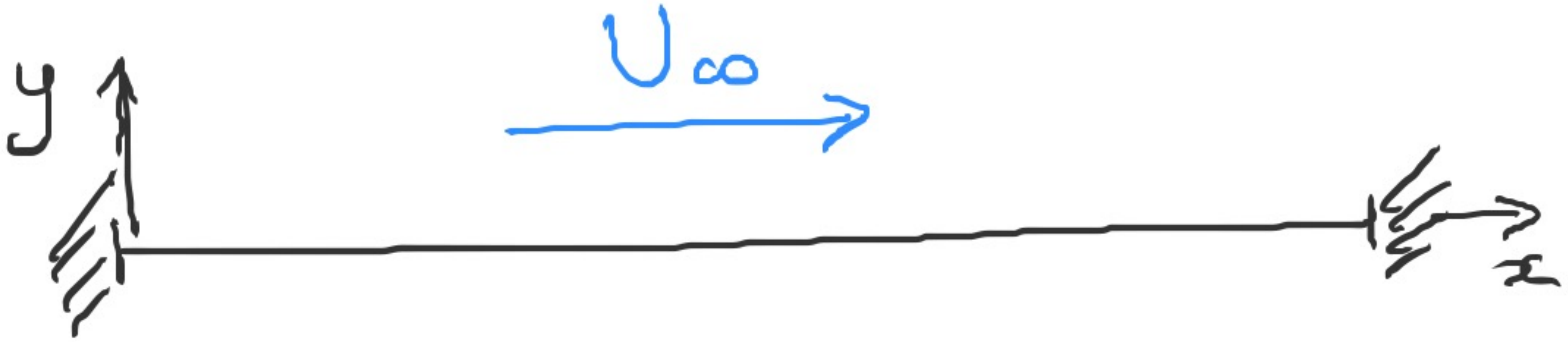


MODELE du PISTON :

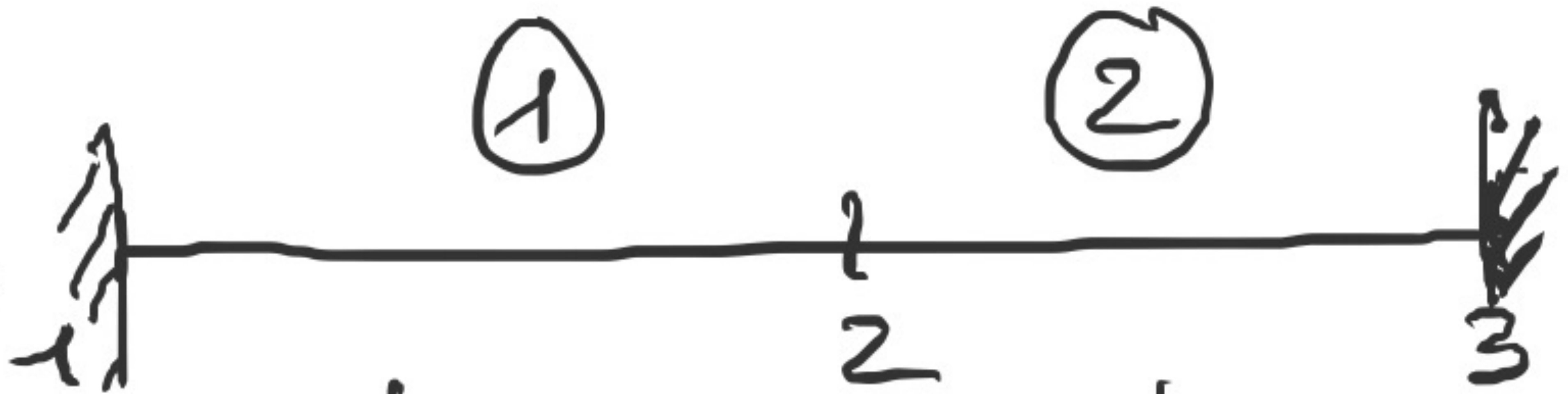
$$p = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}$$

