# CHAPITRE 2

## Représentation paramétrique et maillage

- **Choix des mailles à disposition et stockage du maillage**
- **Éléments de référence et représentation paramétrique**

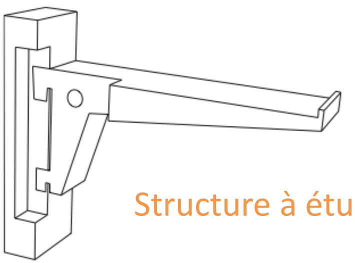
  (principe, propriétés, Jacobien,…)

- **Fonctions de forme des éléments courants**
- **Jacobiens des éléments courants**

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

**Choix du modèle**

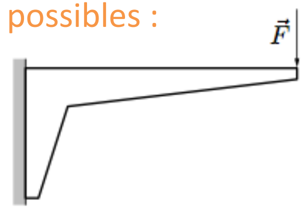
- Choix de la dimension du problème
- Discrétisation du domaine Ω en un nombre fini $N_E$ d'éléments de géométrie simple.



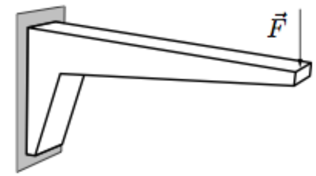
Structure à étudier

Choix de modélisation possibles :


(b) poutre : solution analytique ou numérique

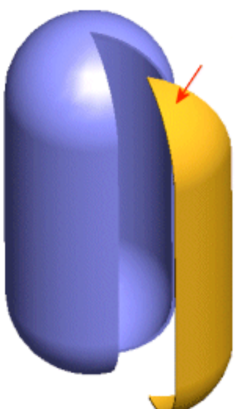


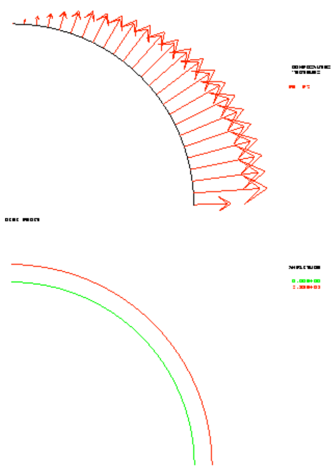

(c) élasticité plane : solution numérique



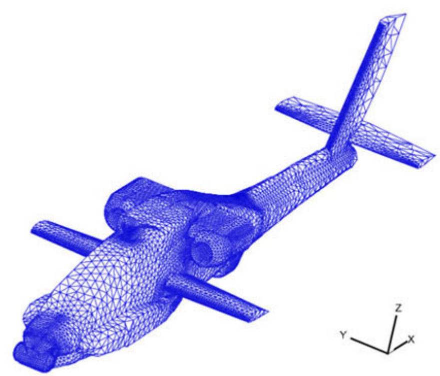

(d) élasticité tridimensionnelle : solution numérique

*Ex* : Maillage équivalent exploitant toutes les simplifications possibles (éléments axisymétriques)

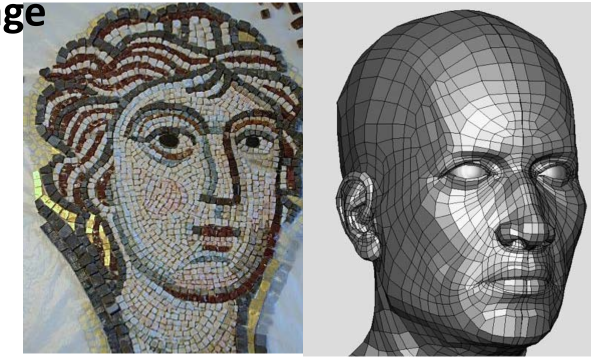




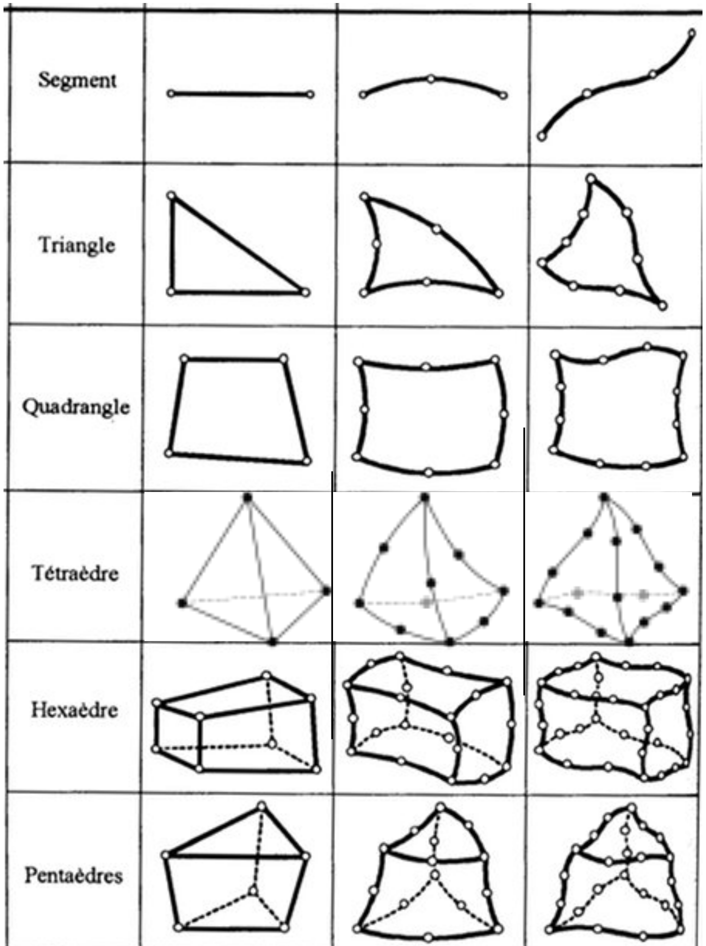
*Ex :* représentation volumique complexe (maillage 3D de tétrahèdres)



# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage



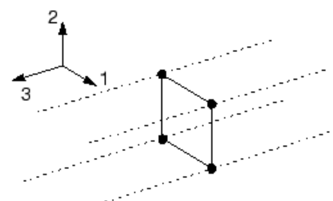
Ex. de mailles à disposition avec dimension, géométrie et nombre de nœuds variables + bords droits ou curvilignes



