

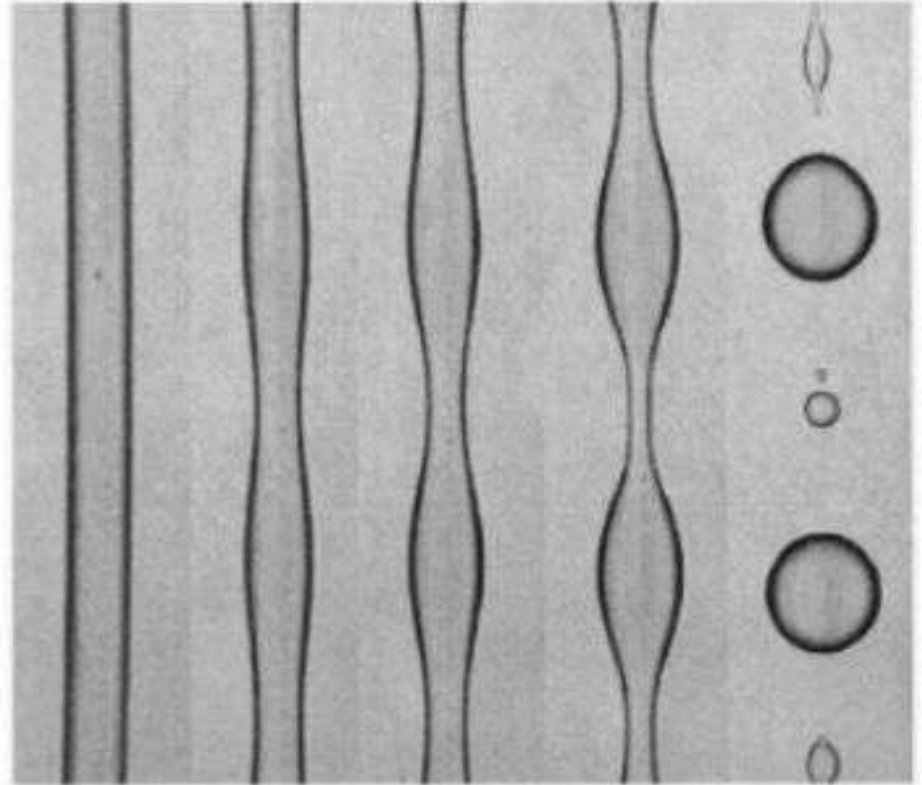
# Mécanique appliquée (2A111)

## **Projet Filet d'eau : instabilité de Rayleigh-Plateau**

Duvivier Valentin  
Boscher Henri

# Étude visuelle de l'instabilité Rayleigh-Plateau

Profil de cassure  
selon la hauteur de  
chute



# I a. Aspect théorique : théorème de Bernoulli

On suppose les hypothèses de l'application du théorème de Bernoulli vérifiées. On considère une ligne de courant entre  $Z_1$  et  $Z_0$  :

On obtient :

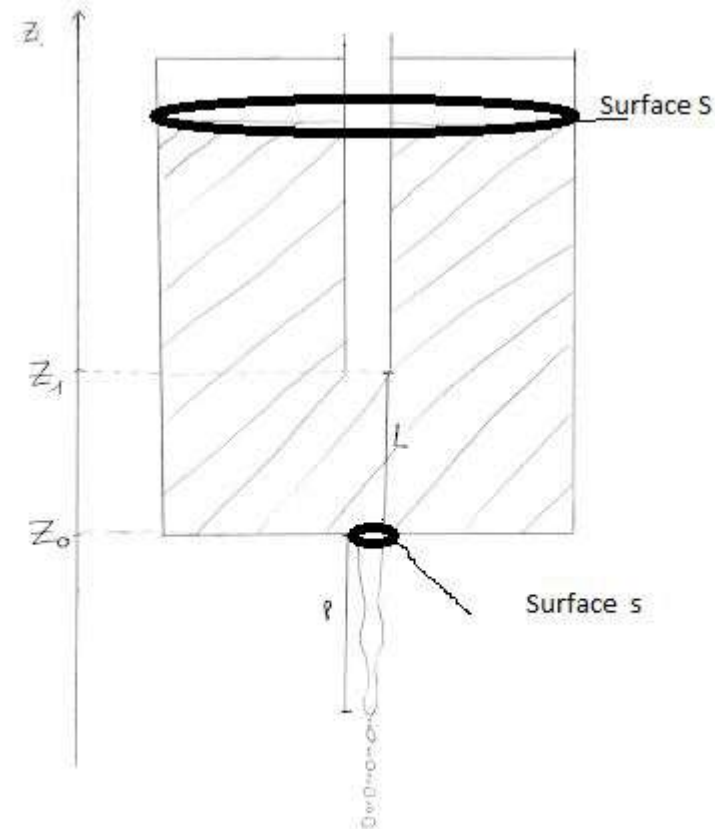
- $$\frac{1}{2} * \rho * v_0^2 + \rho * g * z_0 + P_{atm} = \frac{1}{2} * \rho * v_1^2 + \rho * g * z_1 + P_{atm}$$

