



SORBONNE UNIVERSITÉS

# Mécanique en pratique - Projet Migration d'une Bulle

*Valentin Duvivier - Matej Mayet*

Formation Coursus de Master en Ingénierie - 2<sup>e</sup> année

2018-2019

# Introduction

Depuis Lord Rayleigh qui a traité, en 1917, le problème de l'implosion d'une bulle immobile, de nombreux auteurs ont abordé l'étude de la dynamique des bulles.

Ils ont en général écrit l'équation du mouvement en tenant compte de tous les paramètres qui interviennent.

Mais, dans un esprit de simplification qui leur permettait de déterminer des solutions, certains ont été conduits à négliger des termes qui leur ont paru du second ordre.

D'autres les ont conservés mais n'ont pas exploité entièrement les résultats.

Ne pouvant pas traiter ce problème d'une façon : complète, nous avons dû avoir recours également à des hypothèses.

Dans cette mise en application du principe de la remontée d'une bulle, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, nous allons quantifier cet écoulement par des nombres sans dimension, créés des variables du problème, et chercher à comprendre comment ces nombres interagissent entre eux. L'objectif de ce projet autour de ce principe de mécanique des fluides est donc de comprendre en détail le lien qui existe entre les variables initiales du problème et d'analyser le comportement de ces variables entre elles. Par ailleurs, il s'agit également de mener une démarche de recherche en autonomie sur un phénomène physique prenant en compte plusieurs paramètres.

Nous commencerons donc par une approche phénoménologique du principe étudié, puis une analyse dimensionnelle permettra de comprendre les paramètres à étudier dans le cas étudié, la démarche expérimentale visant à l'étude de ces valeurs sera abordée et nous termineront par l'analyse des résultats obtenus.

## 1 Description du problème

Le phénomène observé consiste en la translation verticale d'une bulle d'air de hauteur  $h_t$  dans un fluide de viscosité et masse volumique respectivement  $\mu$  et  $\rho_{fluide}$  dans un tube en verre de diamètre  $D_t$ .

Nous avons donc dans le cadre de cette expérience un liquide de masse volumique  $\rho_{fluide}$  qui remplit le tube jusqu'à une hauteur  $H$ . On rebouche ensuite l'extrémité du tube de manière entièrement hermétique.

Nous admettrons que la dynamique du liquide peut être caractérisée par 9 variables :  $\rho_{fluide}$ ,  $\Delta\rho$ ,  $U_b$ ,  $D_t$ ,  $\sigma$ ,  $\mu_{fluide}$ ,  $\theta$ ,  $H_b$  et  $g$ .

Enfin, de tous ces paramètres initiaux apparaît la grandeur étudiée : la vitesse d'écoulement du liquide.

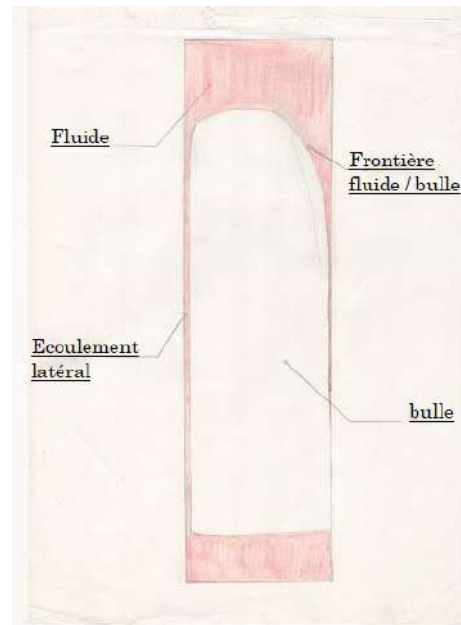


Figure 1: Schéma du dispositif étudié

## 2 Étude de la variation de la vitesse

Cette partie aura pour but d'étudier la variation de la vitesse au cours de la remontée. L'idée ne sera pas de quantifier la variation de la vitesse en fonction des différents paramètres de notre étude mais de définir si oui ou non, dans un fluide homogène, la remontée de notre bulle se fait à vitesse constante. Pour cela, nous avons défini le protocole de mesure suivant :

- *Variation de l'angle d'écoulement*
- *Variation du diamètre du tube*
- *Variation de la viscosité du fluide*

Nous chercherons donc à évaluer la linéarité de la vitesse au cours du temps selon 3 paramètres : le diamètre du tube  $Dt$ , la viscosité du fluide  $\mu_{fluide}$  et l'angle d'écoulement  $\theta$ . Pour ce qui est de la viscosité augmentée, nous avons fait un mélange de 75%/. glycérine, 25%/. d'eau. Pour ce qui est de la mesure des vitesses, nous avons pris en vidéo à plusieurs reprises les remontées de la bulle, en faisant varier un à un les différents paramètres listés ci-dessus.

