

MU4MEM01

Mécanique des Milieux Continus Fluides

Régis Wunenburger

25 novembre 2020

Table des matières

Table des matières	1
1 Introduction	3
I Milieu continu	3
II Forces	8
III Equations bilan	12
IV Conditions aux limites...	14
V Ecoulements isovolumes	15
VI Enjeu de l'UE	17
2 Analyse dimensionnelle	23
I Quelques définitions	23
II Analyse dimensionnelle (AD)	25
III Application à la construction de solutions auto-similaires	28
IV Limites de l'analyse dimensionnelle	34
3 Invariance d'échelle	37
I Analyse dimensionnelle et invariance de groupe	37
II Invariance d'échelle	39

4	Analyse en ordre de grandeur et analyse physique	47
I	Introduction	47
II	Adimensionnement	49
III	Simplifications automatiques du problème	56
IV	Analyse physique et analyse en ordre de grandeur	57
5	Problèmes singuliers - Solutions raccordées	65
I	Problèmes réguliers, problèmes singuliers	65
II	Problème singulier et sa solution approchée raccordée sur un exemple . . .	65
III	Résolution par la méthode des DAR	67
6	La couche limite visqueuse à $Re \gg 1$	75
I	Equations de couche limite	75
II	Solution invariante d'échelle : solution de Blasius	85
III	Trainée visqueuse	89

Chapitre 1

Introduction

Objectifs de l'UE :

- se doter d'outils pour résoudre des problèmes complexes de mécanique des fluides incompressibles
- mettre en évidence l'existence des couches limites visqueuses, étudier leurs propriétés, discuter leurs conséquences sur les écoulements à Re élevé
- les outils développés pourront servir à la résolution de problèmes dans différentes branches de la physique : mécanique du solide et fracture, thermique, acoustique, combustion, mécanique des fluides compressibles, ... le contenu de l'UE dépasse le cadre de la mécanique des fluides incompressibles.

I Milieu continu

Objets d'étude - Dans ce cours nous nous intéresserons à l'écoulement de **fluides simples**, c'est-à-dire formés de petites molécules. L'air et l'eau en sont deux exemples typiques d'une grande importance dans la vie quotidienne. Tous les gaz purs et les mélanges gazeux, la plupart des solutions aqueuses peu concentrées ainsi que les huiles entrent dans la catégorie des fluides simples. Comme nous le détaillerons dans ce cours, l'écoulement de ces fluides peut être entièrement décrit dès lors que l'on connaît trois de leurs propriétés : leur masse volumique, leur compressibilité et leur viscosité. Ces fluides simples sont appelés des **fluides newtoniens**.

Par contraste, on appelle **fluides complexes** les fluides qui présentent une microstructure à des échelles intermédiaires entre l'échelle moléculaire et les échelles macroscopiques, qui résulte des interactions spécifiques entre entités (interactions électrostatiques, stériques, visco-élasticité, frottement solide) :

- fluides alimentaires et industriels (miel, ketchup, peintures, shampoings, savons liquides)
- fluides biologiques (sang, mucus)
- fluides géologiques (laves, boues, sables secs et humides, avalanches de neige...)

La description de leur écoulement n'obéit que de manière approchée au modèle newtonien car certains aspects de leur comportement sous écoulement sont dus à leur microstructure spécifique. L'étude de l'écoulement de ces fluides sort du cadre de ce cours.

Vocabulaire - L'aérodynamique concerne l'écoulement de l'air, tandis que l'hydrodynamique concerne l'écoulement de l'eau. L'usage de ces deux termes est principalement lié à leurs applications industrielles, les avions pour l'air, les bateaux et sous-marins pour l'eau. Mais les écoulements de l'air et de l'eau sont décrits par le même modèle, celui de la mécanique des milieux continus.

I.1 Propriétés des fluides

a) Solides, liquides, gaz

Point de vue macroscopique - D'un point de vue macroscopique, les solides possèdent une forme propre et ne s'écoulent pas, tandis que liquides et gaz n'ont pas de forme propre et s'écoulent. Liquides et gaz épousent la forme des récipients qui les contiennent mais les liquides n'occupent pas tout le volume qui leur est offert, tandis que les gaz occupent tout le volume qui leur est offert.

Point de vue microscopique - On rappelle que l'échelle microscopique correspond aux dimensions caractéristiques des atomes et molécules qui sont de l'ordre de l'Angström : $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$.

D'un point de vue microscopique, dans un solide, les atomes ou molécules qui le composent sont animés d'un mouvement vibratoire incessant (d'origine thermique) mais ne changent pas de voisins, ni lorsque le solide est non déformé, ni lorsque celui-ci est déformé dans le régime élastique.

Au contraire, au sein d'un fluide, les atomes ou molécules qui le composent sont en mouvement incessant (c'est l'agitation thermique) et désordonné à cause de leurs interactions (mouvement brownien) et changent en permanence de voisins, même lorsque le fluide ne s'écoule pas en présentant un mouvement d'ensemble (ceci explique que le thé diffuse dans une tasse non remuée). Il faut donc distinguer le mouvement moléculaire du mouvement macroscopique du fluide, qui est le mouvement d'ensemble observé à l'échelle d'observation humaine.

b) Phases condensées, phases diluées

Solides et liquides sont des phases condensées au sens où la distance inter-moléculaire est comparable à la taille des molécules. En conséquence, ils sont très faiblement compressibles car les molécules sont impénétrables. La masse volumique des phases condensées vaut $10^3 - 10^4\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Les gaz constituent une phase diluée, c'est-à-dire peu dense, au sens où la distance inter-moléculaire moyenne est bien plus grande que la taille des molécules. Dans l'air dans les CNTP¹, cette distance vaut 3 nm, soit de l'ordre d'une dizaine de fois la taille des molécules. En conséquence, la masse volumique des gaz varie fortement avec leur pression et leur température et. Dans les CNTP, la masse volumique de l'air vaut $1,3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1. **Conditions Normales de Température et de Pression (CNTP)** : $T = 300\text{ K}$, $P = 1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$

c) Libre parcours moyen

Les interactions entre molécules étant attractives et décroissant rapidement en intensité avec la distance entre molécules, dans les phases condensées, les molécules sont en interaction attractive forte du fait de leur proximité.

Au contraire, dans les phases diluées, les molécules sont pratiquement sans interactions du fait de leur éloignement, sauf lors de collisions au cours desquelles elles échangent énergie et quantité de mouvement. Du fait de leurs interactions presque toujours nulles, les gaz dilués obéissent au modèle de gaz parfait étudié en Mécanique-Physique 1. La distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions est appelée **libre parcours moyen**. Il est de l'ordre de 100 nm dans l'air dans les CNTP.

I.2 Le modèle de milieu continu

a) Particule fluide

Expérimentalement, on constate que dans la plupart des écoulements rencontrés dans la vie courante (par exemple dans le cas de l'écoulement d'un robinet), le mouvement d'un fluide varie :

- sur des distances caractéristiques (le diamètre d'un robinet, de l'ordre du centimètre) très grandes devant (i) la distance moyenne entre deux molécules, (ii) le libre parcours moyen,
- sur des temps caractéristiques (le temps de chute de l'eau dans l'évier, de l'ordre de la seconde) très grands devant le laps de temps entre deux collisions.

Pour décrire le mouvement d'ensemble du fluide, on n'a donc pas besoin de décrire les trajectoires de toutes les molécules composant ce fluide, il suffit de décrire son mouvement moyenné sur un grand nombre de molécules. La modélisation du fluide qui tient compte de ces observations consiste à abandonner la description microscopique du fluide (fluide comme un ensemble de molécules) et d'adopter une description du fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique (la molécule) et l'échelle macroscopique (le diamètre du robinet), l'échelle **mésoscopique** : le fluide est décrit comme un ensemble de **Particules Fluides**.

Particule Fluide (PF) : une Particule Fluide est un ensemble de molécules identifiées par la pensée (coloriées en bleu sur la figure 1.1) qui sont celles contenues initialement dans le volume $V \sim L^3$ où :

- L est **très petite** devant la distance caractéristique sur laquelle varie la vitesse du fluide (le diamètre du robinet) : la taille du "pixel" de résolution de l'image du mouvement du fluide est petite devant les détails de son mouvement. On décrit donc précisément le mouvement du fluide.
- L est **très grande** devant la distance moyenne entre molécules. Il y a donc dans V un grand nombre de molécules. Les grandeurs moyennées sur V que nous définirons sont donc calculées sur un grand nombre de molécules, ce qui permet d'utiliser les résultats de la thermodynamique.

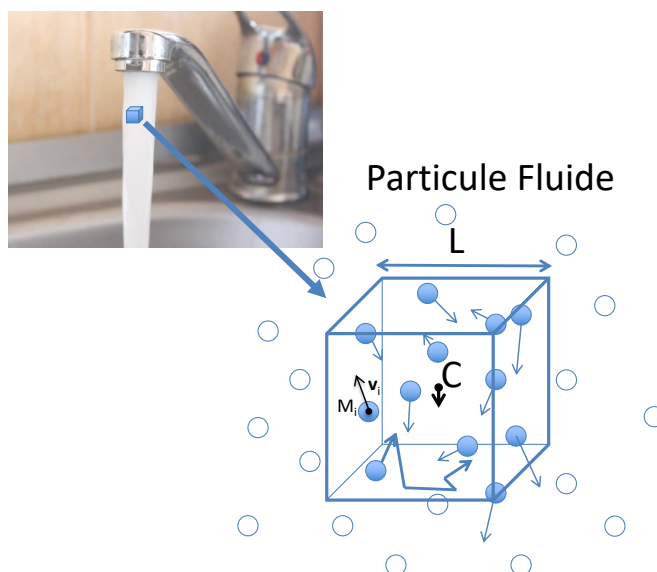


FIGURE 1.1 –

- L est **très grande** devant le libre parcours moyen des molécules. Il y a donc dans la PF un grand nombre de molécules en interaction qui se transmettent de proche en proche les variations de vitesse et de température imposées par l'écoulement. Cela a donc un sens de définir une vitesse moyenne et une température moyenne de l'ensemble des molécules contenues dans la PF puisqu'elles y échangent quantité de mouvement et énergie lors de nombreuses collisions.

Remarques :

- Dans la pratique, une PF définie à un instant t donné se déforme rapidement dans un écoulement, ce qui empêche de la suivre longtemps (cf. film *incomp-fluid-element* : déformation des PF dans un resserrement²). On pourra donc lui appliquer les principes de la mécanique et de la thermodynamique entre les instants t et $t + \delta t$, où δt est un laps de temps suffisamment court pour que la PF ne soit pas disloquée sur ce laps de temps.
- Comme les molécules d'une PF sont identifiées par la pensée, une PF est par définition un **système fermé**, c'est-à-dire qui n'échange pas de matière avec l'extérieur. Sa masse est donc constante. Seul son volume peut varier au cours de son déplacement.

2. Dans ce film d'un écoulement plan dans un canal présentant un resserrement en aval vu du dessus, les PF sont matérialisées par de toutes petites bulles de gaz créées en amont dans l'eau par oxydo-réduction qui réfléchissent la lumière en direction de la caméra, d'où leur aspect blanc. Ces bulles permettent de visualiser les PF au sein desquelles elles sont transportées. On constate que les PF sont bien observables, qu'elles peuvent être suivies dans leur mouvement, et qu'elles se déforment dans le resserrement.

b) Propriétés du fluide définies à l'échelle de la PF

Pour décrire le mouvement et les propriétés du fluide, on définit donc des grandeurs définies à l'échelle de la particule fluide :

- vitesse, accélération
- masse volumique
- pression, température...

Position d'une PF : c'est le centre de masse C de l'ensemble des molécules $\{M_i\}$ de masses $\{m_i\}$ composant la particule fluide (voir la figure 1.1) :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

Vitesse \vec{v} de la PF : c'est la moyenne des vitesses \vec{V}_i des molécules composant la particule fluide, c'est-à-dire la vitesse de leur centre de masse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i}$$

Accélération \vec{a} de la PF : c'est l'accélération de son CM :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}$$

Remarque : Compte tenu de ces définitions, dans un **fluide au repos** :

- toutes les particules fluides sont immobiles.
- Par contre, les molécules sont toujours individuellement en mouvement rapide (agitation thermique).

Masse volumique : La masse volumique ρ d'un fluide au point M à l'instant t est la masse de la PF centrée sur M à l'instant t divisée par le volume V de la PF (voir la figure 1.1).

$$\rho = \frac{\sum_i m_i}{V}$$

Pression, température : Un fluide en écoulement ne se trouve globalement pas en équilibre thermodynamique puisqu'il échange de l'énergie avec l'extérieur. Mais l'expérience montre que dans la plupart des écoulements rencontrés dans la vie courante, chacune des PF évolue sans jamais s'écarter notablement d'un état d'équilibre thermodynamique si bien qu'on peut considérer que tout se passe comme si chaque PF se déplaçait en restant à l'équilibre thermodynamique : c'est l' **hypothèse d'équilibre thermodynamique local** (ETL). En conséquence :

- On peut alors attribuer à chaque PF une température et une pression, dont la définition requiert l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, au contraire de l'énergie et de la masse de la PF, qui sont définies à l'équilibre et hors équilibre. Ces valeurs de la température et de la pression possèdent une signification locale et sont susceptibles de varier au cours du mouvement des PF.
- les transformations que subissent les PF sont considérées comme **quasistatiques**.
- La masse volumique, la pression et la température d'un fluide sont liées entre elles par l'équation d'état du fluide $\rho = \rho(P, T)$.

Modèle de milieu continu - Dans le cadre de cette description de l'écoulement d'un fluide à l'échelle mésoscopique, en tout point d'un fluide repéré par le vecteur \vec{r} et à tout instant t il est donc possible de définir la masse volumique, la vitesse, la pression, la température du fluide comme celles de la PF située en \vec{r} à cet instant t . Les propriétés d'un fluide ne sont donc plus celles des molécules discrètes mais des champs des variables continues d'espace et de temps. Le fluide est donc décrit comme un **milieu continu**.

II Forces

Les forces qui s'exercent au sein des fluides peuvent être classées en deux catégories :

- les forces s'exerçant à distance : nous ne considérerons que le poids, c'est-à-dire l'attraction gravitationnelle de la Terre³.
- les forces de contact, c'est-à-dire des forces qui n'existent qu'entre des corps en contact l'un avec l'autre. Dans les fluides, les corps en contact peuvent être deux PF voisins ou une PF et une paroi solide. Ces forces de contact se subdivisent en trois types :
 - les forces de pression : elles sont présentes que le fluide soit au repos ou qu'il s'écoule.
 - les forces visqueuses, qui n'apparaissent qu'au sein d'un fluide en écoulement. Ces forces s'ajoutent aux forces de pression.
 - les forces exercées par une paroi solide sur le fluide à son contact⁴.

II.1 Forces de pression

Définition : au sein de tout fluide, au repos ou en mouvement, la PF 1 en contact avec la PF 2 le long de la surface d'aire dS (voir la figure 1.2 a) exerce sur celle-ci une force $\vec{dF}_{1 \rightarrow 2}$:

- normale à cette surface (donc parallèle à $\vec{dS}_{1 \rightarrow 2}$)
- orientée de l'intérieur vers l'extérieur de la PF 1

3. Il n'est en effet pas nécessaire d'être en contact avec la Terre pour subir son attraction : voir la chute libre!

4. Ces forces sont souvent déterminées en déterminant d'abord les forces exercées par le fluide sur la paroi solide et en utilisant le principe action-réaction.

- d'intensité $\|\vec{dF}\| = P dS$. P est la pression du fluide le long de la surface de contact entre PF1 et PF2.

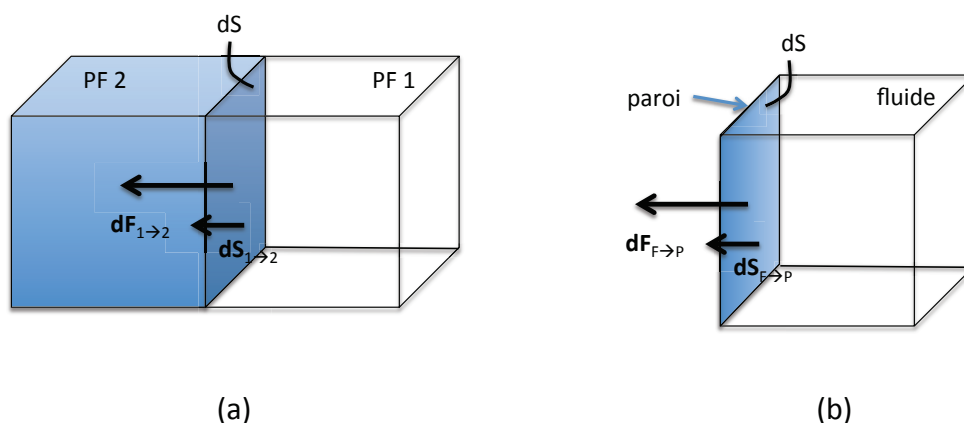


FIGURE 1.2 – (a) Force de pression exercée par une PF sur une autre PF à son contact. (b) Force de pression exercée par une PF sur une paroi solide à son contact.

P est homogène à une force par unité de surface. Elle s'exprime en $N \cdot m^{-2}$, ou de manière équivalente en Pascal (Pa) : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot m^{-2}$.

Remarques :

- ces forces de pression ont pour origine les collisions entre des molécules de la PF 1 et des molécules de la PF2 qui se produisent au très proche voisinage de leur surface de contact.
- La pression peut être non seulement inhomogène, c'est-à-dire dépendre de la position dans le fluide, mais aussi instationnaire lorsque le fluide s'écoule, c'est-à-dire dépendre aussi du temps : $P = P(\vec{r}, t)$. Mais compte tenu de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, la pression vérifie en permanence et partout une équation d'état caractéristique du fluide, que celui-ci soit au repos ou en mouvement : $P = P(\rho, T)$.
- Tant que l'interface entre deux fluides n'est pas trop courbée et que l'on peut donc négliger les effets de la tension de surface, la pression est la même de part et d'autre d'une interface entre deux fluides.

Propriété : Considérons une portion de paroi solide d'aire dS en contact avec une PF à la pression P (voir la figure 1.2 b). La paroi subit de la part de la PF une force de pression $\vec{dF}_{F \rightarrow P}$:

- normale à cette surface
- orientée de la PF vers la paroi
- d'intensité $\|\vec{dF}_{F \rightarrow P}\| = P dS$.

Par principe action-réaction, la paroi exerce sur la PF à son contact la force opposée : $\vec{dF}_{P \rightarrow F} = -\vec{dF}_{F \rightarrow P}$.

II.2 Forces visqueuses

Les forces visqueuses n'apparaissent qu'au sein d'un fluide en écoulement. Elles sont mises clairement en évidence par l'expérience de l'écoulement de Couette plan.

Écoulement de cisaillement de Couette plan - Cette expérience consiste à déplacer une plaque de surface S à vitesse \vec{U} constante parallèlement à une paroi immobile (voir Figure 1.3), l'espace entre les deux plaques étant rempli par un fluide.

- Au bout d'un certain temps⁵, un profil de vitesse stationnaire parallèle⁶ linéaire s'établit dans le fluide :

$$\vec{v}(y) = \frac{Uy}{a} \vec{e}_x : \text{écoulement de cisaillement}$$

- On constate que la vitesse du fluide au contact de chaque paroi est égale à la vitesse de la paroi.
- Pour maintenir la plaque en mouvement uniforme, il faut lui appliquer une force horizontale. Cette force compense la force de frottement visqueux \vec{F} exercée par le fluide sur la plaque et qui est opposée à \vec{U} :

$$\vec{F} = -\eta S \frac{\vec{U}}{a}$$

- η est appelée **viscosité dynamique du fluide**⁷
 $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, s'exprime en Pa.s dans le système international.
 $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3}$ Pa.s, $\eta_{\text{air}} = 2.10^{-5}$ Pa.s dans les CNTP
- La paroi en mouvement est freinée par le fluide. Par principe action-réaction, la paroi exerce sur le fluide à son contact la force $-\vec{F}$: elle entraîne le fluide dans la direction de son mouvement.
- Forces visqueuses et adhérence aux parois sont deux conséquences de la viscosité du fluide.

Forces visqueuses au sein du fluide

- Des forces visqueuses s'exercent aussi localement au sein du fluide en écoulement quel que soit son profil de vitesse : considérons deux PF en contact au sein d'un écoulement parallèle de cisaillement : la force visqueuse exercée par la PF 1 sur la

5. La durée du régime transitoire est d'autant plus courte que la viscosité du fluide est grande. Le régime transitoire s'observe sur les films 1_04010, 1_04015.

6. Un écoulement parallèle est un écoulement dont les lignes de courant sont parallèles.

7. La viscosité dynamique (du grec dynamis : puissance, force) relie une force à une vitesse.

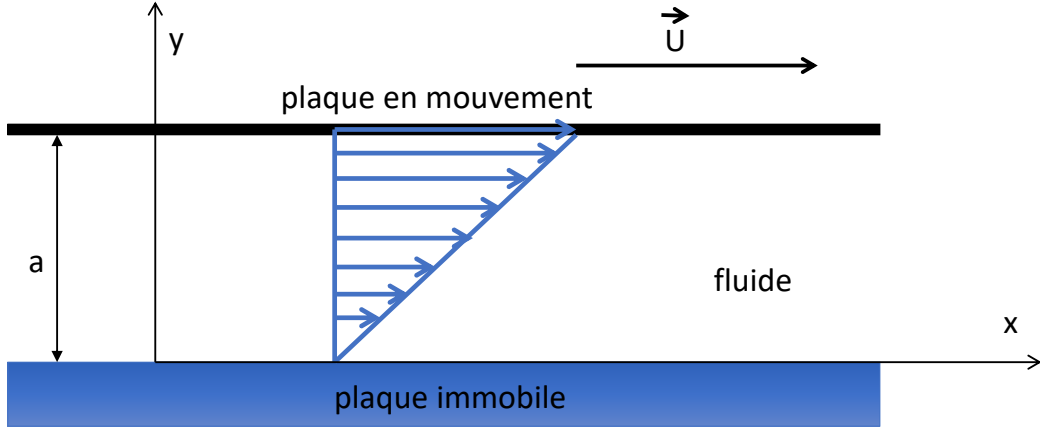


FIGURE 1.3 – Écoulement de cisaillement de Couette plan

PF 2 à son contact le long de la surface d'aire dS , représentées sur la figure 1.4, lorsque deux PF glissent l'une sur l'autre est :

$$\vec{dF}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{d_{1-2}} dS$$

La PF1 freine la PF2, tandis que par principe action-réaction, la PF2 entraîne la PF1 dans son mouvement.

- Comme les forces de pression, les forces visqueuses ont pour origine microscopique les collisions entre les molécules le long de la surface de contact entre PF ou le long de la paroi solide en contact avec le fluide, cf figure 1.4.
- Pour des écoulements à géométrie plus complexe, les forces visqueuses ne sont pas forcément tangentes aux surfaces de contact.
- Au sein d'un écoulement, les forces visqueuses s'ajoutent aux forces de pression.

II.3 Formalisme tensoriel

En écoulement, les forces de pression et les forces visqueuses s'additionnent. Le formalisme classique pour exprimer ces forces est le formalisme tensoriel. En notant \underline{T} la contrainte exercée sur un volume de fluide dV le long d'une surface de normale \underline{n} orientée vers l'extérieur de dV :

$$\underline{T} = \frac{d\underline{F}}{dS} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

où $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes. De manière générale,

$$\underline{\sigma} = f(\underline{\varepsilon}, \underline{\dot{\varepsilon}}, \dots) \text{ avec } \underline{\varepsilon} \text{ tenseur des déformations du fluide}$$

où f est une fonction qui dépend des propriétés rhéologiques du fluide.

Pour un fluide newtonien :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1} + \lambda (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{1} + 2\mu \underline{D}$$

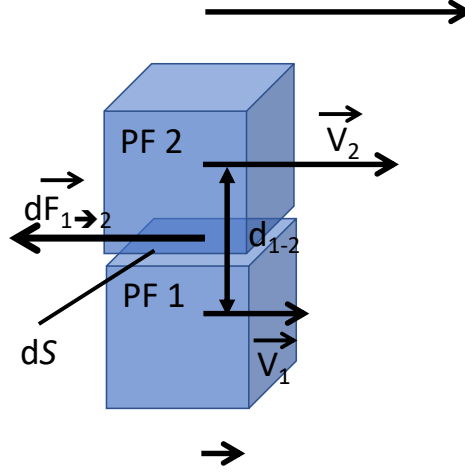


FIGURE 1.4 – Forces visqueuses s'exerçant entre deux PF en contact au sein d'un écoulement.

où $\underline{\underline{1}}$ est le tenseur identité, μ est la viscosité dynamique de cisaillement et $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$ où ζ est la viscosité de volume,

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla v}} + {}^t \underline{\underline{\nabla v}} \right), \quad \underline{\underline{\nabla v}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \text{ étant le tenseur des taux de déformation}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

λ et μ sont des analogues aux coefficients de Lamé mais ne leur sont pas homogènes !

