• Exercice 1 :

Soit donc $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

I - Étude de l'application :

1°) • Par définition, on a : $\mathrm{Ker}\, u = \{x \in \mathbb{R}^3 / u(x) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$, et ainsi, pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a $x \in \mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si $A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire si et seulement si (x_1, x_2, x_3) est solution du système :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (\mathrm{I}) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$ soit encore $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 & (\mathrm{I})+(\mathrm{II}) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$, soit $x_2 = -3x$

On a ainsi : $$\begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = x_1 + 2x_2 = x_1 - 6x_1 = -5x_1 \end{cases}$$

d'où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si $x = (x_1, -3x_1, -5x_1) = x_1(1, -3, -5)$ où $x_1 \in \mathbb{R}$ est quelconque, c'est à dire que x est colinéaire à $(1, -3, -5)$:

Ainsi l'on a : $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}((1, -3, -5))$ (droite vectorielle), on a $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$.

• En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par définition de $\mathrm{Im}(u)$, les trois vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$; c.à.d. que l'on a

$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$, ces trois vecteurs sont représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par les colonnes de la matrice A.

Mais comme l'on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$, ces trois vecteurs ne peuvent être linéairement indépendants ; or l'on a : $u(e_1) = (2, 1)$ et $u(e_2) = (-1, 2)$ non colinéaires $\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \right)$ ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathrm{Im}(u)$; ainsi l'on a :

$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2))$, donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 2$, d'où $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^2$, et ainsi n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$ peut convenir.

2°) On a obtenu en 1°) : $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 2$.

On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$, qui est bien la dimension de l'espace de départ de u, $\mathbb{R}^3$: ainsi l'on retrouve bien le résultat donné par le théorème du rang.

3°) On a $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 2$ et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$, ce qui nous a permis d'affirmer en 1°) que l'on a : $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^2$: ainsi l'espace image de u est égal à son espace d'arrivée, u est donc surjective.

II Changement de base : (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$, (f_1, f_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soient $e'_1 = e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
et $f'_1 = f_1 + f_2$, $f'_2 = f_1 - f_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1°) • (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, espace de dimension trois : il est donc suffisant de montrer qu'ils sont linéairement indépendants : ils seront alors générateurs de $\mathbb{R}^3$ et (e'_1, e'_2, e'_3) sera donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois réels tels que l'on ait $\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
D'après les expressions de e'_1, e'_2, e'_3 dans (e_1, e_2, e_3), on a donc :

$$\alpha_1 (e_2 - e_3) + \alpha_2 (e_1 + e_3) + \alpha_3 (e_1 - e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$$, soit encore :

$$(\alpha_2 + \alpha_3) e_1 + (\alpha_1 - \alpha_3) e_2 + (\alpha_2 - \alpha_1) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$; comme e_1, e_2 et e_3 sont linéairement indépendants, ceci est équivalent à : $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases}$ soit encore : $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$

c'est à dire $\begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 \end{cases}$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$: ainsi e'_1, e'_2 et e'_3 sont linéairement indépendants, donc (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

• De même, (f'_1, f'_2) est une famille de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension deux : il suffit de montrer qu'ils sont linéairement indépendants pour montrer que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Soient donc α_1, α_2 réels tels que $\alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$: on a alors :

$\alpha_1 (f_1 + f_2) + \alpha_2 (f_1 - f_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$, soit $(\alpha_1 + \alpha_2) f_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) f_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, et comme f_1 et f_2 sont linéairement indépendants, ceci équivaut à : $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases}$, et ainsi l'on a : $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, d'où f'_1 et f'_2 sont linéairement indépendants, et donc (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2°) La matrice de passage de la base B vers la base B' est la matrice dont les colonnes sont les expressions des vecteurs de B' dans la base B : on a ainsi :

$e'_1 = e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans B, $e'_2 = e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans B et $e'_3 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans B

et donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3°) De même, l'on obtient pour la matrice de passage de la base C dans la base C' :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ puisque l'on a $f'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans B et $f'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans B.

4°) P et Q sont deux matrices inversibles (comme toute matrice de passage)
(On peut vérifier que leurs déterminants sont non nuls, ce qui était aussi une façon de montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2) sont des familles libres, pour répondre à la question 1°)).

5°) Soit donc $x = e_1 + e_2 + e_3$; on a $x = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base B.

