

Examen de seconde session du Jeudi 3 mai 2018.

*Durée de l'épreuve : 2h00.*

*Les documents de cours et calculatrices ne sont pas autorisés.*

*Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.*

*Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.*

## Présentation du problème

On considère une structure parallélépipédique placée dans le repère cartésien  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . Dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  la section transverse la structure est un rectangle  $\Omega$  de largeur  $2L$  et de hauteur  $L$  comme indiqué sur la figure 3.

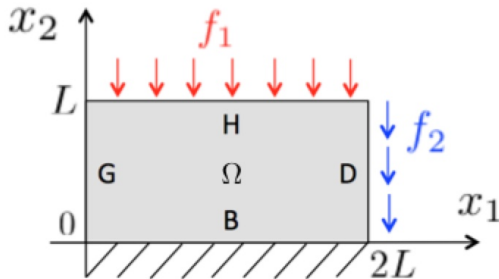


FIGURE 1 – Représentation schématique de la structure et de son chargement.

La dimension de la structure dans la direction  $\underline{e}_3$  est très grande devant  $L$  de sorte que l'on peut se placer sous l'hypothèse de déformations planes dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , soit :

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}$$

les autres composantes de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  étant nulles.

La structure est constituée d'un matériau dont la loi de comportement est élastique linéaire et peut donc être représentée par le tenseur de rigidité  $\mathbb{A}$  tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Plus précisément le matériau est homogène et isotrope et son comportement est décrit par la loi de Hooke dont les coefficients de Lamé sont notés  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1)$$

La pièce est soumise aux efforts volumiques de pesanteur  $\underline{f}_v = -\rho g \underline{e}_2$ . Elle est également soumise à deux densités surfaciques d'efforts d'intensités différentes :  $\underline{f}_1 = -f_1 \underline{e}_2$  sur sa partie supérieure  $H$  et  $\underline{f}_2 = -f_2 \underline{e}_2$  sur sa frontière latérale droite  $D$ . Sa frontière gauche  $G$  est libre d'efforts. Enfin la pièce est encastree sur sa partie basse (frontière  $B$ ).

# Formulations du problème

On rappelle que dans ce contexte l'équilibre de la structure est traduit par l'équation suivante :

$$\underline{div}(\underline{\sigma}) - \rho g \underline{e}_2 = \underline{0} \quad (2)$$

soit avec les hypothèses précitées :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} - \rho g = 0 \end{cases}$$

La loi de comportement donnée à l'équation (1) peut s'écrire sous forme matricielle à l'aide de la notation de Voigt :

$$\{\sigma\} = [A] \{\varepsilon\}$$

où  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^t$  et  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^t$

1. Donner l'expression des termes de la matrice  $[A]$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

2. Donner les équations traduisant les conditions aux limites qui viennent compléter la formulation forte du problème constituée des équations (1) et (2).

— en G : surface libre  $\underline{\sigma}(x_1 = 0) \cdot (-\underline{e}_1) = \underline{0}$

$$\begin{cases} \sigma_{11}(0, x_2) = 0 \\ \sigma_{21}(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0, L] \end{cases}$$

— en B : CL en déplacement imposé (encastrement).

$$\underline{u}(x_1, 0) = \underline{0} \quad \forall x_1 \in [0, 2L]$$

— en H : CL en efforts imposés.

$$\underline{\sigma}(x_2 = L) \cdot (\underline{e}_2) = -f_1 \underline{e}_2$$

$$\begin{cases} \sigma_{12}(x_1, L) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1, L) = -f_1 \quad \forall x_1 \in [0, 2L] \end{cases}$$

— en D : CL en efforts imposés.

$$\underline{\sigma}(x_1 = 2L) \cdot (\underline{e}_1) = -f_2 \underline{e}_2$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}(2L, x_2) = 0 \\ \sigma_{21}(2L, x_2) = -f_2 \quad \forall x_2 \in [0, L] \end{cases}$$

3. Définir l'ensemble des champs cinématiquement admissibles à zéro :  $\mathcal{U}_{ad}^0$

$$\mathcal{U}_{ad}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}(x_1, x_2) \text{ réguliers et continus tels que :} \\ \underline{v}(x_1, 0) = \underline{0} \quad \forall x_1 \in [0, 2L] \end{array} \right\}$$

