Roulement d'une plaque posée sur des cylindres

Examen de 1ère session : lundi 15 mai 2017

Calculatrice et documents interdits. *Téléphones portables éteints et hors de la table.*
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (−2 points possibles).

Le barême proposé est indicatif.

Aucun point ne sera attribué à une réponse écrite au crayon papier (crayon = brouillon).

Lire le sujet en entier avant de répondre.

Cet énoncé contient 29 questions en tout, pour un total de 40 points (et 4½ points bonus).
Un formulaire succinct vous est donné page 13.

On souhaite étudier le mouvement d'une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable posée sur deux rouleaux cylindriques, d'axes parallèles, reposant sur un plan incliné.

Le système complet est constitué de 4 solides numérotés comme suit (voir Figure 1) :

- le plan (0) (qui joue le rôle de bâti) ;
- les cylindres de révolution (1) et (2), identiques, de masse m, homogènes, de rayon R, de hauteur H, qui roulent sans glisser sur le plan (0) ;
- la plaque rectangulaire (3), d'épaisseur négligeable, de masse m_3, homogène, de longueur L, de largeur ℓ, qui roule sans glisser sur les deux cylindres.

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{z_0}$ est normal au plan (0) et O est un point de ce plan. On notera C_1 (resp. C_2) le centre de masse du cylindre (1) (resp. (2)) et C_3 le centre de masse de la plaque. Le vecteur $\overrightarrow{x_i}$ est attaché au cylindre (i) de telle sorte que $(\mathrm{C}_i, \overrightarrow{x_i})$ coïncide avec son axe de révolution $(i = 1, 2)$.

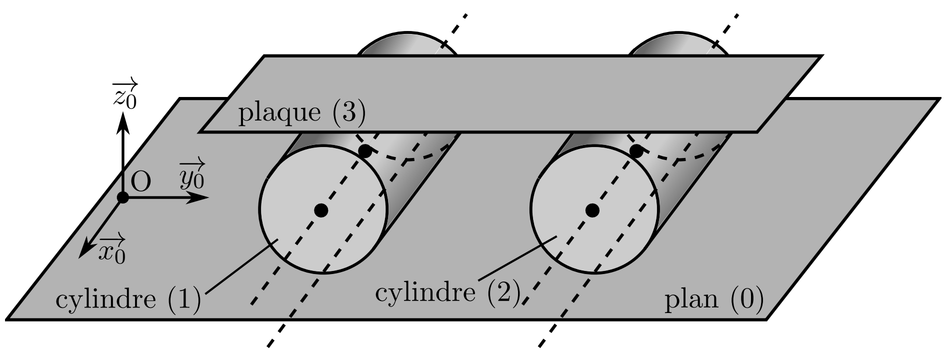


Figure 1 – Schéma de la plaque reposant sur les cylindres.

La condition de contact entre un cylindre et le plan peut s'écrire $\begin{cases} \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}_i} = R \\ \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_i} = 0 \end{cases}$. Lorsque cette double condition est satisfaite, la région de contact entre le cylindre et le plan est une génératrice (Δ_i).

La condition de contact entre la plaque et les deux cylindres est $\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{M}} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{M}} \cdot \overrightarrow{z_0} = R$, pour tout point matériel $\mathrm{M} \in (3)$.

Dans le but de décrire le mouvement des différents solides, on définit les référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au plan (0) et est supposé galiléen.
- $\mathcal{R}'_i = (\mathrm{C}_i, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{z_0})$ est un référentiel auxiliaire, introduit pour des raisons de commodité, avec $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_i}$ et dans lequel l'axe du cylindre (i) ainsi que la génératrice de contact (Δ_i) sont immobiles. Notez que $\mathcal{R}'_i$ n'est pas attaché à un solide particulier. L'angle $\phi_i(t) = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_i}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{v_i}})$ est mesuré autour de $\overrightarrow{z_0}$.
- $\mathcal{R}_i = (\mathrm{C}_i, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ est lié au cylindre $(i = 1, 2)$. L'angle $\theta_i(t) = (\widehat{\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{y_i}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_i}})$ est mesuré autour de $\overrightarrow{x_i}$.
- $\mathcal{R}_3 = (\mathrm{C}_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_0})$ est lié à la plaque (3). La rotation 3/0 est décrite par l'angle $\varphi(t) = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_3}})$, mesuré autour de $\overrightarrow{z_0}$.

Dans l'état initial $(t = 0)$, on a $\theta_1 = 0$, càd $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_0}$ sont alignés.

