

Chapitre 3

Cinématique et lois de comportement des milieux curvilignes élastiques

Sommaire

I	Cinématique, déformations des poutres curvilignes	43
I.1	Hypothèses cinématiques	43
I.2	Déformations	44
I.3	Hypothèse d'Euler-Bernoulli	47
II	Cas des poutres droites tridimensionnelles	48
III	Cas des poutres curvilignes planes à plan de symétrie	53
III.1	Poutres curvilignes planes ($R_t(s) \rightarrow \infty$)	53
III.2	Poutres droites planes ($R_c(s) \rightarrow \infty$)	56
IV	Sollicitations simples	57
IV.1	Effort normal (traction-compression)	57
IV.2	Moment de flexion (flexion pure)	60
IV.3	Effort tranchant	64
IV.4	Moment de torsion	65

I Cinématique, déformations des poutres curvilignes

I.1 Hypothèses cinématiques

On suppose que les sections droites de la poutre se déplacent **sans déformation** ou qu'elles ont un **déplacement de solide rigide** justifié par le fait que les sections droites ont une dimension faible par rapport à la longueur de la poutre.

Donc si M est un point de la section droite d'abscisse s :

$$\vec{u}(M \in S(s)) = \vec{u}(G(s)) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM} \quad (3.1)$$

avec $\vec{u}(G(s)) = \vec{u}(s)$ et $\vec{\omega}(s)$ respectivement le déplacement et la rotation du centre de gravité $G(s)$ de la section droite (S).

On définit le **torseur déplacement** par :

$$\{\mathcal{U}(s)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(G(s)) = \vec{u}(s) \end{array} \right\}_G \quad (3.2)$$

I.2 Déformations

Soit $\{\mathcal{D}(s)\} = \left\{ \frac{d\mathcal{U}(s)}{ds} \right\}_G$ le **torseur des déformations**.

Pour trouver les éléments de réduction en G de $\{\mathcal{D}(s)\}$, on calcule :

- Sa résultante ici **la rotation unitaire** de la section droite

$$\vec{\gamma}(s) = \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \quad (3.3)$$

et on dérive le moment de $\{\mathcal{U}(s)\}$ en un **point fixe** (O par exemple) :

$$\text{comme } \vec{u}(O) = \vec{u}(G) + \vec{OG} \wedge \vec{\omega} \text{ alors } \frac{d\vec{u}(0)}{ds} = \vec{\varepsilon}(0) = \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \frac{d\vec{OG}}{ds} \wedge \vec{\omega}(s) + \vec{OG} \wedge \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds}.$$

On a vu que par définition le vecteur tangent $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{OG}}{ds}$ donc $\vec{\varepsilon}(0) = \vec{\varepsilon}(s) + \vec{OG} \wedge \vec{\gamma}(s)$ avec le **vecteur déformation**

$$\vec{\varepsilon}(s) = \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s). \quad (3.4)$$

Le torseur des déformations est par conséquent :

$$\{\mathcal{D}(s)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}(s) = \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s) \end{array} \right\}_G \quad (3.5)$$

Dans le repère de Frénet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(s) &= \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} [\omega_t(s)\vec{t} + \omega_n(s)\vec{n} + \omega_b(s)\vec{b}] \\ &= \frac{d\omega_t(s)}{ds}\vec{t} + \frac{d\omega_n(s)}{ds}\vec{n} + \frac{d\omega_b(s)}{ds}\vec{b} + \omega_t(s)\frac{d\vec{t}}{ds} + \omega_n(s)\frac{d\vec{n}}{ds} + \omega_b(s)\frac{d\vec{b}}{ds} \end{aligned}$$

or d'après (2.2), (2.5) et (2.6) on sait que :

$$\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{\vec{n}(s)}{R_c(s)}, \quad \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = -\frac{\vec{t}(s)}{R_c(s)} + \frac{\vec{b}(s)}{R_t(s)} \text{ et } \frac{d\vec{b}(s)}{ds} = -\frac{\vec{n}(s)}{R_t(s)}$$

Soit $\vec{\gamma}(s) = \gamma_t(s)\vec{t} + \gamma_n(s)\vec{n} + \gamma_b(s)\vec{b}$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_t(s) &= \frac{d\omega_t(s)}{ds} - \frac{\omega_n(s)}{R_c(s)} \\ \gamma_n(s) &= \frac{d\omega_n(s)}{ds} + \frac{\omega_t(s)}{R_c(s)} - \frac{\omega_b(s)}{R_t(s)} \\ \gamma_b(s) &= \frac{d\omega_b(s)}{ds} + \frac{\omega_n(s)}{R_t(s)} \end{cases} \quad (3.6)$$

De plus, $\vec{\varepsilon}(s) = \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s)$

avec $\vec{t}(s) \wedge \vec{\omega}(s) = \vec{t}(s) \wedge [\omega_t(s)\vec{t} + \omega_n(s)\vec{n} + \omega_b(s)\vec{b}] = \omega_n(s)\vec{b} - \omega_b(s)\vec{n}$.

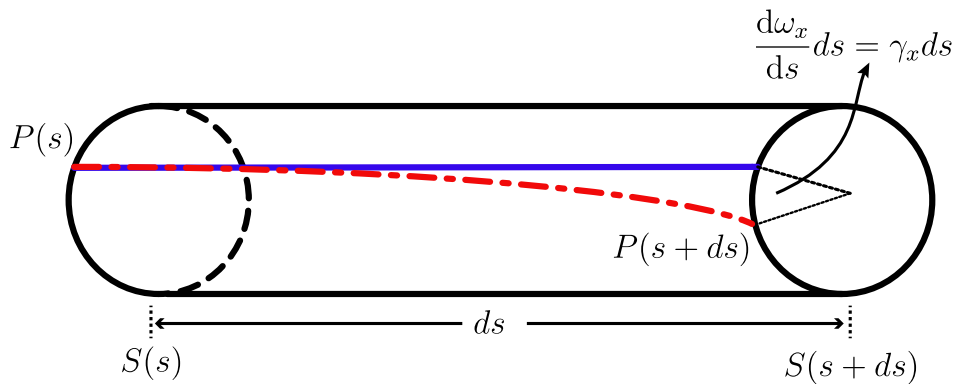
On obtient alors par analogie avec le calcul de $\vec{\gamma}(s)$ que $\vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t(s)\vec{t} + \varepsilon_n(s)\vec{n} + \varepsilon_b(s)\vec{b}$ avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_t(s) &= \frac{du_t(s)}{ds} - \frac{u_n(s)}{R_c(s)} \\ \varepsilon_n(s) &= \frac{du_n(s)}{ds} + \frac{u_t(s)}{R_c(s)} - \frac{u_b(s)}{R_t(s)} - \omega_b(s) \\ \varepsilon_b(s) &= \frac{du_b(s)}{ds} + \frac{u_n(s)}{R_t(s)} + \omega_n(s) \end{cases} \quad (3.7)$$

• Interprétation physique de $\vec{\gamma}$ et $\vec{\varepsilon}$:

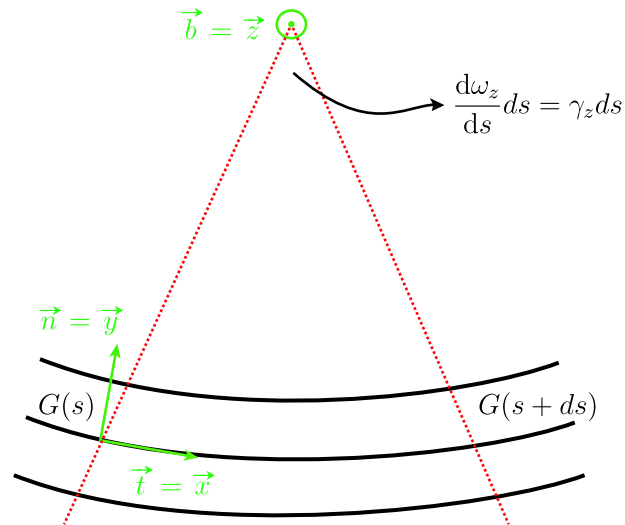
On se place, pour plus de facilité d'interprétation, dans le cas où $\vec{t} = \vec{x}$, $\vec{n} = \vec{y}$ et $\vec{b} = \vec{z}$ (par conséquent ici $R_t(s) \rightarrow \infty$ et $R_c(s) \rightarrow \infty$)

$$\square \quad \gamma_t = \gamma_x = \frac{d\omega_x}{ds}$$



γ_t correspond donc à une **déformation unitaire de torsion** définie à un gauchissement de la section droite près (voir partie Solides du cours).

$$\square \quad \gamma_b = \gamma_z = \frac{d\omega_z}{ds}$$



On peut utiliser le même raisonnement pour γ_n .

γ_b, γ_n sont les **rotations unitaires de flexion** (changement d'angle).

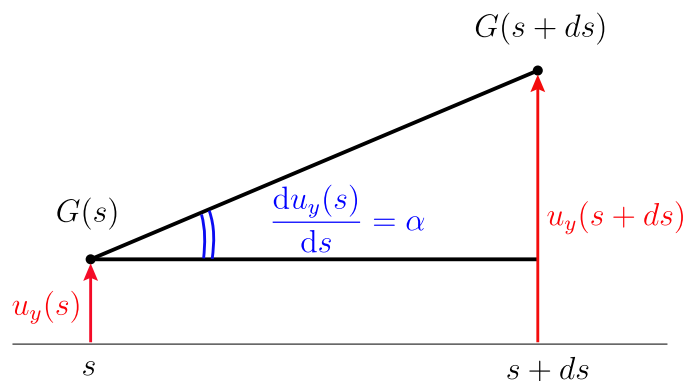
$$\square \quad \varepsilon_t = \varepsilon_x = \frac{du_x}{ds} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}).\vec{x} = \frac{du_x}{ds}$$



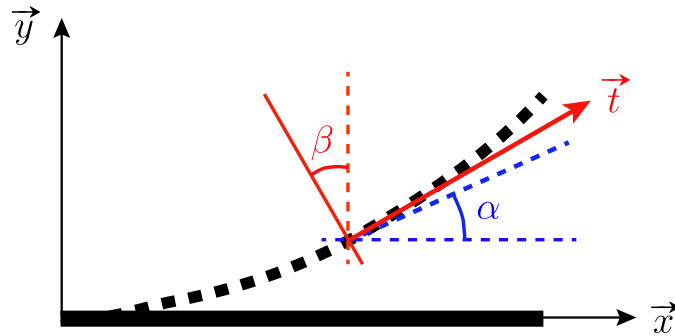
ε_t est l'**allongement unitaire** (ε_{xx} en 3D).

$$\square \quad \varepsilon_n = \varepsilon_y = \frac{du_y}{ds} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}).\vec{y} = \frac{du_y}{ds} - \omega_z$$

★ Le terme $\frac{du_y}{ds}$ correspond à la rotation du vecteur $\overrightarrow{G(s)G(s+ds)}$ dans le plan (xy) notée ici α :



★ Le terme $\vec{x} \wedge \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \wedge \vec{x})$ correspond à la variation du vecteur tangent \vec{t} considéré comme lié à la section droite



Ici $-(\vec{\omega} \wedge \vec{x})_y = \omega_z$ est la rotation dans le plan (xy) de la section droite $S(s)$ notée β .

$\varepsilon_y = \frac{du_y}{ds} - (\vec{\omega} \wedge \vec{x})_y = \alpha - \beta$ compare donc les rotations de la tangente à la fibre $G(s)G(s+ds)$ et de la section droite $S(s)$ et représente donc l'effet de l'effort tranchant (ε_{xy} en 3D).

Remarque :

Si $\alpha - \beta \neq 0$ alors la section droite ne reste pas perpendiculaire à la déformée de la ligne moyenne.

On peut utiliser le même raisonnement pour $\varepsilon_b = \varepsilon_z = \frac{du_z}{ds} + (\vec{x} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{z} = \frac{du_z}{ds} + \omega_y$.

$\varepsilon_n, \varepsilon_b$ représentent donc l'effet de l'effort tranchant.

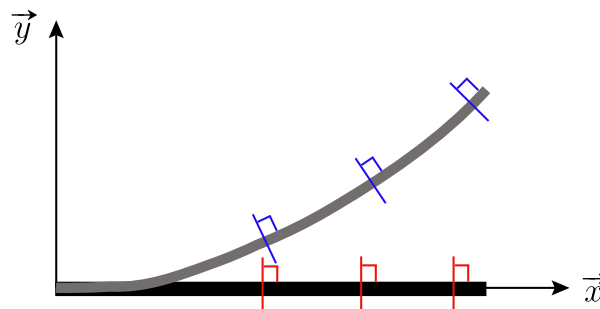
I.3 Hypothèse d'Euler-Bernoulli

Hypothèse : On néglige l'effet de l'effort tranchant dans la déformation.

$$\varepsilon_n(s) = \varepsilon_b(s) = 0 \quad (3.8)$$

Dans ce cas, $\alpha = \beta$ donc :

Toute section droite reste perpendiculaire à la déformée de la ligne moyenne au cours de la déformation.



Ceci a été constaté en 3D (au 1er ordre) pour la flexion d'une poutre par un couple appliqué à l'une des extrémités.

Remarque :

Négliger les efforts tranchants (T_n et T_b) dans les lois de comportement (pour les composantes des déformations) ne veut pas dire qu'ils disparaissent dans les équations d'équilibre.

II Cas des poutres droites tridimensionnelles

On va considérer une poutre droite avec $s \equiv x$; $\vec{t} = \vec{x}$; $\vec{n} = \vec{y}$ et $\vec{b} = \vec{z}$.