Pour obtenir les coordonnées de x dans B', on sait que l'on peut les obtenir en appliquant la matrice de passage de B' dans B aux coordonnées de x dans B, c'est à dire en calculant $P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Il faut donc commencer par inverser la matrice P du 2°)

- Mais l'on peut aussi exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3 : comme l'on a :

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= e_2 - e_3, \\ e'_2 &= e_1 + e_3 \\ \text{et } e'_3 &= e_1 - e_2, \end{aligned}\right\}$$

on a donc : $e'_1 + e'_2 + e'_3 = 2e_1$, soit $e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 + e'_3)$,

puis $e_2 = e_1 - e'_3 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 + e'_3) = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3)$

et enfin : $e_3 = -e_1 + e'_2 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_2 - e'_3)$

D'où l'on obtient :

$$x = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 + e'_3) + \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3) + \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3)$$
$$= \frac{1}{2}e'_1 + \frac{3}{2}e'_2 - \frac{1}{2}e'_3,$$

et ainsi l'on a : $x = \begin{pmatrix}1/2\\3/2\\-1/2\end{pmatrix}$ dans B'

- Remarque : les expressions obtenues pour e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3 permettent d'écrire la matrice de passage de la base B' dans la base B : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ qui n'est autre que P^{-1}.
(les sceptiques sont invités à multiplier cette matrice avec la matrice P obtenue au 2°)...)

6°) Pour obtenir $u(x)$ dans la base C, on applique la matrice A aux coordonnées de x dans B :

on obtient : $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{= x \text{ dans } B} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}_{= u(x) \text{ dans } C}$ ainsi $u(x) = 2f_1 + 2f_2 = 2f'_1$,

d'où les coordonnées de $u(x)$ dans (f'_1, f'_2) ont : $u(x) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ dans C'.

7°) On commence par calculer les coordonnées de $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ dans la base C, au moyen des coordonnées de e'_1, e'_2, e'_3 dans B et de la matrice A :

$u(e'_1)$: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, ainsi l'on a : $u(e'_1) = -2f_1 + 3f_2$

$u(e'_2)$: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, ainsi l'on a : $u(e'_2) = 3f_1$

$u(e'_3)$: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, ainsi l'on a : $u(e'_3) = 3f_1 - f_2$.

Il est facile d'obtenir f_1 et f_2 en fonction de f'_1 et f'_2 :

on a en effet : $\begin{cases} f'_1 = f_1 + f_2 \\ f'_2 = f_1 - f_2 \end{cases}$ d'où : $2f_1 = f'_1 + f'_2$ et $2f_2 = f'_1 - f'_2$,

ainsi l'on a : $f_1 = \frac{1}{2}(f'_1 + f'_2)$ et $f_2 = \frac{1}{2}(f'_1 - f'_2)$,

d'où l'on obtient $u(e'_1), u(e'_2), u(e'_3)$ dans la base $C' = (f'_1, f'_2)$:

$$u(e'_1) = -2f_1 + 3f_2 = -f'_1 - f'_2 + \frac{3}{2}f'_1 - \frac{3}{2}f'_2 = \frac{1}{2}f'_1 - \frac{5}{2}f'_2.$$

$$u(e'_2) = 3f_1 = \frac{3}{2} f'_1 + \frac{3}{2} f'_2 ,$$

et : $u(e'_3) = 3f_1 - f_2 = \frac{3}{2}(f'_1+f'_2) - \frac{1}{2}(f'_1-f'_2) = f'_1 + 2f'_2$.

D'où la matrice de u dans les bases B' et C' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ -5/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

8°) On a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'après le 2°), quant à Q^{-1}, on la déduit facilement des expressions de f_1 et f_2 en fonction de f'_1 et f'_2 : $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a donc tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow P$$

$$A.P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \text{puis} \quad 2Q^{-1}(A.P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $Q^{-1}.A.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ -5/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} = A'$.

- **Exercice 2 :**

1°) On a $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $B_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

et ainsi, $\det(B_1 - \lambda I) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 2^2\right)$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = -(3-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Les valeurs propres de B_1 sont les racines de $\det(B_1 - \lambda I)$, soient

$\lambda_1 = 3$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = -1$ (valeur propre simple) .

2°) Calcul des sous-espaces propres de B_1 :

- attaché à $\lambda_1 = 3$: $\operatorname{Ker}(B_1 - 3I)$.

On a $B_1 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ la première colonne est une colonne de zéros, c'est l'image par $B_1 - 3I$ du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, donc on a déjà $e_1 \in \operatorname{Ker}(B_1 - 3I)$.

