Université Pierre et Marie Curie **Année 2017-2018**

Master Sciences et Technologie - Mention Sciences pour l'Ingénieur

Transformées linéaires
CC3 - Mardi 14 Novembre 2017 - durée : 1h30
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Modéle 2D d'une voiture

On s'intéresse dans ce problème à la dynamique d'une voiture modélisée comme un système à 2 degrés de liberté (cf figure 1). On assimile la voiture à une poutre homogène de longueur $2L$ et de masse M dont les extrémités A et B sont reliées aux roues (supposées parfaitement rigides) par deux ressorts identiques (raideur k). On suppose que la voiture se déplace à vitesse constante V (vers les x croissants). On s'intéresse à l'évolution des hauteurs des points A et B au cours du temps notées respectivement $z_A(t)$ et $z_B(t)$ lorsque la voiture roule sur une route dont le profil est irrégulier.

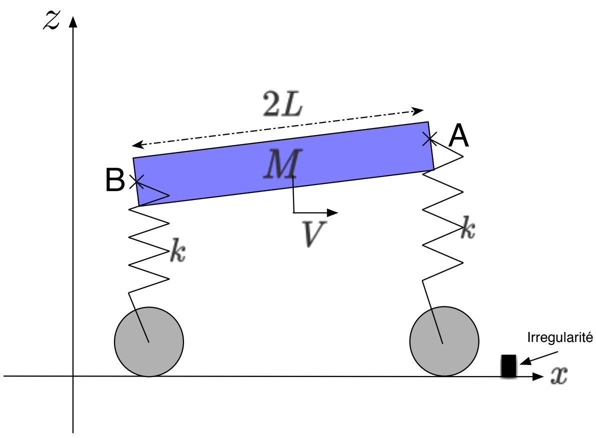

FIGURE 1 – Schématisation du système

La modélisation de ce système (non demandée ici) permet d'écrire les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{M}{6}\left(2\ddot{z}_A + \ddot{z}_B\right) + kz_A = e_1(t) \\ \frac{M}{6}\left(\ddot{z}_A + 2\ddot{z}_B\right) + kz_B = e_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

Les fonctions $e_1(t)$ et $e_2(t)$ représentent respectivement les excitations sur les extrémités A et B dues aux irrégularités du profil de la route.

Analyse à l'aide de la transformée de Fourier

1. Justifier que les équations du système 1 sont linéaires.

> **Solution:** cf cours

2. Calculer la transformée de Fourier de chaque équation du système. On notera $\hat{z}_A(\omega)$, $\hat{z}_B(\omega)$, $\hat{e}_1(\omega)$ et $\hat{e}_2(\omega)$ les transformées de Fourier de $z_A(t)$, $z_B(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

> **Solution:**
>
> $$\begin{cases} \frac{-\omega^2 M}{6}(2\hat{z}_A + \hat{z}_B) + k\hat{z}_A = \hat{e}_1 \\ \frac{-\omega^2 M}{6}(\hat{z}_A + 2\hat{z}_B) + k\hat{z}_B = \hat{e}_2 \end{cases}$$

3. Montrer que les équations trouvées à la question précédente peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel de la forme $\underline{\underline{M}}\underline{Z} = \underline{E}$ avec les vecteurs $\underline{Z} = (\hat{z}_A, \hat{z}_B)$ et $\underline{E} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2)$. Donner la matrice $\underline{\underline{M}}$.

> **Solution:**
>
> $$\begin{cases} (\frac{-\omega^2 M}{3} + k)\hat{z}_A + \frac{-\omega^2 M}{6}\hat{z}_B = \hat{e}_1 \\ \frac{-\omega^2 M}{6}\hat{z}_A + (\frac{-\omega^2 M}{3} + k)\hat{z}_B = \hat{e}_2 \end{cases}$$
>
> Donc $\underline{\underline{M}}\underline{Z} = \underline{E}$, avec :
>
> $$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} (\frac{-\omega^2 M}{3} + k) & \frac{-\omega^2 M}{6} \\ \frac{-\omega^2 M}{6} & (\frac{-\omega^2 M}{3} + k) \end{pmatrix}$$

4. On rappelle $\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{detM}(com\underline{\underline{M}})^t$ où $detM$ désigne le déterminant de la matrice $\underline{\underline{M}}$ et $(com\underline{\underline{M}})^t$ désigne la transposée de la co-matrice. Montrer qu'il peut exister des fréquences pour lesquelles l'amplitude de $\hat{z}_A$ et $\hat{z}_B$ tend vers l'infini.

