Eléments de correction - Ecrit réparti de Novembre 2016

3A004

(1)

Partie 1 : Cinématique

1.1. Accélération eulérienne

$$\begin{cases} v_1(\underline{x},t) = l\omega \sin[\varphi(x_3,t)] \\ v_2(\underline{x},t) = -l\omega \cos(\varphi(x_3,t)) \\ v_3(x,t) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi(x_3,t) = k\, x_3 - \omega t$

k, ω et l constantes >0

(a) Première méthode

$$\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \frac{d\,\underline{v}}{dt}(\underline{x},t) \quad \text{par définition même}$$

On remarque que $v_3(x,t) = 0$ de sorte que

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{dx_3}{dt} - \omega = -\omega$$

d'où $\underline{\gamma}(\underline{x},t) = l\omega \cos(\varphi(x_3,t))\dfrac{d\varphi}{dt}\,\underline{e_1}$

$\qquad + l\omega \sin(\varphi(x_3,t))\dfrac{d\varphi}{dt}\,\underline{e_2}$

$$\Rightarrow \underline{\gamma}(\underline{x},t) = -l\omega^2 \cos(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_1} - l\omega^2 \sin(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_2}$$

(b) 2^e méthode dérivée particulaire

$$\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x},t)}_{\text{à } x \text{ fixé}} + \underline{\underline{\nabla}}_x\, \underline{v}(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = +l\omega \cos[\varphi(x_3,t)]\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\underline{e_1} + l\omega \sin(\varphi(x_3,t))\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\underline{e_2}$$

avec $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x \text{ fixé}} = -\omega$

soit $$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -l\omega^2 \cos(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_1} - l\omega^2 \sin(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_2}$$

$$\left(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}\right)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big|_{t \text{ fixé}}$$

soit $$\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}(\underline{x},t) = \begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = l\omega \cos[\varphi(x_3,t)]\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = l\omega \sin(\varphi(x_3,t))\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

avec $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\Big|_{t \text{ fixé}} = k$

d'où $$\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}(\underline{x},t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l\omega k \cos(\varphi(x_3,t)) \\ 0 & 0 & l\omega k \sin(\varphi(x_3,t)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{v}(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t) = \underline{0} \quad \text{car } v_3 \equiv 0$$

d'où ici $$\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -l\omega^2 \cos(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_1} - l\omega^2 \sin(\varphi(x_3,t))\,\underline{e_2}$$

On retrouve l'expression obtenue par la première méthode.

1.2 Lignes de courant

Les lignes de courant à l'instant $t = t^*$ sont les lignes qui sont à cet instant tangentes en tout point au vecteur vitesse (en description eulérienne) et donc d'équations données par :

$$\underline{v}(\underline{x}, t^*) \wedge d\underline{M} = \underline{0} \qquad \underline{M} \in \text{Ligne de courant}$$

soit donc $$\begin{cases} v_1(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_2 = v_2(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_1 \\ v_1(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_3 = v_3(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_1 \\ v_3(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_2 = v_2(\underline{x}(t^*),t^*)\, dx_3 \end{cases}$$

soit donc comme $v_3 \equiv 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_3 = 0 \\ \text{et} \quad l\omega \sin(\varphi(x_3, t^*))\, dx_2 = -l\omega \cos(\varphi(x_3, t^*))\, dx_1 \end{array} \right.$$

ou encore $\left\{ \begin{array}{l} x_3 = C_3 \text{ constante} \\ \sin(kC_3 - \omega t^*)\, dx_2 = -\cos(kC_3 - \omega t^*)\, dx_1 \end{array} \right.$

soit $\left\{ \begin{array}{l} x_3 = C_3 = \text{constante} \\ \sin(kC_3 - \omega t^*)\, x_2 = -\cos(kC_3 - \omega t^*)\, x_1 + C \end{array} \right.$ avec C = constante

▸ il s'agit donc de familles de droites parallèles dans les plans x_3 = Constante

