Equations aux dérivées partielles pour la mécanique I

Responsable : Anca BELME

L3 - Département de mécanique UPMC

Table des matières

Introduction **4**

1 Equations de premier ordre, caractéristiques **6**
1.1 Les premiers pas dans la thèorie des équations aux dérivées partielles . . . 6
1.2 Equations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre . . . 8
1.2.1 Méthode des caractéristiques (ou des courbes caractéristiques) . . . 8
1.2.2 Méthode du changement de variables . . . 9
1.2.3 Le cas des équations à coefficients variables . . . 10
1.3 Conditions initiales et aux frontières. Problème bien posé . . . 10
1.3.1 Problème bien posé . . . 11

2 Equations linéaires d'ordre 2, classification, forme standard **13**
2.0.1 Classification . . . 13
2.0.2 Forme canonique des équations hyperboliques . . . 15
2.0.3 Forme canonique des équations paraboliques . . . 17
2.0.4 Forme canonique des équations elliptiques . . . 18
2.0.5 Conclusion . . . 19

3 Equation des ondes sur un axe, solution de d'Alembert **20**
3.0.1 Problème de Cauchy : solution de d'Alembert . . . 22
3.0.2 Domaine de dépendance et région d'influence . . . 23
3.0.3 Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène . . . 24

4 Equation de la chaleur, solution fondamentale **26**
4.0.1 Le principe de maximum . . . 26
4.0.2 Diffusion sur l'axe réel . . . 29

5 Séparation des variables, séries de Fourier **32**
5.1 Equation des ondes . . . 32
5.1.1 Dérivation physique . . . 32
5.1.2 Conditions initiales et conditions aux frontières . . . 33
5.1.3 Adimensionnement . . . 33
5.1.4 Séparation des variables : Conditions de Dirichlet . . . 34
5.2 Equation de la chaleur (ou diffusion) . . . 35
5.2.1 Dérivation physique . . . 35
5.2.2 Conditions initiales et conditions aux frontières . . . 36
5.2.3 Adimensionnement . . . 36
5.2.4 Séparation des variables : Conditions de Dirichlet . . . 37
5.2.5 Exemple : Le refroidissement d'une tige à partir d'une température initiale constante . . . 38
5.3 Conditions de Neumann . . . 39
5.4 Conditions aux limites mixtes . . . 40
5.5 Eléments de séries de Fourier . . . 40
5.5.1 Coefficients des séries de Fourier . . . 40
5.5.2 Convergence des séries de Fourier . . . 42

6 Equation de Laplace, fonctions harmoniques **43**
6.1 Principe de maximum 44
6.2 Unicité de la solution 44
6.3 Invariance et coordonnées polaires 44
6.4 Solution par séparation des variables 45
6.5 Formule de Poisson 46

7 Annexe **48**
7.1 Annexe 1 48
7.2 Annexe 2 : Convergence uniforme, différentiation et intégration d'une série de fonctions 48
7.2.1 Application a la solution de l'équation de la chaleur 50

Introduction

Notre connaissance des processus naturels qui nous entourent chaque jours est beaucoup basée sur les équations aux dérivées partielles. C'est le cas par exemple dans les études de vibrations des solides, l'écoulement des fluides, la diffusion des produits chimiques, de la chaleur, la structure des molécules, l'interaction des photons et électrons, la radiation des ondes électromagnétiques, pour ne citer que quelques exemples.

Ce manuscrit est largement inspiré du livre de Walter A. Strauss (Brown University) "Partial Differential Equations : An Introduction". Il est destiné comme cours introductoire dans l'analyse des équations aux dérivées partielles pour les étudiants de 3ème année en Licence Ingénierie. Ce manuscrit englobe les notions de base tout en illustrant la richesse des phénomènes physiques décrites par des équations aux dérivées partielles. Une attention particulière sera accordé à la méthode de séparation des variables.

Les prérequis pour la bonne compréhension de ce cours sont : les fonctions de plusieurs variables, notamment leur dérivation, la notion de dérivée directionnelle, de différentielle, mais également la résolution des équations aux dérivées ordinaires. Une partie de ces prérequis peuvent être consulté en annexe de ce manuscrit.

L'équipe pédagogique est composée de :

- Anca BELME (responsable de l'UE : cours et TD) : belme@dalembert.upmc.fr
- Diana BALTEAN-CARLES (chargé de TD) : baltean@limsi.fr
- Eric SULTAN (chargé de TD) : eric.sultan@upmc.fr
- Fatiha BOUCHELAGHEM (chargé de TD) : fatiha.bouchelaghem@upmc.fr
- Stéphane ZALESKI (chargé de TD) : zaleski@dalembert.upmc.fr

Chapitre 1

Equations de premier ordre, caractéristiques

1.1 Les premiers pas dans la thèorie des équations aux dérivées partielles

Une equation aux dérivées partielle (EDP) décrit une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées partielles.

Les EDP apparaissent fréquement dans tous les domaines de la physique et de l'ingénierie (mais aussi en biologie, chimie, informatique et finance). En effet, dans chaque domaine où il y a une interaction entre un certain nombre de variables indépendantes, nous tentons de définir des fonctions de ces variables et de modéliser une variété de processus en construisant des équations pour ces fonctions.

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles est qu'elle met en jeu des fonctions de plusieurs variables :

$$(x_1, x_2, ...) \to u(x_1, x_2, ...)$$

Les dérivées partielles de la fonction u seront notées : $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ ou u_{x_1} ou encore $\partial_{x_1} u$ et ainsi de suite.

Définition:
Une EDP est une relation entre les variables $x_1, x_2, ...$, la fonction $u(x_1, x_2, ...)$ et une ou plusieurs dérivées partielles.
La forme générale d'une EDP pour une fonction $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ est :

$$F(x_1, x_2, ...x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_i x_j}, ...) = 0$$

ou $x_1, x_2, ...x_n$ sont les variables indépendantes et u est la fonction inconnu et u_{x_i} les dérivées partielles.
L'équation est, en général, complétée par des conditions supplémentaires (conditions initiales et/ou conditions aux frontières).

Quelques exemples :

1. $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \textbf{une équation de transport}$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \textbf{encore une équation de transport}$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \textbf{une équation d'onde de choc}$$

4.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad \textbf{l'équation de Laplace}$$

5.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \textbf{l'équation des ondes ou cordes vibrantes}$$

6.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textbf{l'équation de la diffusion ou chaleur}$$

7.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 = 0 \quad \textbf{l'équation d'onde avec intéraction}$$

L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.
Ainsi, les exemples 1,2,3 sont des EDP d'ordre 1 et les exemples 4,5,6 et 7 des EDP d'ordre 2.

De plus, les exemples 3 et 7 se distinguent des autres cas car ce sont des EDP **non-linéaires**. On va maintenant expliquer ce concept.
Afin de comprendre la notion de linéarité on va d'abord définir l'opérateur associé à l'EDP.

Un **opérateur** L désignera une transformation qui associe à toute "bonne" fonction $u = u(x_1, x_2, ...)$ de plusieurs variables $x_1, x_2, ...$ sur un domaine D, une fonction $Lu = Lu(x_1, x_2, ...)$ sur ce même domaine. Le qualificatif "bonne" fonction signifie ici que Lu est bien définie.

Exemples d'opérateurs :
Si $u = u(x_1, x_2)$ alors $Lu = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ est un exemple d'opérateur ($L : u \to \frac{\partial u}{\partial x_1}$).
Un autre exemple : l'opérateur associée à l'EDP de l'exemple 1 : $L : u \to \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}$.

Définition:

- *Un opérateur L est* ***linéaire*** *si et seulement si :* $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* u *et* v *des "bonnes" fonctions*
- *Une* **EDP est dite linéaire** *si elle est de la forme* $Lu = f(x_1, x_2, ...)$ *où* **L est un opérateur linéaire***,* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est une fonction de* n *variables indépendantes et* u *est la fonction recherchée.*
- *Si de plus* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ *on dit alors que l'équation est linéaire* **homogène**. *Sinon elle est* **non-homogène**.

Exemples:

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

est une EDP **linéaire, non-homogène**.
En effet :

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

est un opérateur linéaire et $f(x, y) = 1$.

Proposition :

- *Soit une EDP linéaire homogène* $Lu = 0$ *pour laquelle* L *est un opérateur linéaire. Si* u_1, u_2 *sont deux solutions de cette EDP et* $a, b \in \mathbb{R}$ *alors* $au_1 + bu_2$ *est aussi une solution. Ceci est* **le principe de superposition**.

- *Soit une EDP linéaire $Lu = f(x_1, x_2, ...)$ pour laquelle L est un opérateur linéaire. Si u_1, u_2 sont deux solutions de cette EDP alors $u_2 - u_1$ est une solution de l'équation linéaire homogène associée $Lu = 0$. Ce résultat signifie que si nous connaissons toutes les solutions de $Lu = 0$ et que nous connaissons une solution particulière u_1 de $Lu = f(x_1, x_2, ...)$ alors nous connaissons toutes les solutions de cette dernière équation. En effet, elles sont toutes de la forme $v + u_1$ où v est une solution de $Lu = 0$.*

1.2 Equations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre

Une EDP d'ordre 1 associée à une fonction inconnue $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ a la forme générale suivante :

$$F(x_1, x_2, ...x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}) = 0$$

Pour la simplicité on va se limiter ici à des fonctions de deux variables. Les résultats peuvent facilement se généraliser ensuite à plusieurs variables.

On va donc s'intéresser ici à résoudre des équations linéaires de la forme :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

commençons pour fixer les idées par examiner le cas de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = 0$$

avec $u = u(t, x)$ une fonction de classe C^1. On voit immédiatement que u est solution si et seulement si u ne dépend que de x. Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent :

$$u(t, x) = f(x)$$

pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On remarque desuite qu'il y a **beaucoup de solutions!**

On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique : les solutions $(t, x) \to u(t, x)$ sont exactement les fonctions qui sont constantes le long des droites horizontales du plan (Otx), c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a, b) = (1, 0)$.

Ce phénomène a également lieu pour toutes les équations :

$$a\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + b\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0$$

et c'est ce que nous allons mettre en évidence.

1.2.1 Méthode des caractéristiques (ou des courbes caractéristiques)

Un peu d'histoire : La méthode des caractéristiques a été développée par Hamilton au mileu du 19ème siècle dans ses études de propagation de la lumière . Il a cherché à deriver les règles régissant cette propagation d'un point de vue purement géométrique.

Commençons par un exemple simple. Soit l'EDP à **coefficients constants** :

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

avec a et b constantes, $a^2 + b^2 \neq 0$ (i.e. au moins une des constantes est non-nulle).

On remarque que (1.1) peut s'écrire comme le produit scalaire :

$$(a, b) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad (a, b) \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

Autrement dit, (1.1) signifie que la dérivée directionnelle de $u = u(x,y)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = (a,b)$ est nulle en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (voir le rappel de la notion de dérivée directionnelle en Annexe 1). On a alors la propriété suivante :

Propriété:
Si u est solution de (1.1), alors u est constante le long de chaque droite de direction $\vec{v} = (a,b)$.

Définition:
On appelle **caractéristique** *de l'équation (1.1) les droites de vecteur directeur (a,b). Ce sont toutes les droites D_c d'équation $bx - ay = c$, où c est une constante arbitraire parcourant l'ensemble des réels.*

D'après la Propriété précédente , $u(x,y)$ est constante le long de chaque caractéristique d'équation : $bx - ay = c$.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à un réel c associe la valeur de u sur la droite D_c. Soit (x,y) un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule caractéristique qui passe par ce point : c'est la droite d'équation $c = bx - ay$. Alors u dépend uniquement de $bx - ay$. On a donc :

$$u(x,y) = f(c) = f(bx - ay) \tag{1.2}$$

On a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire. Il reste a prouver que toute fonction u de la forme (1.2) avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est bien solution de (1.1). C'est une vérification très simple, il suffit d'insérer (1.2) dans l'équation (1.1).

En effet,

$$a\frac{\partial}{\partial x}f(bx - ay) + b\frac{\partial}{\partial y}f(bx - ay) = abf'(bx - ay) - baf'(bx - ay) = 0.$$

Théorème
Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation (1.1) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(x,y) = f(bx - ay)$$

1.2.2 Méthode du changement de variables

Nous alons retrouver le résultat précédent à l'aide d'une autre méthode, c'est en effet une autre formulation de la même idée.

On a vu que les solutions de l'équation (1.1) ne dépendent que de la variable $bx - ay$. On pose donc $x' = bx - ay$ et on choisit une autre coordonnée y' qui soit indépendante. On prend par exemple :

$$\begin{cases} x' = bx - ay \\ y' = ax + by \end{cases}$$

On remplace les dérivées en x et y par celles en x' et y'. On applique la règle de chaines (voir l'annexe pour le rappel) et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = b\frac{\partial u}{\partial x'} + a\frac{\partial u}{\partial y'}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = -a\frac{\partial u}{\partial x'} + b\frac{\partial u}{\partial y'}$$

Alors l'équation (1.1) devient une équation aux dérivées ordinaire comme le montre la calcul suivant :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} &= a\left(b\frac{\partial u}{\partial x'} + a\frac{\partial u}{\partial y'}\right) + b\left(-a\frac{\partial u}{\partial x'} + b\frac{\partial u}{\partial y'}\right) \\ &= (a^2 + b^2)\frac{\partial u}{\partial y'} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Comme $a^2 + b^2 \neq 0$ on a : $\frac{\partial u}{\partial y'} = 0$ qui a pour solution $u = f(x') = f(bx - ay)$. On obtient donc le même résultat que précédement.

