Cuve de mélange

Examen de 1ère session : lundi 9 mai 2016

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (−2 points possibles).

Une cuve de mélange (2) est utilisée sur un chantier. Elle est montée dans un caisson (1) équipé d'un moteur destiné à la mettre en rotation. Le caisson est en liaison pivot avec la plateforme ($0'$) d'un monte-charge qui assure le levage dans les différents étages du chantier.

On définit les référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au sol du chantier et est supposé galiléen.
- $\mathcal{R}'_0 = (\mathrm{A}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au monte-charge dont A est un point matériel tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = h(t)\overrightarrow{z_0}$ où h est une fonction du temps.
- $\mathcal{R}_1 = (\mathrm{A}, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})$ est lié au caisson. La liaison pivot (en A) entre le caisson et la plateforme du monte-charge est supposée parfaite d'axe $(\mathrm{A}, \overrightarrow{y_0})$. La rotation $1/0'$ est décrite par l'angle $\theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1}})$.
- $\mathcal{R}_2 = (\mathrm{B}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$ est lié à la cuve. La liaison pivot (en B) entre la cuve et le caisson est parfaite, d'axe $(\mathrm{B}, \overrightarrow{z_1})$ et le mouvement de rotation associé est décrit à l'aide de l'angle $\alpha(t) = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}})$.

On notera C_2, avec $\overrightarrow{\mathrm{AC}_2} = -\ell\overrightarrow{z_1}$, le centre de masse de la cuve et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -d\overrightarrow{z_1}$. On se donne D, point matériel de la cuve, défini par $\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{D}} = b\overrightarrow{y_2}$.

Dans ce problème, on ne traitera que le cas où la cuve ne contient pas de fluide.

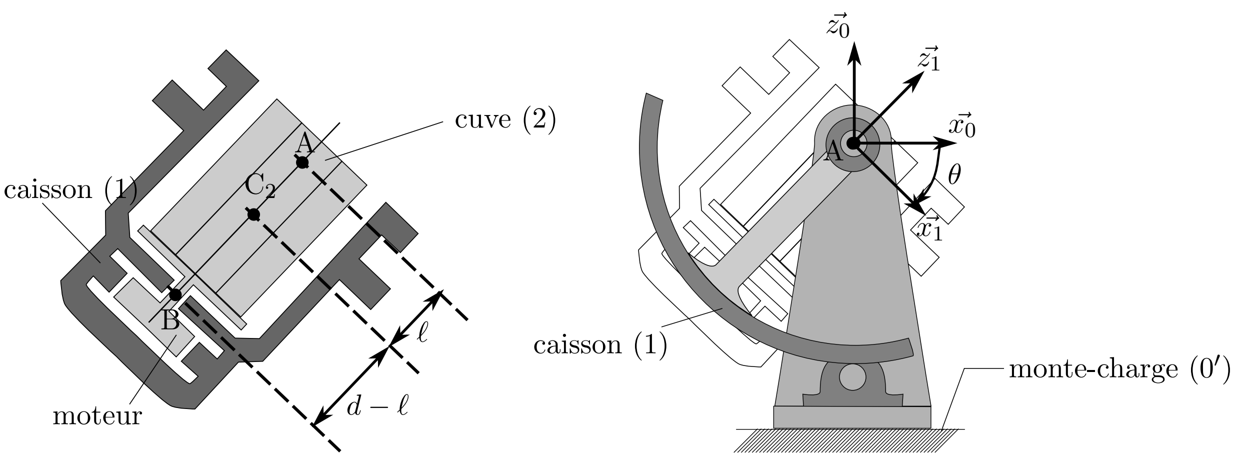
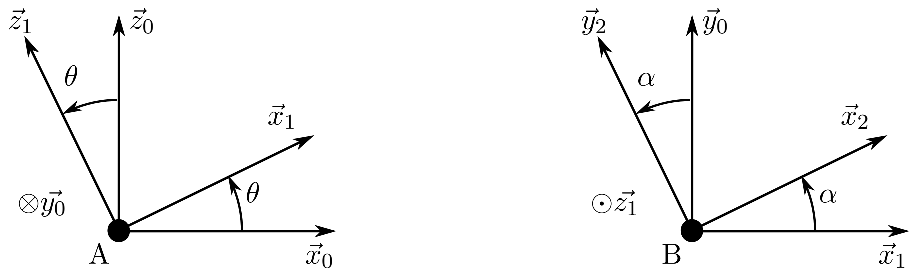