Par simplification, du fait que  $S \gg s$  ;  $\rightarrow v_1 \ll v_0$  ; et donc on obtient :

- $$\frac{1}{2} * \rho * v_0^2 = \rho * g * L$$

Et donc :

- $$v_0 = \sqrt{2 * g * L} \rightarrow \text{on a un lien entre } \underline{L \text{ et } v_0}$$





## I b. Aspect théorique : chute libre et conservation du débit

Pour le système {filet d'eau en chute libre}, dans la direction des  $z(t)$  négatif, la vitesse de cet objet va diminuer. Si l'on considère la conservation du débit pour notre système on retrouve :

- $-V_0 * S_0 = -V(t) * S(t)$       soit       $V_0 * S_0 = V(t) * S(t)$

L'instabilité du fluide une fois sortit du tube est en outre due à la tension de surface entre le fluide et l'air. Ici, nous avons un autre moyen de comprendre cela avec nos équations : en effet, si la norme de  $V(t)$  augmente bien lors de la chute, par conservation du débit,  $S(t)$  va diminuer, et on aura donc une coupure dans notre ligne de courant.



# Bilan de ce que nous apporte l'étude théorique

On a trouvé grâce au théorème de Bernoulli un lien entre  $V_0$  et  $L$ . De même, grâce notamment à la conservation du débit on a retrouvé un lien entre  $V(t)$  et  $S(t)$  ; ainsi, si  $V(t)$  augmente,  $S(t)$  diminue plus vite, et donc , plus le liquide s'écoule rapidement, plus vite la longueur de coupure apparaît. On retrouve un lien entre  $V_0$  et la longueur de coupure  $l$ .

En sommes, nous avons privilégié par la suite du problème une étude mettant en jeu les caractéristiques théoriquement en lien. Soit la relation  $V_0 * S_0 = V(t) * S(t)$  , on peut caractériser notre analyse par une étude des variables suivantes :  **$V$**  (volume de fluide au sein du cylindre);  **$Dt$**  (diamètre du trou en sortie de tube cylindrique);  **$L$**  (hauteur entre la tige et le bas du cylindre);  **$l$**  (longueur de coupure du filet de fluide). Ces variables intervenant dans l'égalité ci dessus.

L'application du théorème PI nous permettra de conclure sur la pertinence de cette modélisation. Nous allons en sommes chercher à savoir si par une étude des variables qui composent notre schéma nous allons pouvoir en tirer des conclusions sur la dynamique globale de notre système.

