



Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

3. Modèles linéaires
à équations de transport

Paola CINNELLA

[paola.cinnella@sorbonne-
universite.fr](mailto:paola.cinnella@sorbonne-universite.fr)

Qu'avez-vous retenu?

QCM #2

<https://www.wooclap.com/BHSHDG>



WEB

- 1 Connectez-vous sur www.wooclap.com/BHSHDG
- 2 Vous pouvez participer



SMS

- 1 Pas encore connecté ? Envoyez **@BHSHDG** au **06 44 60 96 62**
- 2 Vous pouvez participer

Classification des modèles RANS

Modèles à viscosité tourbillonnaire linéaire (Boussinesq)

Linear Eddy Viscosity Models (LEVM)

- Algébriques:
 - De longueur de mélange (Prandtl, 1925)
 - À viscosité tourbillonnaire (Baldwin-Lomax, Cebeci-Smith, Michel...)
- Modèles à une équation de transport
 - pour l'énergie cinétique turbulente
 - pour la viscosité turbulente (Spalart-Allmaras, Baldwin-Barth)
- Modèles à deux équations de transport
 - k-e, k-w, k-l, k-t, q-w, ...

Modèles à viscosité tourbillonnaire non linéaire
(Modèles aux tensions de Reynolds algébriques)

Non-linear Eddy Viscosity Models (NLVM)
Algebraic Stress Models (ASM)

- Analogie viscoélastique
- Modèles aux tensions de Reynolds algébriques
- Modèles algébriques explicites (EARSM)

Modèles aux tensions de Reynolds (équations de transport)

Reynolds-Stress Models (RSM)

Equations de transport pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds + une échelle de longueur
Launder-Reece-Rodi, Wilcox-Rubesin,...

Modèles à équations de transport

- Les modèles algébriques relient la viscosité tourbillonnaire et donc les contraintes de Reynolds aux propriétés locales de l'écoulement moyen
 - Ils ne tiennent pas compte des **effets “d’histoire”** : la turbulence ne s’adapte pas instantanément aux changements abruptes!!
- Idée : écrire des équations de transport pour des variables turbulentes bien choisies
 - Dans le cadre de l'**approximation de Boussinesq** :

$$\tau_{ij}^R - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = 2\rho v_t \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \text{tenseur du taux de déformation moyen}$$

$$\text{avec } v_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu l_m v_m$$

- **l_m = longueur de mélange** = échelle caractéristique des fluctuations turbulentes.
 - Souvent reliée à des propriétés de l’écoulement moyen (épaisseur d’un sillage, couche de mélange ou jet ; distance à la paroi pour un écoulement dans un canal plan ou pour une couche limite)
- **v_m = vitesse de mélange**, plus difficile à définir (reliée à l_m sur la base de simples considérations dimensionnelles)
- Prandtl (1945): $v_m = k^{\frac{1}{2}}$ → **équation de transport pour l’énergie cinétique turbulente k**

Equation de transport pour k : dérivation

- On rappelle que : $k = -\frac{1}{2\rho} \text{tr}(\tau_{ij}^R)$
- On peut alors obtenir une équation de transport exacte pour k à partir de l'équation pour τ_{ij}^R :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} &= -\tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} + \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} \right]\end{aligned}$$

- En prenant la trace de l'équation précédente et après quelques manipulations :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_k} \right]$$

avec :

- $\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{Dk}{Dt}$
- $\frac{1}{\rho} \tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \tau_{ik}^R \bar{S}_{ik}$: **production d'énergie cinétique turbulente** → travail du champ moyen transféré à la turbulence
- $\frac{\partial}{\partial x_k} \nu \frac{\partial k}{\partial x_k}$: **diffusion moléculaire** de k → diffusion de k par effet du mouvement d'agitation moléculaire (souvent négligeable)
- $-\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k}$: **diffusion turbulente** de k → diffusion de k par effet des fluctuations turbulentes (doit être modélisé)
- $-\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_k}$: **diffusion de pression** → forme de diffusion due à la corrélation pression/vitesse (doit être modélisé)
- $\epsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \geq 0$: **dissipation turbulente spécifique** → taux auquel k est détruit aux petites échelles (doit être modélisé)

Equation de transport pour k : modélisation

- $\frac{1}{\rho} \tau_{ik}^R \bar{S}_{ik} \rightarrow$ fermé par l'approximation de Boussinesq : $\tau_{ik}^R - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ik} = 2 \rho v_t \bar{S}_{ik}$
- $-\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_k} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \rightarrow$ modélisés ensemble par une loi de gradient (σ_k : coefficient de fermeture)
- En injectant ces modèles dans l'équation de k on obtient l'équation modélisée :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \tau_{ik}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right]$$

avec $\tau_{ik}^R - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ik} = 2 \rho v_t \bar{S}_{ik}$ et $v_t \sim l_m \nu_m$, $\nu_m = k^{\frac{1}{2}}$

- Il reste encore à déterminer $\epsilon \rightarrow$ un grand nombre de stratégies de modélisation existe (grande variété de modèles)
 - Analyse dimensionnelle : $\epsilon \sim \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$ avec l une longueur caractéristique turbulente
 - **Le problème de modélisation se réduit à déterminer cette longueur turbulente**

Modèle de Prandtl (1945)

