Eléments de Corrigé

Ecrit intermédiaire 3A006 - Mars 2017

## Exercice

### 1. Conditions aux limites associées aux chargements

Sur $S_0$ et $S_\ell$ : Chargement 1 Contact sans frottement avec un bâti

le bâti est fixe en $S_0$ ($x_3=0$) et mobile en $S_\ell$ ($x_3=\ell$) avec un déplacement normal à la face donné $U_3^d$.

les déplacements transverses sont autorisés mais ne sont pas connus ici

écriture : $\begin{cases} \underline{u}\cdot\underline{n} = \underline{u}^{bati}\cdot\underline{n} & \text{avec } \underline{n} = \pm\underline{e}_3 \\ \underline{\sigma}_T = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} - \sigma_N\,\underline{n} = \underline{0} & \text{et } \sigma_N = (\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n})\cdot\underline{n} \end{cases}$

soit sur $S_0$ : $\begin{cases} u_3(x_1,x_2,0) = 0 = u_3^{bati} \\ \sigma_{13}(x_1,x_2,0) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1,x_2,0) = 0 \end{cases}$ $\forall (x_1,x_2) / 0 \leq x_1^2+x_2^2 < R$

sur $S_\ell$ $\begin{cases} u_3(x_1,x_2,\ell) = U_3^d \\ \sigma_{13}(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1,x_2,\ell) = 0 \end{cases}$ ou en cylindrique $\begin{cases} u_z(r,\theta,\ell) = U_3^d \\ \sigma_{rz}(r,\theta,\ell) = 0 \\ \sigma_{\theta z}(r,\theta,\ell) = 0 \end{cases}$ $\forall\, 0 \leq r < R$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Chargement 2 : contact parfait avec un bâti fixe en $x_3=0$ et mobile en $x_3=\ell$ (selon $\underline{e}_3$). Les déplacements transverses selon $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont bloqués dans ce cas (d'où la déformée)

soit $\underline{u} = \underline{u}^{bati}$

et donc sur $S_0$ $\begin{cases} u_1(x_1,x_2,0) = 0 \\ u_2(x_1,x_2,0) = 0 \\ u_3(x_1,x_2,0) = 0 \end{cases}$ $\forall (x_1,x_2)$ ou $\begin{cases} u_r(r,\theta,0) = 0 \\ u_\theta(r,\theta,0) = 0 \\ u_z(r,\theta,0) = 0 \end{cases}$ $\forall r\ \forall\theta$

et sur $S_\ell$ $\begin{cases} u_1(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ u_2(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ u_3(x_1,x_2,\ell) = U_3^d \end{cases}$

Par ailleurs dans les deux chargements, la surface latérale $S_e$ est libre d'effort soit

$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{0}$ avec $\underline{n} = \underline{e}_r$ soit $\begin{cases} \sigma_{rr}(r=R,\theta,z) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r=R,\theta,z) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=R,\theta,z) = 0 \end{cases}$ $\forall\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\forall z / 0 < z < \ell$

Chargement 1

$\mathcal{U}ad = \{ \underline{v}$ régulier / $v_3(x_1,x_2,0) = 0$ ; $v_3(x_1,x_2,\ell) = u_3^d \}$

$\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ regulier / $\underline{div}\, \underline{\underline{\tau}} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ sur $S_e$ et $\underline{\tau}_t = \underline{0}$ sur $S_0$ et $S_\ell \}$

Chargement 2 Champs statiquement et cinematiquement admissibles

$\mathcal{U}ad = \{ \underline{v}$ regulier / $\underline{v} = \underline{0}$ sur $S_0$ $\underline{v} = u_3^d \underline{e}_3$ sur $S_\ell \}$

$\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ regulier / $\underline{div}\, \underline{\underline{\tau}} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ ; $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ sur $S_e \}$

(*)

2. Type des problèmes et unicité de la solution

- Chargement 1 : problème de type 3.

sur aucune surface les 3 composantes du déplacement sont connues (pas type 1) et les 3 composantes des efforts ne sont pas connues sur tout le bord (pas de type 2)

- Chargement 2 - probleme de type 1

les 3 composantes du déplacement sont connues sur $S_0$ et $S_\ell$

(*) Ces deux problèmes sont réguliers. Sur chaque surface sont données localement 3 composantes soit des déplacements, soit des efforts, soit mixtes.

