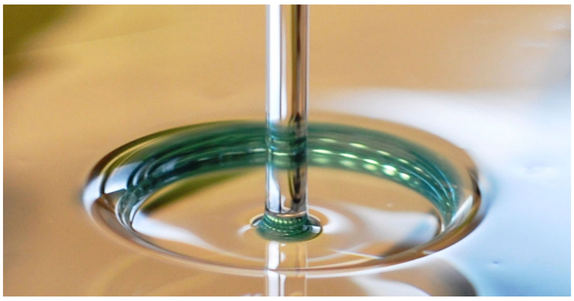
Année 2017-2018

UE 4AM01 - partie Fluides
Examen - Mercredi 29 novembre 2017 - durée 2h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit. En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

Nappe liquide

Lorsqu'on ouvre un robinet au-dessus d'un évier, après impact sur le fond de l'évier, l'eau s'évacue en formant une "nappe liquide", comme montré sur la figure 1. Cette nappe présente une variation brusque de son épaisseur à une distance donnée du point d'impact : il s'agit d'un *ressaut hydraulique*, visible sur la photo de la figure 1. Le but de cet épreuve est de modéliser cet écoulement.



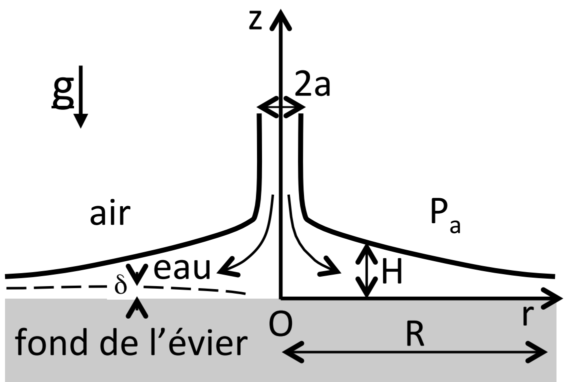


FIGURE 1 – A gauche : Photo d'une nappe liquide se formant au fond d'un évier autour de l'impact du filet d'eau tombant d'un robinet. A droite : schéma de la nappe liquide et notations.

1 Mise en équations du problème

La masse volumique de l'eau est notée ρ, sa viscosité dynamique de cisaillement μ, sa viscosité cinématique ν. L'accélération de la gravité est notée $\underline{g}$. Le fond de l'évier est considéré comme plan et horizontal, confondu avec le plan (Oxy) du repère $(0xyz)$ choisi pour l'étude. Le filet d'eau issu du robinet étant vertical d'axe confondu avec l'axe (Oz), l'écoulement au sein de la la nappe liquide est supposé axisymétrique autour de (Oz), isovolume (incompressible) et stationnaire. Dans la suite, il est donc décrit à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z) centrées sur (Oz).

Equations bilan

En notant $\underline{u} = u(r,z)\,\mathbf{e}_r + v(r,z)\,\mathbf{e}_z$ le champ de vitesse axisymétrique stationnaire de l'eau et $p(r,z)$ son champ de pression axisymétrique stationnaire,

— la conservation de la matière s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

— le bilan de quantité de mouvement en présence de gravité s'écrit :

$$\text{selon la direction } \underline{e_r} : u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right)\right] \qquad (2)$$

$$\text{selon la direction } \underline{e_z} : u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] - g \qquad (3)$$

Conditions aux limites au fond

1. Le fond de l'évier étant imperméable et indéformable, écrivez les égalités vérifiées par u et v au fond de l'évier (c'est-à-dire en $z=0$).

> **Solution:** $u(r,0) = 0\ \forall r$, $v(r,0) = 0\ \forall r$ **1 point**.

Conditions aux limites à l'interface eau-air

L'interface eau-air, appelée surface libre de la nappe, est supposée avoir une forme aussi axisymétrique et stationnaire d'équation $z = h(r)$.

2. Proposez une fonction $f(r,z)$ s'annulant à l'interface eau-air.

> **Solution:** $z = h(r)$ donc on en définissant $f(r,z) = z - h(r)$, la surface libre est définie par $f(r,z) = 0$, cad est la surface isovaleur 0 de f **1 point**.