- Prandtl propose un modèle à une seule équation de transport pour k
 - Amélioration du modèle de longueur de mélange avec $\nu_m = k^{\frac{1}{2}}$
 - k est déterminé en résolvant l'équation de transport modélisée avec
$$\epsilon = C_D k^{\frac{3}{2}} / l$$
 - Donc $\nu_t \sim C_D \frac{k^2}{\epsilon}$
 - Pour un écoulement turbulent en conditions d'équilibre : Production/Dissipation=cte
 - C'est le cas pour des écoulements librement cisailés, suffisamment loin des parois
 - Dans ce cas le modèle de longueur de mélange implique $l \sim l_m$, $l \approx 0.3 l_m$ (mesures)
 - Au final, on pose : $\nu_t = C_D \frac{k^2}{\epsilon}$ avec $C_D \approx 0.09$ et $\sigma_k = 1$ après calibration
 - **Remarque** : les comparaisons avec la DNS montrer qu'en réalité $\nu_t \approx cte \frac{k^2}{\epsilon}$ pour des écoulements en équilibre mais pas vrai en général

Modèles à une équation de transport pour ν_t

- Le modèle à une équation de Prandtl hérite de la plupart des défauts du modèle de longueur de mélange
- La cible de la modélisation pour une approche Boussinesq est bien ν_t !
- Idée: formuler directement une équation de transport (empirique) pour la viscosité tourbillonnaire ou une grandeur directement liée à celle-ci
 - Modèles de Baldwin et Barth (1990), Spalart et Allmaras (1992), Menter (1994)...

→ Le plus connu et largement utilisé encore aujourd’hui est le **modèle Spalart-Allmaras**

Modèle à une équation de Spalart-Allmaras (1992)

- La viscosité tourbillonnaire est calculée comme : $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$
- $\tilde{\nu}$ est la viscosité tourbillonnaire pour un écoulement haut-Reynolds non confiné
 - $f_{v1} \rightarrow 1$ loin des parois
 - Elle satisfait l'équation de transport :

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}_{\frac{D\tilde{\nu}}{Dt}} = \underbrace{c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}}_{\text{Production}} - \underbrace{c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right]}_{\text{Diffusion}} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k}$$

- Relations auxiliaires :

$$\circ f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}; f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}; f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}; \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}; g = r + c_{w2}(r^6 - r); r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}$$

$$\circ \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}; S = \sqrt{2 \bar{\Omega}_{ij} \bar{\Omega}_{ij}}$$

$$\circ \bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \text{taux de rotation moyen}; d = \text{distance à la paroi}$$

$$\circ c_{b1} = 0.1355; c_{b2} = 0.622; c_{v1} = 7.1; \sigma = \frac{2}{3}; c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}; c_{w2} = 0.3; c_{w3} = 2; \kappa = 0.41$$

- Il existe des variantes du modèle prenant en compte la transition ou les effets de rotation

Modèle à une équation de Spalart-Allmaras (1992)

- Le terme de production est une fonction de la distance à la paroi :
 - La dissipation tend vers 0 loin des parois
→ pas de décroissance de la turbulence transportée par un écoulement uniforme (non physique)
- Défauts :
 - On lui a longtemps reproché sa nature empirique
 - Nécessité de calibrer plusieurs coefficients de fermeture
 - Surestime le taux d'élargissement de jets (il n'a pas été calibré pour ces écoulements)
- Avantages :
 - Modèle complet : il ne nécessite pas de définir une échelle de longueur plus ou moins arbitraire
 - Simple, robuste
 - Résultats satisfaisants aussi bien pour des sillages et couches de mélange que pour une palette de configurations d'aérodynamique externe pour lesquelles il a été finement calibré

Modèle à une équation de Spalart-Allmaras (1992)

Profil de similitude pour un sillage lointain

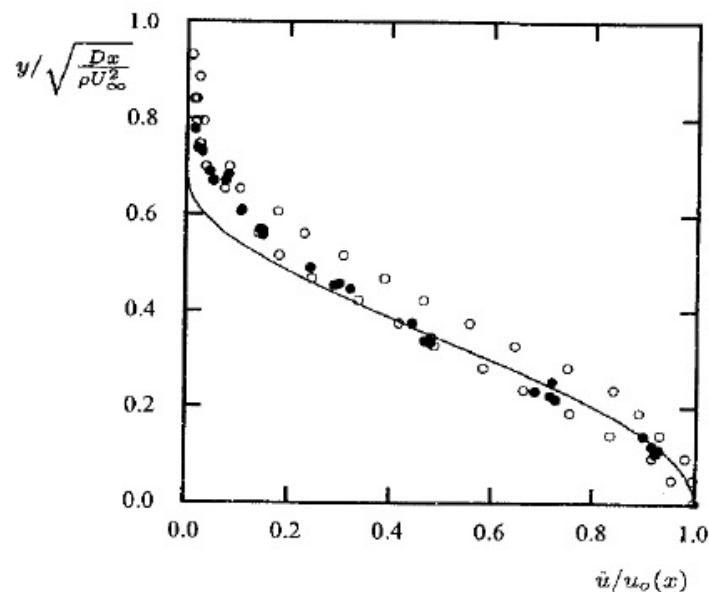


Figure 4.2: Comparison of computed and measured far-wake velocity profiles: — Spalart-Allmaras model; • Fage and Falkner (1932); ○ Weygandt and Mehta (1995).

