Sorbonne Université **Année 2019-2020**

Master Sciences et Technologie - Département de Sciences pour l'Ingénieur

---

Traitement numérique du signal
1ère session - Mardi 14 Janvier 2020 - durée : 2h00
Sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Analyse de l'évolution de la température sur une période longue

On dispose de l'évolution de la **température moyenne journalière** (soit un relevé par jour) à Berlin[1], enregistrée sur une très grande durée. On note $x[n]$ ce signal numérique. L'objectif de ce problème est d'analyser ces données.

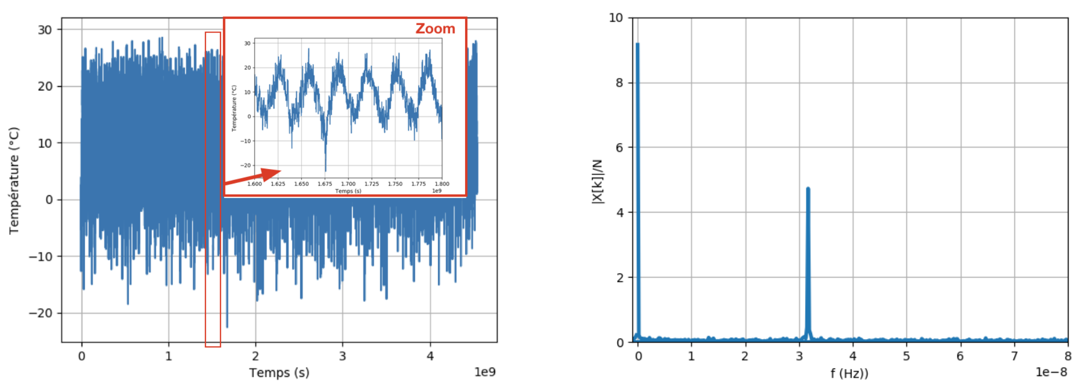

Figure 1: Evolution de la température journalière en fonction du temps (à gauche), Module de la TFD normalisée (à droite)

1 Analyse du signal brut

La figure 1 présente l'évolution journalière de la température (à gauche) et le module du spectre de ce signal (à droite) obtenu par la transformé de Fourier Discrète **et normalisée par N le nombre d'échantillons dans le signal**.

1. Estimer la durée sur laquelle les enregistrements sont faits (on exprimera le résultat en année, la précision demandée est à ± 25 ans - on utilisera l'approximation : $3.6e3 \times 24 \approx 1e5$).

[1] Klein Tank, A.M.G. and Coauthors, 2002. Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the European Climate Assessment. Int. J. of Climatol., 22, 1441-1453.

Solution: Sur l'axe des abscisses de la figure montrant l'évolution en temps, on estime $\Delta = 4.5e9$s.

$$\Delta_{jour} = \Delta/(3600 * 24)$$

or $3.6e3 \times 24 \approx 1e5$

$$\Delta_{jour} \approx 4.5e3$$

puis

$$\Delta_{an} \approx 4.5e3/365 \approx 125\text{an}$$

En fait la base de données contient la température moyenne journalière de 1876 à 2019 : 143 ans.

2. D'après l'énoncé, quelle est la fréquence d'échantillonnage ?

Solution: D'après l'énoncé, la période d'acquisition est journalière, donc la fréquence d'échantillonnage est de 1 par jour :

$$Fe = 1/(3600 * 24) \approx 1.16e - 5\text{Hz}$$

3. Sur le spectre (Fig 1 partie de droite), on voit émerger deux fréquences, la fréquence nulle et une fréquence notée f_1. Quelle est la valeur de f_1 ? A quelle période correspond-elle ? (on pourra exprimer cette période en année). Commenter.

Solution: On lit $f_1 \approx 3.15e^{-8}$Hz, correspondant à une période $T = 1/f_1 \approx 0.315e8 = 31.5e6$. Cela correspond à environ $31.5e6/(3600 * 24) \approx 31.5e6/1e5 \approx 315$ jours. Avec un calcul rigoureux, on trouve 367j.

La fréquence f_1 correspond donc à une fréquence d'environ 1 an, et capture le rythme annuel saisonnier des températures.

