

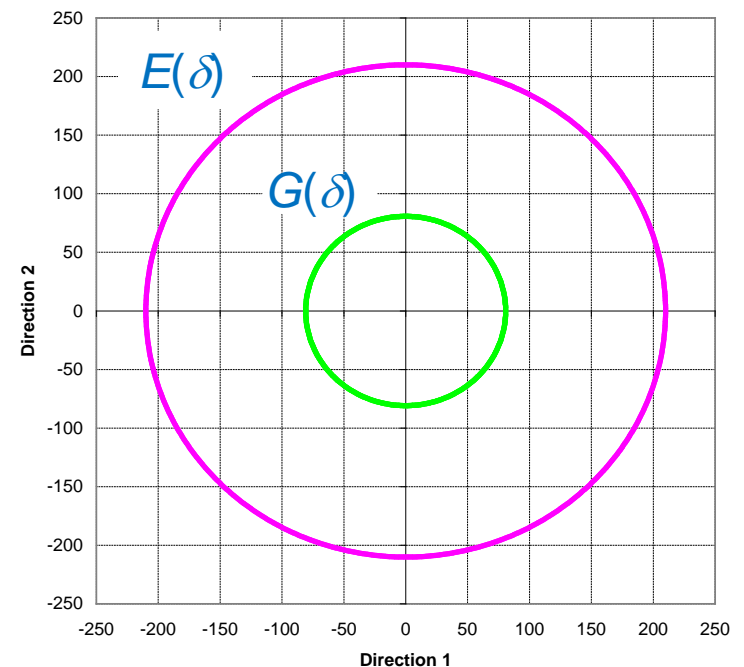
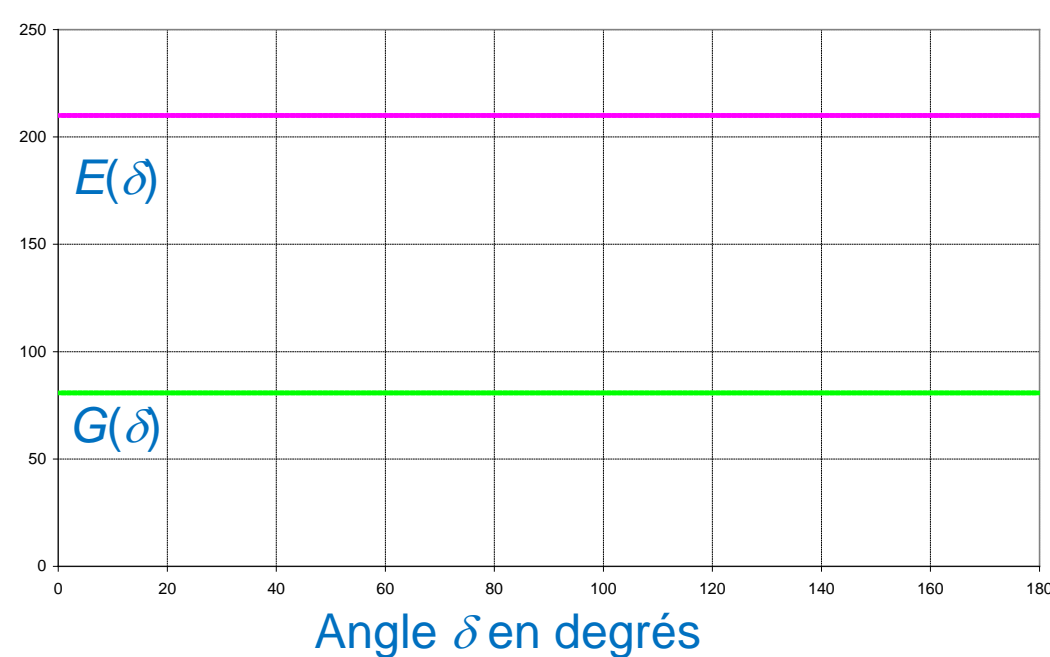
# Introduction : élasticité linéaire isotrope

**Isotropie** : du grec *iso* (égal) et *tropos* (tour, tourner)  
comportement égal dans toutes les directions

**Exemple : acier**

$$E = 210 \text{ GPa et } \nu = 0.3 \quad \longleftrightarrow \quad \lambda \approx 121,2 \text{ GPa et } \mu \approx 80,8 \text{ GPa}$$

Eprouvettes découpées d'une plaque d'acier selon différentes directions  $\delta$



# Introduction : élasticité linéaire anisotrope

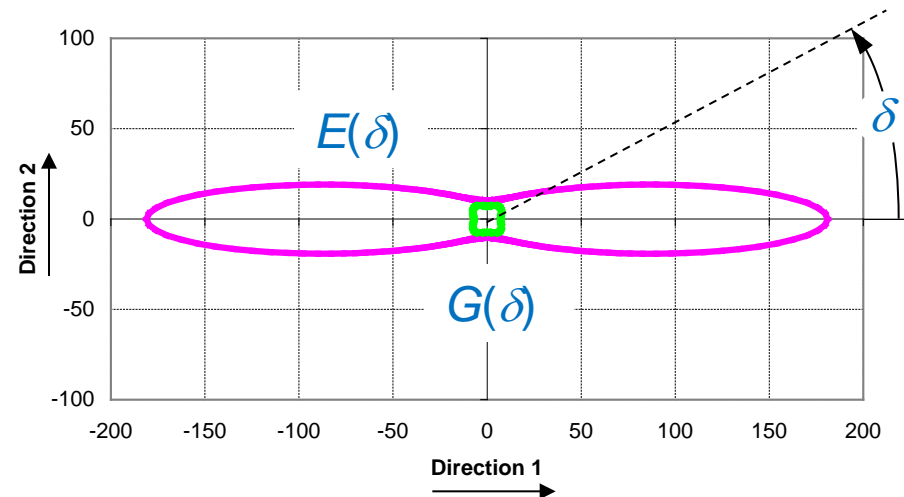
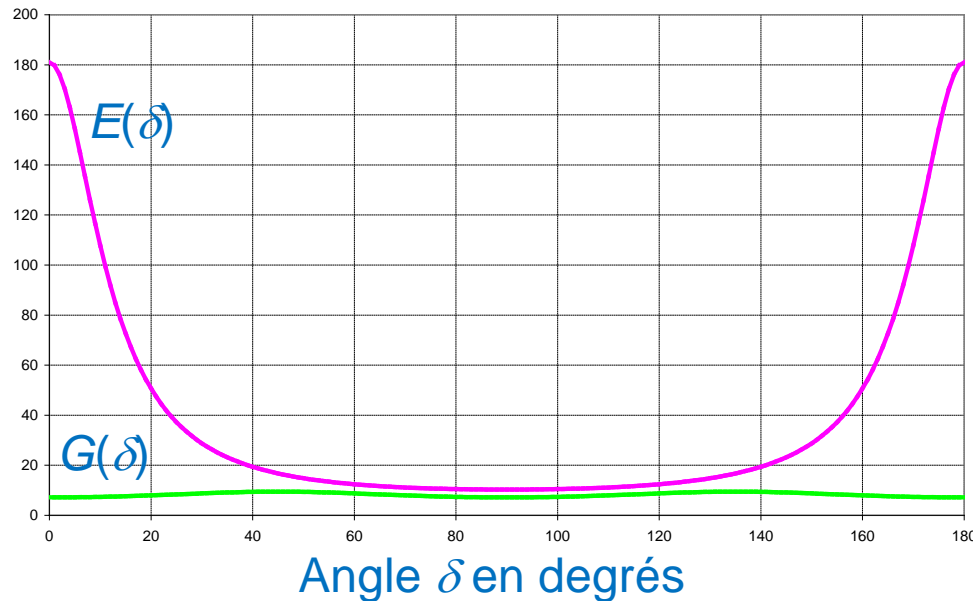
**Anisotropie** : du grec *a* (préfixe privatif : absence de), *iso* (égal) et *tropos* (tour, tourner)

comportement non égal dans toutes les directions

**Exemple 1 : composite résine époxyde + fibres de carbone UD**

$$E_1 = 181 \text{ GPa} , E_2 = 10.3 \text{ GPa} , G_{12} = 7.17 \text{ GPa} \text{ et } \nu_{12} = 0.28$$

Eprouvettes découpées d'une couche UD carbone/époxyde selon directions  $\delta$



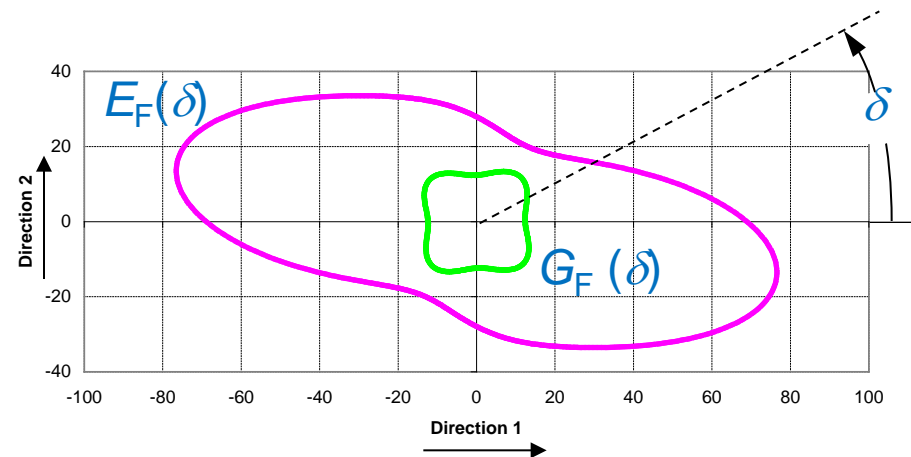
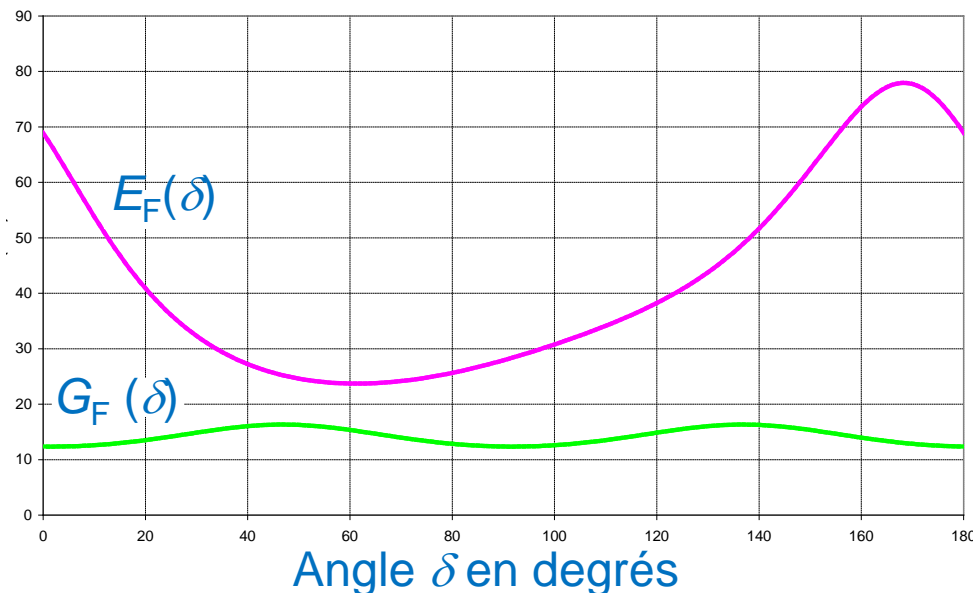
# Introduction : élasticité linéaire anisotrope

**Exemple 2 : stratifié composite constitué de 8 couches UD carbone/époxyde orientées selon les angles  $[0/80/50/40/30/-20/-30/-40]$**

Modules de flexion :

$$E_1 = 68.9 \text{ GPa}, E_2 = 27.9 \text{ GPa}, G_{12} = 12.4 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.38, \eta_{121} = 0.57, \eta_{112} = 0.27$$

Eprouvettes découpées de la plaque stratifiée selon différentes directions  $\delta$  :



# Introduction : élasticité anisotrope

- Comportement variable en fonction de la direction de sollicitation
- Perte de symétrie : différentes formes de variation
- Représentation de plus en plus complexe : pour les cas plans considérés
  - 2 paramètres pour l'acier (isotrope)
  - 4 pour le carbone/époxyde UD (orthotrope)
  - 6 paramètres pour le stratifié donné en exemple (anisotrope)et les choses deviennent encore plus compliquées en 3D !!!