Profil de similitude pour une couche de mélange

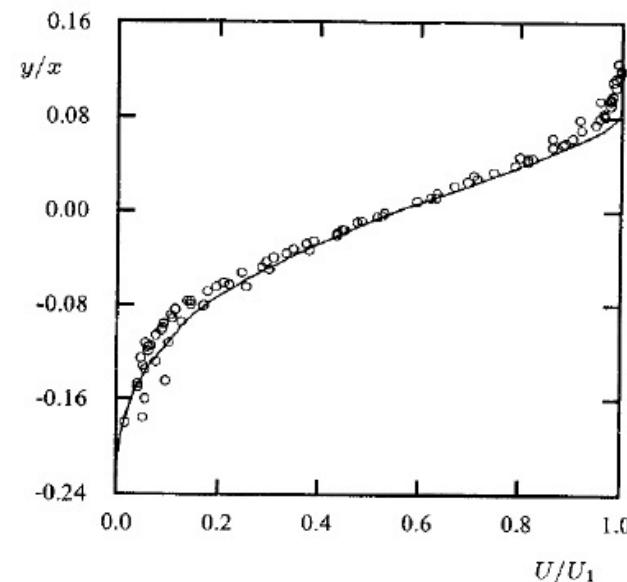
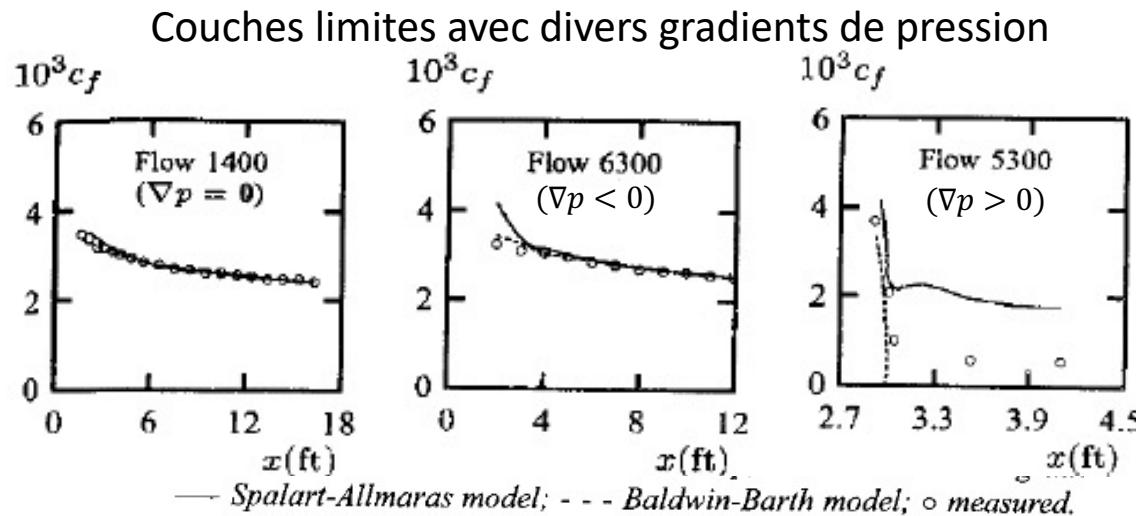
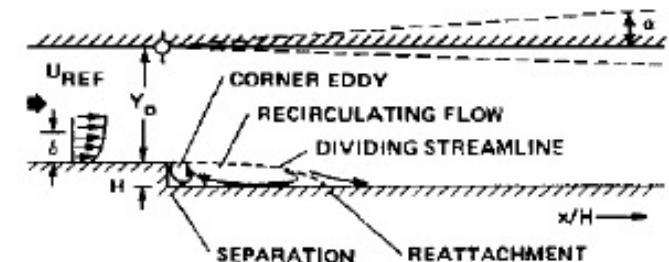
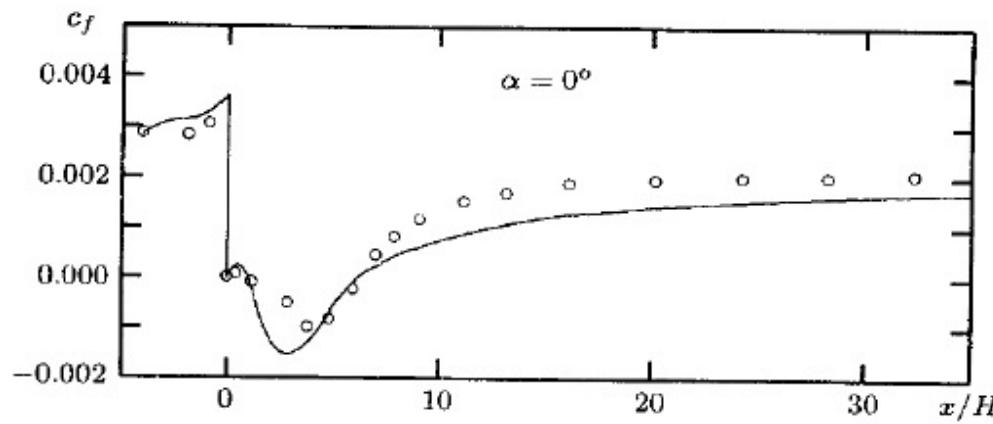


Figure 4.3: Comparison of computed and measured velocity profiles for a mixing layer: — Spalart-Allmaras model; ○ Liepmann and Laufer (1947).