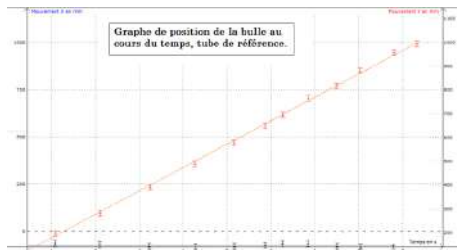


Figure 2: Vitesse du tube de référence

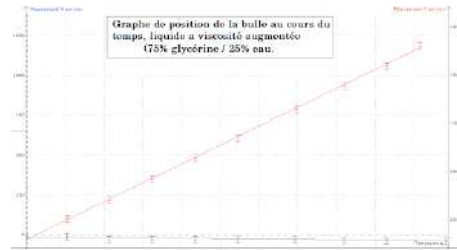


Figure 3: Vitesse pour la viscosité augmentée

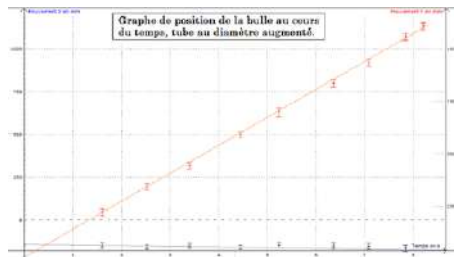


Figure 4: Vitesse pour le diamètre augmenté

Nous avons sur ces trois courbes et en rouge l'évolution de la hauteur de la bulle en fonction du temps. On a en somme étudié le temps que mettait la bulle pour remonter et plus particulièrement le type d'évolution qu'elle suivait. A l'aide de ces trois courbes on peut aisément en conclure que, dans un fluide homogène, la remontée de la bulle se fait à vitesse constante. Cette étude de la vitesse va nous permettre d'avoir une idée sur le comportement de la vitesse de la bulle lors de cette remontée mais aussi de s'assurer que notre étude n'est pas plus complexe que l'on pensait. En effet, le fait que la vitesse soit en tout point constante nous permet de faire une étude globale de cette dernière et non une études locale.

Désormais, nous allons chercher à quantifier cette variation de la vitesse en fonction des autres paramètres de notre étude.

### 3 Analyse dimensionnelle

D'après les variables citées dans la partie précédente, nous pouvons identifier les paramètres qui auront un impact sur le temps d'écoulement, en utilisant le théorème de Buckingham  $\Pi$ .

Nous avons donc 9 variables et un rang valant 3. Il y aura donc  $9 - 3 = 6$   $\Pi$ , 6 nombres adimensionnels. Sélectionnons trois variables qui seront des variables de différentes dimensions qui contiennent les dimensions fondamentales que sont la masse, la longueur et le temps. Les dimensions des variables prises en compte sont les suivantes:

- $[g] = L.T^{-2}$
- $[U_b] = L.T^{-1}$
- $[\rho_{fluide}] = M.L^{-3}$
- $[D_t] = L$
- $[H_b] = L$
- $[\Delta\rho] = M.L^{-3}$
- $[\sigma] = M.T^{-2}$
- $[\theta] = 1$
- $[\mu_{fluide}] = M.L^{-1}.T^{-1}$

Nous fixerons en variables  $D_t$ ,  $\rho_{fluide}$  et  $\mu_{fluide}$ , qui respectent les conditions nécessaires. Ainsi, il est possible de déterminer les 6 nombres  $\Pi$ :

