Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 7 janvier 2016

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner un exemple d'équation aux dérivées partielles linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants. Resoudre cette équation et tracer graphiquement quelques droites caractéristiques.
2. Donner (sans démonstration) la solution générale pour l'équation des ondes 1D définie sur l'axe réel. Donner l'interprétation physique de cette solution.
3. Soit $f(x)$ une donnée initiale pour un problème de Dirichlet : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$. Donner l'expression des coefficients de Fourier A_n.
4. Donner un exemple de phénomène physique modélisé par l'équation de Laplace $\Delta u = 0$.
5. Énoncer (sans démonstration) le principe de maximum pour une fonction harmonique.

Exercice 1

Soit l'équation aux dérivées partielles : $3u_y + u_{xy} = 0$.
(a) De quelle type d'équation s'agit-t-il ?
(b) Trouver la solution générale (*Indication* : poser $v = u_y$)
(c) Supposons les conditions auxiliaires $u(x, 0) = e^{-3x}$ et $u_y(x, 0) = 0$. Est-ce qu'une solution existe ? Est-elle unique ?

Exercice 2

Soit le problème aux conditions initiales et aux limites :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \; t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \; t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{5\pi x}{l}\right), \; u_t(x, 0) = 0, \; 0 < x < l, a \in \mathrm{R} \tag{3}$$

i) Précisez de quelle équation de la mécanique s'agit-t-il ?
ii) Déterminer la solution $u(x, t)$ qui vérifie les conditions aux limites et initiales.

Indication : $2 \cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

Exercice 3

Une tige métallique fine de longuer 20 cm a une température initiale uniforme de $25^{\circ}K$. Les extremités de la tige sont maintenues à la température $0^{\circ}K$ en $x = 0$ et respectivement $60^{\circ}K$ en $x = 20$, $\forall t > 0$. La température de la tige est solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

avec k une constante dépendante des propriétés physiques de la tige.
(a) Montrer que $u_s(x) = 3x$ est une solution stationnaire de l'équation (4) qui satisfait les conditions

aux limites données.
(b) Soit $u(x,t) = v(x,t) + u_s(x)$. Montrer que $v(x,t)$ satisfait une équation de la chaleur avec des conditions aux limites homogènes. Déterminer la condition initiale correspondante pour v.
(c) Déterminer la solution du problème en $v(x,t)$ puis montrer que la température $u(x,t)$ dans la tige est donnée par l'expression :

$$u(x,t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{50 + 70(-1)^n}{n\pi} \right) e^{-(kn\pi)^2 t/400} \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right)$$

Exercice 4
En résolvant l'équation de Laplace en coordonnées polaires :

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

dans l'anneau $(r,\theta), a \leqslant r \leqslant b$, avec $0 < a < b$, déterminer la température d'un anneau métallique fin qui vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(a,\theta) &= u_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u(b,\theta) &= u_1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{aligned}$$

Autrement dit, l'anneau est maintenu à la température constante u_0 sur sa frontière intérieure et respectivement u_1 sur sa frontière extérieure.