Modèle à une équation de Spalart-Allmaras (1992)



Marche descendante (surestimation de la longueur de rattachement) à $\text{Re}_H=37500$



Modèles à deux équations

- Ils utilisent généralement une équation de transport pour k et pour une deuxième quantité turbulente permettant de déterminer l'échelle de longueur l

Proposer(s), (year)	Variable	Symbol	
Kolmogorov (1942) Saffman (1970) Wilcox et al /1972)	$k^{\frac{1}{2}}/l$	ω	→ $\omega = \frac{\epsilon}{k}$ =dissipation spécifique=[T] ⁻¹ (fréquence caractéristique)
Chou (1945), Davidov (1961) Harlow-Nakayama(1968) Jones-Launder (1972)	$k^{\frac{3}{2}}/l$	ϵ	→ Modélisation de l'équation (initialement exacte) pour ϵ
Rotta (1951), Spalding (1976)	l	l	→ Equation pour la longueur turbulente l
Rotta (1968, 1971)	kl	kl	
Rodi-Spalding (1970)			
Ng-Spalding (1972)			
Spalding (1969)	k/l^2	W	

$$\nu_t \sim k/\omega \sim k^2/\epsilon \sim k^{\frac{1}{2}}/l \dots$$

Le choix de la deuxième équation de transport constitue l'une des plus importantes sources d'incertitudes dans la modélisation RANS

Remarques

- Il n'y a pas de raison particulière pour laquelle ν_t ne devrait dépendre QUE de grandeurs turbulentes telles que $k, \epsilon, \omega, l \dots$
- ν_t étant lié au rapport entre des corrélations turbulentes et les gradients du champs moyen, elle dépend aussi bien de grandeurs turbulentes que du champ moyen
- Il n'y a donc a priori pas de raison que les modèles à deux équations soient beaucoup plus précis que ceux à une équation, notamment pour des écoulements hors équilibre
- L'ajout d'une deuxième équation peut faire apparaître des difficultés numériques

Modèles k- ϵ

- On peut obtenir une équation exacte pour ϵ à partir de l'opérateur suivant :

$$2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [NS(u_i)]} = 0$$

- Elle s'écrit

$$\underbrace{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}}_{\frac{D\epsilon}{Dt}} = \underbrace{-2\nu \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \bar{u}'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}}_{\text{Production de } \epsilon}$$

$$\underbrace{-2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}}_{\text{Dissipation de } \epsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} - \nu \bar{u}'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m} \right]}_{\text{Diffusion molculaire, turbulente, de pression de } \epsilon}$$

- Remarques:
 - Beaucoup plus complexe que l'équation exacte de $k \rightarrow$ de nombreux nouveaux termes non fermés
 - Sa modélisation repose sur des simplifications drastiques et l'introduction de plusieurs coefficients de fermeture
- L'utilisation d'une équation exacte comme point de départ ne garantit pas beaucoup plus de précision qu'un modèle comme Spalart-Allmaras, basé sur l'intuition physique et l'analyse dimensionnelle

Modèle k- ϵ “standard” (Jones-Launder, 1972 ; Launder-Sharma, 1974)

- Viscosité tourbillonnaire

$$\mu_t = \rho v_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

- Equation de transport pour k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

- Equation de transport pour le taux de dissipation

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{\rho k} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]$$

- Constantes du modèle (Launder-Sharma)

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$$

Modèle $k-\epsilon$ “RNG” (Yakhot-Orszag, 1986)

- Basé sur la théorie du groupe de renormalisation (RNG)
 - Formalisme de la physique théorique permettant d'étudier les variations d'un système à différentes échelles
- Le modèle obtenu est finalement très similaire au $k-\epsilon$ standard, avec des constantes modifiées et une formulation plus complexe pour $C_{\epsilon 2}$:

$$C_{\epsilon 2} = \tilde{C}_{\epsilon 2} + \frac{C_{\mu} \lambda^3 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_o}\right)}{1 + \beta \lambda^3}, \quad \lambda = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}$$

- Autres constantes :
 $C_{\epsilon 1} = 1.42, \tilde{C}_{\epsilon 2} = 1.68, C_{\mu} = 0.085, \sigma_k = 0.72, \sigma_{\epsilon} = 0.72, \beta = 0.0012, \lambda_o = 4.38$
- Améliore à la marge le modèle précédent, surtout grâce à la recalibration des constantes

Modèles $k-\omega$

- Utilise une équation de transport pour la dissipation spécifique

- Fréquence caractéristique des phénomènes dissipatifs

- Première tentative due à Kolmogorov (1942) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

(pas de production, pas de diffusion moléculaire)

- Pour Kolmogorov, ω est liée uniquement à la dissipation d'énergie aux petites échelles
 - Valable à grand nombre de Reynolds
- Basée uniquement sur l'intuition physique et l'analyse dimensionnelle
- Remise au goût du jour par Wilcox (1988, 1998, 2006)