4. Montrer que la valeur du spectre en $f = 0$ correspond à la valeur moyenne. Pour cela : (on utilisera la définition de la TFD). En déduire la valeur moyenne de la température sur toute la période considérée.

   (a) Rappeler la définition de la valeur moyenne d'un signal $x[n]$, calculée dans le domaine temporel.

   Solution: La valeur moyenne de $x[n]$ est

$$x_{moy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

(b) Rappeler la définition de la TFD, et donner sa valeur en 0.

Solution: La définition de la TFD est :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}.$$

La fréquence nulle est obtenue pour $k = 0$:

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

(c) En déduire la valeur moyenne de la température à Berlin sur toute la durée d'enregistrement considérée.

Solution: On voit donc que $X[0] = Nx_{moy}$, or la figure 1 présente le module de la TFD X[k] normalisée par N, on lit donc directement la valeur demandée : $|X[0]|/N \approx 9^oC$

2 Lissage du signal temporel par moyenne mobile

Dans cette partie, on veut lisser les courbes temporelles pour que le signal ait moins de variations (cf zoom). Pour cela on utilise un filtre à moyenne mobile défini par l'équation de récurrence :

$$y[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[n-k] \tag{1}$$

5. Rappeler la définition du produit de convolution discret. Montrer alors que l'équation de récurrence précédente peut aussi s'écrire sous la forme:

$$y[n] = x[n] * \Pi_L[n],$$

où $*$ désigne le produit de convolution discret et $\Pi_L[n]$ est la fonction porte d'amplitude 1/L.

Solution: On rappelle que le produit de convolution entre un signal z et x est défini par

$$y[n] = z[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z[k]x[n-k].$$

Par identification entre cette équation, on voit directement que $z[n] = 1/L\Pi_L[n]$.

6. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre.

Solution: Pour un filtre de sortie y et d'entrée x, on a : $y[n] = h[n] * x[n]$, où $h[n]$ désigne la réponse impulsionnelle du filtre. Par identification avec l'équation précédente, on a donc directement

$$h[n] = \Pi_L[n].$$

7. Calculer la fonction de transfert de ce filtre

Solution: Par définition $H(z) = TZ[h[n]]$. On a alors

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{L} z^{-n} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{L} \frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} \quad (3)$$

8. Placer les pôles et les zéros de la fonction de transfert dans le plan complexe (on prendra $L = 10$ pour ce tracé).

Solution: On a L zéros régulièrement espacés sur le cercle unité (racines Lièmes de l'unité), et un pôle en z=1. Mais si on met la fonction de transfert sous la forme d'un polynôme en puissance de z positive, on a

$$H(z) = \frac{1}{L} \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z-1)}.$$

Alors, on voit que z=1 est un pôle est un zéro en même temps, alors qu'on a également (L-1) pôles en 0. Il reste donc L-1 zéros sur le cercle unité et L-1 pôles en zéros.

9. Quelle est la nature (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande) de ce filtre ? **Justifier**.

Solution: En parcourant dans le sens trigonométrique le cercle unité, en commençant en z=1 (i.e. f=0), on peut tracer l'allure de la réponse en fréquence, qui fait apparaitre de multiples rebonds de plus en plus atténués. On a donc une allure de filtre de type passe-bas.

10. Ce filtre est-il stable ? **Justifier**.

Solution: Tous les pôles du filtre sont en 0. Le filtre est donc stable.

11. Ce filtre est-il causal ? **Justifier**.

> **Solution:** La réponse impulsionnelle du filtres est nulle pour $n < 0$. Le filtre est bien causal.

12. Calculer la réponse en fréquences de ce filtre.

> **Solution:** Il suffit de poser $z = e^{j2\pi f T_e}$ dans la fonction de transfert. Il vient alors :
>
> $$\begin{aligned} H(e^{j2\pi f T_e}) &= \frac{1}{L}\frac{1 - e^{-j2\pi f L T_e}}{1 - e^{-j2\pi f T_e}} \\ &= \frac{1}{L}\frac{\sin(\pi f L T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-j\pi f (L-1) T_e}. \end{aligned}$$

13. Tracer l'allure du module de la réponse en fréquence (on prendra L=10 pour ce tracé).

> **Solution:** TO DO.

