Examen du mercredi 14 décembre 2016

Durée de l'épreuve : 3 heures. Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction des interprétations. Les deux problèmes sont indépendants. Le barème approximatif est de 13 points pour le problème 1 et 7 pour le problème 2.

Problème 1 : Ecoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère immobile

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux, newtonien, homogène, non pesant, autour d'une sphère immobile de rayon R. On désigne par λ et μ les coefficients de viscosité du fluide et par ρ sa masse volumique. Un point de l'écoulement est repéré par ses coordonnées (r, θ, ϕ) dans le repère sphérique $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\phi)$, (voir Formulaire).

L'écoulement est supposé stationnaire. Loin de la sphère, la vitesse du fluide est uniforme et dirigée selon la direction $\underline{e}_3$ et vaut $V_\infty \, \underline{e}_3$, V_∞ étant une constante donnée, (Figure 1). De même, la pression à l'infini est connue et vaut p_∞.

L'écoulement présentant une symétrie de révolution autour de l'axe $\underline{e}_3$, le vecteur vitesse est indépendant de la variable ϕ et la composante de la vitesse selon la direction $\underline{e}_\phi$ est nulle, soit :

$$\underline{v}(r, \theta, \phi, t) \;=\; v_r(r,\theta)\, \underline{e}_r, + v_\theta(r,\theta)\, \underline{e}_\theta. \tag{1}$$

1.1 Rappeler l'équation de conservation de la masse et l'expliciter pour l'écoulement considéré ici.

Montrer que cette relation est satisfaite s'il existe une fonction scalaire $\Psi(r,\theta)$, appelée fonction de courant, telle que :

$$v_r(r,\theta) \;=\; \frac{1}{r^2 \sin\theta}\, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(r,\theta), \qquad v_\theta(r,\theta) \;=\; -\frac{1}{r \, \sin\theta}\, \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r,\theta). \tag{1}$$

Soit $\underline{\Omega}(r,\theta)$ le vecteur vorticité défini par $\underline{\Omega}(r,\theta) \;=\; \underline{\mathrm{rot}}\, \underline{v}(r,\theta)$ où $\underline{\mathrm{rot}}\, \underline{v}$ désigne le rotationnel du vecteur vitesse.

Montrer que le vecteur vorticité est porté par $\underline{e}_\phi$ et s'exprime en fonction des dérivées de $\Psi(r,\theta)$ sous la forme suivante :

$$\underline{\Omega}(r,\theta) = \Omega(r,\theta)\, \underline{e}_\phi, \quad \text{avec} \;\; \Omega(r,\theta) \;=\; -\frac{1}{r}\, \frac{1}{\sin\theta}\, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \;-\; \frac{1}{r^3}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\Big). \tag{2}$$

1.2 Rappeler l'équation vectorielle de Navier-Stokes régissant la dynamique des fluides.

On suppose à partir de maintenant l'écoulement lent, de sorte que les termes en $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{v} \,.\, \underline{v}$ pourront être considérés comme négligeables.

Montrer alors que l'équation de Navier-Stokes, compte tenu de cette hypothèse supplémentaire, se réduit sous la forme :

$$-\,\underline{\mathrm{grad}}\,p(r,\theta,\phi)\;-\;\mu\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\Omega}(r,\theta)\;=\;\underline{0},\;\;\forall\,r\,>\,R,\;\forall\,\theta\,\in\,[\,0,\pi\,], \tag{3}$$

où $p(r,\theta,\phi)$ représente le champ de pression dans l'écoulement.

On rappelle l'égalité vectorielle $\underline{rot}(\underline{rot}\,\underline{v}) = \underline{grad}\,(div\;\underline{v})\;-\underline{\Delta}\,\underline{v}$.

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation vectorielle de Navier-Stokes (3), montrer que :

$$\underline{\mathrm{rot}}\big(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\Omega}(r,\theta)\big)\;=\;\underline{0},\qquad\forall\,r\,>\,R,\;\forall\,\theta\,\in\,[\,0,\pi\,]. \tag{4}$$

1.3 Déduire de la relation (4) l'équation suivante satisfaite par l'intensité $\Omega(r,\theta)$ du vecteur vorticité :

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\Omega)\;+\;\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega\,\sin\theta\,)\Big)\;=\;0,\;\forall\,r\,>\,R,\;\forall\,\theta\,\in\,[0,\pi].$$

On recherche la solution $\Omega(r,\theta)$ de cette équation sous la forme :

$$\Omega(r,\theta)\;=\;f(r)\,\sin\theta,$$

où $f(r)$ est une fonction scalaire de la variable radiale r.

