Le moment résultant des forces élastiques au point B s'écrit quant à lui :

$$\int_{sol} \vec{BM} \wedge \vec{df} = \int_{x_2=0}^{x_2=H\tan\alpha} (H\tan\alpha - x_2)\underline{e_2} \wedge \left(\frac{\rho_{liquide}\, g H}{\tan^2\alpha} + \frac{\rho_b g x_2}{\tan\alpha} - 2\frac{\rho_{liquide}\, g\, x_2}{\tan^3\alpha} - \rho_b g H\right)\underline{e_1}\; dx_2$$

$$= \left(+\frac{1}{3}\rho_b\, g H^3 \tan^2\alpha - \frac{1}{6}\rho_\ell\, g H^3\right)\underline{e_3}$$

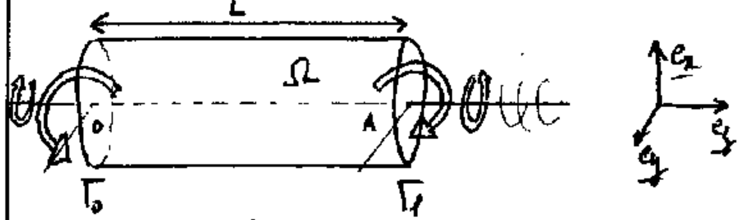
Il n'y a pas basculement rigide tant que le moment total reste positif, soit tant que

$$\frac{1}{3}\rho_b\, g H^3 \tan^2\alpha - \frac{1}{3}\rho_\ell\, g H^3 > 0$$

ou $\boxed{\rho_\ell < \rho_b \tan^2\alpha}$ on retrouve le même critère que précédemment

TD n°3 : TORSION, FLEXION Et Principe de Superposition

Problème : Torsion-Flexion composée



On considère la déformation d'un arbre Ω constitué d'un matériau homogène élastique isotrope caractérisé par le module d'Young E et coefficient de Poisson ν.
À ses deux extrémités, l'arbre est soumis à des efforts surfaciques $\underline{t_0}$ et $\underline{t_L}$ dont les torseurs se réduisent à :

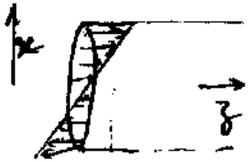
$$\{T_{ext} \to \Gamma_0, O\} = \left\{\begin{array}{c} \underline{0} \\ -M^t e_z + M^f e_y \end{array}\right\}$$

$$\{T_{ext} \to \Gamma_L, A\} = \left\{\begin{array}{c} \underline{0} \\ +M^t e_z - M^f e_y \end{array}\right\}$$

Partie 1 : Équations du problème

1 Déterminer les efforts surfaciques t_0^f et t_L^f portés par e_z, linéaires en x, qui permettent de retrouver les conditions de chargement en flexion.

On recherche ici un candidat possible pour la distribution des efforts locaux appliqués sur les extrémités se réduisant au torseur proposé.

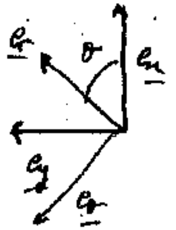


on recherche une distribution linéaire en x, i.e. associée à un cisaillement de la forme

$$\underline{t}_0^f = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a x \end{vmatrix}_{(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)}$$

Pour être compatible avec le torseur imposé, on doit avoir :

- $\int_{\Gamma_0} \underline{t}_0^f \, dS = \underline{0}$ → vrai
- $\int_{\Gamma_0} \underline{OM} \wedge \underline{t}_0^f \, dS = M^f \underline{e}_y$



soit $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\ell} \left(r \underline{e}_r \wedge a r \cos\theta \, \underline{e}_z \right) r \, dr \, d\theta = M^f \underline{e}_y$

donc $\frac{1}{4} \ell^4 a \int_0^{2\pi} -\cos\theta \, \underline{e}_\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \ell^4 a \int_0^{2\pi} -\cos^2\theta \, \underline{e}_y - \cos\theta \sin\theta \, \underline{e}_x \, d\theta$

on a $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} \left[\cos^2\theta \right]_0^{2\pi} = 0$

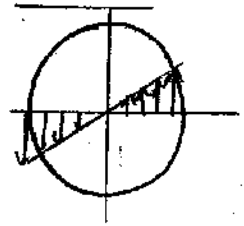
et comme $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$

