

Mécanique Vibratoire

Travaux dirigés

Table des matières

TD 1 : Vibrations Libres de Systèmes à 1ddl sans amortissement	1
Exercice 1 : Rappels	1
Exercice 2 : Effet de la gravité dans l'équation différentielle du mouvement	2
Exercice 3 : Étude d'un système mécanique tige masse et ressort	3
Exercice 4 : Étude vibratoire d'un ascenseur	4
TD 2 : Vibrations Libres de Systèmes à 1ddl avec amortissement	6
Exercice 5 : Rappel	6
Exercice 6 : Recherche d'un mouvement apériodique critique	7
Exercice 7 : Mouvement oscillant d'une bouée soumise à la houle	8
Exercice 8 : Porte battante	10
TD 3 : Réponses aux excitations harmoniques de systèmes à 1ddl	13
Exercice 9 : Rappels	13
Exercice 10 : Étude d'un sismographe	13
Exercice 11 : Accéléromètre piézoélectrique	14
Exercice 12 : Véhicule soumis aux défauts de la route	16
TD 4 : Réponse à des excitations harmoniques et quelconques	19
Exercice 13 : Régime permanent périodique	19
Exercice 14 : Réponse à une excitation quelconque - Méthode de Laplace	21
TD 5 : Systèmes à 2 degrés de liberté	24
Exercice 15 : Oscillations libres d'un système à 2 ddls conservatif	24
Exercice 16 : Oscillations forcées d'une barre	27

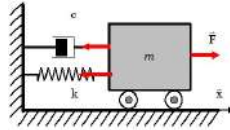
TD 1 - Vibrations Libres de Systèmes à 1ddl sans amortissement

Exercice 1: Rappels

Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système mécanique oscillant sans amortissement visqueux. (on traitera les cas d'un système à 1ddl en translation, en rotation et un système pendulaire).

Système en translation

Solution: voir le cours "3.1.1 Exemple du système masse-ressort en translation"



En régime libre et sans amortissement, on obtient l'équation de mouvement : $m\ddot{x} + kx = 0$ (application du PFD ou de la conservation de l'énergie, ou de l'équation de Lagrange : voir le cours)

Ce système admet pour solution (cours "3.3 Vibrations libres non amorties") : $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$ avec :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre du système (la période est alors : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$)
- l'amplitude A et la phase ϕ se déterminent à partir des conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 :

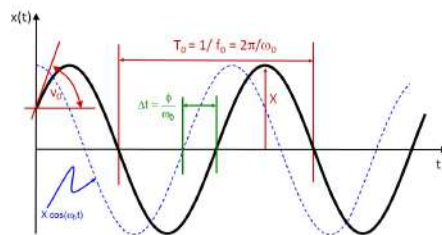
$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \sin(\omega_0 t - \phi)$$

$$x_0 = A\cos(-\phi)$$

$$\dot{x}_0 = \omega_0 A \sin(-\phi)$$

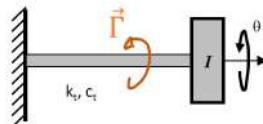
$$\text{d'où : } \tan\phi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \text{ et } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$$

Le système étant conservatif (sans amortissement),



Système en rotation

Solution: voir le cours "3.1.2 Exemple de l'arbre en torsion - 1ddl en rotation"

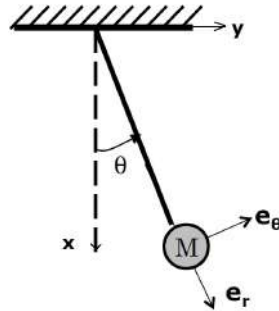


En appliquant le PFD, ou la conservation de l'énergie, ou l'équation de Lagrange (voir détail dans le cours), on obtient pour un système conservatif (sans amortissement), en régime libre : $I\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$

Cette équation est similaire à celle du système en translation, elle admet donc une solution similaire.

Système pendulaire

Solution:



Détermination de l'équation de mouvement par le PFD appliqué à la masse (supposée ponctuelle au point M) : $m : m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$

La masse est soumise :

- à son poids : $mg\vec{x} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$
- à la tension du fil (supposé indéformable de longueur L) : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

Calcul de l'accélération du point M :

- vecteur position : $O\vec{M} = L\vec{e}_r$
- vecteur vitesse : $\vec{V}_M = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- vecteur accélération : $\vec{\gamma}_M = L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

PFD : $mL\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mL\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) - T\vec{e}_r$

La projection de cette équation sur l'axe porté par \vec{e}_θ donne : $mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

En utilisant l'hypothèse générale du cours de vibrations : petits mouvement autour de la position d'équilibre, on peut faire l'approximation des petits angles : $\sin\theta \approx \theta$

On obtient alors l'équation de mouvement : $L\ddot{\theta} + g\theta = 0$

Cette équation est similaire aux équations de mouvement des deux systèmes précédents : le système oscille à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

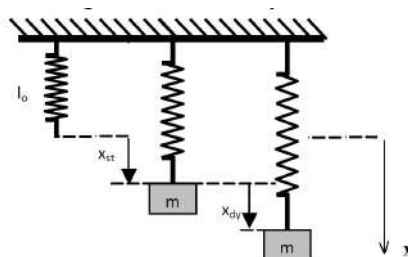
On remarquera au passage que pour ce cas on retrouve la gravité dans l'équation de mouvement (le poids est ici une force variable avec le temps et non constante).

On remarquera également que la projection du PFD sur l'axe \vec{e}_r permet de déterminer la tension du fil T .

Exercice 2: Effet de la gravité dans l'équation différentielle du mouvement

Montrer, pour le système représenté sur la figure, que l'équation du mouvement en présence de gravité est identique à celle du même système non soumis à la gravité, à condition de compter la variable x décrivant le déplacement à partir de la position d'équilibre statique.

C'est un résultat que l'on peut étendre à tout système linéaire suspendu élastiquement.



Solution: On pose : \vec{x} vecteur unitaire vertical dirigé vers le bas. On pose $x(t)$ le déplacement vertical de la masse : $x(t) = x_{st} + x_{dy}(t)$ avec x_{st} la déformation du ressort à l'équilibre statique. Bilan des efforts appliqués à la masse M :

— son poids : $M\vec{g} = Mg\vec{x}$

— la force de rappel du ressort : $-kx\vec{x}$

PFD appliqué à la charge : $M\ddot{x}\vec{x} = Mg\vec{x} - kx\vec{x}$

soit : $M\ddot{x} + kx - mg = 0$

avec : $x(t) = x_{st} + x_{dy}(t)$ on a : $\ddot{x} = \ddot{x}_{dy}$

L'équation de mouvement se réécrit : $M\ddot{x}_{dy} + kx_{st} + kx_{dy} - mg = 0$

A l'équilibre statique ($x_{dy} = 0$) on a : $kx_{st} - mg = 0$

L'équation de mouvement se simplifie : $M\ddot{x}_{dy} + kx_{dy} = 0$

L'influence de la pesanteur disparaît ici dans l'équation de mouvement si on considère l'écart à l'équilibre statique (c'est une force constante)

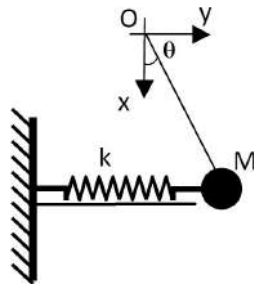
Exercice 3: Étude d'un système mécanique tige masse et ressort

On suppose un système mécanique constitué d'une tige OM , de longueur L , articulée au point O qui porte au point M un objet rigide de masse m .

L'objet en question est aussi attaché à un support élastique de raideur k .

Le système est en équilibre statique lorsque la tige OM est en position verticale.

La position de la tige est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale.



1. Établir l'équation du mouvement du système

Solution: On peut déterminer l'équation de mouvement en appliquant le PFD à l'objet de masse m : $m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$

La masse est soumise :

— à son poids : $mg\vec{x} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$

— à la tension de la tige : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

— à la force de rappel du ressort : $-kL\sin\theta\vec{y} = -kL\sin\theta(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)$

On fait l'hypothèse de petits mouvements autour de la position d'équilibre, de telle sorte que les déformations du ressort dans la direction verticale sont négligées et la force de rappel supposée uniquement horizontale.

Accélération du point M (cf système pendulaire) : $\gamma_M = L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

Le PFD s'écrit : $mL\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mL\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) - kL\sin\theta(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta) - T\vec{e}_r$

La projection de cette équation sur \vec{e}_θ donne : $mL\ddot{\theta} = -kL\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta$

L'hypothèse de petits angles ($\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$) permet de simplifier cette expression :

$$mL\ddot{\theta} + (kL + mg)\theta = 0$$

$$\text{ou encore : } \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

2. Déterminer la pulsation propre du système

Solution: la pulsation propre de ce système vaut : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$

3. Déterminer la réponse du système en vibrations libres

Solution: La réponse en régime libre est alors : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
avec : $A = \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} + \theta_0^2}$ et $\tan \phi = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0 \theta_0}$

Exercice 4: Étude vibratoire d'un ascenseur

Un ascenseur est constitué d'une cabine de masse M suspendue à un treuil par l'intermédiaire d'un câble. La raideur k du câble dépend de sa longueur variable L .

