Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 13 décembre 2016

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donnez l'équation des droites caractéristiques associée à l'équation $u_x - 2u_y = 0$. Tracez quelques courbes caractéristiques. Comment la solution se comporte-t-elle le long de ces droites ?
2. Donnez un exemple d'équation aux dérivées partielles linéaire elliptique.
3. Expliquez la notion de stabilité de la solution du problème aux conditions initiales (problème de Cauchy) pour l'équation des ondes en une variable spatiale.
4. Soit $u(x,t) \in C^{1,2}([0,2]\times[0,1])$ la solution du problème à valeurs initiales et aux limites suivant :

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -u, \quad (t,x) \in [0,2]\times[0,1] \\ u(0,x) &= f(x), \quad x \in [0,1]\,, \\ u(t,0) &= g(t), \quad u(t,1) = h(t), \quad t \in [0,2]\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   Supposons que $f(x) \leq 0$, pour $x \in [0,1]$ et que $g(t) \leq 0, h(t) \leq 0$ pour $t \in [0,2]$. Montrez que $u(t,x) \leq 0$,$\forall (t,x) \in [0,2]\times[0,1]$.
5. Soit $u(x,t) = e^{-9t}\sin(3x)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$. En se basant sur le comportement de la fonction $u(x,t)$ et sans vérification directe, décidez si u peut être solution de l'équation des ondes ou de l'équation de diffusion. Justifiez la réponse.
6. Soit $f(x)$ une donnée initiale pour un problème de Dirichlet définie pour $x \in [0,l]$ par : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$. Donner l'expression des coefficients de Fourier A_n.
7. Enoncez le principe de maximum pour une fonction harmonique.

Exercice 1

Soit le problème aux conditions initiales et aux limites suivant :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x), \ u_t(x,0) = \frac{1}{4}\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(3\pi x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned} \tag{2}$$

On cherche la solution de ce système par la méthode de séparation des variables : $u(x,t) = X(x)T(t)$.
i) De quelle équation de la mécanique s'agit-t-il ?
ii) Déterminer les fonctions propres $X(x)$ en envisageant tous les cas possibles pour la constante de séparation λ : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.
ii) Déterminer la solution u(x, t) qui vérifie les conditions aux limites et initiales.
iii) Sans effectuer de calculs, expliquer comment change la solution si on impose des conditions aux limites de type Dirichlet.

Exercice 2

Soit une tige mince de longueur l placée le long de l'axe des x avec une extrémité à l'origine. La

température de la première moitié de la tige est soudainement augmentée à une température constante $T_0 > 0$ tout en gardant les deux extrémités de la tige à température zéro. On considère cet état comme l'état initial à $t = 0$.
i) Donner l'équation de la physique mathématique qui modélise ce problème.
ii) Donner les conditions limites et la condition initiale du problème.
iii) Montrer, par la méthode de séparation des variables, que la distribution de la température pour un temps $t > 0, \forall x \in [0, l]$ est :

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$$

Exercice 3
Soit l'équation de Laplace en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

définie sur un domaine $D = \{(r, \theta), r \leqslant 1\}$.
Trouver la température dans ce disque fin de métal, de rayon 1 sachant que la température sur la frontière est donnée par :

$$u(1, \theta) = 1 + \cos(2\theta) - 2\cos(3\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Exercice 4 (Bonus)
Démontrer l'unicité de la solution de l'équation de la diffusion avec des conditions aux frontières de type Neumann :

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= f(x,t), \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u_x(0,t) &= g(t), \quad u_x(l,t) = h(t), \end{aligned}$$

par la méthode de l'énergie.