**2A004 : Statique et Dynamique des fluides**

**Examen 17 décembre 2015**

### Questions de cours

1. Énoncez le théorème de conservation de la masse sous la forme globale et locale.
2. Énoncez le théorème des quantités de mouvement sous la forme globale dans le cas d'un écoulement stationnaire et soumis à la pesanteur. Donnez les hypothèses du théorème.
3. Énoncez le théorème de Bernoulli avec les hypothèses. Quelle est la différence entre un écoulement rotationnel et un autre irrotationnel ?
4. Rappelez la définition du Nombre de Reynolds, $R_e$. Donnez l'interprétation physique de l'écoulement pour les deux cas limites $R_e >> 1$ et $R_e << 1$.
5. Une voiture roule à 100 $km/h$, la taille typique est de 1 $m$, calculez le nombre de Reynolds et dites si l'écoulement est turbulent ou laminaire (en SI : $\rho = 10^3$ et $\mu = 10^{-3}$). 4pt

### Exercice : Quantité de mouvement

Nous allons calculer la force du fluide sur un solide placé dans un écoulement comme le montre la Figure 1 (nous rappelions que la forme de l'objet est sans importance). La surface de contrôle est composée par l'entrée, la sortie, les surfaces supérieure et inférieure, et l'objet en question.

Il est important remarquer que le profil de la vitesse à la sortie n'est pas constante ($U_s = U(y)$).

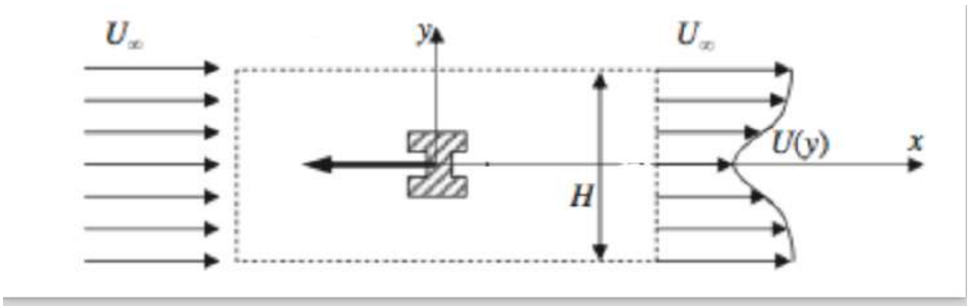


Figure 1 – Quantité de mouvement.

1. Appliquez la conservation de la masse à la surface de contrôle.
2. Montrez qu'à l'entrée la vitesse est $\frac{1}{H}\int_{-H/2}^{H/2} u(y)dy$ ($U_\infty$ sur la figure).
3. Appliquez la conservation de la quantité de mouvement à la surface de contrôle.
4. Trouvez la force du fluide sur le solide $F_{f\to s}$.
5. si l'on suppose que $u(y) = y^2 - (H/2)^2 + U_\infty$ quelle est cette force ?
6. et si la vitesse à la sortie était constante et égale à $U_\infty$ ?

**Solution de l'exercice 5.1.** 6pt

1. La conservation de la masse est $\int_S \rho \mathbf{u}\mathbf{n} dS = 0$. Sur la surface de contrôle supérieure et inférieure la vitesse est perpendiculaire à la normale $\mathbf{n}$ donc zéro. Il nous reste $\int_{S_e} \rho \mathbf{u} dS + \int_{S_s} \rho \mathbf{u} dS = 0$. 0.5pt
2. Comme la vitesse à l'entrée est constante et égale à $U_\infty e_x$ nous avons

$$-\rho U_\infty H + \rho \int_{-H/2}^{H/2} u(y)dy = 0 \quad (1)$$

0.5pt

3. La conservation de la quantité de mouvement est

$$\int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{un})dS = \int_S -p\mathbf{n}dS \tag{2}$$

nous pouvons négliger les forces de volume. 0.5pt

4. Nous avons négligé les forces de volume alors 2pt

$$-\rho U_\infty^2 H + \rho \int_{-H/2}^{H/2} u(y)^2 dy = \int_{S_e+S_{sup}+S_{inf}+S_e} -p\mathbf{n}dS + \int_{S_o} -p\mathbf{d}S \tag{3}$$

