Dynamique et modélisation de la turbulence

4. Turbulence homogène et isotrope

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

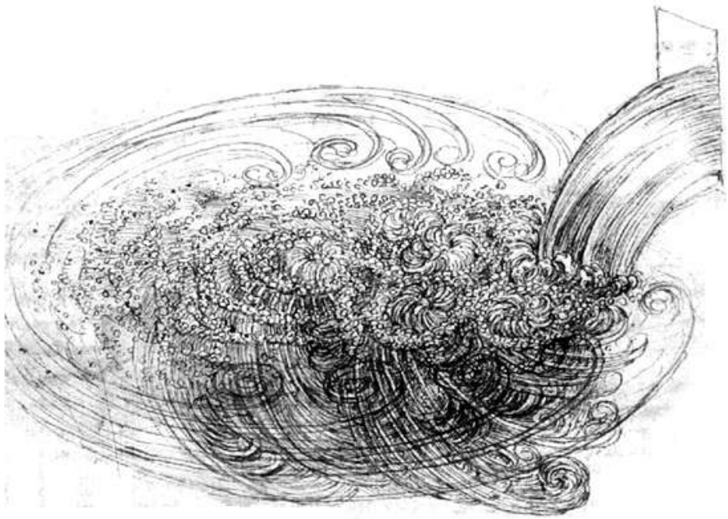
Les échelles de la turbulence

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

∂'Alembert
Institut Jean le Rond d'Alembert

Introduction

- Dans les cours précédents nous avons vu que l'énergie cinétique turbulente :
  - Est injectée aux grandes échelles
  - Est transférée à des échelles de plus en plus petites quasiment sans perte via le mécanisme (non visqueux) d'étirement des tourbillons
  - Est dissipée aux plus petites échelles, ou échelles de Kolmogorov, par la viscosité du fluide
- Reste à
  - Donner une estimation plus quantitative des échelles turbulentes en fonction des paramètres caractéristiques de l'écoulement
  - Caractériser les taux de transfert



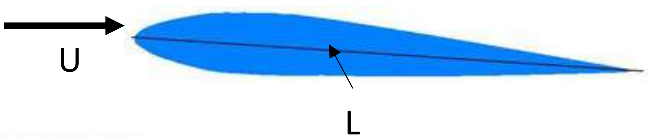
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

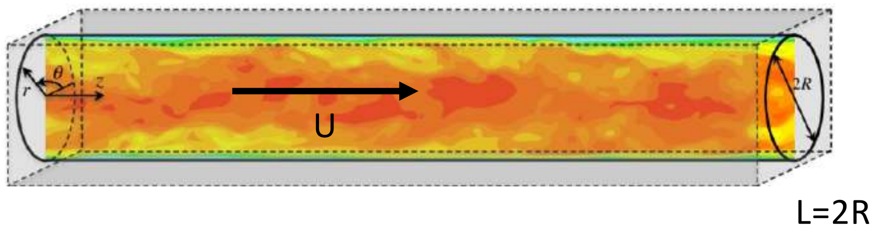
Objectifs de ce cours

- Dans ce cours nous allons examiner de près deux notions récurrentes dans la théorie de la turbulence
  - La cascade d'énergie (rappelez-vous le poème de Richardson!)
  - Les hypothèses de Kolmogorov
    - Elles permettent de préciser et quantifier le processus
- Hypothèses de travail :
  - Nous considérons un écoulement
    - Pleinement turbulent
    - Caractérisé par un nombre de Reynolds élevé, basé sur une échelle de vitesse macroscopique *U* et de longueur *L* :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

  - Bibliographie : Bailly, Pope, Tennekes&Lumley





Cascade turbulente (encore!)

- A la base de l'idée de cascade turbulente il y a l'idée de « structures » (eddies) de tailles différentes
  - Une structure est une région de fluide qui se comporte de façon « cohérente »
  - Les structures de taille l ont
    - une vitesse caractéristique $u(l)$, à peu près similaire sur toute la région considérée
    - Un temps caractéristique (temps de vie) $\tau(l) = l/u(l)$
  - Les plus grandes échelles turbulentes ont
    - une taille $l_0 \sim L$
    - Vitesse caractéristique $u_0 = u_0(l) \sim u' := \left(\frac{2}{3}k\right)^{\frac{1}{2}} \sim U \rightarrow Re_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \gg 0$
      $k = \frac{1}{2} < u_i u_i > = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$
    - Le nombre de Reynolds associé à ces grandes échelles est appelé le Reynolds de turbulence
  - La viscosité n'agissant que sur les plus petites échelles de la cascade, on s'attend à ce que le taux de dissipation turbulente, ϵ soit fixé en fonction du taux auquel l'énergie est injectée dans les plus grandes échelles (taux de production)
    - Taux de transfert de l'énergie : $\mathcal{T} \sim \frac{u_0^2}{\tau_0} \sim \frac{u_0^3}{l_0} \rightarrow \epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$ indépendamment du Reynolds (pourvu que *Re*>>1)

Echelle intégrale

- La taille caractéristique des plus grandes échelles est appelée échelle intégrale
- Compte-tenu des estimations précédentes

$$u_0 \sim k^{\frac{1}{2}}, \qquad \epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$$

Nous déduisons que $l_0 \sim \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$

- Par conséquent, le Reynolds de turbulence peut être estimé à partir de la relation suivante :

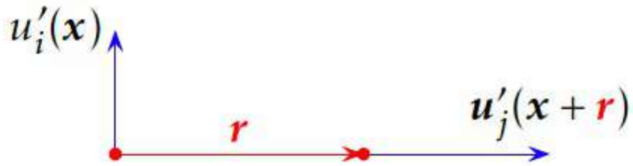
$$\mathrm{Re}_0 \text{ ou } \mathrm{Re}_\mathrm{L} = \frac{k^{\frac{1}{2}} l_0}{\nu} = \frac{k^2}{\epsilon \nu}$$

Hypothèses de Kolmogorov

- Plusieurs questions restent ouvertes
  - Quelle est la taille des petites échelles dissipatives?
  - Lorsque l diminue, comment se comportment $u(l)$ et $\tau(l)$ (diminuent, augmentent, restent constantes?)?
- La théorie de la turbulence établie par Kolmogorov (1941, voir Pope (2000)) apporte une réponse à ces questions
- La théorie de Kolmogorov est fondée sur **trois hypotheses fondamentales** (hypothèses de Kolmogorov), des arguments d'analyse dimensionnelle et des observations expérimentales
  1. **Isotropie locale des petites échelles** ← 1e hypothèse de similitude
  2. **Caractéristiques des échelles visqueuses** ← 1e hypothèse de similitude
  3. **Comportement auto-similaire des échelles intermédiaires** ← 2e hypothèse de similitude

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Turbulence homogène : tenseur de corrélation



- Définition

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t) \equiv \overline{u_i'(\boldsymbol{x},t)\,u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)} = R_{ij}(\boldsymbol{r},t)$$

- R_{ij} ne dépend que de la séparation $\boldsymbol{r}$ entre deux points de mesure
  → invariance sous une translation en espace du point d'observation $\boldsymbol{x}$.

- Version normalisée : coefficient de corrélation

$$-1 \le \mathcal{R}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\overline{u_i'(\boldsymbol{x})\,u_j'(\boldsymbol{x}')}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(\boldsymbol{x})}}\sqrt{\overline{u_j'^2(\boldsymbol{x}')}}} \le +1$$

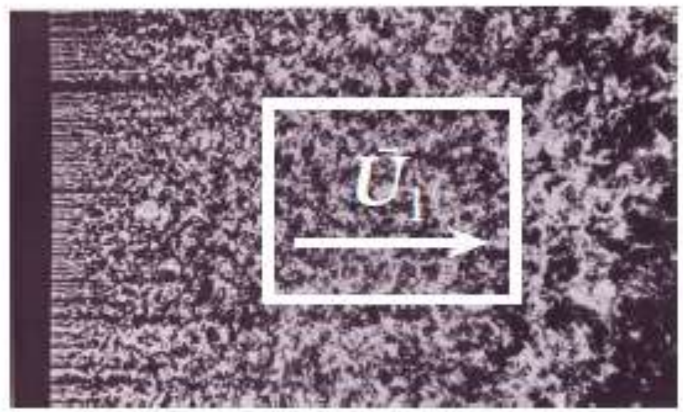
- Exemple : $R_{11}(r,0{,}0) = \overline{u_1'^{\,2}}\,\mathcal{R}_{11}(r,0{,}0)$ (pour une séparation $\boldsymbol{r} = (r,0{,}0)$)

Turbulence homogène : équation de l'énergie cinétique

- Nous avons vu la dernière fois que, pour de la turbulence homogène, les dérivées spatiales des quantités fluctuantes sont nulles.
- L'équation de $\left\langle \frac{u_i' u_i'}{2} \right\rangle$ devient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\langle u_i' u_j' \rangle - \left\langle \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle = \mathcal{P} - \epsilon$$

production - dissipation

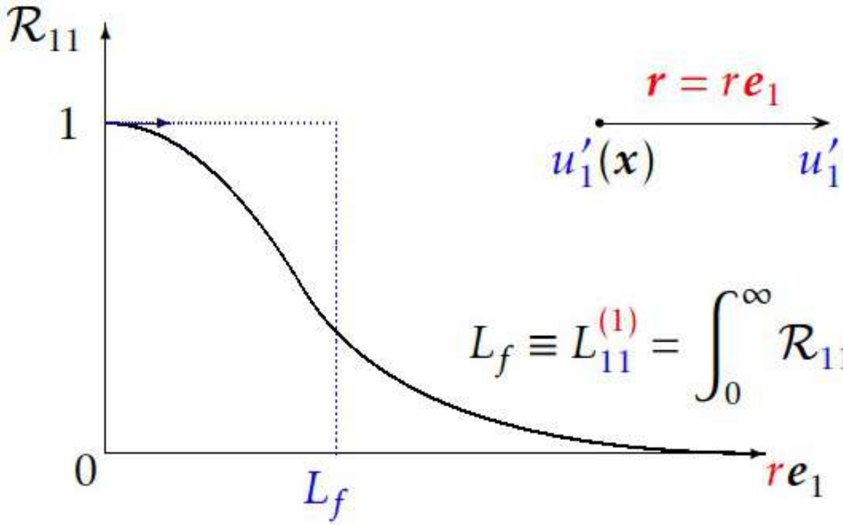


- Turbulence décroissante derrière une grille
  - On se place dans un repère se déplaçant avec l'écoulement
  - Turbulence statistiquement stationnaire, homogène dans le plan 2-3.

