LA2XX-CI : Dynamique des fluides (CI-Physique-Mécanique)

Examen 6 décembre 2012

Avant propros

- 2H sans documents
- Lisez le texte en détail.
- Dans les exercices, en général, vous pouvez toujours continuer même si vous n'avez pas montré ou justifié le point précèdent.
- On tiendra compte de l'argumentation.

Questions de cours

4pt

1. Énoncez le théorème de conservation de la masse sous la forme globale et locale.
2. Énoncez le théorème des quantités de mouvement sous la forme globale dans le cas d'un écoulement stationnaire et soumis à la pesanteur. Donnez les hypothèses du théorème.
3. Énoncez le théorème de Bernoulli avec les hypothèses. Quelle est la différence entre un écoulement rotationnel et un autre irrotationnel ?
4. Rappelez la définition du Nombre de Reynolds, R_e. Donnez l'interprétation physique de l'écoulement pour les deux cas limites $R_e >> 1$ et $R_e << 1$

Exercice 1 : Vanne de décharge

8pt

Sur la Figure 1 nous avons un écoulement d'eau à surface libre dans un canal où nous avons intercalé une paroi (la vanne), le canal à une largeur constante (dans la direction z orthogonale à la figure), et par conséquent tous les calculs seront faits sur le plan xy. Écoulement à surface libre veut dire que la surface de l'eau est à la pression atmosphérique p_a. La hauteur d'eau passe d'une valeur h_1 dans la section du canal S_1 à une valeur h_2 plus faible dans la section S_2. Lors du passage on a la conservation de la quantité de mouvement et une partie de celle-ci est transmisse à la vanne sous la forme d'une force. Nous allons calculer la force totale R_T sur la vanne et la relation entre les hauteurs en amont et en aval de la vanne. On suppose la vitesse uniforme en amont et en aval de la vanne avec des valeurs U_1 et U_2 dans la direction x. Le fluide est supposé parfait et le volume de contrôle est $ABCDEFA$ comme marqué sur la Figure 1, nous avons en particulier $S_1 = S_{AB}$ et $S_2 = S_{EF}$.

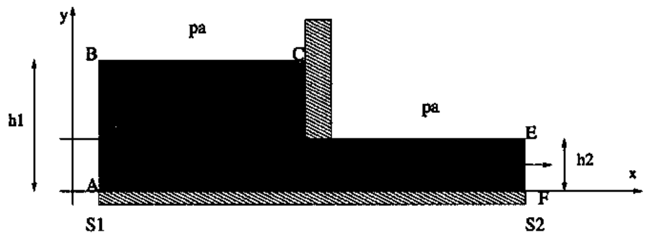


FIGURE 1 – Vanne de décharge

1. A partir du théorème de conservation de la masse sous la forme globale montrer que $U_1 h_1 = U_2 h_2$.
2. Justifiez le fait que sur la surface BC

$$\int_{S_{BC}} \rho\vec{U}(\vec{U}\vec{n})dS = 0$$

3. Montrez que la composante x de la quantité de mouvement sous forme globale s'écrit

$$\int_{S_1} \rho\vec{U}(\vec{U}\vec{n})dS + \int_{S_2} \rho\vec{U}(\vec{U}\vec{n})dS = \int_{S_1} -p\vec{n}dS + \int_{S_2} -p\vec{n}dS + \int_{S_{CD}} -p\vec{n}dS + \int_{S_{CD}} -p_a\vec{n}dS \qquad (1)$$

4. Sachant que les pressions dans les sections 1 et 2 s'écrivent $p_1(y) = p_a + \rho g(h_1 - y)$ et $p_2(y) = p_a + \rho g(h_2 - y)$ respectivement, montrez que la résultante des forces R_T sur la vanne est

$$R_T = \rho(U_1^2 h_1 - U_2^2 h_2) + \rho g\left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2}\right)$$

5. Appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant proche du fond (à $y = 0$) et montrer que

$$g(h_1 - h_2) = \frac{(U_2^2 - U_1^2)}{2}$$

6. En exprimant U_2 en fonction de U_1, ~~h_1 et h_2 et à l'aide de l'~~équation de conservation de la masse trouvez l'équation de second degré en h_2. (Rappel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$) → necessaire ?

$$2gh_2^2 - U_1^2 h_2 - U_1^2 h = 0$$

La solution de l'équation précédente en fonction du nombre de Froude $F_r = \frac{U_1^2}{gh_1}$ s'écrit

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{F_r}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{F_r}}\right)$$

7. Pour notre écoulement $h_2 < h_1$, quelle est la condition sur le nombre de Froude F_r ?
8. On peut revenir au point 6 et refaire le calcul en éliminant U_1 à la place de U_2, alors pouvez vous trouver la solution de la nouvelle équation du second degré en h_1 ? Quelle est maintenant la condition sur le nombre de Froude $F_r = \frac{U_2^2}{gh_2}$ en aval de la vanne ?
9. (Bonus à faire à la fin de l'examen) Donnez une interprétation physique du nombre Froude. Aide : faites l'analyse dimensionnelle et rappelez vous des vaguelettes en bord de mer.

Exercice 2

4pt

On considère un fluide visqueux de viscosité μ et de masse volumique ρ constante en écoulement stationnaire

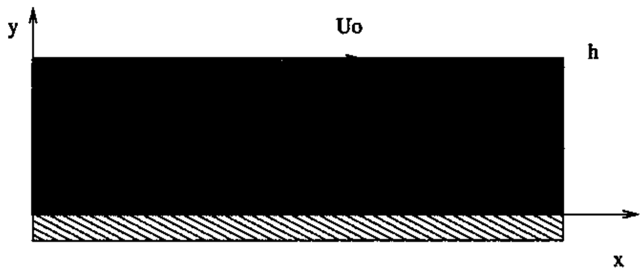


FIGURE 2 – Écoulement parallèle : un seul fluide.

dans un canal plat dont la vitesse est $\vec{v} = U(y)e_x$ (Figure 2). On néglige les forces de pesanteur donc $g = 0$. Le fluide est mis en mouvement par le déplacement de la couche supérieure située à $y = h$, soit la condition aux limites suivante : $U(y = h) = U_0$ et on suppose encore que c'est le seul moteur de l'écoulement ce qui implique que il n'y pas de gradient de pression. L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \nu\Delta\vec{v} \tag{2}$$

où $\nu = \mu/\rho$ et $\Delta = \vec{\nabla}^2$

1. Écrivez les 3 composantes de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.
2. Montrez que pour l'écoulement du problème elle se réduit à

$$0 = \mu\frac{d^2U}{dy^2}.$$

3. Trouvez le profil de vitesses $U(y)$ et calculez le débit volumique.
4. Calculez la contrainte tangentielle à la paroi $\tau = \mu\frac{dU}{dy}_{|y=0}$.

Exercice 3

4pt

Nous avons maintenant deux fluides non miscibles (c'est à dire qu'ils ne se mélangent pas) de viscosités différentes comme montré sur la Figure 3. Le fluide près de la paroi s'étale de $y = 0$ à $y = e$ et il est désigné par la lettre p donc la vitesse par U_p. Le fluide de la partie supérieure, désigné par la lettre t s'étale de $y = e$ à $y = h$ et la vitesse est donc écrite U_t. La condition aux limites sur la couche supérieure située à $y = h$ est la

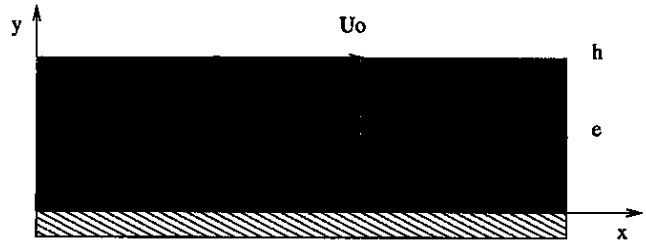


FIGURE 3 – Écoulement parallèle : deux fluides non miscibles.

