Contrôle continu n°2 : partie « vibration des systèmes continus »

2 novembre 2015

***Tous documents, calculatrice et téléphones portables interdits* — Durée : 1h30**

Un enfant à qui l'on a interdit de sauter sur son lit décide d'utiliser une planche pour se balancer de bas en haut. Il dispose la planche horizontalement sur des supports aux extrémités, se place au milieu et fait des flexions de jambes de manière à ce que son centre de gravité oscille verticalement autour d'une position. La masse de l'enfant est M. Il reste toujours en contact avec la planche.

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

1. Les oscillations du centre de gravité sont associées à une force inertielle. Déterminer l'expression de la force dynamique résultante appliquée sur la poutre lorsque le déplacement du centre de gravité est $v(t) = v_g \sin(\Omega t)$. Montrer qu'elle se met sous la forme

$$F(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t),$$

et préciser l'expression de $A(\Omega)$. Dans cette question, on ne prend pas en compte le poids de l'enfant.
[SOLUTION :] L'accélération de G est

$$\gamma(t) = -v_g\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

D'où la force qui s'applique sur la planche

$$\begin{aligned} F(t) &= M v_g \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ A(\Omega) &= M v_g \Omega^2 \end{aligned}$$

1 Modèle de poutre en flexion

La planche est modélisée par une poutre de longueur L alignée avec l'axe $\mathbf{x}$ dont les extrémités sont aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$. La poutre a un module de Young E, une densité ρ et un moment d'inertie de flexion I. La section droite est d'aire S. On néglige l'effet de la gravité sur la poutre et on fait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. On cherche à calculer le déplacement transverse $v(x,t)$ autour d'une position d'équilibre statique.

2. Rappeler l'équation pour $v(x,t)$ des ondes de flexion dans une poutre, dans le cas où il n'y a pas d'effort extérieur. On notera $c^2 = \frac{EI}{\rho S}$.
[SOLUTION :]

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0$$

3. Cette équation admet une solution de la forme

$$v(x,t) = \phi(t)X(x).$$

Rappeler la forme générale de $\phi(t)$ et $X(x)$. (La démonstration n'est pas demandée.)
[SOLUTION :]

$$\phi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
$$X(x) = C_1\cos(\gamma x) + C_2\cosh(\gamma x) + C_3\sin(\gamma x) + C_4\sinh(\gamma x)$$

4. On note la pulsation propre de chaque mode ω_n et $\gamma_n^4 = (\omega_n/c)^2$. Décrire la méthode pour déterminer la forme $X_n(x)$ des modes.
[SOLUTION :] Il faut écrire le système de 4 équations traduisant les conditions aux limites et chercher les valeurs de $\gamma = \gamma_n$ admissibles pour avoir une solution non triviale. La forme des modes est donnée par les vecteurs propres obtenus pour chaque valeur γ_n.
5. On rappelle les relations d'orthogonalité, en notant le symbole de Kronecker δ_{mn},

$$\int_0^L X_n X_m dx = \alpha_n\delta_{mn} \; ; \qquad \int_0^L X_n^{''} X_m^{''} dx = \gamma^4\alpha_n\delta_{mn} \; ; \qquad \int_0^L X_n X_m^{''''} dx = \gamma_n^4\alpha_n\delta_{mn},$$

où α_n est une constante. Pour quels types de conditions aux limites ces relations sont-elles vraies ? Expliquer brièvement pourquoi.
[SOLUTION :] Il suffit d'avoir une des trois conditions suivantes aux extrémités : appui simple, encastrement, bord libre. Dans les dérivation pour la démonstration de l'orthogonalité, on obtient le résultat en annulant des termes qui supposent ces types de conditions.
6. Montrer que l'équation des ondes transverses se met sous la forme

$$\ddot{\phi}_n + \omega_n^2\phi_n = 0, \qquad n = 0\ldots\infty. \tag{1}$$

[SOLUTION :] Voir cours
7. À quel type de conditions aux limites satisfait

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2}$$

Donner une démonstration. Dans la suite on supposera que la poutre est placée de manière telle que ces conditions sont satisfaites.
[SOLUTION :] Ce sont les conditions appui simple aux deux extrémités. Les conditions naturelles sont l'annulation en $x = 0, L$ du déplacment et du moment, soit 4 équations à vérifier

$$X(0) = 0;$$
$$X(L) = 0;$$
$$X^{''}(0) = 0;$$
$$X^{''}(L) = 0.$$

Ces équations sont bien vérifiées pour la fonction proposée.