4. Montrer que la formulation faible du problème s'écrit sous la forme :

Trouver  $\underline{u}(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_{ad}^0$  tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\mathbb{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = -f_1 \int_0^{2L} v_2(x_1, 2L) dx_1 - f_2 \int_0^L v_2(L, x_2) dx_2 - \rho g \int_0^L \int_0^{2L} v_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

On choisit un champ test  $\underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0$ . On multiplie l'équation d'équilibre par  $\underline{v}$  puis on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} - \rho g \underline{e}_2 \cdot \underline{v} d\Omega &= \underline{0} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{v} d\Omega}_{(a)} - \underbrace{\int_{\Omega} \rho g \underline{e}_2 \underline{v} d\Omega}_{(b)} &= \underline{0} \end{aligned}$$

On s'occupe tout d'abord du terme (a). On réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} &= \sigma_{ij,j} v_i \\ &= (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - (\sigma_{ij} v_{i,j}) \\ &= (\sigma_{ji} v_i)_{,j} - (\sigma_{ji} v_{i,j}) \\ &= \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \end{aligned}$$

Ainsi (a) se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega \end{aligned}$$

Par unité d'épaisseur :

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS = \begin{cases} \int_0^L \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}(0, x_2) \cdot (-\underline{e}_1)}_{=0} \cdot \underline{v}(0, x_2) dx_2 + \int_0^{2L} \underline{\underline{\sigma}}(x_1, L) \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{v}(x_1, L) dx_1 \\ + \int_0^L \underline{\underline{\sigma}}(2L, x_2) \cdot \underline{e}_1 \cdot \underline{v}(2L, x_2) dx_2 + \int_0^{2L} \underline{\underline{\sigma}}(x_1, 0) \cdot (-\underline{e}_2) \cdot \underbrace{\underline{v}(x_1, 0)}_{=0} dx_2 \end{cases}$$

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n}^e dS = - \int_0^{2L} f_2 \cdot v_2(x_1, L) dx_1 - \int_0^L f_2 v_2(2L, x_2) dx_2$$

En rajoutant le terme (b) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = - \int_0^{2L} f_1 \cdot v_2(x_1, L) dx_1 - \int_0^L f_2 v_2(2L, x_2) dx_2 - \int_{\Omega} \rho g v_2(x_1, x_2) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = -f_1 \int_0^{2L} v_2(x_1, L) dx_1 - f_2 \int_0^L v_2(2L, x_2) dx_2 - \rho g \int_0^L \int_0^{2L} v_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

puis finalement :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega$$

par symétrie du tenseur de rigidité élastique.

## Résolution par la méthode des éléments finis

### Représentation paramétrique

Dans le plan de l'étude la structure est maillée à l'aide de quatre éléments représentés sur la figure 2(a). L'élément numéroté ① est un triangle à trois nœuds (T3) tandis que la droite de la structure est maillée à l'aide de deux triangles à six noeuds (T6) numérotés ③ et ④. L'élément qui sera au cœur de notre étude est l'élément ② qui est un triangle à quatre noeuds (T4), aussi appelé élément de transition.

