



PROJET DE MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

---

# Etude d'un pendule simple

-

## Période et Oscillation

---

*Auteurs :*  
Valentin DUVIVIER  
Matej MAYET

*Encadré par :*  
Han ZHAO  
Catherine WEISMAN

18 décembre 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes utilisées</b>	<b>2</b>
2.1	Dérivation . . . . .	3
2.1.1	Méthode de différence centrée . . . . .	3
2.1.2	Méthode de différence régressive . . . . .	4
2.2	Intégration . . . . .	5
2.2.1	Méthode des trapèzes composites . . . . .	6
2.3	Approximation polynomiale . . . . .	7
2.3.1	Méthode des moindres carrées . . . . .	7
2.3.2	LU et Cholesky . . . . .	7
2.3.3	Méthode du développement de Taylor . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Conclusion sur le Projet</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

Certains problèmes de la mécanique classique n'admettent, encore aujourd'hui, aucune solution analytique. Si on veut tout de même les étudier, on peut alors se tourner vers l'expérimentation ou bien le calcul numérique. C'est ce dernier point que nous avons privilégié pour l'étude d'un de ces problèmes : le pendule simple.

Le cas étudié est celui d'un pendule en mouvement et qui n'est soumis qu'à la gravité. L'équation du pendule en elle-même est connue et solvable (notamment pour des valeurs discrètes), mais le cas du pendule, comme la majorité des systèmes mécaniques, ne se limite pas à obtenir l'équation qui régit le mouvement. Le principe de notre projet va être d'étudier numériquement des caractéristique propre à ce pendule comme la variation temporelle de son énergie mécanique ainsi que ses oscillations au cours du temps. Pour ce qui est de la variation d'énergie mécanique, nous allons voir que l'étude se rapporte en fait à celle des variations temporelles angulaire de notre pendule.

Notre étude aura ainsi 2 objectifs :

- approcher la solution de l'équation différentielle associée à la conservation de l'énergie mécanique à travers la variation angulaire du pendule ;
- étudier sa période et en étudier le comportement en fonction de l'angle initial notamment.

Pour se faire, nous mettrons en application des méthodes telles que celle des moindres carrés pour approcher nos fonctions par des polynôme "équivalents" ou encore la méthode de différence pour ce qui est de la dérivation.

Les résultats n'auront pas pour objectifs d'être tenu comme solution aux problèmes à résoudre mais comme une idée numérique de la solution que nous analyserons ensuite pour l'exploiter à travers un raisonnement plus analytique et physique. L'ensemble des outils mis en place nous permettront donc d'avoir des données numériques sur le pendule et d'y associer un raisonnement physique.

On est ainsi en mesure de définir les limites d'étude du pendule en fonction des différentes méthodes, et à l'aide des affichage graphique et numérique qui apporte sur la compréhension du problème et la visualisation des résultats.

## 2 Méthodes utilisées

Dans cette rubrique, nous allons mettre en avant les méthodes utilisées durant ce projet, et qui nous ont permis d'approcher numériquement l'étude d'un pendule. Ces méthodes ont été défini une première fois avant d'être généralisées par des fonctions et implémentées à différents endroits du code, lorsque cela s'avérait nécessaire.

Nous verrons ainsi la structure générale de chaque méthode, et donc son fonctionnement, puis une discussion sur la pertinence de ces méthodes dans notre cas et enfin une étude de nos résultats. Nous verrons notamment les précisions de chaque méthodes ainsi que les moyens mis en place pour s'assurer que chaque méthode est

correctement exécutée (qu'elle ne va pas planter).

Premièrement, nous nous attaquons aux méthodes de dérivations :

## 2.1 Dérivation

*PRÉAMBULE* Vous pourrez retrouver cette méthode à 2 endroits dans le code : une première fois dans la 1.2 pour l'étude de la dérivée du sinus et à la Q 2.3 pour l'étude de la variation angulaire en fonction du temps.

```
Derivee_1ere[k] = (SIN[k+1] - SIN[k])/h;

Derivee_2nde[k] = (SIN[k-1] - 2*SIN[k] + SIN[k+1])/(pow(h, 2));
```

FIGURE 1 – exemple dans le cas de dérivée de la fonction  $\text{SIN}(t) = \sin(10 \cdot t) \rightarrow$  Q1.2

Dans notre cas, nous avons fait appel aux différences finies pour l'approximation de nos dérivées. Nous avons plus particulièrement étudiés 2 d'entre elles : la différence centrée et la différence régressive.

