



ASSOCIATION UNIVERSITAIRE TOP AÉRO - MODULE CANSAT NEWT

Dimensionnement d'un système de ressorts de compression et de torsion

Auteur :
Valentin DUVIVIER

04 Octobre 2020

Contents

1	Avant-propos	2
2	Introduction	3
3	Cadre d'étude	3
3.1	Schéma théorique	3
3.2	Description des phases	6
3.3	Mesures - Objectifs	7
4	Phase 1 - Chute sans parachute	8
4.1	Hypothèses	8
4.2	Equation Interne	8
4.3	Bilan externe	12
4.4	Equivalence interne - externe	13
5	Phase 2 - Chute avec parachute	15
5.1	Hypothèses	15
5.2	Equation externe	15
5.3	Équation interne	16
5.3.1	Étude analytique	16
5.3.2	Étude numérique - Python	18
5.4	Bilan choc	20
6	Phase 3 - Oscillations	21
6.1	Préambule	21
6.2	Hypothèses	21
6.3	Étude externe	21
6.4	Étude interne	22
6.4.1	Critères de résonance	24
6.5	Conclusion	26
7	Phase 4 - Atterissage	27
7.1	Hypothèses	27
7.2	Étude Externe	27
7.3	Bilan énergétique - Critères ressorts	28
7.4	Conclusion	33
7.5	Validation modèle théorique	33
7.5.1	Phase 1[3]	33
7.5.2	Phase 2[4]	35
7.5.3	Phase 3 [5]	36
7.5.4	Phase 4 [6]	37
8	Conclusion Fréquentielle	38

1 Avant-propos

L'utilité d'une telle étude pour un système peut vraiment être remise en doute : concordance précision des résultats avec réalité physique, nécessité de diversifier les points d'études, etc.

On justifie ici nos choix par la volonté de mettre en image les processus par lesquels nous sommes passé pour arriver au résultat : on montre les options considérées, les points étudiés, et donc tous les calculs effectués. Ce rapport tient aussi comme témoignage de la démarche par laquelle est passé l'auteur pour aboutir aux résultats présentés.

Le modèle théorique comme exposé ici essaye alors de négliger le moins de termes et d'étapes possible, tout en étant réaliste sur l'utilisation et le but du rapport, sans prétention donc.

2 Introduction

Le CANSAT est une expérience scientifique qui consiste en le déploiement d'un module aérien. Ce module s'apparente à un dispositif qui serait lâché depuis l'espace sur une planète, et qui dans ce sens va devoir être en mesure de réaliser des recherches scientifiques : prélèvements d'échantillons, mesure de radio-activité, etc.

Si les types de mesures réalisés par le module peuvent varier, un élément qui lui ne varie pas est le fait que le CANSAT doit atterrir sans dommage. Dans ce rapport, il va donc vous être détaillé les moyens mis en place pour assurer l'atterrissage, en se concentrant notamment sur l'utilisation de ressorts.

En sommes, une des innovations de notre module est la mise en place d'un amortissement de choc via des ressorts. Nous avons dans ce sens réalisé un design de notre module CANSAT qui inclue aussi bien en interne qu'en externe des ressorts.

En effet, nous avons disposé ces moyens d'amortissement pour maintenir l'électronique interne de même que pour notre expérience, qui consiste en le déploiement de pattes d'atterrissage.

Pour ce premier point, la position des ressorts a été décidé pour améliorer la position dans le module. Cela implique que nous cherchons à la fois à valoriser la place prise dans le module et l'équilibre naturel. Nous avons donc choisi de mettre trois rangées de ressorts qui partagent la même distance circonférentielle. Cela facilitera par la même occasion les mesures des forces et de l'équilibre.

Pour l'expérience externe, il a là aussi été défini que trois unités était le meilleur compromis entre masse, volume et stabilité pour le module (ces informations sont à retrouver visuellement sur la figure 2).

Nous chercherons durant ce rapport à définir les critères inhérents à nos ressort en fonction des différentes phases du chute, et de présenter le cadre théorique dans lequel ces phases ont été pensé.

On pourra alors définir, en fonction des forces appliquées et des déformations subies par les ressorts modèles, quels ressorts physiques pourraient être les plus efficace.

Les résultats des ressorts modèles seront obtenus analytiquement et numériquement. Ce dernier point comprendra notamment des modélisations via Simulink [8] ou encore de l'étude par élément finis via Catia.

3 Cadre d'étude

Nous travaillons sur un module cylindrique d'**1kg**, doté d'un **rayon** de **8cm**, d'une **hauteur** de **20cm** et qui est lâché depuis une **altitude** d'environ **100m**.

3.1 Schéma théorique

Cette partie vise à donner des informations visuelles quand au design générale du module. Elle aura aussi pour but de servir d'échantillon afin de présenter les différentes parties qui une fois combinées forme le module "Newt" (nom du module).

Dans un premier temps, nous avons ci-dessous plusieurs visuels : les deux premiers pour le module sans les pattes et un autre où elles sont déployées :

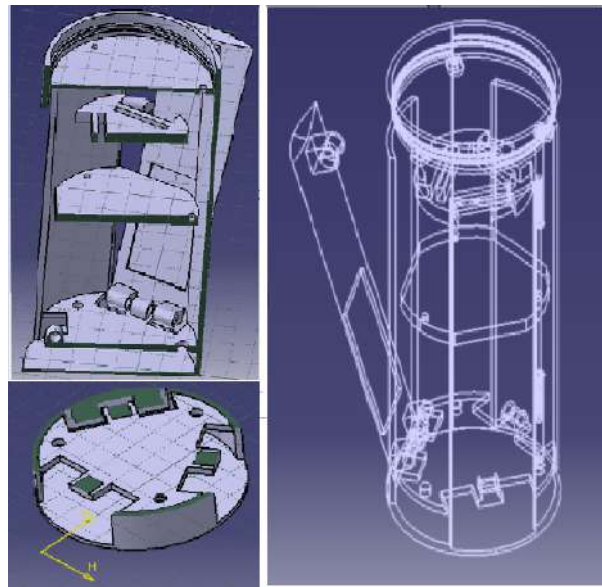


Figure 2: Module *Newt*

Dans ce premier visuel, on met l'accent sur la position des rails des ressorts en internes, la forme des supports pour les composants électronique (disques) ainsi que les emplacements des pattes.

Il convient de détailler un peu plus le système de ressort dès maintenant. Pour cela, nous introduisons le schéma suivant qui met en avant une disposition schématique des ressorts ainsi que des disques :

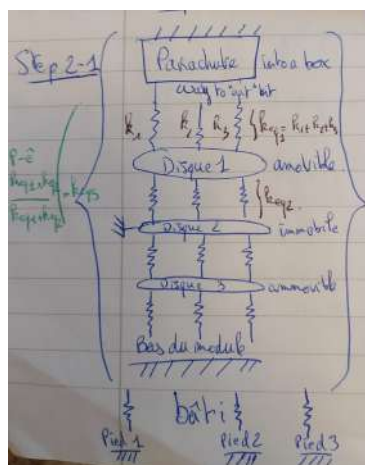


Figure 3: Vision schématisée du système ressort interne

En vous référant au schéma 3, vous pouvez noter que notre système interne de ressort est composé de 2 sous-modules. En effet, dans une optique de simplifier les calculs et la compréhension visuelle, nous avons décidé de fixer le disque 2. Cela a pour répercussion de pouvoir ne considérer les oscillations que du 1er ou du 3eme disque afin d'ensuite généraliser à tout le module.

D'un point de vue mécanique, ce type de modélisation nous permet de passer d'un module à 3 degrés de libertés à un système à 1 degré de liberté.

Pour ce qui est des ressorts, plutôt que de considérer 3 ressorts entre chaque disque, nous considérerons plutôt un unique ressort équivalent (dont le détail de l'équation sera fourni en phase 1).

Enfin, les pieds du modules subiront le même type d'approximation pour la rigidité des ressorts.

Pour ce qui est de ces dernières, voici plus de détails sur leur forme :

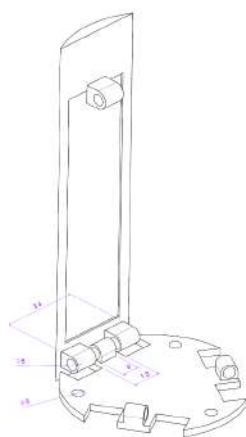


Figure 4: Pièce 3D d'une patte

On a au final ici plus de détail sur les éléments "extérieurs" du module à savoir les pattes ainsi que les outils de mesures qui y sont déposés (panneau solaire, mini-éolienne, capteurs, etc).

Pour avoir plus de recul sur le lien entre la géométrie générale et l'utilisation des ressorts, nous allons maintenant détailler les phases qui composent notre étude.

3.2 Description des phases

Nous avons décidé de découper notre étude en 4 phases :

- 1^{ère} : Chute libre du module pendant 2 à 5s. Ni les pattes ni le parachute ne sont alors déployés. Cette phase va nous permettre d'étudier les équations régissant le mouvement des ressorts ainsi qu'avoir une première approche des pulsations propres du module ;
- 2nd : Ouverture du parachute. Cette phase ne dure que le temps de l'ouverture du parachute et plus précisément celui du choc subit par le module. Les pattes ne sont toujours pas déployées ; le parachute lui est déployé. On étudiera alors pour la première fois le lien entre force extérieure et oscillations internes ;
- 3^{ème} : Similaire à la phase 1, le module est ici aussi en chute libre. Les pattes et le parachute sont tous deux déployés. Par le biais de cette phase nous pourrions considérer des forces oscillantes agissant sur le module et ainsi mettre en application les équations décrites en phase 1 pour une application concrète ;
- 4^{ème} : Atterrissage du module sur le sol. Les pattes entrent en contact avec le sol et le parachute se replie/se pose au sol. On considérera de nouveau le cas d'un amortissement du choc via les ressorts, mais cette fois-ci la dissipation se fera par les ressorts internes et les pattes. Cette phase consistera en l'étude de la dissipation d'énergie due au choc à travers les ressorts.
- Bonus (5^{ème}) : Étude torsion et compression via Ansys.

NOTE :

- Aux vus des trois éléments qui compose le module décrit dans ce rapport, à savoir le système de ressort interne, le système de ressort des pattes ainsi que le corps en lui même ; il vous sera notifié lorsque ces parties seront différenciées ou au contraire confondues ;

- Nous détaillerons en début de chaque phase les hypothèses considérées.

Par ailleurs, l'étude des phases se fera en 2 temps : un premier où l'on va étudier notre système en faisant des considérations arbitraires (mais physiquement cohérente par rapport à notre modèle) ; et un second après avoir obtenu plus de détail sur nos variables (valeurs numériques), où l'on viendra conclure sur la pertinence des considérations du premier temps et sur le comportement global du système étudié.

Cette deuxième partie de l'étude sera à retrouver en fin de phase 4.

Maintenant que nous avons pu décrire les différentes phases composant notre étude, nous allons conclure sur cette partie en faisant un bilan sur les mesures qui y sont liées.

3.3 Mesures - Objectifs

A chaque phase nous associons un objectif qui lui est propre. Même si les phases 1 & 3 ainsi que les phases 2 & 4 présentent des similarités, nous allons ici détailler en quoi elles ont des spécificités distinctes.