## **1. Représentation de tenseurs : vecteurs (ordre 1) et tenseurs de deuxième ordre (contraintes, déformations)**

- i.* Composantes cartésiennes et changement de repère
- ii.* Autres représentations : représentation polaire

## **2. Elasticité 3D et 2D : propriétés, représentation, symétries**

- i.* Propriétés
- ii.* Représentation et symétries

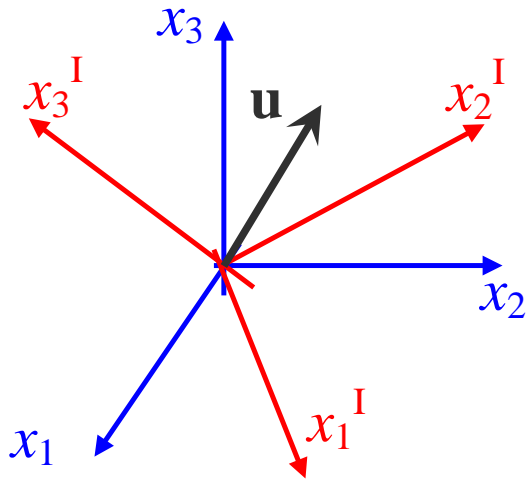
# Représentation cartésienne des vecteurs

**Exemple** : champ de déplacements  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}(x,y,z)$

**Représentation cartésienne :**

repères  $(x_1, x_2, x_3)$  de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

et  $(x_1^I, x_2^I, x_3^I)$  de base  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)$



$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \\ u_3^I \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)}$$

**Changement de repère :**

passage de la représentation dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  à la nouvelle base  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)$

**Position relative des repères :**

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= [l_i, m_i, n_i]^t_{(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)} = \\ &= l_i \mathbf{e}_1^I + m_i \mathbf{e}_2^I + n_i \mathbf{e}_3^I \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

**Représentation du vecteur  $\mathbf{u}$**

(3 composantes indépendantes) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \\ &= u_1^I \mathbf{e}_1^I + u_2^I \mathbf{e}_2^I + u_3^I \mathbf{e}_3^I \end{aligned}$$

# Représentation cartésienne des vecteurs

**Changement de repère en représentation cartésienne :**  
passage de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  à la nouvelle base  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \\ &= u_1(l_1 \mathbf{e}_1^I + m_1 \mathbf{e}_2^I + n_1 \mathbf{e}_3^I) + u_2(l_2 \mathbf{e}_1^I + m_2 \mathbf{e}_2^I + n_2 \mathbf{e}_3^I) + u_3(l_3 \mathbf{e}_1^I + m_3 \mathbf{e}_2^I + n_3 \mathbf{e}_3^I) = \\ &= (u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3) \mathbf{e}_1^I + (u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3) \mathbf{e}_2^I + (u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3) \mathbf{e}_3^I = \\ &= u_1^I \mathbf{e}_1^I + u_2^I \mathbf{e}_2^I + u_3^I \mathbf{e}_3^I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_1^I &= u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3 \\ u_2^I &= u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3 \\ u_3^I &= u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3\end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \\ u_3^I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de passage } [\mathbf{R}]} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Matrice  $[\mathbf{R}]$  des cosinus directeurs de la base d'origine :  
matrice orthogonale  $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^t$

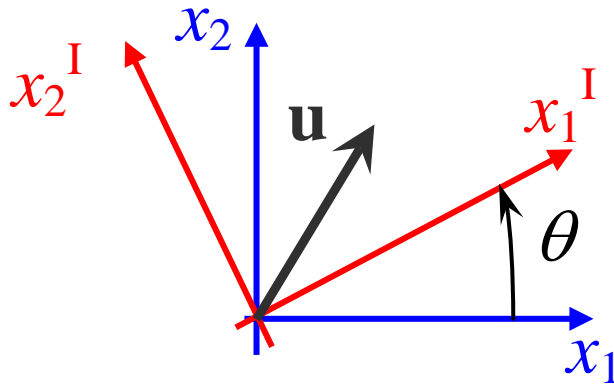
(Remarque : géométriquement  $[\mathbf{R}]$  représente la rotation de la nouvelle base vers celle d'origine)

# Représentation cartésienne des vecteurs en 2D

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I)} \quad \text{(2 composantes indépendantes)}$$

**Changement de repère pour un vecteur dans le plan :**

nouveau repère  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I)$  tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$



Matrice de passage  $[\mathbf{R}]_{2D}$  :

$$[\mathbf{R}]_{2D} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



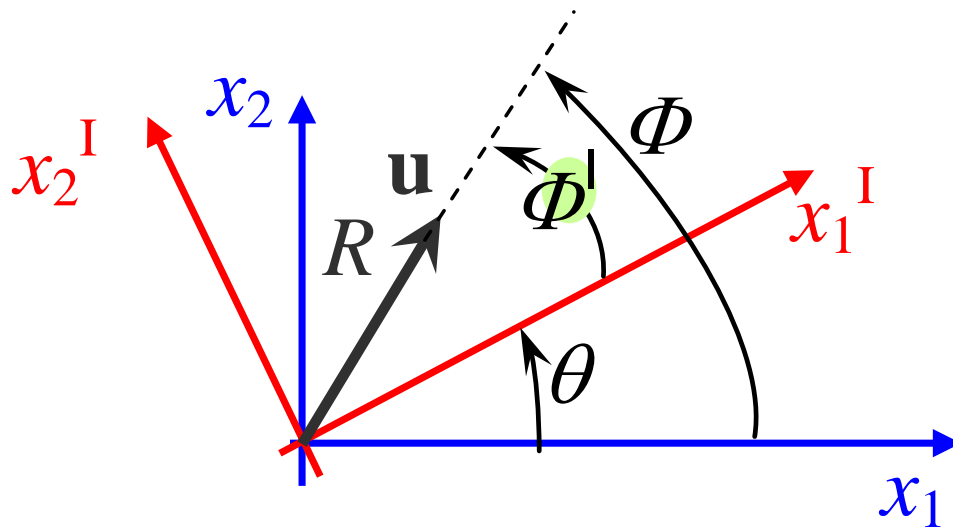
$$[\mathbf{u}]^I = [\mathbf{R}]_{2D} [\mathbf{u}] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} u_1^I &= u_1 l_1 + u_2 l_2 = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \\ u_2^I &= u_1 m_1 + u_2 m_2 = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \end{aligned}$$

# Représentation polaire des vecteurs en 2D

**Composantes polaires d'un vecteur  $\mathbf{u}$  dans le plan :**  
module  $R = \text{norme } \|\mathbf{u}\|$  du vecteur, et angle de phase  $\Phi$   
(2 composantes indépendantes)

$$R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{et} \quad \tan \Phi = \frac{u_2}{u_1}$$

Le module  $R$  est invariant, alors que l'angle  $\Phi$  dépend des axes de référence



**Loi de changement de repère en représentation polaire :**

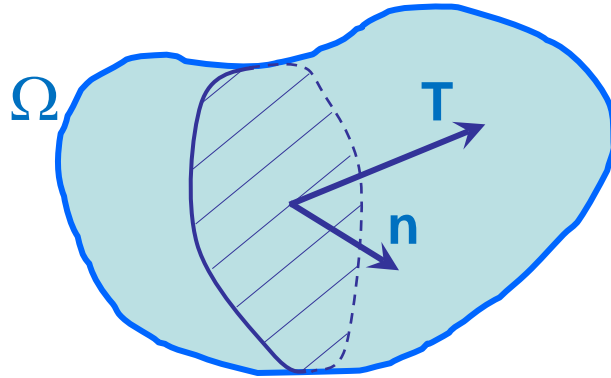
$$\Phi^I = \Phi - \theta$$

Remarque : comme pour la loi exprimée en représentation cartésienne, cette expression correspond géométriquement à la rotation d'angle  $-\theta$ , qui porte la nouvelle base vers la base d'origine



# Représentation des tenseurs d'ordre 2 en 3D

**Exemple** : contraintes de Cauchy  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(x,y,z)$



Signification physique dans la définition du vecteur contraintes ( $\mathbf{n}$  est le vecteur normal définissant la surface) :  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{n}$

**Représentation cartésienne de  $\sigma$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  :**

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$



$$[\mathbf{T}] = [\sigma][\mathbf{n}]$$

Tenseur  $\sigma$  symétrique : 6 composantes indépendantes  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )

# Représentation des tenseurs d'ordre 2 en 3D

**Changement de repère : passage de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  à la base  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)$**

On cherche les composantes  $\sigma_{ij}^I$  dans la base  $(\mathbf{e}_1^I, \mathbf{e}_2^I, \mathbf{e}_3^I)$  telles que :

$$\begin{bmatrix} T_1^I \\ T_2^I \\ T_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^I & \sigma_{12}^I & \sigma_{13}^I \\ \sigma_{12}^I & \sigma_{22}^I & \sigma_{23}^I \\ \sigma_{13}^I & \sigma_{23}^I & \sigma_{33}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^I \\ n_2^I \\ n_3^I \end{bmatrix} \iff [\mathbf{T}]^I = [\boldsymbol{\sigma}]^I [\mathbf{n}]^I$$

La loi de passage pour les vecteurs :  $[\mathbf{T}]^I = [\mathbf{R}][\mathbf{T}]$ , et :  $[\mathbf{n}] = [\mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{n}]^I = [\mathbf{R}]^t[\mathbf{n}]^I$

d'où : 
$$[\mathbf{T}]^I = [\mathbf{R}][\mathbf{T}] = [\mathbf{R}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{n}] = [\mathbf{R}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]^t[\mathbf{n}]^I$$



**Loi de changement de repère pour les tenseurs d'ordre 2  
(représentation cartésienne) :**

$$[\boldsymbol{\sigma}]^I = [\mathbf{R}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{R}]^t$$

# Représentation des tenseurs d'ordre 2 en 3D

**Cas du tenseur des déformations :**  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\mathbf{u}} + \nabla^t \underline{\mathbf{u}})$

les règles de représentation cartésienne et de changement de repère sont les mêmes que pour le tenseur des contraintes  $\sigma$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}]^I = [\mathbf{R}][\underline{\underline{\varepsilon}}][\mathbf{R}]^t$$

D'où l'on déduit :

$$\varepsilon_{11}^I = \varepsilon_{11}l_1^2 + \varepsilon_{22}l_2^2 + \varepsilon_{33}l_3^2 + 2\varepsilon_{12}l_1l_2 + 2\varepsilon_{13}l_1l_3 + 2\varepsilon_{23}l_2l_3$$

.....