III Equations bilan

On considère un fluide newtonien, pur (composé d'une seule espèce chimique), ou un mélange qui ne présente pas de gradients de concentration (de l'air par exemple). Sa composition est entièrement décrite par sa masse volumique.

III.1 Conservation de la matière

La conservation de la matière s'écrit localement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}} \cdot (\rho \underline{\underline{v}}) = 0$$

Comme $\underline{\underline{\nabla}} \cdot (\rho \underline{\underline{v}}) = \rho \underline{\underline{\nabla v}} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla \rho}}$, cette égalité se réécrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} = 0$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}$ est la dérivée particulaire / totale / en suivant le fluide. Cette égalité se réécrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

Considérons une particule fluide de masse fixée m , de volume $V(t)$: sa masse volumique est : $\rho = \frac{m}{V}$; en dérivant par rapport au temps cette quantité en suivant la particule fluide, $\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{m}{V^2} \frac{DV}{Dt}$, soit : $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt}$. Donc :

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

III.2 Bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement du fluide s'écrit :

$$\rho \underline{\gamma} = \rho \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma}$$

où $\underline{\gamma} = \frac{D\underline{v}}{Dt}$ est la dérivée temporelle de la vitesse du fluide en suivant le fluide, c'est-à-dire l'accélération de la PF, et \underline{g} l'accélération de la pesanteur. C'est l'équation de Navier-Stokes compressible.

III.3 Bilan d'énergie

En notant u l'énergie interne massique du fluide, le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \underline{\nabla} \cdot \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \underline{v} \right] = \underbrace{\rho \underline{g} \cdot \underline{v}}_{\text{puissance du poids}} + \underbrace{-\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_Q}_{\text{puissance thermique fournie par conduction}} + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v})}_{\text{puissance des forces de contact}} + \underbrace{\Phi}_{\text{source locale d'énergie}}$$

où :

- u obéit à une équation d'état dont la forme différentielle s'écrit : $du = c_v dT + l d(1/\rho)$, c_v capacité thermique à volume constant et $l = T \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho$
- $\frac{v^2}{2}$ est l'énergie cinétique massique du fluide
- $u + \frac{v^2}{2}$ est l'énergie totale massique du fluide
- $\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \underline{v}$ est le vecteur densité de courant d'énergie au sein du fluide
- \underline{j}_Q est le vecteur densité de courant de chaleur qui obéit à la loi de Fourier qui relie la conduction de la chaleur au gradient local de température : $\underline{j}_Q = -\kappa \underline{\nabla} T$ où κ est la conductivité thermique du fluide
- Φ est le taux d'apport de chaleur local, par réaction nucléaire, ou réaction chimique, comme la combustion, ou par absorption de rayonnement électro-magnétique.

IV Conditions aux limites...

IV.1 ... portant sur la vitesse

Considérons la situation où le fluide est en contact avec une paroi solide.

a) Imperméabilité

Si le fluide est en contact avec une paroi solide imperméable : il ne peut ni pénétrer la paroi, ni créer du vide entre lui et la paroi, donc la composante de sa vitesse perpendiculairement à l'interface doit être égale à la composante de la vitesse du solide perpendiculairement à la paroi :

$$\underline{v}|_{\text{à la paroi}} \cdot \underline{n} = \underline{U}_{\text{solide}} \cdot \underline{n}$$

avec \underline{n} le vecteur perpendiculaire à l'interface.

Si le solide est immobile dans le référentiel d'étude : $\underline{U}_{\text{solide}} = \underline{0}$, la condition d'imperméabilité s'écrit :

$$\underline{v}|_{\text{à la paroi}} \cdot \underline{n} = 0$$

b) Adhérence visqueuse

Le fluide ne peut pas glisser le long d'une paroi solide à cause de sa viscosité qui interdit toute discontinuité de la vitesse. Ceci impose l'égalité des composantes tangentielles de la vitesse du fluide à l'interface et de la paroi :

$$\underline{u}_t|_{\text{à la paroi}} = \underline{U}_{t,\text{solide}}$$

où $\underline{u}_t = \underline{u} - (\underline{u} \cdot \underline{n})\underline{n}$ est la composante de la vitesse tangente à la surface de normale \underline{n} .

Si le solide est immobile dans le référentiel d'étude : $\underline{U}_{\text{solide}} = \underline{0}$, la condition d'adhérence s'écrit :

$$\underline{u}_t|_{\text{à la paroi}} = \underline{0}$$

L'addition de ces deux conditions s'écrit finalement de manière compacte sous la forme :

$$\boxed{\underline{v}|_{\text{à la paroi}} = \underline{U}_{\text{solide}}}$$

Ces résultats sont aussi valables dans le cas d'une interface entre deux fluides non miscibles en remplaçant $\underline{U}_{\text{solide}}$ par $\underline{u}_{\text{autre fluide}}|_{\text{à l'interface}}$.

c) Continuité de la contrainte

A l'interface entre deux fluides 1 et 2, en négligeant l'effet de la tension interfaciale, la contrainte est continue à la traversée de l'interface de normale \underline{n} , ce qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^1|_{\text{à l'interface}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^2|_{\text{à l'interface}} \cdot \underline{n}$$

En particulier, si par exemple un fluide dense et visqueux comme de l'eau et en contact avec de l'air atmosphérique P_a , gaz peu dense et peu visqueux, on pourra négliger les effets

de l'inertie et de la viscosité de l'air sur la dynamique de l'eau, c'est-à-dire considérer que tout se passe comme si l'eau était en contact avec du "vide à la pression P_a " : **approximation de la surface libre** (signifie : libre de toute contrainte) : la condition de continuité de la contrainte à une surface libre se traduira alors simplement par :

$$\underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}^1 \Big|_{\text{à l'interface}} \cdot \underline{n} \right) = P_a$$

et :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}^1 \Big|_{\text{à l'interface}} \cdot \underline{n} \right)_t = 0$$

IV.2 ... portant sur l'énergie

- Il y a continuité de la température aux frontières du fluide.
- En absence de changement de phase aux frontières du fluide, il ya continuité de \underline{j}_Q aux frontières du fluide.

IV.3 Considérations mathématiques

Le fluide étant défini par deux équations d'état et trois coefficients de transport, ses viscosités de cisaillement et de volume et sa conductivité thermique (qui décrivent respectivement le transport de diffusif de quantité de mouvement et de chaleur), son écoulement est donc *a priori* décrit par 7 champs : \underline{v} (vecteur à 3 composantes), p , ρ , T , u . 7 équations relient ces champs : l'équation de Navier-Stokes compressible (constituant 3 edp), la conservation de la matière, l'équation-bilan de l'énergie (où \underline{j}_Q s'exprime en fonction de T via la loi de Fick), l'équation d'état $p = p(\rho, T)$, et l'équation d'état définissant u . Il y a donc bien autant de relations que de champs inconnus.

V Ecoulements isovolumes

Un écoulement est isovolume si les particules fluides évoluent sans changer de volume.

V.1 Critère

Pour établir un critère simple, considérons un écoulement approximativement isovolume stationnaire parfait, c'est-à-dire tel que les effets de la viscosité y sont négligeables. Il vérifie approximativement au premier théorème de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante le long de toute ligne de courant}$$

où ρ est la valeur moyenne de la masse volumique du fluide. Cette égalité montre que les variations de pression le long d'une ligne de courant, notées δp , sont telles que :

$$\delta p \simeq \rho v^2$$

Par ailleurs, les (faibles) variations de masse volumique sont reliées aux variations de pression par une équation d'état dont une des formes s'écrit :

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = c^2$$

où c est la vitesse de propagation des ondes acoustiques. En combinant ces deux égalités,

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \simeq \frac{v^2}{c^2}$$

Comme $\left| \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right| = \left| \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} \right|$,

$$\frac{\delta V}{V} \simeq \frac{v^2}{c^2}$$

Les variations relatives de volume des particules fluides sont donc d'autant plus faibles que le nombre de Mach $\text{Ma} = \frac{v}{c}$ est petit, v étant la vitesse moyenne de l'écoulement. Un écoulement est donc approximativement isovolume si le nombre de Mach associé est petit devant l'unité. Compte tenu de $c_{\text{eau}} = 1,5 \text{ km/s}$ et $c_{\text{air}} = 340 \text{ m/s}$, on constate que de nombreux écoulements de la vie courante peuvent être considérés comme isovolumes.

V.2 Conséquences

Dans l'hypothèse $\text{Ma} \ll 1$, on peut supposer $\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = 0$. Comme $\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$, cela se traduit par $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$.

La propriété des écoulements isovolumes est donc : $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$

Cette égalité simplifie considérablement les équations décrivant l'écoulement :

- pour un fluide de composition homogène, ρ perd son statut de variable et devient une constante. Corrélativement, l'équation d'état définissant p n'est plus pertinente car on néglige la dépendance de p avec ρ
- la conservation de la matière s'écrit : $\left(\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \right) \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$
- comme $\underline{\sigma}$ se simplifie en $\underline{\sigma} = -p \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$, l'équation de Navier-Stokes isovolume ne dépend plus de la viscosité de volume et s'écrit :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p + \mu \Delta \underline{v}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. Le champ de vitesse du fluide n'est pas influencé par le transfert thermique.

- l'équation d'état définissant u se simplifie en : $du = c_V dT$
- le bilan d'énergie peut se réécrire :

$$\frac{Du}{Dt} = c_V \frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T + 2\mu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} + \Phi$$

Le problème dynamique (\underline{v}, p) et le problème thermique (T) sont donc découplés. Une fois le problème dynamique résolu, on peut résoudre le problème thermique.

V.3 Considérations mathématiques

Le fluide étant maintenant simplement défini par sa masse volumique et sa viscosité dynamique de cisaillement, le problème dynamique est décrit par 4 champs (\underline{v}, p) qui obéissent à $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$ et à l'équation de Navier-Stokes isovolume, soit 4 edp. Il y a donc bien autant de relations que de champs inconnus.

Une fois le problème dynamique résolu, en ayant c_V et κ , on peut alors résoudre le problème thermique qui est décrit par un seul champ T et qui obéit à une seule équation-bilan d'énergie.

V.4 Cas particulier des écoulements parfaits

Un écoulement parfait est un écoulement dans lequel les processus irréversibles que sont la diffusion visqueuse de quantité de mouvement, et la diffusion de chaleur par conduction thermique, peuvent être négligés : $\mu = 0$, $\kappa = 0$. C'est une approximation dont nous contrôlerons le domaine de validité spatial et temporel. Le problème s'écrit :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p \text{ équation d'Euler}$$

La viscosité étant considérée comme nulle, le glissement du fluide le long des parois solides est possible, si bien que la condition aux limites portant sur la vitesse le long des parois solides imperméables se limite à :

$$\underline{v}|_{\text{à la paroi}} \cdot \underline{n} = \underline{U}_{\text{solide}} \cdot \underline{n}$$

Enfin, l'équation-bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{Du}{Dt} = 0 \text{ en absence de source de chaleur } (\Phi = 0)$$

$u(T)$ est donc constante le long de chaque trajectoire.

VI Enjeu de l'UE

VI.1 Problème de départ (D)

Problème concerne les 4 inconnues \underline{v} , p , fonction des quatre variables \underline{x} , t , liées par les 4 équations aux dérivées partielles : l'équation de Navier-Stokes (NS), qui non-linéaire, et $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$: pas de solution générale connue.

L'enjeu de l'UE est de se doter de méthodes de résolution approchées du problème de départ dans les situations où aucune solution exacte n'est disponible.

Parfois, on peut se contenter de déterminer des grandeurs caractéristiques de l'écoulement (ex : débit), ou ses conséquences (ex : perte de charge, trainée, portance), plutôt que de résoudre les champs \underline{v} , p .

VI.2 Méthodes de résolution

Pour résoudre le problème posé dans les situations où aucune solution exacte n'est disponible, on a développé de nombreuses méthodes de résolution, exacte ou approchée, adaptées aux types de situations étudiées. Nous allons en découvrir quelques unes dans cette UE :

- recherche de la forme a priori de la solution (S) du problème de départ (D) que l'on exprime en fonction des paramètres décrivant les processus à l'oeuvre par la méthode de l'**analyse dimensionnelle** : chapitre 1
- éventuellement, simplification supplémentaire de la forme a priori de la solution en cherchant si la solution est invariante par changement d'échelles (on dit aussi : invariante d'échelle, ou auto-semblable, ou auto-similaire) : plus précisément en cherchant le groupe de changements d'échelle le plus grand qui laisse (S) invariante : groupe d'invariance : **recherche de solution invariante d'échelle** : chapitre 2
- analyse physique du problème : identification des causes (moteur) de l'écoulement, de ses limitations (freins), de ses conséquences, hiérarchisation des processus selon leur importance relative pour simplifier le problème : identification d'un problème approché n'impliquant que les processus dominants et recherche de la solution approchée correspondante : **analyse physique** : chapitre 3

Dans de nombreuses situation d'intérêt pratique, certains nombres sans dimension caractérisant l'écoulement présentent des valeurs très petites ou très grandes devant l'unité, ce que nous allons pouvoir exploiter pour simplifier le problème de départ :

- objets beaucoup plus longs que larges : carène d'un navire, fuselage d'un avion, section d'une aile, interstice entre deux pièces mécaniques en mouvement relatif, canalisation de longueur grande devant son diamètre, ... il y a une différence d'ordre de grandeur entre les différentes échelles spatiales caractérisant l'écoulement. Leur rapport (rapport d'aspect), nombre sans dimension, est petit devant l'unité : on parle de **séparation d'échelle**. Plusieurs exemples d'objets à petit rapport d'aspect sont représentés sur la figure 1.5.
- écoulements tels que le nombre de Reynolds associé, qui mesure en ordre de grandeur l'importance relative des forces visqueuses et de l'inertie du fluide, est grand, ou petit devant l'unité
- ...

Lors de l'analyse physique, les valeurs extrêmes de ces nombres sans dimension peuvent être exploitées pour simplifier (D).

VI.3 Perturbation régulière, singulière

Schématiquement, le problème de départ auquel on s'intéresse est caractérisé par un petite grandeur sans dimension (appelé aussi paramètre) $\varepsilon \ll 1$, on peut écrire symboliquement :

$$(D) = (D_0) + \varepsilon(D_1)$$

où (D_0) est le problème dans lequel n'apparaissent que les termes prépondérants, et $\varepsilon(D_1)$ est une petite correction à (D_0) : **une petite perturbation**. de (D_0) .

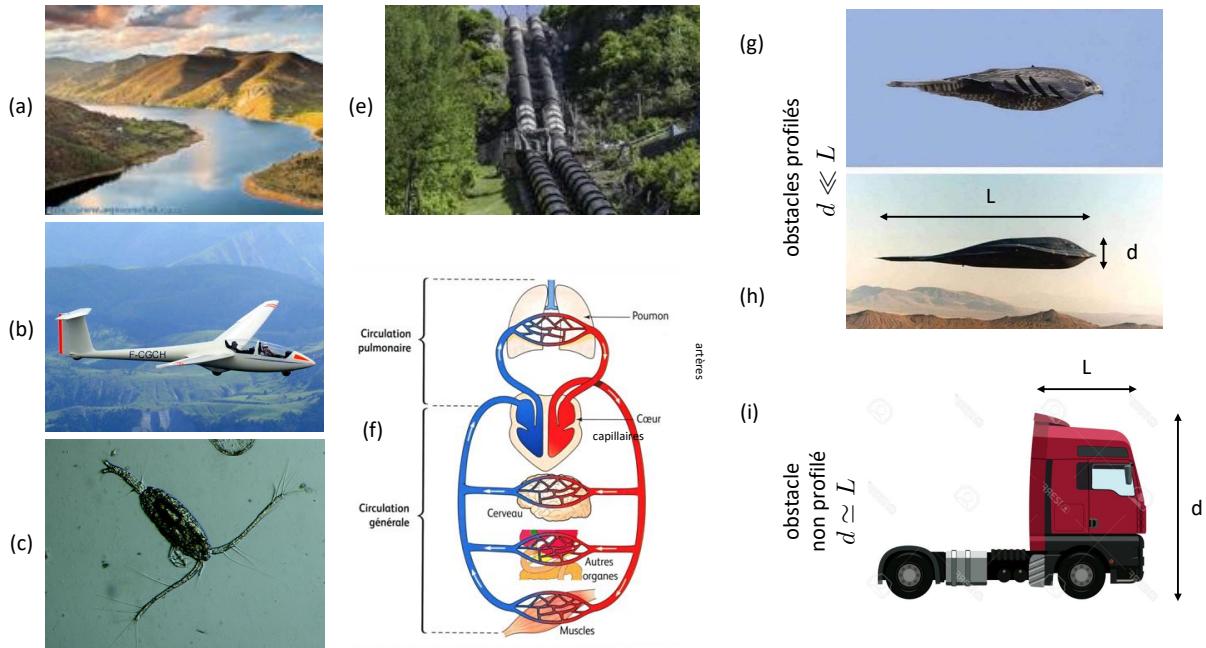


FIGURE 1.5 – (a) fleuve à $Re \gg 1$ et de longueur \gg sa largeur. (b) planeur à $Re \gg 1$ dont le fuselage est de longueur \gg à son diamètre. (c) plancton à $Re \ll 1$. (d) conduite d'adduction de l'eau d'un barrage vers la centrale hydroélectrique à $Re \gg 1$ et de longueur \gg son diamètre. (e) schéma de la circulation sanguine de longueur \gg diamètre des conduits. (f) rapace en piqué à $Re \gg 1$ et de longueur \gg sa hauteur. (g) bombardier B2 à $Re \gg 1$ et de longueur \gg sa hauteur. (h) cabine de camion à $Re \gg 1$ mais non profilé.

a) Perturbation régulière

(D) étant proche de (D_0) , on peut supposer que sa solution (S) est proche de (S_0) solution de (D_0) , c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire comme une perturbation de la solution (S_0) de (D_0) :

$$(S) \simeq (S_0) + \varepsilon(S_1)$$

Si cette supposition est vraie, on dit que **(D) est une perturbation régulière de (D_0)** , et on peut alors considérer (S_0) comme la solution approchée de (D), puisque son écart avec (S) , $\varepsilon(S_1)$, est petit. C'est le cas d'un grand nombre de problèmes réels. Un exemple de perturbation régulière sera traité dans le chapitre 3.

b) Perturbation singulière

Mais il existe de nombreuses situations dans lesquelles (S_0) , solution de (D_0) , n'existe pas, ou est multiple, ou ne satisfait pas la physique du problème de départ (D) auquel on s'intéresse. Cela signifie que (S_0) ne peut pas être considérée comme la solution approchée de (D). Corrélativement, cela signifie qu'elle ne s'écrit pas sous la forme $(S) \simeq (S_0) + \varepsilon(S_1)$.

On dit alors que **(D) est une perturbation singulière de (D_0)** . Une méthode de traitement d'une perturbation singulière fera l'objet du chapitre 4.

L'étude des couches limites visqueuses apparaissant dans les écoulement à nombre de Reynolds élevé et de leurs conséquences sur la structure de ces écoulements fera enfin l'objet du chapitre 5. Elle impliquera tous les chapitre précédents.

c) Singularité des écoulements à grand nombre de Reynolds

Écoulement à $\text{Re}^{-1} = 0$ – Considérons un écoulement isovolume parfait stationnaire autour d'un cylindre de diamètre D , correspondant à $\text{Re}^{-1} = \frac{\nu}{UD} = 0 \iff \text{Re} \infty$. On peut montrer théoriquement que la force de traînée $\mathbf{T} = T\mathbf{e}_x$ exercée par cet écoulement sur le cylindre est nulle :

$$T(\text{Re}^{-1} = 0) = 0$$

(cf. l'exercice “paradoxe de d'Alembert” du TD zéro). L'écoulement associé est laminaire, symétrique amont-aval (c'est-à-dire par rapport au plan de symétrie du cylindre perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement \mathbf{e}_x), comme le montrent les lignes de courant tracées sur la figure 1.6, et ne présente pas de sillage derrière le cylindre.

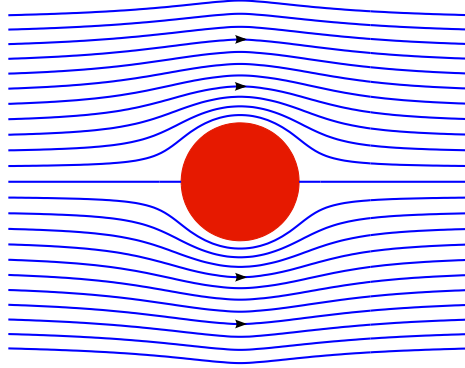


FIGURE 1.6 – Lignes de courant d'un écoulement isovolume parfait stationnaire autour d'un cylindre

Écoulement à $\text{Re}^{-1} \ll 1$ – Considérons maintenant un écoulement à grand nombre de Reynolds autour d'un cylindre. Comme le montre la figure 1.7, celui-ci est fortement instationnaire et irrégulier : il est turbulent. Cet écoulement exerce une force de traînée importante et indépendante de Re :

$$T(\text{Re}^{-1} \ll 1) \simeq \rho S U^2$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U la vitesse de l'écoulement et S surface opposée par le cylindre à l'écoulement

Posons $\varepsilon = \text{Re}^{-1}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) \neq T(\varepsilon = 0)$$

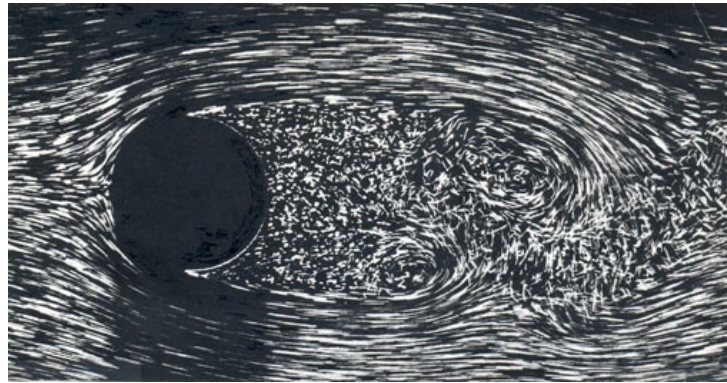


FIGURE 1.7 – Visualisation à l'aide de traceurs de l'écoulement turbulent autour d'un cylindre à $Re = 2000$.

La traînée de l'écoulement à Re infini est très différente de la traînée de l'écoulement à Re grand mais fini : la traînée présente un comportement singulier : c'est le paradoxe de d'Alembert.

Finalement, l'objectif de cette UE est de se donner un certain nombre d'outils (malheureusement pas tous) pour résoudre cette singularité emblématique de la mécanique des fluides.

Bibliographie

- G. I. Barenblatt, *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics* (Cambridge University Press 1996).
- J. S. Darrozes et C. François, *Mécanique des fluides incompressibles* (Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag 1970).
- J. S. Darrozes et A. Monavon, *Analyse phénoménologique des écoulements* (Editions Polytechniques et Universitaires Romandes, 2014)
- E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique* (CNRS Editions - EDP Sciences 2001).
- E. J. Hinch, *Perturbation methods* (Cambridge University Press 1991)

Chapitre 2

Analyse dimensionnelle

I Quelques définitions

I.1 Expression de la valeur d'une grandeur physique

Exprimer la valeur d'une grandeur physique requiert l'utilisation d'une unité. Cette valeur a été obtenue en la mesurant, cad en comparant cette grandeur, directement ou indirectement, à un étalon de même nature physique.

exemple : écrire qu'une armoire a une masse de 25 kg signifie que la masse de l'armoire a été comparée à la masse d'un étalon du kilogramme, cad d'un objet donc la masse vaut par convention 1 kg. 25 est un nombre, cad une grandeur sans dimension égale au rapport des masses de l'armoire et de l'étalon.

