Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

—

UPMC, Licence Mécanique

Diana Baltean-Carlès

3 mars 2019

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels et Applications linéaires

1.1 Définitions : Rappels

Définition 1 : (Corps commutatif)
Un corps commutatif $(\mathbb{K}, +, .)$ est un ensemble muni de deux lois de composition internes, possédant les propriétés suivantes :

- la loi de composition $+$ est
  — associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x + (y + z) = (x + y) + z$;
  — commutative : $\forall x, y \in \mathbb{K},\ x + y = y + x$;
  — $\exists!$ élément neutre $0_{\mathbb{K}}$ tel que $\forall x \in \mathbb{K},\ x + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + x = x$;
  — tout élément a un symétrique (opposé) unique : $\forall x \in \mathbb{K}, \exists! y \in \mathbb{K}$ tel que $x + y = y + x = 0_{\mathbb{K}}$.
- la loi de composition . est
  — associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x.(y.z) = (x.y).z$;
  — commutative : $\forall x, y \in \mathbb{K},\ x.y = y.x$;
  — $\exists!$ élément neutre $1_{\mathbb{K}}$ tel que $\forall x \in \mathbb{K},\ x.1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}.x = x$;
- la loi de composition . est distributive par rapport à la loi de composition $+$:
  $\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x.(y + z) = x.y + x.z$
- $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$
- Tout élément a un inverse par rapport à la loi . :
  $\forall x \in \mathbb{K}, \exists! y \in \mathbb{K}$ tel que $x.y = y.x = 1_{\mathbb{K}}$

Exemples des corps commutatifs :

$(\mathbb{Q}, +, .)$ - le corps des nombres rationnels
$(\mathbb{R}, +, .)$ - le corps des nombres réels
$(\mathbb{C}, +, .) = (\mathbb{R}^2, +, .)$ - le corps des nombres complexes, muni des lois :

— addition définie par : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
— multiplication définie par : $(x, y).(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Définition 2 : (Espace vectoriel)
E est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général) si on peut définir sur les éléments de E (appelés vecteurs) deux lois de composition :

- une loi interne l'addition, notée $+$, qui est
  — associative ;
  — commutative ;
  — $\exists!$ élément neutre 0_E ;
  — tout élément a un symétrique (opposé) unique.
- une loi externe, la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$, notée $\cdot$, ayant les propriétés suivantes :
  — $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
  — $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
  — $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda.\mu) \cdot x$;
  — $\forall x \in \mathbb{K}, \ x \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, $1_{\mathbb{K}}$ étant l' élément neutre de $\mathbb{K}$.

Propriété 1 :
— $0_{\mathbb{K}} \cdot x = \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
— Si $\lambda \cdot x = 0_E$ alors $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

Exemples :

— l'ensemble des vecteurs de la géométrie élémentaire ;
— l'ensemble des polynômes à une variable, de degrée inférieur ou égal à n ;
— l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle ;
— le corps des complexes.

Définition 3 : (Espace vectoriel produit)
Soit E_1, E_2 deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. L'ensemble produit $E_1 \times E_2$ peut être muni d'une loi interne additive $+$ et d'une loi externe multiplicative $\cdot$, définies par :

$+$: $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\forall (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$;
$\cdot$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$

Alors $(E_1 \times E_2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 4 : (Application linéaire)

Soit $f : E \to F$, avec E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. f est une application linéaire si :

i) $\forall (x, y) \in E \times E,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Théorème 1 : Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.

Définitions 5 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

i) Si $f : E \to E$ est une application linéaire, alors f s'appelle un endomorphisme.
ii) Si $f : E \to \mathbb{K}$ est une application linéaire, alors f s'appelle forme linéaire.
iii) Soit $f : E \to F$, avec F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Si f est linéaire et bijective alors f est un isomorphisme.
iv) Soit $f : E \to E$ une application linéaire et bijective. Alors f s'appelle un automorphisme.

Théorème 2 : Soit $f : E \to F$ une application linéaire et bijective sur deux espaces vectoriels. Alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire.

Théorème 3 : Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaire f, $f : E \to F$, avec E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Sur $\mathcal{L}(E, F)$ on définit deux opérations :

$$\begin{array}{ll} + : & \forall f, g \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall x \in E,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)\,; \\ \cdot : & \forall \lambda \in \mathbb{K},\quad \forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall x \in E,\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

On vérifie que $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Théorème 4 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et S une partie non vide de E, stable par rapport à l'addition et la multiplication, i.e.

$$\forall x, y \in S,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow (\lambda \cdot x + y) \in S$$

Alors la restriction de ces lois à S munit S d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. S est appelé sous-espace vectoriel de E.

Exemples : Si E est l'ensemble des vecteurs libres, alors S = l'ensemble des vecteurs parallèles à un plan donné est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 5 : (Propriétés des sous espaces vectoriels)

i) L'intersection de deux ou plus (en nombre fini) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

ii) Soit S_1, S_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$S = \{x_1 + x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} = S_1 + S_2$$

est une sous-espace vectoriel appelé somme.

Remarque : $S_1 + S_2 \neq S_1 \cup S_2$. En général, $S_1 \cup S_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si S est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(S)$ est un sous-espace vectoriel de F.
Si T est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(T)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 6 : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On définit :
$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ le noyau de f et
$\operatorname{Im} f = f(E)$ l'image de f.
Alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E, respectivement F.

Remarque : Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
f est surjective $\Longrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.
f est injective $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 7 : (Somme directe)
Soient S_1 et S_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés sont équivalentes :

i) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

ii) $\forall x \in S_1 + S_2$, la décomposition $x = x_1 + x_2$ est unique.

Définition 7 : Si i) et ii) sont vérifiées la somme $S_1 + S_2$ est directe. On pose alors $S_1 + S_2 = S_1 \bigoplus S_2$.

Définition 8 : Si $E = S_1 \bigoplus S_2$ alors S_1 et S_2 sont supplémentaires.

Exemples : Soit E l'ensemble de applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si P est l'ensemble des applications paires et I l'ensemble des applications impaires alors E est la somme directe de P et I car $P \bigcap I = \{0\}$ et $E = P + I$ ($f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).

1.3 Générateurs d'un espace vectoriel, base, coordonnées

Définition 9 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$. La famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille libre ou linéairement indépendante si pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$, alors $\alpha_i = 0$, $\forall i = \overline{1,p}$.

Définition 10 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$. La famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille liée ou linéairement dépendante si il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$.

Définition 11 : L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, $x_i \in E$, $i = \overline{1,p}$ forme un sous espace vectoriel de E, noté $Vect\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On dit que $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ est une famille de générateurs pour $Vect\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

Définition 12 : On appelle base d'un espace vectoriel E une famille libre de générateurs. On note $B = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$. Tout $x \in E$ admet une décomposition unique suivant une base :

$$x = \sum_i \lambda_i e_i$$

où $\{\lambda_i\}_i$ sont les coordonnées de x dans la base B ($E = \bigoplus Vect\{e_i\}$).

Définition 13 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice de E qui est finie.

Théorème 8 : (dimension) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Toute famille de génératrice contient une base. Toutes les bases ont le même nombre de termes (dimension de E).

Théorème 9 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 10 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. Alors $dim(E \times F) = dimE + dimF$.
Si $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ est une base de E et Si $(f_j)_{j=\overline{1,p}}$ est une base de F alors $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)$ est une base de $E \times F$.

Théorème 11 : (théorème de la base incomplète)
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille libre de E, $p < n$. Il existe alors $x_{p+1}, \dots, x_n$ tels que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit une base de E.

Théorème 12 : Si E possède une base de n vecteurs, toute autre base contient n vecteurs et n est le nombre maximal d'éléments d'une famille libre.

Théorème 13 : Si $S \subset E$ est une sous-espace vectoriel alors $dimS \leq dimE$.

Théorème 14 : Si S et T sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E alors $S + T$ est un espace vectoriel de dimension finie et

$$dimS + dimT = dim(S + T) + dim(S \cap T).$$

Si la somme est directe alors $dim(S \oplus T) = dimS + dimT$.

Définition 14 : On appelle rang d'un système de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E avec $dimE = n$, la dimension r du sous-espace $Vect\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

Théorème 15 : (théorème du rang)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire de sur E , espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$dim(\text{Ker f}) + dim(\text{Im f}) = dimE$$

1.4 Matrices, opérations sur les matrices

Définition 15 : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ une application de $[1, m] \times [1, n] \to \mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices ayant m lignes et n colonnes. On notera a_{ij} les coefficients de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Théorème 16 : On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ les opérations :
$+$: $\quad A + B = [c_{ij}]$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall (i,j) \in [1,m] \times [1,n];$$

$\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda \cdot A = D$, $[d_{ij}] = \lambda a_{ij}$
$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $m \times n$.

La base canonique est donnée par les matrices E_{ij}, $(i,j) \in [1,m] \times [1,n]$, définie par

$$E_{ij} = [\alpha_{kl}], \qquad , \alpha_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad k = i \text{ et } l = j \\ 0, & \text{si} \quad k \neq i \text{ et } l \neq j \end{cases}$$

Alors $A = [a_{ij}] = \sum\limits_{(i,j) \in [1,m] \times [1,n]} a_{ij} E_{ij}$.

Définition 16 : (Produit des matrices)
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). Alors le produit des deux matrices est la matrice $C = AB$, $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall (i,j) \in [1,m] \times [1,p]$$

Propriétés :

i) Distributivité du produit des matrices relatif à l'addition des matrices :
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,

$$A(B + C) = AB + AC$$

ii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
iii) Le produit des matrices est une opération interne qui a les propriétés :

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$(AB)C = A(BC), \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

iv) On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni des lois d'addition des matrices, multiplication des matrices (lois internes) et multiplication avec un scalaire (loi externe) a une structure d'algebre unitaire.

Définition 16 : (Transposition des matrices)
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = [a_{ij}]$. La transposée de A est la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, définie par ${}^tA = [a'_{ij}]$, $a'_{ij} = a_{ji}$, $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Propriétés :
i) La transposition des matrices est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, vers $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:

$${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

ii) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
iii) ${}^t({}^tA) = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Quelques matrices carrées particulières :
— matrice unité notée I, $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $a_{ij} = \delta_{ij}$.
— matrice diagonale définie par $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
— matrice triangulaire supérieure, $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ ou triangulaire inférieure $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.
— matrice symétrique : ${}^tA = A$ $(a_{ij} = a_{ji})$.
— matrice antisymétrique ${}^tA = -A$ $(a_{ij} = -a_{ji})$.
— matrice hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$ $(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\bar{a}_{ji}$ étant le complexe conjugué de a_{ji}.
— matrice antihermitienne si ${}^t\bar{A} = -A$ $(a_{ij} = -\bar{a}_{ji})$

1.5 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n , F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $C = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.
Pour $\forall x \in E$, x se décompose de manière unique dans la base B sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors,

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Pour tour i, $f(e_i) \in F$ se décompose de manière unique dans la base C sous la forme $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} y_j(e_i) f_j$. Alors,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} (\sum_{i=1}^{n} y_j(e_i) x_i) f_j$$

On pose $M_{BC}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice définie par ses coefficients $a_{ji} = y_j(e_i)$, $j \in [1, p]$, $i \in [1, n]$.

$$M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

$M_{BC}(f)$ est la représentation matricielle de l'application f dans les bases B, C. Les coefficients de la i-ème colonne sont les composantes du vecteur $f(e_i)$ relativement à la base C.
L'écriture matricielle de $f(x) = v$, $x \in E$, $v \in F$, $v = \sum_{j=1}^{p} v_j$ est :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = M_{BC}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Théorème 17 : L'application $f \to M_{BC}(f)$, de $\mathcal{L}(E, F)$ à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par suite, $dim(\mathcal{L}(E, F)) = dimE \times dimF$.

Propriétés :(Opérations linéaires)

i) $\forall u \in E$, $f(u) = \varphi(u) + \psi(u)$, $f = \varphi + \psi$. Soit $A = M(\varphi)$ et $B = M(\psi)$. Alors, la matrice de f est $A + B$.

ii) $\forall u \in E$, $f(u) = \lambda\varphi(u)$, $f = \lambda\varphi$. Si $A = M(\varphi)$ alors $\lambda A = M(f)$.

iii) Composition des applications linéaires. Multiplication des matrices.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, B=base de E, C=base de F, D=base de G. Alors ,

$$M_{BD}(g \circ f) = M_{CD}(g)M_{BC}(f)$$

Si $M_{BD}(g \circ f) = [\gamma_{ij}]$, $M_{CD}(g) = [\beta_{ij}]$, $M_{BC}(f) = [\alpha_{ij}]$, alors

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \beta_{ik}\alpha_{kj}, \text{ avec } p = dimF$$

Théorème 18 : (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang des vecteurs colonnes de A est égal au rang des vecteurs lignes de A et égal au rang de toute application linéaire f admettant A pour matrice représentative, en particulier l'application $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, associée à A.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E, $dimE = n$. Alors la matrice associée de f est une matrice carrée d'ordre n.

Propriété : L'ensemble des matrices carrés d'ordre n est un anneau non-commutatif.
$A + B = B + A$
$AB \neq BA$, en général
$(A + I)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A^k I^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A^k$
On peut facilement vérifier que l'ensemble des matrices diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures sont des sous-anneaux de l'anneau des matrices carrées d'ordre n.