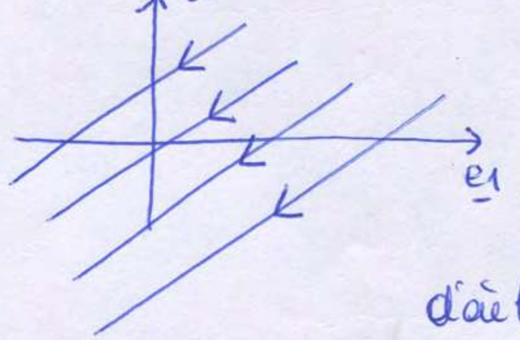
▸ représentation dans le plan $x_3 = 0$: les équations des lignes de courant sont $\sin(-\omega t^*)\, x_2 = -\cos(-\omega t^*)\, x_1 + C$ (dans ce cas)

soit $-\sin(\omega t^*)\, x_2 = -\cos(\omega t^*)\, x_1 + C$

et donc $\sin(\omega t^*)\, x_2 = \cos(\omega t^*)\, x_1 + C$

○ Cas A : $0 < \omega t^* < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega t^*) > 0 \\ \cos(\omega t^*) > 0 \end{array} \right.$ l'équation devient

$x_2 = \cot an(\omega t^*)\, x_1 + C$. droites de pente >0



et $\left\{ \begin{array}{l} v_1 = l\omega \sin\varphi = -l\omega \sin(\omega t^*) < 0 \\ v_2 = -l\omega \cos\varphi = -l\omega \cos(\omega t^*) < 0 \end{array} \right.$

car $l\omega > 0$

d'où le sens de parcours indiqué

○ Cas B : $\omega t^* = \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos(\omega t^*) = 0$, $\sin(\omega t^*) = 1$

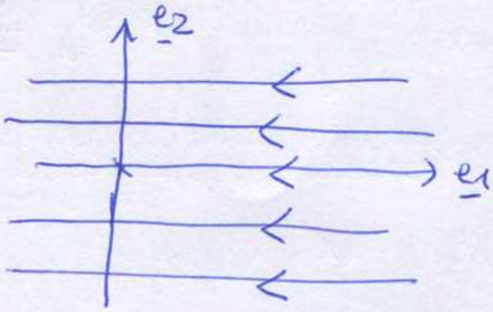
d'où $x_2 = C$

droites parallèles à l'axe e_1

$v_1 = -l\omega \sin(\omega t^*) = -l\omega < 0$

$v_2 = 0$

d'où le sens de parcours indiqué



○ Cas C (non demandé) $\frac{\pi}{2} < \omega t^* < \pi$ $\cos(\omega t^*) < 0$

$\sin(\omega t^*) > 0$

donc la pente des droites d'équation $x_2 = \text{cotan}(\omega t^*) x_1 + C$

est telle que $\text{cotan}(\omega t^*) < 0$

et $v_1 = -l\omega \sin(\omega t^*) < 0$

$v_2 = -l\omega \cos(\omega t^*) > 0$

○ Cas D (non demandé) $\omega t^* = \pi$

$\cos(\omega t^*) = -1$

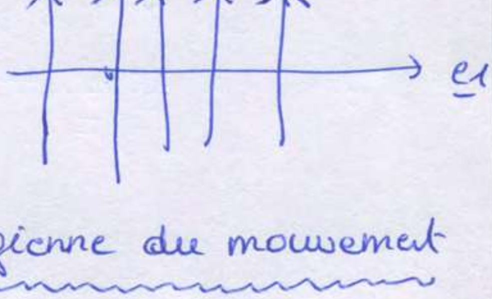
$\sin(\omega t^*) = 0$

$\Rightarrow \left\{ x_1 = \text{Cste} \right.$ équation des lignes de courant

$v_1 = -l\omega \sin(\omega t^*) = 0$

$v_2 = -l\omega \cos(\omega t^*) = l\omega > 0$

$\Rightarrow$ droites parallèles à l'axe $\underline{e_2}$



1.3. Représentation Lagrangienne du mouvement

Connaissant la vitesse eulérienne, il convient pour obtenir la représentation lagrangienne du mouvement d'intégrer le système différentiel suivant

$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ avec les conditions initiales $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = l\omega \sin(kx_3 - \omega t) & (1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -l\omega \cos(kx_3 - \omega t) & (2) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(t=0) = X_1 \\ x_2(t=0) = X_2 \\ x_3(t=0) = X_3 \end{cases}$$

d'après (3) on a $x_3 = Cste$ et donc $x_3 = Cste = X_3$

de sorte que
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = l\omega \sin(kX_3 - \omega t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -l\omega \cos(kX_3 - \omega t) \end{cases}$$

