Sorbonne Université **Année universitaire 2019-2020**
MU4MEF03 – Écoulements compressibles et aérodynamique incompressible **Master SPI – MF2A & CompMech**

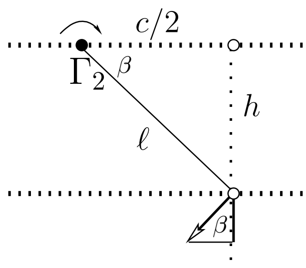
Devoir à la maison
À rendre sur Moodle pour le mercredi 11 mars 2020

REDIGER PARTIE 1 ET PARTIE 2 SUR DEUX COPIES SEPAREES

PARTIE 1 : Aérodynamique incompressible

A – Avions bi-plans
Terminer l'exercice de TD sur les voilures bi-plan (TD 4, Exercice 1, Question 3).

Au point $(3c/4, -h/2)$, il faut imposer que la projection normale de la vitesse incidente plus les vitesses induites par les deux tourbillons est nulle. Pour l'écoulement incident, la contribution est $U_\infty \alpha$. Pour le premier tourbillon distant de $c/2$, elle est $-\Gamma_1/[2\pi(c/2)]$. Pour le second tourbillon situé en $(c/4, +h/2)$ à distance $\ell = (c^2/4 + h^2)^{1/2}$, c'est $-\Gamma_2/(2\pi\ell)$ avec un facteur projectif $\cos\beta = c/(2\ell)$. Pour le premier point, on a donc :



$$U_\infty \alpha - \frac{\Gamma_1}{\pi c} - \frac{\Gamma_2 c}{4\pi\ell^2} = 0\,.$$

Au point $(3c/4, +h/2)$, on a une équation similaire où Γ_1 et Γ_2 sont échangés. En multipliant par πc, on aboutit au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Gamma_1 + \Delta\Gamma_2 & = & \Gamma \\ \Delta\Gamma_1 + \Gamma_2 & = & \Gamma \end{array}\right. , \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{1}{1+4\delta^2}\,, \quad \text{et} \quad \delta = \frac{h}{c}\,.$$

On en déduit

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{1}{1+\Delta}\Gamma = \frac{1+4\delta^2}{2+4\delta^2}\Gamma\,.$$

Cas limites :
On raisonne ici sur les circulations, sachant que les portances sont proportionnelles. Quand $h \to 0$, Γ_1 et $\Gamma_2 \to \Gamma/2$, on a une perte de portance importante, due au fait que l'écoulement entre les deux profils ne joue plus complètement son rôle. La portance maximale est atteinte pour $h \to \infty$, on a alors Γ_1 et $\Gamma_2 \to \Gamma$, comme on peut s'y attendre pour deux profils qui sont alors indépendants l'un de l'autre.
On ne peut donc pas obtenir un gain de portance par rapport à une aile unique de longueur $2c$, car la portance décroît quand h diminue. En pratique, il faut faire au mieux et se placer dans une situation où Γ_1 et Γ_2 sont proches de Γ, tout en ayant $\delta = h/c$ suffisamment petit pour être réalisable, typiquement, $\delta \approx 3 - 4$.
Avantage du bi-plan : compacité de l'avion, résistance de la voilure.
Inconvénients : traînées des haubans, poids supplémentaire.

B – Avions avec ailes en tandem
Des ailes en tandem sont des paires d'ailes situées l'une derrière l'autre. Contrairement à l'avion bi-plan qui a été très important dans l'histoire de l'aéronautique, très peu d'avions avec ailes en tandem ont été développés entre la libellule de Blériot en 1907 (figure 1a) et l'avion de reconnaissance américain Proteus de Scaled Composites en 1998 (figure 1b). On se propose ici d'examiner les propriétés de portance de ce type de voilure. On considère le problème dans l'approche bi-dimensionnelle. Deux profils NACA 0008 identiques, de longueur de corde c, sont placés l'un derrière l'autre sur l'axe x, le bord de fuite du premier étant placé à une distance d du bord d'attaque du second (figure 2a). L'écoulement est supposé incompressible, de vitesse amont V_∞, et fait un angle $\alpha > 0$ supposé petit avec l'axe x.

