Chapitre 1

Formulation et Méthodes de résolution de problèmes d'élastostatique tridimensionnels

1 Formulation du problème d'équilibre élastique linéarisé

Dans ce chapitre, on considère un milieu continu élastique, dont on connait la géométrie initiale, dans un état d'équilibre connu et dont la loi de comportement de chacune des phases (s'il s'agit d'un milieu hétérogène) a été identifiée. Ce milieu est soumis, à partir de cet état initial, à un chargement sous la forme par exemple d'un déplacement imposé sur la frontière ou une partie de la frontière, d'un chargement surfacique également exercé sur la frontière et d'un effort volumique extérieur. Sous réserve que ce chargement extérieur appliqué soit en équilibre global, le milieu atteint un nouvel état d'équilibre. Le problème consiste alors à déterminer le champ de déplacement subi par chaque point matériel du milieu continu entre sa position initiale et sa nouvelle position, ainsi que le champ de contraintes à l'intérieur du milieu continu.

Avant de développer les équations régissant un tel problème, nous allons préciser les hypothèses adoptées.

1.1 - Hypothèses : Evolution isotherme quasi-statique en petites perturbations

On se place dans le cadre H.P.P hypothèse des petites perturbations autour d'une configuration d'équilibre initiale : Ce cadre correspond aux hypothèses suivantes :

- Hypothèse de transformation infinitésimale :

Le milieu continu est en petites transformations entre sa configuration initiale et sa configuration actuelle d'équilibre, c'est à dire

$$\left[\ \|\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}(\underline{X},t)\| \ll 1 \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0\right.$$

où Ω_0 est le domaine géométrique occupé par le milieu dans sa configuration initiale. et $\underline{u}(\underline{X},t)$ désigne le vecteur déplacement subi par le point matériel $\underline{X}$. Ce qui revient à

$$\left[\ \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{X},t))\| \ll 1 \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0\right.$$ où $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ est le tenseur des déforma.

-tions linéarisées défini comme la partie symétrique du gradient de déplacement, soit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(X,t)) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t)^T\right)$$

- Hypothèse des petits déplacements :

Sous cette hypothèse, on peut confondre dans l'écriture du problème la géométrie du milieu dans sa configuration actuelle avec sa géométrie dans sa configuration d'équilibre initiale.

Les équations peuvent alors être écrites sur la géométrie initiale fixe, les coordonnées actuelles et initiales $\underline{x}$ et $\underline{X}$ dans l'écriture des grandeurs mécanique sont confondues.

Cela implique que $\|\underline{u}\|$ est petite devant une dimension pertinente du problème.

Dans certains problèmes, en particulier des problèmes posés sur des corps minces, l'hypothèse de la transformation infinitésimale peut être satisfaite sans que l'hypothèse des petits déplacements le soit.

Ces deux hypothèses : transformation infinitésimale et petits déplacements, accompagnées dans le cas général d'une hypothèse de petites variations de température entre les configurations actuelle et initiale :

$$\left[\ \tau = T(X,t) - T_0(X) \text{ "petit" } \forall X \in \Omega_0\right.$$

sont regroupées sous le nom d'hypothèse H.P.P

On suppose par ailleurs que l'état initial du milieu est au repos, ou encore est un état naturel.

- hypothèse de l'Etat initial naturel :

Dans l'état initial le champ de contrainte dans le milieu est en équilibre en l'absence de chargement extérieur et est identiquement nul. On dit que l'état initial est un état naturel.

Remarque : En pratique, les systèmes mécaniques sont souvent le siège de contraintes dites résiduelles sous chargement nul, c'est à dire que cette hypothèse n'est pas satisfaite. Par exemple, des contraintes résiduelles peuvent être générées dans des pièces métalliques par exemple par le procédé de formage à chaud ou de soudage puis par leur refroidissement. Elles peuvent aussi être dues à des déformations plastiques ou encore géométriques (exemple du retrait dans les structures en béton.). Dans ces cas, on parle d'état initial auto-contraint quasi naturel.

On peut également avoir un état initial préchargé, c'est à dire un état initial d'équilibre dans lequel des efforts extérieurs sont appliqués au milieu. C'est par exemple le cas d'une précontrainte thermoélastique utilisée intentionnellement. On va chercher à déterminer les déplacements et contraintes par rapport à cet état préchargé engendrés par des sollicitation autres que celles du préchargement.

Pour ces deux situations, on peut se ramener à un état initial naturel en travaillant avec $\underline{\underline{\Pi}} - \underline{\underline{\Pi}}_0$.

- On suppose ici que l'évolution est quasi-statique : Cette hypothèse suppose :
  - que les variation de sollicitation imposées au milieu entre l'état initial et l'état actuel sont suffisamment lentes au cours du temps.
  - que les forces extérieures imposées au milieu, sont, à chaque instant, en équilibre global : $[\mathcal{T}e] = [0]$
  - que les déplacements imposés sont à chaque instant compatibles avec les liaisons internes.

On dit alors que l'évolution est quasi-statique. Sous cette hypothèse, les forces d'inertie peuvent être supposées petites par rapport aux efforts élastiques développés dans la structure.

- Enfin, on suppose que l'évolution est isotherme, c'est à dire que l'écart de température entre la configuration initiale et actuelle est identiquement ~~nulle~~.

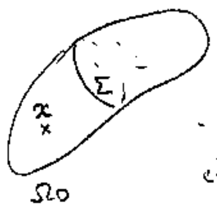
- Sous ces hypothèses, qu'il faudra valider a posteriori en particulier pour l'hypothèse HPP des petites perturbations, les équations qui régissent l'évolution d'un milieu élastique peuvent être linéarisées au voisinage de la configuration initiale.

les équation obtenues s'écrivent sur la configuration initiale, Ω_0 ; les variables spatiales actuelles $\underline{x}$ et initiale $\underline{X}$ étant confondues. On convient d'adopter les notations eulériennes (minuscules) pour écrire les équations linéarisées posées pourtant sur Ω_0.

