2E200 : Electronique Numérique, Combinatoire et Séquentielle

Bertrand Granado

Licence E^{2}A

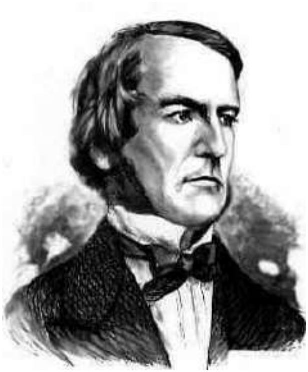
Hiver 2019

Plan

Plan

Mister G. Boole

- Mathématicien Anglais du 19^{ième} siècle.



1815 – 1864

La génèse

- Georges Boole introduit un formalise mathématique de la logique
  The Calculus of Logic
  *C*ambridge and Dublin Mathematical Journal
  Vol. III (1848), pp. 183–9

La génèse

- Georges Boole introduit un formalise mathématique de la logique
  The Calculus of Logic
  Cambridge and Dublin Mathematical Journal
  Vol. III (1848), pp. 183–9
- *(3) That those laws are capable of mathematical expression, and that they thus constitute the basis of an interpretable calculus.*

La génèse

- Georges Boole introduit un formalise mathématique de la logique
  The Calculus of Logic
  Cambridge and Dublin Mathematical Journal
  Vol. III (1848), pp. 183–9
- *(3) That those laws are capable of mathematical expression, and that they thus constitute the basis of an interpretable calculus.*
- Au départ beaucoup utilisé dans les jeux de salons

La génèse

- Georges Boole introduit un formalise mathématique de la logique
  The Calculus of Logic
  *C*ambridge and Dublin Mathematical Journal
  Vol. III (1848), pp. 183–9
- *(3) That those laws are capable of mathematical expression, and that they thus constitute the basis of an interpretable calculus.*
- Au départ beaucoup utilisé dans les jeux de salons
- Mais à l'arrivée : Véritable révolution qui est devenue le fondement de l'électronique numérique

Plan

L’algèbre - Les bases - 1

- L’algèbre de Boole manipule des variables qui ne peuvent prendre que deux états : *Vrai* ou *Faux*

L'algèbre - Les bases - 1

- L'algèbre de Boole manipule des variables qui ne peuvent prendre que deux états : *Vrai* ou *Faux*
- Une telle variable est appelée variable *Booléenne*

L'algèbre - Les bases - 1

- L'algèbre de Boole manipule des variables qui ne peuvent prendre que deux états : *Vrai* ou *Faux*
- Une telle variable est appelée variable *Booléenne*
- Il est possible aussi d'associer le chiffre 1 à la valeur *Vrai* et le chiffre 0 à la valeur *Faux*

L'algèbre - Les bases - 1

- L'algèbre de Boole manipule des variables qui ne peuvent prendre que deux états : *Vrai* ou *Faux*
- Une telle variable est appelée variable *Booléenne*
- Il est possible aussi d'associer le chiffre 1 à la valeur *Vrai* et le chiffre 0 à la valeur *Faux*
- Les variables Booléennes dans ce cas sont des variables *Binaires*

L'algèbre - Les bases

- exemples

Plan

Algèbre de Boole - Définitions

- Algèbre de Boole B

Algèbre de Boole - Définitions

- Algèbre de Boole B

Algèbre de Boole - Définitions

- Algèbre de Boole B
  - $B = < E, +, ., ^{-}, 0, 1 >$

Algèbre de Boole - Définitions

- Algèbre de Boole B
  - $B = < E, +, ., ^{-}, 0, 1 >$
  - $+, .$ sont des lois de composition interne

Algèbre de Boole - Définitions

- Algèbre de Boole B
  - $B = < E, +, ., ^{-}, 0, 1 >$
  - $+, .$ sont des lois de composition interne
  - $^{-}$ est la loi de complémentation

Algèbre de Boole - Lois de Composition

- loi de composition .

Algèbre de Boole - Lois de Composition

- loi de composition .
-

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Algèbre de Boole - Lois de Composition

- loi de composition .

.	0	1
0	0	0
1	0	1

- loi de composition $+$

Algèbre de Boole - Lois de Composition

- loi de composition .

