Sorbonne Université **Année 2018-2019**

Master Sciences et Technologie - Mention Sciences pour l'Ingénieur

Traitement numérique du signal (4AN01)
1ère session - Mardi 19 Janvier 2019 - durée : 2h00
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Analyse et filtrage d'un signal d'électrocardiogramme (ECG)

Un électrocardiogramme est un outil d'analyse de l'activité cardiaque . Il permet, grâce à la mesure de l'activité électrique du cœur, de remonter aux mouvements des muscles du cœur. Pour faire un ECG, le médecin dispose des électrodes sur la peau du patient. Ces électrodes sont reliées à un électrocardioscope, appareil en charge de la conversion des signaux analogiques en signaux numériques et de leur traitement.

La figure 1 présente un ECG[1]: il s'agit de l'activité électrique en fonction du temps. On note $s(t)$ ce signal. Dans ce problème, on souhaite analyser ce signal $s(t)$ et proposer des solutions pour réaliser son filtrage.

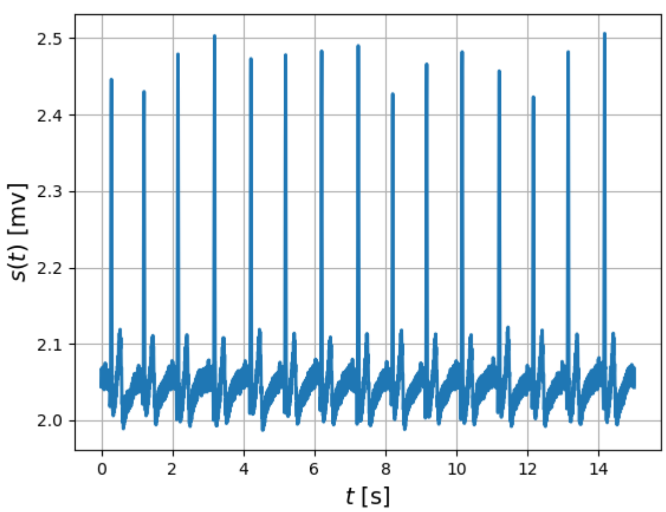

Figure 1: Électrocardiogramme

[1]données obtenues sur https://github.com/PIA-Group/BioSPPy

1 Analyse du signal continu et échantillonnage

1. La figure 2 donne le spectre (en dB) de l'ECG présenté figure 1. On considère que l'appareil de mesure est fiable jusqu'à environ -40dB et qu'en dessous de ce seuil le signal n'est constitué que de bruit. Dans quelle bande de fréquences se situe le signal utile de cet ECG ?

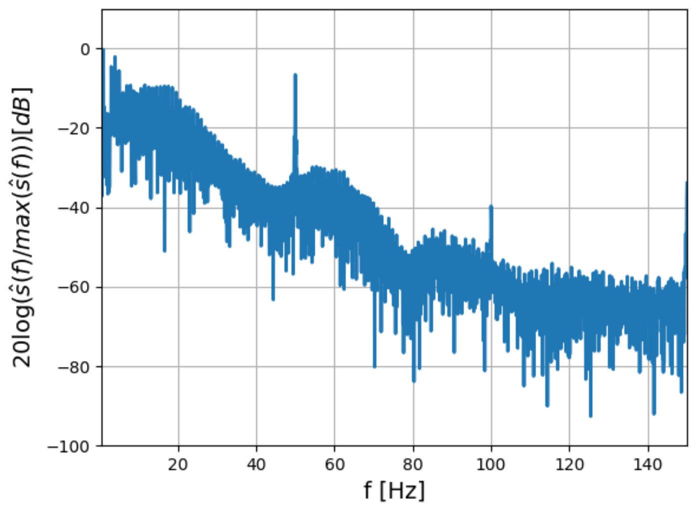

Figure 2: Spectre de l'électrocardiogramme

2. Quelle fréquence d'échantillonnage minimale peut-on choisir ?
3. Quelle opération faut-il appliquer avant d'échantillonner le signal à la fréquence d'échantillonnage trouvée précédemment ?
4. A partir de la figure 1, donner une valeur approchée de la fréquence de battements du cœur, exprimée en battements par minutes, puis en Hz.

2 Suppression de la bande 0-10Hz

Dans cette partie et la suivante, on suppose que le signal est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz. D'un point de vue médical, la bande utile du spectre ne commence qu'à partir de 10Hz. En dessous, de cette fréquence, le signal est dû au mouvement du patient qu'il faut filtrer avant analyse. C'est le but de cette partie : on choisit de faire un filtre avec la réponse en fréquences idéale $H_1(e^{j2\pi f T_e})$ représentée sur la figure 3.

