Aspects numériques des modèles à gradient d'endommagement

On considère les modèles à gradient d'endommagement présentés en cours :

$$\mathcal{E}(u,d) = \mathcal{E}_{el}(u,d) + \mathcal{E}_f(u,d) = \int_\Omega \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(u),d)\,\mathrm{dx} + \int_\Omega \frac{G_c}{\ell_0 c_w}\left(w(d) + \ell_0^2\|\nabla d\|^2\right)\mathrm{dx} \qquad (1)$$

avec une densité d'énergie élastique de la forme :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},d) = \left((1-d)^2 + \kappa_{res}\right)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

et les deux variantes AT1/AT2 de modèles pour l'énergie de fissuration :

$$w(d) = d \quad ; \quad c_w = \frac{8}{3} \qquad \text{(AT1)}$$

ou

$$w(d) = d^2 \quad ; \quad c_w = 2 \qquad \text{(AT2)}$$

On pourra trouver plus de détails concernant ces modèles dans l'article :
Marigo, J.-J., Maurini, C., Pham, K. (2016). An overview of the modelling of fracture by gradient damage models. Meccanica, 1–22.

1 Questions préliminaires

On se place ici dans le cas 1D avec $\kappa_{res} = 0$ i.e. avec $\psi(\varepsilon,d) = (1-d)^2 E\dfrac{\varepsilon^2}{2}$. De plus, on cherche des **solutions homogènes** i.e. avec $\nabla d = 0$. On rappelle que le critère d'évolution de l'endommagement devient dans ce cas :

$$f(d) = -\partial_d\psi(\varepsilon,d) - \frac{G_c}{\ell_0 c_w}w'(d) \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad \dot{d}f(d) = 0 \qquad (3)$$

On considère un endommagement initialement nul $d(t=0) = 0$ et un processus de chargement monotone en traction $\dot{\varepsilon} > 0$.

1. Déterminer à quelle condition sur la valeur de ε, l'endommagement commence à évoluer pour AT1 et AT2. On notera ε_c la valeur de la déformation correspondante.
2. En supposant que le critère d'endommagement reste saturé au cours de l'évolution ($f(d) = 0$), déterminer la relation entre d et ε pour les deux modèles.
3. La valeur de l'endommagement pour ces modèles doit être comprise entre 0 et 1. Que cela implique-t-il sur la valeur de ε ?
4. Déterminer $\sigma(\varepsilon)$ à l'aide du résultat précédent et décrire qualitativement son évolution en fonction de ε. Quelle est l'influence de ℓ_0 ?
5. Que vaut la densité d'énergie dissipée entre $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon \to \infty$? On considère dans la suite les valeurs matériaux suivantes :

$$E = 3\text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad G_c = 3000\text{ N/m}, \quad \ell_0 = 0.1\text{ m} \qquad (4)$$

2 Traction homogène

On considère une plaque en contrainte plane de dimensions $L \times W = 1 \times 0.1$ sur laquelle on impose un déplacement horizontal $U_x = U(t)$ à son extrémité droite et $U_x = 0$ à son extrémité gauche (on fixe un point de la plaque pour lequel $U_y = 0$).

1. Lancer le script pour les paramètres donnés ($U_{max} = 0.02$) pour les deux modèles AT1 et AT2. Commenter.
2. Relancer pour $\ell_0 = 0.01$. Commenter. Activer `uloading=True` pour vérifier le comportement à la décharge.

3 Traction : solution localisée

On reprend le même problème avec $\ell_0 = 0.1$, `unloading=False` et à présent `refinement_level=4`. Un niveau de raffinement k produit un maillage dont la taille des éléments est d'environ 2^{-k}.

1. Lancer le calcul pour AT1 et `Umax=3e-3`. Que se passe-t-il ?
2. Refaire le calcul en imposant, à présent, `damage_bcs=True`. Ce mot-clé impose un endommagement nul aux deux extrémités où l'on impose le déplacement. Que se passe-t-il ?
3. Que vaut la valeur de l'énergie dissipée ? Quelle serait la valeur théoriquement attendue pour une solution localisée (on rappelle que la plaque a une largeur $W = 0.1$) ? Noter la valeur de l'énergie dissipée pour `refinement_level=5,6,7` et commenter.
4. Refaire le même travail avec $\ell_0 = 0.02$ et `Umax=5e-3`. Comparer avec le cas précédent.
5. Enfin que se passe-t-il pour le modèle AT2 ?

4 Plaque entaillée

On reprend à présent `refinement_level=0`, `Umax=2.5e-3` et `damage_bcs=False`. On change également le type de problème : `problem="perforated"`. Il s'agit toujours d'une plaque en traction (mêmes conditions aux limites), de dimensions $L \times H = 1 \times 0.5$, entaillée par deux trous dont on pourra changer le rayon $R =$`hole_radius`, l'écartement horizontal (`hole_spacing`) et le rapport d'aspect (`aspect_ratio`).

1. On prend $R = 0.2$. Lancer le calcul pour AT2 et commenter. Que se passe-t-il si on raffine le maillage ?
2. Que dire lorsque $\ell_0 = 0.02$?
3. Changer à présent $R = 0.2$ et `aspect_ratio=10`. Que dire de l'influence de ℓ_0 dans ce cas par rapport au cas précédent ?
4. On considère à présent AT1 avec $\ell_0 = 0.02$, `Umax=1e-2`, `hole_radius=0.1`, `hole_spacing=0.07` et `aspect_ratio=10`. Augmenter la tolérance d'arrêt de l'algorithme de point fixe à `tol=1e-2` pour diminuer le temps de calcul. On pourra lancer le calcul pour `refinement_level=1` dans un premier temps et visualiser les résultats sous Paraview.

5 Fissuration en mode II

On considère à présent `problem="shear"` avec `hole_radius=0.5` et `aspect_ratio=100`. Le problème correspond au cisaillement d'un bloc entaillé, en appliquant un déplacement horizontal sur la face supérieure, la face inférieure étant encastrée. La préfissure est donc initialement en mode II.

Lancer le calcul pour $\ell_0 = 0.04$, `Nincr = 30`, `Umax=6e-3`.

Que constate-t-on sur le trajet de fissure ? En observant la façon dont se déforme le bloc, que dire de la fissure du haut ? Que devrait-il se passer en réalité ?