$AB = 0$ ne conduit pas à $A = 0$ ou $B = 0$!!

Propriété : (Caractérisation d'un endomorphisme bijectif)
Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E, $dimE = n$.
f est bijectif $\Longleftrightarrow Kerf = \{0\} \Longleftrightarrow Imf = E \Longleftrightarrow A =$ inversible.

Définition 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. A est inversible si $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
Une matrice inversible est appellée régulière.

Une matrice non-inversible est appellée singulière.
A est inversible $\Longleftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A sont indépendants.

Propriétés : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrice carrées inversibles. Alors, $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$,
$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$.

Définition 18 : (Changement de base)
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une deuxième base de E. Les vecteurs de la base B' s'expriment de manière unique dans la base B, $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i,\ j \in [1, n]$. La matrice P du système des vecteurs e'_j dans la base B est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

P définit la changement de base $B \to B'$ et s'appelle la matrice de passage de B à B'. Comme le système des vecteurs $(e'_i)_i$ est un système libre (il forme la base B'), la matrice P est une matrice régulière.

i) Changement de base pour un vecteur $u \in E$:
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice de u dans B et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice de u dans B'. Alors ,
$$X = P_{B,B'}X' \text{ ou } X' = P^{-1}_{B,B'}X$$
ii) Changement de base pour un endomorphisme f.
Soit A la matrice de f dans la base B et A' la matrice de f dans la base B'. Alors $A' = P^{-1}_{B,B'}AP$.

Définition 19 : Deux matrices A, A' liées par une relation de la forme $A' = P^{-1}AP$ sont dites semblables ($A' \sim A$).

Propriété : La similitude est une relation d'équivalence sur l'anneau des matrices carrées d'ordre n.

Définition 20 : Soit $E = F \oplus G$. Pour tout $u \in E$, $\exists!$, $v \in F$, $w \in G$ tels que $u = v + w$. On définit $p : E \to E$, par $p(u) = v$. p est appellé le projecteur sur F, parallèlement à G, $p(u) \in F$, $(p(u) - u) \in G$.

Propriétés des projecteurs : Soit $p : E \to E$ un projecteur de E sur F, parallèlement à G. Alors,

i) p est une application linéaire

ii) $Kerp = G$, $Imf = F$.

iii) $p \circ p = p$.

Théorème 19 : Soit $p : E \to E$ un endomorphisme, $dimE$ =finie.
p est projecteur $\Longleftrightarrow p \circ p = p$.

1.6 Déterminants

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie $dimE = n$.

Définition 21 : On appelle forme $p-$ linéaire sur E l'application f,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p \to f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}$$

linéaire par rapport à chacun des vecters $x_i \in E$.

Définition 22 : Une forme $n-$ linéaire f sur E est dite alternée si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ change le signe de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

En particulier, si $x_i = x_j$ alors $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Expression d'une forme multilinéaire alternée dans une base de E

Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Chaque vecteur $x_i \in E$ s'exprime dans B :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$

La multilinéarité de f conduit à :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} (\sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} (\dots (\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}))) f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$$

L'alternance de f conduit au fait que les j_i résultent d'une permutation φ de $\{1, 2, \dots, n\}$. Donc,

$$f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = (\sigma(\varphi)) f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

avec $\sigma(\varphi) = (-)^{I(\varphi)}$, $I(\varphi)$ étant le nombre d'inversions de φ. Donc,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \sum_{\varphi} \sigma(\varphi) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Définition 23 : (Déterminant) On définit le déterminant Δ, le nombre

$$\Delta = \sum_{\varphi} \sigma(\varphi) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

φ étant la permutation $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$. On note

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

Théorème 20 : Pour que n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n forment un système lié (linéairement dépendent), il faut et il suffit que leur déterminant dans une base de E soit nul.

i) $det(^tA) = detA$.
ii) On ne modifie pas un déterminant quand on ajoute à une rangée une combinaison linéaire de rangés parallèles.
iii) Si on échange deux rangées parallèles d'un déterminant, celui-ci change en son opposé.
iv) Si on multiplie tous les éléments d'une rangée par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

v) On peut développer un déterminant Δ suivant la ligne i ou la colonne j par les formules ,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{ij}, \text{ ou } \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_{ij}$$

avec X_{ij}= cofacteur de l'élément a_{ij}, $X_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, Δ_{ij} étant le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenu en supprimant dans Δ les deux rangées contenant a_{ij}.

vi) $det(AB) = (detA)(detB)$. En particulier, $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$ si A est régulière.

vii) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

viii) Déterminant particulier (Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Inverse d'une matrice

Propriété : Une matrice carrée est inversible $\Longleftrightarrow detA \neq 0$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^t(comA)$$

où $comA$ est la comatrice de A ou marice des cofacteurs de A,

$${}^t(comA) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle aussi ${}^t(comA)$ la matrice adjointe de A.

Systèmes d'équations linéaires

Un système linéaire de n équations et p inconnues a la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On peut écrire le système sous la forme matricielle :
$AX = B$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_i]$, $i \in [1, n]$, $j \in [1, p]$.

Propriété : (Système de Cramer)
Si $n = p$ et la matrice du système est inversible ($detA \neq 0$), alors le système linéaire est un système de Cramer. Il a une solution unique, donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

avec Δ le déterminant de A et Δ_i le déterminant déduit de Δ, en remplaçant la colonne des coefficients de x_i par celle des second membres $b_1; b_2, \ldots, b_n$.

Définition 24 : (Rang d'une matrice)
On appelle rang d'une matrice A l'ordre du déterminant non-nul d'ordre le plus élevé, extrait de A.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

Tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls. Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Le rang de A est 2.

Définition 25 : (Rang d'un système linéaire)
On appelle rang d'un système d'équations linéaires le rang de la matrice A du système.

Théorème 21 : Le rang d'une matrice A est le rang du système des vecteurs-colonnes de A.

Applications :

Résolution d'un système de n équations et p inconnues : le rang de la matrice donne le nombre d'inconnues et d'équations principales. Soit r ce rang.

Si $r = n$ le système est indéterminé à $(p - r)$ paramètres. On attribue des valeurs arbitraires aux $(p - r)$ inconnues non principales, les r inconnues principales sont alors données par un système de Cramer.

Si $r < n$ et si l'un au moins des déterminants caractéristiques du système est non nul, alors le système n'a pas de solution.

Si $r < n$ et les $(n - r)$ déterminants caractéristiques sont nuls , le système se réduit aux r équations principales et se résout comme dans le premier cas.

Un déterminant carcatéristique D_k est défini par :

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}, \qquad k = r + 1, r + 2, \dots n$$

1.7 Valeurs propres. Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 25 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, s'il existe un vecteur $u \neq 0_E$ tel que :

$$f(u) = \lambda u$$

On appelle u vecteur propre de f, asscocié à la valeur propre λ.

Définition 26 : L'ensemble des vecteurs propres asscociés à une valeur propre λ de f, est un sous-espace de E, égal à $E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E)$, id_E étant l'application identité sur E.

Recherche des valeurs propres en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base. On considère une endomorphisme $f : E \to E$, représenté par sa matrice carrée d'ordre

n, A. Si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine de l'équation :

$$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

appellée équation caractéristique de f. $\varphi(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de f.

Propriété : Tout endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet n valeurs propres, réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. Leur somme est égale à la trace de la matrice A de f et leur produit est égal au déterminant de A.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = TrA, \qquad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = detA$$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donné par sa matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 1$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -2$.

Si λ est valeur propre alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre asscocié si

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y & = & 0 \\ 4x + (1-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda = 5$ on obtient $x = y$, donc $E_5 = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Pour $\lambda = -2$ on obtient $4x + 3y = 0$, donc $E_{-2} = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Réduction d'un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes

On reprend l'exemple précédent. Les vecteurs propres asscociés aux valeurs propres $\lambda_1 = 5$, λ_2 sont $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Les vecteurs u_1, u_2 sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $E = \mathbb{R}^2$.

$f(u_1) = 5u_1$ et $f(u_2) = -2u_2$. La matrice de f dans la base (u_1, u_2) est diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(u_1, u_2) est la base propre qui permet de diagonaliser A. La relation entre A et D est :

$$D = P^{-1}AP,$$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres.

Propriété : Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f, alors les p vecteurs propres associés aux valeurs propres forment un système libre.

Théorème 22 : Si f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n, ayant n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire son polynôme caractéristique a toutes ses racines simples, il existe une base de E, constituée de vecteurs propres de f et, dans cette base propre, f s'exprime par une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_i étant les valeurs propres de f :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad D = P^{-1}AP$$

avec P qui est la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres.

Théorème 23 : (théorème fondamental sur la diagonalisation)
Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n et A la matrice de f dans une base de E. Alors,
f est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ chaque sous-espace propre de f a la dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre asscociée.

Chapitre 2

Equations différentielles

Une équation différentielle ordinaire est une équation qui contient une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue, notée $y(x)$ ou $y(t)$ et que l'on souhaite déterminer de l'équation. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx}) = 0$$

Exemples :

1. Le déplacement d'une pierre qui tombe du haut d'une tour. L'équation différentielle vérifiée par la position verticale de la pierre par rapport au sol, $y = y(t)$, $t =$le temps, est :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

   Dans l'équation précédente, la resistance de l'air est négligée. En intégrant deux fois on trouve la solution :

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

2. Déplacement d'une masse placée à l'extrémité d'un ressort. Si on note $y(t)$ le déplacement par rapport à la position d'équilibre, m la masse du corps et k la constante élastique du ressort, alors le mouvement du corps est modélisé par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Les équations différentielles sont des outils de modélisation dans beaucoup d'applications de l'ingénierie, de la physique, de l'économie, etc.Les plus simples équations peuvent être résolues avec des calculs élémentaires, tandis que ppur des équations modèle plus compliquées on aura besoin de méthodes spécifiques que l'on discutera par la suite.

Une première classification des équations différentielles se fait selon l'ordre. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus grande intervenant dans les équations :

1. équations différentielles du premier ordre,
2. équations différentielles d'ordre 2,
3. équations différentielles d'ordre n.

2.1 Équations différentielles du premier ordre

Définition 1 : Les équations différentielles du premier ordre contiennent seulement $\frac{dy}{dx}$, éventuellement y et des fonctions de x (pour $y = y(x)$). On peut les écrire sous la forme :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad \text{forme implicite} \tag{2.1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{forme explicite} \tag{2.2}$$

Observation : Les équations différentielles ont, en général, plusieurs solutions. On donne la solution d'une équation différentielle par sa forme générale, faisant intervenir une constante arbitraire. On appelle celle-ci la solution générale. Si on choisit une valeur spécifique de la constante on obtient une solution particulière. Dans ce qui suit on va présenter des méthodes d'obtention des solutions générales pour les équations différentielles de premier ordre. Pour une équation donnée, une solution générale obtenue par une telle méthode est unique, et pour cela elle sera appelée la solution générale.

Définition 2 : (Problème aux valeurs initiales) Une équation différentielle avec une condition intiale est appelée problème aux valeurs initiales ou problème de Cauchy.

$$(PC) \begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & f(x, y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1.1 Équations différentielles à variables séparées

Définition 3 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.4}$$

ou

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.5}$$

Une telle équation est appelé séparable car les variables x et y sont séparées de sorte que x apparaît seulement à droite et y apparaît seulement à gauche.

Pour résoudre (2.4) on intègre les deux membres par rapport à x si f et g sont continues alors :

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C$$

ou

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

Exemple : (Courbes en forme de cloche : problème de conduction de la chaleur)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & -2xy \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Avec la séparation des variables on a :

$$\frac{dy}{y} = 2xdx \Longleftrightarrow \ln|y| = -x^2 + c \Longleftrightarrow |y| = e^{-x^2+c}$$

On pose $k = \pm e^c$. On trouve alors la solution générale $y(x) = ke^{-x^2}$.

2.1.2 Réduction à une forme séparable

Certaines équations ne sont pas séparables mais elles peuvent être mises sous une forme séparable avec un changement de variable. Ceci est vrai pour des équations du type :

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}) \tag{2.6}$$

avec g une fonction donnée de variable $\frac{y}{x}$.
On fait le changement de variable suivant $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. En dérivant, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

L'équation différentielle vérifiée par u est à variables séparées :

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

Exemple : $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$

$$2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} - (\frac{y}{x})^2 + 1 = 0$$

On pose $u = \frac{y}{x}$. Alors,

$$2xu\frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}$$

En intégrant,

$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c \Longleftrightarrow 1 + u^2 = \frac{k}{x}$$

On revient à y,

$$x^2 + y^2 = kx \Longleftrightarrow (x - \frac{k}{2})^2 + y^2 = \frac{k^2}{4} \text{ famille de cercles}$$

2.1.3 Équations différentielles linéaires

Définition 4 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x) \ \forall x \in I \subset \mathbb{R} \tag{2.7}$$

p et r étant des fonctions données en x, quelconques. Si $r(x) = 0$, $\forall x \in I$ l'équation est homogène, sinon elle est non-homogène ou avec second membre.

Propriété : (Caractérisation de la structure de l'ensemble des solutions)
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$. L'ensemble des solutions de l'équation non-homogène est obtenu en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation non-homogène.

