UPMC-Licence d'Ingénierie Mécanique **2017-2018**

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 21 Mars 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Exercice1

Soit $E = C^0[0,1]$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$U = \{u \in E, \text{ tel que } u(0) = 0, u(1) = 1\}$$

a) L'espace U est-il un espace vectoriel ? Justifier votre réponse.

b) Soit u_0 une fonction de E, définie par $u_0(x) = x$. Montrer que l'espace $V = U - \{u_0\} = \{v \in E, \exists u \in U \text{ tel que } v = u - u_0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice2

On considère le problème du transport de chaleur dans un matériau non-homogène, en régime stationnaire. Le problème unidimensionnel peut-être écrit sous la forme d'une équation de diffusion du type :

$$\textbf{(PC)} \quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}(x)\right) + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où u représente la température du fluide et p, q, f sont des fonctions données telles que $p, q \in C^1([0,1])$, $f \in L^2(]0,1[)$.

1. On désigne par V_0, le sous espace de $H^1(]0,1[)$, définit par :

$$V_0 = \{v \in H^1(]0,1[), v(0) = 0\}$$

— Rappeler la définition de l'espace $H^1(]0,1[)$.

— Montrer que V_0 est un sous espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$.

— L'espace V_0 est muni de la norme usuelle de $H^1(]0,1[)$, définie par :

$$\forall v \in H^1(]0,1[) : \ \|v\|_{H^1}^2 = \int_0^1 v(x)^2 dx + \int_0^1 (\frac{dv}{dx}(x))^2 dx = \|v\|_{L^2}^2 + \|\frac{dv}{dx}\|_{L^2}^2. \tag{2}$$

Montrer que $(V_0, \|\cdot\|_{H^1})$ est une espace de Banach. Pour cela on utilisera la caractérisation des fonctions de $H^1(]0,1[)$:

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad v(x) = v(0) + \int_0^x \frac{dv}{dt}(t)dt \tag{3}$$

— L'espace V_0 est-il un espace de Hilbert ? Justifier votre réponse.

2. Ecrire la formulation variationnelle **(PV)** associée au problème **(PC)** : on montrera que si u est solution du **(PC)** alors u est solution de :

$$\textbf{(PV)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ appartenant à } V_0, \text{ solution de :} \\ a(u,v) \ = \ L(v) \ , \ \forall v \in V_0 \end{cases} \tag{4}$$

$$a(u,v) \ = \int_0^1 p(x)\frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx, \tag{5}$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{6}$$

3. L'application $a(.\,,.)$ est-elle symétrique ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que $a(.\,,.)$ est une forme bilinéaire et continue sur V_0.
5. Donner la définition d'une application coercive. Déterminer des conditions suffisantes qu'on doit imposer aux valeurs des fonctions $p(x)$ et $q(x)$ pour que $a(.\,,.)$ soit coercive sur V_0.
6. Montrer que $L(.)$ est une forme linéaire et continue sur V_0.
7. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (**PV**). Précisez le résultat mathématique (théorème) que vous appliquez.
8. Etude du cas particulier $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $f(x) = -x$. Calculer directement la solution exacte du problème continu (**PC**). Vérifier qu'elle appartient à V_0.