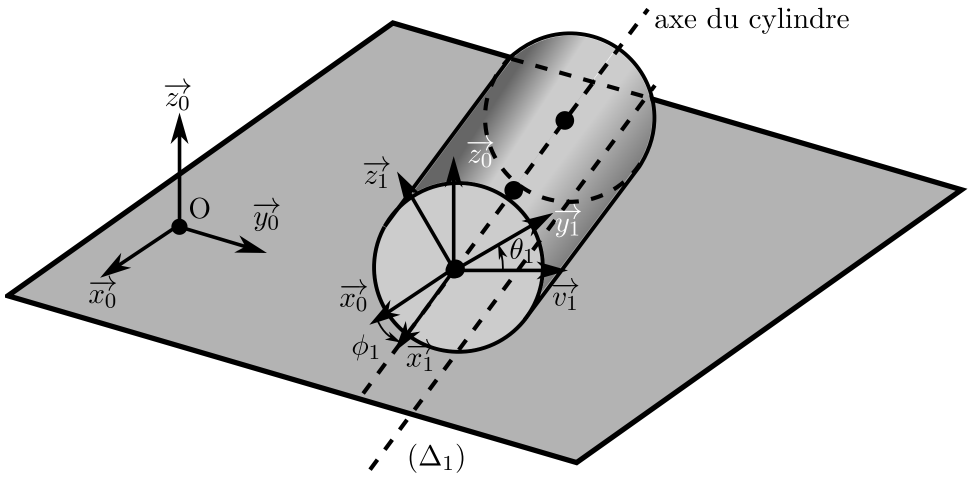


FIGURE 2 – Cylindre (1) sur le plan (0).

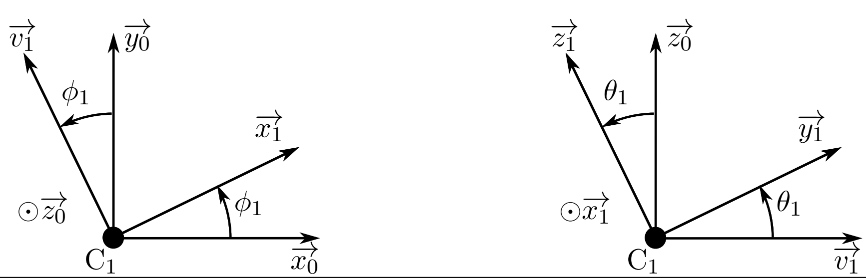
Cinématique (17 Pts)

Dans un premier temps, seuls le cylindre (1) et le plan (0) sont pris en compte (FIGURE 2). On supposera que le plan (0) est horizontal (l'attraction de la pesanteur n'interviendra que dans la partie Dynamique).

On va montrer dans cette partie que, les roulements étant sans glissement, le mouvement du système est nécessairement plan-sur-plan.

1. (a) (1 point) Dessiner les diagrammes de changement de base pour les angles ϕ_1 et θ_1.

Solution:



(b) (1 point) Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'_1)$ puis $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$.

Solution: D'après la loi de composition du vecteur vitesse instantanée de rotation :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'_1) = \dot{\theta}_1\vec{x_1}, \qquad \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\theta}_1\vec{x_1} + \dot{\phi}_1\vec{z_0}.$$

2. (1 point) Exprimer la condition de roulement sans glissement (RSG) de (1) sur (0).

Solution: La vitesse de glissement est définie comme la vitesse du mouvement relatif des deux solides en un point de la région de contact. La condition de roulement sans glissement impose une vitesse de glissement nulle :

$$\vec{V}(\mathrm{M} \in 1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}, \quad \forall \mathrm{M} \in (\Delta_1). \tag{1}$$

3. (2 points) Écrire une relation entre les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{M}_1 \in 1/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(\mathrm{M}_2 \in 1/\mathcal{R}_0)$. En prenant pour M_1 et M_2 deux points de la génératrice (Δ_1), utiliser la condition RSG pour montrer que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{x_1}$ sont colinéaires.

Solution: La loi de torseur $\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ pour le torseur cinématique s'écrit

$$\vec{V}(\mathrm{M}_2 \in 1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(\mathrm{M}_1 \in 1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}. \tag{2}$$

On a $\vec{V}(\mathrm{M}_1 \in 1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(\mathrm{M}_2 \in 1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$ d'après la condition de roulement sans glissement (1). La relation (2) produit :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \vec{0}$$

ce qui, comme $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ est suivant $\vec{x_1}$, signifie que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{x_1}$ sont colinéaires.

4. (a) (1 point) Utilisez les questions précédentes pour montrer que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$.

Solution: On peut poser $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = x\vec{x_1}$ avec $x \neq 0$ (les points M_1 et M_2 ne sont pas confondus).
Le produit vectoriel $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ conduit à

$$(\dot{\theta}_1\vec{x_1} + \dot{\phi}_1\vec{z_0}) \wedge (x\vec{x_1}) = x\dot{\phi}_1\vec{y_0} = \vec{0}.$$

On peut en conclure que $\dot{\phi}_1 = 0$ et donc que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\phi}_1\vec{z_0} = \vec{0}$.

(b) (½ point) En déduire la loi horaire de $\phi_1(t)$ en prenant en compte la condition initiale $\phi_1(0) = 0$.

Solution: L'angle ϕ_1 est une constante indépendante du temps d'après la question précédente. La condition initiale donne alors $\phi_1(t) = \phi_1(0) = 0$.

