

Hydrodynamique

Les équations de l'hydrodynamique

1 Analyse dimensionnelle

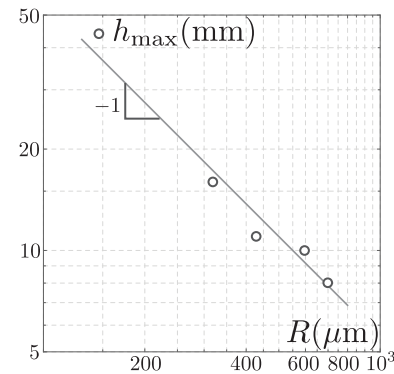
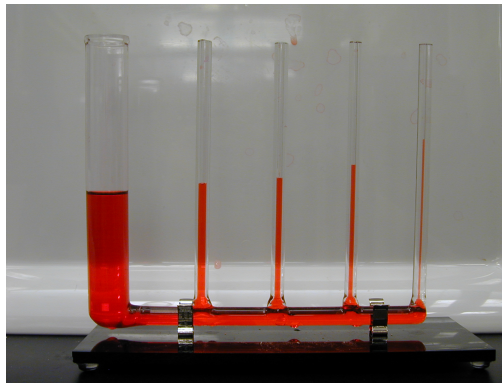


FIG. 1 : **Ascension maximale.** Gauche : la hauteur d'ascension capillaire maximale dépend du rayon R du tube. Droite : sur ce graphique ont été reportées les hauteurs maximales h observées lors de l'ascension capillaire d'éthanol dans des tubes de différents rayons R .

▷ **Imbibition.** Un fin tube capillaire est mis en contact avec un liquide mouillant. On observe que le liquide monte spontanément dans le tube jusqu'à une hauteur h (figure 1). Cette hauteur dépend à priori de la *tension de surface* γ ($[\gamma] = \text{MT}^{-2}$), de la gravité g , de la masse volumique du liquide ρ et du rayon du tube R :

$$h = f(\gamma, \rho, g, R) \quad (1)$$

1. Montrer, en choisissant comme échelles caractéristiques ρ , g et R que la relation fonctionnelle précédente peut se réécrire sous la forme

$$\pi = \mathcal{F}(\pi_1), \quad (2)$$

où π correspond à la hauteur (l'observable) adimensionnée, et π_1 à la tension de surface adimensionnée. On précisera l'expression de π et de π_1 (que l'on prendra respectivement proportionnels à h et γ).

2. Les expériences et l'analyse physique montrent que la fonction $\mathcal{F}(x) = 2x$. Quelle est la loi d'échelle de h vis-à-vis de R ? Cela vous semble-t-il compatible avec les expériences reportées sur la figure 1 ?

▷ **Diffusion moléculaire.** Une goutte d'encre est déposée délicatement dans un liquide. Du fait des chocs moléculaires incessants, cette tache s'étale par *diffusion* ; un processus dont la rapidité est caractérisée par le coefficient de diffusion D (de dimension $[D] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$).

3. Montrer par analyse dimensionnelle que la tache d'encre s'étale en suivant une loi en racine du temps aux temps longs $R(t) \propto t^{1/2}$.

▷ **Diffusion turbulente.** On reprend cette fois l'expérience précédente mais en agitant vigoureusement le liquide, de sorte à créer un écoulement turbulent venant brasser et mélanger l'encre. Ce processus étant a priori beaucoup plus efficace que la simple diffusion moléculaire, on néglige cette dernière dans la suite. On caractérise la vigueur de l'agitation à l'aide de ϵ , la quantité d'énergie injectée par unité de temps et de masse dans le liquide.

4. Quelle est la dimension de ϵ ?
5. Montrer que la taille de la tache croît désormais selon la loi

$$R(t) = A(\epsilon t^3)^{1/2}, \quad (3)$$

où A est une constante universelle sans dimension. Ce résultat traduit un processus beaucoup plus efficace que la diffusion moléculaire, et est connu sous le nom de *loi de Richardson* (Richardson, 1926 ; Eggers & Fontelos, 2015).

2 Établissement d'un écoulement plan cisailé

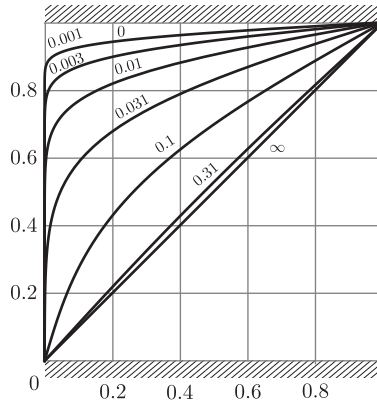


FIG. 2 : Établissement d'un écoulement de Couette. On représente ici plusieurs profils successifs en fonction du temps adimensionné $\bar{t} = \nu t / h^2$.

On s'intéresse ici à l'établissement de l'écoulement d'un fluide compris entre deux plaques parallèles d'extension infinie lors de la mise en mouvement brusque de l'une d'elles, et en l'absence de gradient de pression (Batchelor, 1967 ; Ockendon & Ockendon, 1995). Les deux plaques sont distantes de h , et à $t = 0$ la plaque supérieure se met brusquement en mouvement à la vitesse $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$. Le fluide, jusqu'ici au repos, est alors progressivement mis en mouvement par diffusion de la quantité de mouvement jusqu'à atteindre le profil de Couette. On note μ la viscosité dynamique du fluide, ν sa viscosité cinématique, et on néglige ici l'action de la gravité. On considérera un évolution invariante par translation suivant les deux directions parallèles aux plaques (ce qui revient à supposer un écoulement **parallèle**) et on supposera l'écoulement **incompressible**¹.

