

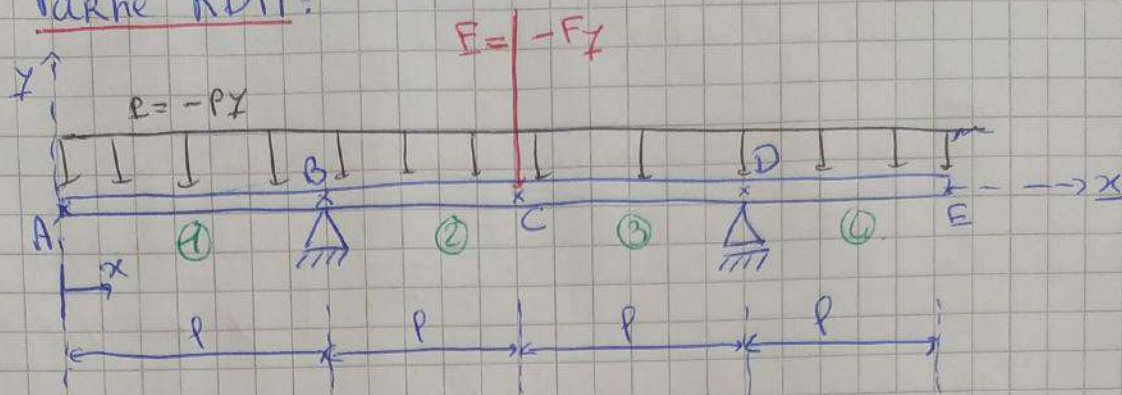
# Examen 3AC06 - EAD

Duvivier

Valentin

L3 CITI

Partie RDT:



On étudie la poutre ci-dessus décrite, présentant des caractéristiques d'homogénéité, d'isotropie, et d'élasticité linéaire, en équilibre initial et pour laquelle on fait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

1. On applique le PFS pour déduire des équations d'équilibre les bords de liaisons en B et en D.

Des types de liaisons en B et D, on sait déjà que:

$$\{L_B\} = \begin{Bmatrix} N_B \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \{L_D\} = \begin{Bmatrix} T_D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Par application du PFS:

• Théorème de la résultante:

$$\sum F_{ext} = 0 \Rightarrow R_B + R_D - F_y - \int_0^{4l} p x dx = 0$$

$$R_B + R_D = F_y + 4pl$$

Par projection sur x et y:

$$[N_B = 0]$$

$$[T_B + T_D = F + 4pl]$$

Pour déterminer  $T_B$  et  $T_D$  en fonction de  $F$  et  $p$ , on utilise le théorème du moment.

• Théorème du moment:

$$\sum \Pi_B(F_{ext}) = 0 \Rightarrow \Pi_B(R_D) + \Pi_B(-F_y) + \Pi_B(-px) = 0$$

$$= \Pi_D(R_D) + BD \wedge R_D + BC \wedge -F_y + \int_0^{4l} B\zeta \wedge -p\zeta d\zeta = 0$$

avec  $\zeta$  le point d'application de la densité linéique  $p$ .

$$\rightarrow 2pl T_D - Fl \zeta - p \int_0^{4l} (\zeta - l) d\zeta = 0$$



Par projection sur  $\underline{z}$  :

$$2pT_D - FP - p \left[ \frac{4^2}{2} - 4p \right]_{\frac{4p}{2}} = 2pT_D - FP - p(8p^2 - 4p^2) \\ = 2pT_D - FP - 4p^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{T_D = \frac{F}{2} + 2pl}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B = \frac{F}{2} + 2pl}$$

→ ~~Donc~~ Nous avons bien défini les tenseurs de liaison en B et D.

2- On cherche à exprimer les composantes du tenseur de cohésion en chaque une des 4 parties  $[AB], [BC], [CD], [DE]$ .

On utilise pour ce faire les équations d'équilibre locales :

$$\frac{dR(s)}{ds} + \frac{dR(s)}{ds} + f(s) = 0.$$

$$\text{Ici } s \equiv x \quad \left[ \frac{dR(x)}{dx} + f(x) = 0 \right]$$

• en ① :  $\underline{R}^{(1)}(x) = \int_0^x p \gamma \, dx = px\gamma + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$$\underline{R}^{(1)}(0) = C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{R}^{(1)}(x) = px\gamma}$$

• en ② :  $\underline{R}^{(2)}(x) = px\gamma + C_3$

Condition de saut :  $\llbracket R \rrbracket(l) + R_B = 0 \Rightarrow pl\gamma + C_3 - pl\gamma = -T_D\gamma$

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{F}{2} - 2pl} \quad C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{R}^{(2)}(x) = \left[ p(x - 2l) - \frac{F}{2} \right] \gamma}$$

• en ③ :  $\underline{R}^{(3)}(x) = px\gamma + C_5$

$$\llbracket R \rrbracket(2l) - F\gamma = 0 \Rightarrow C_5 - C_3 = F\gamma$$

$$\boxed{C_5 = F - \frac{F}{2} - 2pl = \frac{F}{2} - 2pl} \quad C_5 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{R}^{(3)}(x) = \left[ p(x - 2l) + \frac{F}{2} \right] \gamma}$$

