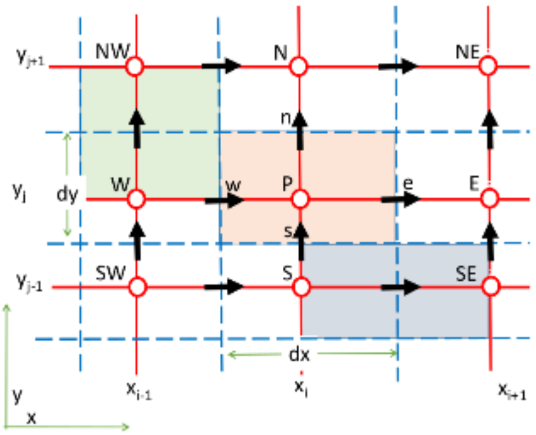
Exercice : diffusion 2D stationnaire

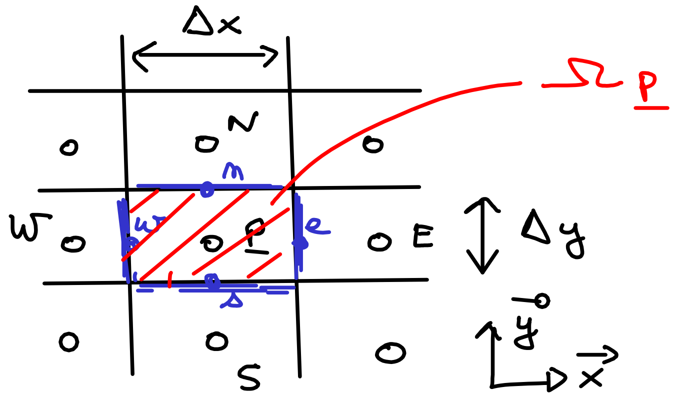


$$\boxed{\nabla \cdot (\Gamma \nabla \emptyset) + \bar{S} = 0}$$

- $\Gamma(x,y)$; $\emptyset(x,y)$; $\bar{S}(x,y) = S_c$ $(S_P = 0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) + \bar{S} = 0$$

1- schéma de la maille courante



maillage régulier
Δx, Δy sont des constantes

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \delta x_{EP} = \delta x_{PW} = \delta x_{ew} \\ \Delta y = \delta y_{NP} = \delta y_{PS} = \delta y_{ns} \end{cases}$$

2- Intégrer le terme source = intégrale de volume

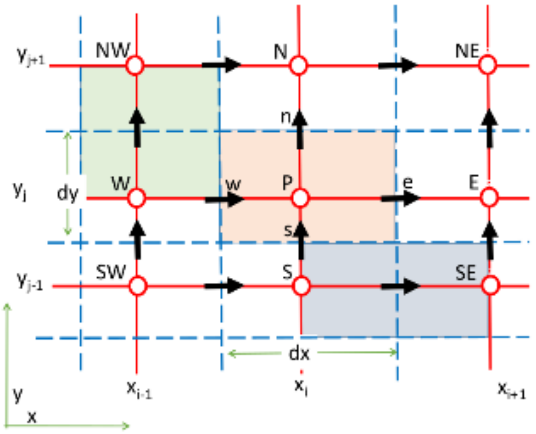
$$\int_{\Omega_P} \bar{S} \, dV = \int_w^e \int_s^n \bar{S} \, dx \, dy$$

or $\bar{S}(x,y)$ varie spatialement, mais sur Ω_P, on a $\bar{S}_P$ est une constante (principe VF)

$$\int_{\Omega_P} \bar{S} \, dV = \bar{S}_P \, \Delta x \, \Delta y$$

3_ Equation discrète sur Ω_P

$$\int_w^e \int_s^n \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right)}_{\text{flux suivant } x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right)}_{\text{flux suivant } y} dx\,dy + \iint_{w\ s}^{e\ n} \bar{S} \, dx\,dy = 0$$