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^I &= \varepsilon_{11}l_1m_1 + \varepsilon_{22}l_2m_2 + \varepsilon_{33}l_3m_3 + \dots \\ &\dots + \varepsilon_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + \varepsilon_{13}(l_1m_3 + l_3m_1) + \varepsilon_{23}(l_2m_3 + l_3m_2) \\ &\dots\end{aligned}$$

# Représentation des tenseurs d'ordre 2 en 2D

**Tenseurs de contraintes et des déformations dans le plan**  
(cas des modélisation plane en contraintes planes ou déformations planes)

$$\boldsymbol{\sigma}_{2D} = [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{2D} = [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$$

(3 composantes indépendantes)

**Loi de changement de repère pour les tenseurs du second ordre dans le plan (représentation cartésienne) :**

$$[\boldsymbol{\sigma}]^I = [\mathbf{R}]_{2D} [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{R}]_{2D}^t \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\varepsilon}]^I = [\mathbf{R}]_{2D} [\boldsymbol{\varepsilon}] [\mathbf{R}]_{2D}^t$$

Par exemple, pour le tenseur  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^I &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta \\ \sigma_{22}^I &= \sigma_{11} \sin^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta \\ \sigma_{12}^I &= -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos \theta \sin \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

# Représentation polaire 2D des tenseurs d'ordre 2

**Composantes polaires du tenseur  $\sigma$  dans le plan :**

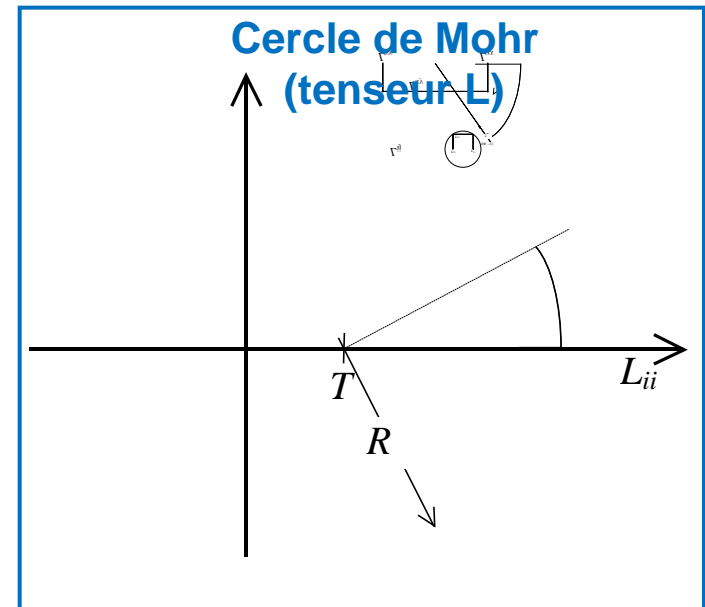
scalaire  $T$ , module  $R$  et angle de phase  $\Phi$  (3 composantes indépendantes)

$$\begin{aligned} 2T &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ 2Re^{2i\Phi} &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= T + R\cos 2\Phi \\ \sigma_{22} &= T - R\cos 2\Phi \\ \sigma_{12} &= R\sin 2\Phi \end{aligned}$$

Le scalaire  $T$  et le module  $R$  sont invariants ; l'angle  $\Phi$  dépend du référentiel

**Loi de changement de repère en représentation polaire :**

$$\Phi^I = \Phi - \theta$$



# Notation de Voigt de contraintes et déformations

**Notation des tenseurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  représentés par leurs composantes cartésiennes sous forme de vecteurs "colonne"  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$**   
(notation de Voigt ou notation de l'ingénieur)

(en 3D)

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

(en 2D)

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

**Expression de la loi cartésienne de changement de repère en notation de Voigt ?**

# Changement de repère en notation de Voigt

- Matrices  $[\mathbf{T}_\sigma]$  et  $[\mathbf{T}_\varepsilon]$  représentant le passage du vecteur  $\{\sigma\}$  à  $\{\sigma^I\}$  et du vecteur  $\{\varepsilon\}$  à  $\{\varepsilon^I\}$ , respectivement, et exprimant la loi de changement de repère donnée aux pp. 12-14 pour les tenseurs d'ordre 2 :  $\{\sigma^I\} = [\mathbf{T}_\sigma]\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon^I\} = [\mathbf{T}_\varepsilon]\{\varepsilon\}$
- Différence entre  $[\mathbf{T}_\sigma]$  et  $[\mathbf{T}_\varepsilon]$  due au coefficient '2' qui apparaît devant les composantes mixtes de déformation en notation de Voigt

De la formule de la page 13, on obtient tout de suite :

$$[\mathbf{T}_\sigma] = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_1l_3 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_1m_3 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 2n_1n_2 \\ \dots & & & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & (l_2m_3 + l_3m_2) & (l_1m_3 + l_3m_1) & (l_1m_2 + l_2m_1) \end{bmatrix}$$

# Changement de repère en notation de Voigt

Matrice  $[\mathbf{T}_\sigma]$  pour la transformation de repère correspondante à une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox_3$

$$[\mathbf{T}_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}$$

où :  $c = \cos \theta$  , et :  $s = \sin \theta$  .

La matrice  $[\mathbf{T}_\sigma]^{-1}$  représentant la transformation inverse est simplement obtenue de  $[\mathbf{T}_\sigma]$  en remplaçant  $\theta$  par  $-\theta$



# Changement de repère en notation de Voigt

Matrice  $[\mathbf{T}_\varepsilon]$ . A partir de la formule de page 13 et en tenant compte de la notation de Voigt pour les déformations, on a :

$$[\mathbf{T}_\varepsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_2 l_3 & l_1 l_3 & l_1 l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_2 m_3 & m_1 m_3 & m_1 m_2 \\ n_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & n_1 n_2 \\ \dots & & & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ 2l_1 m_1 & 2l_2 m_2 & 2l_3 m_3 & (l_2 m_3 + l_3 m_2) & (l_1 m_3 + l_3 m_1) & (l_1 m_2 + l_2 m_1) \end{bmatrix}$$

En particulier pour une rotation de repère d'angle  $\theta$  autour de  $Ox_3$  ( $c = \cos \theta$  , et :  $s = \sin \theta$ ) :

$$[\mathbf{T}_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}$$

**Remarque** : comme pour  $[\mathbf{T}_\sigma]$ , aussi l'inverse de  $[\mathbf{T}_\varepsilon]$  est obtenue simplement en remplaçant  $\theta$  par  $-\theta$

# Loi de comportement elastique linéaire

et

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} & \longleftrightarrow & \boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , (i, j, k, l = 1, 2, 3)} \\ \boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}} & \longleftrightarrow & \boxed{\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} , (i, j, k, l = 1, 2, 3)} \end{array}$$

- $\mathbf{C}$  = rigidité et  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$  souplesse, tenseurs d'ordre 4 (81 composantes !!!)
- Propriétés naturelles de symétrie des tenseurs de l'élasticité  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$

des symétries de  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ( $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ ), symétrie mineure :  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$

étant  $dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{kl}$  un différentiel exact, symétrie majeure :  $C_{ijkl} = C_{klij}$

➡ seulement (!!!) 21 composantes indépendantes

- Composantes  $C_{ijkl}$  et  $S_{ijkl}$  : composantes cartésiennes dans le repère  $Ox_1x_2x_3$  de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
- Représentation de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  par leurs composantes cartésiennes en notation de Voigt : matrices  $[\mathbf{C}]$  et  $[\mathbf{S}]$

# Représentation cartésienne matricielle de $\mathbf{C}$

Notation de Voigt de contraintes et déformations  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  (base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ )

Rigidité  $\mathbf{C}$  et souplesse  $\mathbf{S}$  : opérateurs linéaires, représentés par les matrices  $[\mathbf{C}]$  et  $[\mathbf{S}]$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{C}]\{\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\}$$

avec :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & \dots & \dots & \dots \\ & & & C_{2323} & \dots & \dots \\ & & & & C_{1313} & \dots \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & \dots & \dots & \dots \\ & & & C_{44} & \dots & \dots \\ & & & & C_{55} & \dots \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

SYM.                      SYM.

On retrouve les 21 composantes indépendantes.

La même notation existe pour  $[\mathbf{S}]$ , étant :  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{C}]^{-1}$

# Changement de repère (notation de Voigt)

On a donné les lois de changement de repère pour  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  en notation de Voigt :

$$\{\sigma^I\} = [\mathbf{T}_\sigma]\{\sigma\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon^I\} = [\mathbf{T}_\varepsilon]\{\varepsilon\}$$

De plus, dans les deux bases :  $\{\sigma\} = [\mathbf{C}]\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma^I\} = [\mathbf{C}^I]\{\varepsilon^I\}$ . Alors :

$$\{\sigma^I\} = [\mathbf{T}_\sigma]\{\sigma\} = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}]\{\varepsilon\} = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon^I\} = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\varepsilon]^t\{\varepsilon^I\}$$



$$[\mathbf{C}]^I = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\varepsilon]^{-1} = [\mathbf{T}_\sigma][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\varepsilon]^t$$

Relations de transformation des composantes  $C_{ijkl}$  de forme très complexes : fonctions d'ordre 4 des cosinus directeurs  $l_i, m_i, n_i$  !!!

**Passage au plan (2D) ? Invariants polaires ?**

# Symétries élastiques matérielles

La forme plus générale de comportement élastique prévoit une description par 21 paramètres indépendants : matériau "totalement anisotrope" ou **matériau triclinique**

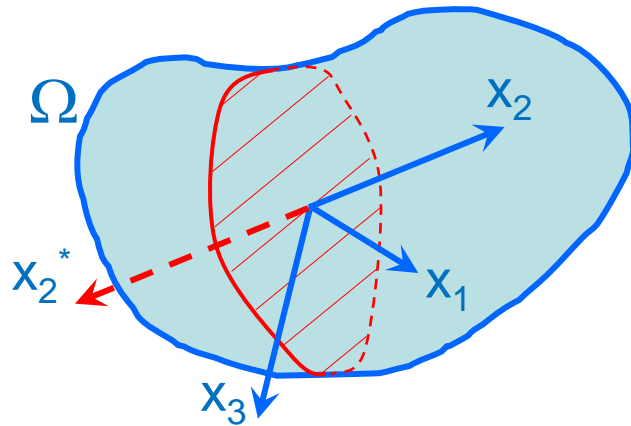
Mais, en général, il est possible d'identifier des symétries dans la structure même du matériau (réseau cristallin, architecture des renforts, directions de l'avancement, etc.) qui se reflètent dans le comportement.