• en ④ :  $\underline{R}^{(4)}(x) = px\gamma + C_7$

$$\llbracket R \rrbracket(3l) + R_D = 0 \Rightarrow C_7 - C_5 = \left( -\frac{F}{2} - 2pl \right) \gamma \quad C_7 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{C_7 = -4pl}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{R}^{(4)}(x) = p(x - 4l) \gamma}$$



De la même façon, nous avons en terme de moment :

• en ① :  $\frac{d\pi^0(x)}{dx} = -T(x) \wedge R(x) + \underline{C_1}(x)$   
 $\downarrow$  sur la poutre

$\rightarrow \frac{d\pi^0(x)}{dx} = -px^2 \quad \rightarrow \pi^0(x) = -\frac{px^3}{3} + \underline{C_2}$   $C_2 \in \mathbb{R}$

Or,  $\pi^0(0) = \underline{C_2} = 0 \Rightarrow \pi^0(x) = -\frac{px^3}{3}$

• en ② :  $\pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 2xp\right) + \frac{Fx}{2} \right] z + \underline{C_4}$

$\pi^0(x)(p) = \pi^0(p) - \pi^0(0) = \left( 2p^2 + \frac{Fp}{2} \right) z + \underline{C_4} = 0$   $C_4 \in \mathbb{R}$   
 $\rightarrow \underline{C_4} = -\left( \frac{Fp}{2} + 2p^2 \right)$

$\rightarrow \pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 2xp + 2p^2\right) + \frac{F}{2}(x-p) \right] z$

• en ③ :  $\pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 2xp\right) - \frac{Fx}{2} \right] z + \underline{C_6}$   $C_6 \in \mathbb{R}$

$\pi^0(x)(2p) = \pi^0(2p) - \pi^0(0) = z(-Fp - Fp) + \underline{C_6} - \underline{C_4} = 0$   
 $\rightarrow \underline{C_6} = 2Fp - \frac{Fp}{2} - 2p^2 = \frac{3Fp}{2} - 2p^2$

$\rightarrow \pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 2xp + 2p^2\right) + \frac{F}{2}(3p - x) \right] z$

• en ④ :  $\pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 4xp\right) \right] z + \underline{C_8}$   $C_8 \in \mathbb{R}$

$\pi^0(x)(3p) = \pi^0(3p) - \pi^0(0) = z(p \times 4 \times 3p) + \underline{C_8} - (2p^2 \times 3p - 2p^2) z$   
 $- \frac{F}{2}(3p - 3p) z = 0$

$\rightarrow \underline{C_8} = +4p^2 - 12p^2 = -8p^2$

$\rightarrow \pi^0(x) = \left[ -p\left(\frac{x^2}{2} - 4xp + 8p^2\right) \right] z$

$\Rightarrow$  On remarque au final que  $N(x) = 0$  sur toute la poutre et que  
 $\pi_1(x) = R(x)$  &  $\pi_2(x) = T(x)$

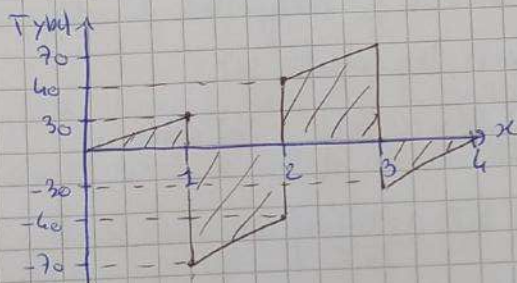
Nous allons procéder au tracé des diagrammes de  $T(x)$  et  $R(x)$ .



3-  $F = 80 \text{ kN}$ ;  $p = 30 \text{ kN.m}^{-1}$ ;  $P = 1 \text{ m}$ .

$$\begin{cases} R^1(x) = px = 30x \rightarrow x \in [0; 1] \Rightarrow R^1(x) \in [0; 30] \\ R^2(x) : x \in [1; 2] \Rightarrow R^2(x) \in [-30; -60] \\ R^3(x) : x \in [2; 3] \Rightarrow R^3(x) \in [40; 70] \\ R^4(x) : x \in [3; 4] \Rightarrow R^4(x) \in [-30; 0] \end{cases}$$

On note que l'évolution de chaque résultante ~~est~~ est sur une droite de pente positive, ~~car~~ la pente est d'ordre 1.



On note une symétrie inverse ainsi que le fait que l'on avait bien obtenu des effets en B et D égaux par symétrie.

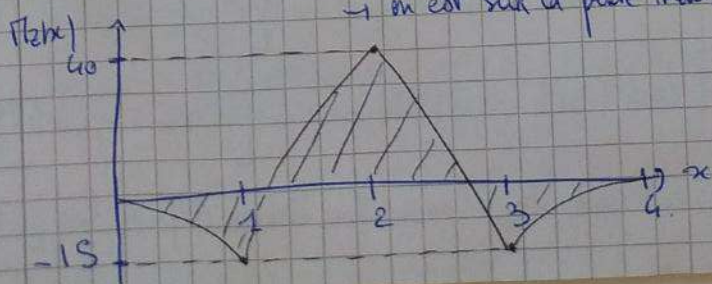
$\Pi^1(x) = -15x^2 \rightarrow$  ~~hyperbole~~ <sup>parabole</sup> dont le pic est en  $x=0$ .  
 $\rightarrow x \in [0; 1] \rightarrow$  on est sur la pente descendante  
 $\Pi^1(x) \in [0; -15]$ .