## Dispositif expérimentale ; description du montage



Schéma du dispositif nous permettant de mesurer une différence de potentiel entre le potentiel nul aux bornes de la résistance et le potentiel du générateur



Cylindre schématisé précédemment



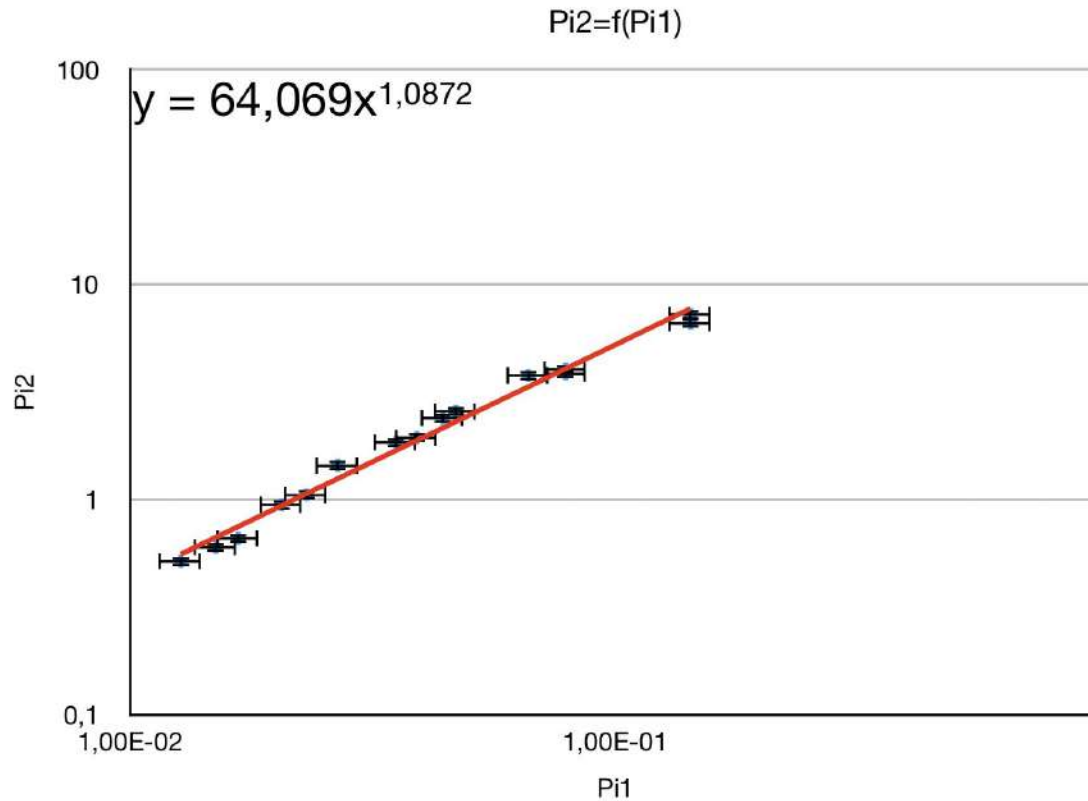
# Application du théorème PI

| Dimension | <b>I</b> | <b>L</b> | <b>Dt</b> | <b>V</b> |
|-----------|----------|----------|-----------|----------|
| L         | 1        | 1        | 1         | 3        |

Observable : la longueur de brisure **I**

Paramètres : la position du tube dans l'eau **L** → variable de référence  
le diamètre du trou du cylindre **D**  
le volume d'eau **V**

$$\rightarrow \pi_1 = \frac{Dt}{L} \quad \rightarrow \pi_2 = \frac{l}{L} \quad \rightarrow \pi_3 = \frac{V}{L^3}$$