Résolution :

— **équation homogène** $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$.
On résout par séparation de variables :

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Longleftrightarrow \ln|y| = -\int_{x_0}^{x} p(u)du + c$$

d'où

$$y_h(x) = ke^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} \qquad (k = e^c, y > 0, \quad k = -e^c, y < 0)$$

— **équation non-homogène**
La solution générale :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec y_h la solution générale de l'équation homogène et y_p une solution particulière de l'équation non-homogène. La solution particulière on peut la chercher avec la méthode de variation de la constante, à partir de la forme générale de la solution de l'équation homogène , dans laquelle ont fait varier la constante :

$$y_p(x) = c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du}$$

avec $c(x)$ une fonction à déterminer. On impose la condition que $y_p(x)$ est solution de l'équation non-homogène :

$$\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p = \frac{dc}{dx}e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} = r(x)$$

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} = r(x)$$

d'où :

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} r(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds + c*$$

En conclusion,

$$y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} (\int_{x_0}^{x} r(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds) + ke^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du}$$

Réduction à la forme linéaire. Équation de Bernoulli

Certaines équations différentielles non-linéaires peuvent être réduites à la forme linéaire. La plus celebre est l'équation de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^a \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Si $a = 0$ ou $a = 1$ l'équation est linéaire, sinon elle est non linéaire.
On pose $u(x) = (y(x))^{1-a}$. Alors,

$$\frac{du}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} = (1-a)(g - pu)$$

L'équation différentielle pour u est :

$$\frac{du}{dx} + (1-a)pu = (1-a)g$$

qui est une équation différentielle linéaire qu'on sait résoudre.

Existence et unicité des solutions

On considère le problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy) (2.3). On a le résultat suivant :

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D un ensemble ouvert. L'application f est continue, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième varaible. Alors $\forall (x_0, y_0) \in D$, il existe un intervalle contenant x_0 et une application $y : I \to J$, $I \times J \subset D$ solution du problème de Cauchy (2.3). La solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) est unique.

2.2 Équations différentielles linéaires du 2ème ordre

On s'intéresse aux équations linéaires du 2ème ordre car elles ont des applications importantes en mécanique, électricité, ce qui les rend plus importantes que les équations différentielles d'ordre supérieur. La théorie de ces équations est la même que celle des équations linéaires en général.

Définition 1 *Une équation différentielle du 2ème ordre est linéaire si elle peut être écrite sous la forme*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \tag{2.9}$$

et non linéaire si elle ne peut pas s'écrire sous cette forme.

En d'autres termes, une équation est linéaire si elle l'est pour y et ses dérivées, tandis que $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données de x quelconques.

Si le premier terme y'' est multiplié par une fonction $f(x)$ alors il faut diviser l'équation par $f(x)$ afin de la ramener à la forme (2.9) dite standard (ou canonique).

Si $r \equiv 0$ alors l'équation est dite homogène et non-homogène sinon. De plus, si $r \not\equiv 0$, alors l'équation obtenue en faisant $r = 0$ dans (2.9) est appelée *équation homogène associée* (à (2.9)).

Note 1 Les fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont appelés coefficients de l'équation (2.9). Lorsque ces fonctions sont des constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Exemple: 1

$$\begin{array}{rl}
y'' + 4y = \mathrm{e}^{-x}\sin x & \text{(équation linéaire non-homogène)} \\
(1-x^2)y'' - 2xy + 6y = 0 & \text{(équation linéaire homogène)} \\
\left\{\begin{array}{l} x(y''y + y'^2) + 2y'y = 0 \\ y'' = \sqrt{(y')^2 + 1} \end{array}\right. & \text{(équations non- linéaires)}
\end{array}$$

On suppose que $x \in I \subset \mathbb{R}$, I étant un intervalle ouvert.

Proposition 1 ***(Principe de superposition ou de linéarité)*** *Pour une équation différentielle linéaire homogène, toute combinaison linéaire de deux solutions sur I est aussi solution.*

Preuve: Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation homogène

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.10}$$

et $y = C_1y_1 + C_2y_2$ avec C_1 et C_2 deux constantes. Alors

$$\begin{aligned}
y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= C_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0} + C_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Note 2 Le résultat ci-dessus n'est plus vrai pour des équations non-homogènes ou non-linéaires.

Exemple: 2 1) On considère l'équation linéaire (à coefficients constants)

$$y'' + y = 1.$$

Les fonctions $\begin{array}{l} y_1 = 1 + \cos x \\ y_2 = 1 + \sin x \end{array}$ sont solutions, mais $\begin{array}{l} y_3 = 2y_1 = 2(1 + \cos x) \\ y_4 = y_1 + y_2 = 2 + \sin x \end{array}$ ne le sont pas.

2) On considère l'équation non-linéaire

$$y''y - xy = 0.$$

Les fonctions $\begin{array}{l} y_1 = x^2 \\ y_2 = 1 \end{array}$ sont solutions, mais $\begin{array}{l} y_3 = -y_1 = -x^2 \\ y_4 = y_1 + y_2 = x^2 + 1 \end{array}$ ne le sont pas.

Pour une équation différentielle d'ordre 2 du type (2.10), la solution générale est une combinaison linéaire $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ où y_1, y_2 sont deux solutions particulières linéairement indépendantes.

Définition 2 *Un problème aux valeurs initiales (PVI) est un problème composé de l'équation (2.9) et de deux conditions initiales :*

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_1 \end{array} \right. .$$

Définition 3 *Un problème aux valeurs limites (PVL) est un problème composé de l'équation (2.9) et de deux conditions aux limites :*

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = K_0 \\ y(x_1) = K_1 \end{array} \right. \qquad (x_0 \neq x_1) .$$

Exemple: 3 On considère le PVI :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 3 \end{array} \right. .$$

e^x et e^{-x} sont solutions de $y'' - y = 0$, d'où la solution générale $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x}$. Par dérivation, on trouve $y' = C_1 \mathrm{e}^x - C_2 \mathrm{e}^{-x}$. La prise en compte des conditions initiales conduit alors à $\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 4 \\ C_2 = 1 \end{array} \right.$. Finalement, la solution du PVI s'écrit $y = 4\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

Définition 4 ***(solution générale)*** *Une solution générale de l'équation du 2ème ordre homogène (2.10) sur I est une solution du type $C_1y_1+C_2y_2$, où y_1 et y_2 sont des solutions non proportionnelles entre-elles (linéairement indépendantes) et C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.*

(solution particulière) *Une solution particulière de (2.10) est obtenue en spécifiant les valeurs des constantes C_1 et C_2.*

Note 3 Un choix pour les valeurs de C_1, C_2 produit une solution particulière ; un choix différent en produit une autre. En général, il n'y aucune raison que deux solutions particulières distinctes soient linéairement indépendantes.

Définition 5 ***(base)*** *Une base de solutions pour (2.10) est une paire de solutions y_1, y_2 linéairement indépendantes.*

Note 4 (réduction de l'ordre) Si dans l'équation différentielle la variable y n'apparaît pas explicitement (c'est le cas dans (2.9) lorsque $q \equiv 0$), alors l'équation se ramène à une équation du premier ordre en posant $y' = z$ (pour (2.9) avec $q \equiv 0$, on obtient ainsi $z' + p(x)z = r(x)$ qui est bien du premier ordre).

Attention : lorsqu'elle s'applique, la méthode de réduction de l'ordre ramène la résolution d'*une* équation différentielle du *2ème ordre* à la résolution de *deux* équations du *premier ordre*. En effet, après avoir déterminé la solution $z = z(x)$ de l'équation réduite, il reste à trouver la solution $y = y(x)$ du problème initial que l'on obtient en intégrant $y' = z$ (y est une primitive de z).

2.2.1 Équation linéaire homogène à coefficients constants

On examine le cas où les coefficients sont des constantes (indépendantes de x) :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.11}$$

On a vu pour l'équation différentielle $y' + ky = 0$ qu'une solution particulière est $y = \mathrm{e}^{-kx}$. On va généraliser cette approche à l'ordre 2.

Si on cherche une solution du type $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ alors on obtient par substitution $(\lambda^2 + a\lambda + b)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$. Comme $\mathrm{e}^{\lambda x} > 0$, λ satisfait l'équation du 2ème degré

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.12}$$

que l'on appelle *équation caractéristique* associée à (2.11).

La/les racines de (2.12) sont les *valeurs caractéristiques* associées à (2.11). Leur nature dépend de la valeur du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. Il y a trois cas à distinguer :

- **cas 1 :** $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes
$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{\Delta}\right) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{\Delta}\right) \end{cases}.$$
$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ constituent une base (de l'espace) des solutions de (2.11). La solution générale est une combinaison linéaire $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$.

Exemple: 4 Considérons le PVI $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$.
L'équation caractéristique associée à $y'' + y' - 2y = 0$ s'écrit $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; les valeurs caractéristiques (i.e. les racines) sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.
La solution générale est donc $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$ où C_1, C_2 sont des constantes quelconques.
La solution du PVI s'obtient en particularisant les valeurs de C_1, C_2 afin d'obtenir une solution particulière telle que $\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$. On trouve $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \end{cases}$ et donc $y = \mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-2x}$.

- **cas 2 :** $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$. On prend $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-ax/2}$. Évidemment, on ne peut pas retenir $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$, puisque dans ce cas on aurait $y_1 \equiv y_2$ et le couple (y_1, y_2) ne peut pas former une base des solutions.
Pour construire une 2ème solution (linéairement indépendante de y_1), on utilise la méthode de la réduction de l'ordre en posant $y_2 = uy_1$ où $u = u(x)$ est une fonction inconnue. Par dérivation, il vient
$$\begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$
et en remplaçant dans (2.11) :
$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0$$
ou encore
$$u''y_1 + u'\underbrace{(2y_1' + ay_1)}_{=0} + u\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} = 0.$$
Le coefficient de u' vaut 0 car $2y_1' = 2(\mathrm{e}^{-ax/2})' = -a\mathrm{e}^{-ax/2} = -ay_1$. Celui de u est nul car y_1 est solution de (2.11). L'équation pour u se réduit donc à $u''y_1 = 0$ càd $u'' = 0$ dont la solution générale s'écrit $u = \alpha x + \beta$ où α

et β sont des constantes quelconques. Le choix $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ produit la solution particulière $y_2 = xy_1$ qui est bien linéairement indépendante de y_1 ($\frac{y_2}{y_1} = x \neq$ Cte). Le couple (y_1, y_2) forme une base des solutions et la solution générale s'écrit

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-ax/2}. \tag{2.13}$$

Note 5 Pour la solution particulière de $u'' = 0$, on aurait très bien pu prendre $u = x + 1$ ce qui aurait produit $y_2 = (x+1)y_1$ et la solution générale $y = (C_1 + C_2 + C_2 x)\mathrm{e}^{-ax/2}$. Il s'agit bien d'une solution générale de (2.11) lorsque $\Delta = 0$, mais on voit bien que ce choix est maladroit puisque la solution (2.13) est de la même forme et est de surcroît plus simple !

Exemple: 5 Considérons le PVI $\left\{\begin{array}{l} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right.$.
L'équation caractéristique admet la racine double $\lambda = 2$. La solution générale est $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}$. La solution du PVI est la solution particulière obtenue par $\left\{\begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -5 \end{array}\right.$ càd $y = (3 - 5x)\mathrm{e}^{2x}$.

- **cas 3 :** $\Delta < 0$ l'équation caractéristique (2.12) admet deux racines complexes conjugués

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right) = -\frac{a}{2} + \mathrm{i}\omega \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right) = -\frac{a}{2} - \mathrm{i}\omega \end{array}\right.$$

où l'on a posé $2\omega = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4b - a^2}$.
La solution générale complexe est alors

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{-ax/2}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x})$$

où C_1, C_2 sont des nombres complexes quelconques. Noter que $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}/\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq$ Cte.
Une base de solutions réelles est $\left\{\begin{array}{l} y_1 = \mathrm{e}^{-ax/2}\cos\omega x \\ y_2 = \mathrm{e}^{-ax/2}\sin\omega x \end{array}\right.$. Le rapport $\frac{y_2}{y_1} = \tan\omega x \neq$ Cte (on a $\omega > 0$) ce qui montre que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.
La solution générale réelle peut donc s'écrire

$$y = \mathrm{e}^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$$

où A, B sont des réels quelconques.

Note 6 Comment a-t-on trouvé les solutions réelles à partir des solutions complexes ?
Il s'agit en fait de construire des fonctions réelles en formant les bonnes combinaisons linéaires des solutions complexes. D'après le *principe de superposition*, les combinaisons linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \mathrm{e}^{\lambda_2 x}}{2} \\ y_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} - \mathrm{e}^{\lambda_2 x}}{2\mathrm{i}} \end{array} \right.$$

sont solutions de (2.11) puisque $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ et $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ le sont.
Par ailleurs, puisque les valeurs caractéristiques sont complexes conjugués l'une de l'autre, on a $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \overline{\mathrm{e}^{\lambda_2 x}}$ et $\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \overline{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}$ ($\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$). On peut donc écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \overline{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}}{2} = \mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\} \\ y_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} - \overline{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\} \end{array} \right.$$

où $\mathrm{Re}\{z\}$ et $\mathrm{Im}\{z\}$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ (autrement dit $z = \mathrm{Re}\{z\} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\{z\}$).
Les relations ci-dessus montrent clairement que y_1 et y_2 sont réelles. Les fonctions $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ apparaissent grâce la formule d'Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}a + \mathrm{i}\omega\right)x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax}(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax}\cos\omega x \\ \mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax}\sin\omega x \end{array} \right. .$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes ($\frac{y_2}{y_1} = \tan\omega x \neq$ Cte, cf. plus haut), elles constituent une base des solutions réelles de l'équation différentielle (2.11) lorsque $a^2 < 4b$.