3. En exploitant le fait que le vecteur $\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e_r} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{e_z}$ est orthogonal aux courbes isovaleur de la fonction $f(r,z)$, montrez que le vecteur $\underline{n}$ unitaire, normal à l'interface eau-air et orienté de l'eau vers l'air s'écrit :

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_r = \frac{-h'}{\sqrt{1+h'^2}} \\ n_z = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \end{pmatrix}$$

> **Solution:** $\underline{n}$ étant orthogonal à la surface libre, et celle-ci étant la surface axisymétrique isovaleur 0 de $f(r,z)$, $\underline{n}$ est colinéaire à $\underline{\nabla} f$, de norme unité, et orienté vers le haut. $\underline{\nabla} f = -h'(r)\,\underline{e_r} + \underline{e_z}$ d'où le résultat annoncé, $\underline{n}$ étant bien orienté vers le haut **1 point**.

4. Les particules fluides au contact de la surface libre stationnaire ont une vitesse tangente à la surface libre. Déduisez-en une relation entre u, v, n_r et n_z à la surface libre (condition cinématique).

Solution: $\underline{u}|_{\text{surface libre}} \cdot \underline{n} = 0$, soit

$$u(r,h(r))\, n_r(r) + v(r,h(r))\, n_z(r) = 0 \quad \textbf{1 point}$$

La viscosité et l'inertie de l'air sont tellement faibles devant celles de l'eau que tout se passe pour l'écoulement comme si l'air au-dessus de la nappe liquide restait immobile à la pression atmosphérique P_a. Sous cette hypothèse, la continuité de la contrainte à la surface libre de la nappe $\underline{T}^{\text{SL}}$ s'écrit :

$$\underline{T}^{\text{SL}} = \underline{\underline{\sigma}}\Big|_{\text{surface libre}} \cdot \underline{n} = -P_a\, \underline{n} \text{ (condition dynamique)} \tag{4}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes qui a pour expression intrinsèque $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T)$, $\underline{\underline{1}}$ étant le tenseur identité.

5. $\underline{\underline{D}}$ a pour expression :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exprimez la composante verticale de la contrainte à la surface de l'eau, T_z^{SL} en fonction de p, μ, n_r, n_z et de dérivées partielles de u et v en précisant les coordonnées du lieu où les champs concernés doivent être évalués.

Solution: $T_z^{\text{SL}} = (\underline{\underline{\sigma}}\Big|_{\text{surface libre}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e_z}$ donc :

$$T_z^{\text{SL}} = -p(r,h(z))\, n_z + \mu \left[n_r \left(\frac{\partial u}{\partial z}(r,h(r)) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,h(r)) \right) + 2n_z \frac{\partial v}{\partial z}(r,h(r)) \right] \quad \textbf{1 point}$$

Autre condition

6. Justifiez l'égalité :

$$\int_0^h ru(r,z)\, \mathrm{d}z = K \tag{5}$$

en expliquant pourquoi K est un paramètre de contrôle de l'expérience, donc une donnée du problème.

Solution: Conservation du débit volumique D_v du robinet : le débit sortant à travers toute section droite S de la nappe, surface cylindrique d'axe (Oz) et de rayon r, orientée dans le sens de r croissants, vaut D_v : $\iint_S \underline{u} \cdot \underline{\mathrm{d}S} = D_v = \int_0^h 2\pi r u \,\mathrm{d}z$ Donc $K = D_v/2\pi$. D_v étant contrôlé par l'ouverture du robinet, K est bien un paramètre de contrôle de l'expérience réglé par l'expérimentateur, donc une donnée du problème (et pas une inconnue). **1 point**

2 Adimensionnement du problème

Adimensionnement des équations

On souhaite étudier l'écoulement dans la nappe, en-dehors du filet d'eau de rayon $a \sim 1$ mm, c'est-à-dire dans un domaine radial $r \in [a\ R]$ où $R \simeq 10$ cm. Dans cette zone de l'écoulement, on constate que la nappe a une épaisseur caractéristique H telle que $H \ll R$. On pose $\boxed{\varepsilon = H/R \ll 1}$.

7. Justifiez pourquoi on peut poser les adimensionnements des variables suivants :

$$r = R\,\bar{r},\ \bar{r} \sim 1$$
$$z = H\,\bar{z},\ \bar{z} \sim 1$$

Quel est le domaine de variation de $\bar{r}$?

