Partiel

Partie Mécanique des Fluides

Lundi 9 décembre avril 2019 – Durée : **2h**
sans document ni appareil électronique

1 Analyse dimensionnelle des vagues

On cherche à utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer des propriétés des vagues sur Terre puis sur d'autres planètes. On rappelle l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre $g = 9.81$ SI.

1. Sur Terre, la longueur d'onde λ d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan vaut 1.6 m. Par analyse dimensionnelle, déterminez la longueur d'onde d'une vague de fréquence 2 Hz.

Solution: La propagation des vagues fait intervenir l'action de la gravité qui tend à les applanir et l'inertie de l'eau qui tend à maintenir son mouvement : la longueur d'onde λ des vagues dépend donc a priori de la masse volumique ρ, de l'accélération de la pesanteur g et de leur fréquence f. Choisissons la classe de systèmes d'unités qui contient le système international : L, M, T... L'unité de masse n'intervient que dans ρ donc on s'attend à ce que ρ n'intervienne dans aucune grandeur sans dimension (GSD) servant à exprimer λ. Donc finalement :

$$\lambda = F(f, g)$$

Deux unités, à savoir celles de longueur et de temps, suffisent pour exprimer les 3 grandeurs en relation. D'après le théorème Pi, la loi peut se réécrire comme une loi faisant intervenir $3 - 2 = 1$ GSD. En adimensionnant λ à l'aide de g et f qui sont dimensionnellement indépendants, un GSD possible est : $\Pi = \frac{\lambda f^2}{g}$. Donc la relation $\lambda = f_1(f, g)$ peut se réécrire :

$$F_1(\Pi) = 0 \text{ , c'est-à-dire } \Pi \text{ est un zéro de la fonction F1 :}$$

$$\Pi = C \text{ soit : } \boxed{\lambda = C\,\frac{g}{f^2}}$$

avec C une constante sans dimension **(4 points)**. En doublant la fréquence on diminue par 4 la longueur d'onde, d'où $\lambda(f = 2 \text{ Hz}) = 40$ cm **(1 point)**.

2. Déterminez une expression pour l'accélération de la pesanteur g d'une planète en fonction de ses caractéristiques qui peuvent être trouvées dans le tableau ci-dessous et de la constante de gravitation G. On rappelle que G est telle que la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 séparées de d vaut $F = Gm_1m_2/d^2$.

Solution: $[G] = \mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2}$. L'accélération de la pesanteur g est telle que le poids P d'une masse m attirée par la distribution de matière de la planète vérifie $P = mg$. g dépend a priori de la masse de la planète M, de la distance caractéristique entre la matière formant la planète et la masse, qui vaut le rayon de la planète R, et de G. En effectuant l'analyse dimensionnelle comme en question 1, on obtient :

$$g = C' \frac{GM}{R^2}$$

avec C' une constante sans dimension **(3 points)**.

3. Calculez la valeur de l'accélération de la pesanteur g_{M} sur la surface de Mars connaissant celle sur Terre ainsi que certaines des données du tableau ci-dessous.

Planète	Masse (kg)	Rayon	Distance au soleil	Durée d'un jour
Terre	6.1×10^{24}	6371 km	150×10^6 km	24 h
Mars	6.4×10^{23}	3390 km	228×10^6 km	24 h et 40 mn

Solution: Compte tenu de $g = C' \frac{GM}{R^2}$, on a

$$g_{\mathrm{M}} = g_{\mathrm{T}} \frac{R_{\mathrm{T}}^2 M_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^2 M_{\mathrm{T}}} = 3.6 \ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \ (\mathbf{1\ point})$$

4. S'il y avait de l'eau sur Mars, quelle serait la longueur d'onde d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan ?

Solution: D'après la question 1, on obtient 59 cm **(1 point)**.

2 Amortissement d'un vortex

La photographie de la NASA ci-dessous met en évidence les vortex créés aux extrémités des ailes d'un avion en mouvement. Ces structures peuvent persister plusieurs minutes dans le sillage des avions et limitent la fréquence d'utilisation des pistes de décollage. Ce sujet décrit l'un des premiers modèles de dissipation de vortex, le *vortex de Lamb-Oseen*, pour lequel l'écoulement est laminaire. Bien que celui-ci soit en réalité turbulent, ce modèle peut encore être raisonnablement utilisé en supposant que l'effet de la turbulence revient à modifier artificiellement la valeur de la viscosité.

