Année 2017-2018

UE 4AM01 - partie Fluides
Partiel - Lundi 6 novembre 2017 - durée 2h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit. En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

Pression au centre de la Terre

On souhaite évaluer l'ordre de grandeur de la pression P_0 au centre de la Terre, considérée par souci de simplicité comme une sphère liquide de masse volumique homogène ρ et de rayon R. La distribution de pression au sein de la Terre résulte de son équilibre mécanique sous l'effet de l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur elle-même. La constante gravitationnelle, qui intervient dans l'expression de la force d'attraction gravitationnelle $\mathbf{F}$ entre deux masses m_1 et m_2 distantes de d, est notée $\mathcal{G}$: $F = \mathcal{G} m_1 m_2 / d^2$. Par analyse dimensionnelle, établissez une expression analytique de P_0, puis évaluez numériquement son ordre de grandeur. On donne : $\mathcal{G} \simeq 6 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}, $R \simeq 6000$ km, $\rho \simeq 5000$ kg · m^{-3}.

Coulage d'un mur de béton

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur a, comme schématisé sur la figure 1. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume V au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de “prendre” (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement μ. L'accélération de la gravité est notée $\mathbf{g}$. On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon (Oy) et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan (Oxz). La forme du volume de béton est donc entièrement donnée par sa hauteur h fonction de l'abscisse x et du temps t.

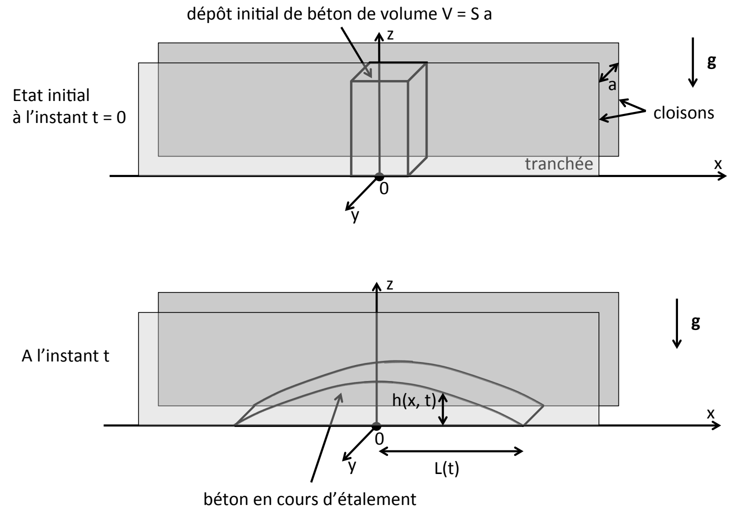

FIGURE 1 –

1 Analyse dimensionnelle

1. Exprimez l'aire S de la portion de cloison mouillée par le béton en fonction de V et de a et justifiez pourquoi S est constante au cours de l'écoulement.
2. On suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon (Oy). Déduisez-en quel paramètre géométrique n'a pas d'influence sur l'étalement du béton.
3. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'évolution temporelle de la demi-longueur de la flaque de béton L (cf. figure 1) exprimée à l'aide de grandeurs sans dimension. Compte tenu de la nature bidimensionnelle de l'écoulement du béton, vous considérerez la surface mouillée S plutôt que son volume V comme paramètre pertinent. Pour former les grandeurs sans dimensions, vous emploierez g, S et ρ en justifiant préalablement pourquoi vous pouvez choisir ces trois grandeurs.