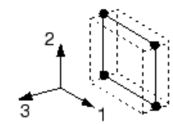

Maillage = *(mesh)*

**Unidirectionnelles** (segments) : barres, poutres

**Bidirectionnelles** (polygones) : éléments d'élasticité plane, plaques, coques, + Axisymétriques (tores)



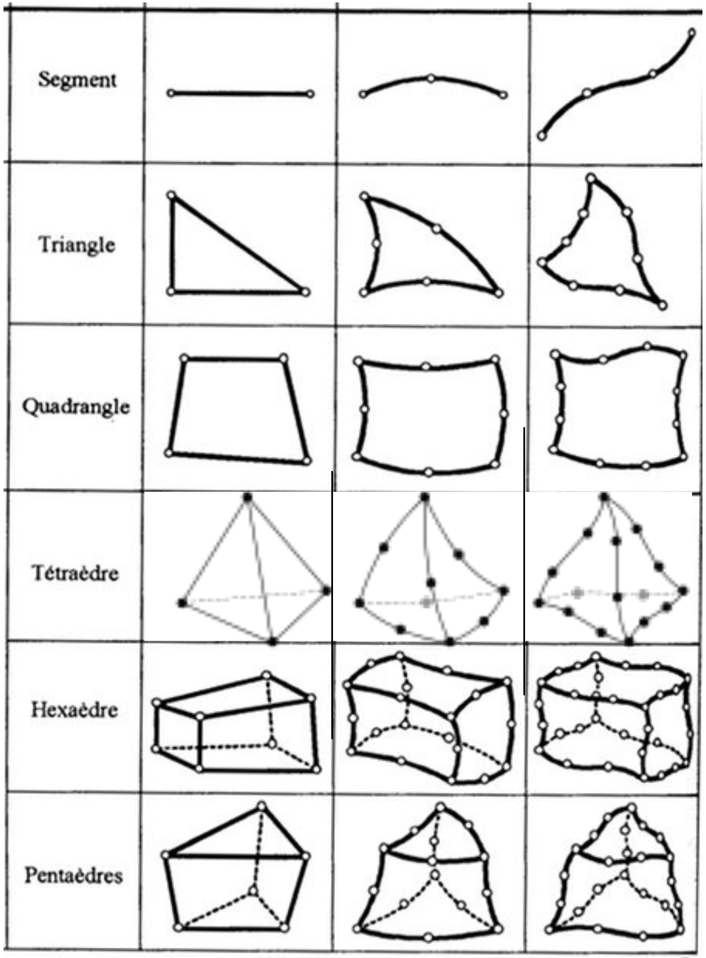

Élément 2D pour déformations planes *(2D plane strains element)*



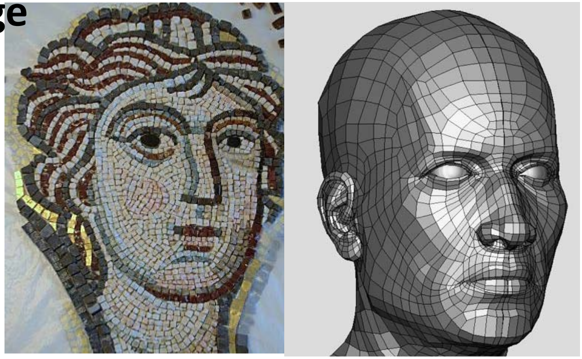

Élément 2D pour contraintes planes *(2D plane stresses element)*

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

Ex. de mailles à disposition avec dimension, géométrie et nombre de nœuds variables + bords droits ou curvilignes

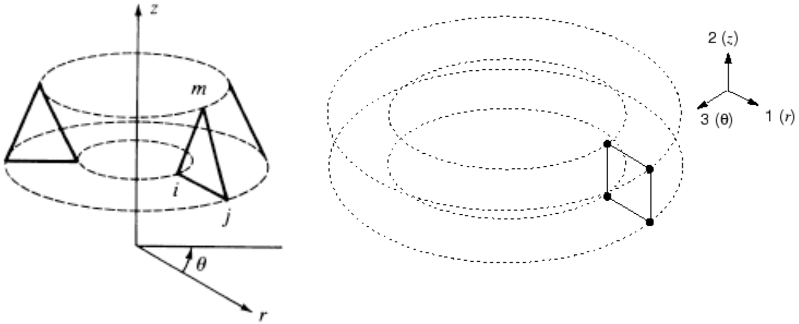



Maillage =
*(mesh)*



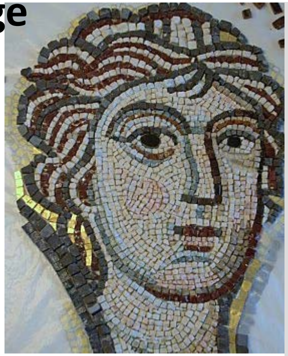
**Unidirectionnelles** (segments) : barres, poutres

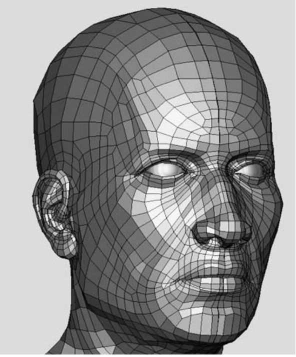
**Bidirectionnelles** (polygones) : éléments d'élasticité plane, plaques, coques, + Axisymétriques (tores)



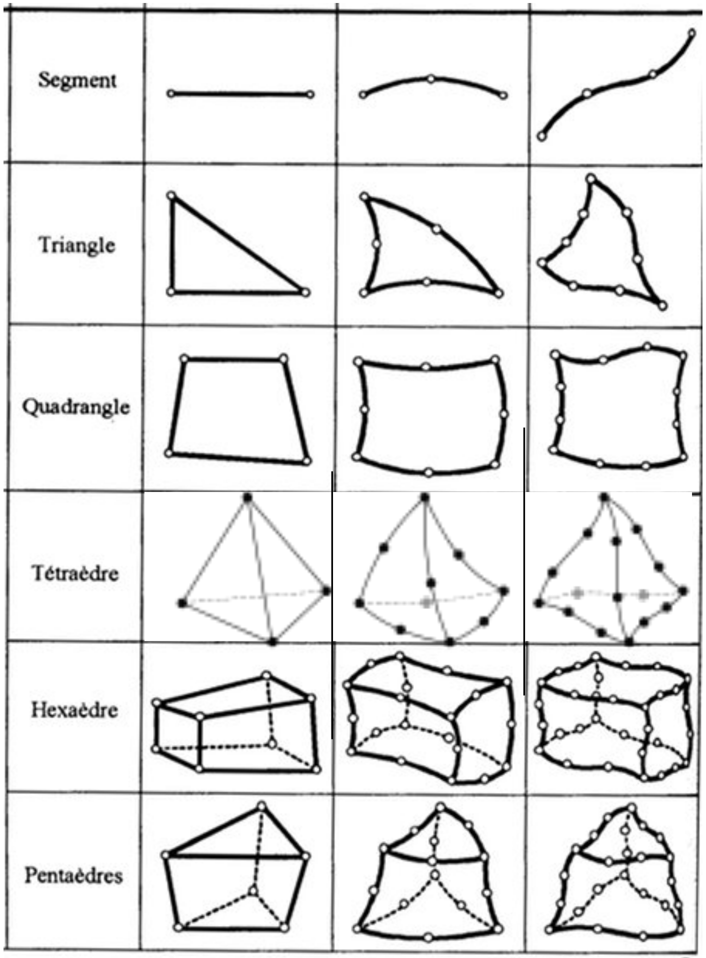

Éléments 2D axisymétriques
*(2D axisymmetric (ring) elements)*

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage





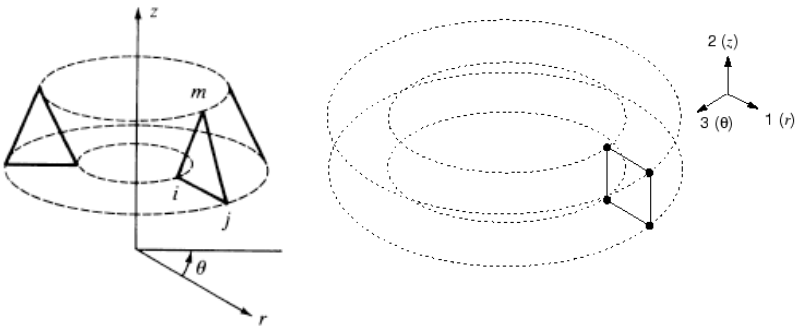
Ex. de mailles à disposition avec dimension, géométrie et nombre de nœuds variables + bords droits ou curvilignes