(c) (½ point) En déduire que $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{y_0}$ pour tout t.

Solution: Il suffit de regarder les diagrammes de changement de base en prenant $\phi_1 = 0$.

(d) (½ point) Donner l'expression simplifiée de $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$.

Solution: On a simplement $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\theta}_1\overrightarrow{x_0}$.

5. (1 point) Exprimer la vitesse du centre de masse du cylindre $\overrightarrow{V}(\mathrm{C}_1 \in 1/\mathcal{R}_0)$.

Solution: La relation de torseur entre K_1 et C_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(\mathrm{C}_1 \in 1/\mathcal{R}_0) &= \overrightarrow{V}(\mathrm{K}_1 \in 1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{K}_1\mathrm{C}_1} \\ &= \overrightarrow{0} + \dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} \wedge (R\overrightarrow{z_0}) = -R\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_0}.\end{aligned}$$

Dans la suite, on prend en compte la plaque et les deux cylindres dont les axes sont disposés parallèlement (suivant $\overrightarrow{x_0}$).

On admettra que les résultats obtenus pour le cylindre (1) dans les questions précédentes sont aussi valables pour le cylindre (2) et qu'en particulier $\phi_1(t) = \phi_2(t) \equiv 0$ et $\overrightarrow{V}(\mathrm{C}_i/\mathcal{R}_0) = -R\dot{\theta}_i\overrightarrow{y_0}$ $(i = 1, 2)$.

On note J_i le point de contact entre la plaque (3) et i (cf. FIGURE 3) et on suppose qu'à $t = 0$, on a $\varphi(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}_3}(0) = 2R\overrightarrow{z_0}$ et $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OC}_2}(0) = \frac{1}{4}L\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}_1}(0) = -\frac{1}{4}L\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0}\end{cases}$.

6. (1 point) En prenant en compte les conditions initiales, établir la loi horaire du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OC}_i}$.

Solution: Par intégration du vecteur vitesse entre les instants $t = 0$ et $t = t$, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_i}(t) - \overrightarrow{\mathrm{OC}_i}(0) = \int_0^t \overrightarrow{V}(\mathrm{C}_1 \in i/\mathcal{R}_0)\mathrm{d}t = -R\overrightarrow{y_0}\int_0^t \dot{\theta}_i(t')\mathrm{d}t' = -R\overrightarrow{y_0}(\theta_i(t) - \theta_i(0))$$

D'après les conditions initiales spécifiées ci-dessus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}_2}(t) &= -(R\theta_2(t) - \tfrac{1}{4}L)\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}_1}(t) &= -(R\theta_1(t) + \tfrac{1}{4}L)\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

7. (½ point) Exprimer le vecteur vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0)$.

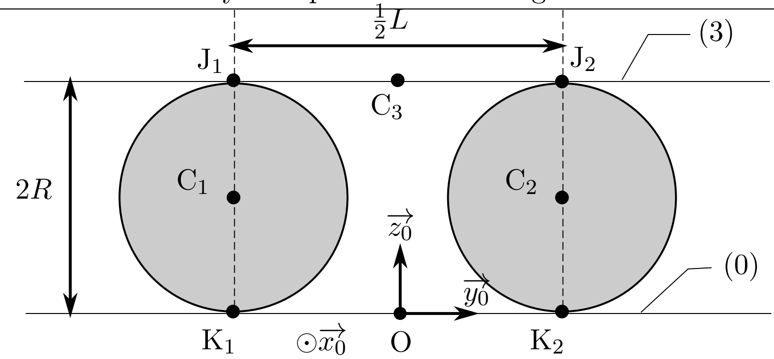


FIGURE 3 – Système complet dans l'état initial ($t = 0$).

Solution:

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0) = \dot{\varphi}\overrightarrow{z_0}$$

8. (1 point) Montrer que la condition de roulement sans glissement en J_i se traduit par $\overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0)$ pour $i = 1, 2$.

Solution: La RSG en J_i impose

$$\overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_3) = \overrightarrow{0}, \quad (i = 1, 2).$$

La loi de composition du vecteur vitesse donne :

$$\overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_3) + \overrightarrow{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0).$$

9. (1 point) Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0)$ en fonction de R et $\dot{\theta}_i$.

Solution: D'après la question précédente et la loi de torseur :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(J_i \in 3/\mathcal{R}_0) &= \overrightarrow{V}(J_i \in i/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(C_i \in i/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_i/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{C_iJ_i} \\ &= -R\dot{\theta}_i\overrightarrow{y_0} + \theta_i\overrightarrow{x_0} \wedge R\overrightarrow{z_0} = -R\dot{\theta}_i(\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{z_0}) = -2R\dot{\theta}_i\overrightarrow{y_0}.\end{aligned}$$

10. (a) (½ point) Écrire une relation entre $\overrightarrow{V}(J_1 \in 3/\mathcal{R}_0)$ et $\overrightarrow{V}(J_2 \in 3/\mathcal{R}_0)$ faisant intervenir le vecteur $\overrightarrow{J_1J_2}$.

