UPMC-Licence Mécanique **2015-2016**

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 22 Mars 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([-1,1]),\ \text{telle que } f(-1) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de l'espace $\mathcal{C}^1([-1,1])$.
2. On définit l'application $N_1 : E \to \mathbb{R}$, $N_1(f) = \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$. Montrer que N_1 est une norme sur E.
3. On définit l'application $\mathcal{L} : E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f) = f'(0)$. Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire sur E. Etudier sa continuité par rapport à la norme N_1.

Exercice 2

On considère l'espace $L^2(]0,1[)$, muni de sa norme usuelle $\|.\|_{L^2}$.

1. Rappeler la définition de $L^2(]0,1[)$, de sa norme $\|.\|_{L^2}$ et du produit scalaire associé $< .,. >_{L^2}$.
2. Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ pour $x \in]0,1/2[$ et $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [1/2,1[$. Vérifiez si $\varphi \in L^2(]0,1[)$.
3. Donner la définition d'une dérivée faible pour une fonction $f \in L^2(]0,1[)$. Déterminer si la fonction φ définie précédemment a une dérivée au sens faible. Justifier votre réponse.

Problème :

On considère le problème de transport de la chaleur dans un mur homogène. On suppose que le mur est chauffé par une source interne régulière, donnée. Le champ thermique est supposé stationnaire et invariant suivant les directions perpendiculaires à $\vec{x}$. On suppose que le mur a une face froide et une face chaude.

Le problème *adimensionnel* correspondant consiste à trouver $u(x)$ tel que

$$\textbf{(PC)} \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in]0,1[, \quad f \text{ donnée } \in L^2(]0,1[), \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

On pose

$$V = \{v \in H^1(]0,1[)/v(0) = 0, v(1) = 1\},$$

$$V^0 = \{v \in H^1(]0,1[)/v(0) = 0\}$$

$$H^1(]0,1[) = \{v \in L^2(]0,1[), v' \in L^2(]0,1[), \ v' = \text{dérivée faible } \}$$

On admettra que V^0, muni du produit scalaire défini sur $H^1(]0,1[)$ et de la norme associée est un espace de Hilbert. On rappelle :

$$\forall u, v \in H^1(]0,1[) : < u, v >_{H^1} = \int_0^1 (u(x)v(x))dx + \int_0^1 (u'(x)v'(x))dx$$

$$\forall v \in H^1(]0,1[) : \ \|v\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 (v(x))^2 dx + \int_0^1 (v'(x))^2 dx} = \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2}.$$

1. Rappeler la définition d'un espace de Hilbert.
2. L'ensemble V est-il un espace vectoriel ? Justifiez votre réponse.
3. Vérifiez que V est un ensemble convexe fermé, c'est-à-dire :
   i) Si $v_1, v_2 \in V$ et $t \in [0,1]$ alors $(tv_1 + (1-t)v_2) \in V$
   (V est un ensemble convexe).
   ii) Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de V $(v_n \in V)$ convergente dans la norme $\|.\|_{H^1}$, alors sa limite, notée v, est aussi une fonction de V.
   (V est un ensemble fermé).
4. On cherche $u \in V$ solution du problème adimensionnel ci-dessus. Montrer que u est solution du problème variationnel :

   $$\textbf{(PV)} \begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \\ a(u, v-u) = L(v-u), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

   Expliciter les formes bilinéaire $a(u,v)$ et linéaire $L(v)$.
5. Montrer que $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue et symétrique sur V^0, et que $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V^0.

6. Montrer l'inégalité de Poincaré sur V^0,

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|v\|_{H^1} \leq C\|v'\|_{L^2}, \forall v \in V^0$$

On utilisera sans démontrer la propriété suivante :

$$\forall f \in H^1(]a,b[),\ f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt,\ \forall x, y \in]a,b[$$

7. En déduire que $a(u,v)$ est coercive sur V^0.
8. Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème **(PV)** ? Justifier votre réponse.
9. **(Bonus)** On introduit la fonctionnelle $I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$. Montrer que si u est solution du problème variationnel alors il est solution du problème de minimisation suivant :

$$\textbf{(PM)} \begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \\ I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

10. **(Bonus)** Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème **(PM)**, en précisant le résultat de cours utilisé. Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité du problème **(PV)** ?