On peut alors intégrer aisément car $\underset{= X_3}{x_3}$ ne dépend pas du temps ici

d'où

$$x_1(t) = l \cos(kX_3 - \omega t) + C_1$$
$$x_2(t) = l \sin(kX_3 - \omega t) + C_2$$

avec C_1, C_2 deux constantes

or $x_1(t=0) = X_1 = l\cos(kX_3 - 0) + C_1 \Rightarrow C_1 = X_1 - l\cos(kX_3)$

$x_2(t=0) = X_2 = l\sin(kX_3 - 0) + C_2 \Rightarrow C_2 = X_2 - l\sin(kX_3)$

d'où
$$\begin{cases} x_1(t) = l\cos(kX_3 - \omega t) - l\cos(kX_3) + X_1 = \phi_1(\underline{X}, t) \\ x_2(t) = l\sin(kX_3 - \omega t) - l\sin(kX_3) + X_2 = \phi_2(\underline{X}, t) \\ x_3(t) = X_3 = \phi_3(\underline{X}, t) \end{cases}$$

représentation lagrangienne du mouvement

1.4. Trajectoire d'une particule qui se trouve en $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ à l'instant $t=0$

L'équation de la trajectoire d'une particule s'obtient en éliminant le temps dans la représentation lagrangienne du mouvement

On a : $x_1 - l\cos(kX_3) + X_1 = l\cos(kX_3 - \omega t)$

$x_2 - l\sin(kX_3) + X_2 = l\sin(kX_3 - \omega t)$

$x_3 = X_3$

Soit $\left\{ \left[x_1 - (\ell \cos k X_3 - X_1)\right]^2 + \left[x_2 - (\ell \sin k X_3 - X_2)\right]^2 = \ell^2 \left[\cos^2(k X_3 - \omega t) + \sin^2(k X_3 - \omega t)\right] = \ell^2 \right.$

$\left\{ \right.$ il s'agit de l'équation d'un cercle centré en

$$\left(\ell \cos(k X_3) - X_1 \ , \ \ell \sin(k X_3) - X_2 \ , \ X_3 \right)$$

de rayon ℓ dans le plan $x_3 = X_3$.

- Pour une particule située à $t=0$ en $(X_1, X_2, X_3 = 0)$

l'équation devient $(x_1 - (\ell - X_1))^2 + (x_2 - X_2)^2 = \ell^2$

$\left\{ \right.$ il s'agit donc d'un cercle centré en $(\ell - X_1, X_2, X_3 = 0)$ de rayon ℓ.

- étude du sens de parcours

$$v_1 = +\ell\omega \sin(k \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_3}} - \omega t) = \cancel{+}\,\ell\omega \sin(\omega t)$$

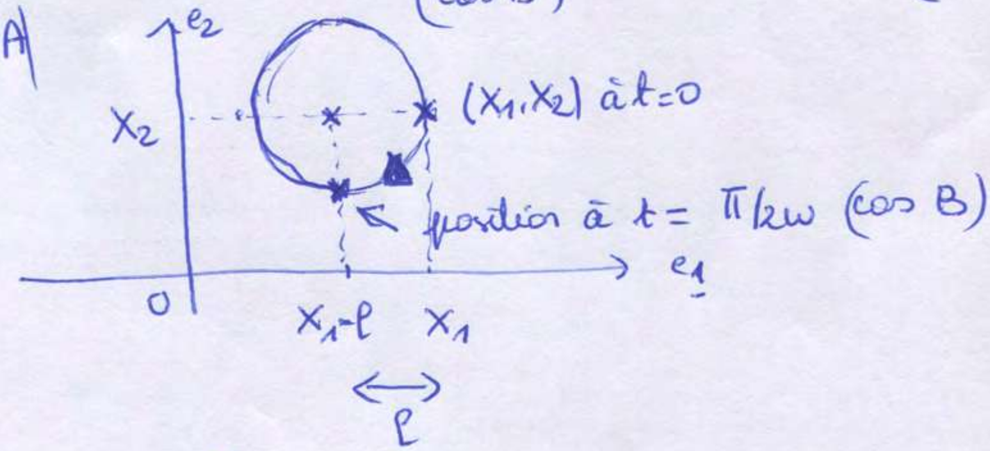
$$v_2 = -\ell\omega \cos(k \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_3}} - \omega t) = -\ell\omega \cos(\omega t)$$

pour $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$ $\quad v_1 < 0 \quad v_2 < 0$ (cas A)