Maillage =
*(mesh)*

**Unidirectionnelles** (segments) : barres, poutres

**Bidirectionnelles** (polygones) : éléments d'élasticité plane, plaques, coques, + Axisymétriques (tores)



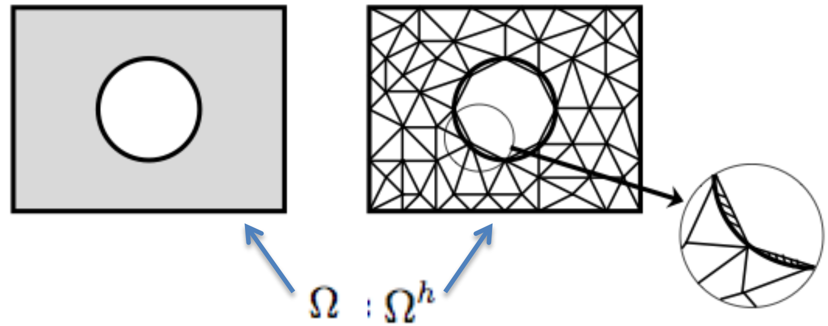

Éléments 2D axisymétriques
*(2D axisymmetric (ring) elements)*

**Tridimensionnelles** (polyèdres) : éléments de volume, coques épaisses

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

Le recouvrement de Ω doit être assuré de manière optimale

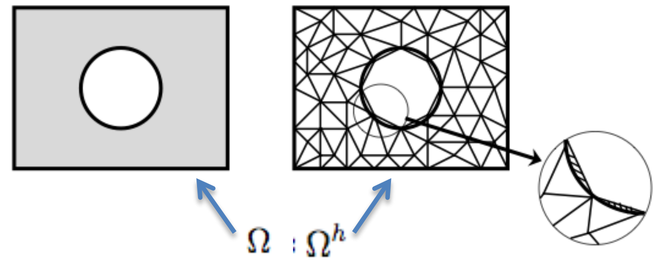
$$\int_{\Omega} \ldots dV \simeq \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \ldots dV_e$$



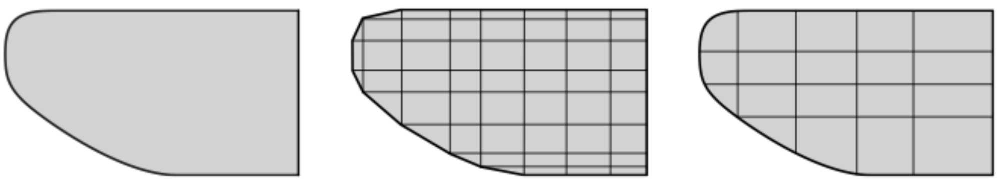
# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

Le recouvrement de Ω doit être assuré de manière optimale :

$$\int_\Omega ...dV \simeq \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} ...dV_e$$




Minimisation de l'erreur :



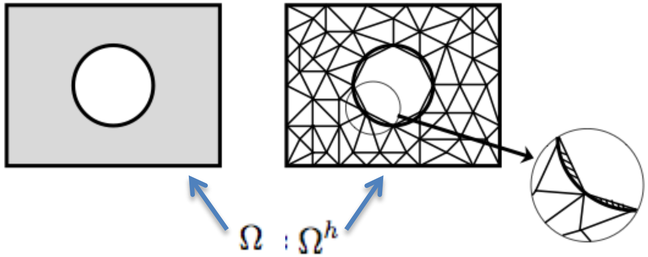
Raffinement

Éléments à frontière courbe

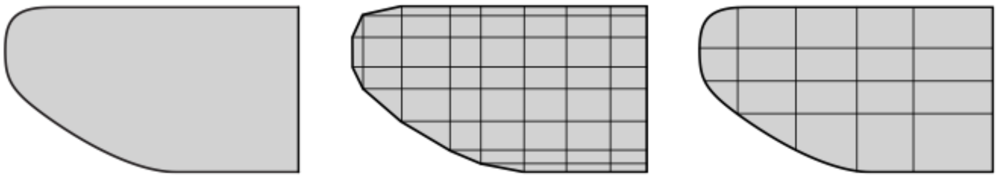
# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

Le recouvrement de Ω doit être assuré de manière optimale :

$$\int_{\Omega} ...dV \simeq \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} ...dV_e$$



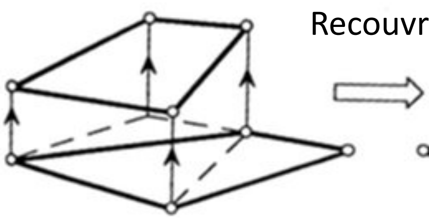

Minimisation de l'erreur :



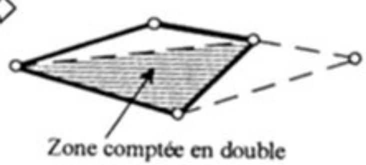
Raffinement        Éléments à frontière courbe

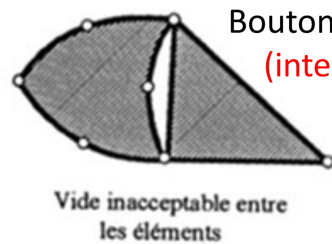
L'ensemble des $E_e$ = partition de $\Omega^h$, i.e. : $E_1 \bigcap E_2 = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un côté de } E_1 = \text{un côté de } E_2 \\ \text{un sommet de } E_1 = \text{un sommet de } E_2 \end{cases}$

On doit donc avoir : $\Omega \simeq \Omega^h = \bigcup^{N_e} E_e$

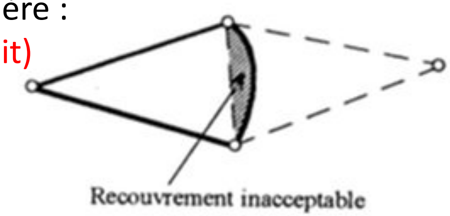


Recouvrement entre mailles :
(interdit)




Boutonnière :
(interdit)

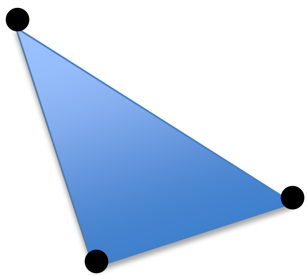


# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

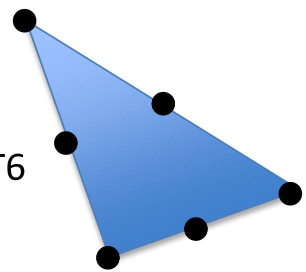
- Sur $\Omega^h$ on choisit un nombre fini de points :
  1. Les sommets
  2. Eventuellement d'autres points sur les arêtes

Nœuds *(Nodes)*

T3



T6

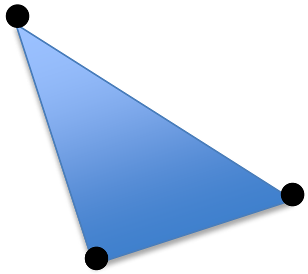


# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

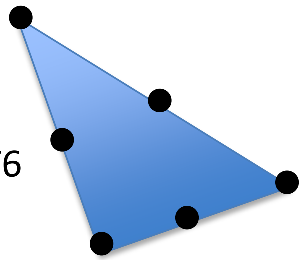
- Sur $\Omega^h$ on choisit un nombre fini de points :
  1. Les sommets
  2. Eventuellement d'autres points sur les arêtes

Nœuds *(Nodes)*

T3

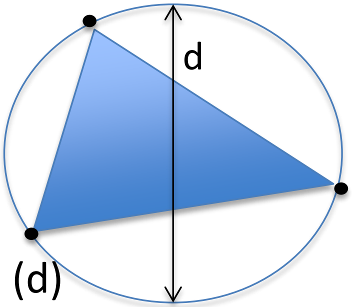


T6



- On notera $\mathbf{n_e}$=nb de nœuds de l'élément $E_e$

  $\mathbf{N_N}$=nb de nœuds du maillage




- Maillage caractérisé par son **paramètre de finesse** $h=\max_{elem}(d)$

➔ Maillage grossier *(coarse mesh)*
Maillage raffiné *(refined mesh)*

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

• ∃ algorithmes de maillage (Voronoï / Delaunay, projection,...)