.	0	1
0	0	0
1	0	1

- loi de composition $+$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Algèbre de Boole - Loi de complémentation

- Le *complément* $\overline{a}$ d'une variable a est défini par :

Algèbre de Boole - Loi de complémentation

- Le *complément* $\overline{a}$ d'une variable a est défini par :
  - si $a = 1 \rightarrow \overline{a} = 0$

Algèbre de Boole - Loi de complémentation

- Le *complément* $\overline{a}$ d'une variable a est défini par :
  - si $a = 1 \rightarrow \overline{a} = 0$
  - si $a = 0 \rightarrow \overline{a} = 1$

Algèbre de Boole - Loi de complémentation

- Le *complément* $\overline{a}$ d'une variable a est défini par :
  - si $a = 1 \rightarrow \overline{a} = 0$
  - si $a = 0 \rightarrow \overline{a} = 1$
- La variable a, lorsqu'elle est notée a, est dite sous sa forme normale

Algèbre de Boole - Loi de complémentation

- Le *complément* $\overline{a}$ d'une variable a est défini par :
  - si $a = 1 \rightarrow \overline{a} = 0$
  - si $a = 0 \rightarrow \overline{a} = 1$
- La variable a, lorsqu'elle est notée a, est dite sous sa forme normale
- La variable a, lorsqu'elle est notée $\overline{a}$, est dite sous sa forme complémentée

Axiomes de bases - 1

- Commutativité

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall (a, b) \in E^2$

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $a+b=b+a$

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $a + b = b + a$
  - $a.b = b.a$

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall(a,b) \in E^2$
  - $a+b=b+a$
  - $a.b=b.a$
- Distributivité

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall(a,b) \in E^2$
  - $a+b=b+a$
  - $a.b=b.a$
- Distributivité
  - $\forall(a,b,c) \in E^3$

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $a+b=b+a$
  - $a.b=b.a$
- Distributivité
  - $\forall (a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$

Axiomes de bases - 1

- Commutativité
  - $\forall(a,b) \in E^2$
  - $a+b=b+a$
  - $a.b=b.a$
- Distributivité
  - $\forall(a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$
  - $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$
  - $a.1 = a$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$
  - $a.1 = a$
- Complémentation

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$
  - $a.1 = a$
- Complémentation
  - $\forall a \in E$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$
  - $a.1 = a$
- Complémentation
  - $\forall a \in E$
  - $a + \overline{a} = 1$

Axiomes de bases - 2

- Eléments Neutre
  - $\forall a \in E$
  - $a + 0 = a$
  - $a.1 = a$
- Complémentation
  - $\forall a \in E$
  - $a + \overline{a} = 1$
  - $a.\overline{a} = 0$

Propriétés - 1

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$
- Loi d'idempotence

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$
- Loi d'idempotence
  - $\forall a \in E$

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$
- Loi d'idempotence
  - $\forall a \in E$
  - $a + a = a$

Propriétés - 1

- A partir des axiomes de base des propriétés fondamentales sont déduites.
- Eléments Absorbants
  - $\forall a \in E$
  - $a + 1 = 1$
  - $a.0 = 0$
- Loi d'idempotence
  - $\forall a \in E$
  - $a + a = a$
  - $a.a = a$

Propriétés - 2

- Loi d'involution

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$
  - $\overline{\overline{a}} = a$

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$
  - $\overline{\overline{a}} = a$
- Loi d'absorption

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$
  - $\overline{\overline{a}} = a$
- Loi d'absorption
  - $\forall (a, b) \in E^2$

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$
  - $\overline{\overline{a}} = a$
- Loi d'absorption
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $a + (a.b) = a$

Propriétés - 2

- Loi d'involution
  - $\forall a \in E$
  - $\overline{\overline{a}} = a$
- Loi d'absorption
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $a + (a.b) = a$
  - $a.(a+b) = a$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall (a, b, c) \in E^3$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall (a, b, c) \in E^3$
  - $a + (b + c) = (a + b) + c$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall (a, b, c) \in E^3$
  - $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - $a.(b.c) = (a.b).c$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall(a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b+c) = (a+b)+c$
  - $a.(b.c) = (a.b).c$
- Loi de De Morgan