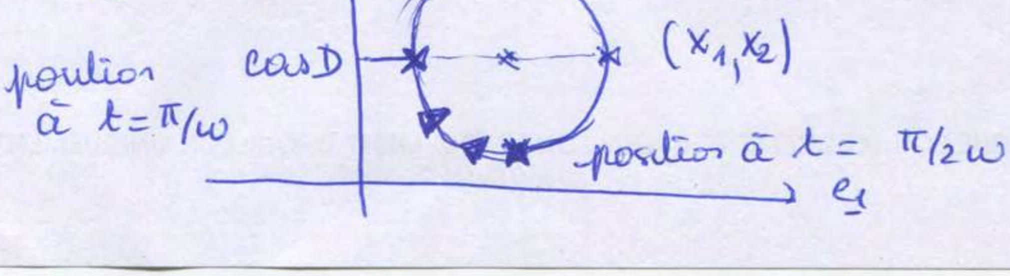
$\pi/2 < \omega t < \pi$ $\quad v_1 < 0 \quad v_2 > 0$ (cas C)

en $\omega t = \frac{\pi}{2}$ $(v_2 = 0)$ (cas B) et $\omega t = \pi$ $v_1 = 0$ (cas D)

(cas A)



(cas C)



1.5. Vitesse et accélération lagrangiennes

Pour obtenir l'expression lagrangienne de la vitesse et de l'accélération, deux méthodes sont possibles

ⓐ à partir de la représentation lagrangienne du mouvement (obtenue à la question 1.3)

$$\underline{V}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{\Phi}}{dt}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X},t)$$

$$\underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \frac{d^2\underline{\Phi}}{dt^2}(\underline{X},t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X},t)$$

soit donc d'après 1.3.

$$\underline{V}(\underline{X},t) = -\ell \sin(kX_3-\omega t) \times (-\omega)\, \underline{e}_1 + \ell \cos(kX_3-\omega t)(-\omega)\, \underline{e}_2$$

soit $\left\{ \underline{V}(\underline{X},t) = +\ell\omega \sin(kX_3-\omega t)\,\underline{e}_1 - \ell\omega\cos(kX_3-\omega t)\,\underline{e}_2 \right.$

et $\left\{ \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = -\ell\omega^2 \cos(kX_3-\omega t)\,\underline{e}_1 - \ell\omega^2\sin(kX_3-\omega t)\,\underline{e}_2 \right.$

ⓑ à partir de l'expression des vitesse et accélération eulériennes

$$\underline{V}(\underline{X},t) = \underline{v}(\Phi^{-1}(\underline{X},t),t)$$

$$\underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \underline{\gamma}(\Phi^{-1}(X,t),t)$$

or $\underline{v}(x_3,t)$ et $\underline{\gamma}(x_3,t)$ et $x_3 = X_3$ d'où directement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}(\underline{X},t) = \ell\omega \sin(k \underset{X_3}{\underset{\shortparallel}{x_3}} - \omega t)\,\underline{e}_1 - \ell\omega\cos(k\underset{X_3}{\underset{\shortparallel}{x_3}}-\omega t)\,\underline{e}_2 \\ \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = -\ell\omega^2 \cos(k\underset{X_3}{\underset{\shortparallel}{x_3}}-\omega t)\,\underline{e}_1 - \ell\omega^2\sin(k\underset{X_3}{\underset{\shortparallel}{x_3}}-\omega t)\,\underline{e}_2 \end{array} \right.$$

d'après question 1.1

On retrouve naturellement l'expression obtenue en ⓐ.

et les expressions de la vitesse eulérienne et accélération eulérienne.

en injectant $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t)$ ou $\underline{X} = \underline{\Phi}^{-1}(\underline{x},t)$