De cette manière, on identifie des matériaux de classe de symétrie élastique d'ordre de plus en plus élevé :

- ♦ matériau **monoclinique** : un plan de symétrie miroir
- ♦ matériau **orthotrope** : deux plans de symétrie miroir
- ♦ matériau **isotrope transverse** : invariance de propriétés dans un plan
- ♦ matériau **isotrope** : invariance de propriétés dans toutes les directions

# Symétries élastiques : matériau monoclinique

Il existe un plan de symétrie miroir pour les propriétés matériau :



invariance des propriétés en passant du repère  $Ox_1x_2x_3$  au repère  $Ox_1x_2^*x_3$ , avec :

$$\mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2$$

Cela implique que toutes les grandeurs physiques  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{C}$  ont exactement les mêmes composantes cartésiennes si représentées dans l'un de deux repères  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ou  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$

Matrice  $[\mathbf{R}]$  de passage :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transformation  
de  $\mathbf{C}$



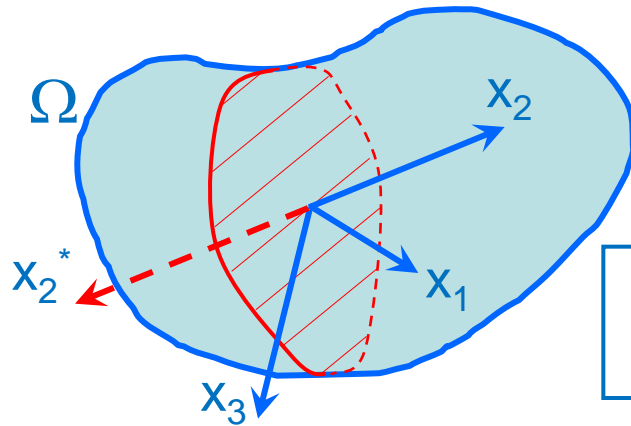
$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{ijkl}^* = C_{ijkl} & \text{si } i,j,k,l = 1 \text{ ou } 3 \\ & \text{ou si répétition paire d'indice } 2 \\ C_{ijkl}^* = -C_{ijkl} & \text{si répétition} \\ & \text{impaire d'indice } 2 \end{array} \right.$$



Composantes  $C_{ijkl}$  avec répétition impaire d'indice 2 sont nulles

# Symétries élastiques : matériau monoclinique

Plan de symétrie miroir pour les propriétés matériau  $Ox_1x_3$  :



invariance des propriétés en passant du repère  $Ox_1x_2x_3$  au repère  $Ox_1x_2^*x_3$ , avec :  
 $\mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2$

Forme de  $[\mathbf{C}]$  pour un matériau monoclinique  
 (dans un repère t.q.  $Ox_1x_3$  est plan de symétrie)

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & C_{1113} & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & C_{2213} & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & C_{3313} & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & C_{2312} \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{46} \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

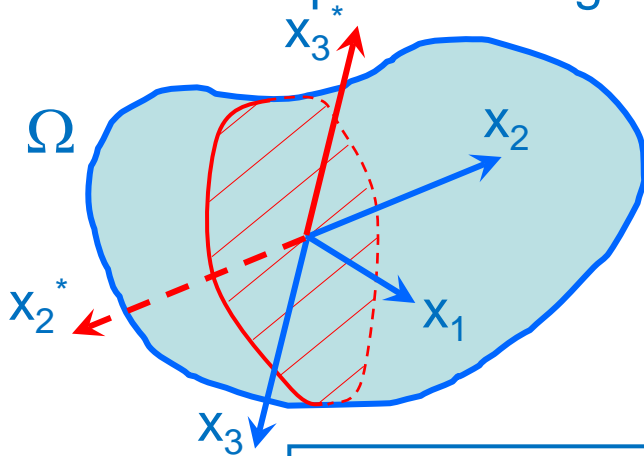
SYM.



13 composantes  $C_{ijkl}$  indépendantes

# Symétries élastiques : matériau orthotrope

Il existe deux plans orthogonaux de symétrie miroir ( $\Rightarrow$  3 plans orthogonaux) :



par exemple,  $Ox_1x_3$  et  $Ox_1x_2$

invariance des propriétés en changeant :

$$\mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_2 \text{ et/ou } \mathbf{e}_3^* = -\mathbf{e}_3$$

En partant des résultats pour le monoclinique, et en répétant le même raisonnement pour l'autre plan de symétrie :

Composantes  $C_{ijkl}$  avec répétition impaire d'indice 3 sont nulles

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

SYM.                      SYM.

9 composantes  $C_{ijkl}$  indépendantes



# Symétries élastiques : matériau orthotrope

Même forme pour la matrice  $[S]$  :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

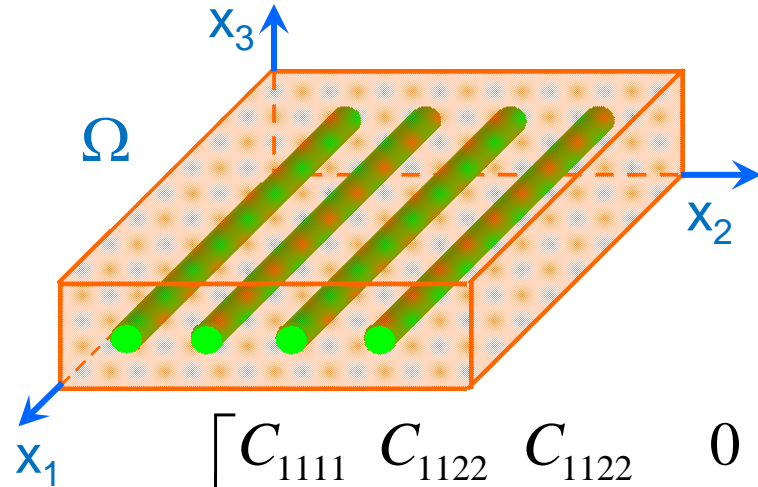
SYM.

Modules et coefficients de l'ingénieur : 9 paramètres indépendants  
(signification physique des constantes de l'ingénieur)

6 essais de mesure distincts pour l'identification des ces modules

# Symétries élastiques : isotropie transverse

Les propriétés matériau sont **invariantes par rotation autour d'un axe**,  
par exemple  $Ox_1$  (cas des composites UD)



Indices 2 et 3 interchangeables  
pour les composantes  $C_{ijkl}$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1212} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{22} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

SYM.

avec :  $C_{22} = C_{23} + 2C_{44}$

5 composantes  $C_{ijkl}$  indépendantes

# Symétries élastiques : isotropie transverse

Même forme pour la matrice  $[S]$  :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

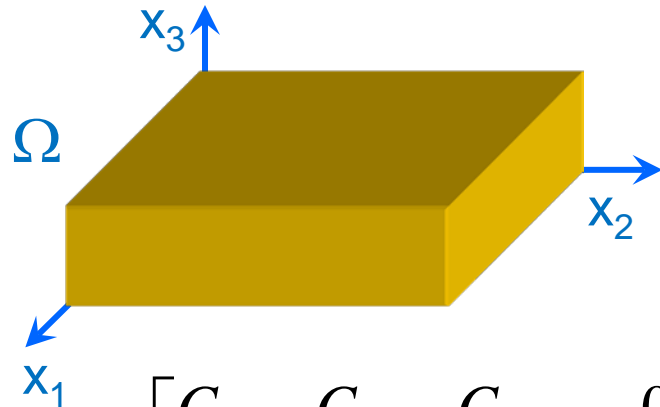
avec :  $G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$

Modules de l'ingénieur : 5 paramètres indépendants

4 essais de mesure distincts pour l'identification des ces modules

# Symétries élastiques : isotropie

Les propriétés matériau sont **invariantes par rapport à la direction** de sollicitation, et donc par rapport au choix des axes de référence.



Indices 1, 2 et 3 interchangeables  
pour les composantes  $C_{ijkl}$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1212} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{66} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

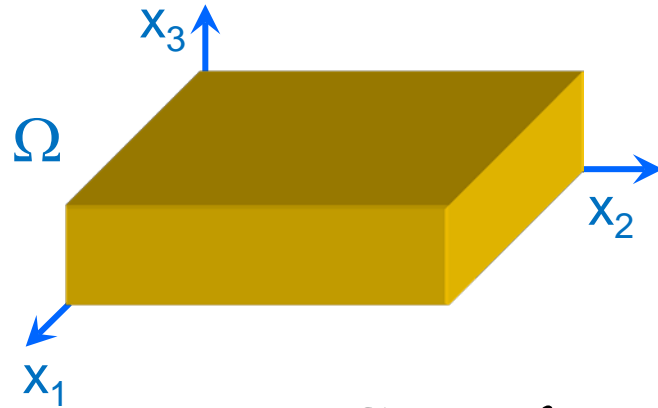
SYM.                      SYM.

avec :  $C_{11} = C_{12} + 2C_{66}$



2 composantes  $C_{ijkl}$  indépendantes

# Symétries élastiques : isotropie



Relations entre composantes  $C_{ijkl}$ , constantes de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et modules de l'ingénieur  $E$  et  $\nu$  pour un matériau isotrope.

$$C_{12} = \lambda \quad \text{et :} \quad 2C_{66} = C_{11} - C_{12} = \mu$$

$$\text{d'où :} \quad C_{11} = \lambda + 2\mu$$

Et encore en termes des modules de l'ingénieur :

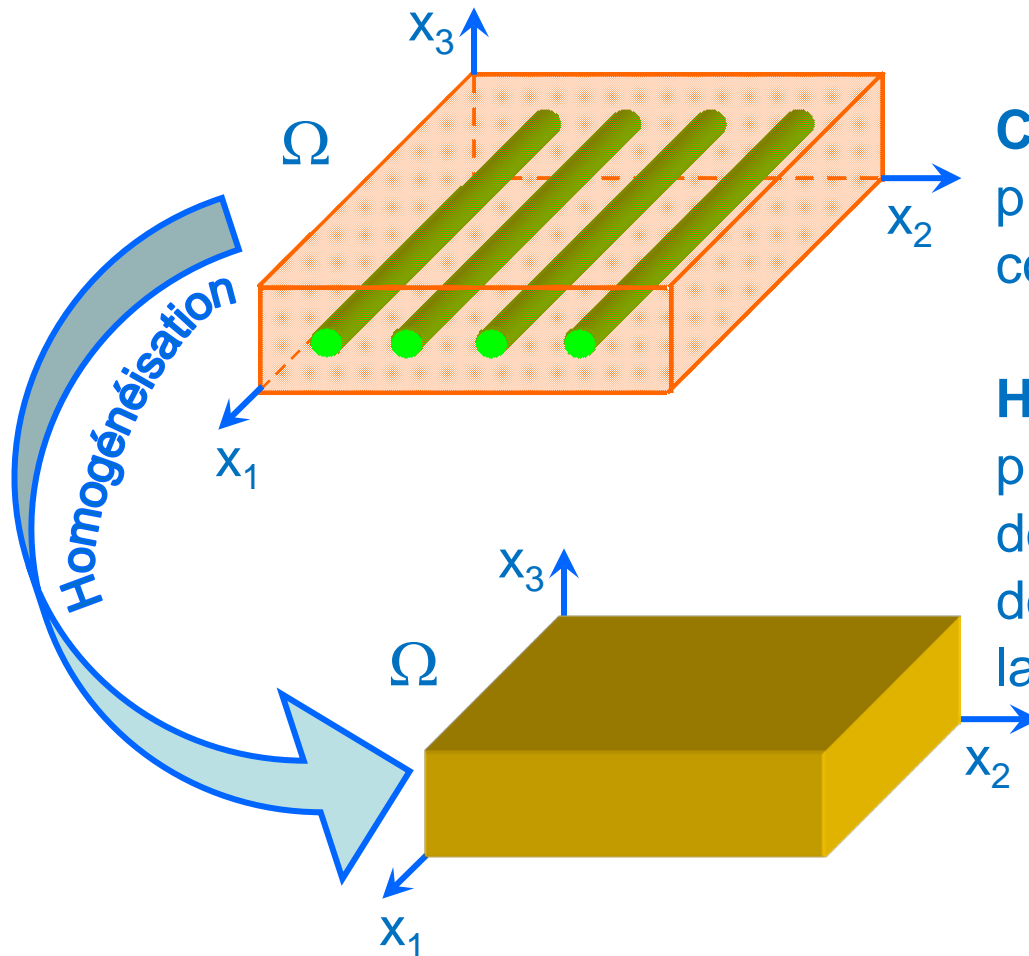
$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et :} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$



2 paramètres élastiques indépendants

# Introduction : comportement macroscopique d'une couche composite orthotrope

**Couche composite orthotrope** : couche renforcée de fibres UD ou tissus



**Comportement macroscopique** : propriétés de la couche considérée comme un matériau homogène

**Homogénéisation** : calcul des propriétés macroscopiques à partir de la répartition et des propriétés des matériaux constituant la couche composite

Exemple : modules élastiques  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ , etc.