1.2. Equations de l'élasticité linéarisée (isotherme)

les équations de champs (posées sur Ω_0) sont à l'instant t étudié :

- équations d'équilibre : $\operatorname{div}_x \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho_0(\underline{x})\, \underline{f}(\underline{x},t) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$ (en fait X)



Il s'agit de 3 équations scalaires qui s'écrivent en notation indicielle : (dans le système cartésien)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x,t) + \rho_0(x)\, f_i(x,t) = 0 \qquad i = 1,2,3 \quad \forall x \in \Omega_0$$

avec sommation sur l'indice j répété.

- $\rho_0(x)$ désigne la masse volumique du milieu dans sa configuration initiale au point $\underline{x}$ et à l'instant $t=0$. Si le milieu est homogène, $\rho_0(\underline{x}) = \rho_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$
- $\underline{f}(x,t)$ désigne la densité massique de force extérieures ; $\rho_0 \underline{f}(\underline{x},t)$ s'exprime en $\frac{N}{m^3}$
- $\underline{\underline{\sigma}}(x,t)$ est le tenseur de Cauchy symétrique.

- loi de comportement élastique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(x,t) = \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x},t) & \forall \underline{x} \in \Omega_0 \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{u}(x,t) + \underline{\underline{\nabla}}\underline{u}_x^T(x,t)\right] & \forall \underline{x} \in \Omega_0 \end{cases}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}(x)$ désigne le tenseur du 4^e ordre d'élasticité

$\underline{\underline{\varepsilon}}(u(x,t))$ le tenseur de déformation linéarisée symétrique

soit encore en notation indicielle, 6+6 équations scalaires compte tenu de la symétrie des tenseurs,

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = a_{ijkh}(x)\, \varepsilon_{kh}(x,t) & i,j = (1,2,3) \quad \forall x \in \Omega_0 \\ \varepsilon_{kl}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x,t) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x,t)\right) & k,l = (1,2,3) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0 \end{cases}$$

Si le milieu est homogène, les coefficients d'élasticité sont indépendants du point $\underline{x}$

Le tenseur d'élasticité vérifient les propriétés suivantes

- $a_{ijkh} = a_{khij} = a_{ijhk} = a_{jikh}$

$\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}$ est donc symétrique, donc au plus $\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}$ dépend de 21 coefficients indépendants

- $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ est défini positif (positivité de la forme quadratique associée)

c'est à dire $\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) : \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}(x) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) > 0 \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$

soit en notation indicielle $\quad a_{ijkh}\, \varepsilon_{ij}(x,t)\, \varepsilon_{kh}(x,t) > 0 \quad \forall \varepsilon_{kh} \neq 0$

(propriété admise ; c'est une propriété de stabilité : le matériau en absence de sollicitations extérieures demeure dans son état initial)

Sous cette condition, la loi de comportement peut s'inverser sous la forme

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}(x) : \underline{\underline{\sigma}}(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0 \\ \text{où } \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}(x) \text{ est le tenseur des souplesses tel que } \quad \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} = \underline{\underline{1}} \quad (\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{-1} = \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}) \end{cases}$$

Dans le cas où le milieu est isotrope, le tenseur d'élasticité (et de souplesse) ne dépend que de deux coefficients indépendants λ et μ les coefficients de Lamé ou (E et ν) modules d'Young et coefficient de Poisson : la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(x,t) = \lambda \operatorname{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t))\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) \\ \text{ou} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) = \dfrac{1+\nu}{E}\, \underline{\underline{\sigma}}(x,t) - \dfrac{\nu}{E} \operatorname{trace}[\underline{\underline{\sigma}}(x,t)]\, \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

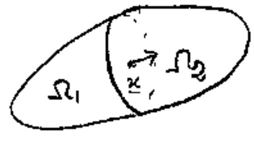
la condition de définie-positivité se traduit dans ce cas par :

$$\begin{cases} \mu > 0 \quad \text{et} \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \\ \text{ou} \quad E > 0 \quad \text{et} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$$

((*) En pratique, les valeurs de ν négatives sont exceptionnelles Beryllium $\nu = 0{,}05$ - Pyrite $\nu < 0$)

<u>Remarque</u> : l'équation $\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}_x \underline{u}(x,t) + \underline{\nabla}_x u(x,t)^T\right)$ est aussi appelée équation de compatibilité

➾ Ces équation de champs sont à compléter par <u>des conditions de transmission</u> :

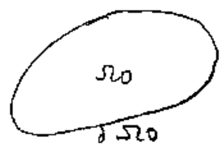


$$\begin{cases} [\![\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\!] \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} & \forall \underline{x} \in S_\Sigma \\ [\![\underline{u}(\underline{x},t)]\!] = \underline{0} & \forall x \in S_\Sigma \end{cases}$$

sur toute interface interne ; où $[\![\cdot]\!]$ désigne le saut de la variable, $\underline{n}(\underline{x})$ le vecteur normal unitaire au point $\underline{x}$, en absence de discontinuité. C'est le cas des interfaces parfaites en deux matériaux parfaitement collés par exemple.

Ce systèmes d'équation demande à être complété par des condition aux limites écrites en tout point du bord de Ω_0. Les conditions peuvent être de différents types

➾ <u>Condition aux limites en déplacement imposé</u> :



le déplacement $\underline{u}(x,t)$ est connu sur le contour ou une partie

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) = \underline{u}^d(x,t) & \underline{x} \in \partial\Omega_0 \\ \text{soit } u_i(x,t) = u_i^d(x,t) \quad i = 1,2,3 & \forall x \in \partial\Omega_0 \end{cases}$$

où $\underline{u}^d$ est un vecteur donné. Dans le cas d'un encastrement, ~~la~~ structure est fixé sur son contour, on a :

$$\underline{u}(\underline{x},t) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0$$

Ces condition sont appelées condition de Dirichlet

➾ <u>Conditions aux limites en effort imposé</u> :

le vecteur contrainte est connu sur tout le contour :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \cdot \underline{n}(x) = \underline{F}^d(x,t) & \forall x \in \partial\Omega_0 \\ \text{soit } \quad \sigma_{ij}(x,t)\, n_j(x) = F_i^d(x,t) \quad \forall i = 1,2,3 & \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Par exemple, la force surfacique est une pression normale imposée $-p(t)\,\underline{n}(x)$

Dans le cas où le bord est libre d'effort, on a :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x,t) \cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0$$

Ces conditions sont appelées condition de Neuman.

