UPMC-Licence d'Ingénierie Mécanique **2018-2019**

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 19 Mars 2019

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Questions de cours.

1. Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels réels normés. Soit f une application linéaire de E dans F. Enoncez le théorème de caractérisation des applications linéaires et continues sur ces deux espaces vectoriels.
2. Rappeler la définition d'un espace de Hilbert. Donnez un exemple d'espace de Hilbert.
3. Enoncer le théorème de Riesz, en précisant bien toutes ses hypothèses.
4. Donner la définition de l'espace $L^2(]0,1[)$ et montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est dans $L^2(]0,1[)$.
5. Donner la défintion d'une dérivée faible pour une fonction $f \in L^2(]0,1[)$. Donnez un exemple d'une fonction de $L^2(]0,1[)$ qui n'a pas de dérivée faible.

Problème :

On considère le problème de transport de la chaleur dans une barre homogène, sur une distance finie. La température $u(x)$ vérifie le problème sans dimension suivant :

$$\textbf{(PC)} \quad \begin{cases} -u''(x) + \dfrac{u(x)}{2} = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ u'(0) = ku(0) \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où u', respectivement u'' sont les dérivées première et seconde de la fonction u, f est une fonction donnée telle que $f \in L^2(]0,1[)$ et $k \geq 0$ est une constante réelle positive, donnée aussi.

1. Rappeler la définition de l'espace $H^1(]0,1[)$.

2. L'espace $H^1(]0,1[)$ est muni de sa norme usuelle, définie par :

$$\forall v \in H^1(]0,1[) : \; \|v\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 v(x)^2 dx + \int_0^1 v'(x)^2 dx} \tag{2}$$

   Montrer qu'il existe une constante positive $C > 0$ telle que :

$$|v(1)| \leq C\|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1 \tag{3}$$

   Pour cela on utilisera la caractérisation des fonctions de $H^1(]0,1[)$:

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \quad v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)dt, \quad \forall x, y \in [0,1] \tag{4}$$

3. On désigne par V_0, l'ensemble défini par :

$$V_0 = \{v \in H^1(]0,1[)/v(1) = 0\}$$

   Montrer que V_0 est un sous espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$
4. L'espace V_0 est muni de la norme usuelle de $H^1(]0,1[)$. Montrer que $(V_0, \|\cdot\|_{H^1})$ est une espace de Hilbert.
5. Ecrire la formulation variationnelle **(PV)** associée au problème **(PC)** : on montrera que si u est solution du **(PC)** alors u est solution de :

$$\textbf{(PV)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ appartenant à } V_0, \text{ solution de :} \\ a(u,v) \; = \; L(v) \; , \; \forall v \in V_0 \end{cases} \tag{5}$$

$$a(u,v) \; = \int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)v(x)dx + ku(0)v(0), \tag{6}$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{7}$$

6. Montrer que $a(.\,,.)$ est une forme bilinéaire et symétrique.
7. Montrer que $a(.\,,.)$ est continue sur V_0. (Indication : On utilisera pour cela une inégalité analogue à (3).)
8. Rappeler la définition d'une application coercive et montrer que $a(.\,,.)$ est coercive sur V_0.
9. Montrer que $a(.\,,.)$ définit un produit scalaire sur $V_0 \times V_0$. Montrer que l'application $|u|_1 = \sqrt{a(v,v)}$ définit une norme sur V_0 (norme associée). Est-elle équivalente à la norme $\|v\|_{H^1}$?
10. Montrer que $L(.)$ est une forme linéaire et continue sur V_0.
11. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel **(PV)**. Précisez le résultat mathématique (théorème) que vous appliquez.