Tandis que la première a été utilisée dans le but d'approximer nos dérivées seconde, la méthode des différences régressive a été utilisée pour l'approximation des dérivées du premier ordre.

### 2.1.1 Méthode de différence centrée

Dans notre code, nous en avons utilisé une variante qui découle des développements de Taylor et dont l'équation est la suivante :

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \implies f''_j = \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

FIGURE 2 – formule des différences centrées d'ordre 2 dans le cas Taylor

avec  $f(x)$  la fonction dont on approche la dérivée 2nde.

Le choix de cette méthode dans nos calculs a permis de réduire au mieux l'erreur. Ainsi, lorsque l'on applique cette méthode, on estime que l'erreur ne dépassera pas  $h^2$ , avec  $h$  le pas tel que  $h \ll 1$ . On prend en fait  $h = \frac{\text{Temps}}{\text{Nombredepoint}}$ , soit  $h = \frac{2 \times \pi i}{100} \ll 1$ .

Le but général de nos calculs numériques va être de réduire le plus possible les incertitudes de nos calculs. Par exemple, dans le cas de la Q 2.3, on remarque que l'utilisation de la méthode des différences centrées est suivie par des calculs réutilisant le résultat de cette question.

Ainsi, étant donné que la méthode a des répercussions sur plusieurs questions, il est nécessaire de diminuer au maximum son degré d'incertitude. Ci dessous, le graphique représentant les positions de  $\theta$  en fonction du temps (mesure demandée en Q 2.3.2)

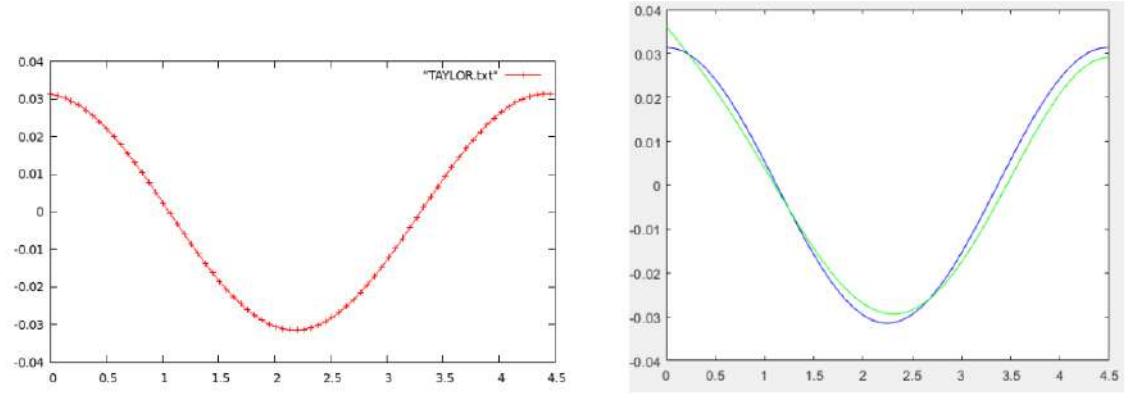


FIGURE 3 – Méthode de Taylor pour position du pendule rouge) comparé à la Méthode des moindres carrés (vert) avec la Fonction linéarisé  $f(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 * t)$  (bleu)

Si on fait le lien avec l'analyse physique du problème, les comparaisons qui sont attendues entre les différentes méthodes seront faussés dans le cas d'un mauvais calcul numérique et nos observations risquent d'en être compromises. Ici, on trouve un pendule qui diminue bien dès sa première valeur, avant de prendre l'opposée de la position initiale à son minimum et de repartir au point de la position après un tour complet. Les observations visuelles données par le schéma ci-dessus indiquent par ailleurs une erreur assez faible.

