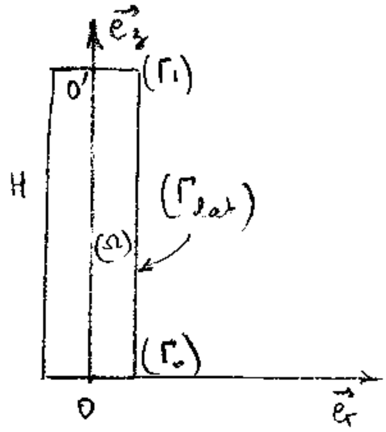
TD n°8 - Corrigé de l'exercice 1 -

Déformation d'un cylindre sous son propre poids.



$$\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$$

1. Préliminaires

Equilibre global de la pièce :

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad \vec{0} &= \int_\Omega -\rho g \vec{e}_z \, r\,dr\,d\theta\,dz + \vec{R} \\ (2)\quad \vec{0} &= \int_\Omega -\vec{OM} \wedge \rho g \vec{e}_z \, r\,dr\,d\theta\,dz + \vec{M}_O \end{aligned}\right\}$$

$(1) \Rightarrow \quad \vec{R} = +\rho g (\mathrm{vol}\,\Omega)\vec{e}_z = \rho g \pi R^2 H \vec{e}_z = p(\mathrm{aire}(\Gamma_0))\vec{e}_z = p.\pi R^2 \vec{e}_z$

D'où $\boxed{p = \rho g H}$

$(2) \Rightarrow \quad \vec{M}_O = + \int_\Omega (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \wedge \rho g \vec{e}_z \, r\,dr\,d\theta\,dz = \rho g \int_\Omega -r^2 \vec{e}_\theta \, dr\,d\theta\,dz$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_1$

$$= \rho g H \int_\Gamma \left[-r^2\cos\theta\,\vec{e}_2 + r^2\sin\theta\,\vec{e}_1\right] dr\,d\theta$$

$$= 0$$

2. Recherche d'une solution analytique

2.1 Equations et C.L du pb $(\mathcal{P})$:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{div}\sigma - \rho g \vec{e}_z = 0 && (3)\\ &\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma\,\mathbb{1} && (4)\\ &\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) && (5)\\ &\sigma(\vec{e}_r) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{lat} && (6)\\ &\sigma(\vec{e}_z) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 && (7)\\ &\sigma(-\vec{e}_z) = \rho g H \vec{e}_z \quad \text{sur } \Gamma_0 . && (8) \end{aligned}\right.$$

• 2.2 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g (z - H) \end{pmatrix}$$

Les équations de Beltrami sont satisfaites(dérivées secondes de sigma nulles)
dont il existe un champ de déplacement associé donc sigma est solution du nouveau problème. Par contre on ne peut rien dire à ce stade sur le fait qu'il soit solution du problème avec condition d'encastrement.
Ou bien on vérifie compatibilité (dérivées secondes de epsilon nulles).

(3) . OK

(6) $\sigma(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ O.K

(7) $\sigma(e_z)\Big|_{z=H} = \rho g (z-H)\, \vec{e_z}\Big/_{z=H} = 0$ (O.K)

(8) $\sigma(-\vec{e_z})_{z=0} = \rho g H \vec{e_z}$

On en déduit, par (4) :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{E} \rho g (z-H) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \rho g (z-H) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} \rho g (z \end{pmatrix}$$

Le champ de déplacements $\vec{u}$ ~~(s'il existe)~~ doit vérifier :

(1) $u_{1,1} = -\nu\alpha(x_3 - H)$ où $\alpha = \frac{1}{E}\rho g$

(2) $u_{2,2} = -\nu\alpha(x_3 - H)$

(3) $u_{3,3} = \alpha(x_3 - H)$

(4) $u_{1,2} + u_{2,1} = 0$

(5) $u_{1,3} + u_{3,1} = 0$

(6) $u_{2,3} + u_{3,2} = 0$

La technique à adopter pour chercher $\vec{u}$ est toujours la même :

• 1) On intègre les 3 premières équations :

(1) ⇒ $u_1 = -\nu\alpha(x_3 - H)x_1 + f_1(x_2, x_3)$

(2) ⇒ $u_2 = -\nu\alpha(x_3 - H)x_2 + f_2(x_1, x_3)$

(3) ⇒ $u_3 = \alpha\left(\frac{x_3^2}{2} - Hx_3\right) + f_3(x_1, x_2)$

• 2) On reporte les expressions trouvées dans (4) (5) (6) :

(4) ⇒ $f_{1,2}(x_2, x_3) + f_{2,1}(x_1, x_3) = 0$ (7)

