Examen partiel

Écoulements visqueux & perturbations régulières

▷ **Consignes :**

- Durée de l'épreuve : 2 heures
- Le sujet est sur **3 pages**
- Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié
- Aucun document autorisé
- Aucun appareil électronique autorisé
- Travail strictement personnel
- La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale
- Chaque exercice peut être traité indépendamment des autres

1 Le pinceau de Taylor (1960)

Lorsqu'un pinceau gorgé de couleur est appliqué sur une paroi, la peinture imbibant initialement le pinceau en est extraite par la contrainte visqueuse exercée au niveau de la frontière solide, pour former un film liquide vite aplani par la tension de surface. L'objet de l'exercice est de caractériser l'épaisseur δ du film de peinture aposé dans le cadre d'un modèle rudimentaire n'ayant aucune prétention de réalisme, mais permettant d'identifier les facteurs pertinents dans le processus de déposition d'un film liquide. Ce modèle a été proposé par G.I. Taylor en 1960.

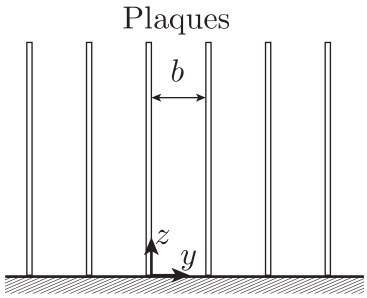

Fig. 1 : **Le pinceau de Taylor.** Ce pinceau modèle est constitué d'un réseau périodiques de plaques d'extension infinie dans la direction x et semi-infinie dans la direction z. Chaque cellule de ce pinceau a une extension latérale b.

La géométrie de ce pinceau modèle est représentée sur la figure 1. On note b l'espacement inter-plaque, ρ la masse volumique du liquide et μ sa viscosité dynamique. La vitesse relative de défilement de la paroi par rapport au pinceau est notée $U\boldsymbol{e}_x$ (autrement dit, dans le référentiel des plaques, la vitesse de la paroi inférieure est $U\boldsymbol{e}_x$). Loin de la plaque, en $z \to \infty$ on suppose que le fluide est au repos. On suppose ici une évolution stationnaire et incompressible, et on néglige les effets de gravité et de tension de surface. On suppose de plus que le problème est stationnaire, **invariant dans la direction** x et qu'**aucun gradient de pression n'est imposé**. Dans toute l'étude on considérera un écoulement parallèle décrit par $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0) = u\boldsymbol{e}_x$.

1. *(1 point)* Par analyse dimensionnelle, proposer une loi d'échelle pour l'épaisseur δ du film liquide déposé. On notera qu'en l'absence d'effet instationnaire, d'inertie ou de pesanteur, δ ne peut pas dépendre de ρ.
2. *(1 point)* Écrire les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement puis montrer, en exploitant les hypothèses du problème, que ces équations se ramènent à une équation de Laplace pour u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

3. *(1 point)* On s'intéresse à l'écoulement au sein d'une "cellule" comprise entre deux plaques adjacentes situées en $y = 0$ et $y = b$. Expliciter les conditions limites s'appliquant sur u en $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ et en $z \to \infty$.

4. *(1 point)* En recherchant une solution par la technique de séparation de variables et en exploitant les conditions limites en $y = 0$, $y = b$ et $z \to \infty$, montrer que le champ de vitesse est de la forme :

$$u(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-n\pi z/b}. \tag{2}$$

5. *(1 point)* Montrer la relation d'orthogonalité

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2}b & \text{si } n = m \end{cases} \tag{3}$$

6. *(1 point)* En exploitant la relation d'orthogonalité précédente, déterminer les poids de la décomposition spectrale A_n à partir de la condition limite à la paroi.
7. *(0,5 point)* En déduire l'expression du champ de vitesse solution u.
8. *(1 point)* Calculer le débit volumique Q à l'échelle d'une cellule.
   On donne à toutes fins utiles :

$$\sum_{n\,\text{impair}} \frac{1}{n^3} = \tfrac{7}{8}\zeta(3)$$

   où $\zeta(x)$ est la fonction ζ de Riemann, et

$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{n\text{impair}} \frac{1}{n^3} = \tfrac{7}{\pi^3}\zeta(3) \simeq 0.271$$

9. *(0,5 point)* La couche de peinture laissée par ce dispositif est au repos par rapport au support, i.e. a une vitesse U par rapport au pinceau, et a une épaisseur δ. En notant qu'une cellule produit une portion de couche de largeur b, déduire de l'expression de Q l'épaisseur de liquide δ.
10. *(0,5 point)* Commenter.