I.2 Unités de mesure

7 unités fondamentales : masse, longueur, temps, intensité électrique, température, quantité de matière, intensité lumineuse ; définies à partir d'étalons (objets ou processus)

Les unités du Système International (MKSA) : mètre, kilogramme, seconde, Ampère, Kelvin, mole, candela

Unités dérivées : vitesse, énergie, ...

exemple : l'unité de vitesse dérivée est la vitesse d'un objet parcourant une unité de longueur pendant une unité de temps.

I.3 Systèmes d'unités - classes de systèmes d'unités

Un ensemble d'unités suffisant pour mesurer les propriétés d'une classe de phénomènes de même nature (par ex. les écoulements de fluides non électriques, non magnétiques) est appelé un système d'unités (SU).

exemple :

- MKS : mètre, kilogramme, seconde : S. I.
- cgs : centimètre, gramme, seconde

Deux systèmes d'unités impliquant des étalons de même nature appartiennent à la même classe de SU.

exemple :

- MKS et cgs appartiennent à la classe LMT, L longueur, M masse, T temps.
- cm, s, kgf (kilogramme-force), où 1 kgf = force qui imprime une accélération de $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à une masse de 1 kg appartient à la classe LFT : longueur, force, temps.
- ces deux classes, LMT et LFT permettent de décrire la même classe de phénomènes.

I.4 Dimensions

On considère la classe LMT et on se donne un SU. Si l'unité de longueur est réduite d'un facteur L et l'unité de temps d'un facteur T , l'unité de vitesse est réduite d'un facteur LT^{-1} , donc les valeurs numériques de toutes les vitesses sont augmentées d'un facteur LT^{-1} .

exemple : en passant du mètre au millimètre et de la seconde à la microseconde, par combien est multipliée toute vitesse ?

Définition : Dimension : La fonction qui détermine le facteur dont varie la valeur d'une grandeur physique lors d'un changement de système d'unités au sein d'une même classe de SU est appelée la dimension.

exemple :

- la dimension de la vitesse dans la classe LMT est LT^{-1} . Si v désigne une vitesse, on note sa dimension dans la classe LMT : $[v] = LT^{-1}$.
- dans la classe LFT, quelle est la dimension de la vitesse ?
- les deux classes, LMT et LFT permettent de décrire la même classe de phénomènes.

Définition : Grandeur sans dimension (GSD) : une grandeur dont la valeur numérique est la même que que soit le système d'unités choisi au sein d'une même classe est appelée grandeur sans dimension. Sa dimension est 1. On note $[G] = 1$.

I.5 Grandeurs dimensionnellement indépendantes

Définition : a_1, \dots, a_k sont **dimensionnellement indépendantes** si aucune de ces grandeurs n'a sa dimension qui puisse s'exprimer comme le produit de puissances des dimensions des autres grandeurs.

exemple :

- ρ , U et F sont dimensionnellement indépendantes, en effet : $[\rho] = ML^{-3}$, $[U] = LT^{-1}$, $[F] = MLT^{-2}$. Si on avait $[F] = [\rho]^x [U]^y$, par identification, les contraintes sur x et y seraient $x = 1$, $y = 2$, $-3x + y = 1$, ce qui est incompatible.
- Montrer que ρ , U et P sont dimensionnellement dépendantes.

Propriété : Si a_1, \dots, a_k sont dimensionnellement indépendantes, il est toujours possible de trouver un SU au sein de la même classe qui permette de changer la valeur de a_1 d'un facteur A donné sans changer les valeurs des autres grandeurs (démonstration : Barenblatt P. 38-39).

II Analyse dimensionnelle (AD)

Analyser un phénomène consiste à rechercher comment une grandeur physique dimensionnée d'intérêt a dépend de grandeurs (paramètres) caractérisant les processus que l'on pense intervenir de manière prépondérante dans le phénomène (paramètres pertinents) a_1, \dots, a_n . Le SU suffisant pour exprimer ces $n + 1$ grandeurs est formé de k unités.

L'analyse dimensionnelle permet de définir la forme *a priori* de la loi reliant la grandeur d'intérêt a aux paramètres pertinents a_1, \dots, a_n :

$$a = f(a_1, \dots, a_n)$$

Elle se base sur l'analyse de leurs dimensions.

II.1 Théorème II

a) Théorème

La loi $a = f(a_1, \dots, a_n)$ peut se simplifier en une loi entre $n+1-k$ GSD $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ indépendants (cad tels qu'on ne peut pas en exprimer un en fonction des $n + 1 - k - 1$ autres) :

$$\Pi = F(\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k})$$

b) Fondements du théorème

Principe d'indépendance des lois physiques vis-à-vis de l'observateur (principe de covariance) : les phénomènes, donc les lois physiques qui les relient, ne dépendent pas des unités choisies pour les exprimer, qui sont le choix de l'observateur. Ces lois doivent donc pouvoir s'exprimer en fonction des grandeurs dont la valeur est indépendante des unités choisies, cad de GSD.

c) Démonstration

On scinde les a_1, \dots, a_n en :

- a_1, \dots, a_k k grandeurs dimensionnellement indépendantes.¹
- a, b_1, \dots, b_m grandeurs dimensionnellement dépendantes des a_1, \dots, a_k ($k + m = n + 1$) :

$$\begin{aligned} [b_1] &= [a_1]^{p_1} \dots [a_k]^{r_1} \\ [b_m] &= [a_1]^{p_m} \dots [a_k]^{r_m} \\ &\vdots \\ [a] &= [a_1]^p \dots [a_k]^r \end{aligned}$$

1. En effet, il y a autant de grandeurs dimensionnellement indépendantes que d'unités suffisantes pour décrire toutes les $n + 1$ grandeurs, car on pourrait adopter comme unités celles de ces grandeurs dimensionnellement indépendantes.

On forme les $n + 1 - k$ GSD :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{b_1}{a_1^{p_1} \dots a_k^{r_1}} \\ &\vdots \\ \Pi_m &= \frac{b_m}{a_1^{p_m} \dots a_k^{r_m}} \\ \Pi &= \frac{a}{a_1^p \dots a_k^r}\end{aligned}$$

donc : $a = f(a_1, \dots, a_n)$ se réécrit :

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{a_1^p \dots a_k^r} f(a_1, \dots, a_k, a_1^{p_1} \dots a_k^{r_1} \Pi_1, \dots, a_1^{p_m} \dots a_k^{r_m} \Pi_m) \\ &= \Phi(a_1, \dots, a_k, \Pi_1, \dots, \Pi_m)\end{aligned}$$

Or on peut effectuer un changement de SU qui change d'un facteur A_1 la grandeur a_1 sans changer les valeurs de a_2, \dots, a_k ni celles de Π, Π_1, \dots, Π_m à cause de leur caractère sans dimension. Φ étant indépendant du choix de SU, on a donc :

$$\Phi(a_1, \dots, a_k, \Pi_1, \dots, \Pi_m) = \Phi(A_1 a_1, \dots, a_k, \Pi_1, \dots, \Pi_m) \forall A_1$$

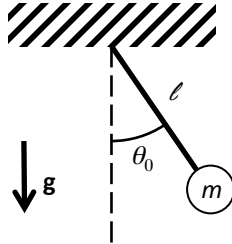
Donc Φ ne dépend pas de a_1 . De même pour $a_2, \dots, a_k \Rightarrow \Phi$ ne dépend pas de a_1, \dots, a_k :

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_m)$$

d) Remarque

Le choix des $n + 1 - k$ GSD indépendants n'est pas unique. Il suffit d'en trouver $n + 1 - k$ indépendants.

II.2 Exemple : pendule pesant



Loi pour la période d'oscillations libres τ du pendule pesant de masse m , longueur l ?

a) Analyse physique du phénomène (AP)

Comment se produit-il ? Causes, phénomènes principaux entrant en jeu ? Grandeurs les décrivant ?

- ▷ Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et qu'on le lâche sans vitesse initiale, il oscille périodiquement avec la période τ . Son poids le ramène vers sa position d'équilibre, son inertie m lui conservant sa vitesse et le faisant la dépasser \Rightarrow paramètres g, m .

▷ paramètre géométrique : l

▷ condition initiale : θ_0

$$\Rightarrow \tau = f(g, m, l, \theta_0) : \tau \text{ est fonction de } n = 4 \text{ paramètres donc : } n + 1 = 5$$

b) Dimensions impliquées

On choisit la classe de SU LMT ... incluant le Système International. Nombre d'unités suffisantes pour exprimer ces $n + 1 = 5$ grandeurs ? L, M, T $\Rightarrow k = 3 \Rightarrow n + 1 - k = 2$. Donc la loi doit pouvoir se réécrire comme une relation entre deux GSD indépendants à choisir.

c) Détermination de 2 GSD indépendants

- ▷ Cherchons la GSD impliquant l'inconnue τ . Cherchons donc à exprimer la dimension de τ à l'aide des dimensions de g, m, l qui sont tous les 3 dimensionnellement indépendants, cad cherchons α, β, γ tels que $[\tau] = [g]^\alpha [m]^\beta [l]^\gamma$ avec $[\tau] = T$, $[g] = LT^{-2}$, $[m] = M$, $[l] = L$ ($[\theta_0] = 1$ donc n'intervient pas dans l'expression²). On trouve $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, donc

$$\Pi = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{l}{g}}} \text{ est sans dimension.}$$

- ▷ Autre GSD indépendant de Π : $\Pi_1 = \theta_0$

$$\Rightarrow \Pi = \Phi(\Pi_1) \text{ soit : } \frac{\tau}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \Phi(\theta_0) \text{ soit : } \tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \Phi(\theta_0)$$

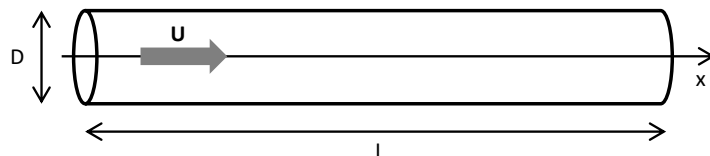
Résultat en accord avec la théorie :

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \underbrace{2\sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}}_{\Phi(\theta_0)}$$

L'expérience et la théorie montrent que lorsque $\theta_0 \rightarrow 0$, $\Phi(\theta_0) \rightarrow 2\pi$: τ ne dépend pas de θ_0 lorsque θ_0 est petit.

2. rappel : angle θ = rapport de deux longueurs, l'abscisse curviligne le long d'une portion de cercle d'angle θ et le rayon du cercle correspondant

II.3 Autre exemple : perte de charge



Perte de charge (chute de pression) par unité de longueur $\frac{dP}{dx}$ au sein d'un écoulement dans une conduite de diamètre D , de longueur $L \gg D$, d'un fluide de viscosité dynamique μ , de masse volumique ρ , à la vitesse moyenne U ($U = Q/S$, Q débit, S section de la conduite) ?

a) Analyse physique

Evaluer $\frac{dP}{dx}$ (et non pas $\frac{dP}{dx}(x)$) revient à la supposer homogène le long de la canalisation, cad supposer l'écoulement invariant par translation le long de la canalisation \Rightarrow sa longueur L ne doit pas intervenir $\Rightarrow \frac{dP}{dx} = f(\rho, \mu, D, U) : n + 1 = 5$.

b) Dimensions impliquées

On choisit la classe de SU $LMT\dots$ incluant le Système International. Dans cette classe de SU, 3 unités sont suffisantes pour exprimer les 5 grandeurs donc $k = 3 \Rightarrow n + 1 - k = 2$.

c) Détermination de 2 GSD indépendants

- ▷ $\left[\frac{dP}{dx}\right] = ML^{-2}T^{-2}$. ρ , U , D sont dimensionnellement indépendants \Rightarrow cherchons à exprimer la dimension de $\frac{dP}{dx}$ en fonction des leurs afin de construire une première GSD : $\left[\frac{dP}{dx}\right] = [\rho]^\alpha [U]^\beta [D]^\gamma$; on trouve $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, donc

$$\Pi = \frac{\frac{dP}{dx} D}{\rho U^2} \text{ est sans dimension.}$$

- ▷ Cherchons à exprimer la dimension de μ en fonction des dimensions de ρ , U , D : $[\mu] = [\rho][U][D]$ donc

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{1}{\text{Re}} \text{ est sans dimension.}$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \Phi(\text{Re}) \text{ soit : } \frac{dP}{dx} = \frac{\rho U^2}{D} \Phi(\text{Re}) : \text{loi reliant 2 GSD au lieu de 5}$$

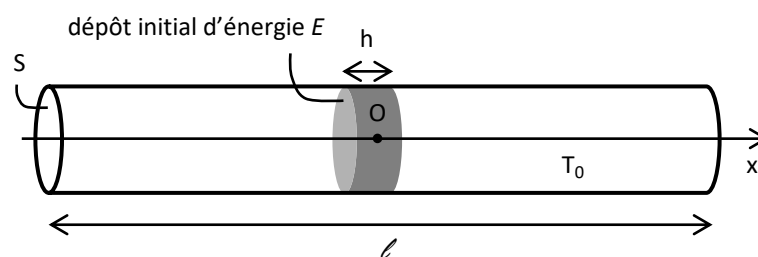
III Application à la construction de solutions auto-similaires

Jusque là, l'AD a été appliquée à la détermination de lois gouvernant des paramètres. Elle peut aussi être appliquée à des champs, cad des fonctions de l'espace et du temps qui décrivent l'évolution spatio-temporelle d'un phénomène.

Pour certains problèmes, sous certaines hypothèses simplificatrices, l'AD peut conduire à une simplification suffisante pour permettre la résolution analytique (ou semi-analytique) du problème en mettant en évidence le caractère **auto-similaire**³ de la solution, cad son invariance vis-à-vis de changements d'échelles spatiales et temporelles spécifiques.

Barenblatt p. 14 : *Un phénomène dépendant du temps est appelé auto-similaire si la distribution spatiale de ses propriétés à différents instants peut être obtenue de celle à un autre instant par transformations affines / changements d'échelle.*

III.1 Exemple : diffusion thermique d'un dépôt d'énergie ponctuel dans une barre thermiquement isolée



Barre cylindrique thermiquement isolée de longueur ℓ (occupant les abscisses $-\ell/2 \leq x \leq \ell/2$), de section S telle que $\sqrt{S} \ll \ell$, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , de diffusivité thermique D , de température initiale homogène T_0 . A l'instant initial, on dépose une quantité d'énergie E dans une zone centrée sur $x = 0$, de largeur $h \ll \ell$. Evolution du champ de température $T(\underline{x}, t)$?

a) Analyse physique

Rappel : le vecteur densité de courant de chaleur \mathbf{j}_Q obéit à la loi de Fourier :

$$\mathbf{j}_Q = -\lambda \nabla T$$

où λ est la conductivité thermique du matériau constituant la barre.

- ▷ Barre isolée latéralement \Rightarrow pas de pertes latérales donc d'après la loi de Fourier le gradient de température latéral est nul, ce qui implique que T ne varie pas transversalement : le champ de température dans la barre est donc unidimensionnel $T(x, t)$. On définit la surchauffe 1D : $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$.
- ▷ θ obéit à l'équation de diffusion de la chaleur 1D : $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ où $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ est la diffusivité thermique du matériau.
- ▷ Conditions aux limites : barre isolée à ses extrémités. Le transport de chaleur étant longitudinal : $\mathbf{j}_Q = j_Q \mathbf{e}_x$, j_Q vérifie : $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$. La barre est isolée à ses extrémités se traduit par : $j_Q(\pm \ell/2, t) = 0 \forall t$ soit : $\frac{\partial \theta}{\partial x}(-\ell/2, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(\ell/2, t) = 0 \forall t$

3. Auto-similaires = auto-semblables = auto-affines, *self-similar* en anglais (*similarity transformation* = homothétie, dilatation, transformation affine, changement d'échelle en anglais).

- ▷ Conditions initiales : dépôt initial d'énergie E sur une largeur h . L'énergie interne par unité de volume vérifiant $du = \rho c dT$, à l'instant initial, la surchauffe $\theta(x, 0)$ est concentrée à l'endroit où l'énergie est déposée et vérifie :

$$\rho c S \int_{-h/2}^{+h/2} \theta(x, 0) dx = E$$

En supposant pour simplifier que la surchauffe est homogène dans la zone de dépôt d'énergie : $\theta(x, 0) = \theta_0$ pour $-h/2 \leq x \leq h/2$ et $\theta(x, 0) = 0$ ailleurs, on obtient $\theta_0 = \frac{E}{\rho c S h}$. On en déduit que la valeur caractéristique de la surchauffe initiale est $\theta_0 = \frac{E}{\rho c S h}$.

Donc $\theta(x, t)$ dépend a priori de $x, t, D, \ell, h, \theta_0 : n + 1 = 7$.

b) Dimensions impliquées

$[D] = L^{-2}T^{-1}$, $[\theta_0] = \Theta$, dimension de température $\Rightarrow L, T, \Theta : k = 3 \Rightarrow n + 1 - k = 4$.

c) Détermination des 4 GSD indépendants

Par exemple : $\frac{\theta(x, t)}{\theta_0}, \frac{x}{\sqrt{Dt}}, \frac{\ell}{h}, \frac{l}{\sqrt{Dt}}$: la loi est encore a priori compliquée !

d) Restriction du domaine d'étude

La surchauffe diffuse dans la barre donc la zone chauffée s'élargit et l'amplitude de la surchauffe décroît au cours du temps. On restreint donc notre analyse physique à l'intervalle de temps (à préciser ultérieurement) durant lequel la distribution de chaleur est d'extension à la fois grande devant h et petite devant ℓ (hypothèse permise car $h \ll \ell$). Dans ce domaine temporel :

- on pense pouvoir oublier le détail de la distribution spatiale du dépôt initial d'énergie $\theta(x, 0)$, cad ne plus considérer h comme paramètre pertinent et ne retenir que la valeur totale d'énergie déposée E , ou plutôt $\frac{E}{\rho c S} = \theta_0 h = Q$ puisque ρ, C et S n'interviennent qu'en accompagnant E ($[Q] = \Theta L$).
- on peut aussi assimiler la barre à un milieu infini, cad ne plus considérer ℓ comme paramètre pertinent.

Donc dans ce domaine temporel $\theta(x, t)$ ne dépend a priori plus que de $x, t, D, Q : n + 1 = 5, k = 3 \Rightarrow n + 1 - k = 2$.

D, t et Q sont dimensionnellement indépendants. En cherchant à adimensionner θ , on trouve : $[\theta] = [Q][D]^{-\frac{1}{2}}[t]^{-\frac{1}{2}}$, et :

$$\Pi = \frac{\theta}{\frac{Q}{\sqrt{Dt}}}$$

En cherchant à construire une autre GSD impliquant x , sachant que $[\sqrt{Dt}] = L$, on peut utiliser :

$$\Pi_1 = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$$

Donc la loi pour $\theta(x, t)$ s'écrit :

$$\theta(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{Dt}} \right)$$

e) Autosimilarité

En posant $\theta_M(t) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}}$ et $l_M(t) = \sqrt{Dt}$,

$$\theta(x, t) = \theta_M(t) \Phi \left(\frac{x}{l_M(t)} \right)$$

Cela signifie que la distribution de température adimensionnée par $\theta_M(t)$, $\tilde{\theta} = \frac{\theta(x, t)}{\theta_M(t)}$, représentée en fonction de la **variable d'autosimilarité** (GSD) $\xi(x, t) = \frac{x}{l_M(t)}$, est la même courbe quel que soit l'instant considéré du domaine temporel d'étude :

$$\tilde{\theta} = \Phi(\xi)$$

La solution du problème simplifié, cad le phénomène dans ce régime d'évolution, possède la propriété d'autosimilarité : la distribution de température à un instant quelconque peut être déduite de celle à un autre instant par des homothéties / dilatations horizontales et verticales, comme nous allons le mettre en évidence maintenant.

f) Application à la prédiction par changement d'échelle

Comment déduire $\theta(x, t_2)$ connaissant $\theta(x, t_1)$?

$$\begin{aligned} \theta(x, t_1) &= \theta_M(t_1) \Phi(\xi(x, t_1)) \text{ où } \xi(x, t_1) = \frac{x}{\sqrt{Dt_1}} \\ \theta(x, t_2) &= \theta_M(t_2) \Phi(\xi(x, t_2)) \text{ où } \xi(x, t_2) = \frac{x}{\sqrt{Dt_2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta(x, t_2) &= \theta_M(t_2) \Phi(\xi(x, t_2)) \\ &= \frac{Q}{\sqrt{Dt_2}} \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{Dt_2}} \right) \\ &= \frac{Q}{\sqrt{Dt_1}} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \Phi \left(\frac{x \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}}{\sqrt{Dt_1}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{Dt_1}} \Phi \left(\xi \left(x \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}, t_1 \right) \right)}_{\theta \left(x \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}, t_1 \right)} \end{aligned}$$

Donc $\theta(x, t_2)$ se déduit de $\theta(x, t_1)$ en :

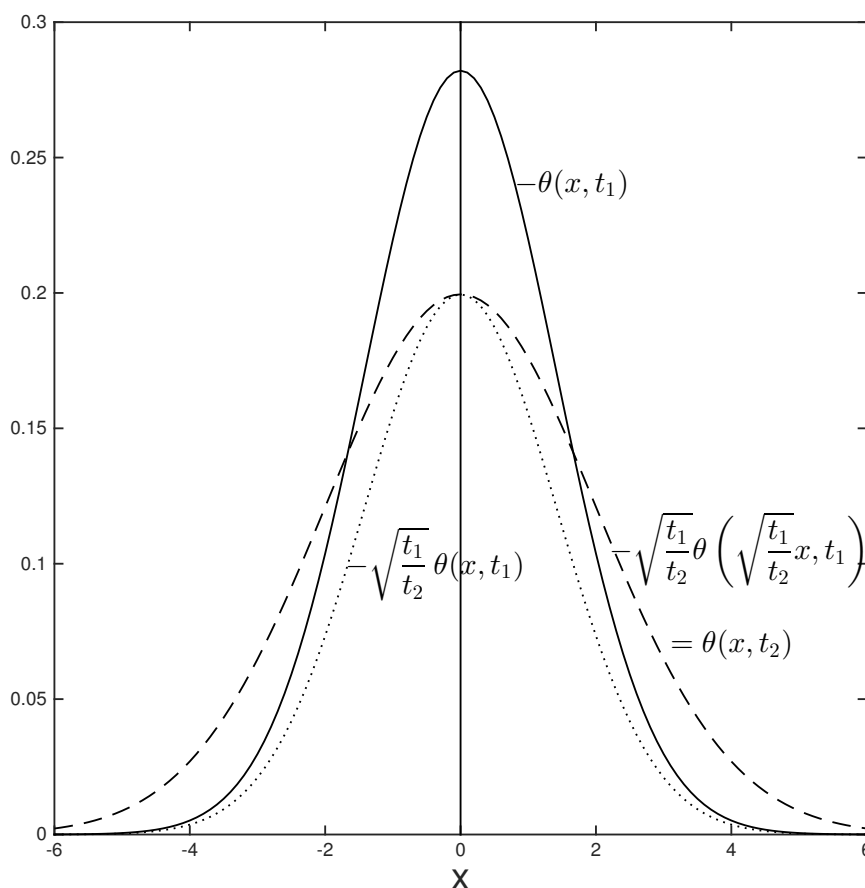


FIGURE 2.1 –

- multipliant $\theta(x, t_1)$ par $\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$,
- appliquant une homothétie horizontale d'un facteur $\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$.

Quand on augmente le temps d'un facteur 2 ($t_2 = 2t_1$), on divise la surchauffe par un facteur $\sqrt{2}$ et on dilate l'espace d'un facteur $\sqrt{2}$, voir la figure 2.1

g) Problème simplifié

Comme $\tilde{\theta}$ ne dépend que d'une seule variable d'autosimilarité ξ , on peut donc espérer avoir tellement simplifié l'écriture du problème qu'il soit devenu soluble. On est en effet passé d'un champ à deux variables (x, t) obéissant à une edp à une fonction à une seule variable $\xi(x, t)$.