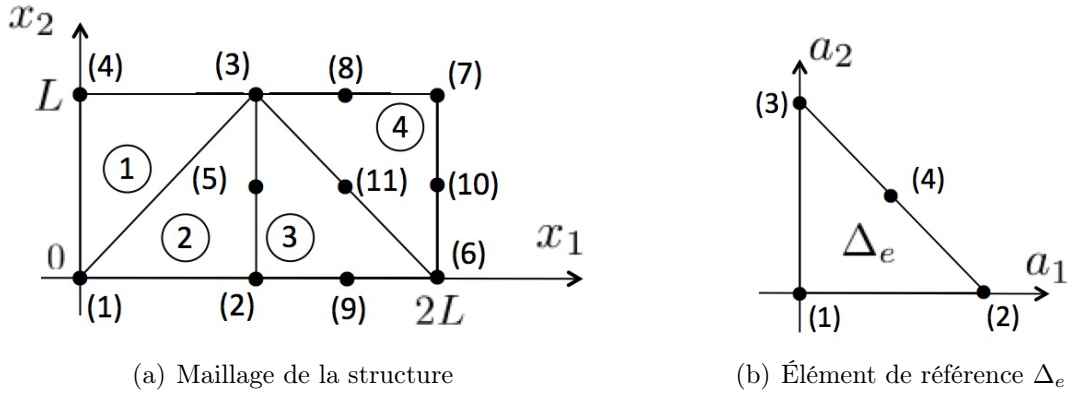


FIGURE 2 – Modélisation de la partie centrale étudiée autour de l'entaille.

Les matrices des coordonnées du maillage  $[T]$ , et de connectivité du maillage  $[connec]$  valent :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \\ L & L \\ 0 & L \\ L & L/2 \\ 2L & 0 \\ 2L & L \\ 3L/2 & L \\ 3L/2 & 0 \\ 2L & L/2 \\ 3L/2 & L/2 \end{bmatrix} \quad [connec] = \begin{bmatrix} (1) & (3) & (4) \\ (1) & (2) & (3) & (5) \\ (3) & (2) & (6) & (5) & (9) & (11) \\ (6) & (7) & (3) & (11) & (10) & (8) \end{bmatrix}$$

L'élément de référence associé à l'élément  $\textcircled{2}$  est le triangle à quatre nœuds noté  $\Delta_e$  représenté à la figure 2(b).

Pour cet élément on propose les fonctions de forme suivantes :

$$\begin{cases} N_1 = 1 - a_1 - a_2 \\ N_2 = a_1 (1 - 2a_2) \\ N_3 = a_2 (1 - 2a_1) \\ N_4 = 4a_1 a_2 \end{cases}$$

5. Énoncer les propriétés que doivent vérifier les fonctions de forme pour assurer la conformité de l'élément et montrer que les fonctions  $N_i$   $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  vérifient bien ces propriétés.

→cf cours

6. Représenter ces fonctions de forme sur l'élément de référence (on choisira une vue en perspective).
7. Montrer que la représentation paramétrique de l'élément  $\textcircled{2}$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = (a_1 + a_2)L \\ x_2 = a_2 L \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = N_1 x_1^{(1)} + N_2 x_1^{(2)} + N_3 x_1^{(3)} + N_4 x_1^{(4)} \\ x_2 = N_1 x_2^{(1)} + N_2 x_2^{(2)} + N_3 x_2^{(3)} + N_4 x_2^{(4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1 - a_1 - a_2) \times 0 + a_1 (1 - 2a_2) L + a_2 (1 - 2a_1) L + 4a_1 a_2 L \\ x_2 = (1 - a_1 - a_2) \times 0 + a_1 (1 - 2a_2) \times 0 + a_2 (1 - 2a_1) L + 4a_1 a_2 \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 L - 2a_1 a_2 L + a_2 L - 2a_1 a_2 L + 4a_1 a_2 L \\ x_2 = a_2 L - 2a_1 a_2 L + 2a_1 a_2 L \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = (a_1 + a_2) L \\ x_2 = a_2 L \end{cases}}$$

8. Construire la matrice jacobienne  $[J^{\textcircled{2}}(a_1, a_2)]$  de l'élément  $\textcircled{2}$  et calculer le jacobien associé. Que constatez-vous ? Était-ce attendu ?

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad [J] = \begin{bmatrix} L & L \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad J = L^2$$

Le jacobien est constant et vaut deux fois l'aire du triangle. Le degré des fonctions d'interpolation ne permettait pas de prévoir cela a priori. Néanmoins la forme géométrique du triangle (sans courbure sur le côté à 3 nœuds) permettait d'entrevoir ce résultat.

9. Calculer la matrice  $[J^{\textcircled{2}}(a_1, a_2)]^{-1}$  matrice inverse de la matrice jacobienne de l'élément  $\textcircled{2}$

$$[J^{\textcircled{2}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}$$

## Représentation des champs locaux de déplacement, déformation et contrainte dans l'élément de barre

On choisit de travailler avec des éléments isoparamétriques de sorte que le déplacement en tout point des éléments réels  $\textcircled{i}$  pourra être interpolé à l'aide des fonctions de formes et des déplacements des noeuds uniquement.

