UPMC Sorbonne-Université **Année universitaire 2018/2019**

Licence de Mécanique
UE 3A005 : Méthodes Numériques pour la Mécanique
Examen du 7 novembre 2018 (durée 2h)

Numéro d'anonymat :

Sans document, sans calculatrice ni équipement électronique.

Ex. 1 - Racines d'équations (rendre le sujet avec la copie), /6 points.

On souhaite résoudre sur $]0, 3[$ l'équation $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2x = 0$.

1. Pour faire une localisation grossière des racines, on a tracé sur la Figure 1 la fonction $f(x)$. On appelle r_1 et r_2 les racines, avec $r_1 < r_2$. En déduire un intervalle de recherche pour r_1 et un autre pour r_2. Mettre ces intervalles en évidence sur la Figure 1.

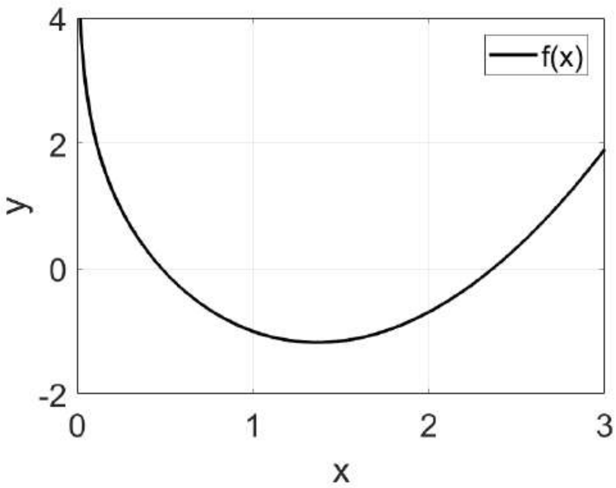

Figure 1

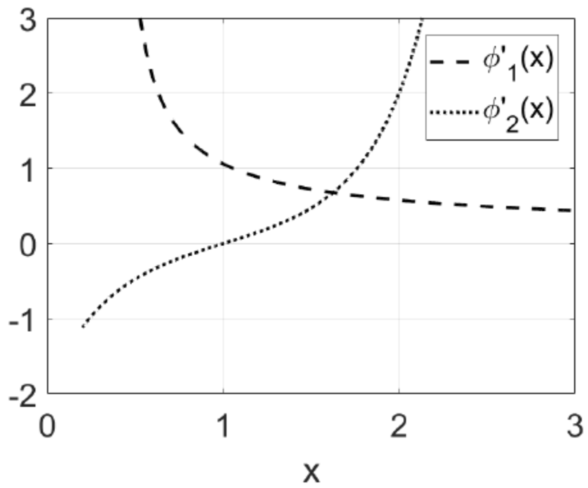

Figure 2

2. Méthode du point fixe. On introduit deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définies par :

$$\phi_1(x) = \sqrt{\ln(x) + 2x} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(x) = e^{(x^2 - 2x)}$$

Montrer que la méthode du point fixe appliquée à ϕ_1, si elle converge, permet de trouver une racine de $f(x)$. Même question pour ϕ_2. En utilisant la Figure 2, laquelle des fonctions ϕ_1 ou ϕ_2 permet de converger vers r_1 ? Vers r_2 ? Justifier les réponses.

3. Sur la Figure 3, construire, avec 2 couleurs différentes, les 3 premières itérations de la méthode du point fixe x_0, x_1, x_2, x_3 utilisant ϕ_1 d'une part et X_0, X_1, X_2, X_3 utilisant ϕ_2 d'autre part, avec la même condition initiale $x_0 = X_0 = 1$.