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall(a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b+c) = (a+b)+c$
  - $a.(b.c) = (a.b).c$
- Loi de De Morgan
  - $\forall(a,b) \in E^2$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall (a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b+c) = (a+b)+c$
  - $a.(b.c) = (a.b).c$
- Loi de De Morgan
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$

Propriétés - 5

- Loi d'associativité
  - $\forall (a,b,c) \in E^3$
  - $a+(b+c) = (a+b)+c$
  - $a.(b.c) = (a.b).c$
- Loi de De Morgan
  - $\forall (a,b) \in E^2$
  - $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$
  - $\overline{a.b} = \overline{a}+\overline{b}$

Plan

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :
  - Ordre Total : $0 < 1$

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :
  - Ordre Total : $0 < 1$
  - Ordre Lexicographique : $00 < 01 < 10 < 11$ *Utile pour les tables de vérité*

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :
  - Ordre Total : $0 < 1$
  - Ordre Lexicographique : $00 < 01 < 10 < 11$ *Utile pour les tables de vérité*

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :
  - Ordre Total : $0 < 1$
  - Ordre Lexicographique : $00 < 01 < 10 < 11$ *Utile pour les tables de vérité*
- Definition d'une fonction logique :

L'algèbre - Ordre et Fonction

- Relation d'ordre :
  - Ordre Total : $0 < 1$
  - Ordre Lexicographique : $00 < 01 < 10 < 11$ *Utile pour les tables de vérité*
- Definition d'une fonction logique :
  - $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0) : 0, 1^n \to 0, 1, n \in \mathbb{N}^*$

Fonctions Logiques à une variable *a*

- 1 variable soit 4 fonctions possibles :

Fonctions Logiques à une variable *a*

- 1 variable soit 4 fonctions possibles :
  - $f = 0$: fonction constante nulle

Fonctions Logiques à une variable *a*

- 1 variable soit 4 fonctions possibles :
  - $f = 0$: fonction constante nulle
  - $f = 1$: fonction constante à un

Fonctions Logiques à une variable a

- 1 variable soit 4 fonctions possibles :
  - $f = 0$: fonction constante nulle
  - $f = 1$: fonction constante à un
  - $f = a$: fonction identité

Fonctions Logiques à une variable a

- 1 variable soit 4 fonctions possibles :
  - $f = 0$: fonction constante nulle
  - $f = 1$: fonction constante à un
  - $f = a$: fonction identité
  - $f = \overline{a}$: fonction complément ou fonction *NON*

Fonctions Logiques à deux variables *a* et *b*

- 2 variables soit 16 fonctions possibles

Fonctions Logiques à deux variables a et b

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*

Fonctions Logiques à deux variables a et b

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*

Fonctions Logiques à deux variables a et b

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*
  - $f = a \oplus b$: fonction *OU-EXCLUSIF*

Fonctions Logiques à deux variables *a* et *b*

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*
  - $f = a \oplus b$: fonction *OU-EXCLUSIF*
  - $f = \overline{a.b}$: fonction *NON-ET*

Fonctions Logiques à deux variables *a* et *b*

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*
  - $f = a \oplus b$: fonction *OU-EXCLUSIF*
  - $f = \overline{a.b}$: fonction *NON-ET*
  - $f = \overline{a + b}$: fonction *NON-OU*

Fonctions Logiques à deux variables *a* et *b*

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*
  - $f = a \oplus b$: fonction *OU-EXCLUSIF*
  - $f = \overline{a.b}$: fonction *NON-ET*
  - $f = \overline{a + b}$: fonction *NON-OU*
  - $f = \overline{a \oplus b}$: fonction *NON-OU-EXCLUSIF*

Fonctions Logiques à deux variables *a* et *b*

- 2 variables soit 16 fonctions possibles
  - $f = a.b$: fonction *ET*
  - $f = a + b$: fonction *OU*
  - $f = a \oplus b$: fonction *OU-EXCLUSIF*
  - $f = \overline{a.b}$: fonction *NON-ET*
  - $f = \overline{a + b}$: fonction *NON-OU*
  - $f = \overline{a \oplus b}$: fonction *NON-OU-EXCLUSIF*
  - etc...