Ainsi $\int_{\Gamma_0} \underline{OM} \wedge \underline{t}_0^f \, dS = -\frac{1}{4} \ell^4 a \pi \, \underline{e}_y = M^f \underline{e}_y$

D'où $\boxed{a = -\frac{4 M^f}{\pi \ell^4}}$ et $\boxed{\underline{t}_0^f = -\frac{4 M^f}{\pi \ell^4} x \, \underline{e}_z}$

De même $\boxed{\underline{t}_L^f = +\frac{4 M^f}{\pi \ell^4} x \, \underline{e}_z}$

2 Déterminer les efforts surfaciques t_0^t et t_L^t, portés par $\underline{e}_\theta$, linéaires en r, qui permettent de retrouver les conditions de chargement de torsion.



Comme précédemment, on recherche un candidat permettant de retrouver les conditions limites en torsion sous la forme

$$\underline{t}_0^t = \begin{vmatrix} 0 \\ b r \\ 0 \end{vmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

- $\int_{\Gamma_0} \underline{t}_0^t \, dS = \int_{\Gamma_0} b r \, \underline{e}_\theta \, r \, dr \, d\theta = 0$ car $\int_0^{2\pi} \underline{e}_\theta \, d\theta = \underline{0}$
- $\int_{\Gamma_0} \underline{OM} \wedge \underline{t}_0^t \, dS = \int_{r=0}^{r=\ell} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(r \underline{e}_r \wedge b r \, \underline{e}_\theta \right) r \, d\theta \, dr$

soit $\int_{\Gamma_0} \underline{OM} \wedge \underline{t}_0^t \, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} b r^3 \underline{e}_z \, dr d\theta = \frac{\pi}{2} b \rho^4 \underline{e}_z = -M^t \underline{e}_z$

d'où $\boxed{b = -\frac{2M^t}{\pi \rho^4}}$ et $\boxed{\underline{t}_0^t = -\frac{2M^t}{\pi \rho^4} r \underline{e}_\theta}$

De même $\boxed{\underline{t}_L^t = \frac{2M^t}{\pi \rho^4} r \underline{e}_\theta}$

3 Discuter de l'unicité de la solution

- Si le chargement n'est défini que sous forme globale, le problème est mal posé en ce sens que plusieurs solutions sont admissibles car plusieurs chargements locaux aux extrémités peuvent conduire au même chargement global. il n'y a pas unicité. Cela dit, d'après le principe de S^t Venant (pas démontré), les différences entre ces solutions sont localisées aux extrémités (effets de bord) ; suffisamment loin de ces extrémités, les différentes solutions sont confondues.
- Si les efforts surfaciques sont définis localement, alors il y a une solution unique au problème d'élastostatique, à un déplacement de corps rigide près.

4 Écriture des équations

Résoudre le problème d'élastostatique implique de trouver

1) un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible, i.e. suffisamment régulier vérifiant
   - l'équation d'équilibre $\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} + \cancel{\underline{f}} = \underline{0}$ dans Ω
   - les conditions aux limites,
     - sur Γ_0 : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_z) = \underline{t}_0^t + \underline{t}_0^f$
     - sur Γ_L : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{e}_z) = \underline{t}_L^t + \underline{t}_L^f$

2) un champ de déplacement $\underline{u}$ cinématiquement admissible, i.e. suffisamment régulier.

3) un champ de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u}^T\right)$$

relié au champ de contraintes par la loi de comportement.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathrm{tr}\,\varepsilon \, \underline{\underline{I}}\right]$$

5 Découplage du problème

De par la linéarité des équations, il est possible d'écrire la solution comme superposition de deux solutions élémentaires :

$$(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \underbrace{(\underline{u}^t, \underline{\underline{\sigma}}^t)}_{\text{solution du problème de torsion}} + \underbrace{(\underline{u}^f, \underline{\underline{\sigma}}^f)}_{\text{solution du problème de flexion}}$$

Problème de torsion :

- $\underline{\underline{\sigma}}^t$ statiquement admissible vérifiant $\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^t = \underline{0}$

  et $\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot (-\underline{e_z}) = \underline{t_0}^t \text{ sur } \Gamma_0 \\ \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{e_z} = \underline{t_L}^t \text{ sur } \Gamma_L \end{cases}$
- $\underline{u}^t$ cinématiquement admissible
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{u}^t + \underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{u}^t\right)$