# Introduction : comportement macroscopique d'une couche composite orthotrope

**Couche composite orthotrope** : couche renforcée de fibres UD ou tissus

- comportement macroscopique isotrope transverse dans le plan  $x_2x_3$  et orthotrope dans le plan  $x_1x_2$  de la couche : paramètres élastiques  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  et  $\nu_{23}$  (aussi notés :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TT}$ )
- $x_1$  et  $x_2$  sont les axes de références liés au matériau, ou *repère matériau* (axes d'orthotropie dans le plan liés à la symétrie matérielle)
- pour le cas de renforts UD, les directions longitudinale et transversale par rapport aux fibres sont l'axe principale et secondaire d'orthotropie, respectivement
- pour le cas de renforts tissus, on fait la distinction entre direction de chaîne et de trame pour le tissu, qui correspondent aux directions d'orthotropie de la couche

# Elasticité d'une couche composite orthotrope

Rigidité **C** et souplesse **S** pour une couche composite orthotrope représentées dans les axes d'orthotropie

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{S}] = [\mathbf{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

SYM.

avec :  $C_{22} = C_{23} + 2C_{44}$

Aussi :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} ; S_{22} = S_{33} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} ; S_{44} = S_{55} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_2}$$

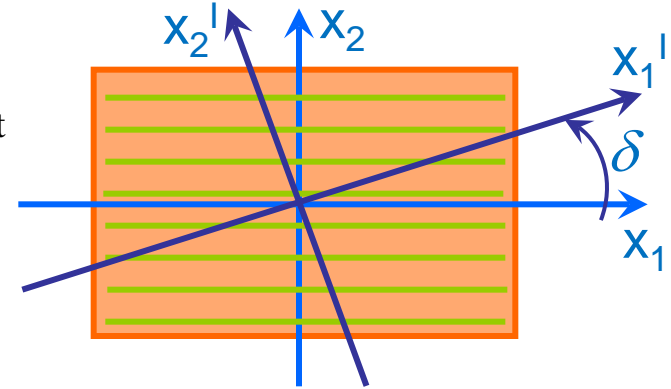
$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} ; S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$



# Changement de repère ou rotation d'une couche

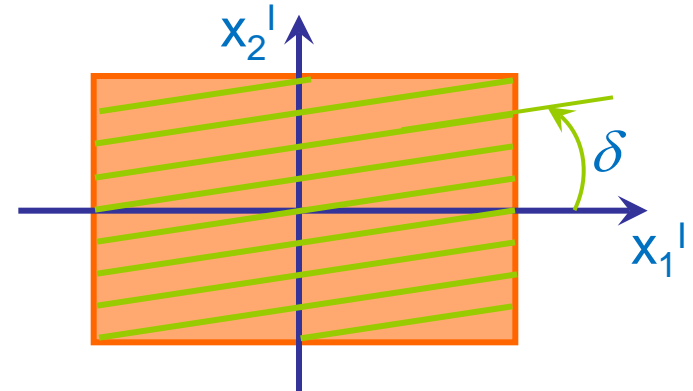
**Changement de repère** : représentation des propriétés élastiques dans un repère différent des axes de symétrie matérielle (axes d'orthotropie) tourné d'un angle  $\delta$  par rapport à ce dernier. Exemple : construction de graphiques polaires pour étude des variations  $E(\delta)$ ,  $G(\delta)$ , etc.

$$[\mathbf{C}]^I = [\mathbf{T}_\sigma(\delta)][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\sigma(\delta)]^t$$



**Rotation d'une couche** : orientation des axes de symétrie matérielle dans une direction tournée d'un angle  $\delta$  par rapport aux axes de référence. Exemple : construction d'un empilement de couches dans une plaque stratifiée.

$$[\mathbf{C}]^I = [\mathbf{T}_\sigma(-\delta)][\mathbf{C}][\mathbf{T}_\sigma(-\delta)]^t$$



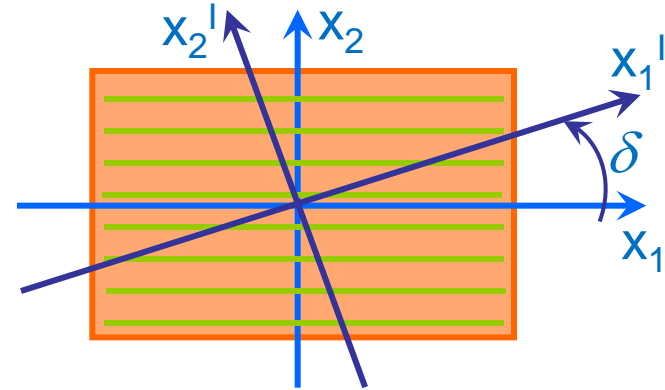
**Remarque** :  $[\mathbf{C}]$  est le tenseur de rigidité représenté dans les axes d'orthotropie

# Changement de repère d'une couche orthotrope

$$\begin{aligned}
 C_{11}^I &= C_{11}c^4 + C_{22}s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2 \\
 C_{22}^I &= C_{11}s^4 + C_{22}c^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2 \\
 C_{12}^I &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})c^2s^2 + C_{12}(c^4 + s^4) \\
 C_{13}^I &= C_{12}c^2 + C_{23}s^2 \\
 C_{23}^I &= C_{12}s^2 + C_{23}c^2 \\
 C_{33}^I &= C_{22} \\
 C_{44}^I &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2}c^2 + C_{66}s^2 \\
 C_{55}^I &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2}s^2 + C_{66}c^2 \\
 C_{66}^I &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66})c^2s^2 + C_{66}(c^4 + s^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{16}^I &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})c^3s + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})cs^3 \\
 C_{26}^I &= (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})c^3s + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})cs^3 \\
 C_{36}^I &= (C_{12} - C_{23})cs \\
 C_{45}^I &= \left( C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \right) cs
 \end{aligned}$$

Rigidité [C]



$$\begin{aligned}
 C_{14}^I &= C_{15}^I = 0 \\
 C_{24}^I &= C_{25}^I = 0 \\
 C_{34}^I &= C_{35}^I = 0 \\
 C_{46}^I &= C_{56}^I = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \cos \delta \\
 s &= \sin \delta
 \end{aligned}$$

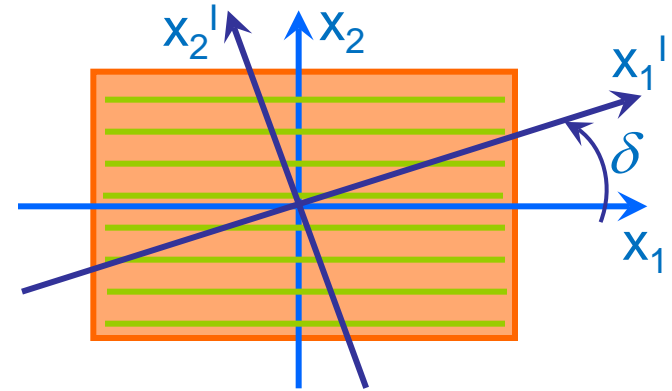
# Changement de repère d'une couche orthotrope

$$\begin{aligned}
 S_{11}^I &= S_{11}c^4 + S_{22}s^4 + (2S_{12} + S_{66})c^2s^2 \\
 S_{22}^I &= S_{11}s^4 + S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})c^2s^2 \\
 S_{12}^I &= (S_{11} + S_{22} - S_{66})c^2s^2 + S_{12}(c^4 + s^4) \\
 S_{13}^I &= S_{12}c^2 + S_{23}s^2 \\
 S_{23}^I &= S_{12}s^2 + S_{23}c^2 \\
 S_{33}^I &= S_{22} \\
 S_{44}^I &= 2(S_{22} - S_{23})c^2 + S_{66}s^2 \\
 S_{55}^I &= 2(S_{22} - S_{23})s^2 + S_{66}c^2 \\
 S_{66}^I &= (4S_{11} + 4S_{22} - 8S_{12} - 2S_{66})c^2s^2 + S_{66}(c^4 + s^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{16}^I &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})c^3s + (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66})cs^3 \\
 S_{26}^I &= (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66})c^3s + (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})cs^3 \\
 S_{36}^I &= 2(S_{12} - S_{23})cs \\
 S_{45}^I &= (S_{66} - 2S_{22} + 2S_{23})cs
 \end{aligned}$$

**Souplesse [S]**

$$[S]^I = [T_\varepsilon(\delta)][S][T_\varepsilon(\delta)]^t$$



$$S_{14}^I = S_{15}^I = 0$$

$$S_{24}^I = S_{25}^I = 0$$

$$S_{34}^I = S_{35}^I = 0$$

$$S_{46}^I = S_{56}^I = 0$$

$$c = \cos \delta$$

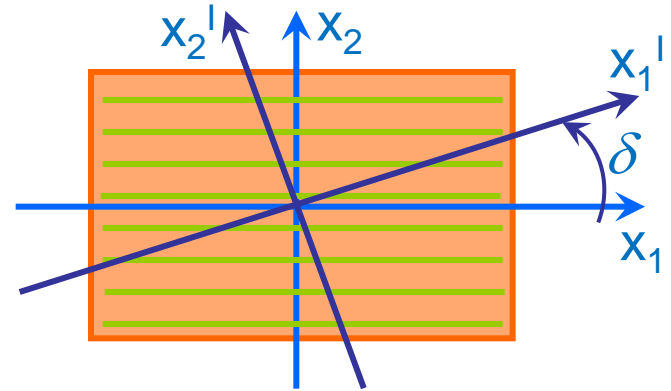
$$s = \sin \delta$$

# Changement de repère d'une couche orthotrope

Rigidité  $[C]$  dans les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

SYM.



avec :  $C_{22} = C_{23} + 2C_{44}$

Rigidité  $[C^I]$  hors les axes (d'orthotropie) :

$$[C^I] = \begin{bmatrix} C_{11}^I & C_{12}^I & C_{13}^I & 0 & 0 & C_{16}^I \\ & C_{22}^I & C_{23}^I & 0 & 0 & C_{26}^I \\ & & C_{33}^I & 0 & 0 & C_{36}^I \\ & & & C_{44}^I & C_{45}^I & 0 \\ & & & & C_{55}^I & 0 \\ & & & & & C_{66}^I \end{bmatrix}$$

SYM.

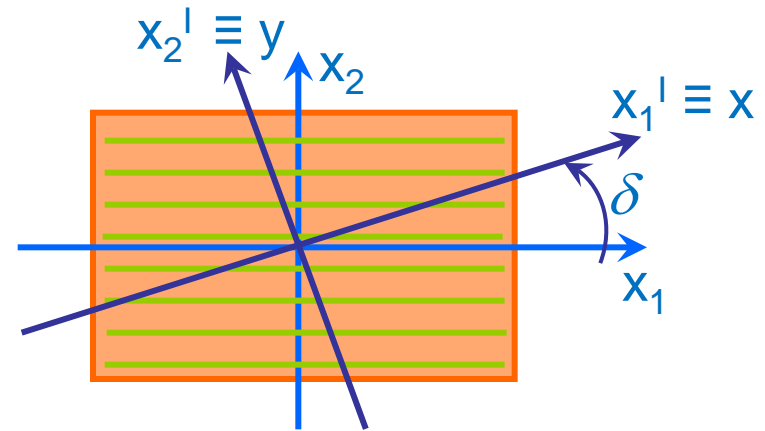
# Modules d'élasticité d'une couche orthotrope

Modules dans les axes d'orthotropie :

$$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{23}$$

Modules hors les axes (d'orthotropie) :

$$E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}$$



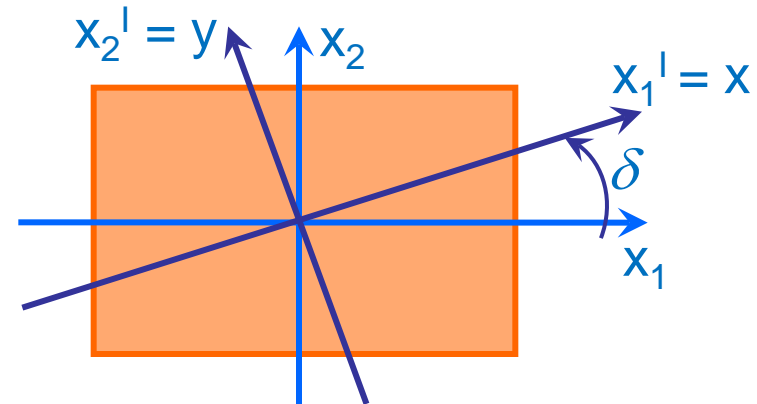
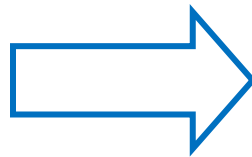
# Etat de contraintes planes pour les couches et les plaques composites stratifiées

