Aérodynamique

Partie I : Aérodynamique externe incompressible

Ivan Delbende

ivan.delbende@limsi.fr

Sorbonne U, Master Mécanique 1ère année, spécialités MF2A et CompMech

2020–21

Introduction

Aérodynamique : étude des phénomènes qui se produisent lorsqu'un corps solide est en mouvement relatif dans un fluide.

- externe : écoulement autour d'une aile, d'un avion, d'un véhicule, ...
- interne : écoulement de gaz dans une prise d'air, un moteur, une pompe, ...

Problème principal : déterminer les efforts qui s'exercent sur le solide, les transferts de chaleur, et donc déterminer l'écoulement au voisinage du corps considéré.

On se restreint ici à l'aérodynamique externe incompressible, et à ses applications aéronautiques.
Cadre :

- fluide visqueux car condition d'adhérence au contact entre fluide et surfaces solides, même si une partie de la théorie peut se faire dans le cadre de fluide parfait, car $Re \gg 1$,
- fluide incompressible : $Ma \ll 1$.

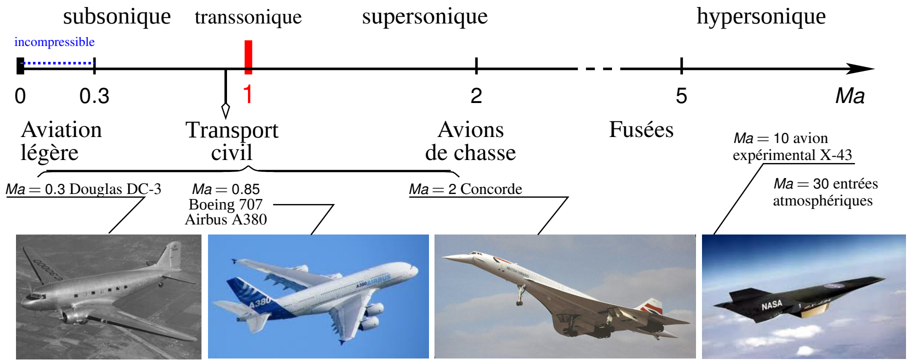
Nombre de Mach

- V vitesse de vol, a vitesse du son :

$$\boxed{Ma = V/a}$$

Gaz parfait : $a = \sqrt{\gamma r T}$. Pour l'air, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1.4$, $r = \dfrac{R}{M} = 287\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

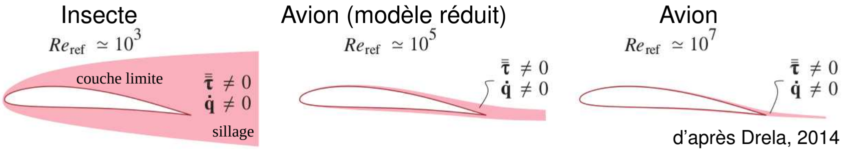
$$\boxed{\text{En pratique, les effets compressibles se font sentir pour } Ma > 0.3.}$$



Nombre de Reynolds

- ℓ longueur de référence (corde, envergure), μ viscosité dynamique, ρ masse volumique de l'air

$$\boxed{Re = \rho V \ell / \mu}$$



d'après Drela, 2014

> Quand $Re > 10^5$, la majeure partie de l'écoulement a un comportement non visqueux.

- Les effets visqueux se font **localement** sentir dans les couches limites et le sillage,
- mais la pression est **uniforme** à travers la couche limite ou le sillage
  $\Rightarrow$pour prédire la pression, on peut utiliser la vitesse calculée en fluide parfait
- or l'écoulement incident est potentiel $\Rightarrow$théorie des écoulements potentiels.

Cependant, ces effets locaux peuvent avoir une influence **globale** sur l'écoulement (condition de Kutta, séparation, transition à la turbulence).

Bibliographie

- ANDERSON, Jr, J.D. 2001 Fundamentals of aerodynamics. 3rd edition. McGraw Hill.
- BERTIN, J.J. & CUMMINGS, R.M. 2008 Aerodynamics for engineers. 5th edition. Prentice Hall.
- COMOLET, R. 1976 Mécanique expérimentale des fluides. 2nde édition. Masson.
- DRELA, M. 2014 Flight vehicle aerodynamics. 1st edition. MIT Press.
- FAURE, Th. 2008 Dynamique des fluides appliquée. Applications à l'aérodynamique. Dunod.

Plan du cours

1. Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide
   - Problème et modélisation
   - Traînée – résultats expérimentaux
   - Portance
2. Profils d'aile (2D)
   - Géométrie et nomenclature
   - Méthodes de calcul
   - Théorie des profils minces
3. Du profil d'aile à l'avion
   - Ailes d'envergure finie
   - Différents types de voilure
4. Au choix...
   - Effets visqueux (traînée visqueuse, décollement de la couche limite)
   - Éoliennes
   - Hélicoptères
   - Drones
   - ...

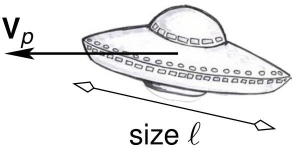
Plan du cours

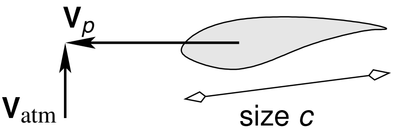
1. Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide
   - Problème et modélisation
   - Traînée – résultats expérimentaux
   - Portance
2. Profils d'aile (2D)
   - Géométrie et nomenclature
   - Méthodes de calcul
   - Théorie des profils minces
3. Du profil d'aile à l'avion
   - Ailes d'envergure finie
   - Différents types de voilure
4. Au choix...
   - Effets visqueux (traînée visqueuse, décollement de la couche limite)
   - Éoliennes
   - Hélicoptères
   - Drones
   - ...

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

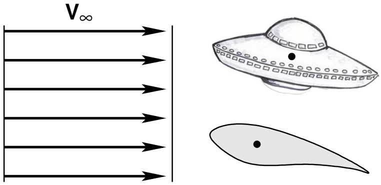
Problème et modélisation : référentiel

- Corps en translation à la vitesse $\mathbf{V}_p$ dans un fluide de vitesse $\mathbf{V}_{\mathrm{atm}}$





- Dans le référentiel lié au corps, on a un écoulement incident à la vitesse $\mathbf{V}_\infty = \mathbf{V}_{\mathrm{atm}} - \mathbf{V}_p$

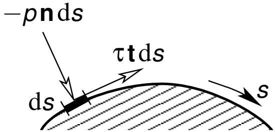


  - Dans ce référentiel, la vitesse de l'écoulement est donnée par $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.
  - Certaines régions de l'écoulement deviennent **stationnaires**.
  - Approche similaire aux expériences en soufflerie.

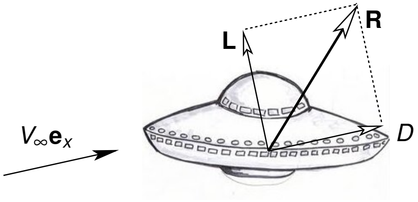
Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Problème et modélisation : efforts

- Deux types d'efforts dus au fluide sur le corps :
  - efforts normaux : pression $-p\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$
    $\mathbf{n}$ normale qui pointe du corps vers le fluide
  - efforts tangentiels : friction $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$
    $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ tenseur des contraintes visqueuses



- En 2D, $\mathrm{d}\mathbf{F} = -p\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \tau\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}s$, où $\tau \simeq \mu \dfrac{\partial V_t}{\partial n}$.



- **Résultante aérodynamique** et moment résultant :

$$\mathbf{R} = \oiint \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_f\ , \quad \mathbf{M}_O = \oiint \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{F}$$

  - traînée (drag) $\boxed{D = \mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_x}$, où $\mathbf{e}_x$ est la direction de la vitesse amont $\mathbf{V}_\infty$
  - portance (lift) $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{R} - D\mathbf{e}_x}$: projection de $\mathbf{R}$ perpendiculairement à $\mathbf{e}_x$.

Rq : quand l'écoulement est instationnaire, il s'agit de valeurs moyennes dans le temps.