> **Solution:** Dans ce domaine d'étude r varie de 2a $\ll R$ à R donc l'ordre de grandeur de r, R, est confondu avec son échelle (caractéristique de variation) R. Donc on peut poser $r = R\,\bar{r}$. $\bar{r} \in [\zeta\ 1]$ avec $\zeta = a/R \ll 1$.
> De même, dans ce domaine d'étude z varie de 0 à H, donc son ordre de grandeur H est confondu avec son échelle H. Donc on peut poser $z = H\,\bar{z}$. **1 point**

On pose :

$$u = U\,\bar{u},\ \bar{u} \sim 1$$
$$v = V\,\bar{v},\ \bar{v} \sim 1$$
$$p = P_a + \delta P\,\bar{p},\ \bar{p} \sim 1$$
$$h = H\,\bar{h},\ \bar{h} \sim 1$$

avec U, V, H et δP des échelles de vitesse, d'épaisseur et de pression indéterminées à ce stade.

8. En adimensionnant l'équation (1) de manière à conserver tous ses termes, proposez une relation entre U et V.

> **Solution:** $\frac{U}{R}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{r}} + \frac{V}{H}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}} = 0$. Pour que les deux termes de l'égalité soient du même ordre de grandeur, il faut que $\frac{U}{R} \sim \frac{V}{H}$ soit $V = \varepsilon U$ **1 point**.

9. En adimensionnant les équations (2) et (3), montrez que :

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} = -\frac{\delta P}{\rho U^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{z}^2} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{r}}\right)\right] \tag{6}$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\delta P}{\rho U^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \frac{1}{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{z}^2} + \varepsilon^2\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}\right)\right] - \frac{1}{\varepsilon^2\,\mathrm{Fr}^2} \tag{7}$$

Où $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{UR}{\nu}}$ et $\boxed{\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}}}$.

> **Solution:** (6) sur **2 points**, (7) sur **2 points**.

10. Procédez aux simplifications automatiques de ces deux équations.

Solution: $\varepsilon \ll 1$ donc à l'ordre le plus bas en ε, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}$ et $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon^2 \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}$ **1 point**.

Adimensionnement des conditions aux limites

11. Adimensionnez les conditions aux limites au fond (question 1).

Solution: $\bar{u}(\bar{r}, 0) = 0 \; \forall \bar{r} \in [\zeta \; 1]$, $\bar{v}(\bar{r}, 0) = 0 \; \forall \bar{r} \in [\zeta \; 1]$ **1 point**.

12. Montrez qu'à l'ordre le plus bas en ε, $\underline{n}$ s'écrit :

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \bar{h}' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Solution: $h'(r) = \frac{dh}{dr}(r) = \frac{H}{R} \frac{d\bar{h}}{d\bar{r}}(\bar{r}) = \varepsilon \frac{d\bar{h}}{d\bar{r}}(\bar{r}) = \varepsilon \bar{h}'(\bar{r})$.
$\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} = (1 + \varepsilon^2 \bar{h}'^2)^{-1/2} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 1$ à l'ordre le plus bas en ε.
D'où l'expression demandée **1 point**.

13. Montrez que la condition aux limites cinématique à la surface libre s'écrit :

$$-\bar{h}'(\bar{r}) \bar{u}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) + \bar{v}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) = 0 \tag{9}$$

Solution: Compte tenu de $V = \varepsilon U$ et de (8), la forme adimensionnée de $u(r, h(r)) \, n_r(r) + v(r, h(r)) \, n_z(r) = 0$ est le résultat demandé **1 point**.

14. Montrez qu'à l'ordre le plus bas en ε :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \tag{10}$$

Solution: $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{U}{H} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$ à l'ordre le plus bas en ε **1 point**.

15. En adimensionnant l'expression de T_z^{SL} déterminée à la question 5 à l'aide de (8) et (10) et en exploitant (4), montrez finalement que :

$$-\frac{\delta P}{\rho U^2} \bar{p}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) - \bar{h}'(\bar{r}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) \right) = 0 \tag{11}$$

Solution:

$$T_z^{\mathrm{SL}} = -\left(P_a + \rho U^2 \frac{\delta P}{\rho U^2} \bar{p}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) \right) + \mu \frac{U}{H} \left(-\varepsilon \bar{h}'(\bar{r}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) + 2\varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) \right) = -P_a$$

Or $\mu \frac{U}{H} \varepsilon = \rho U^2 \frac{1}{\mathrm{Re}}$ **1 point**.

16. Adimensionnez l'équation (5).

Solution:
$$\int_0^{\bar{h}} \bar{r}\bar{u}\mathrm{d}\bar{z} = \frac{K}{RHU} \quad \textbf{1 point}$$

17. Déduisez-en une relation entre les échelles inconnues U et H et les échelles du problème K et R compatible avec cette relation adimensionnée.

