LA2XX-CI : Dynamique des fluides (CI-Physique-Mécanique)

Ecrit 26 octobre 2012

Cours

1. Rappelez la forme globale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
2. Écrivez la forme locale.

1 - Statique

Le récipient de la Figure 1 est soumis à une rotation constante ω autour de l'axe z. Le système a alors deux forces de volume : la force de pesanteur égale à $-g\ e_z$ et la force centripète égale à $\omega^2 r\ e_r$,

1. quelle est l'expression de la forme locale de l'équation fondamentale de la statique des fluides ? (rappel $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$)

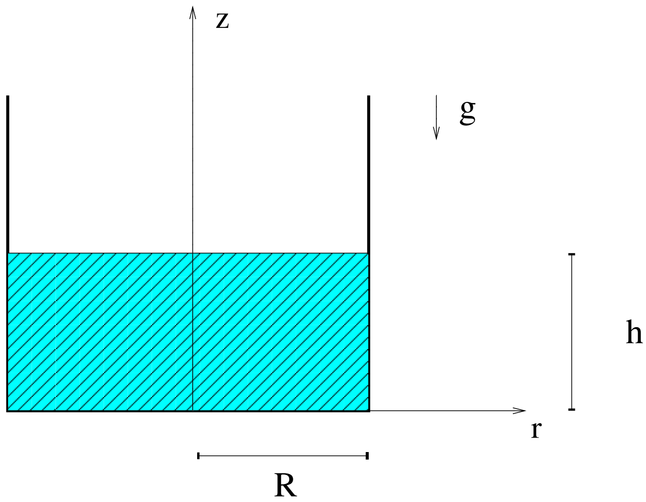

FIGURE 1 – Récipient au repos, avant rotation constante ω autour de l'axe z .

2. Intégrez les équations du point 1 et montrez : que la pression est une fonction de r et de z soit $p = p(r, z)$ et que les courbes isobares (à pression constante) sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe z.
3. Représentez la surface libre du fluide dans les cas limites w grand et w petit.
4. La pression sur le fond au centre du récipient, augmente-telle avec la rotation ? Justifiez.
5. Sans faire des calculs, comment calculeriez vous la hauteur de la surface libre aux bords du récipient en rotation ($r = R$) ?

2 - Modèle de tornade

Soit le modèle de tornade défini par le champ de vitesses en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} u_c(r,\theta) & = \omega r\ e_\theta \quad r \leq R_c \\ u_e(r,\theta) & = \frac{B}{r}\ e_\theta \quad r \geq R_c \end{cases}$$

où u_c est le champ de vitesses du coeur de la tornade de rayon R_c et u_e est le champ de vitesses extérieur pour $r \geq R_c$.

1. Justifiez le fait que la représentation est Eulérienne.
2. L'écoulement est-t-il plan ? Stationnaire ? Justifiez.
3. Donnez l'expression de la constante B.
4. Représentez le champ des vitesses.

2 (a) - Modèle de tornade - coeur
On s'occupe de l'écoulement dans le coeur de la tornade. On rappelle que $e_\theta = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et $r^2 = x^2 + y^2$.

1. Montrez que le champ de vitesses en coordonnées cartésiennes peut s'écrire comme

$$\vec{v} = -\omega y \ e_x + \omega x \ e_y$$

.

2. L'écoulement est : incompressible ? irrotationnel ?
3. Donnez la représentation Lagrangienne.
4. Calculez la trajectoire pour des conditions initiales arbitraires (x_0, y_0).

2 (b) - Modèle de tornade - extérieur
On étudie maintenant l'écoulement à l'extérieur.

1. Mettez le champ de vitesses en coordonnées cartésiennes.
2. L'écoulement est-t-il incompressible ? Irrotationnel ?
3. Donner la fonction de courant ψ. Dessinez des courbes $\psi = Cte$. (Vous pouvez le faire en coordonnées cartésiennes ou polaires, cf Annexe).
4. Donner le potentiel de vitesses ϕ. Dessinez des courbes $\phi = Cte$. (Vous pouvez le faire en coordonnées cartésiennes ou polaires, cf Annexe).
5. Calculer l'intégrale $\int_L \vec{v} \cdot \vec{n} \ dL$ sur un cercle de rayon $r \geq R_c$. ($dL = rd\theta$). Votre conclusion ?

Annexe

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$
$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$
$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$