- Grâce à l'analyse dimensionnelle, on peut obtenir des lois de similitude pour ces efforts
- Bilan des variables et des dimensions :

fluide			
ρ_∞	M	L^{-3}	
V_∞		L	T^{-1}
μ_∞	M	L^{-1}	T^{-1}
a_∞		L	T^{-1}

corps			
ℓ		L	

efforts			
traînée D	M	L	T^{-2}
portance L	M	L	T^{-2}
moment M_O	M	L^2	T^{-2}

- Les efforts D, L et M_O sont des variables dépendantes, pour lesquelles il existe une relation de la forme

$$
\begin{aligned}
D &= f_1(\rho_\infty, V_\infty, \mu_\infty, a_\infty, \ell) \\
L &= f_2(\rho_\infty, V_\infty, \mu_\infty, a_\infty, \ell) \\
M_O &= f_3(\rho_\infty, V_\infty, \mu_\infty, a_\infty, \ell)
\end{aligned}
$$

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Problème et modélisation : similitude

- Application du théorème de Waschy–Buckingham (théorème Π)
  - 3 dimensions physiques $\Rightarrow$choix de 3 grandeurs qui contiennent ces 3 dimensions de manière indépendante : $\rho_\infty,\ V_\infty,\ \ell$
  - chacune des autres variables peut être adimensionnée à l'aide de ces 3 grandeurs

$$\mu_\infty \to \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty \ell} \equiv Re_\infty^{-1}\,, \qquad a_\infty \to \frac{a_\infty}{V_\infty} \equiv Ma_\infty^{-1}\,.$$

  - chacune des relations peut être écrite sous forme adimensionnée

$$\frac{D}{\rho_\infty V_\infty^2 \ell^2} = g_1\left(Re_\infty, Ma_\infty\right), \quad \frac{L}{\rho_\infty V_\infty^2 \ell^2} = g_2\left(Re_\infty, Ma_\infty\right), \quad \frac{M_O}{\rho_\infty V_\infty^2 \ell^3} = g_3\left(Re_\infty, Ma_\infty\right)$$

  - en aérodynamique, on utilise plutôt la pression dynamique $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$ et une surface S (maître couple, surface alaire, ...) pour générer les coefficients aérodynamiques de traînée, de portance et de moment :

$$C_D(Re, Ma) \equiv \frac{D}{q_\infty S}\,, \quad C_L(Re, Ma) \equiv \frac{L}{q_\infty S}\,, \quad C_{M_O}(Re, Ma) \equiv \frac{M_O}{q_\infty S \ell}\,.$$

- Pour une géométrie donnée, on a ainsi des lois de similitude pour les efforts subis par le corps.

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Problème et modélisation : similitude

- **Coefficients aérodynamiques en 2 dimensions (2D)**
  - souvent, on étudie les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur une section bidimensionnelle d'aile d'avion, de pale de turbine...
  - les efforts sont alors des efforts par unité de longueur selon l'envergure, notés dans la suite D', L', M'_O.
  - Bilan des dimensions

efforts 2D			
traînée 2D D'	M		T^{-2}
portance 2D L'	M		T^{-2}
moment 2D M'_O	M	L	T^{-2}

  - d'où les coefficients aérodynamiques 2D de traînée, de portance et de moment :

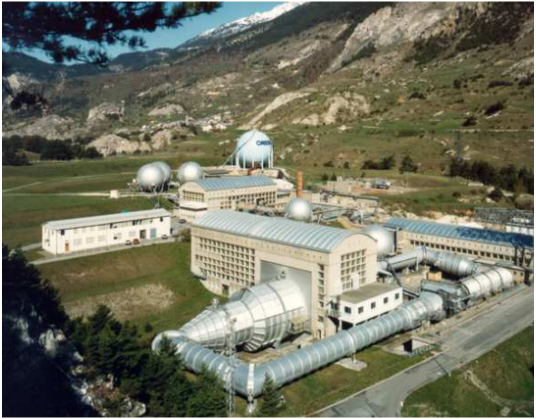
$$C_{D'}(Re, Ma) \equiv \frac{D'}{q_\infty c} \; , \quad C_{L'}(Re, Ma) \equiv \frac{L'}{q_\infty c} \; , \quad C_{M'_O}(Re, Ma) \equiv \frac{M'_O}{q_\infty c^2} \; ,$$

la longueur de référence étant la corde c du profil.

TD 1

Similitude. Efforts sur un profil d'aile. Écoulement autour d'un cylindre.

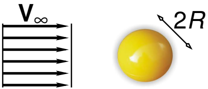
- Souffleries de l'ONERA (Office National d'Études et Recherches Aérospatiales)
  - Soufflerie S1 sonique (Modane) : $Ma \leq 1$, $P = P_{\mathrm{atm}}$, $\mathcal{P} = 88$ MW, section d'essai de 8 m de diamètre.



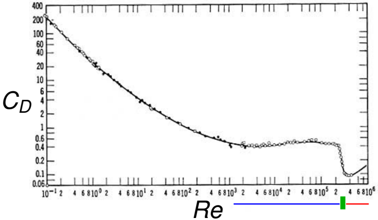
  - Soufflerie S2MA transsonique et supersonique continue à air comprimé (Modane) : $Ma < 3.1$, $P_t < 2.5$ bar, $\mathcal{P} = 55$ MW, section d'essai 1.7×1.7 m^2.

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Traînée – résultats expérimentaux : exemple de la sphère



- Traînée de la sphère de rayon R ($Ma \ll 1$) :
  - coefficient $C_D = \dfrac{D}{q_\infty S}$ avec $S = \pi R^2$
  - comportement de $C_D = C_D(Re)$ $\longrightarrow$



d'après Schlichting

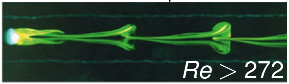
écoulement rampant	bifurcations apparition du sillage	régime souscritique	régime supercritique

10^{-1} … 10 … 10^3 … $Re_c \approx 3 \cdot 10^5$ … Re

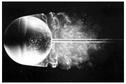
formule de Stokes

$D = 6\pi\mu R V_\infty$

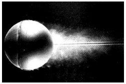
$C_D = 24/Re$



C_D diminue moins vite que $24/Re$



C_D se stabilise près de 0.45



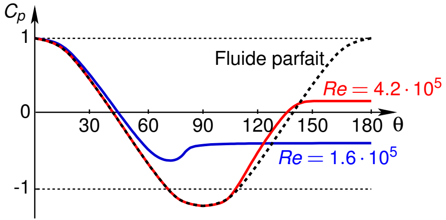
C_D reste stable près de 0.14

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Traînée – résultats expérimentaux : exemple de la sphère

- Au-delà de $Re = 10^3$, C_D prend deux valeurs distinctes
  - $C_D = 0.45$ pour $10^3 < Re < Re_c$ avec $Re_c \approx 3 \cdot 10^5$
  - $C_D = 0.14$ pour $Re > Re_c$

  En fluide parfait, on a $C_D = 0$, la pression étant équilibrée entre amont et aval.
- Coefficient de pression C_p :
  - $C_p(\theta)$ suit le fluide parfait $C_p = 1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta$ du point d'arrêt amont $\theta = 0$ au point de décollement $\theta = \theta_d$
  - puis se stabilise à une valeur quasi-constante pour $\theta_d < \theta \leq \pi$.

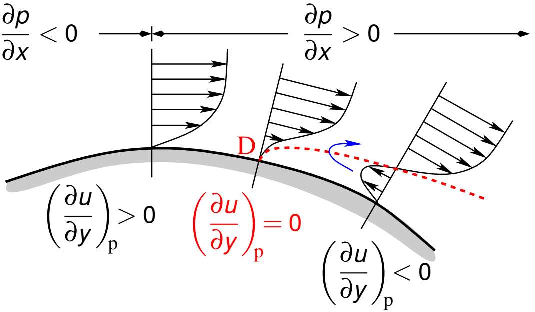


- À haut Reynolds, C_D dépend donc surtout de la position des points de décollement, la contrainte visqueuse étant négligeable.
- La valeur de Re_c est abaissée pour une sphère rugeuse, ou pour un taux de turbulence de l'écoulement incident plus élevé.

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Traînée – résultats expérimentaux : décollement de la couche limite

- D'où vient le décollement ?
  - Effet visqueux lié à la présence de la couche limite
  - Les faibles vitesses sont retournées par un fort gradient de pression adverse :

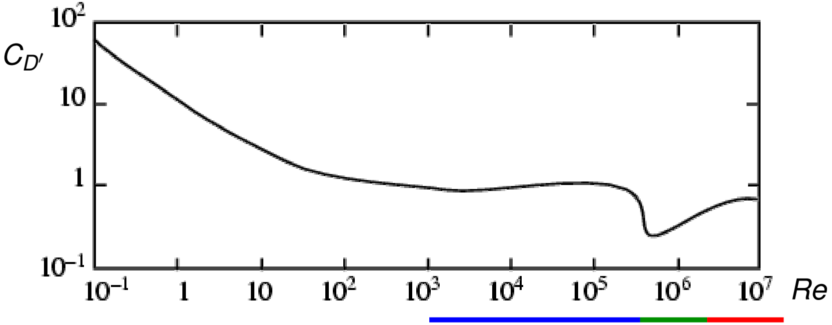


  - Décollement de la couche limite $\Rightarrow$ traînée de forme (ou de pression)
  - Deux cas pour la sphère, selon que la transition laminaire/turbulent se produit en aval ou en amont du décollement :
    - ★ décollement de couche limite laminaire $Re < Re_{\mathrm{c}}$, régime sous-critique, $\theta_d \approx 80^\circ$,
    - ★ décollement de couche limite turbulente $Re > Re_{\mathrm{c}}$, régime super-critique $\theta_d \approx 120^\circ$.

