Théorie linéaire : plaques circulaires élastiques

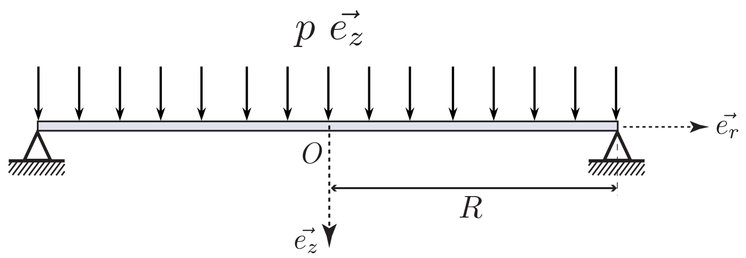
Exercice 1 :

On considère une plaque non pesante circulaire élastique (épaisseur h, rayon R) soumise à une force linéique p de compression dans son plan en $r = R$.

1. Quelle hypothèse peut-on faire sur la forme du champ de déplacement ?
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par u_r la composante radiale du déplacement.
3. Déterminer les solutions de cette équation sous la forme $u_r(r) = r^{\alpha}$
4. En déduire la solution complète du problème.

Exercice 2 :

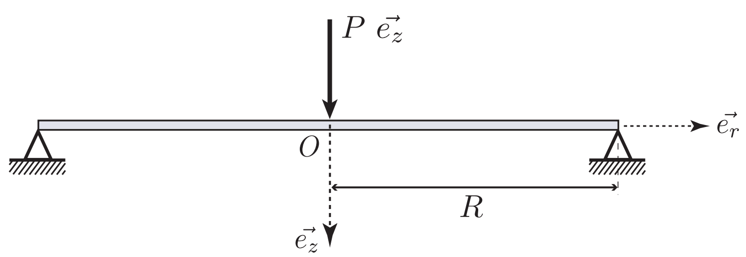
On considère une plaque non pesante circulaire élastique, de rayon R, obéissant à la **théorie de Love-Kirchhoff**, soumise à une force $\vec{p} = p\,\vec{e_z}$ uniforme par unité de surface. La plaque est simplement appuyée sur son pourtour $r = R$.



1. Donner la solution générale de l'équation des plaques en flexion $D\,\Delta\Delta w = p$.
2. Déterminer le déplacement vertical w en utilisant les conditions aux limites.

Exercice 3 :

On considère une plaque non pesante circulaire élastique, de rayon R, obéissant à la **théorie de Love-Kirchhoff**, soumise en son centre à une force ponctuelle $P\,\vec{e_z}$. La plaque est simplement appuyée sur son pourtour $r = R$.

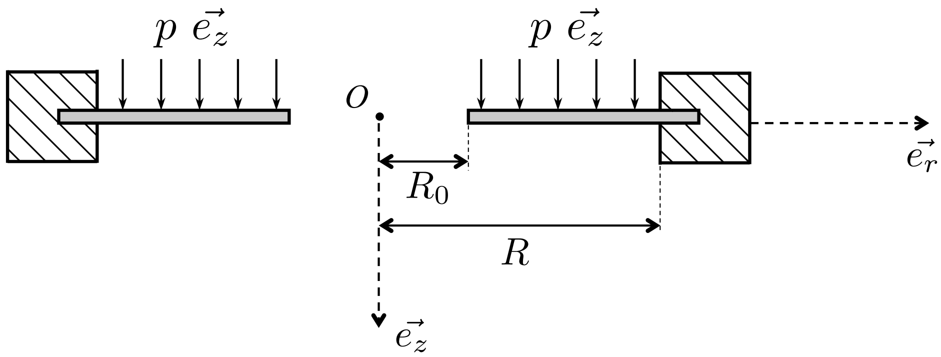


1. Donner la solution générale de l'équation des plaques en flexion [1].
2. Déterminer le déplacement vertical w en utilisant les conditions aux limites.