### 2.1.2 Méthode de différence régressive

Cette méthode utilise le même principe que celle de différence centré, dans le sens où l'on regarde ici aussi le comportement de notre fonction à d'autres itérations :

$$f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

FIGURE 4 – Méthode des différences régressives

Ici néanmoins, on utilise les développement de Taylor sur les itération à  $x$  et  $x - h$ . Ce changement dans la méthode se répercute sur la précision de la formule, qui est ici d'ordre 1.

On pourrait se dire qu'augmenter la pas  $h$  augmenterait à coup sûr la précision de nos résultats, mais cela s'accompagne aussi et surtout d'une augmentation des calculs. Puisque nous travaillons sur des méthodes itératives, diminuer le pas revient à augmenter le nombre d'itération pour aboutir au résultat souhaité. Le but sera donc de fixer un pas acceptable pour lequel on obtient une petit erreur mais aussi pour lequel les calculs ne sont pas trop long.

Pour passer de la théorie au code, des simplifications accompagnent cette méthode en place afin de nous permettre de réduire le nombre de calcul et plus globalement le stockage nécessaire à l'exécution de ces méthodes. Une de ces simplifications est en fait de considérer des points de la fonction équidistant. Ainsi, que ce soit dans

cette méthode, celle de différence centrée ou plus globalement les méthodes liées à la dérivation et à l'intégration, on cherche à étudier nos fonctions pour des points équidistants.

Une autre méthode possible aurait été d'optimiser les points d'étude comme cela est possible à travers les méthodes d'interpolations. Dans notre cas, car nous travaillons sur des fonctions périodiques, nous avons privilégié des méthodes permettant une représentation graphique plus claire, faisant apparaître cette symétrie.

Nous avons finalement affiché les dérivées 1<sup>re</sup> et 2<sup>de</sup> ainsi approchées, accompagnées des courbes réelles :

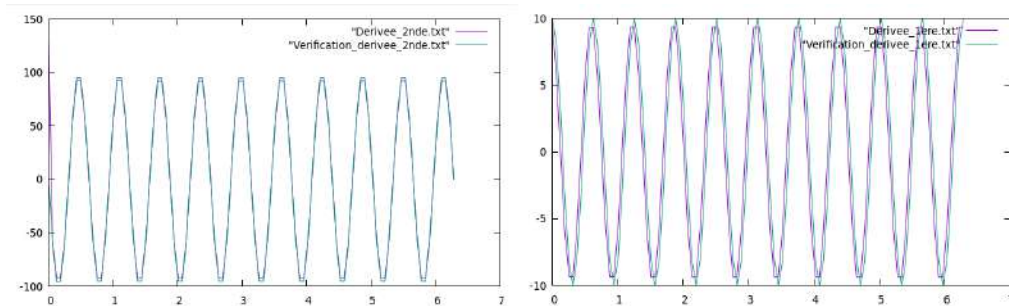


FIGURE 5 – Graphique des dérivées 1<sup>re</sup> et 2<sup>de</sup> de la fonction  $\theta(t) = \sin(10t)$  comparé à leur allure réelle

On a une nouvelle fois représenté les erreurs sous une allure graphique, donnant une représentation plus évidente des écarts. Si on aborde le problème sous un point de vue numérique, les erreurs sont les suivantes :

	Erreur
Dérivée première	2.006195
Dérivée seconde	3.329048

Par la suite, nous verrons des représentation plus numérique et calculatoires.

## 2.2 Intégration

*Préambule* Vous pourrez retrouver cette méthode à 2 endroits dans le code : une première fois dans la Q1.3 pour l'étude de l'intégration de la fonction  $SIN(t) = \sin(10t)$ , et à la Q2.2 pour l'étude de la période du pendule et pour l'optimisation du pas d'intégration.

Les méthodes d'intégration consiste en l'approximation de l'intégrale par une somme équivalente. Evidemment, le passage de l'intégrale à la somme fait perdre des données, ce qui se retrouve par l'erreur dans le cas numérique.

