

Examen 2016-2017

Mercredi 4 janvier 2017 – Durée : 2 heures.

Tout document interdit. Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.

Travail strictement personnel

Exercice : Echauffement d'un solide (*barème indicatif : 4 points*)

On considère une masse donnée $m = 1$ kg de cuivre solide en équilibre à la température $T_1 = 293$ K. On met en contact ce solide avec une source de chaleur de température $T_S = 600$ K, de telle sorte que la température du matériau passe à la température finale $T_2 = 313$ K. La variation de volume du cuivre est négligeable et sa chaleur massique est égale à $c = 360$ J.kg⁻¹.K⁻¹.

1. Donner (en fonction de m, c, T_1, T_2) l'expression de la variation d'énergie interne ΔU_{12} du solide entre l'état initial et l'état final.
2. Donner (en fonction de m, c, T_1, T_2, T_S) l'expression de la variation d'entropie ΔS_{12} du solide entre l'état initial et l'état final, de l'entropie échangée S_{tr} entre le solide et la source de chaleur, et de l'entropie produite S_{pr} .
3. Effectuer les applications numériques pour ΔU_{12} , ΔS_{12} , S_{tr} et S_{pr} et vérifier que la transformation est compatible avec le second principe. On donne $\ln(313/293) \simeq 2/30$.

Problème : transformations d'un gaz parfait

Partie I. Questions préliminaires de cours : transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait (*barème indicatif : 4 points*)

On considère N moles d'un gaz parfait de capacités calorifiques molaires constantes \bar{C}_v et \bar{C}_p . On note γ le rapport des capacités calorifiques du gaz, R la constante universelle des gaz parfaits.

1. Exprimer (sans détailler la démonstration) la différentielle dS en variables indépendantes (T, p) . Montrer que c'est une différentielle totale exacte.
2. En déduire que entre 2 états d'équilibre donnés d'indices 0 et 1, on a : $\Delta S_{01} = N\bar{C}_p \ln \frac{T_1}{T_0} - NR \ln \frac{p_1}{p_0}$
3. Montrer qu'une transformation adiabatique réversible est isentropique (i.e. l'entropie du système reste constante).
4. En déduire que pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on a $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Constante}$.

Partie II. Système à trois compartiments (*barème indicatif : 12 points*)

Une boîte aux parois adiabatiques indéformables est partagée en trois compartiments A , B , C par des pistons adiabatiques coulissant horizontalement sans frottement (Figure 1). Une résistance est placée dans le réservoir A , qui permet un apport de chaleur. On néglige dans tout l'exercice les capacités thermiques des pistons et de la résistance.

Les 3 compartiments contiennent chacun une mole de gaz parfait, initialement à la même température T_0 donnée. On note V_0 et p_0 les données du volume et de la pression du réservoir A dans l'état initial.

On note γ le rapport des capacités calorifiques du gaz, R la constante universelle des gaz parfaits.

Le gaz du compartiment A est chauffé très lentement, de telle sorte que la transformation peut être considérée comme réversible dans chacun des compartiments. La quantité de chaleur apportée par l'intermédiaire de la résistance pendant la transformation est donnée et notée Q . A la fin de la transformation, le système est à l'état d'équilibre 1.

