
Vibration et Ondes (4AM03)
Examen du 2 mai 2016
Partie *Vibrations*
Durée 2h - Sans document ni calculatrice

---

1 Modèle discret d'un avion de ligne

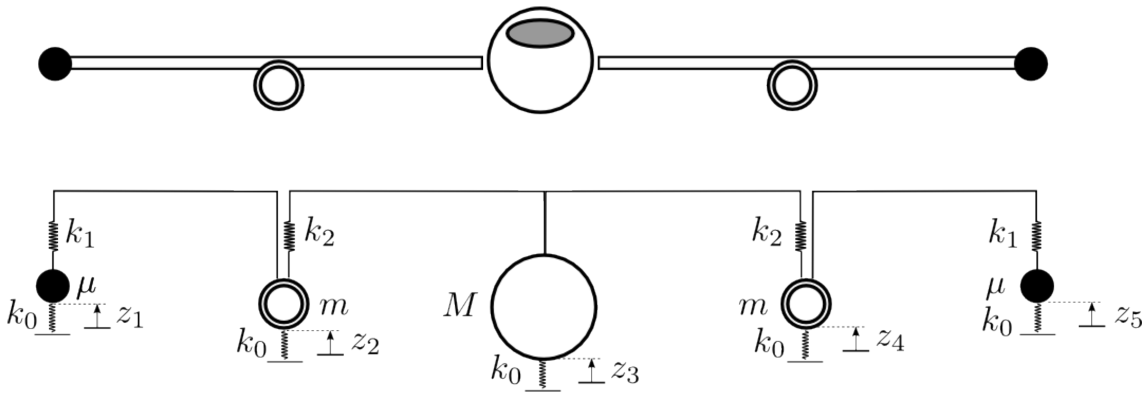


FIGURE 1 – Modèle de l'avion à 5 degrés de liberté

L'objectif du problème est de modéliser simplement les déformations dynamiques d'un avion de ligne dans le plan des ailes, celles-ci supportant chacune un turboréacteur.

Le modèle considéré comporte 5 éléments mobiles, comme représenté sur la figure 1 : la carlingue de masse M, les deux turboréacteurs, chacun de masse m et les extrémités libres des ailes modélisées chacune par une masse μ placée en bout d'aile. On néglige la masse des longueurs de liaison. On suppose que **leur déplacement est seulement vertical** et on note, de gauche à droite, les déplacements mesurés par rapport à leur position d'équilibre statique z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5. Le vecteur des coordonnées généralisées est noté $\mathbf{z}$.

1. Calculer l'énergie cinétique T de l'ensemble
2. En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$ du système.

Solution:

$$T = \frac{1}{2}\left(\mu(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_5^2) + m(\dot{z}_2^2 + \dot{z}_5^2) + M\dot{z}_3^2\right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Les mécanismes qui rappellent la structure à sa position d'équilibre sont de deux natures : l'action de l'écoulement de l'air et les raideurs de la structure.
Pour modéliser l'effort de rappel dû à l'écoulement de l'air, on affecte à chaque élément une raideur identique notée $k0$.
D'autre part, les raideurs des liaisons entre les différents éléments sont notées k_1 entre le réacteur et l'extrémité de l'aile et k_2 entre le réacteur et la carlingue.

3. Écrire l'énergie potentielle U du système.
4. Quelle est la matrice de raideur résultante $\mathbf{K}$?

Solution:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\left(k_1\left((z_1-z_2)^2+(z_4-z_5)^2\right)\right)+k_2\left((z_2-z_3)^2+(z_3-z_4)^2\right)+k_0(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}((k_0+k_1)z_1^2+(k_0+k_1+k_2)z_2^2+(k_0+2k_2)z_3^2+(k_0+k_1)z_5^2+(k_0+k_1+k_2)z_4^2 \\
&\qquad -2k_1z_1z_2-2k_2z_2z_3-2k_1z_4z_5-2k_2z_3z_4)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{K}=\begin{pmatrix}
k_0+k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\
-k_1 & k_0+k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\
0 & -k_2 & k_0+2k_2 & -k_2 & 0 \\
0 & 0 & -k_2 & k_0+k_1+k_2 & -k_1 \\
0 & 0 & 0 & -k_1 & k_0
\end{pmatrix}
$$

5. En l'absence d'amortissement, quelle équation matricielle décrit le mouvement libre du système ?
6. Que représentent les valeurs propres $\omega_i (i = 1, .., 5)$ de ce système d'équations ?
7. Que représentent les vecteurs propres associés notés Z_i ?
8. Écrire sous forme matricielle l'expression générale des mouvements libres de la structure. Définir les différents termes de cette expression.
9. Que faut-il connaître pour identifier complètement un mouvement libre particulier ?

