Corrigé.

Ex 1

1) $I_1 =]0,1[$ contient r_1 , $I_2 =]1,3[$ contient r_2

2) $x = \phi_1(x) \Rightarrow \sqrt{\ln x + 2x} = x \Rightarrow \ln x + 2x = x^2 \Rightarrow f(x) = 0$

$x = \phi_2(x) \Rightarrow e^{x^2-2x} = x \Rightarrow x^2 - 2x = \ln x \Rightarrow f(x) = 0$

Sur la figure 2, on voit que $|\phi_1'(r_1)| \boxed{>} 1$ et $|\phi_1'(r_2)| \boxed{<} 1$

$\Rightarrow$ La méthode point fixe avec ϕ_1 donne $r_{\boxed{2}}$, si elle converge

Sur la figure 2, on voit que $|\phi_2'(r_1)| \boxed{<} 1$ et $|\phi_2'(r_2)| \boxed{>} 1$

$\Rightarrow$ La méthode point fixe avec ϕ_2 peut donner $r_{\boxed{1}}$

3) Voir figure 3

4) On a fait varier θ entre 0.1 et 1.2 avec un pas 0.1

Pour x_0 donné, (le même)

algorithme du point fixe : $\left[\begin{array}{l} x_k = \phi_\theta(x_{k-1}) \\ |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \text{ donné} \Rightarrow \text{exit} \end{array}\right.$

et on trace $k_{conv} = f(\theta)$

Le meilleur θ est celui pour lequel k est minimum.

$\Rightarrow \theta_{opt} = 0.7 \pm 0.1$.

On le voit clairement pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Pour $\varepsilon = 10^{-1}$ ou 10^{-2} le minimum n'est pas clairement visible.

UPMC Sorbonne-Université **Année universitaire 2018/2019**

Licence de Mécanique
UE 3A005 : Méthodes Numériques pour la Mécanique
Examen du 7 novembre 2018 (durée 2h)

Numéro d'anonymat :

Sans document, sans calculatrice ni équipement électronique.

Ex. 1 - Racines d'équations (rendre le sujet avec la copie)

On souhaite résoudre sur $[0,3]$ l'équation $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2x = 0$.

1. Pour faire une localisation grossière des racines, on a tracé sur la figure 1 la fonction $f(x)$. On appelle r_1 et r_2 les racines, avec $r_1 < r_2$. En déduire un intervalle de recherche pour r_1 et un autre pour r_2. Mettre ces intervalles en évidence sur la figure 1.

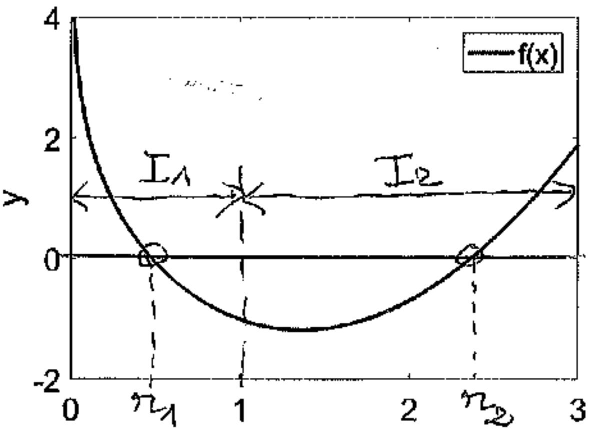

Figure 1

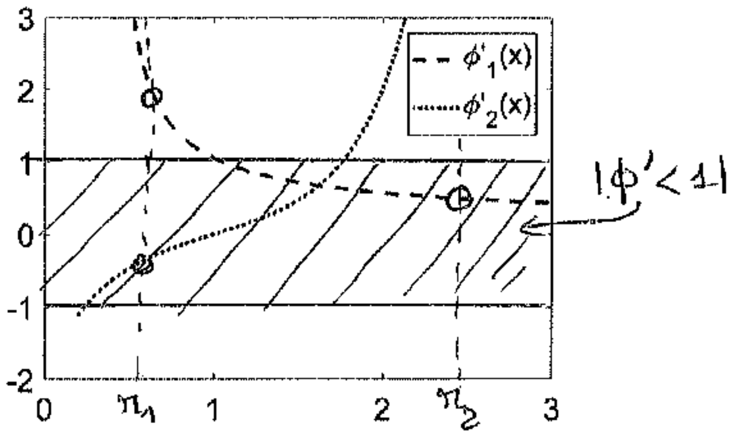

Figure 2

2. Méthode du point fixe. On introduit deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définies par :

$$\phi_1(x) = \sqrt{(\ln(x) + 2x)} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(x) = e^{(x^2-2x)}$$

