2M256 - Analyse vectorielle integrales multiples formes différentielles $\int_{\mathbb{D}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{D}} \omega$

Jose-Maria Fullana

SU

2018

Théorème de Stokes et applications

Soit un domaine de dimension k de $\mathbb{R}^k$, dont les coordonnées sont notées (dans l'ordre, et cela a une importance) $(x_1, ..., x_k)$, et $\omega \in \Omega(\Delta)$ une k-forme définie sur Δ , qu'on écrit sous sa forme standard (toujours dans l'ordre)

$$\omega = f(x_1, ..., x_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

L'intégrale de ω sur Δ est définie comme l'intégrale de Riemann de la fonction f :

$$\oint \omega := \int_\Delta f(x_1, ..., x_k) dx_1 \ldots dx_k$$

Si $M : \Delta \to D$ est un domaine paramétré de dimension k et $\omega \in \Omega(\Delta)$ est une k-forme, l'intégrale correspondante est définie par

$$\oint \omega = \oint_{\Delta} M * \omega$$

L'intégrale d'une k-forme sur un domaine paramétré $M : \Delta \to D$ ne dépend pas de la paramérisation de l'image $D = M(\Delta)$.

Remarque

l'intérêt du formalisme des formes différentielles réside dans le résultat suivant, qui dit que ce formalisme ne dépend pas du choix des coordonnées (voir Théorème 17, page 69)

Example

Intégration de $\int xdy$ sur la ligne $(1,1) \to (0,0)$

$$\begin{cases} x = (1-t) \\ y = (1-t) \end{cases}$$

$t \in [0,1]$ alors $dy = -dt$ et

$$\int_0^1 (1-t)(-dt) = \int_0^1 (t-1)dt = [t^2/2 - t]_0^1 = -1/2$$

mais avec une autre paramétrisation

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = (1 - t^2) \\ y & = (1 - t^2) \end{array} \right.$$

$t \in [0, 1]$ alors $dy = -2tdt$ et

$$\int_0^1 (1 - t^2)(-2tdt) = -1/2$$

(faire)

Le travail d'un vecteur $\mathbf{V}$ sur une courbe C est

$$\int_C \mathbf{V}\ \mathbf{dM} = \int_C (v_x, v_y)(dx, dy) = \int_C v_x dx + v_y dy$$

mais

$$\omega_{\mathbf{V}} = v_x dx + v_y dy$$

alors

$$travail\ \mathbf{V}_C := \int_C \omega_{\mathbf{V}}$$

Si $\omega_{\mathbf{V}} = v_x dx + v_y dy$ et C une courbe paramètrée par $\phi(t) = (x(t), y(t))$ on peut calculer le tiré en arrière $\phi*$ (un changement de variables) par

$$\int_C v_x dx + v_y dy = \int_{C(t)} v_x(x(t), y(t)) dx(t) + v_y(x(t), y(t)) dy(t)$$

$$= \int_{C(t)} \left(v_x(x(t), y(t)) x^{'}(t) + v_y(x(t), y(t)) y^{'}(t) \right) dt$$

(fait plusieurs fois en TD)

Remarque

l'intégrale d'une 1-forme sur une courbe ne dépend pas du paramétrage de la courbe.
Ceci implique que le travail ne dépend pas non plus du paramétrage

Remarque

Si la force dérive d'un potentiel, i.e., est un champ de gradient (comme la force de gravitation ou la force électrostatique), son travail est nul le long de toute courbe fermée.

Flux

Le flux d'un champ de vecteurs **V** le long d'une surface S de l'espace est défini par

$$\int_S \mathbf{V}\ \mathbf{n} dS = \int_S (v_x, v_y, v_z)(dS_{yz}, dS_{zx}, dS_{xy})$$

mais

$$\omega_{\mathbf{V}} = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

et donc

$$*\omega_{\mathbf{V}} = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy$$

alors $\quad flux\ \mathbf{V}_S := \iint_S *\omega_{\mathbf{V}}$

Flux en pratique

Soit une surface S paramétrée par
$M(u,v) = x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ on peut calculer le flux par

$$\mathit{flux}\ \mathbf{V}_S := \iint_S *\omega_{\mathbf{V}} = \iint_S \mathbf{V}\mathbf{n}d\sigma$$

avec

$$d\sigma := \left|\left|\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} x \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right|\right|$$

et

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} x \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}}{\left|\left|\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} x \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right|\right|}$$

ou directement par le tiré en arrière de $\iint_S *\omega_{\mathbf{V}}$

Rappel

Le travail d'un vecteur $\mathbf{V}$ sur une courbe C est

$$\textit{travail}\, \mathbf{V}_C := \int_C \omega_{\mathbf{V}}$$

Le flux d'un champ de vecteurs $\mathbf{V}$ le long d'une surface S de l'espace

$$\textit{flux}\, \mathbf{V}_S := \iint_S *\omega_{\mathbf{V}}$$

Definition

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$. Un k-cube singulier de D est une application lisse $\sigma := [0,1]^k \to D$, avec une orientation fixée au départ (pour k = 0, on obtient, par convention, un point).
L'intégrale d'une k-forme différentielle $\omega \in \Omega(D)$ le long de σ est l'intégrale