Former l'équation différentielle satisfaite par la fonction $f(r)$ et la résoudre en recherchant sa solution de la forme $f(r)\;=\;r^{\alpha}$, α étant une constante.

On montrera que l'intensité $\Omega(r,\theta)$ du vecteur vorticité est donnée par :

$$\Omega(r,\theta)\;=\;(\,A\,r\;+\;\frac{B}{r^2}\,)\;\sin\theta, \tag{5}$$

où A, B sont deux constantes quelconques.

1.4 Vérifier que la fonction de courant $\Psi(r,\theta)$ (introduite à la question 1.1) de la forme suivante :

$$\Psi(r,\theta)\;=\;\big(\,C\,\frac{1}{r}\;+\;D\,r\;+\;E\,r^2\;+\;F\,r^4\,\big)\;\sin^2\theta,$$

où C, D, E et F sont des constantes permet d'obtenir la forme de la vorticité $\Omega(r,\theta)$ donnée à la question 1.3.

1.5 Traduire les conditions aux limites en $r\to\infty$ et $r=R$ satisfaites par les composantes de la vitesse.

On rappelle (voir Formulaire) que $\underline{e}_3\;=\;\cos\theta\,\underline{e}_r\;-\;\sin\theta\,\underline{e}_\theta$.

Etablir que la vitesse en tout point de l'écoulement est donnée par les expressions suivantes :

$$v_r(r,\theta)\;=\;V_\infty\,\big(\,1\;-\;\frac{3}{2}\,\frac{R}{r}\;+\;\frac{1}{2}\,\frac{R^3}{r^3}\,\big)\;\cos\theta,\qquad v_\theta(r,\theta)\;=\;-\,V_\infty\,\big(\,1\;-\;\frac{3}{4}\,\frac{R}{r}\;-\;\frac{1}{4}\,\frac{R^3}{r^3}\,\big)\;\sin\theta.$$

En déduire que l'intensité $\Omega(r,\theta)$ de la vorticité est donnée par :

$$\Omega(r,\theta)\;=\;-\,\frac{3}{2}\,R\,V_\infty\,\frac{\sin\theta}{r^2}.$$

1.7 Justifier à partir des équations de Navier-Stokes (3) que la pression p est indépendante de la variable ϕ.

Expliciter les deux équations satisfaites par la pression $p(r,\theta)$ en fonction de l'intensité $\Omega(r,\theta)$ de la vorticité.

Montrer alors que la pression est donnée par :

$$p(r,\theta)\;=\;-\,\frac{3}{2}\,\mu\,V_\infty\,R\,\frac{\cos\theta}{r^2}\;+\;p_\infty.$$

1.8 Rappeler la définition du tenseur taux de déformations $\underline{\underline{d}}$, ainsi que l'expression générale du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

Donner, dans le cas de l'écoulement étudié, l'expression de la densité surfacique d'effort $\underline{T}$ exercée par le fluide sur la sphère. On montrera qu'elle se réduit ici à :

$$\underline{T} = -p(R,\theta)\,\underline{e}_r + 2\,\mu\,d_{r\theta}(R,\theta)\,\underline{e}_\theta.$$

Calculer la résultante $\underline{R}$ de cette densité surfacique. On vérifiera que cet effort est donné par la formule suivante, appelée Formule de Stokes :

$$\underline{R} = 6\,\pi\,R\,\mu\,V_\infty\,\underline{e}_3.$$

On rappelle l'expression d'un élément de surface dS de la sphère de rayon R : $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, avec θ variant entre $[0,\pi]$ et ϕ variant entre $[0,\,2\,\pi]$ et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\iint \cos\theta\,\underline{e}_r\,dS = \frac{4}{3}\,\pi\,R^2\,\underline{e}_3, \quad \iint \sin\theta\,\underline{e}_\theta\,dS = -\frac{8}{3}\,\pi R^2\,\underline{e}_3.$$

