Sorbonne Université-Licence d'Ingénierie Mécanique

2017-2018

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 28 Mai 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Partie I

Soit $H^1(]0,1[) = \{v :]0,1[\to \mathbb{R}, v \in L^2(]0,1[), v \in L^2(]0,1[), v'$ étant la dérivée au sens faible de $v\}$.
Le produit scalaire sur $H^1(]0,1[)$ est défini par :

$$((u,v))_{H^1} = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

On définit l'application $L : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}, L(v) = v(1), \forall v \in H^1(]0,1[)$.

1. Rappeler la définition d'une dérivée au sens faible.
2. Montrer que L est une application linéaire et continue sur $H^1(]0,1[)$, en précisant bien la norme utilisée pour la continuité.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in H^1(]0,1[)$ telle que

   $$L(v) = ((u,v))_{H^1}, \quad \forall v \in H^1(]0,1[).$$

   Préciser le théorème du cours utilisé et vérifier soigneusement ses hypothèses.
4. Trouver l'équation différentielle vérifiée par u ainsi que les conditions aux limites associées.
5. Résoudre l'équation différentielle de la question 3. et trouver u explicitement. Vérifier que u ainsi obtenue est une fonction de $H^1(]0,1[)$.

Partie II

On s'intéresse ici au problème d'équilibre d'une structure élastique, homogène, isotrope, de géométrie cylindrique, soumise à un effort volumique orthogonal à l'axe du cylindre et invariant selon cette direction. Ceci revient à étudier un système d'équations bidimensionnelles, appelé système de Lamé, régi par le champ de déplacement. Le domaine Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$ et on note un point de Ω par $x = (x_1, x_2)$. On désigne par $\boldsymbol{u}(x_1, x_2)$ le vecteur déplacement de composantes $\boldsymbol{u}(x_1, x_2) = (u_1, u_2)$ en un point de la section Ω, par $\mathcal{E}_{ij}(x_1, x_2)$ avec $i, j \in \{1, 2\}$ les composantes du tenseur de déformations $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x_1, x_2)$ et par $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ avec $i, j \in \{1, 2\}$ les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)$. On note λ et μ les coefficients de Lamé, caractéristiques du matériau homogène et isotrope, dont est constituée la structure. Ces coefficients sont des constantes réelles données strictement positives ($\lambda > 0$, $\mu > 0$). Les champs de déplacement, déformations et contraintes sont solutions du système d'équations suivant :

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial x_j}(x_1, x_2) & = -\, f_i(x_1, x_2), & i \in \{1, 2\} & (x_1, x_2) \in \Omega \\
\sigma_{ij}(x_1, x_2) & = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u}))\, \delta_{ij} \, + 2\,\mu\, \mathcal{E}_{ij}(\boldsymbol{u}), & i, j \in \{1, 2\} & (x_1, x_2) \in \Omega \\
\mathcal{E}_{ij}(\boldsymbol{u})(x_1, x_2) & = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, x_2) \, + \, \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}(x_1, x_2)\Big), & i, j \in \{1, 2\} & (x_1, x_2) \in \Omega \\
Tr(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u}))(x_1, x_2) & = \mathcal{E}_{11}(\boldsymbol{u})(x_1, x_2) + \mathcal{E}_{22}(\boldsymbol{u})(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega & \\
u_1(x_1, x_2) & = u_2(x_1, x_2) \, = 0, & (x_1, x_2) \in \partial\,\Omega &
\end{array}
\tag{1}
$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Krönecker et où la convention de sommation sur les indices répétés a été classiquement adoptée, $i, j \in \{1, 2\}$. Par exemple :

$$
\frac{\partial\,\sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial x_2}
$$

1. Montrer que les composantes du champ de déplacement solution des équations (1) satisfont le problème continu $(\mathcal{P}C)$ suivant :

$$
(\mathcal{P}C) \left\{
\begin{array}{l}
-\mu \Delta u_i(x_1, x_2) - (\lambda + \mu) \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\text{div } \boldsymbol{u})(x_1, x_2) = \, f_i(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega \\
u_i(x_1, x_2) = \, 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\,\Omega
\end{array}
\right.
\tag{2}
$$

où $i \in \{1, 2\}$, Δu_i désigne l'opérateur Laplacien de la composante u_i du champ de déplacement et div $\boldsymbol{u}$ la divergence du champ de déplacement :

$$
\Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}, \qquad \text{div } \boldsymbol{u} \, = \, \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.
$$

On notera que les équations (2) pour chacune des composantes u_i sont couplées par le terme de divergence.