> **Solution:** On peut obtenir $\hat{z}_A$ et $\hat{z}_B$ en résolvant le système matriciel précédent : $\underline{Z} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{E}$ ou encore :
>
> $$\underline{Z} = \frac{1}{detM}(com\underline{\underline{M}})^t\underline{E}$$
>
> Une condition nécessaire pour que les amplitudes restent bornées est que $detM \neq 0$. Dans le cas contraire l'amplitude de $\hat{z}_A$ et $\hat{z}_B$ tend vers l'infini.
>
> $$detM = (\frac{-\omega^2 M}{3} + k)^2 - \frac{\omega^4 M^2}{6^2} = 0$$
>
> Ce polynôme a 4 racines complexes (ou réelles).

5. En notant $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$, calculer ces fréquences explicitement et montrer que : $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$ et $\omega_2 = \sqrt{6}\omega_0$

> **Solution:** Posons $\Omega = \omega^2$:
>
> $$\begin{aligned} (\frac{-\Omega M}{3} + k)^2 - \frac{\Omega^2 M^2}{6^2} &= 0 \quad (2)\\ \frac{M^2}{9}(\Omega - \frac{3k}{M})^2 - \frac{\Omega^2 M^2}{6^2} &= 0 \quad (3)\\ (\Omega - 3\omega_0^2)^2 - \frac{\Omega^2}{4} &= 0 \quad (4)\\ \Omega^2 + 9\omega_0^4 - 6\Omega\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} &= 0 \quad (5)\\ \frac{3\Omega^2}{4} + 9\omega_0^4 - 6\Omega\omega_0^2 &= 0 \quad (6)\\ \Omega^2 - 8\omega_0^2\Omega + 12\omega_0^4 &= 0 \quad (7)\\ & \quad (8) \end{aligned}$$
>
> Le discriminant de ce polynôme est positif : $\Delta = 64\omega_0^4 - 48\omega_0^4 = 16\omega_0^4$. Les racines sont :
>
> $$\Omega_{1,2} = \frac{8\omega_0^2 \pm 4\omega_0^2}{2}$$
>
> donc : $\Omega_1 = 2\omega_0^2$ et $\Omega_2 = 6\omega_0^2$ Par conséquent les pulsations (on ne garde que les valeurs positives) sont : $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$ et $\omega_2 = \sqrt{6}\omega_0$

Analyse à l'aide de la transformée de Laplace

On suppose qu'à l'instant initial la voiture est dans sa configuration à l'équilibre : $z_A(t=0) = \dot{z}_A(t=0) = z_B(t=0) = \dot{z}_B(t=0) = 0$. On cherche à modéliser l'influence d'un défaut ponctuel de la route sur la dynamique de la voiture : à l'instant $t = 0$ la roue A touche le défaut. On modélise le contact avec le défaut par l'intermédiaire de la fonction $e_1(t)$: $e_1(t) = \gamma\delta(t)$ où $\delta(t)$ désigne la fonction généralisée de Dirac.