Modèle k- ω moderne (Wilcox, 2006)

- Viscosité tourbillonnaire

$$\mu_t = \rho v_t = \rho \frac{k}{\tilde{\omega}}; \quad \tilde{\omega} = \max \left\{ \omega, C_{\lim} \sqrt{\frac{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right\}, \quad C_{\lim} = \frac{7}{8}$$

- Equation de transport pour k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

- Equation de transport pour le taux de dissipation spécifique

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{\rho k} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

- Constantes du modèle

$$\alpha = \frac{13}{25}; \quad \beta = \beta_o f_\beta; \quad \beta_o = 0.0708; \quad \beta^* = 0.09; \quad \sigma = \frac{1}{2}; \quad \sigma^* = \frac{3}{5}; \quad \sigma_d = \begin{cases} 0, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \\ \sigma_{do}, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \end{cases}; \quad \sigma_{do} = \frac{1}{8}$$

$$f_\beta = \frac{1+85\chi_\omega}{1+100\chi_\omega}; \quad \chi_\omega = \left| \frac{\bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{jk}\bar{S}_{ki}}{(\beta^*\omega)^3} \right| \quad (\chi_\omega=0 \text{ en 2D})$$

- Ajout d'un terme de diffusion croisée et d'un "limiteur de viscosité tourbillonnaire"

Modèle $k-\omega$ SST (Menter, 1994)

- SST = *shear-stress transport*
- Cherche à rassembler les meilleures propriétés du modèle $k-\epsilon$ (indépendance des valeurs à l'infini) et du modèle $k-\omega$ de Wilcox 1998 (robustesse, comportement asymptotique correct à l'approche des parois)
- Obtenu en réécrivant le modèle $k-\epsilon$ en fonction de ω et en hybrideant les coefficients des termes analogues présents dans $k-\omega$
 - On retrouve $k-\omega$ Wilcox 1998 dans la région proche-paroi (région « 1 ») et $k-\epsilon$ loin des parois (région « 2 »).
 - La transition entre les deux modèles se fait dans la zone logarithmique
- Limiteur sur la viscosité tourbillonnaire pour éviter une dissipation excessive dans les zones décollées

Modèle $k-\omega$ SST (Menter, 1994)

- Viscosité tourbillonnaire

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

- D'après l'"hypothèse de Bradshaw", dans un écoulement librement cisailé $\tau \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx 0.30k$. On pose alors :

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{|\bar{\Omega}|}, \quad a_1 = 0.30$$

- La formulation de Bradshaw est utilisée pour limiter μ_t en présence de gradients de pression adverses

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; F_2 |\bar{\Omega}|)}$$

- Équation de transport pour ω

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

- Équation de transport pour le taux de dissipation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\rho \nu_t} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

- Constantes du modèle : à l'exception de β^* et a_1 elles sont calculées par hybridation entre deux jeux de constantes

$$cte = cte_1 F_1 + (1 - F_1) cte_2$$

Modèle $k-\omega$ SST (Menter, 1994)

- Relations auxiliaires : $F_1 = \tanh(arg_1^4)$ and $F_2 = \tanh(arg_2^2)$

$$arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\mu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho k}{CD_{kw}y^2\sigma_{\omega 2}} \right] ,$$

$$arg_2 = \min \left[\max \left(2\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\mu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho k}{CD_{kw}y^2\sigma_{\omega 2}} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2}\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right)$$

- Constantes :

- Région interne

β_1	β^*	γ_1	σ_{k1}	$\sigma_{\omega 1}$	a_1
0.0750	0.090	0.5530	1.176	2.000	0.31

- Région externe

β_2	β^*	γ_2	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 2}$	a_1
0.0828	0.090	0.4404	1.000	1.170	0.31

- Remarque : modèle complexe et quelque peu « inélégant » à cause des fonctions d'hybridation

Coefficients de fermeture

- Les coefficients sont calibrés afin de retrouver le comportement observé pour quelques écoulements canoniques

- Turbulence homogène isotrope décroissante

- k- ϵ :

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon; \frac{d\epsilon}{dt} = -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}; \rightarrow \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{1}{C_{\epsilon 2}} \frac{k}{\epsilon} \rightarrow \frac{dk}{k} = \frac{1}{C_{\epsilon 2}} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \rightarrow k \sim \epsilon^{\frac{1}{C_{\epsilon 2}}}; \frac{dk}{dt} \sim -k^{C_{\epsilon 2}} \rightarrow k \sim t^{1/(1-C_{\epsilon 2})} \sim t^{-n} \rightarrow n = \frac{1}{C_{\epsilon 2}-1}$$

n=exposant de décroissance de la turbulence homogène isotrope

- k- ω :

$$\frac{dk}{dt} = -\beta^* k \omega; \frac{d\omega}{dt} = -\beta_o \omega^2; \rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{\beta^* k}{\beta_o \omega} \rightarrow \frac{dk}{k} = \frac{\beta^*}{\beta_o} \frac{d\omega}{\omega} \rightarrow k \sim \omega^{\frac{\beta^*}{\beta_o}}; \frac{dk}{dt} \sim -k^{-1-\frac{\beta_o}{\beta^*}} \rightarrow k \sim t^{-\frac{\beta^*}{\beta_o}} \sim t^{-n}$$

- Ecoulements librement cisaillés : équilibre production/dissipation + hypothèse de Bradshaw

- k- ϵ : $C_\mu = \left(\frac{\tau_{12}}{k}\right)^2 \approx 0.09$; $\frac{\text{Prod de } k}{\epsilon} = \frac{C_{\epsilon 2}-1}{C_{\epsilon 1}-1}$

- k- ω : $\beta^* = 0.09$

- Canal plan ou une couche limite turbulente : profil de vitesse logarithmique

- k- ϵ : $\kappa^2 = \sigma_\epsilon C_\mu^2 (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})$

- k- ω : $\alpha = \beta_o / \beta^* - \sigma \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}$

- A retenir** : les écoulements utilisés pour la calibration des coefficients sont au choix du développeur!