10. Donner la taille et la forme de la matrice d'interpolation  $\left[ N_e^{(2)} \right]$  telle que :

$$\{\underline{u}\} = \left[ N_e^{(2)} \right] \{U^{(2)}\}$$

où le vecteur  $\left\{ U_e^{(2)} \right\}$  est le vecteur des déplacements des noeuds de  $\textcircled{2}$  dans l'espace réel.

$$\{\underline{u}\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

$$\left[ N_e^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} (1-a_1-a_2) & 0 & a_1(1-2a_2) & 0 & a_2(1-2a_1) & 0 & 4a_1a_2 & 0 \\ 0 & (1-a_1-a_2) & 0 & a_1(1-2a_2) & 0 & a_2(1-2a_1) & 0 & 4a_1a_2 \end{bmatrix}$$

11. Construire la matrice  $[D_N]$  des dérivées des fonctions de forme telle que :

$$[D_N]_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial a_j}$$

$$[D_N] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-2a_2 & -2a_1 \\ -2a_2 & 1-2a_1 \\ 4a_2 & 4a_1 \end{bmatrix}$$

On cherche maintenant à construire la matrice  $\left[ B_e^{(2)} \right]$  permettant de calculer les déformations dans l'élément à partir des déplacements aux noeuds de la façon suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \left[ B_e^{(2)} \right] \{U^{(2)}\}$$

12. Donner la dimension de la matrice  $\left[ B_e^{(2)} \right]$

$\text{Dim} \left[ B_e^{(2)} \right] = 3 \times 8$ . Ceci correspond à 3 composantes de déformation en déformations planes et 2 composantes de déplacement par noeuds pour 4 noeuds dans l'élément.

13. En utilisant la définition de  $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  donner l'expression des termes de la première ligne de la matrice  $\left[ B_e^{(2)} \right]$ .

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N_k u_1^{(k)}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial x_1} = \frac{\partial N_k}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{x_1} + \frac{\partial N_k}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{x_1} = [D_N]_{k1} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{k2} [J]_{21}^{-1}$$

$$\varepsilon_{11} = \begin{cases} ([D_N]_{11} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{12} [J]_{21}^{-1}) u_1^{(1)} \\ + ([D_N]_{21} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{22} [J]_{21}^{-1}) u_1^{(2)} \\ + ([D_N]_{31} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{32} [J]_{21}^{-1}) u_1^{(3)} \\ + ([D_N]_{41} [J]_{11}^{-1} + [D_N]_{42} [J]_{21}^{-1}) u_1^{(4)} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{11} = \left( \frac{-1}{L} \right) u_1^{(1)} + \left( (1 - 2a_2) \frac{1}{L} \right) u_1^{(2)} + \left( \frac{-2a_2}{L} \right) u_1^{(3)} + \left( \frac{4a_2}{L} \right) u_1^{(4)}$$

$$\left[ B_e^{(2)} \right]_{1j} = \left[ \left( \frac{-1}{L} \right) \quad 0 \quad \left( (1 - 2a_2) \frac{1}{L} \right) \quad 0 \quad \left( \frac{-2a_2}{L} \right) \quad 0 \quad \left( \frac{4a_2}{L} \right) \quad 0 \right]$$

## Contributions élémentaires à l'énergie de déformation et calcul du second membre élémentaire

14. Établir l'expression matricielle de  $\mathcal{E}^{(2)}$ , la contribution de l'élément  $(2)$  au calcul de l'énergie de la structure définie par :

$$\mathcal{E}^{(2)} = \int_{(2)} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV$$

On l'exprimera en fonction de  $\left\{ B_e^{(2)}(a) \right\}^t$ ,  $[A]$ , et des restrictions des vecteurs de déplacement test et solution à l'élément  $(2)$ , soit  $\left\{ V_e^{(2)} \right\}$  et  $\left\{ U_e^{(2)} \right\}$  respectivement.

