Cours d'aéroélasticité/Theorie aérodynamique de Theodorsen

OBJECTIF: Synthèse des travaux de T. Theodorsen[1] pour le calcul des forces aerodynamiques instationnaires d'un profil d'aile en mouvement harmonique de flexion/torsion dans un écoulement incompressible:

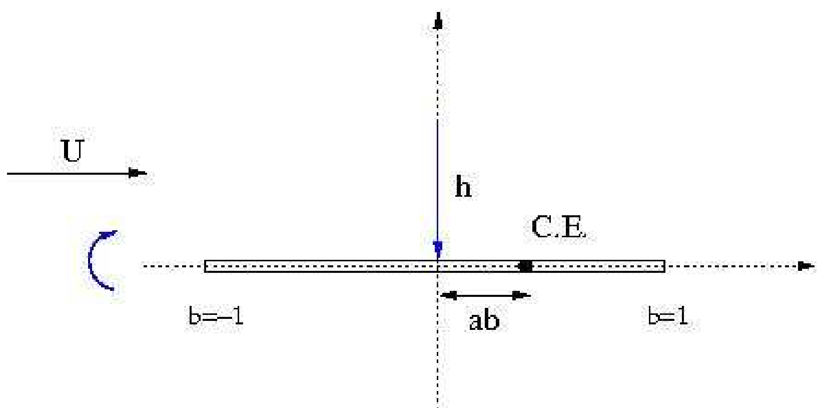
$$\begin{aligned} F^{aero} &= -\pi\rho b^2\left(\ddot{h}+U\dot{\alpha}-ab\ddot{\alpha}\right)-2\pi\rho UbC(k)\left(U\alpha+\dot{h}+b(1/2-a)\dot{\alpha}\right) \\ M^{aero}_{c.e} &= \pi\rho b^2\left[ab\ddot{h}+Ub\,(1/2-a)\,\dot{\alpha}-b^2\left(1/8+a^2\right)\ddot{\alpha}\right]+2\pi\rho Ub^2C(k)\left(U\alpha+\dot{h}+b(1/2-a)\dot{\alpha}\right) \end{aligned}$$

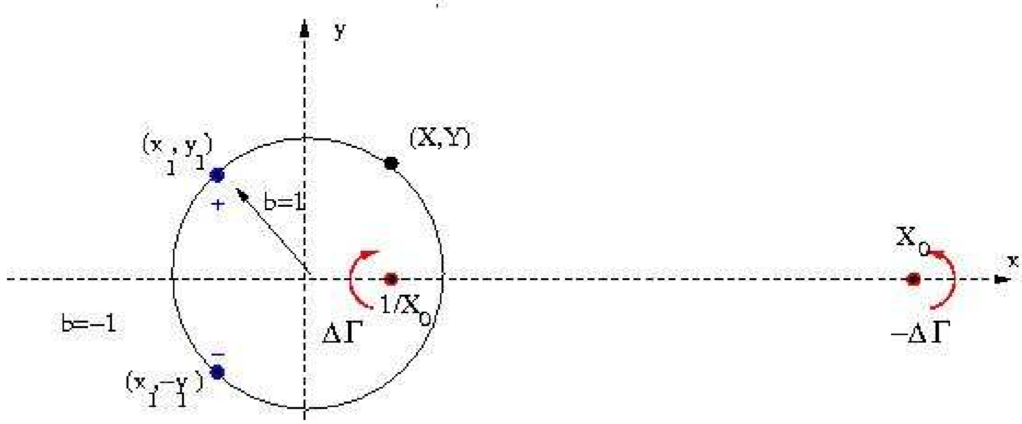
Référence: [1] T. Theodorsen, "General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter", NACA-TR-496, 1935

Hypothèses:

1. La surface portante est assimilée à une plaque plane
2. L'oscillation du profil s'effectue autour du centre élastique
3. Le cadre de l'étude relève de la theorie linéarisée des profils minces en incompressible

Principe de la Méthode: Application de la méthode des écoulements potentiels en modélisation l'écoulement instationnaire par la superposition de 2 écoulements élémentaires: $A = A^{nc} + A^{\Gamma}$





- *Ecoulement à circulation nulle* A^{nc} représenté par une distribultion de puits et sources. En pratique, elle satisfait la conditions de limites instantanée (déplacement du profil) mais fournit une circulation nulle autour du profil (non physique en instationnaire). Cet opérateur s'exprime en fonction des dérivées jusqu'a l'ordre 2 du champ de déplacement et ses coefficients peuvent etre interprétés comme des effets de masse virtuelle (ou apparente) et de raideur apparente. Mais il n'introduit pas de déphasage entre le lacher tourbillonnaire et le mouvement du profil.