- Il est difficile de développer un seul et même modèle capable de reproduire précisément de la turbulence homogène isotrope, des écoulements librement cisaillés, des couches limites, ...

Application à des écoulements librement cisaillés

- Solution de similitude semi-analytique en TD

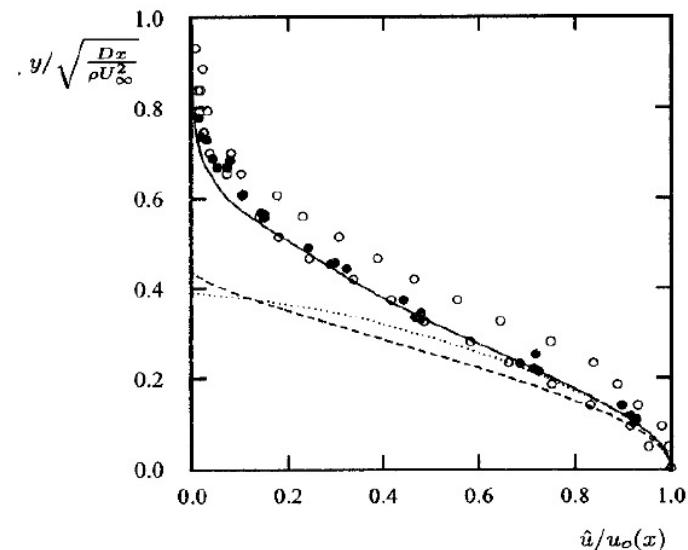


Figure 4.8: Comparison of computed and measured velocity profiles for the far wake; —— $k-\omega$ model; - - - $k-\epsilon$ model; ····· RNG $k-\epsilon$ model; • Fage and Falkner (1932); ○ Weygandt and Mehta (1995).

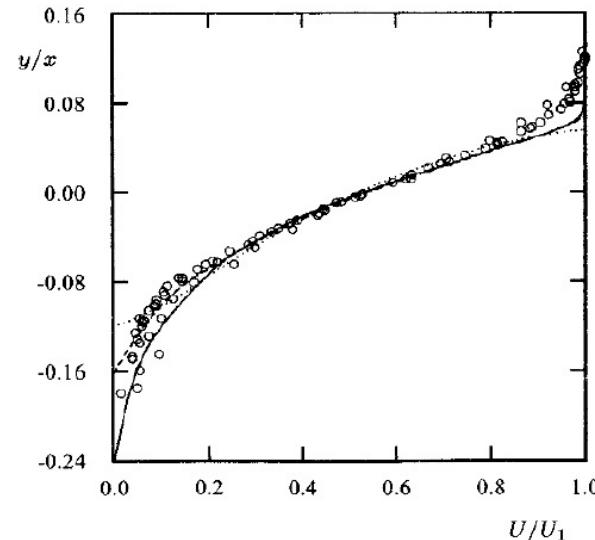


Figure 4.9: Comparison of computed and measured velocity profiles for the mixing layer; —— $k-\omega$ model; - - - $k-\epsilon$ model; ····· RNG $k-\epsilon$ model; ○ Liepmann and Laufer (1947).

Conditions aux limites

- Conditions au loin (information pas toujours disponible)
 - Intensité turbulente $Tu=k^{1/2}/U_{ref}$ + échelle de longueur turbulente
 - Ou hypothèse de Bradshaw pour estimer ν_t
 - Valeurs des grandeurs turbulentes
- Conditions de paroi
 - Sous-couche visqueuse non résolue (loi-log) ($30 < y^+ < 100$)
 - Sous-couche visqueuse résolue ($y^+ < 2$)

Conditions au loin

- Dans de nombreuses applications, l'écoulement à l'extérieur de la couche limite se comporte comme un écoulement potentiel. On s'attend alors à ce que les variables turbulentes tendent vers 0 loin des parois, sauf s'il existe une raison bien précise pour imposer un taux de turbulence non nul.
- Le domaine de calcul n'étant jamais infini, il est courant d'imposer des conditions au loin correspondant à des valeur faibles mais finies des variables turbulentes
- Certains modèles (notamment $k-\omega$ de Wilcox) peuvent être sensibles à ces valeurs, qui doivent être choisies soigneusement
- $k-\epsilon$ est peu sensible aux valeurs de ϵ_∞ , car la dissipation de ϵ est $\sim \epsilon^2/k \rightarrow \infty$ pour $k \rightarrow 0$
 - Ceci l'a fait longtemps préférer dans les applications « bureau d'études » malgré de nombreux autres défauts
- Les versions récentes de $k-\omega$ (SST, Wilcox 2006) présentent une moindre sensibilité aux conditions au loin
- Utilisation de relations analytiques pour les valeurs asymptotiques de k et ω (Langer et Swanson, J Sci Comp, 2020)
- Pour des applications d'aérodynamique interne (e.g. turbomachines), il faut parfois imposer un taux de turbulence
 - Rien n'assure que les modèles (développés pour l'aérodynamique externe ou des écoulements dans des longues conduites à section constante) permettent de retrouver le comportement observé dans les expériences ou la DNS