•

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \rho_f^a D_t^b \mu_f^c U_b = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c L.T^{-1} \\ &\Rightarrow a = 1; b = 1; c = -1 \\ \Pi_1 &= \rho_f \times U_b \times D_t \times \mu_f^{-1} = \frac{\rho_f U_b D_t}{\mu_f} \Leftarrow \text{Nombre de Reynolds}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \rho_f^a D_t^b \mu_f^c \Delta\rho = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c M.L^{-3} \\ &\Rightarrow a = -1; b = 0; c = 0 \\ \Pi_2 &= \Delta\rho \times \rho_f^{-1} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \Leftarrow \text{Rapport de Masse Volumique}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= \rho_f^a D_t^b \mu_f^c \sigma = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c M.T^{-2} \\ &\Rightarrow a = 1; b = 1; c = -2 \\ \Pi_3 &= \rho_f \times \sigma \times D_t \times \mu_f^{-2} = \frac{\rho_f \sigma D_t}{\mu_f^2} \Leftarrow \text{Nombre de Laplace}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\Pi_4 &= \rho_f^a D_t^b \mu_f^c \theta = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c 1 \\ &\Rightarrow a = 0; b = 0; c = 0 \\ \Pi_4 &= \theta\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\Pi_5 &= \rho_f^a D_t^b \mu_f^c H_b = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c L \\ &\Rightarrow a = 0; b = -1; c = 0 \\ \Pi_5 &= H_b \times D_t^{-1} = \frac{H_b}{D_t} \Leftarrow \text{Rapport de Longueur}\end{aligned}$$

•

$$\Pi_6 = \rho_f^a D_t^b \mu_f^c g = (M.L^{-3})^a (L)^b (M.L^{-1}.T^{-1})^c L.T^{-2}$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 3; c = -2$$

$$\Pi_6 = \rho_f^2 \times g \times D_t^3 \times \mu_f^{-2} = \frac{\rho_f^2 g D_t^3}{\mu_f^2} \Leftarrow \text{Nombre d'Archimède}$$

Nous obtenons alors:  $\Phi(\Pi_1; \Pi_2; \Pi_3; \Pi_4; \Pi_5; \Pi_6) = 0$ . Nous nous intéressons ici à  $\Pi_1$  car c'est la variable qui contient la vitesse de la bulle, d'où:  $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2; \Pi_3; \Pi_4; \Pi_5; \Pi_6)$

$$\Rightarrow \frac{\rho_f U_b D_t}{\mu_f} = \Phi\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_f}; \frac{\rho_f \sigma D_t}{\mu_f^2}; \theta; \frac{H_b}{D_t}; \frac{\rho_f^2 g D_t^3}{\mu_f^2}\right)$$

$$\Rightarrow Re = \Phi\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_f}; La; \theta; \frac{H_b}{D_t}; Ar\right)$$

Nous en déduisons que le nombre de Reynolds, et plus spécifiquement la vitesse, dépendent du nombre de Laplace  $La$ , du nombre d'Archimède  $Ar$ , des rapports de longueurs  $H_b/D_t$  et des masses volumiques  $\Delta\rho/\rho$ , ainsi que de l'angle entre le tube et la verticale  $\theta$ .

Dans la suite de cette étude, nous mesurerons la vitesse d'écoulement en fixant certains paramètres, et ce afin de pouvoir par la suite tracer les courbes de  $\pi_1$  en fonction des autres  $\pi$ . Pour cela, nous avons décidé de mesurer la vitesse d'écoulement à l'aide d'un pointage : pour chaque mesure que nous avons réalisés, nous avons filmé l'expérience pour par la suite faire le pointage sur logiciel et déduire la vitesse de remontée de la bulle. Nous faisons cette expérience avec différentes caractéristiques de tubes (hauteur, diamètre, etc) afin d'obtenir plusieurs graphes de  $\pi_1$  en fonction des autres  $\pi$  et d'en déduire la dépendance exprimée précédemment.

## 4 Montage de l'expérience et données expérimentales

Nous utilisons un tube de verre de diamètre  $D_t$  que nous bouchons d'un côté à l'aide d'une pâte hermétique et de cellophane. Nous remplissons le tube de fluide jusqu'à une hauteur  $H$  qui sera déterminée dans l'optique d'avoir un volume de bulle toujours constant. Nous faisons ensuite varier chacun des paramètres un à un, dans le but de déterminer leur impact sur la vitesse de la bulle. Par exemple, pour la viscosité du fluide, elle sera changée en mélangeant un certain taux de glycérine avec de l'eau, tout en gardant les autres variables constantes (ex : même diamètre de tube donc  $D_t = \text{cst}$ ). Nous prenons des vidéos de ces expériences, pour ensuite observer au ralenti / plus en détail, la dynamique de la bulle (sa vitesse, sa forme, son accélération etc..). Nous prendrons comme incertitude pour la hauteur et le diamètre du tube la moitié de la résolution de la règle, soit 0.5mm. Sur la vitesse, nous considérons la moitié de la précision du logiciel de montage pour déterminer le temps de parcours de la bulle (0.2ms) + la moitié de la résolution de la règle pour la hauteur du tube (0.5mm).