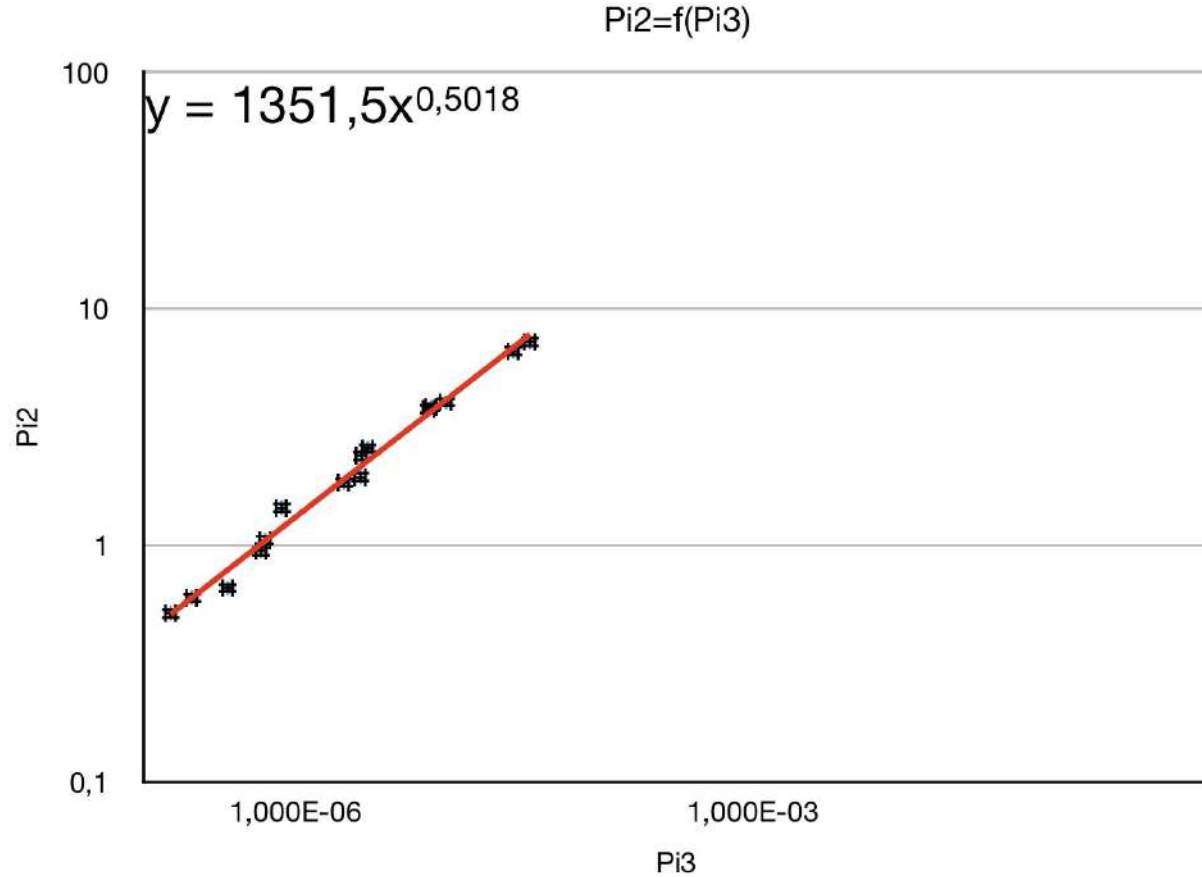


$$\pi 1 = \frac{Dt}{L}$$

$$\pi 2 = \frac{l}{L}$$

$$\alpha = 1,0872$$





$$\pi_2 = \frac{l}{L}$$

$$\pi_3 = \frac{V}{L^3}$$

$$\beta = 0,5018$$



On a donc :