$\Pi^2(x) = -(15x^2 - 100x + 100) \rightarrow \Pi^2(x) \in [-15; 40]$ .  
 $\Pi^{2'}(x) = -(30x - 100) \rightarrow x = 10/3$  OR  $x \in [1; 2]$   
 $\rightarrow$  on est sur la pente montante.

$\Pi^3(x) = 5(-3x^2 + 4x + 12) \rightarrow \Pi^3(x) \in [40; -15]$ .  
 $\Pi^{3'} = 5(-6x + 4) \rightarrow x = 2/3$  OR  $x \in [2; 3]$   
 $\rightarrow$  on est sur la pente descendante.

$\Pi^4(x) = -5(3x^2 - 24x + 48) \rightarrow \Pi^4(x) \in [-15; 0]$ .

$\Pi^{4'}(x) = -5(16x - 24) \rightarrow x = 3/2$  OR  $x \in [3; 4]$ .  
 $\rightarrow$  on est sur la pente montante.



Note: Les pentes sont toutes celles de paraboles concave ( $-ax^2 \dots$ ).



4- D'après les égalités de Tremoshenko, dans le cas d'un matériau homogène ( $m_y = m_z = 0$ ), dont la section est symétrique ( $I_{yz} = 0$ ) :

$$\begin{cases} N(x) = ES \gamma_x = ES \frac{du(x)}{dx} \\ T_y(x) = \mu S \gamma_y = \mu S \left[ \frac{dV_y(x)}{dx} - \omega_z(x) \right] \\ T_z(x) = EI \gamma_z = EI \frac{d\omega_z(x)}{dx} \end{cases}$$

On nous donne sous la condition de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. Cela revient à négliger les efforts tranchants soit :

$$T_z(x)/T_y(x) = 0 \rightarrow \left[ \frac{dV_y(x)}{dx} = \omega_z(x) \right], \text{ et donc :}$$

$$EI \frac{d\omega_z(x)}{dx} = EI \frac{d^2 V_y(x)}{dx^2}$$

On a ainsi un lien entre le moment fléchissant  $T_z(x)$  et les vecteurs rotations et déplacement selon  $z$  et  $y$  respectivement.

a- On cherche En notant  $\alpha = \frac{1}{EI}$ , et par intégration :

$$\begin{cases} \omega_z^1(x) = -\alpha \frac{p x^3}{6} + C_1 \\ \omega_z^2(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^3}{6} + 2px - px^2 \right) + \frac{F}{2} \left( \frac{x^2}{2} - px \right) \right] + C_3 \\ \omega_z^3(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^3}{6} - px^2 + 2px \right) + \frac{F}{2} \left( 3px - \frac{x^2}{2} \right) \right] + C_5 \\ \omega_z^4(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^3}{6} - 2px^2 + 8px \right) \right] + C_7 \end{cases}$$

avec  $\{C_1, C_3, C_5, C_7\} \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \omega_z^1(l) = \omega_z^2(l) = 0 \Rightarrow C_1 = C_3 - \alpha p l \left( \frac{l}{2} + \frac{F}{p} \right) \\ \omega_z^3(2l) - \omega_z^4(2l) = 0 \Rightarrow C_3 = C_5 + 2\alpha F l \\ \omega_z^4(3l) - \omega_z^3(3l) = 0 \Rightarrow C_7 = C_5 + \alpha 9 p l \left( \frac{l}{2} + p l \right) \end{cases}$$

Avant de déterminer ces constantes, nous allons définir les fonctions de déplacements.



Par intégration et avec  $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{d U_7(x)}{dx}$ , on a :

$$U_7'(x) = -\alpha \frac{p x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

$$U_7''(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^4}{24} + \frac{p^2 x^2}{3} - \frac{p x^3}{3} \right) + \frac{F}{2} \left( \frac{p x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + C_3 x + C_4 \right]$$

$$U_7'''(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^4}{24} + \frac{p^2 x^2}{3} - \frac{p x^3}{3} \right) + \frac{F}{2} \left( \frac{3 p x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_5 x + C_6 \right]$$

$$U_7^{(4)}(x) = \alpha \left[ -p \left( \frac{x^4}{24} - \frac{2 p x^3}{3} + 4 p^2 x^2 \right) + C_7 x + C_8 \right]$$

avec  $\{C_2, C_4, C_6, C_8\} \in \mathbb{R}$

Or, d'après la forme  $p$  de la structure et des formes qui y sont appliquées, nous avons le déplacement qui est maximal en  $x = 2l$ .

Nous avons par conséquent  $U_7^{(3)}(2l) = U_7^{(2)}(2l) = 0$ .

$$\rightarrow w_2(2l) = w_2'(2l) = 0$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow [C_5 = \frac{4 \alpha p l^3}{3} - 2 F l^2] &\Rightarrow \begin{cases} [C_7 = \frac{31 \alpha p l^3}{3} + \frac{\alpha F l^2}{4}] \\ [C_3 = \frac{4 \alpha p l^3}{3}] \\ [C_1 = \alpha p l^2 \left( \frac{p l}{3} - \frac{F}{4} \right)] \end{cases} \end{aligned}$$

Pour simplifier les choses, on ne calculera que  $C_4$  pour les équations de déplacements car  $C_4$  est suffisant pour obtenir  $U_7^{(4)}(x)$  et donc  $U_7^{(2)}(2l) = 0$ .