- Chargement 1 : la solution existe en déplacement et en ~~efforts~~ contraintes.

Elle est unique en contrainte, mais pas en déplacement. La solution en déplacement est défini à un déplacement de corps rigide près compatible avec les conditions aux limites cinematiques. Soit donc :

$\underline{u}$ et $\underline{u}^*$ deux solutions $\Rightarrow$ $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\rho}$ déplacement de corps rigide

tel que $\rho_3 = 0$ sur $S_0$ et sur $S_\ell$ $\left( \rho_3(x_1,x_2,0) = \rho_3(x_1,x_2,\ell) = 0 \right)$

d'où $\underline{\rho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x} = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases} + \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{cases} a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 \\ a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3 \\ a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases}$

avec $\rho_3(x_1,x_2,0) = 0 \Rightarrow$ $\quad \forall x_1 \forall x_2$

$\rho_3(x_1,x_2,\ell) = 0 \Rightarrow$ $a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0$ $\qquad a_3 = 0 \quad b_1 = b_2 = 0$

de sorte que $\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}^* = \begin{cases} a_1 - b_3 x_2 \\ a_2 + b_3 x_1 \\ 0 \end{cases}$ avec $a_1, a_2, b_3$ quelconque

la translation selon $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ n'est pas bloquée, ni la rotation autour de $\underline{e}_3$

Chargement 2 : le problème étant de type 1, le déplacement et les contraintes sont uniques :

$\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\varrho}$ avec $\underline{\varrho} = \underline{0}$ sur $S_0$ et sur $S_e$

d'où par exemple sur $S_0$

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 - b_3 x_2 = 0 & \Rightarrow & a_1 = b_3 = 0 \\ a_2 + b_3 x_1 = 0 & & a_2 = 0 \\ a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_2 = 0 & \Rightarrow & a_3 = 0 \quad b_1 = b_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a} = \underline{0} \\ \underline{b} = 0 \end{array}$$

d'où $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{0}$ unicité en déplacement

et d'où $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^*$ par la loi de comportement

## Problème : Barreau sous sollicitations diverses

### 1. Equations de compatibilité

- les équations de compatibilité traduisent l'existence d'un champ de déplacement associé à un champ de déformation donné, soit il existe $\underline{u}$ tel que $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$ avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donné

(ce sont des conditions d'intégrabilité)

- En 3D elles s'écrivent

$$\sum \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqr} \frac{\partial^2 \varepsilon_{jq}(\underline{x})}{\partial x_k \partial x_r} = 0 \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_0 \quad i = 1,2,3 \quad p = 1,2,3$$

6 équations locales scalaires

- Champ de contraintes planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

avec $\varepsilon_{33}(x_1,x_2) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})(x_1,x_2)$

d'apres la loi de Hooke

- Equations de compatibilité en contraintes planes

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,22} - 2\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = 0 \\ \varepsilon_{33,11} = 0 \ (*) \qquad \forall (x_1,x_2) \\ \varepsilon_{33,22} = 0 \ (**) \\ \varepsilon_{33,12} = 0 \ (***) \end{cases}$$

les deux autres sont automatiquement satisfaites

(*) provient de $\underbrace{\varepsilon_{11,33}}_{0} - 2\underbrace{\varepsilon_{13,13}}_{0} + \varepsilon_{33,11} = 0 \rightarrow \varepsilon_{33,11} = 0$

car $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x_1,x_2)$ car $\varepsilon_{13} = 0$

(**) provient de $\varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{22,33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33,22} = 0$

car $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x_1,x_2) \Rightarrow \varepsilon_{22,33} = 0$