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Traînée – résultats expérimentaux : cas du cylindre infini

- Courbes qualitativement similaires pour le cylindre infini



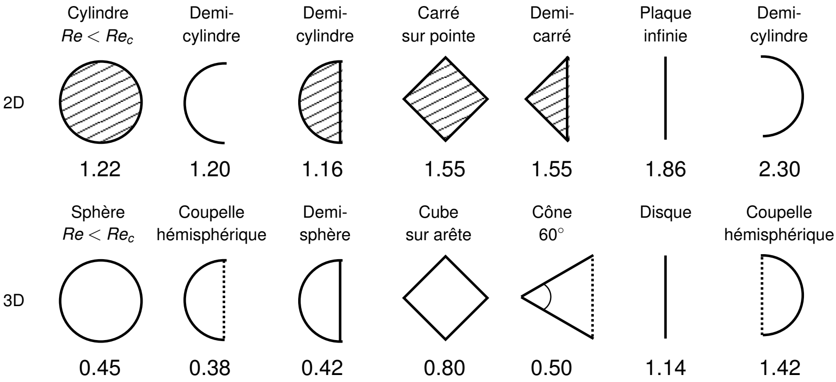
- Au-delà de $Re = 10^3$, $C_{D'}$ prend trois valeurs distinctes
  - $C_{D'} = 1.1$ quand $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$, et θ_d croît de 75° à 100°
  - $C_{D'} = 0.4$ quand $2 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6$, et $\theta_d \approx 145^\circ$
  - $C_{D'} = 0.6$ quand $Re > 2 \cdot 10^6$, et $\theta_d \approx 90^\circ$.

En fluide parfait, on a $C_{D'} = 0$, la pression étant équilibrée entre amont et aval.

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Traînée – résultats expérimentaux : cas de différents objets

- Coefficient de traînée de différents objets

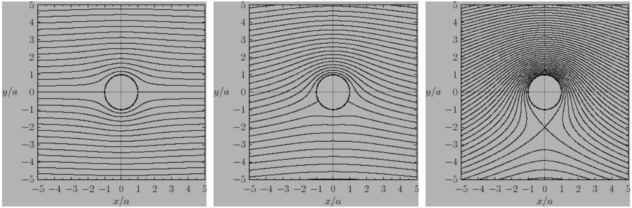


- Remarques
  - valeurs beaucoup plus élevées pour les obstacles 2D que 3D
  - une arête vive provoque un décollement (par ex. plaque plane) sauf si un décollement a déjà eu lieu en amont de l'arête en question.

TD 2

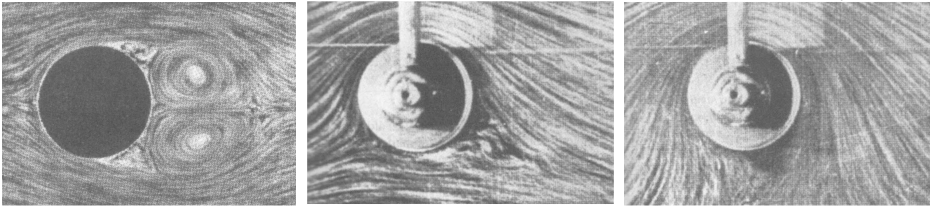
Portance d'un cylindre avec circulation.

Lignes de courant et points de stagnation pour l'écoulement autour d'un cylindre, en présence de circulation.



$\Gamma = 0$ $\quad 0 < \Gamma < 4\pi V_\infty R$ $\quad \Gamma > 4\pi V_\infty R$

Prandtl & Tietjens, 1957



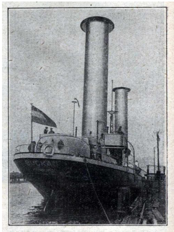
Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

Portance : théorème de Kutta–Joukowsky

- La portance L' qui s'exerce par unité d'envergure sur un corps 2D est reliée à la circulation Γ de l'écoulement potentiel autour de ce corps par la relation de Kutta–Joukowsky :

$$L' = \rho V_\infty \Gamma \, .$$

  - Pour un cylindre, la circulation est due à la rotation par entraînement visqueux, la portance est alors une manifestation de l'effet Magnus.
  - Exemple d'application : le rotor Flettner



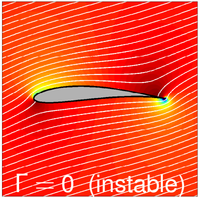
Le Buckau d'Anton Flettner (1925)

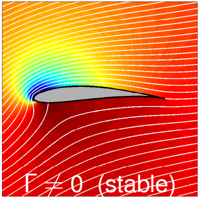
L'E-Ship 1 d'Enercon (2010)

Efforts sur les corps en mouvement dans un fluide

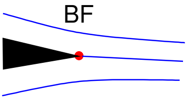
Portance : cas des profils, condition de Kutta

- En aérodynamique, on utilise des corps profilés pour obtenir de la portance. C'est alors l'angle d'incidence et la géométrie du corps qui fixent la valeur de la circulation Γ, et donc de la portance.

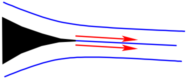




- Cette valeur est imposée par la condition de Kutta : pour un écoulement non décollé, l'écoulement a la même vitesse au bord de fuite, qu'il vienne de l'extrados ou de l'intrados.



Cas du dièdre



Cas du cusp

$\mathbf{V}_{\mathrm{extr}}(\mathrm{BF}) = \mathbf{V}_{\mathrm{intr}}(\mathrm{BF}) = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{V}_{\mathrm{extr}}(\mathrm{BF}) = \mathbf{V}_{\mathrm{intr}}(\mathrm{BF}) \neq \mathbf{0}$

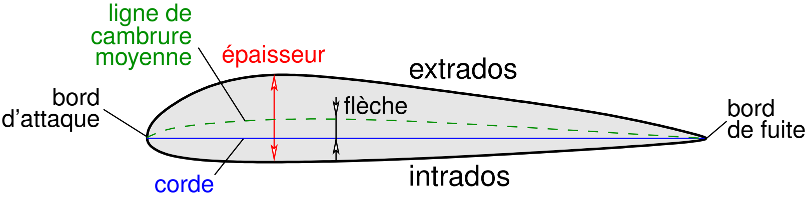
- Au démarrage, la conservation de la circulation provoque l'appartition d'un tourbillon de démarrage de circulation $-\Gamma$. *Animation*.

Plan du cours

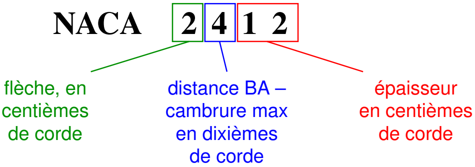
Profils d'ailes (2D)

Géométrie et nomenclature

- Caractéristiques géométriques d'un profil



- Profils NACA à 4 chiffres (NACA=*National Advisory Committee for Aeronautics*)



$\Rightarrow$ flèche $f = 0.02c$, point de cambrure maximale situé à $p = 0.4c$ du bord d'attaque, épaisseur $e = 0.12c$, le point d'épaisseur maximale étant pour ces profils à $0.3c$ du bord d'attaque.

