Vibrations et Ondes

Examen du 2 mai 2018

Partie Ondes

(durée 1h)

Questions de cours

1. Écrire les expressions des vitesses des ondes élastiques de volume longitudinale et de cisaillement. Démontrer que les ondes de cisaillement se propagent toujours plus lentement que les ondes longitudinales.

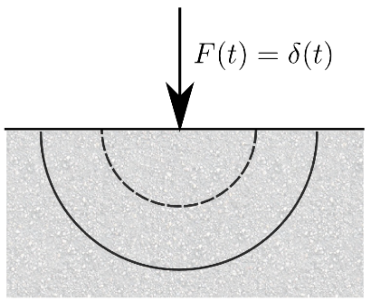
Solution:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$\lambda > 0$, d'où $c_L > c_T$.

2. La figure ci-dessous représente les fronts des ondes longitudinales et de cisaillement générées par l'application d'une force ponctuelle transitoire à la surface d'un demi-espace élastique. Qu'est-ce que traduit le fait que les fronts apparaissent circulaires ? Indiquez sur la figure quel est le front de l'onde longitudinale et quel est le front de l'onde transverse. Justifiez votre réponse.



Solution: Pour que les fronts soient circulaires, il faut que le matériau soit isotrope dans le plan coupe. L'onde longitudinale se propage plus vite que l'onde de cisaillement d'où : le front de rayon le plus petit est le front de l'onde de cisaillement.

3. On s'intéresse à la transmission et la réflexion des ondes à l'interface entre deux matériaux solides, notés *matériaux 1* et *matériaux 2* définis par leur coefficients de Lamé (λ_i, μ_i) et leur densité ρ_i où $i = 1, 2$ suivant le matériau. On suppose que les ondes ont une incidence normale sur l'interface.

Écrire en fonction de données du problèmes l'expression des coefficients de transmission et de réflexion des ondes longitudinales et de cisaillement. Vous préciserez quelle est la variable à laquelle s'applique les coefficients donnés.

Solution: L'incidence est normale, il n'y a donc par de conversion de mode. Il suffit d'écrire les coefficients pour les ondes L et T séparément On écrit les coefficients de transmission et réflexion pour la contrainte normale à l'interface

$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 - Z_1}$$
$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$

$Z_i = \rho_i \times c_{T,L;i}$ On peut vérifier que les coefficients sont ceux attendus dans les cas limites de surface libre ou rigide.

Exercice : Onde dans un tuyau souple

On considère un tuyau souple de section d'aire A_0 constante à l'équilibre. Le tuyau est rempli d'un fluide parfait incompressible. L'axe du tube est aligné avec l'axe $\mathbf{x}$, et la coordonnées le long de cet axe est notée x. La vitesse du fluide dans la direction de l'axe du tube est notée $u(x,t)$. Cette vitesse est nulle à l'équilibre (pas d'écoulement). La section du tuyau peut être déformée, par exemple lors du passage d'une onde ; on note alors son aire $A(x,t)$. La pression dans le fluide est supposée homogène dans chaque section droite et égale à :

$$p(x,t) = \frac{A(x,t) - A_0}{\Gamma} + p_0,$$

où p_0 est la pression atmosphérique et Γ est la compliance (l'inverse de l'élasticité).

1. Montrer que l'équation de conservation de la masse s'écrit
$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u}{\partial x} = 0.$$
On pourra pour cela faire un bilan sur un volume de fluide contenu dans une tranche du tuyau d'épaisseur infinitésimale δx.

Solution: Pour obtenir l'équation de conservation de la masse, on fait le bilan sur un volume de fluide contenu dans une tranche du tube de longueur δx entre les abscisses x^- et x^+ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{\delta x} \rho\ A(x)\ dx &= \rho\ u(x^-)\ A(x^-) - \rho\ u(x^+)\ A(x^+) \\
\int_{\delta x} \frac{\partial \rho\ A(x)}{\partial t}\ dx &= -\int_{\delta x} \frac{\partial\ \rho\ u(x)\ A(x)}{\partial x}\ dx \\
\frac{\partial\ A(x)}{\partial t} + \frac{\partial\ u(x)\ A(x)}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

On donne l'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

2. Écrire les équations linéarisées de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement pour des petits mouvements. On fera apparaître les quantités $A - A_0$ et $p - p_0$ qui sont la petite variation de surface de la section du tuyau et la petite variation de pression, respectivement.

Solution:

$$\begin{aligned} \partial_t(A - A_0) + \partial_t A_0 + \partial_x(A - A_0)u + \partial_x A_0 u &= 0 \\ \partial_t(A - A_0) + \cancel{\partial_t A_0} + \cancel{\partial_x(A - A_0)u} + \partial_x A_0 u &= 0 \\ \partial_t(A - A_0) + \partial_x A_0 u &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p - p_0}{\partial x} - \cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x}}.$$

3. Déterminer les équations des ondes vérifiées par la variation de pression $p - p_0$ et par la variation de surface $A - A_0$.

Solution: En dérivant par rapport au temps l'éq de conservation de la masse et par rapport à x l'eq de conservation de la qdm, puis en soustrayant, on obtient

$$\partial_{tt}(A - A_0) - \frac{A_0}{\rho}\partial_{xx}(p - p_0) = 0.$$

En utilisant la relation de comportement

$$\begin{aligned} \partial_{tt}(A - A_0) - \frac{A_0}{\rho\Gamma}\partial_{xx}(A - A_0) &= 0 \\ \partial_{tt}(p - p_0) - \frac{A_0}{\rho\Gamma}\partial_{xx}(p - p_0) &= 0 \end{aligned}$$

4. Quelle est l'expression de la vitesse de propagation des ondes ? Vérifier explicitement la dimension de la quantité obtenue.

Solution: La vitesse de propagation des ondes est

$$c = \sqrt{\frac{A_0}{\rho\Gamma}}.$$

Dimension :

$$c = \sqrt{\frac{L^2}{ML^{-3}\frac{L^2}{ML^{-1}T^{-2}}}} = \frac{L}{T}.$$