Sorbonne Université – Faculté des Sciences et Ingénierie
Master 1ème année
PLASTICITE

Session de mai 2021

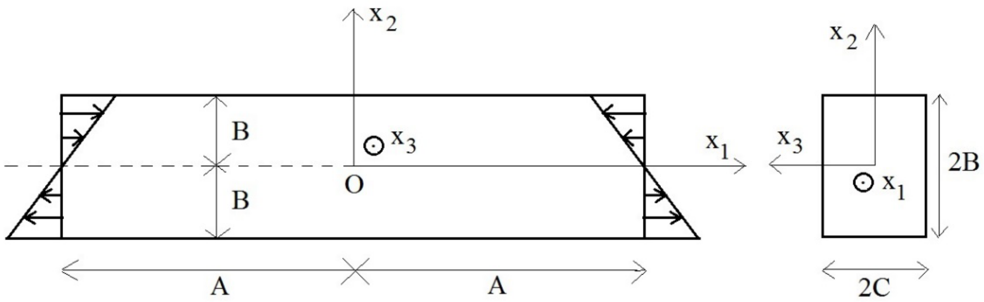
Durée :2h – Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Remarque :

Il est permis d'utiliser les résultats fournis par l'énoncé pour traiter la suite, même si on ne les a pas démontrés.

FLEXION CIRCULAIRE D'UNE POUTRE ELASTOPLASTIQUE

On considère une poutre parallélépipédique occupant le domaine $-A \leq x_1 \leq A$, $-B \leq x_2 \leq B$, $-C \leq x_3 \leq C$, soumise à un moment de flexion suivant la direction x_3, en l'absence de forces de masse.



Les conditions aux limites sont les suivantes :

- Sur la section de gauche $x_1 = -A$:

$$\begin{cases} u_1 = \gamma A x_2 \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

- Sur la section de droite $x_1 = A$:

$$\begin{cases} u_1 = -\gamma A x_2 \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

- Faces latérales $x_2 = \pm B$ et $x_3 = \pm C$: libres de tractions.

Dans ces équations γ est un paramètre de chargement croissant au cours du temps à partir de zéro.

La poutre est constituée d'un matériau élastoplastique parfait, obéissant au critère de von Mises et à la loi d'écoulement plastique associée par normalité, de module d'Young E, coefficient de Poisson ν, limite d'élasticité en traction simple σ_0.

Le problème est traité dans le cadre géométrique linéarisé (HPP, Hypothèse des Petites Perturbations).

A. Solution élastique.

On postule un champ de contraintes solution de la forme

$$\sigma_{11} = -\alpha x_2, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0$$

où α est un paramètre à déterminer.

1. *Vérifier que ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites en efforts.*
2. *En utilisant la loi de comportement élastique,*

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{1}},$$

   déterminer les 6 composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

3. *En utilisant l'expression de ε_{11}, montrer que u_1 est de la forme*

$$u_1 = -\frac{\alpha}{E}x_1x_2 + f(x_2, x_3)$$

   où $f(x_2, x_3)$ est une fonction restant à déterminer.

4. *En utilisant les conditions aux limites sur les sections terminales, montrer que*

$$u_1 = -\gamma x_1 x_2.$$

5. *En utilisant les expressions de ε_{12} et ε_{22}, montrer que u_2 est de la forme*

$$u_2 = \frac{\gamma}{2}(x_1^2 + \nu x_2^2) + g(x_3)$$

   où $g(x_3)$ reste à déterminer.

6. *En utilisant les expressions de ε_{13} et ε_{33}, montrer que u_3 est de la forme*

$$u_3 = \nu\gamma x_2 x_3 + h(x_2)$$

   où $h(x_2)$ reste à déterminer.

7. *Montrer que les fonctions $g(x_3)$ et $h(x_2)$ sont liées par la relation*

$$g'(x_3) + \nu\gamma x_3 + h'(x_2) = 0$$

   et en déduire que

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{\gamma}{2}[x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_3^2)] - ax_3 + b \\ u_3 = \nu\gamma x_2 x_3 + ax_2 + c \end{cases}$$

   où a, b, c sont des constantes.

8. *Expliquer pourquoi les constantes a, b, c peuvent être considérées comme nulles.*

Dans ces conditions, le déplacement vertical sur la « fibre neutre » $x_2 = x_3 = 0$ vaut $u_2 = \frac{\gamma}{2}x_1^2$. L'interprétation géométrique de cette égalité est que le paramètre γ représente la *courbure* de cette fibre neutre dans le plan Ox_1x_2. (La démonstration de cette assertion n'est pas demandée).