  $\underline{\underline{\sigma}}^t = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}^t + \frac{\nu}{1-2\nu}(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^t)\underline{\underline{I}}\right]$

Problème de flexion :

- $\underline{\underline{\sigma}}^f$ statiquement admissible vérifiant $\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^f = \underline{0}$

  et $\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^f \cdot (-\underline{e_z}) = \underline{t_0}^f \text{ sur } \Gamma_0 \\ \underline{\underline{\sigma}}^f \cdot \underline{e_z} = \underline{t_L}^f \text{ sur } \Gamma_L \end{cases}$
- $\underline{u}^f$ cinématiquement admissible
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^f = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{u}^f + \underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{u}^{f\,t}\right)$

  $\underline{\underline{\sigma}}^f = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}^f + \frac{\nu}{1-2\nu}(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^f)\underline{\underline{I}}\right]$

Partie 2 : Problème de torsion

$\boxed{1}$ Approche en déplacement $\underline{u}^t$ CA $\rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma}}^t$ SA

▷ Justifier le choix $\underline{u} = \alpha r z\, \underline{e_\theta}$.

En toute généralité, le champ de déplacement dans la poutre s'écrit $\underline{u}(r,\theta,z) = u_r(r,\theta,z)\underline{e_r} + u_\theta(r,\theta,z)\underline{e_\theta} + u_z(r,\theta,z)\underline{e_z}$

- Comme le problème est axisymétrique, il présente une invariance par rapport à θ. Ainsi

$$\underline{u}(r,z) = u_r(r,z)\underline{e_r} + u_\theta(r,z)\underline{e_\theta} + u_z(r,z)\underline{e_z}$$

- De plus, la section de la poutre étant circulaire, il n'y a pas de gauchissement, i.e. $u_z(r,z) = 0$.
- Enfin, on suppose que les sections droites ne sont pas déformées dans leur plan : $u_r(r,z) = 0$ et le déplacement de chaque section est une rotation d'ensemble, i.e.

$$\underline{u} = \Omega(z)\underline{e_z} \wedge (r\underline{e_r} + z\underline{e_z}) = \Omega(z)\, r\, \underline{e_\theta}$$

on pose ici $\Omega(z) = \alpha\left(z - \frac{L}{2}\right)$.

$\boxed{2}$ Détermination de $\underline{\underline{\sigma}}^t$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^t$

On a $\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r}u_\theta & 0 \\ \partial_r u_\theta & 0 & \partial_z u_\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(z-\frac{L}{2}) & 0 \\ \alpha(z-\frac{L}{2}) & 0 & \alpha r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

de sorte que $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \frac{\alpha r}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Par la loi de comportement, on déduit

$$\underline{\underline{\sigma}}^t = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^t + \frac{\nu}{1-2\nu}(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^t)\underline{\underline{I}}\right)$$

d'où $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^t = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\alpha r}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

3 Utilisation des conditions limites

En Γ_L, on a
$$\underline{\underline{\sigma}}\cdot \underline{e_z} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha r}{2}\underline{e_\theta} = \frac{2M_t}{\pi e^4} r \underline{e_\theta}$$

D'où $\boxed{\alpha = \frac{4M_t(1+\nu)}{\pi E e^4}}$ (de même pour Γ_0)

Et finalement
$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\underline{\sigma}}^t = \frac{E}{1+\nu}\frac{\alpha r}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}_{(e_r,e_\theta,e_z)} \\ \underline{u}^t = \alpha r z\, \underline{e_\theta}\end{array}}$$

Partie 3 : Problème de flexion

on adopte une approche en contraintes pour résoudre ce problème
On suppose que le champ de contraintes est de la forme
$$\underline{\underline{\sigma}}^t = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\sigma_{zz}(x)\end{pmatrix}$$

1 Vérifier que ce champ est statiquement admissible

- équation d'équilibre :

on a $\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^t$ qui se ramène à $\begin{pmatrix}0\\0\\\partial_z \sigma_{zz}(x)\end{pmatrix} = \underline{0} \rightarrow$ ok

- conditions limites

▸ sur Γ_L, $\underline{\underline{\sigma}}\cdot \underline{e_z} = \sigma_{zz}(x)\, \underline{e_z} = -ax\, \underline{e_z}$

soit $\boxed{\sigma_{zz} = \frac{4M^f}{\pi e^4} x}$

▸ de même pour Γ_0.

on en déduit que $\underline{\underline{\sigma}}^f$ est bien statiquement admissible

2 D'après la loi de comportement inversée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{\underline{I}} \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma_0 x}{E}\begin{pmatrix}-\nu&0&0\\0&-\nu&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \quad \text{en notant } \sigma_0 = \frac{4M^f}{\pi e^4}$$

3 solution en déplacement

Note : les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées car $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est linéaire en x (donc $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\, e_{jq,kr} = 0$)
on peut donc intégrer le tenseur de déformations.