Fonctions Logiques à *n* variables

- *n* variables soit 2^{2^n} fonctions possibles

Fonctions Logiques à *n* variables

- n variables soit 2^{2^n} fonctions possibles
  - 3 variables $\rightarrow$ 256 fonctions possibles

Fonctions Logiques à *n* variables

- n variables soit 2^{2^n} fonctions possibles
  - 3 variables $\rightarrow$ 256 fonctions possibles
  - 4 variables $\rightarrow$ 65536 fonctions possibles

Fonctions Logiques à *n* variables

- n variables soit 2^{2^n} fonctions possibles
  - 3 variables $\rightarrow$ 256 fonctions possibles
  - 4 variables $\rightarrow$ 65536 fonctions possibles
  - etc ...

Représentation des fonctions logiques

- La Table de Vérité

Représentation des fonctions logiques

- La Table de Vérité
- Représentation sous forme de tableau des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables

Représentation des fonctions logiques

- La Table de Vérité
- Représentation sous forme de tableau des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables

a	b	f
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

a \ b	0	1
0	f_0	f_1
1	f_2	f_3

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

b / a c	0	1
0 0	f_0	f_1

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

a \ b c	0	1
0 0	f_0	f_1
0 1	f_2	f_3

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

	b	0	1
a	c		
0	0	f_0	f_1
0	1	f_2	f_3
1	1	f_6	f_7

Représentation des fonctions logiques

- Le Tableau de Karnaugh
  - Représentation sous forme de matrice des valeurs de la fonction logique pour toutes les combinaisons de ses variables en exploitant la propriété d'adjacence

a	b c	0	1
0	0	f_0	f_1
0	1	f_2	f_3
1	1	f_6	f_7
1	0	f_4	f_5

Représentation des fonctions logiques

- Diagramme de Veitch

Représentation des fonctions logiques

- Diagramme de Veitch
- Diagramme de Venn

Représentation des fonctions logiques

- Diagramme de Veitch
- Diagramme de Venn
- Arbre de décision binaire

Représentation des fonctions logiques

- Diagramme de Veitch
- Diagramme de Venn
- Arbre de décision binaire
- Logigramme *Partie technologie*

Représentation des fonctions logiques

- Diagramme de Veitch
- Diagramme de Venn
- Arbre de décision binaire
- Logigramme *Partie technologie*
- Représentation algébrique *Ecriture logique*

Ecriture Algébrique

- La représentation sous forme de tableau ou de matrice est limitée ~ 5 variables.

Ecriture Algébrique

- La représentation sous forme de tableau ou de matrice est limitée ~ 5 variables.
- Nécessité d'utiliser une écriture algébrique

Ecriture Algébrique

- La représentation sous forme de tableau ou de matrice est limitée ~ 5 variables.
- Nécessité d'utiliser une écriture algébrique
- La fonction logique s'exprime alors sous la forme de variables booléennes reliées entre elles par des opérateurs de l'algèbre de Boole

Ecriture Algébrique

- La représentation sous forme de tableau ou de matrice est limitée ~ 5 variables.
- Nécessité d'utiliser une écriture algébrique
- La fonction logique s'exprime alors sous la forme de variables booléennes reliées entre elles par des opérateurs de l'algèbre de Boole
- $f(a) = \overline{a}$ Fonction NON

Ecriture Algébrique

- La représentation sous forme de tableau ou de matrice est limitée ~ 5 variables.
- Nécessité d'utiliser une écriture algébrique
- La fonction logique s'exprime alors sous la forme de variables booléennes reliées entre elles par des opérateurs de l'algèbre de Boole
- $f(a) = \overline{a}$ Fonction NON
- $f(a,b,c) = \overline{c}b + a\overline{b}$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- Un produit booléen de variables booléennes est appelé *p-terme*

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- Un produit booléen de variables booléennes est appelé *p-terme*
- Une somme booléenne de variables booléennes est appelée *s-terme*

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- Un produit booléen de variables booléennes est appelé *p-terme*
- Une somme booléenne de variables booléennes est appelée *s-terme*
- Un *Minterme* est un p-terme de degré n

$$m_j = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i, \tilde{a}_i \in (\overline{a_i}, a_i)$$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- Un produit booléen de variables booléennes est appelé *p-terme*
- Une somme booléenne de variables booléennes est appelée *s-terme*
- Un *Minterme* est un p-terme de degré n

$$m_j = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i, \tilde{a}_i \in (\overline{a_i}, a_i)$$