L'énergie élémentaire peut ici s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{E}^{(2)} = \int_{(2)} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = \int_{(2)} \underline{\sigma} : {}^{2D} \underline{\varepsilon} dV = \int_{(2)} \{ \sigma \}^t \cdot \{ \varepsilon(v) \} dV$$

Avec la loi de comportement  $+ [A]$  symétrique :

$$\mathcal{E}^{(2)} = \int_{(2)} \{ \varepsilon(u) \}^t [A]^t \{ \varepsilon(v) \} dV = \int_{(2)} \{ \varepsilon(u) \}^t [A] \{ \varepsilon(v) \} dV$$

$$\mathcal{E}^{(2)} = \int_{(2)} \{ V_e \}^t [B_e^{(2)}]^t [A] [B_e^{(2)}] \left\{ U_e^{(2)} \right\} dV = \left\{ V_e^{(2)} \right\}^t \int_{(2)} [B_e^{(2)}]^t [A] [B_e^{(2)}] dV \left\{ U_e^{(2)} \right\}$$

15. En déduire la dimension de la matrice de rigidité de l'élément  $\textcircled{2}$   $\left[ K_e^{\textcircled{2}} \right]$  telle que :

$$\mathcal{E}^{\textcircled{2}} = \left\{ V_e^{\textcircled{2}} \right\}^t \left[ K_e^{\textcircled{2}} \right] \left\{ U_e^{\textcircled{2}} \right\}$$

et donner son expression sous forme d'une intégrale sur l'espace de référence en fonction de  $\left[ Be^{\textcircled{2}} \right]$ ,  $[A]$  et  $L$ .

$$\boxed{\left[ K_e^{\textcircled{2}} \right] = L^2 \int_{\Delta_e} \left[ Be^{\textcircled{2}} \right]^t [A] \left[ Be^{\textcircled{2}} \right] da_1 da_2}$$

Le jacobien est ici exceptionnellement constant, il peut sortir de l'intégrale, mais pas  $\left[ Be^{\textcircled{2}} \right]$  dont les termes dépendent explicitement de  $a_1$  et  $a_2$ .

On s'intéresse désormais au calcul des seconds membres élémentaires  $\left\{ F_e^{\textcircled{1}} \right\}$ .

On commence par construire  $W_{vol}^{\textcircled{2}}$  la contribution élémentaire de l'élément  $\textcircled{2}$  au travail des efforts volumiques extérieurs :

$$W_{vol}^{\textcircled{2}} = - \int_{\textcircled{2}} \rho g \underline{e}_2 \cdot \underline{v}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

16. Donner l'expression matricielle de ce travail en fonction de  $\left[ N_e^{\textcircled{2}} \right]$ ,  $\left\{ W_e^{\textcircled{2}} \right\}$ ,  $\rho$ ,  $g$  et  $L$ .

$$W_{vol}^{\textcircled{2}} = - \int_{\textcircled{2}} \rho g \underline{e}_2 \cdot \underline{v}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\textcircled{2}} \underline{v}(x_1, x_2) \cdot (\rho g \underline{e}_2) dx_1 dx_2$$

$$W_{vol}^{\textcircled{2}} = \int_{\textcircled{2}} \left( \left[ N_e^{\textcircled{1}} \right] \left\{ W_e^{\textcircled{2}} \right\} \right)^t \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -\rho g \end{matrix} \right\} dx_1 dx_2$$

$$W_{vol}^{\textcircled{2}} = \left\{ W_e^{\textcircled{2}} \right\}^t \int_{\textcircled{2}} \left[ N_e^{\textcircled{2}} \right]^t \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -\rho g \end{matrix} \right\} dx_1 dx_2$$

$$\boxed{W_{vol}^{\textcircled{2}} = \left\{ W_e^{\textcircled{2}} \right\}^t \underbrace{L^2 \int_{\textcircled{2}} \left[ N_e^{\textcircled{2}} \right]^t \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -\rho g \end{matrix} \right\} da_1 da_2}_{\left\{ F_e^{\textcircled{2}} \right\}}}$$

17. En déduire que l'expression des forces nodales équivalentes  $\left\{ F_e^{\textcircled{2}} \right\}$  est :

$$\left\{ F_e^{\textcircled{2}} \right\} = -\rho g L^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\Delta_e} (1 - a_1 - a_2) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} a_1 (1 - 2a_2) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} a_2 (1 - 2a_1) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} 4a_1 a_2 da_1 da_2 \end{pmatrix}$$



18. Combien de points de Gauss seraient nécessaires au minimum pour intégrer de manière exacte chacun des termes de  $\{Fe^{(2)}\}$  par la méthode de Gauss-Hammer ? Justifier.

