2A004 Statique et dynamique des fluides. Ecrit 13 novembre 2014

I - Cours

1. Rappelez la forme globale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
2. Écrivez la forme locale.

II - Statique

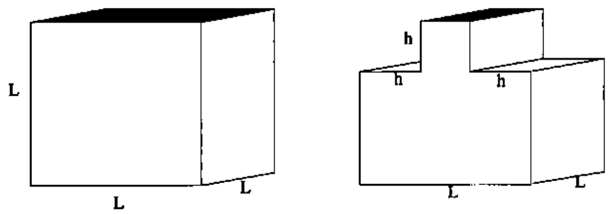


FIGURE 1 – (gauche) Cube rempli d'eau (droite) Même cube avec une encoche.

Un cube de cotés $L \times L \times L$ est rempli d'eau, la partie supérieure est ouverte et à la pression atmosphérique comme le montre la Figure 1.

1. A partir de la forme locale de la statique des fluides touvez la variation de la pression avec la coordonnée z, $p(z)$.
2. Calculez la resultante des forces de pression sur l'une des parois verticales
3. Calculez la resultante des forces de pression sur le fond du cube et montrez que c'est bien le poids toute l'eau.
4. On fait maintenant une encoche de hauteur h et largeur h de chaque coté du cube comme le montre la Figure 1, il y a forcement moins d'eau dans le nouveau recipient. Alors montrer que la resultante des forces de pression **sur toutes les parois horizontales** est encore le poids du nouveau volume d'eau.

III - Cinématique

Nous avons les composantes de la vitesse (u, v, w) en coordonnées cartésiennes

$$u = A$$
$$v = 3Bx^2$$
$$w = 0$$

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ? Justifiez.
2. C'est une représentation de Lagrange ou d'Euler ? Justifiez.
3. Soit (x_0, y_0, z_0) la position d'une particule de fluide à l'instant $t = 0$, donnez la position de la particule de fluide $(x(t), y(t), z(t))$, à un instant t.
4. Calculez l'accélération de la particule de fluide.

IV - Ecoulement potentiel

Soit un écoulement plan, stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible (ρ constant) donné par

$$f(z) = U_0\ z + C\ ln(z)$$

où U_0 et C sont des constantes réelles positives. z est le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ et $x = rcos\ \theta$, $y = rsin\ \theta$.

1. Exprimez la vitesse en composantes cartésiennes, $u(x, y)e_x + v(x, y)e_y$.
2. Dans quel point de l'axe x la vitesse s'annule ?
3. Si vous avez identifié les deux champs de vitesse dans $f(z)$, donnez l'allure des lignes de courant.

III – Cinématique

1. Plan (car $w=0$), stationnaire (pas de dépendance explicite en t) incompressible $\left(\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\right)$ ~~rot~~ rotationnel $\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{e}_z\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$ $\neq 0$

2. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\boxed{\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ EULER}}$

3) $u = \frac{dx}{dt} = A \Rightarrow x = At + \alpha$

$v = \frac{dy}{dt} = 3Bx^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3B(At+\alpha)^2 \Rightarrow y = \frac{3B}{3A}(At+\alpha)^3 + \beta$

$$y = \frac{B}{A}(At+\alpha)^3 + \beta$$

$w = \frac{dz}{dt} = 0 \qquad z = \gamma$

Cond. init

$x(t=0) = \alpha = x_0 \Rightarrow \boxed{\alpha = x_0}$

$z(t=0) = z_0 = \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = z_0}$

$y(t=0) = \frac{B}{A}\alpha^3 + \beta = y_0 \Rightarrow \boxed{\beta = y_0 - x_0^3\frac{B}{A}}$

$$\begin{cases} x = At + x_0 \\ y = \frac{B}{A}(At + x_0)^3 + y_0 - x_0^3 \frac{B}{A} \\ z = z_0 \end{cases}$$

LAGRANGE

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$

4) $\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\begin{cases} \Gamma_x = 0 \\ \Gamma_y = 6AB(At + x_0) \\ \Gamma_z = 0 \end{cases}$