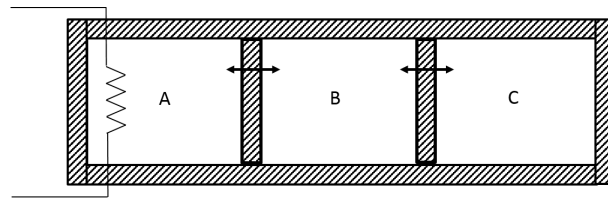


FIGURE 1 – Système à 3 compartiments

5. Donner, dans l'état initial, et en justifiant les réponses, les valeurs de la pression et du volume des réservoirs B et C .
6. Pour déterminer complètement l'état final du gaz dans chaque compartiment, combien y a-t-il a priori d'inconnues ? On note p_1 la pression finale inconnue dans le réservoir A . Que peut-on dire des pressions p_{B1} , p_{C1} dans l'état final ? Que peut-on en déduire sur le nombre d'inconnues précédent ?
7. Que peut-on dire des transformations du gaz dans le réservoir B , et dans le réservoir C ? En déduire la relation entre pressions et températures entre l'état initial et l'état final dans les réservoirs B et C . Que peut-on en déduire pour T_{B1} et T_{C1} ? Que peut-on en déduire sur le nombre d'inconnues ?
8. Que peut-on dire du travail échangé avec le milieu extérieur du système constitué de l'ensemble des 3 réservoirs ? En appliquant le premier principe à ce système, montrer que :

$$T_{A1} + T_{B1} + T_{C1} = 3T_0 + (\gamma - 1) \frac{Q}{R}.$$
9. Ecrire la conservation du volume total et en déduire une dernière relation entre les températures et les pressions.
10. Résoudre les équations écrites aux questions précédentes pour déterminer entièrement l'état final (pressions et températures) du gaz en fonction de R , γ , Q , T_0 et p_0 : On pourra introduire le coefficient $K = (\gamma - 1)Q/(3RT_0)$. Montrer que les températures et les pressions sont supérieures dans l'état final à celles de l'état initial pour tous les réservoirs.
11. Montrer que $V_{B1} < V_0$. Représenter, sur une figure similaire à la figure 1, l'état final de la boîte, montrant le nouveau volume de chaque réservoir. Donner l'allure (sans donner l'équation de chaque courbe) de la transformation subie par le gaz de chaque réservoir sur un diagramme de Clapeyron $p(V)$.
12. L'entropie échangée S_{tr} entre chaque compartiment et l'extérieur est-elle nulle, et pourquoi ?
13. L'étude précédente est-elle modifiée si le piston séparant les compartiments (B) et (C) est diatherme, alors que l'autre piston reste adiabatique ? Justifier la réponse.

Exercice 1) $\Delta U_{12} = \int_1^2 (\delta Q^{\text{rev}} + \delta W^{\text{rev}}) = \int_1^2 mc dT = mc(T_2 - T_1)$

2) $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q^{\text{rev}}}{T} = \int_1^2 mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$

$S_{\text{tr}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_S} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_S} = \frac{Q_{12}}{T_S} = \frac{\Delta U_{12} - W_{12}^{\text{rev}}}{T_S} = \frac{mc(T_2 - T_1)}{T_S}$

$S_{\text{pr}} = \Delta S_{12} - S_{\text{tr}} = mc \left[\ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{(T_2 - T_1)}{T_S} \right]$

3) $\Delta U_{12} = 1 \times 360 \times (313 - 293) = 360 \times 20 = 7200 \text{ J}$

$\Delta S_{12} = 1 \times 360 \times \ln \frac{313}{293} \approx 360 \times \frac{2}{30} = 12 \times 2 = 24 \text{ J/K}$

$S_{\text{tr}} = \frac{7200}{600} = 12 \text{ J/K}$

$S_{\text{pr}} = 24 - 12 = 12 \text{ J/K} > 0 \Rightarrow$ La transformation est possible spontanément et irréversible.

Problème

Partie I

1) $dS = \frac{\delta Q^{\text{rev}}}{T} = \frac{N\bar{C}_p dT + \ell_p dp}{T}$, or $\ell_p = -V$ pour un GP.

$\Rightarrow dS = N\bar{C}_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp = N\bar{C}_p \frac{dT}{T} - \frac{NR}{pT} dp = \frac{N\bar{C}_p}{T} dT - \frac{NR}{p} dp$

Pour montrer dS est une différentielle totale exacte, on exprime

$dS = XdT + Ydp$, avec $X = \frac{N\bar{C}_p}{T}$ et $Y = -\frac{NR}{p}$, et on

montre l'égalité de Schwarz: $\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p$

Celle-ci est bien vérifiée car $\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p = 0$