- ▷ Quelle est l'edo à laquelle obéit $\tilde{\theta}(\xi) = \Phi(\xi)$?
 $\theta(x, t) = \theta_M(t)\Phi(x, t)$ avec $\theta_M = \frac{Q}{\sqrt{Dt}}$ et $\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ donc :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_M(t) \Phi'(\xi) \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\frac{1}{\sqrt{Dt}}}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \theta_M(t) \Phi''(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{Dt}} \right)^2$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \theta'_M(t) \Phi(\xi) + \theta_M(t) \Phi'(\xi) \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{\frac{-1}{2t} \frac{dx}{\sqrt{Dt}}}$$

Donc $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ s'écrit :

$$\Phi'' + \frac{\xi}{2} \Phi' + \frac{1}{2} \Phi = 0 : \text{edo} \quad (2.1)$$

▷ Comment se transforment la CI $\int_{-h/2}^{+h/2} \theta(x, 0) dx = Q$? Le problème est que $t = 0 \Leftrightarrow \xi \infty$ donc pas de changement de variable possible dans l'intégrale. Mais la barre étant isolée, son énergie se conserve :

$$\rho c S \int_{-\ell}^{+\ell} \theta(x, t) dx = E \quad \forall t \geq 0 \text{ soit :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, t) dx = Q \quad \forall t \geq 0$$

Avec $\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ et $\theta_M(t) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}}$: à un instant t donné : $d\xi = \frac{dx}{\sqrt{Dt}}$ donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) \underbrace{\frac{x}{\sqrt{Dt}}}_{d\xi} = 1$$

▷ Comment se transforment les CL ?

$$\Phi'(\xi = \pm\infty) = 0$$

h) Solution analytique

(2.1) s'intègre en : $\Phi' + \frac{\xi}{2} \Phi = \text{constante}$. Or θ est symétrique en x donc Φ est symétrique en ξ donc $\Phi'(0) = 0$ donc constante = 0 : $\Phi' + \frac{\xi}{2} \Phi = 0$:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4}\right) \quad (\text{vérifie } \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) d\xi = 1)$$

soit :

$$\theta(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) \quad (\text{vérifie } \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, t) dx = Q \quad \forall t)$$

valable pour une extension spatiale caractéristique de la surchauffe $\sqrt{Dt} \gg h$ et $\ll \ell$, ce qui définit le domaine temporel dans lequel cette approche est valable.

i) Remarques

- Cette solution a été obtenue par analyse dimensionnelle uniquement !
- Dans le cas étudié, le temps est borné inférieurement par 0 et n'est pas borné supérieurement. Il n'y a aucune échelle de temps caractéristique finie dans le problème. Concernant l'espace, on a considéré le régime dans lequel l'extension spatiale de la zone chaude est infiniment grande devant h (ce qui nous a autorisé à oublier le détail spatial de la CI) et infiniment petite devant ℓ (donc le champ de température ne ressent pas la taille finie de la barre) : on a donc considéré que le domaine spatial était borné inférieurement par 0 et non borné supérieurement. On s'est restreint à un domaine temporel dans lequel il n'y avait aucune échelle spatiale caractéristique finie dans le problème. Ceci justifie pourquoi on a pu trouver une solution auto-similaire dans ce régime.
- On généralise les conclusions de cet exemple en affirmant que l'on ne peut trouver de solution auto-similaire (en temps et en espace) qu'à des problèmes dans lesquels les paramètres ayant les mêmes dimensions que les variables de temps et d'espace sont considérés comme nuls ou infinis : **régime asymptotique intermédiaire**
- En pratique, ces solutions auto-similaires décrivent précisément les phénomènes dans des géométries et pour des CI plus complexes dans des intervalles de temps durant lesquels ils ont "oublié" les CI et ne "ressentent" pas encore les bords. Leur intérêt est donc beaucoup plus grand que si elles ne décrivaient que des phénomènes dans des systèmes idéalisés.

j) Régime asymptotique intermédiaire

La solution exhibée dans le régime asymptotique intermédiaire s'écrivant : $\theta(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$, donc à tout instant elle vérifie $\theta(\sqrt{Dt}, t)/\theta(0, t) = \exp(-1/4) \simeq 0.78$: la zone chaude a bien une largeur caractéristique $l_M(t) = \sqrt{Dt}$. Le régime asymptotique intermédiaire dans lequel cette solution est valable est tel que $h \ll l_M(t) \ll \ell$ soit :

$$\frac{h^2}{D} \ll t \ll \frac{\ell^2}{D}$$

IV Limites de l'analyse dimensionnelle

L'analyse physique consiste à ne conserver pour l'analyse dimensionnelle que les grandeurs caractérisant les processus que l'on estime intervenir de manière prépondérante dans le phénomène, cad à supposer que les processus apparemment d'importance secondaire n'interviennent pas notablement dans la loi décrivant le phénomène.

ex : dans l'AP du pendule, on a négligé :

- les effets relativistes, car la vitesse du pendule est très inférieure à la célérité de la lumière : $\frac{v}{c} \ll 1$,
- l'effet de la rotation de la Terre (à la vitesse angulaire Ω) car la force de Coriolis $2m\Omega v$ est petite devant le poids mg ,

- le diamètre D de la boule pesante car on la suppose petite devant l ,
- ...

Dans la réalité, ces processus interviennent, donc leurs grandeurs associées apparaissent a priori dans les lois décrivant le phénomène. En tenant compte de ces processus secondaires, l'AD et le théorème Π permettent d'écrire la loi sous la forme :

$$\Pi = \Phi\left(\underbrace{\Pi_1, \dots, \Pi_n}_{\text{GSD associés aux processus prépondérants}}, \underbrace{\Pi_{n+1}, \dots, \Pi_m}_{\text{GSD associés aux processus secondaires}}\right)$$

où Π_{n+1}, \dots, Π_m sont très petits devant l'unité (dans l'ex du pendule, $\frac{l}{c\tau} \ll 1$, $\frac{D}{l} \ll 1$..., dans celui de la diffusion de chaleur, $\frac{\sqrt{Dt}}{l} \ll 1$, $\frac{h}{\sqrt{Dt}} \ll 1$). Si Φ tend vers une valeur finie non nulle lorsque Π_{n+1}, \dots, Π_m tendent vers zéro, on peut alors approximer Φ par sa forme asymptotique :

$$\Phi^*(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = \lim_{\Pi_{n+1}, \dots, \Pi_m \rightarrow 0} \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_n, \Pi_{n+1}, \dots, \Pi_m)$$

C'est en fait Φ^* à laquelle l'AP conduit usuellement. Si Φ^* est proche de Φ compte tenu des valeurs de Π_{n+1}, \dots, Π_m , déterminer Φ^* est satisfaisant. On parle de **similitude complète**.

Mais il existe de nombreuses situations dans lesquelles Φ ne tend pas vers une valeur finie non nulle lorsque Π_{n+1}, \dots, Π_m tendent vers zéro, si bien qu'elle n'est pas approximable par une forme asymptotique indépendante de Π_{n+1}, \dots, Π_m du type Φ^* . Dans ces situations, l'AD ne peut pas faire abstraction des GSD très petits, donc n'aide pas simplifier beaucoup la formulation du problème, et l'AP est inopérante. Il faut résoudre le problème. On parle de **similitude incomplète**.

Chapitre 3

Invariance d'échelle

I Analyse dimensionnelle et invariance de groupe

a) Rappel : groupe

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ a, b &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

telle que :

- il existe un élément neutre : $a \cdot 1 = a$
- il existe un inverse à tout élément de G : $\forall a \exists b / a \cdot b = 1$
- opération associative : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

b) Les changements d'unités constituent un ensemble de transformations à structure de groupe

On considère les relations du type :

$$\underbrace{a}_{\text{dimensionnellement dépendant de } a_1, \dots, a_k} = f\left(\underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\text{dimensionnellement indépendants}}, \underbrace{b_1, \dots, b_m}_{\text{dimensionnellement dépendants de } a_1, \dots, a_k} \right) \quad (3.1)$$

On considère la transformation à k paramètres $\{A_1, \dots, A_k\}$ qui consiste en l'ensemble des homothéties / dilatations / changements d'échelle opérant sur les variables des relations

du type (3.1) :

$$\begin{aligned}
a_1 &\rightarrow a'_1 = A_1 a_1 \\
a_2 &\rightarrow a'_2 = A_2 a_2 \\
&\vdots \\
a_k &\rightarrow a'_k = A_k a_k \\
a &\rightarrow a' = A_1^p \dots A_k^r a \text{ avec } [a] = [a_1]^p \dots [a_k]^r \\
b_1 &\rightarrow b'_1 = A_1^{p_1} \dots A_k^{r_1} b_1 \text{ avec } [b_1] = [a_1]^{p_1} \dots [a_k]^{r_1} \\
&\dots \\
b_m &\rightarrow b'_m = A_1^{p_m} \dots A_k^{r_m} b_m \text{ avec } [b_m] = [a_1]^{p_m} \dots [a_k]^{r_m}
\end{aligned}$$

Cette transformation correspond à un changement d'unités au sein de la même classe de SU. Comme l'ensemble des réels muni de la multiplication est un groupe, on en déduit immédiatement que l'ensemble des changements d'unités forme un groupe de transformations opérant sur les relations du type (3.1).

Le sous-ensemble des relations :

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_m), \quad (3.2)$$

où Π, Π_1, \dots, Π_m sont des GSD, sont inchangées par ces transformations : ce sous-ensemble de relations entre a, a_1, \dots, a_n forme un invariant de ce groupe des changements. Du fait du principe de covariance, les lois physiques appartiennent donc à **l'invariant du groupe** des changements d'unités.

Or le nombre de paramètres indépendants dans la loi (3.2) invariante par le groupe des changements d'unités est plus petit que le nombre de paramètres indépendants dans la loi (3.1). On constate donc qu'on peut simplifier une relation du type (3.1) en déterminant sa forme invariante par changement d'unités.

I.1 Généralisation

L'Analyse Dimensionnelle consiste en la recherche de l'invariant du groupe des changements d'unités. Les changements d'unités sont des transformations à k paramètres (k nombre d'unités suffisantes) = ensemble de changements d'échelle particuliers, pour lesquels les exposants $\{p, \dots, r, p_1, \dots, r_1, \dots, p_m, \dots, r_m\}$ sont fixés par les dimensions des grandeurs. Mais les changements d'unités ne sont pas le seul groupe de transformations applicables aux lois physiques.

Les **changements d'échelle** forment un ensemble de transformations à structure de groupe plus large que les changements d'unités : nombre de paramètres quelconque, relations quelconques entre exposants. Déterminer quelles autres transformations à structure de groupe, en particulier quels changements d'échelle laissent invariantes les lois physiques permet éventuellement de les simplifier, en complément de l'AD. Il peut en effet en résulter un nombre de grandeurs indépendantes intervenant dans la loi inférieur au nombre de GSD indépendants prédit par le théorème $\Pi \Rightarrow$ gain de simplification par rapport à l'AD seule.

Ce chapitre est consacré à l'établissement de la méthode de recherche d'invariance des lois physiques par changement d'échelle, ou **invariance d'échelle**.

II Invariance d'échelle

II.1 Application aux lois entre grandeurs caractérisant un phénomène sur un exemple

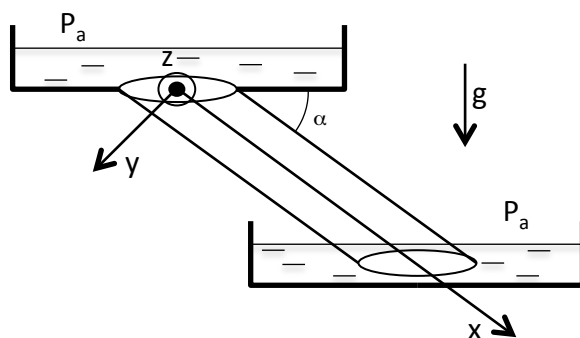


FIGURE 3.1 –

Exemple : Écoulement d'un fluide dans une conduite inclinée sous l'effet de la gravité. Un fluide de masse volumique ρ , de viscosité μ s'écoule sous l'effet de son poids dans une conduite cylindrique à section circulaire de rayon R , de longueur l , inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. À l'entrée et à la sortie de la canalisation règne la pression atmosphérique P_a . Loi pour la vitesse moyenne $U = Q/S$? Nous pratiquerons d'abord l'AD, ensuite la recherche d'invariance d'échelle.

a) Analyse dimensionnelle

Analyse physique

- ▷ En sortie et en entrée de conduite, écoulement parallèle quasi-stationnaire \Rightarrow pression P_a .
- ▷ On ne change pas l'écoulement en changeant $P_a \Rightarrow$ paramètre non pertinent

$$\Rightarrow U = f(\rho, g, \mu, R, l, \alpha)$$

On a $n + 1 = 7$.

Analyse dimensionnelle - Unités suffisantes pour décrire ces 7 grandeurs : L, M, T $\Rightarrow k = 3 \Rightarrow n + 1 - k = 4$. ρ , μ et R étant dimensionnellement indépendants, exprimons

U et g à l'aide de ces grandeurs :

$$\Pi = \frac{UR\rho}{\mu} = \text{Re}$$

$$\Pi_1 = \frac{gR^3}{\nu^2}$$

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. On a aussi $\Pi_2 = \frac{l}{R}$, $\Pi_3 = \alpha$, donc :

$$U = \frac{\nu}{R} \Phi \left(\frac{gR^3}{\nu^2}, \frac{l}{R}, \alpha \right) \quad (3.3)$$

b) Recherche de solution invariante par changement d'échelle

Ecriture du problème - On suppose l'écoulement isovolume, stationnaire, parallèle de vitesse $\underline{u} = u(x, y, z)\underline{e}_x$ et de pression $P = P(x, y, z)$. Comme P_a n'intervient pas dans la physique de l'écoulement, on pose $p = P - P_a$. \underline{u} et p vérifient :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} = \frac{-1}{\rho} \underline{\nabla} p + \underline{g} + \nu \underline{\Delta} \underline{u}$$

Les Conditions aux Limites (CL) sont :

$$p(x=0, y, z) = 0 \quad \forall y, z / y^2 + z^2 \leq R^2 \quad (3.4)$$

$$p(x=l, y, z) = 0 \quad \forall y, z / y^2 + z^2 \leq R^2 \quad (3.5)$$

$$u(x, y, z) = 0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq l \text{ et } \forall y, z / y^2 + z^2 = R^2 \quad (3.6)$$

$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$ s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ soit $u = u(y, z)$. Navier-Stokes projeté sur les 3 axes s'écrit :

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_0 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$0 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \alpha \quad (3.8)$$

$$0 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(x, y) \quad (3.9)$$

Changement d'échelles - On impose un changement d'échelle aux 11 grandeurs impliquées dans le problème, $x, y, z, u, p, \rho, \nu, g, l, R, \alpha$, de la forme : $x \mapsto x'/x = x^*x'$, x grandeur à transformer, x' grandeur transformée, $x^* > 0$ facteur de changement d'échelle. On opère donc les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} u(y, z) &\rightarrow u'(y', z') \\ p(x, y) &\rightarrow u'(x', y') \end{aligned} \quad (3.10)$$

On a donc génériquement :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p^* p')}{\partial(x^* x')} = \frac{p^*}{x^*} \frac{\partial p'}{\partial x'}, \quad \frac{p^*}{x^*} > 0$$

Donc après changement d'échelle, on a d'une part :

$$\frac{p^*}{\rho^* x^*} \left(\frac{-1}{\rho'} \right) \frac{\partial p'}{\partial x'} + g^* g' \sin(\alpha^* \alpha') + \nu^* u^* \nu' \left(\frac{1}{y^{*2}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{1}{z^{*2}} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{p^*}{\rho^* y^*} \left(\frac{-1}{\rho'} \right) \frac{\partial p'}{\partial y'} + g^* g' \cos(\alpha^* \alpha') = 0 \quad (3.12)$$

D'autre part

$$p^* p'(x'/x^* x' = 0, y', z') = 0 \quad \forall y', z' / y^{*2} y'^2 + z^{*2} z'^2 \leq R^{*2} R^2 \quad (3.13)$$

$$p^* p'(x'/x^* x' = l^* l', y', z') = 0 \quad \forall y', z' / y^{*2} y'^2 + z^{*2} z'^2 \leq R^{*2} R^2 \quad (3.14)$$

$$u^* u'(y^* y', z^* z') = 0 \quad \forall x' / 0 \leq x^* x' \leq l^* l' \text{ et } \forall y', z' / y^{*2} y'^2 + z^{*2} z'^2 = R^{*2} R^2 \quad (3.15)$$

Recherche du groupe de changements d'échelle laissant le problème invariant

On cherche le groupe de changements d'échelle laissant invariant le problème, cad tel qu'après changement d'échelles, le problème écrit pour les 11 grandeurs x', y', \dots soit formellement identique au problème écrit pour les 11 grandeurs x, y, \dots . Les contraintes sur les changements d'échelle sont donc :

- (3.11) identique à (3.7) si $\frac{p^*}{\rho^* x^*} = g^* = \frac{\nu^* u^*}{y^{*2}} = \frac{\nu^* u^*}{z^{*2}}$ et $\alpha^* = 1$,
- (3.12) identique à (3.8) si $\frac{p^*}{\rho^* y^*} = g^*$ et $\alpha^* = 1$,
- (3.4) et (3.5) identiques à (3.13) et (3.14) si $y^* = z^* = R^*$ et $x^* = l^*$,
- (3.6) identique à (3.15) si $y^* = z^* = R^*$ et $x^* = l^*$.

cad : $x^* = y^* = z^* = R^* = l^*$, $\frac{p^*}{\rho^* x^*} = g^*$, $\alpha^* = 1$, $g^* = \frac{\nu^* u^*}{y^{*2}}$: 7 relations indépendantes. On peut donc choisir arbitrairement $11 - 7 = 4$ facteurs d'échelle, par ex. R^*, ρ^*, g^*, ν^* les 7 autres s'en déduisant ($x^* = y^* = z^* = R^* = l^*$, $\alpha^* = 1$, $u^* = \frac{R^{*2} g^*}{\nu^*}$, $p^* = \rho^* g^* R^*$). **Le groupe des changements d'échelles laissant le problème invariant est à 4 paramètres** (R^*, ρ^*, g^*, ν^*).

Conséquence sur la solution : Le problème de départ étant invariant par ces changements d'échelle, sa solution l'est aussi.

Appliquons ces changements d'échelle à la loi $U = f(\rho, g, \nu, R, l, \alpha)$. U étant une moyenne de u , le facteur de changement d'échelle U^* appliqué à U est identique à celui appliqué à u : $U^* = u^*$.

$$U^* U' = f(\rho^* \rho', g^* g', \nu^* \nu', R^* R', l^* l', \alpha^* \alpha')$$

où $U^* = \frac{R^{*2}g^*}{\nu^*}$, $l^* = R^*$, $\alpha^* = 1$, et où R^*, ρ^*, g^*, ν^* sont arbitraires. Nous pouvons donc choisir comme valeurs pour ces facteurs d'échelle : $R^* = \frac{1}{R}$, $\rho^* = \frac{1}{\rho}$, $g^* = \frac{1}{g}$, $\nu^* = \frac{1}{\nu}$, ce qui conduit à :

$$\frac{\nu'}{R'^2 g'} U' = f\left(1, 1, 1, 1, \frac{l'}{R'}, \alpha'\right) = f\left(\frac{l'}{R'}, \alpha'\right) \quad (3.16)$$

$$U' = \frac{R'^2 g'}{\nu'} f\left(1, 1, 1, 1, \frac{l'}{R'}, \alpha'\right) = \frac{R'^2 g'}{\nu'} f\left(\frac{l'}{R'}, \alpha'\right) \quad (3.17)$$

soit :

$$U = \frac{R^2 g}{\nu} f\left(\frac{l}{R}, \alpha\right) \quad (3.18)$$

En comparant (3.3) et (3.18), on constate que la solution invariante d'échelle ne dépend que de 2 GSD alors que la solution invariante par changement d'unités en dépend de 3. Le groupe de changements d'échelles laissant invariante la solution est différent de celui imposé par l'AD. La réduction du nombre de GSD dont dépend la solution est due au fait que le groupe de changements d'échelles laissant la solution invariante est à 4 facteurs d'échelles indépendants, alors que le groupe de changements d'unités laissant la solution invariante n'est qu'à 3 paramètres indépendants, nombre égal au nombre d'unités impliquées.

II.2 Application à la détermination de solutions auto-similaires sur un exemple

La recherche d'invariance d'échelle peut aussi permettre de mettre en évidence la nature autosimilaire des solutions au problème posé.

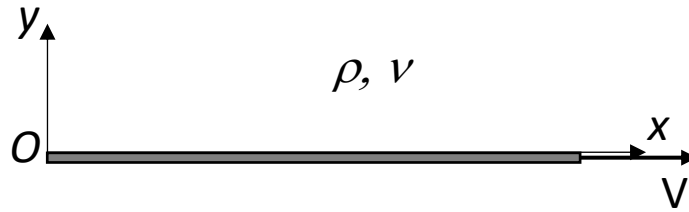


FIGURE 3.2 – Problème de Rayleigh : écoulement d'un fluide visqueux au-dessus d'une plaque plane mise instantanément en mouvement à l'instant initial.

Exemple : “problème de Rayleigh” : écoulement d'un fluide visqueux au-dessus d'une plaque plane mise instantanément en mouvement à l'instant initial

A $t = 0$, une plaque plane (de plan (Oxz)) est mise instantanément en mouvement à la vitesse $\underline{V} = V \underline{e}_x$, voir la figure 3.2. Quel est l'écoulement du fluide visqueux à son contact $\underline{u}(\underline{r}, t)$?

Ecriture du problème Écoulement isovolume parallèle instationnaire parallèle et invariant selon z : $\underline{u} = u(x, y, t)\underline{e}_x$. Le problème s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, t) \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p + \nu \underline{\Delta} \underline{u} \\ u(y, t=0) &= 0 \quad \forall y \\ u(0, t) &= V \quad \forall t > 0 \\ u(\infty, t) &= 0 \text{ et } p(\infty, t) = P_0 \quad \forall t\end{aligned}$$

- L'écoulement étant supposé parallèle, $\underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{u} = 0$.
- Navier-Stokes projeté sur (Oy) s'écrit $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, cad $p = p(x, t)$.
- La dérivation partielle par rapport à x de Navier-Stokes projeté sur (Ox) s'écrit $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$, soit $\frac{\partial p}{\partial x} = f(t)$ soit $p = xf(t) + g(t)$. La plaque étant infiniment étendue selon (Ox) , $f = 0$. La pression étant égale à zéro loin de la plaque, $g = P_0$.

Donc le problème s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ p &= P_0 \\ u(y, 0) &= 0 \quad \forall y \\ u(0, t) &= V \quad \forall t > 0 \\ u(\infty, t) &= 0 \quad \forall t\end{aligned}$$

Analyse dimensionnelle

$$u = f(y, t, \nu, V) \Rightarrow n + 1 = 5$$

Les unités L et T sont suffisantes pour exprimer toutes ces grandeurs donc $k = 2$ donc $n + 1 - k = 3$. ν et t sont indépendants et peuvent donc servir à former 3 GSD : $\Pi = u/\sqrt{\frac{\nu}{t}}$, $\Pi_1 = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$ et $\Pi_2 = V/\sqrt{\frac{\nu}{t}}$:

$$\frac{u}{\sqrt{\frac{\nu}{t}}} = \Phi \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}, \frac{V}{\sqrt{\frac{\nu}{t}}} \right)$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{u}{V} = \Theta \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}, \frac{V}{\sqrt{\frac{\nu}{t}}} \right)$$

avec $\Phi(X, Y) = Y\Theta(X, Y)$

Recherche d'invariance d'échelle On effectue un changement d'échelle sur les 5 grandeurs u, V, y, t, ν de la forme $x \mapsto x^* x'$. Le problème est invariant si :

$$\begin{aligned}\frac{u^*}{t^*} &= \frac{\nu^* u^*}{y^{*2}} \text{ soit } y^* = \sqrt{\nu^* t^*} \\ u^* &= V^*\end{aligned}$$

L'invariance impose donc deux relations entre les facteurs d'échelle. On peut donc fixer de manière indépendante 3 facteurs d'échelle, par ex. V^*, ν^* et t^* , les autres s'en déduisant par les relations $u^* = V^*, y^* = \sqrt{\nu^* t^*}$. La solution de ce problème est aussi invariante par le même groupe de changements d'échelles. Par ce changement d'échelle, la loi $u = f(y, t, \nu, V)$ se transforme en $u^* u' = f(y^* y', t^* t', \nu^* \nu', V^* V')$. Choisissons $V^* = \frac{1}{V'}$, $\nu^* = \frac{1}{\nu'}$, on a alors $y^* = \sqrt{\frac{t^*}{\nu'}}$ et $u^* = 1/V'$, donc¹ :

$$\frac{u'}{V'} = f\left(y' \sqrt{\frac{t^*}{\nu'}}, t^* t', 1, 1\right) = f\left(y' \sqrt{\frac{t^*}{\nu'}}, t^* t'\right)$$

Or :

$$\sqrt{\frac{t^*}{\nu'}} = \sqrt{\frac{1}{\nu' t'}} \sqrt{t^* t'}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{u'}{V'} &= f\left(y' \sqrt{\frac{1}{\nu' t'}} \sqrt{t^* t'}, t^* t'\right) \\ &= g\left(y' \sqrt{\frac{1}{\nu' t'}}, t^* t'\right)\end{aligned}$$

où $g(X, Y) = f(X\sqrt{Y}, Y)$. Or $\frac{u'}{V'}$, invariante d'échelle, doit être indépendant de t^* . De plus, t^* n'apparaît que sous la forme du produit $t^* t'$. Donc $\frac{u'}{V'}$ est indépendant de $t^* t'$. Donc :

$$\frac{u'}{V'} = g\left(\frac{y'}{\sqrt{\nu' t'}}\right) \text{ donc } \frac{u}{V} = g\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)$$

La solution invariante d'échelle u ne dépend donc que d'une seule variable d'autosimilarité $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$: elle est **autosimilaire**.