On part alors du champ de déplacement (3.1)

$$\vec{u}(M \in S(s)) = \vec{u}(G(s)) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM} \quad (3.9)$$

$$\text{avec : } \vec{u}(M(x, y, z)) = \begin{pmatrix} u_x^M(x, y, z) \\ u_y^M(x, y, z) \\ u_z^M(x, y, z) \end{pmatrix}; \quad \vec{u}(G(x)) = \begin{pmatrix} u_x^G(x) \\ u_y^G(x) \\ u_z^G(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ u_y(x) \\ u_z(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{\omega}(x) = \begin{pmatrix} \omega_x(x) \\ \omega_y(x) \\ \omega_z(x) \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où le **modèle de Timoshenko** :

$$\begin{cases} u_x^M(x, y, z) = u_x(x) + z \omega_y(x) - y \omega_z(x) \\ u_y^M(x, y, z) = u_y(x) - z \omega_x(x) \\ u_z^M(x, y, z) = u_z(x) + y \omega_x(x) \end{cases} \quad (3.10)$$

Calcul des déformations :

Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), les déformations s'écrivent :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + {}^T \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}) \quad (3.11)$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x^M}{\partial x} = \frac{du_x}{dx} + z \frac{d\omega_y}{dx} - y \frac{d\omega_z}{dx} \\ 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x^M}{\partial y} + \frac{\partial u_y^M}{\partial x} = -\omega_z + \frac{du_y}{dx} - z \frac{d\omega_x}{dx} \\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x^M}{\partial z} + \frac{\partial u_z^M}{\partial x} = \omega_y + \frac{du_z}{dx} + y \frac{d\omega_x}{dx} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Soit

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

avec l'allongement unitaire dans la direction de la ligne moyenne :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x + z \gamma_y - y \gamma_z \text{ où } \varepsilon_x = \frac{du_x}{dx}; \gamma_y = \frac{d\omega_y}{dx} \text{ et } \gamma_z = \frac{d\omega_z}{dx};$$

et les distorsions :

$$2\varepsilon_{xy} = \varepsilon_y - z \gamma_x \text{ où } \varepsilon_y = \frac{du_y}{dx} - \omega_z \text{ et } \gamma_x = \frac{d\omega_x}{dx}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \varepsilon_z + y \gamma_x \text{ où } \varepsilon_z = \frac{du_z}{dx} + \omega_y.$$

Un tel tenseur des déformations entraîne des contraintes σ_{yy} et σ_{zz} **non nulles** (d'après la loi de comportement $\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda \text{Tr} \bar{\bar{\varepsilon}} \bar{\mathbb{I}}$) **mais** on va les négliger par cohérence avec la théorie des milieux curvilignes (les deux dimensions transversales sont petites devant la dimension longitudinale).

Par conséquent, le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Autre explication : Le principe de Saint-Venant ([H4] chapitre 1)

La surface latérale S_{lat} est libre d'effort donc $\bar{\sigma} \cdot \vec{n}_{lat} = \vec{0}$ avec $\vec{n}_{lat} = n_y \vec{y} + n_z \vec{z}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0 \\ \sigma_{yy} n_y = 0 \\ \sigma_{zz} n_y = 0 \end{cases}$$

on en déduit alors que $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ sur S_{lat} .

Loi de comportement linéaire

D'après la loi de Hooke (comportement linéaire) : $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \bar{\sigma} \bar{\mathbb{I}}$ où E représente le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \implies \boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \implies \boxed{2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\mu}} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz} \implies \boxed{2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\mu}} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

avec $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de rigidité au cisaillement.

On peut alors établir aisément le lien entre les contraintes et les éléments de réduction du torseur de cohésion :

$$\vec{\mathcal{R}}(x) = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \, dydz \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_G(x) = \vec{\mathcal{M}}(x) = \iint_S \vec{GM} \wedge (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \, dydz \quad (3.18)$$

$$\bullet \vec{\mathcal{R}}(x) = \iint_S (\sigma_{xx} \vec{x} + \sigma_{xy} \vec{y} + \sigma_{xz} \vec{z}) \, dydz = N(x) \vec{x} + T_y(x) \vec{y} + T_z(x) \vec{z}$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{N(x) = \iint_S \sigma_{xx} \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{T_y(x) = \iint_S \sigma_{xy} \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{T_z(x) = \iint_S \sigma_{xz} \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

De même,

$$\begin{aligned} \bullet \vec{\mathcal{M}}(x) &= \iint_S (y \vec{y} + z \vec{z}) \wedge (\sigma_{xx} \vec{x} + \sigma_{xy} \vec{y} + \sigma_{xz} \vec{z}) \, dydz \\ &= \iint_S [(y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) \vec{x} + z \sigma_{xx} \vec{y} - y \sigma_{xx} \vec{z}] \, dydz \\ &= M_t(x) \vec{x} + M_y(x) \vec{y} + M_z(x) \vec{z} \end{aligned}$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{M_t(x) = \iint_S (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{M_y(x) = \iint_S z \sigma_{xx} \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{M_z(x) = \iint_S -y \sigma_{xx} \, dydz} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \iint_S \sigma_{xx} dydz \stackrel{(3.15)}{=} \iint_S E \varepsilon_{xx} dydz \\
 &= \iint_S E (\varepsilon_x + z \gamma_y - y \gamma_z) dydz \\
 &= ES \varepsilon_x + Em_{Gy} \gamma_y - Em_{Gz} \gamma_z
 \end{aligned}$$

On suppose que le matériau est homogène.

D'autre part, les moments statiques $m_{Gy} = \iint_S z dydz = 0$ et $m_{Gz} = \iint_S y dydz = 0$ d'où :

$$N(x) = ES \varepsilon_x(x) \quad (3.25)$$

Comme

$$\begin{aligned}
 M_y(x) &= \iint_S z \sigma_{xx} dydz \\
 &= \iint_S E (z \varepsilon_x + z^2 \gamma_y - yz \gamma_z) dydz \\
 &= E (m_{Gy} \varepsilon_x + I_{Gy} \gamma_y - I_{Gyz} \gamma_z)
 \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$M_y(x) = EI_{Gy} \gamma_y(x) - EI_{Gyz} \gamma_z(x) \quad (3.26)$$

avec $I_{Gy} = \iint_S z^2 dydz$ le moment quadratique de l'aire S par rapport à l'axe $(G\vec{y})$ et $I_{Gyz} = \iint_S yz dydz$ le produit quadratique de l'aire S par rapport au plan $(G\vec{y}\vec{z})$.

De même

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= \iint_S -y \sigma_{xx} dydz \\
 &= \iint_S E (-y \varepsilon_x - zy \gamma_y + y^2 \gamma_z) dydz \\
 &= E (-m_{Gz} \varepsilon_x - I_{Gyz} \gamma_y + I_{Gz} \gamma_z)
 \end{aligned}$$

on peut donc écrire :

$$M_z(x) = -EI_{Gyz} \gamma_y(x) + EI_{Gz} \gamma_z(x) \quad (3.27)$$

avec $I_{Gz} = \iint_S y^2 dydz$ le moment quadratique de l'aire S par rapport à l'axe $(G\vec{z})$.

On obtient alors sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_y(x) \\ \gamma_z(x) \end{pmatrix}$$

et d'après la méthode de Cramer :

$$\begin{pmatrix} \gamma_y(x) \\ \gamma_z(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{E\Delta} \begin{pmatrix} I_{Gz} & I_{Gyz} \\ I_{Gyz} & I_{Gy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

avec $\Delta = I_{Gy}I_{Gz} - (I_{Gyz})^2$.

Comme $\sigma_{xx}(x, y, z) = E(\varepsilon_x(x) + z \gamma_y(x) - y \gamma_z(x))$ avec $\varepsilon_x(x) = \frac{N(x)}{ES}$, on obtient alors :

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{N(x)}{E} + \frac{z}{\Delta} [I_{Gz}M_y(x) + I_{Gyz}M_z(x)] - \frac{y}{\Delta} [I_{Gyz}M_y(x) + I_{Gy}M_z(x)]. \quad (3.29)$$

Remarque : La plupart du temps $(G\vec{y})$ et $(G\vec{z})$ sont axes principaux d'inertie (symétrie dans la section droite), on a alors $I_{Gyz} = 0$.