Ensuite, si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$, on aura $x \in \operatorname{Ker}(B_1 - 3I)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \text{ soit } \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$ c'est à dire $x_2 = x_3$ (équations équivalentes)

on a ainsi $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_2 e_3 = x_1 e_1 + x_2 (e_2 + e_3)$ où x_1, x_2 sont des réels quelconques

Ainsi l'on a : $\operatorname{Ker}(B_1 - 3I) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2+e_3) = \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,1))$

e_1 et e_2+e_3 étant non colinéaires, on a $\dim(\operatorname{Ker}(B_1 - 3I)) = 2$

• Remarque : comme les deux colonnes non nulles de $B_1 - 3I$ sont opposées, on en déduit facilement que la dimension de $\mathrm{Im}(B_1 - 3I)$ est égale à 1, et donc, d'après le théorème du rang, la dimension de $\mathrm{Ker}(B_1-3I)$ est égale à 2 ; on a clairement $e_1 \in \mathrm{Ker}(B_1 - 3I)$ (colonne de zéros) et comme les deux autres colonnes sont opposées, c'est à dire que les images de e_2 et e_3 par $B_1 - 3I$ sont opposées, il s'ensuit par linéarité que l'image de e_2+e_3 par B_1-3I est nulle, donc que $e_2+e_3 \in \mathrm{Ker}(B_1-3I)$.

• attaché à $\lambda_2 = -1$: $\mathrm{Ker}(B_1 + I)$

On a $B_1 + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$, on a $x \in \mathrm{Ker}(B_1+I)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, c'est à dire $x_1 = 0$ et $x_2 = -x_3$

d'où $x = x_2 e_2 - x_2 e_3 = x_2(e_2 - e_3)$ où $x_2 \in \mathbb{R}$ est quelconque,

et ainsi l'on a $\mathrm{Ker}(B_1 + I) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3) = \mathrm{Vect}(0, 1, -1)$

• Remarque : ici encore, on aurait pu déduire directement $\mathrm{Ker}(B_1+I)$ du fait que les deux dernières colonnes de $B_1 + I$ sont identiques (et la première linéairement indépendante, d'où la dimension de $\mathrm{Im}(B_1+I)$ est 2)

3°) • On a $\dim\left(\mathrm{Ker}(B_1 - 3I)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(B_1+I)\right) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$, la matrice B_1 est donc diagonalisable (puisqu'il existe donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B_1)

• On pourrait dire aussi que le sous-espace propre attaché à la valeur propre double est de dimension deux (et celui attaché à la valeur propre simple de dimension 1) : la dimension de l'espace propre attaché à chacune des valeurs propres est égale à son ordre de multiplicité, et la somme de ces ordres est égale au degré du polynôme caractéristique de B_1 donc B_1 est diagonalisable.

4°) la matrice diagonale semblable à B_1 est : $B_1' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

c'est la matrice dans la base de vecteurs propres (e_1, e_2+e_3, e_2-e_3) de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est B_1 ;

la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à la base de vecteurs propres (e_1, e_2+e_3, e_2-e_3)

est : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (les deux premiers vecteurs e_1 et e_2+e_3 sont attachés à la valeur propre 3 et le dernier vecteur $e_2 - e_3$ est attaché à la valeur propre -1.

Et l'on a : $B_1' = P_1^{-1} B_1 P_1$.

5°) Soit $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on a $B_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$,

et donc l'on a : $\det(B_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1)$.

donc le polynôme caractéristique de B_2, $\det(B_2 - \lambda I)$ a trois racines distinctes : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

Ainsi, B_2 est une matrice 3×3 qui a trois valeurs propres distinctes : 2, 1 et -1, elle est donc diagonalisable ; une matrice diagonale qui est semblable à B_2 est par exemple : $B_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (mais $B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en est une autre...)

- **Exercice 3 :**

I. Étude d'une équation linéaire :

Soit l'équation différentielle : $x\dfrac{dy}{dx} = y(x) + 3x^4$. (1)

On commence par résoudre l'équation homogène (1_0) associée à (1) : $x\dfrac{dy}{dx} = y(x)$

Sur un intervalle I ne contenant pas 0, si y est une solution qui ne s'annule pas sur I, on a :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{soit} \quad \ln|y(x)| = \ln|x| + Cte$$

et donc : $y(x) = K.x$, où K est une constante réelle arbitraire, est la solution générale de l'équation homogène associée à (1).