Diagramme de **Voronoï** :

1. Considérer une distribution de points dans l'espace (aléatoire ou non)

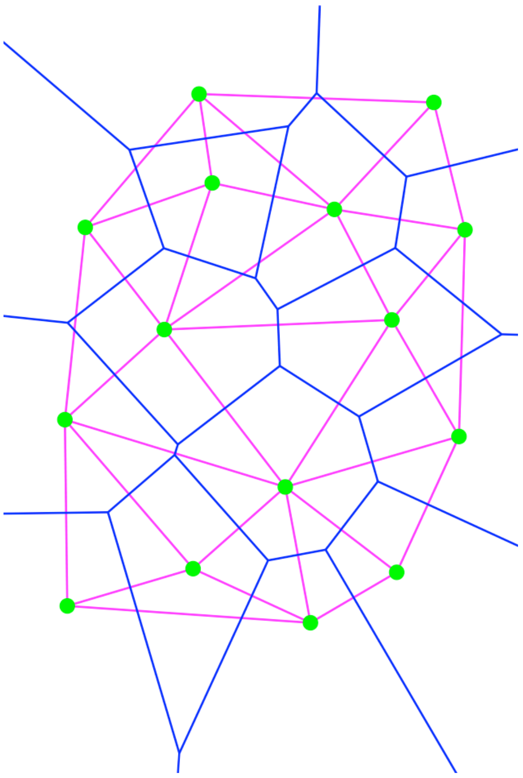
1. Tracer les droites reliant ces points (**---**)

1. En prendre les médiatrices (**---**)

2. Chaque point de la médiatrice appartient à une frontière de Voronoï s'il n'est pas plus proche d'un autre point

3. Sommets du schéma de Voronoï = centres des cercles circonscrits de la triangulation de Delaunay

4. Arêtes des polygones de Voronoï = médiatrices des côtés des triangles de **Delaunay**



# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage

Numériquement maillage = 2 matrices

1. **Matrice des coordonnées [Coord]**

   ligne n : coordonnées du nœud (n) dans la numérotation globale

   colonne j : direction de l'espace

Table à $N_N$ lignes et D colonnes (D = dimension de l'espace)

| 2D | | 3D |
|---|---|---|
| $x_1^{(1)}$ | $x_2^{(1)}$ | $x_3^{(1)}$ |
| $x_1^{(2)}$ | $x_2^{(2)}$ | $x_3^{(2)}$ |
| | | |

$$[Coord]_{ij} = Coord(n,j) = x_j^{(n)}$$

(.) = numéro du noeud

2. **Matrice de connectivité**

   ligne i : numéros des nœuds de l'élément i dans la numérotation globale

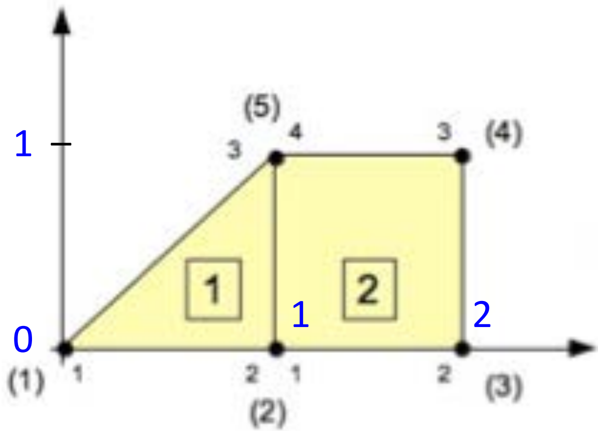
   On stocke également le nb de nœuds dans l'élément si besoin

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & (i) & (j) & (k) & \\ 4 & (j) & (k) & (l) & (m) \end{array}$$

$$connec\,(e,(1+)1:n_e)$$

-> Quiz

# Choix des mailles à disposition et stockage du maillage




Quel est le couple solution des tables de coordonnées et connectivité représentatives du maillage ci-contre :

**(A)**

$$Coord = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Connec = \begin{bmatrix} 3 \,|\, 1 & 2 & 3 & \\ 4 \,|\, 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**(B)**

$$Coord = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Connec = \begin{bmatrix} 3 \,|\, 1 & 2 & 5 & \\ 4 \,|\, 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**(C)**

$$Coord = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Connec = \begin{bmatrix} 3 \,|\, 3 & 2 & 1 & \\ 4 \,|\, 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

# Éléments de référence et représentation paramétrique

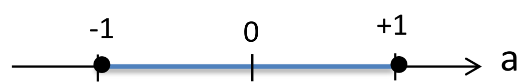
**Idée** = Simplifier et systématiser des calculs d'intégrales sur les éléments $\sum_{e=1}^{N_e} \int_{E_e} \ldots dV$

**Moyen** = calcul sur éléments simples à bords droits : **éléments (maille) de référence $\Delta_e$**

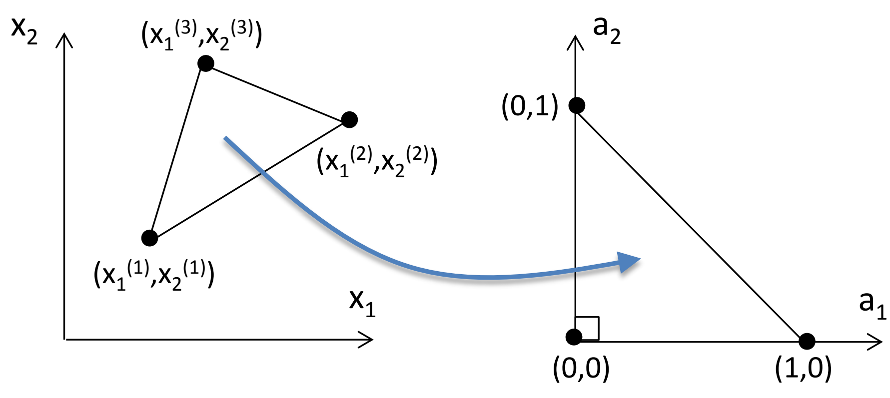
<u>Propriétés</u> :

- $E_e$ et $\Delta_e$ même nb de nœuds.
- Coordonnées paramétriques notées <u>a</u>
- On choisit **un élément de référence par forme géométrique** (triangle, quadrilatère, prisme, tétraèdre, hexaèdre).