Nous cherchons avant tout à faire la distinction entre les phases en synthétisant les objectifs de chacune d'entre elle, laissant le détail complet des mesures au sein de chaque partie.

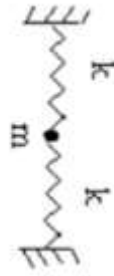
Par ailleurs, il est intéressant à ce stade de remarquer que ces phases ont pour but principal de partitionner les différents comportement pour les ressorts et de les exposer de la façon la plus simple possible.

Ci-dessous, vous pouvez retrouver un tableau des mesures faites à chaque phase :

Phases	Type d'étude	Spécificité des objectifs
1	Introduction aux ressorts	Equations dans un cas théorique simple.
2	Réaction à une force	Comportement des ressorts sous une impulsion dirac.
3	Oscillations internes	Fréquences d'excitations et résonnance.
4	Transmission d'énergie	Application de la conservation d'énergie.

4 Phase 1 - Chute sans parachute

Un schéma du système est le suivant :



On remarque que notre système va être comparable à un système composé d'un unique ressort. En effet, les deux ressorts ci-dessus vont réagir en phase aux forces appliquées en m (cf. hypothèses 4.1). En sommes, nous allons aborder notre modèle comme un système à 2 ressorts agissant comme un tout.

Cette partie servira notamment d'introduction à la suivante. Les expressions des bilans de forces exprimés ici serviront donc de base lors de la phase 2. Par ailleurs, même si chaque phase est distincte, cette première phase joue quand même le rôle d'introduction au problème et sert donc de base pour les calculs des phases à suivre.

Nous allons exposer les équations générales décrivant le comportement du module, par le biais des forces qui lui sont appliquées, et les équations dérivant le comportement des ressorts en interne.

Nous concluerons sur cette partie en faisant le lien avec la partie suivante.

4.1 Hypothèses

Les considérations et suppositions inhérentes à cette partie sont à retrouver ci-contre :

Hypothèses externes

- 1 Le module quitte la station flottante sans vitesse initiale.
Il en va de même pour les ressorts.
- 2 La trajectoire se veut être rectiligne verticale descendante ;
- 3 La vitesse maximale atteinte est comprise entre $[0;3] \text{ ms}^{-1}$

Hypothèses internes

- 1 Les ressorts sont identique : raideur, amortissement, etc.
- 2 La masse de chaque disque est identique ;
- 3 Homogénéité et isotropie ;

4.2 Equation Interne

Comme mentionné précédemment, nous avons à faire à un système à 1 degré de liberté. L'application du PFD à notre ensemble de ressort amène à :

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{F_{ext}} &= m \overrightarrow{a} \\ \rightarrow m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= -kx(t) - kx(t) + F(t) - c \frac{dx(t)}{dt} - c \frac{dx(t)}{dt} + mg \\ m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 * c \frac{dx(t)}{dt} + 2 * k * x(t) &= F(t) + mg\end{aligned}$$

Ce qui se réécrit (avec $F(t) = 0$ ici) :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4\zeta\omega_0 \times \frac{dx}{dt} + 2 \times \omega_0^2 = mg$$

$$\text{avec } \zeta = \frac{c}{2m\omega_0} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Par ailleurs, la masse considéré ici est celle du système masse disque + groupe de ressort 1 + groupe de ressort 2. C'est la position de ce système qui est considérée ci-dessus et dans le reste de notre étude.

On suppose par ailleurs que la masse du disque seul est confondu avec celle-ci, ce qui nous permet d'appliquer le changement de variable $x' = x - mg/k$, et donc de ré-écrire notre équation comme suit (dans le cas $F(t) = 0$) :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4\zeta\omega_0 \times \frac{dx}{dt} + 2 \times \omega_0^2 = 0$$

Cette ré-écriture de l'équation nous permet de considérer que la distance entre chaque ressort et le disque amovible est la même, et donc que la position $x(t)$ du système au cours du temps pourra être considérée comme étant celle du centre du disque.

Pour ce qui est de l'équation en elle même, nous retrouvons bien le fait que les forces de rappels et de frottement visqueux de nos ressorts vont se combiner. De plus, vous pouvez d'ores et déjà voir qu'aucune force n'est appliquée, d'où le fait que le terme $F(t)$ disparaisse. On se limite ainsi à un cas simple décrivant uniquement la partie homogène de notre équation différentielle.

Un point essentiel à noter est que ce que l'on va appeler k dans le reste de cette partie est en fait $k_{eq} = 3 * k$, avec k la raideur d'un ressort. En combinant les trois nous justifions ce facteur 3. Il en va de même pour le facteur de frottement visqueux $c_{eq} = 3 * c$.

Maintenant que notre équation différentielle est posée, nous allons la résoudre analytiquement et ainsi définir la forme de la solution homogène (qui est ici la solution générale en l'absence de second membre).

Cette résolution implique notamment que nous allons devoir considérer le cas pour lequel le déterminant de l'équation caractéristique associée à notre équation différentielle est inférieur à zéro. En effet, nous étudions nos ressorts et surtout leur comportement oscillant. On sait déjà que ces derniers vont se mettre à osciller sous l'action d'une force extérieur avant d'au fil du temps se ramener à leur position d'équilibre. Les oscillations vont ainsi s'atténuer, ce qui est ici rendu possible par la présence du terme c (frottement visqueux).

Or, pour pouvoir prendre tout ceci en compte, il faut tout d'abord s'assurer que nous modélisons bien des oscillations. C'est ce qu'on appelle un amortissement sous-critique et il est rendu possible pour $\Delta(x, y) = b^2 - 4ac < 0$.

Pour ce qui est de la résolution de notre équation différentielle et de l'étude du système, nous avons une équation différentielle d'ordre 2, nous cherchons donc dans un premier temps à calculer le déterminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 4\zeta\omega_0 * r + 2\omega_0^2 = 0$$

$$\rightarrow \Delta(x, y) = b^2 - 4ac = 16\zeta^2 * \omega_0^2 - 8\omega_0^2 = 8\omega_0^2(2\zeta^2 - 1)$$

Ainsi, si nous voulons obtenir $\Delta(x, y) < 0$ il faut $2\zeta^2 - 1 < 0$ soit $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Finalement, le calcul des racines nous amène à :

- $x_1 = -2\omega_0(\zeta + i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2})$

- $x_2 = -2\omega_0(\zeta - i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2})$

On retrouve comme attendu des composantes complexes, amenant l'idée d'oscillations (cos et sin). Sur la figure suivante, on montre visuellement l'impacte de ce ζ sur les oscillations :

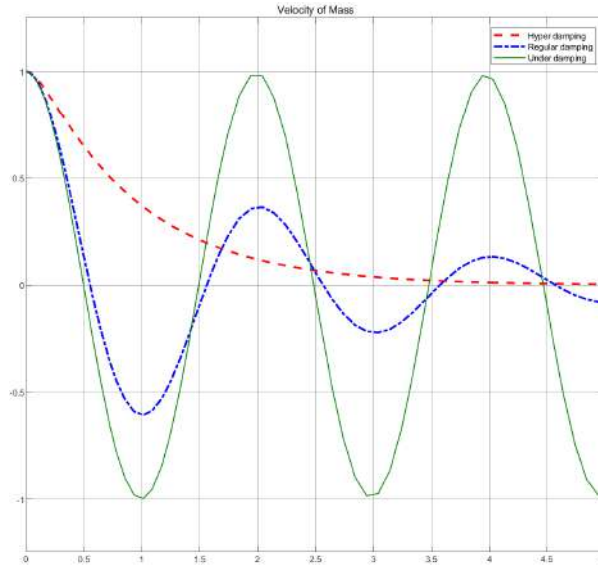


Figure 5: Comportement de x en fonction de ζ

Pour finir, nous pouvons écrire la solution de l'équation décrivant le mouvement du ressort comme suit :

$$x(t) = X_0 * e^{-2\zeta\omega_0 t} * \cos(\omega_d t - \phi_d) \quad (1)$$

avec $X_0 = \sqrt{x_0^2 + (\frac{-v_0}{2\zeta\omega_0\omega_d})^2}$; $\tan(\phi_d) = \frac{-v_0}{2\zeta\omega_0\omega_d x_0}$ et $\omega_d = 2\omega_0\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2}$

Pour avoir une idée visuelle de l'allure de la position en fonction du temps, nous avons fait ce tracé sur le graphe ci-contre :

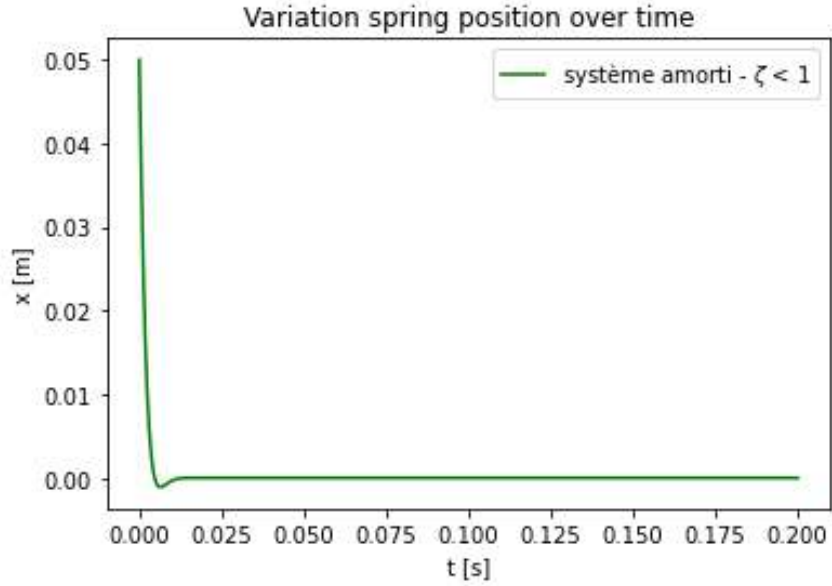


Figure 6: Vision schématisé du système ressort externe

NOTE : pour pouvoir faire ce tracé, nous avons du en amont faire des suppositions. Nous avons ainsi déterminé que $\zeta = 0.2$ était une valeur physiquement pertinente (au vu de la figure résultante et du fait qu'il faut vérifier l'inégalité $0 < \zeta < 0.707$). De même, nous avons imposé une fréquence $f_0 = 10\text{Hz}$ pour poser ω_0 [3].

Nous pourrions justifier après étude le bienfondé de ces valeurs arbitraires.

On remarque que la position va varier avant de se stabiliser, comme attendu par rapport à la figure 5. On a en fait $x(0)$ la position du ressort compressé (ou étiré), et $x(\infty)$ = position stable (l'idée sera développée plus en détail ultérieurement).

On vient pour finir de calculer la solution homogène de l'équation décrivant le mouvement des ressorts. D'un point de vue des données que cette équation nous apporte, on remarque que pour certaines valeurs de ω_d , la pulsation propre du système, il y a un risque de résonance.