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon$$

Turbulence homogène : échelle intégrale

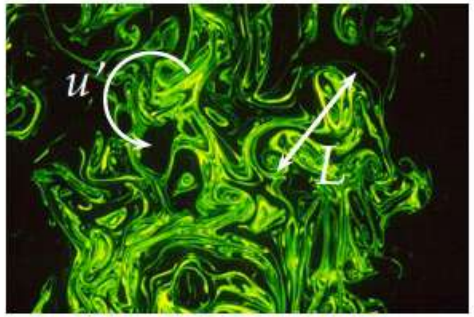
- Echelle intégrale longitudinale (voir Lect1) : estimation de la taille des structures les plus énergétiques



$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_1$$

$$u_1'(\boldsymbol{x}) \longrightarrow u_1'(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{e}_1)$$

$$L_f \equiv L_{11}^{(1)} = \int_0^\infty \mathcal{R}_{11}(r,0,0)\,dr$$



Tavoularis (2003), passive scalar mixing, Sc $\simeq$ 2000

- On peut également définir une échelle intégrale latérale

$$L_g \equiv L_{11}^{(2)} = \int_0^\infty \mathcal{R}_{11}(0,r,0)\,dr$$

$u_1(0,r,0)$

r

$u_1(0,0,0)$

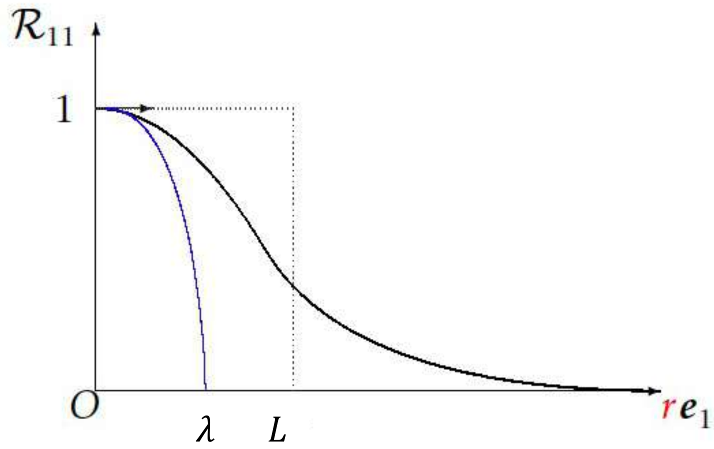
Turbulence homogène : micro-échelle de Taylor

- Nous avons vue auparavant l'échelle de Taylor, obtenue par développement en série du coefficient de corrélation :

$$\mathcal{R}_{11}(r,0,0) = 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} + \cdots$$

- Développement en série de la vitesse fluctuante u_1'

$$u_1'(r,0,0) = u_1'(0,0,0) + r\left.\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right|_{x=0} + \frac{r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1^2}\right|_{x=0} + \ldots$$



- Il en suit que :

$$R_{11}(r,0,0) = \overline{u_1'(0,0,0)\,u_1'(r,0,0)}$$

$$= \overline{u_1'^2} + r\,\overline{u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} + \frac{r^2}{2}\,\overline{u_1'\frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1^2}} + \ldots$$

$$= \overline{u_1'^2} + r\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\overline{u_1'^2}}{2}\right) + \frac{r^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}\right) - \frac{r^2}{2}\,\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2} + \ldots$$

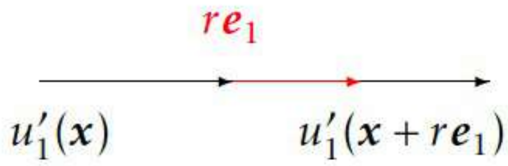
$$\mathcal{R}_{11}(r,0,0) = 1 - \frac{r^2}{2\overline{u_1'^2}}\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2} \equiv 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} + \cdots \rightarrow \lambda = \sqrt{2\overline{u_1'^2}}\Big/\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2}}$$

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond

Turbulence homogène : micro-échelle de Taylor

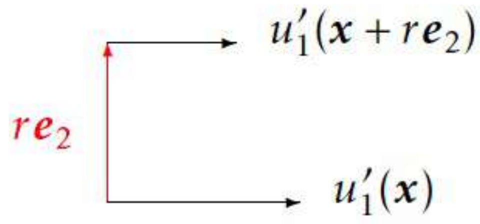
- Longitudinale :

$$\frac{1}{\lambda_f^2} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{R}_{11}}{dr_1^2} = \frac{1}{2\overline{u_1'^2}}\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2}$$



- Transversale :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{R}_{11}}{dr_2^2} = \frac{1}{2\overline{u_1'^2}}\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2}\right)^2}$$



1e hypothèse de similitude -1 : isotropie locale aux petites échelles

- Pour des Reynolds de turbulence suffisamment élevés, les petites échelles turbulentes ($l \ll l_0$) sont statistiquement isotropes

  → **Remarque** : l'information directionnelle est perdue lors du transfert dans la cascade (voir arbre de Bradshaw), ainsi que l'effet du champ moyen et des conditions aux limites

- On note l_{EI} l'échelle en dessous de laquelle la turbulence a un comportement isotrope.
  La gamme d'échelles $l < l_{EI}$ est appelé le domaine d'équilibre
  - Pour de nombreux écoulements haut Reynolds, on estime $l_{EI} < \frac{l_0}{6}$

- Dans cette gamme, les temps caractéristiques $\tau(l) = \frac{l}{u(l)} \ll \tau_0$

  → Adaptation rapide des structures aux modifications des grandes échelles anisotropes pour maintenir un équilibre dynamique entre l'énergie transférée $\mathcal{T}$ et la dissipation ϵ.

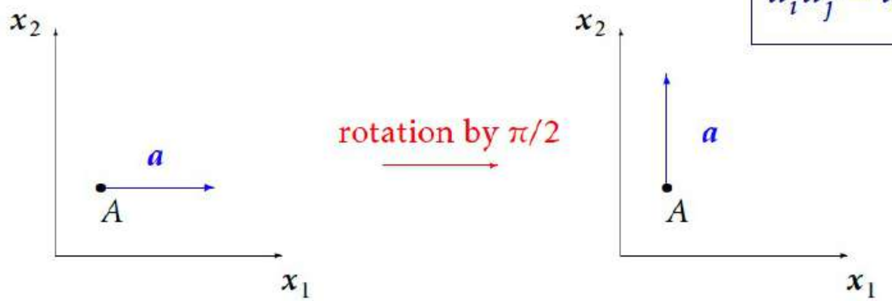
Turbulence isotrope : propriétés

- Les statistiques de l’écoulement sont invariantes par rapport à une rotation du repère et symétriques par rapport aux plans coordonnés
  - Pas de direction privilégiée
  - Configuration la plus simple possible
- Propriétés :
  - Les corrélations normales doivent être égales pour de la turbulence isotrope (permutation des axes), donc :

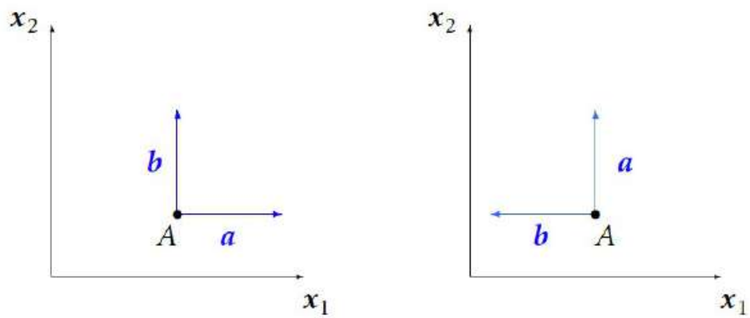
$$\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = u'^2 \qquad u'^2 \equiv \overline{u'^2}$$

  - Les corrélations croisées doivent être nulles $\overline{u_1'u_2'} = -\,\overline{u_1'u_2'}$ → $\overline{u_1'u_2'} = 0$

    → tenseur de Reynolds diagonal : $\boxed{\overline{u_i'u_j'} = u'^2\,\delta_{ij} = \frac{2}{3}k_t\,\delta_{ij}}$



$u'_A \cdot a = u'_1$ $\qquad$ $u'_A \cdot a = u'_2$



$(u'_A \cdot a)(u'_A \cdot b) = u'_1 u'_2$ $\qquad$ $(u'_A \cdot a)(u'_A \cdot b) = -u'_1 u'_2$

1e hypothèse de similitude – 2 : échelles visqueuses

- Toujours pour des Reynolds de turbulence suffisamment élevés, les petites échelles turbulentes ($l \ll l_0$) sont
  - statistiquement isotropes
  - leur taille est déterminée uniquement par la viscosité du fluide ν et le taux de dissipation turbulente ϵ

  → **Remarque** : l'information directionnelle est perdue lors du transfert dans la cascade (voir arbre de Bradshaw), ainsi que l'effet du champ moyen et des conditions aux limites

- On note l_{EI} l'échelle en dessous de laquelle la turbulence a un comportement isotrope.
  La gamme d'échelles $l < l_{EI}$ est appelé le domaine d'équilibre
  - Pour de nombreux écoulements haut Reynolds, on estime $l_{EI} < \frac{l_0}{6}$

- Dans cette gamme, les temps caractéristiques $\tau(l) = \frac{l}{u(l)} \ll \tau_0$

  → Adaptation rapide des structures aux modifications des grandes échelles anisotropes pour maintenir un équilibre dynamique entre l'énergie transférée $\mathcal{T}$ et la dissipation ϵ.