Exemple: 6 Considérons le PVL $\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(\pi) = -3 \end{array} \right.$.
La solution générale de $y'' + y = 0$ (équation de l'*oscillateur harmonique*) est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Les conditions aux limites $\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y(\pi) = -3 \end{array} \right.$ conduisent à $\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 3 \\ -C_1 = -3 \end{array} \right.$; la valeur de C_2 est indéterminée et il y a une infinité de solutions $y = 3\cos x + C_2 \sin x$ avec C_2 quelconque.

2.2.2 Equations du type Euler-Cauchy (homogènes)

Pour $x > 0$

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2.14}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Cette équation, à *coefficients variables*, ne se prête pas directement à une résolution par les méthodes développées précédemment. Par contre, elle peut se ramener à une équation à coefficients constants (de la même forme que (2.11)) à l'aide du *changement de variable* $x = \mathrm{e}^t$. Elle peut être également résolue par un *changement de fonction* conduisant à un calcul algébrique. C'est cette dernière méthode qui va être présentée ci-dessous.

Le changement de fonction est simplement $y = x^m$ ce qui donne par substitution dans (2.14) :

$$x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [m^2 + (a-1)m + b]x^m = 0.$$

L'exposant m satisfait donc une équation du 2ème degré $m^2 + (a-1)m + b = 0$. On note m_1 et m_2 les racines (éventuellement égales) de cette équation et $\Delta = (a-1)^2 - 4b$ son discriminant.

- **cas 1 :** $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes $m_1 = \frac{1-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $m_2 = \frac{1-a-\sqrt{\Delta}}{2}$. Le couple $(y_1, y_2) = (x^{m_1}, x^{m_2})$ forme une base, de sorte que la solution générale est
$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}.$$
- **cas 2 :** $\Delta = 0$, une racine réelle double $m_1 = m_2 = \frac{1-a}{2}$. On pose $y_1 = x^{m_1} = x^{(1-a)/2}$. On cherche $y_2 = uy_1$. En remplaçant dans (2.14), on obtient
$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + ax(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0$$
$$u''x^2y_1 + u'x(2xy_1' + ay_1) + u\underbrace{(x^2y_1'' + axy_1' + by_1)}_{=0} = 0.$$
Le coefficient de u est nul car y_1 est solution de (2.14). Pour le coefficient de u'
$$2xy_1' + ay_1 = (2m_1 + a)y_1 = \left(2\tfrac{1-a}{2} + a\right)y_1 = y_1.$$
L'équation pour u devient alors $(u''x^2 + u'x)y_1 = 0$ et donc $(y_1 \neq 0)$ $u''x^2 + u'x = 0$. En posant $v = u'$ (méthode de réduction de l'ordre), on trouve $xv' + v = 0$ qui admet la solution particulière $v = 1/x$. On en déduit $u = \ln x$.

La paire $(x^{m_1}, x^{m_1}\ln x)$ forme une base de l'espace des solutions et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^{(1-a)/2}$$

Exemple: 7

$$\begin{aligned} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^2 \end{aligned}$$

- **cas 3 :** $\Delta > 0$, deux racines complexes conjugués $m_1 = \mu + \mathrm{i}\nu$, $m_2 = \overline{m_1} = \mu - \mathrm{i}\nu$, avec $\mu = \frac{1-a}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = 2b - \frac{1}{2}(1-a)^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x^\mu \cos(\nu \ln x) \\ y_2 = x^\mu \sin(\nu \ln x) \end{array} \right.$$

et la solution générale

$$y(x) = x^\mu(C_1 \cos(\nu \ln x) + C_2 \sin(\nu \ln x)).$$

2.2.3 Équations linéaires à coefficients variables ; Wronskien

On reprend l'équation linéaire homogène générale (2.9)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

avec $p(x)$, $q(x)$ fonctions de x, continues. On considère le PVI pour lequel y vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_1 \end{array} \right. . \tag{2.15}$$

Théorème 1 ***(Existence et Unicité pour le PVI)*** *Si $p(x)$, $q(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, alors le PVI (2.9+2.15) a une unique solution $y(x)$ définie sur l'intervalle I.*

Preuve: cf. Endély, Magnus, Ober, Higher Transcendental Functions, 1955.

Définition 6 ***(Déterminant Wronskien)*** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et y_1, y_2 deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$. Le déterminant Wronskien $W_{(y_1,y_2)}(x_0)$ (on dira simplement Wronskien) de (y_1, y_2) en x_0 est le déterminant :*

$$W_{(y_1,y_2)}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0).$$

Théorème 2 ***(Dépendance/Indépendance linéaire des solutions)*** *On considère le PVI (2.9+2.15) avec $p(x)$ et $q(x)$ continues I.*

Deux solutions y_1, y_2 sont linéairement dépendantes sur I si et seulement si leur Wronskien s'annule en un point $x_0 \in I$. De plus, si $W_{(y_1,y_2)}(x_0) = 0$ alors $W_{(y_1,y_2)}(x) \equiv 0$ pour tout $x \in I$.

On en déduit que si $W_{(y_1,y_2)}(x_1) \neq 0$ pour au moins un $x_1 \in I$, alors y_1, y_2 sont linéairement indépendantes sur I.

Preuve: La démonstration est décomposée en trois points :

a) Supposons que y_1, y_2, soient linéairement dépendantes. Alors il existe une constante $K \neq 0$ telle que $y_2 = ky_1$ sur I. Dans ce cas, le Wronskien de (y_1, y_2) est identiquement nul sur I :

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & ky_1(x) \\ y_1'(x) & ky_1'(x) \end{vmatrix} = ky_1(x)y_1'(x) - ky_1(x)y_1'(x) = 0.$$

pour tout $x \in I$.

b) On suppose seulement que y_1, y_2 sont solutions de (2.9) et que $W_{(y_1,y_2)}(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in I$. On va montrer que y_1, y_2 sont linéairement dépendantes.

Soit k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} k_1y_1(x_0) + k_2y_2(x_0) = 0 \\ k_1y_1'(x_0) + k_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases}. \tag{2.16}$$

Il s'agit d'un système linéaire d'inconnues k_1, k_2 dont le déterminant est précisement le Wronskien $W_{(y_1,y_2)}(x_0)$ qui s'annule par hypothèse. On peut donc affirmer qu'il existe une solution (k_1, k_2) de (2.16) différente de $(0, 0)$.

On définit $y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$. D'après le principe de superposition, y est solution de (2.9). De plus, k_1, k_2 étant solution de (2.16), on en déduit que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. On voit donc que y est solution d'un PVI avec des conditions initiales homogènes ; on a donc $y \equiv 0$ sur I.

Par unicité de la solution, $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0$ pour tout $x \in I$ avec $k_1 \neq k_2$ ce qui établit que y_1, y_2 sont linéairement dépendantes.

c) Si $W_{(y_1,y_2)}(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in I$ alors y_1, y_2 sont linéairement dépendantes d'après b) et $W_{y_1,y_2}(x) = 0$ pour tout $x \in I$ d'après a).

Exemple: 8 précédents.

Théorème 3 ***(Existence d'une Solution Générale)*** *Si les coefficients $p(x)$, $q(x)$ sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ (ouvert), alors (2.10) a une solution générale sur I. Elle a de plus la forme $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ où y_1, y_2 sont deux solutions (particulières) linéairement indépendantes de (2.10).*

Preuve: Soient y_1 la solution de (2.10) satisfaisant les conditions initiales $\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}$ et y_2 la solution satisfaisant $\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$. On a alors

$$W_{(y_1,y_2)}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ce qui permet d'affirmer que y_1, y_2 sont linéairement indépendantes sur I et donc $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est solution générale.

Note 7 Avec y_1, y_2 satisfaisant les conditions initiales de la démonstration ci-dessus, la solution $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est solution du PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = C_1 \\ y'(x_0) = C_2 \end{cases}.$$

Exemple: 9 La solution de l'équation de l'*oscillateur harmonique* $y'' + \omega^2 y = 0$ munie des conditions initiales $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b\omega \end{cases}$ s'écrit $y(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$. En effet, $y_1(x) = \cos\omega x$ est solution avec $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}$ et $y_2(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$ est solution avec $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$.

Comment obtenir une deuxième solution, quand on connaît déjà une première solution, de telle sorte que ces deux solutions forment une base ?

Méthode de réduction de l'ordre = méthode applicable à toute équation linéaire homogène du type (2.10).

Soit y_1 une solution de (2.10) connue explicitement en fonction de x sur un intervalle I. On pose $y_2 = uy_1$, avec $u(x)$ à déterminer sur I. Par dérivations successives et application de la relation $(uv)' = u'v + uv'$, il vient :

$$\begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

d'où

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0$$

où l'on a utilisé le fait que y_1 est solution de (2.10) (càd $y_1'' + py_1' + quy_1 = 0$). En posant $v = u'$, on obtient

$$v'y_1 + (2y_1' + py_1)v = 0$$

qui est une équation du premier ordre, à variable séparable (2.4) :

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2\frac{1}{y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - p \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p(x)\mathrm{d}x$$

et donc, en prenant l'exponentielle des deux membres :

$$|v| = \frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right) \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

En faisant le choix $v > 0$, on a finalement

$$v = \tfrac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = u' \qquad \Rightarrow \qquad u = \int \tfrac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Pour que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes, il suffit que u ne soit pas une fonction constante sur I. Or c'est bien le cas, puisque $u' = v \neq 0$. Le couple (y_1, uy_2) forme une base des solutions de (2.10).

Note 8 Dans le cas d'une équation à coefficients constants, on peut retrouver la deuxième solution (2.13) avec la méthode décrite ci-dessous dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double (2.11 avec $a^2 = 4b$). En effet, il suffit de prendre $y_1(x) = \mathrm{e}^{-ax/2}$ et $p(x) \equiv a \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède,

$$u = \int \tfrac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{-a\int \mathrm{d}x}}{\mathrm{e}^{-ax}}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x \quad \Rightarrow \quad y_2 = uy_1 = x\mathrm{e}^{-ax/2}$$

La solution générale s'écrit donc bien $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-ax/2}$.

2.2.4 Équations linéaires non-homogènes

On considère les équations du type (2.9) sur un intervalle ouvert I :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad (x \in I)$$

avec $r(x) \not\equiv 0$.

Comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre, on a le résultat

Théorème 4 *(a) la différence entre deux solutions de (2.9) est une solution de (2.10).*

(b) la somme entre une solution de (2.9) sur I et une solution de (2.10) sur I est une solution de (2.9) sur I.

Définition 7 *1) Une solution générale de l'équation non-homogène (2.9) sur I est de la forme*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.17}$$

où $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation homogène (2.10) et $y_p(x)$ est une solution arbitraire de (2.9) sur I, qui ne contient pas de constantes arbitraires.

2) Une solution particulière de l'équation (2.9) est une solution de la forme (2.17) obtenue en particularisant les constantes C_1 et C_2 (ainsi y_p est la solution particulière avec le choix de constantes $C_1 = C_2 = 0$).

Théorème 5 *1) Si les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sont continues sur I, alors l'équation homogène a une solution générale sur I et donc l'équation non-homogène a aussi une solution générale donnée par (2.17).*

2) Si à l'équation (2.9) on ajoute des conditions initiales, le problème de Cauchy obtenu a une solution unique sur I.

Preuve: On se base sur l'existence d'une solution pour une équation homogène, ainsi que sur l'existence d'une unique solution le problème de Cauchy associé à l'équation homogène.

Note 9 (Conclusion) Pour résoudre les équations non-homogène (2.9) ou un problème de Cauchy non-homogène, on doit résoudre dans un premier temps l'équation homogène associée (2.10) et ensuite trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (2.10).

Dans la suite, on va présenter deux méthodes pour trouver une solution particulière.

Méthodes des coefficients indéterminés

C'est la méthode la plus simple à mettre en application. Elle ne s'applique qu'aux équations à coefficients constants et pour lesquelles le second membre $r(x)$ est du type : polynôme, fonction exponentielle, cos, sin, et à toute somme ou tout produit de telles fonctions. Ces fonctions ont la particularité que leur type ne change pas lorsqu'elles sont sujettes à une opération de dérivation. On va rechercher des solutions particulières en formant des combinaisons linéaires de fonctions du même type que $r(x)$. Les coefficients de la combinaison sont ensuite déterminés par identification.

termes en $r(x)$	choix pour y_p
$k\mathrm{e}^{\alpha x}$, $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$C\mathrm{e}^{\alpha x}$
kx^n,$n \in \mathbb{N}$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \ldots + K_1 x + K_0$
$\left.\begin{array}{l} k\cos\omega x \\ k\sin\omega x \end{array}\right., \omega \in \mathbb{R}$	$\left.\right\}$ $K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$\begin{array}{l} k\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x \\ k\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x \end{array}$	$\left.\right\}$ $\mathrm{e}^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$

TABLE 2.1 – Second membre et choix de la solution particulière pour la méthode des coefficients indéterminés (équations différentielles à coefficients constants).