Figure 1 – Cuve de mélange.

1 Cinématique

1. Dessiner les diagrammes de changement de base.

Solution:



2. Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$.

Solution:

$$\vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_0}, \qquad \vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_0}.$$

Dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$, on a $\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}\cos\alpha\overrightarrow{y_2} - \dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{x_2}$.

3. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in 0'/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$.

Solution: A est un point matériel de $(0')$ et (1). On a donc

$$\vec{V}(\mathrm{A} \in 0'/0) = \vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|_0 = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0}.$$

4. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{O} \in 0'/0)$. **Attention :** point géométrique.

Solution: Le mouvement de $(0')$ par rapport à (0) est un mouvement de translation. On a ainsi

$$\vec{V}(\mathrm{P} \in 0'/0) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0}, \quad \forall \mathrm{P} \in (0')$$

et en particulier $\vec{V}(\mathrm{O} \in 0'/0) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0}$.

5. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{B} \in 2/0)$.

Solution: B est un point matériel de (1) et (2) ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{B} \in 2/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in 1/0) &= \vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_0} \wedge (-d\overrightarrow{z_1})\\ &= \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + d\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}\end{aligned}$$

6. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution: On applique la relation de torseur entre les points A et C_2 :

$$\vec{V}(C_2 \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{AC_2}.$$

Comme A est sur l'axe de la liaison pivot 2-1, on a $\vec{V}(A \in 2/1) = \vec{V}(B \in 2/1) = \vec{0}$. La loi de composition du vecteur vitesse donne alors

$$\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{V}(A \in 1/0) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0}$$

En calculant le produit vectoriel, on trouve

$$\vec{V}(C_2 \in 2/0) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + (\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_0}) \wedge (-\ell\overrightarrow{z_1}) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}.$$

7. Exprimer $\vec{V}(D \in 2/0)$.

Solution: On applique la relation de torseur entre les points C_2 et D :

$$\begin{aligned}\vec{V}(D \in 2/0) &= \vec{V}(C_2 \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{C_2D} \\ &= \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} + [\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}(\cos\alpha\overrightarrow{y_2} + \sin\alpha\overrightarrow{x_2})] \wedge b\overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

d'où, en effectuant les produits vectoriels

$$\vec{V}(D \in 2/0) = \dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} - \ell\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - b(\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{z_1}).$$

8. Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0)$.

Solution: Par dérivation du vecteur vitesse

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{x_1})\right|_0 = \ddot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \ell\dot{\theta}\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{x_1} \\ &= \ddot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell(\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}^2(\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1})) = \ddot{h}(t)\overrightarrow{z_0} + \ell(\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}^2\overrightarrow{z_1}).\end{aligned}$$

2 Cinétique

La cuve est constituée d'une paroi cylindrique à base hexagonale et d'un fond ayant la forme d'un disque. Dans la suite, on négligera la masse, et plus généralement, l'inertie du fond par rapport à celle des parois. Chaque face de la paroi est une plaque de masse $m/6$, de largeur R et de hauteur H.

1. Justifier en utilisant les symétries que $\mathcal{R}_2 = (C_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$ est un repère principal d'inertie de la cuve (2).

Indication : montrer que $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2})$, $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{y_2})$ et $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{z_1})$ sont des directions principales d'inerties.