Ce passage se fait à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \, dx &\approx \int_a^b L(x) \, dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \, dx \\
&= \sum_{i=0}^n \int_a^b f(x_i) l_i(x) \, dx \\
&= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) \, dx.
\end{aligned}$$

FIGURE 6 – Méthode de Quadrature - Newton Cotes

Il existe dans ces méthodes, une qui convient à la description précédente que l'on a fait de nos fonctions : les méthodes composites. Cette méthode consiste en une découpe de l'intégrale en de multiples intégrales et d'ensuite calculer ces intégrales sous la forme de somme par application de la formule ci-dessus.

En effet, nous avons vu que dans le cas de la dérivation numérique, le fait d'étudier nos fonctions pour des valeurs équidistantes, nous permet de gagner en précision. Les approximations par des méthodes composites assurent elles aussi que l'étude se fasse sur des variables dont le pas d'intégration est constant.

### 2.2.1 Méthode des trapèzes composites

Contrairement à la méthode des trapèzes originelle, nous allons ici optimiser l'intégration de le but de perdre le moins d'information possible. Dans ce type de cas, on prend  $h = \frac{(b-a)}{N}$  avec  $[a, b]$  les bornes d'intégrations de notre fonction et  $N$  le nombre de points, et donc de sous intervalle, que nous allons considérer.

Au final, au niveau du code le rendu est le suivant :

```
periode.f_int += ((periode.h_2)/2)*(periode.f[k] + periode.f[k+1]);
```

FIGURE 7 – formule trapezes composites

Dans le cas de notre code, c'est à partir de ce moment que nous avons décidé d'inclure des structures. En effet, chaque partie se focalise sur un point précis du problème mais il en revient que l'étude pour sur les même éléments : période numérique, période théorique, période dont le pas a été amélioré, etc. Nous avons donc inclut des structures pour chaque partie afin de s'y retrouver efficacement dans notre code ; ici la structure est liée à la Q 2.2.a, soit au "Calcul de la période théorique", d'où le terme période pour la structure.

L'erreur liée à cette méthode est moins importante qu'on le pensait avant le codage. La méthode des trapèzes semble être la source de nombreuses approximation et donc de grandes erreurs mais en la couplant aux méthodes composites, on remarque que l'approximation donne des résultats plus qu'efficace étant donné que l'on trouve une erreur de  $\pm 0.255069$ .

Cette bonne précision est essentielle, car comme dans le cas des dérivations, les résultats sont réutilisés en différents points du code.

## 2.3 Approximation polynomiale

*PRÉAMBULE* : Ces méthodes se retrouvent en Q 1.4 pour l'approximation de  $SIN(t)$  ainsi qu'en partie 2 dans la Q 2.3.2 pour l'étude de l'évolution de la position du pendule.

Les approximations polynomiales ont pour principe d'approcher une fonction par une fonctions polynomiale au comportement équivalent. Ici la précision ne dépendra plus directement du pas mais plutôt de l'ordre jusqu'auquel on souhaite faire notre développement. D'après le sujet, et pour éviter d'aller au delà des capacités des méthodes utilisées, on a défini que nous devrions fixé notre ordre à  $m = 6$ .

### 2.3.1 Méthode des moindres carrées

La méthode des moindres carrés est caractérisée par la formule suivante :

$$S = \sum [G_m(x_j) - f(x_j)]^2 \text{ et } G_m(x) = a_i x^i \quad (1)$$

avec  $S$  l'erreur de la méthode et  $G_m(x_j)$  le polynôme approchant la fonction  $f(x_j)$ .

Ce qui différencie cette méthode des autres est que l'on cherche ici à minimiser l'erreur sur l'approximation. On fait donc la dérivée de la fonction précédente suivant la variable  $a$  afin de déterminer ce minimum.

En sommes, nous allons résoudre ce système dans le but de déterminer les valeurs des facteurs  $a_0, \dots, a_6$ .

