Ecrit Intermédiaire - Bases de la Mécanique des Milieux Continus

lundi 3 novembre 2014

Durée de l'épreuve : 2 heures
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

Cinématique et déformations dans un mouvement plan

On considère le mouvement suivant caractérisé par la donnée de la vitesse eulérienne relativement au repère orthonormé $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$v_1(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha, \qquad v_2(x_1, x_2, x_3, t) = 2\,\beta\,t\,x_1, \qquad v_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

où (x_1, x_2, x_3) désigne la position à l'instant t d'une particule et où α et β sont des constantes données supposées strictement positives.

Partie 1. Cinématique

1.1 Préciser les dimensions des constantes α et β.

Le mouvement est-il stationnaire ?

Déterminer, par deux méthodes différentes, l'expression de l'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ dans la représentation eulérienne du mouvement.

1.2 Etablir les équations des lignes de courant.

Préciser la nature de ces lignes de courant. Représenter quelques unes d'entre elles en indiquant le sens de parcours.

1.3 Etablir la représentation lagrangienne du mouvement.

On notera (X_1, X_2, X_3) la position à l'instant $t = 0$ de la particule qui occupe la position (x_1, x_2, x_3) à l'instant t.

On vérifiera notamment que :

$$x_2 = X_2 + \beta\,X_1\,t^2 + \frac{2}{3}\,\alpha\,\beta\,t^3.$$

1.4 Déterminer les expressions de la vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et de l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ du mouvement dans la représentation lagrangienne.

Retrouver l'expression de l'accélération eulérienne $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ établie à la question 1.1.

1.5 Montrer que l'équation de la trajectoire de la particule P qui se trouvait en (X_1, X_2, X_3) à l'instant $t = 0$ s'écrit :

$$x_2 = X_2 + \frac{\beta}{3\alpha^2}\,(\,2\,x_1 + X_1\,)\,(\,x_1 - X_1\,)^2, \qquad x_1 \geq X_1, \qquad x_3 = X_3.$$

Est-elle de même nature que les lignes de courant ? Commenter.

Tracer la trajectoire de la particule P_1 qui se trouvait en $\underline{X} = (\,a,\,a,\,0\,)$ à l'instant $t = 0$ et celle de la particule P_2 qui se trouvait en $\underline{X} = (\,-a,\,a,\,0\,)$ à l'instant $t = 0$, avec $a > 0$.

Partie 2. Caractérisation de la transformation

2.1 Calculer les composantes du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ en tout point $\underline{X}$ et à tout instant t.

Cette transformation est-elle homogène ? Commenter.

Soit Ω_0 un volume élémentaire centré en $\underline{X}$ à l'instant $t = 0$, déterminer son transformé Ω_t à l'instant t dans la transformation. Commenter le résultat.

2.2 Calculer les composantes du tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t)$.

En déduire l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$.

2.3 Rappeler l'expression générale de la dilatation subi dans une transformation quelconque par un élément matériel infinitésimal issu du point M_0 porté par une direction $\underline{n}_0$ unitaire et de longueur dl_0.

En déduire, pour la transformation étudiée, la dilatation en un point quelconque $\underline{X}$ dans chacune des directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ à un instant $t = t^*$ donné. Commenter les résultats.

2.4 Rappeler l'expression de la variation angulaire dans une transformation quelconque entre deux éléments matériels infinitésimaux portés par des directions $\underline{n}_0$ et $\underline{\tau}_0$ unitaires.

En déduire, pour la transformation étudiée, la variation d'angle γ_{12}, en un point quelconque $\underline{X}$ du cube Ω_0, entre les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ à un instant $t = t^*$ donné. Commenter le résultat.

Partie 3. Transformation infinitésimales

3.1 Déterminer le vecteur déplacement $\xi(\underline{X}, t)$, ainsi que les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\xi(\underline{X}, t)$ et du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t)$.

3.2 Sous quelle condition l'hypothèse des transformations infinitésimales est-elle valable?

Rapprocher dans ce cas les expressions des tenseurs de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ et de déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t)$.

3.3 Rappeler l'expression de l'allongement relatif subi dans une transformation infinitésimale quelconque par un élément matériel infinitésimal issu du point M_0 porté par une direction $\underline{n}_0$ unitaire et de longueur dl_0, ainsi que celle de la variation angulaire entre deux éléments matériels infinitésimaux portés par des directions $\underline{n}_0$ et $\underline{\tau}_0$ unitaires.

En déduire, pour la transformation étudiée sous l'hypothèse des transformation infinitésimales, les allongements relatifs en un point $\underline{X}$ dans chacune des directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ à un instant $t = t^*$ donné. Commenter les résultats vis à vis de ceux de la question 2.3.

Donner toujours dans ce cadre la variation d'angle entre les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ après transformation. Rapprocher ce résultats de celui obtenu à la question 2.4.

3.4 Déterminer les déformations et directions principales linéarisées (vecteurs propres et valeurs propres de $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t)$.

En déduire la transformation subie par l'assemblage de deux barres $[P_2O]$ et $[OP_1]$ ayant pour extrémités les points P_2 : $(-a, a, 0)$, O : $(0, 0, 0)$ et P_1 : $(a, a, 0)$ à un instant donné. La représenter.

Partie 4. Lien avec le taux de déformation eulérien

4.1 Montrer, à l'aide du calcul indiciel, la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\right] = \underline{\underline{\nabla}} v(\underline{x}, t)\, \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t),$$

où $\underline{\underline{\nabla}} \underline{v}(\underline{x}, t)$ désigne le tenseur gradient en $\underline{x}$ de la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ le tenseur gradient de transformation.

En déduire l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)\right] = {}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\, \underline{\underline{D}}\left(\underline{v}(\underline{x}, t)\right) \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t),$$

où $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ désigne le tenseur de Green-Lagrange et $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ le tenseur des taux de déformations.

Déduire l'expression du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ en fonction du tenseur $\frac{d}{dt}(\underline{\underline{e}})$ et du tenseur $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$ inverse du tenseur gradient de transformation.

4.2 Calculer pour le mouvement étudié les tenseurs gradient de vitesse $\underline{\underline{\nabla}}\, v(\underline{x}, t)$ et taux de déformations $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$.

Vérifier, dans le cas du mouvement étudié, la relation établie à la fin de la question 4.1 entre $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ et $\frac{d}{dt}(\underline{\underline{e}})$.

Questions Bonus

4.3 Calculer le taux de dilatation en un point $\underline{x}$ dans chacune des directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ à un instant $t = t^*$ donné.

Calculer le taux de glissement au point $\underline{x}$ entre les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$.

Rapprocher ces résultats de ceux obtenus à la question 3.3.

4.4 Comparer les directions principales des tenseurs de vitesse de déformations $\underline{\underline{D}}$ et de déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}$. Commenter.