$\varepsilon_{23} = 0$

(***) provient de $\varepsilon_{33,12} - \varepsilon_{31,32} - \varepsilon_{32,31} + \varepsilon_{12,33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33,12} = 0.$

car $\varepsilon_{31} = 0 = \varepsilon_{32}$ et $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(x_1,x_2) \Rightarrow \varepsilon_{12,33} = 0$

Par ailleurs $\varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{13,12} - \varepsilon_{12,13} + \varepsilon_{32,11} = 0$ est automatiquement satisfaite

car $\varepsilon_{11,3} = 0$ $(\varepsilon_{11}(x_1,x_2))$ $\varepsilon_{13} = 0$

et $\varepsilon_{12,3} = 0$ $(\varepsilon_{12}(x_1,x_2))$. $\varepsilon_{23} = 0$

et $\varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{23,21} - \varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{13,22} = 0$ automatiquement satisfaite

car $\varepsilon_{22,3} = 0$ $(\varepsilon_{22}(x_1,x_2))$ $\varepsilon_{12,3} = 0$ $(\varepsilon_{12}(x_1,x_2))$

et $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

## 2. Fonction d'Airy

- Les equations d'equilibre (en absence de forces volumiques ici) et sous l'hypothèse des contraintes planes se réduisent à :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0 & \text{car } \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 & \text{et } \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

la 3e equation est automatiquemet satisfaite
car $\sigma_{13} = 0 = \sigma_{23} = \sigma_{33}$

les equations sont automatiquemet satisfaites si $\exists\, \varphi(x_1, x_2)$ telle que $\sigma_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ $\quad \sigma_{12} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$

et $\exists\, \psi(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{21} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

or $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ car $\underline{\underline{\sigma}}$ est symetrique d'où les fonctions $\varphi$ et $\psi$ doivent satisfaire la relation $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ soit $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$

cette relation est satisfaite, s'il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ |

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \qquad \psi(x_1, x_2) = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

de sorte que les equations d'equilibre sont satisfaites si il existe $\chi(x_1, x_2)$ telle que $\left.\right\}$ $\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_2}$ $\quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_1}$ $\quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_1}$

. le tenseur des contraintes doit ~~satisfaire~~ à un tenseur des déformations compatible et donc en injectant les expressions de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\chi$ et en exploitant la loi de comportement) dans les equations de compatibilité, on obtient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \chi_{,22} - \frac{\nu}{E} \chi_{,11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \chi_{,11} - \frac{\nu}{E} \chi_{,22} = \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11}$$

$$\varepsilon_{12} = -\left(\frac{1+\nu}{E}\right) \chi_{,12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{E}(\Delta \chi)$$

d'où en substituant dans les equations de compatibilité en contraintes planes . $\frac{1}{E} \chi_{,2222} - \frac{\nu}{E} \chi_{,1122} + 2\frac{(1+\nu)}{E} \chi_{,1212} + \frac{1}{E} \chi_{,1111} - \frac{\nu}{E} \chi_{,2211} = 0$

. $-\frac{\nu}{E} (\Delta \chi)_{,11} = 0$ $\quad$ . $-\frac{\nu}{E} (\Delta \chi)_{,12} = 0$

. $-\nu/E\, (\Delta \chi)_{,22} = 0$

Soit $\cdot \frac{1}{E}\left[ \chi_{,2222} + \chi_{,1111} + 2\,\chi_{,1122} \right] = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta(\Delta\chi)(x_1,x_2) = 0 \quad \forall (x_1,x_2)$$

et
$$\begin{cases} (\Delta\chi)_{,11} = 0 \\ (\Delta\chi)_{,22} = 0 \quad \forall (x_1,x_2) \\ (\Delta\chi)_{,12} = 0 \end{cases}$$

