

MU5MEF39 : Optimisation en Aérodynamique (CM3)

A. Belme

7 janvier 2022

Contenu du cours

- ➊ Introduction à l'optimisation : définition et notations, convexité, existence et unicité solution locale et globale
- ➋ Conditions d'optimalité, rappels différentiabilité, inégalité d'Euler, contraintes convexes, Lagrangien et multiplicateurs de Lagrange, point-selle, Th. Kuhn-Tucker
- ➌ **Problème duale : formalisme adjoint continu et discret**
- ➍ Algorithmes d'optimisation
- ➎ Analyse des sensibilités et applications
- ➏ Optimisation de maillage*
- ➐ Optimisation sous incertitudes*

3. Problème dual : méthode adjoint

L'utilisation des problèmes duales (adjoint) dans le contrôle optimal n'est pas nouvelle (J.L. Lions 1971).

En dynamique des fluides O. Pironeau a été le pionnier dans l'usage de l'adjoint pour le design optimal ou encore Jameson pour l'aéronautique (écoulement potentiel, Euler, Navier-Stokes).

SU2 utilise l'adjoint pour l'optimisation de design et l'analyse de sensibilités. Concrètement **l'adjoint nous permet de calculer plus efficacement les conditions d'optimalité surtout quand le nombre de variables de design est important.**

C'est quoi l'adjoint ?

- L'adjoint est la solution d'un système dit **système adjoint**, qui se résoud par une approche numérique sur le même maillage que les équation d'état (Navier-Stokes ou Euler) qui nous intéressent
- Le système adjoint **dépend de** : **la fonctionnelle J à minimiser** et de **l'équation d'état**
- C'est un outil "moderne" , largement utilisé dans le contrôle optimal, analyse des sensibilités, optimisation (avec contrainte), finance, incertitudes, adaptation de maillage, ...

C'est quoi l'adjoint ?

- *Les avantages* : outil multi-objectif, très efficace quand le nombre de variables de design (contrôle) est important
- *Les inconvénients* : nécessite de modifier le code de simulation, pour des écoulements instationnaire il avance en temps au sens invers (du temps final au temps initial) et nécessite la solution de l'équation d'état à chaque pas de temps.
- Il existe *deux visions* de l'adjoint : **discret** et **continue**. SU2 utilise les deux versions.
- Il existe deux méthodes pour dériver le système adjoint : **algèbre linéaire** ou via **le Lagrangien**.

La méthode adjoint

Soit un ensemble de variables de design (ou contrôle)¹ $\alpha \in \mathbb{R}^k$ qui contrôlent par exemple la géométrie d'un profil d'aile.

Soit W la solution discrète des équations de la mécanique de fluide (Navier-Stokes, Euler,...), définie en tout point du maillage.

L'objectif est de minimiser une fonctionnelle $j(\alpha) = J(\alpha, W)$. Il s'agit d'**un problème de minimisation avec contrainte** : W doit vérifier l'équation de la mécanique de fluides ainsi que les conditions auxiliaires imposées, c.a.d :

$$\Psi(\alpha, W(\alpha)) = \Psi(\alpha, X(\alpha)) = 0$$

avec X le vecteur de coordonnées du maillage, qui dépend des variables de design α . Une difficulté est liée à la dépendance non-linéaire de W par rapport à α .

1. Pour simplifier on considère un problème à dimension finie

La méthode adjoint

Question : Comment mesure-t-on les perturbation de j et de la contrainte due a des perturbations des variables de contrôle α ?

La méthode adjoint

Si le vecteur design α est de dimension 1 alors, les perturbation sur J due a une perturbation de α s'écrivent :

$$\frac{dj}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial W} \frac{dW}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}$$

En appliquant la même perturbation a notre équation d'état on trouve que $\frac{dW}{d\alpha}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial W} \frac{dW}{d\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0$$

Remarque : Pour $k > 1$, $\frac{dj}{d\alpha}$ est un gradient.