Solution:

$$\mathbf{M\ddot{z}}+\mathbf{Kz}=\mathbf{0}$$

— les valeurs propres du système matriciel sont les pulsations naturelles de la structure. C'est à dire les fréquences auxquelles elle vibre naturellement lorsqu'elle est mise hors de son état d'équilibre statique.

— Les vecteurs propres sont les modes naturels de déformation de la structure. Ils décrivent les déformations de la structure en vibration libre. C'est une base de fonctions orthogonales

—
$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{Z}\cos(\omega t+\varphi)=\mathbf{A}\cos(\omega t)+\mathbf{B}\sin(\omega t)$$

Inconnues : le couple de vecteurs amplitudes, phases $(\mathbf{Z},\varphi)$, ou le couple de vecteurs d'amplitude $(\mathbf{A},\mathbf{B})$

On considère un système air/avion adimensionné tel que :

— $\mu = 1 \quad m = 100 \quad M = 10000$

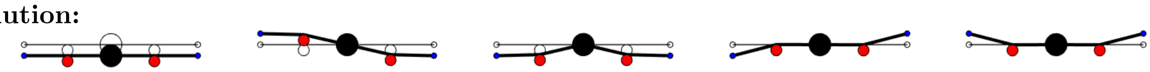
— $k_0 = 1 \quad k_1 = 1000 \quad k_2 = 10000$

La résolution numérique du système précédent donne les résultats suivants :

Mode	1	2	3	4	5
Fréquence propre (Hz)	0.003	1.58	1.59	5.06	5.06
Modes propres	$\mathbf{Z_1}$	$\mathbf{Z_2}$	$\mathbf{Z_3}$	$\mathbf{Z_4}$	$\mathbf{Z_5}$
	1	1	1	-1	1
	1	0.9	-0.9	0.01	-0.01
	1	0	0.02	0	0
	1	-0.9	-0.9	-0.01	-0.01
	1	-1	1	1	1

10. Représenter et commenter les 5 modes propres. Indiquer notamment les points de fragilité de la structure dans les différents modes.

Solution:



— Le mode 1 est très BF. Il est sans déformation. C'est un mouvement de corps rigide où seule la raideur de l'air est sollicitée. Toute la masse du système en revanche est mobilisée.

— Le mode 2 est un battement antisymétrique % à la verticale. Il sollicite les liaisons à gauche et à droite du réacteur.

— Le mode 3 est un battement symétrique % à la verticale. Il sollicite les liaisons à gauche et à droite du réacteur

— Le mode 4 est un battement antisymétrique % à la verticale. Il sollicite la liaison entre le bout d'aile et le réacteur

— Le mode 5 est un battement symétrique % à la verticale. Il sollicite la liaison entre le bout d'aile et le réacteur.

Les modes 2 et 3 ont la même fréquence propre ainsi que les modes 4 et 5. Dans les deux cas, la même masse est mise en mouvement et la même raideur totale est sollicitée.

Dans la suite, la matrice modale sera notée $\mathbf{Z}$, les coordonnées modales p_i et le vecteur des coordonnées modales $\mathbf{p}$.

A l'atterrissage on suppose que seule la partie centrale entre en contact avec le sol et que le choc peut être modélisé par un échelon de force noté $H(t)$ débutant au moment du contact.

11. Calculer la puissance des efforts extérieurs.
12. En déduire le vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$ en fonction des $H(t)$.

Solution:

$$\mathcal{P} = H(t)\dot{z}_3$$
$$\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Écrire l'équation matricielle du mouvement forcé dans l'espace physique.
14. Écrire la même équation découplée dans la base modale.