(a) (b)

FIGURE 1 – *Deux exemples d'avions avec ailes en tandem : (a) le Blériot VI, (b) le Proteus.*

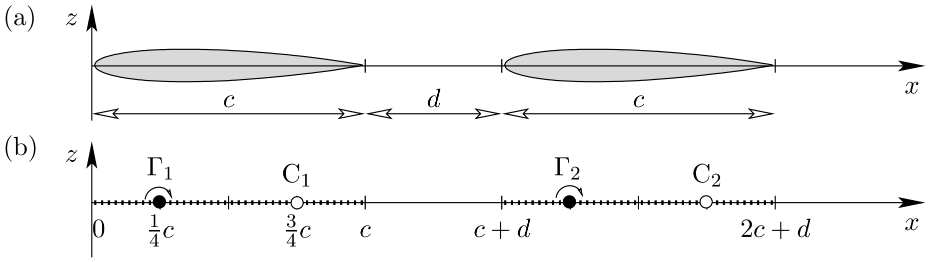


FIGURE 2 – *Modélisation bi-dimensionnelle du tandem (a) à l'aide de deux profils d'aile, (b) à l'aide de deux tourbillons ponctuels.*

1. *Modélisation* – On remplace les deux profils par deux tourbillons ponctuels de circulation Γ_1 et Γ_2, disposés comme le montre la figure 2b.

   (a) Justifier la position des deux tourbillons, et expliquer l'utilité des deux points C_1 et C_2.

   Dans cette approche, on concentre toute la vorticité qui décrit l'effet d'un profil sur l'écoulement en un point. Puisqu'il s'agit de profils symétriques (NACA 00xx) et minces (xx=08 ≤ 12), chaque vortex ponctuel est placé au quart de corde qui est le centre de pression. Il n'y a plus qu'un degré de liberté pour chaque profil (la circulation inconnue) : imposer la condition d'imperméabilité en tout point du profil devient impossible, en revanche l'imposer aux trois quarts de la corde conduit aux bonnes valeurs de circulation (cf. TD).

   (b) Donner la vitesse verticale $V_z(x)$ en tout point de l'axe x.

   En faisant l'approximation d'un petit angle d'incidence $\alpha \approx \sin\alpha$, il vient

$$V_z(x) = -\frac{\Gamma_1}{2\pi(x-c/4)} - \frac{\Gamma_2}{2\pi(x-d-5c/4)} + V_\infty\alpha\,.$$

   (c) Obtenir le système d'équations vérifiées par Γ_1 et Γ_2. En posant $\Gamma_0 \equiv \pi c\alpha V_\infty$ montrer que le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \Gamma_1 & - & \dfrac{1}{1+2\delta}\,\Gamma_2 & = & \Gamma_0\,, \\ \dfrac{1}{3+2\delta}\,\Gamma_1 & + & \Gamma_2 & = & \Gamma_0\,. \end{array}\right. \tag{1}$$

   où δ est un paramètre à préciser.

   On impose la condition d'imperméabilité aux deux points de contrôle C_1 et C_2. Au point de contrôle C_1 situé en $x_1 = 3c/4$, la vitesse s'écrit

$$V_z(x_1) = -\frac{\Gamma_1}{2\pi(c/2)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi(d+c/2)} + V_\infty\alpha\,,$$

   alors qu'en C_2 situé en $x_2 = d + 7c/4$, elle s'écrit

$$V_z(x_2) = -\frac{\Gamma_1}{2\pi(d+3c/2)} - \frac{\Gamma_2}{2\pi(c/2)} + V_\infty\alpha\,.$$

La condition d'imperméabilité appliquée aux points de contrôle $V_z(x_1) = V_z(x_2) = 0$ mène au système (après multiplication par πc) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -\Gamma_1 & + & \dfrac{c}{c+2d}\,\Gamma_2 & + & \pi c\alpha V_\infty = 0\,, \\ -\dfrac{c}{3c+2d}\,\Gamma_1 & - & \Gamma_2 & + & \pi c\alpha V_\infty = 0\,, \end{array}\right.$$

que l'on récrit sans problème sous la forme (1) en introduisant $\delta \equiv d/c$.