Si $r(x)$ coïncide avec l'une des formes du tableau ci-dessus, alors il faut choisir le y_p correspondant, le remplacer dans l'équation $y'' + ay' + by = r(x)$ et trouver les coefficients par identification.

Si le choix de y_p conduit à une fonction qui est elle-même solution de l'équation homogène associée, alors il faut multiplier y_p par x (voire x^2 dans le cas ou l'équation caractéristique admet une racine double).

Si $r(x)$ est une somme des fonctions de la colonne de gauche, alors y_p doit être recherché comme somme des fonctions correspondantes dans la colonne de droite.

On notera que les fonctions puissance $x \mapsto x^\alpha$ d'exposant α non-entier ne se prêtent pas à un traitement par la méthode des coefficients indéterminés.

Exemple: 10 1) $y'' + 4y = 8x^2$.

On cherche $y_p(x) = K_2x^2 + K_1x + K_0$. En injectant dans l'équation, il vient

$$\begin{aligned} (K_2x^2 + K_1x + K_0)'' + 4(K_2x^2 + K_1x + K_0) &= \\ 2K_2 + 4(K_2x^2 + K_1x + K_0) &= \\ 4K_2x^2 + 4K_1x + 2K_2 + 4K_0 &= 8x^2. \end{aligned}$$

Par identification membre à membre :

$$\left\{\begin{array}{l} 4K_2 = 8 \\ 4K_1 = 0 \\ 2K_2 + 4K_0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_2 = 2 \\ K_1 = 0 \\ K_0 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad y_p(x) = 2x^2 - 1$$

et finalement la solution générale de $y'' + 4y = 8x^2$ s'écrit $y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$.

2) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + \lambda = 0$ qui possède les deux racines réelles $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. La solution homogène est ainsi $y_h = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Si on choisit $y_p(x) = C\mathrm{e}^x$, comme le suggère le tableau 2.1, on tombe sur une solution de l'équation homogène. On va donc chercher $y_p(x) = Cx\mathrm{e}^x$. En reportant dans l'équation on obtient

$$\begin{aligned} (Cx\mathrm{e}^x)'' - 3(Cx\mathrm{e}^x)' + 2Cx\mathrm{e}^x &= \\ C(2+x)\mathrm{e}^x - 3C(1+x)\mathrm{e}^x + 2Cx\mathrm{e}^x &= \\ [2 + x - 3 - 3x + 2x]\, C\mathrm{e}^x &= \\ -C\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

et donc $C = -1$ d'où finalement $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x$.

3) On considère le problème aux valeurs initiales (de Cauchy) :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + x \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'équation caractéristique admet la racine double 1, on en déduit la solution générale de l'équation homogène $y_h(x) = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x$.
On cherche une solution particulière y_{p_1} avec le second membre $r_1(x) = x$

$$r_1(x) = x \quad \rightarrow \quad y_{p_1} = K_1x + K_0$$

et une autre, y_{p_2}, avec $r_2(x) = \mathrm{e}^x$:

$$r_2(x) = \mathrm{e}^x \quad \rightarrow \quad y_{p_2} = Cx^2\mathrm{e}^x.$$

Par identification, on trouve d'une part

$$\begin{cases} K_1 = 1 \\ -2K_1 + K_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{p_1} = x + 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} K_1 = 1 \\ -2K_1 + K_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{p_1} = x + 2$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (Cx^2\mathrm{e}^x)'' - 2(Cx^2\mathrm{e}^x)' + Cx^2\mathrm{e}^x &= \\ C(2 + 4x + x^2)\mathrm{e}^x - 2C(2x + x^2)\mathrm{e}^x + Cx^2\mathrm{e}^x &= \\ C\mathrm{e}^x[2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2] &= \\ 2C\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

càd $y_{p_2} = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$.

En utilisant la linéarité de l'équation, la somme $y_{p_1}+y_{p_2}$ est solution particulière avec le second membre $x+\mathrm{e}^x$. La solution générale de $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x+x$ est donc $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$. Les conditions initiales fournissent enfin $C_1=C_2=-1$ d'où la solution du PVI :

$$y=\left(\tfrac{1}{2}x^2-x-1\right)\mathrm{e}^x+x+2.$$

Méthode de la variation des constantes

C'est une méthode qui s'applique en général, pour toute équation linéaire, mais qu'on utilise le plus souvent avec les équations à coefficients variables. Elle généralise la méthode de la variation de la constante vue précédemment pour les équations linéaires d'ordre 1. L'idée est de partir de la solution générale de l'équation homogène y_h et de chercher une solution particulière dans laquelle les coefficients arbitraires de y_h sont des fonctions de x et non plus des constantes.

Soient y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.

$$\begin{array}{rcl} y_h(x) & = & C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\\ y_p(x) & = & C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_p' & = & C_1'y_1+C_2'y_2+C_1y_1'+C_2y_2'\\ y_p'' & = & C_1''y_1+C_2''y_2+C_1y_1''+C_2y_2''+2(C_1'y_1'+C_2'y_2')\end{array}$$

On cherchera y_p solution de $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ avec la condition supplémentaire

$$C_1'y_1+C_2'y_1=0$$

ce qui a pour conséquence de faire disparaître les dérivées de $C_1(x)$, $C_2(x)$ (respectivement les dérivées secondes) dans l'expression de y_p' (respectivement y_p''). Plus précisement, on a

$$\begin{array}{rcl} y_p' & = & C_1y_1'+C_2y_2'\\ y_p'' & = & C_1y_1''+C_2y_2''+C_1'y_1'+C_2'y_2'.\end{array}$$

En reportant dans $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$:

$$\begin{array}{rcl} C_1y_1''+C_2y_2''+C_1'y_1'+C_2'y_2'+p(x)(C_1y_1'+C_2y_2')+q(x)(C_1y_1+C_2y_2) & = & r(x)\\ C_1\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{=0}+C_2\underbrace{(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2)}_{=0}+C_1'y_1'+C_2'y_2' & = & r(x)\end{array}$$

En définitive, on obtient un système de deux équations linéaires pour les dérivées C_1', C_2' :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'y_1' + C_2'y_2' = r \\ C_1'y_1 + C_2'y_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Le déterminant de ce *système de Cramer* n'est autre que le Wronskien $W_{(y_1,y_2)}$ qui est non-nul puisque y_1, y_2 sont linéairement indépendantes. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{r}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \left(\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\int \frac{1}{W_{(y_1,y_2)}} r y_2 \mathrm{d}x \\ C_2 = +\int \frac{1}{W_{(y_1,y_2)}} r y_1 \mathrm{d}x \end{array} \right. .$$

Note 10 Avant d'appliquer la méthode, il faut s'assurer que l'équation est écrite sous la *forme standard* (canonique), i.e. que le coefficient de y'' vaut 1.

Exemple: 11 $(x+1)y'' - (2x-1)y' + (x-2)y = x+1$, $x > -1$. Traité en TD.

Exemple: 12 On considère l'équation linéaire à coefficients non-constants :

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 \mathrm{e}^{2x}, \qquad x > 0.$$

La forme canonique s'écrit

$$y'' - \frac{1+x}{x} y' + \frac{1}{x} y = x\mathrm{e}^{2x}, \qquad x > 0.$$

On a une solution exponentielle de l'équation homogène $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ (vérifiez par vous-même qu'il s'agit bien d'une solution). Pour trouver une solution linéairement indépendante, on utilise la méthode de réduction de l'ordre en posant $y_2 = uy_1$:

$$u = \int \tfrac{1}{y_1^2} \mathrm{e\,xp} \left(\int \frac{x+1}{x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} \mathrm{e}^{x + \ln x} \mathrm{d}x = \int x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On peut donc prendre $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $y_2(x) = -(x+1)$ dont le Wronskien est $W_{(y_1,y_2)} = x\mathrm{e}^x$. On a alors une solution particulière $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\int \frac{1}{W_{(y_1,y_2)}} r y_2 \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x\mathrm{e}^x} x\mathrm{e}^{2x}(x+1)\mathrm{d}x = \int (x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x \\ C_2 = +\int \frac{1}{W_{(y_1,y_2)}} r y_1 \mathrm{d}x = +\int \frac{1}{x\mathrm{e}^x} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{array} \right. .$$

La solution particulière trouvée s'écrit donc

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{2x} = \frac{x-1}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

Le paragraphe suivant regroupe un certain nombre de résultats pour les équations d'ordre supérieur à 2. Il peut être sauté en première lecture.

2.3 Équations différentielles d'ordre $n > 2$

C'est une équation dans laquelle $y^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ est la plus grande dérivée présente. Elle est du type

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.18}$$

Une équation est linéaire si elle peut s'écrire sous la forme dite *canonique*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{2.19}$$

où $p_{n-1}(x), \ldots, p_0(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données.

Si le second membre $r(x) \equiv 0$, on dit que (2.19) est homogène ; elle est non-homogène sinon.

2.3.1 Équations linéaires homogènes

Elles sont du type :

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{2.20}$$

Définition 8 *1) Une solution générale de l'équation (2.20) sur un intervalle I ouvert est une solution sur I de la forme*

$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ *où* $C_1, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires .

2) Une solution particulière est obtenue en choisissant les valeurs de $C_1, \ldots, C_n$.

Définition 9 *n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes sur un intervalle I si l'équation*

$$k_1 y_1(x) + \ldots + k_n y_n(x) = 0$$

n'est satisfaite pour tout $x \in I$ que lorsque $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Définition 10 *Un problème aux valeurs initiales (pb. de Cauchy) pour l'équation (2.20) consiste en cette équation munie de n conditions initiales*

$$\begin{cases} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \end{cases} \tag{2.21}$$

Théorème 6 *(Existence et unicité pour des problèmes aux valeurs initiales)* *Si $p_0(x)$,...,$p_{n-1}(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I, et si $x \in I$, alors le problème aux valeurs initiales (2.19)+(2.21) a une solution unique $y(x)$ sur I.*

Exemple: 13 Équation d'Euler-Cauchy homogène du 3ème ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y''(1) = -4 \end{array} \right. \tag{2.22}$$

sur un intervalle ouvert I inclus dans $\mathbb{R}^+$ et contenant 1.

Exactement de la même manière que dans le paragraphe **??**, on cherche une solution sous forme d'un monôme $y(x) = x^m$. En remplaçant, il vient

$$[m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0$$

L'exposant m est racine d'une équation d'ordre 3 qui se factorise aisément :

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = (m-1)(m-2)(m-3)$$

Les racines sont ainsi 1, 2 et 3 d'où la solution générale $y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. La prescription des conditions initiales conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y''(1) = -4 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 1 \\ 2C_2 + 6C_3 = -4 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = -1 \end{array} \right. .$$

La solution du problème aux valeurs initiales (2.22) s'écrit donc finalement $y(x) = -x + 2x^2 - x^3$.

Définition 11 ***(Wronskien)*** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et y_1, ..., y_n n fonctions $(n-1)$ fois dérivables en $x_0 \in I$. Le Wronskien $W_{(y_1,\ldots,y_2)}(x_0)$ de $y_1, \ldots, y_2$ en x_0 est le déterminant :*

$$W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x_0) = \left| \begin{array}{cccc} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{array} \right| .$$

Théorème 7 ***(Dépendance/Indépendance linéaire des solutions)*** *On suppose que $p_0(x)$,...,$p_{n-1}(x)$ sont continues I.*

Les n solutions y_1, y_2, …, y_n sont linéairement dépendantes sur I si et seulement si leur Wronskien $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x_0) = 0$ s'annule en un point $x_0 \in I$. De plus, si $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x_0) = 0$ alors $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x) \equiv 0$ pour tout $x \in I$.

On en déduit que si $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x_1) \neq 0$ pour au moins un $x_1 \in I$, alors y_1, y_2, …, y_n sont linéairement indépendantes sur I.

Preuve: La démonstration est décomposée en trois points :

a) Si $y_1, \ldots, y_n$ sont linéairement dépendantes sur I, il existe des constantes k_1, k_2, …, k_n non-nulles telles que $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \ldots + k_ny_n(x) = 0$ et ce pour tout $x \in I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1y_1'(x) + k_2y_2'(x) + \ldots + k_ny_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ k_1y_1^{(n)}(x) + k_2y_2^{(n)}(x) + \ldots + k_ny_n^{(n)}(x) = 0 \end{cases}$$

Le système admet une solution k_1, k_2, …, k_n non-triviale, ce qui n'est possible que si le déterminant vaut zéro. Ce déterminant est précisement le Wronskien $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x)$ qui s'annule donc pour tout $x \in I$.

b) Soient z_1, z_2, ..., z_n des solutions de (2.19) telles que $W_{(z_1,\ldots,z_n)}(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in I$. Il existe des constantes k_1, k_2, …, k_n non-nulles telles que

$$\begin{cases} k_1z_1'(x_0) + k_2z_2'(x_0) + \ldots + k_nz_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ k_1z_1^{(n-1)}(x_0) + k_2z_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + k_nz_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Le principe de superposition permet d'affirmer que $z = k_1z_1 + k_2z_2 + \ldots + k_nz_n$ est une solution de (2.19). De plus, on a $z'(x_0) = z''(x_0) = \ldots = z^{(n-1)}(x_0) = 0$ d'après le système ci-dessus. Or, la fonction $y(x) \equiv 0$ est une autre solution de (2.20) satisfaisant $y'(x_0) = y''(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. La solution étant unique, on en déduit que $z(x) \equiv 0$ sur I et donc que z_1, …, z_n sont linéairement dépendantes.

c) Si $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in I$ alors y_1, …, y_n sont linéairement dépendantes d'après b) et $W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x) = 0$ pour tout $x \in I$ d'après a).