On donne : $M = 1000 \text{ kg}$ Pour le câble, la section droite est $S = 3.14 \text{ cm}^2$, la masse est négligeable et le module d'Young est $E = 1,03 \times 10^{11} \text{ Pa}$. On donne $ES/M = 180^2 \text{ SI}$



Évaluation des caractéristiques propres du système

1. Si l'on suppose une répartition uniforme de la contrainte dans la section droite du câble, montrer que l'allongement du câble sous le seul effet du poids de la cabine s'écrit : $\Delta L_{st} = \frac{MgL}{ES}$

Solution: Pour cette question le câble est supposé au repos, avec $\Delta L = \Delta L_{st}$.

Le câble est sollicité en traction, on applique la loi de Hooke : $\sigma = E\epsilon$ avec :

— $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ allongement relatif du câble.

— la contrainte de traction dans le câble σ vaut : $\sigma = \frac{Mg}{S}$

L'allongement du câble sous l'effet du poids vaut finalement : $\Delta L_{st} = \frac{MgL}{ES}$

2. En déduire la raideur k du câble en fonction de L .

Solution: Au repos (statique), la force de rappel vaut : $F = k\Delta L_{st} = Mg$

On en déduit l'expression de la raideur du câble : $k = \frac{Mg}{\Delta L_{st}} = \frac{ES}{L}$

3. Exprimer la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ du système en fonction de L .

Solution: Ce système est assimilable à un système 1ddl non amorti de masse M et de raideur k , sa pulsation propre vaut donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{ES}{ML}}$

4. Application numérique : pour un immeuble de 10 étages, la longueur du câble varie de 36m à 1m. Donner les valeurs numériques de l'intervalle critique des vitesses de rotation du treuil.

Solution: Pour $1m < L < 36m$ on a : $\sqrt{\frac{ES}{36ML}} < \omega_0 < \sqrt{\frac{ES}{ML}}$
 Soit : $30rad/s < \omega_0 < 180rad/s$
 Soit : $287tr/min < N < 1718tr/min$
 Dans cet intervalle, la vitesse de rotation du treuil risque de fournir une excitation du système à sa pulsation propre lors du mouvement de l'ascenseur (descente ou montée).

5. Comment cet intervalle est-il modifié par la présence de passagers ?

Solution: En présence de passagers, la masse M augmente, ce qui a pour effet de diminuer ω_0 .

Évaluation des efforts sur le câble

A chaque démarrage ou arrêt du treuil, une vibration libre verticale de la cabine apparaît. On souhaite étudier cette vibration pour connaître l'effort subi par le câble

On considère un arrêt alors que la cabine se déplace à la vitesse constante v_0 . Le câble a la longueur L .

6. Si on néglige l'amortissement, rappeler l'expression générale de $x(t)$ le déplacement vibratoire de la cabine.

Solution: Sans amortissement la réponse du système est de la forme : $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$

7. Préciser son amplitude X en fonction de v_0

Solution: On a $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$ et $\dot{x}(t) = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi)$
 A l'instant initial : $x(0) = 0 = X \cos \phi$ et $\dot{x}(0) = v_0 = -X\omega_0 \sin(-\phi) = X\omega_0 \sin \phi$
 On en déduit : $\phi = \frac{\pi}{2}$ et $X = \frac{v_0}{\omega_0}$

8. En déduire la contrainte dynamique maximum σ_{max} subie par le câble en fonction de son allongement relatif maximum X/L

Solution: $\sigma_{max} = E \frac{\Delta L_{max}}{L} = \frac{EX}{L}$
 $\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{E}{L} \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{\frac{ME}{LS}}$

TD 2 - Vibrations Libres de Systèmes à 1ddl avec amortissement

Exercice 5: Rappel

Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système mécanique oscillant avec amortissement visqueux. (On traitera les cas d'un système à 1 DDL en translation).
Rappeler les solutions à cette équation pour les différentes conditions d'amortissement et tracer leur allure.

Solution: voir le poly de cours "3.4 Vibrations libres amorties".

Equation de mouvement :

En régime libre, le système n'est soumis à aucune excitation extérieure, on a alors :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx(t) = 0$$

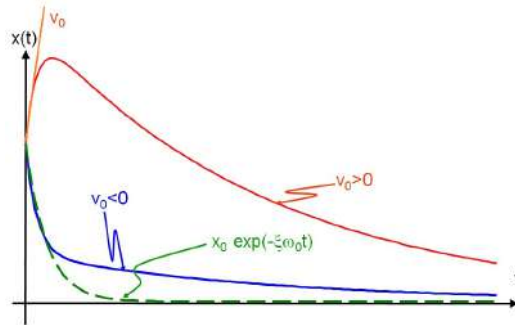
ou encore : $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$

où : $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$ est le **facteur d'amortissement** du système

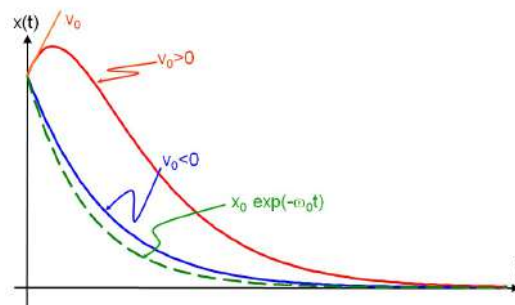
La forme de la réponse du système va alors dépendre de la valeur du facteur d'amortissement ξ :

— si $\xi > 1$: l'amortissement est dit sur-critique, le système n'oscille pas :

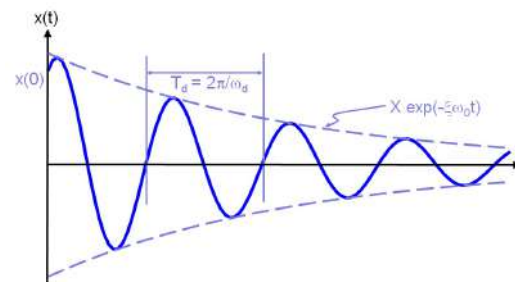
$$x(t) = [Ae^{-\alpha t} + Be^{\alpha t}] e^{-\xi\omega_0 t}$$



— si $\xi = 1$ l'amortissement est dit critique, le système n'oscille pas : $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$



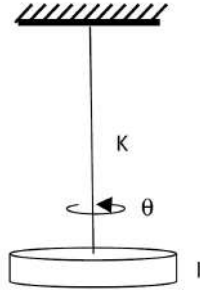
— si $\xi < 1$ l'amortissement est dit sous-critique, le système oscille : $x(t) = X e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d)$



voir le poly de cours pour plus de détails.

Exercice 6: Recherche d'un mouvement apériodique critique

Un disque circulaire de moment d'inertie $I = 0,01 \text{ kg/m}^2$ est suspendu en son centre par un fil de résistance à la torsion $K = 0.025 \text{ Nm/rad}$. Le disque est mis en oscillation de torsion autour de l'axe du fil en l'écartant de sa position d'équilibre. On note θ la position angulaire du disque par rapport à l'équilibre.



1. Déterminer la pulsation naturelle et la période des oscillations.

Solution: Dans cette configuration, le mouvement est non amorti. Il peut être modélisé par un système 1ddl en rotation non amorti, avec une raideur de torsion K et un moment d'inertie I . L'équation de mouvement en régime libre est alors : $I\ddot{\theta} + K\theta = 0$ (voir le cours et le TD 1).

La pulsation propre de ce système est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$

Application numérique : $\omega_0 = 1,58 \text{ rad/s}$

La période correspondante est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3,97 \text{ s}$ La fréquence propre : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,25 \text{ Hz}$

2. Un électro-aimant, placé à l'extrémité du disque, exerce sur lui un couple d'amortissement proportionnel à sa vitesse angulaire. Les oscillations du disque deviennent pseudo-périodiques : On relève l'amplitude de la première oscillation à π celle de la suivante à $2\pi/5$. Déterminer le décrétement logarithmique, le coefficient d'amortissement et la pseudo-période des oscillations. Quelle est la valeur de la constante d'amortissement C de l'électro-aimant ?

Solution: L'électro-aimant exerce sur le disque un couple de freinage $-C\dot{\theta}$

Le système est à présent amorti et son équation de mouvement en régime libre est :

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = 0$$

Le mouvement étant, selon la description de l'énoncé, pseudo-périodique décroissant, l'amortissement est donc sous-critique.