En effet, pour $\omega_d \rightarrow 0$, nous avons un cas de résonance ($X_0 \rightarrow \infty$). Ce qui est encore plus intéressant pour nous va être que cette condition de résonance sur ω_d va se traduire par une condition sur nos ressorts. Dans ce sens :

si $\omega_d = 2\omega_0\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2} \rightarrow 0$, alors :

- Soit $\omega_0 \rightarrow 0$ et donc $k \rightarrow 0$;
- Soit $\zeta \rightarrow 1/\sqrt{2}$ et donc $k = \frac{c^2}{2m}$. Or k est en fait la somme de la raideur de 3 ressorts. De même, $c \rightarrow 3 * c$. Nous avons donc, pour un ressort : $k = \frac{3c^2}{2m}$.

NOTE :

- on ne peut pas considérer le cas $c = 0$ car cela reviendrait à ne plus prendre en compte le facteur d'amortissement visqueux et donc de considérer un système théorique qui ne s'arrêterait pas d'osciller, ce qui est contraire à notre modèle ;

- les **conditions sur k** ci-dessus sont à **ne pas vérifier** afin que le système soit bien conditionné.

Le cas $\zeta \rightarrow 1/\sqrt{2}$ apporte l'information sur le fait que l'amplitude X va avoir un comportement particulier à ce niveau. En effet, au delà des dépendances critiques déjà exposés, cette condition implique que l'amplitude va subir une sorte de saut à cette fréquence particulière, et que le système risque d'entrer dans un comportement destructif.

L'idée va être à présent de voir si ces conditions sont de types fortes (i.e. qu'on les retrouvent à travers plusieurs de nos phases), ou bien si elles sont faibles (cas particulier n'apportant pas de critère sur le système dans le cas général d'utilisation).

Il en ressort au final 2 critères : un directement sur la raideur du ressort et un autre impliquant aussi l'amortissement. Ainsi, même sans considérer de force extérieure, si le système est initialement mal établi (e.g. k trop petit), il risque de nous mener à un comportement catastrophique.

Cette phase étant limitée à une poignée de seconde, et les critères évoluant au fil des phases, nous n'iront pas ici plus en détail sur l'implication physique de ces contraintes sur la raideur.

Nous aurons au final vu le cas générale du comportement des ressorts et leur possibilité à entrer en résonance, en fonction des données du problème. Pour finir avec cette phase, nous allons dans la partie suivante voir l'étude du comportement du module d'un point de vue extérieur et surtout l'impact qu'on les forces extérieures sur le système interne.

4.3 Bilan externe

Dans le cadre d'une étude des forces appliquées sur le module, il convient dans un premier temps d'énumérer au préalable celles qui sont susceptible d'avoir un impact sur le système.

Nous considérons les forces suivantes s'appliquant sur le module :

- Poids : $\vec{P} = m \vec{g}$
- Force de frottement linéaire (cas d'une faible vitesse) : $\vec{F}_f = -C_{x \text{ linéaire}} \mu L \vec{v} *$
- Poussée d'Archimède $\vec{P}_a = -\rho_{air} V_{module} \vec{g}$

avec $\rho_{air} = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$, $g = 9.81 \text{ N.kg}^{-1}$ et $\mu = 2 * 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ que l'on considère constant durant la chute.

* On a $C_{x \text{ linéaire}} = \frac{2*\pi}{\ln(\frac{2L}{D}) - 0.807} \approx 7.8$ avec L la longueur du module et D sont diamètre [10].

On détermine maintenant le comportement du module lors de cette phase en cherchant l'équation décrivant sa trajectoire. Pour se faire, nous effectuons le bilan des forces extérieures, ce qui nous amène à la relation suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m * \vec{a} = \vec{F}_f + \vec{P}_a + \vec{P}$$

Une fois la projection sur l'axe x effectuée, nous obtenons :

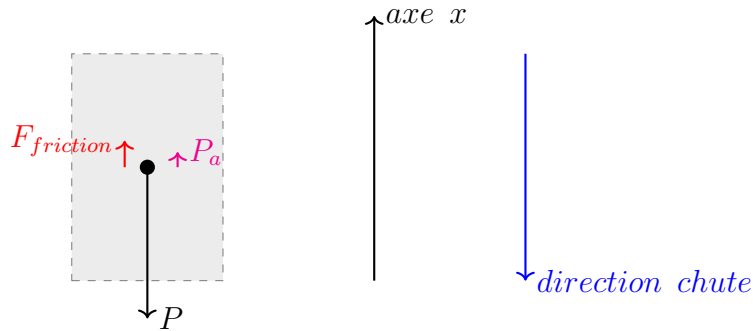
$$mx''(t) = C_{x \text{ linéaire}} \mu L * x'(t) + \rho_{air} V_{module} g - mg \quad (2)$$

Pour finir, nous allons voir si certaines de ces forces peuvent être négligées devant les autres, ce qui nous permettra de justifier la prise en compte ou non des différentes forces :

- $P = 1 \times 9.81 = 9.81N$;
- $F_{friction} \in [0 ; \frac{2 * \pi}{\ln(\frac{2 * 20}{8}) - 0.807} \times (2 * 10^{-5})(20 * 10^{-3}) \times 7 \approx 2.2 * 10^{-5}]N$ * ;
- $Pa = 1.2 \times (20 * 10^{-3} \times \pi(4 * 10^{-3})^2) \times 9.81 \approx 1.2 * 10^{-5}N$;

* on a un intervalle pour cette force de friction car on considère un interval pour la vitesse.

Le graphique ci-contre met en image ces forces agissant sur le module :



On peut conclure que seul la force liée au poids du module va impacter la trajectoire du module qui sera donc comme attendue dirigée vers les x négatifs. La stabilité dynamique peut aisément être supposée validée étant donné le faible interval de temps de cette phase. Pour de plus ample détail sur ce point vous pouvez vous référer à la partie de l'équipe physique associée.

Nous avons au final été en mesure d'introduire le comportement du module d'un point de vue extérieur, et de valider la trajectoire attendue du module.

4.4 Equivalence interne - externe

Pour finir avec l'introduction du comportement des ressorts, nous allons en quelques lignes expliquer en quoi il est utile de considérer un bilan extérieur pour mieux comprendre le comportement des ressorts internes.

Ce bilan externe sert dans un premier temps à garder le lien avec le travail de l'équipe physique. Parce que nous travaillons sur un module commun, il est intéressant de suivre les approches de chaque groupe sur un même point.

Par la même occasion, l'étude des forces externes permet de montrer le lien entre le comportement des ressorts et celui du module. Ce sont en effet les intensités calculées

ci-dessus qui vont donner un ordre de grandeur et une forme pour les forces qui vont ou pourraient être considérées pour $F(t)$.

C'est ce qui fait le lien final avec les parties qui vont suivre et notamment la phase 2. Nous avons ici une explication physique qui permet de mieux comprendre l'origine et les intensités des forces concernées dans chaque phase.

5 Phase 2 - Chute avec parachute

Nous abordons dans cette partie le premier choc subi par le module.

Nous ferons aussi le lien entre les forces externes et les répercussions internes d'un tel choc, par un biais analytique puis numérique. Nous chercherons par la même occasion à définir des critères de dimensionnement de la raideur ou de l'allongement de nos ressorts.

5.1 Hypothèses

Les considérations et suppositions inhérentes à cette partie sont à retrouver dans le tableau ci-contre :

Hypothèses externes

- | | |
|---|--|
| 1 | Ouverture du parachute instantanée ($\equiv \textit{dirac}$) ; |
| 2 | La vitesse est nulle après le choc ; |

Hypothèses internes

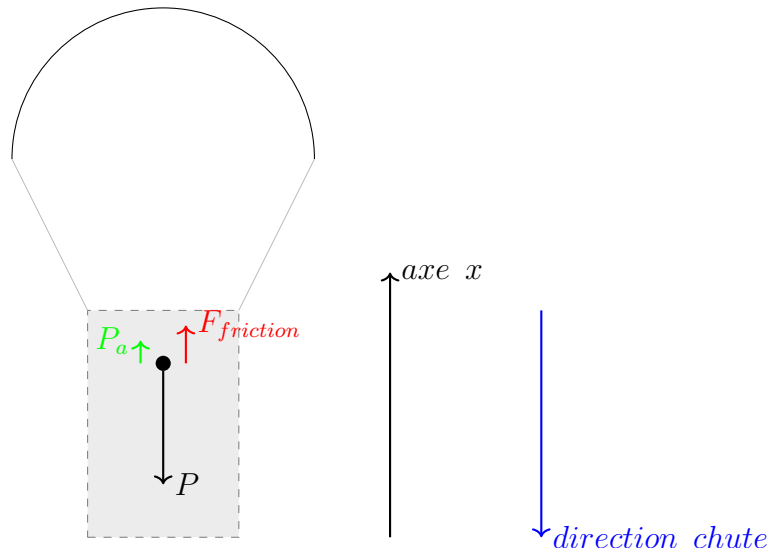
- | | |
|---|--|
| 1 | Energie entièrement transmise et dissipée par les ressorts ; |
| 2 | Les ressorts sont toujours identiques ; |
| 3 | La masse de chaque disque est toujours identique ; |
| 4 | Le ressort est initialement à un état d'équilibre statique. |

Ces suppositions, bien que fortes, n'ont pas un impact trop important sur la structure. En effet, on effectue des estimations et suppositions qui nous permettent d'évaluer les caractéristiques des ressorts dans des cas limites et d'ainsi avoir un éventail complet des intervals pour chaque variable (interval où l'intensité est maximale, interval de résonance en fonction de l'énergie dissipée, etc).

Maintenant que ces points ont été établi, nous allons pouvoir débiter l'étude analytique du choc.

5.2 Equation externe

Nous débutons avec un schéma décrivant les forces agissant sur le système :



Notez que le centre de poussée est différent de part l'influence du parachute.

Avec l'ouverture du parachute, il nous faut redéfinir les intensités de nos forces pour voir comment le comportement du module est affecté.

- $P = 1 \times 9.81 = 9.81N$;
- $F_{friction} \in [0 ; (7.8 + 8) \times (2 * 10^{-5}) \times (20 * 10^{-3}) \times 7 \approx 4.4 * 10^{-5}]N$ * ;
- $Pa = (V_{module} + V_{parachute}) \times \rho_{air} \times g$
 $= ((20 * 10^{-2} \times \pi \times (4 * 10^{-2})^2) + \frac{2}{3}\pi \times (10 * 10^{-2})^3) \approx 1.34 * 10^{-5}N$;

* car $C_{x \text{ linéaire}} = 8$ pour un demi-cylindre et $C_{x \text{ linéaire}} = 7.8$ pour un cylindre [10]. (Notez qu'on est toujours dans un cas de faible vitesse, donc on applique les mêmes formules qu'en phase 1).

Finalement, avoir ajouté le parachute au système n'implique pas de gros changements dans les amplitudes de nos forces, et on peut donc dans cette partie considérer que la force endurée par le système lors du choc sera de l'ordre de celle du poids. C'est du moins la supposition qui sera faite pour la suite de cette étude.

5.3 Équation interne

5.3.1 Étude analytique

Nous allons désormais établir l'impact d'une force en un instant donné sur le module, et plus particulièrement sur les ressorts internes. Nous avons vu ci-dessus que la force majeure était celle du poids. Il en ressort que cette force va être totalement compensée au moment de l'ouverture du parachute. Nous verrons donc l'impact en terme d'oscillations et de critère pour les ressorts.