1.2.3 Le cas des équations à coefficients variables

Soit l'équation :

$$u_x + yu_y = 0 \tag{1.4}$$

de coefficient variable y. On va montrer comment on peut utiliser la méthode des caractéristiques pour cet exemple. On remarque que (1.4) est la dérivée directionnelle de u dans la direction du vecteur $\vec{v} = (1, y)$. Cette fois-ci le vecteur $\vec{v}$ n'est plus constant, il varie en fonction de y. Les courbes du plan (Oxy) qui ont $(1, y)$ pour vecteur tangent ont la pente $\frac{y}{1}$ et satisfont l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$$

La solution de cette équation est :

$$y = Ce^x \quad \text{ou} \quad C = e^{-x}y$$

avec C une constante réelle.
Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation (1.4).
Comme pour le cas des équations à coefficients constants, la solution de l'équation (1.4) **est constante le long de ces courbes carcatéristiques**.
La solution générale de (1.4) est donc :

$$u(x, y) = f(C) = f(e^{-x}y)$$

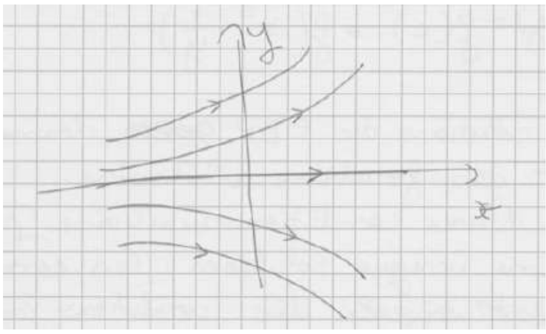


FIGURE 1.1 : Quelques caractéristiques pour l'exemple de l'EDP 1.4 a coefficients variables

Exercice :
Trouvez la solution de (1.4) sachant qu'elle satisfait une condition auxiliaire : $u(0, y) = y^3$.
En effet $u(0, y) = f(e^{-0}y) = f(y)$. Cela implique que $f(y) = y^3$.
Alors, $u(x, y) = f(e^{-x}y) = (e^{-x}y)^3 = e^{-3x}y^3$.

Un autre exemple :

Soit $\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
La courbe caractéristique satisfait l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$$

On sépare les variables : $\frac{dy}{y^2} = 2xdx$. Une solution de cette EDO est : $C = x^2 + \frac{1}{y}$, donc la solution de l'EDP est $u(x, y) = f(C) = f(x^2 + \frac{1}{y})$.

1.3 Conditions initiales et aux frontières. Problème bien posé

On a vu précédemment qu'en général une équation aux dérivées partielles possède une infinité de solutions. Pour obtenir une solution unique on a besoin d'imposer des conditions auxiliaires. Ces conditions auxiliaires sont motivé par une description physique du problème et sont de deux types : **conditions initiales** et **conditions aux frontières** (ou conditions aux bords ou conditions limite).

Une **condition initiale** décrit un état physique a un temps précis t_0 (en pratique il s'agit souvent de l'état initial à : $t = 0$). Par exemple, supposons qu'on s'intéresse a une problème de diffusion de la chaleur dans une tige, une condition initiale serait :

$$u(x, t_0) = \phi(x),$$

ou u est la temperature et ϕ une fonction donnée (connu) qui répresente la temperature à l'instant t_0.

Un autre exemple : soit l'étude de la vibration d'une corde. Les conditons initiales sont :

$$u(x, t_0) = \phi(x), \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x)$$

avec u l'amplitude de la corde, $\phi(x)$ la position initiale et $\psi(x)$ la vitesse initiale.

De plus, on a vu qu'une EDP est étudié sur un domaine précis. Dans l'exemple de la corde vibrante a une dimension on a une corde de longueur l, donc un domaine $0 < x < l$ (de même, pour la diffusion de la chaleur on aura le domaine définie par la tige). Ainsi, la frontière du domaine coïncide aux points $x = 0$ et $x = l$. Il est évident que l'intuition physique nous mène a imposer des **conditions aux frontières**. Les trois plus importantes conditions aux frontières sont :

- **Condition de Dirichlet** : la valeur de u est spécifiée sur la frontière
- **Condition de Neumann** : la dérivée normale $\partial u/\partial n$ est spécifiée (avec n la normale sortante du domaine de définition)
- **Condition de Robin** : $\partial u/\partial n + au$ est spécifiée

De manière générale ces conditions apparaissent sous forme d'équation. Par exemple, pour une condition de Neumann sur une frontière on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, t)$$

avec g une fonction donnée, appelée aussi donnée aux frontières. Si $g = 0$ on dit que la condition limite ou frontière est homogène, sinon elle est non-homogène.

1.3.1 Problème bien posé

On dit qu'une EDP avec ces conditions initiales et conditions aux frontières est une problème bien posé si elle satisfait les propriétés suivantes :

- *Existence* : il existe au moins une solution $u(x, t)$ qui satisfait ces conditions
- *Unicité* : la solution est unique
- *Stabilité* : la solution unique $u(x, t)$ est stable par rapport aux données du problème. Ceci signifie qu'un faible changement des conditions/données du problème n'entraine qu'un changement faible dans la solution.

Pour des problèmes d'ingénierie modélises par des EDP en règle générale on essaie de définir des conditions auxiliaires (initiales et aux frontières) qui mènent a un problème bien posé. Les mathématiques vérifient ensuite si le problème est bien posé ou pas. Par exemple, si on n'impose pas assez des conditions auxiliaires, alors il se peut que la solution ne soit pas unique et le problème est dite sous-déterminée. De plus, si on a trop de conditions auxiliaires, on risque d'avoir un soucis d'existence de la solution. On dit dans ce cas que le problème est sur-déterminée.

La condition de stabilité est surtout importante pour les modèles physiques. En effet, les données sont mesuré avec une certaine précision, a une décimale près. Il est difficile de comparer un ensemble des données avec un ensemble des même données mais légèrement perturbé. Ainsi, la solution ne devrait pas être très différente.

Prenons l'exemple de la vibration d'une corde. Soit les conditions initiales : $u(x, 0) = \phi(x)$ et $u_t(x, 0) = \psi(x)$ et les conditions limite : $u(0, t) = f(t)$, $u(l, t) = g(t)$. Les données de ce problème sont les fonctions f, g, ϕ, ψ (et éventuellement aussi une donnée non-homogène h de l'EDP de l'onde 1D : $u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$). L'existence et l'unicité signifie qu'il existe une unique solution u pour les fonctions (différentiables) arbitraires f, g, ϕ, ψ, h. La stabilité signifie que si une de ces fonctions est légèrement perturbé, alors u est seulement légèrement perturbé aussi.

Chapitre 2

Equations linéaires d'ordre 2, classification, forme standard

Nous classons les EDP linéaires d'ordre deux pour les fonctions à deux variables indépendantes en trois types distincts :

- **hyperbolique** (Ex : l'équation d'onde (voir Exemple 5 du chapitre 1))
- **parabolique** (Ex : l'équation de la chaleur (voir Exemple 6 du chapitre 1))
- **elliptique** (Ex : l'équation de Laplace (voir Exemple 4 du chapitre 1))

Les solution des équations du même type partagent des nombreuses propriétés qualitatives. Nous montrons que par un certain changement de variable toute équation d'un type particulier peut-être transformée en une forme canonique (ou standard) qui est associée a son type.

2.0.1 Classification

Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables indépendantes donnée sous la forme suivante :

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{2.1}$$

avec a, b, c, d, e, f, g des fonctions de x, y données et $u(x, y)$ est la fonction inconnue. Le facteur 2 devant le coefficient b est introduit par commodité.
On suppose de plus que a, b, c ne s'annulent pas en même temps.

La classification des EDP d'ordre 2 dépend des termes du deuxième ordre, autrement dit de l'opérateur :

$$L_0 u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$

appelée **partie principale** de L. Il s'avère que beaucoup des propriétés fondamentales de la solution $u(x, y)$ de l'équation (2.1) sont déterminées par cette partie principale, et plus précisément par le signe du discriminant :

$$\delta(L) := b^2 - ac$$

de l'équation.
Nous classons l'équation selon le signe de $\delta(L)$.

Définition:
On dit que l'EDP d'ordre 2 (équation (2.1)) est :

- ***hyperbolique** en (x, y) si $\delta(L)(x, y) > 0$*
- ***parabolique** en (x, y) si $\delta(L)(x, y) = 0$*
- ***elliptique** en (x, y) si $\delta(L)(x, y) < 0$*

avec $\delta(L)(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)$.

Soit Ω un sous-domaine de $\mathbb{R}^2$ (i.e. Ω un ensemble connexe ouvert). Alors l'équation est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) partout en Ω si elle est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) en chaque point $(x,y) \in \Omega$.

Afin d'illustrer la signification du discriminant $\delta(L)$ on va montrer par la suite comment peut-on réduire l'équation (2.1) à une forme canonique (standard). On va procéder à un changement de coordonnées.

Définition:
La transformation : $\left\{ \begin{array}{l} \xi{=}\xi(x,y) \\ \eta{=}\eta(x,y) \end{array} \right.$ *est appelée un* ***changement de coordonnées*** *(ou transformation non-dégénerée) si le Jacobien de la transformation :*

$$J = det \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$$

pour tout (x,y).

Lemme *: Le type d'une EDP linéaire d'ordre deux pour une fonction de deux variable est* ***invariant*** *par un changement de coordonnées.*
Autrement dit, le type de l'équation est une propriété intrinsèque de l'équation et est indépendant du système de coordonnées particulier utilisé.

Preuve :
Soit

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{2.2}$$

Soit $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ une transformation non-dégénerée.
On note $w(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. On a affirmé que w est solution d'une EDP d'ordre 2 du même type.
Par la règle de la chaine (ou la règle de dérivation des fonctions composées) on a :

$$u_x = w_\xi\xi_x + w_\eta\eta_x$$

$$u_y = w_\xi\xi_y + w_\eta\eta_y$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi\xi_{xx} + w_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{xy} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi\xi_{xy} + w_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi\xi_{yy} + w_\eta\eta_{yy}$$

En remplaçant ces formules dans (2.2) on observe que w satisfait l'équation linéaire suivante :

$$l[w] := Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta} + Dw_\xi + Ew_\eta + Fw = G$$

où les coefficients de la partie principale de l'équation sont donnés par :

$$A(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$$

$$B(\xi,\eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y$$

$$C(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

Remarque : On observe qu'on n'a pas besoin de calculer les coefficients D, E, F car le type de l'équation est determiné uniquement par la partie principale (i.e les coefficients A, B, C des termes d'ordre deux)

Par un calcul élémentaire on montre (voir TD 2) que les coefficients vérifient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

Notons J le Jacobien de la transformation. En appliquant le déterminant à l'équation matricielle on trouve :

$$-\delta(l) = AC - B^2 = J^2(ac - b^2) = -J^2\delta(L)$$

Autrement dit : $\delta(l) = J^2\delta(L)$.
Donc le type de l'équation est invariant par une transformation non-dégenerée (i.e. changement de coordonnées).

fin preuve

On montre par la suite que si l'équation (2.1) est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) dans un domaine D, alors on peut trouver un système de coordonnées dans lequel l'équation a une forme plus simple que nous appelons la **forme canonique (ou standard) de l'équation**.

De plus, la partie principale de la forme canonique est égale à la partie principale de l'équation fondamentale de la physique mathématique du même type : l'équation de l'onde pour le cas hyperbolique, de la chaleur pour le cas parabolique et l'équation de Laplace pour le cas elliptique.
Ceci est l'une des raisons pour l'étude de ces équations fondamentales.

Définition:
La forme canonique (ou standard) d'une équation :

- ***hyperbolique** est :*
$$l[w] = w_{\xi\eta} + l_1[w] = G(\xi, \eta)$$
- ***parabolique** est :*
$$l[w] = w_{\xi\xi} + l_1[w] = G(\xi, \eta)$$
- ***elliptique** est :*
$$l[w] = w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + l_1[w] = G(\xi, \eta)$$

On observe que pour le cas hyperbolique la forme canonique ne correspond pas à l'opérateur de l'équation de l'onde. Neanmoins, on montrera plus tard qu'un changement de coordonnées simple transforme bien l'équation de l'onde sous la forme $w_{\xi\eta} = 0$.

2.0.2 Forme canonique des équations hyperboliques

Théorème
Supposons que (2.1) est hyperbolique dans un domaine D. Alors il existe un système de coordonnées (ξ, η) dans lequel l'équation a la forme canonique suivante :

$$w_{\xi\eta} + l_1[w] = G(\xi, \eta),$$

où $w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, l_1 est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre et G est une fonction qui dépend de l'équation (2.1).

Preuve : Supposons $a(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in D$. On cherche deux fonctions $\xi = \xi(x, y)$ et $\eta = \eta(x, y)$ tel que :

$$A(\xi, \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$$
$$C(\xi, \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0$$

On observe qu'on a la même équation pour les fonctions η et ξ. Il suffit donc de résoudre une seule. Par exemple celle en ξ. Il s'agit d'une équation de premier ordre non-linéaire, mais comme elle est une forme quadratique en ξ alors il est possible de l'écrire sous forme de produit de deux termes linéaires :

$$\frac{1}{a}\left[a\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac}\xi_y)\right]\left[a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac}\xi_y)\right] = 0$$

On a donc un système de deux équations linéaires à résoudre :

$$a\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0 \tag{2.3}$$

$$a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0 \tag{2.4}$$

Afin d'obtenir une transformation non-dégenerée on choisie ξ solution de (2.3) et η solution de (2.4).
On résout (2.3) (pour ξ) et (2.4) (pour η) par la méthode des caractéristiques.
L'équation des caractéristiques associée à (2.3) est :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{2.5}$$

et l'équation des caractéristiques associée à (2.4) est :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{2.6}$$

Remarque : Les solutions des équations (2.5) et (2.6) sont la famille de caractéristiques (ou les projections caractéristiques) de l'équation $L[u] = g$.