On peut dans un premier temps déterminer l'amortissement par la méthode du décrétement logarithmique (voir le cours) :

$$\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t + T_d)} \text{ où } T_d \text{ est la pseudo-période.}$$

$$\text{Soit : } \delta = \ln \frac{\pi}{2\pi/5} = \ln \frac{5}{2} = 0,916$$

$$\text{On sait que } \delta = \xi \omega_0 T_d = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

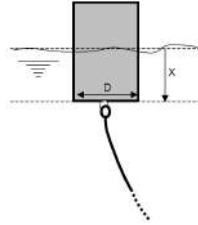
$$\text{d'où : } \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \text{ application numérique : } \xi = 0,1442$$

$$\text{On sait également que : } \xi = \frac{C}{2I\omega_0}, \text{ on peut en déduire l'amortissement } C :$$

$$C = 2I\omega_0\xi = 0,0046 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$$

Exercice 7: Mouvement oscillant d'une bouée soumise à la houle

Une bouée cylindrique de diamètre $D = 1.35m$, de masse $M = 1250kg$, flotte à la surface de l'eau ($\rho_0 = 1026kg/m^3$). Sous l'action des mouvements de la surface, la bouée peut rentrer en oscillations suivant un mouvement vertical. Le rappel élastique de cet oscillateur est fourni par la poussée d'Archimède Π . Soit X la distance entre la partie inférieure de la bouée et la surface moyenne de l'eau. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9.81m/s^2$



1. Exprimer la poussée $\Pi(x)$

Solution: La poussée d'Archimède exercée sur la bouée s'écrit : $\vec{\Pi} = -\rho_0 V_{im} \vec{g}$
 avec V_{im} le volume immergé de la bouée : $V_{im} = \frac{\pi D^2}{4} .x$
 On a donc : $\vec{\Pi} = -\rho_0 \frac{\pi D^2}{4} .x .g .\vec{e}_x$

2. En déduire l'expression de la raideur équivalente k du système. Donner sa valeur numérique.

Solution: On peut assimiler cette poussée à une force de rappel élastique :
 $\vec{\Pi} = -\rho_0 \frac{\pi D^2}{4} .x .g .\vec{e}_x = -k .x .\vec{e}_x$
 On en déduit par identification la raideur k du modèle 1ddl équivalent : $k = \frac{\pi D^2}{4} \rho_0 g$

3. Exprimer la pulsation propre d'oscillation de la bouée (ω_0). Donner sa valeur numérique ainsi que celle de la fréquence propre f_0 correspondante.

Solution: La bouée est donc ici modélisée par un système 1ddl de masse M et de raideur k déterminée question précédente. Sa pulsation propre est alors : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_0 g}{M}}$
 application numérique : $\omega_0 = 3,39 rad/s$
 La fréquence propre du système vaut : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,54 Hz$

La force résistive de frottement visqueux exercée par l'eau sur la bouée peut être approchée par l'expression $F_v = -\rho_0 .S .C .v$ où S est la section de la face inférieure de la bouée, C un coefficient de viscosité surfacique et v la vitesse verticale. On considère désormais la position relative $x = X - X_{st}$, où X_{st} est la position d'équilibre statique de la bouée

4. Écrire l'équation sur x du mouvement libre vertical de la bouée

Solution: On ajoute au modèle précédent une force de frottement visqueux $\vec{F}_v = -\rho_0 S C \dot{x} \vec{e}_x$, l'équation du mouvement libre vertical de la bouée s'écrit alors :
 $M \ddot{x} + \rho_0 S C \dot{x} + kx = 0$

5. On donne $C = 3.5m.s^{-1}$. En déduire le régime des oscillations libres de la bouée. On note ξ le facteur d'amortissement.

Solution: Cette équation peut s'écrire : $\ddot{x} + \frac{\rho_0 SC}{M} \dot{x} + \frac{k}{M} x = 0$

Que l'on peut écrire également sous la forme générique : $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec ξ le facteur d'amortissement : $\xi = \frac{\rho_0 SC}{2M\omega_0} = 0,61 < 1$ le régime est sous-amorti.

Sous l'effet de la houle la bouée va subir des oscillations pseudo-périodiques.

6. Calculer l'expression et représenter la fonction $x(t)$ pour une vitesse initiale nulle et une position initiale égale à x_0

Solution: On cherche la solution de l'équation de mouvement avec les conditions initiales suivantes : $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = x_0$

Le système étant sous-amorti, la forme de la solution est : $x(t) = A \cos(\omega_d t - \phi) \cdot e^{-\xi\omega_0 t}$ avec $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ la pseudo-pulsation.

On a donc : $x(0) = A \cos \phi = x_0$, on en déduit : $A = \frac{x_0}{\cos \phi}$

La vitesse de la bouée a pour expression (dérivation temporelle de $x(t)$) :

$$\dot{x} = -A\omega_d \sin(\omega_d t - \phi) \cdot e^{-\xi\omega_0 t} - \xi\omega_0 A \cos(\omega_d t - \phi) \cdot e^{-\xi\omega_0 t}$$

A l'instant initial : $\dot{x}(0) = A\omega_d \sin \phi - \xi\omega_0 A \cos \phi = 0$

$$\text{On en déduit : } \tan \phi = \frac{\xi\omega_0}{\omega_d} = \frac{\xi\omega_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

7. Exprimer l'amplitude et la phase du mouvement en fonction des conditions initiales et du facteur d'amortissement ξ

Solution: On a donc (question précédente) :

$$\begin{cases} A = \frac{x_0}{\cos \phi} \\ \tan \phi = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$

La phase est bien déterminée en fonction des caractéristiques du système. Il reste à déterminer l'amplitude A :

$$\text{on a : } \sin \phi = \tan \phi \cos \phi = \frac{x_0}{A} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\text{et } \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

$$\text{On en déduit : } \frac{x_0^2}{A^2} \left(1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} \right) = 1$$

$$\text{Soit : } A = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

8. Quelle période de houle fait entrer le système en résonance ?

Solution: La bouée entre en résonance pour une période de houle de :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = 2,34 \text{ s}$$

Elle aura alors une amplitude d'oscillations maximale.

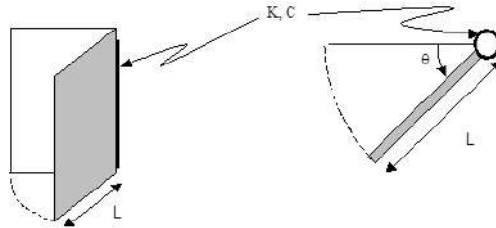
Exercice 8: Porte battante

On cherche à déterminer la valeur optimale du coefficient d'amortissement visqueux C du système de fermeture automatique d'une porte battante d'auditorium représentée sur la figure ci-dessous.

Les dimensions utiles de la porte sont les suivantes : Largeur $L = 1.2m$; Masse $M = 85kg$

La charnière (axe de rotation) de la porte est pourvue :

- d'une raideur à la torsion $K = 22Nm/rad$ qui exerce un couple résistant proportionnel à l'angle θ d'ouverture de la porte
- d'un coefficient d'amortissement C à déterminer et qui exerce un couple résistant proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ d'ouverture de la porte.



1. Calculer le moment d'inertie I de la porte par rapport à son axe de rotation et montrer qu'il vaut $40.5kg.m^2$

Solution: Étant donné les données de l'énoncé, la porte est modélisée ici par une poutre de longueur L et de masse M . Son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de la porte vaut (voir cours chap.2) :

$I_{zz} = I = \int \rho r^2 dS$ avec dS élément de surface, ρ masse surfacique et r distance à l'axe de rotation.

$$I = \rho S \int_0^L R^2 dS = \rho S \frac{L^3}{3} = M \frac{L^2}{3} = 40,8 kg.m^2$$

2. Par application du théorème du moment dynamique, établir l'équation du mouvement de la porte.

Solution: Nous avons affaire à un système à 1ddl en rotation autour de l'axe z

La porte est soumise à deux moments dynamiques :

- un moment de résistance élastique : $-K\theta\vec{e}_z$
- un moment de frottement visqueux ("couple résistant proportionnel à la vitesse") : $-C\dot{\theta}\vec{e}_z$

En appliquant le théorème du moment dynamique, on obtient : $I\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M} = -C\dot{\theta} - K\theta$

L'équation de mouvement du système s'écrit alors : $I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = 0$

3. Écrire cette équation sous la forme : $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Solution: Cette équation de mouvement peut s'écrire : $\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\dot{\theta} + \frac{K}{I}\theta = 0$

soit $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec par analogie :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$\xi = \frac{C}{2I\omega_0}$$

4. Exprimer la pulsation propre ω_0 et calculer sa valeur. En déduire la valeur de la fréquence propre.

Solution: La pulsation propre vaut alors : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}} = 0,73 \text{ rad/s}$
la fréquence propre vaut : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,117 \text{ Hz}$

5. Exprimer le facteur d'amortissement ξ

Solution: On a vu précédemment que $\xi = \frac{C}{2I\omega_0}$

On souhaite que la porte se referme sans oscillation sous les actions combinées des couples exercés par K et C .