4 Formulation générale

Maillage régulier

on se place au noeud courant P

→ on fait apparaître les valeurs de $\emptyset$ aux noeuds : $\emptyset_P$, $\emptyset_E$, $\emptyset_W$, $\emptyset_N$, $\emptyset_S$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_s^n \Big(\underbrace{\Gamma_e \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\Big|_e}_{\text{constant le long de la face Est dans } \Omega_P} - \underbrace{\Gamma_w \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\Big|_w}_{\text{constante dans } \Omega_P} \Big) dy$$

$$= \Delta y \left[\Gamma_e \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\Big|_e - \Gamma_w \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\Big|_w \right]$$

on considère que les $\Gamma_e, \Gamma_w, \Gamma_n$ et Γ_s sont connues ($\forall$ méthode)

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) dx\, dy = \Delta y \left[\Gamma_e \frac{\emptyset_E - \emptyset_P}{\Delta x} - \Gamma_w \frac{\emptyset_P - \emptyset_W}{\Delta x} \right]$$

dans la direction y, on a

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) dx\, dy = \Delta x \left[\Gamma_n \frac{\emptyset_N - \emptyset_P}{\Delta y} - \Gamma_s \frac{\emptyset_P - \emptyset_S}{\Delta y} \right]$$

L'équation complète devient :

$$\Delta y \left[\Gamma_e \frac{\emptyset_E - \emptyset_P}{\Delta x} - \Gamma_w \frac{\emptyset_P - \emptyset_W}{\Delta x} \right] + \Delta x \left[\Gamma_n \frac{\emptyset_N - \emptyset_P}{\Delta y} - \Gamma_s \frac{\emptyset_P - \emptyset_S}{\Delta y} \right] + \bar{S}_P \Delta x \Delta y = 0$$

On cherche les coefficients de la formulation générale :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_S\phi_S + a_N\phi_N + b_P$$

On identifie

$$b_P = \bar{S}_P \Delta x \Delta y$$

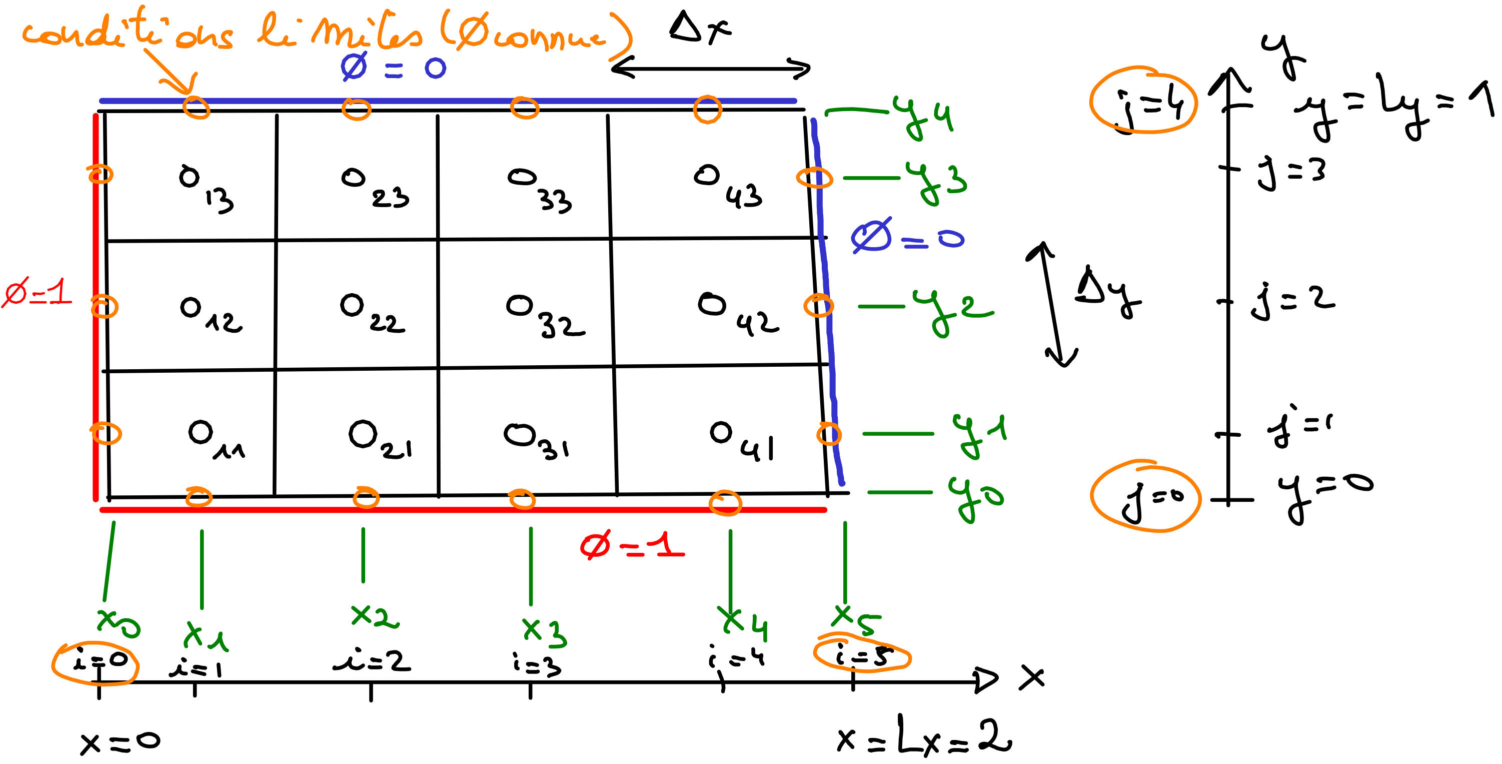
$$a_E = \frac{\Delta y \, \Gamma_e}{\Delta x} \; ; \; a_W = \frac{\Delta y \, \Gamma_w}{\Delta x} \; ; \; a_N = \frac{\Delta x \, \Gamma_n}{\Delta y} \; ; \; a_S = \frac{\Delta x \, \Gamma_s}{\Delta y}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S = \sum a_{\substack{\text{voisins} \\ (NB)}}$$