- Segment à 2 nœuds (D=1)




- Triangle à 3 nœuds (D=2)




Maille réelle

Maille de référence

# Éléments de référence et représentation paramétrique

Transformation géométrique (référence <-> réel) = **Représentation paramétrique**

Coordonnées d'un point quelconque dans la maille réelle : $\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a})\underline{x}^{(k)}$

Coordonnées des nœuds dans la maille réelle
*(Nodes coordinates)*

**Fonctions de forme**
= polynômes à D variables
*(Shape functions)*

Notation matricielle : ${}^t\{\underline{x}\} = {}^t\{N_e(\underline{a})\}\,[Coord]$

Ex, Quadrilatère à 4 nœuds pour D=3 :

$$ {}^t\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{N_1\ N_2\ N_3\ N_4\} . \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} \end{bmatrix} $$

# Éléments de référence et représentation paramétrique

Propriétés de la RP : (à respecter pour avoir un maillage **conforme**)

*1. La transformation est **bijective*** ➔ à tout point de la maille réelle correspond un et un seul point de la maille de référence et inversement.

Mathématiquement : $J(\underline{a}) = det\left(\underline{\underline{J}}(\underline{a})\right) \neq 0 \quad \forall \underline{a} \in \Delta_e$

**Jacobien** *(Jacobian)*

**Matrice Jacobienne** de la transformation *(Jacobian matrix)*

$$d\underline{x} = \underline{\underline{J}}(\underline{a})d\underline{a}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad 1 \leq i, j \leq D$$

J($\underline{a}$) Fonction polynômiale de $\underline{a}$ **continue** et de **signe constant** sur $\Delta_e$.

Attention : Le jacobien s'annule sur $\Delta_e$ ou tend vers 0 si les mailles réelles sont dégénérées ou distordues ➔ à proscrire

Element with aspect ratio close to 1.0

Element with large aspect ratio

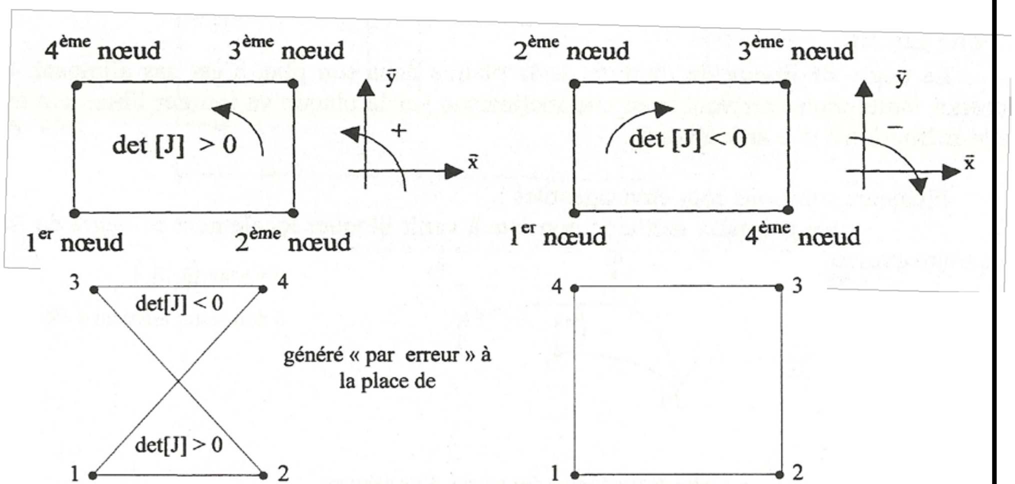
# Éléments de référence et représentation paramétrique

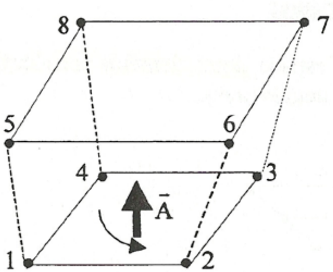
## dre de génération des nœuds :

Difficulté de tester la nullité du jacobien car calculé par approximation numérique

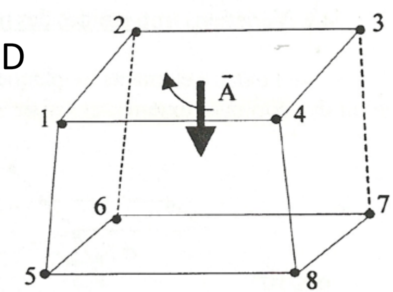
→ plutôt test sur signe

→ numérotation des noeuds de sorte à ce que det(J)>0

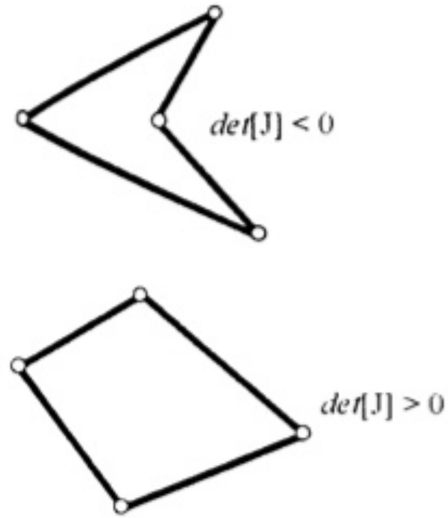



Et en 3D




## Convexité des mailles




Rq : Il existe des éléments pour lesquels le jacobien est constant (ex T3) → juste éviter les alignements de nœuds

# Éléments de référence et représentation paramétrique

Propriétés de la RP :

2. *Les nœuds sont conservés* (image d'un nœud = un nœud)

$$\underline{x}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}^{(l)})\underline{x}^{(k)} \quad \forall l = 1..n_e$$

Pour assurer cela :

- $N_k$ vaut 1 au nœud k
- $N_k$ s'annule sur toute autre face ou arête de $E_e$ ne contenant pas le nœud k.

En effet :

Si au nœud $\underline{x}^{(l)}$ est associé le nœud $\underline{a}^{(l)}$ :

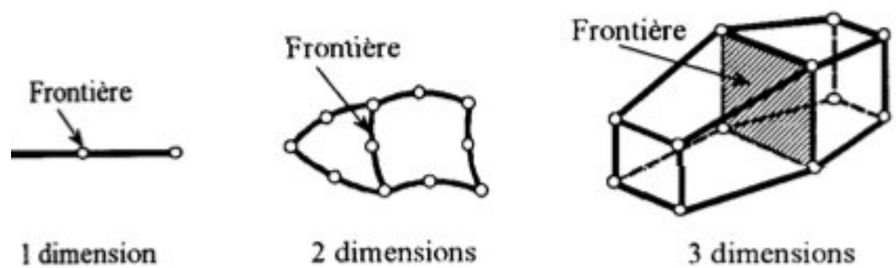
$$\underline{x}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k\left(\underline{a}^{(l)}\right)\underline{x}^{(k)} \quad \forall l = 1...n_e$$

On en déduit que :

$$N_k(\underline{a}^{(l)}) = \delta_{kl} \quad \forall 1 \leq k, l \leq n_e$$

Propriété qui exclut la présence de trous ou recouvrements dans le maillage

Frontières possibles :



# Éléments de référence et représentation paramétrique

Propriétés de la RP :

3. Si la structure = 1 point tous les nœuds sont confondus → les fonctions de forme doivent vérifier :

$$N_k(\underline{a}) + \sum_{j \neq k} N_j(\underline{a}) = 1$$

Propriété de ***partition de l'unité*** *(partition of unity)*

Réécriture matricielle de la RP :

$$J_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)_{1 \leq i,j \leq D} = \sum_{k=1}^{n_e} \left(\frac{\partial N_k(\underline{a})}{\partial a_j}\right) x_i^{(k)}$$