6. Quelle valeur minimum faut-il donner à ξ ?

Solution: Pour que la porte se referme sans oscillations il faut que son mouvement libre soit en régime critique ou sous-critique, c'est à dire que $\xi \geq 1$

7. Calculer la valeur numérique de C réalisant cette condition.

Solution: Pour $\xi = 1$, on a : $C = 2I\omega_0 = 59,5 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$

8. Dans quel régime libre le mouvement se situe-t-il ? Rappeler alors l'expression $\theta(t)$ du mouvement de la porte.

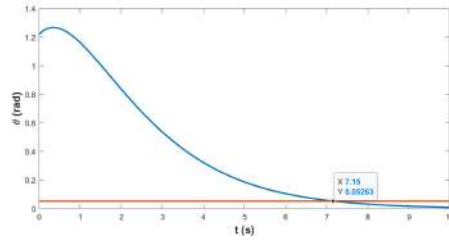
Solution: Pour $\xi = 1$ le régime est critique et la solution générale est de la forme :
 $\theta(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$

9. La position initiale de la porte est $\theta_0 = 70^\circ$, sa vitesse initiale est $\dot{\theta}_0 = 0,3 \text{ rad/s}$. 9. En déduire l'expression exacte de $\theta(t)$.

Solution: On a $\begin{cases} \theta(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \\ \dot{\theta} = (A - At\omega_0 - B\omega_0)e^{-\omega_0 t} \end{cases}$ et $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 = B \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = A - B\omega_0 \end{cases}$
on en déduit : $\begin{cases} B = \theta_0 = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = 1,22 \text{ rad} \\ A = \dot{\theta}_0 + B\omega_0 = 1,19 \text{ rad/s} \end{cases}$
L'expression numérique du mouvement est alors (θ en USI càd en rad) :
 $\theta(t) = (1,19t + 1,22)e^{-0,73t}$

10. A quel instant t_1 la position de la porte atteint-elle $\theta(t_1) = 3^\circ$? On ne demande qu'une valeur approchée.

Solution: Il faut pour répondre à cette question résoudre l'équation : $\theta(t) = (1,19t + 1,22)e^{-0,73t} = \frac{3\pi}{180} = 0,0524 \text{ rad}$
On ne peut pas résoudre cette équation simplement. Plusieurs méthodes sont possibles :
— méthode graphique : tracer $\theta(t) = (1,19t + 1,22)e^{-0,73t}$ et $\theta = 0,0524 \text{ rad}$ et trouver la valeur de t à l'intersection des deux courbes :



on trouve ainsi : $t_1 \approx 7,15s$

- par "tâtonnement" : calculer $\theta(t)$ et trouver t_1 à une seconde près (par exemple, calculer $t(1s)$ et $t(10s) \Rightarrow 1s < t_1 < 10s$..etc...) : on trouve ainsi que $7s < t_1 < 8s$.

On conserve les valeurs précédentes de K et C , Mais pour assurer une meilleure isolation phonique, la porte est couverte d'un revêtement spécial, réparti uniformément, qui augmente la masse de la porte de 10%. On note ω'_0 la nouvelle pulsation propre, et ξ' le nouveau facteur d'amortissement.

11. Situer ω'_0 par rapport à ω_0 et calculer sa valeur

Solution: On a modifié la masse de la porte $M' = 1,1M$ et donc également son moment d'inertie : $I' = 1,1I$.

La nouvelle pulsation propre a alors pour expression : $\omega'_0 = \sqrt{\frac{K}{I'}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1,1}} < \omega_0$

L'ajout de masse diminue la pulsation propre de la porte.

Application numérique : $\omega'_0 = 0,7rad/s$ et $f'_0 = 0,11Hz$

12. Situer ξ' par rapport à ξ et calculer sa valeur

Solution: On a $\xi' = \frac{C}{2I'\omega'_0} = \frac{C}{2I\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1,1}} = \frac{\xi}{\sqrt{1,1}} = 0,95$

13. Quel type de régime libre la nouvelle porte présente-t-elle ?

Solution: On trouve cette fois $\xi' < 1$, le régime devient sous-critique.

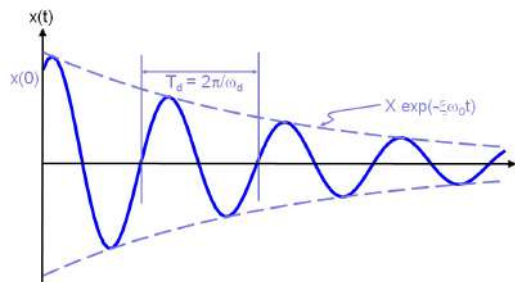
14. Rappeler et représenter la forme $\theta'(t)$ du mouvement libre de la nouvelle porte.

Solution: Cette fois la porte va osciller (oscillations pseudo harmoniques) et on aura :

$$\theta'(t) = \Theta \cos(\omega'_d t - \phi) e^{-\xi' \omega'_0 t}$$

avec $\omega'_d = \omega'_0 \sqrt{1 - \xi'^2}$ la pseudo pulsation des oscillations.

Θ et ϕ sont déterminés par les conditions initiales.



TD 3 - Réponses aux excitations harmoniques de systèmes à 1ddl

Exercice 9: Rappels

Rappeler l'expression du mouvement d'un système non conservatif à 1ddl à une excitation harmonique.

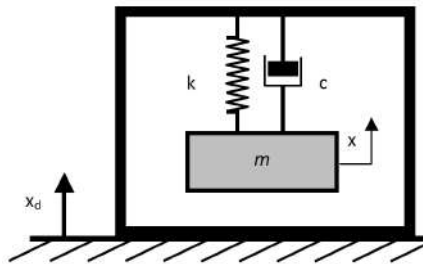
Solution: voir p.30-31 du poly

Exercice 10: Étude d'un sismographe

On se propose de déterminer dans quelles conditions le sismographe schématisé figure ci-après permet de mesurer soit l'accélération du bâti, soit ses déplacements.

La masse sismique m est suspendue au bâti du sismographe par l'intermédiaire d'un support élastique caractérisé par une raideur k et un coefficient d'amortissement c .

On note ω_0 la pulsation propre du sismographe et ξ l'amortissement réduit. Le sismographe repose sur le sol dont on souhaite mesurer le mouvement. Ce mouvement est harmonique de la forme : $x_d(t) = D \sin(\Omega t)$. On note $x(t)$ le déplacement de la masse sismique par rapport au bâti.



1. Écrire l'équation du mouvement de la masse sismique (celui mesuré en premier lieu) en fonction du mouvement du sol.

Solution: Le déplacement absolu de la masse sismique (par rapport au référentiel terrestre galiléen) est : $x + x_d$.

la masse sismique est soumise :

- à la force de rappel $-kx\vec{e}_x$
- à la force de frottement visqueux : $-c\dot{x}\vec{e}_x$

L'équilibre dynamique en translation s'écrit : $m(\ddot{x} + \ddot{x}_d) = -kx - c\dot{x}$

2. Calculer la réponse permanente $x(t)$ du sismographe en fonction de Ω , ω_0 et ξ

Solution: L'équation de mouvement peut s'écrire : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_d$

Ou encore : $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{x}_d$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$

On reconnaît l'équation de mouvement d'un système à 1ddl en régime forcé où $-m\ddot{x}_d$ est le terme d'excitation :

avec $x_d = D \sin(\Omega t)$, on a donc :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = D\omega^2 \sin(\Omega t)$$

On cherche une solution de la forme : $x(t) = X \sin(\Omega t + \phi) = \text{Im}(Ae^{j\Omega t})$ avec $A = Xe^{j\phi}$

En utilisant l'écriture exponentielle, on déduit de l'équation de mouvement :

$$A[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2j\xi\omega_0\Omega] = \Omega^2 D$$

$$\text{On en déduit : } A = \frac{D\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\xi\omega_0\Omega}$$

En introduisant la pulsation réduite $\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$, on obtient : $A = \frac{D\beta^2}{1 - \beta^2 + 2j\xi\beta} = Xe^{j\phi}$

On en déduit l'amplitude et la phase de la réponse du sismographe :

$$X = \frac{D\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{-2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

3. Préciser les conditions pour que le sismographe mesure mieux l'accélération, le déplacement ou la vitesse du sol.

Solution:

- Si le sismographe est dimensionné de manière à ce que $\beta \ll 1$ alors :

$$X \approx D\beta^2 \text{ et } \phi \approx 0$$

$$\text{on a alors : } x(t) = D\beta^2 \sin(\Omega t) = D \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \sin(\Omega t) = -\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x}_d$$

Ainsi dimensionné le déplacement de la masse du sismographe est proportionnelle à l'accélération de son support. Le sismographe se comporte comme un accéléromètre : on mesure l'accélération de la pulsation.

- Si le sismographe est dimensionné de manière à ce que $\beta \gg 1$ alors : $X \approx D$
l'amplitude de déplacement de la masse est proportionnelle à celle du déplacement de la perturbation. Le sismographe se comporte comme un capteur de déplacement.

Exercice 11: Accéléromètre piézoélectrique

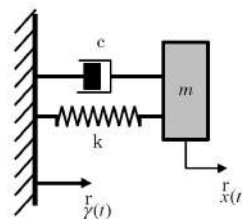
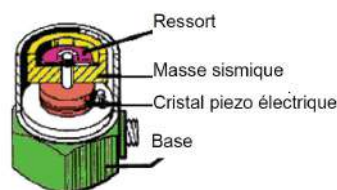
Pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une structure, on utilise un accéléromètre piézo-électrique à compression (figure de gauche).