1. On peut utiliser la théorie des distributions en remarquant que pour notre exemple les efforts surfaciques normaux suivant $\vec{e_z}$ peuvent s'écrire sous la forme $p_z = P\delta$ où δ désigne la distribution de Dirac. On rappelle les propriétés suivantes : $\Delta(\ln r) = 2\pi\delta$ et $\Delta(r^2 \ln r) = 4(\ln r + 1)$.

Exercice 4 :

On considère une plaque circulaire trouée (plaque annulaire), de rayons intérieur R_0 et extérieur R, obéissant à la **théorie de Love-Kirchhoff**, soumise à une force p uniforme par unité de surface. Le bord intérieur est libre et le bord extérieur est encastré.



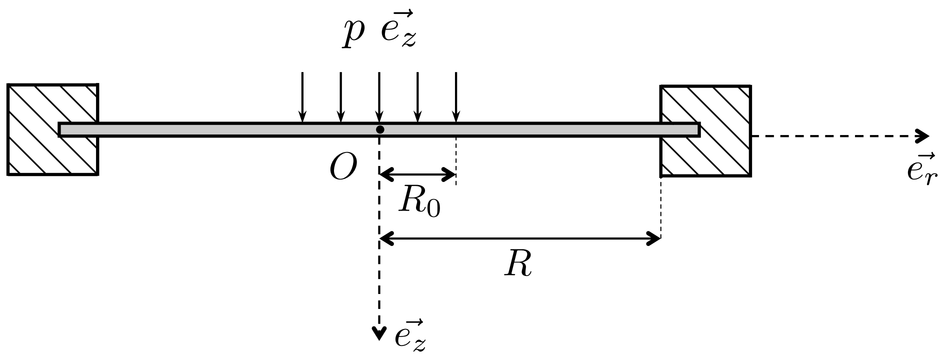
1. Donner la solution générale de l'équation des plaques en flexion $D\,\Delta\Delta w = p$.

2. Ecrire les équations reliant les constantes d'intégration du fait des conditions aux limites. *On ne demande pas de résoudre ces équations.*

3. Résoudre explicitement les équations liant les constantes d'intégration dans le cas où le rayon intérieur R_0 tend vers zéro (cas de la plaque non trouée).

Exercice Supplémentaire :

On considère une plaque non pesante circulaire élastique, de rayon R, obéissant à la **théorie de Love-Kirchhoff**, soumise à une force $\vec{p} = p\,\vec{e_z}$ uniforme par unité de surface sur la partie $r \leq R_0$. Le bord $r = R$ est encastré.



1. Montrer que le déplacement vertical w est de la forme :

$$w(r) = \begin{cases} w_1(r) = \dfrac{p\,r^4}{64D} + C_3 r^2 + C_4 \quad \text{pour} \quad r \leq R_0, \\ w_2(r) = \overline{C}_1 r^2 \ln r + \overline{C}_2 \ln r + \overline{C}_3 r^2 + \overline{C}_4 \quad \text{pour} \quad r \geq R_0. \end{cases} \tag{1}$$

avec D la rigidité à la flexion des plaques.

2. Ecrire les conditions aux limites en $r = R$.

3. Montrer qu'assurer la continuité en $r = R_0$ de w, $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$, μ_τ et T_{eff} revient à assurer la continuité des dérivées successives de w jusqu'à l'ordre 3.

Expliciter ces conditions de continuité.

4. En déduire $w_2(r)$ pour $r \geq R_0$ puis $w_1(r)$ pour $r \leq R_0$.

Rappels : Opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \Delta f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{u} = u_r\overrightarrow{e_r} + u_\theta\overrightarrow{e_\theta} + w\overrightarrow{e_z} \quad \text{alors} \quad \overline{\overline{\text{grad}}}\ \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{u} = \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \Delta u_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\text{Soit } \overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})} \quad \text{alors :}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{div}}\ \overline{\overline{A}}\right)_r = \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{div}}\ \overline{\overline{A}}\right)_\theta = \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{A_{r\theta} + A_{\theta r}}{r}$$