Le système (3.28) est alors découplé, on obtient $\gamma_y(x) = \frac{M_y(x)}{EI_{Gy}}$ et $\gamma_z(x) = \frac{M_z(x)}{EI_{Gz}}$ d'où

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \underbrace{\frac{N(x)}{S}}_{\text{traction-compression}} + \underbrace{z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}}}_{\text{flexion}} \quad (\text{évolution linéaire en } y \text{ et } z) \quad (3.30)$$

D'après (3.22) :

$$\begin{aligned} M_t(x) &= \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dydz \\ &= \iint_S \mu (y 2\varepsilon_{xz} - z 2\varepsilon_{xy}) dydz \\ &= \iint_S \mu \{y (\varepsilon_z + y\gamma_x) - z (\varepsilon_y - z\gamma_x)\} dydz \\ &= \mu \{m_{Gz} \varepsilon_z + I_{Gz} \gamma_x - m_{Gy} \varepsilon_y + I_{Gy} \gamma_x\} \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$M_t(x) = \mu (I_{Gy} + I_{Gz}) \gamma_x = \mu I_G \gamma_x \quad (3.31)$$

avec I_G le moment quadratique polaire de la surface S par rapport au point G (souvent appelé J).

D'après (3.20) :

$$T_y(x) = \iint_S \sigma_{xy} dydz = \iint_S \mu 2\varepsilon_{xy} dydz = \mu \iint_S (\varepsilon_y - z\gamma_x) dydz = \mu (S\varepsilon_y - m_{Gy}\gamma_x) \text{ or } m_{Gy} = 0 \text{ soit :}$$

$$T_y(x) = \mu S \varepsilon_y(x) = \mu S \left(\frac{du_y}{dx}(x) - \omega_z(x) \right) \quad (3.32)$$

de même, on obtient :

$$T_z(x) = \mu S \varepsilon_z(x) = \mu S \left(\frac{du_z}{dx}(x) + \omega_y(x) \right). \quad (3.33)$$

Remarque :

En utilisant l'**hypothèse d'Euler-Bernoulli**, on ne prend pas en compte l'effet des efforts

tranchants donc $\varepsilon_y(x) = 0 \Rightarrow \omega_z(x) = \frac{du_y}{dx}(x)$ et $\varepsilon_z(x) = 0 \Rightarrow \omega_y(x) = -\frac{du_z}{dx}(x)$.

On obtient finalement : $\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu(\varepsilon_y - z\gamma_x)$ soit :

$$\sigma_{xy}(x, z) = \underbrace{\frac{T_y(x)}{S}}_{\text{cisaillement}} - z \underbrace{\frac{M_t(x)}{I_G}}_{\text{torsion}} \quad (3.34)$$

De même, $\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu(\varepsilon_z + y\gamma_x)$ soit :

$$\sigma_{xz}(x, y) = \underbrace{\frac{T_z(x)}{S}}_{\text{cisaillement}} + y \underbrace{\frac{M_t(x)}{I_G}}_{\text{torsion}} \quad (3.35)$$

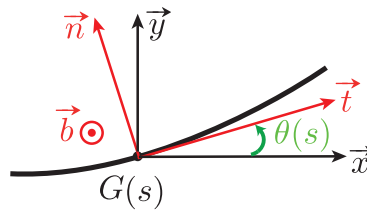
Remarque :

Les termes $\frac{T_y(x)}{S}$ et $\frac{T_z(x)}{S}$ sont des résultats non-exacts, il faut introduire la notion de section réduite (voir Section IV.3.)

III Cas des poutres curvilignes planes à plan de symétrie

III.1 Poutres curvilignes planes ($R_t(s) \rightarrow \infty$)

Le problème étant plan, les résultantes sont dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) et les moments sont portés par \vec{z} :



On écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{f}(s) = p(s)\vec{t}(s) + q_n(s)\vec{n}(s) \\ \vec{m}(s) = m_z(s)\vec{z} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(s) = N(s)\vec{t}(s) + T_n(s)\vec{n}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}(s) = M_z(s)\vec{z} \end{cases} \quad (3.37)$$

On obtient comme équations d'équilibre locales (d'après (2.64) et (2.65)) :

$$\begin{cases} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{T_n(s)}{R_c(s)} + p(s) = 0 \\ \frac{dT_n(s)}{ds} + \frac{N(s)}{R_c(s)} + q_n(s) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\frac{dM_z(s)}{ds} + T_n(s) + m_z(s) = 0 \quad (3.39)$$

avec les conditions de saut en $s = s_i$:

$$\left[\left[\vec{\mathcal{R}} \right] \right] (s_i) + \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{condition de saut pour les forces}) \quad (3.40)$$

$$\left[\left[\vec{\mathcal{M}} \right] \right] (s_i) + \vec{C}_i = \vec{0} \quad (\text{condition de saut pour les moments}). \quad (3.41)$$

L'expression de $\vec{\gamma}$ et $\vec{\varepsilon}$ sont pour un problème plan :

$$\begin{cases} \vec{\gamma}(s) = \gamma_z(s) \vec{z} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t(s) \vec{t}(s) + \varepsilon_n(s) \vec{n}(s) \end{cases} \quad (3.42)$$

On obtient d'après (3.7) et (3.6) :

$$\gamma_z(s) = \frac{d\omega_z(s)}{ds} + \frac{\omega_n(s)}{R_t(s)} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_t(s) = \frac{du_t(s)}{ds} - \frac{u_n(s)}{R_c(s)} \\ \varepsilon_n(s) = \frac{du_n(s)}{ds} + \frac{u_t(s)}{R_c(s)} - \frac{u_b(s)}{R_t(s)} - \omega_z(s) \end{cases} \quad (3.44)$$

d'où les lois de comportement par analogie avec les poutres droites 3D :

$$\begin{cases} N(s) = ES \varepsilon_t(s) = ES \left(\frac{du_t(s)}{ds} - \frac{u_n(s)}{R_c(s)} \right) \\ T_n(s) = \mu S \varepsilon_n(s) = \mu S \left(\frac{du_n(s)}{ds} + \frac{u_t(s)}{R_c(s)} - \omega_z(s) \right) \\ M_z(s) = EI_{Gz} \gamma_z(s) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(s)}{ds}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Remarque :

Si on utilise l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. On néglige alors l'effet de l'effort tranchant

dans la déformation (toute section droite reste perpendiculaire à la déformée de la ligne moyenne au cours de la déformation) :

$$\begin{cases} N(s) = ES \varepsilon_t(s) = ES \left(\frac{du_t(s)}{ds} - \frac{u_n(s)}{R_c(s)} \right) \\ M_z(s) = EI_{Gz} \gamma_z(s) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(s)}{ds} \end{cases} \quad (3.46)$$

avec la liaison interne ($\varepsilon_n(s) = 0$) :

$$\omega_z(s) = \frac{du_n(s)}{ds} + \frac{u_t(s)}{R_c(s)} \quad (3.47)$$

A toutes ces équations il faut rajouter les conditions aux limites en $s_0 = 0$ ou $s_0 = \ell$:

◦ Encastrement :

$$\begin{cases} \vec{u}(s_0) = \vec{0} \\ \vec{\omega}(s_0) = \vec{0} \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow u_t(s_0) = u_n(s_0) = \omega_z(s_0) = 0$$

◦ Extrémité libre :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(s_0) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}(s_0) = \vec{0} \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow N(s_0) = T_n(s_0) = M_z(s_0) = 0$$

