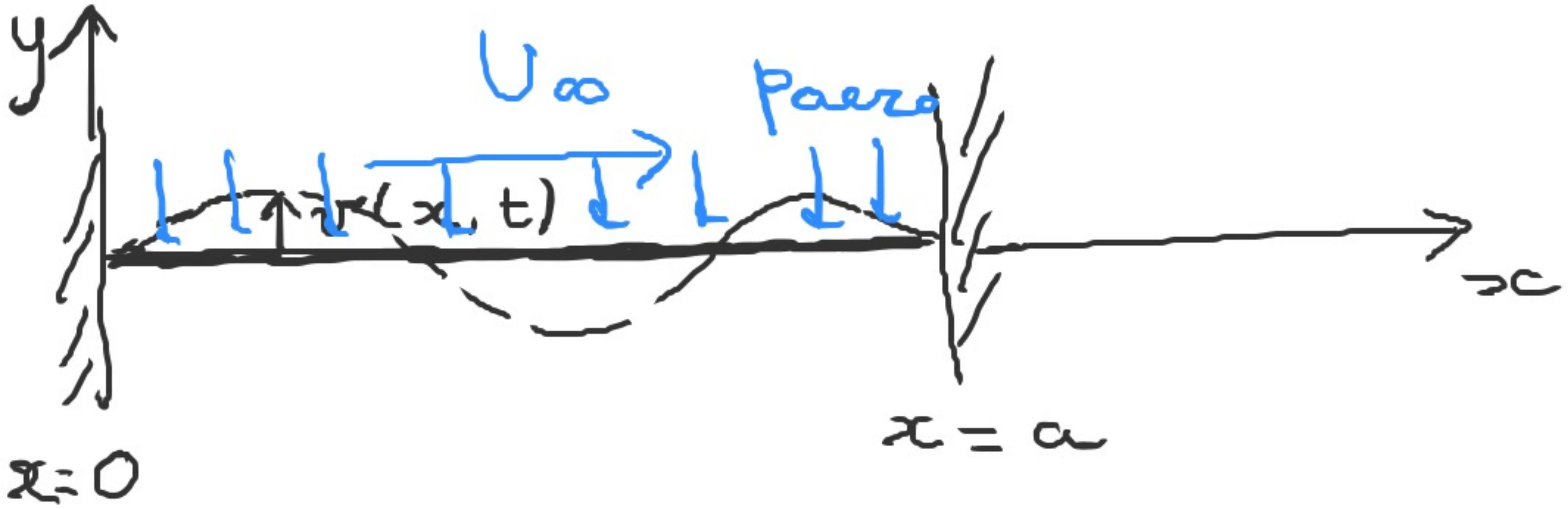


$v(x,t)$ = déplacement vertical (ou flèche)

MODELE 1D de panneau en flexion circulaire : équations?

Mêmes équations que pour une poutre en flexion :

équilibre vertical : $\dfrac{\partial T_y}{\partial x} + f_y = \rho h \dfrac{\partial^2 v}{dt^2}$ ($m_s = \rho h$, masse surf. du panneau)

équilibre rotation ∂z : $\dfrac{\partial M_f}{\partial x} + T_y = 0$

si on remplace, on obtient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} + \rho h \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f_y}$ équil. local

<u>Loi de comportement en flexion</u> :

panneau : $M_f = D\,\gamma$ où γ = courbure en z $= \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x}$

où $D = \dfrac{E}{1-\nu^2} \cdot \dfrac{h^3}{12} = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (module de rigidité à la flexion)

<u>Relation cinématique</u> : $\gamma = \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x}$ et hp panneau mince (h petit) : $\omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

On injectant la relation cinématique et la l.d.c. dans l'éq. d'équilibre, on obtient :

$$\boxed{D\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f_y}$$ éq. de ligne élastique

avec $f_y = F_{aero} = -\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ avec $\alpha = \dfrac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ et $\beta = \dfrac{\rho_\infty U_\infty}{(M_\infty^2 - 1)^{3/2}}$

Conditions limites :

en $x = 0$: $v(x=0, t) = 0$; $\frac{\partial v}{\partial x}(x=0,t) = 0$

en $x = a$: $v(x=a, t) = 0$; $\frac{\partial v}{\partial x}(x=a,t) = 0$

et les conditions initiales $v_0(x) = v(x,t=0)$ et $\dot{v}_0(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t=0)$

ESPACE CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ?