9. Montrer que le moment (dit *de flexion*) des efforts exercés sur la section de droite $x_1 = A$, calculé au centre de cette section, vaut $M\underline{e}_3$ ($\underline{e}_3$ vecteur unitaire colinéaire à la direction Ox_3) où

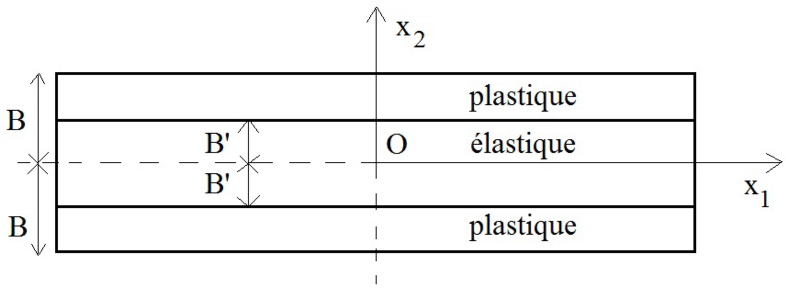
$$M = EI\gamma, \qquad I = \frac{4}{3}B^3C.$$

B. Solution élastoplastique.

10. *En quel(s) point(s) commence la plasticité lorsqu'on augmente la courbure de la poutre? Montrer que les valeurs γ^1, M^1 de la courbure et du moment de flexion correspondant à la première plasticité sont données par*

$$\gamma^1 = \frac{\sigma_0}{EB}, \qquad M^1 = \frac{4}{3}\sigma_0 B^2 C.$$

On se place maintenant au-delà de la charge de première plasticité. On suppose que la zone $-B' \leq x_2 \leq B'$ reste élastique tandis que les zones $-B \leq x_2 < -B'$ et $B' < x_2 \leq B$ deviennent plastiques ; la taille $2B'$ de la zone élastique est une inconnue auxiliaire qui sera finalement déterminée en fonction de la courbure γ.



On recherche une solution dans laquelle la solution purement élastique calculée précédemment reste intégralement valable dans la zone $-B' \leq x_2 \leq B'$ (en remplaçant B par B'), tandis que le champ de contraintes est donné dans la zone $-B \leq x_2 < -B'$ par

$$\sigma_{11} = \sigma_0, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0,$$

et dans la zone $B' < x_2 \leq B$ par

$$\sigma_{11} = -\sigma_0, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0.$$

11. *Montrer que dans la zone élastique $-B' \leq x_2 \leq B'$,*

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33} = -\nu\dot{\varepsilon}_{11}.$$

12. *En utilisant la loi d'élasticité et la loi d'écoulement plastique dans les zones plastiques* $-B \leq x_2 < -B'$ et $B' < x_2 \leq B$, *montrer que dans ces zones*

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{2}.$$

13. *Justifier que le taux de déformation* $\dot{\varepsilon}_{33}$ *est nécessairement continu à travers les surfaces* $x_2 = \pm B'$ *limitant la zone élastique. En déduire que la solution ne peut être de la forme recherchée que si le coefficient de Poisson* ν *est égal à* $1/2$ *(matériau élastiquement incompressible).*

On fera l'hypothèse que $\nu = 1/2$ dans toute la suite.

14. *En appliquant la loi d'élasticité et la loi d'écoulement plastique, montrer que* $\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = 0$ *dans toute la structure.*
15. *En introduisant l'hypothèse que la composante* $\dot{\varepsilon}_{11}$ *du taux de déformation est indépendante de* x_1 *(invariance du problème dans la direction de l'axe de la poutre), montrer que* $\dot{\varepsilon}_{11} = -\dot{\gamma} x_2$ *partout.*
16. *A partir de ces résultats, justifier* sans calcul supplémentaire *que le déplacement est donné dans toute la structure par*

$$\begin{cases} u_1 = -\gamma x_1 x_2 \\ u_2 = \dfrac{\gamma}{2} x_1^2 + \dfrac{\gamma}{4}(x_2^2 - x_3^2) \\ u_3 = \dfrac{\gamma}{2} x_2 x_3 . \end{cases}$$

17. *En écrivant le critère au bord de la zone élastique, montrer que*

$$B' = \frac{\sigma_0}{E\gamma}.$$

18. *En remarquant que la contrainte* σ_{11} *est donnée par*

$$\sigma_{11} = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} - B \leq x_2 < -B' \\ -\sigma_0 \dfrac{x_2}{B'} & \text{si} - B' \leq x_2 \leq B' \\ -\sigma_0 & \text{si}\, B' < x_2 \leq B, \end{cases}$$

évaluer les contributions des zones élastique et plastiques au moment de flexion et en déduire que

$$M = M^L \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\gamma^1}{\gamma}\right)^2\right], \qquad M^L = 2\sigma_0 B^2 C.$$

19. *Que représente la valeur* M^L *du moment de flexion pour la structure ? (On justifiera la réponse).*
20. *Représenter graphiquement la courbe « effort-déplacement » (*M *en fonction de* γ*) de la structure, dans les deux phases élastique et plastique.*

C. Décharge élastique.

On charge la poutre quasiment jusqu'à sa charge-limite (en imposant une grande valeur de γ), puis on la décharge complètement jusqu'à annulation du moment de flexion. La décharge est supposée entièrement élastique.

21. *Calculer la variation $\Delta\sigma_{11}$ de la contrainte σ_{11} au cours de la décharge en tout point de la structure.*
22. *En déduire que la contrainte résiduelle σ_{11}^r après décharge vaut*

$$\sigma_{11}^r = \begin{cases} \sigma_0 \left(1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{x_2}{B}\right) & \text{si } x_2 < 0 \\ \sigma_0 \left(-1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{x_2}{B}\right) & \text{si } x_2 > 0. \end{cases}$$

23. *Représenter graphiquement cette distribution de contrainte et expliquer sa discontinuité en $x_2 = 0$.*