Nous rappelons l'équation différentielle décrivant la position des ressorts :

$$x''(t) + 4\zeta * \omega_0 * x'(t) + 2\omega_0^2 * x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Par rapport au choc que l'on considère ici, nous avons ensuite une solution particulière associée, qui doit valider l'équation suivante :

$$x''(t) + 4\zeta * \omega_0 * x'(t) + 2\omega_0^2 * x(t) = \frac{F_{choc}}{m} * \delta(t) \quad (3)$$

On remarque que le dirac se traduit comme la force du choc qui est appliquée en un instant donnée. Cette force appliquée sur les ressorts est donc celle subit par le module, soit la force d'ouverture du parachute compensant celle du poids.

Afin de la prendre en compte, on part de l'équation différentielle et on y applique la transformée de Laplace. L'idée n'est donc pas d'ajouter une solution particulière à la solution homogène mais plutôt de déterminer directement la solution générale. On rajoute que comme on étudie la résonance, on s'intéressera majoritairement à l'amplitude créée

par le choc :

$$\begin{aligned} p(pX(p) - x(0^+)) - x'(0^+) + 4\zeta\omega_0(pX(p) - x(0^+)) + 2\omega_0^2 X(p) \\ = \int_0^\infty \frac{F_{choc}}{m} \delta(t) * e^{(-pt)} dt \end{aligned}$$

$$\rightarrow X(p) = \frac{p \times x(0^+) + (x'(0^+) + 4\zeta\omega_0 x(0^+) + F_{choc}/m)}{p^2 + p \times 4\zeta\omega_0 + 2\omega_0^2} \text{ car } \int_0^\infty \delta(t) * e^{(-pt)} dt = 1.$$

Si on considère l'hypothèse selon laquelle le ressort est en équilibre statique tel que $x'(0^+) = 0$ (et en notant $x(0^+) = x_0$), cela nous ramène à :

$$X(p) = \frac{(F_{choc}/m + 4\zeta \times \omega_0 \times x_0) + p \times x_0}{p^2 + p \times 4\zeta\omega_0 + 2\omega_0^2}$$

A partir de ce moment, il devient nécessaire d'évaluer la vraisemblance de ce résultat en évaluant notamment la concordance entre les p de l'équation ci-dessus et le comportement que l'on attend de $x(t)$ au final.

Nous avons ici :

$\Delta = 8\omega_0^2(2\zeta^2 - 1) < 0$ comme nous l'avons vu précédemment. Ce résultat nous amène à la factorisation des p suivante :

$$p^2 + p \times 4\zeta\omega_0 + 2\omega_0^2 = (p + 2\omega_0(\zeta + i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2}))(p + 2\omega_0(\zeta - i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2}))$$

Au final :

- $p1 = -2\omega_0(\zeta + i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2})$ ce qui indique que le pôle sera stable ($\text{Réel}(p) < 0$) (à comprendre que les oscillations seront amorties) et que l'on aura à faire avec des oscillations (présence d'un imaginaire). Or, c'est le comportement attendu de la part de $x(t)$: une oscillation en réponse à un dirac qui va se stabiliser au cours du temps ;
- de même, $p2 = -2\omega_0(\zeta - i\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2})$ qui nous amène aux mêmes conclusions que $p1$;

Etant donné que notre étude porte ici sur l'amplitude X , nous n'allons pas repasser à une expression temporelle, mais on va plutôt faire le changement de variable $p = i\Omega = 2i\pi f$. Cela nous ramène alors à l'expression fréquentielle :

$$X(f) = \frac{(F_{choc}/m + 4\zeta \times \omega_0 x_0) + 2i\pi f \times x_0}{(2\omega_0^2 - \Omega^2) + 4i\zeta\omega_0\Omega}$$

et donc en terme d'amplitude :

$$|X(f)| = \sqrt{\frac{(F_{choc}/m + 4\zeta \times \omega_0 x_0)^2 + (2\pi f \times x_0)^2}{((2\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (4\zeta\omega_0\Omega)^2)}}$$

=> Nous allons ici privilégier une étude de la résonance à travers un outil numérique. En sommes, nous étudierons les fréquences de résonances à travers des schémas numériques obtenus via Python.

5.3.2 Étude numérique - Python

L'étude numérique va comprendre une étude de l'amplitude X et des fréquences de résonance. On cherche en effet à définir un lien entre l'amplitude de la solution avec 2nd membre et la fréquence f .

Pour clarifier dès maintenant la méthode, nous listons ci-dessous les étapes qui nous amènerons à des critères sur la raideur k notamment :

- Evaluer l'évolution de l'amplitude en fonction de la fréquence
- Quantifier et justifier les résultats en amplitude :
 - quantification : influence de la force absorbée ($= F_{poids}$) sur l'amplitude
 - justification : vérification des fréquences de résonances observées analytiquement
- Conclure sur le comportement fréquentiel : quel critère sur f_0 en conséquence de nos observations ?

L'idée sera, en fonction du tracé Amplitude = fonction(fréquence), d'avoir une idée des fréquences à privilégier afin de minimiser l'amplitude lors du choc. Notre but est en effet de limiter au maximum les changements d'amplitudes et de surtout éviter le cas de résonance.

En sommes, on crée un code dans l'optique d'avoir une confirmation visuelle des relations bilan listées plus tôt, ainsi que de nouvelles relations potentielles.

Dans un premier temps, nous avons le graphique suivant, résumant visuellement l'état de notre système:

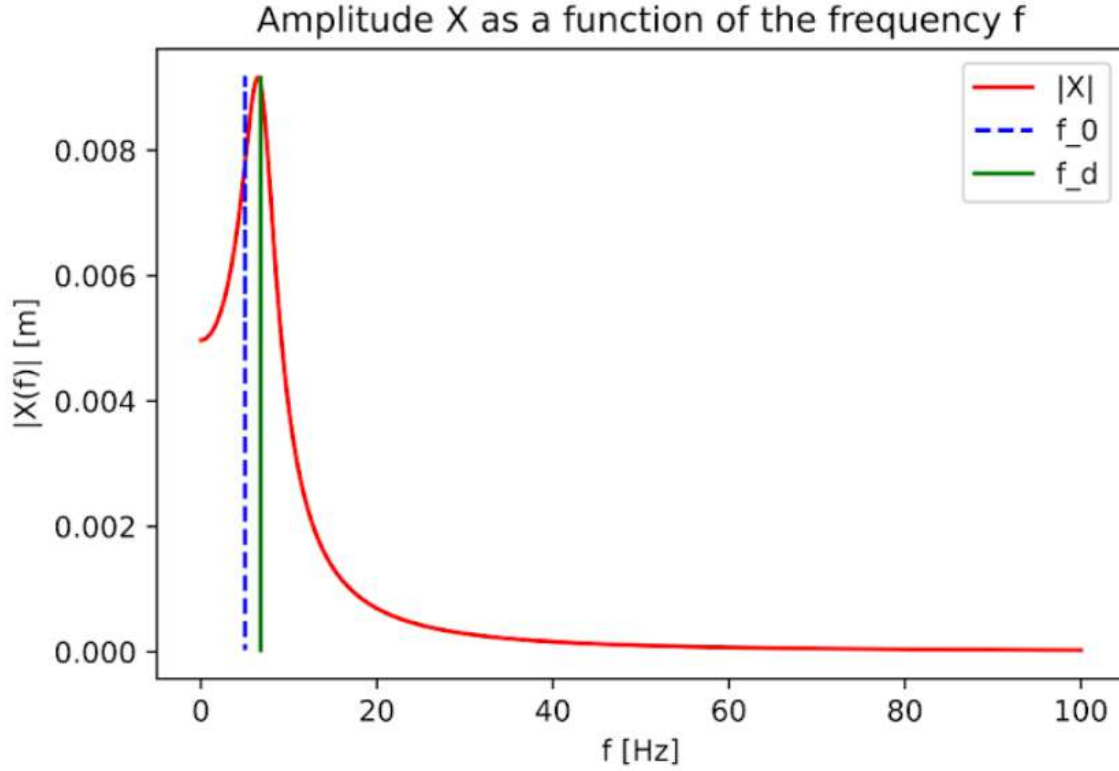


Figure 7: Amplitude du choc dans le cas $\zeta = 0.2$ et $f = 10Hz$ [3]

On remarque que la fréquence de résonance ne correspond pas à la fréquence propre du système f_0 mais plutôt à $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$. On retrouve le fait que pour avoir une influence sur l'amplitude, on pose une condition sur ω_d ($\lim_{\zeta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} X \rightarrow \infty$).

Cette condition semble donc indépendante de la force et plutôt attachée au système étant donné qu'on la retrouve dans 2 phases différentes.

Un point sur lequel le système va dépendre de ces forces, c'est au niveau de la quantification des amplitudes. En effet, on observe dans les équations la présence du terme F_{choc} , lié linéairement à l'amplitude X .

Cela implique assez naturellement qu'un important effort extérieur engendre d'importantes amplitudes pour nos ressorts. Il est à noter cependant qu'aux vues des amplitudes de X par rapport à celle de F_{choc} , cette influence reste faible et n'est pas une donnée maîtresse sur l'intensité. Il est plus vrai de conclure sur une amplitude déduite d'un ensemble de données telles que F , ζ , ω_0 , x_0 , etc.

Maintenant que nous avons observé des comportements précédemment énoncés, nous allons faire une nouvelle observation pour notre problème.

On a en fait un intervalle optimal pour f : on estime au vu de la figure sur l'amplitude, qu'il va être nécessaire de se placer à une fréquence la plus éloignée possible de celle de résonance.

Ainsi, pour que le système ne soit pas initialement mal conditionné, il va falloir chercher à avoir un f_0 le plus éloigné possible de f_d , la fréquence de résonance.

Pour résumer, nous avons, à partir de la forme de la résonance, confirmé la fréquence

de résonance et par la même occasion pu déterminer une condition "élémentaire" forte sur f_0 : plus la fréquence f_0 est éloigné du point de résonance, moins le système sera sujet à une possible mise en résonance naturel. Par exemple, si f_0 est très proche de f , une petite force suffit à faire raisonner le système, tandis que cette dernière augmente pour une f_0 plus éloignée.

NOTE :

- Il est à noter que la fréquence f peut tout à fait être supérieure à 100 Hz. On voit juste en fonction de différentes fréquences à laquelle le système réagit de façon destructive ($X \rightarrow \infty$).

- Il est par ailleurs à noter que ces intervalles sont fortement dépendantes du ζ arbitrairement considéré ici. ζ est en fait un paramètre théorique qui permet d'aboutir sur des contraintes physiques, sur k et c notamment.

Il faut être minutieux sur notre façon de modéliser notre problème, tout en respectant ses contraintes physiques. Nous verrons dans la phase à venir en quoi ce facteur peut se montrer problématique.

5.4 Bilan choc

Nous n'allons pas donner de critère final sur f_0 dans cette partie. On remarque en effet qu'il nous reste une étape à valider : définir si le comportement du système (i.e sa fréquence de résonance) est dépendante des forces appliquées au module.