Exemple :
Soit l'équation hyperbolique :

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

Trouver un système de coordonnées $s = s(x, y)$ et $t = t(x, y)$ qui transforme l'équation dans sa forme canonique.
Montrer que dans ce système de coordonnées l'équation prend la forme $v_{st} = 0$ et trouver sa solution générale.
On identifie :

$$a = 1, b = -\sin(x), c = -\cos^2(x)$$

Les équations caractériques sont :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x) + \sqrt{sin^2(x) + \cos^2(x)}}{1} = -\sin(x) + 1$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x) - \sqrt{sin^2(x) + \cos^2(x)}}{1} = -\sin(x) - 1$$

de solution $y = \cos(x) \pm x + const.$

Alors la transformation est :

$$s(x, y) = \cos(x) + x - y$$
$$t(x, y) = \cos(x) - x - y$$

Soit $v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t))$. On remplace dans notre équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}[v_{ss}(-\sin x + 1)^2 + 2v_{st}(-\sin x + 1)(-\sin x - 1) + v_{tt}(-\sin x - 1)^2 + v_s(-\cos x) + v_t(-\cos x)] - \\ -2\sin x[v_{ss}(\sin x - 1) + v_{st}(\sin x - 1) + v_{st}(\sin x + 1) + v_{tt}(\sin x + 1)] - \\ -\cos^2(x)[v_{ss} + 2v_{st} + v_{tt}] - \cos(x)(-v_s - v_t) = 0\end{aligned}$$

Après calcul on obtient : $-4v_{st} = 0$, donc on a bien la forme canonique $v_{st} = 0$. La solution générale est alors :

$$v(s, t) = F(s) + G(t), \ \ \forall F, G \in C^2(\mathbb{R})$$

et en passant en coordonnées x, y on a :

$$u(x, y) = F(\cos(x) + x - y) + G(\cos(x) - x - y)$$

2.0.3 Forme canonique des équations paraboliques

Théorème
Supposons que (2.1) est parabolique dans un domaine D. Alors il existe un système de coordonnées (ξ, η) dans lequel l'équation a la forme canonique suivante :

$$w_{\xi\xi} + l_1[w] = G(\xi, \eta),$$

où $w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, l_1 est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre et G est une fonction qui dépend de l'équation (2.1).

Preuve : Comme $b^2 - ac = 0$ on peut supposer que $a(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in D$.
On cherche deux fonctions $\xi = \xi(x, y)$ et $\eta = \eta(x, y)$ tel que $B(\xi, \eta) = C(\xi, \eta) = 0, \forall (x, y) \in D$.

On remarque qu'il suffit d'imposer $C = 0$ car grace a la parabolicité de l'équation cela implique que $B = 0$.

Alors on cherche η solution de l'équation :

$$\begin{aligned} C(\xi, \eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ &= \frac{1}{a}(a\eta_x + b\eta_y)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

(on a utilisé ici la condition $b^2 - ac = 0 \to c = b^2/a$).
η est alors solution de l'EDP linéaire de premier ordre : $a\eta_x + b\eta_y = 0$.
Ainsi, η est constante le long des caractéristiques d'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Le choix de ξ doit être tel que le Jacobien de la transformation soir non nul. On peut donc prendre une telle fonction quelconque.
On remarque aussi que l'équation parabolique admet uniquement une famille de caractéristiques contrairement a l'équation hyperbolique qui admet deux familles.

Exemple : Démontrer que l'équation

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$$

est parabolique et trouver sa forme canonique. Trouver la solution générale dans le demi-plan $x > 0$.

Par identification : $a = x^2, \quad b = -xy, \quad c = y^2$, donc $\delta = b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0 \Rightarrow$ équation parabolique.
L'équation des caractéristiques est :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

de solution $xy = const.$
On définie alors $\eta(x, y) = xy$.
La deuxième variable ξ peut être simplement choisie comme $\xi(x, y) = x$.
Soit $v(\xi, \eta) = u(x, y)$. On remplace v dans l'équation pour obtenir :

$$x^2(y^2v_{\eta\eta} + 2yv_{\xi\eta} + v_{\xi\xi}) - 2xy(v_\eta + xyv_{\eta\eta} + xv_{\xi\eta}) + x^2v_{\eta\eta} + xyv_\eta + xv_\xi + xyv_\xi = 0$$

Et après calcul on a la forme canonique :

$$\xi^2v_{\xi\xi} + \xi v_\xi = 0$$

Pour résoudre cette équation on utilise une méthode de substitution. On pose $w = v_\xi$ et on retrouve une équation différentielle : $w_\xi + (1/\xi)w = 0$. La solution est $\ln w = -\ln \xi + C_1(\eta)$ ou $w = \frac{C_2(\eta)}{\xi}$. Il suffit maintenant d'une intégration pour retrouver v :

$$v = \int v_\xi d\xi = \int w d\xi = C_2(\eta)\ln \xi + C_3(\eta)$$

La solution générale est alors :

$$u(x, y) = C_2(xy)\ln x + C_3(xy)$$

avec $C_2, C_3 \in C^2(\mathbb{R})$ des fonctions réelles arbitraires.

2.0.4 Forme canonique des équations elliptiques

Le calcul des coordonnées canoniques pour le cas elliptique est un peu plus subtil que pour les cas hyperbolique et parabolique.
Néanmoins, sous l'hypothèse supplémentaire que les coefficients de la partie principale de l'équation sont des fonctions analytiques réelles, la procédure de calcul de la transformation canonique est similaire à celle pour le cas hyperbolique.

Définition: *:*
Soit D un domaine plan. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite fonction analytique réelle sur D si pour chaque point $(x_0, y_0) \in D$ il existe un développement en série de puissance convergente :

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j}(x-x_0)^j (y-y_0)^{k-j}$$

valable au voisinage de (x_0, y_0).

Théorème
Supposons que l'équation (2.1) est elliptique dans un domaine plan D. Supposons de plus que a, b, c sont des fonctions analytiques réelles en D. Alors, il existe un système de coordonnées (ξ, η) dans lequel (2.1) a la forme canonique suivante :

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + l_1[w] = G(\xi, \eta)$$

où $w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, l_1 est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre et G est une fonction qui dépend de l'équation (2.1).

Preuve : On suppose $a(x,y) \neq 0, \forall (x,y) \in D$. On cherche deux fonctions $\xi = \xi(x,y)$ et $\eta = \eta(x,y)$ qui satisfont les équations :

$$A(\xi, \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = C(\xi, \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

$$B(\xi, \eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = 0$$

Ceci est un système de deux EDP non-linéaires d'ordre un. La principale difficulté est que les deux équations sont couplés.
On peut écrire ce système (nomée $(*)$) sous la forme :

$$A - C = 0$$

$$i \cdot B = 0$$

Autrement dit :

$$a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) = 0$$

et

$$a\xi_x i\eta_x + b(\xi_x i\eta_y + \xi_y i\eta_x) + c\xi_y i\eta_y = 0$$

avec $i = \sqrt{-1}$.
On définit la fonction complexe : $\Phi = \xi + i\eta$. Le système d'équation est alors équivalent à l'équation complexe :

$$a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0$$

Etonnement on est arrivé à la même équation que pour le cas hyperbolique. Par contre, dans le cas elliptique cette équation n'admet pas de solution réelle, ou, en d'autres termes, les équations elliptiques n'ont pas des caractéristiques.

Comme pour le cas hyperbolique, grace a la forme quadratique de cette EDP, on peut la décomposer en produit de deux EDP linéaires d'ordre un, sauf qu'elle sont à variable complexe (x et y sont des variables complexes).
La question d'existence et d'unicité de ces solutions se pose.
Toutefois, si les coefficients de ces équations linéaires du premier ordre sont analytiques réels, alors il est possible de les résoudre comme dans le cas réel.

En outre, les solutions des deux équations sont les complexes conjuguées.
On résoud donc les équations :

$$a\Phi_x + (b \pm i\sqrt{ac - b^2})\Phi_y = 0$$

Les solutions sont constantes le long des caractéristiques (dans le plan complexe) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

Comme pour le cas hyperbolique, l'équation en nouvelles coordonnées est de la forme :

$$4v_{\Phi\Psi} + ... = 0$$

Ceci n'a pas la forme canonique associée aux équations elliptiques. On retourne en coordonnées ξ et η :

$$\xi = \mathcal{R}e\Phi, \quad \eta = \mathcal{I}m\Phi$$

Comme ξ et η sont solutions du système $(*)$, il s'ensuit que dans les variables ξ et η l'équation a la forme canonique.

Exemple : L'équation de Tricomi :

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \forall x > 0$$

Trouver la transformation canonique $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ et la forme canonique associée.

Les équations à résoudre pour obtenir le changement de variable associé à la forme canonique sont $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-x} = \pm i\sqrt{x}$ de solutions : $\frac{3}{2}y \pm i(x)^{\frac{3}{2}} = const.$
Alors les variables canoniques sont :

$$\xi(x, y) = \frac{3}{2}y \quad \text{et} \quad \eta(x, y) = -(x)^{\frac{3}{2}}$$

avec $\xi_x = 0, \xi_y = \frac{3}{2}, \eta_x = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \eta_y = 0.$
Soit $w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Alors :

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}w_\eta \\ u_y &= \frac{3}{2}w_\xi \\ u_{xx} &= \frac{9}{4}xw_{\eta\eta} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}w_\eta \\ u_{yy} &= \frac{9}{4}w_{\xi\xi} \end{aligned} \tag{2.8}$$

On remplace dans l'équation de Tricomi pour obtenir la forme canonique :

$$\frac{1}{x}u_{xx} + u_{yy} = \frac{9}{4}(w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}w_\eta)$$

2.0.5 Conclusion

Les EDP linéaires d'ordre 2 peuvent être classés en trois types, qui sont invariantes par changement de variables. Les types sont déterminées par le signe du discriminant.
Nous avons vu que les équations hyperbolique ont 2 familles de courbes caractéristiques, les équations paraboliques ont une seule famille, et les équations elliptiques n'ont pas de courbes caractéristique.
Tous les trois types d'équation peuvent être réduites à des formes canoniques. L'équations hyperboliques se réduisent à une forme qui coincide avec l'équation des ondes, les équations paraboliques se réduisent à une forme modélisée par l'équation de la chaleur et les modèles d'équations de Laplace sont la forme canonique des équations elliptiques.
Nous alons étudier par la suite les solutions de ces 3 équations fondamentales : onde, chaleur et Laplace.

Chapitre 3

Equation des ondes sur un axe, solution de d'Alembert

Nous nous interessons ici à l'équation des ondes sur l'axe réel $x \in \mathbb{R}$. Cela correspond à une corde de longueur infinie.
Bien que physiquement irréaliste, comme nous le verrons plus tard, lors de l'examen de la dynamique d'une partie de la corde loin des extremités, les conditions aux limites n'ont pas d'effet sur un intervalle de temps fini (non nul). Pour cette raison, on peut négliger les extremités et faire l'hypothèse d'une corde infinie.

L'équation d'onde, qui décrit la dynamique de l'amplitude $u(x,t)$ du point à la position x de la corde à l'instant t, a la forme suivante :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

ou

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{3.1}$$

avec c la vitesse de déplacement de l'onde.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'équation d'onde est une équation hyperbolique de forme canonique :

$$w_{\xi\eta} = 0 \tag{3.2}$$

La forme canonique est obtenue par le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

Vérifions que (3.2) est équivalent à (3.1) :

$$u_t = cw_\xi - cw_\eta$$
$$u_x = w_\xi + w_\eta$$
$$u_{tt} = c^2 w_{\xi\xi} - 2c^2 w_{\xi\eta} + c^2 w_{\eta\eta}$$
$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$

On remplace dans l'équation (3.1) pour obtenir :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 w_{\xi\xi} - 2c^2 w_{\xi\eta} + c^2 w_{\eta\eta} - c^2(w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}) = -4c^2 w_{\xi\eta} = 0$$

qui est équivalent à (3.2).

La solution de (3.2) est alors :

$$w(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Autrement dit, on a la **solution générale de l'équation d'onde** :

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{3.3}$$

Une autre façon de résoudre l'équation (3.1) est de décomposer (factoriser) l'opérateur linéaire d'ordre deux associé à l'équation de l'onde, en un produit de deux opérateurs linéaires d'ordre un :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Alors l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u}_{v} = 0$$

peut être considérée comme un système de deux équations de transport couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = v \end{cases} \tag{3.4}$$

On a déjà vu la solution de la première équation est :

$$v(x,t) = h(x+ct), \forall h$$

Il nous reste a résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = h(x+ct)$$

La solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière et la solution de l'équation homogène :

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Autrement dit, si u est solution de l'équation d'onde (3.1), alors il existe deux fonctions réelles $f, g \in C^2$ tel que (3.3) est vérifié.

La rélation (3.3) montre que tout solution de l'équation d'onde est la somme de deux ondes :

- $g(x-ct)$ est une onde de forme arbitraire qui se deplace vers la droite à la vitesse c
- $f(x+ct)$ est une onde de forme arbitraire qui se deplace vers la gauche à la vitesse c.

De plus, on a une famille de deux courbes (droites) caractéristiques :

$$x - ct = const \quad \text{et} \quad x + ct = const.$$

de pente $\pm 1/c$. Comme on a vu pour les EDP d'ordre un, ici aussi "l'information" est transférée par l'intérmediaire de ces courbes (droites).

Nous arrivons maintenant à une propriété fondamentale des caractéristiques.
Supposons qu'à un instant t_0 fixé, la solution u est une fonction lisse partout à l'éxception d'un point (x_0, t_0). Evidemment, cela suppose que soit f n'est pas lisse en $x_0 + ct_0$ soit/et g est non-lisse au point $x_0 - ct_0$.
Il y a deux droites caractéristiques qui passent par le point (x_0, t_0), d'équation :

$$x - ct = x_0 - ct_0, \quad x + ct = x_0 + ct_0$$

Alors, pour tout $t_1 \neq t_0$ la solution u est lisse partout excepté un ou deux points $x_\pm$ satisfaisant les conditions :

$$x_- - ct_- = x_0 - ct_0, \quad x_+ + ct_+ = x_0 + ct_0$$

Par conséquent, les singularités de solutions de l'équation des ondes se déplacent seulement le long des caractéristiques. Ce phénomène est typique d'équations **hyperboliques** en général : **une singularité n'est pas lissée, mais elle se deplace plutôt à une vitesse finie**.

Ce phénomène n'a pas lieu pour les équations paraboliques et elliptiques, où, comme nous le verrons plus tard dans les chapitres suivants, les singularités sont immédiatement lissées.

3.0.1 Problème de Cauchy : solution de d'Alembert

Nous examinons par la suite l'équation d'onde avec conditions initiales, dite **problème de Cauchy** et on va isoler une solution physique particulière de la solution générale (3.3).

Notre équation est d'ordre deux en temps, donc une valeur initiale pour le déplacement initial $u(x, 0)$ et pour la vitesse initiale $u_t(x, 0)$ est nécessaire.