Pour trouver une solution particulière de (1), on utilise la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche cette solution y sous la forme : $y(x) = K(x).x$

On a alors $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = K(x) + K'(x)\,x$, et ainsi, y est solution de (1) si et seulement si l'on a :

$$x\,K(x) + K'(x)\,x^2 = x\,K(x) + 3x^4, \quad \text{c'est à dire } K'(x)\,x^2 = 3x^4,$$

soit $K'(x) = 3x^2$, d'où $K(x) = x^3 + C$, en prenant $C = 0$, on a la solution particulière $y(x) = x\,K(x) = x^4$, puis l'on en déduit la solution générale de (1) :

$$y(x) = \underbrace{Kx}_{\text{solution générale de } (1_0)} + \underbrace{x^4}_{\text{solution particulière de } (1)} \quad \text{où } K \text{ est une constante réelle arbitraire}$$

II. Étude d'une équation non linéaire : réduction à une forme séparable.

Soit l'équation différentielle : $x\dfrac{dy}{dx} = y + 3x^4\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$ (2)

1°) La fonction $\cos^2$ n'est pas une fonction linéaire, donc l'équation (2) est (pour $x\neq 0$) de la forme $\dfrac{dy}{dx} = F(y,x)$ avec $F(y,x) = \dfrac{y}{x} + 3x^3\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ qui n'est pas linéaire par rapport à y : l'équation (2) n'est donc pas linéaire. Le terme $\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ fait que l'on ne peut "séparer les variables y et x", et donc, avec ces variables, on ne peut utiliser la méthode de séparation des variables. D'où le changement de variable effectué dans la suite.

2°) L'équation (2) est équivalente à : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 3x^3\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ pour $x\neq 0$, soit $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}, x\right)$ avec $f(z,x) = z + 3x^3\cos^2 z$.

3°) Pour $x\neq 0$, on a, si $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, $y(x) = x\,u(x)$, donc $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u(x)$, et ainsi l'équation devient : $x\dfrac{du}{dx} + u(x) = u(x) + 3x^3\cos^2(u(x))$, $x\neq 0$,

c'est à dire : $x\dfrac{du}{dx} = 3x^3\cos^2(u(x))$, soit encore, pour $x \neq 0$:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2\cos^2(u(x)), \quad \text{soit } (4)$$

4°) On a ainsi : (pour $u(x) \in]-\pi/_2, \pi/_2[$) $\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = 3x^2$, donc $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\,dx = \int 3x^2\,dx + C$,

c'est à dire $tg(u(x)) = x^3 + C$, (puisque $\dfrac{d}{dx}\left(tg(u(x))\right) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$ d'après le formulaire),

et donc $u(x) = \operatorname{Arctg}(x^3 + C)$, solution générale de (4). C est une constante arbitraire réelle.

5°) On a alors $y(x) = x\,u(x) = x\operatorname{Arctg}(x^3 + C)$, solution générale de (2) (pour $x\neq 0$).

6°) La solution y du problème de Cauchy formé de l'équation (2) et la condition $y(1) = 0$ est telle que C vérifie $y(1) = \operatorname{Arctg}(1 + C) = 0$, donc $1 + C = 0$, c'est à dire $C = -1$: c'est donc la fonction y telle que : $y(x) = x\operatorname{Arctg}(x^3 - 1)$.

Examen du 11 Mars 2019 : Réponses rapides pour le sujet 2.

Pour les méthodes, voir les questions correspondantes dans la solution du sujet 1.

• **Exercice I :** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (B et C)

I. Étude de l'application :

1) On a $Ker(u) = Vect((1,9,7))$ donc $\dim(Ker(u)) = 1$

et $Im(u) = Vect((2,3),(-1,2)) = \mathbb{R}^2$, $\dim(Im(u)) = 2$ (et toute autre base de $\mathbb{R}^2$ convient...)

2) $\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ est l'espace de départ de u.

3°) $Im(u) = \mathbb{R}^2$ donc u est surjective.

II. Changement de base :

1) Il suffit de montrer que e_1', e_2', e_3' sont linéairement indépendants pour montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque c'est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension trois. Idem pour (f_1', f_2').

2°) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3°) $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 4°) P et Q sont inversibles (comme toute matrice de passage)

5°) On a $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base B. Pour trouver les coordonnées de x dans B', on peut appliquer P^{-1} à $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, il faut donc d'abord inverser P. Mais on peut aussi exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e_1', e_2', e_3' : on a en effet $e_1' + e_2' - e_3' = 2e_3$ d'où $e_3 = \frac{1}{2}(e_1' + e_2' - e_3')$, de même l'on a $e_2 = \frac{1}{2}(e_1' - e_2' + e_3')$ et $e_1 = \frac{1}{2}(-e_1' + e_2' + e_3')$ donc $x = e_1 + 9e_2 + 7e_3 = \frac{1}{2}(15e_1' - e_2' + 3e_3')$, ainsi l'on a : $x = \begin{pmatrix} 15/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ dans la base B'.