La structure présente au point de mesure une accélération $\gamma(t)$ horizontale.

On fixe donc l'accéléromètre rigidement (vissage ou collage) et en position horizontale.

Le système structure/accéléromètre peut être alors modélisé par la figure de droite, où k et c sont respectivement la raideur équivalente et le coefficient d'amortissement équivalent de l'accéléromètre.

Le déplacement de la masse sismique m par rapport à la structure est noté $x(t)$.



1. Justifier qu'en se plaçant dans le repère lié à la structure, animée d'un mouvement vibratoire d'accélération $\gamma(t)$, l'équation du mouvement de la masse sismique m de l'accéléromètre s'écrit :
- $$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\gamma$$

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse m , avec x le déplacement relatif de la masse par rapport à la structure :

$$m(\ddot{x} + \gamma) = -kx - c\dot{x}$$

On note :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ la pulsation propre de l'accéléromètre}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} \text{ son facteur d'amortissement}$$

2. Dédurre de la question précédente l'expression de l'accélération $\gamma(t)$ de la structure en fonction de $x(t)$, de ses dérivées, de ξ et de ω_0

Solution: On en déduit que $\gamma(t) = -\ddot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - 2\xi\omega_0 \dot{x}(t)$

Sous l'effet du déplacement $x(t)$ de la masse sismique, le cristal piézo-électrique délivre une tension électrique proportionnelle $u(t)$ telle que : $u(t) = \alpha x(t)$

On suppose que la structure étudiée est en vibration harmonique avec : $\gamma(t) = \Gamma(\Omega)\cos(\Omega t)$

3. Donner l'expression de la tension mesurée à la sortie de l'accéléromètre. On précisera l'amplitude $U(\Omega)$ et la phase $\phi(\Omega)$

Solution: On a $\gamma(t) = \Gamma(\Omega)\cos(\Omega t)$ et $x(t) = \frac{1}{\alpha}u(t)$

L'équation différentielle trouvée question précédente peut se réécrire :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\alpha\Gamma(\Omega)\cos(\Omega t)$$

Cette équation admet comme solution (en "régime permanent") : $u(t) = U(\Omega)\cos(\Omega t - \phi)$

$$\text{Avec : } U(\Omega) = \frac{-\alpha\Gamma(\Omega)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}$$

$$\text{et } \tan\phi = \frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

rq : on retrouve U et ϕ en remplaçant $u(t)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle. Il peut être plus simple pour cela de travailler en écriture complexe : $u(t) = \mathcal{R}e(Ue^{j(\Omega t - \phi)})$

4. La fonction de réponse en fréquence ou sensibilité dynamique de l'accéléromètre est définie par :

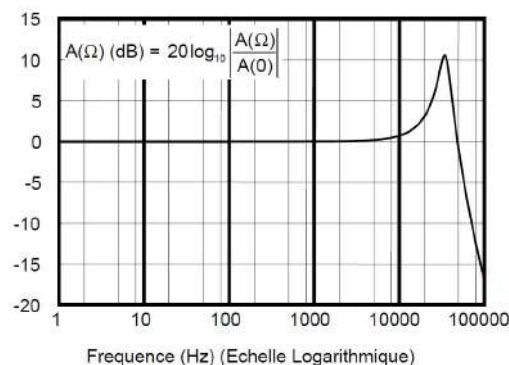
$$A(\Omega) = \frac{U(\Omega)}{\Gamma(\Omega)}$$

Exprimer $A(\Omega)$

Solution: On déduit simplement de la question précédente que :

$$A(\Omega) = \frac{-\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}$$

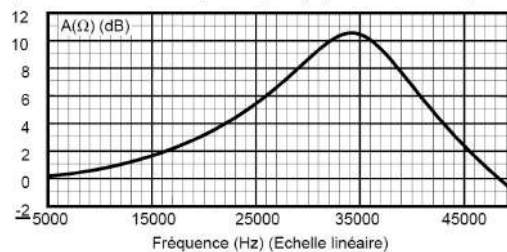
5. La courbe suivante, fournie par le constructeur de l'accéléromètre, représente en décibels (dB) la fonction $A(\Omega)$.



Sachant que l'accéléromètre est exploitable sur la bande de fréquence où la sensibilité dynamique est constante, donner une valeur approchée de la limite supérieure du domaine d'utilisation de cet accéléromètre.

Solution: La courbe de réponse fournie est constante jusqu'à $f_{max} = 5000Hz$, l'accéléromètre est utilisable dans de bonnes conditions pour $f < 5000Hz$.

6. On s'intéresse aux caractéristiques de l'accéléromètre au voisinage de la résonance. La figure suivante fait un gros plan de la sensibilité dynamique $A(\Omega)$ autour de la fréquence de résonance.



A partir de cette figure, en utilisant la méthode de la largeur à -3dB, donner des valeurs approchées de la pulsation propre ω_0 et du facteur d'amortissement ξ .

Solution: voir méthode de mesure de ξ par la bande passante à -3dB poly p32

On a $\xi = \frac{\Delta f_{-3dB}}{2f_0}$

On lit sur la courbe fournie : $\Delta f_{-3dB} = f_2 - f_1 = 39000 - 28500 = 10500Hz$

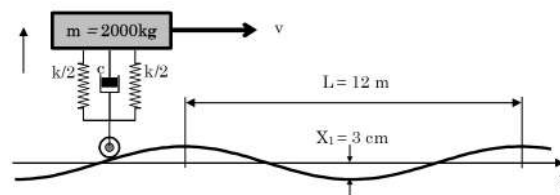
et $f_0 \approx f_d = 34000Hz$

on en déduit : $\xi = 0,155$

Exercice 12: Véhicule soumis aux défauts de la route

En raison du fluage du béton, Il peut apparaître des flèches intempestives dans des tabliers de ponts. Si le pont est constitué d'une série de portées identiques, ces déformations engendrent une excitation harmonique communiquée par la chaussée aux suspensions des véhicules.

La raideur k de la suspension est telle qu'on observe un allongement de 2 mm lorsqu'une masse de 50kg y est suspendue.



1. Modéliser le problème (véhicule sur route)

Solution: Le véhicule est assimilé à un système 1 ddl de raideur k .

La variation d'altitude du tablier du pont (l'excitation) est modélisée par une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude X_1 . Le profil de la route est donc donné par : $x_1(t) = X_1 \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)$, avec s la distance parcourue par le véhicule.

On note x_2 la position verticale de la masse m relativement à sa position d'équilibre statique.

2. Établir l'équation différentielle relative au mouvement du châssis

Solution: L'application du PFD au châssis donne :

$$m\ddot{x}_2 = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1)$$

Qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\ddot{x}_2 + 2\xi\omega_0\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2 = 2\xi\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \xi = \frac{c}{2m\omega_0} \text{ et } x_1(t) = X_1 \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)$$

Comme la vitesse v du véhicule est constante, on a : $s = vt$ et :

$$x_1(t) = X_1 \cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) = X_1 \cos(\Omega t) \text{ avec } \Omega = \frac{2\pi v}{L}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement on obtient :

$$\ddot{x}_2 + 2\xi\omega_0\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2 = -2\xi\omega_0\Omega X_1 \sin(\Omega t) + \omega_0^2 X_1 \cos(\Omega t)$$

On peut trouver une expression plus simple du membre de droite en utilisant :

$$a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t) = c \cos(\Omega t - \theta) \text{ avec : } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tan\theta = \frac{b}{a}$$

Ce qui donne ici :

$$c = \sqrt{4X_1^2\xi^2\omega_0^2\Omega^2 + \omega_0^4X_1^2} = \omega_0^2X_1\sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1} \text{ avec } \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\tan\theta = \frac{-2\xi\omega_0\Omega X_1}{\omega_0^2X_1} = -2\xi\beta$$

On peut finalement écrire l'équation de mouvement du système sous la forme :

$$\ddot{x}_2 + 2\xi\omega_0\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2 = \frac{P_0}{m} \cos(\Omega t - \theta)$$

$$\text{avec : } P_0 = \omega_0^2X_1m\sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1} \text{ et } \tan\theta = -2\xi\beta$$

3. Déterminer la vitesse critique du véhicule

Solution: La vitesse critique du véhicule est la vitesse pour laquelle la pulsation Ω s'accorde avec la pulsation propre ω_0 : le véhicule entre alors en résonance.

$$\text{On a alors : } \Omega = \omega_0 \text{ soit } \frac{2\pi v_{crit}}{L} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{La vitesse critique a pour expression : } v_{crit} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

application numérique :

Il faut tout d'abord calculer la raideur k : l'énoncé nous indique que : "La raideur k de la suspension est telle qu'on observe un allongement de 2 mm lorsqu'une masse de 50 kg y est suspendue."