2) $dS = N\bar{C}_p \frac{dT}{T} - \frac{NR}{p} dp = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{N\bar{C}_p}{T} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{NR}{p} \end{cases} \Rightarrow S(T, p) = N\bar{C}_p \ln T + f(p)$

$\Rightarrow -\frac{NR}{p} = f'(p) \Rightarrow f(p) = -NR \ln p + K$

$\Rightarrow S(T, p) = N\bar{C}_p \ln T - NR \ln p + K$

$\Rightarrow \Delta S_{01} = S_1 - S_0 = N\bar{C}_p \ln \frac{T_1}{T_0} - NR \ln \frac{p_1}{p_0} + K - K$

- 3) On a, pour une transformation adiabatique réversible:
 $\Delta S = S_{tr} + S_{pr}$, avec $S_{tr} = 0$ (transf. adiabatique)
 et $S_{pr} = 0$ (transf. réversible)
 $\Rightarrow \Delta S = 0 \Rightarrow S = \text{constante}$ (transf. isentropique)

4) $S_0 = S_1 \Rightarrow N \bar{C}_p \ln \frac{T_1}{T_0} - N R \ln \frac{p_1}{p_0} = 0$
 or $\bar{C}_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \Rightarrow \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{p_1}{p_0} = 0$
 $\Rightarrow \gamma \ln \frac{T_1}{T_0} = (\gamma - 1) \ln \frac{p_1}{p_0}$
 $\Rightarrow \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^\gamma = \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\gamma - 1}$
 $\Rightarrow \frac{T_1^\gamma}{T_0^\gamma} = \frac{p_1^{\gamma - 1}}{p_0^{\gamma - 1}}$
 $\Rightarrow T_1^\gamma p_1^{1 - \gamma} = T_0^\gamma p_0^{1 - \gamma}$
 $\Rightarrow p_1^{1 - \gamma} T_1^\gamma = \text{Constante}$ pour tout point
 0 et 1 de la transformation.

Partie II

- 5) $p_{B0} = p_{C0} = p_{A0} = p_0$ car les pistons sont à l'éq. mécanique
 La température et la pression étant les mêmes dans les 3
 réservoirs contenant la même quantité de gaz, les volumes
 sont les mêmes égaux chacun à V_0 : $V_{A0} = V_{B0} = V_{C0} = V_0$
 6) Il y a 2 variables indépendantes dans chaque réservoir, donc
 a priori 6 inconnues.

$p_{B1} = p_{C1} = p_{A1} = p_1 \Rightarrow$ on passe à 4 inconnues

- 7) Les transformations du gaz des réservoirs B et C sont
 adiabatiques réversibles \Rightarrow on utilise le résultat de la
 partie I :
 $p_{B0}^{1 - \gamma} T_{B0}^\gamma = p_{B1}^{1 - \gamma} T_{B1}^\gamma \Rightarrow p_0^{1 - \gamma} T_0^\gamma = p_1^{1 - \gamma} T_{B1}^\gamma$
 $p_{C0}^{1 - \gamma} T_{C0}^\gamma = p_{C1}^{1 - \gamma} T_{C1}^\gamma \Rightarrow p_0^{1 - \gamma} T_0^\gamma = p_1^{1 - \gamma} T_{C1}^\gamma$
 $\Rightarrow \boxed{T_{B1} = T_{C1}} \Rightarrow$ on passe à 3 inconnues: p_1, T_{A1}, T_{B1}
 et on a déjà une équation: $\boxed{p_0^{1 - \gamma} T_0^\gamma = p_1^{1 - \gamma} T_{B1}^\gamma}$

8) Les parois de la boîte sont indéformables $\Rightarrow W=0$
 seule quantité de chaleur échangée par ce système avec l'extérieur: Q

$$\Rightarrow (\text{1er principe}) \quad \Delta U_{01} = Q$$

$$\text{or } \Delta U_{01} = (\Delta U_A)_{01} + (\Delta U_B)_{01} + (\Delta U_C)_{01}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_V (T_{A1} - T_0) + \bar{C}_V (T_{B1} - T_0) + \bar{C}_V (T_{C1} - T_0) = Q$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{A1} + T_{B1} + T_{C1} = 3T_0 + \frac{Q}{\bar{C}_V} = 3T_0 + \frac{Q(\gamma-1)}{R}} (*)$$