La méthode adjoint

On pose les notations suivantes :

$$u = \frac{dW}{d\alpha} \quad A = \frac{\partial \Psi}{\partial W}$$

$$g^T = \frac{\partial J}{\partial W} \quad f = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

Alors on obtient :

$$\frac{dj}{d\alpha} = g^T u + \frac{\partial J}{\partial \alpha}$$

avec la contrainte $Au = f$

La méthode adjoint

Le terme $g^T u$ peut-être calculé directement ou alors en utilisant une approche duale (dite approche adjoint). Montrons maintenant qu'est ce que c'est cette approche duale.

Soit u solution de $Au = f$. La forme duale consiste à évaluer $v^T f$ avec la solution adjoint v qui satisfait le système adjoint suivant :

$$A^T v = g$$

Voici pourquoi on a une équivalence entre les deux formes :

$$v^T f = v^T Au = (A^T v)^T u = g^T u$$

Si on a un f et un g , on ne gaine (ou perd) rien en utilisant l'adjoint. Néanmoins, si on souhaite évaluer la valeur de J pour p valeur de f , et m valeurs de g , le choix est alors de résoudre : soit p fois l'équation d'état, soit m fois le système adjoint. Si la dimension de notre système est très grande alors il est beaucoup moins coûteux de calculer des produits scalaires, plutôt que de résoudre les systèmes d'équations.

La méthode adjoint

La vision a travers les multiplicateurs de Lagrange

Dans cette vision, utilisé souvent par la communauté aérodynamique, l'adjoint prend le rôle des multiplicateurs de Lagrange, souvent notées λ . Ainsi, soit le lagrangien :

$$I(W, \alpha) = J(W, \alpha) - \lambda^T \Psi(W, \alpha)$$

On considère une perturbation globale de I :

$$dI = \left(\frac{\partial J}{\partial W} - \lambda^T \frac{\partial \Psi}{\partial W} \right) dW + \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} - \lambda^T \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$

La méthode adjoint

Si λ^T satisfait l'équation de l'adjoint suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial W} - \lambda^T \frac{\partial \Psi}{\partial W} = 0$$

autrement dit

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W} \right)^T \lambda = \left(\frac{\partial J}{\partial W} \right)^T$$

alors :

$$dI = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} - \lambda^T \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$

et donc on obtient directement $dI/d\alpha$.

La méthode adjoint

Approche continue pour EDP : Dans le cas des EDP une simple extension de l'approche algèbre linéaire suffit pour dériver le problème adjoint.

En effet, on se rappelle le produit scalaire : $(v, u) = \int_{\Omega} v^T u dx$.

Supposons que notre quantité d'intérêt est (g, u) avec u solution de l'EDP $Lu = f$ sur Ω avec des conditions aux limites homogènes.

En utilisant l'adjoint, évaluer (g, u) revient à évaluer (v, f) avec v la solution du problème adjoint

$$L^* v = g$$

avec des conditions aux limites associées.

Comme précédemment on peut voir l'équivalence des formulations :

$$(v, f) = (v, Lu) = (L^* v, u) = (g, u).$$

La méthode adjoint

Approche continue pour EDP : Un exemple

Soit l'équation de convection-diffusion 1D :

$$Lu = \frac{du}{dx} - \epsilon \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1$$

avec les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$.

Alors, en utilisant l'IPP on obtient :

$$\begin{aligned}(v, Lu) &= \int_0^1 v \left(\frac{du}{dx} - \epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx \\&= \int_0^1 u \left(-\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \left[vu - \epsilon v \frac{du}{dx} + \epsilon u \frac{dv}{dx} \right]_0^1 \\&= \int_0^1 u \left(-\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \left[-\epsilon v \frac{du}{dx} \right]_0^1\end{aligned}$$

La méthode adjoint

Pour obtenir l'égalité $(v, Lu) = (g, u)$ on observe l'opérateur adjoint est :

$$L^*v = -\frac{dv}{dx} - \epsilon \frac{d^2v}{dx^2}$$

et pour annuler les termes aux bords on impose les conditions $v(0) = v(1) = 0$.

On remarque une inversion de la convection !

En pratique il existe au moins deux méthodes pour introduire l'adjoint dans un code de calcul :

- l'approche dite "analytique" : consiste à implémenter explicitement la résolution du système adjoint
- utiliser un outil de différentiation automatique du code de calcul. Des logiciels existent pour différents langages de programmation : TAPENADE, ADDIFOR, librairies(dolfen, etc)