1.6 Dérivée particulaire d'une fonction scalaire

Soit $b(\underline{x},t) = \delta x_1 t = \delta x_1(t)\, t$

soit directement

$$\left\{ \frac{db}{dt}(\underline{x},t) = \delta\left(\frac{dx_1}{dt}\right)t + \delta x_1 \underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1} = \delta v_1 t + \delta x_1 \right.$$

$$= \delta\, l\omega \sin(kx_3 - \omega t)\, t + \delta x_1$$

ou par la formule de la dérivée particulaire

$$\left\{ \frac{db}{dt}(\underline{x},t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{x},t)\Big|_{x\ \text{fixé}} + \underline{\text{grad}}\, b \cdot \underline{v}(\underline{x},t) \right.$$
t fixé

$$\frac{\partial b}{\partial t}\Big|_{x\ \text{fixé}} = \delta x_1 \qquad \underline{\text{grad}}\, b \underset{t\ \text{fixé}}{=} \frac{\partial b}{\partial x_1}\underline{e_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\underline{e_2} + \frac{\partial b}{\partial x_3}\underline{e_3}$$

$$= \delta t\, \underline{e_1} + 0\, \underline{e_2} + 0\, \underline{e_3}$$

d'où $$\frac{db}{dt} = \delta x_1 + \delta t\, \underline{e_1} \cdot \underline{v} = \delta x_1 + \delta t\, v_1$$

$$= \delta x_1 + \delta t\, l\omega \sin(kx_3 - \omega t)$$

▷ $$\left\{ B(\underline{X},t) = \underline{b}(x = \underline{\phi}(\underline{X},t), t) \right.$$
$$= \delta\, t\, \phi_1(\underline{X},t) = \delta t\left(l\cos(kX_3 - \omega t) - l\cos kX_3 + X_1\right)$$

▷ $$\frac{dB}{dt}(\underline{X},t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{X},t)$$ $\underline{X}$ est indépendant du temps

d'où $$\left\{ \frac{dB}{dt}(\underline{X},t) = \delta\left[l\cos(kX_3 - \omega t) - l\cos kX_3 + X_1\right] \right.$$
$$+ \delta t\, l\omega \sin(kX_3 - \omega t)$$

on retrouve bien $$\frac{dB}{dt} = \frac{db}{dt} = \delta t\, l\omega \sin(kx_3 - \omega t) + \delta x_1.$$

1.7 Tenseur taux de déformation

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t)\right)$$

par définition

$\underline{v}(\underline{x},t)$ vitesse eulérienne d'après 1.1 et le calcul de $\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}$, on a :

▷ $\underline{\underline{d}}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} l\omega k \cos(kx_3 - \omega t) \\ & 0 & \frac{1}{2} l\omega k \sin(kx_3 - \omega t) \\ & & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$

▷ les taux de dilatations d_{11}, d_{22} et d_{33} dans les 3 direction sont nuls

$d_{11} = \dfrac{\dot{\overline{dl}}}{dl} = 0$ avec $d\underline{x}(t) = dl\,\underline{e}_1$

$d_{22} = \dfrac{\dot{\overline{dl'}}}{dl'} = 0$ avec $d\underline{x}'(t) = dl'\,\underline{e}_2$

$d_{33} = \dfrac{\dot{\overline{dl''}}}{dl''} = 0$ avec $d\underline{x}''(t) = dl''\,\underline{e}_3$

de sorte que $\dot{\overline{dl}} = 0 \Rightarrow dl(t+dt) = dl(t)$

de même dans les autres directions

▷ les taux de glissement $\dot{\gamma}_{12}$, $\dot{\gamma}_{13}$ et $\dot{\gamma}_{23}$ sont donnés par

$\dot{\gamma}_{12} = 2d_{12} = 0$

$\dot{\gamma}_{13} = l\omega k \cos(kx_3 - \omega t) = 2d_{13}$

$\dot{\gamma}_{23} = 2d_{23} = l\omega k \sin(kx_3 - \omega t)$ ils varient avec le temps t.
et également en fonction de x_3.

▷ Taux de dilatation volumique

Soit $d\Omega_t$ un élément de volume infinitesimal de matière

$\dot{\overline{d\Omega_t}} = \dfrac{d}{dt}(d\Omega_t(t)) = (\text{trace } \underline{\underline{d}})\, d\Omega_t$ donc ici $\dot{\overline{d\Omega}}_t = 0$ d'où $d\Omega(t+dt) = d\Omega(t)$

le volume est conservé entre deux instants voisins et ce $\forall t$. la transformation est isochore.