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{[0,1]^k} \sigma^* \omega$$

.

Chaine singulière

Definition

Une k-chaine singulière dans un domaine D de $\mathbb{R}^n$ est une somme formelle

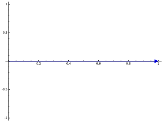
$$\sum a_j \sigma_j$$

avec $a_i \in Z$ des entiers relatifs et σ_j des k-cubes singuliers. Le bord d'un k-cube singulier σ est la $k-1$ chaine singulière donnée par

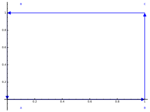
$$\partial\sigma = \sum_i (-1)^{i+1} \left(\sigma_{x_1 \ldots x_{i-1} 1 x_{i+1} \ldots x_n} - \sigma_{x_1 \ldots x_{i-1} 0 x_{i+1} \ldots x_n} \right)$$

Bords

- point $\sigma := \{1\}$ bord $:= \{0\}$ (défintion)



- ligne $\sigma := [0,1] \to D$
  bord $:=$ points $\sigma\{0\}, \sigma\{1\}$



- carré $\sigma := [0,1]x[0,1] \to D$
  bord $:=$ lignes $:= \sigma_{00\to01} + \sigma_{10\to11} + \sigma_{11\to01} + \sigma_{01\to00}$
- volume $\sigma := [0,1]x[0,1]x[0,1] \to D$
  bord $:=$ carrés

Oriéntation

très important ! ! !

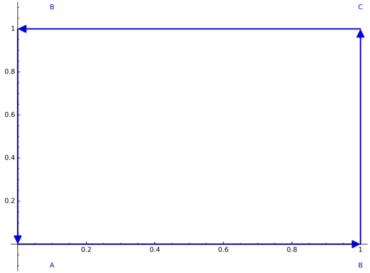


Figure – Bords orientés

$$\partial\sigma = \sigma_{00\to01} + \sigma_{10\to11} + \sigma_{11\to01} + \sigma_{01\to00}$$

Theorem

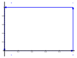
Si σ est une k-cellule singulière on a

$$\partial(\partial\sigma) = 0$$

Example sur le carré

$$\partial\sigma = \sigma_{00\to01} + \sigma_{10\to11} + \sigma_{11\to01} + \sigma_{01\to00}$$
$$\partial(\partial\sigma) = \partial\sigma_{00\to01} + \partial\sigma_{10\to11} + \partial\sigma_{11\to01} + \partial\sigma_{01\to00}$$
$$\partial(\partial\sigma) = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (A - D) = 0$$

Example

calcul de $\int_{\partial\sigma} xdy$ sur les bords du carré 

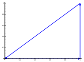
procédure :

décomposer l'intégrale et donner des paramétrisations, puis intégrer

- $\sigma_{00\to 10}$: $M(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$ donc $x = t$ et $dy = 0$
- $\sigma_{10\to 11}$: $M(t) = (1, t), t \in [0, 1]$ donc $x = 1$ et $dy = dt$
- $\sigma_{11\to 01}$: $M(t) = (1 - t, 1), t \in [0, 1]$ donc $x = 1 - t$ et $dy = 0$
- $\sigma_{11\to 00}$: $M(t) = (0, 1 - t), t \in [0, 1]$ donc $x = 0$ et $dy = -dt$

donc $\int_{\partial\sigma} xdy = \int_{\sigma_{10\to 11}} = \int_0^1 dt = 1$

Example

calcul de $\int_{\partial\sigma} xdy$ sur les bords du triangle 
procédure :
décomposer l'intégrale et donner des paramétrisations, puis intégrer

- $\sigma_{00\to10}$: $M(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$ donc $x = t$ et $dy = 0$
- $\sigma_{10\to11}$: $M(t) = (1, t), t \in [0, 1]$ donc $x = 1$ et $dy = dt$
- $\sigma_{11\to00}$: $M(t) = (1 - t, 1 - t), t \in [0, 1]$ donc $x = 1 - t$ et $dy = -dt$

donc $\int_{\partial\sigma} xdy = \int_{\sigma_{10\to11}} dt + \int_{\sigma_{11\to00}} (1 - t)(-dt) = 1/2$