. Condition aux limites mixtes :

Sur le pourtour ou une partie, deux composantes des efforts sont connues et une composante du déplacement, soit par exemple

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_T (x,t) = \underline{F}_T^d (x) & \underline{x} \in \partial \Omega_0 \\ \underline{u} \cdot \underline{n} (x,t) = u_N^d \end{cases}$$

les composantes tangentielles des efforts sont connues et le déplacement normal est connu.

soit si le bord Γ a pour normale $\underline{n} = \underline{e}_3$

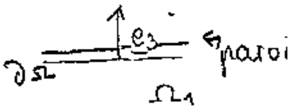
$$\begin{cases} \sigma_{13} (x,t) = F_1^d (\underline{x},t) & (1,3) \\ \sigma_{23} (x,t) = F_2^d (\underline{x},t) & (2,3) \quad x \in \Gamma \\ u_3 (\underline{x},t) = u_3^d (\underline{x},t) \end{cases}$$

Ainsi ce type de condition aux limites se rencontre sur des surfaces de contact sans frottement avec une paroi fixe par exemple, on a alors $F_1^d = F_2^d = 0$ et $u_3^d = 0$

On peut également connaître deux composantes du déplacement et une composante de l'effort. En tout point du bord, sont imposées (connues) trois conditions sont imposées et trois seulement, chacune pouvant être soit une composante du déplacement ou une composante de l'effort. On ne peut pas avoir dans un repère orthogonal à la fois u_i et $\sigma_{ij} n_j$ de connu.

Remarque : Il existe des conditions aux limites plus générales, comme par exemple le cas où la liaison entre le milieu et une paroi est unilatérale. C'est le cas des problèmes de contact entre solides. Dans ce cas, tant que la composante normale du déplacement à la paroi est égale au déplacement de la paroi ; l'effort imposé sur le milieu est un effort de compression donc est négatif. La liaison est persistante

la liaison est rompue dès que la composante normale du déplacement devient plus petite que le déplacement de la paroi. Il y a alors



séparation du milieu et de la paroi. La surface du milieu devient libre. Ces conditions de contact unilatéral s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \cdot\ \sigma_{\alpha j}(x,t)\, n_j(x) = 0 \quad \alpha = 1 \text{ et } 2 \quad \text{et} \quad u_3(x,t) \leq u_3^P(x,t) \quad x \in \partial\Omega \\ \cdot\ u_3(x,t) = u_3^P(x,t) \Rightarrow \sigma_{3j}(x,t)\, n_j(x) \leq 0 \\ \cdot\ u_3(x,t) < u_3^P(x,t) \Rightarrow \sigma_{3j}(x,t)\, n_j(x) = 0 \end{cases}$$

Une telle condition demande de tester la solution au fur et à mesure du calcul. Elle est non linéaire par rapport aux autres condition aux limites citées précédemment. la zone de contact est une inconnue du problème. Ce type de condition ne sera pas étudié dans ce cours.

- On peut enfin compléter le système d'équations et condition aux limites par l'équation

$$\left\{ \rho(x,t) = \rho_0(\underline{x}) \left(1 - \text{trace}\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)\right) \right.$$

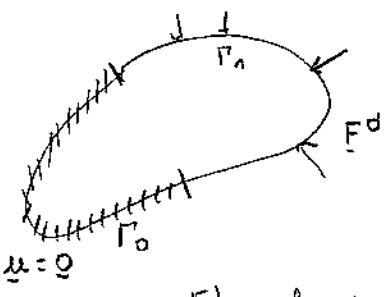
qui permet d'obtenir la masse volumique du milieu dans sa configuration déformée.

- le temps t apparait comme un paramètre dans les équations. Il sera omis.

1.3. Classification des problèmes d'élasticité linéaire : problèmes réguliers et type 1,2,3.

On dira qu'un problème d'élasticité est régulier si en tout point du bord sont connus trois composantes complémentaires des efforts ou des déplacements. Selon le type de données, les problèmes peuvent être classés en trois types :

- Problème de type 1 : le bord du domaine $\partial\Omega_0$ est composé de deux parties Γ_0 et Γ_1 telles que $\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ sans recouvrement telles que la partie Γ_0 est non vide et d'aire strictement positive. (On dit mesure $\Gamma_0 > 0$.). En chaque point de Γ_0, les 3 composantes du déplacement sont connues



$$u_i(x) = U_i(x) \quad i = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_0$$

$$\text{ou} \quad \underline{u}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}) \quad \forall x \in \Gamma_0$$

Et sur la partie complémentaire, en tout point de Γ_1, peuvent être connues au choix :

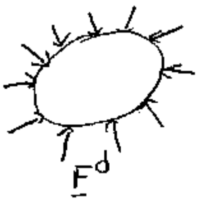
- les 3 composantes de l'effort :

$$\underline{\underline{\Pi}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{F}^d(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$$

ou - deux composantes de l'effort et la composante complémentaire du déplacement

ou - deux composantes du déplacement et la composante complémentaire de l'effort.

▭ Problème de type 2 : Sur la totalité du bord de Ω_0, la densité d'effort est connue (imposée) :



$$\left[\ \underline{\underline{\Pi}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{F}^d(x) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_0\right.$$

Aucune donnée n'est imposée sur le déplacement. Exemple du corps immergé.

▭ Problème de type 3 : Sur la totalité du bord $\partial\Omega_0$, on donne des conditions diverses en composantes du déplacement et des efforts, mais en aucun point on connaît les trois composantes du déplacement. C'est à dire que les conditions aux limites sont de type 1 mais avec Γ_0 vide.