Solution: La relation de transfert pour le vecteur vitesse permet d'écrire

$$\overrightarrow{V}(J_2 \in 3/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(J_1 \in 3/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(3/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{J_1J_2} \qquad (3)$$

(b) (1 point) En partant de la dernière relation et en utilisant les questions précédentes, établir une relation vectorielle contenant $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Solution: On utilise les résultats précédents dans (3) :

$$\begin{aligned}-2R\dot\theta_2\overrightarrow{y_0} &= -2R\dot\theta_1\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{\Omega}(3/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{\mathrm{J_1J_2}}\\ &= -2R\dot\theta_1\overrightarrow{y_0} + \dot\varphi\overrightarrow{z_0}\wedge(\tfrac{1}{2}L\overrightarrow{y_0}) = -2R\dot\theta_1\overrightarrow{y_0} - \tfrac{1}{2}L\dot\varphi\overrightarrow{x_0}\end{aligned}$$

La relation demandée peut donc s'écrire $2R(\dot\theta_2-\dot\theta_1)\overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}L\dot\varphi\overrightarrow{x_0}$.

(c) (1 point) En déduire que $\theta_1(t)=\theta_2(t)$ et que $\varphi(t)=0$ pour tout t.

Solution: Les vecteurs $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ sont orthogonaux ; on obtient par projection de la relation obtenue en (b) :

$$\begin{cases}2R(\dot\theta_1-\dot\theta_2)=0\\ \frac{1}{2}L\dot\varphi=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot\theta_1=\dot\theta_2\\ \dot\varphi=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1(t)=\theta_2(t)+\mathrm{Cte}\\ \varphi(t)=\mathrm{Cte}\end{cases}.$$

Les conditions initiales sur θ_1, θ_2 et φ permettent de fixer la valeur des constantes (toutes les deux nulles). On a donc bien $\theta_1(t)=\theta_2(t)$ et $\varphi(t)=0$.

Dans toute la suite, on notera simplement $\theta(t)=\theta_1(t)=\theta_2(t)$.

11. (1½ points) Exprimer $\overrightarrow{V}(\mathrm{C_3}\in 3/\mathcal{R}_0)$ en fonction de R, $\dot\theta$. En déduire $\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}$ en fonction de $\theta(t)$.

Solution: D'après la question précédente $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0)=\dot\varphi\overrightarrow{z_0}=\overrightarrow{0}$. On a alors

$$\overrightarrow{V}(\mathrm{C_3}\in 3/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(\mathrm{J_1}\in 3/\mathcal{R}_0) + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{\mathrm{J_1C_3}}}_{=\overrightarrow{0}} = -2R\dot\theta\overrightarrow{y_0}$$

Par intégration du vecteur vitesse entre les instants $t=0$ et $t=t$, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OC_3}}(0) - \int_0^t 2R\dot\theta\overrightarrow{y_0}\mathrm{d}t = 2R(\overrightarrow{z_0}-\theta(t)\overrightarrow{y_0}).$$

12. (1 point (bonus)) À l'aide de la décomposition $\overrightarrow{\mathrm{J}_i\mathrm{C_3}} = \overrightarrow{\mathrm{J}_i\mathrm{C}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OC}_i} + \overrightarrow{\mathrm{OC_3}}$, montrer que

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{J_1C_3}}(t) = (\frac{1}{4}L - R\theta(t))\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{\mathrm{J_2C_3}}(t) = -(\frac{1}{4}L + R\theta(t))\overrightarrow{y_0}\end{cases},\quad \forall t.$$

Solution:
On a d'une part $\overrightarrow{\mathrm{J}_i\mathrm{C}_i} = -R\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}(t) = 2R(\overrightarrow{z_0}-\theta\overrightarrow{y_0})$ (question précédente). D'autre part, on a établi question 6 :

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}(t) = -(R\theta(t)-\frac{1}{4}L)\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{\mathrm{OC_1}}(t) = -(R\theta(t)+\frac{1}{4}L)\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{z_0}\end{cases},$$

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{J_1C_3}}(t) = (\frac{1}{4}L - R\theta(t))\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{\mathrm{J_2C_3}}(t) = -(\frac{1}{4}L + R\theta(t))\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

ce qui donne bien les relations demandées.

13. ($1/2$ point (bonus)) Vérifier que l'on a $\overrightarrow{\mathrm{J_1J_2}} = \frac{1}{2}L$ pour tout t.
14. (1 point) Quel type de liaison vous évoque la nature du mouvement relatif de la plaque (3) par rapport au plan (0) ? Précisez l'axe de cette liaison.

Solution: On pense à une liaison glissière d'axe $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{y_0})$.
D'après l'étude cinématique, une liaison de type appui-plan ne convient pas car la plaque ne doit pas tourner autour de $\overrightarrow{z_0}$.