On note $m' = 50 \text{ kg}$ et $\Delta l = 2 \text{ mm}$. On a (équilibre statique de la masse m' : $m'g = k\Delta l$ soit

$$k = \frac{m'g}{\Delta l} = \frac{50 \cdot 10}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$\text{Finalement : } v_{crit} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 21,4 \text{ m/s} = 76,9 \text{ km/h}$$

4. A 72 km/h quelle est l'amplitude du mouvement du châssis. Sachant que l'amortisseur présente un coefficient égal à 40% de l'amortissement critique.

Solution: On cherche une solution de la forme (régime permanent) $x_2 = \mathcal{R}e(X_2 e^{j(\Omega t - \theta - \varphi)})$

En remplaçant dans l'équation de mouvement on trouve :

$$X_2 e^{-j\varphi} e^{-j\theta} (-\Omega^2 + 2j\xi\omega_0\Omega + \omega_0^2) = \frac{P_0}{m} e^{-j\theta}$$

$$\text{Soit : } X_2 e^{-j\varphi} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + 2j\xi\beta}$$

On réécrit cette expression en mettant en évidence partie réelle et partie imaginaire :

$$X_2 e^{-j\varphi} = \frac{P_0}{k} \frac{(1 - \beta^2) - 2j\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$X_2 = \sqrt{\mathcal{R}e^2 + \mathcal{I}m^2} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

$$\text{Avec : } \frac{P_0}{k} = X_1 \sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1}$$

L'amplitude du mouvement s'écrit donc :

$$X_2 = \frac{X_1 \sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Application numérique :

pour $v = 72 \text{ km/h}$, on a $\Omega = 10,47 \text{ rad/s}$ et donc $\beta = 0,94$.

On nous indique que $\xi = 0,4$.

On trouve alors : $X_2 = 4,9 \text{ cm}$

On remarque que $X_2 > X_1$, ce qui est normal vu que l'on est proche de la résonance, qui est à $v = 76,9 \text{ km/h}$

5. Quelle serait cette amplitude, à la même vitesse, en l'absence d'amortissement.

Solution: En absence d'amortissement, on a $\xi = 0$, soit :

$$X_2 = \frac{X_1}{(1 - \beta^2)} = \frac{0,03}{1 - 0,94^2} = 27,3 \text{ cm}$$

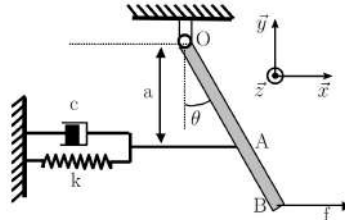
Lorsque l'excitation est proche de la résonance, l'amortissement montre tout son intérêt !

TD 4 - Réponse à des excitations harmoniques et quelconques

Exercice 13: Régime permanent périodique

On modélise une structure suspendue selon le schéma suivant : Une poutre rigide de longueur l et de masse m est suspendue à un bâti fixe par une liaison pivot.

Les caractéristiques viscoélastiques de la structure en liaison avec son support peuvent être représentées par une raideur k et un amortissement c concentrés à la distance a de la liaison pivot. L'amplitude des vibrations est faible ($\theta \ll 1$). A l'équilibre statique la tige est verticale.



1. Établir l'équation du mouvement de la structure

Solution: La tige effectue un mouvement de rotation, son équilibre dynamique en rotation s'écrit : $I\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_O(\text{ext} \rightarrow \text{tige})$ avec $I = \frac{ml^2}{3}$

La tige est soumise :

- la force de rappel élastique $-kx\vec{x}$ en A
- la force de rappel visqueux $-c\dot{x}\vec{x}$ en A
- le poids $-mg\vec{y}$ en G, centre de la tige (supposée homogène)
- la force de liaison en O (liaison supposée parfaite)
- la force extérieure $f(t)\vec{x}$

Calcul des moments :

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_O(\text{ext} \rightarrow \text{tige}) &= \vec{OA} \wedge (-kx\vec{x}) + \vec{OA} \wedge (-c\dot{x}\vec{x}) + \vec{OB} \wedge f(t)\vec{x} - \vec{OG} \wedge mg\vec{y} \\ &= (x\vec{x} - a\vec{y}) \wedge (-kx\vec{x}) + (x\vec{x} - a\vec{y}) \wedge (-c\dot{x}\vec{x}) + (l\sin\theta\vec{x} - l\cos\theta\vec{y}) \wedge f(t)\vec{x} - \\ &\quad \frac{l}{2}mg\sin\theta\vec{z} \\ &= (-akx - ac\dot{x} + lf\cos\theta - \frac{l}{2}mg\sin\theta)\vec{z} \end{aligned}$$

L'hypothèse des petits déplacements permet d'écrire :

$$x = a\tan\theta \approx a\theta$$

$$\dot{x} = \frac{a\dot{\theta}}{\cos^2\theta} \approx a\dot{\theta}$$

$$\cos\theta \approx 1$$

On peut alors réécrire :

$$\sum \mathcal{M}_O(\text{ext} \rightarrow \text{tige}) = -ka^2\theta - ca^2\dot{\theta} + f(t)l - mg\frac{l}{2}\theta$$

L'équilibre dynamique en rotation de la tige peut alors s'écrire :

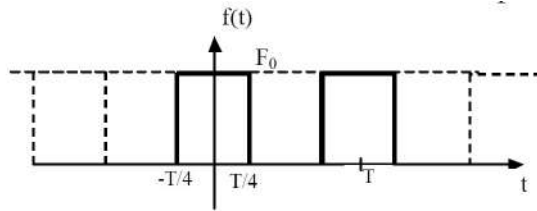
$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (ka^2 + mg\frac{l}{2})\theta = f(t)l$$

On peut également écrire cette équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{3f(t)}{ml}$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{3(ka^2 + mg\frac{l}{2})}{ml^2} ; \xi = \frac{3ca^2}{2\omega_0 ml^2}$$

2. Déterminer sa réponse à la force extérieure $f(t)$ représentée sur la figure suivante :



Solution:

Décomposition de la force en série de Fourier

La force $f(t)$ est périodique de période $T \Rightarrow$ on peut la décomposer en série de Fourier. Par soucis de rapidité de calcul, nous proposons de calculer les coefficients de la série de Fourier dans l'intervalle $[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$

La composante moyenne de la force est :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} f(t) dt = \frac{F_0}{2}$$

La fonction $f(t)$ est paire ($f(t) = f(-t) \Rightarrow$ les coefficients B_n sont nuls

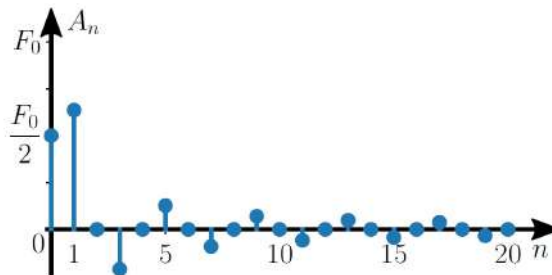
Calcul des coefficients A_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} f(t) \cos(n\Omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} F_0 \cos(n\Omega t) dt \\ &= \frac{2F_0}{n\Omega T} \left[\sin(n\Omega \frac{T}{4}) - \sin(n\Omega \frac{-T}{4}) \right] \end{aligned}$$

avec $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

$$A_n = \frac{4F_0}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = F_0 \text{sinc}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

L'amplitude des coefficients A_n suit un sinus cardinal, ils décroissent quand n augmente. Les coefficients de la série de Fourier (A_0 inclu) sont donnés dans la figure suivante :



La force excitatrice peut finalement s'écrire sous la forme : $f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_0 \text{sinc}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(n\Omega t)$

Réponse du système

Le système a un comportement linéaire, sa réponse à une somme d'excitations est la superposition des réponses à chacune de ces excitations. Ici l'excitation est une somme d'excitations harmonique, plus une composante continue, la réponse s'écrit :

$$\theta(t) = \Theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \cos(n\Omega t - \varphi_n)$$

avec :

composante continue : à $t = 0$ l'équation de mouvement s'écrit :

$$(ka^2 + mg\frac{l}{2})\theta(t=0) = l.f(t=0) \Rightarrow \Theta_0 = \frac{F_0 l}{2(ka^2 + mg\frac{l}{2})}$$

$$\Theta_n = \frac{F_0}{(ka^2 + mg\frac{l}{2})} \frac{\text{sinc}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{(1 - n^2\beta^2)^2 + (2n\beta\xi)^2}} \text{ avec } \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\tan\varphi_n = \frac{2\xi n\beta}{1 - n^2\beta^2}$$

Exercice 14: Réponse à une excitation quelconque - Méthode de Laplace

Pour cet exercice voir les propriétés essentielles des transformées de Laplace et les transformées usuelles dans le poly p41.

1. Rappeler l'équation du mouvement d'un système à 1 ddl amorti, soumis à une force $F(t)$ quelconque.

Solution: Pour un système 1ddl amorti, de masse m en translation, soumis à une force extérieure $F(t)$, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

où $x(t)$ est la variation de position du système de masse autour de sa position d'équilibre statique.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre et ξ le facteur d'amortissement.

2. Écrire la transformée de Laplace de cette équation.