On sait par exemple déjà que la condition sur ω_d a été observé lors de 2 phases distinctes, mais la retrouver lors d'une phase supplémentaire permettrait de nous assurer de son indépendance face aux excitations extérieures.

De nouveau, nous allons jongler avec plusieurs approches et ré-utiliser les résultats d'une phase pour débiter une nouvelle.

Cette étude doit être vu comme l'apprentissage du comportement des ressorts à travers une application au CANSAT.

Pour rappel, nous cherchons aussi à développer dans chaque partie de nouveaux outils en même temps que nous en apprenons plus sur notre système. Notre but est de développer au mieux notre modèle et les outils le décrivant, afin de fournir un résultat fiable en fin d'étude (après avoir exploité de nombreuses piste et avoir observé tous les aspects).

Nous avons au final développé notre système à l'aide d'outil graphiques et numériques qui ont apporté une composante plus visuelle sur le comportement de notre système.

Dans la partie suivante, on conclura sur l'influence des forces extérieurs sur le système de ressort interne en étudiant notamment un cas de force oscillante.

6 Phase 3 - Oscillations

6.1 Préambule

D'un aspect physique et applicatif, le fait de prendre en compte des forces oscillantes agissant sur le Cansat va nous permettre :

- De mieux appréhender le comportement des ressorts, que ce soit en terme de critère de résonance, de raideur, etc.
- Il est tout à fait raisonnable de considérer que dans cette phase, qui dure quasiment toute la descente, des forces vont être appliquées sur le module. Etant donné que l'on a déjà vu le cas d'une force ponctuel, on privilégie donc un nouveau type de force afin de parer à toutes éventualités. Nous pouvons ainsi définir des critères empêchant la création de résonance dans le cas d'oscillations.

Pour ce qui est de l'étude du mouvement des ressorts à proprement parler, cette phase, tout comme le faisait la seconde, va s'appuyer sur des éléments de la phase 1 et notamment le résultat de la solution homogène qui y sera admis.

6.2 Hypothèses

Les considérations et suppositions inhérentes à cette partie sont à retrouver dans le tableau ci-contre :

Hypothèses externes

- | | |
|---|---|
| 1 | Variations de vitesse négligées durant les oscillations ; |
| 2 | Oscillations étudiées que pour le cas des pattes non déployées ; |

Hypothèses internes

- | | |
|---|--|
| 1 | La force d'oscillation est verticale ; |
| 2 | La force oscillante est transmise intégralement aux ressorts ; |
| 3 | La raideur des ressorts est toujours identique ; |
| 4 | La masse de chaque disque est toujours identique ; |
| 5 | Le ressort est initialement à un état d'équilibre statique. |

6.3 Étude externe

Les intensités considérées ici ont évolué car nous sommes passé d'un cas de faible vitesse à un cas où l'on considère une vitesse constante et égale à 7 ms^{-1} .

Nous avons donc une nouvelle formule pour les frictions :

$$F_{frictions} = \frac{Cx*\rho*S*v^2}{2}, \text{ par projection sur } x ;$$

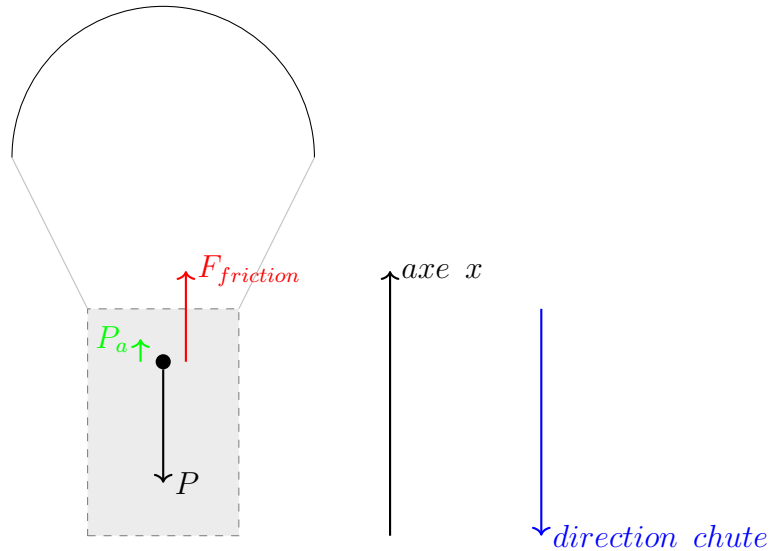
Enfin, on a ici 2 parties agissants sur nos forces :

- Le parachute dont la surface est de la forme $\pi * r^2$ et pour lequel $C_x = 1.4$ [9] ;
- Le module pour lequel la surface est aussi de la forme $\pi * r^2$ mais pour lequel $C_x = 1.1$ [9] ;

Cela nous ramène au final à :

- $P = 1 * 9.81 = 9.81N$;
- $F_{friction} = \frac{\rho_{air} * 7^2 * \pi}{2} * (1.4 * rayonparachute^2 + 1.1 * rayonmodule^2) \approx 5N$;
- $Pa = \rho_{air} * (V_{module} + V_{parachute}) * g$
 $= ((20 * 10^{-3} * \pi * (4 * 10^{-3})^2) + \frac{2}{3} \pi * (4 * 10^{-3})^3) \approx 1.34 * 10^{-5}N$;

Le schéma associé à ces forces est le suivant :



On note notamment que l'intensité de la force de friction s'est vue augmenté. Cela se traduit par le fait que le parachute implique une chute qui se fera à une plus faible vitesse que si on avait laissé chuter le module sans parachute.

Ce changement brusque implique aussi que le modèle théorique change brusquement entre les phases 1-2 et la phase 3. En fait, comme les phases 1-2 ne durent dans les faits qu'une poignée de seconde ($\approx 5s$), la vitesse n'a pas le temps de croître et reste faible.

On suppose donc ici que le changement de phase se fait entre la phase 2 et celle-ci. Le changement de force n'est donc pas brusque, ni dans notre théorie, ni dans les faits : on ne s'intéresse simplement qu'au cas de la vitesse dite de croisière.

6.4 Étude interne

Nous reprenons la forme de l'équation différentielle avec second membre :

$$x''(t) + 4\zeta * \omega_0 * x'(t) + 2\omega_0^2 * x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Il nous faut donc déterminer une solution particulière dans le cas d'une force oscillante. On considère ainsi une force de la forme $F(t) = F_0 * \cos(\Omega t)$. Cette forme est arbitraire mais elle modélise fidèlement le comportement d'une résultante sinusoïdale.

Cette forme de la force nous amène à chercher une solution particulière elle même sous la forme $Re(Ae^{i\Omega t})$ avec $A = X_p e^{-i\phi_p}$. La solution générale associée est alors la suivante :

$$x(t) = X_0 * e^{-2\zeta\omega_0 t} * \cos(\omega_d \times t - \phi_d) + X_p * \cos(\Omega \times t - \phi_p) \quad (4)$$

Dans un premier temps, nous voulons définir les facteurs X_p et ϕ_p . Nous implémentons pour cela la solution particulière dans notre équation différentielle initiale :

$$\rightarrow -A\Omega^2 Re(e^{i\Omega t}) + i4A\Omega\zeta\omega_0 Re(e^{i\Omega t}) + 2A\omega_0^2 Re(e^{i\Omega t}) = \frac{F_0}{m} Re(e^{i\Omega t})$$

En divisant par le facteur $Re(e^{i\Omega t})$ nous nous ramenons à :

$$-A\Omega^2 + i4A\Omega\zeta\omega_0 + 2A\omega_0^2 = \frac{F_0}{m}$$

soit :

$$A = \frac{F_0}{m} * \frac{1}{((2\omega_0^2 - \Omega^2) + i4\Omega\zeta\omega_0)}$$

$$X_p e^{-i\phi_p} = \frac{F_0}{m} * \frac{1}{((2\omega_0^2 - \Omega^2) + i4\Omega\zeta\omega_0)}$$

On peut désormais définir les facteurs ϕ_p et X_p :

$$\text{i) } |X_p| = \frac{F_0/m}{\sqrt{((2\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2\zeta^2\omega_0^2)}} \text{ car } \|e^{-i\phi_p}\| = 1$$

Nous avons de plus :

$$\text{ii) } e^{+i\phi_p} = \frac{X_p * m}{F_0} * ((2\omega_0^2 - \Omega^2) + i4\zeta\Omega\omega_0)$$

Par identification :

$$\cos(\phi_p) = \frac{X_p * m}{F_0} * (2\omega_0^2 - \Omega^2)$$

et

$$\sin(\phi_p) = \frac{X_p * m}{F_0} * 4\zeta\Omega\omega_0$$

et donc pour finir :

$$\tan(\phi_p) = \frac{\frac{X_p * m}{F_0} * 4\zeta\Omega\omega_0}{\frac{X_p * m}{F_0} * (2\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

$$\rightarrow \tan(\phi_p) = \frac{4\beta\zeta}{2-\beta^2} \text{ avec } \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Dans un second temps, nous avons déjà vu le comportement de la solution homogène. Néanmoins, ces données et les équations dérivées étaient valable pour le cas sans force uniquement. Il convient ainsi de ré-appliquer les conditions initiales, en position et en vitesse.

Il ne nous reste ainsi plus qu'à déterminer l'amplitude X_0 et la phase ϕ_d en faisant appel aux conditions initiales $x(t=0) = x_0$ et $\frac{dx(t=0)}{dt} = 0$ qui se retranscrivent de la façon suivante sur l'équation 4 :

$$i') x(0) = X_0 * \cos(\phi_d) + X_p * \cos(\phi_p) = x_0$$

$$ii') \frac{dx(0)}{dt} = 2X_0\zeta\omega_0 * \cos(\phi_d) + X_0\omega_d * \sin(\phi_d) + X_p\Omega * \sin(\phi_p) = 0$$

Nous avons 2 équations pour 2 inconnues qui nous permettent de donner une expression aux deux variables :

$$\begin{aligned} \rightarrow \tan(\phi_d) &= \frac{-2\zeta\omega_0}{\omega_d} + \frac{X_p\Omega}{(X_p \times \cos(\phi_p) - x_0)\omega_d} * \sin(\phi_p) \\ \rightarrow X_0 &= \frac{(x_0 - X_p \times \cos(\phi_p))}{\cos(\phi_d)} \end{aligned} \quad (5)$$

Il convient désormais d'étudier cette équation et plus particulièrement les facteurs qui la compose.

6.4.1 Critères de résonance

Des équations et égalités obtenues ci-dessus, nous allons désormais tenter de faire le lien avec des contraintes sur les caractéristiques du système.

Nous allons pour cela porter attention aux cas de résonances. Nous allons ci-dessous détailler notre raisonnement pour chacune d'entre elle avant de les résumer en fin de partie.

Il est possible d'avoir 2 résonances :

- La première via X_p
- La seconde via X_0

Comme on voit que ces amplitudes sont reliées numériquement, on ne va en étudier qu'une, et les résultats seront considérés comme admis pour l'autre.

