MU5MEF39 : Optimisation en Aérodynamique

A. Belme

22 décembre 2021

Anca Belme : enseignant-chercheur Sorbonne Université

Thématiques de recherche : adaptation de maillage, quantification des incertitudes, écoulements fortement compressibles

Coordonnées : Institut Jean le Rond d'Alembert, T. 55-65, 4ème étage 406, email : belme@dalembert.upmc.fr

Pourquoi l'optimisation ?

• L'optimisation aérodynamique est devenue une composante indispensable de toute conception aérodynamique au cours des 60 dernières années, avec des applications aux aéronefs, voitures, trains, ponts, éoliennes, écoulement interne des tuyaux et cavités, entre autres, et est donc pertinente dans de nombreuses facettes de la technologie moderne.

Pourquoi l'optimisation ?

• Entre aujourd'hui et 2030, il y aura une demande mondiale estimée pour environ 27 000 nouveaux avions de passagers d'une valeur potentielle de 2,3 billions de livres sterling. Ces avions doivent se conformer à l'agenda de recherche stratégique développé par le Conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe (ACARE) qui vise à faire respecter des objectifs d'émission stricts - les émissions de CO2 par passager-kilomètre doivent être réduites de 75%, les émissions de NOx de 90% et le bruit perçu de 65%, tous relatifs à l'an 2000 [1] ⇒ nouveaux matériaux légers et flexibles, par ex. composites, avec une configuration aérodynamique hautement optimisée des avions ;

⇒ L'impact de l'aviation sur l'environnement est désormais un facteur déterminant majeur affectant l'aérodynamique des futurs avions.

1. European Commission. Flightpath 2050 Europe's Vision for Aviation

Un peu d'histoire

Optimisation de forme aérodynamique au fil des ans ....

- Les premiers efforts concernent les travaux de J.J. Lions et O. Pironeau (UPMC-SU)
- Différences finies chez NASA (Ray Hicks, James Reuther)
- Utilisation des adjoints par Jameson (éqn. potentielle en 1988, Euler en 1993-94, NS-1998)
- Développement initial important dans la communauté des mathématiques appliquées
- Formulation adjoint inséré dans des multiples codes dans le monde
- Multi-physique

Un peu d'histoire

L'optimisation est une discipline complèxe à l'interface :

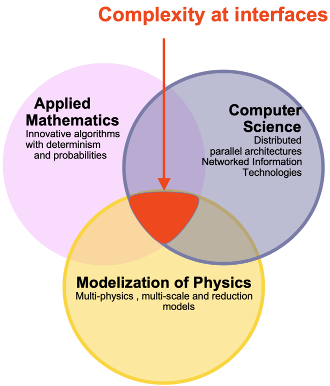

Figure – Image from Integrated Multiphysics Simulation and Optimization course, Laajavuori, 2009

Formalism général

Définition générale

Trouver $v^* \in K \subset V$ tel que

$$v^* = argmin_v J(v)$$

avec :

- v^* l'optimum récherchée (local ou global), les variables de design
- K sous-espace de solutions admissibles de V avec V **dimension finie** (par exemple $\mathbb{R}^n$) ou **infinie** (un espace de Hibert ou Banach)
- $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'intérêt (ou fonction cout, quantité d'intérêt) qu'on souhaite optimiser. Par exemple : un coefficient aérodynamique, la vorticité dans un sillage, etc ...

Formalism général

Le problème d'optimisation peut-être :

- avec contrainte : $g_j(v) = 0$ (égalité), $h_j(v) < 0$ (inégalité) ou $v_j < v < v_i$ (paramétrée)
- sans contrainte

Remarque : Nous considérerons principalement des problèmes de minimisation mais il suffit de changer le signe pour obtenir un problème de maximisation.

Formalism général

La plupart des méthodes d'optimisation utilisent une *procédure itérative*

$$\downarrow$$

Le role de la **simulation numérique** est fondamental :

• permet une meilleure prise en compte des besoins et des contraintes ainsi qu'une modification rapide des paramètres à moindres coûts
• permet, par conséquent, de tester des concepts innovants plus facilement
• Un des atouts majeurs reste l'utilisation de la simulation comme moyen de **validation** avant d'effectuer les tests physiques. Cela permet de limiter le nombre de prototypes physiques à produire et de faire des économies de temps et d'argent.