- On utilise l'analyse dimensionnelle pour construire des échelles caractéristiques de la gamme d'équilibre :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}; \qquad u_\eta = (\epsilon\nu)^{\frac{1}{4}}; \qquad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1; \quad \frac{u_\eta}{\eta} = \frac{1}{\tau_\eta}$$

→ **Echelles de Kolmogorov**

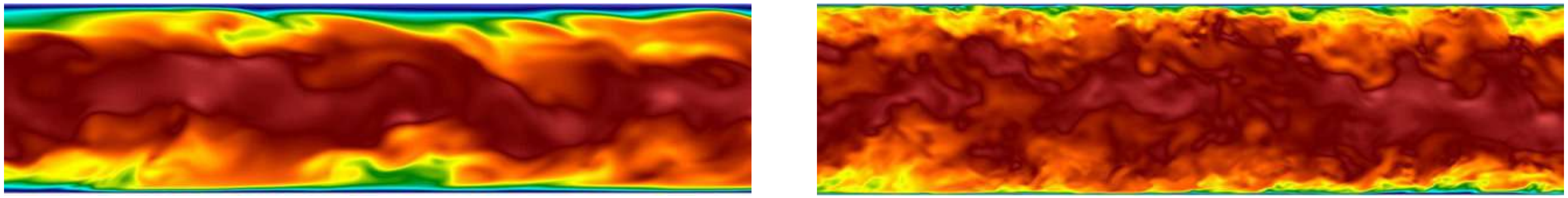
1^e et 2^e hypothèse : conséquences

- On peut maintenant estimer le rapport entre les grandes et les petites échelles en utilisant $\epsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$:

$$\boxed{\frac{l_0}{\eta} \sim Re^{\frac{3}{4}}; \qquad \frac{u_0}{u_\eta} \sim Re^{\frac{1}{4}}; \qquad \frac{\tau_0}{\tau_\eta} = Re^{\frac{1}{2}}}$$

- La taille des petites échelles décroit en augmentant le nombre de Reynolds
- Il existe une large séparation entre l’échelle intégrale (niveau macroscopique, anisotrope, peu affectée par la viscosité) et les échelles de Kolmogorov (dominées par la vorticité)
  - On postule l’existence d’une gamme
  - d’échelles intermédiaires, assez grandes pour être peu affectée par la viscosité mais malgré tout faible devant l’échelle intégrale :

$$\eta \ll l \ll l_0$$



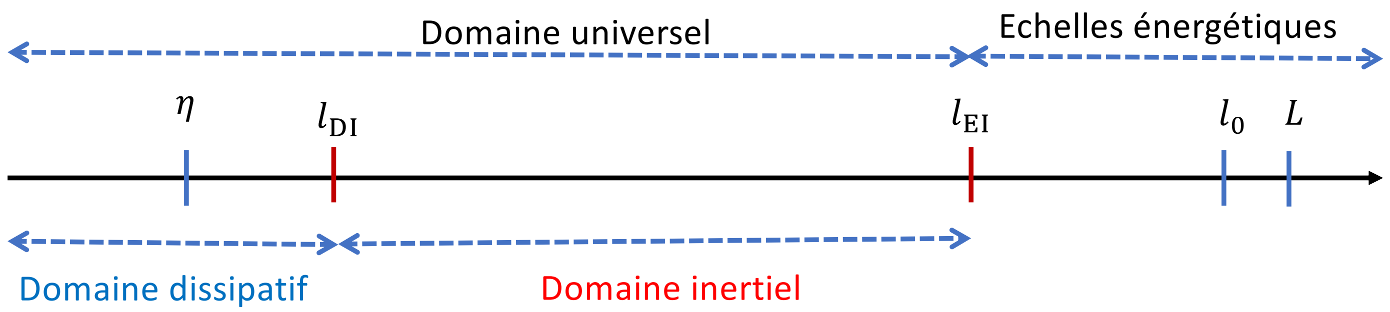
Simulation de canal plan turbulent à $Re_\tau = 180$ (gauche) et $Re_\tau = 590$ (droite)

3e hypothèse de Kolmogorov : domaine « inertiel »

- Pour tout écoulement à nombre de Reynolds suffisamment élevé, Kolmogorov postule l'existence d'une gamme d'échelles $\eta \ll l \ll l_0$ caractérisé par un comportement universel ($l < l_{EI}$) mais déterminé uniquement par le taux de transfert $\mathcal{T} \sim \epsilon$ et non par la viscosité

→ Domaine inertiel

- On introduit une échelle correspondant à la limite inférieure de la gamme inertielle : $l_{DI} < l < l_{EI}$
- Cette échelle sépare le domaine universel en deux parties :
  - $l_{DI} < l < l_{EI}$: domaine inertiel
  - $l < l_{DI}$: domaine dissipatif
- Comme son nom l'indique, le domaine inertiel est dominé par les termes d'inertie (non linéaires) des équations de Navier-Stokes



3e hypothèse de Kolmogorov : domaine « inertiel » (suite)

- Dans le domaine inertiel, il n'y a pas d'échelle de longueur de référence (comportement auto-similaire)
  - Pour une taille l donnée, on peut estimer les autres échelles caractéristiques par les relations dimensionnelles :

$$u(l) \sim (\epsilon l)^{\frac{1}{3}} \sim u_\eta \left(\frac{l}{\eta}\right)^{\frac{1}{3}} \sim u_0 \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau(l) \sim \left(\frac{l^2}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} \sim \tau_\eta \left(\frac{l}{\eta}\right)^{\frac{2}{3}} \sim \tau_0 \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

  - Conséquence : quand l diminue, $u(l)$ et $\tau(l)$ diminuent
  - Les lois d'échelle ci-dessus nous disent également de le taux de transfert

$$\mathcal{T} \sim \epsilon, \mathcal{T}(l) \sim \frac{u(l)^3}{\tau(l)}$$

est le même pour toute la gamme d'échelles allant des échelles énergétiques à celles dissipatives

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Micro-échelle de Taylor et dissipation

- Pour de la turbulence isotrope, le taux de dissipation $\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$ devient :

$$\epsilon = 15\nu \overline{\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$$

- Compte-tenu de la définition de l'échelle de Taylor, nous pouvons écrire :
- $\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{2\overline{u_1'^2}}{\lambda^2} \sim \frac{u'^2}{\lambda^2}$
- Donc : $\epsilon \sim 15\nu \frac{u'^2}{\lambda^2} = 15\nu \frac{2}{3}k\frac{1}{\lambda^2} = \frac{10\nu k}{\lambda^2}$ $\rightarrow \lambda \sim \left(\frac{10\nu k}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$
- L'échelle de Taylor est liée aux effets de dissipation
- Elle se situe entre l'échelle énergétique l_0 et l'échelle de Kolmogorov, car :

$$\lambda / l_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{-1/2}$$
$$\eta / l_0 = \mathrm{Re}_L^{-3/4}$$
$$\lambda / \eta = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{1/4}$$
$$\lambda = \sqrt{10}\,\eta^{2/3}\, l_0^{1/3}$$

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Micro-échelle de Taylor et dissipation (suite)

- Un nombre de Reynolds communément utilisé pour caractériser la turbulence homogène et isotrope est :

$$R_\lambda = u'\lambda / \nu$$

- Compte-tenu des relations précédentes, il est lié au Re_L par la relation :

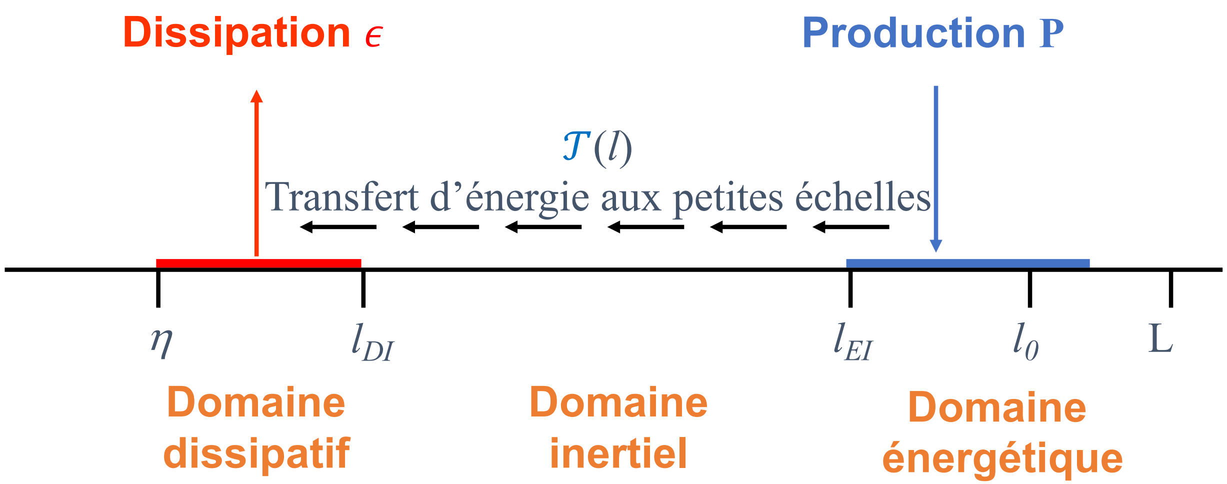
$$R_\lambda = \left(\tfrac{20}{3}\,\mathrm{Re}_L\right)^{1/2}$$