- Un *Maxterme* est un s-terme de degré n

$$M_j = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i, \tilde{a}_i \in (\overline{a_i}, a_i)$$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- La somme logique de tous les Mintermes est égale à 1 si la fonction réalisée est différente de la fonction constante 0

$$\sum_{j=0}^{p-1} m_j = 1$$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- La somme logique de tous les Mintermes est égale à 1 si la fonction réalisée est différente de la fonction constante 0

$$\sum_{j=0}^{p-1} m_j = 1$$

- Le produit logique de tous les Maxtermes est égal à 0 si la fonction réalisée est différente de la fonction constante 1

$$\prod_{j=0}^{p-1} M_j = 0$$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- La somme logique de tous les Mintermes est égale à 1 si la fonction réalisée est différente de la fonction constante 0

$$\sum_{j=0}^{p-1} m_j = 1$$

- Le produit logique de tous les Maxtermes est égal à 0 si la fonction réalisée est différente de la fonction constante 1

$$\prod_{j=0}^{p-1} M_j = 0$$

- Relation entre Minterme et Maxterme

$$\overline{m_j} = M_j$$

Ecriture Algébrique - Minterme et Maxterme

- Exemples

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Ecriture algébrique d'une fonction logique n'utilisant que des Mintermes ou des Maxtermes.

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Ecriture algébrique d'une fonction logique n'utilisant que des Mintermes ou des Maxtermes.
- Il existe deux possibilités d'écriture :

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Ecriture algébrique d'une fonction logique n'utilisant que des Mintermes ou des Maxtermes.
- Il existe deux possibilités d'écriture :
  - *Forme Canonique Disjonctive ou première forme canonique :*
    Elle s'exprime sous forme d'une somme de Mintermes

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Ecriture algébrique d'une fonction logique n'utilisant que des Mintermes ou des Maxtermes.
- Il existe deux possibilités d'écriture :
  - *Forme Canonique Disjonctive ou première forme canonique :*
    Elle s'exprime sous forme d'une somme de Mintermes
  - *Forme Canonique Conjonctive ou seconde forme canonique :*
    Elle s'exprime sous forme d'un produit de Maxtermes

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Fonction Ou-exclusif $\oplus$: la valeur de la fonction est un si une et une seule des deux variables a la valeur un.

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Fonction Ou-exclusif $\oplus$: la valeur de la fonction est un si une et une seule des deux variables a la valeur un.

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Forme Canonique Disjonctive :
  $f(a,b) = a\overline{b} + b\overline{a}$

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Fonction Ou-exclusif $\oplus$: la valeur de la fonction est un si une et une seule des deux variables a la valeur un.

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Forme Canonique Disjonctive :
  $f(a,b) = a\overline{b} + b\overline{a}$ $\rightarrow$ *Somme des Mintermes tel que f(a,b)=1, lu directement de la table*

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Fonction Ou-exclusif $\oplus$: la valeur de la fonction est un si une et une seule des deux variables a la valeur un.

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Forme Canonique Disjonctive :
  $f(a,b) = a\overline{b} + b\overline{a}$ $\rightarrow$ *Somme des Mintermes tel que f(a,b)=1, lu directement de la table*
- Forme Canonique Conjonctive :
  $f(a,b) = (a+b).(\overline{a}+\overline{b})$

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Fonction Ou-exclusif $\oplus$: la valeur de la fonction est un si une et une seule des deux variables a la valeur un.

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Forme Canonique Disjonctive :
  $f(a,b) = a\overline{b} + b\overline{a}$ $\rightarrow$ *Somme des Mintermes tel que f(a,b)=1, lu directement de la table*
- Forme Canonique Conjonctive :
  $f(a,b) = (a+b).(\overline{a}+\overline{b})$ $\rightarrow$ *Produit des Maxtermes tel que f(a,b)=1, cherche les mintermes pour lesquels f(a,b)=0 et on détermine les valeurs de a et de b liées à ce minterme qui nie f(a,b)=0*

Ecriture Algébrique - Forme Canonique

- Exemples

Domaine de définition des fonctions

- Un fonction logique peut-être soit *complétement* soit *incomplétement* définie

