SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 2 : les ondes acoustiques

Exercice 1 : Onde acoustique sphérique

Dans ce problème, on cherche à déterminer le champ acoustique émis par une sphère vibrante. On considère pour cela une sphère de rayon a et on suppose qu'elle vibre radialement à la fréquence f_0 avec une vitesse V_0. On considère un repère placé au centre de la sphère. La sphère vibre dans l'air, milieu supposé homogène et isotrope. On note ρ_0 la masse volumique du milieu et c_0 la vitesse du son. On rappelle l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

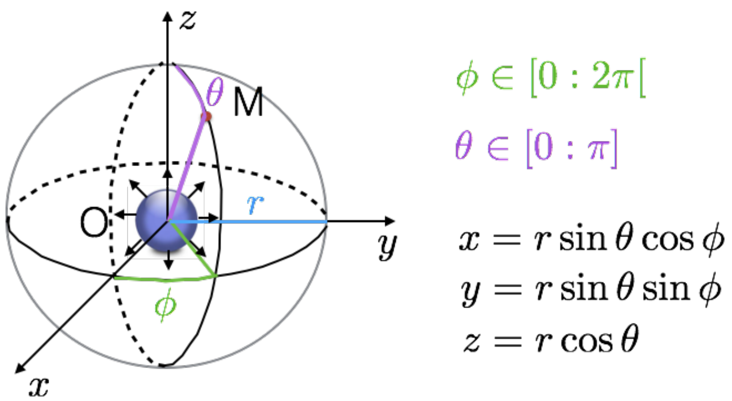


Figure 1 – Sphère pulsante et coordonnées sphériques

1. Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la pression au point d'écoute M de coordonnées (r, θ, ϕ).

Solution: L'équation des ondes à 3D s'écrit :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$$

On remplace le Laplacien par son expression en coordonnées sphériques on obtient :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)p_a = 0$$

Le problème est à géométrie sphérique (milieu et source), par conséquent les dérivées par rapport à θ et ϕ sont nulles :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p_a}{\partial r}\right) = 0$$

2. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 r p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} = 0$$

Solution:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p_a}{\partial r}\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial p_a}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2}\right)\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r p_a}{\partial r}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(p_a + r\frac{\partial p_a}{\partial r}\right)\\ &= 2\frac{\partial p_a}{\partial r} + r\frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 r p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} = 0$$

3. Montrer que la solution de cette équation s'écrit :

$$p_a(r,t) = \frac{1}{r}f(r - c_0 t) + \frac{1}{r}g(r + c_0 t)$$

Solution: On remarque que cette équation est l'équation des ondes 1D dont on connaît la solution :

$$r p_a = f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)$$

Par conséquent :

$$p_a(r,t) = \frac{1}{r}f(r - c_0 t) + \frac{1}{r}g(r + c_0 t)$$

4. Quelle est la signification physique des deux termes de cette solution ?

Solution: Le premier terme $f(r - c_0t)$ est une onde divergente (qui se propage vers les r croissants). L'amplitude de ce terme décroît en $1/r$.

Le deuxième terme $g(r + c_0t)$ est une onde convergente (qui se propage vers les r décroissants). L'amplitude de ce terme croît en $1/r$. Potentiellement, il y a donc une singularité en $r = 0$. En fait, ce problème n'en n'est pas un dans notre cas puisique la sphére est située en $r = 0$ avec un rayon a.

5. La sphère émet une impulsion à $t = 0$ d'amplitude A. Tracer qualitativement la pression $p_a(r, t)$ pour $t = 0$, $t_1 > 0$ et $t_2 > t_1$.

Solution: Dans cette configuration, seul le terme correspondant aux ondes divergente est à considérer dans la solution. La solution est tracée sur la figure suivante :

6. On suppose que la sphère vibre de façon harmonique. La vitesse de vibration radiale, en notation complexe, s'écrit donc : $V_s(t) = V_0 \exp(-i\omega_0 t)$. Montrer que la pression s'écrit :

$$p_a(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(k_0 r - \omega_0 t))$$

avec A une constante que l'on déterminera par la suite.