1-8 - Taux de rotation

$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{v} - \underline{\underline{\nabla}}\underline{v}^T)$ et $\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\nabla}}\underline{v}$

d'où $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} l\omega k \cos(kx_3 - \omega t) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} l\omega k \sin(kx_3 - \omega t) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ -\frac{1}{2} l\omega k \cos(kx_3 - \omega t) & -\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\Omega}}$ est anti-symétrique

$$\underline{\underline{\Omega}}^T = -\underline{\underline{\Omega}}$$

▷ vecteur dual $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ tel que $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)\cdot\underline{x} = \underline{\Omega}\wedge\underline{x} \quad \forall \underline{x}$

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)\,\underline{x} = \left| \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2}\, l\omega k \cos(kx_3-\omega t)\; x_3\right]\underline{e_1} \\ +\left[\frac{1}{2}\, l\omega k \sin(kx_3-\omega t)\; x_3\right]\underline{e_2} \\ +\left[-\frac{1}{2}\, l\omega k \cos(kx_3-\omega t)\, x_1 - \frac{1}{2}\, l\omega k \sin(kx_3-\omega t)\, x_2\right]\underline{e_3} \end{array}\right.$$

$$\underline{\Omega}\wedge\underline{x} = \begin{vmatrix}\Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{vmatrix} = (\Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2)\underline{e_1} + (\Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3)\underline{e_2} + (\Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1)\underline{e_3}$$

par identification, on obtient $\Omega_3 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_2 = \frac{1}{2}\, l\omega k \cos(kx_3-\omega t) \\ \Omega_1 = -\frac{1}{2}\, l\omega k \sin(kx_3-\omega t) \\ \Omega_3 = 0 \end{array}\right.$$

▷ $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}$ (vérification avec l'expression de la vitesse eulérienne)

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}v_2\right)\underline{e_1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{v_3}_{0}\right)\underline{e_2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(v_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(v_1)\right)\underline{e_3}$$

or $v_3 = 0$ $\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = +l\omega \sin(kx_3-\omega t)\,k \;;\; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = +l\omega \cos(kx_3-\omega t)\,k$$

d'où $\left\{ \underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\, l\omega k \sin(kx_3-\omega t)\,\underline{e_1} + \frac{1}{2}\, lk\omega \cos(kx_3-\omega t)\,\underline{e_2}\right.$

□ Partie 2 : Etude de la transformation

2.1 Unités de k, l, ω $\quad$ D'après l'expression de $\underline{x} = \Phi(\underline{X},t)$

$\left\{ [l] = [x] = \text{mètre} \right.$ (longueur) $\quad [kX_3 - \omega t] = \text{radian}$

$\Rightarrow \left\{ [k] = \frac{\text{radian}}{\text{mètre}} \right.$ $\quad \omega t : \text{radian} \Rightarrow \left\{ [\omega] = \frac{\text{radian}}{s} \right.$

▷ Tenseur gradient de transformation

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underset{\underline{X}\text{ à } t \text{ fixe}}{\underline{\underline{\nabla}}} \, \phi(\underline{X},t) \qquad F_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = F_{13} = -\ell k \sin(kX_3 - \omega t) + \ell k \sin(kX_3) \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = 1 & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = F_{23} = \ell k \cos(kX_3 - \omega t) - \ell k \cos(kX_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1 \end{pmatrix}$$

▷ $\underline{\underline{F}}(X,t)$ dépend de $\underline{X}$, la transformation n'est donc pas homogène. Un segment de droite ne restera pas droit au cours de la transformation

▷ $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ est une transformation toujours définie

en effet $\quad 0 < \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) < \infty \qquad \forall \underline{X} \; \forall t$

ici $\det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = 1 \quad \forall \underline{X} \; \forall t$

▷ Soit $(d\Omega_0)$ un élément de volume à l'instant $t=0$, centré en $\underline{X}$

$d\Omega_t$ son transformé à l'instant $t \neq 0$

On a $\quad d\Omega_t = J(\underline{X},t)\, d\Omega_0$

de sorte qu'ici $d\Omega_t = d\Omega_0$. le volume est donc inchangé

la transformation est isochore

2.2 Tenseurs des déformations $\underline{\underline{C}}$ dilatation et $\underline{\underline{e}}$ Green-Lagrange

Par définition $\quad \underline{\underline{C}} = ({}^T\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}})(\underline{X},t) \quad$ et $\quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$

