

Ecrit du mardi 6 janvier 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures

Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction. Les deux parties du problème sont indépendantes. Le barème sera environ de 10 points pour la partie 1, 8 points pour la partie 2 et 2 points pour la rédaction.

Cisaillement de milieux continus entre deux cylindres

On considère un milieu continu occupant le domaine Ω compris entre deux cylindres rigides d'axe $(0, \underline{e}_z)$, de rayons R_1 et R_2 tels que $R_1 < R_2$ et de longueur H dans la direction \underline{e}_z , (Figure).

Dans la partie 1 du problème, le milieu continu considéré est un solide élastique linéaire isotrope, et dans la partie 2, le milieu continu est un fluide visqueux newtonien incompressible. Les deux parties sont totalement indépendantes.

Dans les deux parties, le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur est animé d'un déplacement uniforme de torsion autour de l'axe \underline{e}_z (partie 1-solide) ou d'une vitesse de rotation uniforme autour de l'axe \underline{e}_z (partie 2-fluide).

Les forces de pesanteur sont négligées dans les deux parties du problème.

On adoptera dans les deux parties le système de coordonnées cylindriques $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$, un point du milieu étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z) et on utilisera le formulaire donné en fin d'énoncé.

Partie 1 : Structure élastique en petites déformations entre les cylindres

Le milieu continu, qui occupe le domaine Ω dans sa configuration de référence non déformée, est un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé (λ, μ) , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν .

La structure est en équilibre. Elle est parfaitement collée aux deux cylindres. Le cylindre extérieur $r = R_2$ est fixe et le cylindre intérieur $r = R_1$ est animé d'un déplacement imposé uniforme $\underline{\xi}^d = R_1 \alpha_1 \underline{e}_\theta$, α_1 étant une constante strictement positive donnée, $\alpha_1 > 0$.

Les extrémités $z = 0$ et $z = H$ sont libres d'efforts. L'hypothèse des petites déformations est adoptée.

1.1 Ecrire les équations et conditions aux limites satisfaites par les champs de déplacements $\underline{\xi}(r, \theta, z)$, déformations $\underline{\epsilon}(r, \theta, z)$ et contraintes $\underline{\sigma}(r, \theta, z)$ dans la pièce.

1.2 Montrer, en utilisant le calcul indiciel, que le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ doit nécessairement vérifier en tout point de la pièce l'équation de Lamé-Navier :

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu \underline{\Delta} \underline{\xi} = \underline{0},$$

où div , $\underline{\text{grad}}$ et $\underline{\Delta}$ désignent respectivement les opérateurs divergence, gradient et laplacien d'un vecteur.

1.3 On recherche le champ de déplacement solution sous la forme :

$$\underline{\xi}(r, \theta, z) = f(r) \underline{e}_\theta,$$

où $f(r)$ est une fonction scalaire qui dépend uniquement de la variable radiale r .

Justifier ce choix et vérifier que $\text{div } \underline{\xi} = 0$ (on utilisera le formulaire).

Etablir alors que la fonction $f(r)$ doit nécessairement satisfaire l'équation différentielle suivante pour conduire à un déplacement solution :

$$\frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{f(r)}{r^2} = 0.$$

Préciser les conditions aux limites satisfaites par la fonction $f(r)$.

1.4 Vérifier que l'équation différentielle ci-dessus est satisfaite par tout champ de déplacement associé de la forme suivante :

$$\underline{\xi}(r, \theta, z) = \left(A r + \frac{B}{r} \right) \underline{e}_\theta,$$

où A et B sont des constantes que l'on précisera.

Tracer le champ de déplacement.

Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\epsilon}(r, \theta, z)$ associé à ce champ de déplacement.

Quelle est la variation de volume subie par la pièce ?

En quel(s) point(s) la déformation est-elle maximale ?

Comment varie la déformation dans l'épaisseur de la pièce lorsque l'épaisseur de la pièce tend vers zéro ?

Quelle(s) condition(s) doivent être satisfaites pour que les déformations puissent être considérées comme petites ?

Donner l'angle α_1^* maximal de torsion (au sens où $\alpha_1 \ll \alpha_1^*$) pour que les déformations restent petites.

- 1.5** Déterminer les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z)$ associé au champ de déplacement obtenu en question 1.4.

On vérifiera qu'il est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z) = -\frac{2\mu B}{r^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r),$$

où \otimes désigne le produit tensoriel de deux vecteurs et B la constante déterminée précédemment.

Montrer que ce champ est bien solution du problème initialement posé.

- 1.6** Déterminer la densité surfacique exercée par le cylindre intérieur de rayon $r = R_1$ sur le milieu.

En déduire le torseur des efforts exercés par le cylindre extérieur sur le milieu.

Comment varie-t-il en fonction de l'épaisseur de la pièce ? Commenter.

Déterminer, sans faire de calculs, le torseur exercé par le cylindre extérieur sur le milieu.

- 1.7** Tracer les cercles de Mohr en un point quelconque de la pièce et déterminer la contrainte tangentielle maximale τ_{max} en ce point.

En quels points de la pièce atteint-elle son maximum ?

Et quelle est sa valeur maximale ?

Quels sont les plans de cisaillement maximal ? Interpréter ce résultat.