Le degré total maximal des polynômes est  $d = 2$  à cause des termes croisés. Il faut donc au moins 3 points de Gauss pour effectuer une intégration exacte car il faut que  $NPG \geq \frac{d+1}{2} = \frac{3}{2}$

Pour réaliser cette intégration on propose d'utiliser trois points de Gauss dont les coordonnées et poids sont donnés ci-dessous.

$$\begin{cases} a_1g : 1/6, 2/3, 1/6 \\ a_2g : 1/6, 1/6, 2/3 \\ w_g : 1/6, 1/6, 1/6 \end{cases}$$

19. Calculer les forces nodales puis les dessiner sur l'élément.

$$\int_{\Delta_e} (1 - a_1 - a_2) da_1 da_2 = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6} \left( 3 - \frac{4}{6} - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\Delta_e} a_1 (1 - 2a_2) da_1 da_2 = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{2}{6} \right) + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{6} \right) + \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{4}{3} \right) \right) = \frac{1}{12}$$

$$\int_{\Delta_e} a_2 (1 - 2a_1) da_1 da_2 = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{2}{6} \right) + \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{6} \right) \right) = \frac{1}{12}$$

$$\int_{\Delta_e} 4a_1 a_2 da_1 da_2 = \frac{4}{6} \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Contrairement aux éléments habituels les forces nodales ne sont pas équivalentes en chaque nœud. Il faut tenir compte de la présence de plusieurs nœuds près de l'image du point de Gauss d'ordonnée la plus élevée.

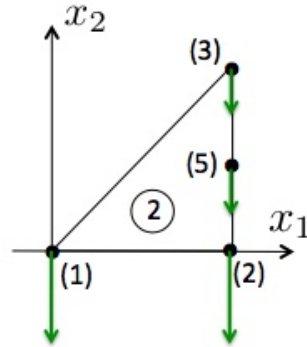


FIGURE 3 – Forces nodales équivalentes aux forces de pesanteur sur l'élément de transition.

20. Quelle est la contribution élémentaire de l'élément  $\textcircled{2}$  au travail des efforts surfaciques extérieurs  $W_{surf}^{(2)}$  ?

Elle est nulle car l'élément ne partage qu'une arête avec la surface H chargée par une densité surfacique d'efforts.

## Assemblage et résolution

Après la phase d'assemblage, on obtient classiquement le système suivant à résoudre :

$$[K] \{U\} = \{F\},$$

où  $[K]$  est la matrice de rigidité globale issue de l'assemblage des matrices élémentaires  $\left[ K_e^{(i)} \right]$ , et  $\{F\}$  le second membre global issu de l'assemblage des seconds membres élémentaires  $\left\{ F_e^{(i)} \right\}$  où  $i \in \{1, \dots, 4\}$

21. Quelle est la taille de  $[K]$  et  $\{F\}$  avant prise en compte des conditions aux limites en déplacement ?  
 $\text{Dim}[K] = 22 \times 22$
22. Indiquer sur la grille en annexe (à rendre avec la copie) la position des termes nuls de  $[K]$ . (On pourra directement remplir la matrice sans préciser les domaines de chacun des nœuds).
23. Commentez la forme de la matrice. Quelles solutions apporter pour l'améliorer ? Il s'agit d'une matrice creuse ce qui n'est pas optimal pour la résolution. Pour se rapprocher d'une matrice bande il faudrait renuméroter le maillage car la forme de la matrice dépend uniquement de la connectivité des éléments..
24. Donner la dimension du vecteur  $\{U\}$  et identifier les ddl connus dans le vecteur  $\{U\}$ . On mettra la réponse sous la forme " $U_i = u_j^{(k)} = \text{valeur}$ ", où  $i, j, k$  et  $\text{valeur}$  sont à identifier.