**Composites en forme de couches ou plaques (petite épaisseur) :**  
hypothèse de contraintes planes dans le plan de la couche  $Oxy$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

**Ecriture des contraintes en notation de Voigt :**  
(3 composantes indépendantes)

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$



**Calcul des déformations :**

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^I\} &= [S^I] \{\sigma^I\} = \\ &= [\varepsilon_1^I, \varepsilon_2^I, \varepsilon_3^I, 0, 0, \varepsilon_6^I]^t \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^I &= \varepsilon_{zz} = S_{13}^I \sigma_1^I + S_{23}^I \sigma_2^I + S_{36}^I \sigma_6^I = \\ &= S_{13}^I \sigma_{xx} + S_{23}^I \sigma_{yy} + S_{36}^I \sigma_{xy} \end{aligned}$$

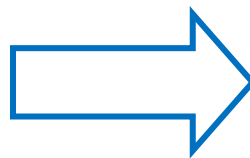
# Etat de contraintes planes pour les couches et les plaques composites stratifiées

**Composites en forme de couches ou plaques (petite épaisseur) :**  
hypothèse de contraintes planes dans le plan de la couche Oxy

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

**Ecriture des contraintes en notation de Voigt :**  
(3 composantes indépendantes)

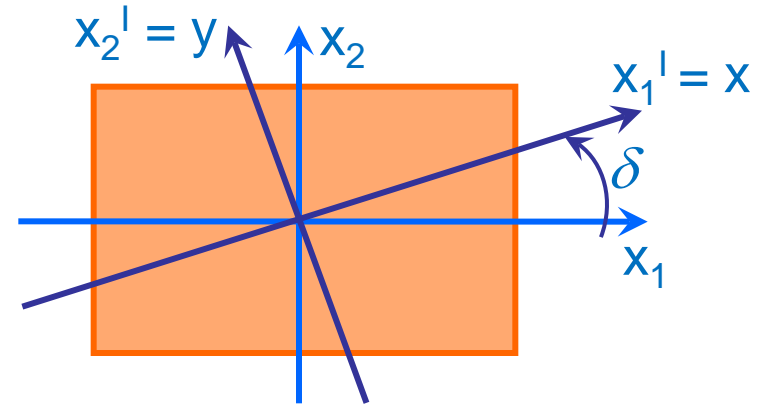
$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$



$$\{\varepsilon^I\} = [S^I] \{\sigma^I\} = [\varepsilon_1^I, \varepsilon_2^I, \varepsilon_3^I, 0, 0, \varepsilon_6^I]^t$$

avec :

$$\varepsilon_3^I = \varepsilon_{zz} = S_{13}^I \sigma_1^I + S_{23}^I \sigma_2^I + S_{36}^I \sigma_6^I = S_{13}^I \sigma_{xx} + S_{23}^I \sigma_{yy} + S_{36}^I \sigma_{xy}$$



**Calcul des déformations :**

Couplage par effet Poisson

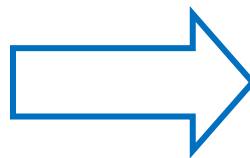
# Etat de contraintes planes pour les couches et les plaques composites stratifiées

**Composites en forme de couches ou plaques (petite épaisseur) :**  
hypothèse de contraintes planes dans le plan de la couche Oxy

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

**Ecriture des contraintes en notation de Voigt :**  
(3 composantes indépendantes)

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$



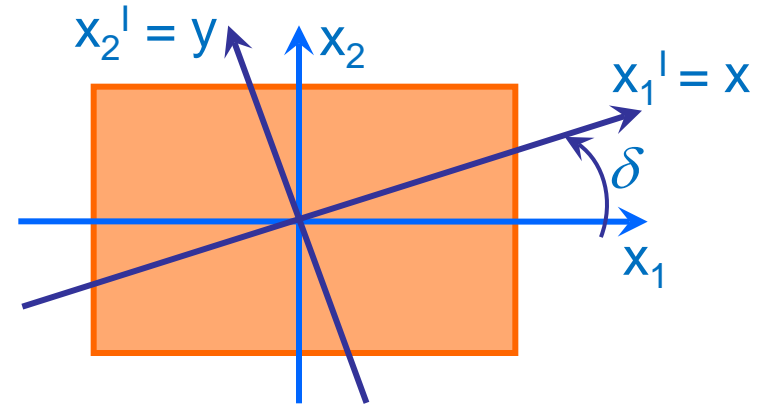
$$\begin{aligned} \{\varepsilon^I\} &= [S^I] \{\sigma^I\} = \\ &= [\varepsilon_1^I, \varepsilon_2^I, \varepsilon_3^I, 0, 0, \varepsilon_6^I]^t \end{aligned}$$

avec :

$$\varepsilon_3^I = \varepsilon_{zz} = S_{13}^I \sigma_1^I + S_{23}^I \sigma_2^I + S_{36}^I \sigma_6^I =$$

Couplage par cisaillement

$$+ S_{36}^I \sigma_{xy}$$



**Calcul des déformations :**



# Etat de contraintes planes pour les couches et les plaques composites stratifiées

D'autre part, pour le calcul des contraintes :

hp. contraintes planes en Oxy ( $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ )

$$\{\sigma^I\} = [C^I] \{\varepsilon^I\} = [\sigma_1^I, \sigma_2^I, 0, 0, 0, \sigma_6^I]^t$$

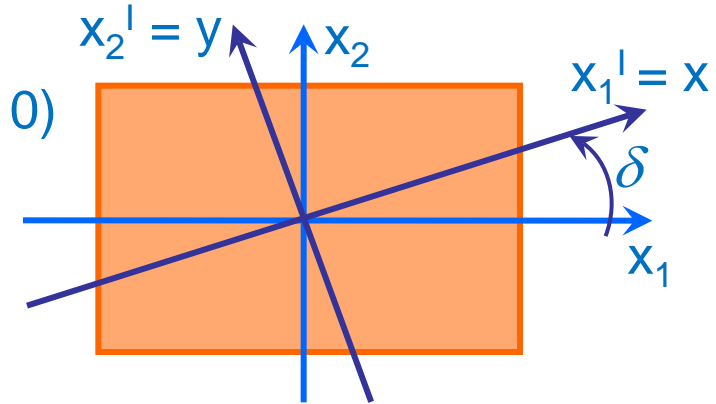
soit :

$$\sigma_1^I = C_{11}^I \varepsilon_1^I + C_{12}^I \varepsilon_2^I + C_{13}^I \varepsilon_3^I + C_{16}^I \varepsilon_6^I$$

$$\sigma_2^I = C_{12}^I \varepsilon_1^I + C_{22}^I \varepsilon_2^I + C_{23}^I \varepsilon_3^I + C_{26}^I \varepsilon_6^I$$

$$0 = C_{13}^I \varepsilon_1^I + C_{23}^I \varepsilon_2^I + C_{33}^I \varepsilon_3^I + C_{36}^I \varepsilon_6^I$$

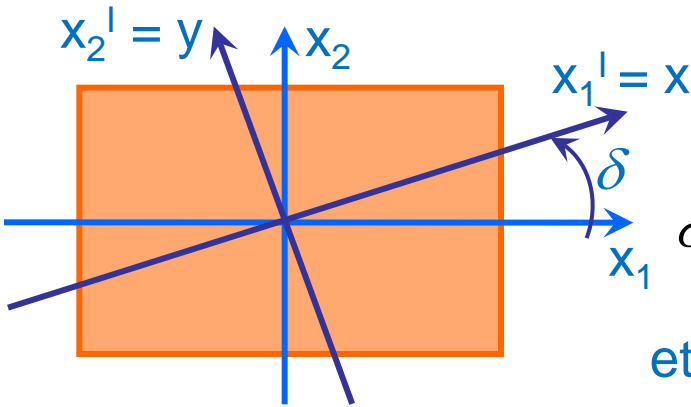
$$\sigma_6^I = C_{16}^I \varepsilon_1^I + C_{26}^I \varepsilon_2^I + C_{36}^I \varepsilon_3^I + C_{66}^I \varepsilon_6^I$$



De la troisième équation, on voit bien que les composantes indépendantes de déformations sont seulement 3 :  $\varepsilon_1^I, \varepsilon_2^I$  et  $\varepsilon_6^I$ , alors que :

$$\varepsilon_3^I = -\frac{1}{C_{33}^I} (C_{13}^I \varepsilon_1^I + C_{23}^I \varepsilon_2^I + C_{36}^I \varepsilon_6^I)$$

# Etat de contraintes planes pour les couches et les plaques composites stratifiées



En remplaçant cette dernière relation dans les autres expressions pour les contraintes :

$$\sigma_1^I = \left( C_{11}^I - \frac{C_{13}^{I^2}}{C_{33}^I} \right) \varepsilon_1^I + \left( C_{12}^I - \frac{C_{13}^I C_{23}^I}{C_{33}^I} \right) \varepsilon_2^I + \left( C_{16}^I - \frac{C_{13}^I C_{36}^I}{C_{33}^I} \right) \varepsilon_6^I$$

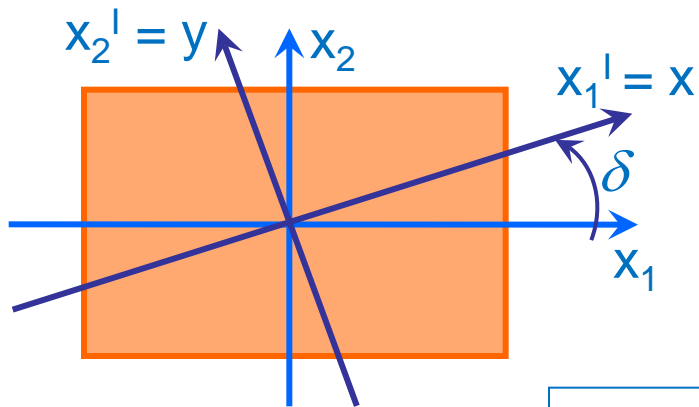
et ainsi de suite pour les deux autres composantes, pour arriver à la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma^I\}_{2D} = [Q^I] \{\varepsilon^I\}_{2D} \iff \begin{bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ \sigma_6^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^I & Q_{12}^I & Q_{16}^I \\ & Q_{22}^I & Q_{26}^I \\ \text{SYM.} & & Q_{66}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^I \\ \varepsilon_2^I \\ \varepsilon_6^I \end{bmatrix}$$

avec :  $Q_{ij}^I = C_{ij}^I - \frac{C_{i3}^I C_{j3}^I}{C_{33}^I} \quad (i, j = 1, 2, 6)$

**[Q] : matrice de rigidité réduite dans un état de contraintes planes**

# Matrice de rigidité [Q] dans les axes d'orthotropie



En écrivant les  $Q_{ij}$  (voir page précédente) dans les axes d'orthotropie ( $C_{16} = C_{26} = C_{36} = 0$ ), on obtient :

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$$

$$Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}$$

$$Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}$$

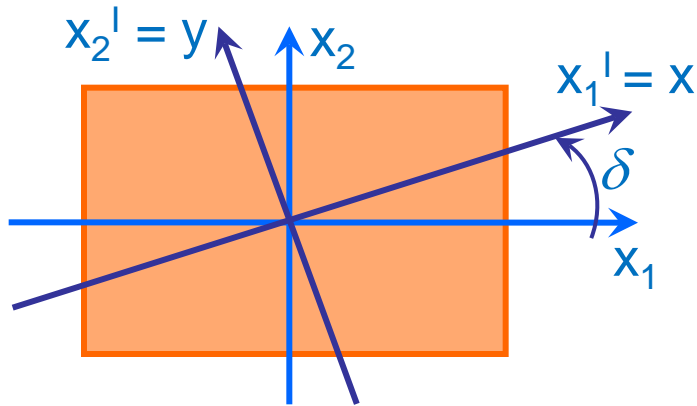
$$Q_{66} = C_{66}$$

$$Q_{16} = Q_{26} = 0$$

Finalement, dans les axes d'orthotropie la matrice [Q] est de la forme :

$$\{\sigma\}_{2D} = [Q]\{\varepsilon\}_{2D} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{SYM.} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

# Matrices de rigidité [Q] et de souplesse [S]



Les composantes de la matrice de souplesse [S] réduite en cas de contraintes planes sont identiques aux correspondantes composantes de la matrice [S] du problème tridimensionnel.