Produit correspondant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial a_1} & \frac{\partial N_2}{\partial a_1} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial a_2} & \frac{\partial N_2}{\partial a_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_{{}^t[D_N]} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_{[Coord]}$$

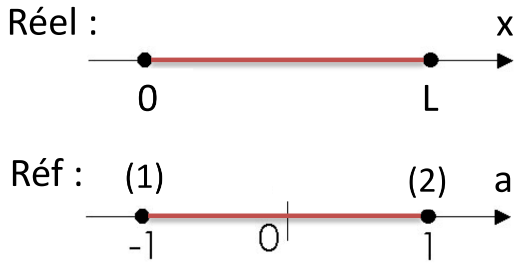
$$[J] = {}^t\left({}^t[D_N].[Coord]\right) = {}^t[Coord].[D_N]$$

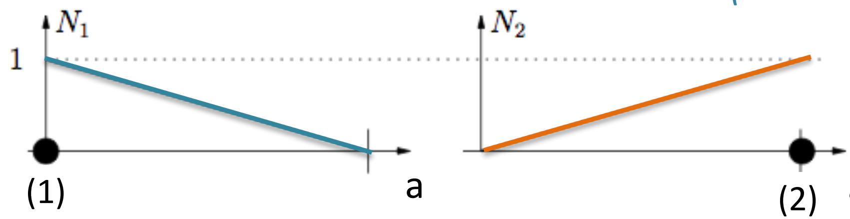
Elément de volume : $\boxed{dV_{E_e}(\underline{x}) = J(\underline{a})dV_{\Delta_e}}$

# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. unidimensionnel : maille de **barre à 2 nœuds** (fonctions de forme de degré 1)

*(2 node bar)*




Les polynômes :

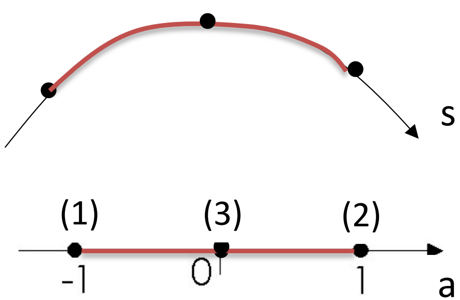
$$N_1(a) = \frac{1-a}{2}$$

$$N_2(a) = \frac{1+a}{2}$$

conviennent

- $N_1(-1) = \frac{1+1}{2} = 1$
- $N_1(1) = \frac{1-1}{2} = 0$
- $N_2(-1) = \frac{1-1}{2} = 0$
- $N_2(1) = \frac{1+1}{2} = 1$

Ex. unidimensionnel : maille de **barre à 3 nœuds** (fonctions de forme de degré 2)

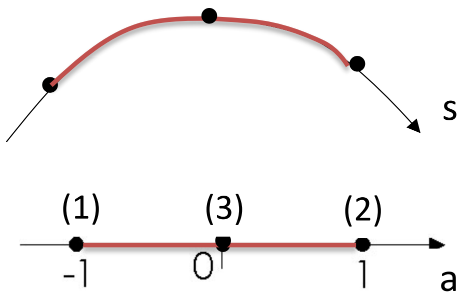



On cherche des polynômes de degré 2 :

$$N_k(a) = \alpha_k a^2 + \beta_k a + \gamma_k$$

# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. unidimensionnel : maille de **barre à 3 nœuds** (fonctions de forme de degré 2)




On veut : $N_1(-1) = 1 \quad N_1(0) = 0 \quad N_1(1) = 0$

On obtient : $\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 1 \\ \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\ \beta_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

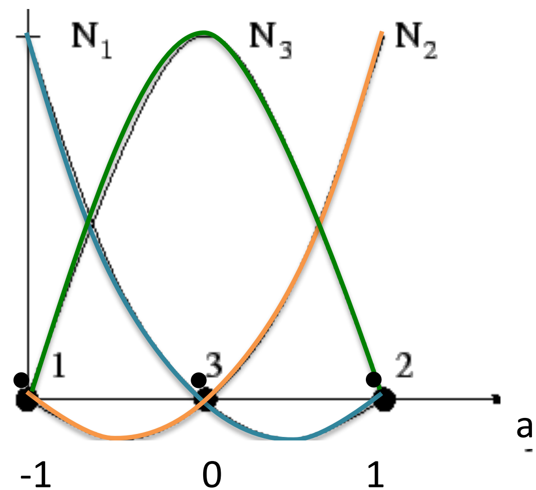
Et au final : $$N_1(a) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(a-1)$$

En procédant de manière analogue pour les autres noeuds :

$$N_1(a) = \frac{1}{2}a(a-1)$$

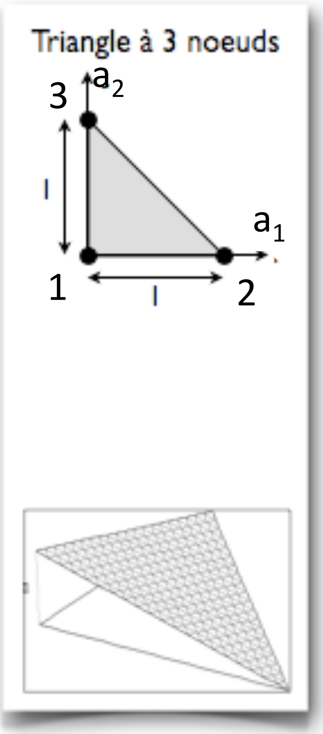
$$N_2(a) = \frac{1}{2}a(a+1)$$

$$N_3(a) = (1-a^2)$$



# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. bidimensionnel : **triangle à 3 nœuds T3** (fonctions de forme de degré 1)




**Méthode des « droites »**

Equation de la droite passant par les autres nœuds que 1 : $a_2 = 1 - a_1$

Soit $1 - a_1 - a_2 = 0$

On chercher $N_1$ telle que :

$$N_1(a_1, a_2) = k(1 - a_1 - a_2)$$

On veut que $N_1(\underline{a}^{(1)}) = N_1(0,0) = 1$

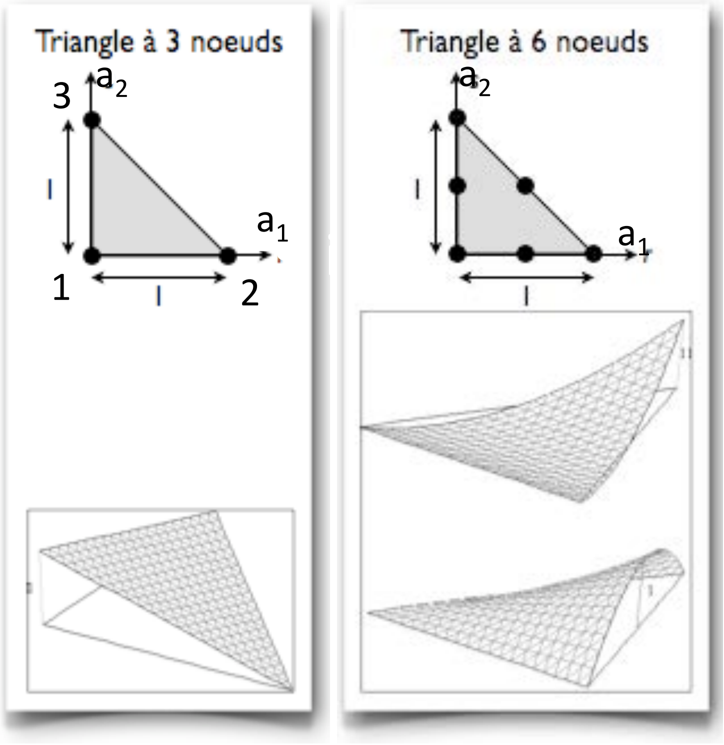
Donc k = 1 et $\boxed{N_1 = (1 - a_1 - a_2)}$

De même : $\boxed{N_2 = a_1}$ $\boxed{N_3 = a_2}$

T3 fonctions linéaires de $a_1$ et $a_2$ .

# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. bidimensionnel : **triangle à 3 nœuds T3** (fonctions de forme de degré 1)

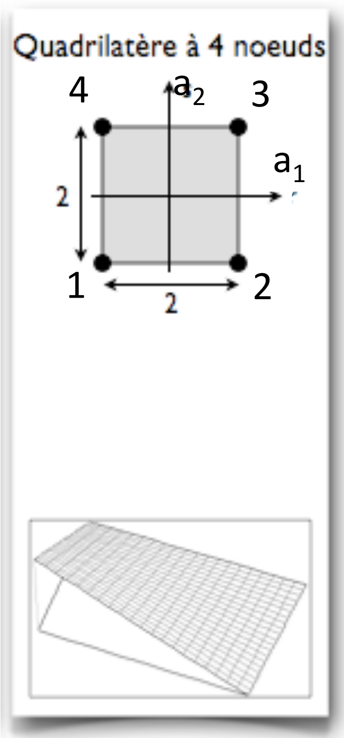


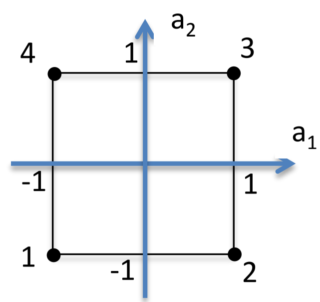

T3 fonctions linéaires de $a_1$ et $a_2$ . T6 fonctions quadratiques (cf TD)

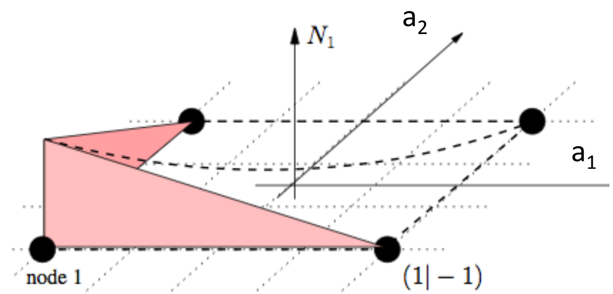
# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. bidimensionnel : **quadrilatère à 4 nœuds Q4** (fonctions de forme de degré 1 par rapport à chaque coordonnée $a_i$)

Rq : Sur les côtés on retrouve les $N_i$ de B2.




$$N_1 = \frac{1}{4}(1-a_1)(1-a_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+a_1)(1-a_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+a_1)(1+a_2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-a_1)(1+a_2)$$

Obtenues par ex par la méthode des droites (à faire à la maison)

# Fonctions de forme des éléments courants

Ex. bidimensionnel : **quadrilatère à 4 noeuds et plus.** (Utilisation de familles de polynômes)

- Famille de **Lagrange**

Ex pour Q4 :

$$N_i(a_1,a_2) = \frac{(a_1 - a_1^{(j)})(a_2 - a_2^{(j)})}{(a_1^{(i)} - a_1^{(j)})(a_2^{(i)} - a_2^{(j)})}$$

Avec (j) le nœud opposé à (i)

Q4

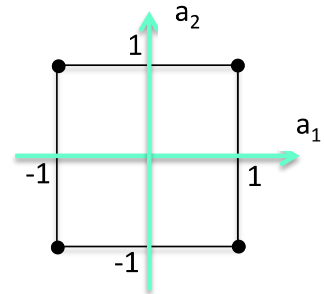
$1$

$a_1 \quad a_2$

$a_1^2 \quad a_1a_2 \quad a_2^2$

$a_1^3 \quad a_1^2a_2 \quad a_1a_2^2 \quad a_2^3$

$a_1^4 \quad a_1^3a_2 \quad a_1^2a_2^2 \quad a_1a_2^3 \quad a_2^4$



# Fonctions de forme des éléments courants

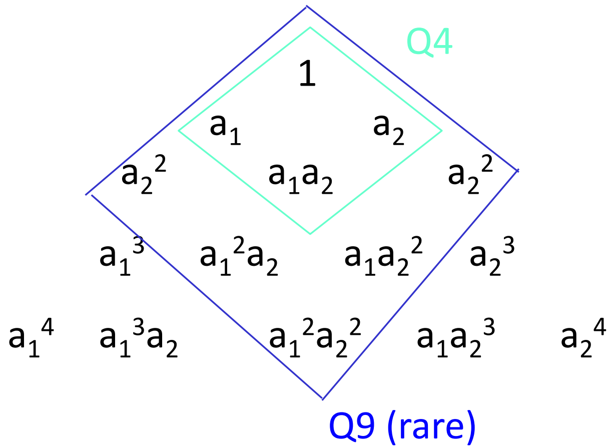
Ex. bidimensionnel : **quadrilatère à 4 noeuds et plus.** (Utilisation de familles de polynômes)

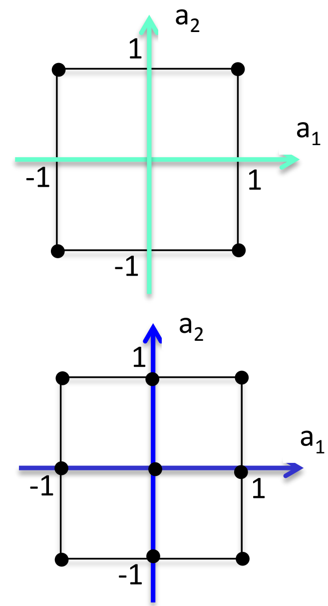
- Famille de **Lagrange**

Ex pour Q4 :

$$N_i(a_1, a_2) = \frac{(a_1 - a_1^{(j)})(a_2 - a_2^{(j)})}{(a_1^{(i)} - a_1^{(j)})(a_2^{(i)} - a_2^{(j)})}$$

Avec (j) le nœud opposé à (i)



# Fonctions de forme des éléments courants

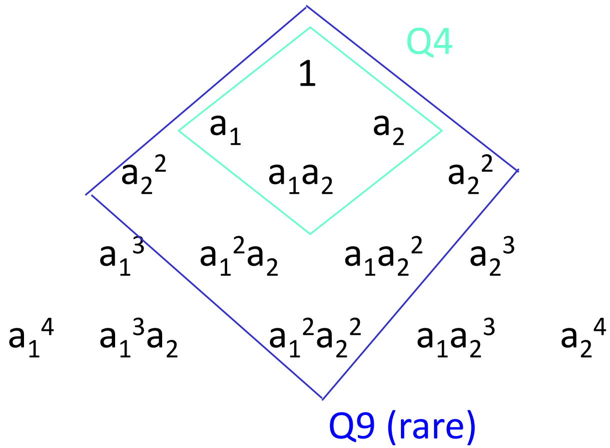
Ex. bidimensionnel : **quadrilatère à 4 noeuds et plus.** (Utilisation de familles de polynômes)