$\mathcal{U}_{ad} = \{w(x,t) \mid$ régulier ; $w(0,t) = 0$; $w(a,t) = 0$; $w_{,x}(0,t) = 0$; $w_{,x}(a,t) = 0\}$

et $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_{ad} = \{\hat{v}(x,t) \mid$ régulier ; $\hat{v}(0,t) = \hat{v}(a,t) = 0$; $\hat{v}_{,x}(0,t) = \hat{v}_{,x}(a,t) = 0\}$

(espace des variations admissibles)

FORMULATION FAIBLE de l'EQUILIBRE :

$$\int_0^a \left(D v^{(4)} + \rho h \ddot{v} - f_y\right)\hat{v}\,dx = 0, \quad \forall \hat{v} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{ad}$$

$$\underbrace{\int_0^a D v^{(4)} \hat{v}\, dx}_{\text{IPP 2 fois}} + \int_0^a \rho h \ddot{v}\, \hat{v}\, dx = \int_0^a f_y\, \hat{v}\, dx \,, \quad \forall \hat{v} \in \mathring{\mathcal{U}}_{ad}$$

$$\left[D v^{(3)} \cancelto{0}{\hat{v}}\right]_0^a - \int_0^a D v^{(3)} \hat{v}^{(1)}\, dx = -\left[\underbrace{D v^{(2)}}_{M_f} \cancelto{0}{\hat{v}^{(1)}}\right]_0^a + \int_0^a D v^{(2)} \hat{v}^{(2)}\, dx$$

CONDIT° LIMITES

COND. LIMITES

FORMULATION FAIBLE du PB du PANNEAU: (P) Trouver $v \in \mathcal{U}_{ad}$

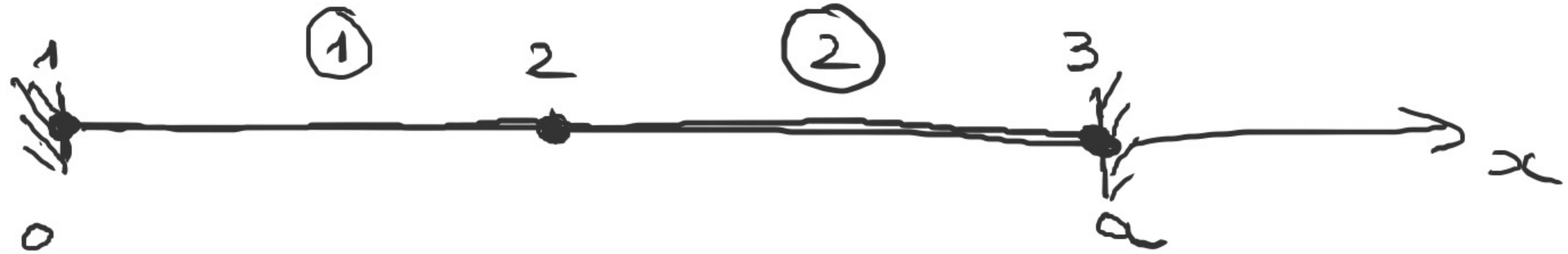
$$\underbrace{\int_0^a D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{d x^2}\, dx}_{\text{forme bilinéaire}} + \int_0^a \rho h \ddot{v}\, \hat{v}\, dx = \underbrace{\int_0^a f_y\, \hat{v}\, dx}_{\text{forme linéaire}}, \quad \forall \hat{v} \in \mathring{\mathcal{U}}_{ad}$$

forme linéaire mais ici f_y n'est pas une fct explicite de x et t, elle dépend de $v(x,t)$