ELEMENT "COQUE 1D" en flexion

$$\underset{(4\times 1)}{\{U_e\}} = [v_i, \theta_i, v_j, \theta_j]^t$$

calcul des matrices élémentaires : $\underset{(4\times 4)}{[K_e], [M_e], [A_{fe}], [A_{de}]}$

Cas d'un maillage de 2 éléments :



Somme des contributions élémentaires : $\int_\Omega \dots d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \dots d\Omega$

$\Longrightarrow$ ASSEMBLAGE des MATRICES $\Longrightarrow$

Systèmes d'équations à résoudre :

$$\boxed{[M]\{\ddot{U}\} + [A_d]\{\dot{U}\} + [K^*]\{U\} = \{0\}}$$

Pour le maillage considéré :

$$[K^*] = [K] + [A_f] \qquad \underset{(6\times 1)}{\{U\}} = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, v_3, \theta_3]^t$$

CONDITIONS LIMITES : $v(x=0) = v(x=L) = 0$; (encastrement aux extrémités)

$\theta(x=0) = \theta(x=L) = 0$

$\Rightarrow v_1 = v_3 = 0$ et $\theta_1 = \theta_3 = 0$

PRISE en COMPTE des CONDITIONS LIMITES par SUBSTITUTION

→ retirer les éqs associées aux ddl imposés :

$\underset{(2\times1)}{\{U_{RED}\}} = [v_2, \theta_2]^t \quad N_{ddl_{RED}} = N_{ddl} - N_{ddl\ fixés} = 6 - 4 = 2$

→ si les valeurs des ddl fixés sont nulles, alors on peut aussi retirer les colonnes correspondantes dans les matrices ⇒ MATRICES REDUITES et SYSTEME REDUIT

$$[M_{RED}]\{\ddot{U}_{RED}\} + [Ad_{RED}]\{\dot{U}_{RED}\} + [K^*_{RED}]\{U_{RED}\} = \{0\}$$

DIMENSION : $N_{ddl_{RED}}$ (dans notre cas 2)

Système d'éqs. diff. en temps, degré 2, complet, couplé

RESOLUTION du PROBLEME :

- intégration en temps, en connaissant les conditions initiales : $\{U(t)\}$ (techniques de différences finies) et $\{\dot{U}(t)\}$ et $\{\ddot{U}(t)\}$

- comme pour un système du type :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\}$$

on peut conduire une analyse modale (cas d'un système/structure libre avec prise en compte de l'amortissement)

CAS sans écoulement ($U_\infty = 0$) : $[A_d] = 0$ et $[A_f] = 0$

$$\boxed{[M_{RED}]\{\ddot{U}_{RED}\} + [K_{RED}]\{U_{RED}\} = \{0\}}$$

éqs de la structure libre sans amortissement

$\Rightarrow$ REPONSE HARMONIQUE : $\{U_{RED}\} = \{X\} e^{i\omega t}$:

$$\left(-\omega^2[M]\{X\} + [K]\{X\}\right) e^{i\omega t} = \{0\} \Rightarrow$$

$$\omega^2 [M]\{X\} = [k]\{X\} \Rightarrow \boxed{[M]^{-1}[k]\{X\} = \omega^2\{X\}}$$

(matrices réduites!)

PB. aux VALEURS PROPRES de $[M]^{-1}[k]$ (matrice de rigidité dynamique)

(ANALYSE MODALE)

RESULTAT :

pulsations propres ω_i

vecteurs propres $\{X_i\}$

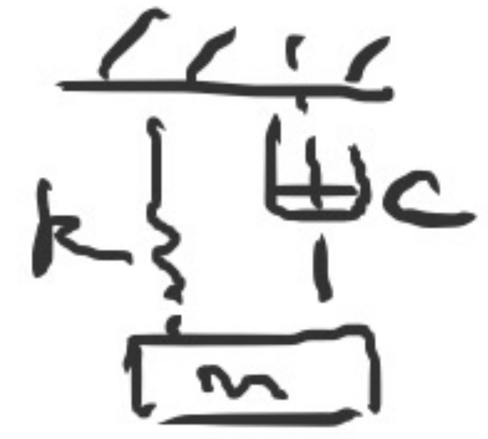
$(i = 1, \dots, N_{ddl\,RED})$

soit les MODES PROPRES de la STRUCTURE

CAS de présence d'écoulement ($U_\infty \neq 0$) :

système complet, équivalent à la réponse d'une structure libre (pas de forçante : 2e membre est $\{0\}$), amortie ($[A_d]$) et avec une raideur $[k^*]$ influencée par l'écoulement.