◦ Appui simple mobile dans la direction $\vec{\delta}$:

$$\begin{cases} \vec{u}(s_0) \cdot \vec{\delta} = 0 \\ \vec{\mathcal{R}}(s_0) - [\vec{\mathcal{R}}(s_0) \cdot \vec{\delta}] \vec{\delta} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}(s_0) = \vec{0} \end{cases} \quad (3.50)$$

Prenons par exemple $\vec{\delta} = \vec{y}$ alors

$$\begin{cases} \vec{u}(s_0) \cdot \vec{y} = 0 \\ \vec{\mathcal{R}}(s_0) - T_y(s_0) \vec{y} = N(s_0) \vec{x} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}(s_0) = M_z(s_0) \vec{z} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow u_y(s_0) = N(s_0) = M_z(s_0) = 0$$

III.2 Poutres droites planes ($R_c(s) \rightarrow \infty$)



On obtient pour les poutres droites planes dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) :
 $s \equiv x$; $\vec{t}(s) = \vec{x}$; $\vec{n}(s) = \vec{y}$; $\vec{b}(s) = \vec{z}$

d'où les équations d'équilibre locales ($R_c(s) \rightarrow \infty$ dans (3.38) et (3.39)) :

$$\begin{cases} \frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0 \\ \frac{dT_y(x)}{dx} + f_y(x) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\frac{dM_z(x)}{dx} + T_y(x) + m_z(x) = 0 \quad (3.53)$$

auxquelles on doit rajouter les conditions de saut en $x = x_i$ ainsi que les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$.

Les lois de comportement pour le modèle de Timoshenko ($R_c(s) \rightarrow \infty$ dans (3.45)) sont :

$$\begin{cases} N(x) = ES \varepsilon_x(x) = ES \frac{du_x(x)}{dx} \\ T_y(x) = \mu S \varepsilon_y(x) = \mu S \left(\frac{du_y(x)}{dx} - \omega_z(x) \right) \\ M_z(x) = EI_{Gz} \gamma_z(x) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(x)}{dx} \end{cases} \quad (3.54)$$

Si l'on utilise l'hypothèse d'Euler-Bernoulli (l'effet de l'effort tranchant est négligé) on obtient alors :

$$\begin{cases} N(x) = ES \frac{du_x(x)}{dx} \\ M_z(s) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(x)}{dx} = EI_{Gz} \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} \end{cases} \quad (3.55)$$

car on a la liaison interne ($\varepsilon_y(x) = 0$) :

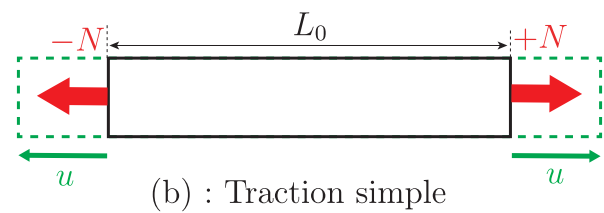
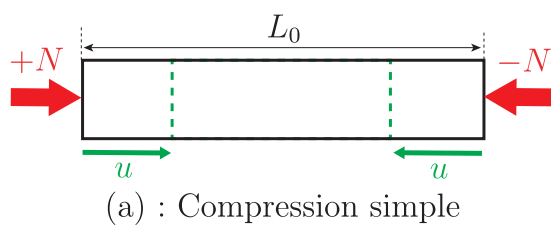
$$\omega_z(x) = \frac{du_y(x)}{dx} \quad (3.56)$$

IV Sollicitations simples

IV.1 Effort normal (traction-compression)

Une poutre est sollicitée en traction-compression si le torseur de cohésion est $\left\{ \begin{array}{c} N(x) \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$.

Tous les points d'une section plane subissent le même raccourcissement (a) ou le même allongement (b).

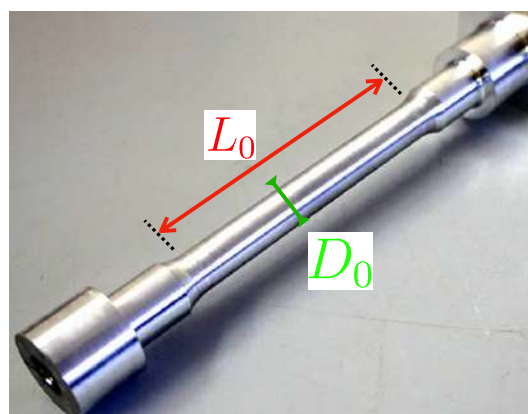


La composante σ_{xx} du tenseur des contraintes est constante dans toute la section droite (répartition des contraintes uniforme).

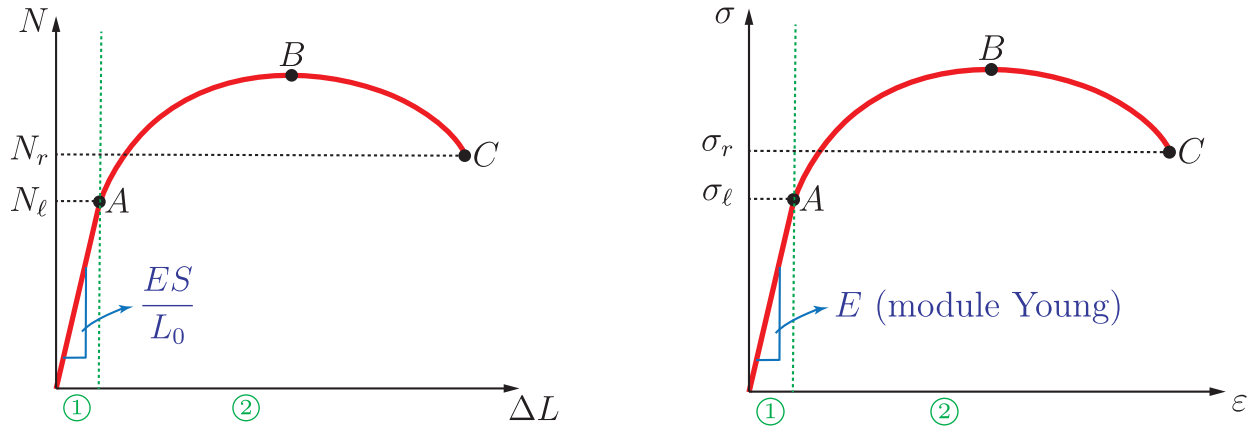
$$\Rightarrow N = \iint_S \sigma_{xx} dS = \sigma_{xx} S \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{xx} = \frac{N}{S} = \text{cste}} \quad (3.57)$$

◦ Essai de traction :

On réalise un essai de traction sur une éprouvette cylindrique (en acier par exemple) :



La **zone utile** de l'éprouvette a une longueur de référence L_0 et une section S dont le diamètre est D_0 . On mesure au cours de l'essai la force exercée sur l'éprouvette qui est ici l'effort normal N , ainsi que l'allongement ΔL de la zone utile ce qui nous donne les figures suivantes pour des matériaux faiblement ductiles (aluminium par exemple) :



On obtient le même genre de courbe en représentant $\sigma = \sigma_{xx}$ en fonction de $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$.

Cette courbe comporte 2 zones distinctes :

① : zone où l'évolution de l'effort normal en fonction de l'allongement est linéaire qui est la **zone élastique** (déformation élastique). On peut alors appliquer la loi de Hooke, si l'on supprime la charge appliquée l'éprouvette reprend sa longueur initiale.