Formalism général

L'optimisation est le processus permettant d'obtenir la solution la plus appropriée à un problème donné, alors que pour un problème spécifique, une seule solution peut exister, et pour d'autres problèmes, il peut potentiellement exister de multiples solutions. [2]

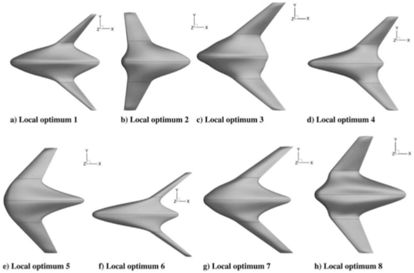

Figure – Optima locaux trouvés dans une optimisation des ailes mixtes [Chernukhin AIAA 2013]

2. O. Chernukhin, D.W. Zingg, Multimodality and global optimization in aerodynamic design, AIAA J. 51 (6) (2013) 1342–1354.

Objectif de ce module

L'objectif de cette UE est vous familiariser avec les enjeux **théoriques** et **numériques** associés aux problèmes de contrôle optimal.

Ce cours, d'une part, fournit les **outils d'analyse de base** pour les recherches futures, tandis que d'autre part, il donne **un aperçu des techniques numériques** afin qu'elles puissent être utilisées efficacement pour résoudre des problèmes pratiques en aérodynamique.

Contenu du cours

1. Rappels généraux : définition d'un problème d'optimisation, convexité, espace de solutions, existence et unicité solution locale et globale
2. Optimisation avec et sans contrainte : algorithmes de résolution, Lagrangien et multiplicateurs
3. Problème duale : formalisme adjoint continue et discret
4. Analyse des sensibilités et applications
5. Optimisation de maillage
6. Optimisation sous incertitudes*

Les prérequis pour ce cours sont : éléments d'algèbre linéaire, méthodes numériques pour la mécanique , méthodes des volumes et éléments finis, mécanique de fluides compressible et incompressible, éléments de probabilité et statistiques.

Références bibliographyque : voir moodle et à travers les slides

Organisation

• L'UE est divisé en CM/TD-TP et Projet. Chaque séance dure 4h sur un créneaux hebdomadaire : vendredi 13h45-17h45

• L'évaluation : CC/40 + Projet/60. Dans CC : des questionnaires au fil de l'eau.

• Outils : moodle, wooclap, QCM

Organisation

Outils numériques :

- Python
- Code de simulation multi-physique SU2[3] : principalement le langage C++ et des script Python
- Visualisation de la solution : ParaView[4]
- Maillage : gmsh[5]

3. https ://su2code.github.io/
4. https ://www.paraview.org/download/
5. https ://gmsh.info/

Pourquoi SU2 ?

SU2[6] est un outil (open-source) de simulation numérique initié et développé (C++ et Python) a l'Université de Stanford par F. Palacios et J. Alonso.

Il s'agit d'un des outils le plus utilisé et robuste en mécanique de fluides !

SU2 : • résout numériquement des EDP (tel que Navier-Stokes et Euler) sur des maillages non-structurés pour des problèmes stationnaires et/ou dépendantes du temps
• a un outil d'optimisation de forme (design) intégrée
• s'applique a des problèmes d'aérodynamique (compressible et incompressible) ainsi que multi-physique (simulations des surfaces libres eau/air, plasmas, etc...)

6. https ://su2code.github.io/

Chap 1 : Introduction à l'optimisation : exemples

Commencons par quelques exemples de problèmes d'optimisation :

Problème de Didon -D'après Ciarlet, il s'agit d'un des plus vieux problèmes d'optimisation, résolu par Zénodore environ deux siècles avant notre ère et dont la démontration complète est due à Weierstrass vers la fin du dix-neuvième siècle.