▷ $$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{13} & F_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{13} \\ 0 & 1 & F_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{13} \\ 0 & 1 & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{13}^2 + F_{23}^2 + 1 \end{pmatrix}$$

symétrique

▷ $$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{23} \\ \frac{1}{2}F_{13} & \frac{1}{2}F_{23} & \frac{1}{2}(F_{13}^2 + F_{23}^2) \end{pmatrix}$$ symétrique $\quad e_{33} = \frac{1}{2}(F_{13}^2 + F_{23}^2)$

soit

$$e_{33} = \frac{1}{2}\left[\left(-\ell k \sin(kX_3 - \omega t) + \ell k \sin kX_3\right)^2 + \left(\ell k \cos(kX_3 - \omega t) - \ell k \cos(kX_3)\right)^2\right]$$

d'où

$$e_{33} = \frac{1}{2}\ell^2k^2\left[\sin^2 kX_3 + \sin^2(kX_3 - \omega t) - 2\sin(kX_3 - \omega t)\sin kX_3 + \cos^2 kX_3 + \cos^2(kX_3 - \omega t) - 2\cos(kX_3 - \omega t)\cos kX_3\right]$$

soit $e_{33} = \frac{1}{2}\ell^2k^2\left[2 - 2\cos(kX_3 - \omega t - kX_3)\right]$ d'après la formule trigonométrique

et donc $\left\{ e_{33} = \ell^2k^2(1 - \cos(\omega t))\right.$

2.3 Nature de la transformation

Soit $d\underline{X} = dl_0\,\underline{e_1} \Rightarrow d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\,d\underline{X}$ et $dl^2 = d\underline{x}\cdot d\underline{x} = d\underline{X}\,\underline{\underline{C}}\,d\underline{X}$

$dl^2 = dl_0^2\,\underline{e_1}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{e_1}$ d'où $\frac{dl}{dl_0} = \sqrt{C_{11}} = 1$ ici

de sorte que $dl = dl_0 = \|d\underline{x}\| = \|d\underline{X}\|$

▷ $\left\{\right.$ Un vecteur matériel porté par e_1 à $t=0$ conserve sa longueur dans la transformation (infinitésimal)

de même $\frac{dl'}{dl'_0} = \sqrt{C_{22}} = 1$ de sorte qu'un vecteur matériel

▷ $\left\{\right.$ porté par $\underline{e_2}$ à $t=0$ conserve également sa longueur dans la transformation

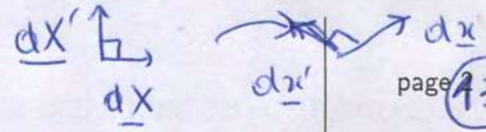
En revanche $\frac{dl''}{dl''_0} = \sqrt{C_{33}} = \sqrt{1 + F_{13}^2 + F_{23}^2} = \sqrt{1 + 2e_{33}}$

De sorte que $\frac{dl''}{dl''_0} = \sqrt{1 + 2\ell^2k^2(1 - \cos\omega t)}$

et on a donc $\frac{dl''}{dl''_0} > 1 \quad \forall t$

un vecteur élémentaire infinitésimal porté par e_3 à l'instant $t=0$ se dilate au cours de la transformation et atteint sa plus grande longueur pour $\omega t = \pi$ $\left(dl'' = \sqrt{1 + 4\ell^2k^2}\,dl''_0\right)$

▷ $\sin\left[\gamma_{12}(X,t)\right] = \dfrac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}} = 0$



donc $\gamma_{12}(\underline{X},t) = 0$ et donc deux vecteurs materiels orthogonaux à $t=0$ restent orthogonaux au cours de la transformation

▷ $\sin\left[\gamma_{13}(\underline{X},t)\right] = \dfrac{C_{13}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{33}}} = \dfrac{\ell k\left[\sin(kX_3) - \sin(kX_3 - \omega t)\right]}{\sqrt{1+2e_{33}}}$

$$= \frac{\ell k\left[\sin(kX_3) - \sin(kX_3-\omega t)\right]}{\sqrt{1+2\ell^2k^2(1-\cos\omega t)}}$$

▷ $\sin\left[\gamma_{23}(\underline{X},t)\right] = \dfrac{C_{23}}{\sqrt{C_{22}}\sqrt{C_{33}}} = \dfrac{\ell k\left[\cos(kX_3-\omega t) - \cos(kX_3)\right]}{\sqrt{1+2\ell^2k^2(1-\cos\omega t)}}$