La matrice de souplesse [S] est l'inverse de [Q]

$$[S] = [Q]^{-1}$$

soit :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

et aussi, en fonction des modules de l'ingénieur :

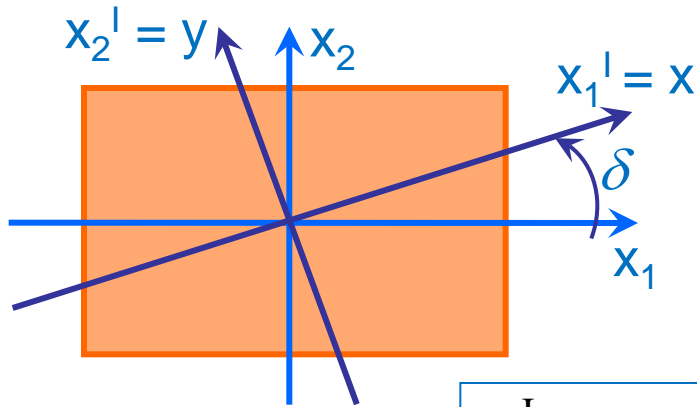
$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

# Changement de repère pour la matrice [Q]



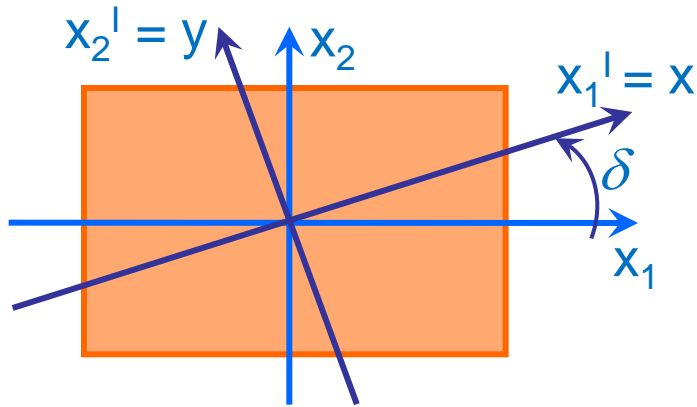
A partir de l'expression des  $Q_{ij}$  en fonction des  $C_{ij}$ , et en connaissant les lois de changement de repère pour les  $C_{ij}$ , il n'est pas difficile de montrer que les mêmes lois de changement de repère sont valables pour les  $Q_{ij}$  :

$$\begin{aligned} Q_{11}^I &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\ Q_{12}^I &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 \\ Q_{16}^I &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})cs^3 \\ Q_{22}^I &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\ Q_{26}^I &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\ Q_{66}^I &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= \cos \delta \\ s &= \sin \delta \end{aligned}$$

# Changement de repère : matrice [Q] anisotrope



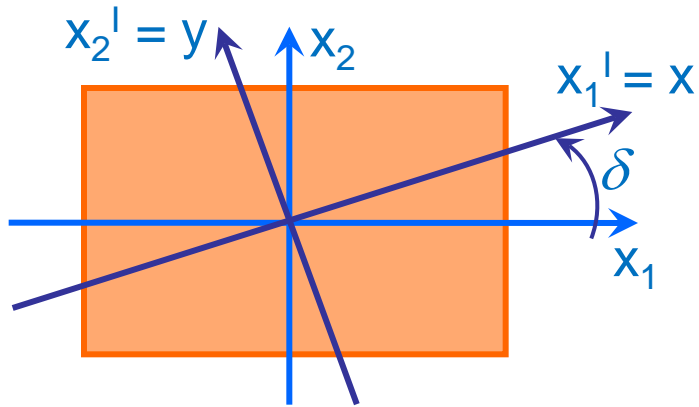
Attention: si [Q] est initialement anisotrope ou représentée hors les axes d'orthotropie,  $Q_{16}$  et  $Q_{26}$  ne sont pas initialement nuls.

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= \cos \delta \\ s &= \sin \delta \end{aligned}$$

# Changement de repère : matrice [S] anisotrope



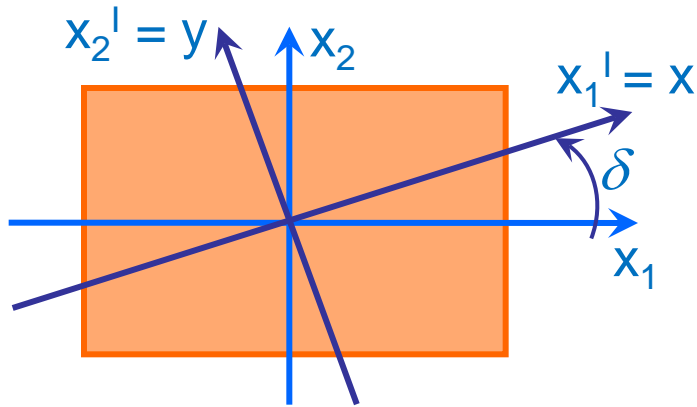
A cause des coefficients de la notation de Voigt, la transformation de [S] est différente de celle de [Q].

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xs} \\ S_{xy} \\ S_{ss} \\ S_{ys} \\ S_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -2sc^3 & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2s^3c & s^4 \\ -2sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & sc^3 - s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2s^3c \\ s^2c^2 & s^3c - sc^3 & c^4 + s^4 & -s^2c^2 & sc^3 - s^3c & s^2c^2 \\ 4s^2c^2 & 4(s^3c - sc^3) & -8s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 4(sc^3 - s^3c) & 4s^2c^2 \\ -2s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2(s^3c - sc^3) & s^3c - sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2sc^3 \\ s^4 & -2s^3c & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{16} \\ S_{12} \\ S_{66} \\ S_{26} \\ S_{22} \end{Bmatrix}.$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= \cos \delta \\ s &= \sin \delta \end{aligned}$$

# Changement de repère : constantes techniques



Définition des constantes techniques ou constantes de l'ingénieur

+

la loi de transformation de [S]

$$\begin{aligned}
 E_x &= \left( c^4 \frac{1}{E_1} - 2sc^3 \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2s^3c \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + s^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,x} &= \left( -2sc^3 \frac{1}{E_1} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} + 2(s^3c - sc^3) \frac{\nu_{12}}{E_1} - (s^3c - sc^3) \frac{1}{4G_{12}} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 2s^3c \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 \nu_{xy} &= - \left( s^2c^2 \frac{1}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - (c^4 + s^4) \frac{\nu_{12}}{E_1} - s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - (s^3c - sc^3) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 G_{xy} &= \left( 4s^2c^2 \frac{1}{E_1} - 4(sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 8s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + (c^4 + s^4 - 2s^2c^2) \frac{1}{4G_{12}} - 4(s^3c - sc^3) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 4s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,y} &= \left( -2s^3c \frac{1}{E_1} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{12,1}}{E_1} + 2(sc^3 - s^3c) \frac{\nu_{12}}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{1}{4G_{12}} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + 2sc^3 \frac{1}{E_2} \right) E_y \\
 E_y &= \left( s^4 \frac{1}{E_1} - 2s^3c \frac{\eta_{12,1}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{\nu_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2sc^3 \frac{\eta_{12,2}}{E_2} + c^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$



# Représentation de l'anisotropie : paramètres de Tsai et Pagano

- Tsai et Pagano (1968) utilisent les transformations des fonctions circulaires pour exprimer d'une nouvelle manière les composantes de la matrice  $[Q]$  dans un repère quelconque  $\{x, y, z\}$ :

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta , \\Q_{xy} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta , \\Q_{xs} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_7 \cos 4\theta + U_3 \sin 4\theta , \\Q_{yy} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta , \\Q_{ys} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_7 \cos 4\theta - U_3 \sin 4\theta , \\Q_{ss} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta .\end{aligned}$$

- Les 7 paramètres  $U_i$  sont appelés les *paramètres de Tsai et Pagano*, et sont définis de la façon suivante:

# Représentation de l'anisotropie : paramètres de Tsai et Pagano

$$U_1 = \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, \quad U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2},$$

$$U_3 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, \quad U_4 = \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8},$$

$$U_5 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, \quad U_6 = \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2}, \quad U_7 = \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2}.$$

- Évidemment, dans le cas de matériau orthotrope et si  $\{x_1, x_2, x_3\}$  est le repère d'orthotropie, alors  $U_6 = U_7 = 0$ .
- Les 7 paramètres  $U_i$  ne sont pas tous indépendants, comme il est évident par le fait qu'on utilise 7 quantités pour en exprimer 6 autres; par exemple, on démontre facilement que

$$U_5 = \frac{U_1 - U_4}{2}.$$

- En outre, contrairement à ce qu'on affirme parfois de façon erronée, **les paramètres  $U_i$  ne sont pas tous des invariants tensoriels** : on peut montrer, en fait, que  $U_2$  et  $U_3$  dépendent du référentiel.
- Un dernier inconvénient de cette représentation est que les paramètres  $U_i$  n'ont aucune signification physique directe. Ceci ne permet pas d'exprimer efficacement certaines propriétés élastiques, comme par exemple les symétries.

## Représentation de l'anisotropie : paramètres polaires de Verchery

- Verchery (1979) a proposé une représentation alternative de l'anisotropie bidimensionnelle, obtenue par une transformation de variable complexe introduite par lui même.
- Dans ce que Verchery même a appelé la méthode polaire, les composantes d'un tenseur  $\mathbf{L}$  du 4<sup>ème</sup> ordre du type de l'élasticité en  $\mathbb{R}^2$  (aussi bien en rigidité qu'en souplesse) sont exprimées en fonction de 5 invariants tensoriels indépendants et d'un angle, qui fixe le repère:

$$L_{1111} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1;$$

$$L_{1112} = R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1;$$

$$L_{1122} = -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0;$$

$$L_{1212} = T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0;$$

$$L_{2212} = -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1;$$

$$L_{2222} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1.$$

## Représentation de l'anisotropie : paramètres polaires de Verchery

- Les 4 modules  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  et la différence des deux angles polaires  $\Phi_0 - \Phi_1$  sont des invariants tensoriels; leur valeur est liée à celle des composantes Cartésiennes dans le repère  $\{x_1, x_2, x_3\}$  par les relations inverses des précédentes, qui en forme complexe sont

$$8T_0 = L_{1111} - 2L_{1122} + 4L_{1212} + L_{2222};$$

$$8T_1 = L_{1111} + 2L_{1122} + L_{2222};$$

$$8R_0 e^{4i\Phi_0} = L_{1111} - 2L_{1122} - 4L_{1212} + L_{2222} + 4i(L_{1112} - L_{2212});$$

$$8R_1 e^{2i\Phi_1} = L_{1111} - L_{2222} + 2i(L_{1112} + L_{2212}).$$

- Fixer un repère, équivaut à fixer un des deux angles polaires; pour un matériau orthotrope, fixer  $\Phi_1 = 0$  équivaut à choisir comme axe  $x_1$  l'axe selon lequel  $E_1 > E_2$ , et c'est le choix normalement fait.
- Les avantages de la méthode polaire sont essentiellement deux, et concernent le changement de repère et la signification mécanique des paramètres polaires.

