Partiel 3A002 : oct'15

Exo 1)

$$u_x + 2xy^2 u_y = 0$$

ég. caractéristiques : $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right)$$

$$u(0,y) = \ln(y) = f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{y}}_{w}\Big)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{w} \Rightarrow f(w) = \ln\left(\frac{1}{w}\right) = -\ln w$$

Sol. générale : $u(x,y) = -\ln\left(x^2 + \dfrac{1}{y}\right)$

Exo 1bis)

$$3u_y + u_{xy} = 0$$

(a) EDP d'ordre 2 de type parabolique.

(b) Soit $v = u_y \Rightarrow 3v + v_x = 0$

$$\Rightarrow v_x = -3v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -3\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -3x + cte.$$

$$v(x,t) = -$$

Exo 2 :

$$3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 0.$$

$$\delta = 1 - 3\times(-1) = +4 > 0 \quad \text{ég. hyp.}$$

Pour la sol. générale il y a 2 méthodes :

→ factorisation de l'EDP

ou

→ passage par la forme canonique.

Par factorisation : $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)u}_{v} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = v & (2) \end{cases}$$

Pour (1) on a : $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \Rightarrow v(x,t) = f(x-3t)$

Pour (2) : sol. ég. hom : u_h d'ég. caract : $\frac{dt}{dx} = -1$

$\Rightarrow u_h(x,t) = g(x+t)$

Sol. particulière $u_p(x,t)$ de la forme $h(x-3t)$ qui vérifie de plus : $4h' = f$.

Sol. générale : $u(x,t) = g(x+t) + h(x-3t)$

(ii) $3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 4(u_x - u_t)$.

$$\xi = x - 3t$$
$$\eta = x + t$$

$$u_x = w_\xi + w_\eta$$
$$u_t = -3w_\xi + w_\eta$$
$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$
$$u_{tt} = 9w_{\xi\xi} - 6w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$
$$u_{xt} = -3w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$

$$\Rightarrow 16 w_{\xi\eta} = 4(w_\xi + \cancel{w_\eta} + 3w_\xi - \cancel{w_\eta})$$
$$\Rightarrow 16 w_{\xi\eta} = 16 w_\xi \Rightarrow w_{\xi\eta} = w_\xi$$

on pose $w_\xi = v$

$$\Rightarrow v_\eta = v$$
$$\frac{dv}{d\eta} = v \Rightarrow \frac{dv}{v} = d\eta$$
$$\Rightarrow \ln v = \eta + c(\xi)$$
$$v(\xi,\eta) = K(\xi)\, e^{\eta}$$
$$\Rightarrow w = \int v\, d\xi = H(\xi)e^{\eta} + G(\xi) \Rightarrow u(x,t) = H(x-3t)e^{x+t} + G(x-3t)$$

Exo 3)

$$\begin{cases} u_{ttx} - u_{xxx} = 0, & -\infty < x < +\infty \quad t > 0. \\ u_x(x,0) = 0 \\ u_{xt}(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

On pose. $v(x,t) = u_x(x,t)$

$v_{tt} - v_{xx} = 0$ éq. ondes.

$v(x,0) = 0$

$v_t(x,0) = \sin x.$

D'après d'Alembert :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(s)\,ds =$$

$$= +\frac{1}{2}\left[-\cos(x+t) + \cos(x-t)\right]$$

Donc $u(x,t) = \frac{1}{2}\int \left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right] dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) - \sin(x+t)\right] + c(t)$$

Vérif : $u_x = \frac{1}{2}\cos(x-t) - \frac{1}{2}\cos(x+t)$

$u_{xx} = \frac{1}{2}(-\sin(x-t)) + \frac{1}{2}\sin(x+t)$

$u_{xxx} = \frac{1}{2}\cancel{(}-\cos(x-t) + \frac{1}{2}\cos(x+t)$

$u_{xt} = +\frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t)$

$u_{xtt} = -\frac{1}{2}\cos(x-t) + \frac{1}{2}\cos(x+t)$

Donc on a bien $u_{xtt} - u_{xxx} = 0.$

...o 5)

$$u_t = u_{xx} - au, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0.$$

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \ \forall t > 0, \ a \in \mathbb{R}.$$

...i) $$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(x,t)\,dx$$

On utilise la méthode de l'énergie :

$$u_t = u_{xx} - au \quad | \times u$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_t u}_{\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t} = u_{xx}u - au^2$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t = (u_x u)_x - u_x^2 - au^2$$

...uis on intègre :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_0^\ell \frac{1}{2}u^2(x,t)\,dt}_{V(t)} = \underbrace{\left[u_x u\right]_0^\ell}_{0.} - \int_0^\ell (u_x^2 + au^2)\,dx$$

...) $$\frac{dV}{dt} = -\underbrace{\int_0^\ell u_x^2\,dx}_{\geq 0} - a\int_0^\ell u^2\,dx \leq 0$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -a\int_0^\ell u^2\,dx = -2aV(t)$$

appliquée au t_0 on a :

$$0 \leq -2aV(t_0) \leq 0$$

$\Rightarrow V(t_0) = 0.$

Comme $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (d'après (ii))

$\Rightarrow V$ est decroissante et donc :

$$V(t) \leq V(t_0) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Mais $V(t) \geq 0, \forall t$ par sa définition

Donc $V(t) = 0$ pour $t \geq t_0$.