Cette zone va nous permettre de calculer le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . En utilisant la loi de Hooke, $\sigma_{xx} = \frac{N}{S} = E\varepsilon_{xx}$ avec $\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L_0}$ l'allongement relatif longitudinal, on peut obtenir alors que $E = \frac{N}{S} \frac{L_0}{\Delta L}$ (E est exprimé en Pa).

On constate qu'en plus de la déformation longitudinale ε_{xx} , le matériau subit aussi une déformation dans la direction transversale (contraction relative longitudinale $\frac{\Delta d}{D_0}$).

On peut écrire que $\frac{\Delta d}{D_0} = -\nu \frac{\Delta L}{L_0}$, par conséquent $\nu = -\frac{\Delta d}{D_0} \frac{L_0}{\Delta L}$ (grandeur sans unité).

Remarque : Si $\varepsilon_{xx} > 0$ alors $\frac{\Delta L}{L_0} > 0$ donc $\frac{\Delta d}{D_0} < 0$ ($\nu > 0$)

② : **zone plastique** (déformation permanente), la rupture se produit au point C.

Les essais permettent de calculer :

- σ_ℓ qui est la limite élastique (en A)
- σ_r qui est la contrainte de rupture (en C).

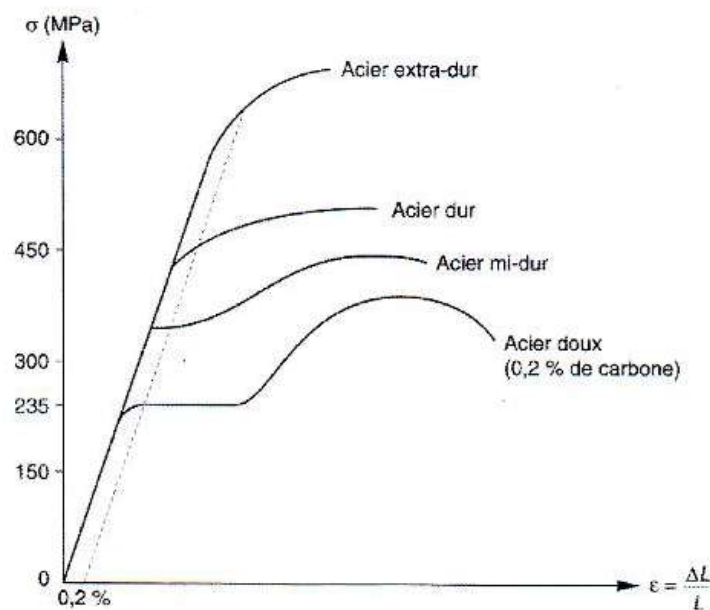
Le tableau ci-dessous nous donne quelques ordres de grandeurs pour le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν :

Matériau	Acier	Cuivre	Aluminium	Verre	Béton	Caoutchouc
$E[MPa]$	210 000	110 000	70 000	60 000	10 000	200
$\nu [-]$	0.29	0.35	0.34	0.24	0.2	0.5

On constate que les courbes de traction varient beaucoup en fonction du type de matériau utilisé. On peut l'illustrer sur le matériau acier.

En effet, il existe de nombreux aciers, ceux-ci peuvent se classer en fonction de leur teneur en carbone (Tableau et figure issus de <https://notech.franceserv.com/materiau-acier.html>) :

	Teneur en carbone	Résistance à la traction	Utilisation
Acier doux	0.15 à 0.2 %	400 MPa	Aciers de construction
Acier mi-durs	0.3 à 0.6 %	600 MPa	Rails, armatures de béton armé
Acier extra-durs	0.6 à 0.75 %	700 MPa	Outils



On remarque que la teneur en carbone a pour conséquence :

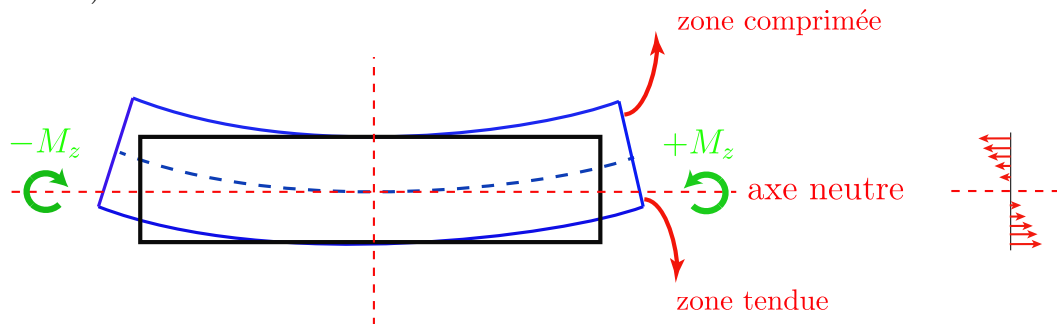
- l'accroissement de la résistance à la traction
- le raccourcissement du palier de ductilité
- la diminution de l'allongement de la rupture

Pour un acier doux, la courbe s'infléchit et se stabilise autour d'une valeur quasiment constante avant de croître à nouveau, de passer par un maximum et redescendre.

IV.2 Moment de flexion (flexion pure)

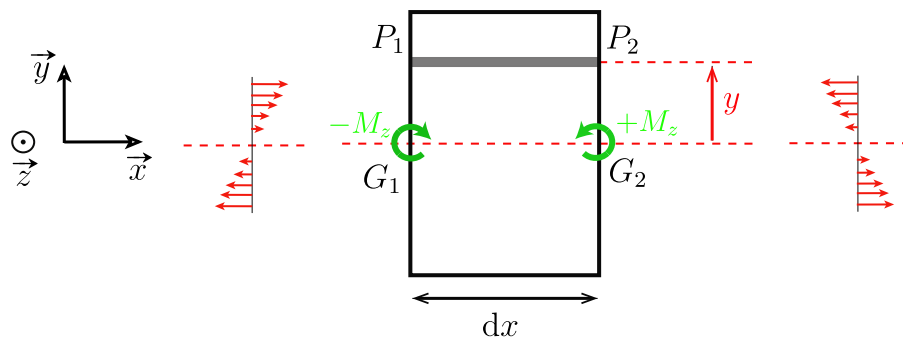
Une poutre est sollicitée en **flexion pure** si le torseur de cohésion est $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ M_z \vec{z} \end{array} \right\}_G$.

Soit une poutre infiniment longue. On applique à ses deux extrémités deux couples opposés $\pm M_z \vec{z}$. Le moment de flexion dans la poutre est alors constant, la déformation est la même en tous points. La **fibre neutre** se déforme selon un cercle contenu dans le plan moyen. Les fibres s'incurvent suivant des axes de cercles parallèles. Certaines sont **tendues**, d'autres **comprimées**. Entre ces deux zones, une partie se déforme sous contrainte nulle (**axe neutre**).