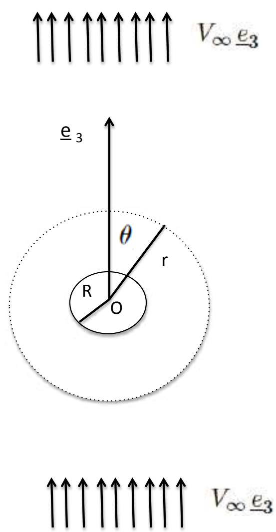


Figure 1: Ecoulement de fluide autour d'une sphère de rayon R .

Problème 2 : Déformation d'une couche élastique sur un plan incliné

On cherche à étudier le comportement d'une couche élastique sur un plan incliné. Cette couche occupe dans sa configuration de référence non déformée le domaine parallélélipèdique Ω_0 de longueur l_1, l_2 et h dans les directions respectives $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$. On désigne par α l'angle que fait la direction $\underline{e}_1$ avec l'horizontale et par $\underline{e}_z$ le vecteur vertical ascendant $\underline{e}_z = \cos\alpha\,\underline{e}_3 - \sin\alpha\,\underline{e}_1$, (Figure 2).

Le matériau constitutif de la couche est élastique linéaire, isotrope et homogène, de coefficients de Lamé $(\lambda,\,\mu)$, de module de Young E, de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ_0.

La structure est en équilibre sous l'action de son poids propre. Elle est parfaitement collée sur le plan incliné d'équation $x_3 = 0$ qui est immobile. Elle est en contact sur la surface $x_3 = h$ avec l'air qui est considéré comme un fluide parfait à la pression atmosphérique p_a.

Les dimensions l_1 et l_2 sont supposées très grandes devant la dimension h, de sorte que la structure peut être supposée infinie dans les deux directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et l'on ne s'intéresse pas aux conditions aux limites dans ces deux directions.

L'hypothèse des petites déformations est supposée valide.

2.1 Ecrire les équations satisfaites par les champs de déplacements $\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3)$, déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(x_1, x_2, x_3)$ et contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3)$ dans la pièce.

Donner les conditions aux limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = h$.

2.2 Rappeler l'équation de Lamé-Navier que doit nécessairement satisfaire le champ de déplacement $\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3)$ pour conduire à une solution du problème.

On recherche le champ de déplacement sous la forme $\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3) = \xi_1(x_3)\,\underline{e}_1 + \xi_3(x_3)\,\underline{e}_3$. Justifier cette forme de déplacement. Expliciter cette équation dans le cas présent.

En déduire les équations différentielles que doivent satisfaire les composantes $\xi_1(x_3)$ et $\xi_3(x_3)$ du déplacement.

Intégrer ces équations et montrer que les composantes du vecteur déplacement sont de la forme suivante :

$$\xi_1(x_3) = -\frac{\rho\, g\, \sin\alpha}{\mu}\,\frac{x_3^2}{2} + A\, x_3 + B, \qquad \xi_3(x_3) = \frac{\rho\, g\, \cos\alpha}{(\lambda + 2\,\mu)}\,\frac{x_3^2}{2} + C\, x_3 + D,$$

où A, B, C et D sont des constantes indéterminées à ce stade.

2.4 Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(x_1, x_2, x_3)$ et du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3)$ associé à ce champ de déplacement.

Achever la résolution du problème

2.5 Interpréter mécaniquement les déformations subies par la structure.

Quelle est la variation de volume subie par la pièce ?

Quelle(s) condition(s) doivent être satisfaites pour que les déformations puissent être considérées comme petites ?

Représenter la déformée de la pièce. Commenter.

2.6 Calculer la densité surfacique d'effort exercée par la couche élastique sur la paroi $x_3 = 0$.

On considère le critère de résistance de l'interface (entre la couche et la paroi $x_3 = 0$) suivant :

$$|\sigma_{13}| + \tan\phi\, \sigma_{33} = 0$$

où ϕ est appelé angle de frottement et est donné tel que $\phi < \pi\,/\,4$.