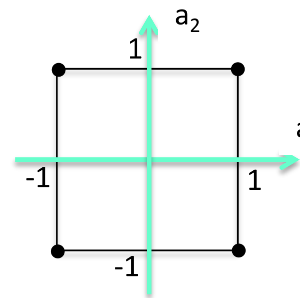
- Famille de **Lagrange**

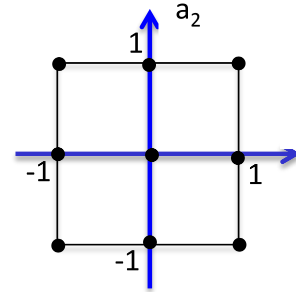
Ex pour Q4 :

$$N_i(a_1,a_2) = \frac{(a_1 - a_1^{(j)})(a_2 - a_2^{(j)})}{(a_1^{(i)} - a_1^{(j)})(a_2^{(i)} - a_2^{(j)})}$$

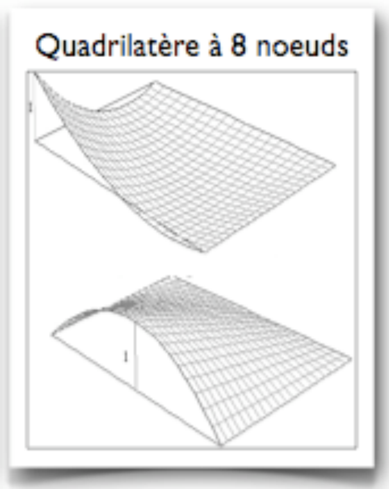
Avec (j) le nœud opposé à (i)

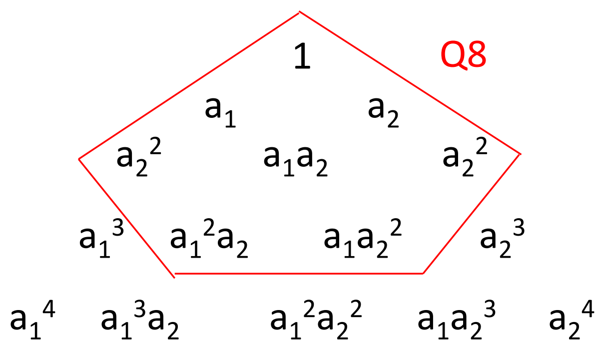


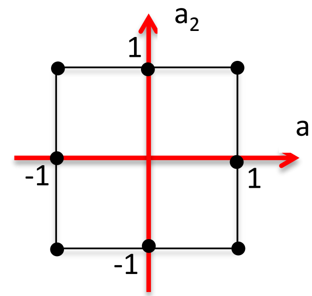




- Famille de **Serendip** (Lagrange incomplet)



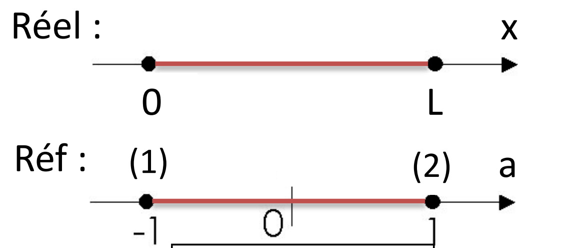



# Jacobiens des éléments courants

Calcul de quelques Jacobiens :

- Cas 1D (B2) : $x = \dfrac{1-a}{2}x^{(1)} + \dfrac{1+a}{2}x^{(2)}$

$$J(a) = \frac{dx}{da} = -\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(x^{(2)} - x^{(1)}\right)$$

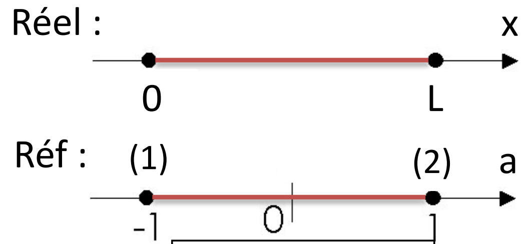



$$\boxed{J(a)_{L2} = \frac{L}{2}}$$

Longueur de $E_e$

# Jacobiens des éléments courants

Calcul de quelques Jacobiens :



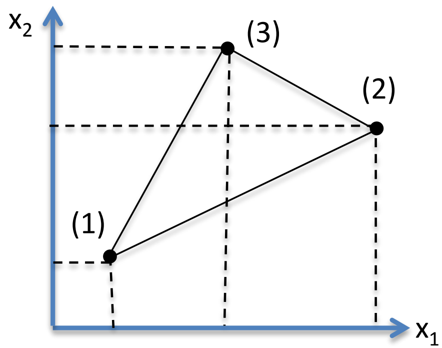

- Cas 1D (B2) : $x = \frac{1-a}{2}x^{(1)} + \frac{1+a}{2}x^{(2)}$

$$J(a) = \frac{dx}{da} = -\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(x^{(2)} - x^{(1)}\right)$$

$$\boxed{J(a)_{L2} = \frac{L}{2}}$$

Longueur de $E_e$

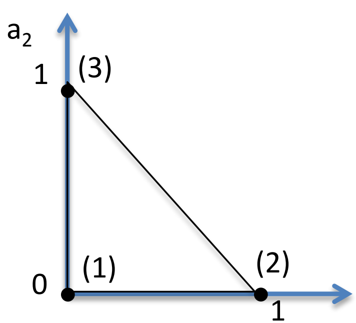
- Cas 2D (T3) : $\underline{x} = (1 - a_1 - a_2)\underline{x}^{(1)} + a_1\underline{x}^{(2)} + a_2\underline{x}^{(3)}$




$$[D_N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial a_1} & \frac{\partial N_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial a_1} & \frac{\partial N_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial a_1} & \frac{\partial N_3}{\partial a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J] = {}^t[Coord]\,.\,[D_N] = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_1^{(3)} - x_1^{(1)} \\ x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} \end{bmatrix}$$



# Jacobiens des éléments courants

Rq : Les éléments les plus simple (B2, T3, Tet4) ont un Jacobien **constant**.

$$\boxed{J(\underline{a})_{T3} = 2 \times Aire_{E_e}}$$

$$\boxed{J(\underline{a})_{Tet4} = 6 \times Volume_{E_e}}$$

# Jacobiens des éléments courants

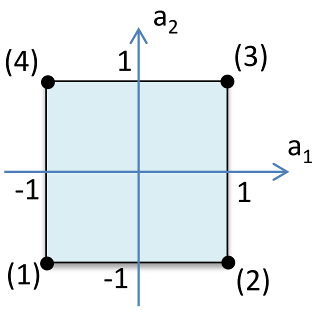
Rq : Les éléments les plus simple (B2, T3, Tet4) ont un Jacobien **constant**.

$$\boxed{J(\underline{a})_{T3} = 2 \times Aire_{E_e}} \qquad \boxed{J(\underline{a})_{Tet4} = 6 \times Volume_{E_e}}$$

- Cas 2D (Q4) :

$$[D_N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial a_1} & \frac{\partial N_1}{\partial a_2} & \dots \\ \frac{\partial N_2}{\partial a_1} & \frac{\partial N_2}{\partial a_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-a_2) & -\frac{1}{4}(1-a_1) & \dots \\ \frac{1}{4}(1-a_2) & -\frac{1}{4}(1+a_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$[J] = {}^t[Coord][D_N] = f(a_1, a_2) \neq \text{cste}$$




$$N_1 = \frac{1}{4}(1-a_1)(1-a_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+a_1)(1-a_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+a_1)(1+a_2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-a_1)(1+a_2)$$