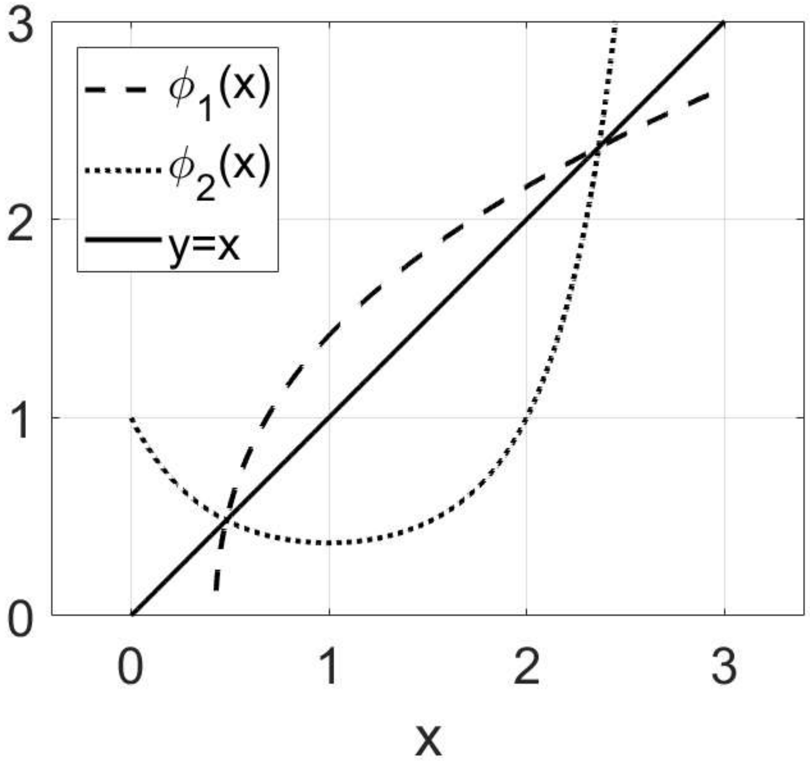

Figure 3

4. Relaxation : La Figure 4 montre les résultats de calculs permettant de déterminer la valeur optimale du paramètre θ pour la méthode de point fixe relaxée : $\phi_\theta(x) = (1-\theta)x+\theta\phi_2(x)$. Plus spécifiquement on a tracé le nombre d'itérations k_ϵ nécessaires pour atteindre une précision ϵ, à partir d'une même condition initiale. Expliquer brièvement comment ces résultats ont été obtenus. Selon ces résultats, quelle est la valeur de θ_{opt} ?

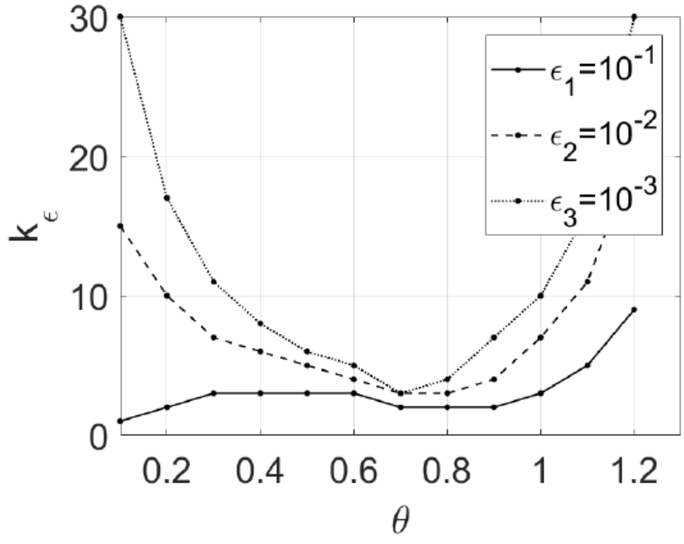

Figure 4

Ex. 2 - Algorithme de Thomas, /15 points.

On souhaite mettre en œuvre la factorisation $A = LU$ pour résoudre le système $A\,x = b$, où la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est tridiagonale.
Dans tout l'exercice, les cases vides correspondent à la valeur "0".
On prendra l'exemple de la matrice $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ suivante, et du vecteur $b \in \mathbb{R}^4$ donné ci-après :

$$A = \left[\begin{array}{r|r|r|r} 2 & -1 & & \\ \hline -1 & 2 & -1 & \\ \hline & -1 & 2 & -1 \\ \hline & & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad b = \left[\begin{array}{r} 3 \\ \hline -2 \\ \hline 2 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

La matrice A étant tridiagonale, elle est entrée sous la forme de 3 diagonales qui sont les vecteurs d, a, c représentés ci-dessous (la numérotation est telle que l'indice correspond au numéro de la ligne). Le problème est donc déterminé par la donnée des 4 vecteurs d, a, c (pour la matrice) et b (pour le second membre) de $\mathbb{R}^n$ (en pratique on complète le vecteur a en donnant $a_1 = 0$, et le vecteur c en donnant $c_n = 0$).