$\Rightarrow U_7'(l) = 0$  d'après la liaison

$$\Rightarrow C_3 \text{ est connu donc } [C_4 = \frac{\alpha F l^3}{6} - \frac{5 \alpha p l^4}{8}]$$

$$\rightarrow a - [w_B = w_2'(l) = -\frac{\alpha p l^3}{6} + \frac{2 \alpha p l^3}{6} - \frac{\alpha F l^2}{4} = \frac{\alpha p l^2}{24} (4 p l - 5 F)]$$

Par application numérique :  $w_B = \frac{\alpha}{24} (-360) \rightarrow$  en rotation négative sur  $\underline{z}$ .

$$b - v_C = U_7^{(2)}(2l) = \alpha \left[ -\frac{p l^4}{24} (16 + 4 p l - 8 p^2 - 32 p l + 15) + \frac{F l^3}{12} (8 - 12 + 2) \right]$$

$$\rightarrow [v_C = \frac{\alpha p l^3}{24} (p l - 4 F)] = \frac{\alpha p l^3}{24} (-290) \text{ par application numérique}$$



Nous retrouvons bien le fait que le déplacement est négatif selon l'axe  $x$ , comme on pouvait s'y attendre visuellement.

On cherche désormais à obtenir les résultats de la Q.4 à l'aide des théorèmes associés. Pour ce faire on néglige l'énergie due aux cisaillements.

$\Rightarrow$  Or, comme on avait négligé dans la première partie les efforts tranchants ( $T_y(x) = 0$ ), cela prend du sens de négliger l'énergie associée.

L'énergie est définie par 
$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_P} \left[ \frac{N(x)^2}{ES} + \frac{T_y(x)^2}{\mu S} + \frac{\pi_z(x)^2}{EI} \right] dx$$

5. On cherche la valeur de la flèche en C (Vc) à l'aide du théorème de Castiglione. Ce théorème revient à calculer  $\frac{\partial U}{\partial F} = V_C$ . On calcule donc le déplacement là où une force est appliquée.

On rappelle que :  $\pi^1 \neq \pi^1(F)$  ;  $\pi^4 \neq \pi^4(F)$

et  $\pi^2(x) = -p \left( \frac{x^2}{2} + 2lx - 2xl \right) + \frac{F}{2}(x-l)$

$\pi^3(x) = -p \left( \frac{x^2}{2} + 2lx - 2xl \right) + \frac{F}{2}(3l-x)$

On a au final :

$$V_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{L_P} \left[ \frac{N(x)}{ES} \frac{\partial N(x)}{\partial F} + \frac{T_y(x)}{\mu S} \frac{\partial T_y(x)}{\partial F} + \frac{\pi_z(x)}{EI} \frac{\partial \pi_z(x)}{\partial F} \right] dx$$

0 car  $N(x) = 0$

0 car on néglige les cisaillements

$$+ \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{2l} \pi^2(x) \cdot \alpha \frac{\partial \pi^2(x)}{\partial F} dx + \int_{2l}^{3l} \pi^3(x) \cdot \alpha \frac{\partial \pi^3(x)}{\partial F} dx$$

$\alpha = \frac{1}{EI}$

On a  $\frac{\partial \pi^2}{\partial F} = \frac{x-l}{2}$  &  $\frac{\partial \pi^3}{\partial F} = \frac{3l-x}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{2l} \left[ -p \left( \frac{x^2}{2} + 2lx - 2xl \right) \left( \frac{x-l}{2} \right) + \frac{F}{4}(x-l)^2 \right] dx + \int_{2l}^{3l} \left[ -p \left( \frac{x^2}{2} + 2lx - 2xl \right) \left( \frac{3l-x}{2} \right) + \frac{F}{4}(3l-x)^2 \right] dx$$

$$V_C = \left[ -\frac{p}{2} \left[ \frac{x^4}{8} - 5lx^3 + 2l^2x^2 - 2l^3x \right] + \frac{Fx}{4} \left[ \frac{x^3}{3} - x^2l + xl^2 \right] \right]_0^{2l} + \left[ -\frac{p}{4} \left[ \frac{x^4}{3} - 4lx^3 + 6l^2x^2 - 4l^3x \right] + \frac{Fx}{4} \left[ \frac{x^3}{3} - x^2l + xl^2 \right] \right]_{2l}^{3l}$$

$$= -\frac{p}{2} \left[ \frac{7l^4x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + 6l^3x - 4l^2x^2 \right]_{2l}^{3l}$$



$$V_c = -\frac{\alpha p l^4}{2} \left( \frac{16-1}{8} + \frac{5(8-1)}{6} + 2(4-1) - 2 + \frac{7(27-8)}{6} - \frac{(81-16)}{8} + 6 - 4(9-4) \right) \\ + \frac{\alpha F l^3}{4} \left( \frac{8-1}{3} - \frac{(4-1)}{3} + 1 + 9 + \frac{(27-8)}{3} - 3(9-4) \right) \\ = \frac{\alpha p l^3}{4} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{\alpha p l^4}{2} \left( -\frac{1}{48} - \frac{1}{48} \right)$$

$$\Rightarrow \left[ V_c = \frac{\alpha p l^3}{24} (-pl + 4F) \right] \text{ sur } \neq \rightarrow \text{d'où le signe } \ominus$$