Théorème 8 ***(Existence de la solution générale)*** *Si p_0, …, p_{n-1} sont continues sur un intervalle ouvert I, alors (2.20) a un solution générale sur I. Elle est de la forme*

$$y(x) = k_1y_1(x) + \ldots + k_ny_n(x)$$

où y_1, …, y_n est une base des solutions de (2.19) (on a donc $W_{(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0$ sur I) et C_1, …, C_n sont des constantes.

2.3.2 Équations homogènes à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2.23}$$

La recherche de solutions exponentielles de la forme $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ conduit à l'équation caractéristique

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

On distingue plusieurs cas :

- **Cas 1 :** l'équation caractéristique admet n racines distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Alors la famille $(y_1, \ldots, y_n) = (\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x})$ constitue une base des solutions de (2.23) et on peut écrire la solution générale sous la forme :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

L'indépendance linéaire de la famille $(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x})$ se vérifie en calculant le Wronskien :

$$\begin{aligned}
W_{(y_1,\ldots,y_n)}(x) &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \ldots & \mathrm{e}^{\lambda_n x} \\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n\mathrm{e}^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0
\end{aligned}$$

car la matrice est de Vandermonde (cf TD et paragraphe 1.6 sur les déterminants) et les λ_1, ..., λ_n sont distincts deux à deux.

Exemple: 14

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

Le polynôme caractéristique est $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$. On a les racines évidentes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 2$ (vérifiez que c'est bien le cas). La solution générale est

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{2x}.$$

- **Cas 2 :** si on a des racines complexes, elles sont en paires de racines complexes conjuguées car les coefficient a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont réels. Dans le cas d'une racine simple $\lambda = \gamma + \mathrm{i}\omega$ (avec la racine conjuguée $\bar{\lambda} = \lambda - \mathrm{i}\omega$), on peut former deux solutions réelles linéairement indépendantes $y_1 = \mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\lambda x}\} = \mathrm{e}^{\gamma x}\cos\omega x$ et $y_2 = \mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{\lambda x}\} = \mathrm{e}^{\gamma x}\sin\omega x$.

  Exemple: 15

  $$y''' - 2y'' + 2y = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases}.$$

  Le polynôme caractéristique s'écrit $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$. $\lambda_1 = 0$ est une racine évidente (ce qui signifie que l'équation admet une solution constante) ; les 2 autres sont complexes conjugués l'une de l'autre $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = 1 + \mathrm{i}$ (vérifiez-le en résolvant l'équation du ème degré $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$). La solution générale complexe est alors

  $$\widetilde{y(x)} = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{C_i}\mathrm{e}^{\lambda_i x} = \widetilde{C_1} + \widetilde{C_2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \widetilde{C_2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}, \quad \widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \widetilde{C_3} \in \mathbb{C}.$$

  La solution génénale réelle est (prendre $\gamma = \omega = 1$)

  $$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\} + C_3\mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\} = C_1 + C_2\mathrm{e}^x\cos x + C_3\mathrm{e}^x\sin x.$$

  Par dérivations successives, on trouve

  $$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 \\ y'(0) = C_2 + C_3 \\ y''(0) = 2C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = -2 \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

  La solution du PVI peut s'écrire

  $$y(x) = \frac{5}{2} - 2\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x.$$

- **Cas 3 :** Racine multiple réelle : si λ est une valeur propre réelle d'ordre m, alors il y a m solutions linéairement indépendantes correspondantes : $\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, x^2\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$.

  Exemple: 16

  $$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$$

  Le polynôme caractéristique est $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ est une racine double et $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$ est une racine triple.
  La solution générale est

  $$y(x) = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\mathrm{e}^x.$$

- **Cas 4 :** Pour une racine multiple complexe $\lambda = \gamma + \mathrm{i}\omega$ d'ordre m, on peut construire $2m$ solutions linéairement indépendantes : $\mathrm{e}^{\gamma x}\cos\omega x$, $\mathrm{e}^{\gamma x}\sin\omega x$, $x\mathrm{e}^{\gamma x}\cos\omega x$, $x\mathrm{e}^{\gamma}$ $x^{m-1}\mathrm{e}^{\gamma x}\sin\omega x$.

  Exemple: 17 On considère l'équation du quatrième ordre

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} - 4\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + 14\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 20\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 25y = 0$$

  Le polynôme caractéristique est $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = 0$. On peut le factoriser en $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2$ d'ou les racines doubles $\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$.
  La solution générale réelle est

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x\cos(2x) + (C_3 + C_4 x)\mathrm{e}^x\sin(2x).$$

2.3.3 Équations non-homogènes ; Méthode de variation des constantes

On considère maintenant l'équation (2.19)

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

dans le cas $r(x) \neq 0$.

Les propriétés de linéarité, de superposition et les théorèmes d'existence et d'unicité sont les mêmes que pour $n = 2$.

La solution générale de (2.19) s'écrit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

où la solution particulière y_p peut être trouvée par la méthode des coefficients indéterminés ou la méthode de variation des constantes qui conduit à

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W_{(y_1,\ldots,y_n)}} r(x)\mathrm{d}x + \ldots + y_n(x)\int \frac{W_n(x)}{W_{(y_1,\ldots,y_n)}} r(x)\mathrm{d}x$$

où W_j est obtenu à partir de W en remplaçant la j-ème colonne par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple: 18

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \qquad (x > 0)$$

L'équation homogène associée a été résolue dans l'exemple 13 :

$$y_h(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3.$$

Il ne reste donc qu'à trouver une solution particulière de l'équation non-homogène.

Avant d'appliquer la méthode de variation des constantes, on passe l'équation dans sa forme canonique en divisant les deux membres par x^3 ; le second membre devient $r(x) = x \ln x$. Le Wronskien de (x, x^2, x^3) vaut

$$W_{(x,x^2,x^3)} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x(6x^2 - 4x^2) = 2x^3$$

et ne s'annule pas pour $x > 0$.

$$\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} x & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^4 \\
W_2 &= \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2x^3 \\
W_3 &= \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W_{(x,x^2,x^3)}} r(x)\mathrm{d}x + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W_{(x,x^2,x^3)}} r(x)\mathrm{d}x + y_3(x) \int \frac{W_3(x)}{W_{(x,x^2,x^3)}} r(x)\mathrm{d}x \\
&= x \int \frac{x^4}{2x^3} x \ln x\mathrm{d}x + x^2 \int \frac{-2x^3}{2x^3} x \ln x\mathrm{d}x + x^3 \int \frac{x^2}{2x^3} x \ln x\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{2} \int x^2 \ln x\mathrm{d}x - x^2 \int x \ln x\mathrm{d}x + \frac{x^3}{2} \int \ln x\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{2} \left[\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right] - x^2 \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right] + \frac{x^3}{2}(x \ln x - x) \\
&= \frac{x^4}{6} \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)
\end{aligned}$$

Pour vous entraîner, vérifiez directement que $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$ est bien une primitive de $x \ln x$ et que $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$ est une primitive de $x^2 \ln x$ (avec la primitive de $\ln x$ et des intégrations par parties, vous pouvez retrouver ces expressions).

Le paragraphe suivant va exploiter les techniques de diagonalisation de matrices carrées présentées au chapitre précédent.

2.4 Systèmes différentiels

Dans le cas général, un système différentiel à n dimensions est donné par un ensemble de n relations sous la forme :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{2.24}$$

Si l'on ajoute n conditions initiales :

$$\begin{cases} y_1(0) = K_1 \\ y_2(0) = K_2 \\ \vdots \\ y_n(0) = K_n \end{cases} \tag{2.25}$$

on obtient un problème de Cauchy.

Théorème 9 *Si f_1, …, f_n sont continues avec des dérivées partielles continues dans un domaine ouvert $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(x_0, K_1, K_2, \ldots, K_n)$, alors (2.24) a une solution dans un intervalle ouvert $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$, satisfaisant (2.25).*

Le paragraphe suivant va exploiter les techniques de diagonalisation de matrices carrées du chapitre précédent.

2.4.1 Systèmes différentiels linéaires

Un système différentiel (2.24) est linéaire si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont linéaires par rapport à y_1, …, y_n. Autrement dit, (2.24) est linéaire s'il existe des fonctions $a_{i1}(x)$, $a_{i2}(x)$, …, $a_{in}(x)$ et $r_i(x)$ telles que

$$f_i(x, y_1, \ldots) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \ldots + a_{in}(x)y_n + r_i(x)$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Exemples : En dimension 2 :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}.$$

En dimension $n > 2$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

Note 11 Une équation différentielle linéaire à coefficient constants d'ordre n, peut toujours se mettre sous la forme d'un système linéaire de dimension n.

2.4.2 Notation matricielle

On va noter

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A(x) = [a_{ij}(x)] = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Le système se met alors sous la forme suivante :

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = A(x)Y(x).$$

La forme générale d'un système linéaire est $Y'(x) = A(x)Y(x) + g(x)$. Si $g(x) \equiv 0$, le système est homogène et si $g(x) \neq 0$, il est non-homogène.

Théorème 10 *Si Y_1, Y_2 sont deux solutions du système différentiel linéaire homogène $Y' = AY$, alors $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ est aussi solution.*

La famille de solutions Y_1, Y_2, …, Y_n forme une base des solutions de $Y' = AY$ si le déterminant de la matrice constituée des colonnes contenant les composantes de Y_1, Y_2, …, Y_n est non nul.

Dans la suite, on ne va considèrer que le cas où les fonctions $a_{ij}(x)$ sont constantes.

2.4.3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Ils sont de la forme $Y' = AY$ où $A = [a_{ij}]$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels et constants.

On cherche des solutions sous la forme $Y = X\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

$$Y' = \begin{pmatrix} X_1\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n\mathrm{e}^{\lambda x} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n\mathrm{e}^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \lambda X\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

On a donc $Y' = AY \Rightarrow \lambda X\mathrm{e}^{\lambda x} = AX\mathrm{e}^{\lambda x}$, c'est-à-dire $AX = \lambda X$. Autrement dit, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Pour obtenir X, on sera ainsi amené à résoudre un problème aux valeurs propres pour la matrice carrée A. On suppose dans la suite que A est à coefficients réels et est diagonalisable ($\Rightarrow$ il existe une base de vecteurs propres)

- **Cas 1 :** On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (certaines peuvent être égales) et $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ les vecteurs propre associés (ils sont linéairement indépendants deux à deux). Les solutions linéairement indépendantes de $Y' = AX$ sont

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ Y^{(2)} &= X^{(2)}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ Y^{(n)} &= X^{(n)}\mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

  et la solution générale s'écrit

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y^{(i)} = C_1 X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 X^{(2)}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n X^{(n)}\mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

  où $C_1, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

- **Cas 2 :** Deux valeurs propres sont complexes conjuguées l'une de l'autre. Par exemple, si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \gamma + \mathrm{i}\omega$ et $X^{(1)} = \overline{X^{(2)}} = A^{(1)} + \mathrm{i}B^{(1)}$ avec $A^{(1)}, B^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1, \ldots, n$, on forme les deux solutions linéairement indépendantes réelles :

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= \frac{X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \overline{X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}}{2} = \mathrm{e}^{\gamma x}(A^{(1)} \cos \omega x - B^{(1)} \sin \omega x) \\ Y^{(2)} &= \frac{X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} - \overline{X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\gamma x}(A^{(1)} \sin \omega x + B^{(1)} \cos \omega x) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Si les autres valeurs propres sont réelles, elles relèvent du cas 1 ci-dessus.

Exemple: 19 On considère l'exemple :

$$Y' = AX, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \mathrm{i}$ et les vecteurs propres correspondants sont $X^{(1)} = \overline{X^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.
La solution générale complexe est

$$\widetilde{Y} = \widetilde{C_1}X^{(1)}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \widetilde{C_1}X^{(2)}\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \widetilde{C_1}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \widetilde{C_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

avec $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2} \in \mathbb{C}$.
On peut prendre pour solutions réelles linéairement indépendantes de $Y' = AY$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ 2\mathrm{i}Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \\ Y^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Rappel : Quel que soit $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 2\cos z$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 2\mathrm{i}\sin z$.
La solution générale réelle est ainsi :

$$Y = C_1Y^{(1)} + C_2Y^{(2)} = \begin{pmatrix} C_1\cos x + C_2\sin x \\ C_2\cos x - C_1\sin x \end{pmatrix}$$

où C_1, C_2 sont des constantes réelles quelconques.
Pour faire le lien avec (2.26), poser $X^{(1)} = A^{(1)} + \mathrm{i}B^{(1)}$ avec $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Cas 3 :** $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$ est une valeur propre double de A
Deux solutions linéairement indépendantes sont

$$\begin{array}{rcl} Y^{(1)} & = & X\mathrm{e}^{\mu x} \\ Y^{(2)} & = & Xx\mathrm{e}^{\mu x} + U\mathrm{e}^{\mu x} \end{array}$$

où X et U sont les vecteurs propres associés à la valeur propre μ.