Solution: On ne considère que les ondes divergentes produites par la sphère :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r} f(r - c_0 t)$$

la sphère vibre de façon harmonique, ainsi la fonction $f(c_0 t)$ s'écrit :

$$f(c_0 t) = A \exp(-i\omega_0 t) = A \exp(-ik_0(c_0 t))$$

La pression s'écrit donc :

$$p_a(r, t) = \frac{A}{r} \exp(ik_0(r - c_0 t)) = \frac{A}{r} \exp(i(k_0 r - \omega_0 t))$$

7. En utilisant les conditions aux limites du problème, exprimer la constante A.

Solution: On va utiliser la propriété de continuité des vitesses normales à la surfaces de la sphère entre la sphère et le fluide :

$$V_s(t) = \mathbf{v_a}(r = a, t).\mathbf{e_r}$$

Tout d'abord on exprime $\mathbf{v_a}(r, t)$ grâce à l'équation de quantité de mouvement linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v_a}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p_a$$

$$
\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v_a}}{\partial t}.\mathbf{e_r} &= -\mathbf{grad} p_a.\mathbf{e_r} \\
\rho_0 \frac{\partial V s(t)}{\partial t} &= \left(-\frac{\partial p_a}{\partial r}\right)_{r=a} \\
\rho_0 \frac{\partial V_0 \exp(-i\omega_0 t)}{\partial t} &= \left(-\frac{\partial \frac{A}{r}\exp(i(k_0 r - \omega_0 t))}{\partial r}\right)_{r=a} \\
-i\omega_0 \rho_0 V_0 \exp(-i\omega_0 t) &= \left(\frac{A}{r^2}\exp(i(k_0 r - \omega_0 t)) - \frac{ik_0 A}{r}\exp(i(k_0 r - \omega_0 t))\right)_{r=a} \\
-i\omega_0 \rho_0 V_0 &= \left(\frac{A}{r^2}\exp(ik_0 r) - \frac{ik_0 A}{r}\exp(ik_0 r)\right)_{r=a}
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$A = \frac{i\omega_0 \rho_0 V_0 a^2}{ik_0 a - 1}\exp\left(-ika\right)$$

Et donc finalement :

$$p(r,t) = \frac{i\omega_0 \rho_0 V_0 a^2}{(ik_0 a - 1)}\frac{\exp\left(-ika\right)}{r}\exp(i(kr - \omega_0 t)$$

8. Le niveau de pression en dB est défini par :

$$L = 10\log\left(\frac{p_{moy}^2}{p_{ref}^2}\right)$$

où $p_{ref} = 2.10^{-5}$ Pa et le terme p_{moy} désigne la pression moyenne :

$$p_{moy} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p(t)^2 dt}$$

avec T la période de l'onde (ou la période d'observation). Calculer la pression moyenne p_{moy} à la distance r pour une onde sphérique (on prendra : $p_a(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega_0 t)$).

Solution: Faire remarquer ici qu'on utilise l'écriture de la pression sous forme réelle : $p_a(r,t) = Re(A/r exp(i(kr - \omega_0 t))$ obligatoire pour un calcul propre ...

$$
\begin{aligned}
p_{moy} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p(t)^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{Tr^2}\int_0^T \cos(kr - \omega_0 t)^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{Tr^2}\int_0^T \frac{1 + \cos(2(kr - \omega_0 t))}{2} dt} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2}r}
\end{aligned}
$$

9. Que vaut alors le niveau en dB en fonction de la distance r ?

Solution: On reporte la solution de la question précédente dans la définition des dB :

$$L = 20\log\left(\frac{A}{\sqrt{2}rp_{ref}}\right)$$

10. On donne $A = 28$, calculer le niveau en dB à 1m de la source.

Solution:

$$L(r = 1m) = 20\log\left(\frac{28}{\sqrt{2}.1.2.10^{-5}}\right) \approx 20\log\left(\frac{28}{2.8\ 10^{-5}}\right) = 20\log\left(10^{+6}\right) = 120dB$$

11. Montrer que le niveau en dB peut s'écrire :

$$L(r) = L(r = 1m) - 20log(r)$$

Solution: En utilisant les propriétés sur les logs, on trouve directement :

$$\begin{aligned} L &= 20\log\left(\frac{A}{\sqrt{2}rp_{ref}}\right) \\ &= 20\log\left(\frac{A}{\sqrt{2}p_{ref}}\right) - 20\log(r) \\ &= L(r = 1m) - 20log(r) \end{aligned}$$