Les incertitudes sur les nombres  $\pi$  seront calculées par la formule:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

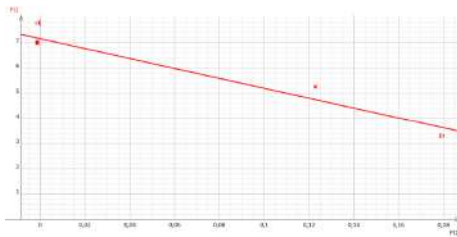


Figure 5:  $Re$  en fonction du rapport  $\Delta\rho/\rho_{fluide}$

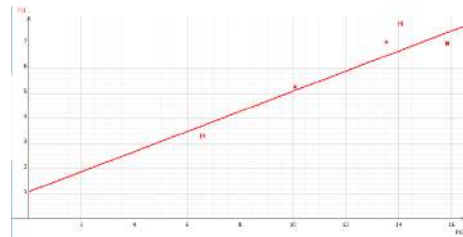


Figure 6:  $Re$  en fonction du nombre de Laplace  $La$

Nous observons sur la Figure 2, représentant le graphe de la courbe de  $\pi_1$  en fonction de  $\pi_2$ , qu'il s'agit d'une courbe affine montrant qu'il y a une relation de proportionnalité entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , que nous expliciterons dans la partie analyse des résultats.

Suite à cela, nous répétons l'expérience pour chaque paramètre que l'on a à étudier : on détermine quels paramètres on peut faire varier pour ne faire varier que  $\pi_1$  et un autre  $\pi$  ; et, à l'aide du pointage vidéo, on calcule les valeurs de  $\pi_1$  en fonction de ces paramètres, ce qui nous permet de tracer les courbes suivantes :

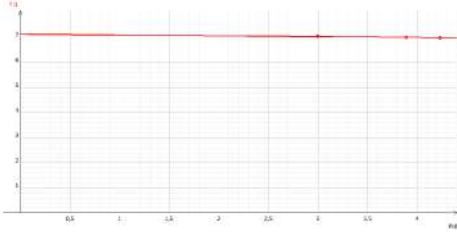


Figure 7:  $Re$  en fonction de l'angle  $\theta$

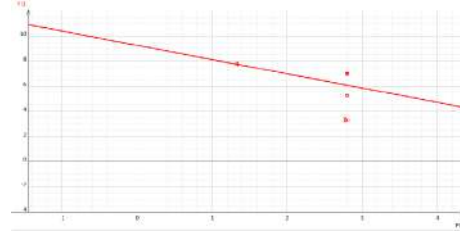


Figure 8:  $Re$  en fonction du rapport de longueurs  $Hb/Dt$

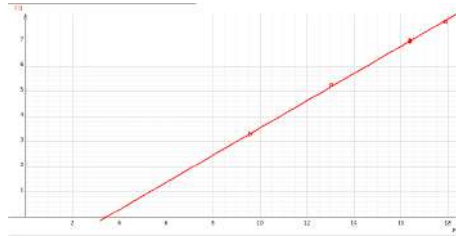


Figure 9:  $Re$  en fonction du nombre d'Archimède  $Ar$

Nous sommes en présence de courbes d'allure similaire mais dont seul les coefficient directeurs changent. De surcroît, nous en déduisons les différents facteurs pour chaque PI. Ce sont ces dépendances que nous allons chercher à exprimer dans l'analyse des résultats.

## 5 Analyse des résultats

On a établi dans l'analyse dimensionnelle que :

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6)$$

Donc :

$$\Pi_1 = \Pi_2^a \cdot \Pi_3^b \cdot \Pi_4^c \cdot \Pi_5^d \cdot \Pi_6^e$$

Supposer tout les Pi sauf un comme des constantes, un à un, nous permet d'écrire :

$$\Pi_1 = C \cdot \Pi_2^a \quad \Pi_1 = C \cdot \Pi_3^b$$

$$\Pi_1 = C \cdot \Pi_4^c \quad \Pi_1 = C \cdot \Pi_5^d$$

$$\Pi_1 = C \cdot \Pi_6^e$$

On généralise maintenant le calcul suivant à toutes les relations précédentes, avec  $i_n$  la puissance a, b, c, d ou e de  $\Pi_n$  :

$$\Rightarrow (\Pi_1) = \ln(C) + i_n \cdot \ln(\Pi_n)$$

Nous déduisons des courbes tracées précédemment :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= C \cdot \Pi_2^{-19.6} & \Pi_1 &= C \cdot \Pi_3^{0.4} \\ \Pi_1 &= C \cdot \Pi_4^{-0.0304} & \Pi_1 &= C \cdot \Pi_5^{-1.14} \\ \Pi_1 &= C \cdot \Pi_6^{0.542}\end{aligned}$$

En sommes, l'expérience rejoint la théorie dans le sens où l'on a bien trouvé une relation de proportionnalité entre  $\pi_1$  et les autres  $\pi_i$ , en traçant le logarithme de chaque  $\pi_i$ . De même, les coefficients de chaque droite nous ont permis de définir une des puissance a, b, c, d ou e.