Conditions de paroi

- A la paroi, la vitesse moyenne et les fluctuations turbulentes s'annulent et le terme de production est petit par rapport aux autres (le pic de production se situe dans la zone tampon de la couche limite):

- $k = 0, \nu_t = 0$
- Pour $k - \epsilon$:

$$\cancel{\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^P \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \rightarrow \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \neq 0$$

Quelle valeur imposer?

- Pour $k-\omega$:

$$\omega = \frac{\epsilon}{k} \rightarrow \infty!$$

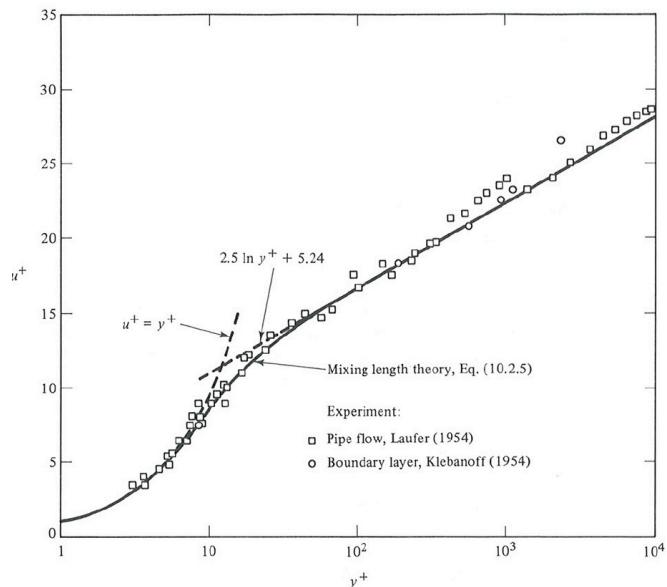
- On utilise alors l'équation de pour déterminer la variation de au voisinage de la paroi :

$$\cancel{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j}} = \alpha \frac{\omega}{\rho k} \cancel{\tau_{ij}^P \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\sigma_d}{\omega} \cancel{\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}} \rightarrow \omega^2 = \frac{\nu \partial^2 \omega}{\beta \partial x_j^2} \rightarrow \omega = \frac{6\nu}{\beta x_j^2}$$

- On se sert de cette relation pour imposer la valeur de ω au niveau de la première maille adjacente à la paroi

Conditions de paroi

- Les équations de transport pour les variables turbulentes sont déterminées sous l'hypothèse de grand nombre de Reynolds
- Il faudrait assurer un comportement asymptotique des équations à l'approche des parois consistant avec les observations expérimentales ou al DNS
- L'analyse asymptotique montre que les différents termes des modélisées n'ont pas toujours le bon comportement dans la couche interne, où les effets visqueux sont importants



Model	Type	B	n
Wilcox-Rubensin (1980)	$k - \omega^2$	7.1	4.00
Saffman (1970)	$k - \omega^2$	6.0	3.70-4.00
Launder-Spalding (1972)	$k - \omega^2$	5.7	3.79
Wilcox (1988)	$k - \omega$	5.1	3.23
Kolmogorov (1942)	$k - \omega$	3.1	3.62
Launder-Sharma (1974)	$k - \epsilon$	-2.2	1.39
Speziale (1990)	$k - \tau$	-2.2	1.39
Experiment/theory		5.0	2.00

Conditions de paroi

- Deux approches alternatives :

- Utilisation de « lois de paroi » :
 - Ne pas mailler la couche interne (réduction du temps de calcul) et imposer les conditions de paroi au niveau de la première maille au dessus de la paroi, en se servant de relations analytiques
 - Moins onéreuse en temps de calcul
 - Peu précise pour des écoulements décollés, avec forte courbure, ...
- Utilisation de « corrections bas-Reynolds » :
 - Résolution des équations jusqu'à la paroi
 - Ajout de fonctions correctives (fonctions d'amortissement) pour corriger le comportement asymptotique des différents termes
 - Nécessité de discrétiser la sous-couche visqueuse (taille de première maille $\Delta y^+ = O(1)$)

Lois de paroi (*standard wall functions*)

- Localement, on suppose un écoulement de type Couette 1D stationnaire et sans gradient de pression, avec contrainte de cisaillement à la paroi constante

$$U^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right) + C = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{u_\tau y}{\nu} \right) \rightarrow u_\tau = \frac{\kappa}{\ln(E \frac{u_\tau y}{\nu})} \bar{u} \rightarrow \tau_w = \rho u_\tau^2$$