La pièce reste élastique tant que $\tau_{max} < \sigma_S$, σ_S désignant la limite d'élasticité du matériau en traction simple, quelle est la valeur limite de l'angle α_c à partir de laquelle la pièce sort du domaine élastique ?

Comment faut-il faire varier l'épaisseur de la pièce pour augmenter l'angle critique ?

Partie 2 : Ecoulement d'un fluide visqueux incompressible entre les cylindres

Le milieu continu est dans cette partie un fluide visqueux newtonien *incompressible*, de viscosité μ , homogène, de masse volumique ρ .

A partir de l'état initial où le fluide est immobile, on impose progressivement une rotation du cylindre intérieur autour de l'axe \underline{e}_z pour atteindre la vitesse $\underline{v}^d = \omega_1 R_1 \underline{e}_\theta$ en régime stationnaire, ω_1 étant la vitesse angulaire supposée connue. Le cylindre extérieur est immobile.

On étudie l'écoulement dans la partie centrale du système, c'est à dire loin des extrémités $z = 0$ et $z = H$. L'écoulement est supposé *stationnaire*, plan et les lignes de courant sont des cercles horizontaux centrés sur l'axe $(0, \underline{e}_z)$. Le champ de vitesse $\underline{v}(r, \theta, z, t)$ est supposé indépendant de la variable z .

- 2.1** Rappeler les équations qui régissent l'écoulement du fluide.

Ecrire les conditions aux limites aux frontières des deux cylindres.

2.2 Montrer que sous les hypothèses du problème, le champ de vitesse de l'écoulement en configuration actuelle $\underline{v}(r, \theta, z, t)$ est nécessairement de la forme :

$$\underline{v}(r, \theta, z, t) = v(r) \underline{e}_\theta,$$

où $v(r)$ est une fonction scalaire de la variable radiale r uniquement.

2.3 Calculer les composantes du tenseur gradient de vitesse $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})$ en fonction de $v(r)$.

En déduire l'expression du champ d'accélération eulérienne $\underline{\gamma}$ en fonction de $v(r)$, ainsi que les composantes du tenseur taux de déformations $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ associé au champ de vitesse.

2.4 On suppose la pression p indépendante de la variable θ . On rappelle l'équation de Navier-Stokes pour l'écoulement considéré :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt}(\underline{x}, t) = - \underline{\text{grad}} p(\underline{x}, t) + \mu \underline{\underline{\Delta}} \underline{v}(\underline{x}, t),$$

où $\underline{\text{grad}}$ et $\underline{\underline{\Delta}}$ sont les opérateurs gradient et laplacien d'un vecteur.

Montrer que :

a) la pression dépend uniquement de la variable radiale r et qu'elle satisfait l'équation :

$$\frac{dp}{dr}(r) = \rho \frac{v^2(r)}{r},$$

b) la vitesse vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r} \frac{dv(r)}{dr} + \frac{d^2v(r)}{dr^2} - \frac{v(r)}{r^2} = 0.$$

2.5 En déduire l'expression suivante de la vitesse :

$$v(r) = \omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right).$$

Tracer le profil de vitesse en prenant $\omega_1 > 0$.

2.6 Déterminer le champ de pression à une constante additive près et tracer son allure entre R_1 et R_2 .

En quel endroit de l'écoulement la pression est-elle maximale ?

2.7 Déterminer (à une constante additive près) le champ de contraintes en tout point.

Calculer la densité surfacique d'effort exercée par le fluide sur la paroi du cylindre intérieur, ainsi que le torseur résultant associé.

En déduire le couple que l'on doit imposer au cylindre intérieur pour maintenir la vitesse angulaire ω_1 .

Formulaire en coordonnées cylindriques

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\underline{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z \quad \Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence, rotationnel et Laplacien d'un vecteur $\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_z \underline{e}_z$:

$$\text{div } \underline{v}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{\text{rot}} \underline{v}(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

$$\Delta \underline{v}(r, \theta, z) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \underline{e}_\theta + \Delta v_z \underline{e}_z$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\nabla}(\underline{v})(r, \theta, z)$:

$$\underline{\nabla}(\underline{v})(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

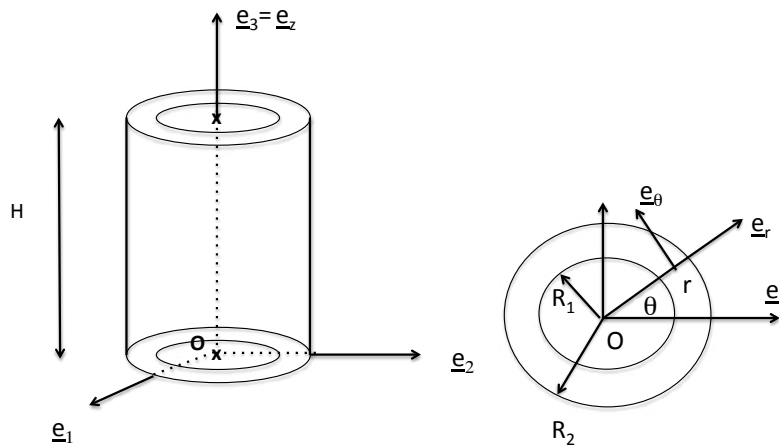


Figure 1: Géométrie du problème : milieu entre deux cylindres.