Et les expressions de e_1, e_2, e_3 en fonction de e_1', e_2', e_3' permettent d'écrire P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6°) $u(x) = 0_{\mathbb{R}^2}$: $x \in Ker\, u$ (voir 1°)), donc $u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans toutes les bases de $\mathbb{R}^2$.

7°) On a : $u(e_1') = -f_2$, $u(e_2') = 3f_1$ et $u(e_3') = f_1 + 5f_2$;

pour écrire $u(e_1')$, $u(e_2')$ et $u(e_3')$ dans (f_1', f_2') on peut utiliser le fait que l'on a : $f_1 = f_1' + f_2'$ et $f_2 = f_1' - f_2'$, on obtient alors :

$u(e_1') = f_2' - f_1'$, $u(e_2') = 3f_1' + 3f_2'$ et $u(e_3') = 6f_1' - 4f_2'$,

d'où la matrice A' : $A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

8°) On a $AP = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, et comme l'on a $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (cf les expressions de f_1 f_2 en fonction de f_1' et f_2' au 7°)

on obtient bien $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = A'$.

• **Exercice II :** $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

1°) $\det(B_1 - \lambda I) = (2-\lambda)^2 \lambda$: B_1 a deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ (double) et $\lambda_2 = 0$ (simple)

2/2 2°) Espaces propres de B_1 :

- attaché à $\lambda_1 = 2$: $\mathrm{Ker}(B_1 - 2I) = \mathrm{Vect}(e_3, e_1+e_2) = \mathrm{Vect}((0,0,1),(1,1,0))$
de dimension 2
- attaché à $\lambda_2 = 0$: $\mathrm{Ker}\, B_1 = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

3°) B_1 est diagonalisable (somme des dimensions des sous-espaces propres égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$)

4°) on a $B_1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base de vecteurs propres (e_3, e_1+e_2, e_1-e_2)

et l'on a $B_1' = P_1^{-1} B_1 P_1$.

5°) $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\det(B_2 - \lambda I) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2+1)$ 1 est valeur propre

dans $\mathbb{R}$, B_2 n'est pas diagonalisable, mais comme l'on a $\det(B_2 - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = (1-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i)$, dans $\mathbb{C}$, B_2 a trois valeurs propres distinctes, et comme c'est une matrice 3×3, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$,

on a alors $B_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ (par exemple).

- Exercice 3

I - Étude d'une équation linéaire : (1) $x\dfrac{dy}{dx} = y + 2x^3$

La solution générale de (1) est : $y(x) = \underbrace{K.x}_{\text{solution générale de l'équation homogène associée à (1)}} + \underbrace{x^3}_{\text{solution particulière de (1)}}$ où K est une constante arbitraire (réelle)

II - Étude d'une équation non linéaire : réduction à une forme séparable.

(2) $x\dfrac{dy}{dx} = y + 2x^3 \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$.

1°) voir le sujet 1), $\sin^2$ n'est pas une fonction linéaire, et du fait du terme $\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$, on ne peut séparer les variables x et y.

2°) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 2x^2\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right) = f\left(\dfrac{y}{x}, x\right)$ avec $f(z, x) = z + 2x^2\sin^2 z$.

3°) $y(x) = x\,u(x)$ donc $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u(x)$ et $f(u(x), x) = u(x) + 2x^2\sin^2(u(x))$,
donc l'on obtient : $x\dfrac{du}{dx} = 2x^2\sin^2(u(x))$ d'où (3) pour $x \neq 0$.

4°) (3) est équivalente à : $\dfrac{u'(x)}{\sin^2(u(x))} = 2x$, et $\dfrac{u'(x)}{\sin^2(u(x))} = \dfrac{d}{dx}\left[-\mathrm{cotg}\, u(x)\right]$ d'après le formulaire
(pour $u(x) \in]0, \pi[$)

On a donc : $-\mathrm{cotg}(u(x)) = x^2 + C$, donc $u(x) = \mathrm{Arccotg}(-x^2 + C)$ où C constante arbitraire (réelle)
(solution générale de (3))

5°) Pour $x \neq 0$, la solution générale de (2) est donc :

$$y(x) = x\,u(x) = x\,\mathrm{Arccotg}(-x^2 + C),$$ où C constante arbitraire réelle.

6°) La solution du problème de Cauchy formé de (2) et de la condition initiale $y(1) = \frac{\pi}{2}$ est telle que C vérifie : $y(1) = \mathrm{Arccotg}(C-1) = \pi/2$, comme $\mathrm{cotg}(\pi/2) = 0$,
on a donc $C - 1 = 0$, soit $C = 1$, et ainsi l'on a :

$$y(x) = x \cdot \mathrm{Arccotg}(1 - x^2)$$