14. Exprimer l'évolution de la phase $\varphi(f)$ de la réponse en fréquence en fonction de f. En déduire la valeur du temps de propagation de groupe $\tau(f)$ du filtre. **Commenter**.

> **Solution:** La phase $\varphi(f)$ vérifie est donnée par $\varphi(f) = -\pi(L-1)T_e f$. On en déduit alors :
>
> $$\begin{aligned} \tau(f) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(f)}{\mathrm{d}f} \\ &= -\frac{L-1}{2}T_e. \end{aligned}$$
>
> On constate donc que la phase varie linéairement avec la fréquence, et donc que le temps de propagation de groupe est constant.

15. Montrer que
$$TFD[x[n-n_0]] = X_K[k]e^{\frac{-2j\pi n_0 k}{K}},$$
où $X_K[k] = TFD[x[n]]$ représente la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur K points du signal $x[n]$.

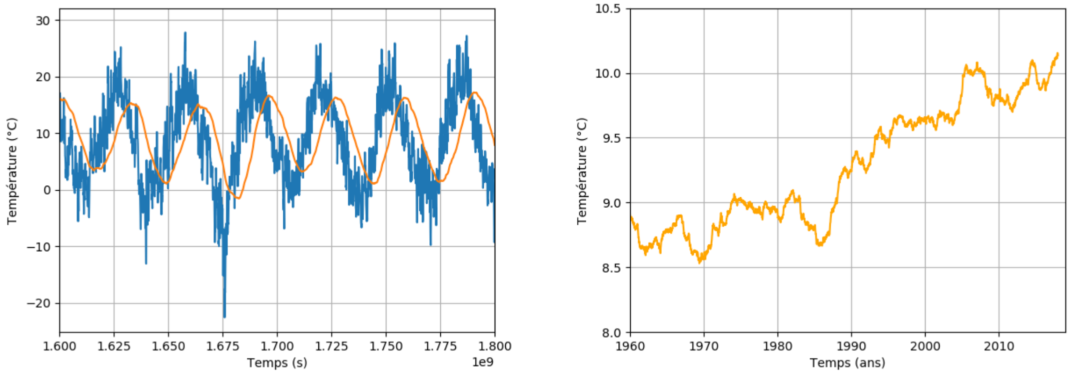

Figure 2: (A gauche) Évolution de la température journalière et résultat du filtrage par moyenne mobile ($L = 150$, zoom), (A droite) évolution filtrée par moyenne mobile ($L = 3650$).

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned} TFD[x[n-n_0]] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] e^{j2\pi n \frac{k}{K}} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x[p] e^{-j2\pi (p+n_0)\frac{k}{K}} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x[p] e^{-j2\pi p \frac{k}{K}}\ e^{-j2\pi n_0 \frac{k}{K}} \\ &= X_K[k]\ e^{-j2\pi n_0 \frac{k}{K}} \end{aligned}$$

16. La figure 2 montre l'évolution brute et l'évolution filtrée avec un filtre à moyenne mobile pour $L = 150$. Le décalage des courbes était-il prévisible ? Estimer sa valeur.

> **Solution:** Le filtre introduit un déphasage linéaire, i.e. un retard pur qu'on observe sur le tracé. Ce retard est directement proportionnel à l'ordre du filtre, on peut donc l'estimer à environ $(L-1)/2 * T_e \approx 75T_e \approx= 75 * 1e5 \approx 75e5s$.

17. La figure 2 montre l'évolution filtrée avec un filtre à moyenne mobile pour $L = 3650$. Justifier la valeur choisie pour L ? Quelle conclusion peut-on tirer sur la méthode de filtrage choisie et sur l'évolution de la température ?

> **Solution:** Le filtre moyenne sur 3650 points, i.e. sur 10 ans, et effectue donc une moyenne sur une durée longue afin d'extraire la tendance moyenne d'évolution de la température.

Une autre façon de voir les choses et de comprendre que plus L est grand, plus la fréquence de coupure dil filtre est faible, et la sortie capture alors des fréquence plus faibles uniquement.

Au final, cette courbe permet de tracer l'évolution de la température moyenne sur 10 ans à Berlin, et on constate qu'en moyenne celle-ciu est passée d'environ 8.75 degrés à environ 10 degrés.