Example

calcul de $\int_{\partial\sigma} xdy$ sur les bords du demi-cercle 

procédure :

décomposer l'intégrale et donner des paramétrisations, puis intégrer

- $\sigma_{-10\to 10}$: $M(t) = (-1 + (t+1), 0), t \in [0, 1]$ donc $x = -1 + (t+1)$ et $dy = 0$
- $\sigma_{10\to -10}$: $M(t) = (2t - 1, \sqrt{1 - (2t-1)^2}), t \in [0, 1]$

donc $\int_{\partial\sigma} xdy = 2\int_0^1 \frac{(2t-1)^2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} dt = \pi/2$

plus simple - le calcul ne dépend pas de la paramétrisation....

$\sigma_{10\to -10}$: $M(t) = (\cos\theta, \sin\theta), t \in [0, \pi]$ donc $x = \cos\theta$ et $dy = \cos\theta d\theta$

$\int_{\partial\sigma} xdy = \int_{\sigma_{10\to -10}} \cos^2\theta d\theta = \pi/2$

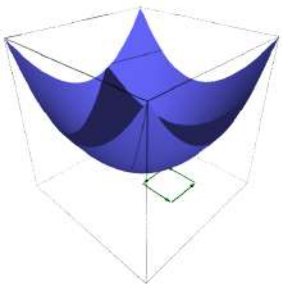
Formule de Stokes

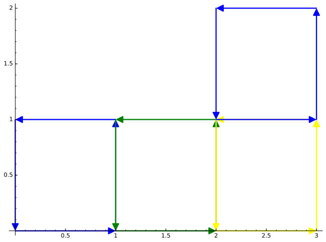
Soit σ une k-cellule singulière de $\mathbb{R}^n$ de bord une (k-1)-cellule $\partial\sigma$. Soit $\omega \in \Omega^{k-1}$ une k-forme différentielle définie au voisinage de σ et $d\sigma$ sa différentielle extérieure. On a alors l'égalité

$$\oint_{\sigma} d\omega = \oint_{\partial\sigma} \omega$$

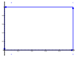
Important

comme on peut décomposer des domaines (courbes, surfaces, volumes) de R^n en petits cubes singuliers, on peut appliquer la formule de Stokes à tout domaine régulier.





Example

calcul de $\int_{\partial\sigma} xdy$ sur les bords du carré  donc

$$\oint_{\sigma} d\omega = \oint_{\partial\sigma} \omega$$

avec $\omega = xdy$ et $d\omega = dx \wedge dy$ on trouve

$$\oint_{\sigma} d\omega = \int_{D} dx \wedge dy$$

l'aire du carré...

Example

calcul de $\int_{\partial\sigma} xdy$ sur les bords du démi-cercle  donc pareil

$$\oint_{\sigma} d\omega = \oint_{\partial\sigma} \omega$$

avec $\omega = xdy$ et $d\omega = dx \wedge dy$ on trouve

$$\oint_{\sigma} d\omega = \int_{D} dx \wedge dy$$

l'aire du démi-cercle... soit $\pi/2$

Applications : aire d'un domaine dans le plan

L'aire d'un domaine D du plan de bord une courbe $\partial D = C$ est donnée par

$$\text{aire}(D) := \iint_D dx \wedge dy = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint [xdy - ydx]$$

Démonstration.

Formule de Stokes et les identités

- $d(xdy) = dx \wedge dy$
- $d(-ydx) = -dy \wedge dx = dx \wedge dy$
- $d(xdy - ydx) = 2dx \wedge dy$

□

Le volume d'un domaine D de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface orientée S est donné par

$$\text{volume}(D) := \iint_S x dy \wedge dz = \iint_S y dz \wedge dx = \iint_S z dx \wedge dy$$

Démonstration.