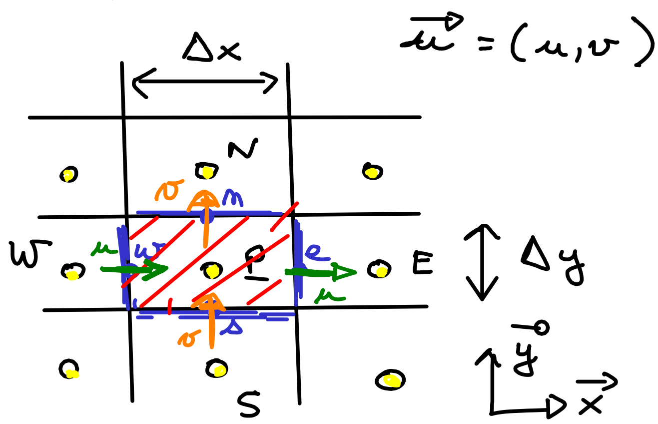
Eq. de convection diffusion 2D

1 Domaine discret

$(\text{ici} = 12 \text{ variables inconnues} : \underset{\phi_{ij}}{\phi_{11} \text{ à } \phi_{43}})$



2 Equation discrète au noeud courant P



Equation continue :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

- transport suivant x :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi)\, dx dy = \int_s^n [\rho u \phi]_w^e \, dx dy$$

$$= \int_s^n \left(\rho u \phi|_e - \rho u \phi|_w\right) dy$$

$$= \int_s^n (\rho_e u_e \phi_e - \rho_w u_w \phi_w) dy$$

$$\simeq \Delta y \left(\rho_e u_e \phi_e - \rho_w u_w \phi_w\right)$$

• transport suivant y : idem

$$\iint_{w\,s}^{e\,n} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)\, dx\, dy = \Delta x (\rho_n v_n \phi_n - \rho_s v_s \phi_s)$$

• vitesse d'advection : $F_e = \rho_e u_e \quad F_w = \rho_w u_w$

↳ normale aux faces

$F_n = \rho_n \underline{v_n} \quad F_s = \rho_s v_s$

↳ les 2 termes de transport : $\Delta y F_e \phi_e - \Delta y F_w \phi_w + \Delta x F_n \phi_n - \Delta x F_s \phi_s$

