CALCULS ELEMENTAIRES :

$$\int_0^a \dots\, dx = \sum_{e=1}^{2} \int_{x_e}^{x_e+L_e} \dots\, dx = \sum_{e=1}^{2} \int_0^1 \dots\, L_e\, d\xi$$ (intégration sur élément de référence)

Quantités à exprimer dans les intégrales : déplacements, vitesses et accélérations ont la m̂ approximation ; aussi déjà écrit l'approximation de $\omega = \frac{dv}{dx}$. Il nous manque l'approximation des courbures ($\gamma = \frac{d^2v}{dx^2}$), c.a.d. notre "déformation" :

$$\gamma = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \simeq \frac{\partial^2 v^h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left([N_e]\{U_e\}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}[N_e]\right)}_{[B_e] \text{ opérateur de "déformation"}}\{U_e\} = [B_e]\{U_e\}$$

Ici, pour élément "coque 1D flexion" :

$$\underset{(4\times 1)}{[B_e]} = \left[\frac{d^2N_1}{dx^2}, \frac{d^2N_2}{dx^2}, \frac{d^2N_3}{dx^2}, \frac{d^2N_4}{dx^2}\right] = \frac{1}{L_e^2}\left[\frac{d^2N_1}{d\xi^2}, \frac{d^2N_2}{d\xi^2}, \frac{d^2N_3}{d\xi^2}, \frac{d^2N_4}{d\xi^2}\right]$$

CALCUL de l'INTEGRALE ELEMENTAIRE de la forme bilinéaire :

$$\int_0^1 D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} L_e\, d\xi = \int_0^1 D\left([B_e]\{U_e\}\right)\cdot\left([B_e]\{\hat{U}_e\}\right) L_e\, d\xi =$$

$$= \{\hat{U}_e\}^t \underbrace{\left(\int_0^1 D\, \underset{(4\times1)}{[B_e]^t}\, \underset{(1\times4)}{[B_e]}\, L_e\, d\xi\right)}_{[K_e]} \{U_e\}$$

MATRICE de RAIDEUR ELEM. $[K_e]$ (4×4 sym

CALCUL ELEMENTAIRE du terme d'inertie :

$$\int_0^1 \rho h\, \ddot{v}\, \hat{v}\, L_e\, d\xi = \int_0^1 \rho h \left([N_e]\{\ddot{U}_e\}\right)\cdot\left([N_e]\{\hat{U}_e\}\right) L_e\, d\xi =$$

$$= \{\hat{U}_e\}^t \underbrace{\left(\int_0^1 \rho h \underset{(4\times 1)}{[N_e]^t}\underset{(1\times 4)}{[N_e]}\, L_e\, d\xi\right)}_{[M_e]\ (4\times 4,\ \text{symétrique})} \{\ddot{U}_e\}$$

MATRICE de MASSE ELEM.

CALCUL ELEMENTAIRE de l'intégrale du travail des actions ext :

$$\int_0^1 f_y\, \hat{v}\, L_e\, d\xi =$$ si f_y est une fonction explicite de x et t c.a.d. un chargement "classique", alors :

$$\ldots = \int_0^1 f_y(x,t)\left([N_e]\{\hat{U}_e\}\right) L_e\, d\xi = \{\hat{U}_e\}^t \underbrace{\left(\int_0^1 f_y(x,t) \underset{(4\times 1)}{[N_e]^t}\, L_e\, d\xi\right)}_{\{F_e\}\ ;\ 4\times 1}$$

VECTEUR des FORCES NODALES ELEMENTAIRES

Dans ce cas, l'assemblage sur le maillage donne :

$$\{\hat{U}\}^t\left([M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\}\right) = \{\hat{U}\}^t\{F\},\ \forall\{\hat{U}\}$$ (CA à zéro

$\Longrightarrow$ système : $[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$ (classique en dynamique des stru

Mais ici on a un couplage aéroélastique dans les forces aérodynamiques : $f_y = -\alpha \dfrac{\partial v}{\partial x} - \beta \dfrac{\partial v}{\partial t}$