$$\pi_2 = C.\pi_1^\alpha.\pi_3^\beta$$

$$\alpha = 1,0872 \quad \beta = 0,5018$$

$$\pi_2 = C.\pi_1^{1,0872}.\pi_3^{0,5018}$$

$$l = C.L^{-1,59}.Dt^{1,0872}.V^{0,5018}$$



# Bilan sur l'application du théorème PI

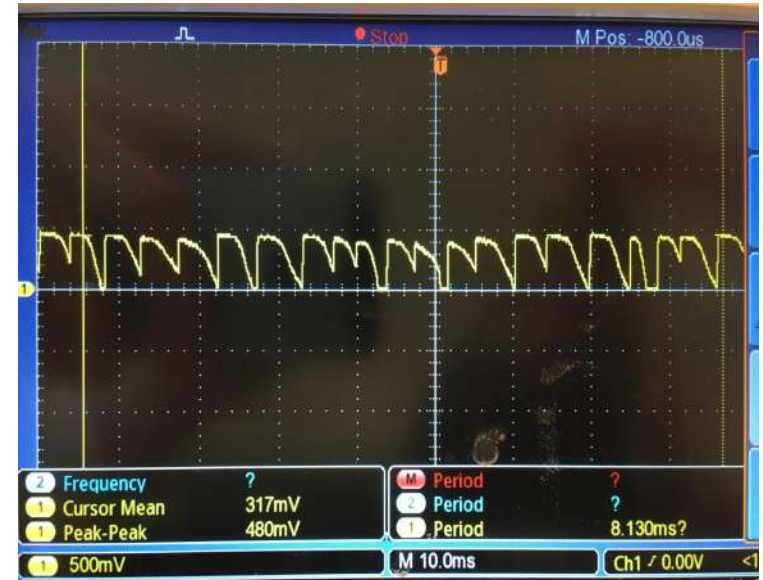
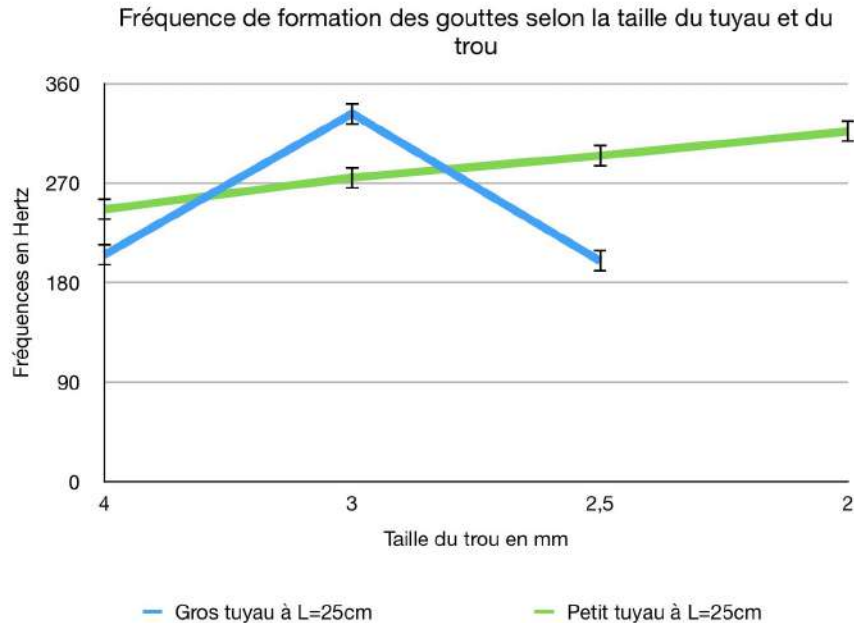
- On retrouve une équation homogène et qui semble caractériser notre problème et donc vérifier la théorie de notre modèle ;
- On va vérifier si la dynamique de notre système est bien caractérisée par notre modèle:

○  $v_0 = \sqrt{2 * g * L}$  → si  $L$  augmente, alors la vitesse de l'écoulement augmente

Au contraire, d'après les résultats du théorème PI, on aura une diminution de  $L$ . Ainsi, pour une vitesse d'écoulement plus importante, d'après la relation  $V_0 * S_0 = V(t) * S(t)$ , on a une surface qui va se rétrécir plus rapidement et donc une longueur de brisure plus faible. En sommes, nos résultats expérimentaux sont de nouveau en accords avec l'analyse théorique.

Dans la même idée, on sait que plus la vitesse d'écoulement augmente, plus on entre dans un régime turbulent d'après le nombre de Reynolds. Ainsi, avec la vitesse qui augmente, il y a plus de turbulence, ce qui est en lien avec le fait que la longueur de turbulence arrive plus vite (dans le sens où la longueur de brisure est moins grande).

# La fréquence de formation des gouttes d'eau





## Bilan de notre étude

- La fréquence de formation des gouttes d'eau observable à la brisure du jet est observable si le tuyau est d'un petit diamètre, sinon la formation de très grosses bulles perturbe la fréquence de formation des gouttes d'eau et fausse les résultats.
- Le théorème PI nous a permis d'observer que la longueur de cassure  $l$  est inversement proportionnel à  $L^{\frac{3}{2}}$ . C'est sur ce terme que la longueur  $l$  présente le plus de dépendances.

→ Le théorème PI tend à confirmer l'application de notre modèle théorique pour caractériser la dynamique de notre système ;