8. Donner les expressions de ω_n et γ_n pour le cas de l'équation (2).
   [SOLUTION :]

$$\gamma_n = n\pi/L$$
$$\omega_n = c(n\pi/L)^2$$

9. Que vaut α_n pour le cas de l'équation (2) ?
   [SOLUTION :]

$$\alpha_n = L/2.$$

2 Vibrations libres

10. Expliciter la forme générale de la solution $v(x,t)$ en tenant compte des éléments des questions précédentes.
    [SOLUTION :]

$$v(x,t) = \sum_n \phi_n X_n = \sum_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

11. On propose de modifier l'équation (1) de la manière suivante

$$\ddot{\phi}_n + 2\omega_n \xi_n \dot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = 0, \qquad n = 0 \dots \infty. \tag{3}$$

    Quelle est la signification physique du nouveau terme introduit ?
    [SOLUTION :] ammortissement visqueux. Chaque mode a un facteur d'ammortissement ξ_n

12. Donner la forme générale de la solution de l'équation (3) dans le cas $\xi_n < 1$. (La démonstration n'est pas demandée.)
    [SOLUTION :] ammortissement visqueux. Chaque mode a un facteur d'ammortissement ξ_n

$$\phi_n(t) = \Phi_n e^{-\xi_n \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi_n^2} t - \phi_n)$$

13. En déduire une nouvelle forme générale de la solution $v(x,t)$.
    [SOLUTION :]

$$v(x,t) = \sum_n \phi_n X_n = \sum_n \Phi_n e^{-\xi_n \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi_n^2} t - \psi_n) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

14. L'enfant saute au centre de la planche. Les conditions initiales sont un déplacement nul sur l'ensemble de la poutre et une vitesse de la forme $\dot{v}_0 \delta(x - L/2)$, où $\delta(\cdot)$ est la fonction de Dirac. Calculer la réponse libre de planche pour ces conditions initiales. Montrer que l'amplitude maximale de chaque mode n est proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$.

[SOLUTION :]

$$\sum_n \phi_n(0)X_n(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi_n = 0$$
$$\sum_n \dot{\phi}_n(0)X_n(x) = \dot{v}_0\delta(x - L/2)$$
$$\sum_n \Phi_n\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}X_n(x) = \dot{v}_0\delta(x - L/2)$$
$$\sum_n \Phi_n\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \dot{v}_0\int_0^L \delta(x - L/2)X_m(x)dx$$
$$\Phi_n\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}\alpha_n = \dot{v}_0\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$\Phi_n = \frac{\dot{v}_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}\alpha_n}\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$\Phi_n = \frac{L^2}{n^2}\frac{\dot{v}_0}{\alpha_n\sqrt{1-\xi_n^2}c\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

La solution complète est

$$v(x,t) = \sum_n \frac{L^2}{n^2}\frac{\dot{v}_0}{\alpha_n\sqrt{1-\xi_n^2}c\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-\xi_n\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_n^2}t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

15. Préciser l'expression de l'amplitude maximale V_n de chaque mode pour $n = 1$ à 4.
[SOLUTION :]

$$V_1 = \frac{\dot{v}_0L^2}{\alpha_1\sqrt{1-\xi_1^2}c\pi^2}$$
$$V_2 = 0;$$
$$V_3 = -\frac{1}{9}\frac{\dot{v}_0L^2}{\alpha_3\sqrt{1-\xi_3^2}c\pi^2}$$
$$V_4 = 0$$

16. Comment peut-on justifier l'approximation

$$v(x,t) \sim v_1(x,t) + v_3(x,t). \tag{4}$$

(Aucun calcul n'est demandé.)
[SOLUTION :] L'amplitude des modes diminue rapidement avec l'odre du mode, étant donné le facteur $\frac{1}{n^2}$.

3 Vibrations forcées

L'action des jambes sur la poutre est modélisée par la force ponctuelle

$$F(t) = A(\Omega)\ \sin(\Omega t)\delta(x - L/2).$$

On s'intéresse au mouvement au centre de la poutre, sous le point d'appui.