- Résoudre un problème d'élasticité demande de déterminer à tout point $\underline{x}$ de Ω_0 :

3 inconnues scalaires en déplacement
6 " " en déformation du fait de la symétrie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$
6 " " en contraintes " " de $\underline{\underline{\Pi}}$

soit un total de 15 inconnues scalaires.

Le bilan des équations conduit à :

3 équations d'équilibre scalaires
6 équations de comportement $\sigma = f(\varepsilon)$
6 équations de compatibilité

soit un total de 15 équations scalaires

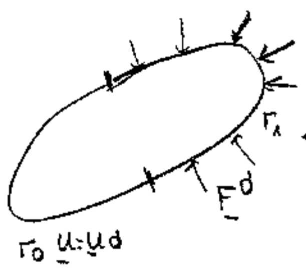
Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et elliptique (voir cours de Maths 1er semestre du fait que $\underline{\underline{a}}$ est défini positif)

Nous admettons que si le problème est régulier, c'est à dire pour les conditions aux limites listées, ce problème admet une solution en contrainte, et déformation unique. le resultat dérive d'un théorème mathématique d'Analyse fonctionnel. (c. Théorème de lax-Milgram.) En revanche, selon les types de problème (1, 2 ou 3) la solution ne sera pas unique en déplacement.

Ainsi, le déplacement solution d'un problème de type 2 est défini à un deplacement de corps rigide près, c'est à dire une translation et une rotation près. Il en est de même des problèmes de type 3 dont la solution en déplacement est defini à un deplacement de corps rigide près compatible avec les liaisons en déplacement (cinématique).

2. Méthodes de résolution

On considère le problème modèle suivant (de type 1) :



$$\left\{\begin{array}{llr}
\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}(x) + \rho_0(x)\,\underline{f}(\underline{x}) = 0 & \forall x \in \Omega_0 & (1)\\
\underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}(x) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x) & \forall \underline{x} \in \Omega_0 & (2)\\
\underline{\underline{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(x) + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(x)^T\right] & \forall \underline{x} \in \Omega_0 & (3)\\
[\![\underline{\underline{\sigma}}(x)]\!]\cdot\underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} & \forall \underline{x} \in \Gamma_{\text{interface interne}} & (4)\\
[\![\underline{u}(x)]\!] = \underline{0} & \forall \underline{x} \in \Gamma_i & (5)\\
\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\cdot\underline{n}(\underline{x}) = \underline{F}^d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Gamma_1 & (6)\\
\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Gamma_0 \quad \text{avec } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega_0,\ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset,\ \Gamma_0 \neq \emptyset & (7)
\end{array}\right.$$

Dans ce problème Ω_0 et $\partial\Omega_0$ sont connus, ainsi que $(\underline{F}^d, \underline{u}^d)$ le chargement et les caractéristiques mécaniques du milieu ρ_0 et $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}$.

On peut constater que les équations sont structurées de la façon suivante :

- les équations d'équilibre (1), la condition de transmission (4) et la condition aux limites en effort imposé (6) fait intervenir le tenseur des contraintes inconnu seul.
- la condition de transmission (5) et la condition aux limites (7) en déplacement imposé fait intervenir la seule inconnue $\underline{u}$
- les équations (2) et (3) lient les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{u}$

Cette classification des équations conduit à introduire les espaces suivants

2.1 Champ de déplacement cinématiquement admissible

- Un champ de déplacement $\underline{v}$ est dit cinématiquement admissible par le problème précédent s'il satisfait les équations (5) et (7), soit s'il appartient à l'espace.

$$U_{ad} = \{ \underline{v}(x) \text{ définis sur } \Omega_0 \text{, réguliers tels que } [\![\underline{v}(x)]\!] = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{\text{interne}} \text{ et } \underline{v}(x) = \underline{U}^d(x) \quad \forall x \in \Gamma_0 \}$$

la régularité signifie ici $\underline{v}$ est continu dans Ω et continûment différentiable sur Ω (au moins par morceaux).

Remarque : Dans le cas d'un problème de type 2, on a :

$$U_{ad} = \{ \underline{v}(x) \text{ réguliers sur } \Omega_0 \}$$

2.2 Champ de contrainte statiquement admissible

- Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est dit statiquement admissible par le problème modèle s'il satisfait les équations (1), (4) et (6) soit s'il appartient à l'espace

$$\Sigma_{ad} = \{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \text{ définis sur } \Omega_0 \text{, symétrique, réguliers} \,/\, \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(x) + \rho_0(x) \underline{f}(x) = 0 \text{ sur } \Omega_0 \quad [\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \cdot n(x) = 0 \quad \underline{x} \in \Gamma_i \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{F}^d(x) \quad x \in \Gamma_1 \}$$

Remarque : Pour que cet espace soit non vide, il faut et il suffit que

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f}(x) \, dv + \int_{\Gamma_1} \underline{F}^d \, ds + \int_{\Gamma_0} \underline{\underline{\sigma}}(x) \underline{n}(x) \, ds = \underline{0}$$

la regularité signifie ici $\underline{\underline{\sigma}}$ continu dans Ω et continûment differentiable sur Ω.