3 Etude de la variabilité journalière

On souhaite dans cette partie étudier la variabilité journalière, c'est à dire les variations rapides, en éliminant la composante lente f_1. Pour cela, on va utiliser un nouveau filtre, noté filtre 2 et dont la réponse en fréquence souhaitée est définie selon :

$$H_2(e^{2j\pi fTe}) = \begin{cases} 1 \text{ si } f_c < f < f_e - f_c, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{4}$$

18. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelle valeur de la fréquence de coupure faut-il choisir ?

Solution: Il faut utiliser un filtre passe haut pour éliminer la composante basse fréquence que représente le cycle annuel. On prend par exemple $f_c = 2 * f_1$

19. Tracer le module de la réponse en fréquence de ce filtre **sur l'intervalle** $f \in [-f_e/2 : f_e/2]$.

Solution: TO DO.

20. Calculer la TFSD inverse de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$, notée $h_2[n]$. Que représente $h_2[n]$?

Solution:

$$
\begin{aligned}
h_2[n] &= \int_{(f_e)} H_1(e^{j2\pi f T_e}) e^{j2\pi f n T_e} \mathrm{d}f \\
&= \int_{f_{c1}}^{f_{c2}} e^{j2\pi f n T_e} \mathrm{d}f \\
&= \left[\frac{e^{j2\pi f n T_e}}{2j\pi n T_e}\right]_{f_{c1}}^{f_{c2}} \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_{c2} n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi (f_e - f_{c1}) n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{1}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_e n T_e} e^{-j2\pi f_{c1} n T_e} - e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi f_e/2 n T_e} e^{-j2\pi f_{c1} n T_e} - e^{-j2\pi f_e/2 n T_e} e^{j2\pi f_{c1} n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{2j\pi n T_e}\left(e^{j2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e} - e^{-j2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e}\right) \\
&= \frac{e^{j\pi f_e n T_e}}{\pi n T_e} \sin(2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e) \\
&= 2(f_e/2 - f_{c1}) e^{j\pi f_e n T_e} \operatorname{sin}_c(2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e) \\
&= 2(f_e/2 - f_{c1}) (-1)^n \operatorname{sin}_c(2\pi (f_e/2 - f_{c1}) n T_e)
\end{aligned}
$$

$h_2[n]$ représente la réponse impulsionnelle du filtre 2.

21. **Justifier** si le filtre 2 ainsi obtenu est de type RIF ou RII.

Solution: Le sinus cardinal étant du durée infinie, le filtre obtenu est de type RII.

22. **Justifier** si le filtre 2 ainsi obtenu est causal ou non.

Solution: La réponse impulsionnelle obtenue est définie pour tout n, en particulier négatifs. Le filtre est donc non causal.

23. On pose maintenant $h_3[n] = h_2[n] w_T[n]$, avec

$$
w_T[n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{L} & \text{si } -L/2 \leq n < 0, \\ 1 - \frac{2n}{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L/2 - 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}
$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

Tracer $w_T[n]$ pour $L = 8$.

Solution: TO DO

24. Le filtre 3, de réponse impulsionnelle $h_3[n]$, est-il RIF ou RII ? Justifier.

Solution: La fenêtre étant de durée limitée, le filtre 3 est un filtre RIF.

25. On montre que $W_T(e^{j2\pi fT_e}) = TFSD[w_T[n]] = \frac{2}{L}\left(\frac{\sin(\pi\frac{f}{f_e}\frac{L}{2})}{\sin(\pi f/f_e)}\right)^2 e^{j4\pi fT_e}$. Préciser la valeur de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$ en $f = 0$Hz et les positions en fréquence des zéros de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$.

Solution:

- $|W_T(e^{j2\pi fT_e})| = \frac{L}{2}$ en $f = 0$.
- zéros en $k\frac{2f_e}{L}$.

26. Tracer l'allure de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ pour $f \in [-f_e, f_e]$ et avec $L = 8$.

Solution: TO DO.

27. Exprimer $H_3(e^{j2\pi fT_e})$ en fonction de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ et $W_T(e^{j2\pi fT_e})$. Représenter alors l'allure de $|H_3(e^{j2\pi fT_e})|$.

Solution: On a $H_3(e^{j2\pi fT_e}) = H_2(e^{j2\pi fT_e}) * W_T(e^{j2\pi fT_e})$.
Figure TO DO.