1. Contrairement à V' et ν' , t' est une variable donc on ne peut pas neutraliser son rôle dans f en posant $t^* = 1/t'$ puisque t^* est une constante.

Problème simplifié - Cherchons l'edo et les CL auxquelles obéit $\tilde{u} = \frac{u}{V} = f(\eta)$ avec $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= f'(\eta) \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{\frac{-\eta}{2t}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= f'(\eta) \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{\frac{1}{\sqrt{\nu t}}} \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} &= f''(\eta) \frac{1}{\nu t}\end{aligned}$$

Donc :

$$f''(\eta) + \frac{\eta}{2} f'(\eta) = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(y, 0) &= 0 \quad \forall y \text{ s'écrit } f(\infty) = 0 \\ \tilde{u}(0, t) &= 1 \quad \forall t > 0 \text{ s'écrit } f(0) = 1 \\ \tilde{u}(\infty, t) &= 0 \quad \forall t \text{ s'écrit } f(\infty) = 0\end{aligned}$$

Les CL sont donc compatibles avec la forme auto-similaire de la solution.

Résolution - La solution autosimilaire obéit donc à une edo d'ordre 2 à 2 CL. $g = f'$ vérifie $g' + \frac{\eta}{2}g = 0$, soit $g = A' \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$. Donc $f(\eta) = \underbrace{f(0)}_1 + A' \int_0^\eta g(\xi) d\xi$. Compte tenu

de la définition de la fonction erf : $\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-u^2) du$, de sa limite $\text{erf}(\infty) = 1$, et de la CL $f(\infty) = 0$, on trouve $f(\eta) = 1 - \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$ soit :

$$u(y, t) = V \left(1 - \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right)$$

Le problème étant linéaire, sa solution est unique, donc la recherche de solution invariante d'échelle a permis de trouver la solution à ce problème.

Chapitre 4

Analyse en ordre de grandeur et analyse physique

I Introduction

Contexte

- Problème complexe :
 - plusieurs inconnues
 - plusieurs variables
 - équations aux dérivées partielles éventuellement non-linéaires \implies besoin de simplifier les edp pour les résoudre
- Hiérarchie des processus à l'oeuvre dans le phénomène étudié
- Séparation d'échelle (spatiales, temporelles) \implies grandeurs sans dimensions petites

Objectif

- hiérarchiser les termes dans les EDP afin de ne retenir que les termes prépondérants
- définir un problème approché simplifié D_0
- le résoudre et étudier si sa solution S_0 est physiquement acceptable (perturbation régulière)

Méthode

- analyse en ordre de grandeur
- analyse physique

Cette méthode s'appuie sur le formalisme des développements asymptotiques.

Problème

On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ , de viscosité μ , dans une canalisation cylindrique de section circulaire de rayon R , de longueur $L \gg R$, sous l'effet d'une différence de pression entre amont et aval ΔP . Quelle est la vitesse caractéristique de l'écoulement U définie comme $U = Q_v/S$, où Q_v est le débit volumique et S la section de la canalisation ?

Remarque : on connaît l'écoulement dans une canalisation de longueur infinie : c'est l'écoulement de Poiseuille (voir TD de révision). On cherche donc à déterminer en quoi l'écoulement pour L grand, mais fini, diffère de l'écoulement pour L infini. Le domaine d'étude est donc la canalisation.

Analyse dimensionnelle

$$U = f(\Delta P, \rho, \mu, R, L) : n + 1 = 6, k = 3 \text{ donc : } \frac{UL}{\nu} = F\left(\frac{R}{L}, \frac{\Delta PL^2}{\rho \nu^2}\right)$$

Mise en équations du problème — On suppose l'écoulement isovolume et stationnaire. La conservation de la matière et l'équation de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\nabla}} P + \nu \Delta \underline{u} \quad (4.2)$$

Les conditions aux limites imposées à l'écoulement sont :

- l'adhérence du fluide à la paroi de la canalisation
- la pression est fixée égale à $P_0 + \Delta P$ en amont et P_0 en aval

On cherche une solution sous la forme d'un écoulement axisymétrique, c'est-à-dire sans composante orthoradiale ; en conséquence, on adopte les coordonnées cylindriques centrées sur l'axe de symétrie de la canalisation :

$$\underline{u} = u_r(r, z) \underline{e}_r + u_z(r, z) \underline{e}_z$$

Le domaine d'étude est donc défini par : $0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L$.

Les équations s'écrivent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \quad (4.4)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \quad (4.5)$$

Les conditions aux limites du domaine d'étude sont :

$$\text{adhérence à la paroi : } \underline{u}(r / r = R, z) = \underline{0} \quad \forall z / 0 \leq z \leq L \quad (4.6)$$

$$\text{pression fixée aux extrémités : } P(r, z / z = 0) = P_0 + \Delta P \quad \forall r / 0 \leq r \leq R \quad (4.7)$$

$$P(r, z / z = L) = P_0 \quad \forall r / 0 \leq r \leq R \quad (4.8)$$

II Adimensionnement

II.1 Utilité

La hiérarchisation rigoureuse des processus à l'oeuvre et des termes dans problème de départ passe par un **adimensionnement** du problème, qui permet de comparer directement leurs ordres de grandeur.

II.2 Adimensionnement des variables à l'échelle du domaine d'étude

Il faut d'abord définir le domaine choisi pour l'analyse physique du phénomène, spatial et temporel, qui permet d'effectuer l'adimensionnement des variables d'espace et de temps.

Procédure d'adimensionnement : L'adimensionnement des variables d'espace et de temps consiste en l'écriture de toutes de ces variables dimensionnées sous la forme :

$$u = u_0 + \delta u \bar{u} , u \text{ variable ou fonction dimensionnée}$$

- u_0 est l'ordre de grandeur de u
- $\delta u > 0$ est appelée l'échelle (caractéristique de variation) de u dans le domaine d'étude choisi
- \bar{u} , grandeur sans dimension, d'ordre unité : $\bar{u} \sim 1$: partie analytique de u : signifie $0, 1 \lesssim |\max(\bar{u})| \lesssim 10$

NB : Si l'échelle de u est comparable à son ordre de grandeur : $\delta u \sim |u_0|$, on peut poser $u = \delta u \bar{u}$.

Suite du problème :

Le domaine d'étude est défini par :

- $0 \leq r \leq R$: l'échelle (caractéristique de variation) de r est R et son ordre de grandeur est R donc on pose : $r = R\bar{r}$. Lorsque r parcourt l'intervalle $[0 R]$, \bar{r} parcourt l'intervalle $[0 1]$ qui est bien de largeur 1, donc adimensionnement acceptable.
- $0 \leq z \leq L$: l'échelle de z est L et son ordre de grandeur est L donc on pose : $z = L\bar{z}$. Lorsque z parcourt l'intervalle $[0 L]$, \bar{z} parcourt l'intervalle $[0 1]$ qui est bien de largeur 1, donc adimensionnement acceptable.

Remarque : Un adimensionnement n'est pas unique : si $x_1 \leq x \leq x_2$ on peut choisir comme adimensionnement $x = x_0 + \delta x \bar{x}$ avec :

- $x_0 = x_1, \delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \bar{x} \in [0 \ 1] \sim 1$
- $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \bar{x} \in [-\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}] \sim 1$
- $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \delta x = \frac{x_2-x_1}{2} \Rightarrow \bar{x} \in [-1 \ 1] \sim 1$
- $x_0 = x_2, \delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \bar{x} \in [-1 \ 0] \sim 1$
- mais avec $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \delta x = \frac{x_2-x_1}{100}$ on a $\bar{x} \in [-50 \ 50]$ qui n'est plus d'ordre unité : une partie de l'ordre de grandeur de x est portée par sa partie analytique \Rightarrow inadéquat
- si $0 \leq x_1 \ll x_2$: l'ordre de grandeur de x est comparable à son échelle : $x_0 \sim \delta x \Rightarrow$ on peut poser $x = \delta x \bar{x}$ avec $\delta x = x_2 \Rightarrow \bar{x} \in [\varepsilon \ 1], \varepsilon = \frac{x_1}{x_2}, 0 \leq \varepsilon \ll 1$

II.3 Adimensionnement des fonctions et des champs

Une fois les variables adimensionnées, il faut adimensionner les fonctions et les champs dépendant de ces variables.

Illustration sur les fonctions d'une seule variable : Soit la fonction $x \mapsto y(x)$. Pour adimensionner y il faut :

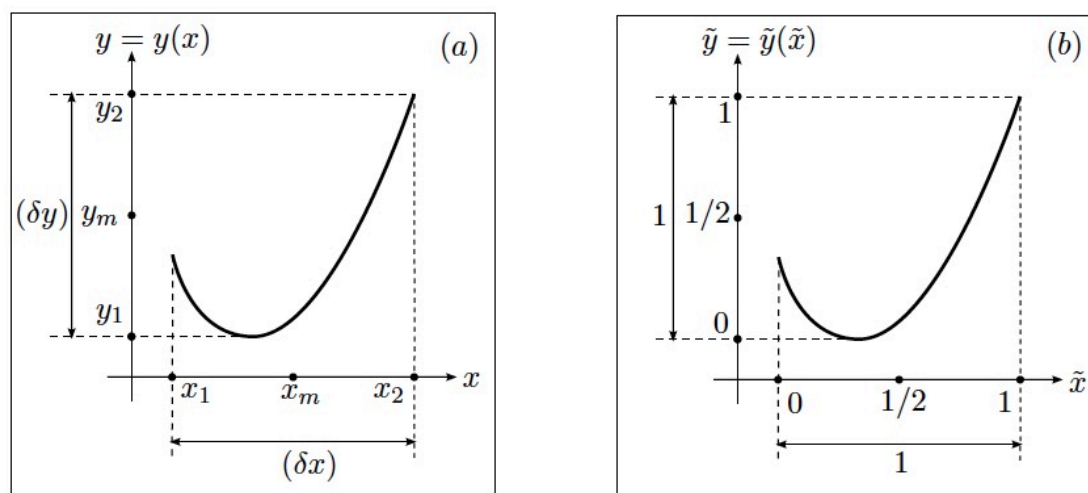
- choisir le domaine d'étude en $x : x \in [x_1 \ x_2]$ et adimensionner $x : x = x_0 + \delta x \bar{x}$ avec $\bar{x} \sim 1$
- étudier si les conditions aux limites du problème imposent des valeurs caractéristiques ou des bornes pour y
- si y varie (en ordre de grandeur) entre y_1 et y_2 sur le domaine $x \in [x_1 \ x_2]$, on adimensionne y de la même manière que les variables d'espace et de temps :

$$y = y_0 + \delta y \bar{y}, \bar{y} \sim 1$$

Ainsi, on effectue un changement de fonction et de variable puisqu'on passe de la fonction $x \mapsto y(x)$ à la fonction $\bar{x} \mapsto \bar{y}(\bar{x})$.

La procédure est la même pour une fonction de plusieurs variables.

Remarque : Adimensionner une fonction représentée sur la figure (a) ci-dessous consiste à lui appliquer des homothéties horizontale et verticale de manière à la faire tenir dans un carré de côté unité, comme représenté sur la figure (b) ci-dessous :



II.4 Adimensionnement des fonctions et des champs

Suite du problème :

Les champs inconnus sont le vecteur vitesse \underline{u} et la pression P :

- l'ordre de grandeur de P est P_0 . Par ailleurs, on sait d'un écoulement de Poiseuille que la pression décroît de l'amont vers l'aval donc l'échelle caractéristique de variation de P vaut ΔP , différence de pression entre l'amont et l'aval. On pose donc $P = P_0 + \Delta P \bar{p}$.
- u_r s'annule à la paroi. Appelons V_0 sa valeur maximale atteinte dans l'écoulement, qui est inconnue à ce stade. Comme l'échelle caractéristique de variation de u_r , V_0 , est comparable à son ordre de grandeur V_0 , on peut poser $u_r = V_0 \bar{u}$, où V_0 est une échelle inconnue.
- u_z s'annule aussi à la paroi. Appelons U_0 sa valeur maximale atteinte dans l'écoulement, qui est inconnue à ce stade. Comme l'échelle caractéristique de variation de u_z , U_0 , est comparable à son ordre de grandeur U_0 , on peut poser $u_z = U_0 \bar{v}$, où U_0 est une échelle inconnue.

II.5 Adimensionnement et analyse physique de l'équation de conservation de la matière

a) Adimensionnement d'équations aux dérivées partielles

α) Illustration sur une fonction d'une seule variable $x \mapsto y(x)$

Adimensionnement de la dérivée première :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\bar{x}}(y_0 + \delta y \bar{y}) \underbrace{\frac{d\bar{x}}{dx}}_{\frac{1}{\delta x}} = \frac{\delta y}{\delta x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

Dans l'expression d'une dérivée première adimensionnée, seules les échelles de x et y , δx et δy apparaissent, pas leurs ordres de grandeur.

Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur :

Comme $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)$, par récurrence on montre que :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\delta y}{(\delta x)^n} \frac{d^n \bar{y}}{d\bar{x}^n}$$

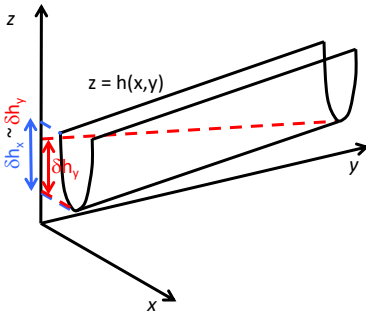
- $\frac{\delta y}{(\delta x)^n}$: échelle de $\frac{d^n y}{dx^n}$ dans le domaine d'étude choisi
- $\frac{d^n \bar{y}}{d\bar{x}^n} \sim 1$: partie analytique de $\frac{d^n y}{dx^n}$

 β) Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables**Dérivées partielles d'ordre 1 :**

Soit la fonction $(x, y) \mapsto h(x, y)$ admettant les adimensionnements suivants :

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + \delta x \bar{x} \\ y = y_0 + \delta y \bar{y} \end{array} \right\} h = h_0 + \delta z \bar{h}(\bar{x}, \bar{y})$$

En supposant que h varie du même ordre de grandeur δh lorsque x, y varient dans le domaine d'étude choisi : $\delta_x h \sim \delta_y h \sim \delta h$, comme illustré sur la figure ci-dessous, alors :



$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\delta h}{\delta x} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \sim 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\delta h}{\delta y} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \sim 1 \end{aligned}$$

N.B. : l'hypothèse $\delta_x h \sim \delta_y h \sim \delta h$ est souvent l'hypothèse que l'on fait en absence d'information sur le comportement de h .

Suite du problème :

Considérons l'équation de conservation de la matière 4.3. Adimensionnons $\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r}$:

$$\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \frac{\partial(R \bar{r} V_0 \bar{u})}{\partial \bar{r}} = \frac{R V_0}{R} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} = V_0 \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}}$$

donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = \frac{1}{R \bar{r}} V_0 \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}}$$

Donc l'équation de conservation de la matière adimensionnée s'écrit :

$$\frac{V_0}{R} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{U_0}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$

En divisant cette relation par U_0 et en la multipliant par R , on obtient :

$$\frac{V_0}{U_0} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{R}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$

b) Analyse physique de l'équation de conservation de la matière

$R \ll L$ donc en posant $\varepsilon = R/L$, $\varepsilon \ll 1$ et on a :

$$\frac{V_0}{U_0} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Pour déterminer $\frac{V_0}{U_0}$, étudions tous les cas possibles pour l'ordre de grandeur de $\frac{V_0}{U_0}$:

- ▷ supposons $\frac{V_0}{U_0} \gg \varepsilon$: comme $\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} \sim 1$ et $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \sim 1$, en ne conservant que le terme prépondérant, l'équation de conservation de la matière s'écrit de manière approchée : $\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} = 0$, soit $\bar{u} = \frac{f(\bar{z})}{\bar{r}}$: non défini en $\bar{r} = 0$ donc inacceptable.
- ▷ supposons $\frac{V_0}{U_0} \ll \varepsilon$: en ne conservant que le terme prépondérant, l'équation de conservation de la matière s'écrit de manière approchée : $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$, soit $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$: écoulement invariant par translation selon z , ce qui n'est pas réaliste puisqu'on cherche précisément à déterminer l'écoulement pour une canalisation de longueur finie.

On en déduit que nécessairement :

$$\frac{V_0}{U_0} \sim \varepsilon$$

Les échelles de vitesse sont dans le même rapport que les échelles de longueur associées. Pour fixer les échelles du problème en accord avec cet ordre de grandeur, posons :

$$\boxed{\frac{V_0}{U_0} = \varepsilon}$$

L'équation de conservation de la matière adimensionnée s'écrit donc :

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4.9}$$

II.6 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

En procédant de même avec l'équation de Navier-Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{V_0^2}{R} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{U_0 V_0}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\Delta P}{\rho R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \nu V_0 \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \\ \frac{U_0 V_0}{R} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{U_0^2}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\Delta P}{\rho L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu U_0 \left[\frac{1}{R^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right]\end{aligned}$$

Compte tenu de $\frac{V_0}{U_0} = \varepsilon$, $\frac{U_0 V_0}{L} = \frac{V_0^2}{R}$ et $\frac{U_0 V_0}{R} = \frac{U_0^2}{L}$. Donc en divisant respectivement par $\frac{V_0^2}{R}$ et $\frac{U_0^2}{L}$:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\Delta P}{\rho V_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\nu}{V_0 R} \left[\left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\Delta P \varepsilon}{\rho U_0 V_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\nu L}{U_0 R^2} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right]\end{aligned}$$

Or $\frac{\Delta P}{\rho V_0^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2}$, $\frac{\nu}{V_0 R} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$, $\frac{\Delta P \varepsilon}{\rho U_0 V_0} = \frac{\Delta P}{\rho U_0^2}$ et $\frac{\nu L}{U_0 R^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$ donc :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \left[\left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (4.10)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (4.11)$$

On constate que dans les équations 4.10 et 4.11, les préfacteurs apparaissant devant les parties analytiques sont sans dimension :

$$\left[\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \right] = 1 \text{ et } \left[\frac{\nu}{U_0 L} \right] = 1$$

Comme les parties analytiques sont sans dimensions, ces équations sont donc aussi sans dimensions :

L'écriture de toutes les grandeurs dimensionnées sous la forme :

$$\text{échelle} \times \text{partie analytique}$$

et la transformation des équations permet toujours d'écrire toutes les équations du problème de départ sous la forme :

$$\sum \text{GSD} \times \underbrace{\text{parties analytiques}}_{\text{GSD}} = 0$$

La raison sous-jacente est le principe de covariance : tout phénomène physique étant indépendant du choix d'unités choisi pour le décrire, il peut s'exprimer en fonction d'équations impliquant des grandeurs sans dimensions qui sont invariantes par changement d'unité.

II.7 Adimensionnement des conditions aux limites

L'adimensionnement étant un changement de variables, les conditions aux limites se réécrivent :

$$\begin{aligned}
 V_0 \bar{u}(\bar{r} / R\bar{r} = R, \bar{z}) &= 0 \quad \forall \bar{z} / 0 \leq L\bar{z} \leq L \\
 U_0 \bar{v}(\bar{r} / R\bar{r} = R, \bar{z}) &= 0 \quad \forall \bar{z} / 0 \leq L\bar{z} \leq L \\
 P_0 + \Delta P \bar{p}(\bar{r}, \bar{z} / L\bar{z} = 0) &= P_0 + \Delta P \quad \forall \bar{r} / 0 \leq R\bar{r} \leq R \\
 P_0 + \Delta P \bar{p}(\bar{r}, \bar{z} / L\bar{z} = L) &= P_0 \quad \forall \bar{r} / 0 \leq R\bar{r} \leq R
 \end{aligned}$$

soit, en simplifiant :

$$\bar{u}(\bar{r} = 1, \bar{z}) = 0 \quad \forall \bar{z} / 0 \leq \bar{z} \leq 1 \quad (4.12)$$

$$\bar{v}(\bar{r} = 1, \bar{z}) = 0 \quad \forall \bar{z} / 0 \leq \bar{z} \leq 1 \quad (4.13)$$

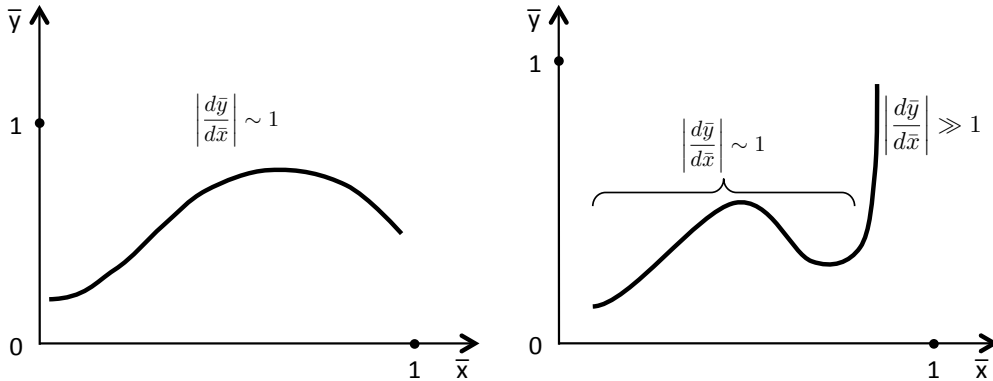
$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z} = 0) = 1 \quad \forall \bar{r} / 0 \leq \bar{r} \leq 1 \quad (4.14)$$

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z} = 1) = 0 \quad \forall \bar{r} / 0 \leq \bar{r} \leq 1 \quad (4.15)$$

II.8 Remarque complémentaire sur l'adimensionnement des dérivées : illustration sur une fonction d'une seule variable

Une fois l'adimensionnement $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\delta y}{\delta x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$ posé, deux cas peuvent se rencontrer a posteriori :

- si l'hypothèse $\bar{y}'(\bar{x}) = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \sim 1$ s'avère physiquement acceptable, comme l'illustre le graphe de gauche de la figure ci-dessous, l'adimensionnement de y' est satisfaisant
- s'il s'avère exister une région du domaine de x “couche limite”) dans laquelle $\left| \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right| \gg 1$, comme l'illustre le graphe de droite de la figure ci-dessous, on ne peut pas supposer que la partie analytique de y' est partout d'ordre unité : l'échelle de $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$ est différente de celle de y . Dans ce cas, on doit scinder le domaine d'étude en deux sous-domaines, la couche limite et le domaine extérieur, dans lesquels les adimensionnements de la fonction et de ses dérivées seront différents : voir chapitre 4.



III Simplifications automatiques du problème

III.1 Principe

A partir de l'écriture adimensionnée du problème, on définit une première approximation du problème où l'on conserve les termes prépondérants et où on supprime les termes identifiés comme petits devant les termes prépondérants en tenant compte de :

- la hiérarchie des processus déjà connue (par exemple : $Re \gg 1$)
- les séparations d'échelles éventuelles : petits rapports d'aspect

Ceci constitue les Simplifications automatiques du problème.

Suite du problème :

Dans ce problème le seul paramètre considéré comme "petit" est le rapport d'aspect $\varepsilon = R/L$ tel que $\varepsilon \ll 1$. Les parties analytiques étant par définition d'ordre unité ($O(1)$), à l'intérieur des crochets des équations 4.10 et 4.11 les termes en $\varepsilon^2 O(1)$ sont donc très petits devant les termes en $O(1)$. Donc en ne conservant que les termes dominants à l'intérieur des crochets, les équations 4.10 et 4.11 s'écrivent de manière approchée :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right) \quad (4.16)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (4.17)$$

L'équation de conservation de la matière 4.9 et les conditions aux limites 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 sont inchangées.