- *Ecoulement à circulation non-nulle* A^{Γ} traduisant la conservation de la circulation totale. Il permet de respecter la condition de Kutta (pression finie au B.F) et traduit le fait qu'une modification de circulation du profil est compensée par un lacher tourbillonnaire de meme intensité mais en sens contraire qui est encuite convecté dans le sillage du profil). Cette approche permet d'introduite la notion de déphasage entre le lacher et le mouvement du profil.

Conditions aux limites

- Déplacement du profil: $z = h + \alpha(x - ab)$ avec ab = dist entre C.E et la demi-corde

- Vitesse du profil : $w_a(x,t) = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} + U\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\left[\dot{h} + \dot{\alpha}\,(x - ab)\right] - U\alpha$

1. Ecoulement non-portant

Considérant les principes de la transformation conforme de Joukowski, il est possible d'établir une correspondance entre la plaque et un cercle de rayon b=1 en distribuant sur le cercle en superposant une source d'intensité 2ϵ positionnée au point (x_1, y_1) et un puit d'intensité -2ϵ situé en $(x_1, -y_1)$. Le potentiel des vitesses ϕ correspondant s'écrit :

$$\phi = \frac{\epsilon}{2\pi}\ln\left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_1)^2 + (y+y_1)^2}\right] \qquad (1)$$

Le potentiel des vitesses α du a l'angle de torsion (i.e. $\phi = -U\alpha$) est donc donné par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= b\int_{-1}^{1}\phi dx \\ &= b\int_{-1}^{1}\frac{-U\alpha}{2\pi}\ln\left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_1)^2 + (y+y_1)^2}\right]dx_1 \\ &= U\alpha b\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Déslors, le potentiel relatif du mouvement en flexion/torsion du profil décrit par $z = h + \alpha(x - ab)$ s'obtient par superposition des potentiels relatifs à $\alpha,\ \dot{h}$ et $\dot{\alpha}$. Aprés intégrations, on a:

$$\begin{aligned} \phi_{nc} &= \phi_\alpha + \phi_{\dot{\alpha}} + \phi_{\dot{h}} \\ &= U\alpha b\sqrt{1-x^2} + \dot{h}b\sqrt{1-x^2} + \dot{\alpha}b^2\left(\frac{x}{2} - a\right)\sqrt{1-x^2} \qquad (1) \end{aligned}$$

La différence de pression s'établie alors par application du théorème de Bernoulli linéarisé:

$$\Delta p = -2\rho\left(\frac{\partial\phi_{nc}}{\partial t} + U\frac{\partial\phi_{nc}}{\partial x}\right)$$

L'expression de la résultante des forces (positive down) relative à l'écoulement non-portant (i.e a circulation nulle) est alors donnée par :

$$\begin{aligned} F_{nc} &= b\int_{-1}^{1}\Delta p dx \\ &= -\pi\rho b^2\left(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ab\ddot{\alpha}\right) \end{aligned}$$

D'une manière analogue, le calcul du moment de torsion (positif nose-up) au centre élastique donne:

$$\begin{aligned} M_{nc} &= b\int_{-1}^{1}\Delta p(x-a)bdx \\ &= \pi\rho b^2\left(U\dot{h} + ab\ddot{h} + U\dot{\alpha}^2 - b^2\left(\frac{1}{8}+a^2\right)\ddot{\alpha}\right) \end{aligned}$$

2. Ecoulement portant

Le sillage du profil est modélisé dans le plan transformé par une distribution de tourbillons élémentaires confinés $\Delta\Gamma = \gamma dx$ en l'intérieur du cercle (position $1/X_0$) compensés par des tourbillons de lacher d'intensité $-\Delta\Gamma$ situé en X_0