Formule de Stokes et les identités

- $d(x dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz$
- $d(y dz \wedge dx) = dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz$
- $d(z dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$

$\square$

Si S est une surface de $\mathbb{R}^2$ bordée par une courbe C et $\mathbf{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\mathbf{V}} = v_x dx + v_y dy$, on a montré que $d(\omega_{\mathbf{V}}) = \mathbf{rot}(\mathbf{V}) dx \wedge dy$ donc

$$\oint_C \omega_{\mathbf{V}} = \iint_S \mathbf{rot}(\mathbf{V}) dx \wedge dy$$

donc la Formule de Green-Riemann dit que

$$\text{travail}\mathbf{V}_C := \oint_C \omega_{\mathbf{V}} = \iint_S \mathbf{rot}(\mathbf{V}) dx \wedge dy$$

$$\text{travail}\mathbf{V}_C := \oint_C \omega_{\mathbf{V}} = \iint_S \mathbf{rot}(\mathbf{V}) dx \wedge dy$$

Si $\mathbf{rot} = 0$ le travail de $\mathbf{V}$ sur une courbe fermée C est nul.

rappel
$\mathbf{rot} = 0 \Rightarrow$ le vecteur $\mathbf{V}$ dérive d'un potentiel $\mathbf{grad}(\phi) = \mathbf{V}$

Formule de Stokes-Ampère

Si S est une surface de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe C et $\mathbf{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\mathbf{V}} = v_x dx + v_y dy + v_z dz$, on a montré que $d(\omega_{\mathbf{V}}) = *\omega_{\mathbf{rot V}} \in \Omega^2$ une 2-forme de flux associée au champs de vecteurs) donc

$$\oint_C \omega_{\mathbf{V}} = \iint_S *\omega_{\mathbf{rot V}}$$

donc la Formule de Stokes-Ampère dit que

$$\text{travail}\mathbf{V}_C := \oint_C \omega_{\mathbf{V}} = \iint_S *\omega_{\mathbf{rot V}} =: \text{flux}(\mathbf{rot}(\mathbf{V}))$$

Si V est un volume bordé par une surface S dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{V}$ est un champ de vecteurs, de 2-forme de flux associée $*\omega_{\mathbf{V}}$, on a montré que $d(*\omega_{\mathbf{V}}) = div(\mathbf{V})dx \wedge dy \wedge dz$ donc on a

$$\oiint_S *\omega_{\mathbf{V}} = \iiint_V div(\mathbf{V})dx \wedge dy \wedge dz$$

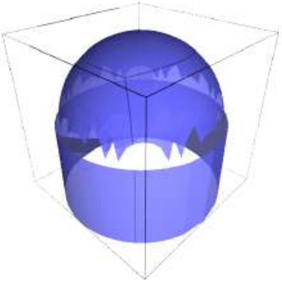
la formule de Stokes-Ostrogradsky dit que

$$\text{flux}\mathbf{V}_S := \oiint_S *\omega_{\mathbf{V}} = \iiint_V div(\mathbf{V})dx \wedge dy \wedge dz$$

le flux du champ de vecteurs $\mathbf{V}$ à travers la surface S est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume V

On considère le domaine V dont le bord est composé de

1. la demi-sphère $S = \{(x, y, z), z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
2. le cylindre $C = \{(x, y, z), -1 \leq z \leq 0, x^2 + y^2 = 1\}$,
3. du disque $D = \{(x, y, z), z = -1, x2 + y2 \leq 1\}$



$3D$

$2D \rightarrow$

Calcul du volume

$$\text{Volume démi-sphère} = \int_D dx \wedge dy \wedge dz$$

Changement de variables

$$\begin{cases} x = r \sin\phi \cos\theta \\ y = r \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cos\phi \end{cases}$$

donc $dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\phi dr \wedge d\theta \wedge d\phi$ alors par Fubini

$$\text{Volume démi-sphère} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi = \frac{2}{3}\pi$$

Calcul du volume

$$\text{Volume cylindre} = \int_D dx \wedge dy \wedge dz$$

Changement de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

donc $dx \wedge dy \wedge dz = r \wedge d\theta \wedge dz$ alors par Fubini

$$\text{Volume demi-sphère} = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = \pi$$

donc

$$V = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi$$

Soit $\omega = (x+y)dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ calculer $\int_{\partial V} \omega$.
D'après Stokes

$$\oint_V d\omega = \oint_{\partial V} \omega$$

donc on calcule d'abord $d\omega$

$$d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz$$

alors

$$\int_{\partial V} \omega = 3V = 5\pi$$

Question

$$\oint_{\partial V} \omega$$

Que signifie cette intégrale en termes de champs de vecteurs ?
La formule de Stokes-Ostrogradsky dit que

$$\text{flux}\mathbf{V}_S := \oiint_S *\omega_{\mathbf{V}} = \oint_{\partial V} (x+y)dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

$$\text{flux}\mathbf{V}_S = \oint_{\partial V} \mathbf{V}\ \mathbf{n} dS$$

donc c'est le flux du vecteur $(x+z, y, z)$ à travers du bord du volume V.