2. *Portance du tandem* – On examine maintenant le système (1).
   (a) Exprimer Γ_1 et Γ_2 à l'aide de δ et de Γ_0.

   La résolution du système mène à

   $$\Gamma_1 = \frac{3+2\delta}{2+2\delta}\,\Gamma_0\,,\ \ \Gamma_2 = \frac{1+2\delta}{2+2\delta}\,\Gamma_0\,.$$

   (b) En déduire les portances L'_1 et L'_2 des deux ailes par unité de longueur suivant l'envergure.

   Par application du théorème de Kutta–Joukowsky, on obtient

   $$L'_1 = \rho V_\infty \Gamma_1 = \left(1 + \frac{1}{2+2\delta}\right)\,\rho V_\infty \Gamma_0 \text{ et } L'_2 = \rho V_\infty \Gamma_2 = \left(1 - \frac{1}{2+2\delta}\right)\,\rho V_\infty \Gamma_0\,.$$

   (c) Examiner les cas limites et les interpréter physiquement.

   Dans le cas où $\delta \to \infty$, on retrouve $L'_1, L'_2 \to \rho V_\infty \Gamma_0$, comme deux profils d'aile indépendants car éloignés de beaucoup plus de c l'un de l'autre. Dans le cas où $\delta \to 0$, on trouve $L'_1 \to \frac{3}{2}\rho V_\infty \Gamma_0$ et $L'_1 \to \frac{1}{2}\rho V_\infty \Gamma_0$. Les deux profils deviennent jointifs, et équivalents à un seul profil de portance $L' = L'_1 + L'_2 = 2\rho V_\infty \Gamma_0$ double, ce qui est attendu car la corde équivalente est $2c$. La distribution $\frac{3}{2}$ vs $\frac{1}{2}$ reflète la diminution avec x de la distribution $\gamma(x)$ du profil réel. C'est aussi celle qui permet d'assurer que le centre de pression de l'ensemble est au quart de corde $x = 2c/4 = c/2$.

   (d) Que vaut la portance totale L' ? Commenter le résultat, en particulier par rapport au cas du bi-plan.

   La portance totale $L' = 2\rho V_\infty \Gamma_0$ ne dépend pas de δ, ce qui est différent du cas du bi-plan. Il n'y a donc pas d'écartement préférentiel vis-à-vis de la portance.

3. *Portance du Proteus* – La figure 3 montre une vue de dessus du Proteus et fournit un certain nombre de données. Dans cette partie, **on se place en vol de croisière**.

— Aile avant (aussi appelée aile canard) :
  surface alaire $A_1 = 16$ m^2, envergure $b_1 = 17$ m.
— Aile arrière : $A_2 = 28$ m^2, envergure $b_2 = 24$ m.
— Vitesse et altitude de croisière :
  $V_\infty = 100$ m/s à $z = 6000$ m.
— À l'altitude $z = 6000$ m :
  la température est $T = 250$ K,
  la pression $p = 0.47 \cdot 10^5$ Pa,
  la masse volumique de l'air $\rho = 0.66$ kg/m^3,
  et sa viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}$ m^2/s.
— Masse maximale de l'avion chargé : $m = 5700$ kg.

FIGURE 3 – *Vue de dessus du Proteus et données.*

On fait les hypothèses suivantes : les deux ailes sont indépendantes, le profil est le NACA0008, la corde est égale à la corde moyenne $\bar{c} \approx 1$ m, l'envergure totale est $b = b_1 + b_2$. Quel doit être l'angle d'incidence pour que la portance compense le poids maximal de l'avion ?

Le profil étant mince et symétrique, le coefficient de portance est $C_{L'} = 2\pi\alpha$. La portance totale est dans ces conditions $L = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\bar{c} \times 2\pi\alpha$ et compense le poids : $L = mg$. Ce qui donne :

$$\alpha = \frac{mg}{\pi\rho V_\infty^2 b\bar{c}} = \frac{5700 \times 10}{\pi \times 0.66 \times 100^2 \times (17+24) \times 1} = 0.067\ \mathit{rad} = 3.8\ \mathit{deg}\,.$$