IV Analyse physique et analyse en ordre de grandeur

IV.1 Définition

Objectif : établir une hiérarchie entre les termes apparaissant dans les équations pour pouvoir éventuellement simplifier encore plus le problème.

Méthode :

- Identifier :
 - le(s) moteur(s) du phénomène, de l'écoulement : ce qui le déclenche - sans lui, pas de phénomène : représenté dans les équations par des termes *a priori* prépondérants.
 - le(s) frein(s) du phénomène / de l'écoulement : ce qui limite son amplitude, c'est-à-dire le régule, ou l'atténue : sans lui, le phénomène pourrait voir son amplitude diverger.
 - la/les conséquence(s) du phénomène / de l'écoulement : un/des phénomène(s) induit par l'écoulement mais qui ne constitue ni un frein ni un moteur *a priori* : représenté dans les équations par des termes pas forcément négligeables mais pas forcément prépondérants non plus.

La conséquence peut s'opposer à l'écoulement, c'est-à-dire jouer le rôle de frein, ou pas. Tout ce qu'on peut dire, c'est que le cumul des effets du frein et de la conséquence est d'importance comparable au moteur.

- De cette identification du rôle des termes, on en déduit que :
 - si le frein est négligeable devant la conséquence, c'est forcément la conséquence qui limite / compense principalement le moteur : conséquence \sim moteur
 - si le frein domine la conséquence, c'est le frein qui limite / compense principalement le moteur : frein \sim moteur

On peut synthétiser cette alternative sous la forme symbolique suivante, valable au sens des ordres de grandeur :

$$\text{moteur} \sim \text{Sup}(\text{frein}, \text{conséquence})$$

N.B. : cette hiérarchie s'applique aux termes de l'équation représentant la direction principale du mouvement.

Suite de l'exemple

Analyse physique : L'écoulement de ce fluide dans la conduite cylindrique est :

- déclenché par la différence de pression entre l'amont et l'aval de la conduite : la différence de pression est le moteur de l'écoulement. Ce moteur est représenté par les termes proportionnels à ΔP .
- limité par :

- ▷ le frottement visqueux : la viscosité est un frein de l'écoulement. Ce frein est représenté par les termes proportionnels à ν .
- ▷ l'inertie du fluide : en effet, à l'entrée de la canalisation, le fluide est accéléré depuis l'état de repos dans le réservoir amont à un écoulement dans la canalisation. L'inertie est a priori un autre frein de l'écoulement. Ce frein est représenté par le membre de gauche dans l'équation de Navier-Stokes.

L'écoulement se développe principalement le long de l'axe de la conduite (Oz) ¹ donc la hiérarchie des termes doit être considérée prioritairement selon (Oz) qui est la direction de l'écoulement principal. Considérons donc la projection de l'équation de Navier-Stokes selon l'écoulement principal (Oz) , 4.11 :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right)$$

L'écoulement étant stationnaire, le moteur de l'écoulement est équilibré par la combinaison de ses freins.

- si un frein est négligeable devant l'autre, le moteur est principalement équilibré par le frein dominant
- si les freins sont d'importances comparables, le moteur est équilibré par leur combinaison, donc en ordre de grandeur, le moteur est comparable à chacun des deux freins.

Ce raisonnement peut être résumé par l'égalité symbolique suivante, valable au sens des ordres de grandeur :

$$\text{moteur de pression} \sim \text{Sup}(\text{frein visqueux}, \text{frein inertiel}) \quad (4.18)$$

Analyse en ordre de grandeur

- Les parties analytiques étant d'ordre unité, dans la projection de l'équation de Navier-Stokes selon l'écoulement principal (Oz) , 4.11 :
 - l'ordre de grandeur du terme représentant le moteur de l'écoulement, $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}$ est $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2}$
 - l'ordre de grandeur du terme représentant le frein visqueux, $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right)$, est $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$
 - l'ordre de grandeur du terme représentant le frein inertiel, $\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}$, est l'unité

Par conséquent l'égalité 4.18 se traduit par une relation valable au sens des ordres de grandeur, c'est-à-dire au sens des échelles :

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim \text{Sup} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}, 1 \right)} \quad (4.19)$$

1. Rappelons que l'ordre de grandeur de l'écoulement radial V_0 est bien plus petit, d'un facteur $\varepsilon \ll 1$, que celui de l'écoulement axial U_0

- Etudions les conséquences de cette égalité. Considérons la projection radiale de l'équation de Navier-Stokes 4.10 :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right)$$

dans laquelle le terme d'inertie vaut 1 en ordre de grandeur, le terme de pression $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2}$ et le terme visqueux $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$. L'égalité 4.19 permet de simplifier cette équation. En effet, $1/\varepsilon^2 \gg 1$ donc

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \gg \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} = \text{Sup} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}, 1 \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \gg \text{à la fois } 1 \text{ et } \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$$

donc en ne conservant que le terme dominant dans 4.10 :

$$0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}, \text{ soit : } \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = 0 \text{ donc } \bar{p} = \bar{p}(\bar{z}) \quad (4.20)$$

L'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique ont donc permis de formuler le problème sous une forme simplifiée n'impliquant que les termes dominants : 4.9, 4.11, 4.20, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15.

Remarque : un processus moteur dans une situation peut être un frein dans une autre situation :

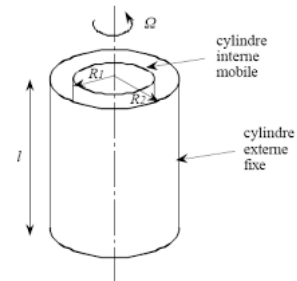
- Une hélice peut être un moteur pour l'écoulement (hélice propulsive de navire) ou un frein pour l'écoulement (éolienne)
- La viscosité est un frein pour l'écoulement de Poiseuille dans une conduite mais est le moteur de l'écoulement dans un rhéomètre de Couette (deux cylindres coaxiaux, l'un fixe, l'autre en rotation qui entraîne le fluide par effet visqueux)



Hélice propulsive



Eoliennes



Rhéomètre de Couette

IV.2 Etude des différents régimes

Etudions les deux régimes concernés par l'égalité 4.19 :

- ▷ si l'inertie domine le frein visqueux : $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \ll 1$ alors le moteur en pression est équilibré principalement par l'inertie : $\text{Sup} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}, 1 \right) = 1$. L'égalité 4.19 devient :

$$\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim 1 \text{ soit } U_0 \sim \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

En injectant $U_0 \sim \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ dans $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \ll 1$, cette inégalité se réécrit :

$$\Delta P \gg \frac{\rho \nu^2}{L^2 \varepsilon^4}$$

On en déduit une prédiction pour l'ordre de grandeur de U_0 basée sur un critère évaluable expérimentalement :

si $\Delta P \gg \frac{\rho \nu^2}{L^2 \varepsilon^4} \left(= \frac{\rho \nu^2 L^2}{R^4} \right)$ alors $U_0 \sim \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$: régime inertiel

Dans cette situation, U_0 vérifie $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim 1$. On peut donc fixer l'échelle de vitesse inconnue U_0 comme : $U_0 = \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$, de manière équivalente $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} = 1$. Avec cette définition, la forme approchée de 4.11 obtenue en ne retenant que les termes dominants (moteur et frein inertiel dominant) est :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{d\bar{p}}{d\bar{z}} \quad (4.21)$$

Le problème approché en ne retenant que les termes dominants est donc : 4.9, 4.21, 4.20, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15. La loi $U_0 \sim \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ est d'ailleurs en accord avec la prédiction $U_0 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$ obtenue en appliquant à cet écoulement dominé par l'inertie le théorème de Bernoulli entre le réservoir amont où le fluide est à la pression $P_0 + \Delta P$ au repos et l'aval de la canalisation au débouché du réservoir aval où le fluide s'écoule à la vitesse U_0 et est à la pression du réservoir aval P_0 .

- ▷ si le frein visqueux domine l'inertie : $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \gg 1$ alors le moteur en pression est équilibré principalement par le frein visqueux : $\text{Sup} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}, 1 \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$. L'égalité 4.19 devient :

$$\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \text{ soit } U_0 \sim \varepsilon^2 \frac{\Delta P L}{\mu}$$

En injectant $U_0 \sim \varepsilon^2 \frac{\Delta P L}{\mu}$ dans $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \gg 1$, cette dernière s'écrit :

$$\Delta P \ll \frac{\rho \nu^2}{L^2 \varepsilon^4}$$

On en déduit :

si $\Delta P \ll \frac{\rho \nu^2}{L^2 \varepsilon^4} \left(= \frac{\rho \nu^2 L^2}{R^4} \right)$ alors $U_0 \sim \varepsilon^2 \frac{\Delta P L}{\mu} \sim \frac{R^2 \Delta P}{\mu L}$: régime visqueux

(4.22)

Dans cette situation, U_0 vérifie $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$. On peut donc définir l'échelle de vitesse inconnue U_0 comme : $U_0 = \varepsilon^2 \frac{\Delta P L}{\mu}$, de manière équivalente $\boxed{\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}}$. Avec cette définition, la forme approchée de 4.11 obtenue en ne retenant que les termes dominants (moteur et frein visqueux dominant) est :

$$0 = -\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right)$$

soit :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{z}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (4.23)$$

Le problème approché en ne retenant que les termes dominants est donc : 4.9, 4.23, 4.20, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15.

Remarques : On constate que :

- l'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique permettent d'identifier deux régimes d'écoulement et de déterminer l'expression non triviale du critère de transition entre ces deux régimes sans avoir à résoudre aucune équation.
- la transition entre les deux régimes, définie par $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \simeq 1$ ne s'écrit pas $\text{Re} \simeq 1$ où $\text{Re} = \frac{U_0 R}{\nu}$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement, comme on pourrait le penser au premier abord, mais $\varepsilon \text{Re} \simeq 1$ (en effet $\varepsilon^{-2} \frac{\nu}{U_0 L} = \varepsilon^{-1} \frac{\nu}{U_0 R} = \varepsilon^{-1} \text{Re}^{-1}$) : ce critère de transition implique bien la longueur de la canalisation L .

Résolution du problème approché dans le régime visqueux - La solution dans le régime visqueux est accessible car le problème est linéaire. L'indépendance de \bar{p} vis-à-vis de \bar{r} permet d'intégrer l'équation 4.23. Compte tenu de la régularité de \bar{v} en $\bar{r} = 0$ et de la condition d'adhérence à la paroi, on trouve :

$$\bar{v} = -\frac{1}{4} \frac{d\bar{p}}{d\bar{z}} (1 - \bar{r}^2)$$

L'équation 4.9 s'intègre alors en :

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{z}^2} \left(\frac{\bar{r}}{2} - \frac{\bar{r}^3}{4} \right)$$

en tenant compte de la régularité de \bar{u} en $\bar{r} = 0$. Et comme $\bar{u}(\bar{r} = 1, \bar{z}) = 0 \forall \bar{z}$, $\frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{z}^2} = 0$ et donc

$$\boxed{\bar{u} \equiv 0}$$

Compte tenu des conditions imposées à \bar{p} aux extrémités de la canalisation,

$$\boxed{\bar{p} = 1 - \bar{z}}$$

et $\frac{d\bar{p}}{d\bar{z}} = -1$ donc

$$\boxed{\bar{v} = \frac{1}{4} (1 - \bar{r}^2)}$$

En revenant aux variables dimensionnées initiales, cette solution s'écrit :

$$p = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{z}{L}\right),$$

$$v = \frac{R^2 \Delta P}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

et

$$u = 0$$

Cette solution approchée dans le régime visqueux est en fait celle pour une conduite de longueur infinie (écoulement de Poiseuille).

IV.3 Retour sur l'équation de conservation de la matière : Principe de Non Simplification Abusive

Un autre raisonnement aboutissant à 4.9 consiste à constater que l'équation de conservation de la matière 4.3 ne fait intervenir aucun terme représentant un moteur ou un frein de l'écoulement. Par conséquent, aucun argument physique ne permet d'établir une hiérarchie entre les deux termes. Simplifier l'équation 4.3 serait abusif en absence d'autre information sur l'écoulement et il est raisonnable de considérer qu'a priori les deux termes sont du même ordre de grandeur : ce raisonnement peut être dénommé **Principe de Non Simplification Abusive** des équations.

IV.4 Remarque finale : caractère régulier du problème en régime visqueux

Dans le régime visqueux défini par $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \gg 1$ (cf. relation 4.22), l'équation 4.11 s'écrit :

$$\underbrace{\eta \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)}_{\Delta} = \underbrace{-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right)}_{D_0} \quad \text{où } \eta = \left(\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \right)^{-1} \quad (4.24)$$

compte tenu de la définition de l'échelle U_0 adoptée plus haut qui permet d'écrire $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L}$. Comme dans ce régime $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\nu}{U_0 L} \gg 1$, on a $\frac{\Delta P}{\rho U_0^2} \gg 1$ donc $\eta \ll 1$. Cette équation, à laquelle on adjoint les équations 4.9 4.20, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15, constitue le problème D_η à résoudre pour $0 < \varepsilon \ll 1$ et $\eta \ll 1$. Il apparaît comme un problème D_0

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (4.25)$$

perturbé par la petite perturbation $\eta \Delta$ où Δ est un opérateur défini par $\Delta = \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)$. Nous avons déterminé la solution $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{p}_0\} \Leftrightarrow \{u_0, v_0, p_0\}$ à D_0 qui est telle que :

$$\bar{u}_0 = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0,$$

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2) \Leftrightarrow v_0 = \frac{R^2 \Delta P}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

$$\bar{p}_0 = 1 - \bar{z} \Leftrightarrow p_0 = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{z}{L}\right).$$

Cette solution est-elle une approximation satisfaisante de D_η ?

- la solution à D_0 vérifie les conditions aux limites du problème D_η , c'est-à-dire coïncide avec la solution de D_η là où ses valeurs sont connues,
- l'expérience montre que la solution à D_0 décrit bien la solution à D_η dans tout le domaine d'étude dans la limite $\eta \ll 1$. Dit autrement,

$$\text{solution } (D_\eta) \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{\text{uniformément}} \text{solution } \underbrace{\left(\lim_{\eta \rightarrow 0} D_\eta\right)}_{D_0}$$

Cette convergence uniforme de la solution de D_η vers celle de D_0 indique que le problème D_η est régulier en $\eta = 0$, et qu'il est pertinent d'approximer la solution à D_η par la solution à D_0 .

Chapitre 5

Problèmes singuliers - Solutions raccordées

I Problèmes réguliers, problèmes singuliers

Voir planches.

II Problème singulier et sa solution approchée raccordée sur un exemple

Voir planches.

II.1 Problème de départ

On considère le problème mathématique D_ε suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon f''(x) + f'(x) = a, \quad a \sim 1, \quad a \neq 1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (5.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x=0) \end{array} \right. = 0 \quad (5.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x=1) \end{array} \right. = 1 \quad (5.1c)$$

Ce problème est qualitativement analogue au problème de la couche limite visqueuse à $Re \gg 1$ ($\varepsilon = Re^{-1} \ll 1$) dans un écoulement de Couette.

Nous allons constater que ce problème D_ε est singulier. Le but de ce chapitre est de se donner une méthode de détermination d'une solution approchée satisfaisante.

II.2 Problème non perturbé

Il est naturel de supposer en premier lieu qu'au sens des ordres de grandeur $f''(x) \sim f'(x) \sim 1$, et que compte tenu du régime $\varepsilon \ll 1$ considéré, $|\varepsilon f''(x)| \ll |f'(x)|$. On peut donc supposer que la solution à D_ε pourrait être approximée de manière satisfaisante

par la solution à un problème plus simple, noté D_0 , dans l'équation différentielle duquel $\varepsilon f''(x)$ est négligé devant $f'(x)$:

$$\begin{cases} f'(x) = a, & a \sim 1, a \neq 1, \varepsilon \ll 1, x \in [0, 1] & (5.2a) \\ f(x=0) = 0 & & (5.2b) \\ f(x=1) = 1 & & (5.2c) \end{cases}$$

Symboliquement, D_ε peut être écrit sous la forme : $D_\varepsilon = D_0 + \varepsilon \Delta$, où D_0 est le problème non perturbé (correspondant à $\varepsilon = 0$).

Notons que l'équation différentielle de D_0 est d'ordre 1 mais qu'on impose à la solution de vérifier deux conditions aux limites, c'est-à-dire une condition de trop.

On doit donc répondre à la question suivante : La solution f_0 de D_0 est-elle une approximation acceptable de la solution de D_ε ? Autrement dit, le problème est-il régulier ou singulier ?

II.3 Singularité du problème

f_0 , solution de D_0 vérifie $f'_0(x) = a$ donc s'écrit : $f_0(x) = ax + b$, b constante encore indéterminée.

▷ si on impose $f_0(0) = 0$, $b = 0$ donc

$$f_0(x) = ax \quad (5.3)$$

et alors $f_0(1) = a \neq 1$ (voir la figure 5.1 b).

▷ si on impose $f_0(1) = 1$, $a + b = 1$ donc

$$f_0(x) = ax + 1 - a \quad (5.4)$$

et alors $f_0(0) = 1 - a \neq 0$ car $a \neq 1$ (voir la figure 5.1 a).

▷ si on impose $f_0(0) = 0$ et $f_0(1) = 1$, la solution ne peut donc pas être continue (voir la figure 5.1 c).

f_0 ne peut donc pas simultanément vérifier les deux conditions aux limites et être continue, donc f_0 n'est pas une approximation acceptable de D_ε puisque la solution à D_ε ne prend pas les mêmes valeurs que f_0 aux limites de D . **D_ε est donc un problème singulier en $\varepsilon = 0$.** On dit aussi que $\varepsilon \Delta$ est une perturbation singulière de D_0 .

II.4 Singularité, domaine singulier

Le fait que f_0 ne convienne pas comme solution de D_ε indique qu'au moins quelque part dans le domaine d'étude $\mathcal{D} = [0, 1]$ la solution ne vérifie pas $|\varepsilon f''(x)| \ll |f'(x)|$. Le domaine dans lequel la solution ne vérifie pas $|\varepsilon f''(x)| \ll |f'(x)|$, appelé **Domaine Intérieur**, est centré sur une valeur particulière de x , appelée **une singularité**.

Définition : **Domaine intérieur (DI)** = sous-domaine du domaine d'étude \mathcal{D} contenant la singularité et dans lequel la singularité est perceptible. Sa taille μ , faible comparée à celle

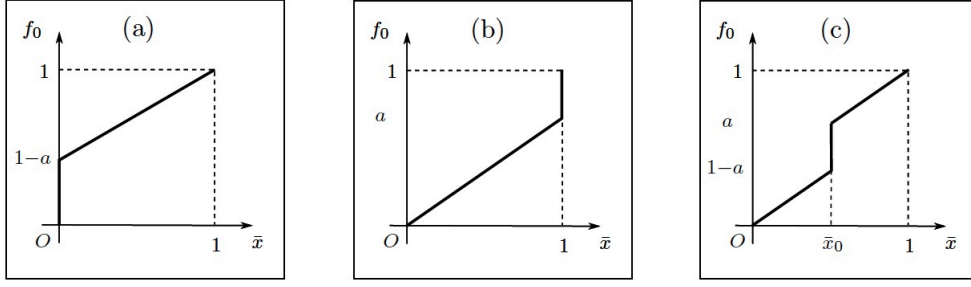


FIGURE 5.1 – Localisations possibles de la singularité du problème : (a) soit en $x_0 = 0$ (“couche limite” à gauche), (b) soit en $x_0 = 1$ (“couche limite” à droite), (c) soit en $0 < x_0 < 1$ (“choc”).

de \mathcal{D} est fonction de ε : $\mu(\varepsilon) \ll 1$. Le domaine extérieur (DE) est l’extérieur du domaine intérieur, c’est-à-dire le reste de \mathcal{D} .

La singularité, point au voisinage duquel la solution ne vérifie pas $|\varepsilon f''(x)| \ll |f'(x)|$, présente plusieurs localisations possibles illustrées sur la figure 5.1 : borne inférieure du domaine d’étude (“couche limite” à gauche), borne supérieure (“couche limite” à droite), ou à l’intérieur de \mathcal{D} (“choc”).

II.5 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Pour déterminer une solution approchée acceptable de D_ε , une méthode consiste donc à :

- identifier dans quelle partie du domaine d’étude, appelée domaine intérieur, le terme $\varepsilon f''$ est d’importance comparable à f' , c’est-à-dire où se situe la singularité dans le domaine d’étude et quelle est la taille du domaine intérieur,
- déterminer une solution approchée au problème dans le domaine intérieur en considérant que le terme $\varepsilon f''$ n’est pas négligeable dans ce domaine (principe de moindre dégénérescence)
- raccorder la solution approchée au problème déterminée dans le domaine intérieur à la solution approchée déterminée dans le domaine extérieur,
- déterminer le développement composite de la solution.

C’est la méthode de la solution raccordée, plus généralement **méthode des développements asymptotiques raccordés**, pour déterminer une solution approchée au problème singulier.

III Résolution par la méthode des DAR

III.1 Ecriture du problème dans le domaine intérieur

On suppose que la solution vérifie $|\varepsilon f''(x)| \ll |f'(x)|$ presque partout dans le domaine d’étude sauf dans un proche voisinage d’une singularité située en x_0 : le domaine intérieur est donc supposé de taille caractéristique $\mu(\varepsilon)$ petite devant celle du domaine d’étude :

$\mu(\varepsilon) \ll 1$. On va déterminer μ **en tenant compte dans le domaine intérieur du terme qu'on avait négligé en première approche**, c'est-à-dire en définissant μ tel que $|\varepsilon f''| \sim |f'|$.

Pour déterminer μ , réécrivons le problème à l'échelle du domaine intérieur centré sur la singularité supposée située en x_0 ("zoomons" sur le domaine intérieur), en changeant de variable de manière à ce que la nouvelle variable \tilde{x} soit adaptée à la description du domaine intérieur. Pour cela, posons :

$$x = x_0 + \mu \tilde{x}$$

Ainsi, en faisant varier \tilde{x} dans un intervalle de taille caractéristique 1, on parcourt le domaine intérieur (o.d.g. : ordre de grandeur) :

$\tilde{x} \sim 1 \leftrightarrow \tilde{x}$ parcourt en o.d.g. $[-1, 1] \leftrightarrow x$ parcourt en o.d.g. $[x_0 - \mu, x_0 + \mu]$, cad le domaine intérieur

Réécrivons D_ε à l'échelle du domaine intérieur / adimensionnons le problème à l'échelle du domaine intérieur en effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \text{domaine intérieur} &\rightarrow \text{intervalle de taille caractéristique 1} \\ x &\mapsto \tilde{x} \sim 1 \\ f(x) &\rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Or

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}} \text{ et } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 \tilde{f}}{d\tilde{x}^2}$$

donc $\varepsilon f''(x) + f'(x) = a$ devient $\frac{\varepsilon}{\mu^2} \tilde{f}''(\tilde{x}) + \frac{1}{\mu} \tilde{f}'(\tilde{x}) = a$, soit :

$$\varepsilon \tilde{f}''(\tilde{x}) + \mu(\varepsilon) \tilde{f}'(\tilde{x}) = \mu(\varepsilon)^2 a$$

L'extension du domaine intérieur μ est choisie de manière à tenir compte du terme qu'on avait négligé en première approche, c'est-à-dire à simplifier moins le problème qu'en première approche : c'est le principe **principe de moindre dégénérescence** (moindre simplification).

Dans le domaine intérieur on considère donc que $|\varepsilon f''| \sim |f'|$, soit, une fois le problème réécrit à l'échelle du domaine intérieur :

$$\varepsilon \tilde{f}''(\tilde{x}) \sim \mu(\varepsilon) \tilde{f}'(\tilde{x})$$

On suppose un comportement régulier de la solution réécrite à l'échelle du domaine intérieur, c'est-à-dire $\tilde{f}'' \sim \tilde{f}' \sim 1$, donc :

$$\boxed{\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon}$$

Cette égalité définit la taille du domaine intérieur. En accord avec cette égalité, on peut poser :

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon$$

Avec cette définition de μ , l'équation différentielle se réécrit donc :

$$\tilde{f}'' + \tilde{f}' = \varepsilon a \quad (5.5)$$

avec des conditions aux limites dépendant de la position de la singularité, c'est-à-dire de la valeur de x_0 (voir plus loin). On appelle D_ε^I ce problème écrit à l'échelle du domaine intérieur : (5.5) + CL adaptées.