- Enfin, la micro-échelle temporelle de Taylor est donnée par :

$$\lambda / u' = (15\nu / \varepsilon)^{1/2} = \sqrt{15}\,\tau_\eta$$

Taux de transfert d'énergie

- Le taux auquel l'énergie est tranféré des grandes aux petites échelles est $\mathcal{T}(l)$.
- Pour des conditions d'équilibre dans le domaine inertiel $\mathcal{T}(l)= \epsilon \sim u(l)^2/\tau$



Spectre de vitesse

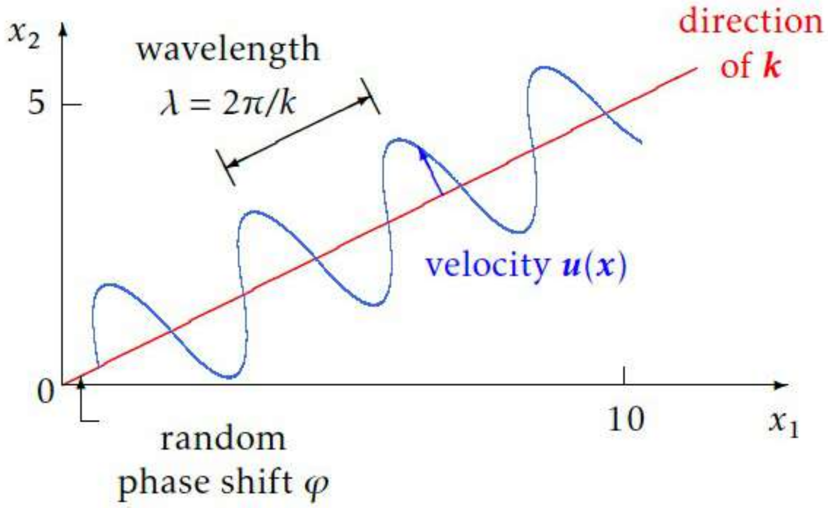
- Pour un champ de vitesse fluctuante homogène, on peut considérer la transformée de Fourier spatiale

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{k}$$

- Si de plus le champ de vitesse est incompressible :

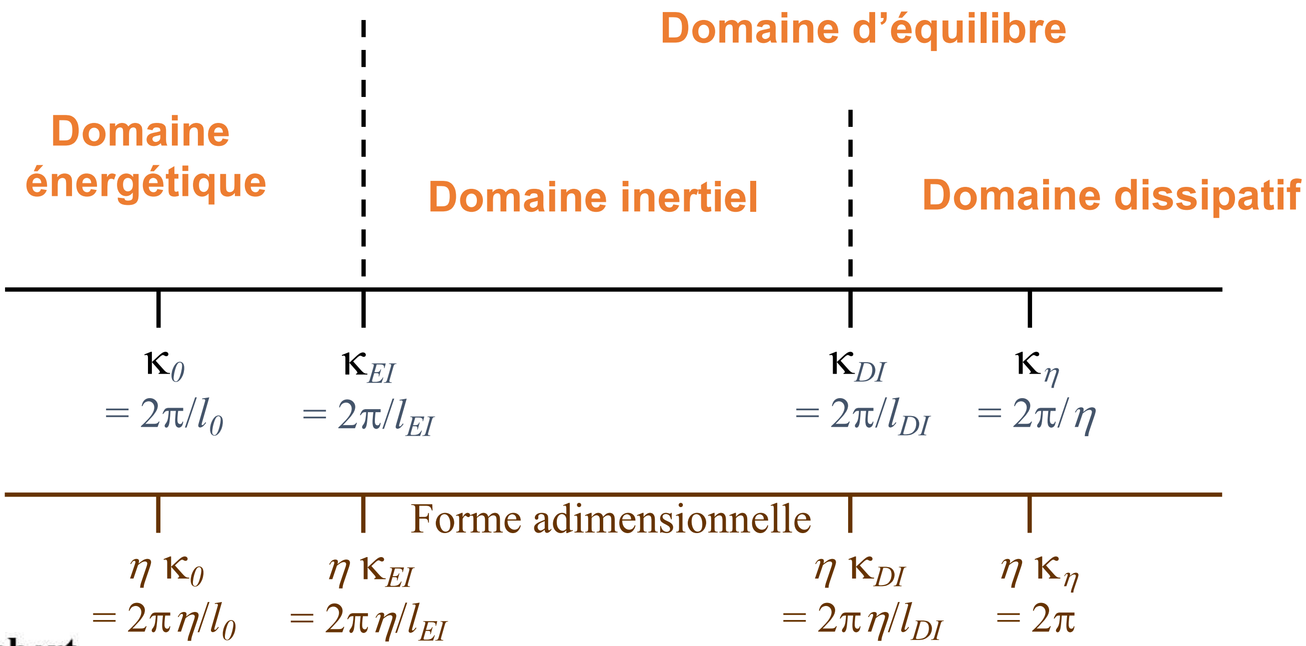
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0 = \int i\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{k} \qquad \forall\, \boldsymbol{x}$$

- Donc $\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) \equiv 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{k}$ →transformée de Fourier de la vitesse est orthogonale au vecteur d'onde ***k***



Nombres d’onde et vecteur d’onde

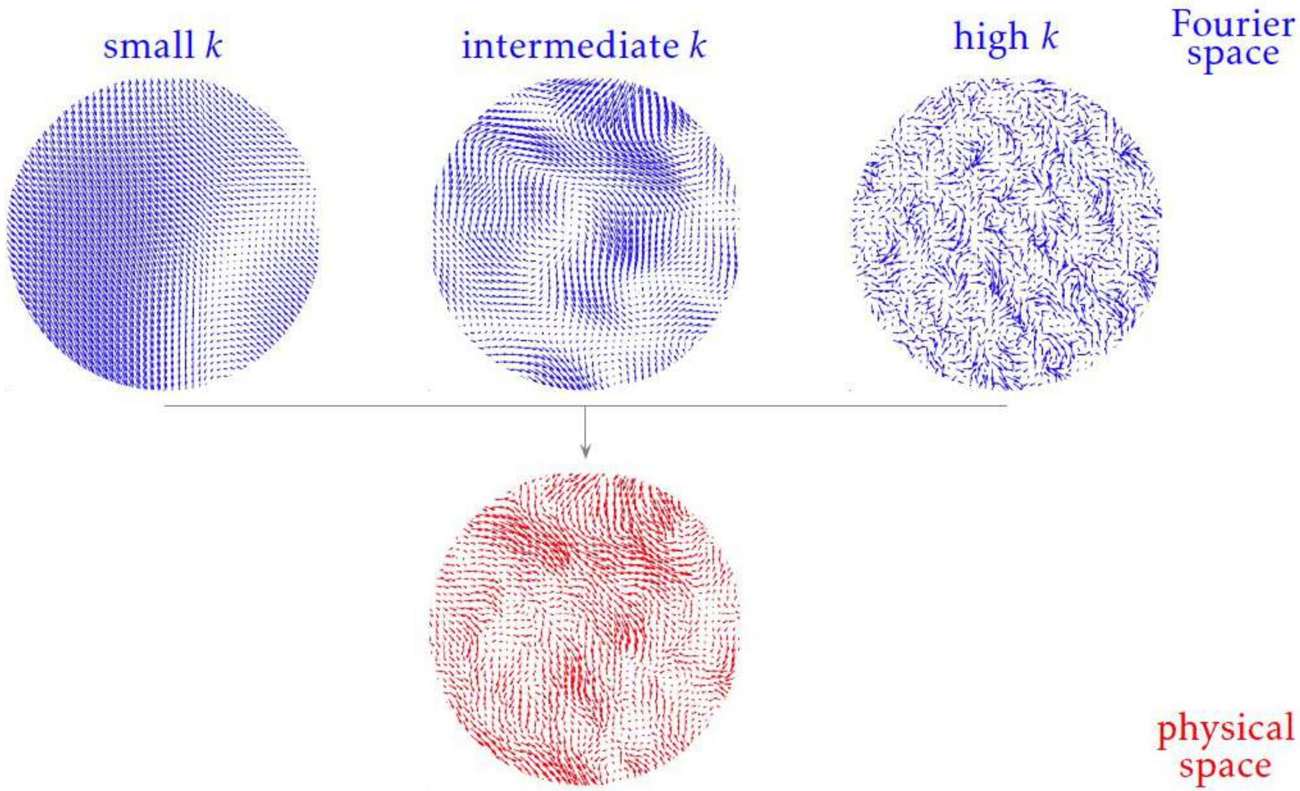
- Le nombre d’onde κ est défini comme $\kappa = 2\pi/l$.
- Le vecteur d’onde ***k*** a pour composantes les nombres d’onde dans les trois directions
- Les différents domaines de la cascade peuvent être réécrits en fonction des nombres d’onde.
- On peut normaliser le nombre d’onde en le multipliant par l’échelle de Kolmogorov η : $(\eta\ \kappa)$.



SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ
∂’Alembert Institut Jean le Rond d’Alembert

Spectre de vitesse

- Espace de Fourier vs espace physique



Tenseur spectral

- Transformée de Fourier du tenseur de corrélation

$$\begin{cases} \phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} R_{ij}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} \\ R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{ij}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k} \end{cases}$$

Transformée directe

Transformée inverse

  - Exemple : *i*=1, *j*=1, **r**=0 : $\overline{u_1'^2} = \int \phi_{11}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}$

- Propriétés :
  - Deux composantes du spectre de vitesse ne sont corrélées que pour le même nombre d'onde

$$\overline{\hat{u}_i^\star(\boldsymbol{k})\hat{u}_j(\boldsymbol{k}')} = \phi_{ij}(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

  - Symétrie Hermitienne $\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \phi_{ji}(-\boldsymbol{k}) = \phi_{ji}^\star(\boldsymbol{k})$ si $R_{ij}(\boldsymbol{r}) = R_{ji}(-\boldsymbol{r})$

  - Condition d'incompressibilité $k_i\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = k_j\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0$

Tenseur spectral

- Propriétés (preuve) :

$$\overline{\hat{u}_i^\star(\boldsymbol{k})\hat{u}_j(\boldsymbol{k}')} = \frac{1}{(2\pi)^6}\iint \overline{u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}')}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\iint R_{ij}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{r}$$

avec $\overline{u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}')} = R_{ij}(\boldsymbol{r})$ pour de la turbulence homogène et isotrope (r=x'-x)

Par ailleurs : $\displaystyle \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$

Et finalement $\displaystyle \overline{\hat{u}_i^\star(\boldsymbol{k})\hat{u}_j(\boldsymbol{k}')} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int R_{ij}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\, \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')d\boldsymbol{r} = \phi_{ij}(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$

- Incompressibilité : conséquence de $\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}) \equiv 0$ et de la relation précédente

Spectre 1D

- On intègre sur tous les nombres d'onde dans deux directions et on regarde la distribution dans la troisième direction :

$$E_{ij}^{(1)}(k_1) = \iint_{\mathrm{R}^2} \phi_{ij}(\boldsymbol{k})\ dk_2 dk_3$$

- Par exemple pour i=j=1 et $\boldsymbol{r} = 0$:

$$\overline{u_1'^2} = R_{11}(\boldsymbol{r}=0) = \int_{\mathrm{R}^3} \phi_{11}(\boldsymbol{k})\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{11}^{(1)}(k_1)\ dk_1$$

Aire sous le spectre

- Pour i=j=1 et $\boldsymbol{r} = (r_1, 0{,}0)$:

$$R_{11}(r_1, 0, 0) = \int_{\mathrm{R}^3} \phi_{11}(\boldsymbol{k})\ e^{ik_1 r_1} d\boldsymbol{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{11}^{(1)}(k_1)\ e^{ik_1 r_1} dk_1$$

Transformée de Fourier inverse

  - Inversement :

$$E_{11}^{(1)}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(r_1, 0, 0)\ e^{-ik_1 r_1} dr_1$$

Transformée de Fourier directe

- Enfin pour k1=0 :

$$E_{11}^{(1)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(r_1, 0, 0)\ dr_1 = \frac{1}{2\pi} 2\overline{u_1'^2} L_f$$

$$\boxed{L_f = \pi \frac{E_{11}^{(1)}(0)}{\overline{u_1'^2}}}$$

Echelle intégrale longitudinale

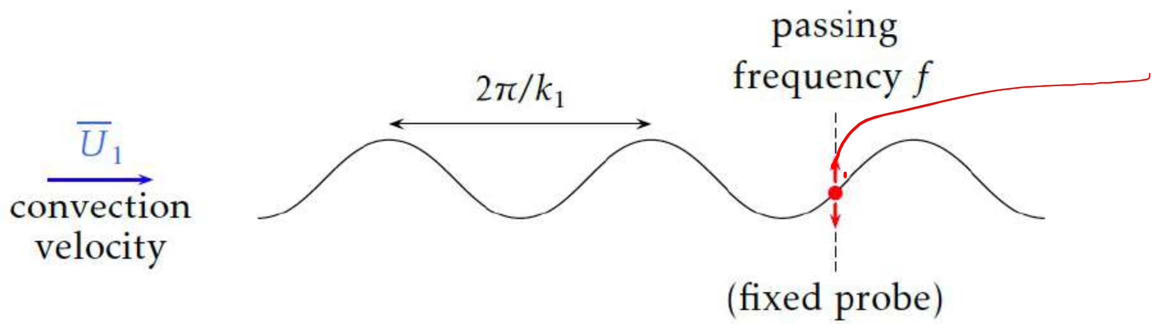
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

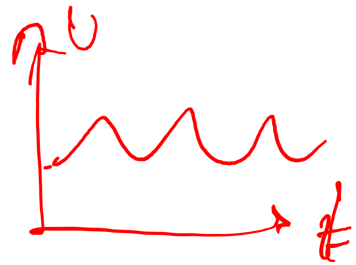
Turbulence « gelée » et hypothèse de Taylor

- D’un point de vue expérimental, les mesures sont des signaux temporels enregistrés à un point fixé
- Hypothèse de turbulence « gelée » et convectée par l’écoulement à la vitesse moyenne $\overline{U}_1$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\overline{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad k_1 = 2\pi f/\bar{U}_1$$

Taylor’s hypothesis





- Application : signal temporel de vitesse $u_1'(t) \rightarrow \Phi_{11}(f)$ $\quad \overline{u_1'^2} \equiv \int_0^{\infty} \Phi_{11}(f)\,df$ Transformée inverse en temps
- En espace on a

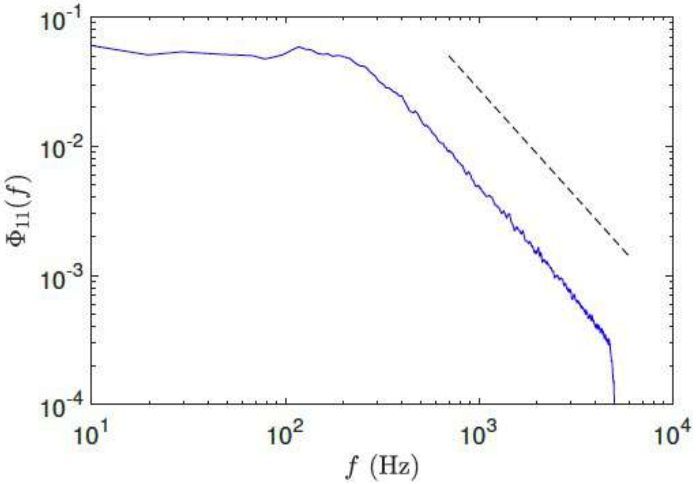
$$\overline{u_1'^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{11}^{(1)}(k_1)\,dk_1 \equiv \int_0^{\infty} \frac{\bar{U}_1}{2\pi} \Phi_{11}\left(f = k_1 \bar{U}_1/2\pi\right) dk_1 \longrightarrow L_{11}^{(1)} = \pi \frac{E_{11}^{(1)}(k_1 = 0)}{\overline{u_1'^2}} = \frac{1}{4} \bar{U}_1 \frac{\Phi_{11}(f = 0)}{\overline{u_1'^2}}$$

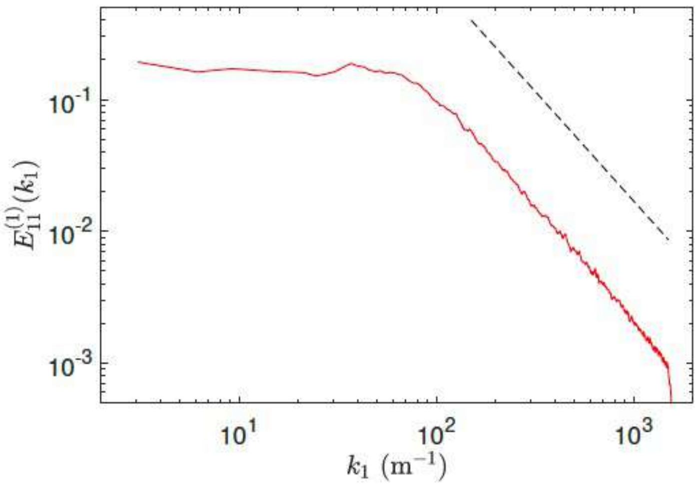
Inconnu Mesurable

Détermination de la longueur intégrale
à partir des mesures

Turbulence « gelée » et hypothèse de Taylor (cont.)