Solution: Transformée de Laplace de cette équation :

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) + 2\xi\omega_0\mathcal{L}(\dot{x}) + \omega_0^2\mathcal{L}(x) = \frac{1}{m}\mathcal{L}(F)$$

avec :

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2\tilde{x}(s) - sx_0 - \dot{x}_0$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\tilde{x}(s) - x_0$$

$$\mathcal{L}(F) = \tilde{F}(s)$$

$$\text{On a donc : } \tilde{x}(s) [s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2] = \frac{\tilde{F}(s)}{m} + sx_0 + \dot{x}_0 + 2\xi\omega_0x_0$$

$$\text{soit : } \tilde{x}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \left[\frac{\tilde{F}(s)}{m} + sx_0 + \dot{x}_0 + 2\xi\omega_0x_0 \right]$$

$$\tilde{x}(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}}_{\text{Réponse permanente } \tilde{x}_p(s)} + \underbrace{\frac{(s+2\xi\omega_0)x_0 + v_0}{(s-s_1)(s-s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } \tilde{x}_t(s)}$$

où s_1 et s_2 sont les racines du dénominateur $s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2$

On en déduit l'expression de la réponse temporelle par transformation inverse.

Une machine de 200 kg est installée sur une surface élastique de raideur équivalente $k = 2.10^5 \text{ N/m}$, sans amortissement. Au cours de son fonctionnement, la machine est soumise à une force constante de 2000N pendant 3s.

3. Écrire l'équation du mouvement de la machine et sa transformée de Laplace.

Solution: Sans amortissement, l'équation de mouvement devient :

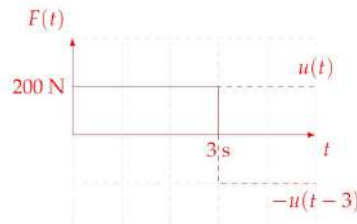
$$\ddot{x} + \omega_0^2x = \frac{F}{m}$$

On supposera de plus que les conditions initiales sont nulles : $x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = 0$.
La transformée de Laplace de cette équation s'écrit :

$$\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{m(s^2 + \omega_0^2)}$$

4. Exprimer la force $F(t)$ en utilisant l'échelon de Heavyside et calculer sa transformée de Laplace.

Solution: On peut exprimer la force $F(t)$ en fonction de deux fonctions échelon :



$$F(t) = F_0 (u(t) - u(t - 3))$$

La transformée de Laplace de cette fonction s'écrit :

$$\tilde{F}(s) = F_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right) = \frac{F_0}{s} (1 - e^{-3s})$$

5. En déduire $x(s)$, transformée de Laplace de la position de la machine.

Solution: On a : $\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{m(s^2 + \omega_0^2)}$

D'où $\tilde{x}(s) = \frac{F_0 (1 - e^{-3s})}{m s(s^2 + \omega_0^2)}$

6. Décomposer $x(s)$ en fractions simples.

Solution: On cherche ici à développer l'expression de $\tilde{x}(s)$ en une somme de fonctions simples pour la transformation inverse.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s) &= \frac{F_0}{m} (1 - e^{-3s}) \frac{1}{s(s^2 + \omega_0^2)} \\ &= \frac{F_0}{m} (1 - e^{-3s}) \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2 + \omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

Il faut identifier A et B :

On a : $As^2 + A\omega_0^2 + Bs = 1$

on remarque que : $\lim_{s \rightarrow 0} (As^2 + A\omega_0^2 + Bs) = A\omega_0^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\omega_0^2}$

On a alors : $1 + \frac{s^2}{\omega_0^2} + Bs = 1 \Rightarrow B = \frac{-s}{\omega_0^2}$

Finalement :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - e^{-3s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{se^{-3s}}{s^2 + \omega_0^2} \right)\end{aligned}$$

7. En déduire $x(t)$.

Solution: Transformée inverse de l'expression précédente :

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [u(t)(1 - \cos(\omega_0 t)) - u(t-3)(1 - \cos(\omega_0(t-3)))]$$

8. A quoi se réduit cette expression après l'excitation ($t > 3s$).

Solution: Pour $t > 3s$ on a : $u(t) = u(t-3) = 1$, ce qui donne :

$$x(t > 3s) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [\cos(\omega_0(t-3)) - \cos(\omega_0 t)]$$

9. A quelle condition le régime permanent résultant de la force F est-il éliminé ?

Solution: Cela revient à obtenir $x(t > 3s) = 0$

soit : $\cos(\omega_0(t-3)) = \cos(\omega_0 t)$

Il faudrait donc $3\omega_0 = 2n\pi$ $n > 0$ soit $\omega_0 = n \frac{2\pi}{3} \approx n * 2,09 \text{ rad/s}$

Or ω_0 dépend des caractéristiques de masse et de raideur de la machine : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Application numérique : $\omega_0 = 31,62 \text{ rad/s} \approx 15,097 \frac{2\pi}{3}$.

Cette configuration ne permet pas d'éliminer le régime permanent. On peut proposer de modifier la masse de la machine de manière à ce que la nouvelle pulsation propre soit un multiple entier de $\frac{2\pi}{3}$:

$$\omega'_0 = 15 \frac{2\pi}{3} \text{ (valeur la plus proche de } \omega_0) : \text{ on a alors : } m' = \frac{k}{\omega'^2_0} = 203,5 \text{ kg} = m + 3,5 \text{ kg}$$

Pour éliminer le régime permanent une solution technique possible est de lier rigidement une masse de 3,5kg à la machine.

10. Décrire le mouvement et donner son amplitude maximum.

Solution: Lorsque cette solution est mise en place, le mouvement de la machine est :

$$x'(t) = \frac{F_0}{m\omega'^2_0} [u(t)(1 - \cos(\omega'_0 t)) - u(t-3)(1 - \cos(\omega'_0(t-3)))]$$

On a vu que pour $t > 3s$ le mouvement s'arrête

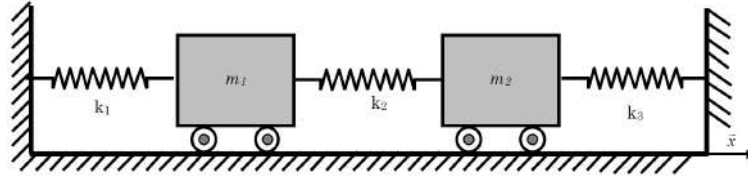
Pour $t < 3s$: $u(t) = 1$ et $u(t-3) = 0$, la machine effectue 15 oscillations avec :

$$x'(t) = \frac{F_0}{m\omega'^2_0} (1 - \cos(\omega'_0 t))$$

TD 5 - Systèmes à 2 degrés de liberté

Exercice 15: Oscillations libres d'un système à 2 ddls conservatif

On considère un système masses-ressorts tel que représenté figure suivante. Aucune pesanteur n'agit, les ressorts ont une masse négligeable et on observe les petits mouvements du système écarté de sa position d'équilibre stable et relâché. On note x_1 et x_2 les déplacements des masses relativement à cette position statique selon la seule direction x .



Pour les application numériques, on prendra :

$$m_1 = 1\text{kg} \quad m_2 = 4\text{kg} \quad k_1 = 3\text{N/m} \quad k_2 = 4\text{N/m} \quad k_3 = 12\text{N/m}$$

1. Écrire les équations du mouvement libre des deux masses selon le principe fondamental de la dynamique et les équations de Lagrange.

Solution:

Par le PFD

Il faut pour cela isoler successivement les deux masses et leur appliquer le PFD :

— PFD appliqué à M_1 :

$$m_1 \ddot{x}_1 = \sum F_{->m_1} = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

— PFD appliqué à M_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 = \sum F_{->m_2} = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

On en déduit le système de deux équations de mouvement :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Par les équations de Lagrange

Bilan énergétique du système :

— Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

— Énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$

Lagrangien : $L = E_c - E_p$

Equations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) \end{cases}$$

On en déduit les équations de mouvement :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2. En déduire les matrices de masse et de raideur

Solution:

A partir des équations de mouvement Le système d'équations de mouvement déterminé précédemment peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où $[K]$ et $[M]$ sont des matrices 2×2

par identification, on trouve :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

A partir des expressions des énergies

$$E_c = \frac{1}{2} \{\ddot{q}\}^t [M] \{\ddot{q}\}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\}$$

avec $\{q\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

On détermine évidemment les mêmes matrices masse et rigidité.

Application numérique : $[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$

3. Calculer les fréquences propres (on vérifiera que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{8}$ sont solutions du problème) et les modes propres du système.

Solution:

Calcul des fréquences propres

On cherche des solutions de la forme : $x_i(t) = X_i e^{j\omega t}$

soit : $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$

L'équation matricielle du mouvement s'écrit alors :

$$([K] - [M]\omega^2) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette équation matricielle admet des solutions non nulles pour :

$$\det([K] - [M]\omega^2) = 0$$

Soit : $\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$$(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2 - \omega^2[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)] + m_1 m_2 \omega^4 = 0$$

Cette équation du second degré en ω^2 admet deux racines ω_1^2 et ω_2^2 que nous ne calculerons

pas analytiquement ici.