RESOLUTION du PB par une APPROCHE ELEMENTS FINIS:

Maillage:

$L_e = \dfrac{a}{2}$



ETUDE ELEMENT "COQUE 1D en flexion"

2 ddl aux noeuds : v , $\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x}$
(flèche et rotation)

$\underset{(4\times 1)}{\{U_e\}} = [v_i, \omega_i, v_j, \omega_j]^t$ vecteur des ddl élémentaires

<u>Interpolation</u>/approximation de v dans l'élément :

$$v(x,t) \simeq v^h(x,t) = N_1(\xi)\, v_i + N_2(\xi)\, \omega_i + N_3(\xi)\, v_j + N_4(\xi)\, \omega_j$$

4 fcts de forme : N_1, N_2, N_3, N_4 associées aux 4 ddl élém.

Règles d'interpolation sur le déplacement : $N_1(\xi=0) = 1$; $N_2(\xi=0) = N_3(\xi=0) = N_4(\xi=0) = 0$

$N_3(\xi=1) = 1$; $N_1(\xi=1) = N_2(\xi=1) = N_4(\xi=1) = 0$

Mais aussi interpolation/approximation des rotations :

$$\omega(x,t) \simeq \frac{\partial v^h}{\partial x} = N_1' v_i + N_2' \omega_i + N_3' v_j + N_4' \omega_j$$

Règles d'interpolation sur les rotations : $\frac{dN_2}{dx}(\xi=0) = 1$; $\frac{d}{dx}(N_1, N_3, N_4)(\xi=0) = 0$

$\frac{dN_4}{dx}(\xi=1) = 1$; $\frac{d}{dx}(N_1, N_2, N_3)(\xi=1) = 0$

4 conditions sur chaque fonction $N_k(\xi)$ $(k = 1,2,3,4)$

Ces 4 conditions permettent d'écrire des polynomes de degré 3 en ξ (cela permet de calculer rotation : $\frac{d}{dx}$, courbures et moments : $\frac{d^2}{dx^2}$; et effort tranchant : $\frac{d^3}{dx^3}$)

Lien entre x et ξ : $\xi = \frac{x}{Le}$ pour un élément réel de longueur Le

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{Le}\frac{d}{d\xi} \quad \text{et} \quad dx = Le\, d\xi$$

EXEMPLE calcul de $N_1(\xi)$: $N_1(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3$

On veut déterminer les coeff. a, b, c et d :

$N_1(\xi=0) = 1 \Rightarrow a = 1$; $N_1(\xi=1) = 0 \Rightarrow a+b+c+d = 0$

puis conditions sur $\frac{dN_1}{dx} = \frac{1}{Le}(b + 2c\xi + 3d\xi^2)$

et on a $\frac{dN_1}{dx}(\xi=0) = \frac{b}{Le} = 0$; $\frac{dN_1}{dx}(\xi=1) = \frac{1}{Le}(b+2c+3d) = 0$

$\Rightarrow a = 1$; $b = 0$; $a + c + d = 0$; $2c + 3d = 0$

$$\Rightarrow \boxed{N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3}$$

(m̂ chose pour N_2, N_3 et N_4)

Approximation des déplacements sous forme matricielle:

$$v(x,t) \simeq v^h(x,t) = [N_e]\{U_e\} \text{ où } [N_e] = [N_1, N_2, N_3, N_4] \ (1\times4)$$

et de la même manière : $w(x,t) \simeq [N_e']\{U_e\}$

$$\text{où : } [N_e'] = [N_{1,x}, N_{2,x}, N_{3,x}, N_{4,x}] \ (1\times4)$$

CALCULS ELEMENTAIRES