Examen de seconde session du Jeudi 3 mai 2018.

Durée de l'épreuve : 2h00.
Les documents de cours et calculatrices ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.
Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

Présentation du problème

On considère une structure parallépipédique placée dans le repère cartésien $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ la section transverse la structure est un rectangle Ω de largeur $2L$ et de hauteur L comme indiqué sur la figure 1.

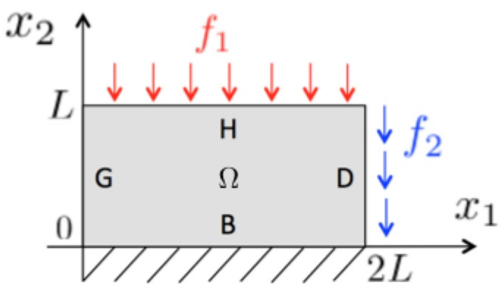


FIGURE 1 – Représentation schématique de la structure et de son chargement.

La dimension de la structure dans la direction $\underline{e}_3$ est très grande devant L de sorte que l'on peut se placer sous l'hypothèse de déformations planes dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, soit :

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}$$

les autres composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant nulles.

La structure est constituée d'un matériau dont la loi de comportement est élastique linéaire et peut donc être représentée par le tenseur de rigidité $\mathbb{A}$ tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Plus précisément le matériau est homogène et isotrope et son comportement est décrit par la loi de Hooke dont les coefficients de Lamé sont notés λ et μ.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1}$$

La pièce est soumise aux efforts volumiques de pesanteur $\underline{f}_v = -\rho g \underline{e}_2$. Elle est également soumise à deux densités surfaciques d'efforts d'intensités différentes : $\underline{f}_1 = -f_1 \underline{e}_2$ sur sa partie supérieure H et $\underline{f}_2 = -f_2 \underline{e}_2$ sur sa frontière latérale droite D. Sa frontière gauche G est libre d'efforts. Enfin la pièce est encastrée sur sa partie basse (frontière B).

Formulations du problème

On rappelle que dans ce contexte l'équilibre de la structure est traduit par l'équation suivante :

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) - \rho g \underline{e}_2 = \underline{0} \tag{2}$$

soit avec les hypothèses précitées :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} - \rho g = 0 \end{cases}$$

La loi de comportement donnée à l'équation (1) peut s'écrire sous forme matricielle à l'aide de la notation de Voigt :

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$$

où $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^t$ et $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^t$

1. Donner l'expression des termes de la matrice $[A]$ en fonction de λ et μ.
2. Donner les équations traduisant les conditions aux limites qui viennent compléter la formulation forte du problème constituée des équations (1) et (2).
3. Définir l'ensemble des champs cinématiquement admissibles à zéro : $\mathcal{U}_{ad}^0$
4. Montrer que la formulation faible du problème s'écrit sous la forme :

   Trouver $\underline{u}(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_{ad}^0$ tel que :

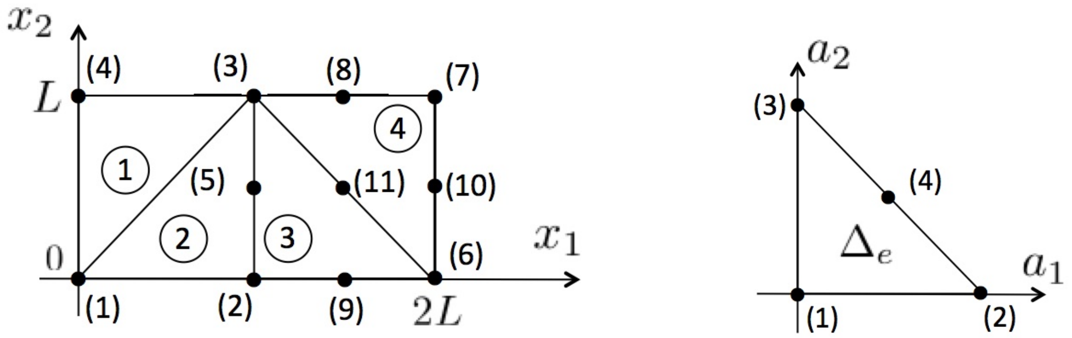
$$\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, d\Omega = -f_1 \int_0^{2L} v_2(x_1, L) dx_1 - f_2 \int_0^{L} v_2(2L, x_2) dx_2 - \rho g \int_0^{L} \int_0^{2L} v_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

Résolution par la méthode des éléments finis

Représentation paramétrique

Dans le plan de l'étude la structure est maillée à l'aide de quatre éléments représentés sur la figure 2(a). L'élément numéroté 1 est un triangle à trois nœuds (T3) tandis que la droite de la structure est maillée à l'aide de deux triangles à six noeuds (T6) numérotés 3 et 4. L'élément qui sera au cœur de notre étude est l'élément 2 qui est un triangle à quatre noeuds (T4), aussi appelé élément de transition.