L'écoulement étudié est supposé bidimensionnel et son étude est réalisée en utilisant les coordonnées polaires (r, θ). L'air est un fluide supposé newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν ($\nu = \mu/\rho$, avec μ la viscosité dynamique) homogènes, et de pression au repos homogène P_{atm}. Le champ de vitesse est cherché sous la forme orthoradiale suivante : $\mathbf{v} = v(r,t)\ \mathbf{e}_\theta$. Enfin, on adopte les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

- le champ de vitesse initiale est donné par :

$$v(r > 0, 0) = \frac{\alpha}{r} \tag{1}$$

avec α une constante,

- le champ de vitesse reste défini au centre :

$$v(0, t > 0) = 0 \tag{2}$$

- "suffisamment loin" de l'avion, le fluide est au repos, soit :

$$v(\infty, t) = 0 \tag{3}$$

  et :

$$p(\infty, t) = P_{\mathrm{atm}} \tag{4}$$

Un formulaire à la fin de cet énoncé contient plusieurs résultats mathématiques nécessaires à la résolution de ce problème.

2.1 Analyse dimensionnelle

On s'intéresse à deux propriétés de l'écoulement pour $t > 0$: le rayon $r_{\mathrm{c}}(t)$ auquel la vitesse est maximale, et la différence de pressions $\Delta p(t)$ entre le cœur du vortex et l'air au repos. Ces deux grandeurs quantifient l'effet du vortex sur un avion pénétrant dans le vortex, à savoir sa taille caractéristique, qui définit l'extension de la zone de perturbation, et la force exercée par le vortex sur l'avion qui tend à le dévier de sa trajectoire.

1. Par analyse dimensionnelle, proposez une relation entre $r_{\mathrm{c}}(t)$ et les grandeurs pertinentes dont il dépend.

Solution: r_{c} dépend a priori de t, α, ν, ρ et P_{atm}. L'atmosphère entourant entièrement le vortex, un changement de la pression atmosphérique P_{atm} ne modifie pas l'écoulement donc pas r_{c}. Par conséquent, P_{atm} est une grandeur non pertinente. Choisissons la classe de systèmes d'unités qui contient le système international : L, M, T... L'unité de masse n'intervient que dans ρ donc on s'attend à ce que ρ n'intervienne dans aucune grandeur sans dimension (GSD) servant à exprimer r_{c}. Donc finalement :

$$r_{\mathrm{c}} = f(t, \alpha, \nu)$$

Deux unités, à savoir celles de longueur et de temps, suffisent pour exprimer les 4 grandeurs en relation. D'après le théorème Pi, la loi peut se réécrire comme une loi faisant intervenir $4 - 2 = 2$ GSD. Comme $[\nu] = [\alpha] = \mathrm{L}^2\ \mathrm{T}^{-1}$, t et ν sont dimensionnellement indépendants. En adimensionnant r_c et α à l'aide de t et ν, deux GSD possibles sont : $\Pi = \frac{r_c}{\sqrt{\nu t}}$ et $\Pi_1 = \frac{\alpha}{\nu}$. Donc :

$$\boxed{r_c(t) = \sqrt{\nu t}\; F\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)} \text{ (\textbf{5 points})}$$

2. De même, par analyse dimensionnelle, proposez une relation entre $\Delta p(t)$ et les grandeurs pertinentes dont il dépend.

Solution: Pour la même raison qu'à la question précédente,

$$\Delta p = g(t, \alpha, \nu, \rho)$$

En utilisant la même classe de systèmes d'unités qu'à la question précédente, on constate que trois unités, à savoir celles de longueur, de masse et de temps, suffisent pour exprimer les 5 grandeurs en relation. Cette relation peut donc se réécrire comme une relation entre $5 - 3 = 2$ GSD. En adimensionnant Δp et α à l'aide de ν, t et ρ qui sont dimensionnellement indépendants, deux GSD possibles sont $\Pi = \frac{\Delta p\, t}{\rho \nu}$ (on peut se rappeler que $\mu = \rho\nu$ s'exprime en Pa.s dans le SI) et $\Pi_1 = \frac{\alpha}{\nu}$. Donc :

$$\boxed{\Delta p(t) = \frac{\rho \nu}{t}\; G\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)} \text{ (\textbf{5 points})}$$

2.2 Solution invariante d'échelle

Il est possible de déterminer la solution exacte à ce problème en la cherchant sous une forme invariante d'échelle.