On étudie donc le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = & 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) & = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) & = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

avec Φ et Ψ des fonctions arbitraires de x.

Il existe une unique solution pour ce problème, qu'on trouve facilement à partir de la solution générale (3.3) (i.e. $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$).
En effet, à $t = 0$ la solution initiale est :

$$u(x, 0) = \Phi(x) = f(x) + g(x) \tag{3.5}$$

Pour vérifier la deuxième condition initiale on dérive (3.3) par rapport à t, puis on considère $t = 0$:

$$u_t(x, 0) = \Psi(x) = cf'(x) - cg'(x) \tag{3.6}$$

Les équations (3.5) et (3.6) forment un système d'équations d'inconnus f et g.
Pour résoudre ce système, on intègre (3.6) entre 0 et x tel que :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = & \Phi(x) \\ f(x) - g(x)) = & \frac{1}{c}\int_0^x \Psi(s)ds + f(0) - g(0) \end{cases}$$

Ensuite, par une simple addition et soustraction on obtient la solution du système :

$$f(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \Psi(s)ds + \frac{1}{2}[f(0) - g(0)]$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \Psi(s)ds - \frac{1}{2}[f(0) - g(0)]$$

La solution de l'équation d'onde (3.1) est alors :

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) = \frac{1}{2}\Phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \Psi(s)ds + \frac{1}{2}\Phi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \Psi(s)ds \tag{3.7}$$

ou après addition des intégrales on obtient la **solution de d'Alembert** pour le problème de Cauchy :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)ds \tag{3.8}$$

La formule de d'Alembert suppose que pour $\Phi \in C^2$ et $\Phi \in C^1$ la solution du problème de Cauchy est (3.8).

On verra plus tard que pour une condition initiale discontinue, on obtient des solutions 'faibles'.

Exemple : Touver la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, avec les conditions intiales suivantes :

$$\Phi(x) = 0, \quad \Psi(x) = \sin(x)$$

D'après la formule de d'Alembert on a :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(x)dx = \frac{1}{2c}(-\cos(x+ct) + \cos(x-ct))$$

On peut utiliser les idéntités trigonometriques pour obtenir :

$$u(x,t) = \frac{1}{c}\cos(x)\sin(ct)$$

3.0.2 Domaine de dépendance et région d'influence

Revenons au problème de Cauchy et examinons quelle information détermine en fait la solution u en un point donné (x_0, t_0). Soit le répère (Oxt). Les deux caractéristiques qui passent par ce point sont :

$$x - ct = x_0 - ct_0, \qquad x + ct = x_0 + ct_0$$

Ces deux lignes intersectent l'axe des x dans le point $(x_0 - ct_0, 0)$ et $(x_0 + ct_0, 0)$. Le triangle formé par ces caractéristiques et l'intervalle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ est appelée le **triangle caractéristique** :

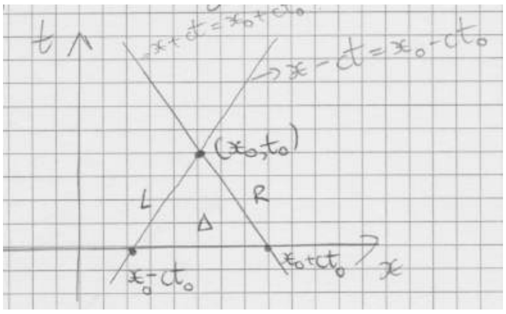


FIGURE 3.1 : Triangle caractéristique

D'après la formule de d'Alembert :

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x_0 + ct_0) + \Phi(x_0 - ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \Psi(s)ds$$

Autrement dit, la valeur de u au point (x_0, t_0) est déterminée par les valeurs de Φ au sommets de la base carcatéristique du triangle et par les valeurs de Ψ le long de cette base. Ainsi, $u(x_0, t_0)$ dépend uniquement de la partie des données initiales qui est donné sur l'intervalle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$.
Par conséquent, l'intervalle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ est appelé **domaine de dépendance** de u au point (x_0, t_0).

Si nous changeons les données initiales aux points dehors de cet intervalle, la valeur de la solution u au point (x_0, t_0) ne changera pas. L'information sur un changement dans les données se déplace à la vitesse c le long des carcatéristiques, et donc cette information n'est pas disponible pour $t \leq t_0$ au point x_0. Le changement va influencer la solution au point x_0 à une date ultérieure.
Ainsi, pour chaque point (x, t) dans un triangle caractéristique fixé, $u(x, t)$ est déterminée uniquement par les données initiales qui sont données sur la base caractéristique (Δ).
En outre, si les données initiales sont lisses sur cette base du triangle, alors la solution est lisse dans l'ensemble du triangle.

Nous pouvons nous demander maintenant la question inverse : quels sont les points sur le demi-plan $t > 0$ qui sont influencés par les données initiales sur un intervalle fixé $[a, b]$?
L'ensemble de tous ces points est appelée la **région d'influence** de l'intervalle $[a, b]$.
De ce qui précède, il résulte que les points de cet intervalle influent sur la valeur de la solution u en un point (x_0, t_0) si et seulement si $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \cap [a, b] \neq \emptyset$.
D'où les données intiales le long de l'intervalle $[a, b]$ influent seulement les points (x, t) satisfaisant :

$$x - ct \leq b \quad \text{et} \quad x + ct \geq a$$

Ce sont les points à l'intérieur du cône caractéristique défini par la base $[a, b]$ et les bords $x + ct = a, x - ct = b$ (c'est l'union des régions I-IV).
Supposons par exemple que Φ et Ψ s'annulent en dehors de l'intervalle $[a, b]$. Alors, l'amplitude de la corde vibrante est nulle en tout point à l'extérieur de la région d'influence de cet intervalle.

D'autre part, pour un point fixé x_0, l'effet de la perturbation le long de l'intervalle $[a, b]$ est ressenti après un temps $t_0 \geq 0$, et éventuellement pour t assez grand la solution prend la valeur constante : $u(x, t) = \frac{1}{2c}\int_a^b \Psi(s)ds$.
Cela se produit effectivement pour des points (x_0, t) situées à l'intérieur du cône (région IV) :

$$x_0 - ct \leq a \quad \text{et} \quad x_0 + ct \geq b$$

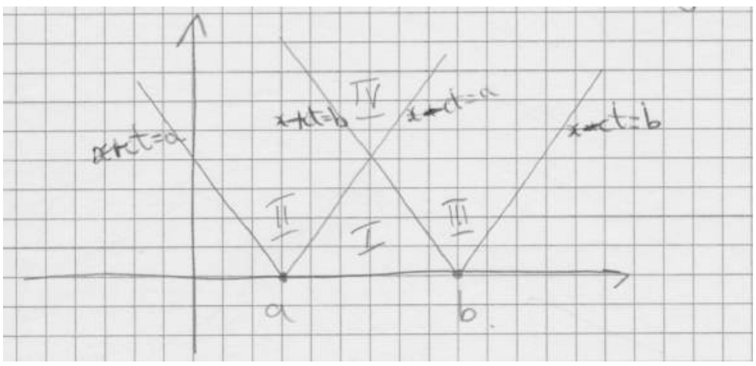


FIGURE 3.2 : Zone d'influence

3.0.3 Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène

Soit le problème de Cauchy non-homogène :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = \Psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Ce problème modelise par exemple la vibration d'une corde en présence d'une force externe F.
Comme pour le cas homogène, Φ et Ψ répresentent la position initiale et respectivement la vitesse verticale de la corde à l'instant $t = 0$.

On démontre par la suite l'existence de la solution de ce problème de Cauchy (l'unicité est évidente car on a un problème linéaire et le problème homogène est a solution unique). Pour cela, nous rappelons la formule de Green pour une paire de fonctions P, Q définie sur un domaine Ω de frontière Γ :

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial P}{\partial t}(x,t)\right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\Gamma} [P(x,t) + Q(x,t)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Soit u solution de (3.9). On intègre l'équation non-homogène sur le triangle caractéristique Δ ayant (x_0, t_0) comme sommet. On note les 3 côtés : L, R, B.
On a alors :

$$-\iint\limits_{\Delta} F(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \iint\limits_{\Delta} (c^2 u_{xx} - u_{tt}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

On utilise la formule de Green (avec $P = u_t$ et $Q = c^2 u_x$), pour obtenir :

$$-\iint\limits_{\Delta} F(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_{\Gamma} (u_t \, \mathrm{d}x + c^2 u_x \, \mathrm{d}t) = \int_B + \int_R + \int_L (u_t \, \mathrm{d}x + c^2 u_x \, \mathrm{d}t)$$

Sur la base B on a $\mathrm{d}t = 0$; Ainsi :

$$\int_B (u_t \, \mathrm{d}x + c^2 u_x \, \mathrm{d}t) = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_t(x,0) \, \mathrm{d}x = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \Psi(x) \, \mathrm{d}x$$

Sur le côté R on a $x + ct = x_0 + ct_0$. Alors $\mathrm{d}x = -c\mathrm{d}t$, et :

$$\int_R (u_t \, \mathrm{d}x + c^2 u_x \, \mathrm{d}t) = -c \int_R (u_t \, \mathrm{d}x + u_x \, \mathrm{d}t) = -c \int_R \mathrm{d}u = -c[u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] = -c[u(x_0,t_0) - \Phi(x_0 + ct_0)].$$

De manière analogue, sur L : $x - ct = x_0 - ct_0$ et $\mathrm{d}x = c\mathrm{d}t$. Alors :

$$\int_L (u_t \, \mathrm{d}x + c^2 u_x \, \mathrm{d}t) = c \int_L \mathrm{d}u = c[u(x_0 + ct_0, 0) - u(x_0, t_0)] = c[\Phi(x_0 - ct_0) - u(x_0, t_0)].$$

Par conséquent,

$$-\iint_{\triangle} F(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \Psi(x)\,\mathrm{d}x + c[\Phi(x_0-ct_0)+\Phi(x_0+ct_0)-2u(x_0,t_0)].$$

où encore :

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\iint_{\triangle} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

Cette formule est la **formule de d'Alembert pour le problème de Cauchy non-homogène**.

Remarques :

1. Pour $F = 0$ on retrouve la formule de d'Alembert (3.8). Ceci est une autre démonstraton de cette formule
2. La valeur de u au point (x_0, t_0) est déterminée par les valeurs des données initiales sur le triangle caractéristique de sommet (x_0, t_0). Ceci est le **domaine de dépendance** pour le problème de Cauchy non-homogène.

Corollaire : *Supposons Φ et Ψ des fonctions paires (resp. impaires, périodiques), et que $\forall t \geq 0$ la fonction $F(\cdot, t)$ est aussi paire (resp. impaire, périodique). Alors $\forall t \geq 0$ la solution $u(\cdot, t)$ du problème de Cauchy est également paire (resp. impaire, périodique).*

Preuve : dévoir maison

Remarque : Dans de nombreux cas, il est possible de réduire un problème non-homogène à un problème homogène si on trouve une solution v particulière de l'équation non-homogène. Cette technique est particulièrement utile si $F = F(x)$ ou $F = F(t)$. Supposons qu'on trouve v solution particulière, alors $w = u - v$, par le principe de superposition, est solution du problème de Cauchy homogène :

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = & 0, \;\; -\infty < x < \infty, \; t > 0 \\ w(x,0) & = f(x) - v(x,0), \;\; -\infty < x < \infty \\ w_t(x,0) & = g(x) - v_t(x,0), \;\; -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Alors w peut-être trouvé par la formule de d'Alembert et la solution finale sera : $u = w + v$.

Chapitre 4

Equation de la chaleur, solution fondamentale

On s'interrese ici à **l'équation de la chaleur (ou diffusion)** suivante :

$$u_t = ku_{xx}$$

On cherchera la solution de cette équation qui dépend des données initiales, similaire à l'équation des ondes. Neanmoins la méthode utilisé dans le chapitre précédent ne s'applique pas ici, les deux équations ont des propriétés différentes : l'équation de la chaleur est de type **parabolique**, elle a une seule famille de caractéristique ($t = c$) qui ne sont pas très utiles car sont parallèles à l'axe des x.

L'équation de la chaleur est plus difficile à résoudre, on commence d'abord par une discussion générale concernant les propriétés de cette équation.
On commence avec le principe de maximum qui nous permettra de déduire l'unicité du problème aux conditions initiales.

4.0.1 Le principe de maximum

Les premières propriétés qu'on va adresser concerne l'unicité et la stabilité de la solution de l'équation de la chaleur avec conditions initiales. Ceci nous permet de vérifier si le problème est bien-posé, et que les conditions initiales imposées ne changent pas la physique du problème.

Principe de maximum

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2*, solution de l'équation de la chaleur :*

$$u_t = ku_{xx}$$

dans le rectangle espace-temps $[0, T] \times [0, l]$*. Alors* u *atteint son maximum sur l'un des bords :* $t = 0,\ x = 0$ *ou* $x = l$ *du rectangle.*

Preuve :
L'idée de la démonstration est basé sur le résultat mathématique, qui dit que pour un maximum intérieur au domaine, les dérivées 1ères sont nulles et les dérivées secondes satisfont une inégalité : $u_{xx} \leq 0$.

Soit M le maximum de $u(x, t)$ sur un des bords $t = 0,\ x = 0,\ x = l$. On doit montrer que $u(x, t) \leq M$ pour tout point intérieur au rectangle R.
On pose $\epsilon > 0$, $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2$. Le but sera de montrer que $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ (tout au long de) partout sur R. On aura ensuite $u(x, t) \leq M + \epsilon(l^2 - x^2)$. Cette conclusion est vraie $\forall \epsilon > 0$.
Par conséquent, $u(x, t) \leq M$ sur R. Par la construction de v il est évident que $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ sur $t = 0,\ x = 0$

et $x = l$. La fonction v satisfait "l'inégalité de la diffusion" :

$$v_t - kv_{xx} = u_t - k(u + \epsilon x^2)_{xx} = \underbrace{u_t - ku_{xx}}_{0} - 2k\epsilon = -2k\epsilon < 0$$

Supposons maintenant que v atteigne son maximum dans un point intérieur (x_0, t_0) (i.e. $0 < x_0 < l$, $0 < t_0 < T$). Alors $v_t = 0$ et $v_{xx} \leq 0$ en (x_0, t_0), mais cela contradit l'inégalité de la diffusion. Donc le maximum ne peut pas être à l'intérieur du rectangle.
Supposons alors que v atteigne son maximum en un point (x_0, t_0) situé sur le bord $t_0 = T$ du rectangle ($0 < x_0 < l$). Alors $v_x(x_0, t_0) = 0$ et $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Par ailleurs, comme $v(x_0, t_0)$ est plus grand que $v(x_0, t_0 - \delta)$ on a :

$$v_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \delta)}{\delta} \geq 0$$

On abouti donc a la meme contradiction.