2 Recherche de solution invariante d'échelle dans un régime d'écoulement lent

L'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique des équations décrivant l'écoulement du béton permettent de mettre en évidence l'existence d'un régime quasistatique (frein inertiel négligeable devant le frein visqueux) lorsque la flaque, de demi-longueur $L(t)$, est déjà bien étalée ($|\frac{\partial h}{\partial x}| \ll 1$), pour lequel l'approximation à l'ordre dominant du problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} = D \frac{\partial^2 (h^4)}{\partial x^2} \text{ pour } 0 \leq x \leq L(t) \\ h(x,t) = 0 \text{ pour } x > L(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

où $D = \frac{g}{12\nu}$, $\nu = \mu/\rho$, sachant que :

— l'épaisseur de béton est nulle au bord de la flaque :

$$h\left(x = L(t), t\right) = 0 \ \forall t \tag{2}$$

— le sommet de la flaque reste au milieu des cloisons, en $x = 0$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 \;\forall t \tag{3}$$

— le volume de béton est constant :

$$\int_0^{+\infty} h(x, t)\, \mathrm{d}x = S/2 \;\forall t \tag{4}$$

1. Expliquez pourquoi ce problème {équation aux dérivées partielles (1), conditions (2, 3, 4)} est a priori bien posé, c'est-à-dire que le nombre de conditions aux limites et initiales est en accord avec l'ordre de l'e.d.p. Vous vous souviendrez avec profit de la diffusion de la chaleur dans un barreau dans lequel une quantité d'énergie donnée est déposée initialement en son milieu, étudiée en cours.
2. Afin de déterminer si ce problème admet une solution auto-similaire, on cherche une solution invariante d'échelle. Pour cela, on définit le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x \mapsto x^{'} & / & x & = & x^* x^{'} \\ t \mapsto t^{'} & / & t & = & t^* t^{'} \\ h \mapsto h^{'} & / & h & = & h^* h^{'} \\ D \mapsto D^{'} & / & D & = & D^* D^{'} \\ S \mapsto S^{'} & / & S & = & S^* S^{'} \end{array}\right.$$

   où $\{x^*, t^*, h^*, D^*, S^*\}$ sont des facteurs de changement d'échelle [1]. Déterminez les deux relations entre facteurs d'échelle imposés par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (1, 2, 3, 4).
3. Le groupe des changements d'échelle laissant invariant le problème est donc à 3 paramètres libres. En choisissant comme paramètres libres t^*, D^* et S^*, montrez que les deux autres paramètres s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} h^* & = & \left(\frac{S^{*2}}{D^* t^*}\right)^{1/5} \\ x^* & = & \left(S^{*3} D^* t^*\right)^{1/5} \end{array}\right. \tag{5}$$

4. En écrivant que la solution $h(t, x, D, S)$ de ce problème invariant par ce groupe de changements d'échelle est aussi invariante par ce même groupe, puis en choisissant comme changements d'échelle particuliers $D^* = 1/D^{'}$ et $S^* = 1/S^{'}$, montrez que :

$$\left(\frac{D^{'} t^{'}}{S^{'2} t^* t^{'}}\right)^{1/5} h^{'} = f\left(t^* t^{'}, \left(t^* t^{'}\right)^{1/5} \frac{x^{'}}{\left(S^{'3} D^{'} t^{'}\right)^{1/5}}\right)$$

   En déduire que :

$$\left(\frac{D^{'} t^{'}}{S^{'2}}\right)^{1/5} h^{'} = g\left(\frac{x^{'}}{\left(S^{'3} D^{'} t^{'}\right)^{1/5}}\right)$$

   h est donc autosimilaire, sa variable d'auto-similarité étant $\eta = \frac{x}{(S^3 D t)^{1/5}}$
5. L'extrémité de la flaque est définie par (2). Montrez que l'abscisse L de cette extrémité est telle que :

$$L(t) = \eta_0 \left(S^3 \frac{g}{\nu} t\right)^{1/5}$$

   où η_0 est une constante dont vous donnerez la signification.
   Pour étaler le plus rapidement possible le béton dans la tranchée, vaut-il mieux fractionner le versement du béton ou le verser d'un seul coup ?

1. L n'est ni une variable du problème ni un de ses paramètres mais une des caractéristiques de sa solution, donc on ne lui impose pas de changement d'échelle autre que celui imposé à x.

6. En comparant ce résultat et celui donné par l'analyse dimensionnelle, exprimez Π en fonction de Π_1 et Π_2 dans ce régime quasitatique aux temps longs.