2.3 Schémas de resolution

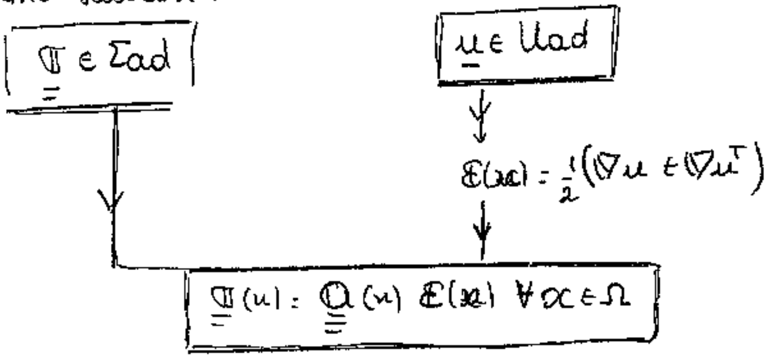
Avec ces définition, resoudre un problème d'equilibre en elasticité linéaire se ramène à trouver un couple de champs admissibles $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ tels que:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \Sigma ad \ , \quad \underline{u} \in \mathcal{U}ad$$

associés par la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(x) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}(u) + \underline{\underline{\nabla}} u^T\right) \ \forall x \in \Omega$$

la recherche d'une solution au problème d'equilibre peut être schématisé par le diagramme suivant :



On peut parcourir ce diagramme de deux manières, soit en partant d'un champ de déplacement admissible, soit en partant d'un champ de contrainte admissible. On distingue ainsi deux stratégies de résolution, l'une en déplacement l'autre en contrainte. Ces deux approches font appel à l'intuition pour postuler a priori une forme possible des champs cinématiquement ou statiquement admissibles les hypothèses seront justifiées a posteriori par les résultats d'unicité de la solution.

Mais les solutions analytiques exactes de problèmes tridimensionnels d'elasticité sont assez rares pour peu que le problème ne presente pas de fortes symetries et concerne des milieux anisotropes par exemple. Il faut alors avoir recours à des solutions approchées. Il existe des méthodes pour construire des solutions approchées de façon systématique. Ces méthodes sont basées sur une formulation variationnelle du problème. C'est notamment le cas de la méthode numérique des éléments finis. Nous examinerons au chapitre 2 quelques solution analytiques classiques, Torsion, flexion et au chapitre 4, le principe de la recherche de solutions approchées par les approches variationnelles.

2.4- Méthode de résolution en déplacement.

Cette démarche consiste à prendre le déplacement comme inconnue principale et à :

i- Proposer une forme de champ de déplacement cinématiquement admissible, c'est à dire vérifiant les conditions aux limites en déplacement du problème.

ii) Calculer le champ de déformation associé en prenant la partie symétrique du gradient du déplacement, ce qui est toujours possible

iii) Calculer le champ de contraintes associé par la loi de comportement

iv) Substituer ces contraintes dans les équations d'équilibre pour trouver la forme exacte du déplacement solution

v) Vérifier les conditions aux limites en efforts

Ce n'est qu'en ayant vérifié cette dernière étape que l'on sera assuré d'avoir trouvé la solution

Une manière équivalente de procéder est de condenser les étapes ii), iii) et iv) en vérifiant l'équation de Navier directement.

⇒ On rappelle que cette équation est obtenue en injectant la loi de comportement dans l'équation d'équilibre. Elle s'écrit pour un milieu isotrope.

$$(\lambda + \mu)\, \underline{\nabla}\,(\operatorname{div} \underline{u}) + \mu\, \Delta \underline{u} + \rho_0 \underline{f} = 0 \quad (*) \quad \text{dans } \Omega_0$$

Dans ce cas, on suit le schéma suivant

solution
- i)
- ii') Vérifier Navier ce qui fournit la forme du champ de déplacement
- iii') Calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé par $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$
- iv') Calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ associé par la loi de comportement
- v') Vérifier les conditions aux limites en effort.

(*) ou encore $(\lambda + 2\mu)\, \underline{\nabla}\,(\operatorname{div} \underline{u}) - \mu\, \underline{\operatorname{rot}}\,(\underline{\operatorname{rot}}\, \underline{u}) + \rho_0 \underline{f} = 0$

en exploitant le fait que $\underline{\operatorname{rot}}(\underline{\operatorname{rot}}\,\underline{u}) = \underline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \underline{u}) - \Delta \underline{u}$

2.5 Méthode en contrainte.

Dans cette démarche, le champ de contrainte est l'inconnue privilégiée et l'on procède de la façon suivante :

i) proposer une forme de solutions en contraintes vérifiant les condition condition en effort imposé et les equations d'equilibre

ii) Calculer le champ de déformation associé en exploitant la loi de comportement sous forme inverse $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\sigma}}$

iii) Ecrire les equation de compatibilité pour s'assurer de l'integration possible du champ de deformation linearisé

iv) Intégrer le champ de deformation pour obtenir le champ de deplacement.

v) Verifier les condition en déplacement imposé.

On rappelle le resultat suivant concernant les equation de compatibilité.

Proposition : le système aux dérivées partielles de 6 equation

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}} u^T\right) = \underline{\underline{e}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = e_{ij} \qquad i,j = 1,2,3$$

où $\underline{\underline{e}}$ est un tenseur symetrique donné est intégrable, c'est à dire admet une solution $\underline{u}$ si et seulement si le champ $\underline{\underline{e}}$ vérifient les 6 équation de compatibilité suivantes:

$$\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{pqr}\ \frac{\partial^2 e_{jq}(x)}{\partial x_k \partial x_r} = 0 \qquad i, p = 1,2,3 \qquad \forall\, \underline{x} \in \Omega$$

avec sommation sur j, q, k, r indices répétés.

où ε_{ijk} est le symbole qui prend les valeur :

$$\varepsilon_{ijk} \begin{cases} 0 & \text{si } i,j,k \text{ comprennent des indices identiques} \\ 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \end{cases}$$

ou encore :

$$\left| \begin{array}{l} e_{22,33} - 2\, e_{23,23} + e_{33,22} = 0 \\ e_{33,11} - 2\, e_{31,31} + e_{11,33} = 0 \\ e_{11,22} - 2\, e_{12,12} + e_{22,11} = 0 \\ - e_{21,33} + e_{23,31} + e_{31,23} - e_{33,21} = 0 \\ - e_{32,11} + e_{31,12} + e_{12,31} - e_{11,32} = 0 \\ - e_{13,22} + e_{12,23} + e_{23,12} - e_{22,13} = 0 \end{array} \right. \quad \text{en tout point de } \Omega_0$$

Ce résultat est une généralisation du résultat suivant :