Pour ce qui est de $X_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{((2\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2\zeta^2\omega_0^2)}}$, nous voyons que pour $f \rightarrow f_d$ et en considérant de faibles fréquences :

$$\lim_{f \rightarrow f_d} 2\omega_0^2 - \Omega^2 = 0$$

$$\lim_{f, f_0 \ll 1} 16\Omega^2\zeta^2\omega_0^2 = 0$$

$$\implies X_p \rightarrow \infty$$

En sommes, nous avons déjà vu qu'il fallait éviter au mieux $f_0 = f$. On a donc ici un autre cas d'étude qui nous rappelle que le cas $\zeta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ est aussi une condition destructive (6.4 5).

Toutefois, par un simple calcul d'erreur, on peut voir que cette condition sur ζ n'est pas si évidente que ça :

$$f_d = 2 \times f_0 \sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2}$$

$$\frac{|f_d - f_0|}{f_0} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{2} - \zeta^2}$$

avec f_d la fréquence de résonance.

Si on cherche à maximiser l'écart entre f et f_0 , on maximise "l'erreur". On cherche donc à minimiser la racine, soit donc à appliquer la condition précédemment vue sur ζ .

En sommes, cette condition engendre un saut dans l'amplitude, pouvant amener à un cas de résonance, mais elle permet aussi d'assurer un écart le plus grand possible entre nos 2 fréquences. Par exemple, vous pouvez voir sur le graphique suivant un cas répondant aux critères : $\zeta \rightarrow 1/\sqrt{2}$ et $f, f_0 \ll 1$, ce qui correspond à un cas de grande amplitude :

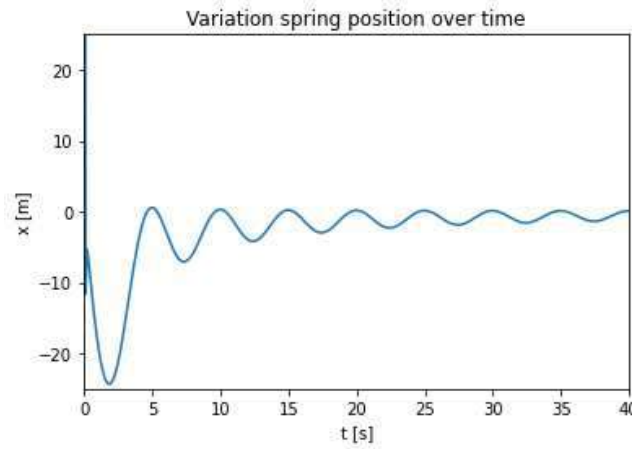


Figure 8: Cas $\zeta \rightarrow 1/\sqrt{2}$ et $f_0 \ll 1$

Sur cette figure, on remarque que les amplitudes diffèrent en effet fortement par rapport à celles des figures précédentes : elles sont ici bien plus grandes.

En comparaison, sur le graphique suivant, on peut voir le cas $f_0 \gg 1$ pour $\zeta = 0.2$:

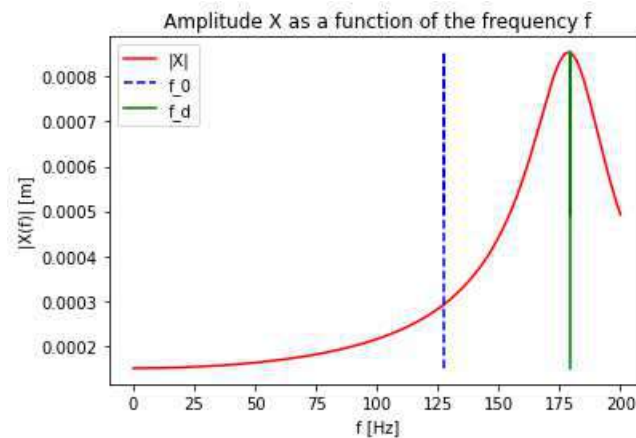


Figure 9: Cas $\zeta = 0.2$ et $f_0 \gg 1$

Cette fois-ci, on retrouve bien des fréquences avec un écart important, et des amplitudes très faible.

Il est à noter qu'aux échelles considérées, les graphiques servent plus de représentation visuelle car le comportement est d'une grande intensité :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

En conclusion, les critères mis en lumière ici sont similaires à ceux déjà développés : on doit prendre en compte un système avec amortissement d'importante fréquence. On va donc pouvoir en conclure que les critères dépendent majoritairement du système lui même et que les critères que nous allons définir seront valable pour tous types de forces.

Nous avons comme critères à ce stade :

- $f_0 \gg 1 \implies k \gg 1$. La raideur doit être grande devant 1, ce qui implique $\omega_0 \neq 0$ et qui permet par la même occasion d'assurer un écart conséquent avec la fréquence de résonance ;
- $\zeta \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour éviter d'avoir un saut en amplitude.

Ce dernier critère se traduit, pour rappel, par un critère sur k et c tel que : $k = \frac{3c^2}{2m}$, une condition qu'il faudra veiller à ne pas vérifier. Nous chercherons ainsi un ressort avec une raideur plutôt élevé et pour lequel les frottements ne respectent pas l'égalité ci-contre.

Cependant, les termes " c " et " ζ " sont peu parlant et ne sont pas des critères disponibles pour l'achat de ressort.

Un autre problème vient qu'il ne s'agit pas simplement de déterminer aléatoirement ζ . On arrive à un point où ζ n'est plus qu'une valeur numérique mais bel et bien un critère décisif sur le comportement du module.

La question sur laquelle nous nous pencherons lors de la phase suivante sera la suivante : "Comment déterminer un ζ fiable ?".

6.5 Conclusion

Pour conclure, nos observations nous amène à penser que la condition forte sur f_0 éloigné de f doit s'accompagner d'une approche centrée directement sur f_0 . Ainsi, plutôt que de passer par f pour étudier f_0 , nous allons désormais directement travailler sur la fréquence propre, et revenir sur le critère d'éloignement en tant que confirmation finale.

L'idée va être dans la continuité des critères développés depuis la conclusion de la phase 2 : on se focalise à présent sur la raideur k pour définir des valeurs numériques pour nos critères. On va donc travail en priorité sur k avant de revenir sur nos différents modèles pour confirmer les critères déjà développés. On se fie alors à un facteur pour lequel on a une application physique connu.

On va ainsi chercher k à partir de la conservation d'énergie, qui permet à la fois d'étudier cette possibilité en détail et de minimiser les éventuels erreur d'approximations portant sur ζ .

7 Phase 4 - Atterissage

On va dans cette partie porter attention à la phase final de notre étude, celle où le module atterit et entre "en collision" avec le sol.

Nous introduirons ici les idées de conservations et dissipations d'énergies et développerons celles de choc élastique.

7.1 Hypothèses

Les considérations et suppositions inhérentes à cette partie sont à retrouver dans le tableau ci-contre :

Hypothèses externes

- | | |
|----------|--|
| 1 | L'ouverture des pattes entraîne des forces supplémentaires * ; |
| 2 | Liaison pattes/module encastree **; |
| 3 | L'énergie est dissipée à 50/50 ***; |

Hypothèses internes

- | | |
|----------|---|
| 1 | L'énergie est entièrement transmise aux ressorts ; |
| 2 | La raideur des ressorts est toujours identique ; |
| 3 | La masse de chaque disque est toujours identique ; |
| 4 | Le ressort est initialement à un état d'équilibre statique. |

* force supplémentaire :

- L'air qui entre dans le module n'entraîne pas de forces de traînée ;
- Seule la surface ajoutée entraîne une force de frottement uniforme par symétrie ;

** : aucune oscillation des pattes, elles restent fixe et n'influent pas sur les oscillations (liaison encastree parfaite).

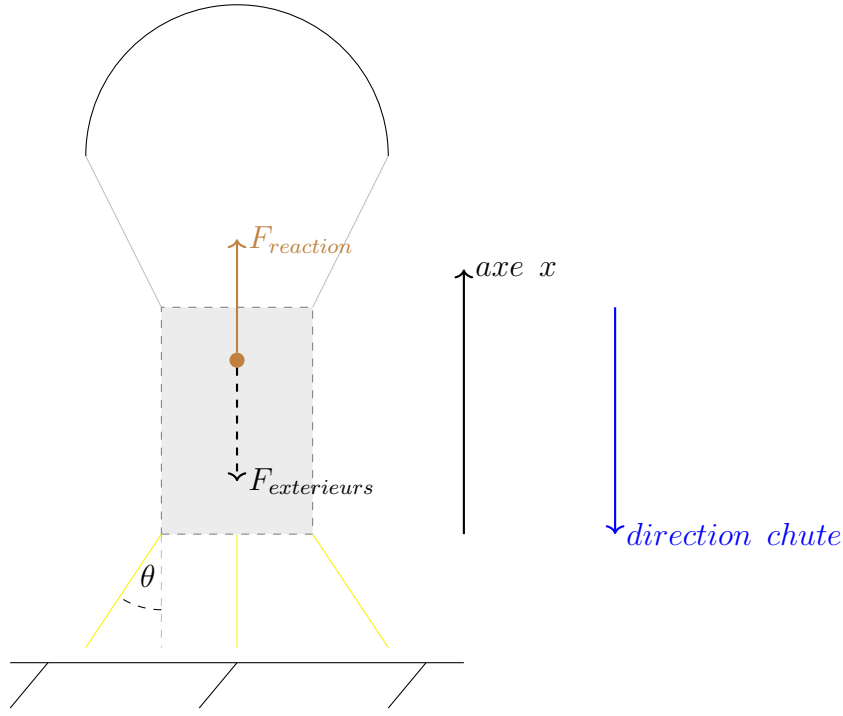
*** : La moitié de l'énergie due au choc est dissipée par les ressorts des pattes tandis que l'autre moitié est dissipée par le système de ressort interne.

7.2 Étude Externe

Nous avons pu développer dans les parties précédentes le fait que les forces subies par les systèmes de ressorts internes proviennent physiquement des forces appliquées au module.

Dans ce sens nous allons une dernière fois introduire le schéma externe du module pour mettre en contexte l'étude interne à suivre.

Ci-dessous, un schéma de notre module avec les pattes déployées, faisant apparaître les forces s'appliquant au module :



Avec l'ouverture des pattes, il nous faut redéfinir les intensités de nos forces pour voir comment le comportement du module est affecté et déterminer l'intensité de $F_{exterieurs}$:

- $P = 1 * 9.81 = 9.81N$;
- $F_{friction} [2] = \frac{\rho_{air} * 7^2}{2} * (1.4 * \pi * R_p^2 + 1.1 * (\pi * R_m^2 + 3 * \sin(\theta) * L * l)) \approx 5N$;
- $Pa [2] = \rho_{air} * (V_m + V_p + 3 * V_{patte}) * g = ((20 * 10^{-3} * \pi * (4 * 10^{-3})^2) + \frac{2}{3} \pi * (4 * 10^{-3})^3)) \approx 1.34 * 10^{-5}N$;

avec p = parachute, m = module, L = Longueur de la patte, l = largeur de la patte.

On en conclue que la prise en compte des pattes amène nécessairement à une augmentation des forces allant à l'encontre du sens du mouvement mais que ces dernières restent du même ordre que précédemment (phase 3).

7.3 Bilan énergétique - Critères ressorts

Comme énoncé en début de partie, nous décidons d'étudier notre système à travers un bilan énergétique.