• diffusion suivant x : $\iint_{s\,w}^{n\,e} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx\, dy$

$$= \int_s^n \left[\Gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy = \int_s^n \Gamma_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_w\right) dy$$

$$= \Delta y \left(\Gamma_x \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_x \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}\right)$$

$$= \Delta y D_x (\phi_E - \phi_P) - \Delta y D_x (\phi_P - \phi_W)$$

vitesse de diffusion : $D_x = \frac{\Gamma_x}{\Delta x}$

• diffusion suivant y :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dx\, dy = \Delta_x D_y (\phi_N - \phi_P) - \Delta_x D_y (\phi_P - \phi_S)$$

avec $D_y = \frac{\Gamma_y}{\Delta y}$

• équation totale :

la variable scalaire aux interfaces (pas connu)

↓ interpolation nécessaire

$$\Delta y F_e \phi_e - \Delta y F_w \phi_w + \Delta x F_n \phi_n - \Delta x F_s \phi_s =$$
$$\Delta y D_x (\phi_E - \phi_P) - \Delta y D_x (\phi_P - \phi_W)$$
$$+ \Delta_x D_y (\phi_N - \phi_P) - \Delta_x D_y (\phi_P - \phi_S)$$

③ Equation de continuité : $\frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v = 0$

on intègre sur le Ω_P du noeud scalaire

$$\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\rho u \, dx\, dy + \int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\rho v \, dy\, dx = 0$$

$$\int_s^n [\rho u]_w^e \, dy + \int_w^e [\rho v]_s^n \, dx = 0$$

$$\int_s^n \rho_e u_e - \rho_w u_w \, dy + \int_w^e \rho_n v_n - \rho_s v_s \, dx = 0$$

$$\Rightarrow (F_e - F_w)\Delta y + (F_n - F_s)\Delta x = 0$$

④ Nombres de Péclet ($\neq$ suivant les directions)

$$Pe_x = \frac{F_{e,w}}{D_{e,w}} = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_x} = 1{,}5$$

$$Pe_y = \frac{F_{n,s}}{D_{n,s}} = \frac{\rho v \Delta y}{\Gamma_y} = 0{,}825$$

⑤ Equation discrète après interpolation

- interpolation linéaire (schéma centré)

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \; ; \; \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}$$

(maillage régulier)

$$\phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2} \; ; \; \phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2}$$

- l'équation complète devient :

$$\Delta y F_e\left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2}\right) - \Delta y F_w\left(\frac{\phi_P + \phi_W}{2}\right) + \Delta x F_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - \Delta x F_s \frac{\phi_S + \phi_P}{2}$$

$$= \Delta y D_x \; \phi_E - \phi_P) - \Delta y D_x (\phi_P - \phi_W)$$
$$+ \Delta x D_y (\phi_N - \phi_P) - \Delta x D_y (\phi_P - \phi_S)$$

Assemblage : $a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S$

$$\left[\frac{F_e - F_w}{2}\Delta y + \frac{F_n - F_s}{2}\Delta x + (D_e + D_w)\Delta y + (D_n + D_s)\Delta x\right]\phi_P$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\Delta y}}_{a_E}\phi_E + \underbrace{\boxed{\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\Delta y}}_{a_W}\phi_W$$

$$+ \underbrace{\boxed{\left(D_n - \frac{F_n}{2}\right)\Delta x}}_{a_N}\phi_N + \underbrace{\boxed{\left(D_s + \frac{F_s}{2}\right)\Delta x}}_{a_S}\phi_S$$

$$a_P = \frac{F_e - F_w}{2}\Delta y + \frac{F_n - F_s}{2}\Delta x + (D_e + D_w)\Delta y + (D_n + D_s)\Delta x$$

$$= a_E + F_e\Delta y + a_W - F_w\Delta y + a_N + F_n\Delta x + a_S - F_s\Delta x$$

$$= a_E + a_W + a_N + a_S + \underbrace{(F_e - F_w)\Delta y + (F_n - F_s)\Delta x}_{\text{éq. de continuité} \Rightarrow = 0}$$