1. La voiture se déplace à vitesse constante V. Donner l'expression de t_1, l'instant auquel la roue B touche le défaut. Justifier alors que : $e_2(t) = \gamma\delta(t - t1)$

> **Solution:** La voiture a une longueur $2L$ donc $t_1 = 2L/V$ et $e_2(t) = \gamma\delta(t - 2L/V)$

2. Calculer les transformées de Laplace de chaque équation du système 1.On notera $Z_A(p)$, $Z_B(p)$, $E_1(p)$ et $E_2(p)$ les transformées de Laplace de $z_A(t)$, $z_B(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

> **Solution:**
>
> $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p^2 M}{6}\left(2Z_A(p) + Z_B(p)\right) + kZ_A(p) = E_1(p) \\ \frac{p^2 M}{6}\left(Z_A(p) + 2Z_B(p)\right) + kZ_B(p) = E_2(p) \end{array} \right.$$

3. On introduit deux nouvelles grandeurs :

$$\begin{cases} W_1 = (Z_A + Z_B), \\ W_2 = (Z_A - Z_B) \end{cases}$$

Montrer que

$$\begin{cases} W_1(p) = \frac{E_1+E_2}{\frac{M}{2}p^2+k}, \\ \\ W_2(p) = \frac{E_1-E_2}{\frac{M}{6}p^2+k} \end{cases}$$

> **Solution:** En ajoutant et en soustrayant les équations précédentes on trouve :
>
> $$\begin{cases} W_1(p) = \frac{E_1+E_2}{\frac{M}{2}p^2+k}, \\ W_2(p) = \frac{E_1-E_2}{\frac{M}{6}p^2+k} \end{cases}$$

4. Calculer les transformées de Laplace $E_1(p)$ et $E_2(p)$ de $e_1(t)$ et de $e_2(t)$.

> **Solution:**
>
> $$E_1(p) = \int_0^{+\infty} \gamma\delta(t)e^{-pt}dt = \gamma$$
>
> $$E_2(p) = \int_0^{+\infty} \gamma\delta(t-t_1)e^{-pt}dt = \gamma e^{-pt_1}$$

5. En déduire les expressions de $W_1(p)$ et $W_2(p)$:

$$\begin{cases} W_1(p) = \frac{\gamma(1+e^{-pt_1})}{m_1(p^2+\omega_1^2)}, \\ W_2(p) = \frac{\gamma(1-e^{-pt_1})}{m_2(p^2+\omega_2^2)}. \end{cases}$$

> **Solution:** On en déduit les expressions demandées avec $m_1 = M/2$ et $m_2 = M/6$.

avec les pulsations ω_1 et ω_2 définies à la question 3 de la partie précédente et m_1 et m_2 des constantes à déterminer.

6. On donne $\mathcal{L}(e^{-at}h(t)) = \frac{1}{p+a}$, calculer $\mathcal{L}\left(h(t)\sin(\omega_0 t)\right)$.

> **Solution:**
>
> $$\mathcal{L}(h(t)\sin(\omega_0 t)) = \frac{1}{p^2+\omega_0^2}$$

7. Calculer $w_1(t)$ et $w_2(t)$ les transformées de Laplace inverses de $W_1(p)$ et $W_2(p)$.

Solution:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1(p) = \frac{\gamma}{m_1}\left(\frac{1}{(p^2+\omega_1^2)} + \frac{e^{-pt_1}}{(p^2+\omega_1^2)}\right), \\ W_2(p) = \frac{\gamma}{m_2}\left(\frac{1}{(p^2+\omega_2^2)} + \frac{e^{-pt_1}}{(p^2+\omega_2^2)}\right) \end{array} \right.$$

On en déduit les expressions de $w_1(t)$ et $w_2(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = \frac{\gamma}{m_1}\left(h(t)\sin(\omega_1 t) + h(t-t_1)\sin(\omega_1(t-t_1))\right), \\ w_2(t) = \frac{\gamma}{m_2}\left(h(t)\sin(\omega_2 t) - h(t-t_1)\sin(\omega_2(t-t_1)\right) \end{array} \right.$$

8. En déduire les expressions de $z_A(t)$ et $z_B(t)$

Solution: On sait que

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = 1/2(Z_A + Z_B), \\ W_2 = 1/2(Z_A - Z_B) \end{array} \right.$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = 1/2(z_A(t) + z_B(t)), \\ w_2(t) = 1/2(z_A(t) - z_B(t)) \end{array} \right.$$

par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A(t) = w_1(t) + w_2(t) \\ z_B(t) = w_1(t) - w_2(t) \end{array} \right.$$