2. On définit l'espace

$$V \;=\; \big\{\, \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \;\text{ tel que }\; v_i \,\in H^1(\Omega),\; v_i = 0 \text{ sur } \partial\,\Omega,\; \forall\, i \in \{1,2\}\big\} \;=\; (H_0^1(\Omega))^2$$

On munit V de la norme :

$$||\boldsymbol{v}|| \;=\; \Big[\, ||v_1||^2_{H^1(\Omega)} \;+\; ||v_2||^2_{H^1(\Omega)}\,\Big]^{1/2},$$

avec, pour chaque $i \in \{1,2\}$:

$$||v_i||_{H^1(\Omega)} \;=\; \Big[\int_\Omega \Big(|v_i|^2 \;+\; |\frac{\partial v_i}{\partial x_1}|^2 \;+ |\frac{\partial v_i}{\partial x_2}|^2\Big) dx_1 dx_2\,\Big]^{1/2}.$$

Montrer que la norme suivante :

$$|\boldsymbol{v}| \;=\; \Big[\sum_{i=1}^{2} |v_i|^2\Big]^{1/2}, \qquad |v_i| \;=\; \Big[\int_\Omega \Big(|\frac{\partial v_i}{\partial x_1}|^2 \;+ |\frac{\partial v_i}{\partial x_2}|^2\Big) dx_1 dx_2\Big]^{1/2}$$

est équivalente à la norme $||.||$ sur l'espace V.
Par la suite on considérera V muni de la norme $|.|$ et du produit scalaire associé comme espace de Hilbert dans lequel on cherchera la solution $\boldsymbol{u}$.

3. Soit $\boldsymbol{u} \,\in\, \big(H^2(\Omega)\big)^2$. Montrer que si $\boldsymbol{u} \,=\, (u_1, u_2)$ est solution du problème continu $(\mathcal{P}C)$ alors $\boldsymbol{u}$ est solution du problème variationnel $(\mathcal{P}V)$ suivant :

$$(\mathcal{P}V) \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in V, \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \;=\; L(\boldsymbol{v}), \qquad \forall\, \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in V, \end{array} \right. \tag{3}$$

où $a(.,.)$ et $L(.)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \;&=\; \mu \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}\, dx_1 dx_2 \;+ (\lambda + \mu) \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dx_1 dx_2 \\ L(\boldsymbol{v}) \;&=\; \int_\Omega \boldsymbol{f} \,.\, \boldsymbol{v}\, dx_1 dx_2 \;=\; \int_\Omega \big(f_1\, v_1 \;+ f_2\, v_2\big) dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}\, dx_1 dx_2 \quad &= \int_\Omega \Big(\boldsymbol{\nabla} u_1 \,.\, \boldsymbol{\nabla} v_1 + \boldsymbol{\nabla} u_2 \,.\, \boldsymbol{\nabla} v_2\Big) dx_1 dx_2 \\ &= \int_\Omega \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

4. Montrer que a est une application bilinéaire, continue et coercive sur $(V, |.|)$.

5. On considère $\boldsymbol{f} \,\in\, (L^2(\Omega))^2$. Montrer que L est une application linéaire et continue sur $(V, |.|)$.

6. Établir l'existence et l'unicité de la solution $\boldsymbol{u}$ du problème variationnel $(\mathcal{P}V)$, sous l'hypothèse de régularité des données $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$.
7. **Bonus :** Peut-on montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel $(\mathcal{P}V)$ en utilisant le théorème de Riesz ? Justifiez votre réponse.
8. Montrer (en s'appuyant sur un théorème du cours) que l'unique solution du problème variationnel $(\mathcal{P}V)$ minimise une fonctionnelle $I(\boldsymbol{v})$ (que l'on précisera) sur l'espace V. Interpréter mécaniquement ce résultat.
9. En supposant la solution $\boldsymbol{u}$ du problème variationnel suffisamment régulière, $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega))^2$, montrer formellement que $\boldsymbol{u}$ est solution au sens faible du problème aux limites (2) (problème $(\mathcal{P}C)$).