Profils d'ailes (2D)

Géométrie et nomenclature

- Les profils NACA à 4 chiffres sont définis analytiquement par :
  - la ligne de cambrure moyenne

$$
\left|
\begin{array}{ll}
z = \dfrac{f}{p^2}\,x(2p-x) & 0 \leq x \leq p \\[2ex]
z = \dfrac{f}{(c-p)^2}(c-x)(c+x-2p) & p \leq x \leq c
\end{array}
\right.
$$

  - la demi-épaisseur

$$
\delta z = e[1.4845\sqrt{x/c} - 0.63x/c - 1.758(x/c)^2 + 1.4215(x/c)^3 - 0.5075(x/c)^4]
$$

- Profils NACA à 5 chiffres

$$
\textbf{NACA}\quad \boxed{\mathbf{2}}\,\boxed{\mathbf{3\ 0}}\,\boxed{\mathbf{1\ 2}}
$$

$\times 3/20 \rightarrow$
$C_{L'}$ optimal

$/2 \rightarrow$
position de la
cambrure maximale
en centièmes de corde

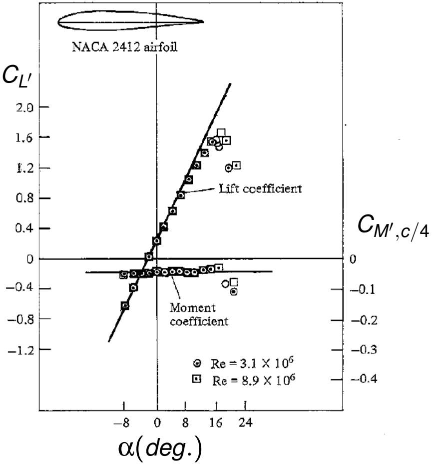
épaisseur
en centièmes
de corde

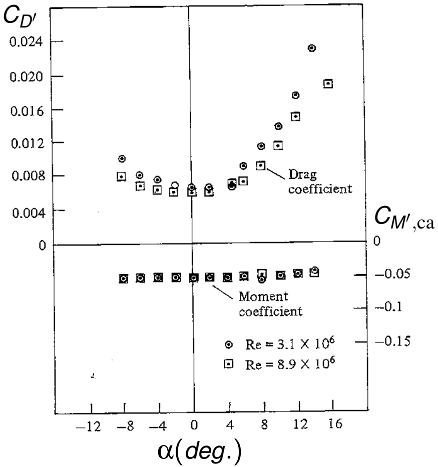
Le $C_{L'}$ optimal est ici le coefficient de portance théorique obtenu quand la ligne de cambrure moyenne au BA est alignée avec l'écoulement (angle d'attaque idéal).

Profils d'ailes (2D)

Efforts : observations expérimentales

- Mesures expérimentales sur le NACA 2412 *(d'après Abott & von Doenhoff)*

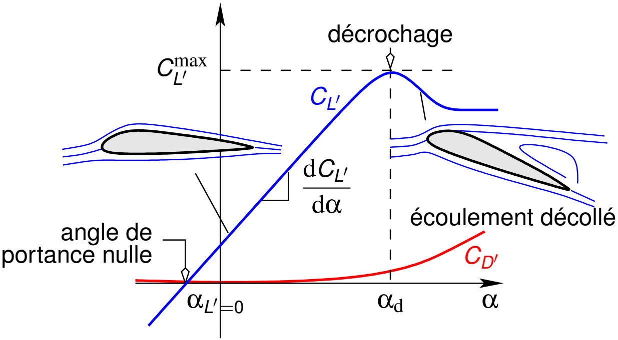




Profils d'ailes (2D)

Efforts : observations expérimentales

- Variation des coefficients de portance et de traînée avec l'angle d'incidence



Comment prédire ces résultats ?

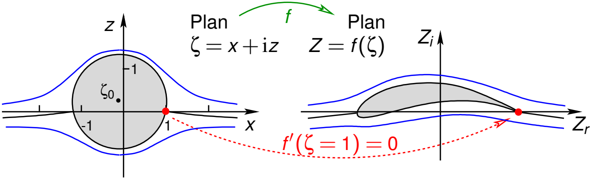
- Pente de $C_{L'}$ et angle de portance nulle : théorie des profils minces (fluide parfait).
- Décrochage, portance max, traînée : théorie de la couche limite (fluide visqueux).

Profils d'ailes (2D)

Méthodes de calcul : transformation conforme

- La transformation conforme est une théorie potentielle :
  - elle repose sur le potentiel complexe $\Phi = \phi + \mathrm{i}\psi$ dans le plan complexe $\zeta = x + \mathrm{i}z$
  - la vitesse complexe est $w = V_x - \mathrm{i}V_z = \Phi'(\zeta)$
  - c'est une transformation d'un plan complexe dans un autre, qui conserve les angles presque partout. Les équipotentielles restant ainsi orthogonales aux lignes de courant, elle transforme un écoulement en un autre.
- Transformation de Joukowsky ($\sim$ 1910) $\longrightarrow f(\zeta) = \zeta + \zeta^{-1}$
  - on l'applique à un cylindre (centré en ζ_0) : le potentiel complexe de l'écoulement d'incidence α avec circulation Γ est donné par

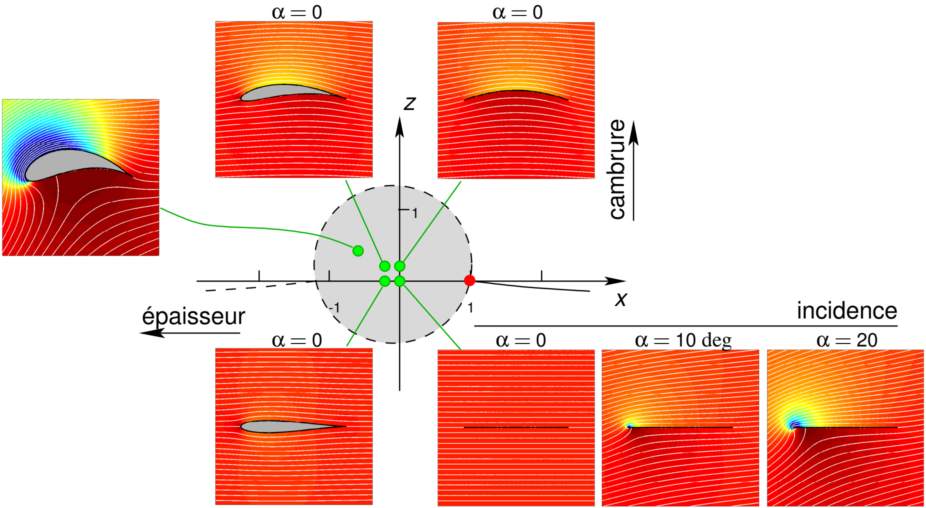
$$\Phi(\zeta) = V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}(\zeta - \zeta_0) + V_\infty R^2 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0)\,.$$



  - on obtient le potentiel $\Omega(Z) = \Phi(\zeta)$ et la vitesse $W(Z) = \Omega'(Z) = w(\zeta)/f'(\zeta)$.

Profils d'ailes (2D)

Méthodes de calcul : transformation de Joukowsky



Profils d'ailes (2D)

Méthodes de calcul : singularités

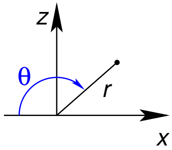
- Les méthodes des singularités sont aussi des théories potentielles :
  - l'incompressibilité impose $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0$
  - l'existence d'un potentiel ϕ (fluide non visqueux) permet d'écrire $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\phi$
  - ce qui implique $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi) = \Delta\phi = 0 \Rightarrow \phi$ vérifie l'équation de Laplace
- Ces méthodes reposent sur le principe de superposition des écoulements potentiels.
  - $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n$ où ϕ_i sont des potentiels d'écoulements élémentaires donc tels que $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \cdots = \Delta\phi_n = 0$.
  - la linéarité de l'équation de Laplace assure que $\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \cdots + \Delta\phi_n = 0$
  - le potentiel résultant ϕ doit satisfaire les conditions aux limites :
    - ★ condition d'imperméabilité : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ à la surface des corps solides
    - ★ condition à l'infini : $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\phi \longrightarrow \mathbf{V}_\infty$ quand $r \to \infty$.
- Les singularités utilisées sont
  - des puits/sources ou des densités linéiques de sources
  - des vortex ponctuels ou des densités linéiques de tourbillon (nappes tourbillonnaires).

TD 3

Potentiel et fonction de courant d'écoulements élémentaires – Singularités

Ecoulement	**Vitesse V**	**Potentiel ϕ**	**Fonction de courant ψ**
uniforme	$V_\infty(\cos\alpha \mathbf{e}_x + \sin\alpha \mathbf{e}_z)$	$V_\infty(x\cos\alpha + z\sin\alpha)$	$V_\infty(x\sin\alpha - z\cos\alpha)$
source/puits	$\dfrac{Q}{2\pi r}\mathbf{e}_r$	$\dfrac{Q\ln r}{2\pi}$	$-\dfrac{Q\theta}{2\pi}$
doublet	$-\dfrac{k}{2\pi r^2}(\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$	$\dfrac{k\cos\theta}{2\pi r}$	$\dfrac{k\sin\theta}{2\pi r}$
vortex ponctuel	$\dfrac{\Gamma}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$	$\dfrac{\Gamma\theta}{2\pi}$	$\dfrac{\Gamma\ln r}{2\pi}$

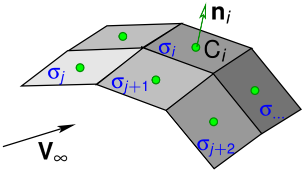
Coordonnées cartésiennes (x, z) et coordonnées polaires associées (r, θ).