Domaine de définition des fonctions

- Un fonction logique peut-être soit *complétement* soit *incomplétement* définie
- Une fonction est complétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction est définie

Domaine de définition des fonctions

- Un fonction logique peut-être soit *complétement* soit *incomplétement* définie
- Une fonction est complétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction est définie
- Une fonction est complétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction est définie

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Domaine de définition des fonctions

- Une fonction est incomplétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction n'est pas définie

Domaine de définition des fonctions

- Une fonction est incomplétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction n'est pas définie
- Une fonction est incomplétement définie lorsque pour toutes les combinaisons de ses variables la valeur de la fonction n'est pas définie

a	b	f
0	0	1
0	1	X
1	0	X
1	1	1

Minimisation de Fonctions

- Utilisation des axiomes de base et des Propriétés qui en découlent

Minimisation de Fonctions

- Utilisation des axiomes de base et des Propriétés qui en découlent
- $f(a,b,c) = ab + bc + c$ en utilisant la loi d'absorption $bc + c = c$ on obtient $f(a,b,c) = ab + c$

Minimisation de Fonctions

- Utilisation des axiomes de base et des Propriétés qui en découlent
- $f(a,b,c) = ab + bc + c$ en utilisant la loi d'absorption $bc + c = c$ on obtient $f(a,b,c) = ab + c$
- $f(a,b) = a.(\overline{a} + b)$ en utilisant l'axiome de la complémentation $a.\overline{a} = 0$ on obtient $f(a,b) = ab$.

Minimisation de Fonctions

- Utilisation des axiomes de base et des Propriétés qui en découlent
- $f(a,b,c) = ab + bc + c$ en utilisant la loi d'absorption $bc + c = c$ on obtient $f(a,b,c) = ab + c$
- $f(a,b) = a.(\overline{a} + b)$ en utilisant l'axiome de la complémentation $a.\overline{a} = 0$ on obtient $f(a,b) = ab$.
- $f(a,b,c) = (a + bc)ab = aab + abbc = ab + abc = ab$ en utilisant successivement la loi d'idempotence et la loi d'absorption.

Minimisation de Fonctions

- Exemples

Minimisation de Fonctions

- Une méthode graphique : Les Tableaux de Karnaugh

Minimisation de Fonctions

- Une méthode graphique : Les Tableaux de Karnaugh
- Les variables sont présentées de façon à faire apparaître la loi d'absorption

Minimisation de Fonctions

- Une méthode graphique : Les Tableaux de Karnaugh
- Les variables sont présentées de façon à faire apparaître la loi d'absorption
- $a.b + a.\overline{b} = a$

Minimisation de Fonctions

- Une méthode graphique : Les Tableaux de Karnaugh
- Les variables sont présentées de façon à faire apparaître la loi d'absorption
- $a.b + a.\overline{b} = a$
- Pour ce faire le code binaire réfléchi ou code de Gray est utilisé

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : étapes

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : étapes
- Regroupement d'ensembles de 2^i cases de même valeur (en général de valeur 1) en maximisant i à chaque fois. Possibilité de regrouper les cases extrêmes

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : étapes
- Regroupement d'ensembles de 2^i cases de même valeur (en général de valeur 1) en maximisant i à chaque fois. Possibilité de regrouper les cases extrêmes
- Regrouper les cases de même valeur restantes avec des cases d'ensembles déjà établis pour avoir 2^j cases en maximisant j

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : étapes
- Regroupement d'ensembles de 2^i cases de même valeur (en général de valeur 1) en maximisant i à chaque fois. Possibilité de regrouper les cases extrêmes
- Regrouper les cases de même valeur restantes avec des cases d'ensembles déjà établis pour avoir 2^j cases en maximisant j
- Ecrire l'équation booléenne algébrique.

Minimisation de Fonctions

- Exemples

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : remarques

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : remarques
- Dans le cas de fonctions incomplétement définies, considérer X comme un 1 afin de maximiser les ensembles

Minimisation de Fonctions

- Les Tableaux de Karnaugh : remarques
- Dans le cas de fonctions incomplétement définies, considérer X comme un 1 afin de maximiser les ensembles
- Méthode limitée à $\sim$ 5 variables.

Minimisation de Fonctions

- Exemples

Plan

Plan