Si $\chi$ est une fonction du 3$^e$ degré par rapport à chacune de ses 2 variables $(x_1,x_2)$ alors :

$$\chi_{,1} = 3A x_1^2 + 2C x_1 x_2 + D x_2^2 + 2F x_1 + G x_2 + I$$

$$\chi_{,11} = 6A x_1 + 2C x_2 + 2F = \sigma_{22}$$

$$\chi_{,2} = 3B x_2^2 + C x_1^2 + 2D x_1 x_2 + G x_1 + 2H x_2 + J$$

$$\chi_{,22} = 6B x_2 + 2D x_1 + 2H = \sigma_{11}$$

$$\chi_{,12} = 2C x_1 + 2D x_2 + G = -\sigma_{12}$$

de sorte que $\Delta\chi = 6A x_1 + 6B x_2 + 2C x_2 + 2D x_1 + 2F + 2H$

et donc $(\Delta\chi)_{,1} = 6A + 2D \quad \Rightarrow (\Delta\chi)_{,11} = 0$

$(\Delta\chi)_{,2} = 6B + 2C \quad \Rightarrow (\Delta\chi)_{,22} = 0$

$(\Delta\chi)_{,12} = 0$

et donc $\Delta(\Delta\chi) = 0$ les 4 équations sont bien satisfaites

3 Premier choix $\chi^1 = H x_2^2 + I x_1 + J x_2 + H$.

(soit $A = 0 = B = C = D = F = G$)

3.1 Calcul du tenseur des contraintes

$\sigma_{11} = \chi_{,22} = 2H$

$\sigma_{22} = \chi_{,11} = 0$

$\sigma_{12} = \chi_{,12} = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{e_1}\underline{e_2}\underline{e_3}} = 2H\,(\underline{e_1} \otimes \underline{e_1}) = \sigma_1\,(\underline{e_1} \otimes \underline{e_1})$$

il s'agit d'un chargement de traction uniaxiale selon $\underline{e_1}$ d'intensité $\pm\,\sigma_1$ exercée sur les faces $x_1 = L$ et $x_1 = 0$, les autres faces étant libres d'efforts.

$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$ , $\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$ ; $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$

soit $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + f_1(x_2,x_3) \\ u_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + f_2(x_1,x_3) \\ u_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + f_3(x_1,x_2) \end{cases}$ avec $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$

une solution particulière s'obtient avec $f_1 = f_2 = f_3 = 0$

De sorte que la forme générale d'un champ de déplacement solution est

$$\begin{cases} \underline{u}^1 = \underline{u}^{1\,part} + \underline{e} \quad \underline{e} \text{ déplacement de corps rigide} \\ \text{et } \underline{u}^{1\,part} = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 \underline{e}_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 \underline{e}_3 \\ \underline{e} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x} \quad \text{avec } \underline{a}, \underline{b} \text{ quelconques constants} \end{cases}$$

le champ est solution du pb initial de traction uniaxial, il n'est pas unique ($\underline{a}$, $\underline{b}$ sont quelconques). On retrouve le résultat annoncé au type 2 du problème

- Condition d'encastrement en $S_0$ ne peut pas être satisfaite en effet

$$\underline{u}^1 = \begin{cases} \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 \\ -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3 \\ -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases}$$

sur $S_0$ $x_1 = 0 \Rightarrow u_1^1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2$
$u_2^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 - b_1 x_3$
$u_3^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$

pour que la condition soit satisfaite, il faudrait que

$u_1^1(x_1=0, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow a_1 = b_2 = b_3 = 0$ permet de vérifier $u_1^1 = 0$

$u_2^1(x_1=0, x_2, x_3) = 0$ impossible à vérifier car $u_2^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 - b_1 x_3 \neq 0 \ \forall x_1, \forall x_2 \ \forall x_3$

(le terme $-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2$ ne peut être éliminé quel que soit le choix fait pour $a_2, b_1$.)

