Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 9 juin 2016

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner la définition d'un problème bien posé.
2. Donner la solution de l'équation de transport $u_t + au_x = 0$. Donner une intérpretation physique de la solution obtenu et tracer quelques courbes caractéristiques pour $a = 2$.
3. Pour les équations aux dérivées partielles suivantes donner : l'ordre, le type (linéaire ou non-linéaire) :
   (a) $u_x + uu_{yy} = 0$
   (b) $u_x^2 + u_y^2 = 0$
   (c) $2u_{xx} - 5u_{yyy} = 4$
   (d) $u_{xx} - 2u_{yy} + u_{zz} + 3u_x + u_y = x^2 + y$
   (e) $u_{xx} + 3xu_{yy} - u_y = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$
4. Parmi les équations aux dérivés partielles de la question précédente, laquelle est hyperbolique, élliptique ou parabolique ?
5. Donner un exemple de problème de Cauchy que vous avez étudié en cours et pour laquelle la solution ne se propage pas à une vitesse finie.
6. Énoncer (sans démonstration) le principe de maximum pour une fonction harmonique.

Exercice 1
Démontrer que l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*$$

est parabolique et trouver sa forme canonique. Trouver la solution générale dans le demi-plan $x > 0$.

Exercice 2
Soit le problème aux conditions initiales et aux limites :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \ u_t(x, 0) = 0, \ 0 < x < l \tag{3}$$

i) Précisez de quelle équation de la mécanique s'agit-t-il ?
ii) Déterminer la solution u(x, t) qui vérifie les conditions aux limites et initiales.
iii) Sans effectuer des calculs expliquer comment change la solution si on impose des conditions aux limites de type Neumann.

Exercice 3

Soit une tige mince de longueur l placé le long de l'axe des x avec une extrémité à l'origine. La température de la première moitié de la tige est soudainement augmentée à une température constante $T_0 > 0$ tout en gardant les deux extremités de la tige à température zéro. On considère cet état comme l'état initial à $t = 0$.

i) Donner l'équation de la physique mathématique qui modélise ce problème.

ii) Donner les conditions limites et la condition initiale du problème.

iii) Montrer, par la méthode de séparation des variables, que la distribution de la température pour un temps $t > 0, \forall x \in [0, l]$ est :

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$$