On pourrait avoir tendance, dans le but d'approcher au mieux la fonction réelle, à augmenter l'ordre jusqu'auquel on détermine le polynôme. Toutefois, comme nous l'avons dit, précédemment, les méthodes sont limitées. Pour ce qui est de la méthode des moindres carrés, l'ordre maximal dépendra de la méthode de résolution choisie.

En effet, cette méthode d'approximation polynomiale va être directement dépendante des méthodes de résolution de systèmes tels que LU ou encore Cholesky.

Afin de déterminer la meilleur méthode de résolution entre les 2 que nous venons de citer, nous allons vous présenter les résultats pour les deux.

### 2.3.2 LU et Cholesky

D'un côté nous avons utilisé la méthode LU, couplé au fait que l'on ne crée pas vraiment les matrices L et U. En fait, on ne les utilise que temporairement puisqu'on va par la suite écraser les valeurs de la matrice A afin de les remplacés par celles de L et U. Dans ce sens, il nous reste simplement à déterminer laquelle des matrices L et U est à diagonale unité afin de compléter le schéma de résolution.

De l'autre côté, nous avons la méthode de Cholesky qui, d'après le cours, est plus performante, dans le sens où elle ne met en place qu'une matrice, réduisant le coup de stockage. Cependant, nous n'avions pas vu si la méthode LU où l'on écrase les valeurs pouvait rivaliser avec celle de Cholesky.



Les courbes suivantes mettent en comparaison les 2 méthodes et une idée visuelle de la précision sur l'approximation pour ce qui est de la Q 1.4 :

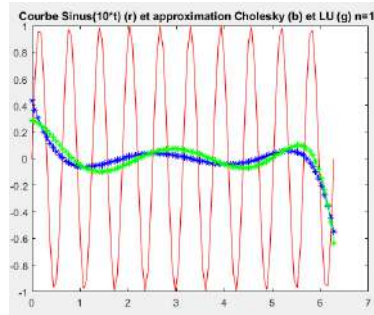


FIGURE 8 – Courbes Cholesky (bleu) et Lu (vert) comparé à la courbe théorique (rouge)

Nous avons décidé de quantifier la précision de chaque erreur en les comparant indépendamment à la fonction approcher, et en regardant l'erreur quadratique. On note ainsi :

	Erreur relative Q1.4
LU	$\pm 4.77388$
Cholesky	$\pm 4.73799$

Les deux méthodes ont l'air très similaires, aussi bien graphiquement qu'au niveau de la précision. Toutefois, à la vue de l'erreur et des graphes obtenus, on pourrait remettre en cause ces méthodes. On va donc étudier les courbes et les erreurs pour un  $n$  plus petit : Pour  $n = 10$  et  $n = 1$  :

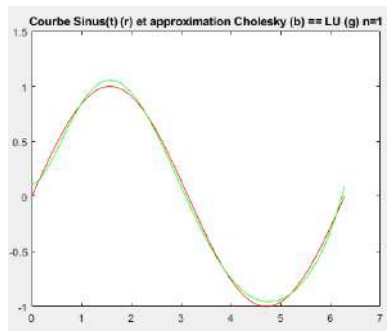


FIGURE 9 – Superposition  $\sin(t)$  et  $Gm(x)$  LU et Cholesky à  $n = 1$

	Erreur relative Q1.4
LU	$\pm 0.58682$
Cholesky	$\pm 0.29877$

On remarque 2 points qui font que la méthode de Cholesky reste plus précise et est celle qui entraîne moins d'erreur :

- Elle a l'erreur la moins élevée pour  $n = 1$  et  $n = 10$  ;
- Elle présente la symétrie attendue pour une fonctions périodique telle que celle que nous étudions

Au final, dans les deux cas l'erreur reste similaires, étant quasiment confondu pour  $n = 10$  rendant la méthode LU compétitive d'un point de vu précision.

On remarque ici le fait que nos méthodes sont limitées étant donné les fortes erreurs lorsqu'on les compare.

### 2.3.3 Méthode du développement de Taylor

*PRÉAMBULE* : La méthode du développement de Taylor est utilisée en Q 2.3.2 pour être mise en comparaison avec la méthode des moindres carrés.