Solution: $\int_0^{\bar{h}} \bar{r}\bar{u}\mathrm{d}\bar{z} \sim 1$ donc $\frac{K}{RHU} \sim 1$. On peut donc poser comme relation entre U et H compatible avec cette relation adimensionnée : $\frac{K}{RHU} = 1$ **1 point**.

3 Analyse physique

18. En effectuant une analyse physique de l'écoulement, identifiez le(s) moteur(s), le(s) frein(s), la(les) conséquence(s) de l'écoulement. Analysez les implications de cette analyse sur la composante du bilan de quantité de mouvement correspondant à la direction principale de l'écoulement pour en déduire des relations en ordre de grandeur entre les amplitudes des différents termes dans cette équation.

Solution: L'eau s'éloigne de la zone d'impact du jet avec une certaine énergie cinétique communiquée par sa chute libre donc l'inertie est un moteur de l'écoulement (**0,5 point**). Par ailleurs, elle s'écoule dans l'évier sous l'effet de la gravité qui tend à étaler l'eau, donc le poids est un autre moteur de l'écoulement (**0,5 point**). La condition d'adhérence au fond immobile de l'évier et le frottement visqueux sont des freins de l'écoulement (**0,5 point**). La pression, dont on ne sait a priori pas le rôle, est une conséquence de l'écoulement (**0,5 point**). L'écoulement se développe principalement selon $\underline{e_r}$ donc l'équation à analyser est (6). Dans (6) n'apparaît comme moteur que l'inertie donc :

$$\begin{aligned} \text{moteur inertiel} &\sim \text{Sup(frein, conséquence)} \\ 1 &\sim \text{Sup}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}}, \frac{\delta P}{\rho U^2}\right) \quad \textbf{1 point} \end{aligned}$$

19. Dans la suite, on suppose que l'écoulement vérifie :

$$\boxed{\varepsilon^2 \mathrm{Re} \gg 1}$$

En déduire que Re $\gg 1$ et que $\frac{\delta P}{\rho U^2} \sim 1$. On pose donc comme relation entre les échelles inconnues U et δP compatible avec la physique de l'écoulement :

$$\boxed{\frac{\delta P}{\rho U^2} = 1}$$

Solution: $\mathrm{Re} \gg \varepsilon^{-2} \gg 1$ **(0,5 point)**
$\frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}} \ll 1$ donc on ne peut pas avoir $1 \sim \frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}}$ donc $1 \sim \frac{\delta P}{\rho U^2}$ **(1 point)**.

20. Analysez les implications de cette analyse physique sur l'autre composante du bilan de quantité de mouvement. En supposant de plus que dans le régime étudié, la gravité a une influence non négligeable sur l'écoulement, montrez que : $\mathrm{Fr} \sim 1$. Dans la suite, on pose donc comme relation entre échelles inconnues U et H compatible avec la physique de l'écoulement :

$$\boxed{\mathrm{Fr} = 1}$$

Solution: $\frac{\delta P}{\rho U^2} = 1$ donc $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\delta P}{\rho U^2} \gg 1 \gg \frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}}$ donc (7) s'écrit à l'ordre dominant :

$$0 = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Fr}^2}, \text{ soit } \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}$$ **1 point**

Sachant que la gravité n'apparaît que dans (7), supposer que la gravité a une influence non négligeable sur l'écoulement revient à considérer ici que le terme de gravité n'est pas négligeable devant le terme de pression. Or $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \sim 1$ donc $\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \sim 1$, soit $\mathrm{Fr} \sim 1$ **(1 point)**.

21. En combinant les résultats des questions 17 et 20, montrez que :

$$\begin{aligned} H &\sim K^{2/3} R^{-2/3} g^{-1/3} \\ U &\sim g^{1/3} K^{1/3} R^{-1/3} \end{aligned}$$

Avec la valeur typique de K pour un écoulement domestique : $K = 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, on trouve $H \simeq 3$ mm et $U \simeq 17\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. On donne $\nu = 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Montrez que (i) $\varepsilon \ll 1$, (ii) $\mathrm{Re} \gg 1$ et (iii) $\varepsilon^2\ \mathrm{Re} \gg 1$. Ceci montre que toutes les hypothèses faites au cours de la modélisation de cet écoulement sont réalistes et cohérentes entre elles. Dit autrement, pour cet écoulement d'eau dans un évier, la gravité intervient bien tandis que les effets visqueux sont faibles.

