Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 20 novembre 2018

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Le barème est affiché à titre indicatif et susceptible de modifications

Questions de cours (/8 points)

1. Justifier la non-linéarité de l'équation : $u_{xx} - x^3 u_y + \sqrt{u_x} = 0$ (*réponse : la racine carrée n'est pas un opérateur linéaire*).
2. Décrivez le comportement de la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire, d'ordre 1 le long des courbes (ou droites) caractéristiques (*réponse : la solution est constante le long des caractéristiques*).
3. Décrivez le comportement d'une singularité pour un problème hyperbolique (*réponse : n'est pas lissée, se propage à vitesse finie*).
4. Montrer que si $u(x,t)$ est une solution de l'équation des ondes : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $u(t, x-\lambda)$ et $u(\lambda t, \lambda x)$ sont aussi solutions (*réponse : on fait le calcul direct* $u_{tt}(t, x-\lambda) = c^2 u_{xx}(t, x-\lambda)$ *ou encore* $\lambda^2 u_{tt}(\lambda t, \lambda x) = c^2 \lambda^2 u_{xx}(\lambda t, \lambda x)$).
5. Donnez et tracez graphiquement le domaine de dépendance de la solution de l'équation des cordes vibrantes dans un point (-1,3) du plan Oxt, sachant que la célérité $c = 1$ (*réponse : l'intervalle [-4,2], la base du triangle caractéristique*).
6. Expliquez la notion de stabilité de la solution du problème aux conditions initiales (problème de Cauchy) pour l'équation des ondes en une variable spatiale (*réponse : faible perturbation de la position et/ou vitesse initiale entraine une faible variation dans la solution*).
7. Donner la solution de l'équation des ondes sur l'axe réel, sachant qu'une corde de longueur infinie est lâchée sans vitesse initiale et la position initiale de la corde est donnée par la fonction $\Phi(x) = x$ (*réponse : on applique la formule de d'Alembert avec* $\Psi = 0$ *et on trouve* $u(x,t) = x$).
8. Une tige métallique est chauffée par une source de chaleur à $65°C$ imposée à son extremité gauche. L'enveloppe (contour) de la tige est maintenu à température constante de $30°C$. Justifier que la température à l'intérieur de la tige ne peut dépasser $65°C$ (*réponse : l'affirmation se justifie par le principe de maximum*).

Exercice 1 (/2 points)
Résoudre l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec la condition initiale $u(x,0) = 3x$, $\forall\ 0 < x < 1$.
Corrigé :
L'équation des courbes caractéristiques est : $t = -ln(1-x) + cte.$ ou encore $cte = e^t(1-x)$. D'où $u(x,t) = f(e^t(1-x))$ puis on utilise la condition auxiliaire pour trouver $u(x,t) = 3(1-(1-x)e^t)$.

Exercice 2 (/3 points)

Pour l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^*$$

a) Déterminer le type de l'équation ;
b) Proposez un changement de variables (ξ, η) pour réduire l'équation à sa forme canonique (ou standard) et obtenir cette forme canonique.
c) Déterminer la solution générale $u(x, t)$.
Corrigé
a) elle est parabolique car $\delta = (-xy)^2 - x^2y^2$.
b) on résout $C(\xi, \eta) = 0$ (ou $A = 0$) ce qui nous donne $x\eta_x - y\eta_y = 0$ qui a pour équation caractéristique $xy = k$, on prend alors $\eta(x, y) = xy$ et on choisit par exemple $\xi(x, y) = x$ car le jacobien avec ce choix est non-null (i.e.$J = x$ et $x \neq 0$). Après calcul on obtient la forme canonique $x^2 w_{\xi\xi} + xw_\xi = 0$, autrement dit $w_{\xi\xi} + 1/\xi w_\xi = 0$, de solution $w(\xi, \eta) = ln(\xi)C(\eta) + D(\eta)$
c) $u(x, y) = ln(x)C(xy) + D(xy)$