Virgile raconte dans l'Enéide que lorsque la reine Didon fonda la ville de Carthage, il ne lui fut alloué comme superficie que ce "que pourrais contenir une peau de boeuf". Elle découpa alors cette peau en fines lanières et encercla de cette cordelette sa future ville situé au bord de la mer. La question était donc de trouver la plus grande surface possible s'appuyant sur une droite (le rivage) et de frontière terrestre de longuer donnée.

La réponse est un demi-disque. En termes mathématiques un peu simplifiés, le problème est de trouver la courbe de longuer fixée $l \geq 0$ qui enclot avec le segment reliant ses deux extrémités l'aire maximum. Autrement dit, on résout

$$\sup \int_0^\xi y(x)dx$$

sous les contraintes :

$$\xi \geq 0, y(0) = 0, \int_0^\xi \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = l$$

où ξ est l'extrémité du segment et $y(x)$ la position de la courbe au dessus du point x du segment.

Un autre exemple : contrôle d'une membrane.
On considère une membrane élastique, fixée sur son contour, et se déformant sous l'action d'une force f. Ce problème est modélisé par :

$$\begin{cases} -\Delta u = f + v, & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où u est le déplacement vertical de la membrane et v est une force de contrôle à notre disposition. Ce contrôle agit sur une partie ω de Ω avec une intensité limitée. On définie donc l'ensemble des contrôles admissibles :

$$K = \{v(x) \text{ tel que } v_{min} \leq v \leq v_{max} \text{ dans } \omega \text{ et } v = 0 \text{ dans } \Omega - \omega\}$$

où v_{min} et v_{max} sont deux fonctions données.

On cherche le contrôle v qui rend le déplacement u aussi proche que possible d'un déplacement désiré u_0, et qui soit d'un coût modéré. On définit donc un critère :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u - u_0|^2 + c|v|^2)dx,$$

avec $c > 0$. Le problème de contrôle s'écrit alors :

$$\inf_{v\in K} J(v)$$

Il reste à préciser le choix des espaces fonctionnels pour v et les autres données de ce problème.

1.1 Définitions et notations

Soit V un espace vectoriel normé (de dimension finie ou infinie), $K \subset V$ l'ensemble des éléments admissibles du problème (K définie les contraintes s'exerçant sur le problème considéré).
Soit la fonction côut ou fonction objectif $J : K \to \mathbb{R}$.
Le problème étudié sera noté :

$$\inf_{v \in K \subset V} J(v)$$

($\exists ? v^* \in K$ tel que $J(v^*) = \inf_{v \in K \subset V} J(v)$).

Autre notation (si on suppose que le min est atteint) :

$$\min_{v \in K \subset V} J(v)$$

1.1 Définitions et notations

Minimum local

On dit que u est un minimun local de J sur K si et seulement si :

$$u \in K \;\; \text{et } \exists \delta > 0, \forall v \in K, \; \| u - v \| < \delta \Rightarrow J(v) \geq J(u)$$

Minimum global

On dit que u est un point de minimum global de J sur K si et seulement si :

$$u \in K \text{ et } J(v) \geq J(u), \; \forall v \in K$$

1.1 Définitions et notations

Infimum

On appelle infimum de J sur K $\inf_{v \in K} J(v)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ des constantes qui minorent J sur K. Si J n'est pas minorée sur K, alors l'infimum vaut $-\infty$.
Une **suite minimisante** de J dans K est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n \in K, \forall n \;\text{ et } \quad \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in K} J(v)$$

Par la définition même de l'infimum de J sur K il existe toujours des suites minimisantes.

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

L'existence d'un minimum en dimension infinie n'est absolument pas garantie . Cela est liée au fait qu'en dimension infinie les fermés bornés ne sont pas compacts !

Une classe particulières de problèmes, importantes en pratiques comme en théorie sont les problèmes de minimisation convexe.

Dans ce qui suit nous supposerons que V est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et d'une norme associée.