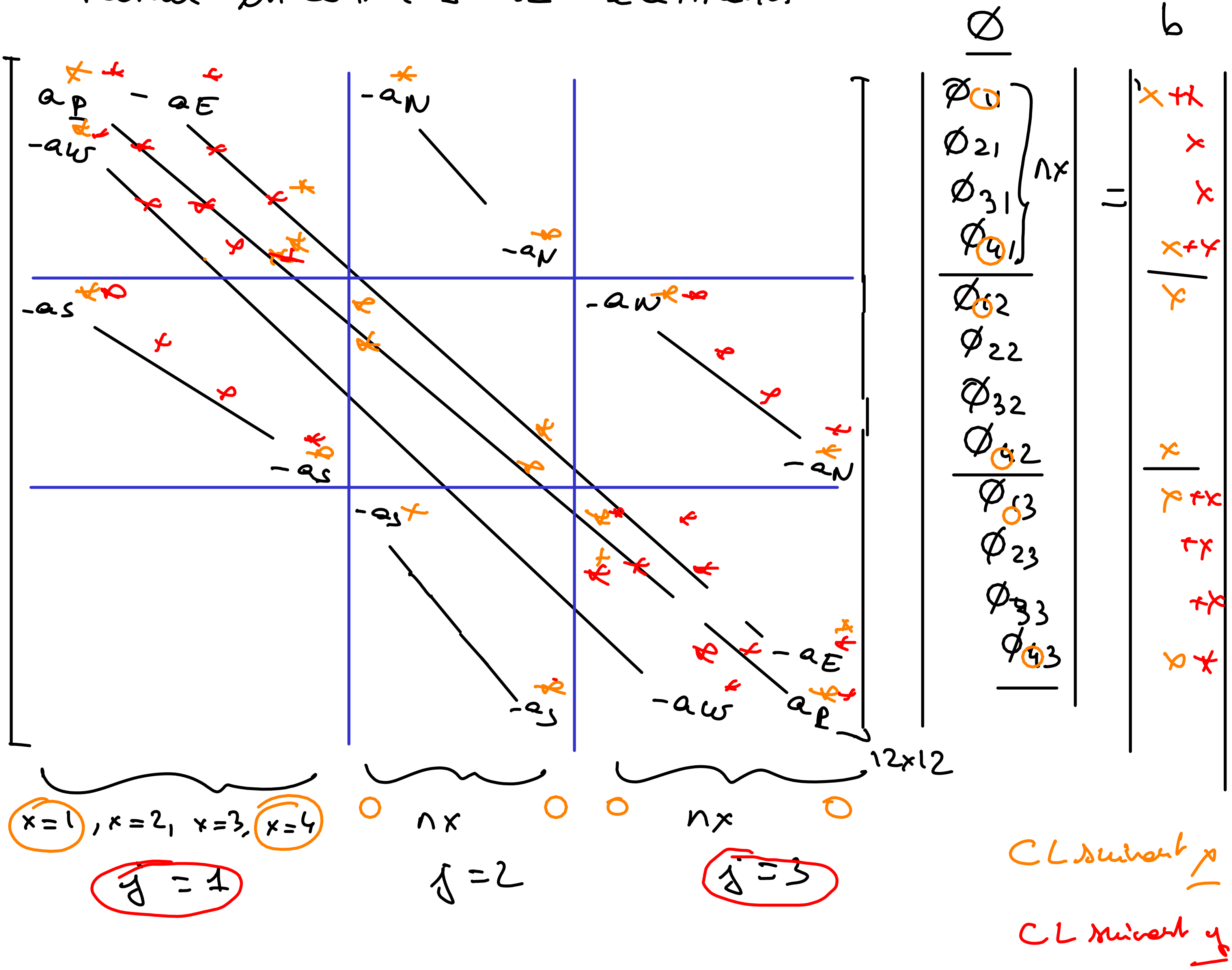
on a bien $\boxed{a_P = a_E + a_W + a_N + a_S}$

⑥ Système matriciel

2 noeuds courants : ϕ_{22} et ϕ_{32}

tous les autres sont influencés par les CL.

vecteur inconnu = 12 éléments



noeuds courant $j = 2$, et $i = 2, 3$

(7) matrice creuse → méthodes itératives
SOR, gradient conjugué.