3. L'écoulement considéré est-il stationnaire ?

Solution: Une fois le vortex formé par l'aile, il n'y a plus de moteur entretenant le vortex, donc celui-ci s'atténue sous l'effet de la viscosité. On s'attend donc à ce que l'écoulement ne soit pas stationnaire **(1 point)**.

4. En utilisant le formulaire donné en fin d'énoncé, montrez que l'écoulement est isovolume.

Solution: Avec l'égalité (6) on vérifie que $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$, donc l'écoulement est isovolume **(1 point)**.

5. Montrez que p ne dépend pas de θ. En déduire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) \tag{5}$$

Solution: Comme v ne dépend pas de θ, la dérivée de (8) s'écrit $\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0$. En intégrant cette égalité deux fois, il vient : $p(r, \theta, t) - p(r, 0, t) = h(r, t)\,\theta$ avec h fonction inconnue. p étant 2π périodique en θ à r, t constants, $p(r, 2\pi, t) = p(r, 0, t)$ donc $h = 0$: p ne dépend pas de θ **(2 points)**.

6. Montrez que l'ordre des différentes dérivées partielles est en accord avec le nombre de conditions pour le problème défini par l'équation (5) munie des conditions (1), (2), (3).

Solution: (5) est une edp d'ordre 2 en espace et 1 en temps portant sur la seule variable v (p n'intervient pas). Elle est munie d'une CI et de deux CL, donc l'ordre des différentes dérivées partielles est en accord avec le nombre de conditions **(1 point)**.

7. Afin de déterminer si ce problème (5), (1), (2), (3) admet une solution invariante d'échelle, on définit le changement d'échelles consistant en le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} r \mapsto r' & / \quad r = r^* r' \\ t \mapsto t' & / \quad t = t^* t' \\ v \mapsto v' & / \quad v = v^* v' \\ \nu \mapsto \nu' & / \quad \nu = \nu^* \nu' \\ \alpha \mapsto \alpha' & / \quad \alpha = \alpha^* \alpha' \end{cases}$$

r^*, t^*, v^*, ν^* et α^* étant les facteurs de changement d'échelle ou *facteurs d'échelle*. Déterminer les deux relations entre facteurs d'échelle imposées par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (5), (1), (2), (3).

Solution: L'invariance d'échelle de (5) impose $r^* = \sqrt{t^* \nu^*}$, celle de (1) impose $v^* r^* = \alpha^*$ **(2 points)**.

8. En imposant que la solution à ce problème $v = f(r, t, \nu, \alpha)$ soit aussi invariante d'échelle, montrez que

$$v' = \frac{\alpha'}{r'} G(\eta),$$

avec $\eta = \frac{r'^2}{\nu' t'}$ une variable d'auto-similarité.

Solution: Les 5 facteurs d'échelle étant liés par deux relations, le groupe des changements d'échelles laissant le problème invariant est à trois paramètres libres, par exemple r^*, ν^*, α^*, les deux autres s'en déduisant grâce à $t^* = \frac{r^{*2}}{\nu^*}$ et $v^* = \frac{\alpha^*}{r^*}$. la solution $v = f(r, t, \nu, \alpha)$ se transforme en

$$\begin{aligned} v' &= \frac{r^*}{\alpha^*}\, f\left(r^* r', \frac{r^{*2}}{\nu^*} t', \nu^* \nu', \alpha^* \alpha'\right) \\ &= \frac{\alpha'}{r'} \frac{r^* r'}{\alpha^* \alpha'}\, f\left(r^* r', \frac{(r^* r')^2}{\nu^* \nu'} \frac{\nu' t'}{r'^2}, \nu^* \nu', \alpha^* \alpha'\right) \\ &= \frac{\alpha'}{r'}\, g\left(r^* r', \frac{\nu' t'}{r'^2}, \nu^* \nu', \alpha^* \alpha'\right) \end{aligned}$$

L'invariance d'échelle impose que v' soit indépendant de $r*$, ν^* et α^* donc de r^*r', $\nu^*\nu'$, $\alpha^*\alpha'$. Donc :

$$v^{'} = \frac{\alpha'}{r'}\, g\left(\frac{\nu' t'}{r'^2}\right) = \frac{\alpha'}{r'}\, G\left(\frac{r'^2}{\nu' t'}\right) \quad (\textbf{5 points})$$