maintenant
— la pression partout est la même et donc l'intégrale $\int_{S_e+S_{sup}+S_{inf}+S_e} -p_0\ \mathbf{n}dS = 0$ +1pt
— le terme $\int_{S_o} -p\mathbf{d}S$ est la force du solide sur le fluide, donc $-R_{f\to s}$
et nous avons

$$R_{f\to s} = \rho U_\infty^2 H - \rho \int_{-H/2}^{H/2} u(y)^2 dy \tag{4}$$

5. faire avec $u(y) = y^2 - (H/2)^2 + U_\infty$ 1pt
6. zéro... (voir équation (4)) 0.5pt

**Exercice : Couette**

Un écoulement de Couette est l'écoulement à l'intérieur de deux cylindres concentriques de rayons $R_1$ et $R_2$ tournant à des vitesse angulaires $\Omega_1$ et $\Omega_2$ comme le montre la Figure 2

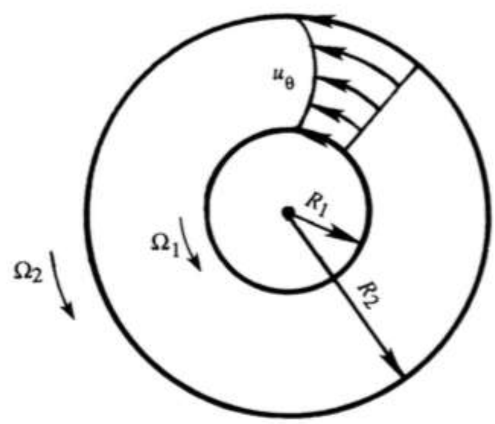


FIGURE 2 – Écoulement de Couette.

En supposant un écoulement purement azimutal $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ ne dépendant que de la coordonnée $r$ les équations de mouvement s'écrivent

$$-\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \tag{5}$$

$$0 = \mu \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_\theta)\right] \tag{6}$$

il est clair donc qu'il suffit de trouver la vitesse $u_\theta$ pour trouver après la distribution de la pression.

1. trouver le profil de vitesse $u_\theta(r)$ en utilisant les conditions aux limites $u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1$ et $u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2$.
2. dans le cas limite $R_2 \to \infty$ avec $\Omega_2 = 0$ montrez que
$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$$
et trouver la pression $p(r)$ (équation (1)). Donnez une valeur physique à la constante d'intégration.
3. Quel est le champ de vitesses quand $R_1 \to 0$ avec $\Omega_1 = 0$.

**Solution de l'exercice 5.2.** $\boxed{\text{4pt}}$

1. d'après l'équation (6) $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_\theta) = A$ avec $A$ constant. Donc 1pt
$$\frac{d}{dr}(ru_\theta) = Ar \quad (7)$$
$$ru_\theta = Ar^2/2 + B \quad (8)$$
$$u_\theta = Ar + B/r \quad (9)$$
le facteur 2 est dans la constante $A$. Avec les conditions aux limites nous trouvons
$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (10)$$
$$B = -\frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (11)$$
2. dans le cas limite $R_2 \to \infty$ avec $\Omega_2 = 0$ nous avons $A \to 0$ et $B \to \Omega_1 R_1^2$. La pression sort de l'équation 2pt
$$\frac{\Omega_1^2 R_1^4}{r^3} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \quad (12)$$
soit
$$p(r) = -\frac{1}{2}\rho\frac{\Omega_1^2 R_1^4}{r^2} + C \quad (13)$$
et pour $r \to \infty$ nous imposons $C = p_0$.
3. le seconde cas est une rotation rigide ... $u_\theta = \Omega_2 r$. 1pt