Cinétique (6 Pts)

Vous pouvez admettre pour répondre aux questions suivantes que le problème est plan-sur-plan, que $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_3} = \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J_1J_2}} = \frac{1}{2}L\overrightarrow{y_0}$ pour tout t.
On notera I le moment d'inertie des cylindres autour de leur axe $(\mathrm{C}_i, \overrightarrow{x_0})$.

15. ($1\frac{1}{2}$ points) Exprimer, en fonction de $\dot{\theta}$ et des données du problème, les torseurs cinétiques $\{\mathcal{C}(1/\mathcal{R}_0)\}_{\mathrm{C}_1}$ et $\{\mathcal{C}(2/\mathcal{R}_0)\}_{\mathrm{C}_2}$ des cylindres (1) et (2) dans leur mouvement par rapport au plan (0), en leur centre de masse.
Rappel : le moment d'inertie d'un cylindre homogène, de masse m, de rayon R, autour de son axe de révolution est $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Solution: Les éléments de réduction du torseur cinétique sont la quantité de mouvement (résultante cinétique) et le moment cinétique.

$$\{\mathcal{C}(1/0)\}_{\mathrm{C}_1} = \begin{Bmatrix} -mR\dot{\theta}\overrightarrow{y_0} \\ I\dot{\theta}\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} = \{\mathcal{C}(2/0)\}_{\mathrm{C}_2}$$

16. (1 point) Calculez l'énergie cinétique $T(1/0)$, $T(2/0)$ des cylindres (1) et (2) dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Solution: On forme le comoment des torseurs cinématique et cinétique :

$$T(1/0) = T(2/0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\overrightarrow{x_0} \\ -R\dot{\theta}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -mR\dot{\theta}\overrightarrow{y_0} \\ I\dot{\theta}\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2}_{\text{rotation}} = \tfrac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2.$$

17. (1 point) Justifiez par des arguments de symétrie que la matrice d'inertie $[J_3(\mathrm{C}_3)]$ de la plaque (3) en son centre de masse est diagonale dans la base $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$?

Solution: Les plans $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{z_0})$ et $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ constituent des plans de symétrie matérielle pour la plaque (3). On en déduit que les axes $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{x_0})$, $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{y_0})$ et $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{z_0})$ sont principaux d'inertie.

On posera $[J_3(\mathrm{C}_3)]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$ pour la suite.

18. (1 point) Justifiez que $C = A + B$.

19. (2 points (bonus)) Calculez directement A et B en fonction de m_3, L et ℓ. En déduire C.

Solution: La plaque étant homogène, la masse élémentaire $\mathrm{d}m$ est liée à la surface élémentaire par une règle de trois :

$$\mathrm{d}m = \frac{\text{masse de la plaque}}{\text{surface de la plaque}} \mathrm{d}S = \frac{m_3}{L \times \ell} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Par définition des moments d'inertie par rapport aux axes $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{x_0})$, $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{y_0})$ et $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{z_0})$, on a

$$A = \iint_{\text{plaque}} (y^2 + z^2) \mathrm{d}m = \frac{m_3}{L\ell} \underbrace{\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \mathrm{d}x}_{=\ell} \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2} y^2 \mathrm{d}y}_{=\frac{2}{3}\frac{L^3}{2^3}} = \frac{1}{3} m_3 \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$B = \iint_{\text{plaque}} (x^2 + z^2) \mathrm{d}m = \frac{m_3}{L\ell} \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{d}y}_{=L} \underbrace{\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x^2 \mathrm{d}x}_{=\frac{2}{3}\frac{\ell^3}{2^3}} = \frac{1}{3} m_3 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$C = A + B = \frac{1}{12} m_3 (L^2 + \ell^2)$$

20. (1 point) Exprimer, en fonction de $\dot\theta$ et des données du problème, le torseur cinétique $\{\mathcal{C}(3/\mathcal{R}_0)\}_{\mathrm{C}_3}$ de la plaque dans son mouvement par rapport au plan (0), au centre de masse.

Solution: Le mouvement de la plaque (3) dans $\mathcal{R}_0$ est une translation pure. On a donc $\overrightarrow{\sigma}(\mathrm{C}_3 \in 3/0) = \overrightarrow{0}$ et ainsi

$$\{\mathcal{C}(3/0)\}_{\mathrm{C}_3} = \begin{Bmatrix} -2m_3 R\dot\theta \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}$$

21. (½ point) Calculez $T(3/0)$, l'énergie cinétique de la plaque dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Solution: L'énergie cinétique provient exclusivement du mouvement du centre de masse dans le référentiel $\mathcal{R}_0$:

$$T(3/0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{p}(3/0)\cdot\overrightarrow{V}(\mathrm{C}_3 \in 3/0) = \frac{1}{2}m_3\overrightarrow{V}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)^2 = 2m_3R^2\dot{\theta}^2.$$

Dynamique (17 Pts)

On note α l'angle d'inclinaison du plan (0). L'accélération de la pesanteur s'écrit $\overrightarrow{g} = -g(-\sin\alpha\overrightarrow{y_0}+\cos\alpha\overrightarrow{z_0})$. L'état initial du système est celui de la FIGURE 4. Toutes les vitesses initiales sont nulles et en particulier $\dot{\theta}(0) = 0$.