- **Cas 4 :** $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ est une valeur propre triple de A
  On peut prendre les trois solutions linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= X\mathrm{e}^{\mu x} \\ Y^{(2)} &= Xx\mathrm{e}^{\mu x} + U\mathrm{e}^{\mu x} \\ Y^{(3)} &= \frac{1}{2}Xx^2\mathrm{e}^{\mu x} + Ux\mathrm{e}^{\mu x} + V\mathrm{e}^{\mu t} \end{aligned}$$

  où X, U et V sont les vecteurs propres associés à la valeur propre μ.

2.4.4 Systèmes différentiels linéaires non-homogènes

Ils peuvent s'écrire en général

$$Y' = AY + g. \tag{2.27}$$

On se limitera ici au cas où la matrice A est à coefficients constants.

De la même manière qu'avec les équations linéaires, on cherche la solution comme somme de la solution générale du système homogène $Y^{(h)}$ et d'une solution particulière $Y^{(p)}$ du système avec $g \neq 0$:

$$Y = Y^{(h)} + Y^{(p)}.$$

Lorsque la matrice A est diagonalisable, on va montrer que l'on peut découpler le problème. Pour cela, on note P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$. La diagonalisation de A conduit alors à

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le système (2.27) devient ainsi

$$Y' = PDP^{-1}Y + g \quad \Rightarrow \quad (P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y) + P^{-1}g$$

En définissant maintenant

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = P^{-1}Y \qquad \text{et} \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = P^{-1}g$$

on voit que (2.27) se réécrit comme un système de n équations découplées :

$$\begin{cases} Z_1' = \lambda_1 Z_1 + h_1 \\ \vdots \\ Z_n' = \lambda_n Z_n + h_n \end{cases}$$

chaque équation étant du premier ordre (à coefficients constants).

La solution de la i-ème équation est :

$$Z_i(x) = C_i \mathrm{e}^{\lambda_i x} + Z_i^p(x), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

oÃ¹ $Z_i^p(x)$ est une solution particulière de $Z_i' = \lambda_i Z_i + h_i$.

Pour obtenir la solution particulière, on utilisera la méthode des coefficients indéterminés lorsque les composantes de $g(x)$ sont du type polynÃ´me, exponentielle, cosinus, sinus (cf. Tableau 2.1)... Si ce n'est pas le cas, on peut toujours utiliser la méthode de variation de la constante ce qui conduit à

$$Z_i^p(x) = \mathrm{e}^{\lambda_i x} \int \mathrm{e}^{-\lambda_i x'} h_i(x') \mathrm{d}x', \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

La solution Y du problème initial (2.27) est finalement obtenue en inversant la relation $Z = P^{-1}Y \Leftrightarrow Y = PZ$.

Chapitre 3

Séries de fonctions

3.1 Suites de fonctions

Définition 1 : (Suite de fonctions)
Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une application

$$n \in \mathbb{N} \to f_n \in \{\text{ensemble des fonctions définies sur} D \text{ dans } \mathbb{K}\}$$

Définition 2 : (Convergence simple ou ponctuelle)
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ou ponctuellement vers $f : D \to \mathbb{K}$ si

$$\forall x \in D, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

D est le domaine de convergence de la suite.

Exemple
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.
Pour $x \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Pour $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}-]-1,1]$, $f_n(x)$ ne converge pas.
La limite de $f_n(x)$ est $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-1,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Le domaine de convergence est $D =]-1,1]$. On observe que $f_n \in \mathcal{C}]-1,1]$ et $f \notin \mathcal{C}]-1,1]$.

Définition 3 : (Convergence uniforme)
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le domaine D si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Observation : $N(\varepsilon)$ est indépendent de x.

Exemples

1. Soit $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x} + \frac{x^2}{n}}{1 + \frac{x^2}{n}} = e^{-x} \quad \text{limite simple}$$

On note $f(x) = e^{-x}$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^{-x} + x^2 - ne^{-x} - xe^{-x}}{n+x}\right| = \frac{x|x-e^{-x}|}{n+x} \leq \frac{2}{n}, \forall x \in [0,1]$$

Si on veut avoir $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$ alors ceci revient à prendre n tel que $\frac{2}{\varepsilon} \leq n$. On prend $N(\varepsilon) = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$. Alors, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} \leq \varepsilon$$

donc $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$.

2. Soit $f_n(x)$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si $x \leq 0$ alors $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.
Si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x)$.
La limite simple de la suite f_n est la fonction f, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Etudions maintenant le convergence uniforme.
Si $x \leq 0$, $f_n(x) - f(x) = 0$ et donc sur tout intervalle $I \subset]-\infty, 0]$ la suite de fonctions f_n converge uniformément vers f.

Si $x > 0$, il y a deux situations :
pour $x > \frac{1}{n}$, $f_n(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$;
pour $0 < x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) - f(x) = nx - 1$.

Si $\varepsilon > 0$ est quelconque, en imposant $|nx - 1| \leq \varepsilon$, pour $0 < x \leq \frac{1}{n}$, on trouve $n \geq \frac{1-\varepsilon}{x}$ qui sera vérifié pour $n > N(,x) = \left[\frac{1-\varepsilon}{x}\right]$.
• Si on prend un intervalle $I \ni 0$ alors $\frac{1-\varepsilon}{x} \to \infty$ quand $|x| \to 0$, donc il n'y a pas de convergence uniforme sur I.
• Si on prend un intervalle $I \subset]0, +\infty[$, donc $I =]a, +\infty[$ avec $a > 0$ alors pour tout $x \geq a$ on a

$$\frac{1-\varepsilon}{x} \leq \frac{1-\varepsilon}{a}$$

et pour $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1-\varepsilon}{a}\right]$ on a $n > \frac{1-\varepsilon}{x}$ et donc $1 - nx = f(x) - f_n(x) < \varepsilon$, $\forall \frac{1}{n} > x > a$ et $f(x) - f_n(x) = 0 < \varepsilon$, $\forall x > \frac{1}{n}$. La convergence est donc uniforme sur I.

Proposition 1 : La suite de fonctions $(f_n)_n$, $f_n : D \to \mathbb{K}$ converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), \qquad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On peut définir une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur D :

Définition 4 :
Soit f une fonction bornée sur D. On appelle "norme de la convergence uniforme de f" , le nombre défini par

$$\|f\|_\infty = \sup\left(|f(x)|, \quad x \in D\right)$$

Le critère de convergence uniforme s'écrit grâce à cette norme :

Convergence uniforme : La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f \iff$ la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0.

Proposition 2 : Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f alors elle converge simplement vers f. La réciproque est fausse (cf. exemple no.2).

3.1.1 Critère de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Théorème (Critère de Cauchy) : Une suite de fonctions $(f_n)_n$, $f_n : D \to \mathbb{K}$, converge uniformément vers f sur $D \iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall p, q \geq N(\varepsilon), \qquad \sup_{x \in D} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

Démonstration :
On suppose que $f_n \to f$ uniformément. Alors,

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \exists N(\frac{\varepsilon}{2}) \text{ tel que } \forall n \geq N(\frac{\varepsilon}{2}), \qquad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $p, q \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$. Alors,

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $x \in D$ on a :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in D} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$$

Démontrons l'implication réciproque. On considère que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall p, q \geq N(\varepsilon), \qquad \sup_{x \in D} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \qquad (2)$$

Soit $x \in D$ fixé. L'inégaltié précédente écrite pour x fixé montre que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle est donc convergente sur $\mathbb{K}$ et il existe une limite que l'on note $f(x)$ telle que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$, pour $n \to \infty$.
On fixe p. Comme $|f_q(x) - f(x)| \to 0$, $q \to \infty$,

$$\Rightarrow |f_q(x) - f_p(x)| \to |f(x) - f_p(x)|, \quad q \to \infty$$

Dans l'inégalité (2) on fixe p et on passe à la limite selon $q \to \infty$. Alors,

$$\lim_{q \to \infty} |f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N(\varepsilon), \quad \forall x \in D$$

Donc, $\forall p \geq N(\varepsilon), \forall x \in D$ on a $|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ ce qui veut dire que f_p converge uniformément vers f sur D.

3.1.2 Propriétés des suites de fonctions

Théorème 1 (Continuité) : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur D qui converge uniformément sur D vers f. Alors f est également continue.

Démonstration :
Démontrer que f est continue revient à démontrer qu f est continue en $x_0, \forall x_0 \in D$. Autrement dit, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) \text{ tel que } \forall x : |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

On va estimer la différence $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Comme $f_n \to f$ uniformément, pour

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \exists N(\varepsilon') \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon'), \quad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_(x)| \leq \varepsilon'$$

Soit $n \geq N(\varepsilon')$. Alors :

$$|f_n(x) - f_(x)| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$$

On écrit maintenant la continuité de f_n en x_0. Pour

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \exists \eta(\varepsilon', x_0) \text{ tel que } \forall x : |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon'$$

En conclusion, pour $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$, tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$ on ait :

$$|f_n(x) - f_(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} \exists \eta(\varepsilon, x_0) = \eta(\varepsilon', x_0) \text{ tel que } \forall x : |x - x_0| \leq \eta &\Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

donc f est continue en x_0. x_0 étant quelconque, f est continue sur D.

Théorème 2 (Intégration) : Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I = [a, b]$ segment fini, alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration :

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$\leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|dx = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Si $f_n \to f$ uniformément alors $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, $n \to \infty$. Avec l'inégallité précédente on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Théorème 3 (Dérivation) : Si la suite de fonctions $(f_n)_n$, continues et dérivables sur I converge uniformément vers f et si la suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g , alors :

$$f' = g.$$

Démonstration :
Soit $[x_0, \xi] \in I$. Alors, avec le théorème d'intégration on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{\xi} f'_n(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} g(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{\xi} f'_n(x)dx = [f_n(x)]_{x_0}^{\xi} = f_n(\xi) - f_n(x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(\xi) - f_n(x_0)) = f(\xi) - f(x_0)$$

Au final :

$$f(\xi) - f(x_0) = \int_{x_0}^{\xi} g(x)dx \quad \Rightarrow f' = g$$

3.2 Séries de fonctions

Définition 1 : (Série de fonctions)
Une série de fonctions de terme général u_n, $u_n : D \to \mathbb{K}$ est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\{(u_n)_n, (S_n)_n\}$, telles que

$$\forall x \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$$

u_n est le terme général d'ordre n et S_n est la somme partielle d'ordre n.

Définition 2 : (Convergence simple)
Une série de fonctions de terme général u_n (notée $\sum u_n$), définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge simplement et a pour somme S si

$$\forall x \in D, \quad S_n(x) \text{ converge vers } S(x)$$

On écrit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Le domaine de convergence de $\sum u_n$ est celui de la suite $(S_n)_n$.

Définition 3 : (Convergence absolue)
La série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge simplement.

Propriété 1 : Si la série $\sum u_n$ converge simplement, alors $\forall x \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ le reste d'ordre n de la série,

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) \to 0, \quad n \to \infty$$

On peut aussi l'exprimer comme :

$$r_n(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} u_i(x) \right) - \sum_{i=0}^{n} u_i(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{k} u_i(x) \right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$$

Définition 4 : (Convergence uniforme)
Une série de foncions de terme général $u_n : D \to \mathbb{K}$ converge uniformément et a pour somme S si $(S_n)_n$ converge uniformément vers S, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in D, |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), \|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$$

Propriété 2 : Si une série $\sum u_n$ converge uniformément vers S, alors elle converge simplement vers la même somme.

Propriété 3 : Critère de Cauchy (convergence uniforme)
Une série $\sum u_n$ converge uniformément $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall p, q \geq N(\varepsilon), \sup_{x\in D} |S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon$$

La démonstration est analogue à celle des suites de fonctions.

Propriété 4 : Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur D alors $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in D} |u_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$. La réciproque est fausse.

Démonstration :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in D} |u_n(x)| = \sup_{x \in D} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$$

avec le critère de Cauchy.