Si l'on choisit comme paramètres libres t^*, ν^*, α^*, les deux autres s'en déduisant grâce à $r^* = \sqrt{t^*\nu^*}$ et $v^* = \frac{\alpha^*}{\sqrt{t^*\nu^*}}$, par le même raisonnement on trouve :

$$v^{'} = \frac{\alpha'}{\sqrt{\nu' t'}}\, f\left(\frac{r^{'}}{\sqrt{\nu' t'}}, t^*t', \nu^*\nu', \alpha^*\alpha'\right) = \frac{\alpha'}{\sqrt{\nu' t'}}\, f\left(\frac{r^{'}}{\sqrt{\nu' t'}}\right)$$

que l'on peut transformer en :

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\alpha'}{\sqrt{\nu' t'}}\, f\left(\frac{r^{'}}{\sqrt{\nu' t'}}\right) \\ &= \frac{\alpha'}{r'}\frac{r'}{\sqrt{\nu' t'}}\, f\left(\frac{r^{'}}{\sqrt{\nu' t'}}\right) \\ &= \frac{\alpha'}{r'}\, g\left(\frac{r^{'}}{\sqrt{\nu' t'}}\right) \\ &= \frac{\alpha'}{r'}\, G\left(\frac{r'^2}{\nu' t'}\right) \end{aligned}$$

9. Compte tenu de la forme de la solution invariante d'échelle $v = \frac{\alpha}{r}\, G(\eta)$ avec $\eta = \frac{r^2}{\nu t}$, montrez que l'équation différentielle ordinaire vérifiée par la fonction G est de la forme :

$$G'' + \beta G' = 0,$$

avec β un nombre dont on donnera la valeur.

Solution: On établit d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-\eta}{t}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{2\eta}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Les termes de l'équation (5) deviennent alors, avec $v = (\alpha/r)G(\eta)$,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-\alpha\eta}{rt} G'(\eta),$$

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = \frac{2\alpha\eta}{r} G'(\eta) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) = \frac{2\alpha}{\nu t}\frac{\partial G'}{\partial r} = \frac{4\alpha\eta}{\nu t r} G''.$$

L'équation 5 se réduit au final à

$$\boxed{G'' + \frac{1}{4}G' = 0} \quad (\textbf{4 points})$$

10. Quelles contraintes sur la fonction G les conditions aux limites et la condition initiale imposent-elles ?

Solution: Pour $t = 0$ et $r > 0$, $\eta = \infty$ donc (1) se traduit par $\frac{\alpha}{r} G(\infty) = \frac{\alpha}{r}$ soit $G(\infty) = 1$. (2) se traduit par $G(0) = 0$. Avec $G(\infty) = 1$, (3) est automatiquement vérifiée **(2 points)**.

11. Intégrer l'équation précédente pour déterminer l'expression exacte de $G(\eta)$.

Solution: En intégrant l'équation précédente, il vient donc $G(\eta) = Ae^{-\eta/4} + B$. $G(0) = 0$ et $G(\infty) = 1$ imposent :

$$\boxed{G(\eta) = 1 - e^{-\eta/4}} \text{ (2 points)}$$

12. En déduire l'expression de la solution v du problème en fonction de r et t. Donnez les deux expressions asymptotiques de $v(r,t)$ pour $r \to 0$ et $r \to \infty$. Dans quelles gammes de valeurs de r sont-elles valables ? A quels types d'écoulement ces deux comportements asymptotiques correspondent-ils ?

Solution:

$$\boxed{v(r,t) = \frac{\alpha}{r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)} \text{ (1 point)}$$

Dans la limite $r \to 0$, en fait pour $r \ll \sqrt{\nu t}$, $v(r,t) \simeq \frac{\alpha r}{4\nu t}$: profil de vitesse linéaire, coeur du vortex en rotation solide (**2 points**). Dans la limite $r \to \infty$, en fait pour $r \gg \sqrt{\nu t}$, $v(r,t) \simeq \frac{\alpha}{r}$: écoulement irrotationnel (**2 points**).

Rayon caractéristique du vortex - On s'intéresse maintenant au rayon $r_c(t)$ auquel la vitesse est maximale, appelé rayon caractéristique du vortex.

13. Déterminer une équation permettant de déterminer $r_c(t)$. A l'aide du formulaire, obtenir l'expression approchée de $r_c(t)$. Confrontez ce résultat à celui obtenu par analyse dimensionnelle en question 1.