Les actions mécaniques entre les cylindres (1), (2) et le plan (0) (resp. la plaque (3)) sont modélisées par des glisseurs de moment nul en K_1 et K_2 (resp. en J_1 et J_2) :

$$\{\mathcal{A}(0\to i)\}_{\mathrm{K}_i} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to i}}\\ \overrightarrow{0}\end{Bmatrix}, \quad \{\mathcal{A}(i\to 3)\}_{\mathrm{J}_i} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{i\to 3}}\\ \overrightarrow{0}\end{Bmatrix}.$$

On notera dans la suite $\overrightarrow{R_{0\to i}} = P_i\overrightarrow{x_0} + Q_i\overrightarrow{y_0} + R_i\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{R_{i\to 3}} = X_i\overrightarrow{x_0} + Y_i\overrightarrow{y_0} + Z_i\overrightarrow{z_0}$.

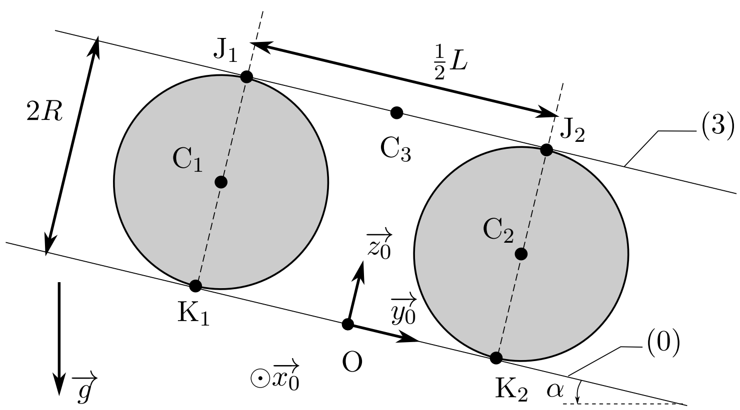


FIGURE 4 – Système complet dans l'état initial ($t = 0$).

22. (1 point) Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}_{\mathrm{C}_3}$.

Solution: Les éléments de réduction du torseur dynamique sont la quantité d'accélération (résultante dynamique) et le moment dynamique. Pour un mouvement de translation pure, le moment dynamique (tout comme le moment cinétique) est nul au centre de masse.

$$\{\mathcal{D}(3/0)\}_{\mathrm{C}_3} = \begin{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}(3/0)\big|_0\\ \overrightarrow{\delta}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-2m_3R\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{Bmatrix}$$

23. (a) (2 points) Après avoir clairement précisé le solide à isoler et dressé le bilan des actions mécaniques le concernant, appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique et exprimer le vecteur $\overrightarrow{R_{1\to 3}} + \overrightarrow{R_{2\to 3}}$ en fonction de m_3, $\ddot{\theta}$ et des données du problème.

> **Solution:** Le Théorème de la Résultante Dynamique appliqué au solide (3) permet d'écrire
> $$\overrightarrow{R_{1\to 3}} + \overrightarrow{R_{2\to 3}} + m_3\,\overrightarrow{g} = m_3\,\overrightarrow{\Gamma}(\mathrm{C}_3 \in 3/0) = -2m_3 R\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0}$$

(b) (1 point) Déduire de la relation précédente trois relations scalaires exprimant $X_1 + X_2$, $Y_1 + Y_2$ et $Z_1 + Z_2$ en fonction de m_3, g, α, θ (et ses dérivées par rapport au temps) et les données géométriques du problème.

> **Solution:** On projète la relation vectorielle précédente selon $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$:
> $$X_1 + X_2 = 0$$
> $$Y_1 + Y_2 = -2m_3 R\ddot{\theta} - m_3 g \sin\alpha$$
> $$Z_1 + Z_2 = m_3 g \cos\alpha$$

24. (a) (1 point) Appliquer le Théorème du Moment Dynamique à la plaque (3) dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ au point de votre choix. En déduire une relation vectorielle dans laquelle vous ne chercherez pas à calculer les produits vectoriels qui pourraient apparaître.