1. Proposer une estimation de l'ordre de grandeur de la contrainte de cisaillement pariétale s'exerçant sur l'une des plaques dans la limite stationnaire, ainsi qu'une estimation de la durée typique du transitoire.
2. Écrire les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (en projection scalaire), ainsi que les conditions limites et condition initiale du problème. On prendra garde à ne pas négliger les termes instationnaires.
3. Adimensionner les équations à l'aide des échelles du problème en posant $y = h\bar{y}$, $u = U\bar{u}$ et $t = h^2\bar{t}/\nu$.
4. Dans la limite stationnaire, déterminer le profil de l'écoulement $\bar{u}_{\text{couette}}(\bar{y})$ ainsi que son gradient, et en déduire la valeur dimensionnée de la contrainte de cisaillement à la paroi du haut puis à la paroi du bas.

On cherche maintenant à décrire l'amorce de cet écoulement à l'aide d'une solution du type :

$$\bar{u}(\bar{y}, \bar{t}) = \bar{u}_{\text{couette}}(\bar{y}) + \bar{u}_{\text{inst}}(\bar{y}, \bar{t}) \quad (4)$$

5. En injectant le profil (4) dans les équations du mouvement, obtenir un nouveau jeu d'équations et de conditions limites pour $\bar{u}_{\text{inst}}(\bar{y}, \bar{t})$. Quelle est la condition initiale $\bar{u}_{\text{inst}}(\bar{y}, 0)$?
6. On recherche une solution du problème en employant la technique de séparation de variables, i.e. en posant $\bar{u}_{\text{inst}}(\bar{y}, \bar{t}) = f(\bar{y})g(\bar{t})$. Obtenir les équations gouvernant $f(\bar{y})$ et $g(\bar{t})$ ainsi que la forme générales des solutions.
7. Montrer que l'application des conditions limites impose une condition de quantification des solutions. En déduire l'écriture du profil de vitesses sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients restent à déterminer.
8. Montrer la relation d'orthogonalité

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

9. Exploiter la relation d'orthogonalité afin de déterminer le transitoire de l'écoulement, puis donner l'expression dimensionnée du champ de vitesse.

1. Sur des temps très courts, de l'ordre de h/c avec c la célérité des ondes sonores, cette hypothèse peut être mise en défaut. Mais pour e.g. de l'eau ($c \simeq 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) mise en mouvement entre des plaques distantes de $h = 1 \text{ cm}$ le temps acoustique correspondant est de l'ordre de $7 \mu\text{s}$ à comparer au temps diffusif supérieur à la minute (7 ordres de grandeur d'écart !). Par ailleurs il est probable qu'expérimentalement le démarrage de la plaque ne puisse pas être considéré comme impulsionnel sur l'échelle de temps acoustique.

10. Calculer l'évolution de la contrainte de cisaillement sur la plaque du haut et sur la plaque du bas.
11. Tracer numériquement le champ de vitesse et l'évolution de la contrainte en tronquant la série. Combien de termes est-il nécessaire de garder pour avoir une représentation convergée ?

3 Écoulement de Poiseuille dans un tube de forme arbitraire

Un fluide s'écoule dans un tube de section uniforme (mais pas nécessairement circulaire) sous l'action d'un gradient de pression constant $-\frac{\partial p}{\partial x}$. On suppose l'écoulement pleinement établi (pas de dépendance en x) et parallèle ($v = w = 0$). À section de tube A et gradient de pression imposés, on se demande quelle géométrie de tube minimise la force visqueuse totale exercée sur la paroi (Ockendon & Ockendon, 1995).

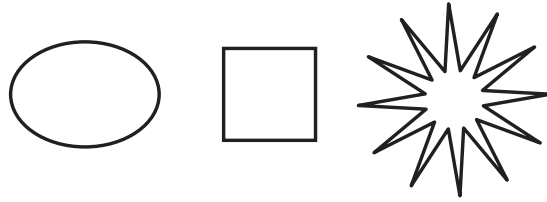


FIG. 3 : Une famille de tubes de section constante, mais de forme différente.

1. Montrer la relation

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c$$

À quoi correspond c ?

2. Montrer que la force visqueuse totale exercée sur la paroi prend l'expression :

$$\oint_{\partial D} \mu \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

3. En utilisant à profit la formule de Green :

$$\iiint_V \Psi \nabla^2 \varphi dV = - \iiint_V \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi dV + \oint_{\partial V} \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

répondre à la question posée.

Références

- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- EGGERS, JENS & FONTELOS, MARCO ANTONIO 2015 *Singularities : formation, structure, and propagation*. Cambridge University Press.
- OCKENDON, HILARY & OCKENDON, JOHN R 1995 *Viscous flow*. Cambridge University Press.
- RICHARDSON, LEWIS FRY 1926 Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **110** (756), 709–737.