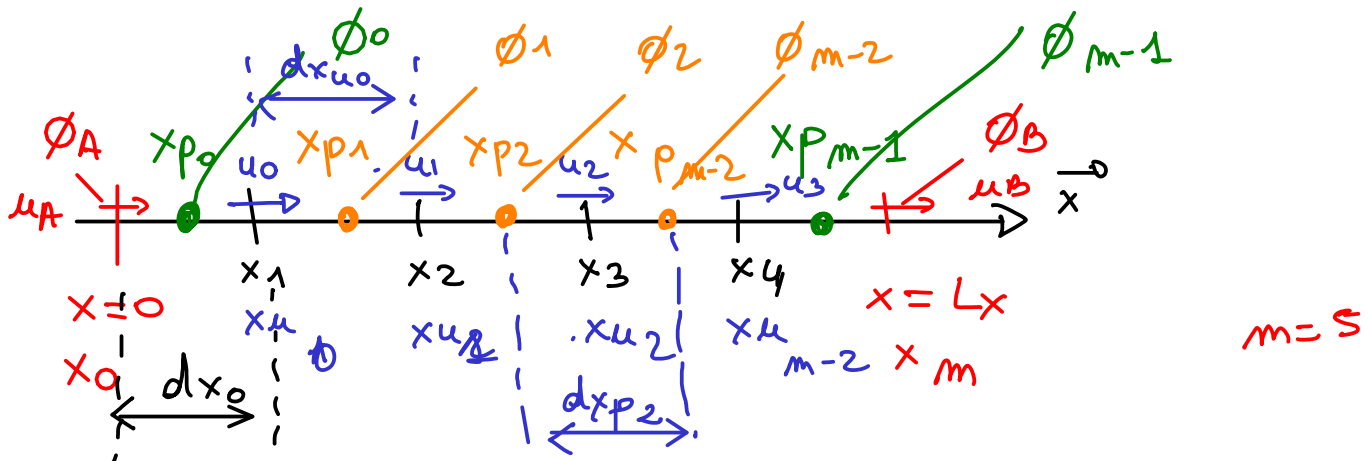


TP n° 1  
le 12-02-2021

## Equation 1D de convection - diffusion



- inconnue du problème  $\phi [0:-1] [m, 1]$  sur VC
  - coeff. de diffusion  $\Gamma [0:-1] [m, 1]$
  - vitesse connue  $u [0:-1]$
  - $\Gamma$  aux interfaces  $\Gamma_{ew}$  de forme  $[m-1, 1] \rightarrow [m-1, 1]$
- 3 cellules courantes =  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$   
2 cellules frontières =  $\phi_0, \phi_4$

Problème sous forme matricielle  $SbcW$

$$\begin{bmatrix} a_p^* & a_E \\ a_W & a_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4^* \end{bmatrix}$$

Annotations:   
 -  $a_E$  and  $a_W$  are circled in red with arrows pointing to them from the word "échange".   
 -  $b_0^*$  and  $b_4^*$  are circled in green with arrows pointing to them from the word "cellule 0" and "cellule 4" respectively.   
 - The matrix  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  is circled in orange with the label "noeuds courants".   
 - The matrix  $\begin{bmatrix} b_0^* \\ b_4^* \end{bmatrix}$  is circled in green with the label "SbcE".

$$a_E \phi_E + a_p \phi_p + a_W \phi_W = b_p$$

$$\int_0^m \int_0^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad \text{au point courant } P_{ij}$$

$$\Rightarrow \Delta y_P \cdot \int_0^e \operatorname{div} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = \Delta y_P \left( \overbrace{\Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x}}^{F_{de}} \Big|_e - \overbrace{\Gamma_w \frac{\partial \phi}{\partial x}}^{F_{dw}} \Big|_w \right)$$

- on doit évaluer des gradients aux interfaces (ew)
- appliquer l'opérateur divergence aux nœuds-courants.

- $\underline{\phi} = \text{vecteur } [m \times 1]$

- $\underline{\text{grad}} \underline{\phi} \Rightarrow [(m-1) \times 1]$  avec  $F_d = \underline{\Gamma}_{ew} \underline{\text{grad}} \underline{\phi}$   
 $\hookrightarrow \underline{\text{grad}} [(m-1) \times m]$