> **Solution:** Le moment de l'action de la pesanteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{pesanteur}\to 3}}$ est nul en C_3 puisque le point d'application du poids est confondu avec le centre de masse.
> Ainsi, le moment des actions mécaniques extérieures à (3) s'écrit
> $$\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 3}}(\mathrm{C}_3) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{2\to 3}}(\mathrm{C}_3) = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 3}}(\mathrm{J}_1)}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{R_{1\to 3}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{C}_3} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{2\to 3}}(\mathrm{J}_2)}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{R_{2\to 3}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{J}_2\mathrm{C}_3}}_{\overrightarrow{\mathrm{J}_2\mathrm{J}_1}+\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{C}_3}}.$$
> On a $\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{J}_2} = \frac{1}{2}L\overrightarrow{y_0}$ (voir Fig 4) et l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{C}_3}$ (**attention :** c'est une fonction du temps t) a été établie question 12. Il vient donc
> $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 3}}(\mathrm{C}_3) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{2\to 3}}(\mathrm{C}_3) &= (\overrightarrow{R_{1\to 3}} + \overrightarrow{R_{2\to 3}}) \wedge \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{C}_3}}_{(\frac{1}{4}L - R\theta)\overrightarrow{y_0}} - \overrightarrow{R_{2\to 3}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{J}_2}}_{=\frac{1}{2}L\overrightarrow{y_0}} \\ &= (\tfrac{1}{4}L - R\theta)(\overrightarrow{R_{1\to 3}} + \overrightarrow{R_{2\to 3}}) \wedge \overrightarrow{y_0} - (\tfrac{1}{2}L)\overrightarrow{R_{2\to 3}} \wedge \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$
> Le Théorème du Moment Dynamique appliqué à (3) donne $\overrightarrow{\mathcal{M}_{1\to 3}}(\mathrm{C}_3) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{2\to 3}}(\mathrm{C}_3) = \overrightarrow{0}$.

(b) (2 points) En déduire les expressions de X_1, X_2, Z_1 et Z_2.

Solution: Le calcul des produits vectoriels conduit à

$$(\tfrac{1}{4}L - R\theta)[-(Z_2+Z_1)\overrightarrow{x_0} + (X_2+X_1)\overrightarrow{z_0}] - \tfrac{1}{2}L[-Z_2\overrightarrow{x_0} + X_2\overrightarrow{z_0}] = \overrightarrow{0}$$

et donc

$$\begin{cases} -(\frac{1}{4}L - R\theta)(Z_2+Z_1) + \frac{1}{2}LZ_2 = 0 \\ (\frac{1}{4}L - R\theta)(X_2+X_1) - \frac{1}{2}LX_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $X_1 = X_2 = 0$ et $Z_2 = \frac{L-4R\theta}{2L} m_3 g \cos\alpha$.
On en tire aussi $Z_1 = \left(1 - \frac{L-4R\theta}{2L}\right) m_3 g\cos\alpha = \frac{L+4R\theta}{2L} m_3 g \cos\alpha$.
On remarque que lorsque θ diminue (mouvement vers la droite) Z_1 diminue aussi alors que Z_2 augmente.

25. (1½ points) Exprimer les torseurs dynamiques $\{\mathcal{D}(1/0)\}_{C_1}$ et $\{\mathcal{D}(2/0)\}_{C_2}$.

Solution: La quantité d'accélération est la dérivée temporelle de la quantité de mouvement :

$$m\overrightarrow{\Gamma}(C_1 \in 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{p}(1/0)}{dt}\right|_0 = -mR\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0}.$$

Au centre de masse (voir FORMULAIRE page 13), le moment dynamique s'obtient par dérivation temporelle du moment cinétique :

$$m\overrightarrow{\delta}(C_1 \in 1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(C_1 \in 1/0)}{dt}\right|_0 = I\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0}.$$

On a ainsi

$$\{\mathcal{D}(1/0)\}_{C_1} = \begin{Bmatrix} -mR\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0} \\ I\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} = \{\mathcal{D}(2/0)\}_{C_2}.$$

26. (a) (2 points) Appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique au cylindre (i) dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. En déduire une relation vectorielle donnant $\overrightarrow{R_{0\to i}} - \overrightarrow{R_{i\to 3}}$.

Solution: D'abord pour le cylindre (1) :

$$\overrightarrow{R_{0\to 1}} + \overrightarrow{R_{3\to 1}} + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{\Gamma}(C_1 \in 1/0) = -mR\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0}$$

D'après le principe des actions réciproques, $\overrightarrow{R_{3\to 1}} = -\overrightarrow{R_{1\to 3}} = -Y_1\overrightarrow{y_0} - Z_1\overrightarrow{z_0}$. Ainsi

$$\overrightarrow{R_{0\to 1}} - \overrightarrow{R_{1\to 3}} = -m(R\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{g}).$$

Pour le cylindre (2), le même raisonnement conduit à

$$\overrightarrow{R_{0\to 2}} - \overrightarrow{R_{2\to 3}} = -m(R\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{g}).$$

(b) (½ point) En déduire les équations scalaires donnant $P_i - X_i$, $Q_i - Y_i$ et $R_i - Z_i$ pour $i = 1, 2$.

Solution: Prenons par exemple le cylindre (1).
Par projection suivant $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$:

$$\begin{cases} P_1 - X_1 = 0 \\ Q_1 - Y_1 = -m(R\ddot{\theta} + g\sin\alpha) \\ R_1 - Z_1 = mg\cos\alpha \end{cases} \tag{4}$$

Pour le cylindre (2), le raisonnement est identique et on obtient les mêmes résultats en remplaçant 1 par 2.