Comme $\varepsilon \ll 1$ et $\tilde{f}'' \sim \tilde{f}' \sim 1$, on a :

$$\varepsilon a \ll 1, \tilde{f}'', \tilde{f}'$$

Il est là aussi naturel de supposer que la solution à ce problème pourrait être approximée de manière satisfaisante par la solution à un problème plus simple, noté D_0^I , dont l'équation différentielle est :

$$\tilde{f}'' + \tilde{f}' = 0$$

La solution \tilde{f}_0 de D_0^I est telle que : $\tilde{f}_0' = -C_1 e^{-\tilde{x}}$ (C_1 constante), soit :

$$\tilde{f}_0(\tilde{x}) = C_1 e^{-\tilde{x}} + C_2 \text{ avec } C_1, C_2 \text{ constantes} \quad (5.6)$$

III.2 Principe du raccordement

Grâce à la prise en compte de la singularité, la solution de D_ε est maintenant approximée par intervalles :

- au voisinage de la singularité (domaine intérieur) par la solution \tilde{f}_0 de D_0^I , définie par (5.6)
- à l'extérieur du domaine intérieur (= domaine extérieur) par la solution f_0 de D_0 , définie par (5.3) ou (5.4) selon la conditions aux limites imposée à la solution,

La solution à D_ε étant C_2 , elle est continue. On cherche donc à rendre sa solution approchée définie par morceaux continue. Cette contrainte de continuité s'écrit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \text{singularité}} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \text{domaine extérieur}} \tilde{f}_0(\tilde{x})}$$

Mais la solution approchée est supposée être d'autant plus proche de la solution exacte de D_ε que ε est petit, donc le raccordement des morceaux de solution approchée doit être vérifié dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow \text{singularité}} f_0(x)$ revient à déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$.

Déterminer $\lim_{\tilde{x} \rightarrow \text{domaine extérieur}} \tilde{f}_0(\tilde{x})$ consiste à déterminer la limite de $\tilde{f}_0(\tilde{x})$ lorsque la distance à la singularité devient comparable, quoique encore inférieure, à la taille du domaine extérieur qui est de l'ordre de l'unité : $\mu \tilde{x} \lesssim 1$. Comme $\mu = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, cela revient à évaluer cette limite pour $\tilde{x} \rightarrow \infty$. Le détail du raccordement dépend de la localisation de la singularité.

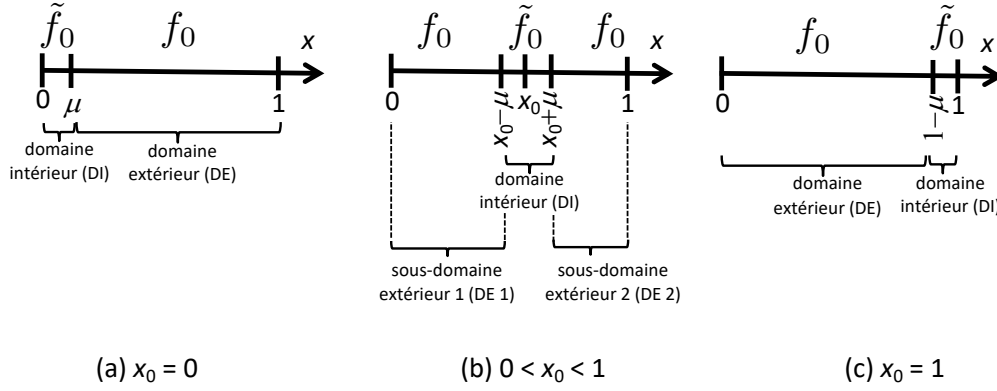


FIGURE 5.2 – Les trois cas de localisation de la singularité.

III.3 Raccordement et localisation de la singularité

A ce stade, on ne sait pas où se situe la singularité sur le segment $[0, 1]$. On doit distinguer trois cas correspondant aux trois localisations possibles de la singularité : $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ ou $0 < x_0 < 1$. **Le raccordement de la solution approchée définie par morceaux de solution permet de localiser la singularité.** En effet :

- ▷ supposons $x_0 = 0$ (figure 5.2 a) : le changement de variable $x \mapsto \tilde{x}$ s'écrit $x = \mu\tilde{x}$ et le domaine intérieur est tel que $\tilde{x} \geq 0$:
 - le domaine intérieur inclut le point d'abscisse 0, donc c'est à la solution écrite dans le domaine intérieur de vérifier la condition aux limites en $x = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$: $\tilde{f}_0(\tilde{x} = 0) = 0$. Cela implique $C_1 + C_2 = 0$.
 - le domaine extérieur inclut le point d'abscisse 1, donc c'est à la solution écrite dans le domaine extérieur de vérifier la condition aux limites en $x = 1$: $f_0(x = 1) = 1$. Cela implique $f_0(x) = ax + 1 - a$.
 - le raccordement s'écrit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x})}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + 1 - a) = 1 - a$$

et

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} (C_1 e^{-\tilde{x}} + C_2) = C_2$$

soit $C_2 = 1 - a = -C_1$ donc $\tilde{f}_0(\tilde{x}) = (1 - a)(1 - e^{-\tilde{x}})$.

- ▷ supposons $x_0 = 1$ (figure 5.2 c) : le changement de variable $x \mapsto \tilde{x}$ s'écrit $x = 1 + \mu\tilde{x}$ et le domaine intérieur est tel que $\tilde{x} \leq 0$:
 - le domaine intérieur inclut le point d'abscisse 1, donc c'est à la solution écrite dans le domaine intérieur de vérifier la condition aux limites en $x = 1 \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$: $\tilde{f}_0(\tilde{x} = 0) = 1$. Cela implique $C_1 + C_2 = 1$.

- le domaine extérieur inclut le point d'abscisse 0, donc c'est à la solution écrite dans le domaine extérieur de vérifier la condition aux limites en $x = 0$: $f_0(x = 0) = 0$. Cela implique $f_0(x) = ax$.
- le raccordement s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x})$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax = a.$$

Or

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} (C_1 e^{-\tilde{x}} + C_2) \text{ est indéfinie}$$

On ne peut donc pas construire une solution par morceaux raccordés vérifiant les deux conditions aux limites dans l'hypothèse $x_0 = 1$.

▷ supposons $0 < x_0 < 1$ (figure 5.2 b) : le changement de variable $x \mapsto \tilde{x}$ s'écrit $x = x_0 + \mu \tilde{x}$ et le domaine intérieur est parcouru avec \tilde{x} positif et négatif :

- le domaine intérieur n'inclut aucune limite du domaine d'étude.
- le domaine extérieur inclut les deux limites $x = 0$ et $x = 1$ du domaine d'étude, donc c'est à la solution écrite par morceaux dans le domaine extérieur de vérifier les deux conditions aux limites. Dans le sous-domaine extérieur 1, $f_0(x) = ax$ vérifie bien $f_0(0) = 0$ tandis que dans le sous-domaine extérieur 2 $f_0(x) = ax + 1 - a$ vérifie bien $f_0(1) = 1$.
- le raccordement s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x})$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_0(x) = ax_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_0(x) = ax_0 + 1 - a$$

et

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} (C_1 e^{-\tilde{x}} + C_2) = C_2.$$

Par contre,

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} (C_1 e^{-\tilde{x}} + C_2) \text{ est indéfinie.}$$

On ne peut donc pas construire une solution par morceaux raccordés vérifiant les deux conditions aux limites dans l'hypothèse $0 < x_0 < 1$.

La seule solution approchée raccordée est celle correspondant à $x_0 = 0$: on en conclut que :

- la singularité du problème est donc située en $x_0 = 0$,
- le domaine intérieur est de taille $\mu = \varepsilon$,

— la solution approchée s'écrit par morceaux raccordés (avec $x = x_0 + \mu\tilde{x} = \varepsilon\tilde{x}$) :

$$\begin{cases} f(x) \simeq f_0(x) & = ax + 1 - a & \text{pour } x \in [\varepsilon, 1] \end{cases} \quad (5.7a)$$

$$\begin{cases} f(x) \simeq \tilde{f}_0\left(\tilde{x} = \frac{x}{\varepsilon}\right) = (1-a)(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) & \text{pour } x \in [0, \varepsilon] \end{cases} \quad (5.7b)$$

Les morceaux raccordés de solution sont représentés sur la figure 5.3.

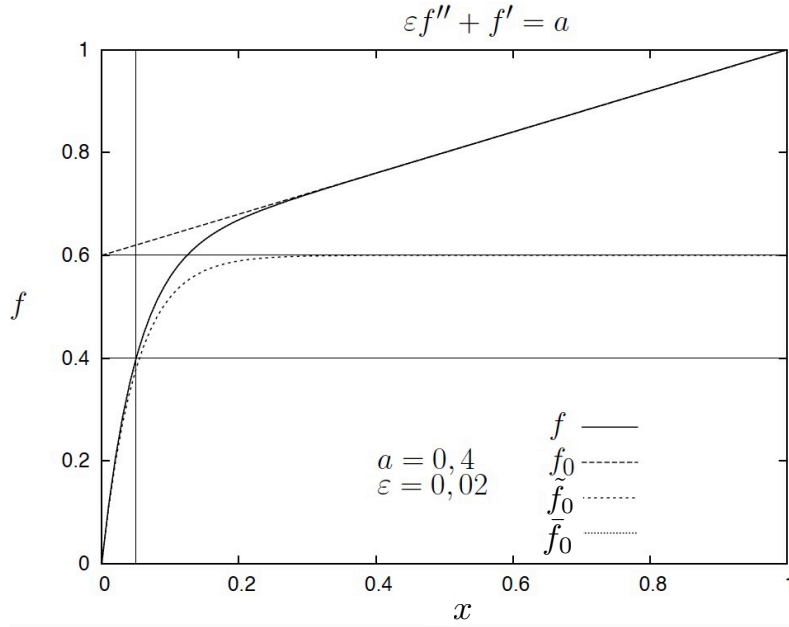


FIGURE 5.3 – f : Solution exacte à l'équation différentielle $\varepsilon f'' + f' = a$ avec $a = 0,4$ et $\varepsilon = 0,02$ - f_0 : solution approchée dans le domaine extérieur - \tilde{f}_0 : solution approchée dans le domaine intérieur - \bar{f}_0 : solution composite qui coïncide avec la solution exacte f pour ce problème linéaire particulier.

En synthétisant, la condition de raccordement se réécrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) \text{ selon le signe de } \tilde{x}$$

La condition de raccordement peut s'exprimer comme : “la limite en sortant du domaine intérieur de la solution dans le domaine intérieur est égale à la limite de la solution dans le domaine extérieur en tendant vers le domaine intérieur.”

III.4 Solution composite

On peut écrire une solution approchée composite, c'est-à-dire valable dans tout le domaine d'étude, notée \bar{f}_0 , en combinant solution dans le DS et solution dans le DE

comme suit :

solution composite = solution dans DS + solution dans le DE – leur limite commune dans le DI
--

$\bar{f}_0 = \tilde{f}_0 + f_0 - \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$

Dans le cas de l'exemple étudié, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{f}_0(\tilde{x}) = 1 - a$, donc :

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_0(x) &= \underbrace{ax + (1 - a)}_{f_0(x)} + \underbrace{(1 - a)(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})}_{\tilde{f}_0(\tilde{x}=\frac{x}{\varepsilon})} - \underbrace{(1 - a)}_{\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x)} \\
 &= (1 - a)(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) + ax
 \end{aligned}$$

qui coïncide de plus avec la solution exacte connue de ce problème linéaire, voir la figure 5.3.

Chapitre 6

La couche limite visqueuse à $\text{Re} \gg 1$

Introduction

Les écoulements à grand nombre de Reynolds ($\text{Re}^{-1} \ll 1$) sont singuliers dans le sens où ils sont très différents de leur prédiction selon le modèle d'écoulement parfait, c'est-à-dire d'écoulement au sein duquel les effets visqueux seraient rigoureusement nuls ($\nu = 0$, glissement possible), correspondant à $\frac{\nu}{UL} = \text{Re}^{-1} = 0$. Dans ce chapitre, nous allons déterminer la solution raccordée pour un écoulement à $\text{Re} \gg 1$ le long d'une plaque plane, c'est-à-dire mettre en évidence l'existence d'une couche limite visqueuse et décrire ses propriétés principales.

I Equations de couche limite

On considère l'écoulement d'un fluide homogène de masse volumique ρ et de viscosité μ autour d'une plaque plane d'épaisseur nulle, infiniment large et de longueur L . La plaque présente un angle d'incidence nul par rapport à l'écoulement. En amont de la plaque, l'écoulement est homogène de vitesse \underline{U} et de pression P_0 , voir la figure 6.1. L'écoulement est supposé isovolume stationnaire bidimensionnel, de nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$ où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique.

L'écoulement est symétrique par rapport à la plaque, donc on se limite à sa description au-dessus de la plaque. En utilisant les coordonnées cartésiennes associées au repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$, le champ de vitesse du fluide s'écrit $\underline{u} = u(x, y) \underline{e}_x + v(x, y) \underline{e}_y$ et le champ de pression $p(x, y)$. L'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière pour un écoulement isovolume :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

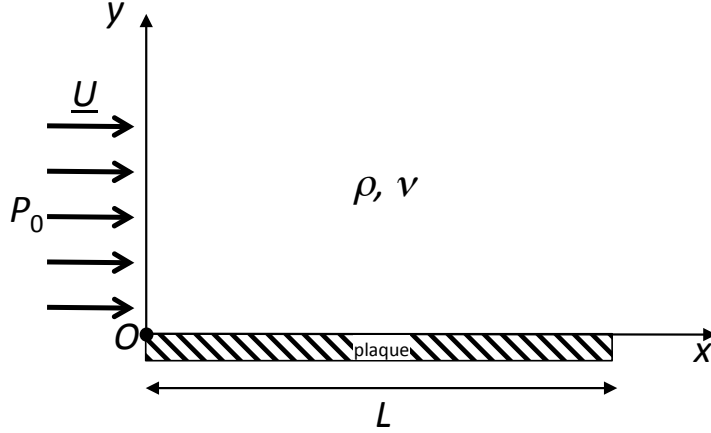


FIGURE 6.1 – Géométrie de l'écoulement autour d'une plaque plane.

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & (6.2a) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & (6.2b) \end{cases}$$

La plaque étant imperméable et le fluide au contact de la plaque adhérant à la plaque par viscosité, les conditions imposées à u et v le long de la plaque immobile sont :

$$u(x, y = 0) = 0 \quad \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L \text{ (adhérence)} \quad (6.3)$$

$$v(x, y = 0) = 0 \quad \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L \text{ (imperméabilité)} \quad (6.4)$$

A la verticale du bord d'attaque de la plaque, c'est-à-dire le long de la demi-droite définie par $\{x = 0, y > 0\}$, l'écoulement est l'écoulement incident homogène non perturbé : u , v et p vérifient :

$$\begin{aligned} u(x = 0, y) &= U \quad \forall y \text{ tel que } y > 0 \\ v(x = 0, y) &= 0 \quad \forall y \text{ tel que } y > 0 \\ p(x = 0, y) &= P_0 \quad \forall y \text{ tel que } y > 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans le régime $Re \gg 1$, on observe qu'à une distance de l'ordre de L de part et d'autre de la plaque l'écoulement n'est pas perturbé par la plaque, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} u(x, y \sim L) \simeq U \quad \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L & (6.5a) \\ v(x, y \sim L) \simeq 0 \quad \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L & (6.5b) \\ p(x, y \sim L) \simeq P_0 \quad \forall x \text{ tel que } 0 \leq x \leq L & (6.5c) \end{cases}$$

Choisissons un domaine d'étude de taille comparable à celle de la plaque, c'est-à-dire défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \lesssim L \\ 0 \leq y \lesssim L \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.6a) \\ (6.6b) \end{matrix}$$

Pour déterminer une solution approchée du problème dans ce domaine, on procède à une analyse physique du problème, qui commence par son adimensionnement.

I.1 Adimensionnement à l'échelle de la plaque

Pour étudier l'écoulement à l'échelle de la plaque, on définit plus précisément le domaine d'étude comme le volume au-dessus de la plaque de dimensions $L \times L$ dans le plan (Oxy) . Celui-ci est représenté sur la figure 6.2.

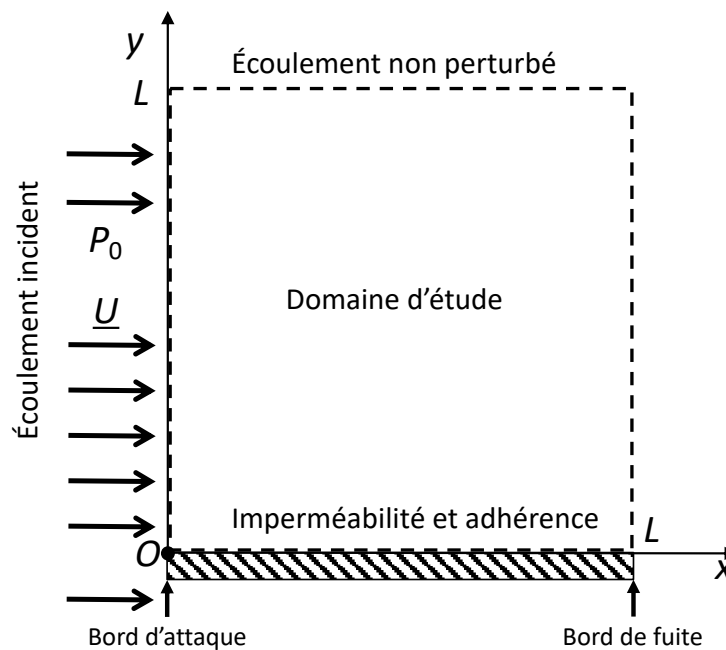


FIGURE 6.2 – Domaine d'étude et conditions aux limites.

a) Adimensionnement du domaine d'étude

Le domaine d'étude est donc défini par :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq L \\ 0 &\leq y \leq L. \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} x &= L \bar{x}, \\ y &= L \bar{y}, \end{aligned}$$

le domaine d'étude est donc défini par :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{x} \leq 1 \\ 0 &\leq \bar{y} \leq 1 \end{aligned}$$

b) Adimensionnement des champs inconnus

- u varie de 0 à U dans le domaine d'étude, donc on peut poser $u = U \bar{u}$, $\bar{u} \sim 1$.
- On sait que v s'annule à la plaque et est nulle à la verticale du bord d'attaque et loin au-dessus de la plaque. Donc aucune valeur caractéristique de v n'est prescrite par les conditions aux limites, et aucune échelle caractéristique de variation de v ne peut être évaluée. On pose donc :

$$v = V \bar{v}, \bar{v} \sim 1$$

où V l'échelle de v , inconnue à ce stade.

- p vaut P_0 à la verticale du bord d'attaque et loin au-dessus de la plaque, donc sa valeur caractéristique est P_0 , mais son échelle est indéterminée. On pose donc :

$$p = P_0 + \delta p \bar{p}, \bar{p} \sim 1$$

où δp est l'échelle de p , inconnue à ce stade.

c) Adimensionnement de l'équation de conservation de la matière

L'équation (6.1) adimensionnée s'écrit :

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

En absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il convient de ne pas trop simplifier sa description donc de supposer qu'aucun terme dans l'équation ne domine a priori (Principe de Non Simplification Abusive). Donc $U \sim V$. Dans la suite, on pose $V = U$.

d) Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Les équations (6.2a) et (6.2b) adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) & (6.7a) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) & (6.7b) \end{cases}$$

e) Adimensionnement des conditions aux limites

Les conditions aux limites adimensionnées s'écrivent :

- à la verticale du bord d'attaque :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x} = 0, \bar{y}) &= 1 \quad \forall \bar{y} \text{ tel que } 0 < \bar{y} \leq 1 \\ \bar{v}(\bar{x} = 0, \bar{y}) &= 0 \quad \forall \bar{y} \text{ tel que } 0 < \bar{y} \leq 1 \\ \bar{p}(\bar{x} = 0, \bar{y}) &= 0 \quad \forall \bar{y} \text{ tel que } 0 < \bar{y} \leq 1\end{aligned}$$

- au contact de la plaque :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} = 0) &= 0 \quad \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 0) &= 0 \quad \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1\end{aligned}$$

- à distance L de la plaque, on suppose que l'écoulement est non perturbé :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} = 1) &= 1 \quad \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 1) &= 0 \quad \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y} = 1) &= 0 \quad \forall \bar{x} \text{ tel que } 0 \leq \bar{x} \leq 1\end{aligned}$$

f) Problématique

Le problème 6.7 s'écrit de manière symbolique :

$$\text{Euler} + \text{Re}^{-1} \times \text{termes de viscosité}$$

Compte tenu de $\text{Re} \gg 1$, les termes visqueux apparaissent comme une petite perturbation à l'équation d'Euler. Le problème approché, non perturbé, est donc l'écoulement obéissant à l'équation d'Euler, c'est-à-dire l'écoulement parfait.

La question est : la solution S_0 au problème approché $D_0 = \text{Euler}$ est-elle physiquement satisfaisante ?

I.2 Ecoulement non perturbé

Déterminons la solution au problème non perturbé, correspondant à $\text{Re}^{-1} = 0$. La solution recherchée est l'écoulement parfait obéissant à l'équation d'Euler :

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}\end{aligned}$$

et est susceptible de glisser le long de la plaque, c'est-à-dire ne vérifie pas obligatoirement la condition d'adhérence $\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$.

La direction principale de l'écoulement est (Ox) .

Analyse physique :

- le moteur de l'écoulement est l'écoulement incident. En effet, sans l'écoulement incident sur la plaque, pas d'écoulement au-dessus de la plaque car il n'y a pas d'autre source pour cet écoulement dans le domaine d'étude. Ce moteur est représenté dans la projection selon (Ox) par le terme d'inertie $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ qui est d'ordre de grandeur l'unité,
- les forces de pression, représentées par le terme $\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$, sont une conséquence de l'écoulement d'ordre de grandeur $\frac{\delta p}{\rho U^2}$.

En absence de frein à cet écoulement stationnaire de fluide parfait, c'est la conséquence qui compense le moteur : en ordre de grandeur, cela se traduit par :

$$\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$$

Posons $\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1$. Le problème se réécrit :

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{aligned}$$

L'écoulement homogène non perturbé $\{\bar{u} = 1, \bar{v} = 0, \bar{p} = 0\}$ (correspondant à $\{u = U, p = P_0\}$ en variables dimensionnées) est une solution exacte de ce problème simplifié. En effet, l'écoulement homogène annule tous les termes dans les edp décrivant l'écoulement. Par ailleurs, il vérifie les conditions aux limites d'imperméabilité de la plaque, à la verticale du bord d'attaque, et à distance L au-dessus de la plaque. Malheureusement, cette solution a le défaut de glisser à la paroi, c'est-à-dire de ne pas vérifier l'une des conditions aux limites imposées à l'écoulement réel. Cette solution est donc non satisfaisante.

Problème singulier — D'un point de vue formel, en posant $\varepsilon = Re^{-1}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{solution de } \underbrace{D_\varepsilon}_{\text{Navier-Stokes}}) \neq \text{solution de } (\underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon}_{D_0 = \text{Euler} + \text{glissement}})$$

au sens d'une convergence uniforme, c'est-à-dire sur tout le domaine. En effet, la solution de $\{\text{Euler} + \text{glissement}\}$ est l'écoulement parfait homogène qui ne s'annule pas à la paroi. Donc on peut considérer que l'écoulement parfait homogène est une solution approchée satisfaisante à l'intérieur du domaine d'étude, mais pas à sa frontière constituée par la paroi. La convergence n'est donc pas uniforme. Le problème est donc singulier.

Pour déterminer une solution plus satisfaisante, employons la méthode des développements asymptotiques raccordés, c'est-à-dire :

- supposons qu'à $Re \gg 1$ les effets de la viscosité sont négligeables presque partout sauf au voisinage d'une ligne singulière qu'on va supposer d'emblée coïncider avec la plaque, c'est-à-dire en $y = 0$,

- déterminons une solution approchée du problème écrit dans le voisinage de cette ligne singulière qui est le domaine intérieur et est appelé la couche limite visqueuse (CLV),
- enfin raccordons-la à la solution approchée du problème en-dehors de ce voisinage, c'est-à-dire dans le domaine extérieur, qui s'identifie à un écoulement parfait homogène.