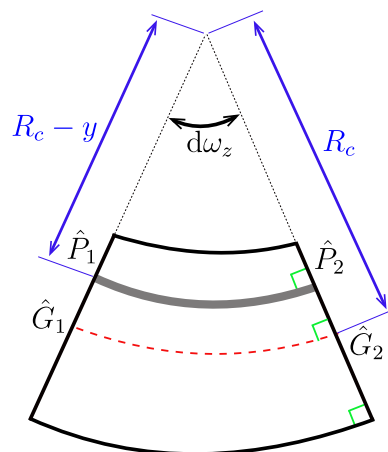


IV.2.a Calcul du point de vue géométrique des contraintes normales

On isole une portion de courbe de longueur dx soumise à une flexion pure



on obtient après déformation :



On peut alors calculer ε_{xx} :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\hat{P}_1 \hat{P}_2 - P_1 P_2}{P_1 P_2} = \frac{(R_c - y) d\omega_z - dx}{dx} = (R_c - y) \frac{d\omega_z}{dx} - 1 \text{ où } R_c \text{ est le rayon de courbure.}$$

Or par définition $\frac{1}{R_c} = \frac{d\omega_z}{dx}$ on a alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(R_c - y)}{R_c} - 1 = -\frac{y}{R_c} \quad \text{d'où} \quad \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -\frac{Ey}{R_c} = -Ey \frac{d\omega_z}{dx} \quad (3.58)$$

D'après les lois de comportement (3.45) ou (3.46) on sait que $M_z(x) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(x)}{dx}$ on a alors :

$$\sigma_{xx} = -y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \quad (3.59)$$

IV.2.b Dimensionnement

On suppose que le matériau utilisé par la suite a une même limite élastique en traction et compression σ_ℓ et que le moment quadratique $I_{Gz} \equiv I$ est constant le long de la poutre.

Pour une section donnée, la valeur maximale de la contrainte normale est obtenue pour les points les plus éloignés de la ligne moyenne :

$$|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|M_z(x) y_{max}|}{I} \quad (3.60)$$

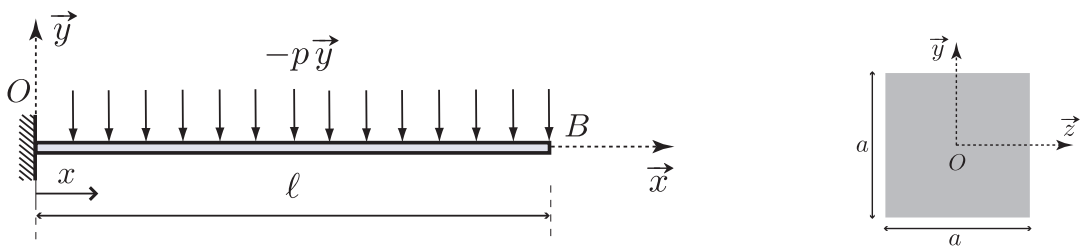
et pour l'ensemble de la poutre, on aura :

$$|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|M_z(x)_{max}| |y_{max}|}{I} \leq \sigma_\ell. \quad (3.61)$$

Tant que $|\sigma_{xx}|_{max}$ reste inférieure à la limite élastique, la poutre est totalement dans le domaine élastique.

Exemple :

On reprend la poutre de l'exemple 1 de la Section VI du chapitre 2 ayant une section droite carrée de côté a .



On cherche à déterminer le a_{min} pour rester dans le domaine élastique.

On a obtenu au chapitre 2 que le moment fléchissant suivant z est : $M_z(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2$
 donc $|M_z(x)_{max}| = \frac{p\ell^2}{2}$.

D'autre part le moment quadratique I_{Gz} est ici $I = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} y^2 dy dz = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{a^4}{12}$.

Par conséquent, $|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|M_z(x)_{max}| |y_{max}|}{I} = \frac{\frac{p\ell^2}{2} \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} = \frac{3p\ell^2}{a^3} \leq \sigma_\ell$,

d'où $a \geq \left[\frac{3p\ell^2}{\sigma_\ell} \right]^{1/3} = a_{min}$.

IV.2.c Equation de la déformée

Sous l'action de la flexion, la ligne moyenne de la poutre va se déformer et son équation caractéristique après déformation est $\vec{u} = u_y(x) \vec{y}$. La ligne moyenne après déformation est aussi appelée **déformée**. La valeur de la déformée en un point est appelée **flèche**.

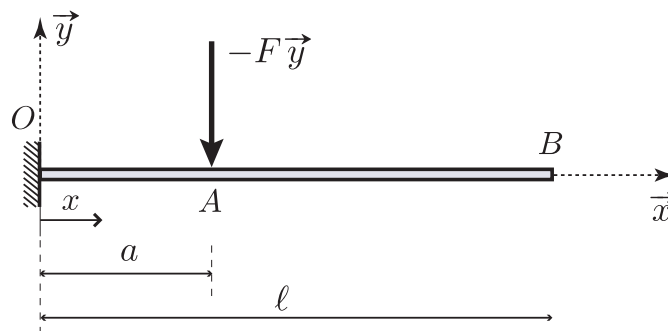
Pour une section symétrique, la relation de comportement entre la flèche et le moment fléchissant est $M_z(x) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z(x)}{dx}$.

Si l'on se place dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli (effets de l'effort tranchant négligés) on a la relation $\omega_z(x) = \frac{du_y(x)}{dx}$, on obtient alors $M_z(x) = EI_{Gz} \frac{d^2u_y(x)}{dx^2}$.

L'intégration de cette équation et la prise en compte des conditions aux limites va permettre de déterminer la forme de $u_y(x)$.

Exemple :

On reprend la poutre de l'exemple 2 de la Section VI du chapitre 2.



On cherche à déterminer le déplacement transverse $u_y(x)$ en tout point de la poutre.

D'après le chapitre 2, le moment fléchissant pour cette poutre est :

$$0 < x < a : M_z^{(1)}(x) = F(x - a)$$

$$a < x < \ell : M_z^{(2)}(x) = 0$$

◇ $0 < x < a$:

$$M_z^{(1)}(x) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z^{(1)}(x)}{dx} = F(x - a) \implies \omega_z^{(1)}(x) = \frac{F}{EI_{Gz}} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) + C_1$$

L'encastrement en $x = 0$ impose que $\omega_z^{(1)}(0) = 0$ soit $C_1 = 0$.

$$\omega_z^{(1)}(x) = \frac{du_y^{(1)}(x)}{dx} \text{ on obtient alors } u_y^{(1)}(x) = \frac{F}{EI_{Gz}} \left(\frac{x^3}{6} - a \frac{x^2}{2} \right) + C_2.$$

L'encastrement en $x = 0$ impose que $u_y^{(1)}(0) = 0$ soit $C_2 = 0$,

finalement $u_y^{(1)}(x) = \frac{Fx^2}{6EI_{Gz}} (x - 3a) .$

◇ $a < x < \ell$:

$$M_z^{(2)}(x) = EI_{Gz} \frac{d\omega_z^{(2)}(x)}{dx} = 0 \implies \omega_z^{(2)}(x) = \bar{C}_1$$

or d'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli $\omega_z^{(2)}(x) = \frac{du_y^{(2)}(x)}{dx} \implies u_y^{(2)}(x) = \bar{C}_1 x + \bar{C}_2.$

Afin de conserver l'intégrité de la structure en $x = a$, il faut assurer :