Solution: Le plan $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ constitue une symétrie matérielle de la cuve. Il en va de même pour le plan $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{z_2})$. Comme un axe perpendiculaire à un plan de symétrie matériel est principal d'inertie, on en déduit que $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2})$ et $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{y_2})$ sont principaux d'inertie. Enfin, toute base orthonormée directe contenant $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ constitue un repère principal d'inertie. Ainsi $\mathcal{R}_2$ est un repère principal d'inertie de la cuve (2).

Remarque : Comme on néglige l'inertie du fond, le plan $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$ constitue lui-aussi une symétrie matérielle (mais pas géométrique) de la cuve.

2. Peut-on affirmer en invoquant uniquement des arguments de symétrie qu'il y a égalité entre certains des moments d'inertie de (2) par rapport à $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2})$, $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{y_2})$ et $(\mathrm{C}_2, \overrightarrow{z_1})$?

Solution: La cuve ne présente pas de symétrie matérielle de révolution autour de l'un de ses axes principaux d'inertie. On ne peut pas invoquer les symétries matérielles pour justifier une éventuelle égalité entre les moments d'inertie (par rapport aux axes principaux d'inerties).

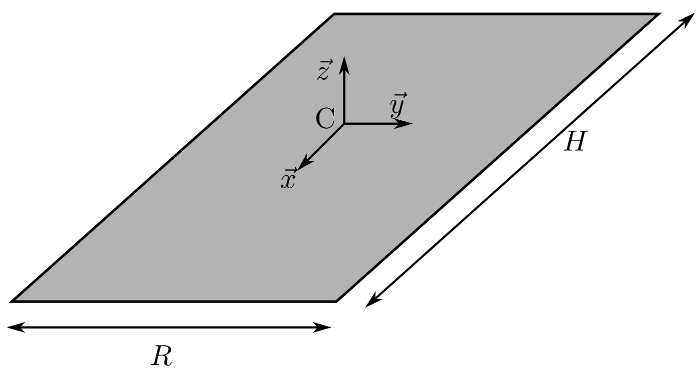


FIGURE 2 – Plaque de masse m, d'épaisseur négligeable pour la question 3.

3. Calculer la matrice d'inertie d'une plaque, de masse m, de longueur H et de largeur R en son centre de masse C dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (voir FIGURE 2). *Pour cette question, vous devez calculez les moments d'inertie à partir de leur définition sous forme d'une intégrale (cf. formulaire page 10).*

Solution: On note $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = x\,\overrightarrow{x} + y\,\overrightarrow{y} + z\,\overrightarrow{z}$. La plaque étant dans le plan $z = 0$ et le repère $(\mathrm{C}_2, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ étant principal d'inertie, on a (voir formulaire page 10)

$$[J_\mathrm{C}]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \int_{\text{plaque}} y^2 \mathrm{d}m & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\text{plaque}} x^2 \mathrm{d}m & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\text{plaque}} (x^2+y^2) \mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

et on voit que le dernier moment d'inertie est simplement la somme des deux premiers. Pour l'élément de masse, on a $\mathrm{d}m = \frac{m}{R\times H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En calculant les intégrales, on arrive à :

$$\int_{\text{plaque}} y^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{RH}\int_{-H/2}^{+H/2}\mathrm{d}x\int_{-R/2}^{+R/2} y^2\mathrm{d}y = \frac{m}{H}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-R/2}^{+R/2} = \frac{1}{12}mR^2;$$
$$\int_{\text{plaque}} x^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{RH}\int_{-H/2}^{+H/2}x^2\mathrm{d}x\int_{-R/2}^{+R/2} \mathrm{d}y = \frac{m}{H}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-H/2}^{+H/2} = \frac{1}{12}mH^2.$$

La matrice d'inertie de la plaque s'écrit donc finalement :

$$[J_{\mathrm{C}}]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{12}m\begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^2+R^2 \end{pmatrix}.$$