Remarques :

1. Il existe un principe de maximum fort (beaucoup plus difficile a démontrer) : le maximum n'est pas atteint ailleurs que sur l'un de ces cotés.
2. La valeur minimale de u vérifie la meme propriété ; elle est atteinte pour un point situé sur les bords $t = 0,\ x = 0, x = l$. En effet, ce résultat est imédiat par application du principe de maximum pour la fonction $-u(x,t)$ qui vérifie aussi l'équation de la chaleur. De plus :

$$\min u(x,t) = -\max -u(x,t)$$

Le principe de maximum a une intérpretation physique naturelle en terme de flux de chaleur. On s'imagine par exemple un phénomène de conduction de la chaleur dans une tige mince. Alors, la température initiale, ainsi que la température aux extrémités se dissipe par conduction de la chaleur, et à aucun moment, la temperature peut s'élever au-dessus la température la plus élevée du point initial ou final.
Ainsi, un point chaud initial va refroidir (a moins qu'une source de chaleur est injecté a une des extrémités).

Le même phénomène est observé pour la diffusion d'une substance (ex : colorant) dans un liquide au repos, ou la concentration la plus importante se trouve au moment initial où alors a une des extrémités du récipient contenant le liquide.
Si on doit tracer une "video" de la solution, on remarque que le maximum diminue tandis que le minimum augmente.
L'EDP tend donc à lisser la solution. Ce comportement est très different du résultat obtenu pour l'équation des ondes !

Unicité
On va maintenant utiliser le principe de maximum pour démontrer l'unicité du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - ku_{xx} &=& 0,\ \ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(x,0) &=& \phi(x),\ \ -\infty < x < \infty \\ u(0,t) &=& g(t) \ \ u(l,t) = h(t) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Proposition :
Soit Φ, g et h trois fonctions régulières. Il existe au plus une fonction de classe C^2 sur $[0,T] \times [0,l]$ qui vérifie (4.1).

Remarque : L'unicité signifie que toute solution est déterminée uniquement par ces conditions initiales et aux bords.

Preuve : Supposons u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières vérifiant (4.1), et notons $w = u_1 - u_2$. La fonction w est régulière et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_t - kw_{xx} &=& 0,\ \ 0 < x < l,\ t > 0 \\ w(x,0) &=& 0,\ \ -\infty < x < \infty \\ w(0,t) &=& 0 \ \ w(l,t) = 0 \end{array}\right.$$

Soit $T > 0$. On sait que le maximum de w sur $[0, T] \times [0, l]$ est atteint sur l'un des côtés : $t = 0, x = 0, x = l$. Mais w y est nulle, donc $w(x, t) \leq 0$ pour tout $(x, t) \in [0, T] \times [0, l]$. Le même raisonnemment vaut pour $-w$: on a donc aussi $w(x, t) \geq 0$ pour tout $(x, t) \in [0, T] \times [0, l]$ et finalement $w = 0, \forall T > 0$; on a donc bien $u_1 = u_2$.

On demontre maintenant ce même résultat par la **méthode de l'énergie**.
On multiplie l'équation en $w = u_1 - u_2$ par w :

$$0 = 0 \cdot w = (w_t - kw_{xx})w = \left(\frac{1}{2}w^2\right)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2.$$

Après intégration sur $]0, l[$ on a :

$$0 = \int_0^l \left(\frac{1}{2}w^2\right)_t \mathrm{d}x - \underbrace{[-kw_x w]_0^l}_{0} + k \int_0^l w_x^2 \, \mathrm{d}x$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \frac{1}{2} w^2 \, \mathrm{d}x = -k \int_0^l w_x^2 \, \mathrm{d}x \leq 0$$

Ce résultat signifie que $\int w^2 \, \mathrm{d}x$ décroit, i.e :

$$\int_0^l [w(x, t)]^2 \, \mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^l [w(x, 0)]^2 \, \mathrm{d}x}_{0}, \forall t \geq 0 \tag{4.2}$$

Donc $\int_0^l [w(x, t)]^2 \, \mathrm{d}x = 0$ ce qui implique $w = 0$ et donc $u_1 = u_2$ (unicité).

Stabilité

La stabilité signifie que les conditions initiales et au bord sont "bien formulées".
La méthode de l'énergie nous amène au résultat de stabilité suivant :

Soit $h = g = f = 0$, $u_1(x, 0) = \Phi_1(x)$ et $u_2(x, 0) = \Phi_2(x)$. Alors $w = u_1 - u_2$ est solution de l'équation de la chameur avec la donnée initiale $\Phi_1 - \Phi_2$.
D'après (4.2) on a :

$$\int_0^l [u_1(x, t) - u_2(x, t)]^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^l [\Phi_1(x) - \Phi_2(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

L'expression de droite mesure la proximité des données initiales des deux solutions, et à gauche on mesure la proximité des solutions pour un temps quelconque. Ainsi, si on commence à proximité (au $t = 0$), alors on reste à proximité. Ceci est la notion de "stabilité au sens de l'intégrande carrée" (L^2).

Le principe du maximum prouve aussi la stabilité. Soit u_1 et u_2 solutions de (4.1). On a alors $w = u_1 - u_2 = 0$ sur les côtés lateraux du rectangle et $w = \Phi_1 - \Phi_2$ sur le côté bas.
Le principe du maximum dit que dans tout le rectangle :

$$w(t, x) \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\Phi_1(x) - \Phi_2(x)|$$

Le principe de maximum montre que :

$$w(t, x) \leq - \min_{0 \leq x \leq l} |\Phi_1(x) - \Phi_2(x)|$$

Alors,

$$\max_{0 \leq x \leq l} |u_1 - u_2| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\Phi_1 - \Phi_2)|, \ \ \forall t > 0$$

On a demontré donc la stabilité du problème (4.1) (stabilité dite au sens "uniforme").

4.0.2 Diffusion sur l'axe réel

On s'intéresse a la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = & \phi(x) \end{cases} \tag{4.3}$$

Contrairement à l'équation des ondes, les choses sont notablement plus compliquées ici et l'on va examiner de près les propriétés d'invariance de l'équation, notre objectif étant d'obtenir un maximum de conditions nécessaires pour qu'une fonction u soit solution.

L'idée de la méthode de résolution est de résoudre pour un $\Phi(x)$ particulier et ensuite construire la solution générale basée sur cette solution particulière.

Invariance de l'équation

Proposition : *Supposons que la fonction u soit une solution de l'équation de la chaleur (4.3).*

- *(a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la translation $u(x-y,t)$ d'une solution $u(x,t)$ est aussi solution de (4.3)*
- *(b) N'importe quelle dérivée partielle de u, dès qu'elle existe et est suffisament régulière, vérifie (4.3)*
- *(c) Toute combinaison linéaire de solution de (4.3) est solution (propriété de la linéarité de l'EDP)*
- *(d) Une intégrale de la solution est aussi une solution de (4.3). Ainsi, si $S(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur, alors il en est de même pour $S(x-y,t)$, et aussi pour :*

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\mathrm{d}y$$

  pour n'importe quelle fonction $g(y)$, à condition que l'intégrale converge.
- *(e) Si $u(x,t)$ est solution de l'équation alors la fonction ("dilatée") $u(\sqrt{a}x, at)$ est aussi solution $\forall a > 0$*

Notre objectif est de trouver une solution particulière de l'équation de la chaleur et ensuite de construire toute autre solution en utilisant la propriété (d).

Soit Q la solution particulière de (4.3) qui vérifie la donnée initiale (fonction Heaviside) suivante :

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'intérêt immédiat de cette donnée initiale particulière, est qu'elle ne change pas sous dilatation.

On trouvera Q en 3 étapes :

Etape 1 : On cherche $Q(x,t)$ sous la forme :

$$Q(x,t) = g(p), \quad \text{avec } p = \frac{x}{\sqrt{4kt}} \tag{4.4}$$

pour une certaine fonction g (à déterminer). (Le facteur $\sqrt{4k}$ facilitera les calculs qui vont suivre)

Etape 2 : On utilise (4.4) pour transformer l'équation de la chaleur dans une EDO en g :

$$Q_t = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2t}\frac{x}{\sqrt{4kt}}g'(p)$$

$$Q_x = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4kt}}g'(p)$$

$$Q_{xx} = \frac{Q_x}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4kt}g''(p)$$

Donc $0 = Q_t - kQ_{xx} = \frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}pg'(p) - \frac{1}{4}g''(p)\right]$.
Alors : $g'' + 2pg' = 0$.
Les solutions de l'équation différentielle ordinaire $y' + 2py = 0$ sont les fonctions $y(p) = Cexp(-p^2)$, donc :

$$g(p) = C_1 \int e^{-p^2} dp + C_2$$

ou $Q(x,t) = g(p) = C_1 \int e^{-p^2} dp + C_2$.

Etape 3 : On a trouvé à l'étape 2 une formule explicite pour Q :

$$Q(x,t) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp + C_2; \forall t > 0$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 en faisant tendre $t \to 0$ dans l'expression ci-dessus. En prenant $x > 0$ puis $x < 0$, et en supposant que la solution est continue par rapport à $t \in [0, +\infty[$, on obtient :

- Si $x > 0$, $1 = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} Q = C_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2$
- Si $x < 0$, $0 = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} Q = C_1 \int_0^{-\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = -C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2$

donc, après calcul = $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $C_2 = \frac{1}{2}$.

On a finalement obtenu comme solution la fonction :

$$Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp, \forall t > 0.$$

Remarque : La solution que nous venons d'obtenir est C_∞ en dehors du $t = 0$. Conformément à la propriété (b) de la Proposition précédente, la fonction $S(x,t) = \partial Q / \partial x$ est encore une solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$.
On définit également :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy, \ \ \forall t > 0 \tag{4.5}$$

pour Φ une fonction quelconque.
D'après la propriété (d), u est encore une solution de l'équation de la chaleur . Nous affirmons alors que :

Théorème *: Soit Φ une fonction C^∞ à support compact. La fonction u définie sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ par :*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy$$

est solution du problème de Cauchy (4.3).

Eléments de démonstration :
On vérifie que $u(x,t)$ tend vers $\Phi(x)$ quand $t \to 0$. On intègre par partie en se souvenant que $S(x,t) = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On obtient :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\Phi(y)dy = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left[Q(x-y,t)\right]\Phi(y)dy = +\int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\Phi'(y)dy - \underbrace{\left[Q(x-y,t)\phi(y)\right]_{y=-\infty}^{y=\infty}}_{=0}$$

Le terme entre crochets est nul car Φ est à support compact.
On peut maintenant faire tendre $t \to 0$ et on obtient :

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,0)\Phi'(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \Phi'(y)dy = \Phi(x)$$

Donc on en conclut que (4.5) est bien la solution du problème de Cauchy avec :

$$S = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}, \text{ pour } t > 0$$

appelée **fonction de Green** pour l'équation de la chaleur.

Autrement dit, la **solution fondamentale** de (4.3) est :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \Phi(y) dy \tag{4.6}$$

La fonction de Green $S(x,t)$ appelée aussi fonction source est positive et paire en tout x : $S(x,t) = S(-x,t)$. Graphiquement, $S(x,t)$ est une gaussienne tel que, pour t grand elle est très étalée, alors que pour t petit elle est une "fonction delta" de hauteur $\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}$.

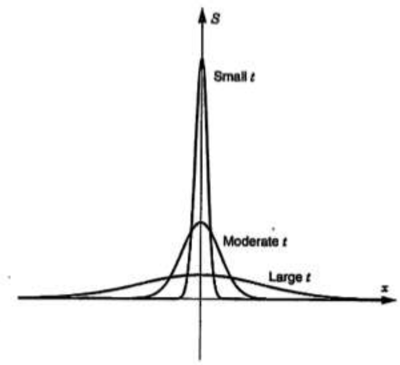


FIGURE 4.1 : Comportement de la fonction de Green pour différents t

L'aire sous la courbe est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} dq = 1.$$

(calcul : exercice. Astuce : poser $q = x/\sqrt{4kt}, dq = dx/\sqrt{4kt}$).
On observe sur la Figure 4.0.2 que pour t très petit, si on neglige le pic le restant de S est très petit.
Alors, $\max_{|x|>\delta} S(x,t) \to 0$ quand $t \to 0$.

Concernant la solution u on remarque qu'elle s'écrit comme une moyenne pondérée de la valeur initiale autour du point x.
En effet, soit $z = x - y$. Alors :

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy \approx \sum_i S(x-y_i,t)\Phi(y_i)\delta y_i$$

Remarque : Il est souvent difficile (voir impossible) d'évaluer l'intégrale dans (4.5). Des réponses aux problèmes particulièrs associés aux données initiales particulières $\Phi(x)$, sont parfois exprimées en utilisant la fonction erreur :

$$Err(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^x e^{-p^2} dp.$$

On remarque que $Err(0) = 0$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} Err(x) = 1$.

Chapitre 5

Séparation des variables, séries de Fourier

On reprend dans ce chapitre les équations de l'onde et de la chaleur 1D et on cherche la solutions de ces problèmes sur un domaine bien définie.

Avant de rentrer dans les détails de la méthode de résolution faissons un peu le point sur ces deux équations classiques de la physique mathématique.

5.1 Equation des ondes

5.1.1 Dérivation physique

Soit une corde de longuer l fixée aux deux extrémités, qui coincide, au repos, avec l'axe des x. La corde est ensuite pincé produissant des oscillations. Soit $u(x, t)$ la position de la corde à l'instant t.