- condition de déplacement nul au centre de la face $S_0$ soit au point $(0,0,0)$

$\underline{u}^1(0,0,0) = \underline{0}$ vérifié avec $a_1 = 0 = a_2 = a_3$, dans ce cas

$$\underline{u}^1 = \left(\frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2\right)\underline{e}_1 + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3\right)\underline{e}_2 + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1\right)\underline{e}_3$$

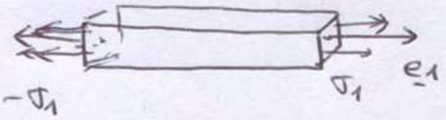
est solution avec $\underline{b}$ quelconque

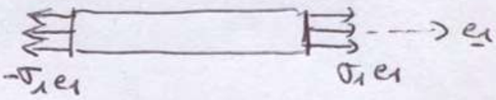
Sur $x_1 = L$ $\quad \underline{n} = \underline{e}_1 \quad \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e}_1 = 2H \underline{e}_1$

$x_1 = 0 \quad \underline{n} = -\underline{e}_1 \quad \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_1) = -2H\, \underline{e}_1$

$x_2 = \pm h \quad \underline{n} = \pm \underline{e}_2 \quad \underline{\underline{\sigma}}(\pm \underline{e}_2) = \underline{0}$ libre d'effort

$x_3 = \pm e \quad \underline{n} = \pm \underline{e}_3 \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e}_3) = \underline{0}$ libre d'effort




- le problème ainsi posé est un pb régulier de type 2, les densités d'effort sont connues sur toutes les faces
- Il admet une solution sous la condition nécessaire d'existence

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \underline{0} \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \underline{0}$$

qui est bien satisfaite ici car $\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, ds = \int_{S_L} \sigma_1 \underline{e}_1\, ds + \int_{S_0} -\sigma_1 e_1\, dS = \underline{0}$

et $\int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, ds = \int_{S_L} (L\, \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dS + \int_{S_0} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge -\sigma_1 \underline{e}_1\, ds$

$= \underline{0}$ car $\int_{S_L = S} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dx_2 dx_3 - \int_{S_0 = S} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dx_2 dx_3 = \underline{0}$

- Cette condition étant satisfaite, la solution existe et est unique en contrainte, définie à un corps rigide près en déplacement

si $\underline{u}$ est solution $\underline{u} + \underline{C}$ avec $\underline{C} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x}$ est solution

3.2 Champ de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \end{bmatrix}_{e_1, e_2, e_3}$$

en appliquant la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{trace}\, \sigma)\, \underline{\underline{1}}$$
$$= \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) - \frac{\nu}{E} \sigma_1 [\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3]$$

On sait qu'il existe un champ de déplacement associé car les équations de Beltrami sont satisfaites par l'intermédiaire de la fonction $\chi$ qui vérifie $\Delta(\Delta \chi) = 0 \quad (\Delta\chi)_{,11} + (\Delta\chi)_{,22} = (\Delta\chi)_{,12} = 0$.

4.1 Champ de déplacement est solution de :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}\sigma_1 \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\nu}{E}\sigma_1$$

$\underline{u}^1$ n'est pas unique, il est défini à une rotation près autour de $\underline{e_1}$ de $\underline{e_2}$ et $\underline{e_3}$

- Condition de déplacement nul au centre et $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(0,0,0)=0$ ; $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0,0,0)=0$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(0,0,0)=0$

dans ce cas $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0,0) = b_3 = 0$

$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0,0,0) = -b_2 = 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{0}$ on a bien unicité

$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(0,0,0) = b_1 = 0$

le corps rigide est bloqué par ces conditions supplémentaires

- Condition $\underline{u}(0,0,0)=0$ et $u_2(L,0,0) = 0 = u_3(L,0,0)$

dans ce cas $u_2(L,0,0) = b_3 L = 0 \Rightarrow b_3 = 0$

$u_3(L,0,0) = -b_2 L = 0 \Rightarrow b_2 = 0$

donc $\underline{u} = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 \underline{e_1} + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 - b_1 x_3\right)\underline{e_2} + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + b_1 x_2\right)\underline{e_3}$

est solution $b_1$ reste indéterminé, on a donc pas unicité de la solution pour ce problème qui autorise les rotations autour de $\underline{e_1}$