IV – Écoulement potentiel

$w = \frac{df}{dz} = u - iv$ (en coordonnées cartésiennes)

$$w = U_0 + \frac{C}{z} = U_0 + \frac{C}{r}e^{-i\theta} = U_0 + \frac{C}{r}\cos\theta - i\frac{C}{r}\sin\theta$$

2A004 - écrit 13/11/14

I Cours. 1. $0 = \int_V \rho \bar{g}\, dV - \int_S p \bar{n}\, dS$ 2. $\overline{\text{grad}}\, p = \rho \bar{g}$

II. Statique 1. $\overline{\text{grad}}\, p = \rho \bar{g}$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$\Rightarrow p = p(z)$ et $p = -\rho g z + A$.

Si le repère est sur le fond du cube

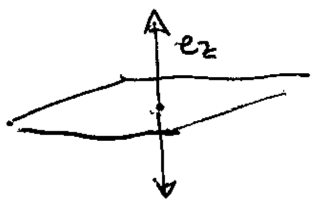
$p(z=L) = P_{atm} \Rightarrow P_{atm} = -\rho g L + A$ =

$A = P_{atm} + \rho g L$

donc $\boxed{p(z) = \rho g (L - z) + P_{atm}}$

Pour les calcules $P_{atm} = 0$ (ou $p'(z) = p(z) - P_{atm}$)

3. Sur le fond

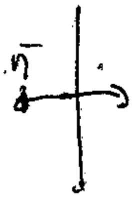


$F = \int_S -p(z=0)\, \bar{n}\, dS$ $\boxed{\bar{n} = +\bar{e}_z}$

la normale se dirige vers le milieu qui agit

$F = -\underbrace{\rho g (L)}_{p} \underbrace{L^2}_{S} = \underbrace{-\rho g L^3}_{\text{le "poids" de l'eau !!}}$

2.



$\bar{F}_h = -\int_S p(z)\, \bar{n}\, dS$ $\bar{n} = +\bar{e}_x$

$\bar{F}_h = - L \int_0^L \rho g (L - z)\, dz = -L \rho g \left[Lz - \frac{z^2}{2} \right]_0^L = -L \rho g \left[L^2 - \frac{L^2}{2} \right]$

$= \underline{\underline{-\frac{\rho g}{2} L^3}}$.

4 - Sur le fond (même que le point 3, $\rho g L^3$)

sur les parois horizontales supérieures de surface $L \times h$ la pression est $p(z = L - h) = \rho g (L - L + h) = \rho g h$ donc une force $F_H^{(2)} = 2 \rho g h^2 L$ soit $F = \rho g L^3 - \rho g h^2 L = \rho g L (L^2 - h^2)$

"poids" de l'eau égale $\underbrace{\rho g L^3}_{\text{total}} - 2$ encoches $(2 \rho g h^2 L) = \rho g L (L^2 - h^2)$

$$\begin{cases} u = U_0 + \frac{c}{r}\cos\theta \\ v = \frac{c}{r}\sin\theta \end{cases}$$

$$u = U_0 + \frac{c}{r^2}\overbrace{r\cos\theta}^{x} = U_0 + \frac{c\,x}{x^2+y^2}$$

$$v = \frac{c}{r^2}\overbrace{r\sin\theta}^{y} = \frac{c\,y}{x^2+y^2}$$

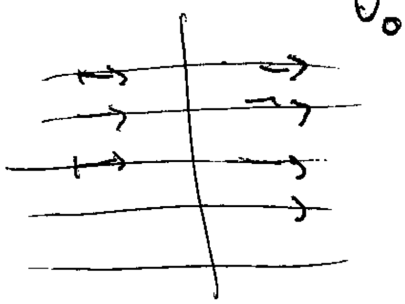
2. Vitesse nulle pour $y=0$

$\vec{x} \Rightarrow \quad 0 = U_0 + \frac{x\,C}{x^2} \quad \Rightarrow \boxed{x = -\frac{C}{U_0}}$

