Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

Examen du 20 Février 2017

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique (e_1, e_2, e_3), avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. On définit les vecteurs $u = e_1 + e_2 + 2e_3$, $v = 3e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que les vecteurs u, v et e_3 forment une base de E. Donner la matrice de passage, notée P, de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u, v, e_3).
   Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(e_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) .
4. Déterminer T la matrice de f dans la base (u, v, e_3). Quelle relation y a-t-il entre A, T, P ?
5. Exprimer $f(u)$, $f(v)$ et $f(e_3)$ dans la base (u, v, e_3).
6. Montrer que $(T - I)^n = 0$, $\forall n \geq 3$. En déduire que $(A - I)^n = 0$, $\forall n \geq 3$.
7. En utilisant le résultat précédent, exprimer A^n à l'aide du binôme de Newton en fonction de n, I, A et A^2.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & a \\ b & b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$?
2. Soit $\varphi(\lambda)$ le polynôme caractéristique de M. Calculer $\varphi(\lambda)$.
3. On se place dans le cas $a = b$ non nuls. Ecrire l'expression de $\varphi(\lambda)$ dans ce cas particulier.
   i) Calculer les valeurs propres de M et les espaces des vecteurs propres associés.
   ii) Montrer que M est diagonalisable et déterminer la matrice diagonale M' correspondante.
4. On se place maintenant dans le cas $a \neq b$. Montrer qu'on peut exprimer $\varphi(\lambda)$ sous la forme :
$$\varphi(\lambda) = -\frac{a(\lambda + b)^3 - b(\lambda + a)^3}{a - b} \tag{1}$$
   i) En utilisant l'identité remarquable suivante
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
   calculer les valeurs propres de M sur $\mathbb{C}$.
   ii) Sans faire le calcul des vecteurs propres, déterminer si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner sa matrice diagonale si elle existe.
   iii) Que peut-on dire quand à l'existence d'une matrice diagonale sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Quelle est la relation entre $det(A)$ et $det(-A)$? Montrer que toute matrice carrée A antisymétrique (${}^tA = -A$) d'ordre n avec n impair est singulière (n'admet pas de matrice inverse).