(a) Maillage de la structure

(b) Élément de référence Δ_e

FIGURE 2 – Modélisation de la partie centrale étudiée autour de l'entaille.

Les matrices des coordonnées du maillage $[T]$, et de connectivité du maillage $[connec]$ valent :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \\ L & L \\ 0 & L \\ L & L/2 \\ 2L & 0 \\ 2L & L \\ 3L/2 & L \\ 3L/2 & 0 \\ 2L & L/2 \\ 3L/2 & L/2 \end{bmatrix} \qquad [connec] = \begin{bmatrix} (1) & (3) & (4) & & & \\ (1) & (2) & (3) & (5) & & \\ (3) & (2) & (6) & (5) & (9) & (11) \\ (6) & (7) & (3) & (11) & (10) & (8) \end{bmatrix}$$

L'élément de référence associé à l'élément 2 est le triangle à quatre nœuds noté Δ_e représenté à la figure 2(b).
Pour cet élément on propose les fonctions de forme suivantes :

$$\begin{cases} N_1 = 1 - a_1 - a_2 \\ N_2 = a_1 (1 - 2a_2) \\ N_3 = a_2 (1 - 2a_1) \\ N_4 = 4a_1 a_2 \end{cases}$$

5. Énoncer les propriétés que doivent vérifier les fonctions de forme pour assurer la conformité de l'élément et montrer que les fonctions N_i $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ vérifient bien ces propriétés.

6. Représenter ces fonctions de forme sur l'élément de référence (on choisira une vue en perspective).

7. Montrer que la représentation paramétrique de l'élément 2 s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = (a_1 + a_2)L \\ x_2 = a_2 L \end{cases}$$

8. Construire la matrice jacobienne $\left[J^{②}(a_1, a_2)\right]$ de l'élément ② et calculer le jacobien associé. Que constatez-vous ? Était-ce attendu ?
9. Calculer la matrice $\left[J^{②}(a_1, a_2)\right]^{-1}$ matrice inverse de la matrice jacobienne de l'élément ②

Représentation des champs locaux de déplacement, déformation et contrainte dans l'élément de barre

On choisit de travailler avec des éléments isoparamétriques de sorte que le déplacement en tout point des éléments réels ⓘ pourra être interpolé à l'aide des fonctions de formes et des déplacements des noeuds uniquement.

10. Donner la taille et la forme de la matrice d'interpolation $\left[N_e^{②}\right]$ telle que :

$$\{\underline{u}\} = \left[N_e^{②}\right]\left\{U^{②}\right\}$$

où le vecteur $\left\{U_e^{②}\right\}$ est le vecteur des déplacements des nœuds de ② dans l'espace réel.

11. Construire la matrice $[D_N]$ des dérivées des fonctions de forme telle que :

$$[D_N]_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial a_j}$$

On cherche maintenant à construire la matrice $\left[B_e^{②}\right]$ permettant de calculer les déformations dans l'élément à partir des déplacements aux nœuds de la façon suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \left[B_e^{②}\right]\left\{U^{②}\right\}$$

12. Donner la dimension de la matrice $\left[B_e^{②}\right]$
13. En utilisant la définition de $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$ donner l'expression des termes de la première ligne de la matrice $\left[B_e^{②}\right]$.

Contributions élémentaires à l'énergie de déformation et calcul du second membre élémentaire

14. Établir l'expression matricielle de $\mathcal{E}^{②}$, la contribution de l'élément ② au calcul de l'énergie de la structure définie par :

$$\mathcal{E}^{②} = \int_{②} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dV$$

On l'exprimera en fonction de $\left[Be^{\textcircled{2}}\right]$, $[A]$, et des restrictions des vecteurs de déplacement test et solution à l'élément ②, soit $\left\{V_e^{\textcircled{2}}\right\}$ et $\left\{U_e^{\textcircled{2}}\right\}$ respectivement.

15. En déduire la dimension de la matrice de rigidité de l'élément ② $\left[K_e^{\textcircled{2}}\right]$ telle que :

$$\mathcal{E}^{\textcircled{2}} = \left\{V_e^{\textcircled{2}}\right\}^t \left[Ke^{\textcircled{2}}\right] \left\{U_e^{\textcircled{2}}\right\}$$

et donner son expression sous forme d'une intégrale sur l'espace de référence en fonction de $\left[Be^{\textcircled{2}}\right]$, $[A]$ et L.

On s'intéresse désormais au calcul des seconds membres élémentaires $\left\{F_e^{\textcircled{i}}\right\}$.

On commence par construire $W_{vol}^{\textcircled{2}}$ la contribution élémentaire de l'élément ② au travail des efforts volumiques extérieurs :

$$W_{vol}^{\textcircled{2}} = -\int_{\textcircled{2}} \rho g \underline{e}_2 . \underline{v}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

16. Donner l'expression matricielle de ce travail en fonction de $\left[N_e^{\textcircled{2}}\right]$, $\left\{W_e^{\textcircled{2}}\right\}$, ρ, g et L.