Pour continuer la résolution nous choisissons de continuer avec l'application numérique afin d'alléger l'écriture :

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 - \omega^2 & -4 \\ -4 & 16 - 4\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7 - \omega^2)(16 - 4\omega^2) - 16 = 0$$

$$96 - 44\omega^2 + 4\omega^4 = 0$$

Vous pouvez résoudre cette équation du second degré et vérifier que vous trouvez : $\omega_1^2 = 3$ et $\omega_2^2 = 8$

Vous pouvez ici vous contenter de vérifier que $\omega_1^2 = 3$ et $\omega_2^2 = 8$ sont bien solution de l'équation.

Les pulsations propres de ce système sont donc ici : $\omega_1 = \sqrt{3} \text{rad/s}$ et $\omega_2 = \sqrt{8} \text{rad/s}$ soit $f_1 = 0,27 \text{Hz}$ et $f_2 = 0,45 \text{Hz}$

Calcul des vecteurs propres

Pour chaque pulsation propre ω_i , on cherche le vecteur d'amplitude $\begin{Bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \end{Bmatrix}$ solution de

$$\text{l'équation de mouvement : } ([K] - [M]\omega_i^2) \begin{Bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

mode 1 :

$$\begin{bmatrix} 7 - \omega_1^2 & -4 \\ -4 & 16 - 4\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow X_{11} = X_{12}$$

$$\text{Choix de normalisation : } X_{11} = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Les deux masses oscillent en phase à la même amplitude.

mode 2 :

$$\begin{bmatrix} 7 - \omega_2^2 & -4 \\ -4 & 16 - 4\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow X_{21} = -4X_{22}$$

$$\text{Choix de normalisation : } X_{21} = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{Bmatrix}$$

Les deux masses oscillent en opposition de phase, avec des rapport d'amplitude de 4.

4. En déduire la solution générale du problème pour le mode libre avec les conditions initiales : $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ et $x_2(0) = 0,025m$

Solution: Les solutions du problème s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + B \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$\text{soit : } \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\sqrt{3}t - \phi_1) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \cos(\sqrt{8}t - \phi_2)$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les amplitudes A et B ainsi que les phases ϕ_1 et ϕ_2

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = -A\sqrt{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\sqrt{3}t - \phi_1) - B\sqrt{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \sin(\sqrt{8}t - \phi_2)$$

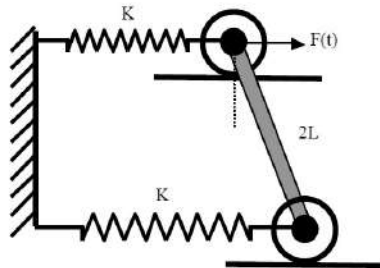
Conditions initiales : $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,025 \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

On en déduit : $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et $A = -B = 0,02$

soit finalement : $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 0,02 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - 0,02 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \cos(\sqrt{8}t)$

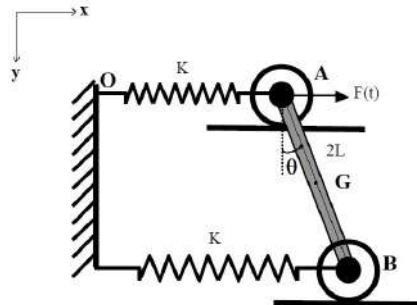
Exercice 16: Oscillations forcées d'une barre

On considère la barre suivante de masse M et de moment d'inertie I (en son centre de gravité) avec deux ressorts de raideur K .



1. Paramétrer le système avec ses différents degrés de liberté

Solution:



on notera $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}, \vec{y})$ le repère fixe lié au bâti (repère galiléen). Ce système a deux degrés de liberté, deux paramètres de déplacement sont donc nécessaires à décrire son mouvement. Différents choix sont possibles : (x_A, x_B) , (x_G, θ) (x_A, θ) ...

Nous proposons de choisir (x_A, θ) .

Pour simplifier les écritures nous noterons $x(t)$ la variation horizontale de position de A par rapport à la position d'équilibre statique.

2. En utilisant les équations de Lagrange, établir les équations du système. En déduire les fréquences propres

Solution:

Bilan énergétique de la barre :

Énergie cinétique

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(\text{barre}/\mathcal{R}_0) \}_G \{ \mathcal{C}(\text{barre}/\mathcal{R}_0) \}_G \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \vec{\Omega}^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right\}_G \left\{ m \vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right\}_G = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\sigma}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} = \vec{I}(G, \text{barre}) \cdot \vec{\Omega}^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right\}_G \\
\text{soit } E_c &= \frac{1}{2} m \left(\vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\
\text{avec : } \vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} &= \vec{V}_O^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} + \vec{G}\vec{O} \wedge \vec{\Omega}^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} = \dot{x}\vec{x} - L\vec{e}_r \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 = \dot{x}\vec{x} + L\dot{\theta}\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

$$\vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} = \dot{x}\vec{x} + L\dot{\theta}(\cos\theta\vec{x} - \sin\theta\vec{y}) = [\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta]\vec{x} - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}$$

$$\left(\vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right)^2 = \dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

Petits déplacements + linéarisation

$$\Rightarrow \left(\vec{V}_G^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} \right)^2 \approx \dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\text{finalement : } E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m L \dot{x} \dot{\theta}$$

Énergie potentielle

$$E_p = E_p(\text{ressortenA}) + E_p(\text{ressortenB}) + E_p(\text{pesanteur}) = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K (x + 2L\sin\theta)^2 + mg \frac{l}{2} (1 - \cos\theta)$$

Petits déplacements

$$\Rightarrow E_p \approx \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K (x^2 + 4L^2\theta^2 + 4L\theta x) + \frac{l}{4} g \theta^2 = K(x^2 + 2L^2\theta^2 + 2L\theta x) + \frac{l}{4} mg \theta^2$$

$$\text{Puissance de la force extérieure } P_e = \vec{F} \cdot \vec{V}_A^{\text{barre}/\mathcal{R}_0} = F \dot{x}$$

Équations de Lagrange

$$\text{Lagrangien : } \mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (I + mL^2) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mL \dot{x} \dot{\theta} - K(x^2 + 2L^2\theta^2 + 2L\theta x) - \frac{l}{4} mg \theta^2$$

Équations de Lagrange (rq : le système étudié est conservatif, il n'y a pas d'énergie dissipée) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{\theta}} \\ m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + 2Kx + 2KL\theta = F \\ \ddot{\theta}[I + mL^2] + mL\ddot{x} + (4KL^2 + \frac{L}{2}mg)\theta + 2LKx = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations peut être écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & mL \\ mL & I + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 2KL \\ 2KL & 4KL^2 + \frac{L}{2}mg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a ainsi déterminé les matrices masse et raideur du système.

Détermination des pulsations propres

pour déterminer les pulsations propres il faut chercher les solutions de : $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & 2KL - mL\omega^2 \\ 2KL - mL\omega^2 & 4KL^2 + \frac{L}{2}mg - (I + mL^2)\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2K - m\omega^2)(4KL^2 + \frac{L}{2}mg - (I + mL^2)\omega^2) - L^2(2K - m\omega^2)^2 = 0$$

$$(2K - m\omega^2)(2KL^2 - I\omega^2 + \frac{L}{2}mg) = 0$$

On en déduit :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{2KL^2 + \frac{L}{2}mg}{I}}$$

avec $I = \frac{(2L)^2}{12} = \frac{mL^2}{3} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{4K}{m} + \frac{g}{L})}$

3. On considère la force $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Calculer la puissance des efforts et en déduire le vecteur des efforts généralisés.

Solution: La puissance de l'effort $f(t)\vec{x}$ appliqué en A vaut :

$$P_e = f(t)\dot{x} = F_0 \cos(\Omega t) \dot{x}$$

On en déduit le vecteur des forces généralisées : $K = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial P_e}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Calculer les amplitudes des mouvements respectifs des degrés de liberté.

Solution: On pose $q = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$

L'équation de mouvement s'écrit : $M\ddot{q} + Kq = F$

On cherche une solution en régime permanent de la forme : $q = Q \cos(\Omega t) = Q \mathcal{R}e(e^{j\Omega t})$

L'équation de mouvement se réécrit alors : $KQ - \Omega^2 MQ = F$

soit : $\begin{pmatrix} 2K - m\Omega^2 & 2KL - mL\Omega^2 \\ 2KL - mL\Omega^2 & 4KL^2 - (I + mL^2)\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour déterminer les amplitudes X et Θ , on inverse la matrice $K - \Omega^2 M$:

$$X = \frac{\det \begin{pmatrix} F_0 & 2KL - mL\Omega^2 \\ 0 & 4KL^2 - (I + mL^2)\Omega^2 \end{pmatrix}}{\det(K - M\Omega^2)} = \frac{F_0(4KL^2 - (I + mL^2)\Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

$$\Theta = \frac{\det \begin{pmatrix} 2K - m\Omega^2 & F_0 \\ 2KL - mL\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}}{\det(K - M\Omega^2)} = \frac{-F_0(2KL^2 - mL\Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$