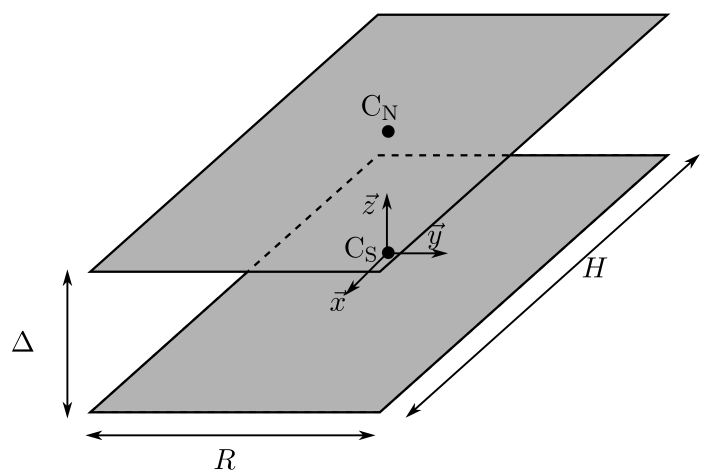


FIGURE 3 – Plaques parallèles pour la question 5.

On considère deux plaques N et S de masse identique m, parallèles, de centre de masse respectif $\mathrm{C_N}$ et $\mathrm{C_S}$, contenues dans les plans $(\mathrm{C_N},\vec{x},\vec{y})$ et $(\mathrm{C_S},\vec{x},\vec{y})$ et séparées d'une distance Δ ($\overrightarrow{\mathrm{C_N C_S}} = \Delta\vec{z}$) voir FIGURE 3. On note C le centre de masse des deux plaques.

4. Déterminer la matrice d'inertie des deux plaques $\mathrm{N}\cup\mathrm{S}$ en C dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Solution: On change le point des 2 matrices en utilisant le Théorème d'Huyghens. En additionnant, il vient

$$[J_{\mathrm{N}\cup\mathrm{S}}(\mathrm{C})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{6}m\begin{pmatrix} R^2+3\Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & H^2+3\Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^2+R^2 \end{pmatrix}.$$

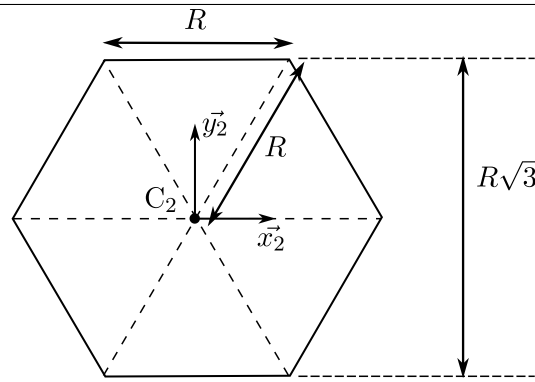


FIGURE 4 – Vue de dessus de la paroi de la cuve. Tous les triangles du schéma sont équilatéraux de côté R.

La paroi cylindrique à base hexagonale peut être vue comme la réunion de 3 paires de plaques parallèles entre elles. Pour une telle paire la distance de séparation est $R\sqrt{3}$ (voir FIGURE 4). À partir de la matrice d'inertie d'une paire, on peut obtenir celles des autres en effectuant des rotations d'angle $\pi/3 = 60°$ autour de l'axe $(\mathrm{C}_2, \vec{z_1})$. On admettra le résultat suivant :

Proposition 1 *Soit* S *un solide et* $(\mathrm{P}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *un référentiel principal d'inertie. Si on note*

$$[J_{\mathrm{S}}(\mathrm{P})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

la matrice d'inertie de S *au point* P, *alors la matrice d'inertie du solide* S′ *obtenu par la rotation de* S *d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *autour de l'axe* $(\mathrm{P}, \vec{z})$ *s'écrit dans la base* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$[J_{\mathrm{S}'}(\mathrm{P})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_x + 3I_y & (I_y - I_x)\sqrt{3} & 0 \\ (I_y - I_x)\sqrt{3} & 3I_x + I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