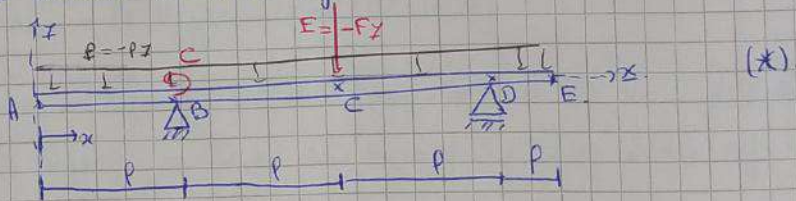
Note : Nous avons été rapidement sur chaque étape mais les points clés ont été présentés.

6 On cherche désormais la rotation de la section droite en B ( $w_B$ ) à l'aide du théorème de la charge fictive.

L'idée : Nous avons vu qu'avec le théorème de Castigliano nous étions en mesure de calculer le déplacement au point d'application d'une force. Par conséquent, nous allons pouvoir déterminer une rotation à l'aide d'un couple appliqué.

N'ayant pas de couple en B, on en ajoute un fictif qui n'aura pour but que d'obtenir  $w_B$  et non pas d'en conclure sur les effets et moments au sein de la poutre.

Le nouveau schéma du système est le suivant :



avec C un couple fictif.

Plutôt que de recalculer les effets de la poutre, nous allons procéder par superposition. Ainsi, à l'aide du théorème de superposition :





Par application du PFS :

$$TB + TD = 0$$

$$NB = 0$$

Par application et intégrations des équations d'équilibre locale :

$$R^1 = R^3 = 0 \quad \& \quad [R^2(x) = C_1], \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \pi^1 = \pi^3 = 0 \quad \text{car le moment est nul en } x=0 \text{ et en } x=4l$$

$$\rightarrow [\pi^2(x) = -C_1 x + C_2]$$

On utilise désormais les conditions de saut en B et D pour déterminer  $C_1$  et  $C_2$ .

$$[[B(x)]](3l) = R^3(3l) - R^2(3l) = -C_1 = -TD$$

$$\rightarrow [C_1 = TD] \quad \text{et} \quad [C_2 = 3TD]$$

$$[[B(x)]](l) = R^2(l) - R^1(l) = [C_1 = -TB] \rightarrow \text{nous avons en effet } TB = -TD$$

$$[[\pi(x)]](3l) = \pi^3(3l) - \pi^2(3l) = 3C_1 l - C_2 = 0$$

$$\rightarrow [C_2 = 3TDl]$$

$$[[\pi(x)]](l) = \pi^2(l) - \pi^1(l) = -C_1 l + C_2 = -C \quad \text{L'écoulement fictif}$$

$$\rightarrow C_2 = -C + TDl$$

$$\rightarrow 3TDl = -C + TDl \rightarrow \boxed{TD = \frac{-C}{2l}}$$

$$\Rightarrow \pi^2(x) = -C_1 x + C_2 = -TD x + 3TDl$$

$$[\pi^2(x) = TD(3l - x) = \frac{-C}{2l}(3l - x) = \frac{C}{2l}(x - 3l)]$$

⚠ Note : Ce  $\pi^2$  doit être ajouté à  $\pi^1(x)$  et  $\pi^3(x)$  défini précédemment. Ce moment est en effet valable pour les 2 trangers car ici  $\textcircled{2} = \textcircled{1} + \textcircled{2}$  de la poutre précédente.

Par application du principe de superposition, nous avons :

•  $\pi^1$  et  $\pi^3$  restent inchangés. on nous allons calculer  $\frac{\partial \pi}{\partial C}$  et donc

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial C} = \frac{\partial \pi^3}{\partial C} = 0$$

$$\pi^2(x) = -p\left(\frac{x^2}{2} + 2l^2 - 2lx\right) + \frac{F}{2}(lx - l) + \frac{C}{2l}(x - 3l) \rightarrow \frac{\partial \pi^2}{\partial C} = \frac{(x - 3l)}{2l}$$

$$[\pi^3(x) = -p\left(\frac{x^2}{2} + 2l^2 - 2lx\right) + \frac{F}{2}(3l - x) + \frac{C}{2l}(x - 3l) \rightarrow \frac{\partial \pi^3}{\partial C} = \frac{(x - 3l)}{2l}]$$



On a au final:

$$w_0 = \frac{\partial U}{\partial C} \Big|_{C=0} = \int_0^{4P} \frac{\pi_2(x)}{EI} \frac{\partial \pi_2(x)}{\partial C} dx.$$

on néglige toujours  $\pi_2(x)$  (et  $N(x)=0$ ).

$$= \int_P^{2P} x \left[ -p \left( \frac{x^2}{2} + 2P^2 + 2bx \right) \frac{(x-3P)}{2P} + \frac{F}{4P} (x-P)(x-3P) \right] dx$$

$$+ \int_{2P}^{3P} x \left[ -p \left( \frac{x^2}{2} + 2P^2 - 2bx \right) \frac{(x-3P)}{2P} + \frac{F}{4P} (3P-x)(x-3P) \right] dx.$$