On fait les hypothèses suivantes :

1. On est en régime de petites oscillations : le déplacement $u(x, t)$ est petit comparé à la longueur de la corde l.
   - On suppose un mouvement uniquement vertical ;
   - La pente de la tangente à la corde est petite partout, autrement dit $|u_x(x, t)| << 1$, donc l'élasticité de la corde est negligé ;
   - La longuer de l'arc $\alpha(t) = \int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} \mathrm{d}x \approx l$.
2. La corde est parfaitement flexible (elle se plie). Ceci implique que la tension est dans la direction de la tangente et que la tension horizontale est constante, sans quoi on aurai une direction préféré de mouvement pour la corde.

Afin d'établir l'EDP qui modélise se problème on s'intéresse à l'analyse sur un morceau de corde de dimension Δx, un morceau compris entre x et $x + \Delta x$. Soit $T(x, t)$ la tension et $\theta(x, t)$ l'angle par rapport à l'axe horizontale des x. On rappel que $tan\theta(x, t)$ est la pente de la tangente en (x, t) dans le plan ux, qui est aussi égale à $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. La deuxième loi de Newton ($F = ma$) nous dis que :

$$F = (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

où ρ est la masse volumique (densité) de la corde (en ML^{-1}). La force vient de la tension dans la corde, et on ignore tout autre force externe comme la gravité. La tension horizontale est constante, donc c'est la tension verticale qui est responsable du déplacement vertical de la corde.
En équilibrant les forces dans la direction horizontale on a :

$$T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) = T(x, t) \cos \theta(x, t) = \tau = const. \tag{5.2}$$

où τ est la tension horizontale constante. Dans la direction verticale maintenant on a :

$$\begin{aligned} F &= T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) \\ &= T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) tan\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\theta(x,t)\tan\theta(x,t). \end{aligned}$$

On utilise les rélations 5.2 et l'expression de $tan\theta$ et on trouve :

$$\begin{aligned} F &= \tau(tan\theta(x+\Delta x,t) - tan\theta(x,t)) \\ &= \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

La loi de Newton 5.1 devient alors :

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = \tau\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}$$

pour $\xi \in [x, x+\Delta x]$. Il suffit maintenant de passer à la limite quand $\Delta x \to 0$ pour obtenir **l'équation des ondes 1D** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ c^2 = \frac{\tau}{\rho} > 0. \tag{5.4}$$

On remarque que $[c] = \left[\frac{Force}{Densite}\right]^{1/2} = LT^{-1}$ donc c est une vitesse.

5.1.2 Conditions initiales et conditions aux frontières

Afin de s'assurer que l'EDP 5.4 a une solution unique, on a besoin des conditions initiales et aux frontières. On considère ici que la corde est fixé aux deux extremités : $u(0,t) = u(l,t) = 0, T > 0$ (conditions aux frontières homogènes). De plus, on a besoin de préciser une position et la vitesse initiale : $u(x,0) = \Phi(x)$ et $u_t(x,0) = \Psi(x)$. L'idée est la même que pour déterminer la trajectoire d'un corp en chute.
Pour résumer on cherche à résoudre le problème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & 0,\ \ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) & = & 0 = u(l,t),\ \forall t > 0 \\ u(x,0) & = & \Phi(x),\ \ 0 < x < l \\ u_t(x,0) & = & \Psi(x),\ \ 0 < x < l \end{array}\right.$$

5.1.3 Adimensionnement

On va maintenant adimensionné le problème précédent. Pour cela, on introduit la longuer et le temps caractéristiques : L^* et T^*. Une simple observation du problème nous mène a choisir $L^* = l$, ou l est la longueur de la corde.
On introduit les variables sans dimension :

$$\hat{x} = \frac{x}{L^*},\ \ \hat{t} = \frac{t}{T^*},\ \ \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{u(x,t)}{L^*},\ \ \hat{\Phi}(\hat{x}) = \frac{\Phi(x)}{L^*},\ \ \hat{\Psi}(\hat{x}) = \frac{T^*\Psi(x)}{L^*} \tag{5.5}$$

D'après la règle des chaines on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = L^*\frac{\hat{u}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} = \frac{\hat{u}}{\partial\hat{x}},\quad \frac{\partial u}{\partial t} = L^*\frac{\hat{u}}{\partial\hat{t}}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t} = \frac{L^*}{T^*}\frac{\hat{u}}{\partial\hat{t}}$$

et de manière similaire on calcule les dérivées secondes. On remplace dans l'équation des ondes pour obtenir :

$$\hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{T^{*2}c^2}{L^{*2}}\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$$

Ceci nous mène a choisir $T^* = L^*/c = l/c$, tel que :

$$\hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}},\quad 0 < \hat{x} < 1,\ \hat{t} > 0.$$

Les conditions aux frontières s'écrivent maintenant :

$$\hat{u}(0,\hat{t}) = 0 = \hat{u}(1,\hat{t}),\quad \hat{t} > 0$$

et les conditions initiales :

$$\hat{u}(\hat{x},0) = \hat{\Phi}(\hat{x}), \quad \hat{u}_{\hat{t}}(\hat{x},0) = \hat{\Psi}(\hat{x}), \;\; 0 < \hat{x} < 1$$

De manière générale on abandonne la notation "chapeau" par commodité d'écriture. Ainsi, le problème de Dirichlet pour l'équation des ondes adimensionné s'écrie :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \;\; 0 < x < 1, \; t > 0 \\ u(0,t) \;\; = 0 = u(l,t), \; \forall t > 0 \\ u(x,0) \;\; = \;\; \Phi(x), \;\; 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) \;\; = \;\; \Psi(x), \;\; 0 < x < 1 \end{cases}$$

5.1.4 Séparation des variables : Conditions de Dirichlet

Soit le problème initial et aux limites pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \;\; 0 < x < l, \; t > 0 \\ u(0,t) \;\; = 0 = u(l,t), \; \forall t > 0 \\ u(x,0) \;\; = \;\; \Phi(x), \;\; 0 < x < l \\ u_t(x,0) \;\; = \;\; \Psi(x), \;\; 0 < x < l \end{cases}$$

avec Φ et Ψ des fonctions arbitraires de x.

On cherche une solution à variables séparées :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.6}$$

L'équation des ondes devient alors :

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

ou, après division par $-c^2 XT$:

$$-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda \tag{5.7}$$

avec λ une constante, car d'après (5.7), indépendante de x et de t. Nous allons montrer que $\lambda > 0$.

On cherche $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Nous obtenons les équations séparées :

$$X'' + \beta^2 X = 0; \quad T'' + c^2\beta^2 T = 0$$

dont les solutions sont :

$$T(t) \;\; = \;\; A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \tag{5.8}$$
$$X(x) \;\; = \;\; C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \tag{5.9}$$

avec A, B, C, D des constantes qu'on va déterminer.
Les conditions aux limites de (5.6) donnent :$X(0) = 0 = X(l)$. Alors,

$$0 = X(0) = C = 0 \quad \text{et} \quad 0 = X(l) = D\sin(\beta l)$$

Les solutions non-triviales ($D \neq 0$) sont tel que : $\beta l = n\pi, \;\; \forall n = 1, 2, 3, ...$ (racines de la fonction sinus) :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \;\; ; \;\; X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.10}$$

On a donc une inifinité de solutions de la forme :

$$u(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.11}$$

ainsi que leur superpositions :

$$u_n(x,t) = \sum_n \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.12}$$

Les conditions initiales de (5.6) conduisent à :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \Psi(x) &= \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\end{aligned} \tag{5.13}$$

On a montré que si Φ et Ψ vérifient (5.8) (**séries de Fourier**) alors u donné par les séries de type (5.12) est solution du problème (5.6).

Remarque : Les coefficients de t dans les sin et cos : $\frac{n\pi c}{l}$ sont appelés fréquence (harmonique) ($\forall n = 2, 3, ...$).

5.2 Equation de la chaleur (ou diffusion)

5.2.1 Dérivation physique

Dans une tige métallique avec une température non uniforme , de la chaleur (énergie thermique) est transféré des régions de plus haute température à des régions de plus basse température. Trois principes physiques sont utilisés ici.

- La chaleur (ou l'énergie thermique) d'un corps avec des propriétés uniformes

  $$\textit{L'énergie thérmique} = cmu$$

  où m est la masse corporelle , u est la température , c est la chaleur spécifique , unités$[c] = L^2T^{-2}U^{-1}$ (les unités de base sont M la masse, L longueur, T temps, U la température) . c est l'énergie nécessaire pour élever une masse unitaire de substance à une unité de température.

- La loi de Fourier de transfert de chaleur : le taux de transfert de chaleur est proportionnel au gradient de la température

  $$\frac{\text{Taux de transfer de chaleur}}{\text{aire}} = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

  où K_0 est la conductivité thermique, d'unité $[K_0] = MLT^{-3}U^{-1}$. Autrement dit, la chaleur est trasféré des régions de plus haute température à des régions de plus basse température.

- La conservation de l'énergie.
  Considérons une tige uniforme de longueur l avec une température non uniforme se trouvant sur l'axe des x avec $0 \leq x \leq l$. Par tige uniforme , nous entendons que la densité ρ, la chaleur spécifique c , la conductivité thermique K_0 et la surface de la section A sont toutes constantes. Supposons que les côtés de la tige sont isolés et uniquement les extremités peuvent éventuellement être exposées. De plus, on suppose qu'il n'y a aucune source de chaleur interne à la tige. Soit une section fin de la tige de largeur Δx. La temperature tout au long de la section est $u(x,t)$. Ainsi,

$$\text{L'énergie thermique du segments} = c \times \rho A\Delta x \times u = c\rho A\Delta x(x,t).$$

Par la conservation de l'énergie,

$$\text{Le changement de l'énergie thermique du segment en temps}\Delta t = \text{La chaleur entrant par le bord de gauche} - \text{La chaleur sortant par l}$$

D'après la Loi de Fourier (1),

$$c\rho A\Delta x u(x,t+\Delta t) - c\rho A\Delta x u(x,t) = \Delta t A\left(-K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \Delta t A\left(-K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Une simple réorganisation de cette loi (et sachant que ρ, c, A, K_0 sont constantes) nous amène a :

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c\rho}\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}\right)$$

On passe ensuite à la limite pour $\Delta t, \Delta x \to 0$ pour obtenir **l'équation de la chaleur** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.14}$$

où

$$\kappa = \frac{K_0}{c\rho} \tag{5.15}$$

est la diffusivité thermique, d'unité $[\kappa] = L^2/T$. Sachant que la section a été choisie arbitrairement, l'équation de la chaleur (5.14) reste valable partout sur la tige.

5.2.2 Conditions initiales et conditions aux frontières

Pour faire usage de l' équation de chaleur , nous avons besoin des conditions auxiliaires :
1. *Conditions Initiales* (CI) : pour ce cas il s'agit de donner une distribution initiale de la température dans la tige : $u(x, 0)$.
2. Conditions aux frontières ou aux bords (CB) : la température dans la tige est affecté par ce qui se passe aux extremités $x = 0$ et $x = l$. On considère ici trois cas simples de conditions aux bords (mais en pratiques ces conditions peuvent être bien plus sophistiqué) :

- La temperature est préscite a une des frontières. Pour $t > 0$,

$$u(0, t) = u_1(t).$$

- La frontière est isolé. Le flux de chaleur est préscrit aux frontières,

$$-K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \Phi_1(t)$$

- Condition mixte : une combinaison de $u(0, t), \partial u/\partial x(0, t)$, etc. est préscit.

Un exemple Soit une tige de longueur l isolée sur les côtés et la distribution initiale de la température est donnée par $f(x)$ degrés C, pour $0 < x < l$. On cherche $u(x, t)$ pour $t > 0$ sachant que la tige est maintenu a temperature $O°C$ a ses extrémités.

L'équation de la chaleur avec les conditions initiales et aux bords associées est :

$$\begin{cases} u_t & = \kappa u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0, t) = & 0 = u(l, t), \ \forall t > 0 \\ u(x, 0) = & f(x), \ \ 0 < x < l \end{cases}$$

5.2.3 Adimensionnement

Dans l'équation (5.14) les termes κ, l, x, t, u sont des termes physiques qui ont une dimension. D'autres termes peuvent être introduits par les CI et/ou CB. Pour rendre la solution plus significative et plus simple , nous regroupons autant de constantes physiques que possible. Soit la longuer, temps et respectivement température caractéristiques notées ici $L*$, $T*$ et resp. $U*$ de dimensions : $[L*] = L$, $[T*] = T$ et $[U*] = U$. On introduit les variables sans dimensions :

$$\hat{x} = \frac{x}{L*}, \ \ \hat{t} = \frac{t}{T*}, \ \ \hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{u(x, t)}{U*}, \ \ \hat{f}(\hat{x}) = \frac{f(x)}{U*} \tag{5.16}$$

On apelle les variables $\hat{x}$,$\hat{t}$, $\hat{u}$ des variables adimensionnées (elles n'ont pas d'unité $[\hat{x}] = 1$). Un choix judicieux pour la longuer caractéristique $L* = l$ est en effet la longuer de la tige. On remarque que si x était telle que $0 < x < l$ alors pour la variable adimensionnée $\hat{x}$ on a $0 < \hat{x} < 1$.

On peut affirmer que le choix des variables adimensionnelles est un "art". Parfois, l'énoncé du problème donne des sugestions : par exemple la longueur l de la tige (1 est plus agréable à traiter que l, une quantité non précisée

). Souvent, on doit résoudre le problème d'abord, regarder la solution, et d'essayer de simplifier la notation.