Solution:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \longrightarrow 1 = e^{-\eta_c/4}\left(1 + \frac{\eta_c}{2}\right) \text{ (1 point)}$$

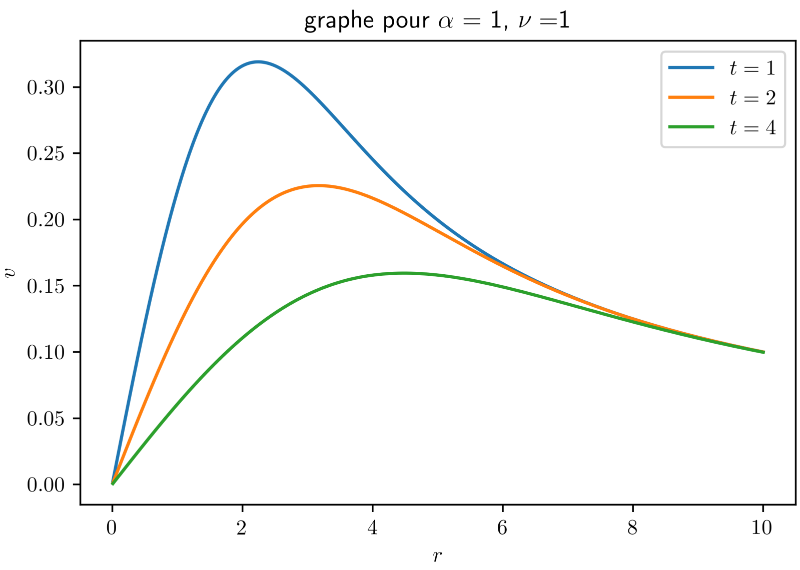
avec $\eta_c = r_c(t)^2/(\nu t)$, d'où avec $\eta_c \simeq 5 \simeq 2,2^2$ la solution de cette équation implicite est :

$$\boxed{r_c(t) \simeq 2,2\sqrt{\nu t}} \text{ (1 point)}$$

Ce résultat est compatible avec la prédiction de l'analyse dimensionnelle trouvée en question 1. On montre de plus que $r_c(t)$ ne dépend pas de α/ν ($F(X) \simeq 2,2$) (**2 points**).

14. Tracez $r \mapsto v(r,t)$ pour deux instants t_1 et t_2, $0 < t_1 < t_2$.

Solution:



(**2 points**)

Champ de pression - On s'intéresse maintenant au champ de pression au sein de l'écoulement $p(r,t)$.

15. Montrez que :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$$

Solution: (7) s'écrit : $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$ (**2 points**)

16. Le coeur du vortex est-il le lieu d'une dépression ou bien d'une surpression ?

Solution: p augmentant avec r et tendant vers P_{atm} loin du vortex, elle est inférieure à P_{atm} dans le vortex : le coeur du vortex est le lieu d'une dépression (**2 points**).

17. Établir une expression intégrale pour la différence de pression entre le coeur du vortex et l'extérieur $\Delta p(t) = p(0,t) - p(\infty,t)$ puis effectuer le calcul à l'aide de l'annexe. Confrontez ce résultat à la prédiction de l'analyse dimensionnelle trouvée en question 2.

Solution:

$$\Delta p(t) = \int_0^\infty \frac{\rho v^2}{r}\mathrm{d}r = \alpha^2\rho\int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)^2}{r^3}\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\alpha^2\rho}{2\nu t}\int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\frac{\eta}{4}}\right)^2}{\eta^2}\mathrm{d}\eta \simeq \frac{0.17\alpha^2\rho}{\nu t} \text{ (\textbf{2 points})}$$

avec l'intégrale donnée dans le formulaire. On retrouve l'expression de l'analyse dimensionnelle en déterminant de plus l'expression approchée de la fonction $G(X) \simeq 0,17X$ (**2 points**).

Formulaire

Équations bilan en coordonnées polaires

Pour un champ de vitesse bidimensionnel $\mathbf{v} = u(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_r + v(r,\theta,t)\,\mathbf{e}_\theta$ et un champ de pression bidimensionnel $p(r,\theta,t)$:

— Opérateur divergence :

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{6}$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement isovolume (équation de Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{8}$$

Quelques solutions numériques approchées

Quelques solutions numériques suivantes seront utiles à la résolution de ce problème (d'autres non) :

$$\int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-x/4}\right)^2}{x^2}\mathrm{d}x \simeq 0.346 \qquad \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-4x}\right)^2}{x^2}\mathrm{d}x \simeq 5.55$$

$$1 = e^{-x/4}\left(1+\frac{x}{2}\right) \to x \simeq 5 \qquad 1 = e^{-4x}\left(1+8x\right) \to x \simeq 0.314$$