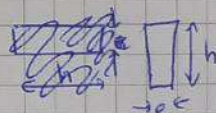
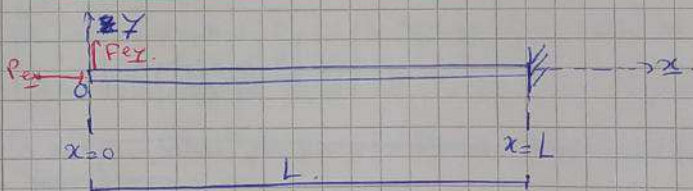
$$w_0 = \frac{\partial U}{\partial C} \Big|_{C=0} = -\frac{p}{P} \left[ \frac{x^4}{16} - \frac{7bx^3}{12} + 2P^2x^2 - 3P^3x \right]_P^{2P} + \left[ \frac{x^4}{16} - \frac{7bx^3}{12} + 2P^2x^2 - 3P^3x \right]_{2P}^{3P}$$

$$+ \frac{F}{4P} \left[ \left( -\frac{x^3}{3} - 3bx^2 + 9P^2x \right) \right]_{2P}^{3P} + \left[ \frac{x^3}{3} - 2bx^2 + 3P^2x \right]_{2P}^{3P}$$

$$= -\frac{p}{P} \left[ -\frac{7P^4}{48} + \frac{P^4}{48} \right] + \frac{F}{4P} \left[ -\frac{P^3}{3} - \frac{2P^3}{3} \right].$$

$$[w_0 = + \frac{xP^2}{24} (4pP - 6F)] \text{ sera toujours } \rightarrow \text{double même signe.}$$

Barre Elastique bidimensionnelle.



On considère une poutre homogène, isotrope, faite d'un matériau élastique linéaire.

1 Les équations et conditions aux limites du problème sont réunis dans les ensembles statiquement et cinématiquement admissibles:

$$\rightarrow \Sigma_{\text{stat}} \underline{U}_{\text{ad}} = \{ \underline{v}(x) \text{ défini sur } R, \text{ régulier tel que } [\underline{v}(x)] = 0 \mid$$

$$\underline{v}(x) = 0 \quad \forall x \in S_L \}.$$

$$\rightarrow \Sigma_{\text{ad}} = \{ \underline{\varepsilon}(x) \text{ défini sur } R, \text{ symétrique, régulier tel que } [\underline{\varepsilon}(x)] \cdot \underline{m}(x) = 0 \mid \text{div } \underline{\sigma}(x) = 0 \text{ (f.a.)} \text{ \& } \underline{\varepsilon}(x) \cdot \underline{m}(x) = R \quad \forall x \in S_0.$$

$$\underline{\varepsilon}(x) \cdot \underline{m}(x) = 0 \quad \forall x \in S_{\text{huse}} \}$$



Le problème est bien régulier car on connaît en chaque extrémité trois composantes de déplacement et/ou en contrainte :

$$\begin{cases} 3 \text{ composantes des contraintes sur } S_H \text{ et } S_e & (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}) \\ 3 \text{ composantes des contraintes sur } S_0 & (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{R}) \\ 3 \text{ composantes en déplacement sur } S_L & (\underline{u} = \underline{0}) \end{cases}$$

On en déduit par ailleurs que le problème est de type 1 car on connaît 3 composantes en déplacement sur l'une des surfaces.

Sachant cela et au vu des conditions en contrainte et en déplacement, on peut donc dire que la solution au problème ainsi posé sera unique (unique donc en contrainte, déformation et déplacement).

En effet, soit  $\underline{u}$  et  $\underline{u}^*$  2 solutions :

$\underline{u} = \underline{u}^* = \underline{\rho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x} \rightarrow$  on a donc la même solution à un déplacement de corps rigide (selon  $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ ) et à une rotation possible (selon  $\underline{e}_x, \underline{e}_y$  et/ou  $\underline{e}_z$ ).

$$\text{Or, en } \underline{x} = L : \quad \underline{u} - \underline{u}^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 x_3 - b_3 x_2 \\ b_3 x_1 - b_1 x_3 \\ b_2 x_2 - b_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{a}_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in L \cdot SL \rightarrow \underline{x}_1 = L, \underline{x}_2 = \text{quelconque}$$

$$\rightarrow b_1 = 0$$

$$\rightarrow a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 = 0 \quad \forall x_2, x_3 \in SL$$

$$\text{or, } x_2 \text{ et } x_3 \text{ sont quelconques sur } SL \rightarrow [a_1 = b_2 = b_3 = 0]$$

$$\text{De même } a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3 = 0 \rightarrow [b_1 = 0] \text{ et } [a_2 = 0]$$

$$\text{et aussi } a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0 \rightarrow a_3 = 0$$

$\Rightarrow$  Nous avons au final  $\underline{\rho} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{u}^* \rightarrow$  solution unique en déplacement et en contrainte (de part les CL exposés précédemment).

Comme on sait que le résultant des forces appliquées sur une structure est égal à  $\underline{R} = \int_{\partial \Omega} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS \rightarrow [\underline{\sigma}] = \underline{P}_a$ .