I.3 Ecoulement dans la couche limite visqueuse

a) Description de l'écoulement dans la couche limite visqueuse

Le voisinage de la plaque dans lequel les effets de la viscosité sont supposés notables, appelé couche limite visqueuse et noté CLV, est d'épaisseur notée δ supposée petite par rapport à L : $\delta \ll L$. Le domaine intérieur est donc défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (6.8a)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (6.8b)$$

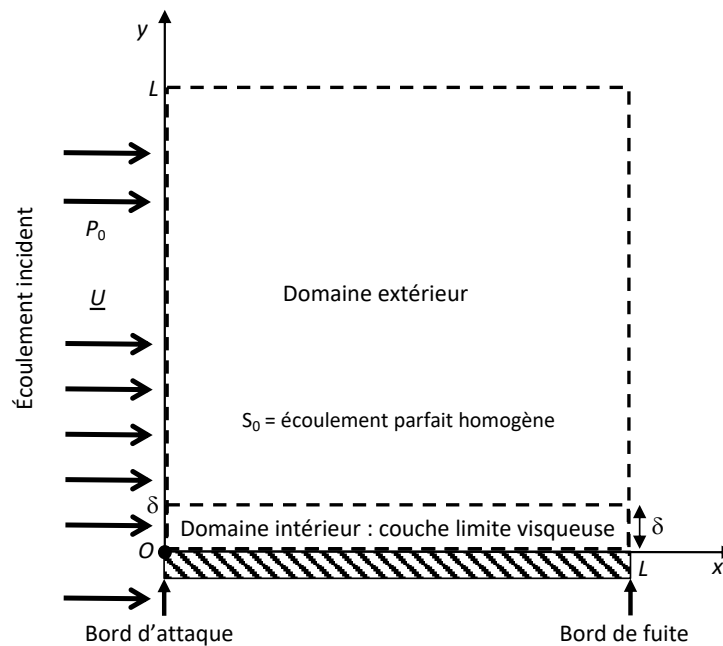


FIGURE 6.3 – Domaine intérieur, domaine extérieur.

Les effets visqueux du fluide n'étant pas négligés dans la CLV, l'écoulement obéit aux équations complètes (6.1), (6.2a) et (6.2b), et le fluide adhère à la paroi et vérifie donc les conditions (6.3), et (6.4).

La CLV est limitée par :

- la verticale du bord d'attaque, le long de laquelle l'écoulement est connu : c'est l'écoulement homogène incident,
- la plaque imperméable le long de laquelle le fluide adhère,
- la frontière définie par $y = \delta$ entre la CLV et le reste du domaine d'étude (domaine extérieur). Dans le domaine extérieur, l'écoulement est supposé être bien décrit par son approximation pour $Re^{-1} = 0$, qui est l'écoulement parfait homogène.

Ces données constituent les conditions aux limites pour l'écoulement dans la CLV.

Pour déterminer l'écoulement dans la CLV, adimensionnons maintenant le problème à l'échelle du domaine intérieur avant d'en faire l'analyse physique et de lui appliquer le principe de moindre dégénérescence.

b) Adimensionnement à l'échelle de la CLV

Il s'agit de réécrire le problème à l'échelle de la CLV.

- avec l'adimensionnement $y = L\bar{y}$ choisi pour décrire l'écoulement à l'échelle de la plaque, la CLV est située en $\bar{y} = 0$. La CLV est définie par :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq L \\ 0 &\leq y \leq \delta \end{aligned}$$

La CLV étant située en $y = 0$ et étant d'extension δ , le domaine intérieur est décrit à l'aide du changement de variable suivant :

$$y = 0 + \delta\tilde{y}, \quad \tilde{y} \sim 1$$

On peut donc utiliser l'adimensionnement suivant pour décrire la CLV :

$$\begin{aligned} x &= L\bar{x}, \quad \bar{x} \sim 1 \\ y &= \delta\tilde{y}, \quad \tilde{y} \sim 1 \end{aligned}$$

Le domaine intérieur est donc défini par :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{x} \leq 1 \\ 0 &\leq \tilde{y} \leq 1 \end{aligned}$$

- u s'annule à la paroi donc on peut poser : $u = U_1 \tilde{u}$, $\tilde{u} \sim 1$ où U_1 est indéterminée à ce stade et $\tilde{u} = \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y})$.
- v s'annule à la paroi et à la verticale du bord d'attaque et tend vers 0 en sortie de CLV, donc son échelle est indéterminée. On peut poser : $v = V_1 \tilde{v}$, $\tilde{v} \sim 1$, où V_1 est indéterminée à ce stade et $\tilde{v} = \tilde{v}(\bar{x}, \tilde{y})$.
- p tend vers P_0 en sortie de CLV, mais son échelle est indéterminée. On peut poser : $p = P_0 + \delta p_1 \tilde{p}$, $\tilde{p} \sim 1$, où δp_1 est indéterminée à ce stade et $\tilde{p} = \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y})$.
- Les conditions d'imperméabilité et d'adhérence à la paroi s'écrivent sous forme adimensionnée :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\bar{x} / 0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) &= 0 \\ \tilde{v}(\bar{x} / 0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) &= 0 \end{aligned}$$

c) **Raccordement**

Comme expliqué dans le chapitre précédent, la condition de raccordement entre le domaine intérieur et le domaine extérieur s'écrit de manière symbolique :

$$\lim_{\text{en sortant de la CLV}} (\text{solution dans la CLV}) = \lim_{\text{en allant vers la CLV}} (\text{solution dans le DE})$$

et se décline pour u , v , et p . Elle se traduit physiquement de la manière suivante : **la vitesse et la pression sont continues au passage de la CLV au domaine extérieur.**

Avec l'adimensionnement choisi, le raccordement s'écrit plus précisément :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} (\text{solution dimensionnée dans la CLV}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} (\text{solution dimensionnée dans le DE})$$

La solution dimensionnée dans le DE est l'écoulement homogène $\{u \equiv U, v \equiv 0, p \equiv P_0\}$.

- la condition de raccordement pour u s'écrit donc :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} U_1 \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} U = U$$

On égale séparément les échelles et le comportement limite des parties analytiques, ce qui donne :

$$\boxed{U_1 = U} \text{ et } \boxed{\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = 1}$$

- la condition de raccordement pour p s'écrit :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} (P_0 + \delta p_1 \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y})) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} (P_0 + \delta p \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}))$$

avec $\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1$ soit $\delta p = \rho U^2$. Or dans le domaine extérieur, $p \equiv P_0$, ce qui est équivalent à $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0$. En égalant séparément les échelles et les parties analytiques, on peut donc écrire :

$$\boxed{\delta p_1 = \delta p = \rho U^2} \text{ et } \boxed{\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = 0}$$

d) **Adimensionnement des équations**

Avec $U_1 = U$ et $\delta p = \delta p_1$,

- l'équation (6.1) adimensionnée s'écrit :

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_1}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

En absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, on suppose les deux termes de l'équation d'amplitudes comparables, donc $V_1 \sim \frac{\delta}{L} U$. On peut poser

$$\boxed{V_1 = \frac{\delta}{L} U = \varepsilon U} \text{ avec } \varepsilon = \frac{\delta}{L}. \text{ l'équation (6.1) adimensionnée se réécrit donc :}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

- les équations (6.2a) et (6.2b) adimensionnées à l'échelle de la CLV s'écrivent (à vérifier) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + Re^{-1} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}}_{\text{simplification automatique}} \right) \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + Re^{-1} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}}_{\text{simplification automatique}} \right) \end{array} \right. \quad (6.9a) \quad (6.9b)$$

e) Analyse physique

Analysons physiquement l'écoulement selon sa direction principale, (Ox) :

- Le moteur de l'écoulement dans la CLV est l'écoulement incident établi dans le DE. En effet, en absence d'écoulement extérieur, il n'y a pas d'écoulement dans la CLV car il n'y a pas d'autre source pour cet écoulement dans le DI. Ce moteur est représenté dans l'équation (6.9a) par le terme d'inertie $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ qui est d'ordre de grandeur l'unité.
- Le frein de l'écoulement est l'adhérence du fluide à la plaque immobile et le frottement visqueux, représentés dans l'équation (6.9a) par le terme $Re^{-1} \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$ qui est d'ordre de grandeur $Re^{-1} \varepsilon^{-2}$.
- Les forces de pression, représentées dans l'équation (6.9a) par le terme $\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$, sont une conséquence de l'écoulement, d'ordre de grandeur $\frac{\delta p}{\rho U^2}$.

Dans la CLV, en vertu du Principe de Moindre Dégénérescence dans le DI, on considère précisément que les effets de la viscosité sont notables. Le frein visqueux est donc comparable au moteur inertiel dans la CLV, ce qui se traduit par :

$$\boxed{Re^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1 \text{ (Principe de Moindre Dégénérescence)}}$$

Comme $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$, on a donc finalement : $Re^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1 \sim \frac{\delta p}{\rho U^2}$.

Ceci détermine la taille δ de la couche limite, en effet $Re^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1$ peut se réécrire :

$$\varepsilon \sim Re^{-1/2} \ll 1 \text{ soit } \boxed{\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} \ll L} \text{ car } Re \gg 1$$

Cet ordre de grandeur confirme l'hypothèse $\delta \ll L$ faite initialement.

Dans la suite on fixe l'épaisseur caractéristique de la CLV en posant

$$\boxed{Re^{-1} \varepsilon^{-2} = 1}$$

Considérons maintenant la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement principal, c'est-à-dire (Oy) . De l'analyse de l'écoulement dans le DE on avait déduit : $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$, donc :

$$\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \gg 1$$

Donc ne conservant que les termes dominants, (6.9b) se réécrit :

$$0 = -\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \text{ soit } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 : \boxed{\tilde{p} \text{ ne dépend pas de } \tilde{y}}$$

Ce résultat constitue **une propriété fondamentale des couches limites visqueuses : la pression ne varie pas à la traversée d'une couche limite visqueuse.**

Dans le cas particulier étudié ici d'un écoulement au-dessus d'une plaque, la condition de raccordement s'écrit : $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = 0 \forall \bar{x}$. $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0$ implique que \tilde{p} ne dépend pas de \tilde{y} ,

donc la condition de raccordement s'écrit $\tilde{p}(\bar{x}) = 0 \forall \bar{x}$, soit : $\boxed{\tilde{p} \equiv 0}$.

En conséquence, $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} = 0$. Donc dans l'équation (6.9a), le terme de pression est nul.

Les équations décrivant approximativement l'écoulement dans la CLV au-dessus d'une plaque plane dans la limite $Re \ll 1$ sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ (conservation de la matière)} \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \text{ (Navier-Stokes selon } (Ox)) \\ \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0 \text{ (adhérence à la paroi)} \\ \tilde{v}(\bar{x}, \tilde{y} = 0) = 0 \text{ (imperméabilité)} \\ \lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = 1 \text{ (raccordement à l'écoulement extérieur)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.10a) \\ (6.10b) \\ (6.10c) \\ (6.10d) \\ (6.10e) \end{array}$$

II Solution invariante d'échelle : solution de Blasius

II.1 Problème de Blasius

Compte tenu que les conditions aux limites du problème (6.10) sont rejetées en zéro et à l'infini, il se peut que ce problème possède une solution invariante d'échelle. Appliquons un ensemble de changements d'échelles à ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \mapsto x' \text{ tel que : } \bar{x} = x^* x' \\ \tilde{y} \mapsto y' \text{ tel que : } \tilde{y} = y^* y' \\ \tilde{u} \mapsto u' \text{ tel que : } \tilde{u} = u^* u' \\ \tilde{v} \mapsto v' \text{ tel que : } \tilde{v} = v^* v' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.11a) \\ (6.11b) \\ (6.11c) \\ (6.11d) \end{array}$$

et cherchons les conditions portant sur les facteurs de changement d'échelle x^* , y^* , u^* , v^* auxquelles ce problème est invariant par changement d'échelle . On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^*}{x^*} = \frac{v^*}{y^*} \\ \frac{u^{*2}}{x^*} = \frac{v^* u^*}{y^*} = \frac{u^*}{y^{*2}} \\ u^* = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.12a) \\ (6.12b) \\ (6.12c) \end{array}$$

soit :

$$\begin{cases} u^* = 1 & (6.13a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^* = y^{*2} & (6.13b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^* = \frac{y^*}{x^*} & (6.13c) \end{cases}$$

Les 4 facteurs d'échelle étant reliés par 3 relations, le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à une seul paramètre libre, par exemple x^* .

Le champ de vitesse solution du problème s'écrit :

$$\begin{cases} u = f_1(x, y) & (6.14a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = g_1(x, y) & (6.14b) \end{cases}$$

Le champ u se transforme par changement d'échelles en :

$$u^* u' = f_1(x^* x', y^* y')$$

soit :

$$u' = f_1(x^* x', \sqrt{x^*} y') = f_1 \left(x^* x', \sqrt{x^* x'} \frac{y'}{\sqrt{x'}} \right) = f_2 \left(x^* x', \frac{y'}{\sqrt{x'}} \right)$$

Le champ de vitesse solution du problème invariant d'échelle étant lui-même invariant d'échelle, il ne dépend pas de x^* , donc pas de la variable $x^* x'$. Pour plus de facilité dans la suite, on note la fonction inconnue f' (c'est-à-dire la dérivée d'une fonction inconnue f) :

$$u' = f' \left(\frac{y'}{\sqrt{x'}} \right)$$

De même, le champ v se transforme par changement d'échelles en :

$$v^* v' = g_1(x^* x', y^* y')$$

soit :

$$v' = \sqrt{x^*} g_1(x^* x', \sqrt{x^*} y') = \frac{\sqrt{x^* x'}}{\sqrt{x'}} g_1 \left(x^* x', \sqrt{x^* x'} \frac{y'}{\sqrt{x'}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x'}} g_2 \left(x^* x', \frac{y'}{\sqrt{x'}} \right)$$

Donc :

$$v' = \frac{1}{\sqrt{x'}} g \left(\frac{y'}{\sqrt{x'}} \right)$$

Le champ de vitesse invariant d'échelle $\left\{ u = f' \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right), v = \frac{1}{\sqrt{x}} g \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right) \right\}$ (on omet les $*$ et les $'$ à partir de maintenant) ne dépend donc que d'une seule variable $\frac{y}{\sqrt{x}}$, il est auto-similaire. On note la variable d'autosimilarité :

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$$

Exprimons le problème en fonction de la seule variable η .

- Compte tenu de :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} f''(\eta) \text{ avec } \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\eta}{2x}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial \eta}{\partial y} g'(\eta) \text{ avec } \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

l'équation (6.10a) se réécrit :

$$g' = \frac{1}{2} \eta f'' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} (\eta f' - f) \text{ donc } g = \frac{1}{2} (\eta f' - f) + c, \text{ } c \text{ constante.}$$

Or $v(x, 0) = 0$ (équation (6.10d)) se réécrit : $g(0) = 0$. Or $g(0) = -\frac{1}{2}f(0) + c$. Donc en posant $f(0) = 0$, $c = 0$, soit :

$$g = \frac{1}{2} (\eta f' - f) \text{ avec } f(0) = 0 \quad (6.15)$$

- Compte tenu de :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ avec } \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'''(\eta) \frac{1}{x}$$

l'équation (6.10b) se réécrit :

$$-\frac{1}{2} \eta f' f'' + g f'' = f'''$$

Compte tenu de (6.15) :

$$-\frac{1}{2} \eta f' f'' + \frac{1}{2} (\eta f' - f) f'' = f'''$$

soit :

$$2f''' + f f'' = 0$$

- $u(x, 0) = 0$ (équation (6.10c)) se réécrit : $f'(0) = 0$.

- $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$ se réécrit : $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1$

Le **problème de Blasius** s'écrit donc :

$$\begin{cases} 2f''' + f f'' = 0 \end{cases} \quad (6.16a)$$

$$\begin{cases} g = \frac{1}{2} (\eta f' - f) \end{cases} \quad (6.16b)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \end{cases} \quad (6.16c)$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.16d)$$

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1 \end{cases} \quad (6.16e)$$

L'edp (6.16a) étant d'ordre 3, elle nécessite 3 conditions aux limites (6.16c-e). La condition $g(0) = 0$ est automatiquement vérifiée dès que (6.16b) et (6.16c) le sont, donc elle ne constitue pas une condition aux limites supplémentaire.

II.2 Etude de la solution de Blasius au voisinage de $\eta = 0$

L'équation (6.16a) évaluée en 0 donne : $2f'''(0) + f(0)f''(0) = 0$ donc $\boxed{f'''(0) = 0}$. Par ailleurs la dérivée de (6.16a) s'écrit $2f^{(4)} + f'f'' + ff''' = 0$. L'évaluation de cette équation en 0 donne $\boxed{f^{(4)}(0) = 0}$.

Le développement limité à l'ordre 4 de $u = f'(\eta)$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$f'(\eta) = \underbrace{f'(0)}_0 + \eta f''(0) + \frac{\eta^2}{2} \underbrace{f'''(0)}_0 + \frac{\eta^3}{6} \underbrace{f^{(4)}(0)}_0 + \frac{\eta^4}{24} f^{(5)}(0) + O(\eta^5) = \eta f''(0) + \frac{\eta^4}{24} f^{(5)}(0) + O(\eta^5)$$

Soit en intégrant et en tenant compte de $f(0) = 0$,

$$f(\eta) = \frac{\eta^2}{2} f''(0) + \frac{\eta^5}{120} f^{(5)}(0) + O(\eta^6)$$

et en dérivant :

$$f''(\eta) = f''(0) + \frac{\eta^3}{6} f^{(5)}(0) + O(\eta^4)$$

$$f'''(\eta) = \frac{\eta^2}{2} f^{(5)}(0) + O(\eta^3)$$

Injectons ces développements limités dans l'équation (6.16a) :

$$\eta^2 f^{(5)}(0) + O(\eta^3) + \left(\frac{\eta^2}{2} f''(0) + O(\eta^5) \right) \left(f''(0) + O(\eta^3) \right) = 0$$

soit à l'ordre η^2 :

$$f^{(5)}(0) = -\frac{1}{2} [f''(0)]^2$$

Donc finalement :

$$u = f'(\eta) = \eta f''(0) - \frac{\eta^4}{48} [f''(0)]^2 + O(\eta^5) \quad (6.17)$$

Le profil de vitesse longitudinale est donc très proche de la linéarité au voisinage de la paroi.

Une étude numérique du problème de Blasius permet de déterminer une valeur approchée de $f''(0)$: $f''(0) \simeq 0,3$.

On peut en déduire une valeur approchée de la valeur de η en sortie de couche limite en assimilant \tilde{u} à son approximation linéaire $\tilde{u} \simeq \eta f''(0)$. En effet, en sortie de CLV \tilde{u} atteint 1, ce qui se produit pour $\eta \simeq [f''(0)]^{-1} \simeq 3$ (on vérifie bien a posteriori que pour $\eta = 3$, $\frac{\eta^4}{48} [f''(0)]^2 \ll \eta f''(0)$, ce qui justifie l'approximation $\tilde{u} \simeq \eta f''(0)$ utilisée pour déterminer la valeur approchée de η en sortie de couche limite).

On déduit de (6.16b) et (6.17) une expression pour v :

$$v = \frac{1}{\sqrt{x}} g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\eta^2}{4} f''(0) - \frac{\eta^5}{120} [f''(0)]^2 + O(\eta^6) \right)$$

Partant de 0 à la paroi, c'est-à-dire en $\eta = 0$, \tilde{v} atteint son maximum pour $\eta = \left(\frac{24}{f''(0)} \right)^{1/3} \simeq 4$ puis décroît et tend vers zéro aux grandes valeurs de η .

L'allure de $u(\eta)$ et de $\sqrt{x} v(\eta)$ est représentée sur la figure 6.4.

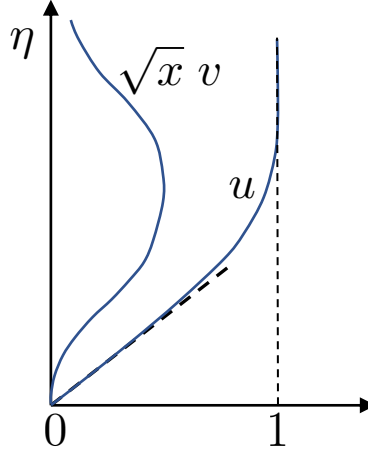


FIGURE 6.4 – Allure de la solution de Blasius.

II.3 Solution en variables dimensionnées - épaisseur de CLV

En revenant aux variables dimensionnées :

$$\eta = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{x}}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{x\nu}{U}}}$$

donc :

$$u = U f' \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{x\nu}{U}}} \right)$$

\tilde{u} atteint 1, donc u atteint U pour $\eta \simeq 3$, soit $y \simeq 3\sqrt{\frac{x\nu}{U}}$. On en déduit que la CLV a une épaisseur caractéristique $\delta(x)$ telle que :

$$\delta(x) \simeq 3\sqrt{\frac{x\nu}{U}}$$

La couche limite s'épaissit donc vers l'aval. Son épaisseur maximale δ_{\max} se situe donc au bord de fuite de la plaque en $x = L$, et vaut $\delta_{\max} = \delta(L) \simeq 3\sqrt{\frac{L\nu}{U}}$. Cette loi d'échelle $\delta_{\max} \propto \sqrt{\frac{L\nu}{U}}$ permet de valider ce modèle de CLV en déterminant dans quelles conditions l'hypothèse $\delta \ll L$ est vérifiée :

$$\frac{\delta_{\max}}{L} \propto \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \text{Re}^{-1/2} \ll 1 \text{ dans la limite } \text{Re} \gg 1$$

Ce modèle d'écoulement raccordé { écoulement parfait, CLV } développé dans la limite $\text{Re} \gg 1$ est donc auto-consistant.

III Traînée visqueuse

Maintenant qu'un écoulement solution au voisinage de la paroi a été déterminé, on peut calculer la trainée exercée par cet écoulement sur la plaque.

On rappelle que la contrainte pariétale \underline{T}_p exercée par le fluide sur une surface de normale orientée vers le fluide a pour expression :

$$\underline{t}_p = \underline{\underline{\sigma}} \Big|_{\text{plaque}} \cdot \underline{n}$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{1}$ est le tenseur identité, \underline{n} est le vecteur normal à la plaque orienté vers le fluide et qui a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}u + \underline{\nabla}u^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}}$$

La plaque étant définie par $y = 0$ et la normale à la face supérieure de la plaque s'écrivant $\underline{n} = \underline{e}_y$, la contrainte exercée par le fluide sur la face supérieure de la plaque a donc pour expression :

$$\underline{t}_p^+ = -p(x, 0) \underline{e}_y + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) \right) \underline{e}_x + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) \underline{e}_y$$

Le fluide exerçant des contraintes des deux côtés de la plaque, par symétrie, les composantes perpendiculaires à la plaque des contraintes \underline{t}_p^+ et \underline{t}_p^- exercées par le fluide respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque se compensent, tandis que leurs composantes parallèles à la plaque se cumulent. La contrainte résultante $\underline{t}_p = \underline{t}_p^+ + \underline{t}_p^-$ est donc parallèle à la plaque et a pour expression :

$$\underline{t}_p = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) \right) \underline{e}_x$$

Evaluons l'ordre de grandeur de ces termes en utilisant la solution invariante d'échelle qui décrit l'écoulement dans la couche limite :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V_1}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon^2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}$$

Comme $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \sim 1$ et $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \sim 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x}$ et $t_p \simeq 2\mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$ (à la condition que $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) \neq 0$, ce que nous vérifierons par la suite). D'autre part, comme $\mu = \rho\nu$ et $\delta/L = Re^{-1/2}$,

$$\mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \frac{\nu}{UL} \frac{L}{\delta} = \rho U^2 Re^{-1/2}$$

donc en ne conservant que le terme dominant, T_p a pour expression approchée :

$$t_p(x) = 2 \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0)$$

La solution invariante d'échelle du problème de Blasius s'écrit $u = U\tilde{u}$ avec :

$$\tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) \simeq \underbrace{f''(0)}_C \underbrace{\eta}_{\frac{\tilde{y}}{\sqrt{\bar{x}}}} + \mathcal{O}(\eta^4) \text{ au voisinage de } \eta = 0 \text{ avec } f''(0) \simeq 0,3$$

Donc au voisinage de la paroi ($\tilde{y} \rightarrow 0$) :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, \tilde{y}) \simeq \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}} + \mathcal{O}(\eta^3) \text{ soit } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0) = \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}}$$

La force de trainée $\underline{T} = T \underline{e}_x$, définie par :

$$T = \int_0^L t_p(x) \, dx$$

a donc pour expression :

$$T = 4C\rho U^2 L \operatorname{Re}^{-1/2} = 4C\rho \nu^{1/2} U^{3/2} L^{1/2}$$