On a :
$$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{u} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z}\\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

et $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{\sigma_0 x}{E}\begin{pmatrix}-\nu&0&0\\0&-\nu&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = -\nu \dfrac{\sigma_0 x}{E} & (1) \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = -\nu \dfrac{\sigma_0 x}{E} & (2) \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \dfrac{\sigma_0 x}{E} & (3) \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = 0 & (4) \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} = 0 & (5) \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} = 0 & (6) \end{cases}$

$(1) : u_x = -\nu \dfrac{\sigma_0 x^2}{2E} + c_x(y,z)$

$(2) : u_y = -\nu \dfrac{\sigma_0 xy}{E} + c_y(x,z)$

$(3) : u_z = \dfrac{\sigma_0 xz}{E} + c_z(x,y)$

On a alors $(4) : \dfrac{\partial c_x}{\partial y} + \dfrac{\partial c_y}{\partial x} = \nu \dfrac{\sigma_0 y}{E}$

$(5) : \dfrac{\partial c_x}{\partial z} + \dfrac{\partial c_z}{\partial x} = -\dfrac{\sigma_0 z}{E}$

$(6) : \dfrac{\partial c_y}{\partial z} + \dfrac{\partial c_z}{\partial y} = 0$

Ainsi $(4) : \dfrac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow c_y(x,z) = A_y(z)x + B_y(z)$

$(5) : \dfrac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow c_z(x,y) = A_z(y)x + B_z(y)$

On souhaite filtrer les mouvements de corps rigide de la solution en imposant $\underline{u}(0,0,0) = \underline{0}$ et $\underline{u}(0,0,L) = \underline{0}$ -
Autrement dit on veut imposer $c_x(0,0) = c_x(0,L) = 0$, $c_y(0,0) = c_y(0,L) = 0$ et $c_z(0,0) = 0$
soit $B_y(0) = B_y(L) = 0$ et $B_z(0) = 0$

De l'équation (6) il vient :

$A_y'(z)x + B_y'(z) + A_z'(y)x + B_z'(y) = 0$

D'où $\begin{cases} A_y'(z) = -A_z'(y) = \text{cte} = K \\ B_y'(z) = -B_z'(y) = \text{cte} \rightarrow B_y = 0 \text{ et } B_z = 0 \end{cases}$

Les équations (4) et (5) se réécrivent alors :

$(4) : \dfrac{\partial c_x}{\partial y} + A_y(z) = \nu \dfrac{\sigma_0 y}{E}$

d'où $c_x(y,z) = \nu \dfrac{\sigma_0 y^2}{2E} - A_y(z)y + f(z)$

et en particulier $\dfrac{\partial c_x}{\partial z} = -A_y'(z)y + f'(z) = -Ky + f'(z)$

Mais par ailleurs

$(5) : \dfrac{\partial c_x}{\partial z} + \underbrace{A_z(y)}_{-Ky+L} = -\dfrac{\sigma_0 z}{E}$

d'où $-Ky + f'(z) - Ky + L = -\dfrac{\sigma_0 z}{E} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} L = 0 \\ K = 0 \end{matrix}}$

(un raisonnement analogue permet de dire $A_y(z) = 0$)

et $c_x(y,z) = -\dfrac{\sigma_0 z^2}{2E} + g(y)$

Par identification, $c_x(y,z) = \frac{\sigma_0}{2E}(\nu y^2 - z^2)$

et finalement

$$\boxed{\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{2E}\left(\nu(y^2-x^2)-z^2\right) \\ -\nu\,\frac{\sigma_0 xy}{E} \\ \frac{\sigma_0 xz}{E} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)}}$$