Profils d'ailes (2D)

Méthodes de calcul : singularités

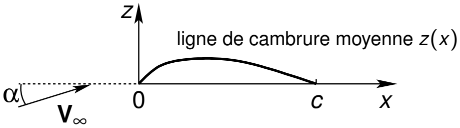
- Les profils minces peuvent se traiter de manière théorique en superposant :
  - l'écoulement uniforme incident,
  - une distribution de sources pour traiter l'épaisseur,
  - une distribution de vortex pour traiter incidence, cambrure et condition de Kutta.
- Dans le cas général, on utilise les méthodes numériques dites "méthodes des panneaux de vorticité" (*vortex panel methods*).
  - Écriture des équations :
    - ★ l'extrados et l'intrados sont discrétisés en segments en 2D ou en rectangles en 3D (*panels*)
    - ★ on place une distribution de singularités σ_j sur chaque panneau,
    - ★ on impose la condition $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ en des points de contrôle C_i (un sur chaque panneau),
    - ★ on écrit la condition de Kutta $\gamma(BF) = 0$,
    - ★ (en 3D, il faut aussi modéliser le sillage).
  - Résolution :
    - ★ On résout le système linéaire pour obtenir la distribution de singularités σ_j,
    - ★ on en déduit les autres quantités (circulation totale, portance).



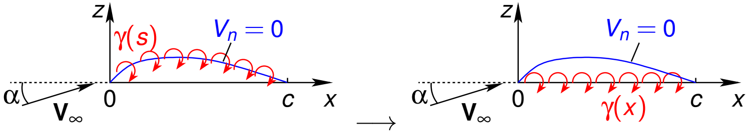
Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces

- Hypothèses :
  - profil de faible épaisseur ($e/c < 12\%$)
  - profil faiblement cambré ($|z'(x)| < 0.3$)
  - angle d'incidence faible ($|\alpha| < 15^\circ$)
- On assimile le profil à la ligne de cambrure moyenne



- On devrait placer les singularités sur la ligne, mais l'hypothèse de faible cambrure permet de les placer sur la corde :

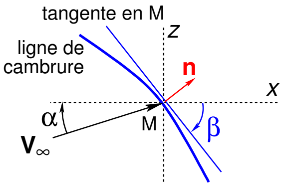


- On impose $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la ligne de cambrure.

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces

- Condition de glissement le long de la ligne de cambrure
  - On a $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{v}$ où $\mathbf{v}$ est la perturbation de vitesse induite par les singularités
    $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_n = 0$ s'écrit $\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$.
    Soit β l'angle local de la ligne de cambrure avec la corde : $\beta = -\,atan[z'(x)]$



L'angle entre $\mathbf{n}$ et $\mathbf{V}_\infty$ est alors $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$.
On a donc

$$V_\infty \sin(\alpha + \beta) + v_x \sin\beta + v_z \cos\beta = 0.$$

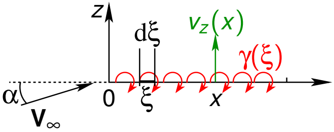
En faisant l'hypothèse de petites déviations :
$\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$, $atan[z'(x)] \approx z'(x)$ et $v_x, v_z \ll V_\infty$, on a, en tout point de la ligne de cambrure :

$$v_z = -V_\infty(\beta + \alpha) = V_\infty[z'(x) - \alpha]\,.$$

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces

- Calcul de la composante v_z induite par la distribution $\gamma(x)$ de singularités



L'élément situé en ξ, de longueur $\mathrm{d}\xi$, induit en x la vitesse élémentaire :

$$\mathrm{d}v_z = -\frac{\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi}{2\pi(x-\xi)} ,$$

soit pour l'ensemble de la distribution :

$$v_z = -\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi .$$

- Ceci conduit à l'équation fondamentale de la théorie des profils minces, pour la distribution $\gamma(\xi)$ inconnue :

$$V_\infty[\alpha - z'(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi .$$

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces : cas des profils minces symétriques

- Pour les profils minces symétriques, on a $z'(x) = 0$, et donc

$$V_\infty \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi}\, \mathrm{d}\xi .$$

Changement de variable $x = \frac{c}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow$ $BA \longleftrightarrow \theta = 0$ et $BF \longleftrightarrow \theta = \pi$.

On pose $\xi = \frac{c}{2}(1-\cos\theta')$, d'où $\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2}\sin\theta' \mathrm{d}\theta'$ et l'équation fondamentale devient :

$$V_\infty \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta')\sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}\, \mathrm{d}\theta' .$$

Elle admet pour solution vérifiant la condition de Kutta $\gamma(\pi) = 0$

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_\infty \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

ce qui est vérifiable en utilisant les intégrales de Glauert :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} \mathrm{d}\theta' = \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin\theta} \qquad (n \geq 0) .$$

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces : cas des profils minces symétriques

- Pour les profils minces symétriques, la théorie permet de calculer la circulation :

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2}\int_0^\pi \gamma(\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = \alpha c V_\infty \int_0^\pi (1+\cos\theta')\mathrm{d}\theta' = \pi\alpha c V_\infty\,.$$

  Or d'après le théorème de Kutta–Joukowsky, $L' = \rho V_\infty \Gamma$, d'où

$$L' = \pi\alpha\rho V_\infty^2 c \quad \text{et} \quad C_{L'} = 2\pi\alpha\,.$$

  La pente de la courbe $C_{L'}(\alpha)$ est donc

$$\frac{\mathrm{d}C_{L'}}{\mathrm{d}\alpha} = 2\pi\,.$$

- On peut également calculer le moment au BA et montrer que $C_{M',BA} = -\frac{1}{2}\pi\alpha$, ce qui implique que le moment au quart de corde (en $x = c/4$) est

$$C_{M',c/4} = C_{M',BA} + \frac{1}{4}C_{L'} = 0\,.$$

  Pour un profil mince symétrique, le centre de pression est au quart de corde, tout comme le centre aérodynamique (puisque $C_{M',c/4} = 0$ ne dépend pas de α).

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces : cas des profils minces cambrés

- Pour les profils minces cambrés, on a $z'(x) \neq 0$, et

$$V_\infty[\alpha - z'(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Si $f(\theta)$ désigne la fonction $z'(x)$ exprimée en fonction de θ :

$$V_\infty[\alpha - f(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta')\sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}\, \mathrm{d}\theta'\,.$$

Cette équation admet une solution de la forme

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left(A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

où apparaissent les coefficients de Glauert A_i.

Elle vérifie la condition de Kutta $\gamma(\pi) = 0$.

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces : cas des profils minces cambrés

- Si $f(\theta)$ désigne la fonction $z'(x)$ exprimée en fonction de θ, les coefficients de Glauert qui assurent que la ligne de cambrure moyenne est une ligne de courant sont donnés par

$$A_0 = \alpha - f_0/2\,, \quad A_n = f_n \quad (n \geq 1)\,,$$

où apparaissent les coefficients de la décomposition de $f(\theta)$ en série de cosinus :

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta')\cos(n\theta')\mathrm{d}\theta'\,, \quad \text{tels que} \quad f(\theta) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos(n\theta)\,.$$

Remarque : la démonstration utilise les intégrales de Glauert, ainsi que la relation

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta')\sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}\mathrm{d}\theta' = -\pi\cos(n\theta) \quad (n \geq 0)\,.$$

- On déduit la circulation :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_0^{c}\gamma(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2}\int_0^{\pi}\gamma(\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta' \\ &= cV_\infty\left[A_0\int_0^{\pi}(1+\cos\theta')\mathrm{d}\theta' + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^{\pi}\sin(n\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\right]\end{aligned}$$

$$\Gamma = \pi c V_\infty (A_0 + A_1/2)\,.$$

Profils d'ailes (2D)

Théorie des profils minces : cas des profils minces cambrés

- Coefficient de portance pour les profils minces :

$$C_{L'} = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{q_\infty c} \quad \Longrightarrow \quad C_{L'} = \pi(2A_0 + A_1)\,.$$

La pente du coefficient de portance est $\dfrac{\mathrm{d}C_{L'}}{\mathrm{d}\alpha} = 2\pi$ pour tous les profils minces.

- On peut mettre le coefficient de portance sous la forme :

$$C_{L'} = 2\pi(\alpha - \alpha_{L'=0})\,, \qquad \text{où } \alpha_{L'=0} = \frac{f_0 - f_1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\theta')(1-\cos\theta')\mathrm{d}\theta'$$

est l'angle de portance nulle.