4 Choix de la fonction $\chi^2 = F x_1^2 + H x_2^2 + I x_1 + J x_2 + K$

$A = B = C = D = G = 0$

Calcul du champ de contraintes

$\sigma_{11} = 2F = \sigma_1$ ; $\sigma_{22} = 2H = \sigma_2$ ; $\sigma_{12} = 0$ et $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\Pi}}^2 = \sigma_1\, \underline{e_1} \otimes \underline{e_1} + \sigma_2\, \underline{e_2} \otimes \underline{e_2}$

il s'agit d'un champ de contrainte bi axiale selon $\underline{e_1}$ et $\underline{e_2}$ (de traction) (d'intensité $\sigma_1$) (d'intensité $\sigma_2$)

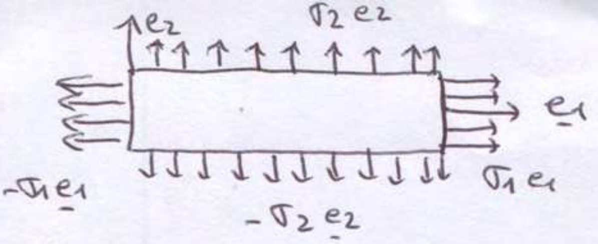
sur $S_0$ $x_1 = 0$ $\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{\underline{\Pi}}(-\underline{e_1}) = -\sigma_1 \underline{e_1}$

$S_L$ $x_1 = L$ $\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{\underline{\Pi}}\,\underline{e_1} = \sigma_1 \underline{e_1}$

$S_h$ $x_2 = h$ $\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{\underline{\Pi}}\,\underline{e_2} = \sigma_2 \underline{e_2}$

$S_{-h}$ $x_2 = -h$ $\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{n} = \underline{\underline{\Pi}}(-\underline{e_2}) = -\sigma_2 \underline{e_2}$

$S_{\pm e}$ $x_3 = \pm e$ $\underline{\underline{\Pi}}\,\underline{n} = \underline{\underline{\Pi}}(\pm \underline{e_3}) = \underline{0}$ (libre d'effort)




$$\underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 \\ & & -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)}$$

$$\underline{u}^2 = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2\right) x_1 \\ \left(\frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1\right) x_2 \\ -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\, x_3 \end{array}\right. + \underline{c} \text{ (corps rigide)}$$

5. Choix de la fonction $X^3 = G x_1 x_2 + I x_1 + J x_2 + K$.

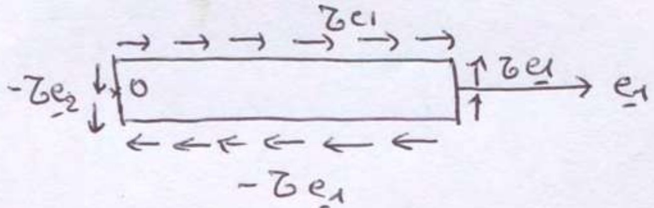
$$( A = B = C = D = F = H = 0 )$$

Calcul du champ de contraintes

$\sigma_{11} = 0 \qquad \sigma_{22} = 0 \qquad \sigma_{12} = -G = \tau \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

d'où $\quad \underline{\underline{\sigma}}^3 = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$

Effort
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } S_0 \; x_1 = 0 \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (-\underline{e}_1) = -\tau\, \underline{e}_2 \; ; \; \text{sur } S_L \; x_1 = L \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot \underline{e}_1 = \tau\, \underline{e}_2 \text{ libre d'effort} \\ \text{Sur } S_{\pm h} \; x_2 = \pm h \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (\pm \underline{e}_2) = \pm \tau\, \underline{e}_1 \\ \text{Sur } S_{\pm e} \; x_3 = \pm e \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (\pm \underline{e}_3) = \underline{0} \text{ (libre d'effort)} \end{array}\right.$$




il s'agit d'un chargement de cisaillement exercé sur les faces $\pm h$ selon $e_1$ d'intensité $\tau$.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}^3 = \frac{1+\nu}{E}\tau (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1^3}{\partial x_1} = 0 \; , \; \frac{\partial u_2^3}{\partial x_2} = 0 \; ; \; \frac{\partial u_3^3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1^3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^3}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau \; , \; \frac{\partial u_1^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial u_2^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u_1^3 = f_1(x_2, x_3) \; ; \; u_2^3 = f_2(x_1, x_3) \; ; \; u_3^3 = f_3(x_2, x_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau \; ; \; \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