Quelle est la hauteur h_c critique de la couche au delà de laquelle l'interface rompt?

Discuter du résultat en fonction des valeurs de l'angle α et de l'angle de frottement $\phi < \pi\,/\,4$.

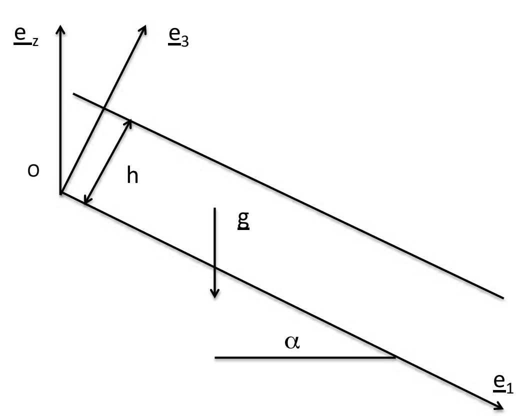
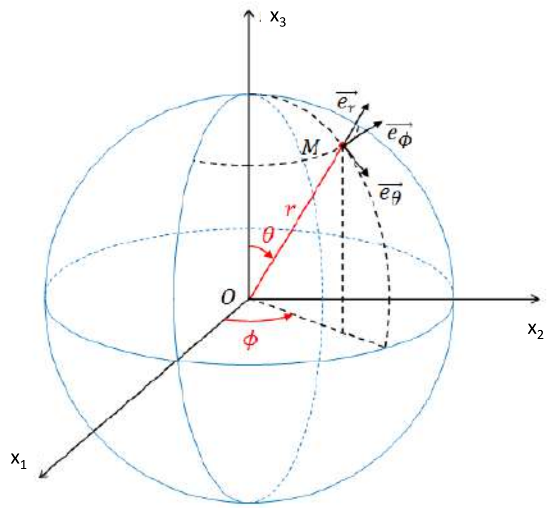


Figure 2: Couche élastique sur plan incliné

Formulaire en coordonnées sphériques



$$x_1 \,=\, r\,\sin\theta\,\cos\phi,\;\; x_2 \,=\, r\,\sin\theta\,\sin\phi,\;\; x_3 \,=\, r\,\cos\theta,$$

$$\underline{e}_r \,=\, \sin\theta\,\cos\phi\,\underline{e}_1 \,+\, \sin\theta\,\sin\phi\,\underline{e}_2 \,+\, \cos\theta\,\underline{e}_3,\;\; \underline{e}_\theta \,=\, \cos\theta\,\cos\phi\,\underline{e}_1 \,+\, \cos\theta\,\sin\phi\,\underline{e}_2 \,-\, \sin\theta\,\underline{e}_3,$$

$$\underline{e}_\phi \,=\, -\,\sin\Phi\,\underline{e}_1 \,+\, \cos\Phi\,\underline{e}_2,$$

Gradient d'une fonction scalaire :

$$\underline{grad}f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\underline{e}_\phi$$

Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta f(r,\theta,\phi) \,=\, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \,+\, \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} \,+\, \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \,+\, \frac{1}{r^2\tan\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} \,+\, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Divergence d'un vecteur :

$$\mathrm{d}iv\,\underline{u}(r,\theta,\phi) \,=\, \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial r}(\,r^2\sin\theta\,u_r\,) \,+\, \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\,r\,\sin\theta\,u_\theta\,) \,+\, \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \phi}(\,r\,u_\phi\,).$$

Rotationnel d'un vecteur :

$$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}(r,\theta,\phi) \,=\, \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\,r\sin\theta\,u_\phi\,) \,-\, \frac{\partial}{\partial\phi}(\,r\,u_\theta\,)\right)\underline{e}_r \,+\, \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\phi} \,-\, \frac{\partial}{\partial r}(\,r\sin\theta\,u_\phi\,)\right)\underline{e}_\theta$$

$$+\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\,r\,u_\theta\,) \,-\, \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\underline{e}_\phi.$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\phi)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\phi) \,=\, \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_r}{\partial\phi} - \dfrac{v_\phi}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \dfrac{v_\phi}{r\,\tan\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{v_\theta}{r\,\tan\theta} + \dfrac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$