▫ Proposition : Soit le système aux dérivées partielles suivant :

$$\underline{\text{grad}}\, \varphi(x) = \underline{E}(x) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = E_i \quad i = 1,2,3$$

où le vecteur $\underline{E}$ est donné et où φ est une fonction inconnue

Le système est intégrable si et seulement si

$$\underline{\text{rot}}\, \underline{E} = \underline{0} \quad , \text{soit} \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = 0 \quad i = 1,2,3$$

On comprend bien qu'il faille des conditions (sur le plan mathématique) de compatibilité pour qu'un vecteur à 3 composantes (ou plus généralement un tenseur symétrique à 6 composantes) dérive effectivement d'une fonction scalaire (ou d'un vecteur à 3 composantes)

En bidimensionnel $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = E_1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = E_2 \end{array} \right.$ admet une solution si et seulement si $\dfrac{\partial E_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial E_2}{\partial x_1}$

(c'est à dire $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}$)

• Nous admettons ce second résultat et établissons la 1ère proposition. On commence par montrer l'implication :

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T\right) = \underline{\underline{e}} \quad \text{intégrable} \Rightarrow \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqr} \frac{\partial^2 e_{jq}}{\partial x_k \partial x_r} = 0$$

On dérive par rapport à k $\quad e_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik})$

d'où $\quad \varepsilon_{pjk}\, e_{ij,k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{i,jk} + \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,ik})$

or ε_{pjk} est anti-symétrique en (j,k) et $u_{i,jk}$ est symétrique $/(j,k)$

d'où $\varepsilon_{pjk}\, u_{i,jk} = -\varepsilon_{pkj}\, u_{i,jk} = -\varepsilon_{pkj}\, u_{i,kj} = \varepsilon_{pkj}\, u_{i,kj} = 0$

de sorte que $\quad \varepsilon_{pjk} : e_{ij,k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,ik}$

On note $\quad E_i = \varepsilon_{pjk}\, e_{ij,k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,ik} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,ki}}_{w_p} = w_{p,i}$

avec $w_p = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,k}$

Or le système est intégrable, c'est à dire qu'il existe w_p pour chaque p, si d'après...

la seconde proposition $\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{E} = \underline{0}$ soit $\varepsilon_{lmn}\frac{\partial E_m}{\partial x_n} = 0 \quad l = 1,2,3$
$l = 1,2,3$

Soit donc : $\quad \varepsilon_{lmn}\left(\varepsilon_{pjk}\, e_{mj,k}\right)_{,n} = 0 \quad l = 1,2,3$ et $p = 1,2,3$

soit donc : $\quad \varepsilon_{lmn}.\varepsilon_{pjk}\, e_{mj,kn} = 0 \quad l = 1,2,3 \quad p = 1,2,3$ d'où les

6 équation de compatibilité annoncées après réaménagement des indices.

- On va maintenant établir la réciproque :

si $\quad \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\frac{\partial^2 e_{jq}}{\partial x_k \partial x_r} = 0$ alors le système $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ est
$i, p = 1,2,3$ intégrable.

D'après ce qui précède si $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\frac{\partial^2 e_{jq}}{\partial x_k \partial x_r} = 0$, le système

$w_{p,i} = \varepsilon_{pjk}\, u_{j,ki}$ est intégrable donc w_p existe et on a

pour $p = 1,2,3 \quad w_p = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}\, u_{j,k}$ En multipliant par ε_{prs},

on a : $\quad \varepsilon_{prs}\, w_p = \frac{1}{2}\varepsilon_{prs}\,\varepsilon_{pjk}\, u_{j,k} = \frac{1}{2}\left(\delta_{rj}\,\delta_{sk} - \delta_{rk}\,\delta_{sj}\right) u_{j,k}$

soit $\quad \varepsilon_{prs}\, w_p = \frac{1}{2}\left(u_{r,s} - u_{s,r}\right)$ partie anti-symétrique de gradient $\underline{u}$

or $\quad e_{rs} = \frac{1}{2}\left(u_{r,s} + u_{s,r}\right)$ d'où en ajoutant : $u_{r,s} = e_{rs} + \varepsilon_{prs}\, w_p$

Pour chaque valeur de r, on a un système du type $\frac{\partial}{\partial s}\varphi = E_s$ (avec $\varphi = u_r$)

le système est intégrable, c'est à dire admet une solution u_r si et seulement si

$$\varepsilon_{lms} E_{s,m} = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{lms}\left[e_{rs} + \varepsilon_{prs}\,\omega_p\right]_{,m} = 0$$

Vérifions si cette condition est satisfaite :

or $\varepsilon_{lms}\, e_{rs,m} + \varepsilon_{lms}\varepsilon_{prs}\,\omega_{p,m} = \varepsilon_{lms}\, e_{rs,m} + (\delta_{lp}\delta_{mr} - \delta_{lr}\delta_{mp})\,\omega_{p,m}$

$$= \varepsilon_{lms}\, e_{rs,m} + \omega_{l,r} - \delta_{lr}\,\omega_{p,p} = \varepsilon_{lms}\, e_{rs,m} + \omega_{l,r} - \delta_{lr}\frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_{pjk}\, u_{j,kp}}_{=0}$$

$$= \varepsilon_{lms}\, e_{rs,m} + \varepsilon_{ljk}\, e_{rj,k}$$

(antisymétrique de ε_{pjk} / (kp) symétrique de $u_{j,kp}$ /(k,p))

$$= \underset{\text{antisymétrique }/(ms)}{\varepsilon_{lms}}\big(\underbrace{e_{rs,m} + e_{rm,s}}_{\text{symétrique }/(m,s)}\big) = \varepsilon_{lms}\big(u_{r,sm} + u_{s,mr} + \underbrace{u_{r,ms}}_{\text{symétrique }(m\,s)} + u_{m,sr}\big)$$

$$= \varepsilon_{lms}\, e_{ms,r} = 0$$

donc le système est bien intégrable.

les équations de compatibilité s'écrivent également sous la forme suivante :