Montrer que la méthode du point fixe appliquée à ϕ_1, si elle converge, permet de trouver une racine de $f(x)$. Même question pour ϕ_2. En utilisant la figure 2, laquelle des fonctions ϕ_1 ou ϕ_2 permet de converger vers r_1 ? Vers r_2 ? Justifier les réponses.

3. Sur la Figure 3, construire, avec 2 couleurs différentes, les 3 premières itérations de la méthode du point fixe x_0, x_1, x_2, x_3 utilisant ϕ_1 d'une part et X_0, X_1, X_2, X_3 utilisant ϕ_2 d'autre part, avec la même condition initiale $x_0 = X_0 = 1$.

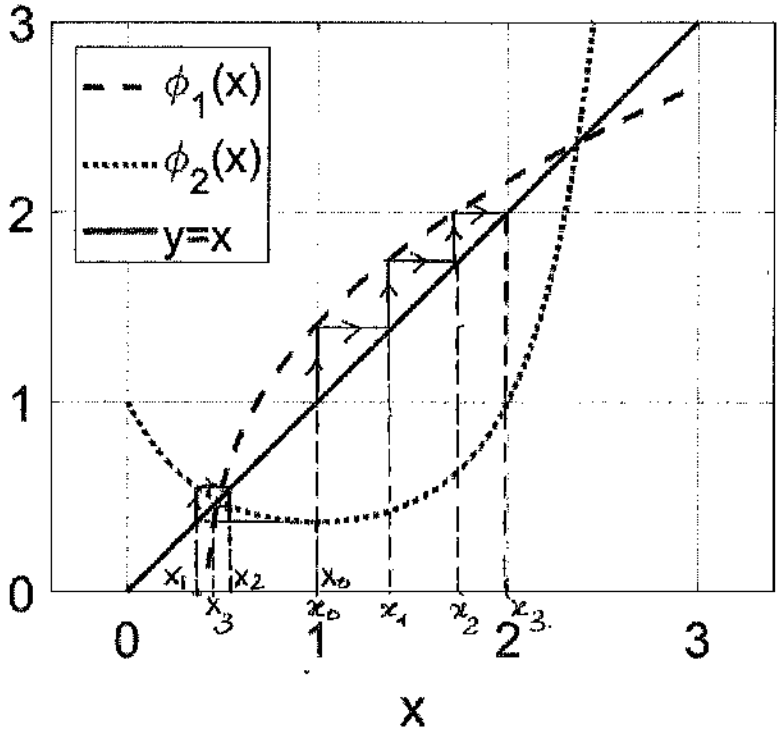

Figure 3

4. Relaxation : La Figure 4 montre les résultats de calculs permettant de déterminer la valeur optimale du paramètre θ pour la méthode de point fixe relaxée : $\phi_\theta(x) = (1-\theta)x + \theta\phi_2(x)$. Plus spécifiquement on a tracé le nombre d'itérations k_ϵ nécessaires pour atteindre une précision ϵ, à partir d'une même condition initiale. Expliquer brièvement comment ces résultats ont été obtenus. Selon ces résultats, quelle est la valeur de θ_{opt} ?

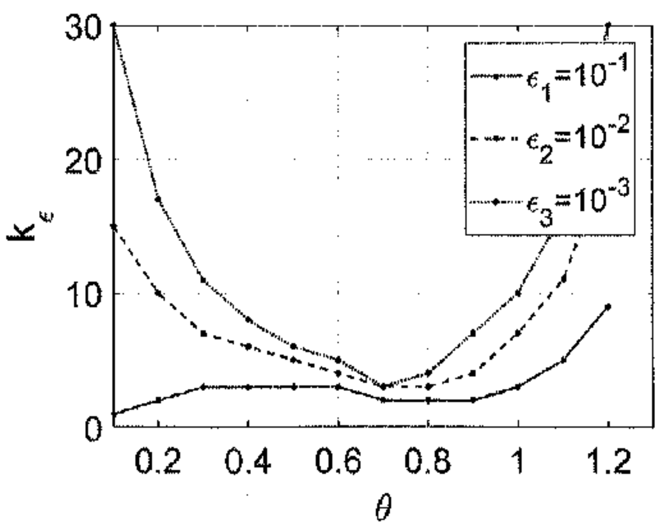

Figure 4

Ex 2

1)