Partie 4 : Assemblage des deux solutions

1 Écrire la solution complète du pb de flexion-torsion

on a $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^t + \underline{\underline{\sigma}}^f$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2M^t r}{\pi e^4} \\ 0 & \frac{2M^t r}{\pi e^4} & \frac{4M^f x}{\pi e^4} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)}$$

$$= \frac{2}{\pi e^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^t r \\ 0 & M^t r & 2M^f x \end{pmatrix}$$

et le champ de déplacement associé :

$$\underline{u} = \left| \begin{array}{l} \frac{\sigma_0}{2E}\left(\nu(y^2-x^2)-z^2\right) - \alpha r z \sin\theta \\ -\nu\,\frac{\sigma_0 xy}{E} + \alpha r z \cos\theta \\ \frac{\sigma_0 xz}{E} \end{array}\right.$$

2 Tracer la contrainte maximale de Von Mises dans (M^f, M^t)

Le critère de Von Mises est un critère classique en élasticité permettant de déterminer les endroits les plus susceptibles de se plastifier. Il s'agit d'une mesure de l'énergie élastique de cisaillement :

$$\sigma_{VM} = \frac{3}{2}\sqrt{\underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_D$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{I}}$$

Soit

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \frac{2}{\pi e^4}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}M^f x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}M^f x & M^t r \\ 0 & M^t r & \frac{4}{3}M^f x \end{pmatrix}$$

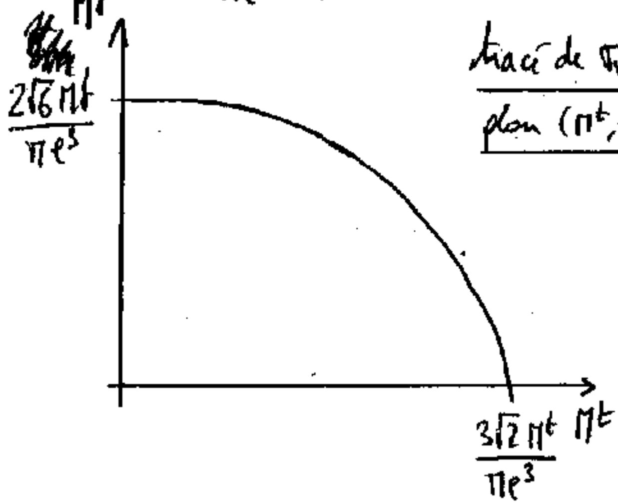
Ainsi $\sigma_{VM} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{(\pi e^4)^2}\left(2(M^t r)^2 + \frac{16+2\times 4}{9}(M^f x)^2\right)}$

et $\sigma_{VM} = \frac{3\sqrt{2}\, M^t r}{\pi \rho^4}\sqrt{1+\frac{4}{3}\left(\frac{M^f x}{M^t r}\right)^2}$

Avec $x = r\cos\theta$, on voit que le critère est maximal pour $r = \rho$ et $\theta = 0$ ou π

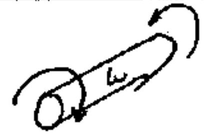
$$\Rightarrow \sigma_{VM\,max} = \frac{3\sqrt{2}\, M^t}{\pi \rho^3}\sqrt{1+\frac{4}{3}\left(\frac{M^f}{M^t}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\pi\rho^3}\sqrt{3{M^t}^2 + 4{M^f}^2}$$



tracé de $\sigma_{VM\,max}$ dans le plan (M^t, M^f)

TD n°4 : TORSION DES ARBRES CYLINDRIQUES



Rappel : Dans un problème de torsion, le champ de déplacement solution a typiquement la forme $\underline{u} = \begin{cases} -\alpha x_3 x_2 \\ \alpha x_3 x_1 \\ \alpha \varphi(x_1, x_2) \end{cases}$ associé à des champs de contraintes et déformation de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$

où $\sigma_{13} = \mu\alpha\left(-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$ et $\sigma_{23} = \mu\alpha\left(x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$.

Il est néanmoins possible de déterminer σ_{13} et σ_{23} sans déterminer la fonction de gauchissement φ. En effet, la troisième équation d'équilibre $\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = 0$. De fait, il existe un potentiel des contraintes ou fonction de torsion θ telle que :

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial\theta}{\partial x_1}$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = \Delta\theta = -2\mu\alpha$$

associée aux conditions limites $\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$ sur $\partial\omega$

en introduisant $(n_1, n_2) = (-t_2, t_1)$ on a $\frac{\partial\theta}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} t_2 = 0$

Soit $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ ou encore $\theta = cte$ sur le pourtour $\partial\omega$.

Comme θ est défini à une constante près on pose $\theta = 0$ sur la frontière du domaine.