▷ Pour un point $(X_1, X_2, X_3=0)$ on a $\dfrac{d\ell''}{d\ell''_0} = \sqrt{1+2\ell^2k^2(1-\cos\omega t)}$

indépendant du point $\underline{X}$

$$\sin\gamma_{13} = \frac{\ell k\sin\omega t}{\sqrt{1+2\ell^2k^2(1-\cos\omega t)}}$$

$$\sin\gamma_{23} = \frac{\ell k\cos(\omega t-1)}{\sqrt{1+2\ell^2k^2(1-\cos\omega t)}}$$

les angles de glissement et dilatation selon e_3 sont indépendantes de X_1, X_2

Double glissement

2.4 - Déplacement et tenseur des déformations linéarisées

▷ Par définition $\underline{\xi}(\underline{X},t) = \underline{x} - \underline{X}$

vecteur deplacement

Soit ici $\underline{\xi}(\underline{X},t) = \left[\ell\cos(kX_3-\omega t) - \ell\cos kX_3\right]\underline{e_1} + \left[\ell\sin(kX_3-\omega t) - \ell\sin kX_3\right]\underline{e_2}$

▷ tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\xi = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{\nabla}}_X\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial X_1}=0 & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial X_2}=0 & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial X_3}=F_{13} \\ \dfrac{\partial\xi_2}{\partial X_1}=0 & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial X_2}=0 & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial X_3}=F_{23} \\ \dfrac{\partial\xi_3}{\partial X_1}=0 & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial X_2}=0 & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial X_3}=0 \end{pmatrix}$$

▷ tenseur des déformations linéarisées

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\xi} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}\right)$$

soit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{23} \\ \frac{1}{2}F_{13} & \frac{1}{2}F_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

▷ Si $\ell k \ll 1$

$F_{13}^2 + F_{23}^2 \ll 1$ et $F_{13}^2 \ll F_{13}$ $F_{23}^2 \ll F_{23}$

de sorte que $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}F_{23} \\ \frac{1}{2}F_{13} & \frac{1}{2}F_{23} & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$

$\ell k \ll 1$ correspond à l'hypothèse des petites transformations

$$\left|\left(\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\xi}\right)_{ij}(\underline{X},t)\right| \ll 1 \quad \forall \underline{X}\ \forall t \quad \forall i,j$$

▷ si $\ell k \ll 1$ alors $e_{33} \simeq 0$ et donc $\frac{d\ell''}{d\ell''_0} = \sqrt{C_{33}} = 1$

de sorte que $d\ell'' = d\ell''_0 = \|\underline{dx}''\| = \|\underline{dX}''\|$

la longueur d'un élément materiel porté par $\underline{e}_3$ à $t=0$ reste inchangée dans ce cas.

la transformation n'induit que des cisaillements dans les directions (e_2, e_3) et (e_3, e_1) — La transformation est une distorsion = double glissem

2.5 Taux de déformation et déformations linéarisées

On peut faire l'analogie suivante entre

$\varepsilon_{11} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0} = 0$ et $d_{11} = \frac{\dot{d\ell}}{d\ell} = 0 \Rightarrow d\ell(t+dt) = d\ell(t)$.

d'où $d\ell = d\ell_0$ on a bien $\dot{d\ell} = 0$

de la même manière, on a

$d\ell' = d\ell'_0$, $d\ell'' = d\ell''_0$ et $(d\ell')(t+dt) = (d\ell')(t)$

$(d\ell'')(t+dt) = (d\ell'')(t)$

en HPP les deux configurations actuelle et non deformée sont voisines

tout comme les configurations Ω_{t+dt} et Ω_t

$2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = 0$ de sorte que $\mathring{\gamma}_{12} = 0$ cohérent avec $d_{12} = 0$

$2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = F_{13}$ de sorte que $\mathring{\gamma}_{13} = \mathring{F}_{13} = +lk\omega \cos(kX_3 - \omega t)$

on retrouve bien $\mathring{\gamma}_{13} = 2\, d_{13}$

$2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = F_{23}$ de sorte que $\mathring{\gamma}_{23} = \mathring{F}_{23} = \frac{d}{dt}\left(kl\cos(kX_3 - \omega t) - kl\cos kX_3\right)$

soit donc $\mathring{\gamma}_{23} = kl\omega \sin(kX_3 - \omega t) = 2\, d_{23}$.

on retrouve bien l'expression obtenue en question 1.7 de la partie 1

On a donc $\underline{\underline{d}} = \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt}$