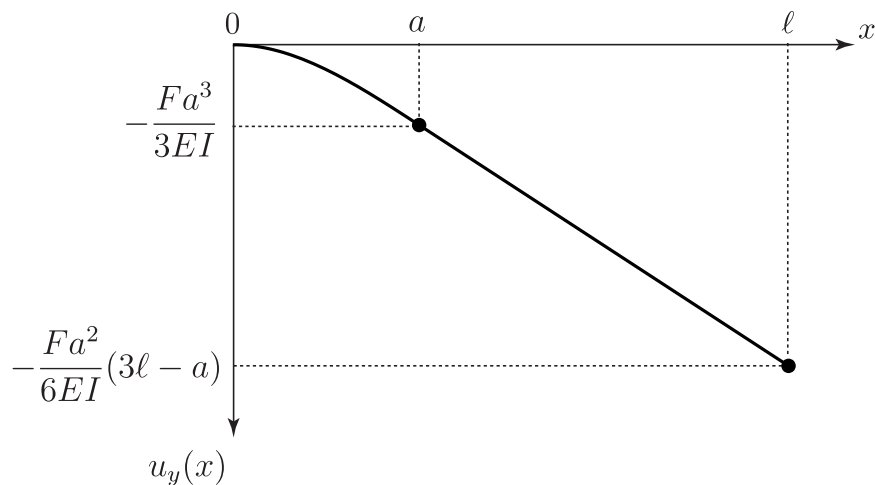
- i) la continuité de la rotation de la section droite ($\omega_z^{(2)}(a) = \omega_z^{(1)}(a)$)
- ii) la continuité du déplacement ($u_y^{(2)}(a) = u_y^{(1)}(a)$)

On a alors :

i) $\bar{C}_1 = \frac{F}{EI_{Gz}} \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \right) = -\frac{Fa^2}{2EI_{Gz}}$

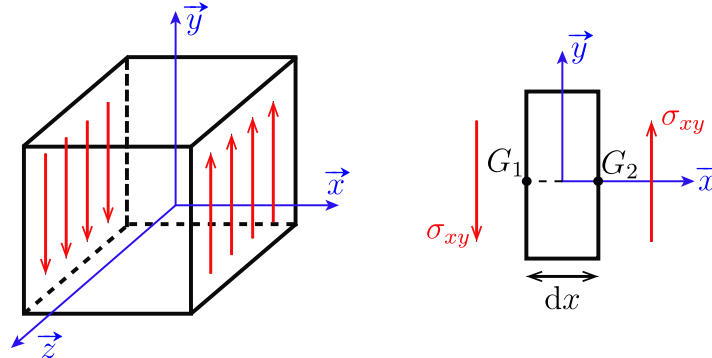
ii) $\bar{C}_1 a + \bar{C}_2 = -\frac{Fa^3}{2EI_{Gz}} + \bar{C}_2 = \frac{Fa^3}{6EI_{Gz}} (1 - 3) \implies \bar{C}_2 = \frac{Fa^3}{6EI_{Gz}}.$

On obtient $u_y^{(2)}(x) = -\frac{Fa^2}{6EI_{Gz}} (3x - a) .$



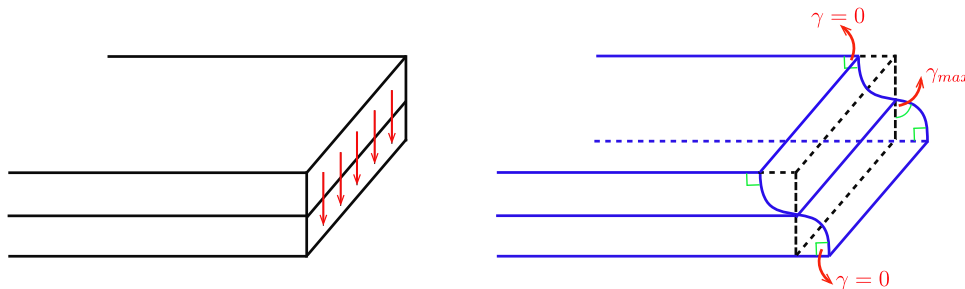
IV.3 Effort tranchant

On se restreint à l'étude des contraintes verticales σ_{xy} ($T_y \neq 0$). On pourra appliquer le même raisonnement pour σ_{xz} ($T_z \neq 0$).

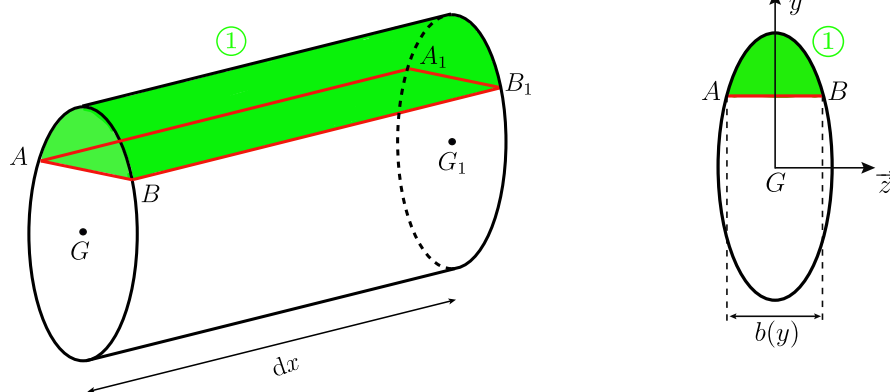


On se restreint à l'étude des contraintes verticales σ_{xy} ($T_y \neq 0$). On pourra appliquer le même raisonnement pour σ_{xz} ($T_z \neq 0$).

Il s'avère que cette expression **n'est pas exacte** car les contraintes tangentielles ne sont pas uniformes sur la section mais dépendent de y . En effet, l'effort tranchant génère des contraintes de cisaillement qui ont pour effet de **gauchir** les sections droites. Ce gauchissement est plus important au niveau de l'axe neutre et s'annule aux fibres extrêmes (cf figure ci-dessous où γ représente la variation angulaire).



En réalité, il faut isoler dans une poutre fléchie horizontale un petit volume dont on étudie l'équilibre. Ce volume (en vert) est compris entre deux sections droites distantes de dx , le dessus de la poutre où ne s'exerce aucune force et une surface de coupure (en rouge sur la figure).



On obtient alors pour les sections pleines, la formule de Bredt ou Jourawski :

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) m(y)}{I_{Gz} b(y)} \quad (3.62)$$

i) $m(y)$ est le moment statique par rapport à l'axe $(G\vec{z})$ de la partie de la section au dessus du niveau considéré $m(y) = \iint_{\text{au dessus}} y dS$

ii) I_{Gz} est le moment quadratique de la section totale par rapport à l'axe $(G\vec{z})$

iii) $b(y)$ est la largeur variable de la section au niveau où l'on calcule T_y .

On admettra que la relation liant σ_{xy} et T_y reste valable en remplaçant l'aire S par l'aire corrigée S_r (aire réduite) et donnée par :

$$S_r = \frac{I_{Gz}^2}{\int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{m(y)^2}{b(y)} dy} \quad (3.63)$$

Soit $K = \frac{S}{S_r} > 1$ le **facteur de cisaillement** qui caractérise la distribution des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant. On obtient :

- pour une section rectangulaire : $K = \frac{6}{5} = 1.2$
- pour une section circulaire : $K = \frac{10}{9} = 1.11$
- pour une section en profilé I : $K = 2 \text{ à } 3 \triangle$

Remarque :

Les déformations dues à l'effort tranchant sont généralement faibles donc pour des poutres de formes massives S et S_r diffèrent peu. Par conséquent, les calculs sont souvent faits en utilisant S au lieu de S_r .

IV.4 Moment de torsion

On se réfère à la partie Solides du cours de 3A006 pour cette section.