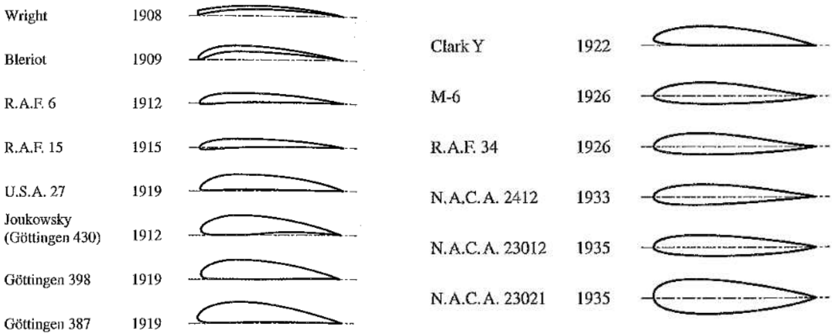
- Moment au BA : $C_{M',BA} = -\dfrac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \dfrac{1}{2}A_2\right) = -\dfrac{C_{L'}}{4} - \dfrac{\pi}{4}(A_1 - A_2)\,.$
- Moment au quart de corde : $C_{M',c/4} = C_{M',BA} + \dfrac{1}{4}C_{L'} = \dfrac{\pi}{4}(A_2 - A_1)\,.$

Pour un profil mince cambré, le centre de pression n'est pas au quart de corde.

Pour tous les profils minces, le centre aérodynamique est au quart de corde.

TD 4
Profils minces

Une petite histoire du profil pour l'aviation basse vitesse (Anderson).

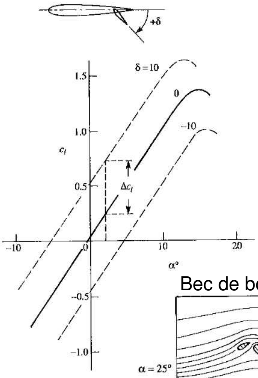


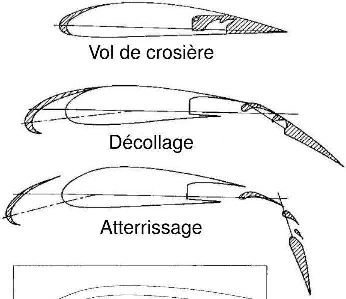
Profils d'ailes (2D)

Hypersustentation

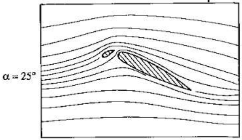
- Des profils spécifiques ont été conçus pour atteindre des $C_{L'}$ élevés, en retardant le décollement par limitation du gradient de pression adverse.
- En pratique, on utilise des dispositifs hypersustentateurs

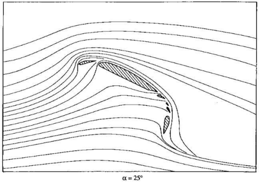
Volet de bord de fuite





Bec de bord d'attaque



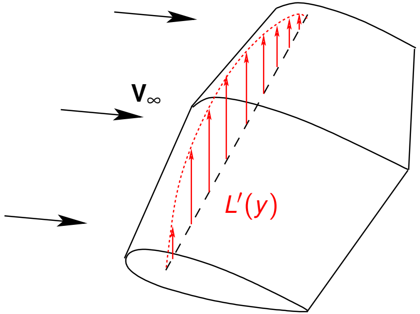


Plan du cours

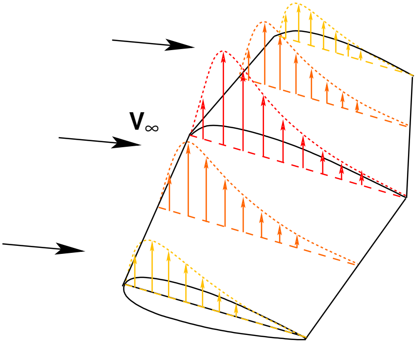
Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : tourbillons de bout d'aile

Origine des tourbillons de bout d'aile. *Animation : maquette catapultée (ONERA)*.



Distribution de portance $L'(y)$ suivant l'envergure.



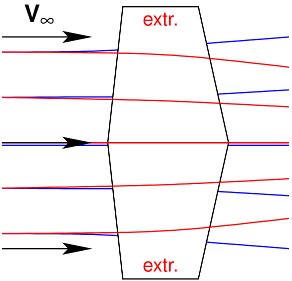
Distributions de pression $p_{\mathrm{intr}}(x, y_i) - p_{\mathrm{extr}}(x, y_i)$.

- Variations du profil suivant l'envergure : corde $c(y)$, angle de vrillage $\alpha_{\mathrm{v}}(y)$, nature de profil $\Rightarrow$
  - distribution de portance $L'(y)$ et de pression $p(x, y)$
  - gradients de pression et mouvements suivant l'envergure.

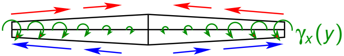
Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : tourbillons de bout d'aile

- Origine de la nappe de vorticité



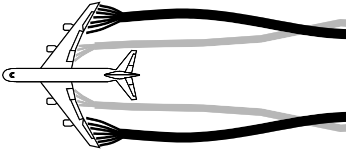
Trajectoires vues du dessus de l'aile.



Vue de l'aval vers l'amont.
Composante v_y de la vitesse au BF et nappe tourbillonnaire associée, de direction x et d'intensité $\gamma_x(y)$.

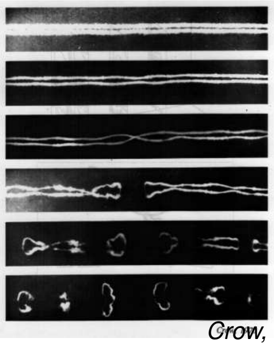
Visualisation par colorants (vue de côté).

- Cette nappe de vorticité, très intense près des bouts d'aile, est émise en continu dans l'écoulement au bord de fuite de la voilure.
- Elle s'enroule (sur la distance de quelques cordes) en deux tourbillons intenses appelés tourbillons de bout d'aile.



Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : tourbillons de bout d'aile



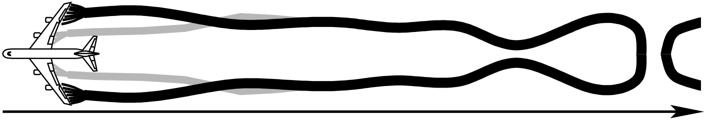
Crow, 1970

enroulement de la nappe
formation de vortex

fusion de
vortex

instabilité
de Crow

reconnexion
de vortex



quelques
cordes

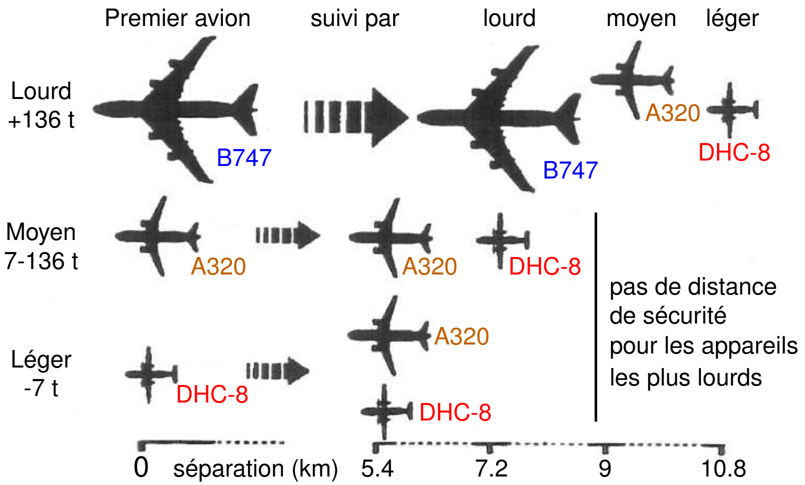
quelques
envergures

de quelques centaines
à quelques milliers d'envergures

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : tourbillons de bout d'aile

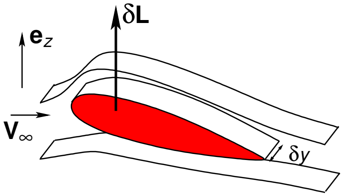
- Normes internationales sur les distances de sécurité à l'atterrissage



Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- Portance d'un élément d'aile

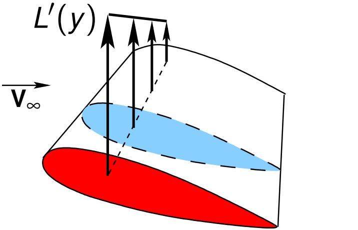


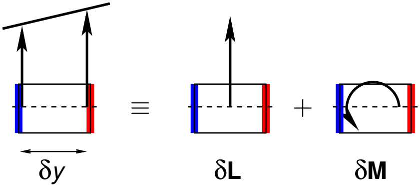
$$L' = \rho V_\infty \Gamma(y) \Rightarrow$$

$$\delta\mathbf{L} = \rho V_\infty \Gamma(y)\delta y\, \mathbf{e}_z$$

Le fluide subit de la part de l'élément de profil une force $-\delta\mathbf{L}$.