- Exemples de spectres spatial et temporel pour un écoulement de jet





Turbulence homogène isotrope

- Le tenseur spectral ne dépend que d'une seule fonction scalaire et se réduit à

$$\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \qquad E(k) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_k} \phi_{ii}(\boldsymbol{k})\, d\Sigma = 2\pi k^2\, \phi_{ii}(k)$$

La sphère de rayon k

- L'énergie cinétique turbulente est $K \equiv \int_0^\infty E(k)\, dk$
  - Répartition de l'énergie cinétique des fluctuations dans les différents nombres d'onde

- On peut également introduire le spectre de dissipation :

$$\epsilon = \nu \overline{\omega_i' \omega_i'} = \nu \int_0^\infty k^2 \phi_{ii}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}$$

- Car $\hat{\omega}(\boldsymbol{k}) = i\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})$ et $\frac{\overline{\omega_i' \omega_i'}}{2} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^3} k^2 \phi_{ii}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}$
  - Répartition de la dissipation selon les nombres d'onde

Spectre d'énergie dans le domaine inertiel

- D'après la deuxième hypothèse de similitude de Kolmogorov, $E(\kappa)$ dépend seulement de κ et ε.
- L'analyse dimensionnelle indique que :

$$[k] = m^2 s^{-2} \;;\quad [\varepsilon] = m^2 s^{-3} \;;\quad [\kappa] = m^{-1} \;;$$

$$[E(\kappa)] = [k]/[\kappa] = m^3 s^{-2}$$

$$Dimensional\ analysis: \quad [\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}] = m^3 s^{-2}$$

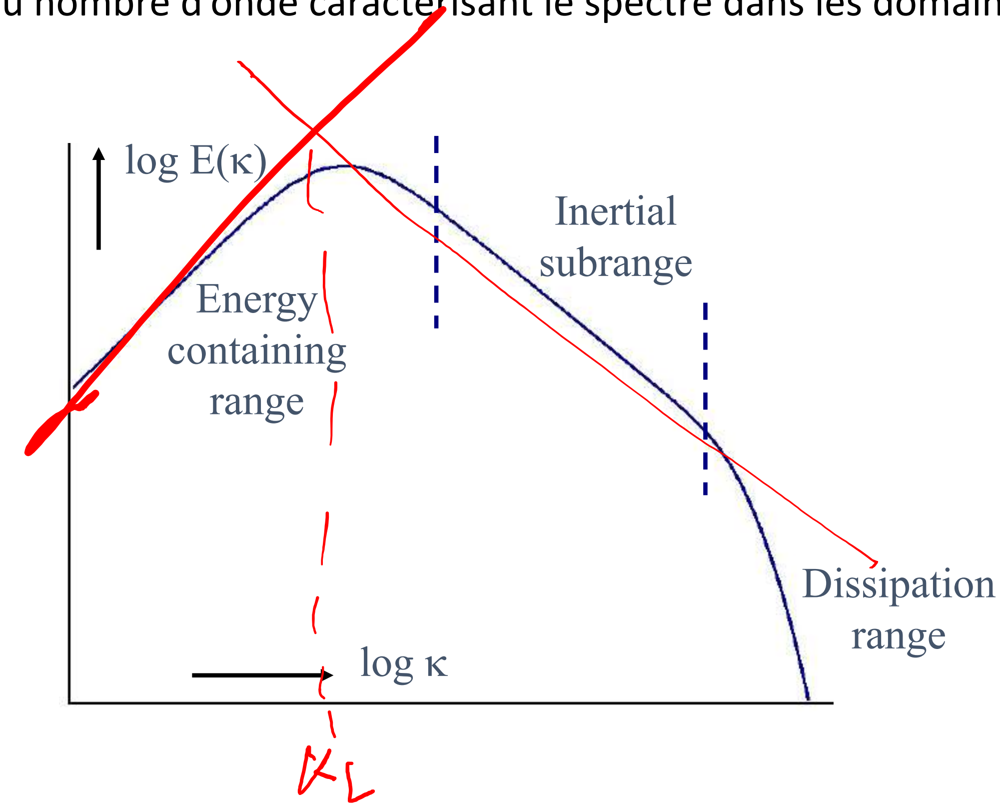
$$\Rightarrow \; E(\kappa) \;\propto\; \varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}$$

$$\Rightarrow \; \boxed{E(\kappa) \;=\; C\,\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}}$$

- Cette dernière relation représente la célèbre loi en –5/3 du spectre de Kolmogorov.
- *C* est la constante universelle de Kolmogorov (C = 1.5 d'après les expériences)

Spectre complet

- Plusieurs auteurs ont développé des modèles de spectre, que nous ne discuterons pas en détail
- Le spectre complet est de la forme: $E(\kappa) = C\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3} f_L\, f_\eta$
- Avec f_L et f_η des fonctions du nombre d'onde caractérisant le spectre dans les domaines énergétique et dissipatif, respectivement.



Spectre complet (suite)

- Le domaine énergétique est caractérisé par f_L (qui tend vers 1 pour ($\kappa\, l_0$>>1):

$$f_L = \left(\frac{\kappa l_0}{\left[(\kappa l_0)^2 + c_L \right]^{1/2}} \right)^{p_0 + 5/3}$$

- Le domaine dissipative est caractérisé par f_η (qui tend vers 1 lorsque ($\kappa\, \eta$)→0):

$$f_\eta \;=\; \exp\{-\beta\{[(\kappa\,\eta)^4 + c_\eta^4]^{1/4} - c_\eta\}\}$$

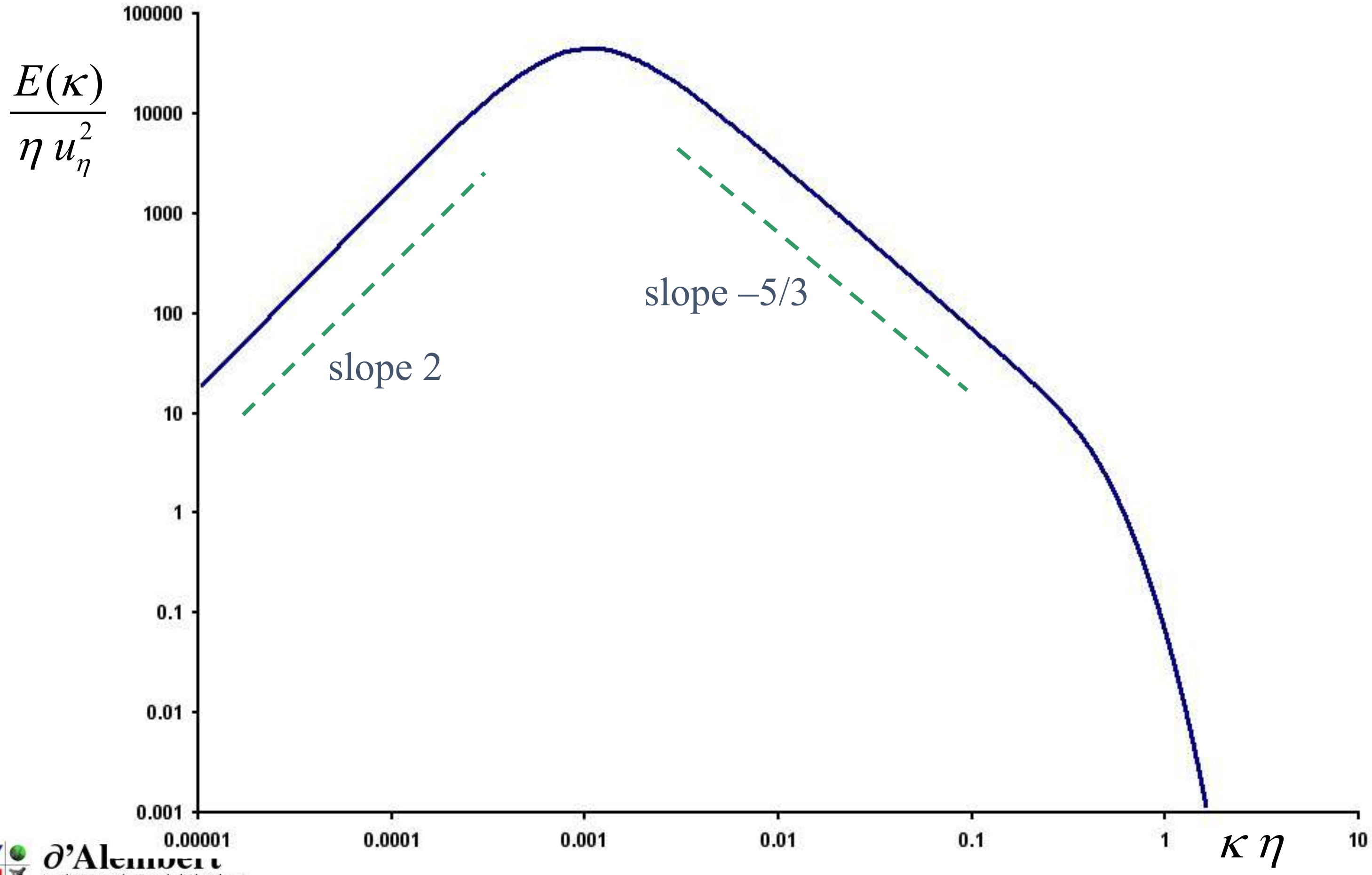
- Les constantes du modèle sont déterminées à partir des expériences, sachant que l'intégrale du spectre est égale à l'énergie cinétique turbulente.

$$c_L \approx 6.78; \quad c_\eta \approx 0.40; \quad C = 1.5; \quad p_0 = 2; \quad \beta = 5.2.$$

