Licence d'Ingénierie Mécanique - LA392
Examen du 4 Novembre 2014

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matriel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donnez la définition d'une équation aux dérivées partielles linéaire, ainsi qu'un exemple d'une équation aux dérivées partielles linéaire à l'ordre 2.
2. Déterminez l'équation de la courbe caractéristique associée à l'équation aux dérivées partielles : $au_x + bu_y = 0$ et qui passe par l'origine du système de coordonnées (x, y). Les coefficients a et b sont des constantes réelles et non-nulles.
3. Décrivez le comportement d'une singularité pour une problème hyperbolique, puis parabolique.
4. Donnez la solution générale de l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Donnez une interprétation de cette solution.
5. Donnez un exemple de problème de Cauchy que vous avez étudié en cours et pour laquelle la solution ne se propage pas à une vitesse finie.
6. Soit $u(x,t) \in C^{1,2}([0,2] \times [0,1])$ la solution du problème de Cauchy non-homogène suivante :

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -(t^2 + x^2), \quad (t,x) \in (0,2) \times (0,1) \\ u(0,x) &= f(x), \quad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{1}$$

Soit :

$$M = \max_{(t,x)\in[0,2]\times[0,1]} u(t,x) \tag{2}$$

Montrez que l'égalité $u(t_0, x_0) = M$ est impossible pour (t_0, x_0) un point intérieur au domaine, autrement dit : $(t_0, x_0) \in (0,2) \times (0,1)$.

Exercice 1

(a) Déterminez le type de l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0.$$

(b) Proposez un changement de variables $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ pour réduire l'équation à la forme standard et obtenir cette forme standard.
(c) Déterminez la solution générale $u(x,y)$.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes :

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 1, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ u(x,0) &= x^2, \quad -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) &= 1, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

(a) En utilisant le changement de fonction inconnue : $v(x,t) = u(x,t) - t^2/2$ trouvez le problème de Cauchy pour une équation homogène.
(b) Déterminez la solution du problème homogène obtenu et ensuite la solution $u(x,t)$ du problème initial.

Exercice 3
Résoudre l'équation de la chaleur avec dissipation constante :

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} + bt^2 u &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) &= \Phi(x), \end{aligned}$$

où b est un réel positif. On pourra poser $u(x,t) = e^{-bt^3/3} v(x,t)$.

Exercice 4
Partie I :
Donnez la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur 1D :

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Partie II :
Soit l'équation de la chaleur 2D définie sur une bande d'épaisseur 1 et de longuer infinie :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < y < 1, \ t > 0, \tag{4}$$

associée aux conditions limite homogènes en $y = 0$ et respectivement $y = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1,t), \ -\infty < x < \infty, \ t > 0. \tag{5}$$

Supposons de plus une distribution initiale de la température à variables séparées tel que :

$$u(x,y,0) = f(x)g(y). \tag{6}$$

i) On cherche une solution à variables séparées $u(x,y,t) = v(x,t)Y(y)$. Montrez qu'on aura deux équations à résoudre : une équation aux dérivées partielles pour l'équation en $v(x,t)$ et une équation aux dérivées ordinaire pour l'équation en $Y(y)$, qu'on spécifiera.
Donnez également les conditions limite associées à l'équation en $Y(y)$ et la condition initiale associée à l'équation en $v(x,t)$.

ii) Déterminez la solution de l'équation en y (fonctions propres $Y_n(y)$) ainsi que l'expression des valeurs propres λ_n, pour $n = 0, 1, 2...$

iii) Montrez qu'à partir de l'équation en $v(x,t)$ et en passant par la transformation $v(x,t) = e^{-\lambda_n t} V(x,t)$ l'on obtient le problème de Cauchy pour l'équation de la diffusion 1D :

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &V(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

En déduire la solution fondamentale $V(x,t)$ de ce problème de Cauchy.

iv) Sachant que la solution générale de l'équation (4) avec les conditions limite (5), par superposition, est :

$$u(x,y,t) = V(x,t) \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\pi y) e^{-\lambda_n t} \right)$$

Déterminez les coefficients A_0, A_n pour obtenir la solution $u(x,y,t)$ qui vérifie la condition initiale (6).