Examen du 21 Mars 2018
Eléments de correction

Exercice 2

Corrigé

1). Voir TD 3-4. (exercice 2).

2). $V_0 = \{ v \in H^1(]0,1[) \mid v(0)=0 \}$

$$\int_0^1 \left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx} \right) \cdot v(x) + q(x)\, u(x) v(x) \right] dx = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in V_0$$

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx} \right) v\, dx + \int_0^1 q\, u v\, dx = \int_0^1 f v\, dx$$

IPP : $-\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx} \right) v\, dx = \left[-p \frac{du}{dx} v \right]_0^1 +$

$$+ \int_0^1 p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx = -p(1) \underbrace{\frac{du}{dx}(1)}_{\substack{0 \\ \text{car } u \text{ solution du } P_c}} v(1) + p(0)\frac{du}{dx}(0) \underbrace{v(0)}_{\substack{0 \\ \text{car } v \in V_0}}$$

$$+ \int_0^1 p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx$$

On obtient :

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V_0 \text{ t.q.} \\ \underbrace{\int_0^1 p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx + \int_0^1 q\, u v\, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f v\, dx}_{L(v)}, \ \forall v \in V_0 \end{cases}$$

3), 4) $a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$
$a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2)$ } définition bilinéarité

vérification immédiate

$a(u,v) = a(v,u) \Rightarrow a =$ symétrique

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 p \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + \int_0^1 q u v\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^1 p \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx \right| + \left| \int_0^1 q u v\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |p| \left|\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right| dx + \int_0^1 |q|\,|uv|\,dx$$

Or $p \in \mathcal{C}^1([0,1]) \Rightarrow p =$ bornée sur $[0,1]$

$$\Downarrow$$

$$|p(x)| \leq \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}}|p(x)| = M_1$$

$q \in \mathcal{C}^1([0,1]) \Rightarrow q$ bornée donc

$$|q| \leq \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}}|q(x)| = M_2$$

Donc $|a(u,v)| \leq M_1 \underbrace{\int_0^1 \left|\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right| dx}_{\underset{C-S}{\leq} \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2} \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^2}} + M_2 \underbrace{\int_0^1 |uv|\,dx}_{\underset{C-S}{\leq} \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}}$

$$\leq \max\{M_1, M_2\} \left(\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2} \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \right)$$

Mais $\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^2}\left\|\frac{dv}{dx}\right\|_{L^2} \leq \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|^2_{L^2}}\ \cdot$

$$\cdot \sqrt{\|v\|^2_{L^2} + \left\|\frac{dv}{dx}\right\|^2_{L^2}} = \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Donc $|a(u,v)| \leq \underbrace{\max\{M_1, M_2\}}_{C} \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$. $\Big\}$ $\Rightarrow a =$ continue

a – bilinéaire

5) a est coercive si $\exists\, \alpha > 0$ tq

$$a(v,v) = \int_0^1 p(x)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 q(x)(v(x))^2 dx \geq \alpha \|v\|^2_{H^1}$$

Il suffit d'imposer $p(x) > 0$

et $q(x) \geq 0$.

p étant continue sur $[0,1]$, $\exists\, m \in \mathbb{R}^*_+$ tq $p(x) \geq m$ $\forall x \in [0,1]$

Alors $\boxed{a(v,v) \geq m \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}$ $(*)$

On utilise l'inégalité de Poincaré :

$$\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \geq \int_0^1 v^2 dx \Rightarrow 2\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \geq \|v\|^2_{H^1}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \geq \frac{m}{2} \|v\|^2_{H^1}} \ (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on trouve

$$a(v,v) \geq \frac{m}{2} \|v\|^2_{H^1}, \quad \forall v \in V_0$$

$\Rightarrow$ a = coercive $\left(\alpha = \frac{m}{2}\right)$.

6) $L(\lambda v_1 + v_2) = \lambda L(v_1) + L(v_2)$

$$|L(v)| = \left|\int_0^1 f v\, dx\right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

car $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$

L étant linéaire

$\Rightarrow$ L = continue

7) On applique le théorème de Lax-Milgram. Nous avons vérifié les hypothèses dans les questions 1, 4, 5, 6.

8) L'équation à résoudre est

$$\begin{cases} -u'' + u = -x \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

; Sol. générale : $u(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_1$.

$u'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}(1)}$