9) $V_{A1} + V_{B1} + V_{C1} = 3V_0$ et en utilisant $pV = RT$

$$\Rightarrow \frac{RT_{A1}}{p_1} + \frac{RT_{B1}}{p_1} + \frac{RT_{C1}}{p_1} = 3 \frac{RT_0}{p_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{A1} + T_{B1} + T_{C1} = 3 \frac{p_1}{p_0} T_0} (**)$$

10) A partir de (*) et (**) on trouve:

$$3 \frac{p_1}{p_0} T_0 = 3T_0 + (\gamma-1) \frac{Q}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 = p_0 \left(1 + (\gamma-1) \frac{Q}{3RT_0} \right) = p_0 (1+K)}$$

Puis $\begin{cases} T_{A1} + 2T_{B1} = 3T_0 (1+K) & (**) \\ \boxed{T_{B1} = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 (1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{T_{A1} = 3T_0 (1+K) - 2T_0 (1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$K > 0 \Rightarrow \boxed{p_1 > p_0, \quad T_{B1} > T_0}$$

$$\frac{T_{A1}}{T_0} = 3(1+K) - 2(1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

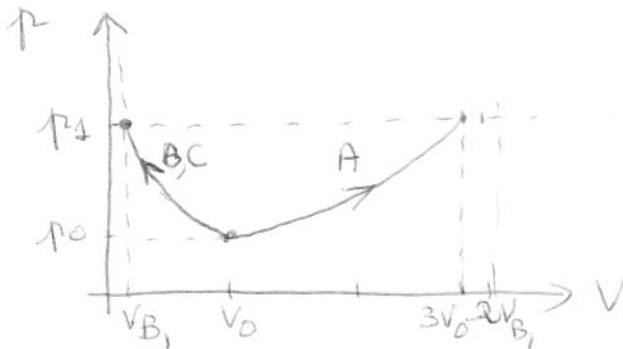
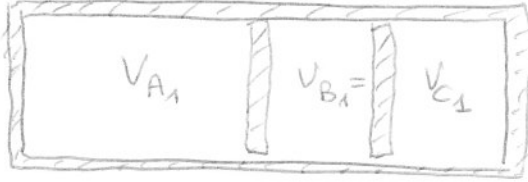
$$= (1+K) \left[3 - 2(1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} - 1} \right] = (1+K) \left[3 - 2(1+K)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]$$

$$= (1+K) \left[3 - \underbrace{\frac{2}{(1+K)^{1/\gamma}}}_{< 2} \right] \gg (1+K) > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{A1} > T_0}$$

$$11) \quad V_{B1} = \frac{R T_{B1}}{p_1} \Rightarrow \frac{V_{B1}}{V_0} = \frac{R T_{B1}}{p_1} \frac{p_0}{R T_0} = \frac{p_0}{p_1} \frac{T_{B1}}{T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{B1}}{V_0} = \frac{(1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{(1+K)} = (1+K)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} = (1+K)^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{(1+K)^{1/\gamma}} < 1$$



12) Les transformations étant réversibles, on a $\Delta S = S_{tr}$ pour chaque compartiment.

$\Rightarrow S_{tr} = 0$ pour les compartiments B et C
mais $S_{tr} \neq 0$ pour le compartiment A

$$S_{trA} = \Delta S_{A01} = \bar{C}_p \ln \frac{T_{A1}}{T_0} - R \ln \frac{p_1}{p_0} \quad (\text{voir partie I})$$

13) Si la paroi entre (B) et (C) est diatherme, l'ensemble (B)+(C) subit une transformation adiabatique réversible, avec $p_B = p_C$ comme précédemment, et $T_B = T_C$.
Du coup, les relations trouvées en (8) et (9) restent inchangées, ainsi que la relation trouvée en (7).
 \Rightarrow La solution est donc la même que précédemment.