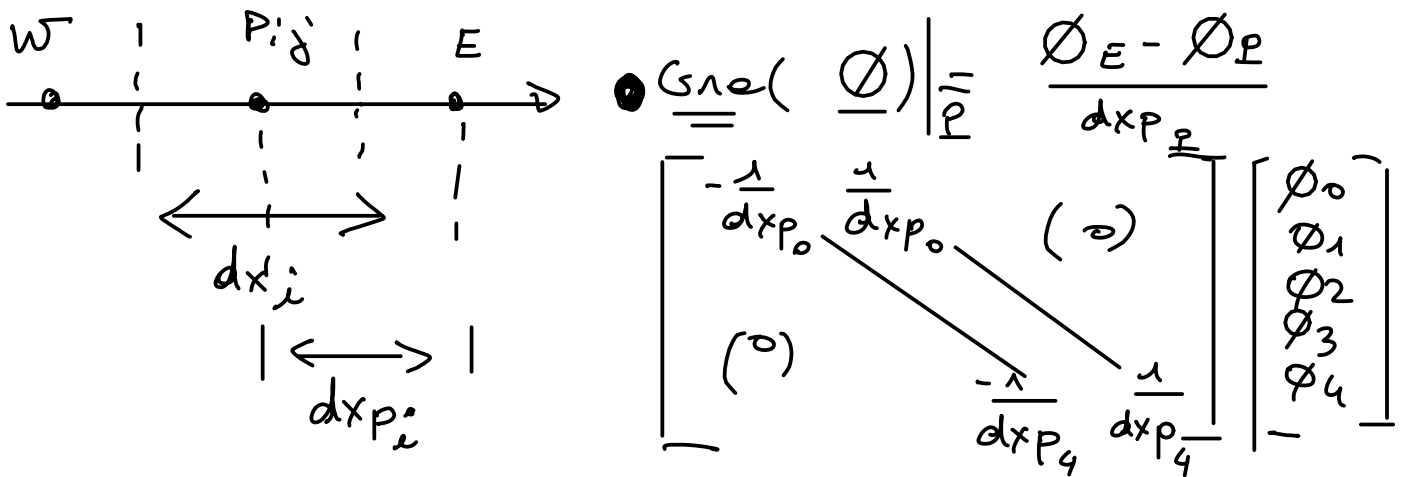
- $\underline{\Gamma}_{ew} \rightarrow$  s'applique aux interfaces  
 $\rightarrow \underline{\Gamma}_d = [(m-1) \times (m-1)]$  ou vecteur  $(m-1)$

- $\underline{\text{div}} (\underline{F}_d) \xrightarrow{\quad} [(m-2) \times 1]$   
 $\hookrightarrow [(m-1) \times 1]$   
 $\Downarrow$

$$\underline{\text{div}} [(m-2) \times (m-1)]$$

- $\underline{b} = \underline{\text{div}} (\underline{\Gamma}_{ew} \underline{\text{grad}} \underline{\phi}) \quad [(m-2) \times 1]$

Pour un noeud courant



supy. bibliotique

$$G_{ne} = \text{sp. diags}([-1/dx_p, +1/dx_p],$$

position  $\rightarrow [0, 1]$ ,  
 dimension  $\rightarrow (m-1, m)$  .toarray

• on pose  $F_d$  comme le flux diffusif.  
 $F_d = T_{ew} \frac{\partial \phi}{\partial x} |_{ew}$   $[m-1, 1]$

$$\underline{div}(F_d) = (F_d e - F_d w)$$

$$div = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & (0) & & & \\ & & (0) & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & (0) \end{bmatrix} [m-2, m-1]$$

supy  $\rightarrow$  sp. diags( ) .toarray

cellule influencée par  $\Phi_A$  → nœud 0

$$\Delta y (\Gamma_e \text{grad } \Phi|_e - \Gamma_w \text{grad } \Phi|_w) = 0$$

$$0 = (\underbrace{\Gamma_e \text{grad}}_{\text{inchangé}}|_e - \Gamma_A \frac{\Phi_0 - \Phi_A}{\Delta x_0/2}) \Delta y$$

$$0 = (\Gamma_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta x_{p0}} - 2\Gamma_A \frac{\Phi_0 - \Phi_A}{\Delta x_0}) \Delta y$$

$$\Delta y \left( \underbrace{\frac{\Gamma_0}{\Delta x_{p0}}}_{a_E} \Phi_1 - \left( \underbrace{\frac{\Gamma_0}{\Delta x_p}}_{a_E} + \underbrace{\frac{2\Gamma_A}{\Delta x_0}}_{a_A} \right) \Phi_0 \right) = \Delta y \Phi_A \left( \underbrace{-\frac{2\Gamma_A}{\Delta x_0}}_{\text{terme source}} \right)$$

$$a_p^* = -a_E - a_A \text{ à la place de } a_w \text{ courant}$$

Idem pour le nœud 4