17. En déduire que l'expression des forces nodales équivalentes $\left\{Fe^{\textcircled{2}}\right\}$ est :

$$\left\{Fe^{\textcircled{2}}\right\} = -\rho g L^2 \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \int_{\Delta_e} (1 - a_1 - a_2) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} a_1 \left(1 - 2a_2\right) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} a_2 \left(1 - 2a_1\right) da_1 da_2 \\ 0 \\ \int_{\Delta_e} 4 a_1 a_2 da_1 da_2 \end{array}\right\}$$

18. Combien de points de Gauss seraient nécessaires au minimum pour intégrer de manière exacte chacun des termes de $\left\{Fe^{\textcircled{2}}\right\}$ par la méthode de Gauss-Hammer ? Justifier.

Pour réaliser cette intégration on propose d'utiliser trois points de Gauss dont les coordonnées et poids sont donnés ci-dessous.

$$\begin{cases} a_1 g : 1/6,\ 2/3,\ 1/6 \\ a_2 g : 1/6,\ 1/6,\ 2/3 \\ w_g : 1/6,\ 1/6,\ 1/6 \end{cases}$$

19. Calculer les forces nodales puis les dessiner sur l'élément.

20. Quelle est la contribution élémentaire de l'élément ② au travail des efforts surfaciques extérieurs $W_{surf}^{\textcircled{2}}$?

Assemblage et résolution

Après la phase d'assemblage, on obtient classiquement le système suivant à résoudre :

$$[K]\,\{U\} = \{F\}\,,$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité globale issue de l'assemblage des matrices élémentaires $\left[K_e^{(i)}\right]$, et $\{F\}$ le second membre global issu de l'assemblage des seconds membres élémentaires $\left\{Fe^{(i)}\right\}$ où $i \in \{1, .., 4\}$

21. Quelle est la taille de $[K]$ et $\{F\}$ avant prise en compte des conditions aux limites en déplacement ?
22. Indiquer sur la grille en annexe (à rendre avec la copie) la position des termes nuls de $[K]$. (On pourra directement remplir la matrice sans préciser les domaines de chacun des nœuds).
23. Commentez la forme de la matrice. Quelles solutions apporter pour l'améliorer ? Cette matrice est-elle inversible ?
24. Donner la dimension du vecteur $\{U\}$ et identifier les ddls connus dans le vecteur $\{U\}$. On mettra la réponse sous la forme "$U_i = u_j^{(k)} = valeur$", où i, j k et *valeur* sont à identifier.

On souhaite prendre en compte les conditions aux limites par la méthode du terme diagonal unité et du partitionnement mises en œuvre simultanément.

25. Quelle est la taille de la matrice de rigidité réduite à utiliser pour résoudre le système ? Quelles sont les modifications apportées au second membre ?
26. Parmi les quatre propositions (a), (b), (c) ou (d), faites en Figure (3), laquelle est susceptible de représenter le champ de déformation solution tel qu'il est calculé aux points de Gauss. Justifier.

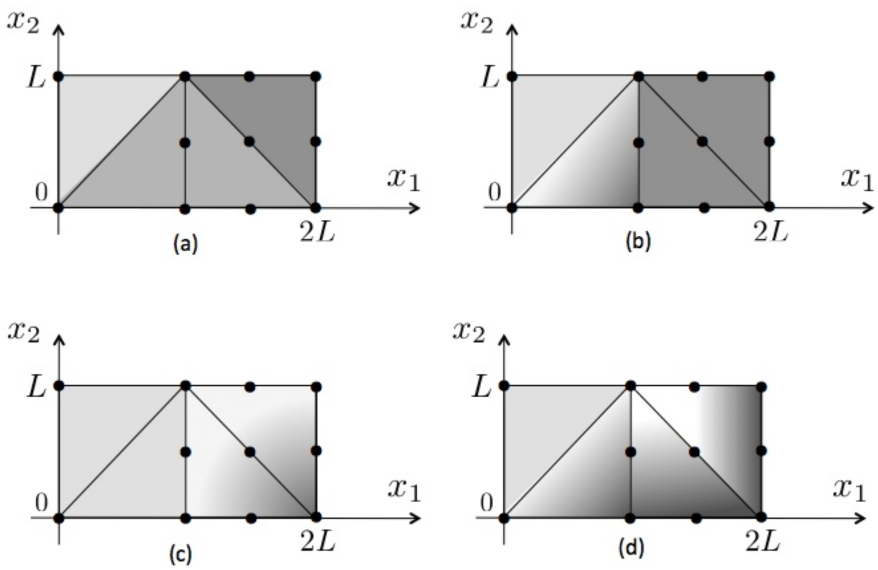


FIGURE 3 – Propositions pour la représentation du champ de déformation solution calculé aux points de Gauss.

Annexe

Nom :
Prénom :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2																									
3																									
4																									
5																									
6																									
7																									
8																									
9																									
10																									
11																									
12																									
13																									
14																									
15																									
16																									
17																									
18																									
19																									
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									