- Effet d'une dépendance suivant y





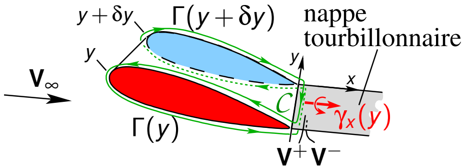
Le fluide subit également de la part du profil un couple $-\delta\mathbf{M}$

$\Rightarrow$création de vorticité suivant x.

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- Intensité de la nappe tourbillonnaire



$$\gamma_x(y) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta y} = -\Gamma'(y)$$

L'intensité tourbillonnaire $\gamma_x(y)$ est proportionnelle au gradient de la distribution de circulation ou de portance suivant l'envergure.

Le contour C est inclus dans une région potentielle connexe donc

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_C \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_C \mathrm{d}\phi = 0\,.$$

En détaillant la première intégrale :

$$-\Gamma(y) + \mathbf{V}^-(y)\cdot\mathbf{e}_y\,\delta y + \Gamma(y+\delta y) - \mathbf{V}^+(y)\cdot\mathbf{e}_y\,\delta y = 0\,,$$

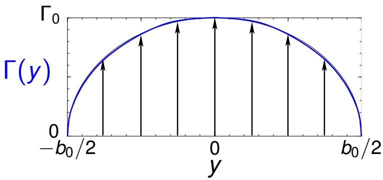
de telle sorte que

$$\gamma_x(y) = [\mathbf{V}^-(y) - \mathbf{V}^+(y)]\cdot\mathbf{e}_y = \frac{\Gamma(y) - \Gamma(y+\delta y)}{\delta y} = -\Gamma'(y).$$

- Cas de l'aile à chargement elliptique d'envergure b_0

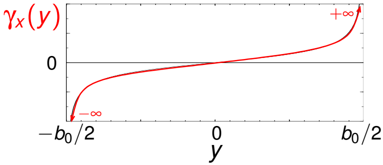
Distribution de circulation

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b_0/2}\right)^2}$$



Intensité tourbillonnaire

$$\gamma_x(y) = \frac{\Gamma_0}{(b_0/2)^2} \frac{y}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b_0/2}\right)^2}}$$

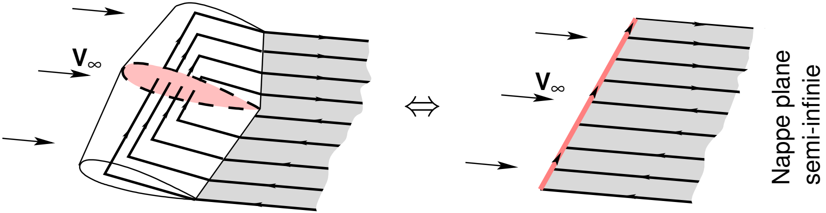


Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

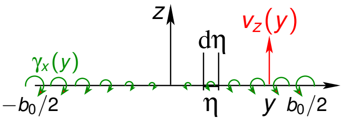
- Disposition 3D de la vorticité

Modèle de la ligne portante (Prandtl, 1923)



Vorticité attachée   Vorticité émise   Ligne portante

- Vitesse induite par la nappe semi-infinie au niveau de la ligne portante

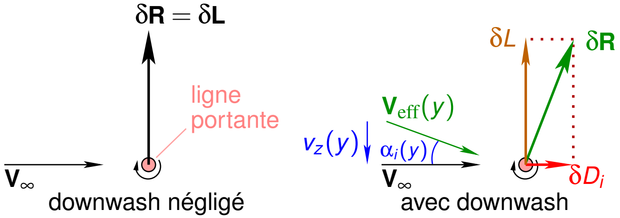


$$\begin{aligned} v_z(y) &= \frac{1}{2} \times \int_{-b_0/2}^{b_0/2} \frac{\gamma_x(\eta)}{2\pi(y-\eta)}\,\mathrm{d}\eta \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-b_0/2}^{b_0/2} \frac{\Gamma'(\eta)}{y-\eta}\,\mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- La nappe de vorticité émise au BF induit au niveau du profil une vitesse verticale $v_z(y)$ dite de downwash car le plus souvent négative.



- L'incidence du profil est diminuée d'un angle α_i (avec le plus souvent $\alpha_i > 0$), une composante de traînée δD_i est induite même en fluide parfait !

$$\alpha_i(y) = \operatorname{atan}\frac{-v_z(y)}{V_\infty} \approx \frac{-v_z(y)}{V_\infty}\,, \quad \delta D_i(y) \approx \alpha_i(y)\delta L(y) = \alpha_i(y)\rho V_\infty \Gamma(y)\delta y\,.$$

Vu que $V_\infty \sin\alpha_i(y) \approx V_\infty \alpha_i(y) \approx -v_z(y)$, la traînée induite totale s'écrit

$$D_i = -\rho \int_{-b_0/2}^{b_0/2} v_z(y)\Gamma(y)\mathrm{d}y\,.$$

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- Cas de l'aile à chargement elliptique
  - Vitesse de downwash

$$v_z(y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-b_0/2}^{b_0/2} \frac{\Gamma'(\eta)}{y-\eta}\,\mathrm{d}\eta = -\frac{\Gamma_0}{\pi b_0^2}\int_{-b_0/2}^{b_0/2} \frac{\eta\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{b_0/2}\right)^2}\,(y-\eta)}$$

Le changement de variable $y = -\frac{1}{2}b_0\cos\theta$, avec $\eta = -\frac{1}{2}b_0\cos\theta'$ mène à :

$$v_z(\theta) = -\frac{\Gamma_0}{\pi b_0^2}\int_0^{\pi} \frac{-\frac{b_0}{2}\cos\theta'\ \frac{b_0}{2}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'}{|\sin\theta'|\,\frac{b_0}{2}(\cos\theta-\cos\theta')} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b_0}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'}{\cos\theta'-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta'}_{\pi}$$

Pour l'aile elliptique, la vitesse de downwash est $v_z = -\dfrac{\Gamma_0}{2b_0}$.

Elle ne dépend pas de y.

  - Angle d'incidence induit

$$\alpha_i \approx -\frac{v_z}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2b_0 V_\infty}.$$

- Cas de l'aile à chargement elliptique
  - Traînée induite

    La portance est donnée par

$$L=\int_{-b_0/2}^{b_0/2}\delta L=\int_{-b_0/2}^{b_0/2}\rho V_\infty \Gamma(y)\,\mathrm{d}y=\rho V_\infty \Gamma_0\int_{-b_0/2}^{b_0/2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b_0/2}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\rho V_\infty \Gamma_0\frac{\pi b_0}{4}$$

    La traînée induite est donnée par

$$D_i=-\rho\int_{-b_0/2}^{b_0/2}v_z(y)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y=\frac{\rho\Gamma_0^2}{2b_0}\int_{-b_0/2}^{b_0/2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{b_0/2}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\rho\pi\Gamma_0^2}{8}=\frac{L^2}{q_\infty \pi b_0^2}$$

  - Coefficient de traînée induite

$$C_{D_i}\equiv\frac{D_i}{q_\infty S}=\left(\frac{L}{q_\infty S}\right)^2\frac{S}{\pi b_0^2}\,.$$

    où S est la surface alaire. On introduit le rapport de forme ou allongement de l'aile :

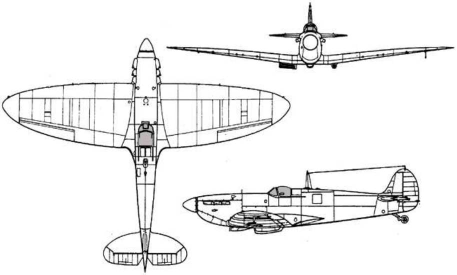
$$A_R=\frac{b_0^2}{S}\sim\frac{\text{envergure}}{\text{corde moyenne}}\,.$$

    Pour l'aile elliptique, le coefficient de traînée induite vaut $C_{D_i}=\dfrac{C_L^2}{\pi A_R}$.