## Représentation de l'anisotropie : paramètres polaires de Verchery

- En fait, on montre qu'au passage au repère  $\{x, y, z\}$  les nouvelles composantes Cartésiennes s'obtiennent simplement en soustrayant l'angle de rotation des angles polaires:

$$L_{xxxx} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta);$$

$$L_{xxxy} = R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta);$$

$$L_{xxyy} = -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta);$$

$$L_{xyxy} = T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta);$$

$$L_{yyxy} = -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta);$$

$$L_{yyyy} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta).$$

- En outre, les invariants polaires sont liés aux symétries élastiques, et les caractérisent de façon invariante; on montre en effet qu'on a les conditions nécessaires et suffisantes suivantes de symétrie élastique dans le plan:

## Représentation de l'anisotropie : paramètres polaires de Verchery et symétries élastiques

- orthotropie ordinaire  $\Leftrightarrow \Phi_0 - \Phi_1 = k \frac{\pi}{4}, \quad k = 0,1.$
- orthotropie  $R_0 \Leftrightarrow R_0=0;$
- orthotropie carrée (correspondante à la syngonie cubique en dimension 3)  $\Leftrightarrow R_1=0;$
- isotropie  $\Leftrightarrow R_0= R_1=0.$
- L'usage de ces relations se révèle utile surtout pour étudier en par voie analytique certaines propriétés élastiques des stratifiés et pour les phases de conception des stratifiés par rapport à leurs propriétés élastiques.

# Exemples de couches orthotropes

- **Plaques en bois de sapin:** orthotrope (source: Lekhnitskii).

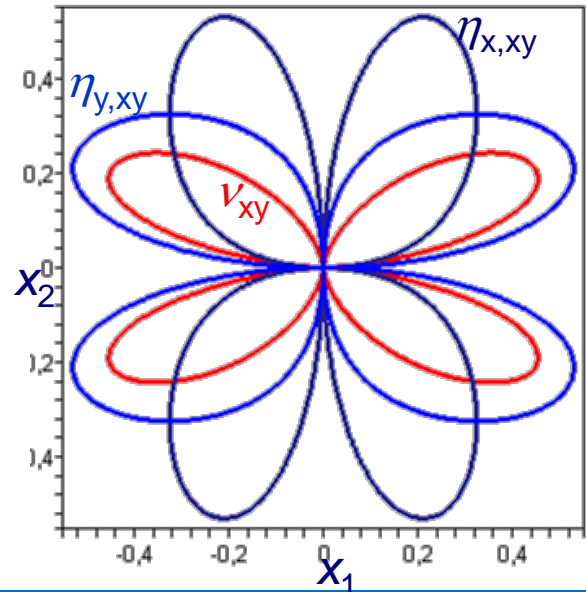
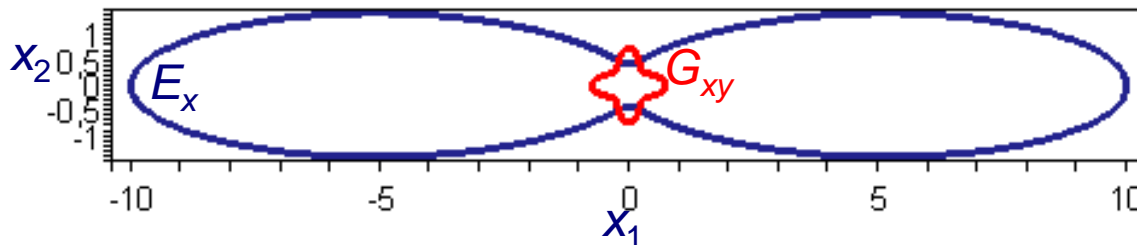
$$[Q] = \begin{bmatrix} 10 & 0.004 & 0 \\ 0.004 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 10 \text{ GPa}, E_2 = 0.42 \text{ GPa}, G_{12} = 0.75 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.01, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 4.28 \text{ GPa}, U_2 = 4.79 \text{ GPa}, U_3 = 0.93 \text{ GPa}, \\ U_4 = 0.93 \text{ GPa}, U_5 = 1.68 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 1.68 \text{ GPa}, T_1 = 1.30 \text{ GPa}, R_0 = 0.93 \text{ GPa}, \\ R_1 = 1.19 \text{ GPa}, \Phi_0 = 0^\circ, \Phi_1 = 0^\circ.$$

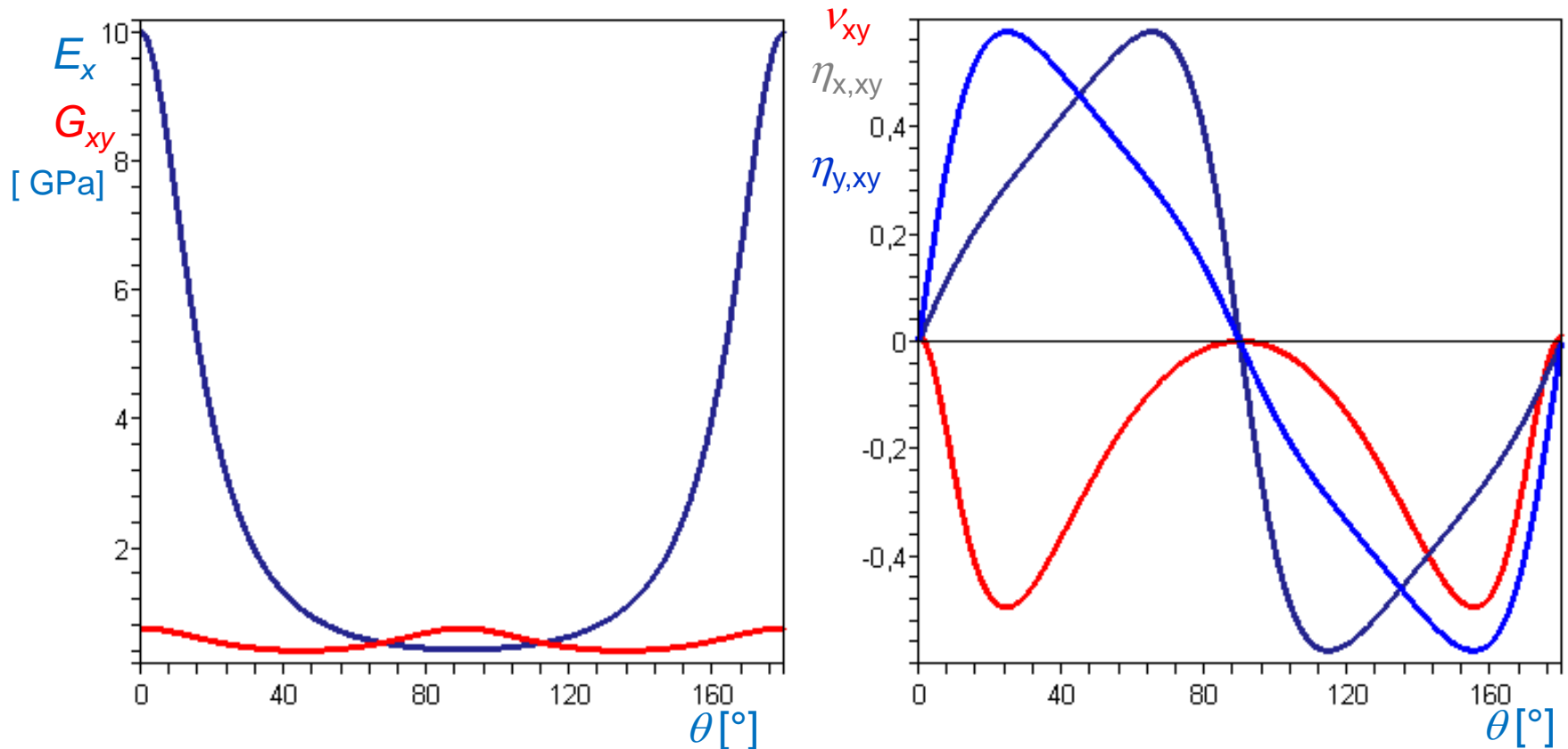
- Diagrammes directionnels





# Exemples de couches orthotropes

- **Plaques en bois de sapin:** orthotrope (source: Lekhnitskii).
- Diagrammes Cartésiens



# Exemples de couches orthotropes

- **Carbone-époxyde T300/5208 Vf=0.7:** orthotrope (source: Tsai et Hahn).

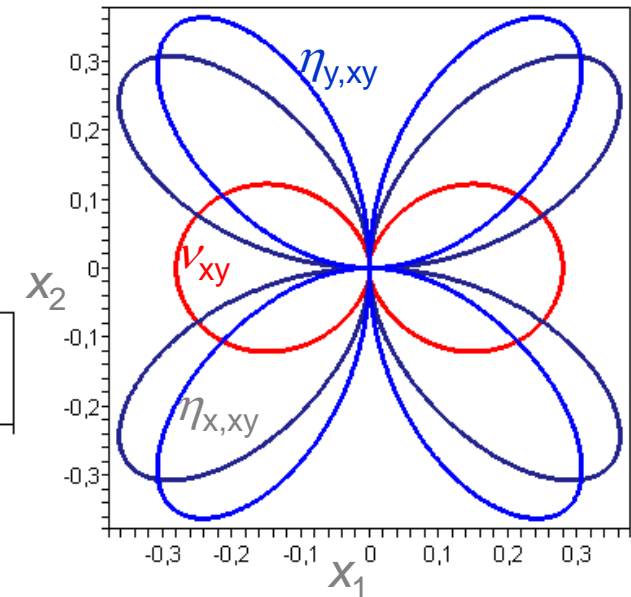
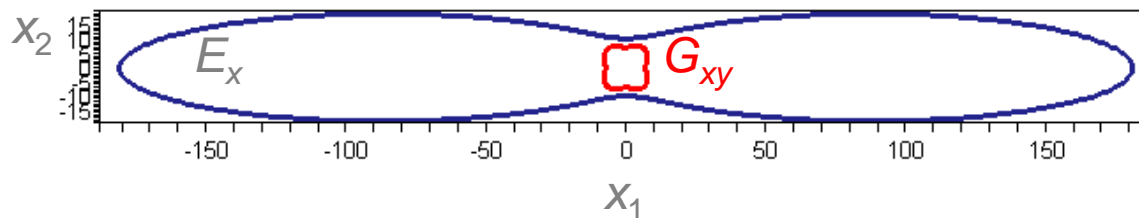
$$[Q] = \begin{bmatrix} 181.8 & 2.89 & 0 \\ 2.89 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.28, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 76.36 \text{ GPa}, U_2 = 85.72 \text{ GPa}, U_3 = 19.71 \text{ GPa}, \\ U_4 = 22.60 \text{ GPa}, U_5 = 26.88 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 26.88 \text{ GPa}, T_1 = 24.74 \text{ GPa}, R_0 = 19.71 \text{ GPa}, \\ R_1 = 21.43 \text{ GPa}, \Phi_0 = 0^\circ, \Phi_1 = 0^\circ.$$

- Diagrammes directionnels



# Exemples de couches orthotropes

- **Carbone-époxyde T300/5208 Vf=0.7:** orthotrope (source: Tsai et Hahn)
- Diagrammes Cartésiens