$\text{Dim}\{U\} = 22 \times 1$  ddl connus :

$$\begin{cases} U_1 = u_1^{(1)} = 0 \\ U_2 = u_2^{(1)} = 0 \\ U_3 = u_1^{(2)} = 0 \\ U_4 = u_2^{(2)} = 0 \\ U_{13} = u_1^{(6)} = 0 \\ U_{14} = u_2^{(6)} = 0 \\ U_{19} = u_1^{(9)} = 0 \\ U_{20} = u_2^{(9)} = 0 \end{cases}$$

On souhaite prendre en compte les conditions aux limites par la méthode du terme diagonal unité et du partitionnement mises en œuvre simultanément.

25. Quelle est la taille de la matrice de rigidité réduite à utiliser pour résoudre le système ? Quelles sont les modifications apportées au second membre ?

La matrice de rigidité du système réduit à résoudre est :  $14 \times 14$ . Le second membre ne subit qu'une réorganisation. En effet comme tous les déplacements imposés sont nuls les termes à retirer au second membre le sont également.

26. Parmi les quatre propositions (a), (b), (c) ou (d), faites en Figure (4), laquelle est susceptible de représenter le champ de déformations solutions tel qu'il est calculé aux points de Gauss. Justifier.

La bonne réponse est la réponse (d). Le champ solution de déformation calculé aux points de Gauss n'est pas continu d'un élément à l'autre, et les éléments ②, ③ et ④ possèdent 3 points de Gauss, il y a donc bien un gradient de déformation en leur intérieur.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3			x	x	x	x	0	0	x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	0	0	x	x
4				x	x	x	0	0	x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	0	0	x	x
5					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7							x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8								x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9									x	x	x	x	0	0	0	0	x	x	0	0	x	x
10										x	x	x	0	0	0	0	x	x	0	0	x	x
11											x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
12												x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
13													x	x	x	x	0	0	x	x	x	x
14														x	x	x	0	0	x	x	x	x
15															x	x	0	0	x	x	x	x
16			S	Y	M											x	0	0	x	x	x	x
17																	x	x	0	0	x	x
18																		x	0	0	x	x
19																			x	x	x	x
20																				x	x	x
21																					x	x
22																						x

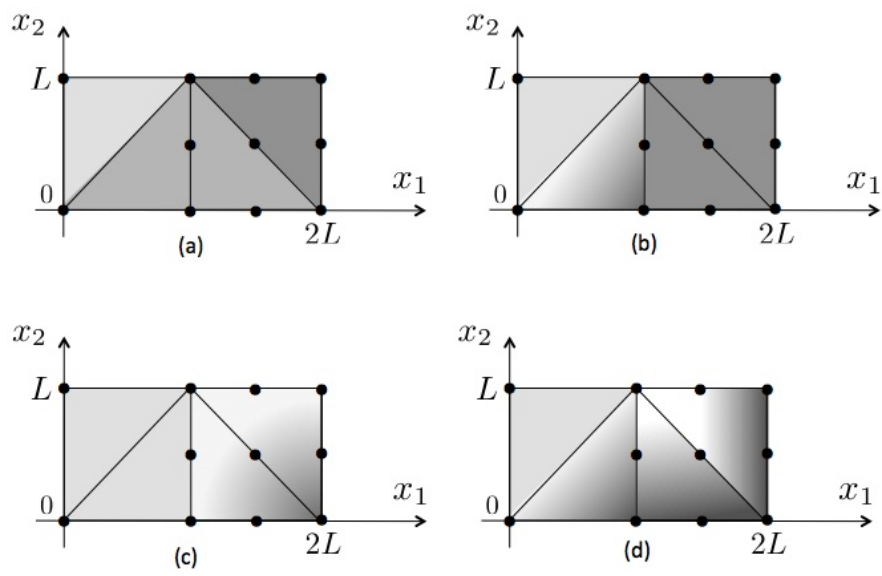


FIGURE 4 – Propositions pour la représentation du champ de déformation solution calculé aux points de Gauss.