$$\begin{bmatrix} l_1 & & & \\ m_2 & l_2 & & \\ & m_3 & l_3 & \\ & & m_4 & l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & u_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_1 u_1 & & \\ m_2 & m_2 u_1 + l_2 & l_2 u_2 & \\ & m_3 & m_3 u_2 + l_3 & l_3 u_3 \\ & & m_4 & m_4 u_3 + l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & \\ & a_3 & d_3 & c_3 \\ & & a_4 & d_4 \end{bmatrix}$$

ligne 1 $\Rightarrow$ $l_1 = d_1$; $u_1 = c_1 / l_1$

ligne 2 $\Rightarrow$ $m_2 = a_2$; $l_2 = d_2 - m_2 u_1$; $u_2 = c_2 / l_2$

ligne 3 $\Rightarrow$ $m_3 = a_3$; $l_3 = d_3 - m_3 u_2$; $u_3 = c_3 / l_3$

ligne 4 $\Rightarrow$ $m_4 = a_4$; $l_4 = d_4 - m_4 u_3$.

2) ex: $l_1 = 2$; $u_1 = -1/2$

$m_2 = -1$; $l_2 = 2 - 1/2 = \frac{3}{2}$; $u_2 = -1/\frac{3}{2} = -2/3$

$m_3 = -1$; $l_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $u_3 = -\frac{1}{4/3} = -3/4$

$m_4 = -1$; $l_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 3/2 & & \\ & -1 & 4/3 & \\ & & -1 & 5/4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & \\ & 1 & -2/3 & \\ & & 1 & -3/4 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

3) Algorithme:

$l_1 = d_1$; $u_1 = c_1 / l_1$

$i = 2 \to n-1$ $\begin{cases} m_i = a_i \\ l_i = d_i - m_i u_{i-1} \\ u_i = c_i / l_i \end{cases}$

$m_n = a_n$; $l_n = d_n - m_n u_{n-1}$

4) $n \times$, $n -$, $n /$ $\Rightarrow$ $3n$ opérations élémentaires

5) On gagne 2 ordres de grandeur en n sur le nb d'opérations pour la factorisation. Le stockage est aussi simplifié : 3 vecteurs de taille n.

6) $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} l_1 & & & \\ m_2 & l_2 & & \\ & m_3 & l_3 & \\ & & m_4 & l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 / l_1 \\ y_2 = (b_2 - m_2 y_1)/l_2 \\ y_3 = (b_3 - m_3 y_2)/l_3 \\ y_4 = (b_4 - m_4 y_3)/l_4 \end{cases}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & u_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_4 = y_4 \\ x_3 = y_3 - u_3 x_4 \\ x_2 = y_2 - u_2 x_3 \\ x_1 = y_1 - u_1 x_2 \end{cases}$$

7) AN :

$$y_1 = 3/2$$
$$y_2 = \left[-2 - (-1)\frac{3}{2}\right] / \left(\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{-1}{2}\right] / \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}$$
$$y_3 = \left[2 - (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right] / \left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{6-1}{3}\right) / \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{4}$$
$$y_4 = \left[0 - (-1)\frac{5}{4}\right] / \frac{5}{4} = 1$$

$$y = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/3 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 1$$
$$x_3 = \frac{5}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) \times 1 = 2$$
$$x_2 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \times 2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$$
$$x_1 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8) descente $\begin{cases} i = 1 & y_1 = b_1 / l_1 \\ i = 2 \to n & y_i = (b_i - m_i y_{i-1})/l_i \end{cases}$

remontée $\begin{cases} i = n & x_n = y_n \\ i = n-1 \to 1 & x_i = y_i - u_i x_{i+1} \end{cases}$

9) $\left.\begin{matrix} n\,/ \,,\ (n-1)\,\times\,,\ (n-1)\,- \\ (n-1)\,-\,,\ (n-1)\times \end{matrix}\right\} \Longrightarrow n\,/\,,\ 2n\,\times\,,\ 2n\,-$

$\Longrightarrow$ environ $5n$ opérations.