solution particulière avec

$$f_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \tau x_2 \quad ; \quad f_2 = \frac{1+\nu}{E} \tau x_1 \quad ; \quad f_3 = 0$$

d'où $\underline{u}^3 = \left(\frac{1+\nu}{E} \tau x_2\right) \underline{e}_1 + \left(\frac{1+\nu}{E} \tau x_1\right) \underline{e}_2 + \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x}$.

déplacement solution du pb. ($\underline{a}, \underline{b}$ quelconque)

— 6 Choix $X^4 = B x_2^3 + I x_1 + J x_2 + K$

$\Rightarrow (A = C = D = F = G = H = 0)$

$\sigma_{11} = 6B x_2$

$\sigma_{22} = 0 \qquad \sigma_{13} = 0$

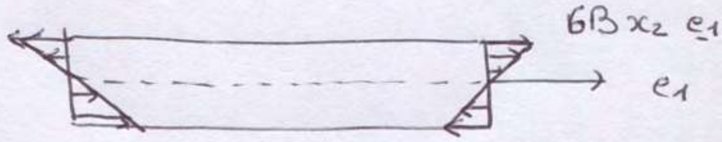
$\sigma_{12} = 0 \qquad \sigma_{23} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^4 = 6 B x_2 \; \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$

Effort : sur $S_0$ $\underline{\underline{\sigma}}^4(-\underline{e}_1) = -6B x_2 \underline{e}_1$. sur $S_L$ $\underline{\underline{\sigma}}^4 \underline{e}_1 = 6 B x_2 \underline{e}_1$

sur $S_{\pm e_2}$ $\sigma^4(\pm e_2) = \underline{0}$ sur $S_{\pm e}$ $\underline{\underline{\sigma}}^4(\pm \underline{e}_3) = \underline{0}$

Supposons $B > 0$




Le chargement est un chargement de flexion pure. (voir solution du cours.)

— 7. Choix fonction $\hat{X}(x_1, x_2) = G x_1 x_2 + M x_1 x_2^3 + I x_1 + J x_2 + K$

$\hat{X}_{,1} = G x_2 + M x_2^3 + I \qquad \hat{X}_{,11} = 0 \quad = \sigma_{22}$

$\hat{X}_{,2} = G x_1 + 3M x_1 x_2^2 + J \qquad \hat{X}_{,22} = 6 M x_1 x_2 = \sigma_{11}$

$\hat{X}_{,12} = G + 3M x_2 = -\sigma_{12}$

$\Delta \hat{X} = 6M x_1 x_2$ ne vérifie pas $(\Delta \hat{X})_{,12} = 0$ une des 4 équations qui assure la compatibilité

$\Rightarrow (\Delta \hat{X})_{,1} = 6M x_2 \qquad (\Delta \hat{X})_{,11} = 0$

$(\Delta \hat{X})_{,2} = 6M x_1 \qquad (\Delta \hat{X})_{,22} = 0$

mais $(\Delta \hat{X})_{,12} = 6M \neq 0$

En revanche $(\Delta \hat{X})_{,22} = 0 \quad (\Delta \hat{X})_{,11} = 0$ et $\Delta(\Delta \hat{X}) = 0$

On est dans le cas où $(\varepsilon_{33})_{,12} = 0$ n'est pas satisfaite la compatibilité des déformations selon $\underline{e}_3$ n'est pas assurée

La solution obtenue en exploitant $\hat{\chi}$ vérifie l'hypothèse dite des tranches minces. La structure est considérée comme constituée de tranches selon $\underline{e}_3$ indépendantes les unes des autres, la compatibilité des déformations entre chaque couche n'est pas assurée (12)

8. Flexion composée

sur $S_L$ $\underline{R}_L = R\underline{e}_1$ $\underline{M}_L(0) = \mathcal{M}\underline{e}_3$ les autres faces sont libres.