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Définition : *L'ensemble K est convexe ssi*

$$\forall v_1, v_2 \in K, \forall \alpha \in [0,1] : \quad \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2 \in K$$

Définition : *La fonction J est convexe si K est convexe et ssi*

$$\forall v_1, v_2 \in K, \forall \alpha \in [0,1] : \quad J(\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2) \leq \alpha J(v_1) + (1-\alpha) J(v_2)$$

f est strictement convexe si :

$$\forall v_1, v_2 \in K \; (v_1 \neq v_2), \forall \alpha \in]0,1[: \quad J(\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2) < \alpha J(v_1) + (1-\alpha) J(v_2)$$

Remarque : pour les fonctions convexes il n'y a pas de différence entre minima locaux et globaux

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Une notion plus restrictive de convexité :

Définition : *On dit qu'une fonction J définie sur un ensemble convexe K est fortement convexe si et seulement si* $\exists \alpha > 0$ *tel que :*

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8} \| u - v \|^2 .$$

On dit aussi que dans ce cas J est α-convexe.

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Le résultat suivant sera essentiel dans l'obtention d'un résultat d'existence d'un minimum en dimension infinie :

Proposition : Si J est convexe continue sur un ensemble K convexe fermé non vide, alors $\exists$ une forme linéaire continue $L\ inV'$ et une constante $\delta \in \mathbb{R}$ telles que :

$$J(v) \geq L(v) + \delta, \forall v \in K.$$

Si de plus J est fortement convexe sur K, alors $\exists \gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que :

$$J(v) \geq \gamma \mid\mid v \mid\mid^2 - \delta \ \forall v \in K.$$

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Théorème (existence d'un minimum, cas fortement convexe) : *Soit K un convexe fermé non vide d'un Hilbert V et J une fonction α-convexe continue sur K. Alors, il existe un unique minimum u de J sur K et on a :*

$$|| v - u ||^2 \leq \frac{4}{\alpha}[J(v) - J(u)], \ \forall v \in K.$$

En particulier, toute suite minimisante de J sur l'ensemble K converge vers u.

Il est possible de généraliser en grande partie ce résultat au cas de fonctions J qui sont seulement convexes. Cependant, la démonstration est bien plus complèxe .

1.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Théorème (existence d'un minimum, cas convexe) *: Soit K un convexe fermé non vide d'un Hilbert V et J une fonction convexe continue sur K qui est "infinie à l'infinie" sur K, c.a.d :*

$$\lim_{\|u_n\| \to +\infty} J(u_n) = +\infty, \ \forall (u_n)_{n \geq 0} \text{ suite dans } K$$

Alors il existe un minimum de J sur K.

Remarque : Ce résultat donne l'existence mais pas l'unicité

Chap 2 : Conditions d'optimalité et Algorithmes d'optimisation

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressé a l'existence de minimium . Nous alons maintenant chercher des conditions nécessaires et parfois suffisantes de minimalité. Ces conditions d'optimalité seront souvent utilisées pour essayer de calculer un minimum .

L'idée générale des conditions d'optimalité est la même que celle qui, lorsque l'on calcule l'extremum d'une fonction sur $\mathbb{R}$, consiste à écrire que **sa dérivée doit s'annuler**.

On va exprimer ces conditions à l'aide des dérivées prémières ou secondes. Nous obtiendrons surtout des conditions nécessaires d'optimalité, mais l'utilisation de la dérivée seconde ou l'introduction de l'hypothèse de convexité permettront aussi d'obtenir des conditions suffisantes.

Chap 2 : Conditions d'optimalité et Algorithmes d'optimisation

Remarque élémentaire : Si x_0 est un point de minimum local de J sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (J dérivable sur $[a, b]$), alors on a

$$J'(x_0) \geq 0, \text{ si } x_0 = a \quad J'(x_0) = 0 \text{ si} x_0 \in]a, b[, \quad J'(x_0) \leq 0 \text{ si } x_0 = b$$

Preuve :
Si $x_0 \in [a, b[$, soit $x = x_0 + h$ avec $h > 0$ petit. Alors $J(x) \geq J(x_0)$, d'où $J(x_0) + hJ'(x_0) + o(h) \geq J(x_0)$ ce qui donne $J'(x_0) \geq 0$ en divisant par h (avec h petit). De même pour $x = x_0 - h$ on obtient $J'(x_0) \leq 0$ pour $x_0 \in]a, b]$. De manière similaire (Taylor ordre 2) on peut prouver que $J''(x_0) \geq 0$ pour $x_0 \in]a, b[$ et avec J' dérivable en x_0.