27. (a) (2 points) Appliquer le Théorème du Moment Dynamique au cylindre (i) dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ au point C_i. En déduire une relation vectorielle (vous ne chercherez pas à calculer les produits vectoriels qui y figurent).

Solution: On a $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{pesanteur}\to 1}}(\mathrm{C}_1) = \overrightarrow{0}$.
Le Théorème du Moment Dynamique appliqué à (1) au point C_1 permet d'écrire

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{0\to 1}}(\mathrm{C}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{3\to 1}}(\mathrm{C}_1) = \overrightarrow{\delta}(\mathrm{C}_1 \in 1/0) = I\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0}$$

En utilisant la relation de transfert, on trouve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{0\to 1}}(\mathrm{C}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{3\to 1}}(\mathrm{C}_1) &= \overrightarrow{R_{0\to 1}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{K}_1\mathrm{C}_1}}_{=R\overrightarrow{z_0}} + \underbrace{\overrightarrow{R_{3\to 1}}}_{=-\overrightarrow{R_{1\to 3}}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{J}_1\mathrm{C}_1}}_{=-R\overrightarrow{z_0}} \\ &= (\overrightarrow{R_{0\to 1}} + \overrightarrow{R_{1\to 3}}) \wedge (R\overrightarrow{z_0}) = I\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0} \end{aligned}$$

(b) (1 point) En déduire les expressions (scalaires) pour $X_i + Q_i$, $Y_i + Q_i$ pour $i = 1, 2$.

Solution: On reprend la relation ci-dessus :

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta}\overrightarrow{x_0} &= R(\overrightarrow{R_{0\to 1}} + \overrightarrow{R_{1\to 3}}) \wedge \overrightarrow{z_0} \\ &= R\begin{pmatrix} X_1 + P_1 \\ Y_1 + Q_1 \\ Z_1 + R_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= R(Y_1 + Q_1)\overrightarrow{x_0} - R(X_1 + P_1)\overrightarrow{y_0} \end{aligned}$$

et après projection

$$Y_1 + Q_1 = \frac{I}{R}\ddot{\theta} \tag{5}$$

On obtient par ailleurs $X_1 + P_1 = 0$ ce qui n'apporte rien de nouveau puisque l'on savait déjà que $X_1 = P_1 = 0$.
Le même raisonnement donne pour le cylindre (2) conduit à

$$Y_2 + Q_2 = \frac{I}{R}\ddot{\theta} \quad \text{et} \quad X_2 + P_2 = 0.$$

28. (3 points) Trouver une équation du mouvement pour le système en combinant les résultats des questions précédentes.

Solution: D'après les résultats (4) et (5), on a

$$2Q_1 = -mR\ddot{\theta} - mg\sin\alpha + \frac{I}{R}\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = -\frac{1}{4}mR\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mg\sin\alpha$$

$$2Y_1 = mR\ddot{\theta} + mg\sin\alpha + \frac{I}{R}\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad Y_1 = \frac{3}{4}mR\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mg\sin\alpha$$

Le résultat se transpose immédiatement au deuxième cylindre et on a $Y_2 = Y_1$. En appliquant le PFD à la plaque, on avait obtenu (question 23(b)) $Y_1 + Y_2 = -2m_3R\ddot{\theta} - m_3 g\sin\alpha$. Il s'en suit que

$$2Y_1 = \frac{3}{2}mR\ddot{\theta} + mg\sin\alpha = -2m_3R\ddot{\theta} - m_3 g\sin\alpha$$

L'équation du mouvement recherchée s'écrit ainsi

$$\left(\frac{3}{2}m + 2m_3\right)R\ddot{\theta} + (m + m_3)g\sin\alpha = 0$$

ou encore

$$\ddot{\theta} = -\frac{m + m_3}{3m + 4m_3}\frac{2g}{R}\sin\alpha.$$

L'angle $\theta(t)$ est uniformément accéléré (sa loi horaire est parabolique).

29. (1 point (bonus)) Exprimer les efforts de contact Y_1, Y_2, Q_1 et Q_2.

Solution: Il suffit de remplacer $\ddot{\theta}$ dans les expressions obtenues précédemment. On trouve alors

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{2m + 3m_3}{3m + 4m_3}\frac{mg\sin\alpha}{2}$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{m_3}{3m + 4m_3}\frac{mg\sin\alpha}{2}$$

FORMULAIRE : Matrice d'inertie du solide S au point A dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[J_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \int_{\mathrm{S}}(y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{S}} xy\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{S}} xz\mathrm{d}m \\ -\int_{\mathrm{S}} xy\mathrm{d}m & \int_{\mathrm{S}}(x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{S}} yz\mathrm{d}m \\ -\int_{\mathrm{S}} xz\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{S}} yz\mathrm{d}m & \int_{\mathrm{S}}(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, avec $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Moment cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})[\vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R})]$$

où C est le centre de masse de S et $\mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})$ est l'opérateur d'inertie en A de S.

Moment dynamique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\overrightarrow{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})\right|_{\mathcal{R}}.$$