Posant $X_0 + 1/X_0 = 2x_0$ et $X = x$, le potentiel des vitesses relatif à un tourbillon élémentaire positionné en x_0 et d'intensité $\Delta\Gamma$ s'écrit aprés simplifications[1]:

$$\Delta\phi_\Gamma = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x_0^2-1}}{1-xx_0}\right)$$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $1 \leq x_0 \leq \infty$

La différence de pression s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \Delta p_\Gamma &= -2\rho\left(\frac{\partial\Delta\phi_\Gamma}{\partial t} + U\frac{\partial\Delta\phi_\Gamma}{\partial x}\right) \\ &= -\rho U\frac{\Delta\Gamma}{\pi}\frac{x_0+x}{\sqrt{1-x^2}x_0^2-1} \qquad (1) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{\Delta\phi_\gamma}{\partial t} = U\frac{\partial\phi}{\partial x_0}$.

L'expression de la force exercée par un tourbillon élémentaire situé en x_0 s'obtient par intégration de la différence de pression le long du profil

$$\Delta F_\Gamma = b\int_{-1}^{1}\Delta p_\Gamma dx = -\rho U b\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\Delta\Gamma \qquad (1)$$

Considérant maintenant une distribution infinie de tourbillons élémentaires, on peut établir une expression de force aérodynamique de l'écoulement portrant:

$$F_\Gamma = \int\Delta F_\Gamma = -\rho U b\int_1^\infty\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\gamma dx_0$$

On procède d'une manière analogue pour calculer le moment élementaire au centre élastique

$$\Delta M_\Gamma^{c.e} = b^2\int_{-1}^{1}\Delta p_\Gamma(x-a)dx$$

Puis le moment global est donné par:
$M_\Gamma^{c.e} = \int \Delta F_\Gamma = -\rho U b^2 \int_1^\infty \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_0+1}{x_0-1}} - \left(a+\frac{1}{2}\right)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right]\gamma dx \ , \quad 1 \leq x_0 \leq \infty$.

3. Détermination de l'intensité tourbillonnaire γ

> Les expressions précédentes des forces aérodynamiques A^Γ sont fonctions de l'intensité du tourbillon γ. Cette dernière est déterminée par application de la condition de Kutta au bord de fuite.

Pour cela, on écrit que la pression $p = -2\rho\left(\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial t} + U\frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x}\right)$ doit prendre des valeurs finies au bord de fuite (i.e. en $x=1$), où on a noté $\phi_{tot} = \phi_\Gamma + \phi_\alpha + \phi_{\dot{h}} + \phi_{\dot{\alpha}}$ l'expression du potentiel des vitesses total de l'écoulement.

Cette condition se traduit par la condition suivante :
$\left[\sqrt{1-x^2}\frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial x}\right]_{x=1} - b\left(U\alpha + \dot{h} + b\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2}-a\right)\right)$

Aprés calculs, on arrive aux expressions classiques[1]:

$$\begin{aligned} F_\Gamma &= -2\pi\rho U b C Q \\ M_\Gamma^{c.e} &= -2\pi\rho U b^2 Q\left[\frac{1}{2} - \left(a+\frac{1}{2}\right)C\right] \end{aligned}$$

où on a posé $Q = U\alpha + \dot{h} + b\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2}-a\right)$ et
$C = \left(\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\gamma dx_0\right)\left(\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x_0-1}}\gamma dx_0\right)^{-1}$

Considérons maintenant le fait que le profil est sujet à un mouvement harmonique du profil, on peut poser

> $\gamma = \gamma_0 e^{i(\omega t - k x_0 + \Phi)}$, avec $s = Ut, \ k = \omega b/V$ et $\omega t = ks/b$.

La fonction de Theodorsen $C(k)$ s'écrit alors:

$$C(k) = \left(\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-1}} e^{-ikx_0} dx_0\right)\left(\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x_0-1}} e^{-ikx_0} dx_0\right)^{-1}$$

Aprés calculs[1], on montre qu'on peut arriver a exprimer $C(k)$ à partir de fonctions de Hankel

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = F(k) + iG(k) \qquad (1)$$

nota: code maxima pour le calcul des intégrales ici