UPMC-Licence Mécanique **2016-2017**

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 11 Mai 2017

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Questions de cours

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine ouvert borné, régulier, de frontière régulière $\partial\Omega$. On repère par $x = (x_1, x_2, x_3)$ la position d'un point du domaine Ω.

1. Enoncer le théorème de trace sur l'espace $H^1(\Omega)$.
2. Donner la définition du produit scalaire usuel sur $H^1(\Omega)$, $< \cdot, \cdot >_{H^1(\Omega)}$ et de la norme associée $|| \cdot ||_{H^1(\Omega)}$.
3. Donner la définition de l'espace $H^1_0(\Omega)$. En utilisant le résultat de cours "$(H^1(\Omega), < \cdot, \cdot >_{H^1(\Omega)}, || \cdot ||_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert",
   montrer que l'espace $H^1_0(\Omega)$, muni du même produit scalaire et de la norme associée, est aussi un espace de Hilbert.
4. Rappeler l'inégalité de Poincaré pour des fonctions $v : \Omega \to \mathbb{R}$, en précisant bien l'espace auquel v doit appartenir.

Transport par advection-dffusion

On s'intéresse dans l'ensemble du problème à l'équation d'advection-diffusion en régime stationnaire qui régit le transport par un fluide de particules de polluant.

Le fluide occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ouvert borné, régulier, de frontière régulière $\partial\Omega$. On repère par $x = (x_1, x_2, x_3)$ la position d'un point du domaine Ω.

Le fluide est en mouvement avec une vitesse $\vec{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ au point x. On désigne par $u(x)$ la concentration des particules de polluant transportées par le fluide, au point x, et par $f(x)$ la source du polluant en ce point.

La fonction scalaire $u(x)$ recherchée vérifie le problème d'advection-diffusion $(\mathcal{P}C)$:

$$(\mathcal{P}C) \left\{ \begin{array}{rll} -\nu\, \Delta u(x) \,+\, \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u(x) \,+\, \alpha\, u(x) & = \, f(x), & x \in \, \Omega, \\ u(x) & = \, 0, & x \in \, \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

où ν est une constante scalaire caractéristique de la diffusion du polluant ($\nu > 0$) et α une constante scalaire qui caractérise la consommation du polluant ($\alpha \geq 0$).
Les opérateurs Δ et $\vec{\nabla}$ désignent respectivement le Laplacien et le vecteur gradient d'une fonction scalaire et $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

On suppose que le terme source donné $f \in L^2(\Omega)$ et que le vecteur vitesse $\vec{V}$, donné aussi, est non nul et $\vec{V} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$, avec $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Partie 1 - Existence et unicité de la solution dans le cas div $\vec{V} = 0$ et $\alpha > 0$.

1. Vérifier que si div $\vec{V} = 0$, l'identité suivante est vraie pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$:
$$\text{div } (w\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} w$$
En déduire que si div $\vec{V} = 0$, alors pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$:
$$\int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} u) v \, dx \;=\; - \int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} v) u \, dx$$
et
$$\int_\Omega (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} u) v \, dx \;=\; \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{V} \cdot (v \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} v) \, dx$$

2. Déduire de la question précédente la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}C)$ sur l'espace $H_0^1(\Omega)$. Montrer que le problème variationnel peut être mis sous la forme :
$$(\mathcal{P}V_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ a_1(u,v) \;=\; L(v), \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{2}$$
avec
$$a_1(u,v) = \nu \int_\Omega (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) \, dx \;+ \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{V} \cdot (v \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} v) \, dx + \alpha \int_\Omega uv \, dx$$
et
$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx.$$

3. Montrer que l'application $a_1(.,.)$ est bilinéaire sur $(H_0^1(\Omega))^2$ et que l'application $L(.)$ est linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

4. Montrer que l'application $a_1(.,.)$ n'est pas symétrique.
Bonus : Quelle est la condition nécessaire et suffisante que devrait vérifier $\vec{V}$ pour que $a_1(.,.)$ soit symétrique ? Justifier votre réponse.

5. Montrer que $a_1(.,.)$ est une application continue sur $(H_0^1(\Omega), ||\cdot||_{H^1(\Omega)})$.
6. Montrer que $a_1(.,.)$ est-elle une application coercive sur $(H_0^1(\Omega), ||\cdot||_{H^1(\Omega)})$..
7. Montrer que $L(.)$ est une application continue sur $(H_0^1(\Omega), ||\cdot||_{H^1(\Omega)})$..
8. Conclure quant à l'existence et l'unicité d'une solution du $(\mathcal{P}V_1)$.
9. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème variationnel $(\mathcal{P}V_1)$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $\vec{V} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$, tout $\nu > 0$ et tout $\alpha \geq 0$,
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K}{\nu}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Partie 2 - Existence et unicité de la solution dans le cas général $\vec{V}$ quelconque et $\alpha > 0$.

Dans cette partie, la divergence du vecteur $\vec{V}$ peut être non nulle.

1. Etablir la nouvelle formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}C)$.
$$(\mathcal{P}V_2)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ a_2(u,v) \ = \ L(v), \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3}$$
Indication : On reprendra la question 1 de la partie 1 en exploitant cette fois l'identité suivante (que l'on vérifiera au préalable) : pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$:
$$\text{div }(w\vec{V}) = (\text{div }\vec{V})w + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}w$$
On montrera que l'application bilinéaire associée est
$$a_2(u,v) = a_1(u,v) + c(u,v), \quad c(u,v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div }\vec{V})\, u\, v\, dx$$
2. Vérifiez la bilinéarité et la continuité de la nouvelle application $a_2(.,.)$.
3. On suppose l'inégalité suivante satisfaite :
$$\frac{1}{2}(\text{div }\vec{V}(x)) \leq \frac{\nu}{C} + \alpha - \epsilon$$
pour un $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on veut et C est la constante qui intervient dans l'inégalité de Poincaré.
Montrer que l'application bilinéaire $a_2(u,v)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$.
Indication : On distinguera les deux cas : $-\frac{\nu}{C} + \epsilon > 0$ et $-\frac{\nu}{C} + \epsilon < 0$.
4. En déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}V_2)$.