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} d_1 & c_1 & & \\ \hline a_2 & d_2 & c_2 & \\ \hline & a_3 & d_3 & c_3 \\ \hline & & a_4 & d_4 \end{array}\right] \quad b = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline b_3 \\ \hline b_4 \end{array}\right] \quad L = \left[\begin{array}{c|c|c|c} l_1 & & & \\ \hline m_2 & l_2 & & \\ \hline & m_3 & l_3 & \\ \hline & & m_4 & l_4 \end{array}\right] \quad U = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & u_1 & & \\ \hline & 1 & u_2 & \\ \hline & & 1 & u_3 \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

Partie A : Factorisation $A = LU$, avec U à diagonale unité.

Les matrices L et U sont recherchées sous la forme ci-dessus, où L est représentée par les 2 vecteurs l et m de $\mathbb{R}^n$, et U est représentée par un vecteur u de $\mathbb{R}^n$.

1. Détailler dans le cas $n = 4$ représenté ci-dessus, le calcul des composantes de l, m, u en fonction des données d, a, c. Pour cela, on effectuera le produit LU et on identifiera de façon ordonnée, ligne à ligne, les éléments du produit avec ceux de A.
2. Trouver les valeurs numériques de l, m, u (en les laissant sous formes de fractions) pour l'exemple numérique donné de la matrice A.
3. A partir du calcul détaillé en (1) pour $n = 4$, donner l'algorithme de factorisation pour n quelconque.
4. En déduire le nombre d'opérations élémentaires nécessaires (additions, multiplications, divisions) pour la réalisation de la factorisation sous cette forme, en fonction de n.
5. Pour une matrice de $\mathbb{R}^{n,n}$ pleine, le coût de la factorisation $A = LU$ est de l'ordre de $2n^3/3$ opérations élémentaires. En quoi l'exploitation de la forme tridiagonale est-elle intéressante ?

Partie B : Résolution du système $LUx = b$.

6. Détailler, dans le cas $n = 4$, le calcul des composantes du vecteur intermédiaire y, puis du vecteur solution x en fonction des données l, m, u et b (on suppose connus les l_i, m_i, u_i, et b_i, pour $i = 1$ à $n = 4$).
7. Trouver les valeurs numériques de y puis de x (sous formes de fractions) pour l'exemple donné de la matrice A et du vecteur b, en utilisant vos résultats de la Partie A, question (2).
8. A partir du calcul détaillé en (6) pour $n = 4$, donner les algorithmes de résolution de y puis de x pour n quelconque.
9. En déduire le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour la résolution de y puis de x en fonction de n.
10. Pour une matrice de $\mathbb{R}^{n,n}$ pleine, le coût de la résolution (une fois la factorisation effectuée) est de $2n^2$ opérations élémentaires. En quoi l'exploitation de la forme tridiagonale est-elle intéressante ?

Ex. 3 - Méthode itérative SSOR, /9 points.

Soit $A = D - E - F$, la décomposition fixe usuelle d'une matrice A.
On définit les deux splittings suivants, $A = M - N = P - Q$, où $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $P = \frac{1}{\omega}D - F$, avec ω un paramètre réel donné.
La méthode consiste en 2 étapes :

(i) $M\,y = N\,x^{(k)} + b$
(ii) $P\,x^{(k+1)} = Q\,y + b$

1. Exprimer les matrices N et Q en fonction de D, E, F et ω.
2. Expliquer brièvement (sans détailler l'algorithme de calcul de chaque composante), comment on calcule par cette méthode la solution $x^{(k+1)}$, à partir de la donnée de $x^{(k)}$.
3. Exprimer la matrice d'itération Ω en fonction des matrices M, N, P, Q et en déduire que : $\Omega = (D - \omega F)^{-1}[(1-\omega)D + \omega E](D - \omega E)^{-1}[(1-\omega)D + \omega F]$.
(Ce résultat sera utilisé pour traiter les questions 5-6-7.)
4. Donner la forme de la matrice $(1-\omega)D + \omega F$ et calculer son déterminant en fonction des composantes de la matrice A et de ω.
5. En utilisant $det(AB) = det(A)det(B)$ et en s'appuyant sur la démarche appliquée à la question précédente, montrer que $det(\Omega) = (1-\omega)^{2n}$.
6. On rappelle que le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant. En déduire que l'on peut minorer le rayon spectral de la matrice d'itération : $\rho(\Omega) \geq C$. Exprimer C en fonction de ω.
7. Montrer alors que si $\omega \geq 2$ ou $w \leq 0$, la méthode SSOR diverge.