⇒ Proposition : le système $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $i,j = 1,2,3$ avec $\underline{\underline{e}}$ un tenseur donné est intégrable si et seulement si : $\forall\, i,j = 1,2,3$ (6 équations)

$$\Delta e_{ij} + \mathcal{E}_{,ij} + e_{pq,qp}\,\delta_{ij} - \Delta\mathcal{E}\,\delta_{ij} - (e_{ip,pj} + e_{jp,pi}) = 0$$

avec $\mathcal{E} = e_{ll} = \text{trace } \underline{\underline{e}}$

Cette proposition s'obtient en utilisant la propriété de $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}$ suivante :

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \det\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{kq}\delta_{jr}) - \delta_{jp}(\delta_{iq}\delta_{kr} - \delta_{kq}\delta_{ir}) + \delta_{kp}(\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{jq}\delta_{ir})$$

De sorte que $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\,\dfrac{\partial^2 e_{jq}}{\partial x_k \partial x_r} = 0$ s'écrit encore pour tout $(p,i) = 1,2,3$

$$\delta_{ip}\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_k \partial x_k} - \delta_{ip}\frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{pi}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{pk}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 e_{ji}}{\partial x_p \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_p \partial x_i} = 0$$

Soit donc en posant $\mathcal{E} = e_{jj} = \text{trace}\, \underline{\underline{e}}$

$$\Delta \mathcal{E}\, \delta_{ip} - \delta_{ip}\, e_{jk,kj} - \Delta e_{ip} + e_{pk,ki} + e_{ik,kp} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_p \partial x_i} = 0$$

d'où le résultat annoncé.

<u>Remarque</u> : les équation de compatibilité sont purement géométriques et ne dépendent en rien de la loi de comportement du matériau

- Dans la pratique, on peut comme précédemment en approche déplacement modifier le schéma de resolution pour condenser les étapes ii et iii, Il suffit d'intégrer la loi de comportement dans les equation de compatibilité. On obtient les équation de Beltrami satisfaites par les contraintes.

<u>Proposition</u>: Pour un milieu isotrope, les <u>équation de Beltrami</u> s'écrivent :

$$\boxed{\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\, \Sigma_{,ij} + \rho_0\left[(f_{i,j} + f_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\, f_{\ell,\ell}\, \delta_{ij}\right] = 0} \quad i,j = 1,2,3 \text{ dans } \Omega_0$$

les équation s'obtiennent aisément en utilisant la seconde forme des equation de compatibilité. Comme $e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\ell\ell}\,\delta_{ij}$, on a : $\mathcal{E} = \frac{1-2\nu}{E}\Sigma$

$$\frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\underline{\Delta\Sigma}\,\delta_{ij} + \underline{\frac{1-2\nu}{E}\Sigma_{,ij}} + \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{pq,pq} - \frac{\nu}{E}\underline{\Sigma_{,pq}\delta_{pq}}\right)\delta_{ij}$$
$$-\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\underline{\Delta\Sigma}\,\delta_{ij} - \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ip,pj} - \underline{\frac{\nu}{E}\Sigma_{,pj}\delta_{ip}} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{jp,pi} - \underline{\frac{\nu}{E}\Sigma_{,pi}\delta_{jp}}\right) = 0$$

Soit encore en multipliant par $E/1+\nu$

$$\Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{1+\nu}\Delta\Sigma\,\delta_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\Sigma_{,ij} + \left[\sigma_{pq,pq}\,\delta_{ij} - \sigma_{ip,pj} - \sigma_{jp,pi}\right] = 0$$

En exploitant l'équation d'équilibre : $\sigma_{ip,p} + \rho_0 f_i = 0$ on a

$$\sigma_{pq,pq}\,\delta_{ij} - \sigma_{ip,pj} - \sigma_{jp,pi} = -\rho_0 f_{q,q}\,\delta_{ij} + \rho_0 f_{i,j} + \rho_0 f_{j,i}$$

D'où : $\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\Sigma_{,ij} - \frac{1}{1+\nu}\Delta\Sigma\,\delta_{ij} + \rho_0\left(f_{i,j} - f_{q,q}\,\delta_{ij} + f_{j,i}\right) = 0$

Soit si on prend la trace de cette dernière équation :

$$\Delta\Sigma + \frac{1}{1+\nu}\Sigma_{,pp} - \frac{1}{1+\nu}3\Delta\Sigma + \rho_0(f_{p,p} - 3f_{p,p} + f_{p,p}) = 0$$

$$\Delta\Sigma\left(\frac{1+\nu-3}{1+\nu}\right) + \rho_0\, f_{p,p} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta\Sigma = -\frac{1+\nu}{1-\nu} f_{p,p}\,\rho_0$$

De sorte que l'on a au final :

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\Sigma_{,ij} + \frac{1}{(1-\nu)}\rho_0\, f_{p,p}\,\delta_{ij} + \rho_0(f_{i,j} + f_{j,i} - f_{p,p}\,\delta_{ij}) = 0$$

soit encore

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\Sigma_{,ij} + \rho_0(f_{i,j} + f_{j,i}) + \rho_0\frac{\nu}{1-\nu} f_{p,p}\,\delta_{ij} = 0$$

- le schéma de résolution est alors dans l'approche en contraintes :
  - i)
  - ii') Vérifier les 6 équations de Beltrami
  - iii') Calculer avec la loi de comportement $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur de déformation associé
  - iv) Intégrer le champ de déformation pour obtenir le champ de déplacement.
    On est assuré de la faisabilité de cette intégration du fait de ii')
  - v) Vérifier les conditions aux limites en déplacement.

2.6 Remarques sur l'unicité de la solution.

La démonstration mathématique de l'unicité de la solution en déplacement du problème modèle se fait en utilisant l'approche variationnelle présentée dans le cours de Maths (et au chapitre 4 de ce cours.)