Solution: $\int_0^{\bar{h}} \bar{r}\bar{u} \mathrm{d}\bar{z} = \frac{K}{RHU}$ implique $\frac{K}{RHU} \sim 1$. Par ailleurs, $\frac{U}{\sqrt{gH}} \sim 1$. Donc $H \sim K^{2/3}R^{-2/3}g^{-1/3}$ et $U \sim g^{1/3}K^{1/3}R^{-1/3}$ **(1 point)**. Avec $D_v \simeq 0,3\ \ell \cdot \mathrm{s^{-1}}$, $K \simeq 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ et $H \simeq 3$ mm, $U \simeq 0,17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. $\mathrm{Re} \simeq 1,7 \times 10^4 \gg 1$, $\varepsilon \simeq 3 \times 10^{-2} \ll 1$ et $\varepsilon^2\ \mathrm{Re} \simeq 15 \gg 1$ **(1 point)**.

22. Simplifiez la condition aux limites (11) compte tenu de l'ordre de grandeur de Re.

Solution: Compte tenu de $\mathrm{Re} \gg 1$, (11) s'écrit à l'ordre dominant : $\bar{p}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) = 0$ **0,5 point**.

23. Montrez que :

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{h}(\bar{r}) - \bar{z}$$

En déduire l'expression dimensionnée de p en faisant apparaître ρg. De quel type de champ de pression s'agit-il ?

Solution: Compte tenu de Fr $= 1$, (7) s'écrit $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1$ donc $\bar{p} = -\bar{z} + f(\bar{r})$. Or $\bar{p}(\bar{r}, \bar{h}(\bar{r})) = 0$ donc $f(\bar{r}) = \bar{h}(\bar{r})$ donc $\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{h}(\bar{r}) - \bar{z}$ (**1 point**).
En se rappelant que $\frac{\delta P}{\rho U^2} = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}$,

$$\begin{aligned} p &= P_a + \delta P \bar{p} \\ &= P_a + \rho U^2 \frac{\delta P}{\rho U^2}(\bar{h} - \bar{z}) \\ &= P_a + \rho U^2 \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}(\bar{h} - \bar{z}) \\ &= P_a + \rho U^2 \frac{gH}{U^2}\left(\frac{h}{H} - \frac{z}{H}\right) \\ &= P_a + \rho g(h(r) - z) \ \textbf{1 point} \end{aligned}$$

Le champ de pression est donc localement hydrostatique (**0,5 point**).

4 Problème simplifié dans l'hypothèse d'un écoulement parfait

Dans le domaine d'étude et les conditions définis dans la section précédente, à l'ordre le plus bas en ε, Re^{-1} et $(\varepsilon^2 \mathrm{Re})^{-1}$, l'écoulement de la nappe liquide est donc modélisé par les équations suivantes :

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (12)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \quad (13)$$

$$\bar{p} = \bar{h} - \bar{z} \quad (14)$$

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{r}\, \bar{u}\, \mathrm{d}\bar{z} = 1 \quad (15)$$

$$\bar{v}(\bar{r}, 0) = 0 \quad (16)$$

$$-\bar{h}'\, \bar{u}(\bar{r}, \bar{h}) + \bar{v}(\bar{r}, \bar{h}) = 0 \quad (17)$$

où on a levé la contrainte d'adhérence au fond, compte tenu du fait qu'on néglige ici les effets visqueux (modèle d'écoulement parfait).

24. Eliminez $\bar{p}$ du problème. Le problème est-il bien posé ?

Solution: $\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{h}(\bar{r}) - \bar{z}$ implique $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = \bar{h}'$ donc $\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\bar{h}'$ (**0,5 point**).
$\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{h}$ sont donc solutions de 3 équations, 2 e.d.p. d'ordre 1 contraintes par 2 conditions aux limites (donc 2 problèmes bien posés), et une équation intégrale, donc le problème est bien posé. $\bar{p}$ se déduit finalement de $\bar{h}$ (**1 point**).

25. Les effets visqueux étant négligés ici, un écoulement "bouchon" (u indépendant de z) est un candidat plausible pour être solution de ce problème. Dans cette hypothèse, montrez que le problème se simplifie en un problème impliquant $\bar{u}$ et $\bar{h}$ seulement.

