de B soient liées. Quant à
$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Il faut avoir $dim(E_1) = 2$ car 1 est racine double. Donc il faut $rg(B-I) = 1$. Pour ceci, il faut $a = 0$.

Exercice 5 *(Supplémentaire)

On considère la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. On cherche dans un premier temps à calculer le polynôme caractéristique de C. Pour ce faire, montrer que $det(C - XI)$ peut se mettre sous la forme $(X + 5) * det(D)$ où D est une matrice à préciser.
2. En effectuant une opération astucieuse, montrer que $det(C - XI)$ peut se mettre sous la forme
$$(X+5)\begin{pmatrix} -1 & \alpha(X) & 0 \\ 0 & \beta(X) & \delta(X) \\ 0 & \gamma(X) & \beta(X) \end{pmatrix}$$
où α, β, γ et δ sont des fonctions de X à préciser.
3. En déduire une forme simple du polynôme caractéristique de C. C est-elle diagonalisable si elle est réelle ? Complexe ?

Corrigé :

1. On ajoute la 3ème colonne à la 1ère colonne
$$det(C - IX) = \begin{vmatrix} -5-X & -2 & 0 \\ 0 & -5-X & -1 \\ -5-X & 2 & -5-X \end{vmatrix} = (X+5)\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5-X & -1 \\ -1 & 2 & -5-X \end{vmatrix}$$
2. On soustrait à la troisième ligne la première et on obtient
$$det(C - IX) = (X+5)\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5-X & -1 \\ 0 & 4 & -5-X \end{vmatrix}$$
3. On a alors $P_C(X) = -(X + 5)((X + 5)^2 + 4)$. Si C est réelle, alors l'unique racine est 5. Si C est complexe, P_C est scindé simple, C est diagonalisable et les racines sont $5, -5 + 2i, -5 - 2i$.