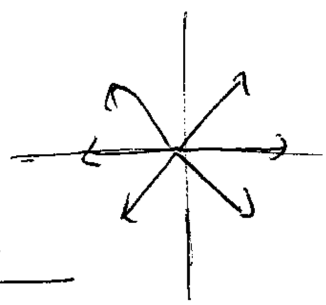
$\vec{y} \Rightarrow \quad v = 0$

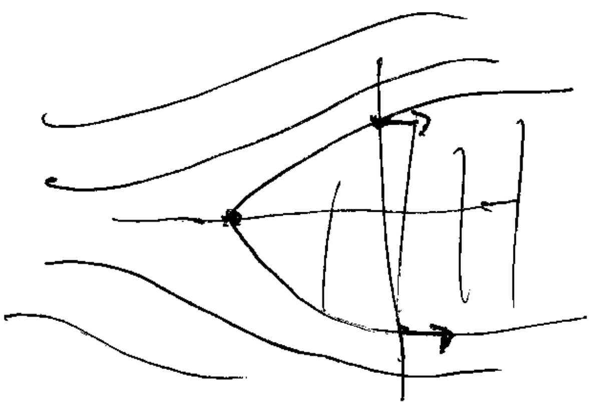
donc le point est $\left(-\frac{C}{U_0}, 0\right)$.

3 $f(z) = U_0 z$ écoulement uniforme U_0



$f(z) = C \ln z$ puits



$=$ 

Comme dans le TD.

2A004 Statique et dynamique des fluides. Ecrit 13 novembre 2014

I - Cours

1. Rappelez la forme globale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
2. Écrivez la forme locale.

II - Statique

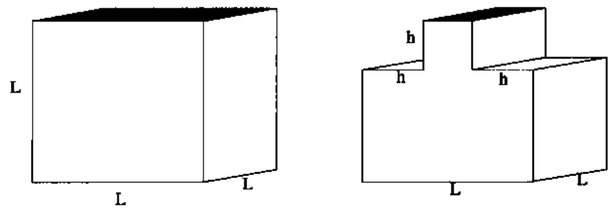


FIGURE 1 – (gauche) Cube rempli d'eau (droite) Même cube avec une encoche.

Un cube de cotés $L \times L \times L$ est rempli d'eau, la partie supérieure est ouverte et à la pression atmosphérique comme le montre la Figure 1.

1. A partir de la forme locale de la statique des fluides touvez la variation de la pression avec la coordonnée z, $p(z)$.
2. Calculez la resultante des forces de pression sur l'une des parois horizontales.
3. Calculez la resultante des forces de pression sur le fond du cube et montrez que c'est bien le poids toute l'eau.
4. On fait maintenant une encoche de hauteur h et largeur h de chaque coté du cube comme le montre la Figure 1, il y a forcement moins d'eau dans le nouveau recipient. Alors montrer que la resultante des forces de pression **sur toutes les parois horizontales** est encore le poids du nouveau volume d'eau.

III - Cinématique

Nous avons les composantes de la vitesse (u, v, w) en coordonnées cartésiennes

$$u = A$$
$$v = 3Bx^2$$
$$w = 0$$

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ? Justifiez.
2. C'est une représentation de Lagrange ou d'Euler ? Justifiez.
3. Soit (x_0, y_0, z_0) la position d'une particule de fluide à l'instant $t = 0$, donnez la position de la particule de fluide $(x(t), y(t), z(t))$, à un instant t.
4. Calculez l'accélération de la particule de fluide.

IV - Ecoulement potentiel

Soit un écoulement plan, stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible (ρ constant) donné par

$$f(z) = U_0\ z + C\ ln(z)$$

où U_0 et C sont des constantes réelles positives. z est le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ et $x = rcos\ \theta$, $y = rsin\ \theta$.

1. Exprimez la vitesse en composantes cartésiennes, $u(x, y)e_x + v(x, y)e_y$.
2. Dans quel point de l'axe x la vitesse s'annule ?
3. Si vous avez identifié les deux champs de vitesse dans $f(z)$, donnez l'allure des lignes de courant.