De plus, si S″ *est le solide obtenu par la rotation de* S′ *d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *autour de l'axe* $(\mathrm{P}, \vec{z})$, *alors sa matrice d'inertie au point* P *dans la base* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *s'écrit*

$$[J_{\mathrm{S}''}(\mathrm{P})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_x + 3I_y & (I_x - I_y)\sqrt{3} & 0 \\ (I_x - I_y)\sqrt{3} & 3I_x + I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

5. Former la matrice d'inertie $[J_{\mathrm{S}\cup\mathrm{S}'\cup\mathrm{S}''}(\mathrm{P})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$. En déduire la matrice d'inertie des parois de la cuve.

Solution: On applique la proposition en additionnant les matrices de chaque paire de plaques :

$$[J_{\mathrm{S}\cup\mathrm{S}'\cup\mathrm{S}''}(\mathrm{P})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} I_x + I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_x + I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Pour la cuve, on doit reprendre la matrice $[J_{\mathrm{N}\cup\mathrm{S}}(\mathrm{C})]$ obtenue question 4 avec $\Delta = R\sqrt{3}$ et $m = m/6$ (car 6 plaques)

$$[J_{\mathrm{N}\cup\mathrm{S}}(\mathrm{C})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{36}m \begin{pmatrix} 9R^2+R^2 & 0 & 0 \\ 0 & H^2+9R^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^2+R^2 \end{pmatrix}$$

On remplace dans la matrice précédente :

$$\begin{aligned} [J_{\mathrm{cuve}}(\mathrm{C}_2)]_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_1})} &= \frac{3}{2}\frac{m}{36} \begin{pmatrix} 10R^2+H^2+9R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10R^2+H^2+9R^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^2+R^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{24}m \begin{pmatrix} H^2+19R^2 & 0 & 0 \\ 0 & H^2+19R^2 & 0 \\ 0 & 0 & H^2+R^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par le calcul, on montre que l'opérateur d'inertie est cylindrique bien qu'il n'y ait pas de symétrie matérielle de révolution.

Dans toute la suite, on prendra simplement $[J_{\mathrm{cuve}}(\mathrm{C}_2)]_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_1})} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$.

6. Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

Solution: Au centre de masse C_2, le moment cinétique de 2/0 est simplement :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \mathcal{J}_2(\mathrm{C}_2)[\vec{\Omega}(2/0)] &= \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\alpha \\ -\dot{\theta}\cos\alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta}(A\sin\alpha\overrightarrow{x_2} + B\cos\alpha\overrightarrow{y_2}) + C\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} \end{aligned}$$

3 Dynamique

Dans un premier temps, on suppose que le moteur embarqué dans le caisson fournit un couple constant $\Gamma\overrightarrow{z_1}$ à la cuve au point B. Pour simplifier, on supposera $\ddot{h} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ et on notera $\dot{\theta} = \omega = \mathrm{Cte}$.

1. Peut-on considérer le reférentiel $\mathcal{R}_0'$ comme galiléen ?

Solution: $\mathcal{R}_0'$ est galiléen car $\mathcal{R}_0$ l'est et le mouvement $0'/0$ est rectiligne uniforme ($\ddot{h} = 0 \Rightarrow \dot{h} = \mathrm{Cte}$).

2. Expliquer comment trouver une équation du mouvement pour la cuve. Quel(s) solide(s) faut-il isoler ? Quelle projection effectuer ?

> **Solution:** Une *équation du mouvement* ne contient que les variables cinématiques (parmi α, $\dot\alpha$, $\ddot\alpha$, θ, $\dot\theta$, h et $\dot h$) et pas d'inconnue de liaison. Étant donné que 2/1 est pivot d'axe $(\mathrm{B}, \vec{z_1})$, on obtiendra une équation du mouvement appliquant le Théorème du Moment Dynamique à la cuve (2) et en projetant suivant $\vec{z_1}$.

3. Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.

> **Solution:** C'est le calcul le plus difficile de l'examen. Au fond, il ne s'agit que d'une dérivation vectorielle ; si vous êtes méthodique, vous devez en venir à bout. Je vous conseille de dériver dans le repère attaché à la cuve en utilisant la règle de dérivation vectorielle.
>
> Au centre de masse C_2, le moment dynamique 2/0 s'obtient par dérivation du moment cinétique :
>
> $$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)\bigg|_{\mathcal{R}_0}.$$
>
> On applique la règle de dérivation vectorielle :
>
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)\bigg|_{\mathcal{R}_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)\bigg|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0).$$
>
> Lorsque l'on dérive dans $\mathcal{R}_2$, les vecteurs $\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}$ et $\overrightarrow{z_1}$ sont fixes, d'où
>
> $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)\bigg|_{\mathcal{R}_2} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\dot\theta\sin\alpha\overrightarrow{x_2} + B\dot\theta\cos\alpha\overrightarrow{y_2} + C\dot\alpha\overrightarrow{z_1}\right)\bigg|_{\mathcal{R}_2}\\ &= -A\dot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\alpha)\overrightarrow{x_2} - B\dot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\alpha)\overrightarrow{y_2} + C\ddot\alpha\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$
>
> car $\dot\theta = \mathrm{Cte}$ par hypothèse.
>
> Pour le produit vectoriel, on a, dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$
>
> $$\vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \begin{pmatrix}-\dot\theta\sin\alpha\\ -\dot\theta\cos\alpha\\ \dot\alpha\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-A\dot\theta\sin\alpha\\ -B\dot\theta\cos\alpha\\ C\dot\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(B-C)\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\\ (C-A)\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\\ (B-A)\dot\theta^2\sin\alpha\cos\alpha\end{pmatrix}.$$
>
> Le moment dynamique s'écrit finalement dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$:
>
> $$\vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) = \begin{pmatrix}A\dot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\alpha) + (B-C)\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\\ B\dot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\alpha) + (C-A)\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\\ C\ddot\alpha + (B-A)\dot\theta^2\sin\alpha\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(A+B-C)\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\\ (-A-B+C)\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\\ C\ddot\alpha + \frac{B-A}{2}\dot\theta^2\sin2\alpha\end{pmatrix}$$
>
> où on a utilisé l'identité de trigo $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

4. Établir une équation du mouvement pour la cuve.

Solution: La cuve (2) n'est soumise qu'à l'action de (1) (au travers de la liaison), du moteur et à son poids. Le Théorème du Moment Dynamique appliqué dans le repère $\mathcal{R}_0'$ à (2) au point C_2 se traduit par la relation vectorielle :

$$\vec{\delta}(C_2 \in 2/0) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{poids}}}(C_2) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{moteur}}}(C_2) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 2}}(C_2).$$

Le moment du poids en C_2 est nul car le poids est équivalent à une force ponctuelle dont le point d'application est le centre de masse.

Il faut transporter le moment des actions du moteur et de la liaison 1-2 en C_2. Pour un couple, le champ de moments est uniforme et on a donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{moteur}}}(C_2) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{moteur}}}(B) = \Gamma \vec{z_1}.$$

Pour l'action de liaison, on projète suivant $\vec{z_1}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 2}}(C_2) \cdot \vec{z_1} = (\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 2}}(B) + \overrightarrow{R_{1\to 2}} \wedge \overrightarrow{BC_2}) \cdot \vec{z_1} = \vec{z_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 2}}(B) + (\overrightarrow{R_{1\to 2}} \wedge \overrightarrow{BC_2}) \cdot \vec{z_1}.$$

Le produit scalaire $\vec{z_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 2}}(B)$ vaut zéro car la liaison est pivot d'axe $(B, \vec{z_1})$; le produit mixte est lui aussi nul car $\vec{z_1}$ et $\overrightarrow{BC_2}$ sont colinéaires (faire une permutation circulaire).