La formule de Taylor se base elle aussi sur le développement de la fonction en tant que sommes de polynômes. On décide, pour comparer cette méthode à celle des moindres carrés, de l'étudier à un ordre 6. La formule pour cette méthode est la suivante :

$$f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad (2)$$

On voit ici qu'une des difficultés avec laquelle on va devoir gérer est le fait que la formule implique des dérivées jusqu'à l'ordre 6. Or, cette méthode approximant déjà la fonction étudiée, qui on le rappel est l'évolution angulaire du pendule en fonction du temps, nous ne pouvons pas coupler une deuxième méthode à approximation. En effet, cela amplifierait grandement l'erreur lié à la méthode numérique.

Le point qui va nous permettre de nous en sortir ici est le fait que l'on cherche à fair le développement de Taylor d'une fonction cosinus. On sait donc que d'une dérivée à une autre on passera de cosinus à sinus, etc. Il ne nous reste plus qu'à déterminer le schéma général de cette méthode : la présence de moins, l'ordre du facteur devant le cosinus ou le sinus, etc.

On obtient le code suivant que nous allons brièvement détailler :

```

else if(p%2 == 0)
{
    if((p/2)%2 == 0)
    {
        return +(pow(Var1*Var4, p)*Var3*cos(Var1*Var2[k]))/factorielle(p);
    }

    else if((p/2)%2 == 1)
    {
        return -(pow(Var1*Var4, p)*Var3*cos(Var1*Var2[k]))/factorielle(p);
    }
}

```

FIGURE 10 – Schéma du calcul des dérivées  $k_{ieme}$

Le schéma est en fait de décomposer les cas pour lesquels on tombe sur cosinus ou sinus puis on cherche à savoir dans quel cas on a un  $1 + j$  ou un  $1 - j$ . La partie sur le cosinus ci-dessus, nous montre par exemple que pour avoir un cosinus positif

il faut que l'on soit à une dérivée pour laquelle le facteur est pair et pour laquelle le modulo 2 de la division par 2 est elle aussi pair : on ne garde donc que les ordres 0, 2 et 4, tandis que 6 donne  $\frac{6}{2} = 3$  ; or 3 modulo 2 = 1. Les informations sont résumées dans le tableau suivant :

Nombre Pair	Cosinus	Quotient pair ( $\frac{p}{2} \bmod 2 = 0$ )	+	0 2 4
-	Cosinus	Quotient impair ( $\frac{p}{2} \bmod 2 = 1$ )	-	6
Nombre Impair	Sinus	Quotient pair	-	1 5
-	Sinus	Quotient impair	+	3

Pour conclure sur cette partie, elle est bien plus théorique et elle se base sur une mise de l'équation sur papier pour un raisonnement plus mathématique. Notre méthode devient donc exploitable pour notre  $m=6$  mais peut très bien convenir pour tout ordre.

Erreur liée à la méthode

### 3 Conclusion sur le Projet

Au final, nous avons été en mesure de mettre en application les méthodes vues en cours et travaillées en TD dans le cas de l'étude d'un système dont certaines variables sont régies par des équations différentielles et des systèmes non-linéaires. Nous avons ci-dessus revu les méthodes clés de notre sujet et de notre programme qui nous ont permis d'étudier notamment la période et la position de notre pendule au cours du temps.

On a d'ailleurs pu mettre en évidence le fait que ces méthodes présentent pour la plupart, et lorsque l'on considère des petits ordres d'études, une faible erreur une fois comparées à la théorie.

Nous aurions aussi pu citer les méthodes de la Q 2.2.a qui avait pour principe l'étude de l'optimisation du pas d'intégration ou encore la Q 2.2.d qui visait à étudier l'influence de l'angle  $\theta$  initiale.

Nous avons néanmoins décidé de centrer ce rapport sur des méthodes que l'on retrouvait à différents points du code et qui étaient intrinséquement liées comme l'étaient les méthodes Cholesky/LU à la méthode des moindres carrés par exemple.