5. Préciser la nature du filtre, et préciser la valeur numérique de sa fréquence de coupure f_{c1}. Que vaut la fréquence f_{c2} ?
6. Calculer la TFSD inverse de $H_1(e^{j2\pi f T_e})$, notée $h_1[n]$. Que représente $h_1[n]$?
7. Justifier si le filtre 1 ainsi obtenu est de type RIF ou RII.

Figure 3: Réponse en fréquence idéale souhaitée pour le filtre 1

8. On pose maintenant $h_2[n] = h_1[n]w_T[n]$, avec

$$w_T[n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{L} & \text{si } -L/2 \leq n < 0, \\ 1 - \frac{2n}{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L/2 - 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

   où $N \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Tracer $w_T[n]$ pour $L = 8$.
   (b) Le filtre 2, de réponse impulsionnelle $h_2[n]$, est-il RIF ou RII ? Justifier.
   (c) Sachant que $w_T[n] = \frac{2}{L} w_R[n] * w_R[n]$ (où $*$ est le produit de convolution), exprimer $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ en fonction de $W_R(e^{j2\pi fT_e})$.
   (d) Sachant que $W_R(e^{j2\pi fT_e}) = \frac{\sin(\pi f/f_e L/2)}{\sin(\pi f/f_e)} e^{j2\pi fT_e}$, donner l'expression de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$.
   (e) Préciser la valeur de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$ en $f = 0$Hz et les les positions en fréquence des zéros de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$.
   (f) Tracer l'allure de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ pour $f \in [-f_e, f_e]$ et avec $L = 8$.

9. Exprimer $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ en fonction de $H_1(e^{j2\pi fT_e})$ et $W_T(e^{j2\pi fT_e})$. Représenter alors l'allure de $|H_2(e^{j2\pi fT_e})|$.

10. On définit maintenant un 3ème filtre de réponse impulsionnelle $h_3[n] = h_2[n - \frac{L-1}{2}]$. Quel est l'intérêt de ce 3ème filtre ? Expliquer.

11. Justifier si le filtre 3 est de type RIF ou RII, causal ou non causal.

3 Filtrage du 50Hz

Sur le spectre 2 on constate un pic à $f_p = 50$Hz. Ce pic ne correspond pas à une information pertinente de l'ECG mais à un bruit parasite dû à la tension d'alimentation de l'électrocardioscope (en France, le courant alternatif domestique avec lequel les appareils sont alimentés est à 50Hz). On souhaite réaliser un filtre pour éliminer cette composante. La fonction de transfert en z du filtre choisi est :

$$H_4(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}.$$

avec

$$\begin{cases} z_1 = e^{j\theta_1} \\ z_2 = e^{-j\theta_1} \\ p_1 = 0.9e^{j\theta_1} \\ p_2 = 0.9e^{-j\theta_1} \end{cases}$$

12. Ce filtre est-il stable ? Justifier.

13. Comment choisir la valeur de θ_1 pour éliminer la fréquence parasite $f_p = 50\text{Hz}$?

14. Positionner sur un graphique représentant le plan complexe la position des zéros et des pôles (on prendra en compte les résultats obtenus aux questions précédentes).

15. Tracer qualitativement la module de la réponse en fréquences pour des fréquences f comprises entre 0 et f_e.

16. Quelle est l'équation de récurrence du filtre ?

17. Pour pouvoir implémenter le filtre grâce à son équation de récurrence, il faut que les coefficients de l'équation récurrente soient réels. Est-ce le cas pour ce filtre ?

4 Suppression des harmoniques

Pour terminer, on souhaite supprimer du signal ECG tout le contenu fréquentiel présent au delà de $f = 100\text{Hz}$, non utile pour l'analyse de certaines pathologies cardiaques.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser ?

2. Avant l'utilisation de systèmes numériques, un tel filtrage était effectué de manière analogique à l'aide du filtre de fonction de transfert $H_a(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est donnée par
$$h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u(t).$$
On souhaite synthétiser un filtre numérique, de fonction de transfert $H_5(z)$, réalisant la même opération par équivalence à la réponse impulsionnelle.
   (a) Déterminer l'expression de la réponse impulsionnelle $h_5[n]$ de ce 5ème filtre numérique.
   (b) Représenter, sur un même graphique, $h(t)$ et $h_5[n]$ (on prendra ici $K = 1$).
   (c) Déterminer la fonction de transfert $H_5(z)$ du filtre ainsi obtenu.

3. Donner l'équation de récurrence du filtre.

4. Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir $|H_5(e^{j2\pi f T_e})| = 1$ en $f = 0$.

5. Exprimer la valeur de $|H_5(e^{j2\pi f T_e})|$ en $f = f_e/2$ en fonction de T_e et τ. Si on admet que $T_e = \frac{\tau}{M}$, comment choisir M ?