Réponse de référence: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$



Solution Type: $x = Ae^{\lambda t} \rightsquigarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad \left(\frac{k}{m} = \omega_0^2\right)$$

ANALYSE MODALE du SYSTEME AEROELASTIQUE $\Longrightarrow$ étude de stabilité du système et prédiction de la vitesse limite ou critique U_∞^{crit} d'instabilité.

INSTABILITE ASSOCIEE : flottement

PROCEDURE pour l'ANALYSE MODALE d'un système complet (avec amortissement) :

variable auxiliaire : $\{z\} = \begin{bmatrix} U_{RED} \\ \hline \dot{U}_{RED} \end{bmatrix}$ (taille : $2 \times \underbrace{Nddl_{RED}}_{N}$)

On calcule : $\{\dot{z}\} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{RED} \\ \hdashline \ddot{U}_{RED} \end{bmatrix}$. RELATION entre $\{\dot{z}\}$ et $\{z\}$?

$$\underset{(N\times 1)}{\{\dot{U}_{RED}\}} = \underset{(N\times 2N)}{\left[\, O_{N\times N} \;\vdots\; \mathbb{1}_{N\times N} \,\right]} \underset{(2N\times 1)}{\{z\}}$$

et $\{\ddot{U}_{RED}\} = -[M]^{-1}\left([Ad]\{\dot{U}_{RED}\} + [K^*]\{U_{RED}\}\right)$ (de l'éq. d'équilibre)

$$\{\ddot{U}\} = \left[\, -[M]^{-1}[K] \;\vdots\; -[M]^{-1}[Ad] \,\right]\{z\}$$

Donc :

$$\underset{(2N\times 1)}{\{\dot{z}\}} = \underset{(2N\times 2N)}{\left[\begin{array}{c|c} 0_{N\times N} & 1_{N\times N} \\ \hline -[M]^{-1}[K^*] & -[M]^{-1}[A_d] \end{array}\right]} \underset{(2N\times 1)}{\{z\}}$$

soit : $\boxed{\{\dot{z}\} = [B]\{z\}}$

Solution type : $\{z\} = \{Z_0\} e^{\lambda t} \rightsquigarrow \{\dot{z}\} = \lambda \{Z_0\} e^{\lambda t}$

et dans éqs : $\lambda \{Z_0\} e^{\lambda t} = [B]\{Z_0\} e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{[B]\{Z_0\} = \lambda\{Z_0\}}$

ANALYSE MODALE : résolution du pb aux valeurs propres de la matrice [B]

Valeurs propres complexes conjugués :

$$\lambda_k = a_k \pm i\, b_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

Les résultats de l'analyse modale permettent de qualifier la stabilité du système aéroélastique pour une vitesse d'écoulement U_∞ donnée :

→ si $a_R < 0$ pour tous les modes ⇒ STABLE

→ si $a_R > 0$ pour au moins 1 mode ⇒ INSTABLE (flottement)

→ si $a_R = 0$: U_∞ est à la limite du domaine de stabilité, soit U_∞^{CRIT}, vitesse critique de flottement pour un mode

ANALYSE de FLOTTEMENT ou DIMENSIONNEMENT : prédiction de la vitesse critique U_∞^{CRIT} de flottement du système

↳ répéter de manière itérative l'analyse modale du syst. aéroélastique pour des valeurs différentes de U_∞ et on cherche la valeur minim. de U_∞ qui annule une partie réelle a_R (pour 1 mode aéroélastique)