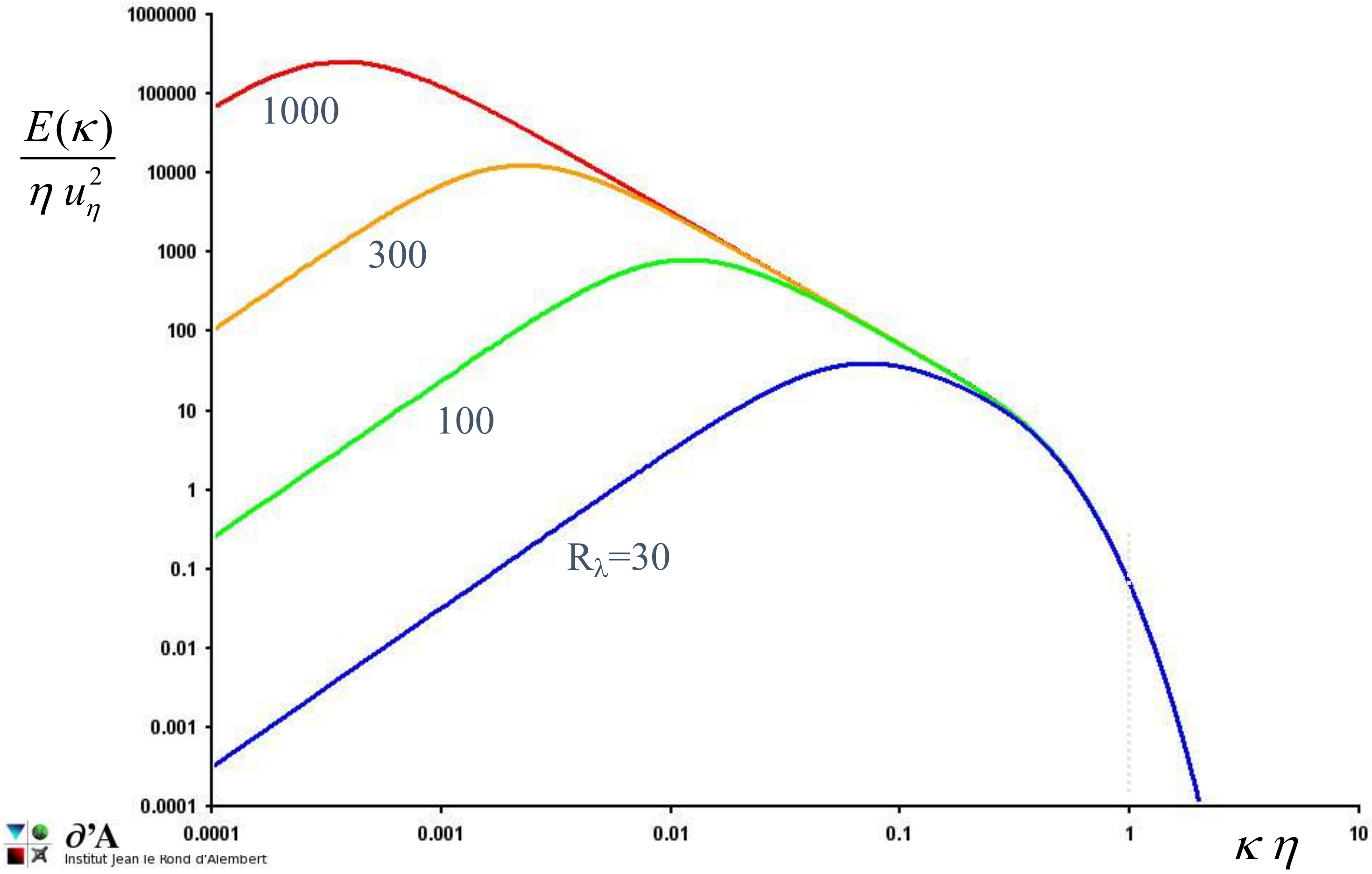
Spectre normalisé

- Pour des valeurs données de ε, ν, et κ on peut calculer le spectre avec les relations précédentes.
- Il est courant toutefois de normaliser le spectre avec l'échelle intégrale ou de Kolmogorov.
- Normalisation avec les échelles de Kolmogorov :
  - Taille des structures ($\eta\ \kappa$).
  - Densité spectrale normalisée $E(\kappa)/(\eta\ u_\eta^2)$
- Normalisation avec l'échelle intégrale :
  - Taille des structures ($l_0\ \kappa$).
  - Densité spectrale normalisée $E(\kappa)/(k\ l_0)$
- Avantage : au lieu de trois paramètres indépendants (ε,ν, κ), le spectre normalisé ne dépend plus que du nombre de Reynolds
  - On choisit le Reynolds basé sur l'échelle de Taylor R_λ.

