Analyse vectorielle, intégrales multiples

Examen deuxième session juin 2016

Deux heures, documents, portables et calculatrices interdits.

On rappelle la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Exercice 1 : Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse paramétrée de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = \sin(t) \text{ avec } 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Calculer un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t) = (x(t), y(t))$, puis un vecteur unitaire tangent.

b) Soit $\vec{V_1}$ le champ de vecteurs défini par $\vec{V_1}(x,y) = (x+y, 4y)$. Calculer le travail de $\vec{V_1}$ le long de la courbe paramétrée $\mathcal{C}$.

c) Soit ω_2 la 1-forme différentielle $(y + ye^x)dx + (x + e^x)dy$. Calculer sa différentielle extérieure.

d) Montrer qu'il existe f telle que $df = \omega$ et calculer f.

e) Calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\mathcal{C}} \omega$.

Solution de l'exercice 1.

a) Un vecteur tangent au point $M(t)$ est donné par $\vec{V}(t) = (-2\sin(t), \cos(t))$. Un vecteur unitaire tangent est donné par $\vec{U}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}}\vec{V}(t)$.

b) On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{V_1}(M) \cdot d\vec{M} &= \int_0^{2\pi} [(x(t) + y(t))x'(t) + 4y(t)y'(t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(2\cos(t) + \sin(t))(-2\sin(t)) + 4\sin(t)\cos(t)]dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt \\
&= -2[x/2 - \sin(2t)/4]_0^{2\pi} \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

c) On a

$$d\omega_2 = d(y + ye^x) \wedge dx + d(x + e^x) \wedge dy = dy \wedge dx + e^x dy \wedge dx + dx \wedge dy + e^x dx \wedge dy = 0.$$

d) La différentielle extérieure étant nulle sur un domaine sans trou, le Lemme de Poincaré donne l'existence d'une primitive. En intégrant chacun des deux termes, on trouve $f = xy + e^x y + c$ avec c une constante réelle.

e) Comme la courbe est fermée et la forme exacte, l'intégrale est nulle car elle vaut $f(2,0) - f(2,0) = 0$.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{D}$ la surface de $\mathbb{R}^2$ donnée par l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{C}$, et paramétrée par

$$x(r,t) = 2r\cos(t),\ y(r,t) = r\sin(t) \text{ avec } 0 \le r \le 1 \text{ et } 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Calculer la surface S de $\mathcal{D}$ en utilisant la paramétrisation donnée (on pourra calculer son jacobien).

b) Calculer directement l'intégrale $\oint_{\mathcal{C}} \eta$ de la 1-forme $\eta = (x+y)dx$ sur le bord $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$.

c) Interpréter ce calcul en termes de champs de vecteurs.

d) Donner une méthode alternative pour calculer $\oint_{\mathcal{C}} \eta$.

e) Interpréter ce calcul en termes de champs de vecteurs.

Solution de l'exercice 2.

a) Le jacobien est $2r$ donc $dx(r,t) \wedge dy(r,t) = 2rdr \wedge dt$ et la surface vaut par Fubini

$$\oint_{\mathcal{D}} dx \wedge dy = \oint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 2rdr \wedge dt = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 2rdr)dt = 2\pi[r^2]_0^1 = 2\pi.$$

b) On a

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \eta &= \int_0^{2\pi} (2\cos(t) + \sin(t))(-2\sin(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\cos(t)\sin(t) - 2\sin^2(t))dt \\ &= -2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

par un calcul déjà fait dans l'exercice précédent.

c) On a calculé la circulation du champ de vecteurs de coordonnées $(x+y, 0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

d) Par la formule de Stokes sur le domaine $\mathcal{D}$ et en utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \eta = \oint_{\mathcal{D}} d\eta = \oint_{\mathcal{D}} dy \wedge dx = -\oint_{D} dx \wedge dy = -2\pi.$$

e) La circulation du champ de vecteurs de coordonnées $(x+y,0)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ est égale à l'intégrale de son rotationnel scalaire $-1 = \frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)$ sur la surface $\mathcal{D}$ entourée par la courbe.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$ la demi-boule unité et $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ la demi-sphère unité orientée par la normale qui pointe vers le haut.

a) Donner les paramétrisations sphériques de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$ (on pourra faire un dessin).

b) Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (z, x, 2y)$. Soit ω la 1-forme associée à $\vec{V}$. Calculer $\eta = d\omega$.

c) Décrire le bord de $\mathcal{S}$ et le paramétrer. En déduire, par la formule de Stokes, la valeur de $\oint_{\mathcal{S}} \eta$.

d) Comment s'interprète ce calcul en termes de champs de vecteurs ?

e) Soit $\vec{W}$ le champ de vecteurs $\vec{W}(x,y,z) = (x,y,z)$ et $\nu = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ la 2-forme associée. Soit $\partial\mathcal{V}$ le bord de la demi-boule unité, orienté vers l'extérieur (c'est l'union de la demi-sphère et d'un disque). Calculer $\oint_{\partial\mathcal{V}} \nu$ en utilisant la formule de Stokes.

f) Interpréter ce calcul en termes du champ de vecteurs $\vec{W}$.

Solution de l'exercice 3.

a) On paramètre $\mathcal{V}$ par les coordonnées sphériques $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$ avec $(r,\phi,\theta) \in D = [0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,2\pi]$ et de la même manière $\mathcal{S}$ par $x = \sin\phi\cos\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$, $z = \cos\phi$ avec $(\phi,\theta) \in E = [0,\pi/2]\times[0,2\pi]$. Le déterminant jacobien est $r^2\sin\phi$.

b) On a $\omega = zdx + xdy + 2ydz$ donc $d\omega = dz\wedge dx + dx\wedge dy + 2dy\wedge dz$.

c) Le bord de $\mathcal{S}$ est le cercle donné par $x^2+y^2 = 1$ et $z = 0$. On le paramètre par $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ et $z = 0$ pour $\theta \in [0,2\pi]$. On a alors par la formule de Stokes

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{S}} \eta &= \oint_{\partial\mathcal{S}} \omega \\ &= \int_0^{2\pi} 0 + \cos(\theta)\cos(\theta)d\theta + 0 \\ &= \int_0^{2\pi} [1-\sin^2\theta]d\theta \\ &= 2\pi - \pi \\ &= \pi\end{aligned}$$

d) Le flux du champ de vecteur $(1,1,2) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(z,x,2y)$ à travers la surface $\mathcal{S}$ est égale au travail le long du cercle du champ de vecteur $(z,x,2y)$, qui vaut π.

e) On a $d\nu = dx\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dz\wedge dx + dz\wedge dx\wedge dy = 3dx\wedge dy\wedge dz$, donc la formule de Stokes nous donne

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \nu = \oint_{\mathcal{V}} d\nu = 3\oint_{\mathcal{V}} dx\wedge dy\wedge dz$$

ce qui donne trois fois le volume de la demi-sphère, donc 3/2 du volume de la sphère, qui vaut par Fubini

$$\int_0^1 (\int_0^{\pi} (\int_0^{2\pi} r^2\sin\phi d\theta)d\phi)dr = [r^3/3]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

En fin de compte, on obtient

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \nu = 2\pi.$$

f) Le flux du champ de vecteur $\vec{W}$ à travers la surface $\partial\mathcal{V}$ est égal à l'intégrale de sa divergence 3 sur le volume $\mathcal{V}$.