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- À profil donné, pour une aile non vrillée, la distribution elliptique de portance est obtenue pour une distribution elliptique de corde $c(y)$.
- Supermarine Spitfire (Supermarine Aviation Works, UK, 1938)



Envergure $b_0 = 11.23$ m
Surface alaire $S = 22.48$ m^2
$\Rightarrow$Allongement $A_R = 5.61$

Vitesse maximale 575 km/h ($Ma = 0.49$)
Altitude plafond 11 km.

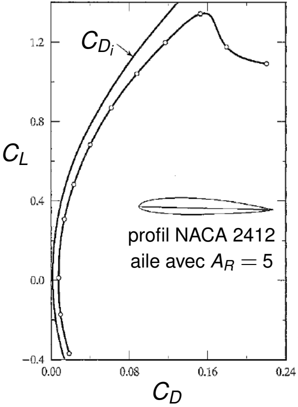
Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- Pour des répartitions quelconques de portance, on peut montrer que :

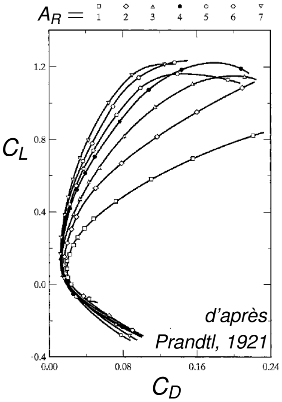
$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi e A_R}, \quad \text{où } e \leq 1 \text{ est le facteur d'efficacité de l'aile.}$$

- Ces lois issues du modèle de la ligne portante sont vérifiées expérimentalement.



d'après Bertin

- $C_D = C_{D0} + kC_L^2$.
- La traînée induite est faible en croisière, mais domine au décollage.
- Les ailes à grand allongement A_R ont une traînée induite réduite.
  - planeurs : $A_R \sim 10 - 20$
  - avions subsoniques : $A_R \sim 6 - 8$

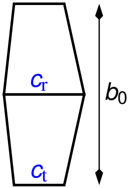


d'après Prandtl, 1921

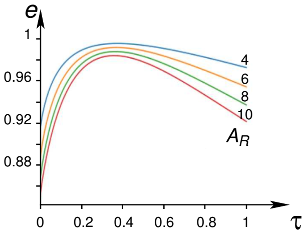
Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

- L'aile elliptique ($e = 1$) est celle qui minimise la traînée induite C_{D_i}.
- Pour des raisons de fabrication, on utilise plutôt des ailes à bord droit, pour lesquelles on a une variation linéaire de la corde $c(y)$. On définit :
  - la corde en tête c_t
  - la corde en pied c_r,
  - le coefficient d'effilement $\tau = c_t / c_r \leq 1$.



$$A_R = \frac{b_0^2}{S} = \frac{2b_0}{c_\mathrm{r} + c_\mathrm{t}}$$



- Efficacité e de l'aile en fonction du coefficient d'effilement τ et de l'allongement A_R de l'aile.

Du profil d'aile à l'avion

Ailes d'envergure finie : traînée induite

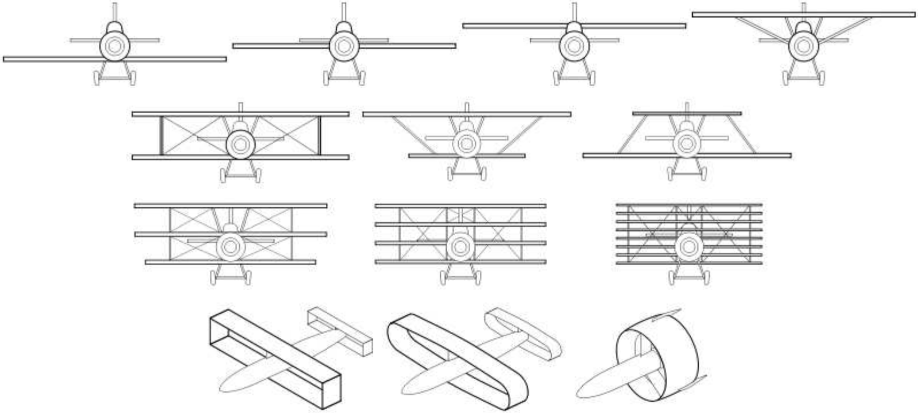
- Quand la traînée est une grandeur critique, comme pour les avions volant à très haute altitude près de leur plafond, ou pour les planeurs, on adopte des ailes à grand A_R.
- Solar impulse (EPFL, 2010)

Envergure $b_0 = 63$ m
Surface alaire $S = 180$ m^2
$\Rightarrow$Allongement $A_R = 22$

Vitesse de croisière 70 km/h
Altitude plafond 8.5 km.

Du profil d'aile à l'avion

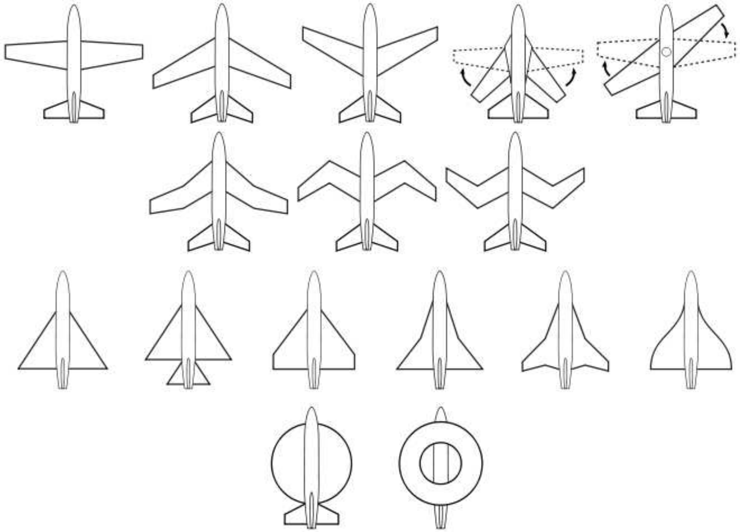
Différents types de voilure



d'après Wikipedia, article Configuration d'aile, lecture recommandée

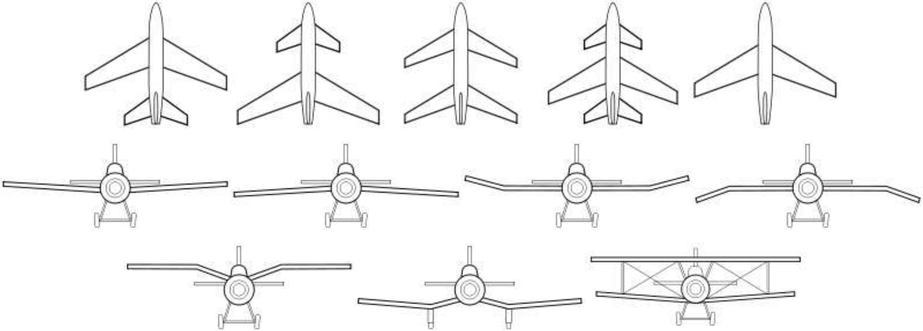
Du profil d'aile à l'avion

Différents types de voilure



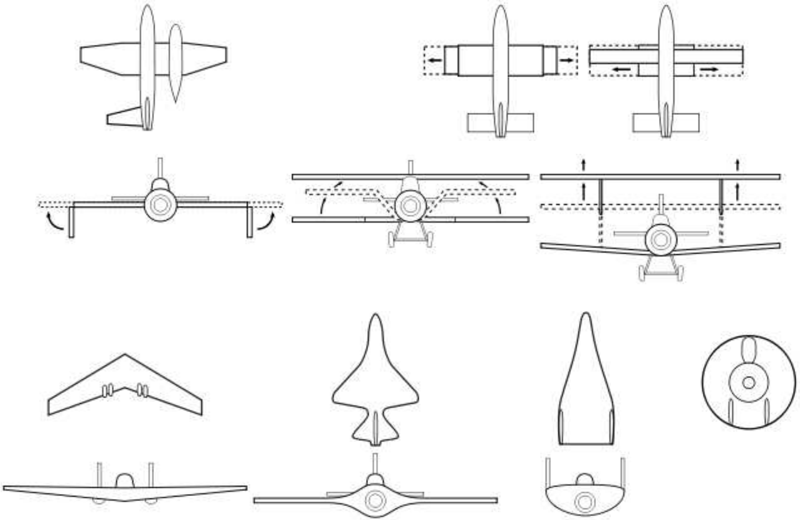
Du profil d'aile à l'avion

Différents types de voilure



Du profil d'aile à l'avion

Différents types de voilure



Plan du cours