12. Que vaut la pression en $r = 2m$, $r = 10m$, $r = 10000m$, commenter ... !

Solution: Pour ces applications numériques, il suffit de se rappeler que $\log(2) \approx 0.3$:

$$L(r = 2m) = L(1) - 6 = 114dB$$

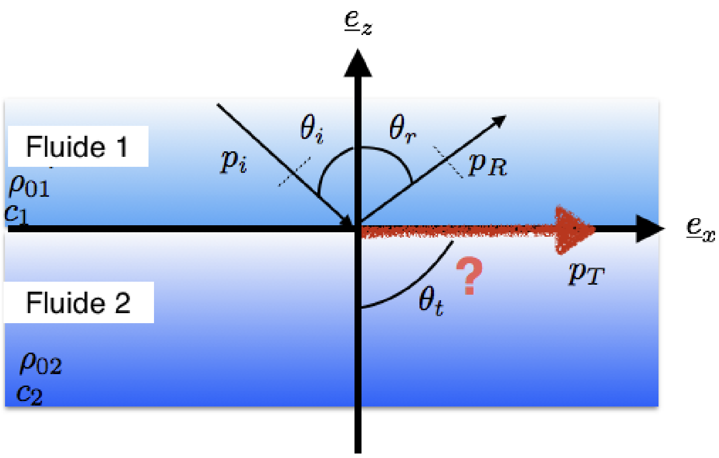
$$L(r = 10m) = L(1) - 20 = 100dB$$

$$L(r = 10000m) = L(1) - 80 = 40dB$$

On constate qu'on ne percevra plus la source à une distance de 10^6m, ce qui est un peu loin. Plusieurs éléments n'ont pas étaient pris en compte dans notre modèle simplifié tel que l'absorption.

Exercice 2 : Réflexion totale - onde plane inhomogène

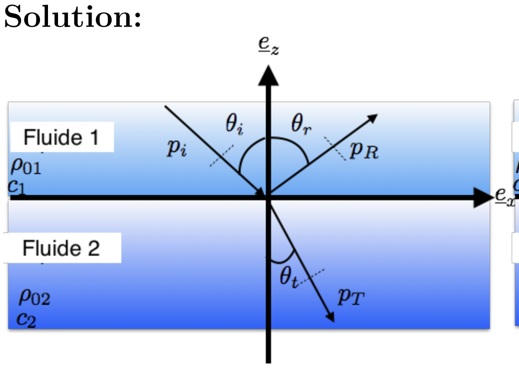
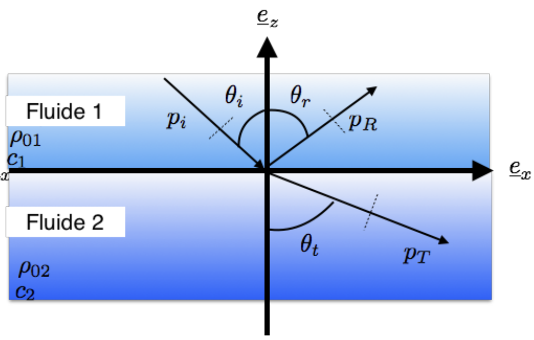
Nous avons vu dans le cours, qu'une onde acoustique incidente à l'interface entre 2 fluides (ayant comme impédance $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$) donne une onde réfléchie et une onde transmise. Selon les cas, il existe un angle d'incidence critique θ_{cr} au-delà duquel, il ne peut pas y avoir d'onde plane transmise (l'angle de transmission n'est alors plus défini) on dit alors qu'il y a réflexion totale. Cela veut-il pour autant dire qu'aucune onde n'est transmise à travers l'interface ? Pour répondre à cette question, nous allons étudier cette situation.