Solution:

$$\begin{aligned}\bar{u}\bar{u}' + \bar{h}' &= 0\\ \bar{h}\,\bar{r}\,\bar{u} &= 1\\ \frac{1}{\bar{r}}(\bar{r}\bar{u})' + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} &= 0\\ \bar{v}(\bar{r},0) &= 0\\ \bar{v}(\bar{r},\bar{h}) &= \bar{h}'\,\bar{u}\end{aligned}$$

$\bar{u}$ et $\bar{h}$ sont sont liés par les équations $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{r}}\left(\frac{1}{2}\bar{u}^2\right) + \bar{h}' = 0$ et $\bar{h}\,\bar{r}\,\bar{u} = 1$, c'est-à-dire la dérivée de la relation de Bernoulli exprimée à la surface libre et la conservation du débit **(1 point)**.

5 Couche limite visqueuse

L'écoulement bouchon ne vérifie pas la condition d'adhérence au fond. Pour guérir ce défaut de la solution en écoulement bouchon, nous supposons l'existence d'une couche limite visqueuse au fond, d'épaisseur δ supposée telle que $\delta \ll H$ (domaine intérieur), représentée sur le schéma de la figure 1, et dans laquelle nous allons prendre en compte les effets visqueux. On pose $\boxed{\eta = \delta/H \ll 1}$.

Les variables adimensionnées permettant de décrire l'écoulement à l'échelle de la couche limite sont donc :

$$\begin{aligned} r = R\,\bar{r},\ \bar{r} \sim 1\\ z = \delta\,\tilde{z},\ \tilde{z} \sim 1\end{aligned}$$

On définit dans la couche limite :

$$\begin{aligned} u = U_1\,\tilde{u},\ \tilde{u} \sim 1\\ v = V_1\,\tilde{v},\ \tilde{v} \sim 1\\ p = P_a + \delta P_1\,\tilde{p},\ \tilde{p} \sim 1\end{aligned}$$

avec U_1, V_1 et δP_1 des échelles de vitesse et de pression indéterminées à ce stade.

26. En adimensionnant l'équation (1) de manière à conserver tous ses termes, proposez une relation entre U_1 et V_1.

Solution: $\frac{U_1}{R}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\tilde{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{V_1}{\delta}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = 0$. Pour que les deux termes de l'égalité soient du même ordre de grandeur, il faut que $\frac{U_1}{R} \sim \frac{V_1}{\delta}$ soit $V_1 = \frac{\delta}{R}U_1 = \varepsilon\eta U_1$ **(1 point)**.

27. On suppose que l'écoulement bouchon de composante de vitesse horizontale $u = U\bar{u}(r)$ est établi dans la nappe liquide en-dehors de la couche limite. En écrivant la condition de raccordement de u entre la couche limite et le domaine extérieur, montrez que : $U_1 = U$.

Solution: $\lim\limits_{\tilde{z}\to+\infty} U_1\tilde{u}(\bar{r},\tilde{z}) = \lim\limits_{\bar{z}\to 0} U\bar{u}(\bar{r},\bar{z}) = U\bar{u}(r)$ donc $U_1 = U$ **(1 point)**.

28. Adimensionnez (2) dans la couche limite.

Solution:

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{r}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\delta P_1}{\rho U^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\mathrm{Re}\ \varepsilon^2\eta^2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} + \eta^2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\tilde{u})}{\partial \bar{r}}\right)\right] \quad \textbf{2 points}$$

29. Faites l'analyse physique de l'écoulement dans la couche limite et appliquez le principe de moindre dégénérescence dans la couche limite pour établir une loi d'échelle pour η en fonction de Re et ε, ce qui permet de définir l'épaisseur de la couche limite. Est-elle bien d'épaisseur petite devant l'épaisseur de la nappe liquide ?

Solution: La direction principale de l'écoulement reste la direction radiale, donc il faut bien analyser (2). L'écoulement de couche limite est dû à l'écoulement de la nappe liquide, donc l'inertie reste un moteur de l'écoulement de couche limite qui se manifeste dans (2). Par définition de la couche limite visqueuse, le frein visqueux n'y est plus négligeable, donc il équilibre le moteur inertiel : $\frac{1}{\mathrm{Re}\ \varepsilon^2\eta^2} \sim 1$ (**1 point**) soit $\eta \sim (\mathrm{Re}\ \varepsilon^2)^{-1/2}$. Or $\mathrm{Re}\ \varepsilon^2 \gg 1$ donc $\eta \ll 1$, c'est-à-dire $\delta \ll H$ (**1 point**).