(5) ⇒ $-\nu\alpha x_1 + f_{1,3}(x_2, x_3) + f_{3,1}(x_1, x_2) = 0$ (8)

(6) ⇒ $-\nu\alpha x_2 + f_{2,3}(x_1, x_3) + f_{3,2}(x_1, x_2) = 0$ (9)

on peut plus rapidement utiliser le résultat du cours et chercher une solution particulière du systèmes aux dérivées partielles puis ajouter la solution homogène qui est le corps rigide

• 3) En dérivant (7) par rapport à x_2 et (8) par rapport à x_3 on obtient des propriétés de $f_1(x_2,x_3)$, à savoir :

(10) $$f_{1,22} = f_{1,33} = 0 \Rightarrow f_1(x_2,x_3) = \alpha_1 x_2 x_3 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1 \quad (13)$$

De même, en dérivant (7) par rapport à x_1 et (9) par rapport à x_3 :

(11) $$f_{2,11} = f_{2,33} = 0 \Rightarrow f_2(x_1,x_3) = \alpha_2 x_1 x_3 + b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + c_2 \quad (14)$$

Enfin, de façon analogue :

(12) $$f_{3,11} = f_{3,22} = \nu\alpha \Rightarrow f_3(x_1,x_2) = \frac{\nu\alpha}{2}(x_1^2+x_2^2) + \alpha_3 x_1 x_2 + b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + c_3 \quad (15)$$

4°) les expressions (13) (14) et (15) ont été obtenues en dérivant (7)(8)(9). Pour trouver la solution du pb initial, il convient d'écrire que ces fonctions satisfont (7) (8) et (9), donc le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 x_3 + b_{12} + \alpha_2 x_3 + b_{21} = 0 \\ \cancel{-\nu\alpha x_1} + \alpha_1 x_2 + b_{13} + \cancel{\nu\alpha x_1} + \alpha_3 x_2 + b_{31} = 0 \\ \cancel{-\nu\alpha x_2} + \alpha_2 x_1 + b_{23} + \cancel{\nu\alpha x_2} + \alpha_3 x_1 + b_{32} = 0 \end{cases} \quad \forall (x_1,x_2,x_3)$$

Soit
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_{12} + b_{21} = 0 \\ b_{13} + b_{31} = 0 \\ b_{23} + b_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{le tableau des } b_{ij} \text{ est antisymétrique.}$$

$\hookrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Si on introduit le vecteur $\vec{B}$ de composantes (b_{32}, b_{13}, b_{21}) et le vecteur $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ on obtient

$$\Rightarrow \vec{u}(x) = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{\nu}{E}\rho g (x_3 - H) x_1 \\ -\frac{\nu}{E}\rho g (x_3 - H) x_2 \\ \frac{1}{2E}\rho g \left(\nu(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - 2H x_3\right) \end{Bmatrix}}_{\vec{u}_0(x)} + \underbrace{\vec{B} \wedge \vec{x} + \vec{C}}_{\text{champ rigide.}}$$

le problème (9) est un problème qui admet une solution, à un champ rigide près. $\vec{u}_0$ correspond à la solution du problème telle que $\vec{u}_0(0) = \vec{0}$. La solution en contraintes σ (trouvée en 2.2) est unique.

3. Interprétation de la solution et applications

3.1 Déplacement de O' : $\vec{u}(O') = \vec{u}(0,H) = B\left(H^2 - 2H^2\right)\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{u}(O') = -\frac{\rho g}{2E} H^2 \vec{e_z}}$$

- il est d'autant plus important que H est grand et E petit
- la poutre est entièrement en compression.

A.N. $\vec{u}(O') = -\dfrac{7,8.10^{3}.10.400}{4.10^{11}} = -7,8.\dfrac{10^6}{10^{11}} = -7,8.10^{-5}\,m.$

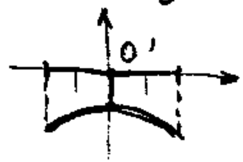
$|u(O')| \sim 0,8$ mm

Surface déformée de Γ_1 : un pt de Γ_1 a pour coordonnées cylindriques après déformation :

$$\vec{OM} = \vec{OM_0} + \vec{u}(M_0) = \left(r\vec{e_r} + H\vec{e_z}\right) + B\left(\nu r^2 - H^2\right)\vec{e_z}$$

$$= r_0\vec{e_r} + \left(H + B\nu r_0^2 - BH^2\right)\vec{e_z}$$

$$= r\vec{e_r} + h\,\vec{e_z}$$



$\Rightarrow$ parabole dans le plan (r,z) :

$$h(r) = H - B\,H^2 + B\nu r^2$$