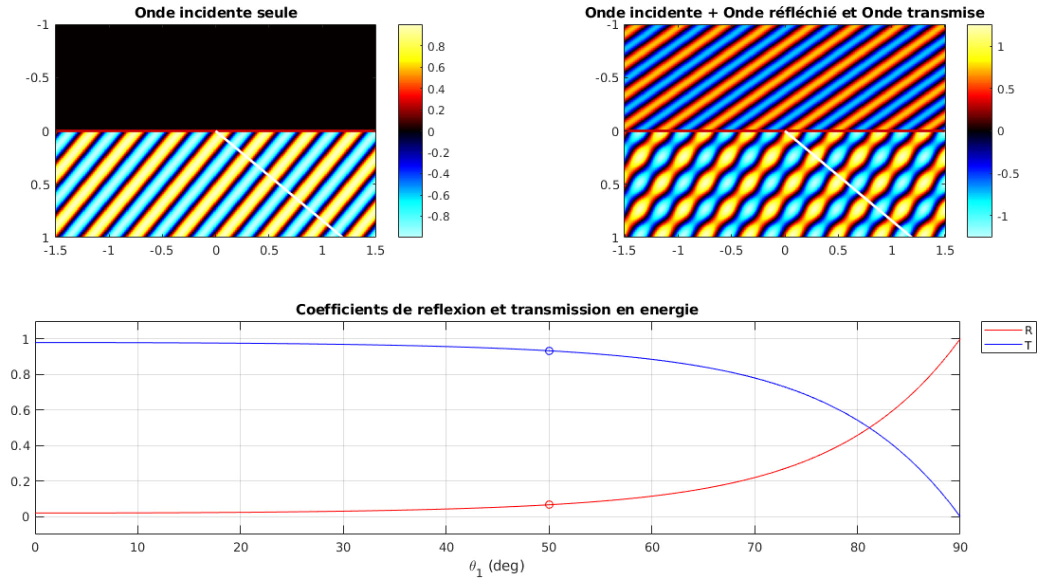


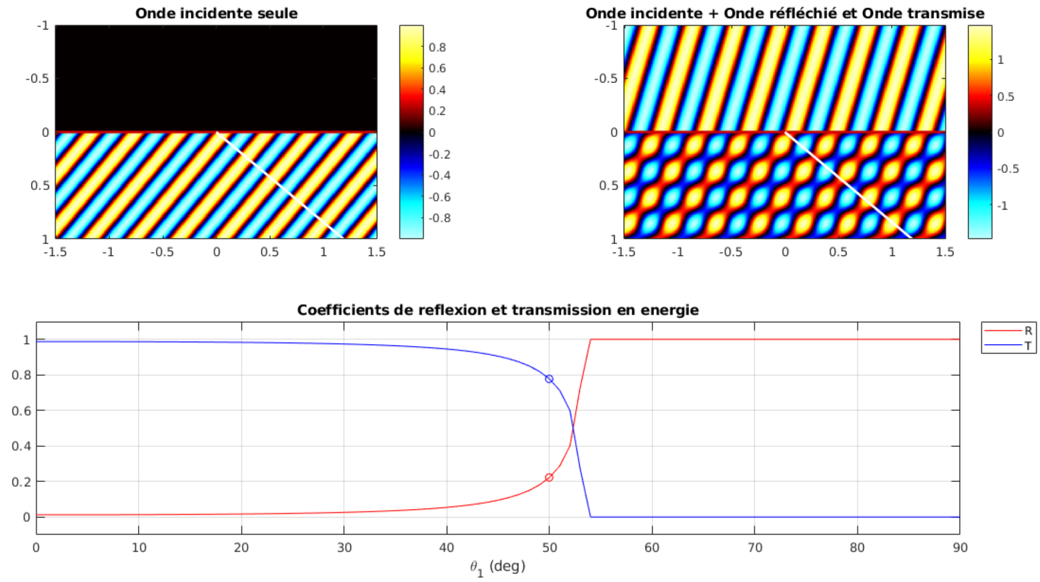
1. Rappeler les lois de Snell-Descartes.

> **Solution:** Les angles de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont égaux :
>
> $$\theta_i = \theta_r = \theta$$
>
> par ailleurs :
>
> $$\frac{\sin \theta}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2}$$

2. Faire une figure schématisant la réflexion/transmission d'une onde à l'interface entre 2 fluides pour $c_2 < c_1$ et $c_2 > c_1$. Dans quel cas l'angle θ_t peut-il ne pas être défini ? Que vaut alors l'angle critique.

> **Solution:**
>
> 
>
>
> 
>





L'angle θ_t peut ne pas être défini dans le cas $c_2 > c_1$. On appelle angle critique θ_{cr}, l'angle d'incidence tel que l'angle de l'onde transmise soit égal à $\pi/2$: $\theta_i = \theta_{cr}$ si $\theta_t = \pi/2$ dans ce cas l'angle critique vaut :

$$\theta_{cr} = \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

On a donc une onde transmise seulement si $\theta_i < \theta_{cr}$.

3. D'après les lois de Snell-Descartes, la composante horizontale du nombre d'onde est la même pour les ondes incidentes, réfléchies et transmises. Par conséquent, on a la relation suivante : $k_{tx} = k_{ix} = \frac{\omega}{c_1} \sin\theta_i$, en déduire la composante suivant z du vecteur d'onde $\underline{k}_t$ dans le cas où $\theta_i > \theta_{cr}$:

Solution:

Les relations de dispersion dans les milieux 1 et 2 sont $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ et $\frac{\omega}{k_2} = c_2$. Par ailleurs :

$\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$. On en déduit :

$$k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \frac{\omega^2}{c_1^2}\sin^2\theta_i = \frac{\omega^2}{c_2^2}\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\sin^2\theta_i\right) \quad (1)$$

Dans le cas où $\theta_i > \theta_{cr}$, alors :

$$\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_i > 1, \quad (2)$$

ce qui entraîne d'après la relation 1 que le carré de la composante suivant z du vecteur d'onde de l'onde transmise est négatif : $k_{tz}^2 < 0$, c'est à dire que la composante verticale du vecteur $\underline{k}_t$ est imaginaire pur. Il existe deux solutions admissibles :

$$k_{tz} = \pm i\frac{\omega}{c_2}\sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2}\sin^2\theta_i - 1} = \pm i\alpha, \quad (3)$$

4. Montrer que l'onde plane transmise dans le milieu 2 peut s'écrire :

$$p_t = TA\exp(z/\delta)\exp[i(k_x x - \omega t)], \quad (4)$$

Donner une interprétation physique de δ.