Exercice 3 (/5 points)
Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$u_{xx} + 5u_{xt} + 4u_{tt} = 0 \tag{1}$$

i) De quelle type d'équation s'agit-t-il ? (justifier votre réponse)
ii) Déterminer la solution générale de l'équation en passant par une factorisation de l'opérateur associé en deux opérateurs d'ordre 1. Donner une interprétation physique de la solution obtenue.
iii) On cherche maintenant à obtenir la solution de cette équation en utilisant la forme canonique. Pour cela, en effectuant le changement de variables : $\xi(x, t) = x - \frac{1}{4}t$, $\eta(x, t) = x - t$ montrer qu'on obtient la forme canonique (ou standard) suivante :

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Déterminer ensuite la solution générale de l'équation (1).
iv) On introduit les conditions initiales : $u(x, 0) = 2x$ et $u_t(x, 0) = 0$. Déterminer une expression explicite, analogue à la formule de d'Alembert, pour la solution $u(x, t)$ du problème (1) avec les conditions initiales imposées.
Corrigé :
i) $\delta = \frac{9}{4} > 0$ donc EDP hyperbolique
ii) Factorisation : $u_{xx} + 5u_{xt} + 4u_{tt} = [(\partial_x + \partial_t)(\partial_x + 4\partial_t)u] = 0$. On résout deux EDP d'ordre 1 :$v_x + v_t = 0$ (qui a pour solution $v(x, t) = h(x - t)$) et $u_x + 4u_t = v$ qui a pour solution générale $u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t) = f(x - \frac{1}{4}t) + g(x - t)$ avec $-3g' = h$.
iii) calcul simple (voir exemples en TD et cours).
iv) on utilise le résultat des questions ii) ou iii) et on trouve une expression pour f(x) et g(x) analogue a la formule de d'Alembert. Au final, on aura $u(x, t) = 2x$

Exercice 4 (/2 points+*bonus*)
On s'intéresse ici au problème aux conditions initiales et aux limites suivant :

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \ 0 < x < 1, \ t > 0 \tag{2}$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \ \forall t > 0 \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ u_t(x, 0) = u_1(x), \ \forall \ 0 < x < 1 \tag{4}$$

avec $u_0(x)$ et $u_1(x)$ des fonctions données, régulières et c une constante réelle.
i) De quelle équation de la mécanique s'agit-t-il dans (2) ?

ii) Donner une interprétation physique des conditions (3) et (4).
iii) On introduit une énergie $E(t)$ définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]^2 dx$$

Montrer que cette énergie ne dépend pas du temps t (i.e. $\frac{dE}{dt}(t) = 0$). Donner une interprétation physique de ce résultat.
iv) *(Bonus)* Cette propriété reste-t-elle vérifiée si l'on remplace les conditions de Neumann (3) par des conditions de type Dirichlet ? (justifier votre réponse sans faire de calculs)
v) *(Bonus)* On admet l'existence de solutions pour le problème (2)-(4). En utilisant la question iii) déduire l'unicité de la solution.

Corrigé :
i) ondes
ii) Corde fixée aux deux extrémités, avec une vitesse et position initiales imposées dans (4).
ii) on insère la dérivée temporelle dans l'intégrale pour obtenir :

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right] dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 \left[2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t)\right] dx$$

puis on utilise l'équation des ondes pour remplacer u_{tt} dans la première intégrale. On aura alors une intégrale d'une dérivée (en x) d'un produit de fonctions, c.a.d une primitive directe :

$$\frac{dE}{dt}(t) = c^2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] dx = c^2\left[\frac{\partial u}{\partial t}(1,t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\right] = 0$$

On conclue que l'énergie se conserve .
v)

Soient v_1 et v_2, deux solutions de (P). On pose $v = v_1 - v_2$. Par linéarité, v est solution de :

$$(P_H)\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0 \quad (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0 & t \geq 0 \quad (2) \\ v(x,0) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq L. \quad (3_H) \end{cases}$$

D'autre part,

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)\right]^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_0^L \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)\right]^2 dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L [\underset{(3_H)}{0}]^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_0^L [\underset{(3_H)}{0}]^2 dx = 0.$$

Par conséquent, comme $E(t)$ est constante, on a $E(t) = E(0) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right]^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_0^L \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right]^2 dx = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall t \geq 0,\ \forall\, 0 \leq x \leq L.$$

La solution v de (P_H) est donc constante.
Or $v(x,0) = 0$ Par conséquent :

$$v(x,t) = 0 \quad 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow v_1(x,t) = v_2(x,t) \quad 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0.$$

Il y a donc unicité de la solution.