Regardont maintenant l'équation de la chaleur adimensionnelle. Pour cela on calcule u_t et u_{xx} par la règle des chaines :

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = U * \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{U*}{T*} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = U * \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{U*}{L*} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}$$

$$u_{xx} = \frac{U*}{L*^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}$$

et on remplace dans l'EDP 5.16. On a alors :

$$u_t = \kappa u_{xx} \implies \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{T * \kappa}{L*^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}$$

Afin de simplifier encore plus l'EDP on choisie $T* = L *^2 /\kappa = l^2/\kappa$, tel que :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}, \quad 0 < \hat{x} < 1, \ \hat{t} > 0.$$

L'échelle de temps caractéristique (diffusive) du problème est $T* = l^2/\kappa$. Pour des substances différentes , ceci donne l'échelle de temps sur laquelle la diffusion a lieu dans le problème. Les conditions initiales et aux bords du problème (5.16) doivent être adimensionnés :

$$\hat{u}(\hat{x}, 0) = \hat{f}(\hat{x}) \ \ , 0 < \hat{x} < 1 \ \text{ Cond. initiale} \hat{u}(0, \hat{t}) = \hat{u}(1, \hat{t}) = 0, \ \ \hat{t} > 0$$

Par commodité on négligé la notation "chapeau" a partir de maintenant. On cherche donc a résoudre le problème de Dirichlet associée à l'équation de la chaleur adimensionnelle :

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, & 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0 = u(l,t), & \forall t > 0 \end{cases}$$

par la **méthode de séparation des variables**.

5.2.4 Séparation des variables : Conditions de Dirichlet

On s'intéresse ici au problème analogue pour l'équation de la diffusion (chaleur) :

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x < l \end{cases} \tag{5.17}$$

On cherche une solution à vaiables séparées :

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{5.18}$$

Après substitution dans l'équation de la diffusion et division par kXT on obtient :

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{constante}$$

Ainsi, $T(t)$ vérifie l'équation : $T' = -k\lambda T$ de solution :$T(t) = Ae^{-\lambda kt}$.
Pour $X(x)$ on obtient :

$$X'' = -\lambda X, \ 0 < x < l, \ \ X(0) = X(l) = 0$$

donc le même problème que pour l'équation des ondes.

Pour le $T(t)$ obtenu on a la solution générale pour le problème (5.17) :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.19}$$

avec :

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.20}$$

Remarque : Chaque terme de (5.19) s'annule pour $t \to \infty$.
Une fois de plus la solution s'exprime comme une série de Fourier pour chaque t, à condition que la condition initiale soit donnée par (5.20).

Les nombres $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ sont appelés **valeurs propres** et les fonctions $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ sont appelés **vecteurs propres** (modes normaux).

Positivité de λ

- Si $\lambda = 0$ alors $X'' = 0$ donc $X(x) = Cx + D$ et d'après les conditions limites on aura : $C = D = 0$, donc $X(x) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.
- Si $\lambda < 0$, soit $\lambda = -\gamma^2$. Alors $X" = \gamma^2 X$ et $X(x) = C\cosh(\gamma x) + D\sinh(\gamma x)$.
  Les conditions aux limites donnent :
  $$0 = X(0) = C, \;\; 0 = X(l) = D\sinh(\gamma l)$$
  et comme $\sinh(\gamma l) \neq 0$ on obtient $C = D = 0$, donc $X(x) = 0 \Rightarrow \lambda < 0$ n'est pas une valeur propre.
- Si λ **est complexe**, soit γ tel que $\gamma^2 = -\lambda$. Alors $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ (exponentielle complexe). Les conditions limite donnent : $0 = X(0) = C + D, \;\; 0 = Ce^{\gamma l} + De^{-\gamma l} \Rightarrow e^{2\gamma l} = 1 \Rightarrow Re(\gamma) = 0$ et $2lIm(\gamma) = 2\pi n$, pour n entier quelconque ;
  Pour $\gamma = n\pi i/l$ et $\lambda = -\gamma^2 = n^2\pi^2/l^2$ qui est réel positif.

En conclusion, les seules valeurs propres λ admisibles sont positives $\left(\left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, ...\right)$

5.2.5 Exemple : Le refroidissement d'une tige à partir d'une température initiale constante

Supposons qu'on a la tige mise initialement a une température constante $f(x) = u_0$. La température dans la tige est donné par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t},$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$B_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) \mathrm{d}x = 2u_0 \int_0^1 \sin(n\pi x)$$

On calcule l'intégrale pour obtenir :

$$B_n = -2u_0 \frac{\cos(n\pi) - 1}{n\pi} = -\frac{2u_0}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{pour n pair} \\ \frac{4u_0}{n\pi} & \text{pour n impair} \end{cases}$$

Où encore :

$$B_{2n} = 0 \quad B_{2n-1} = \frac{4u_0}{(2n-1)\pi}$$

et la solution devient :

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)} exp(-(2n-1)^2\pi^2 t).$$

5.3 Conditions de Neumann

Soit les conditions aux limites de type Neumann :

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \;\; t > 0 \tag{5.21}$$

On cherche une solution à variables séparées $u(x,t) = X(x)T(t)$, pour l'équation des ondes ou de diffusion.
Les fonctions propres vérifient :

$$-X'' = \lambda X, \;\; X'(0) = X'(l) = 0 \tag{5.22}$$

On cherche d'abord des valeurs propres positives $\lambda = \beta^2 > 0$.
Comme pour les conditions aux limites de Dirichlet :

$$X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$$

et les conditions limite de Neumann conduisent à $0 = X'(0) = D\beta \Rightarrow D = 0$ et $0 = X'(l) = -C\beta\sin(\beta l) \Rightarrow \sin(\beta l) = 0$ (car $C = 0 \Rightarrow$ solution nulle).
Donc $\beta l = n\pi$, pour $n = 1, 2, 3, ..$:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2; \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Positivité de λ

- Soit $\lambda = 0$. Alors $X'' = 0$ et $X(x) = C + Dx$. D'après les conditions aux limites de Neumann on obtient : $D = 0$ et C arbitraire. Donc : $\lambda_0 = 0$; $X_0(x) = C \Rightarrow \lambda = 0$ est une valeur propre
- Pour $\lambda < 0$ et λ complexe, on montre qu'il n'y a pas de fonctions propres (même type de démonstration que pour Dirichlet).

Le bilan :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2; \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \;\; \forall n = 0, 1, 2, ... \tag{5.23}$$

Pour **l'équation de la diffusion** avec conditions de Neumann, on a alors :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.24}$$

avec la donnée initiale exprimée en séries de Fourier cosinus :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.25}$$

Equation des ondes avec conditions limite de Neumann
Le cas $\lambda = 0$ conduit à $X_0(x) = C$ et aussi $T''(t) = \lambda c^2 T(t) = 0$ donc $T(t) = At + B$. La solution est :

$$u_n(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

pour les conditions initiales :

$$\Phi(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\Psi(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

5.4 Conditions aux limites mixtes

Soit par exemple les conditions aux limites :

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ \forall t > 0$$

On cherche une solution à variables séparées $u(x,t) = X(x)T(t)$, pour l'équation des ondes ou de diffusion. Les fonctions propres vérifient :

$$-X'' = \lambda X, \ \ X(0) = X'(l) = 0$$

On peut montrer que les valeurs et les vecteurs propres sont :

$$\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}; \ \ X_n(x) = \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right), \ \ \forall n = 0, 1, 2, ... \tag{5.26}$$

5.5 Eléments de séries de Fourier

Réprenons l'exemple de refroidissement d'une tige mise à température initiale constante :

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\, pix).$$

où encore :

$$u_0 = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)}.$$

On remarque que pour $x = 0$ et $x = 1$, le second membre ne converge pas vers $u_0 \neq 0$, mais plutôt à 0 (les conditions aux bords). De plus, la séries de Fourier en sinus associée à $f(x)$ est impaire et périodique, de période 2 en espace et converge vers le développement impaire pérodique de $f(x) = u_0$.

Développement impaire périodique Le développement pérodique impaire d'une fonction $f(x)$ définie pour $x \in [0,1]$ est la série de Fourier en sinus associé à la fonction $f(x)$ évalué pour $x \in \mathrm{R}$ quelconque,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x).$$

Sachant que la fonction sinus est impaire, i.e. $\sin(n\pi x) = -\sin(-n\pi x)$, et périodique de période 2 en espace, i.e. $\sin(n\pi x) = \sin(n\pi(x+2))$, alors $\tilde{f}(x) = -\tilde{f}(-x)$ et $\tilde{f}(x+2) = \tilde{f}(x)$. Alors $\tilde{f}(x)$ est impaire, périodique de période 2 et $\tilde{f}(x)$ est égale à $f(x)$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. On regarde par la suite les conditions qu'on devrait imposer à $f(x)$ pour que l'égalité reste valable sur l'intervalle fermé $[0,1]$.

5.5.1 Coefficients des séries de Fourier

Série en sinus

Soit les données initiales pour le problème de Dirichlet :

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.27}$$

On cherche à déterminer **les coefficients de Fourier** A_n. Pour cela, on utilise la **rélation d'orthogonalité** :

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ l/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

ainsi, on multiplie (5.27) par $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, pour m fixe, et on intègre entre 0 et l. A droite, tous les termes sont nuls à cause de la rélation d'orthogonalité, sauf pour $m = n$:

$$A_m \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} = A_m \frac{l}{2}$$

Conclusion : Si $\Phi(x)$ admet le développement (5.27) alors :

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} \mathrm{d}x, \;\; m = 1, 2, ...$$

Série en cosinus

Soit les données initiales pour le problème de Neumann :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{5.28}$$

Rq : Le facteur $1/2$ sert à l'uniformité de l'expression finale.

On a la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = 0 \;\text{ pour } m \neq n \tag{5.29}$$

On multiplie (5.28) par $\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, pour m fixé, et on intègre entre 0 et l. A droite, tous les termes sont nuls a cause de (5.29), sauf pour $m = n$:

$$A_m \int_0^l \cos^2 \frac{m\pi x}{l} = \begin{cases} A_m \frac{l}{2} & \text{si } m \neq 0 \\ A_0 \frac{l}{2} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Si $\Phi(x)$ admet le développement (5.28) alors :

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \mathrm{d}x, \;\; m = 0, 1, 2, ...$$

Séries complètes

Soit $\Phi : (-l, l) \to \mathbb{R}$ et la série de Fourier complète :

$$\Phi(x) = \frac{l}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

On montre une troisième rélation d'orthogonalité :

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \mathrm{d}x = 0, \;\; \forall m, n$$

les rélations précédentes restant valables pour $\int_{-l}^l$.
De façon similaire au cas précédent, on obtient les coefficients :

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x, \;\; n = 0, 1, 2, ...$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x, \;\; n = 1, 2, ...$$

5.5.2 Convergence des séries de Fourier

Si une fonction $f(x)$ est inégrable alors on peut calculer les coefficients de Fourier associés. Néanmoins, ceci n'implique pas que la réciproque est vraie : les coefficients de Fourier correpondants (en sinus, consinus ou complets) convergent ou ont pour somme $f(x)$. Afin que ceci soit vrai on doit imposer des conditions plus fortes sur $f(x)$.

Définition : Une fonction $f(x)$ définie sur un intervall fermé $[a, b]$ est dite lisse par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une partition :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

tel que f est C^1 sur chaque sous-intervalle fermé $[x_m, x_{m+1}]$.

Théorème (Convergence des série de Fourier en sinus et cosinus)
Si $f(x)$ est une fonction lisse par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$ et continue sur $]0, 1[$, alors la série de Fourier converge pour tout $x \in [-1, 1]$ et a la somme $f(x)$, $\forall x \in]-1, 1[$.

Remarque Soit une fonction $f(x)$ lisse par morceaux sur $[0, 1]$ et continue sur $]0, 1[$, les séries de Fourier en sinus et cosinus de $f(x)$ convergent sur $[0, 1]$ et sont égales à $f(x)$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Ainsi, $\forall x \in]0, 1[$,

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x).$$

Autrement dit, la série de Fourier en cosinus et la série de Fourier en sinus sont deux répresentations de la même fonction $f(x)$, sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Les valeurs aux points $x = 0, 1$ peuvent ne pas être les mêmes. Le choix de la séries (en sinus ou en cosinus) est déterminé par le type de fonctions propres, solutions de l'EDP de la chaleur ou des ondes avec leur conditions aux frontières.

Chapitre 6

Equation de Laplace, fonctions harmoniques

Ce chapitre est dédiée à l'équation de Laplace. On introduit deux des propriétés les plus importantes : **le principe de maximum** et **l'invariance par rotation**.

Définitions :
L'équation de Laplace :

$$u_{xx} = 0 \quad \text{en 1D}$$
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{en 2D}$$
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{en 3D}$$

Remarque : Les équations de l'onde ou de diffusion en stationnaire, i.e avec $u_{tt} = 0$ et respectivement $u_t = 0$ se réduisent à l'équation de Laplace.

Une solution de l'équation de Laplace s'appelle **fonction harmonique**.
L'équation de Laplace inhomogène est appelée **l'équation de Poisson** :

$$\Delta u = f$$

avec f une fonction donnée.
On rappelle les conditions aux limites : supposons $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ et ∂D la frontière de notre domaine physique D.

- Conditions aux limites de type Dirichlet :

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

- Conditions aux limites de type Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

Quelques exemples :

- *Electrostatique :* L'équation du potentiel électrique

$$\Delta \Phi = div(\vec{grad} \Phi) = -4\pi\rho$$

  avec ρ la densité de charge (répartition de charges), est une équation de Poisson avec $f = -4\pi\rho$.

- *Ecoulement stationnaire incompressible :* Supposons un écoulement irrotationnel : $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$, avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse, incompressible ($div(\vec{v}) = 0$). Alors $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi$ avec Φ le potentiel de vitesses et $\Delta\Phi = -div(\vec{v}) = 0$ (donc on a bien une équation de Laplace)

- *Mouvement brownien :* Soit une particule en mouvement aléatoire dans un domaine D. Elle s'arrête quand elle rentre en impact avec la frontière. Soit $u(x, y, z)$ la probabilité qu'une particule positionnée initialement en (x, y, z) s'arrête sur un point de C_1, une partition de la frontière. On peut alors montrer que :

$$\Delta u = 0 \quad \text{en D}$$

$u = 1 \quad$ sur C_1 et $u = 0 \quad$ sur $\partial D/\ C_1$. Autrement dit, u est solution d'un problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace.

6.1 Principe de maximum

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert connexe borné et $u(x, y)$ harmonique dans D et continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$. Alors le maximum/minimum de u est atteint sur ∂D.