Cette approche va nous permettre de faire le lien entre l'énergie du module au moment de l'atterrissage et les efforts de torsions subis par les pattes ainsi que les efforts de compression au sein du module.

En sommes, nous avons un choc assimilable à un choc ponctuel, mais étant donné que l'on a déjà étudié cet aspect en phase 2, nous nous focalisons sur un aspect qui traite de

la conservation d'énergie.

Dans un premier temps, introduisons l'équation différentielles dictant le comportement angulaire :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C \frac{d\theta}{dt} + K_\theta \theta = \tau(t)$$

En faisant la considération de $\tau(t) = cst$, on se ramène à :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{K_\theta}{I} \theta = \frac{M_t}{I}$$

avec M_t = moment de torsion, $I = I_{gz}$ = moment d'inertie, C = constante d'amortissement angulaire, K_θ = constante de raideur angulaire.

Après résolution et en considérant à $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, on à :

$$\theta(t) = \Theta_0 * \exp^{\frac{-C*t}{2*I}} * \cos(w_d \times t - \phi_d) + \frac{M_t}{K_{theta}}$$

$$\text{avec } \Theta_0 = -\frac{M_t}{K \times \cos(\phi_d)} ; \tan(\phi_d) = -\frac{C}{2Iw_d} \text{ et } w_d = \frac{\sqrt{4*K_\theta^2 - C^2}}{2*I}$$

Avant de passer à la conservation de l'énergie, nous allons prendre quelques lignes pour décrire les spécifications des figures suivantes à comparer :

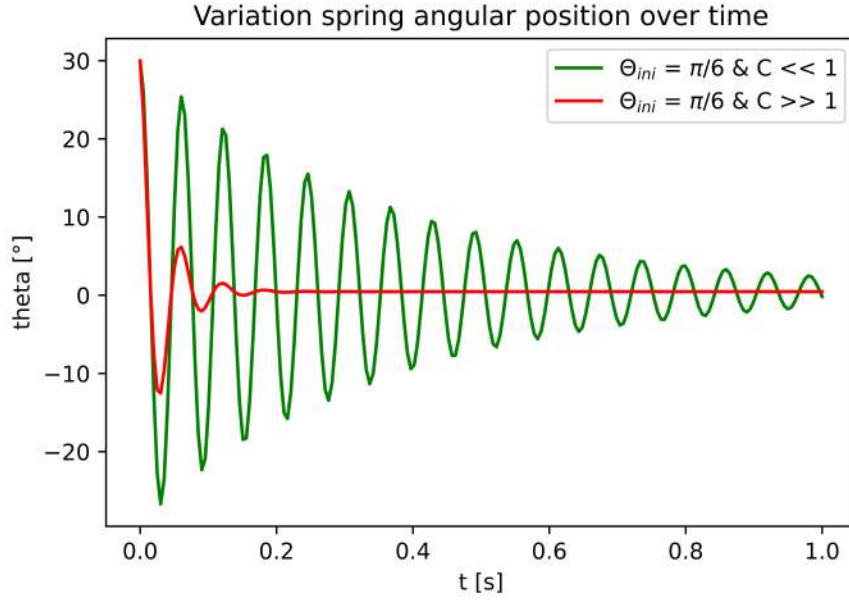


Figure 10: Variations angulaires pour $c \ll 1$ et $c \gg 1$

La majeure différence observée ici est le temps de réponse du système à une sollicitation extérieure. Il est de notre ressort de dimensionner C tel que ce facteur limite le nombre d'oscillation avant stabilisation.

On a au final une idée du comportement de la fonction $\theta(t)$ étudiée ainsi que les grandeurs angulaires rencontrées.

i) Pour ce qui est des énergies mises en jeu lors de l'atterrissage, elles sont les suivantes :

- Energie accumulée lors d'une **torsion** : $E_t = \frac{1}{2}K_\theta\theta^2$;
- Energie accumulée lors d'une **compression** : $E_c = \frac{1}{2}kx^2$;
- Energie **extérieur** (Energie cinétique) : $U = \frac{1}{2}Mv^2 = 24.5 \approx 25J$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Energie } \mathbf{torsion} : E_t = \frac{1}{2}K_\theta\theta^2 \\ \text{Energie } \mathbf{compression} : E_c = \frac{1}{2}kx^2; \end{array} \right\} \Rightarrow K_\theta = 9.3 \text{ N.mm/}^\circ \text{ et } k = 1.6e3 \text{ N/m}$$

avec M la masse du module CANSAT, m la masse du système de ressort interne, k la raideur en compression/traction, K_θ la raideur en torsion.

La conservation d'énergie se traduit par l'égalité suivante :

$$U = E_t + E_c$$

Suivant nos hypothèses, dans un cas on négligera l'énergie due à la torsion, tandis que dans l'autre, on négligera de potentielles compressions/tractions.

Dans le cas des ressorts externes, en développant l'expression, et en prenant en compte le fait que seule la moitié de l'énergie est dissipée via ce système, on aboutit à la relation suivante :

$$\frac{Mv^2}{2} = K_\theta \theta^2 + kx^2$$

Etant donné que l'on considère la torsion des ressorts extérieurs, on va prendre le cas limite pour lequel $k = 0$, ce qui entraîne une hypothèse de non-compressibilité des ressorts externes.

Cette condition nous amène ainsi à considérer un cas où l'énergie est totalement dissipée par torsion. On parle bien de cas limite car la raideur en torsion sera dimensionnée pour compenser à elle seule une telle force. Dans les faits, il y aura de la dissipation par compression, et donc le module n'en sera que mieux amorti.

La relation se ré-écrit finalement :

$$K_\theta = \frac{Mv^2/2}{3*\theta^2}$$

$$\rightarrow \text{Par application numérique : } K_\theta = \frac{1 \times 7^2/2}{3(30^2)} \approx \mathbf{9.3 Nmm/^\circ}$$

Note : le facteur $1/3$ vient du fait que l'on a là aussi 3 ressorts composants le système, et donc que l'énergie est également répartie entre chacun d'eux.

On voit que par un simple bilan énergétique, nous avons été en mesure de quantifier, la raideur de torsion de nos ressorts extérieurs.

ii) Si on se focalise désormais sur notre système de ressort interne, on aboutit rapidement aux égalités suivantes :

$$U = E_t + E_c$$

$$\frac{Mv^2}{2} = K_\theta \theta^2 + kx^2$$

On néglige ici la torsion pour les ressorts internes, rappelant que cette hypothèse reflète bien le cas réel, même si une torsion peut encore se produire.

Le modèle se simplifie donc comme :

$$k = \frac{Mv^2/2}{2*3*x^2}$$

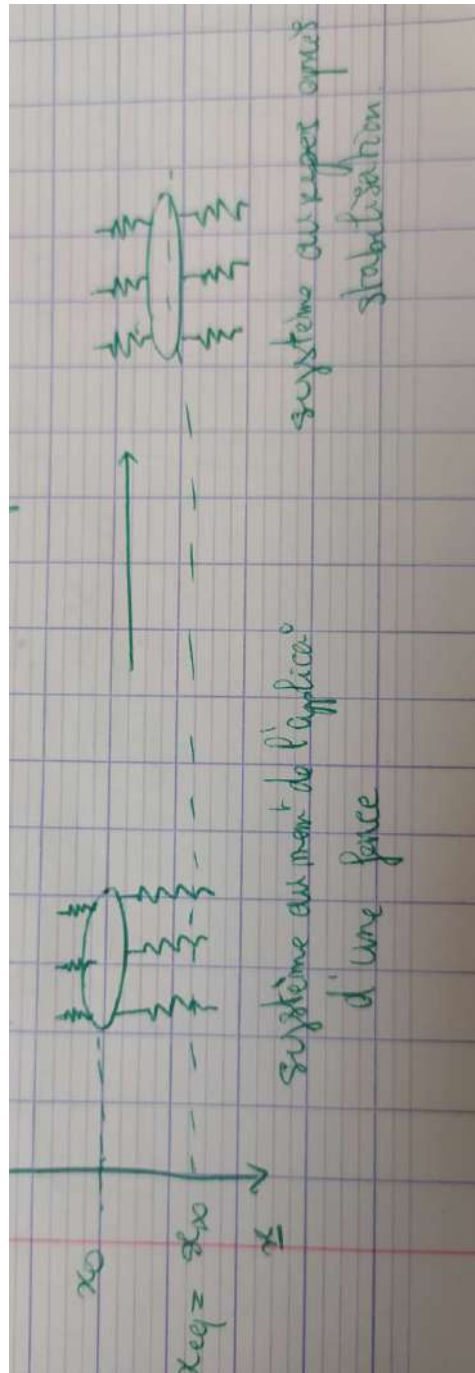


Figure 11: Schéma du repère de position considéré

les coefficients $1/2$ et $1/3$ viennent respectivement du fait que notre système de ressort interne est composé de 2 lots de ressorts, et que chacun est lui même réparti en 3 ressorts, d'où le coeff $1/3$.

Avant de conclure sur la validité du modèle aux vus de ces raideurs, nous allons introduire un schéma justifiant et détaillant les positions $x(0)$ et x_{eq} .

Pour ce qui est de l'application numérique, on a un système d'une hauteur complète de 20cm, soit d'environ 10cm pour chaque ressort. On considère d'après le schéma synthétisant notre modèle, x comme étant la différence entre la position x_0 et la position finale d'équilibre x_{eq} soit $x = x_0 - x_{eq} \approx 5cm$; et donc $k \approx 1.6 * 10^3$ N/m. Ainsi, l'étude de l'élongation du ressort amène assez directement à des conclusions sur la raideur k . Le dimensionnement de notre problème comme établi en début de rapport est donc un point clé pour le dimensionnement de nos ressorts.

On a pour finir une égalité reliant les caractéristiques de chaque ressort à leur élongation (θ en torsion et x en compression). Nous avons été en mesure, à l'aide d'une application de conservation d'énergies et via différentes hypothèses (sur la vitesse des ressorts, la transmission d'énergie complète, etc) de déterminer les raideurs pour les ressorts internes et externes.

Maintenant que nous avons comme appui des valeurs concrètes, on va les tester numériquement dans les cas des phases précédentes afin de vérifier qu'elles correspondent à notre modèle. Cette courte vérification permettra de mettre en exergue la véracité de leur valeur par rapport à notre modèle et ses mises en résonance notamment.

7.4 Conclusion

Pour conclure, on a mis en place un système simple nous permettant de définir de manière fiable une des grandeurs essentielle de notre étude. Il est à noter que le travail effectué avant n'a pas été vain. En effet, les critères précédemment définis sont toujours à être confirmé pour s'assurer que notre modèle répond bien aux attentes physiques de notre étude.

7.5 Validation modèle théorique

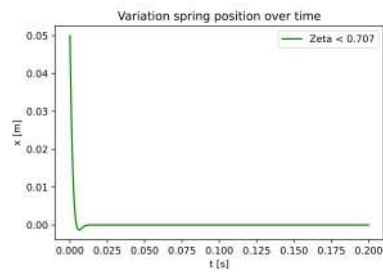
7.5.1 Phase 1[3]

Critères développés :

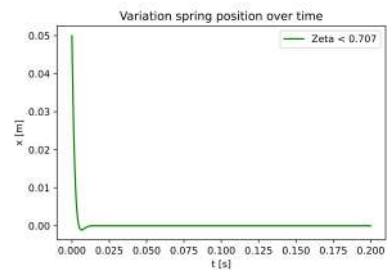
- $k \gg 1$;
- $k \neq \frac{c^2}{2m}$.