De part les conditions aux limites que l'on impose on peut donc en conclure ~~conclure~~ que  $P$  et  $F$  sont des pressions et donc que leur unité est le Pa.

Pour finir, on voit que l'on étudie le cas d'une barre encastrée en l'une de ses extrémités et soumise à 2 forces en une autre extrémité.

Aux vu de ces forces, on peut en conclure que nous avons mécaniquement une flexion composée (= flexion complexe).

2- On considère le champs de contrainte suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) = \sigma_{xx}(x, y) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{xy}(x, y) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

On considère une structure pour laquelle la dimension sur  $x$  est grande devant les deux autres, justifiant qu'on ne prenne en compte a un moment normal que sur  $x$  (soit  $\sigma_{xx}$ ).  $\rightarrow \sigma_{xx} \gg \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  ~~car~~

Pour ce qui est des composantes selon  $z$ , on peut considérer de même que les déformations subies par la poutre sont dans le plan  $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  et donc pour la même raison que les contraintes  $\sigma_{xz}, \sigma_{xy}$  sont nulles (négligées).

On obtient donc la forme des ci-dessus, ne dépendent pas de la variable  $z$  pour les mêmes raisons (problème ~~ne dépendant q~~ dans le plan  $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  ~~car~~ pas dépendant de la dimension  $z$ ).

On sait que pour conduire à un champs statiquement admissible, le champs de contrainte doit vérifier :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 & (i) \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} = 0 & (ii) \end{cases}$$

On doit donc avoir :

$$\rightarrow \text{car } \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

$$\rightarrow \left[ \sigma_{xx} = \phi_{,y} \text{ et } \sigma_{xy} = \phi_{,x} \text{ tel que } \phi_{,xx,x} + \sigma_{xy,y} = \phi_{,xy} - \phi_{,xy} = 0 \right]$$

$\rightarrow$  On a donc bien le champs de contrainte entièrement décrit par les dérivées premières d'une fonction scalaire  $\phi(x, y)$ .

$$\rightarrow \text{De même, de part (ii), on a } \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(y) \right]$$



Pour finir, sur  $S_h$  nous avons  $\underline{\sigma}(x) \cdot \underline{m}(x) = \underline{0}$  soit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yx} = 0 \\ \sigma_{xy} + \sigma_{yy} = 0 \end{cases} \rightarrow \sigma_{xy} = 0 \Rightarrow -\phi_{,x} = 0$$

$$\rightarrow \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in SL \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} (x, y = \pm h/2) = 0 \right]$$

3. On considère  $\phi(x, y) = ax + by + cxy^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = b + 2cxy \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -a - 2cxy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(x) = \begin{pmatrix} b+2cxy & -a-2cxy & 0 \\ -a-2cxy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Pour être solution du problème, ce champ de contraintes doit vérifier les CL :

- $\underline{\sigma}(x) \cdot \underline{m}(x) = \underline{0} \quad \forall x \in S_h \cup S_e$

en considérant la CL sur  $S_h$  :  $\underline{m}(x) = \pm e_y$ ,  $y = \pm h/2$ .

$$\rightarrow \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{m}(x) = \begin{pmatrix} -a-2cxy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (-a + 2cx \frac{h}{2})(\pm 1) = 0 \\ \boxed{2chx - a = 0} \\ (-a - 2cx \frac{h}{2})(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

Les relations sont  $\forall x \in S_h$  donc  $a=0$  et  $ch$  quelconque pour le moment.

- en considérant la CL sur  $S_e$  :  $\underline{m}(x) = \pm e_z$

→ vérifiée  $\forall x, y$ .

- CL en  $S = \emptyset$  :  $\underline{\sigma}(x) \cdot \underline{m}(x) = p_x \underline{e}_x + p_y \underline{e}_y \quad \forall x \in S_0 \rightarrow x=0, y, z \text{ quelconque}$   
 $\underline{m}(x) = -\underline{e}_x$



$$\rightarrow \begin{vmatrix} -b - 2cy \times 0 \\ a + 2cy \times 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p \\ F \\ 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow b = -p \quad \text{et } a = F$$

$$\bullet \operatorname{div} \vec{u}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 2cy - 2cx = 2c(y - x) = 0.$$

$\rightarrow$  Etude des CL qui m'interessent  
On suppose un peu et on passe à la suite



4- ~~Ex~~ D'après la loi de comportement en forme inverse:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x) = \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}(x) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}(x)) \quad \text{on a pour le champ des déformations:}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \left( \frac{P}{eh} - 12 \frac{Fxy}{eh^3} \right) & \frac{(1+\nu)}{E} \left( \frac{3F}{2eh} \left( \frac{4y^2}{h^2} - 1 \right) \right) & 0 \\ \frac{(1+\nu)}{E} \left( \frac{3F}{2eh} \left( \frac{4y^2}{h^2} - 1 \right) \right) & -\frac{\nu}{E} \left( \frac{P}{eh} - 12 \frac{Fxy}{eh^3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \left( \frac{P}{eh} - 12 \frac{Fxy}{eh^3} \right) \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Pour conduire à une solution, il faut que le champs de déplacement associé à ce champ de déformations linéarisées.