- Les contraintes visqueuses dans les équations de la q. mvt pour les cellules proches de la paroi sont remplacées par une expression dérivée à partir de la loi-log
 - Hypothèse de Bradshaw : $\tau_w = 0.3 k = C_\mu^{1/2} k = \beta^{1/2} k = \rho u_\tau^2 \rightarrow k = \rho u_\tau^2 / C_\mu^{1/2}$
 - En conditions d'équilibre **production=dissipation** près de la paroi et les termes de production et dissipation sont :

$$\epsilon = \text{Production} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

- Nous avons déjà vu par ailleurs que :

$$\omega = \frac{6\nu}{\beta x_2^2}$$

Formulations bas-Reynolds

- A l'approche de la paroi, la viscosité tourbillonnaire est une fonction linéaire de $y : \nu_t = O(y)$
- Ceci est en désaccord avec la viscosité exacte (déduite de NS), qui montre que $\nu_t = O(y^3)$ (décroissance plus rapide)
- Afin de corriger ce comportement, on introduit des fonctions d'amortissement (à la van Driest) pour ν_t , e.g. :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

- Par ailleurs, des termes correctifs sont introduits dans les équations de transport des grandeurs turbulentes, afin de prendre en compte l'importance accrue de la viscosité moléculaire dans la sous-couche visqueuse
 - Pour k- ϵ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tilde{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \epsilon_0 \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} &= C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{\rho k} \tau_{ij}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + E\end{aligned}$$

- Où $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_0$ et $\tilde{\epsilon}_0$ est la valeur limite de ϵ à la paroi (tel que $\tilde{\epsilon}(0) = 0$)
- Un grand nombre de versions bas-Reynolds de k- ϵ a été proposée en littérature
- Tous ces modèles :
 - Font intervenir de nouveaux termes sources, numériquement **raides**
 - Nécessitent une **discrétisation fine** près des parois ($y+=O(1)$)
 - Surcoût de calcul, moindre robustesse numérique

Formulations bas-Reynolds (exemples)

Launder-Sharma Model

$$\begin{aligned}f_\mu &= e^{-3.4/(1+Re_T/50)^2} \\f_1 &= 1 \\f_2 &= 1 - 0.3e^{-Re_T^2} \\ \epsilon_o &= 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \\ E &= 2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \\ C_{\epsilon 1} &= 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3\end{aligned}$$

Jones-Launder Model

$$\begin{aligned}f_\mu &= e^{-2.5/(1+Re_T/50)} \\f_1 &= 1 \\f_2 &= 1 - 0.3e^{-Re_T^2} \\ \epsilon_o &= 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \\ E &= 2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \\ C_{\epsilon 1} &= 1.55, \quad C_{\epsilon 2} = 2.00, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3\end{aligned}$$

Chien Model

$$\begin{aligned}f_\mu &= 1 - e^{-0.0115y^+} \\f_1 &= 1 \\f_2 &= 1 - 0.22e^{-(Re_T/6)^2} \\ \epsilon_o &= 2\nu \frac{k}{y^2} \\ E &= -2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{y^2} e^{-y^+/2} \\ C_{\epsilon 1} &= 1.35, \quad C_{\epsilon 2} = 1.80, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3\end{aligned}$$

Modèles Spalart-Allmaras et $k-\omega$ bas-Reynolds

- Les modèles Spalart-Allmaras et $k-\omega$ ne nécessitent pas de modifications près des parois, car il présentent un comportement asymptotique assez correct.
- Même en sa version bas-Reynolds, le modèle $k-\omega$ est robuste (pas de termes-sources raides)

Transition

- Les modèles à équations de transport prennent en compte les effets d'histoire
 - Ils prédisent une transition laminaire/turbulent, car la viscosité tourbillonnaire n'est pas générée de façon instantanée, mais elle dépend de l'équilibre entre les termes de production et de dissipation, qui évoluent dans l'espace
 - Pour des écoulements de couche limite, le point de transition est généralement localisé à des Reynolds (locaux) au moins d'un ordre de grandeur plus faible qu'attendu
 - Transition précoce
 - Prédire correctement la transition avec un modèle RANS est très difficile et un sujet de recherche ouvert
 - Les approches LES sont plus à même de capturer la transition laminaire/turbulent

Récapitulatif sur les modèles à équations de transport

Avantages

- Modèles complets
- Tiennent compte des effets d'histoire
- Moins dépendants de la définition de distance à la paroi que les modèles algébriques
- Mieux adaptés aux écoulements dans des géométries complexes

Inconvénients

- Ils reposent toujours sur la (discutable) approximation de Boussineq
- Le traitement des conditions aux limites pour les grandeurs turbulentes peut s'avérer délicat
 - Sensibilité exaspérée aux conditions au loin pour certains modèles (version de base de $k-\omega$)
 - Singularité de ω à la paroi, difficulté à définir ϵ
- Nécessitent l'introduction de fonctions d'amortissement empiriques pour des écoulements pariétaux
- Ils peuvent faire intervenir des termes sources raides, compromettant la robustesse des calculs
- Ne sont pas adaptés aux écoulements transitionnels

Next time...

- QCM de 10 minutes pour se souvenir des épisodes précédents
- En TP on appliquera quelques modèles à des écoulements pariétaux simples (canal plan, couche limite)
- On étudiera la sensibilité des solutions numériques au modèle choisi et au traitement des conditions aux limites