Cette stratégie tient compte des contraintes ($x_0 \in [a, b]$) pour tester la minimalité de x_0 dans des directions particulières dites **directions admissibles** ($x_0 \pm h$) .

Chap 2 : Conditions d'optimalité et Algorithmes d'optimisation

C'est exactement cette stratégie qu'on va adopter dans ce qui suit.

Commencons par rappeler quelques **définitions de dérivabilité**.

2.1 Rappels de différentiabilité

Pour rappel : V espace de Hilbert, J fonction continue a valeurs dans $\mathbb{R}$.

On introduit d'abord la notion de dérivée prémière de J car elle est nécessaire pour écire des conditions d'optimalité. Lorsqu'on a plusieurs variables la "bonne" notion théorique de dérivabilité, appelée différentiabilité au sens de Fréchet, est donnée par la définition suivante :

Définition *: On dit que la fonction J définie sur un voisinage de $u \in V$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable (ou différentiable)* ***au sens de Fréchet*** *en u s'il existe une forme linéaire continue sur V, $L \in V'$, telle que :*

$$J(u+w) = J(u) + L(w) + o(w), \quad avec \ \lim_{w \to 0} \frac{| \, o(w) \, |}{\|w\|} = 0$$

On appelle L la dérivée (ou différentielle, ou le gradient) de J en u et on note $L = J'(u)$.

2.1 Rappels de différentiabilité

Remarque : La définition précédente est valable aussi si V est un espace de Banach. Cependant, si V est un espace de Hilbert on peut utiliser le Th. de répresentation de Riesz : $\exists$ un unique $p \in V$ tel que $\langle p, w \rangle = L(w)$. On a alors :

$$J(u+w) = J(u) + \langle p, w \rangle = J(u) + L(w) + o(w)$$

En pratique il suffit souvent de déterminer $L = J'(u)$ au lieu de chercher une expression explicite de p (il est plus facile aussi).

Exercice : Soit a une forme bilinéaire symétrique continue sur VxV. Soit L une forme linéaire continue sur V. On pose $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$. Montrer que J est dérivable sur V et que $\langle J'(u), w \rangle = a(u,w) - L(w)$ pour tout $u, w \in V$.

2.1 Rappels de différentiabilité

Il existe d'autres notions de différentiabilité, plus faible que celle au sens de Fréchet. Par exemple :

Définition *: On dit que la fonction J définie sur un voisinage de $u \in V$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable (ou différentiable)* ***au sens de Gâteaux*** *en u s'il existe $L \in V'$, telle que :*

$$\forall w \in V \quad \lim_{\delta \to 0^+} \frac{J(u + \delta w) - J(u)}{\delta} = L(w)$$

Remarques :

• La Fréchet différentiabilité implique Gâteaux différentiabilité, mais la reciproque est fausse.

• La généralisation de ces résultats pour la dérivée seconde est imédiate.

• Par la suite l'appélation dérivable signifiera dérivable au sens de Fréchet.

2.1.2 Fonctions convexes dérivables

Enonçons maintenant les propriétés de base des fonctions convexes dérivables :

Propriété : Soit J une application différentiable de V dans $\mathbb{R}$*. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$J \text{ est convexe sur } V,$$

$J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), u - v \rangle, \ \forall u, v \in V$
$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq 0, \ \forall u, v \in V$

Propriété : Soit J une application différentiable de V dans $\mathbb{R}$ *et* $\alpha > 0$*. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$J \text{ est } \alpha \text{ convexe sur } V,$$

$J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), u - v \rangle + \frac{\alpha}{2} \mid\mid v - u \mid\mid^2, \ \forall u, v \in V$
$\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq \alpha \mid\mid v - u \mid\mid^2, \ \forall u, v \in V$