sur $S_0$ $\underline{R}_0 = -R\underline{e}_1$ $\underline{M}_0(0) = -\mathcal{M}\underline{e}_3$

unités de R, M

$$\underline{R}_L = \iint_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\, dS \Rightarrow [R] = \text{Newton} \quad \left(= \frac{N}{m^2}\times m^2\right)$$

$$\underline{M}_L(0) = \iint_{S_L} OM \wedge \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\, dS \Rightarrow [M_L] = m\times\frac{N}{m^2}m^2 = N\times m$$

Le problème posé avec des efforts globaux sur $S_0$ et $S_L$ n'est pas régulier (On ne connaît pas la densité surfacique d'effort en tout point des faces $S_0$ et $S_L$.)

- la solution 1 $\underline{\underline{\sigma}}^1 = \sigma_1\, \underline{e}_1\otimes\underline{e}_1$ conduit à sur $S_L$ une résultante $\underline{R}^1_L = \sigma^1 S\,\underline{e}_1$ et sur $S_0$ $\underline{R}^1_0 = -\sigma^1 S\,\underline{e}_1$

donc en prenant $R = \sigma^1 S$ on peut obtenir avec cette solution le chargement $\underline{R}_L = R\underline{e}_1$, $\underline{R}_0 = -R\underline{e}_1$ et on a bien $\underline{M}_L(0) = \iint_{S_L} OM\wedge\sigma^1\underline{e}_1\, dS = \underline{0}$

car $\iint_{S_L} (L\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3)\wedge\sigma^1\underline{e}_1\, dx_2dx_3 = \underline{0}$ $\left(\iint_{S_L} x_2\, dS = \iint_{S_L} x_3\, dS = 0\right)$

$$\int_{-h}^{+h} x_2\, dS = \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_{-h}^{+h} = 0$$

de même $\underline{M}_0(0) = \underline{0}$

- La solution 4 $\underline{\underline{\sigma}}^4 = 6Bx_2\, \underline{e}_1\otimes\underline{e}_1$ conduit elle à

$$\underline{R}_L = \iint_{S_L} 6Bx_2\,\underline{e}_1\, dS = \underline{0} \quad \text{car} \quad \iint_{S_L} x_2\, dS = 0$$

$\underline{R}_0 = \underline{0}$ de même

$$\text{et } \underline{M}_L(0) = \iint_{S_L} (L\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 \wedge 6Bx_2\,\underline{e}_1)\, dx_2dx_3$$

$$= 6B\left[\iint_S x_2^2\, dx_2dx_3\right](-\underline{e}_3) + 6B\underbrace{\iint_{S_L} x_2x_3\, dS}_{= 0}\,\underline{e}_2$$

$$= -6B\, I_3\,\underline{e}_3$$

$$\text{avec } I_3 = \iint_S x_2^2\, dx_2dx_3 = 2e\times\frac{2h^3}{3} = \frac{4eh^3}{3}$$

de même $\underline{M}_0(0) = 6B\, I_3\, \underline{e}_3$

en prenant $-6BI_3 = M$. on peut donc obtenir avec la solution 4. le chargement en moment

- En exploitant le théorème de superposition, la solution obtenue avec $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^1 + \underline{\underline{\sigma}}^4$ , $\underline{u} = \underline{u}^1 + \underline{u}^4$

  en prenant $2HS = \sigma_1 S = R$ $\quad -6Bx_2 = \mathcal{M}$

  vérifiera les condition aux limites du problème de flexion composée considérée dans cette question.

  Cette superposition est possible si l'on reste dans le domaine des petites perturbations au final

- Il s'agit d'une solution du problème en efforts globaux considéré. Il y a d'autres façons de poser des problèmes réguliers qui conduiraient à ces efforts globaux et donc d'autres solutions.

- Le principe de Saint-Venant dit que loin des extrémités ($S_0$ et $S_L$ ici), toutes ces solution conduisent à des solution voisines. Elles ne diffèrent que localement dans le voisinage des extrémités ($S_0$ et $S_L$).