Solution:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M\ddot{z}} + \mathbf{Kz} = \mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{Z^T M Z \ddot{p}} + \mathbf{Z^T K Z p} = \mathbf{Z^T Q} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{\ddot{p}} + \mathbf{\Delta p} = \mathbf{M_p^{-1} Z^T Q} \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{\Delta}$ est la matrice diagonale des valeurs propres.
Les matrices $\mathbf{M_p}$ et $\mathbf{K_p}$ sont elles aussi diagonales.
La dernière équation matricielle est découplée.

On suppose qu'au moment du contact l'avion est à l'équilibre statique.

Étant donnée la forme de l'excitation, on fait appel à la transformée de Laplace. On rappelle les relations élémentaires, s étant la variable duale de t :

$$f(t) \longrightarrow \tilde{f}(s) \qquad \ddot{f}(t) \longrightarrow s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \qquad H(t) \longrightarrow 1 \qquad \sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Par ailleurs, on peut montrer que la matrice modale d'inertie est égale à la matrice identité : $\mathbf{M_p} = \mathbf{Z^T M Z} = \bar{\mathbf{1}}$

15. Écrire l'équation du mouvement en coordonnées modales dans l'espace de Laplace
16. On donne $(\mathbf{Z^T Q})^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'évolution temporelle des 5 modes après le contact.
17. Calculer l'expression correspondante du mouvement réel de la structure

Solution:

$$s^2\mathbf{p} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{Z^T Q}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{p} = (s^2 + \mathbf{\Delta})^{-1}\mathbf{Z^T Q}$$

Les modes 2, 4 et 5 ne sont pas mis en mouvement. Le point d'excitation est en effet un noeud de vibration pour ces modes. Par Laplace inverse on a l'évolution temporelle des modes 1 et 3 :

$$\tilde{p}_1(s) = \frac{-1}{s^2 + \omega_\mathbf{1}} \longrightarrow p_1(t) = -\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}$$
$$\tilde{p}_3(s) = \frac{0.02}{s^2 + \omega_\mathbf{3}} \longrightarrow p_3(t) = 0.02\frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3}$$

Le mouvement réel de la structure est donné par : $\mathbf{z} = \mathbf{Zp} = \begin{pmatrix} -p_1 - p_3 \\ -p_1 - 0.9p_3 \\ -p_1 + 0.02p_3 \\ -p_1 - 0.9p_3 \\ -p_1 - p_3 \end{pmatrix}$

2 Modèle continu de l'aile

On veut approcher le comportement vibratoire de l'aile par un modèle continu de poutre en flexion. La poutre modèle est de longueur L, de section rectangulaire constante S, de largeur $l \ll L$ et d'épaisseur $h \ll L$. On lui attribue un module d'Young homogène équivalent E et une masse volumique homogène équivalente ρ.

On notera x la position longitudinale, $v(x,t)$ le déplacement transverse local, $\theta(x,t)$ la rotation locale des sections, $T(x,t)$ l'effort tranchant local et $M(x,t)$ le moment fléchissant local.

1. Faire le bilan des forces et moments subits par une petite portion de longueur dx de la poutre.
2. En considérant les relations d'élasticité entre les efforts et les variables du mouvement, établir l'équation des ondes de flexion dans la poutre.

   On considère une solution à variables séparées en temps et en espace : $v(x,t) = \phi(t)X(x)$
3. Établir les équations différentielles portant sur t et x et rappeler leur solution générale. Donner les relations entre les constantes d'intégration ω et γ.

On considère la liaison de l'aile à la carlingue comme un encastrement et l'extrémité de l'aile libre de tout effort.

4. Écrire les conditions aux limites, préciser l'expression de $X(x)$ et établir l'équation de dispersion portant sur γ.
5. Tracer l'allure des 3 premiers modes de vibration de l'aile.

Pour évaluer l'influence de la masse M du réacteur situé en $x = L/3$ sur la fréquence fondamentale, on fait appel à la méthode de Rayleigh. La liaison aile/moteur est supposée rigide. Le premier mode de vibration de l'aile est assimilé à une fonction polynomiale $\chi(x)$.

6. Quelles conditions doit vérifier $\chi(x)$?
7. Écrire l'expression intégrale de l'énergie cinétique T de l'aile.
8. Écrire l'énergie cinétique T_M du moteur.
9. Écrire l'expression intégrale de l'énergie potentielle U de l'aile.
10. Quelle équation faut-il écrire ensuite pour obtenir une valeur approchée de la fréquence fondamentale ?