## TD 2 - Déformations planes et contraintes planes

On étudie l'équilibre d'un barrage de section triangulaire $OAB$ dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et de grande longueur $2l$ dans la direction $\underline{e}_3$. Ce barrage est réalisé dans un matériau élastique, homogène, isotrope, de masse volumique $\rho_b$.

Le barrage est ancré sur le sol par son côté $AB$ d'équation $x_1 = H$. Il retient une hauteur $H$ d'eau sur son côté $OA$ d'équation $x_2 = 0$. On désigne par $\rho_e$ la masse volumique de l'eau. La surface $OB$ (inclinée d'un angle $\alpha = \pi/4$ par rapport à l'axe $(O, \underline{e}_1)$ est libre d'efforts. Enfin, les efforts tangentiels et le déplacement normal sont supposés nuls sur les faces $x_3 = \pm l$.

1. Donner les équations et conditions aux limites du problème.

   Justifier l'hypothèse retenue de déformations planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

   Rappeler les formes des champs de déplacement, déformations et contraintes associés sous cette hypothèse et formuler le problème d'élasticité plane posé.

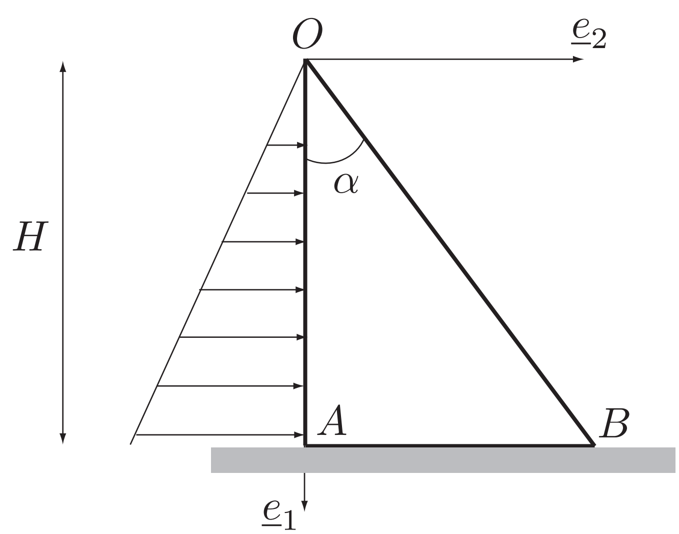
2. Montrer que les composantes d'un champ de contraintes statiquement admissible pour ce problème s'expriment à l'aide d'une fonction d'Airy $\chi(x_1, x_2)$.

3. Etablir l'équation satisfaite par la fonction $\chi(x_1, x_2)$ pour que le champ de contrainte associé puisse être solution du problème.

4. Montrer qu'en prenant $\chi(x_1, x_2)$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en $(x_1,\ x_2)$, il est possible de déterminer un champ de contraintes statiquement admissible pour le problème.

5. Calculer le champ de déplacement associé.

   Ce déplacement est-il solution exacte du problème ?



## Exercice 2 : Tube en pression

On étudie l'équilibre d'un tube cylindrique creux de section circulaire, d'axe $\underline{e}_3$. On désigne par $r_i$ et $r_e$ les rayons intérieur et extérieur du tube et par $h$ sa hauteur. Le tube est constitué d'un matériau élastique homogène isotrope. Sa paroi interne d'équation $r = r_i$ est soumise à une pression uniforme $p_i$ et sa paroi externe d'équation $r = r_e$ à une pression $p_e$. Les faces supérieure et inférieure d'équations $x_3 = h$ et $x_3 = 0$ sont libres d'efforts. Enfin les efforts volumiques sont supposés négligeables.

1. Ecrire les équations et conditions aux limites du problème. Quel est son type ? Ce problème admet-il une solution unique en déplacement et contraintes.

2. On recherche le champ de contraintes solution du problème sous la forme d'un champ de contraintes planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

   Montrer que les composantes du champ de contraintes solution s'expriment à partir d'une fonction d'Airy $\chi(x_1, x_2)$.

   Etablir l'équation satisfaite par $\chi$.

3. Compte-tenu de la symétrie du problème, on recherche une solution sous la forme $\chi = \chi(r)$.

   Déterminer le tenseur des contraintes solution $\underline{\underline{\sigma}}$.

4. Calculer un champ de déplacement $\underline{u}$ associé.