Ainsi, il faut vérifier les équations de compatibilité, qui en cas de problème plan sont vérifiées si:

$$\rightarrow [E_{11,22} - 2E_{12,12} + E_{22,11} = 0] \text{ qui est une forme particulière de l'équation de Beltrami. } \Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \Sigma_{,i,j} + \rho_0 \left[ f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} p_{,s,s} \right] = 0$$

$L = \ln \sigma$

réécrite en fonction de  $\epsilon$ .

On a donc ici des termes de dérivées secondes. ~~On voit que les termes dans  $\epsilon$  sont d'ordre 1 au maximum  $\epsilon$  qui sont d'ordre 1 vont disparaître.~~ <sup>donc</sup>  $(E_{11,22} - E_{22,11} = 0)$

Il se reste donc qu'à vérifier  $E_{12,12} = 0$ .

$$\rightarrow E_{11,22} = E_{22,11} = E_{12,12} = 0 \text{ et donc l'égalité est bien vérifiée.}$$

$\rightarrow$  On en conclue que le champs de déplacement associé existe donné par

$$[\underline{\underline{\epsilon}}(x)] = \frac{1}{2} [\nabla \underline{\underline{u}} + {}^t \nabla \underline{\underline{u}}]$$

5- Si  $F = 0$ :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \frac{P}{eh} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \frac{P}{eh} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \frac{P}{eh} \end{pmatrix} (x, y, z).$$

Nous sommes dans le cas où l'hypothèse des petites perturbations est admise.

Nous avons ainsi:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(x) = \frac{1}{2} [\nabla \underline{\underline{u}}(x) + {}^t \nabla \underline{\underline{u}}(x)]$$



$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial x} &= \frac{p}{Ech} \rightarrow \psi_x(x, y, z) = \frac{p x}{Ech} + f_1(y, z) \rightarrow \psi_x(x, y, z) = \frac{p x}{Ech} + f_1(y, z) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} &= -\frac{\gamma p}{Ech} \rightarrow \psi_y(x, y, z) = -\frac{\gamma p y}{Ech} + f_2(x, z) \rightarrow \psi_y(x, y, z) = -\frac{\gamma p y}{Ech} + f_2(x, z) \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial z} &= -\frac{\gamma p}{Ech} \rightarrow \psi_z(x, y, z) = -\frac{\gamma p z}{Ech} + f_3(x, y) \rightarrow \psi_z(x, y, z) = -\frac{\gamma p z}{Ech} + f_3(x, y) \end{aligned}$$

On a comme CL:

$$\psi_x(x=L, y, z) = 0 \quad \forall x \in SL \rightarrow x=L.$$

$$\psi_x(x=L, y, z) = \frac{pL}{Ech} + f_1(y, z) = 0 \rightarrow f_1(y, z) = -\frac{pL}{Ech}.$$

$$\psi_y(x=L, y, z) = -\frac{\gamma p y}{Ech} + f_2(x=L, z) = 0 \rightarrow +\gamma \ll 1 \Rightarrow 0.$$

$$\psi_z(x=L, y, z) = -\frac{\gamma p z}{Ech} + f_3(x=L, y) = 0 \quad +\gamma \ll 1 \Rightarrow 0.$$

On ne peut pas le champs peut être solution dans le cas où  $F=0$  si on a de plus  $\gamma \ll 1$  de telle sorte que la condition d'encastrement soit vérifiée.

On a donc  $\psi_x = \frac{p}{Ech} (x-L).$

$$\psi_y = f_2(x, z) = 0.$$

$$\psi_z = f_3(x, z) = 0.$$

→ solution unique comme à l'attendue.

Dans le cas  $x=0$  → on a un déplacement négatif sur  $(-x)$ , soit un déplacement. Néanmoins, contrairement à ce à quoi on pourrait s'attendre, la solution (ici) n'aime pas de compression sur un déplacement en  $y$ .

→ la solution obtenue n'est sans doute pas la bonne. Nous devons être en état d'aboutir à un déplacement sur  $y$  tel que l'on ait un  $d$ .

Or, car que simplifier par  $F=0$

Le champs ainsi défini entraîne  $\gamma \ll 1$  et donc

$$\psi_x = \frac{p(x-L)}{Ech}, \quad \psi_y = f_2(x, y) \quad \& \quad \psi_z = f_3(x, y).$$



Pour conclure, le champs de déplacement et donc la solution au problème n'est plus dans le cas  $F = 0$ .

En effet, on voit qu'il nous reste des ~~constantes~~ indéterminées  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

De même, on a pas d'indication sur un <sup>fréquent</sup> potentiellement déplacement sur  $x$  contrairement à ce que l'on aurait pu penser.

En fait, on voit que poser  $F=0$  a en fait  $E_{12}=0$  et donc que le déplacement ne m'aboutit pas à une solution satisfaisante du problème (on n'en connaît pas toutes les composantes).

Pour ce qui est du déplacement  $u_x$ , on voit qu'il est négatif en  $x=0$ , ce qui correspond bien à un état de compression sur  $x$ .

On devrait s'attendre dans le cas de la solution à avoir un déplacement  $h_y$  qui en  $x=0$  est positif suivant  $o_y$  (en  $x=\frac{h}{2}$ ).