Définition 4 : (Convergence normale)
Une série de fonctions de terme général $u_n : D \to \mathbb{K}$ est normalement convergente sur D si la série $\sum\limits_n \|u_n\|_\infty$ est convergente.
Dans les applications on utilisera souvent la propriété suivante : Si pour tout $x \in D$, $|u_n(x)| \leq V_n$ et $\sum V_n$ est une série convergente, alors $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exemple : $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Propriété 4 : La convergence normale entraîne la convergence uniforme, mais la réciproque est fausse.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \geq 0$ est une série uniformément convergente car c'est une série alternée et

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \geq 0$$

On pose $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$, inégalité vraie pour tout $n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$. On a donc

$$|R_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \geq 0, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

D'autre part, la série n'est pas normalement convergente car $|u_n(x)| = O(\frac{1}{n})$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Propriété 5 : Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur D. Si la série converge uniformément ou normalement sur $I \in \mathbb{R}$ alors la somme $S = \sum u_n$ est continue et

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_1^\infty u_n(x)\right)=\sum_1^\infty \lim_{x\to a} u_n(x)$$

Propriété 6 : Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur D. Si la série converge uniformément ou normalement sur D alors la somme $S=\sum u_n$ est continue et

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_1^\infty u_n(x)\right)=\sum_1^\infty \lim_{x\to a} u_n(x),\quad \forall a\in D$$

Propriété 7 : Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur $I=[a,b]\in\mathbb{R}$. Si la série converge uniformément ou normalement sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b\left(\sum_1^\infty u_n(x)\right)dx=\sum_1^\infty\left(\int_a^b u_n(x)dx\right)$$

Propriété 8 : Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I=[a,b]\in\mathbb{R}$. Si la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et la série $\sum u_n'$ converge uniformément ou normalement sur I alors $S=\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum u_n\right)'=\sum u_n'$$

Propriété 9 : (Généralisation) Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I=[a,b]\in\mathbb{R}$. Si la série $\sum u_n^{(p)}$ converge simplement sur I pour $0\leq p\leq k-1$ et la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I alors $S=\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

3.3 Séries entières

Définition 1 : (Série entière)
Soit $z\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ variable. On appelle *série entière* de la variable z une série de la forme

$$\sum_n a_nz^n,\quad a_n\in\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

où a_n sont les coefficients de la série. Autrement dit, une série entière est une série de fonctions dont le terme général u_n est de la forme

$$u_n(z)=a_nz^n$$

Exemples

i) $a_n = 1$. On obtient une série géométrique $\sum z^n$.
$\sum z^n$ converge pour tout $|z| < 1$ et $\sum\limits_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$.
diverge pour tout $|z| \geq 1$.

ii) $\sum\limits_0^\infty \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}, \forall z \in \mathbb{C}$ donc $\sum\limits_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ converge absolument . On note $e^z = \sum\limits_0^\infty \frac{z^n}{n!}$.

Dans le cas général, la somme partielle

$$S_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$$

est une polynôme de degré n et la somme est :

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad \text{quand elle existe}$$

3.3.1 Critère de convergence

Théorème d'Abel : (étude générale de la convergence)

Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ une série entière. Supposons que pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$, le terme général est borné , i.e.

$$\exists M > 0, \text{ tel que } |a_n z_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors,

i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $|z| < |z_0|$ la série $\sum\limits_n a_n z^n$ est absolument convergente.

ii) $\forall r \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < r < |z_0|$, la série $\sum\limits_n a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\bar{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

Preuve :

i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$ on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$$

Comme $|\frac{z}{z_0}| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$, la série $\sum_n (\frac{|z|}{|z_0|})^n$ est convergente. Par critère de comparaison $\sum_n |a_n z^n|$ est convergente également. Donc $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

ii) Pour tout z tel que $|z| \leq r \leq |z_0|$ on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| |\frac{z}{z_0}|^n \leq M |\frac{z}{z_0}|^n \leq M (\frac{r}{|z_0|})^n$$

le majorant étant indépendent de z. La série $\sum_n (\frac{r}{|z_0|})^n$ est convergente et donc $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque $\bar{D}(0, r)$.

Théorème 2 : (rayon de convergence)
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On définit :

$$R = \sup \{r \geq 0 \text{ tel que } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit une suite bornée}\}$$

Alors R est l'unique nombre réel positif avec les propriétés :

i) si $|z| < R$ alors la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

ii) si $|z| > R$ alors la série $\sum_n a_n z^n$ est divergente.

iii) $\forall r \in \mathbb{R}_+$ avec $r < R$, la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\bar{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

R est appelé *rayon de convergence.*

Remarque 1 :

$$\{r \geq 0 \text{ tel que } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit une suite bornée}\} \neq \emptyset$$

car elle contient $r = 0$. Si cet ensemble est majoré il admet une borne supérieure notée R. S'il n'est pas borné alors $R = +\infty$.

Définition 2 : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors $\bar{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ est le disque de convergence de la série.

Remarque 2 : Le plan complexe est divisé en 3 :

$D(0, R) = D_R$: disque de convergence.

$\mathbb{C} - \bar{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\}$: la série diverge et son terme général est non-borné.

$\mathcal{C}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$: la série peut converger ou pas.

Remarque 3 : Si $R = 0$ alors la série converge que pour $z = 0$. Si $R = +\infty$ alors la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et converge normalement pour tout $r > 0$.

Exemples

i) La série géométrique $\sum_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$ et donc le rayon de convergence $R = 1$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

ii) Soit la série $\sum_n \frac{z^n}{n}$. Pour $|z| < 1$ la série est absolument convergente. Si $|z| > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n} = +\infty$ et donc la série diverge. Le rayon $R = 1$.
Si $z = 1$ alors la série devient $\sum_n \frac{1}{n}$ qui est divergente.
Si $z = -1$ alors la série devient $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ qui est une série alternée, de terme général $\frac{1}{n} \to 0$ donc la série est convergente. On peut montrer que la série converge pour tout z avec $|z| = 1$, $z \neq 1$.

iii) Soit la série $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$.
Pour $|z| \leq 1$, $\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > 1$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = +\infty$. La série diverge.
En conclusion, $R = 1$. Si $|z| = 1$ alors la série est absolument convergente.

3.3.2 Calcul du rayon de convergence

Il y a deux critères de calcul basés sur deux critères de convergence des séries numériques : d'Alembert et Cauchy que l'on rappelle ci-dessous :

Règle de d'Alembert : Soit $\sum u_n$ une série numérique. Supposons que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite, notée L. Alors,
— si $L < 1$ la série converge
— si $L > 1$ la série diverge
— si $L = 1$ on ne peut pas conclure.

Règle de Cauchy : Soit $\sum u_n$ une série numérique, avec $u_n \geq 0$. Supposons que

la suite $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite, notée L. Alors,
— si $L < 1$ la série converge,
— si $L > 1$ la série diverge,
— si $L = 1$ on ne peut pas conclure.

Théorème 3 : (Formule d'Hadamard-d'Alembert)
Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ une série entière, avec $a_n \neq 0$, $\forall n$. Soit $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$ qui existe. Alors le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{L}$ avec $R = 0$ si $L = +\infty$ et $R = +\infty$ si $L = 0$.

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = L|z|$$

Le critère de d'Alembert appliqué à la série numérique donne :
— si $L|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{L}$ la série converge,
— si $L|z| > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{L}$ la série diverge
Le rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{L}$.

Théorème 4 : (Formule d'Hadamard-Cauchy)
Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ une série entière. Soit $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Alors le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{L}$ avec $R = 0$ si $L = +\infty$ et $R = +\infty$ si $L = 0$.

Preuve : Le raisonnement est le même en s'appuyant sur la règle de Cauchy.

Exemples

1. $\sum\limits_n n^2 z^n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \quad \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$
2. $\sum\limits_n \frac{z^n}{n!} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \quad \Rightarrow R = \frac{1}{0} = \infty$
3. $\sum\limits_n \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} \quad \Rightarrow R = e$

3.3.3 Opérations sur les séries entières

1. Produit avec un scalaire.
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ les séries $\sum\limits_n a_n z^n$, $\sum\limits_n \lambda a_n z^n$ ont le même domaine de convergence D et sur ce domaine,

$$\sum_n \lambda a_n z^n = \lambda \left(\sum_n a_n z^n \right)$$

2. Addition des séries.
   Soit $f(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ de rayon de convergence R_a et $g(z) = \sum\limits_n b_n z^n$ de rayon de convergence R_b. Alors la série somme $\sum\limits_n (a_n + b_n) z^n$ est convergente pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$. Le rayon de convergence R_s de la somme vérifie l'inégalité :

$$R_s \geq \min(R_a, R_b) \text{ et}$$

$$\sum_n (a_n + b_n) z^n = f(x) + g(x) = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n$$

   De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R_s = \min(R_a, R_b)$ et si $R_a = R_b$ alors $R_s \geq R_a = R_b$

3. Produit des séries.
   La série produit (de Cauchy) est la série $\sum\limits_n c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.
   Si on note R_p le rayon de convergence de la série produit alors

$$R_p \geq \min(R_a, R_b) \text{ et pour tout } |z| < \min(R_a, R_b) \text{ on a}$$

$$\left(\sum_n a_n z^n \right) \left(\sum_n b_n z^n \right) = \sum_n c_n z^n$$

3.3.4 Propriétés fondamentales des séries

Continuité
Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sa somme est une fonction $S : D_R \to \mathbb{R}$ continue sur D_R (l disque de convergence).

Intégration
Nous raisonnons ici sur $\mathbb{R}$. Soit $\sum\limits_n a_n x^n$ une série réelle de rayon de convergence R. Alors, $\forall a, b,\ a < b$ tel que $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\int_a^b \left(\sum_1^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_1^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right)$$

Dérivation

i) Les séries $\sum\limits_n a_n x^n$ et $\sum\limits_n n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence et

$$\left(\sum_n a_n x^n \right)' = \sum_n n a_n x^{n-1}$$

ii) De même, on peut démontrer sur le domaine de convergence que la fonction $S(x) = \sum\limits_n a_n x^n$ est indéfiniment dérivable et

$$\left(\sum_n a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

3.4 Développement d'une fonction en série entière

Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une fonction d'une variable réelle ou complexe, définie sur un disque ou un intervalle ouvert contenant 0.
Nous allons répondre à la question : existe-elle une série entière $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ dont f est la somme, autrement dit telle que $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$?

Définition 1 : (Fonction développable en série entière)
Soit D un disque ouvert dans $\mathbb{C}$ ou un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ autour de 0 et $f : D \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est développable en série entière autour de 0 s'il existe une série entière $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in D$ avec $|x| < R$. On dit que $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ reprśente f sur $D \cap D_R$.

Exemples

1. $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ avec $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière autour de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

La série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1, donc légalité précédente a lieu pour tout $|x| < 1$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière autour de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Pour la suite , on considérera seulement les fonctions réelles. Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour que f soit une fonction développable en série entière .

Théorème 1 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière autour de 0 et de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle $]-R, R[\cap I$ et le développement est unique car le coefficient du terme général de cette série est $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve : Soit $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de f. On a vu dans les propriétés des séries entières comment on peut construire les dérivées d'ordre p, $\forall p \in \mathbb{N}$ de la série $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\left(\sum_n a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

et la série dérivée d'ordre p a le même rayon de convergence. Donc $f^{(p)}$ existe $\forall p \in \mathbb{N}$ et

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

On écrit cette relation pour $x = 0$ et on trouve pour tout p :

$$f^{(p)}(0) = p(p-1)\dots 1 a_p \quad \Rightarrow \quad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Définition 2 : (Série de Taylor d'une fonction)
Soit f une fonction indéfiniment dérivable. La série $\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Taylor de f en 0 et est la seule série entière qui puisse réaliser le développement de f.

La condition précédente n'est pas suffisante !!

Contre-exemple : Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et , en particulier, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n$. La série de Taylor de f est donc la série nulle dont la somme n'est pas égale à $f(x)$ en dehors de $x = 0$.

La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence du développement en série entière d'une fonction.

Théorème 2 : Soit f indéfiniment dérivable sur un intervalle $]-R, R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

On pose $R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$. Alors, f est développable en série entière sur $]-R, R[$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Corollaire : Soit f indéfiniment dérivable sur un intervalle $]-R, R[$. S'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n, \quad \forall x \in]-R, R[, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

alors f est développable en série entière.

Exemple de développement : Application à la résolution des équations différentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (1+x)^\alpha$. Alors f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

La fonction f est l'unique solution pour $x \in]-1,1[$, de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Compte-tenu des propriétés des dérivées des séries entières, si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et f est solution de l'équation différentielle, alors

$$\begin{cases} (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

En développant et reindexant la première somme, on trouve :

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} + n a_n) x^n$$

Par unicité du développement on obtient (en identifiant les coefficients des mêmes puissances de x) :

$$\begin{cases} (n+1)a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n, \forall n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n, \forall n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

d'où

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \forall n \geq 1$$

La série ainsi obtenue a un rayon de co,vergence égal à 1, valeur obtenue avec la régle de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\alpha-n}{n+1}| = 1$$

Remarque : La méthode employée dans cet exemple se généralise à toute fonction , unique solution d'une équation différentielle avec conditions initiales.

3.4.1 Développement en série entière des fonctions usuelles

Quelques développements de base :

1. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$.
2. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$.
3. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $R = 1$, avec α réel.
4. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, car $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ pour $n = 2p$ et vaut $(-1)^p$ pour $n = 2p+1$.
5. De même, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Développements obtenus des développements précédents :

a) Par combinaison linéaire :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty$$

Les deux développements sont basés sur les développements de e^x et e^{-x} : $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

b) Par substitution :

$$\frac{1}{ax+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{a}{b}x} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{a}{b})^n x^n, \quad R = |\frac{b}{a}|, \quad a, b \neq 0$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad R = 1.$$

c) Par dérivation :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} x^{n-p}, \quad R = 1, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p > 1.$$

d) Par intégration :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad R = 1$$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad R = 1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$