Preuve : Dans un point à l'intérieur de D on dot avoir $u_{xx} \leq 0$ et $u_{yy} \leq 0$, donc $u_{xx} + u_{yy} \leq 0$.
Soit $\epsilon > 0$ et $v(x, y) = u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$, continue sur $\bar{D}$.

$$\Delta v = \Delta u + \epsilon/Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\epsilon > 0$$

Le maximum de v ne peut être à l'intérieur de D, car dans un tel point on doit avoir $v_{xx} + v_{yy} \leq 0$. Alors le max de v est atteint en $(x_0, y_0) \in \partial D$.
On obtient les inégalités :

$$u(x, y) < v(x, y) \leq v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + \epsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2,$$

$\forall (x, y) \in D$ et l la plus grande distance d'un point de D à l'origine.
La relation est valable pour $\epsilon > 0$, donc pour $\epsilon \to 0$ on a :

$$u(x, y) \leq \max_{\partial D} u, \ \ \forall (x, y) \in \bar{D}.$$

6.2 Unicité de la solution

Soit u et v solutions du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \ \ \text{dans } D \\ u &= h, \ \ \text{sur } \partial D \end{aligned} \tag{6.1}$$

Alors $w = u - v$ est solution de $\Delta w = 0, \ \ $ dans D et $w = 0, \ \ $ sur ∂D.
D'après le principe de maximum :

$$0 = w(x_m, y_m) \leq w(x, y) \leq w(x_M, y_M) = 0, \ \ \forall (x, y) \in D$$

avec (x_m, y_m) le point de minimum et (x_M, y_M) le point de maximum.
Le maximum et le minimum de w sont nuls, donc $w = 0$ et $u = v$.
La solution du problème est unique.

Remarque : Pour le problème de Neumann, si u est solution alors $u + cte$ est aussi solution.

6.3 Invariance et coordonnées polaires

On montre par la suite que l'opérateur Δ est invariant par translation et rotation.

Translations : soit la translation $x' = x + a$, $y' = y + b$.
L'opérateur Δ est invariant par translation. Autrement dit :

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$$

Rotations : soit la rotation : $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$.
L'opérateur Δ est invariant par rotation. Autrement dit :

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$$

En passant en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, l'opérateur Δ devient :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

On cherche une solution invariante aux rotations, autrement dit, $u = u(r)$. L'équation de Laplace devient alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow u'' + \frac{1}{r}u' = 0 \Leftrightarrow (ru')' = 0$$

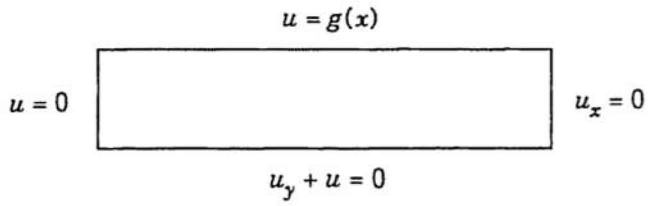
Donc $u(r) = c_1 \ln r + c_2$ et la solution fondamentale est $w(r) = -\frac{1}{2\pi}\ln r$.

6.4 Solution par séparation des variables

Soit D le rectangle $0 < x < a$,$0 < y < b$. On considère l'équation :

$$\Delta u = 0 \tag{6.2}$$

avec les conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Robin) illustrées dans la Figure 6.4 On cherche une solution



à variables séparées : $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Après substitution dans (6.2) on a :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Pour $0 \leq x \leq a$: $X'' + \lambda X' = 0$ et $X(0) = X'(a) = 0$.
Les solutions sont :

$$\beta_n^2 = \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2},\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x}{a} = \sin(\beta_n x).$$

Pour $0 \leq y \leq b$: $Y'' - \lambda Y' = 0$ et $Y'(0) + Y(0) = 0$ (la condition non-homogène est laissée pour la dernière étape).
Les solutions de cette équation différentielle sont exponentielles car $\lambda > 0$. Il convient d'écrire :

$$Y(y) = A\cosh(\beta_n y) + B\sinh(\beta_n y)$$

et $0 = Y'(0) + Y(0) = B\beta_n + A$. Sans perte d'information, on choisit $B = -1$ donc $A = \beta_n$. La solution devient :

$$Y(y) = \beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y)$$

Par superposition on obtient la solution :

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\beta_n x)(\beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y)) \tag{6.3}$$

une fonction harmonique qui satisfait les trois conditions aux limites homogènes.
Il reste a imposer $u(x,b) = g(x)$ ou :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta_n \cosh(\beta_n b) - \sinh(\beta_n b)) \sin(\beta_n x)$$

pour $0 < x < a$. On obtient une série de Fourier en sinus. D'après la formule des coefficients :

$$A_n(\beta_n \cosh(\beta_n b) - \sinh(\beta_n b)) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin(\beta_n x) \mathrm{d}x$$

pour calculer les coefficients A_n de la solution (6.3).

6.5 Formule de Poisson

Soit le problème de Dirichlet sur un cercle :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = & 0, \quad -\text{pour } x^2 + y^2 < a^2 \\ \quad u & = h(\theta), \quad -\text{pour } x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

avec le rayon a et la donnée au bord $h(\theta)$.
Il est naturel de chercher une solution à variables séparées en coordonnées polaires (r, θ) : $u = R(r)\Theta(\theta)$.

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta''$$

On multiplie par $\frac{r^2}{R\Theta}$:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = +\lambda, \quad \text{avec } \lambda > 0$$

On obtient donc deux équations différentielles :

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{6.4}$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{6.5}$$

On impose naturellement pour l'équation (6.4) des conditions aux limites périodiques : $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, pour $-\infty < \theta < \infty$. Sachant que la solution de (6.4) est :

$$\Theta(\theta) = A\cos(\beta\theta) + B\sin(\beta\theta)$$

avec $\beta^2 = \lambda$.
La condition de périodicité ($\Theta(0) = \Theta(2\pi)$) ne peut être satisfaite que si $\beta = n \Rightarrow \lambda = n^2$.
Donc on obtient une famille de solutions :

$$\Theta(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(Pour $\lambda = 0$ on a aussi une solution : $\Theta(\theta) = A$).

L'équation (6.5) est une équation d'Euler (ces coefficients possèdent une singularité en $r = 0$). On écrit l'équation sous forme canonique :

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{\lambda}{r^2}R = 0$$

On cherche des solutions de la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors l'équation indicielle :

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0$$

et donc nécessairement $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$.
Dans le cas $\lambda = n^2 \neq 0$ on obtient deux solutions indépendantes : $r \to r^n$ et $r \to r^{-n}$, donc la solution générale :

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

(Remarque : le cas $\lambda = 0$ a été déjà vu dans l'invariance par rotation : $R_0(r) = C_0 \ln r + D_0$)

Toutes les fonctions :

$$u_n(r\theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

sont solutions de l'équation à variables séparées. C'est aussi le cas de $u_0(r,\theta) = C_0 \ln r + D_0$.

Revenons au problème initial (6.4). Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe C^2 dans le disque $x^2 + y^2 < a^2$, en particulier à l'origine. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \to 0$ (r^{-n} et $\ln r$).
Il reste :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \tag{6.6}$$

On montre maintenant que cette famille de solutions de l'équation de Laplace permet de résoudre le probleme de Dirichlet pour n'importe quelle donnée au bord h.
On sait que pour $r = a$:

$$u(a,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) = h(\theta)$$

Les coefficients A_n, B_n de Fourier de h sont alors définis par :

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\Phi) \cos(n\Phi) \mathrm{d}\Phi \tag{6.7}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\Phi) \sin(n\Phi) \mathrm{d}\Phi \tag{6.8}$$

Insérons maintenant les expressions de (6.7) et (6.8) dans la solution générale (6.6). On obtient :

$$\begin{aligned} u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} h(\Phi) \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\Phi)(\cos(n\Phi)\cos(n\theta) + \sin(n\Phi)\sin(n\theta))\mathrm{d}\Phi = \\ = \int_0^{2\pi} h(\Phi) \underbrace{\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \Phi))\right) \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi}}_{\textit{série géométrique de nombres complexes}} \end{aligned} \tag{6.9}$$

On montre que :

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - \Phi)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\theta-\Phi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in(\theta-\Phi)} \\ = 1 + \frac{re^{i(\theta-\Phi)}}{a - re^{i(\theta-\Phi)}} + \frac{re^{-i(\theta-\Phi)}}{a - re^{-i(\theta-\Phi)}} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \Phi) + r^2} \end{aligned} \tag{6.10}$$

On obtient au final la **Formule de Poisson** :

$$u(r,\theta) = (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{h(\Phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \Phi) + r^2} \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi}$$

Remarque : en éléctrostatique cette formule peut s'interpreter comme la valeur du potentiel éléctrique due a une distribution uniforme de charges le long d'un cylindre.

Chapitre 7

Annexe

7.1 Annexe 1

Courbe paramétrée : Une courbe C paramétrée est l'image d'une fonction $\gamma : I \to D$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ vers le domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ définie par $s \to \gamma(s) = (x(s, y(s)))$ pour tout $s \in I$ et on dit alors que γ est une paramétrisation de C.
Un exemple :
-c'est une partie d'une ellipse et γ :$]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par $s \to (\cos(s), 2\sin(s))$ est une paramétrisation. Le vecteur $\gamma'(\pi/6) = (-1/2, \sqrt{3})$ est tangent à cette courbe au point $\gamma(\pi/6) = (\sqrt{3}/2, 1)$.

Dérivée directionnelle :
Soient $f(x, y)$ une fonction définie sur le domaine D, $(x_0, y_0)\ inD$ et $\vec{d} = (d_1, d_2)$ une direction ($\vec{d} \neq \vec{0}$). Alors la dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction $\vec{d}$ est :

$$f'((x_0, y_0); \vec{d}) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(x_0 + td_1, y_0 + td_2) - f(x_0, y_0)}{t} \right) \quad \text{(si cette limite existe)}$$

Si les dérivées partielle de f sont continues sur D, alors il est possible de démontrer (voir Ue LA398) que :

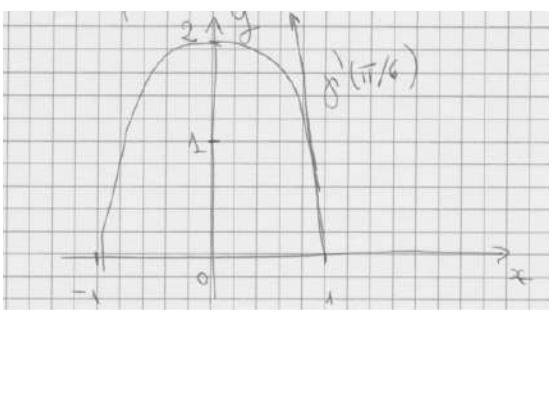
$$f'((x_0, y_0); \vec{d}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)d_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)d_2 = \vec{\nabla} f_{(x_0,y_0)} \cdot \vec{d}$$

Ici $\vec{\nabla} f_{(x_0,y_0)}$ dénote le gradient de f au point (x_0, y_0).

$$\vec{\nabla} f_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0)} \right)$$

7.2 Annexe 2 : Convergence uniforme, différentiation et intégration d'une série de fonctions

Les séries de fonctions déterminés dans la solution de l'EDP de la chaleur et des ondes par la méthode de séparation de variables, ont un sens si elles convergent uniformement sur l'intervalle $[0, 1]$. Ceci est nécessaire car pour satisfaire à nos équations aux dérivées partielles on doit être capable d'intégrer et différentier les séries terme par terme



et pour cela la série ainsi que ses dérivées doivent converger uniformement.

Définition

La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ de fonctions $f_n(x)$ définies sur un intervalle $[a, b]$ converge si $\forall \epsilon > 0$, il existe $N_0(\epsilon) \geq 1$ tel que :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon, \quad \forall N \geq N_0.$$

Théorème Soit les hypothèse suivantes :

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformement
2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x)$ converge uniformement
3. $f_n^{'}$ sont continues

Alors la série peut être différencié terme par terme et :

$$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x).$$

Théorème Si les hypothèse suivantes sont vérifiées :

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformement
2. $f_n(x)$ sont intégrables,

alors la séries peut être intégré terme par terme :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

On observe que la converge uniforme est importante, on rappel par la suite quelques résultats pratiques qui nous permettent de démontrer la convergence uniforme :

Théorème (Weirstrass) Soit $f_n(x)_{n=1}^{\infty}$ une série de fonctions définies sur l'interval $[a, b]$, et supposons que :

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in [a, b],\ n = 1, 2, 3, ...)$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformement sur $[a, b]$ si la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge absolument.

Théorème (Test de ratio) La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si la rélation suivante est vérifié :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r < 1, \ \forall n \geq N \geq 1$$

Théorème (convergence d'une série altérnée) Supposons que :

1. $|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2|$ ...
2. $a_{2n-1} \geq 0$, $a_{2n} \leq 0$ $(n = 1, 2, ...)$
3. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

alors la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

7.2.1 Application a la solution de l'équation de la chaleur

On montre ici comment on peut utiliser les deux théorèmes précédentes pour montrer que la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur est une série qui converge uniformement.
On rappel la solution :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t},$$

avec $\forall t \geq t_0 > 0$, $x \in [0,1]$ et $f(x)$ une condition initiale continue par morceaux.
Afin d'applique le théorème de Wereistrass on a besoin de borner les u_n :

$$|u_n(x,t)| = |B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}| \leq |B_n| e^{-n^2\pi^2 t_0}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Pour les coefficients de Fourier B_n on a :

$$|B_m| = |2\int_0^1 \sin(m\pi x) f(x)\mathrm{d}x| \leq 2\int_0^1 |\sin(m\pi x) f(x)|\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

On combine les inégalités précédentes pour obtenir :

$$|u_n(x,t)| \leq M_n$$

avec

$$M_n = \left(2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right) e^{-n^2\pi^2 t_0}$$

On montre par le théorème des ratios que la série $\sum M_n$ converge absolument :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = e^{(n^2-(n+1)^2)\pi^2 t_0} = e^{-(2n+1)\pi^2 t_0} \leq e^{-\pi^2 t_0} < 1, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

donc d'après le théorème de Weirstrass la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ converge uniformement pour $x \in [0,1]$ et $t \geq t_0 > 0$.
Remarque : On peut montrer de manière similaire la convergence des dérivées u_t et u_{xx}, en différentiant d'abord la solution.