Pour ce qui est de l'interprétation des résultats numériques nous en avons déduit les résultats suivants :

- $\Pi_1 = C \cdot \Pi_2^{-19.6}$  La plus grande puissance se trouve sur  $\Pi_2$ , soit le rapport  $\Delta\rho/\rho_{fluide}$ .

Ce facteur laisse entendre que c'est la différence de masse volumique  $\Delta\rho$  qui à le plus gros impact sur la vitesse de la bulle. Cela se comprend aisément : notre bulle remonte le long du tube sous l'effet d la poussée d'Archimède. Or, plus la différence de masse volumique est importante entre les deux corps et plus la poussée d'Archimède va être importante. Le facteur obtenue nous permet de quantifier ce lien entre différence de masses volumiques et vitesse de remontée de la bulle : pour de petites variations de masses volumiques entre les deux corps en contact, on a d'importantes variations du nombre de Reynolds et par la même occasion de la vitesse.

- $\Pi_1 = C \cdot \Pi_3^{0.4}$

D'après cette relation, le nombre de Reynolds est proportionnelle à la racine carrée du nombre de Laplace. Ce dernier caractérisant le rapport entre tension de surface et transfert de moment, pour notre cas d'étude, on peut en déduire que si l'on avait cherché à faire varier la tension de surface, cela aurait eu un impact assez minime mais tout de même remarquable sur la vitesse. Ayant une tension de surface quasi constante dans notre étude, on peut en déduire que la vitesse est en faite inversement proportionnelle à la racine carrée des transferts de moments

- $\Pi_1 = C \cdot \Pi_4^{-0.0304}$

Nous retrouvons ici la plus petite puissance reliant  $\Pi_1$  à un autre  $\Pi$ . Ici nous avons un très petit facteurs liant le nombre de Reynolds à l'angle d'inclinaison du tube  $\theta$ . Ainsi, on retrouve le fait que la vitesse du fluide est très peu influencée par cet angle  $\theta$ . On peut conclure que cette variable aurait pu être négligeable dans nos variables initiales.

- $\Pi_1 = C \cdot \Pi_5^{-1.14}$

On retrouve un facteur de l'ordre de -1, montrant que la dynamique de notre fluide est directement liée à l'inverse du rapport  $Hb/Dt$ . Ainsi, avec ce facteur -1 on en déduit que plus la hauteur de bulle est petite devant le diamètre, plus on entre dans un régime turbulent. Inversement, pour de grande bulle dans un petit diamètre (semblable à notre cas d'étude), on se retrouve en régime laminaire. Ainsi, ce résultat nous montre à quel point il aurait été intéressant de traiter des cas où l'on faisait grandement varier la hauteur de la bulle en comparaison au diamètre du tube.

- $\Pi_1 = C \cdot \Pi_6^{0.542}$

Comme on pourrait s'y attendre dès lors que l'on voit la formule du nombre d'Archimède, on retrouve un facteur inférieur 1 entre le nombre de Reynolds et le nombre d'Archimède. En fait on retrouve un facteur d'environ 1/2, soit le fait que le nombre de Reynolds est proportionnel à la racine carrée de  $Ar$ . Or, le nombre d'Archimède étant défini comme un

nombre caractérisant le mouvement d'un corps dans un fluide dû à la différence de densité cette relation nous confirme que la vitesse de remontée de la bulle est directement lié à l'augmentation de la poussée d'Archimède qui est ici dû aux variations de diamètres et de masse volumiques.

Pour conclure sur notre étude de la remontée d'une bulle, on à pu étudier les facteurs majeures qui font augmenter la vitesse, ces derniers étant la différence de masse volumique  $\Delta\rho$ , le diamètre  $Dt$  et la hauteur de bulle  $Hb$ . En sommes, l'application du théorème a permis de mettre en évidence, à la fois les relations liant nos différentes variables, mais aussi les relations liant différentes grandeurs caractéristiques de notre problème ainsi que de les quantifier et de mettre en évidence les variables ayant le plus d'influence sur la dynamique de notre bulle.