**Exercice : Plan Incliné**

Sur la Figure 3 nous avons un écoulement stationnaire d'eau à surface libre sur un plan incliné faisant un angle $\alpha$ avec le plan horizontal. Les axes $x$ et $y$ sont solidaires au plan incliné. Écoulement à surface libre veut dire que la surface de l'eau est à la pression atmosphérique $p_a$. La masse volumique $\rho$ et la viscosité $\nu$ sont constantes. L'épaisseur de la couche de liquide est constante et égale à $h$.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\vec{\nabla}\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \nu\triangle\vec{V} \quad (14)$$
où $\nu = \mu/\rho$ et $\triangle = \vec{\nabla}^2$

L'écoulement est supposé 2D et suivant les hypothèses énoncées le vecteur de vitesses est, en principe, $\vec{V} = u(x,y)\ e_x + v(x,y)\ e_y$. Nous rappelons que $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y$.

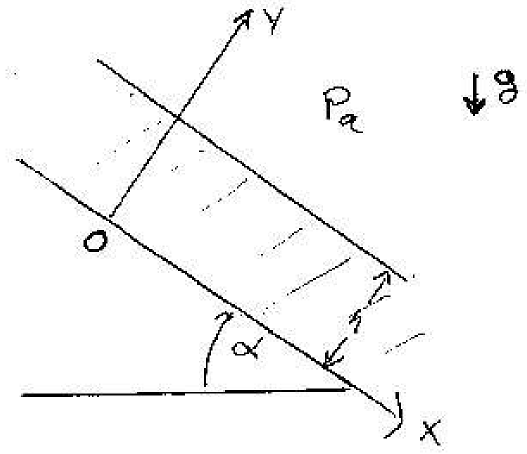


FIGURE 3 – Écoulement sur un plan incliné.

1. On suppose maintenant que la vitesse et la pression ne dépendent pas de $x$, alors à partir de la conservation de la masse en coordonnées cartésiennes ($\vec{\nabla}\vec{V} = 0$) montrer que la composante $y$ de la vitesse $v$ ne dépend pas de $y$.
2. Avec les conditions aux limites $v(0) = v(h) = 0$ montrez que $v(y) = 0$ sur tout le profil.
3. Écrivez les composantes $x$ et $y$ de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.
4. Montrez que pour les hypothèses du problème elles se réduisent à

$$\rho g \sin\alpha + \mu \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$
$$-\rho g \cos\alpha - \frac{dp}{dy} = 0$$

5. Avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $\mu \frac{du}{dy}(h) = 0$ trouvez le profil de vitesses $u(y)$.
6. Calculez le débit volumique.
7. Calculez la contrainte tangentielle à la paroi $\tau = \mu \frac{du}{dy}_{|y=0}$.

**Solution de l'exercice 5.3.** 6pt

1. $\vec{\nabla}\vec{V} = 0$ est $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Si la vitesse ne dépend pas de $x$ alors $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. La vitesse $v$ est constante. 1pt
2. Comme $v = A$ et $v(0) = v(h) = 0$ on en conclue que $v = 0$. 0.5pt
3. Projection sur les axes $x$ et $y$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = g \sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -g \cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

1pt

4. nous avons $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (stationnaire), toutes les dérivées par rapport à $x$ nulles et $v = 0$ donc

$$\rho g \sin\alpha + \mu \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$
$$-\rho g \cos\alpha - \frac{dp}{dy} = 0$$

1pt

5. de l'équation pour $x$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha y + A \tag{15}$$

la condition sur la surface libre $\mu \frac{du}{dy}(h) = 0$ donne $A = \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha h$ soit

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha (h - y) \tag{16}$$

donc

$$u(y) = \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha (hy - y^2/2) + B \tag{17}$$

et $u(0) = 0$ donne $B = 0$. 1pt

6. le débit volumique $q_v$ est donné par $\int_S \mathbf{un} dS$ donc

$$q_v = \int_0^h \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha (hy - y^2/2) dy \tag{18}$$

$$q_v = \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha (h^3/2 - h^3/6) = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\mu} g \sin \alpha h^3 \tag{19}$$

1pt

7. l'équation (16) pour $h = 0$ donne $\tau = \rho g \sin \alpha h$. 0.5pt