Spectre normalisé pour R_λ = 500



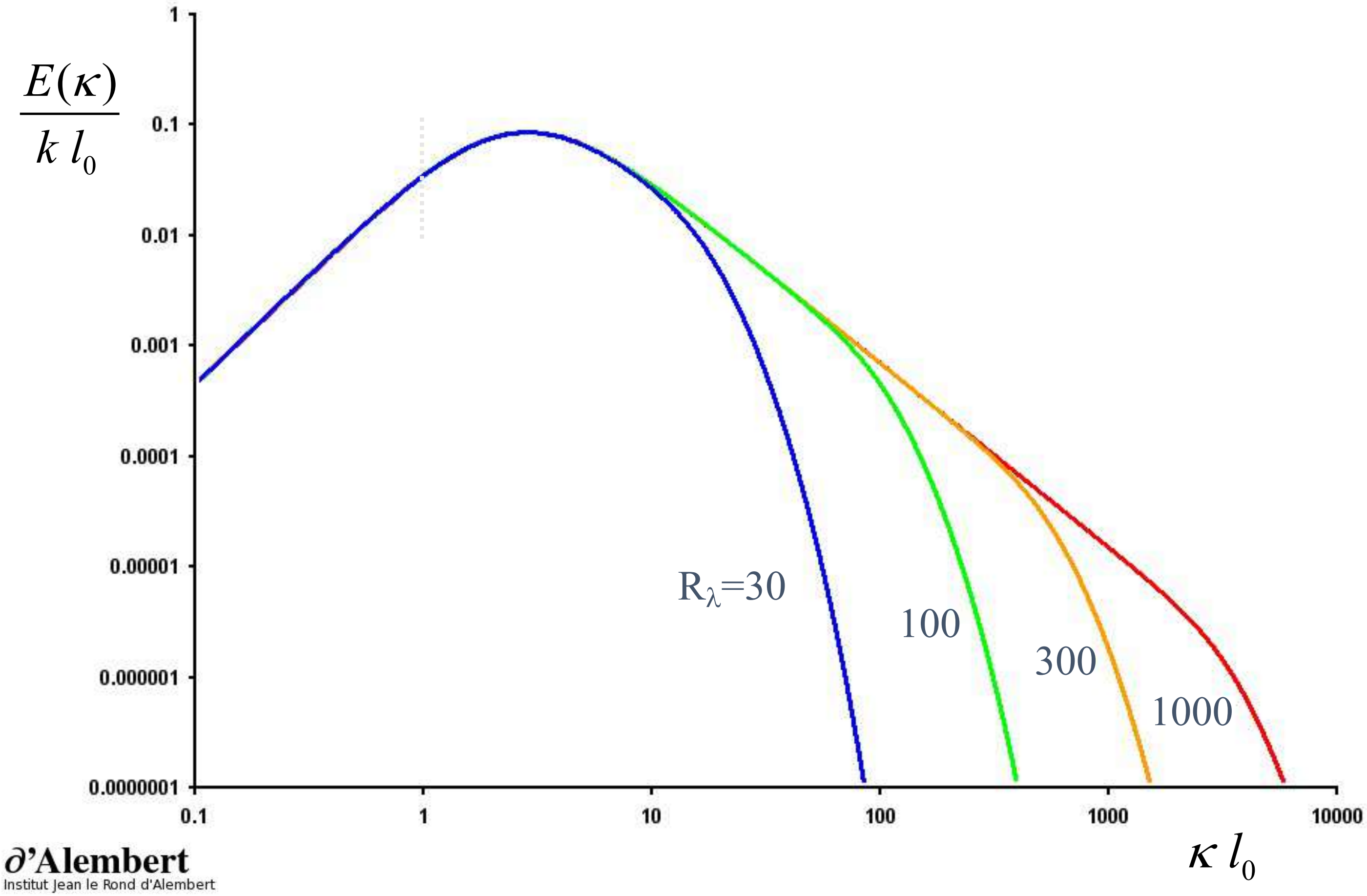
Variation du spectre normalisé avec R_λ



SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

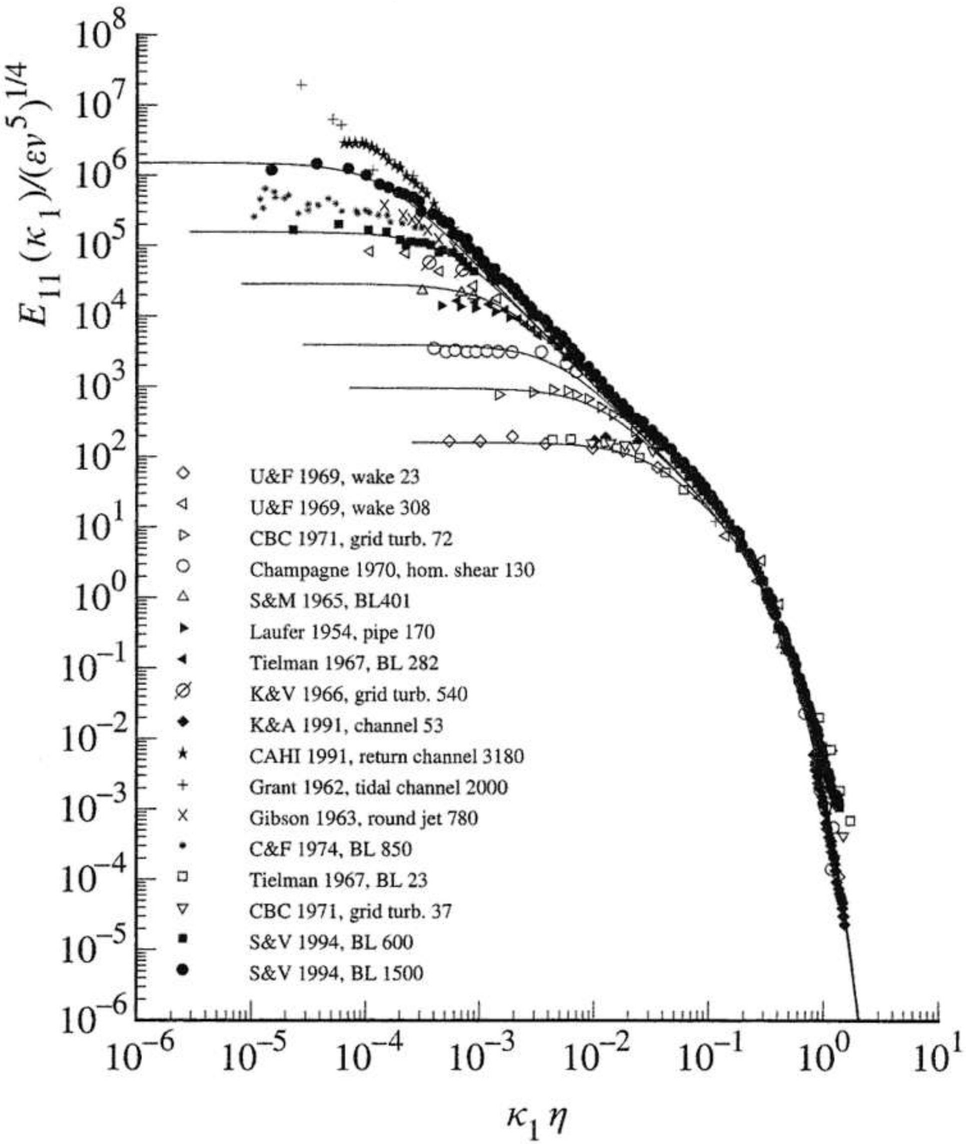
∂'A Institut Jean le Rond d'Alembert

Variation du spectre normalisé avec R_λ



Mesures du spectre

- Spectres mesurés pour plusieurs configurations d'écoulement et plusieurs R_λ. Source: Pope, page 235



Domaine énergétique

- A partir de l'expression du spectre il est possible de déterminer la gamme de structures les plus énergétiques
- La conclusion est que la majeure partie de l'énergie (~80%) est contenue dans les échelles de taille $l_{EI} = l_0/6 < l < 6l_0$.

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Spectre de dissipation

- On se pose maintenant la question de quelles sont les échelles qui dissipent le plus d'énergie
- On construit pour cela le spectre de dissipation D(κ). L'intégrale de D(κ) sur toutes les longueurs d'onde est par définition le taux de dissipation ε:

$$\varepsilon = \int_0^\infty D(\kappa)d\kappa$$

- Compte-tenu de la définition donnée précédemment, on déduit : $D(\kappa) = 2\nu\kappa^2 E(\kappa)$
- Et donc :

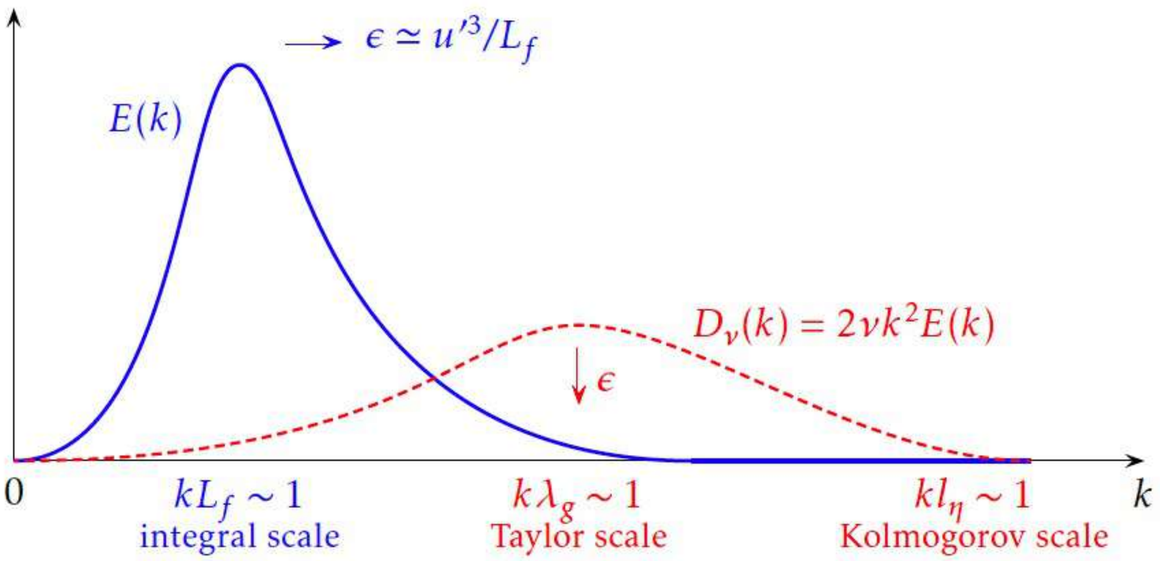
$$\varepsilon = \int_0^\infty D(\kappa)d\kappa = \int_0^\infty 2\nu\kappa^2 E(\kappa)d\kappa$$

$$\varepsilon(0,\kappa) = \int_0^\kappa D(\kappa)d\kappa$$

- La dernière relation représente l'énergie dissipée par les nombres d'onde compris entre 0 and κ.
- D(κ) i(m^3/s^3) peut être normalisé avec une vitesse au cube, typiquement l'échelle de vitesse de Kolmogorov.
- Le spectre de dissipation normalisé ne dépend que de R_λ.

Spectre de dissipation

- La dissipation intégrée montre que la plupart de la dissipation (~90%) a lieu dans les structures de taille $l_{DI}/\eta = 60 > l/\eta > 8$.
- La dissipation a lieu a des échelles plus grandes que l'echelle de Kolmogorov scale η.
- L'echelle de Kolmogorov est plus une mesure des plus petites échelles de l'écoulement que des échelles dissipatives



Intermittence

- Ni K ni ε sont constants en temps ou en espace.
- K et ε peuvent varier considérablement en espace, parfois de plusieurs ordres de grandeur.
- A un point donné, ε peut changer en temps
  - $\rightarrow$intermittence

Récapitulatif – Nombres de Reynolds

- Lors de notre discussion, nous avons introduit les nombres de Reynolds suivants :
  - Reynolds macroscopique: $\mathrm{Re} = UL/\nu$
  - Reynolds de turbulence: $\mathrm{Re_L} = k^{1/2} l_0/\nu = k^2/\epsilon\nu$
  - Reynolds de Taylor: $R_\lambda = u'\lambda/\nu$
  - Reynolds de Kolmogorov : $\mathrm{Re}_\eta = \eta u_\eta/\nu = 1$

- Entre le Reynolds macroscopique et de turbulence il peut y avoir un facteur 10

$$R_\lambda = \left(\frac{20}{3}\mathrm{Re_L}\right)^{1/2}$$

Récapitulatif – échelles caractéristiques

- Echelle intégrale : taille des échelles énergétiques (production)

$$l_0 \propto k^{3/2} / \varepsilon$$

- Micro-echelle de Taylor : pic de dissipation

$$\lambda \approx (10\nu k / \varepsilon)^{1/2}$$

- Echelle de Kolmogorov : taille des plus petites structures

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

- Relation entre les différentes échelles :

$$\lambda / l_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{-1/2}$$

$$\eta / l_0 = \mathrm{Re}_L^{-3/4}$$

$$\lambda / \eta = \sqrt{10}\,\mathrm{Re}_L^{1/4}$$

$$\lambda = \sqrt{10}\,\eta^{2/3}\, l_0^{1/3}$$

Validité de la théorie de Kolmogorov

- Théorie « asymptotique » : valable dans la limite de Re>>1
- Pour des Reynolds intermédiaires (O(10000), Re_λ ~ 250) l'exposant de $E(\kappa) \sim \kappa^{-p}$ peut être plus faible p ~ 1.5 au lieu de 5/3 (~1.67)
- La théorie de Kolmogorov considère une cascade d'énergie uniquement des grandes vers les petites échelles
  - En pratique, des phénomènes de cascade inverse (backscatter) sont observes d'un point de vue expérimental, bien que statistiquement la cascade directe domine largement
    - Rappel : on génère des harmoniques à plus grand nombre d'onde <u>mais aussi</u> à plus petit nombre d'onde (coalescence de structures)
  - Les structures turbulentes sont vue comme complètement aléatoire : en pratique des structures dites “cohérentes” existent
- La théorie de la turbulence est encore un domaine de recherche très actif
  - Approches expérimentales supportées par des simulations numériques massives

Next time...

- TP Turbulence homogène isotrope (Aurélien BIENNER)
- Dans le prochain cours (17 novembre) on s'intéressera à la turbulence cisaillée, d'abord libre, puis avec parois.
- TD turbulence de paroi.