10) On gagne 1 ordre de grandeur ~~de~~ n en nb d'op.

Exercice 3.

1) $M = \frac{1}{\omega} D - E \implies N = M - A = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$

$P = \frac{1}{\omega} D - F \implies Q = M - A = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + E$

2) $x^{(k)}$ donné $\implies$ on peut calculer le second membre $N x^{(k)} + b$

$\implies My = N x^{(k)} + b$ est résolu par descente $\implies y$

$\implies P x^{(k+1)} = Qy + b$ est résolu par remontée $\implies x^{(k+1)}$

3) Formellement : $My = N x^{(k)} + b \implies y = M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b$

et $P x^{(k+1)} = Qy + b \implies x^{(k+1)} = P^{-1} Q y + P^{-1} b$

$$\implies x^{(k+1)} = \underbrace{P^{-1} Q M^{-1} N}_{\Omega} x^{(k)} + P^{-1} Q M^{-1} b + P^{-1} b$$

$$\implies \Omega = \left(\frac{1}{\omega} D - F\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + E\right) \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F\right)$$

$$= (D - \omega F)^{-1} \left((1-\omega) D + \omega E\right) (D - \omega E)^{-1} \left((1-\omega) D + \omega F\right)$$

4) La matrice $(1-\omega)D + \omega F$ est triangulaire supérieure :

$$(1-\omega)D + \omega F = \begin{bmatrix} (1-\omega)a_{11} & -\omega a_{12} & \cdots & -\omega a_{1n} \\ & (1-\omega)a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & (1-\omega)a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\implies \det\left[(1-\omega)D + \omega F\right] = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

5) $[D - \omega F]$ triangulaire supérieure $\implies \det(D - \omega F) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$[D - \omega E]$ triangulaire inférieure $\implies \det(D - \omega E) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$(1-\omega)D + \omega E$ triangulaire inférieure $\implies \det\left((1-\omega)D + \omega E\right) = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\implies \det \Omega = \frac{\det\left((1-\omega)D + \omega E\right) \det\left((1-\omega)D + \omega F\right)}{\det(D - \omega F) \det(D - \omega E)} = \frac{(1-\omega)^{2n} \cancel{\left(\prod a_{ii}\right)^2}}{\cancel{\left(\prod a_{ii}\right)} \cancel{\left(\prod a_{ii}\right)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det(\Omega) = (1-\omega)^{2n}}$$

6) On a $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\Omega)$ en notant λ_i les valeurs propres de Ω

$$\Longrightarrow (1-\omega)^{2n} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

or le rayon spectral est tel que $|\lambda_i| \leq \rho(\Omega)$, $\forall i = 1,..,n$

$$\Longrightarrow \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \rho(\Omega)^n$$

et donc $|1-\omega|^{2n} \leq \rho(\Omega)^n \Longrightarrow \boxed{\underbrace{|1-\omega|^2}_{=C} \leq \rho(\Omega)}$

7) $\omega \geq 2 \Longrightarrow 1-\omega \leq -1 \Longrightarrow |1-\omega| \geq 1 \Rightarrow \rho(\Omega) \geq 1$

$\Longrightarrow$ la méthode SSOR diverge

$\omega \leq 0 \Longrightarrow 1-\omega \geq 1 \Longrightarrow |1-\omega| \geq 1 \Longrightarrow \rho(\Omega) \geq 1$

$\Longrightarrow$ la méthode SSOR diverge

$\Longrightarrow$ il faut choisir $\omega \in]0,2[$ pour que la méthode SSOR ait une chance de converger

$\omega \in]0,2[$ est une condition nécessaire (mais pas suffisante) de convergence.

Barème 30 points → 32.

Ex 1 : /6

1) 1

2) 2

3) 2

4) 1

Ex 2 : ~~15~~ /17

1) 2

2) 2

3) 2

4) 1

5) 0,5

6) 2 + 2

7) 2

8) 2

9) 1

10) 0,5

Ex 3 : /9

1) 1

2) 1

3) 1

4) 2

5) 1

6) 2

7) 1