On peut néanmoins "sentir" ce résultat en remarquant tout d'abord :

- Proposition : Sous l'hypothèse que les équations de compatibilité soient satisfaites, le système aux dérivées partielles $\frac{1}{2}(\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{\nabla}\,\underline{u}^T) = \underline{\underline{\varepsilon}}(x)$ où $\underline{\underline{\varepsilon}}(x)$ est un tenseur symétrique donné a pour solution générale

$\underline{u}(x) = \underline{u}^P(x) + \underline{\rho}(x) \quad \underline{x} \in \Omega_0$

où $\underline{u}^P(x)$ est une solution particulière du système $\frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^P + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^{P^T}) = \underline{\underline{e}}$

et $\underline{\rho}(x)$ est un deplacement de corps rigide somme d'une translation et une rotation : $\underline{\rho}(x) = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x}$ avec $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux vecteurs constants quelconques

Ce résultat découle de la caractérisation du déplacement de corps rigide

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\rho}) = 0 \iff \underline{\rho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x} \quad \underline{a}, \underline{b}$ constants. ($\underline{\rho} \in \mathcal{R}$ ensemble des deplacement de corps rigide)

- Soient deux solutions $\underline{u}$ et $\underline{u}^*$ du système : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^T) = \underline{\underline{e}}$

on a $\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}(\underline{u}-\underline{u}^*) + \underline{\underline{\nabla}}(\underline{u}-\underline{u}^*)\right]^T = \underline{\underline{0}}$ et donc $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\rho}$

- Si le problème étudié est un problème de type 1, le déplacement solution est connu sur une partie de la frontière Γ_0 et vaut par exemple $\underline{u}^d$

de sorte que $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\rho} = 0$ sur Γ_0

Comme Γ_0 contient au moins trois points non alignes, (Γ_0 de mesure non nulle)

, on a $\underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{OM_i} = 0 \quad i = 1,2,3$ et par différence :

$\underline{b} \wedge \underline{M_1M_2} = 0 \quad \underline{b} \wedge \underline{M_2M_3} = 0 \quad \underline{b} \wedge \underline{M_1M_3} = 0$ d'où $\underline{b} = \underline{0}$ et donc $\underline{a} = 0$

En conséquence $\underline{u} - \underline{u}^* \equiv 0$, le déplacement de corps rigide est annulé bloqué par les conditions cinematiques. De sorte que, un problème de type 1 admet une solution unique en déplacement, en déformation et en contraintes. (L'existence est admise ici)

- Si le problème est un problème de type 2, aucune condition en déplacement n'est imposée sur la frontière. De sorte que le déplacement de corps rigide ne peut être annulé.

Un problème de type 2, s'il admet une solution, n'admet pas une solution unique en déplacement. Le déplacement est défini à un déplacement de corps rigide près. Par contre, les contraintes et les déformation sont uniques

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^* + \underline{\rho}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\rho}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^*)$$

- Considérons maintenant un problème de type 3. avec par exemple une seule composante du déplacement prescrite sur une partie Γ_0 de la frontière (pour simplifier on prend $u_3^d = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_0$) - On a alors :

$$u_3 - u_3^* = \rho_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_0$$

ce qui entraîne $a_3 = b_1 = b_2 = 0$ d'où
$$\begin{cases} u_1 - u_1^* = a_1 - b x_2 \\ u_2 - u_2^* = a_2 + b x_1 \\ u_3 - u_3^* = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$$

le déplacement solution n'est donc pas unique mais défini à un déplacement de corps rigide près compatible avec la liaison cinématique

2.7 Principe de Superposition

Sous réserve que l'état de contrainte initial soit naturel ($\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{0}}$), par linéarité du système d'équations modèle, il y a une correspondance linéaire entre

- les données du problème $\rho \underline{f}$, $\underline{F}^d_{\text{sur } \Gamma_1}$, $\underline{u}^d$ sur Γ_0

et

- la solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème

Cette propriété est appelée principe de superposition et s'énonce de la manière suivante :

- Si $\underline{\underline{\Pi}}^1$ et $\underline{u}^1$ satisfont les equation du problème d'elasticité linéaire avec les donnés $\underline{f}^1$, $\underline{F}^{1d}$, $\underline{u}^{1d}$
- Si $\underline{\underline{\Pi}}^2$ et $\underline{u}^2$ ———————— ———————— $\underline{f}^2$, $\underline{F}^{2d}$, $\underline{u}^{2d}$

alors $\forall \lambda^1$ et $\forall \lambda^2$, les champs :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \lambda^1 \underline{\underline{\Pi}}^1 + \lambda^2 \underline{\underline{\Pi}}^2 \quad \text{et} \quad \underline{u} = \lambda^1 \underline{u}^1 + \lambda^2 \underline{u}^2$$

satisfont les equations du problème d'équilibre avec les donnés

$$\underline{f} = \lambda^1 \underline{f}^1 + \lambda^2 \underline{f}^2, \quad \underline{F}^d = \lambda^1 \underline{F}^{1d} + \lambda^2 \underline{F}^{2d}, \quad \underline{u}^d = \lambda^1 \underline{u}^{1d} + \lambda^2 \underline{u}^{2d}.$$

le principe permet d'expliciter des solutions analytiques sous des chargements couplés par combinaison de solutions élémentaires.

- Il faut retenir pour l'appliquer que les frontières Γ_0 et Γ_1 sur lesquels sont imposés les chargemets en déplacement et en effort doivent être les mêmes pour les deux chargements 1 et 2
- Il faut également veiller à ce que les hypothèses de linearisation HPP soient bien satisfaites après superposition, sinon la solution obtenue n'aura pas de signification physique.
- Dans le cas où l'état initial est autocontraint, la propriété de linearité reste valable à condition de l'appliquer au champ $\underline{\underline{\Pi}} - \underline{\underline{\Pi}}_0$. On a alors

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_0 + \lambda^1 (\underline{\underline{\Pi}}^1 - \underline{\underline{\Pi}}^0) + \lambda^2 (\underline{\underline{\Pi}}^2 - \underline{\underline{\Pi}}^0) \qquad \underline{u} = \lambda^1 \underline{u}^1 + \lambda^2 \underline{u}^2$$