Donc l'intégrale se réécrit :

$$\int_0^1 f_y \hat{v} \, L_e \, d\xi = -\int_0^1 \Big(\alpha \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{[N_{e,x}]\{U_e\}} + \beta \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{[N_e]\{\dot{U}_e\}}\Big) \hat{v} \, L_e \, d\xi =$$

$$-\int_0^1 \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \hat{v} \, L_e \, d\xi - \int_0^1 \beta \frac{\partial v}{\partial t} \hat{v} \, L_e \, d\xi \cong$$

$$= -\int_0^1 \alpha \left([N_{e,x}]\{U_e\}\right)\left([N_e]\{\hat{U}_e\}\right) L_e \, d\xi - \int_0^1 \beta \left([N_e]\{\dot{U}_e\}\right)\left([N_e]\{\hat{U}_e\}\right) d\xi$$

$$= -\{\hat{U}_e\}^t \underbrace{\Big(\int_0^1 \alpha \underset{(4\times 1)}{[N_e]^t} \underset{(1\times 4)}{[N_{e,x}]} L_e \, d\xi\Big)}_{\text{matrice } 4\times 4 \text{ non symétrique}} \{U_e\} - \{\hat{U}_e\}^t \underbrace{\Big(\int_0^1 \beta \underset{(4\times 1)}{[N_e]^t} \underset{(1\times 4)}{[N_e]} L_e \, d\xi\Big)}_{\text{matrice } 4\times 4 \text{ symétrique}} \{\dot{U}_e\} =$$

$[A_{fe}]$ MATRICE d'INFLUENCE AEROELASTIQUE ELEM.

$[A_{de}]$ AMORTISSEMENT AERODYNAM. ELEMENTAIRE

$$= -\{\hat{U}_e\}^t \left([A_{fe}]\{U_e\} + [A_{de}]\{\dot{U}_e\}\right)$$

CONTRIBUTIONS ELEMENTAIRES : portent sur des vecteurs élémentaires $\{U_e\} = [v_i, w_i, v_j, w_j]$

c.a.d : $\{U_e\} = [v_1 \; w_1 \; v_2 \; w_2]^t$ dans élément (1)

$\{U_e\} = [v_2 \; w_2 \; v_3 \; w_3]^t$ " " (2)

Nous allons écrire le système d'équations en fonction de vecteurs globaux du maillage :

$$\underset{(6\times1)}{\{U\}} = [v_1 \; w_1 \; v_2 \; w_2 \; v_3 \; w_3]^t$$ ddl globaux des noeuds du maillage

$N_n = 3$; n ddl / noeud $= 2$ $\Longrightarrow$ Nddl total $= N_n \times 2 = 6$

$\Longrightarrow$ on construit des termes du type :

$$\{\hat{U}\}^t [K] \{U\} = \{\hat{U}\}^t \left([K^{(1)}] + [K^{(2)}] \right) \{U\}$$

avec :

$$\underset{(4\times4)}{[K_e]} = \begin{array}{c} v_i \\ w_i \\ v_j \\ w_j \end{array} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & \ddots & & \vdots \\ & \text{SYM} & \ddots & \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ w_2 \end{array} \text{ pour (1)}$$

$$\rightsquigarrow \underset{(6\times6)}{[K]} = \begin{array}{c} v_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ v_3 \\ w_3 \end{array} \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{} & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{K_e^{(1)}} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_e^{(2)}$$

La même opération d'assemblage s'applique à toutes les matrices ($[M_e]$, $[A_{f_e}]$ et $[A_{d_e}]$) $\Rightarrow$ $[M]$ $[A_f]$, $[A_d]$

$\hookrightarrow$ approximation EF de la formulation faible :

$$\{\hat{U}\}^t \left([M]\{\ddot{U}\} + [A_d]\{\dot{U}\} + [K^*]\{U\} \right) = \{0\}$$

$$\forall \{\hat{U}\} \text{ C.A. à zéro}$$

étant $[K^*] = [K] + [A_f]$

$\Rightarrow$ EQS dynamiques du panneau sous écoulement supersonique (éqs du syst. couplé aéroélastique) :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [A_d]\{\dot{U}\} + [K^*]\{U\} = \{0\}$$

équations dynamiques d'un système amorti sans forçante (comme : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$)