2 Conditions à la surface d'une vague

Dans le but de caractériser l'atténuation visqueuse de vagues, on souhaite obtenir les équations et conditions limites interfaciales pertinentes pour décrire la houle au premier ordre, en gardant les termes de viscosité. On considère donc un domaine liquide semi-infini borné par une surface d'équation $y = \eta(x,t)$, présentant une longueur d'onde caractéristique λ. On suppose la surface libre de contraintes, c'est-à-dire que l'on pose la pression dans l'air à 0 (ce qui revient à travailler avec la variable $p - P_{\text{atm}}$) et on néglige les effets visqueux dans l'air. La gravité $\boldsymbol{g}$ est bien sûr prise en compte, mais on néglige les effets de tension de surface. On suppose enfin que l'écoulement suit une évolution incompressible dans le liquide et bidimensionnelle, et on note la pression p et le champ de vitesse $\boldsymbol{u} = u(x,y)\boldsymbol{e}_x + v(x,y)\boldsymbol{e}_y$.

1. *(1 point)* Faire un dessin représentant la géométrie du problème et mentionnant toutes les grandeurs pertinentes.

▷ **Équations gouvernant le mouvement.**

2. *(1 point)* Écrire les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (en projection suivant $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_y$) dans le liquide.

▷ **Conditions limites interfaciales.** On cherche ici à expliciter les conditions limites cinématique et dynamique s'appliquant de façon générale à une interface décrite par l'équation $y = \eta(x,t)$.

3. *(0,5 point)* Proposer une fonction $\mathscr{S}(x,y,t)$ s'annulant à l'interface à tout instant.
4. *(1 point)* Calculer le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ à l'interface.
5. *(0,5 point)* En déduire l'expression du vecteur tangent $\boldsymbol{t}$.
6. *(1 point)* Écrire la condition limite cinématique. À quel endroit s'applique cette condition limite ?
7. *(2 points)* Écrire la condition limite dynamique correspondant à la continuité de la contrainte normale (en notant bien que la surface est libre de contraintes et que l'on néglige les effets de tension de surface). À quel endroit s'applique cette condition limite ?
   On rappelle à toutes fins utiles l'expression du tenseur des contraintes d'un fluide newtonien :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & -p + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{4}$$

8. *(1 point)* Écrire la condition limite dynamique traduisant la continuité des contraintes tangentielles.

▷ **Adimensionnement.**

9. *(1,5 points)* Adimensionner les équations du mouvement et conditions limites à l'aide de :

$$
\begin{cases}
(x, y) = \lambda \ (\bar{x}, \bar{y}) & \text{(5a)} \\
(u, v) = \sqrt{g\lambda} \ (\bar{u}, \bar{v}) & \text{(5b)} \\
\quad p = \rho g \lambda \ \bar{p} & \text{(5c)} \\
\quad \eta = \delta \bar{\eta} & \text{(5d)}
\end{cases}
$$

On notera $\mathrm{Re} = \rho\sqrt{g\lambda}\lambda/\mu$ le nombre de Reynolds et $\epsilon = \delta/\lambda$ le paramètre de cambrure, que l'on supposera très petit devant 1 dans toute la suite.

▷ **Ordre 0 : équilibre hydrostatique.** On considère tout d'abord l'ordre 0 des équations, c'est-à-dire que l'on pose $\epsilon = 0$ (surface plane). Dans ce cas il n'y a pas d'écoulement et le liquide est à l'équilibre hydrostatique.

10. *(0,5 point)* Montrer qu'à l'ordre 0 le champ de pression est $\bar{p}_0 = -\bar{y}$.

▷ **Ordre 1 : vague linéarisée.** On s'intéresse maintenant à l'effet d'une petite perturbation de surface en posant $\epsilon \ll 1$. On suppose que cette perturbation est régulière, de sorte que les champs de vitesse et de pression puissent s'écrire :

$$
\begin{cases}
\bar{p} = -\bar{y} + \epsilon \ \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) & \text{(6a)} \\
(\bar{u}, \bar{v}) = \epsilon \ (\bar{u}_1, \bar{v}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) & \text{(6b)}
\end{cases}
$$

On notera ici que le champ de vitesse est d'ordre ϵ : en effet, sans perturbation de surface il n'y a aucun mouvement induit.

11. *(1 point)* En injectant ce développement dans les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement adimensionnées, obtenir le jeu d'équations décrivant le mouvement au premier ordre en ϵ au sein du liquide.

▷ **Transfert de conditions limites.**

12. *(1 point)* Transférer la condition limite cinématique sur la surface non déformée $\bar{y} = 0$ au premier ordre en ϵ. On effectuera les simplifications nécessaires pour ne conserver que le premier ordre en ϵ de cette équation.
13. *(1 point)* Transférer de même la condition limite dynamique portant sur la continuité de la contrainte normale.
14. *(1 point)* Faire de même avec la condition limite dynamique traduisant la continuité de la contrainte tangentielle.
15. *(1 point)* En redimensionnant ces conditions limites, déduire qu'au premier ordre en ϵ les conditions limites à appliquer pour décrire une houle en présence de viscosité sont :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = v_1|_{y=0} & \text{(7a)} \\
\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} + \left.\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{y=0} = 0 & \text{(7b)} \\
p_1|_{y=0} = 2\mu \left.\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{y=0} + \rho g \eta & \text{(7c)}
\end{cases}
$$