17. Montrer que l'équation des ondes transverses se met sous la forme

$$\ddot{\phi}_n(t) + \omega_n^2 \phi_n(t) = H_n \sin(\Omega t), \qquad n = 0 \ldots \infty, \tag{5}$$

et préciser la forme de H_n. [SOLUTION :] L'équation des ondes a maintenant à terme à gauche

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} \quad = \tfrac{A(\Omega)}{\rho S} \sin(\Omega t)\delta(x - L/2)$$

En utilisant les résultats d'orthogonalité,

$$H_n = \frac{1}{\alpha_n}\frac{A(\Omega)}{\rho S}\sin\frac{n\pi}{2}$$

18. Déterminer la forme des solutions $\phi_n(t)$.
[SOLUTION :]

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2}\frac{1}{\alpha_n}\frac{A(\Omega)}{\rho S}\sin\frac{n\pi}{2}\sin(\Omega t)$$

19. On s'intéresse à la réponse vibratoire pour $\Omega < \omega_1$. On se propose donc de calculer une solution approchée obtenue en ne retenant que le premier mode. Expliciter l'expression de $v_1(x,t)$ pour le cas $x = L/2$ et $\Omega = \beta\omega_1$ (β, constante réelle positive).
[SOLUTION :]

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2}\frac{1}{\alpha_1}\frac{A(\Omega)}{\rho S}\sin\frac{\pi}{2}\sin(\Omega t)\ \sin(\pi x/L) \\ v_1(L/2,t) &= \frac{1}{\omega_1^2(1-\beta^2)}\frac{1}{\alpha_1}\frac{M v_g \Omega^2}{\rho S}\sin(\Omega t) \\ v_1(L/2,t) &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\frac{2M v_g}{\rho L S}\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

20. Pour le cas particulier d'une planche de masse $2M$, et pour $\beta = 0.5$, quelle est l'amplitude du mouvement de la planche en fonction de l'amplitude v_g du déplacement du centre de gravité ?
[SOLUTION :] En remarquant que la masse de la planche est $\rho L S$,

$$v_1(L/2,t) = \frac{1}{3} v_g \sin(\Omega t)$$

4 Prise de compte de l'inertie de l'individu

Pour obtenir une valeur plus réaliste de la première pulsation propre du système {enfant + poutre}, on prend en compte l'inertie due à la masse M en modélisant une masse ponctuelle M liée rigidement à la poutre en $x = L/2$. On se propose de résoudre le problème en utilisant la forme de solution approchée

$$\bar{v}(x,t) = f(t)X_1(x,t),$$

où $X_1(x,t)$ est la forme du premier mode de la poutre seule comme étudié plus haut (équation 2).

21. Calculer l'énergie potentielle du système.
[SOLUTION :]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EIf^2\left(\frac{\partial^2 \sin(\pi x/L)}{\partial x^2}\right)^2 dx$$
$$U = \frac{1}{2}EIf^2(\pi/L)^4\int_0^L \sin^2(\pi x/L)dx$$
$$U = \frac{L}{4}EIf^2(\pi/L)^4$$

22. Calculer l'énergie cinétique du système.
[SOLUTION :] Energie dans la poutre

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S(\dot{f}\sin(\pi x/L))^2 dx$$
$$T = \frac{L}{4}\rho S\dot{f}^2$$

Energie liée à la masse M

$$T_M = \frac{1}{2}M\left(\sin(\pi/2)\dot{f}\right)^2 = \frac{1}{2}M\dot{f}^2$$

23. Écrire l'équation différentielle que $f(t)$ doit vérifier.
[SOLUTION :] Avec l'équation de Lagrange,

$$\left(\frac{L}{2}\rho S + M\right)\ddot{f} + \frac{L}{2}EI(\pi/L)^4 f = 0$$

24. En déduire $\bar{\omega}_1$ la pulsation propre approchée du système {enfant + poutre}. Appliquer au cas particulier d'une planche de masse $2M$.
[SOLUTION :]

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{\frac{L}{2}EI(\pi/L)^4}{\frac{L}{2}\rho S + M}$$
$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2\frac{1}{1+\frac{2M}{\rho SL}}$$
$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2\frac{1}{2}$$
$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\frac{1}{\sqrt{2}}$$

25. Comment s'appelle la méthode de résolution appliquée ci-dessus ?

[SOLUTION :] Méthode de Rayleigh

FORMULAIRE

$$\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{L}{2}$$