Licence d'Ingénierie Mécanique - LA392
Examen du 12 juin 2015

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner l'équation des caractéristiques associée à l'équation d'ordre 1 : $yu_x - xu_y = 0$. Tracer quelques courbes caractéristiques.
2. On veut modéliser les vibrations d'une corde de quitare.
   (a) Donner l'équation aux dérivées partielles régissant ce phénomène. On appelera $u(x,t)$ l'amplitude de la vibration à l'abscisse x.
   (b) Sachant que la corde est attachée en $x = 0$ et en $x = L$ écrire les conditions frontière.
   (c) La corde est supposée lâchée sans vitesse initiale et sa forme initiale est supposée donnée par une fonction $u_0(x)$. Ecrire les conditions initiales.
3. Définissez l'intervalle de dépendance pour l'équation des ondes 1D.
4. Donner la forme standard (ou canonique) d'une équation aux dérivées partielles parabolique.

Exercice 1

Déterminez la solution générale de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où } u = u(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

en utilisant les nouvelles coordonnées : $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Exercice 2

Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

1. De quelle équation de la mécanique s'agit-t-il ?
2. Donner la solution générale de cette équation. Donner une intérpretation physique de cette solution.
3. Soit le problème de Cauchy formé par l'équation (1) et les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ donnée, } \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \ \text{ donnée, } \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

   Donner la solution du problème de Cauchy. Est-ce qu'elle est unique ?

Exercice 3
On considère l'équation de la chaleur dans une sphère solide homogène de rayon R :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\coth(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \tag{4}$$

a) La surface de la sphère est gardée à température constante $0^\circ C$. Si la température initiale dans la sphère est indépendante de θ et de ϕ et est donnée par $u(r,0) = f(r)$, alors montrer que les solutions $u(r,t)$ de l'équation (4) indépendantes de θ et de ϕ sont des solutions du problème :

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{avec } u(R,t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \text{ et } u(r,0) = f(r), \quad \forall r \in [0,R].$$

En supposant que $u(r,t)$ est une fonction bornée et en posant $v(r,t) = ru(r,t)$ dans le problème $(*)$, montrer que nous obtenons le nouveau problème :

$$(**) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad \text{avec } v(R,t) = v(0,t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0 \text{ et } v(r,0) = rf(r), \quad \forall r \in [0,R].$$

b) Résoudre l'équation $(**)$ à l'aide de la méthode de séparation des variables et déduire ensuite la solution $u(r,t)$ du problème $(*)$.

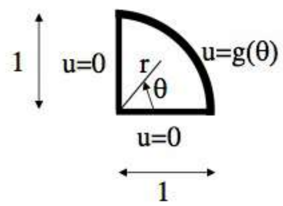
Exercice 4
Résoudre l'équation de Laplace dans le quart de disque unité (voir figure plus bas) :

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

avec les conditions aux limites :

$$u(1,\theta) = g(\theta), \quad u(0,\theta) \text{ borné}, \quad , 0 < \theta < \pi/2,$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 < r < 1.$$



Indication : L'opérateur de Laplace en coordonnées polaires (r,θ) est :

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}$$