Solution: La pression acoustique transmise est :

$$p_t = TA\exp[\mp\alpha z]\exp[i(k_x x - \omega t)]. \quad (5)$$

La première solution (signe "-") est exponentiellement croissante lorsque l'on pénètre dans le milieu 2 ($z \to -\infty$), alors que la seconde (signe "+") est exponentiellement décroissante. Seule cette dernière est physiquement acceptable. On peut encore l'écrire :

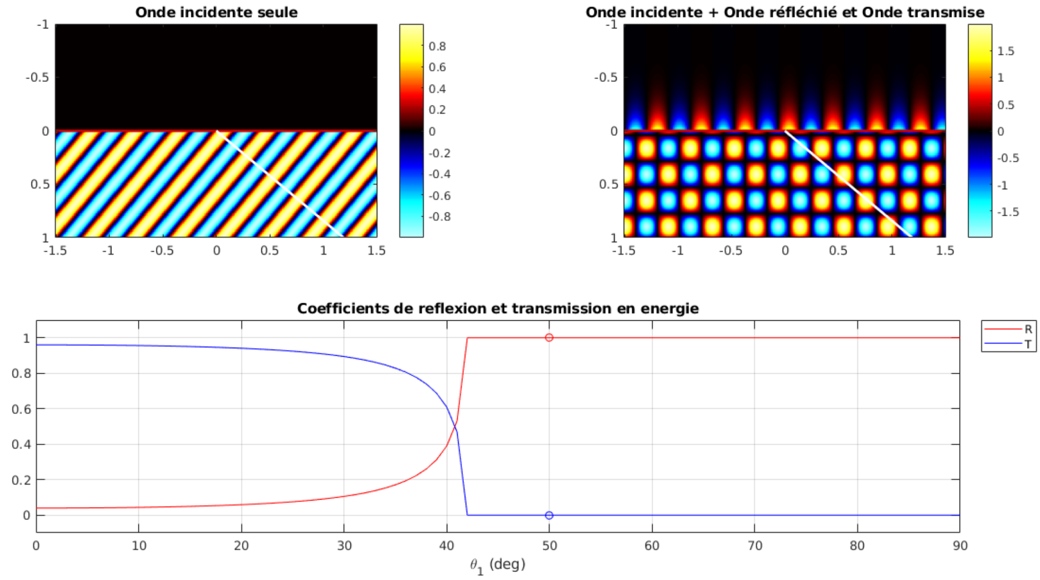
$$p_t = TA\exp(z/\delta)\exp[i(k_x x - \omega t)],$$

où δ a la dimension d'une distance : c'est la distance caractéristique sur laquelle l'onde décroît exponentiellement :

$$\delta = \frac{c_2}{\omega}\left(\frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_{cr}} - 1\right)^{-1/2}.$$

5. Donner une interprétation physique de la solution précédente.

Solution: Ce type d'onde est appelé onde plane inhomogène.



Par opposition à l'onde plane progressive, l'onde plane inhomogène se propage dans la direction Ox , avec une amplitude exponentiellement décroissante dans la direction $z < 0$

l'onde est évanescente dans la direction verticale.

L'influence de la perturbation acoustique créée par une telle onde est donc restreinte au voisinage de l'interface, sur une épaisseur de l'ordre de δ.

6. Calculer les coefficients R et T au-delà de l'angle critique.

Solution: Le calcul est analogue à celui effectué dans les autres cas, mais il faut utiliser les expressions qui font intervenir les vecteurs d'onde à la place de celles faisant intervenir les angles. Les vecteurs d'ondes sont :

$$\begin{aligned} k_{iz} &= -\omega/c_1 \cos\theta_i, \\ k_{tz} &= i\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent, les coefficients de réflexion et de transmission sont :

$$R = \frac{\cos\theta_i + i\frac{Z_1}{Z_2}\frac{c_2}{\omega}\alpha}{\cos\theta_i - i\frac{Z_1}{Z_2}\frac{c_2}{\omega}\alpha},$$

$$T = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i - i\frac{Z_1}{Z_2}\frac{c_2}{\omega}\alpha}.$$

7. Vérifier alors que $|R| = 1$.