La projection de la relation vectorielle issue du Théorème du Moment Dynamique suivant $\vec{z_1}$ fournit l'équation du mouvement :

$$C\ddot{\alpha} + \frac{B - A}{2}\dot{\theta}^2 \sin 2\alpha = \Gamma.$$

Cette équation du mouvement indique que les rotations de la cuve et du caisson sont couplées (avec un couple moteur Γ constant, l'accélération angulaire de la cuve n'est pas constante en général).

En multipliant les deux membres par $\dot{\alpha}$, on obtient une *intégrale première* (pas demandée) :

$$C\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{B - A}{2}\dot{\theta}^2\dot{\alpha} \sin 2\alpha = \Gamma\dot{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad C\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \frac{B - A}{4}\dot{\theta}^2 \cos(2\alpha) - \Gamma\alpha = \text{Cte}.$$

5. Peut-on obtenir l'équation du mouvement précédente à partir du Théorème de l'Énergie Cinétique ?

Solution: C'est une question facile si vous connaissez bien le cours (il faut que la distinction entre une action mécanique *extérieure* et un effort *interne* dans la formulation du Théorème de l'Énergie Cinétique soit claire pour vous). Pour que le Théorème de l'Énergie Cinétique produise directement une relation sans inconnue de liaison, il faut que toutes les liaisons soient internes au système isolé. En examinant les différentes possibilités (noter qu'on ne connaît pas le torseur de l'action mécanique qui met en mouvement le caisson), on peut conclure à l'impossibilité de l'obtention d'une équation du mouvement de cette manière.

6. Calculez la puissance galiléenne fournie par le moteur à la cuve $\mathcal{P}(\text{moteur} \to 2/0)$.

Solution: La puissance fournie par un couple est le produit scalaire du couple et du vecteur vitesse instantané de rotation du mouvement :

$$\mathcal{P}(\text{moteur} \to 2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/0) \cdot (\Gamma \overrightarrow{z_1}) = (\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_0}) \cdot (\Gamma \overrightarrow{z_1}) = \Gamma\dot{\alpha}.$$

7. En négligeant l'inertie du caisson, déterminer les efforts de la liaison 0′-1 au point A.

Solution: Si l'inertie du caisson est négligeable, le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0')\} = \{\mathcal{O}\}$ et le Principe Fondamental de la Dynamique implique alors que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à (1) coïncide avec le torseur nul $\{\mathcal{O}\}$. On a donc

$$\{\mathcal{A}_{0'\to 1}\} + \{\mathcal{A}_{2\to 1}\} = \{\mathcal{O}\}.$$

Or le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à (2) se traduit par

$$\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) \\ \vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \Gamma\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \{\mathcal{A}_{1\to 2}\}.$$

On a donc, d'après le principe de l'action et de la réaction :

$$\{\mathcal{A}_{0'\to 1}\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) - m\vec{g} \\ \vec{\delta}(\mathrm{C}_2 \in 2/0) - \Gamma\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}.$$

où la résultante et le moment dynamiques sont connus en tant que fonction du temps t.

FORMULAIRE : Matrice d'inertie du solide S au point A dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[J_\mathrm{S}(\mathrm{A})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \int_\mathrm{S}(y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} xy\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} xz\mathrm{d}m \\ -\int_\mathrm{S} xy\mathrm{d}m & \int_\mathrm{S}(x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} yz\mathrm{d}m \\ -\int_\mathrm{S} xz\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} yz\mathrm{d}m & \int_\mathrm{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, avec $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Moment cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \mathcal{J}_\mathrm{S}(\mathrm{A})[\vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R})]$$

où C est le centre de masse et $\mathcal{J}_\mathrm{S}(\mathrm{A})$ est l'opérateur d'inertie en A de S.

Moment dynamique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})\bigg|_{\mathcal{R}}.$$