On va représenter des graphiques de $x(t)$ pour différents c afin de voir si il y aurait un moyen de définir, a priori, une bonne condition sur ce terme théorique, afin de valider à la fois le cas théorique et nos déductions naturelles. En sommes, peut-on considérer un amortissement convenable (non-négligeable) à partir de $c = 0.1$, $c = 10$, etc ?

Par la même occasion, on va vérifier que notre valeur de k est en accord avec le modèle théorique et qu'elle est bien définie elle même.



(a) $c = 0.1$



(b) $c = 3$

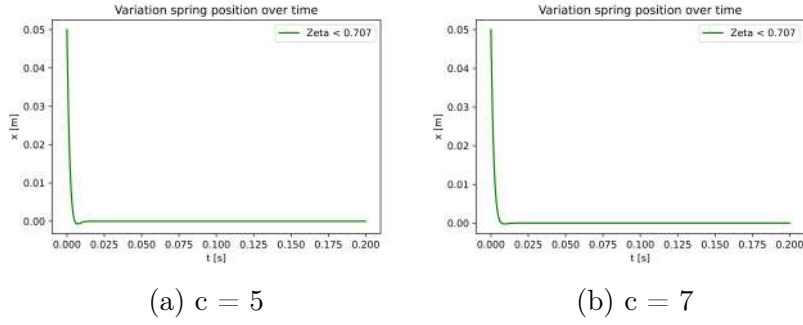


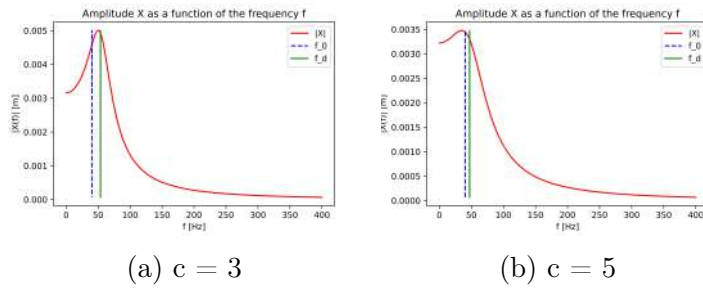
Figure 13: Amortissement pour différentes valeurs de c

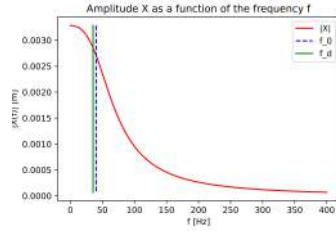
On remarque assez facilement que dans le cas d'un amortissement faible, on a un coefficient c tel que la position diminue brusquement, avant de se stabiliser à la position d'équilibre. Ce type de saut est un facteur nous indiquant que $c = 0.1$ est une valeur trop faible et qu'elle représente plutôt un système négligeant les amortissements visqueux.

On privilégiera donc plutôt les cas $c = 3, 5$ ou 7 , même si ces valeurs ne sont sans doute pas les plus optimale, on a un ordre de grandeur d'un coeff physiquement valable. On déterminera après plusieurs étape un c idéal qui pourrait servir dans de futurs études.

Quoi qu'il en soit, pour le moment, notre valeur de k semble valable aux vus de l'allure des graphiques.

7.5.2 Phase 2[4]





(a) $c = 7$

Figure 15: Position avec un amortissement haut

On voit dans les graphiques pour $c = 5$ et $c = 7$ que l'amortissement est trop important, négligeant par la même occasion toutes possibilités de résonance. Même si le cas d'un c grand devant 1 arrangerai notre système, ce cas n'est pas envisageable ici. En effet, nous étudions notre système dans des cas limites afin de pouvoir parer à diverses éventualités, et donc on privilégie des cas avec possibilité de résonance. On considèrera donc le cas $c = 3$.

7.5.3 Phase 3 [5]

Avant de conclure sur le bienfondé de notre étude du point de vue de la concordance entre modèle théorique et attentes physiques, nous allons une nouvelle fois mettre à l'épreuve notre raideur k dans le cas de mouvements oscillants.

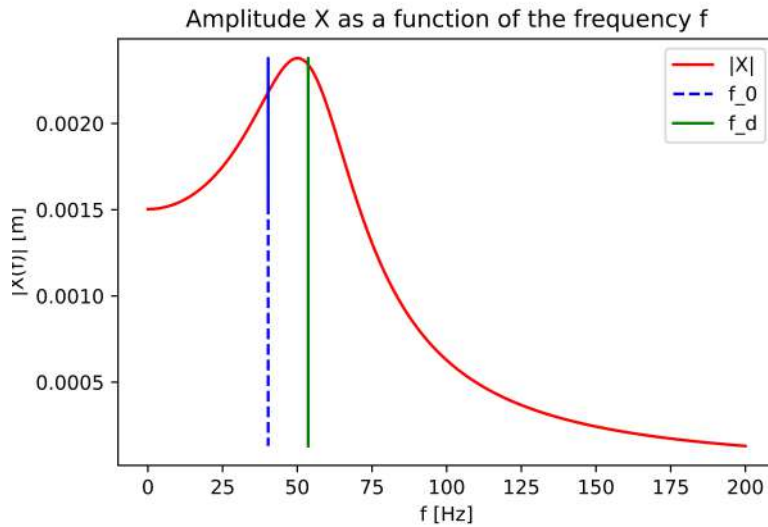


Figure 16: Position avec un amortissement haut

On peut voir que notre modèle répond bien comme précédemment observé dans le cas $c = 3$. Ainsi, on conclue sur le fait qu'une valeur théorique de l'amortissement visqueux dans notre étude peut-être approximé comme ci-dessus. Cette finalité permet d'avoir une base potentiellement utile pour de futures études sur notre module CANSAT.

Ainsi, si jamais on souhaite ajouter une nouvelle phase à étudier ou si on venait à considérer une nouvelle force, on pourrait facilement le faire avec les valeurs déduites.

Pour ce qui est de la vérification de cette phase, elle valide notre modèle et les valeurs numériques calculées.

7.5.4 Phase 4 [6]

Pour conclure sur notre étude des ressorts d'un point de vue résonance, nous allons mettre à contribution le cas des ressorts de torsion pour déduire là aussi une constante d'amortissement visqueux C approprié et pour valider notre modèle lors de l'atterissage.

Cette vérification va permettre de conclure sur la pertinence de considérer la méthode de la conservation de l'énergie pour le calcul des raideurs. On validera par la même occasion les hypothèses inhérentes à la phase 4 :

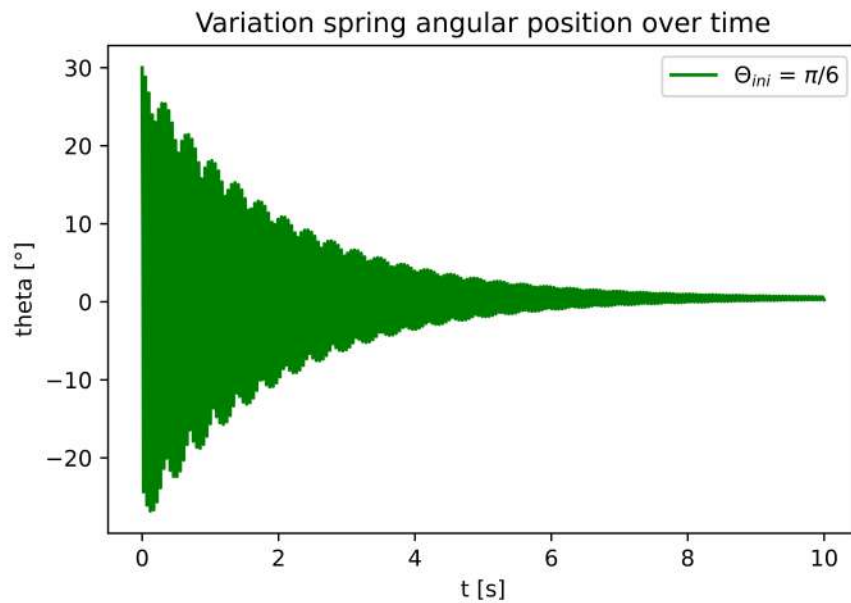


Figure 17: Position angulaire avec $C = 0.01$

On a ici bien un système amortissant. On a défini le coeff C tel que l'amortissement soit fait après 10s : le système est alors quasiment au repos, soit à un angle fixe.

8 Conclusion Fréquentielle

Il existe de multiples méthodes pour l'étude des ressorts. Le fait de considérer de nouvelles méthodes à chaque partie n'empêche pas de faire des conclusions sur le module. Ce rapport cherche à la fois à déterminer des critères sur les ressorts et à mieux comprendre le système lui même. On permet ainsi à tout un chacun de voir en application diverses méthodes : numérique (via Python et Matlab-Simulink), énergétique, via le bilan des forces extérieures, etc ; et ce sur divers aspects du module : amplitude, résonance.

On utilise d'ailleurs les résultats dans les différentes phases, amenant cette continuité dans notre étude.

Les valeurs d'amortissement visqueux serviront pour de futurs potentielles études tandis que celle sur la raideur vont dès maintenant nous servir dans le choix final de nos ressorts.

Les ressorts considérés sont finalement retrouvable aux liens [\[7\]](#) et [\[1\]](#).

References

- [1] Misumi company. Torsion spring. <https://uk.misumi-ec.com/vona2/detail/221000016923/?HissuCode=T120B&PNSearch=T120B&KWSearch=T120B&searchFlow=results2type#>. Site Web. Consulté le 20-oct-2020.
- [2] Valentin Duvivier. Calculs masses forces energies .m. Code Matlab. Modifié le 04/10/2020.
- [3] Valentin Duvivier. Cansat phase 1 vibrations.py. Code. Modifié le 04/10/2020.
- [4] Valentin Duvivier. Cansat phase 2 amplitudes.py. Code. Modifié le 04/10/2020.
- [5] Valentin Duvivier. Cansat phase 3 oscillations.py. Code. Modifié le 04/10/2020.
- [6] Valentin Duvivier. Cansat phase 4 torsion.py. Code Python. Modifié le 04/10/2020.
- [7] Sodemann ressorts company. Compression spring. <https://www.ressorts-sodemann.fr/c03000382250m>. Site Web. Consulté le 20-oct-2020.
- [8] Inc. The MathWorks. Matlab documentation - sim simulation. <https://fr.mathworks.com/help/physmod/simscape/ug/mass-spring-damper-in-simulink-and-simscape.html>. Site Web. Consulté le 31-oct-2020.
- [9] Wikipédia. Coefficient de frictions visqueux. https://fr.wikipedia.org/wiki/A%C3%A9rodynamique_automobile. Site Web. Consulté le 06-avr-2020.
- [10] Wikipédia. Ecoulement de stokes : *forme pour d'autres corps que la sphère*. https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89coulement_de_Stokes. Site Web. Consulté le 02-avr-2020.