même que pour un seul fluide, soit $U_t(y = h) = U_0$. Nous savons que l'équation de Navier-Stokes s'écrit de la même manière dans les deux parties soit

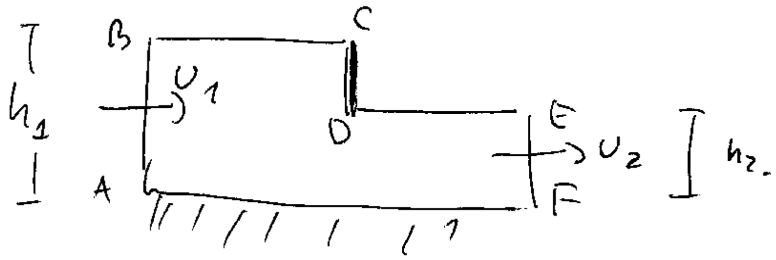
$$0 = \mu_t \frac{d^2U_t}{dy^2} \quad \text{pour } y \in (e, h)$$
$$0 = \mu_p \frac{d^2U_p}{dy^2} \quad \text{pour } y \in (0, e)$$

où μ_t et μ_t sont les viscosités des fluides, différentes. Nous avons les 2 conditions aux limites supplémentaires suivantes

$$U_t(y = e) = U_p(y = e) \qquad \text{continuité des vitesses}$$
$$\mu_p \frac{dU_p}{dy}_{|y=e} = \mu_t \frac{dU_t}{dy}_{|y=e} \qquad \text{continuité des contraintes}$$

1. Trouvez le profil de vitesses $U(y)$.
2. Calculez la contrainte tangentielle à la paroi $\tau = \mu \frac{dU}{dy}_{|y=0}$.
3. Montrez que (i) pour $e << h$ la contrainte tangentielle à la paroi est $\tau \sim \mu_t \frac{U_0}{h}$ et (ii) pour $e \sim h$, $\tau \sim \mu_p \frac{U_0}{e}$.
4. Calculez le débit volumique.

Corrigé Examen janvier 2012



(1) $\int_S \rho \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0$ $\qquad S = AB \cup BC \cup CD \cup DE \cup EF \cup FA$

$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ partout sauf sur $S_1 = S_{AB}$ et $S_2 = S_{EF}$

$$\rho \int_{S_1} U_1 \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x)\, dS + \rho \int_{S_2} U_2 \vec{e}_x \vec{e}_x\, dS = 0$$

$$-\rho U_1 h_1 + \rho U_2 h_2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{U_1 h_1 = U_2 h_2}$$

(2) $$\int_{BC} \rho \vec{U}(\vec{U}\vec{n})\, dS = \rho \int_{BC} U_1 \underbrace{\vec{e}_x \vec{e}_y}_{0} = 0$$

(3) $$\int_S \rho \vec{U}(\vec{U}\vec{n})\, dS = \int_S -p\vec{n}\, dS$$

Sur l'axe x seuls S_1, S_2 et S_{CD} sont différents de zéro.

$$\int_{S_1} \rho \vec{U}(\vec{U}\vec{n})\, dS + \int_{S_2} \rho \vec{U}(\vec{U}\vec{n})\, dS = -\int_{S_1} p\vec{n}\, dS + \int_{S_2} -p\vec{n}\, dS + \underbrace{\int_{CD} -p\vec{n}\, dS}_{R_{s\to f} = -R}$$

(4) $$-\rho U_1^2 h_1 + \rho U_2^2 h_2 = -R + \underbrace{\int_{S_1} -p\vec{n}\,ds}_{(A)} + \underbrace{\int_{S_2} -p\vec{n}\,ds}_{(B)} + \underbrace{\int_{S_{(i)}} -p_a\vec{n}\,ds}_{(C)}$$

$$R = \rho\left(U_1^2 h_1 - U_2^2 h_2\right) + A + B$$

$$(A) = -\left[\int_0^{h_1} -p_a - \rho g(h_1 - y)\,dy\right] = -\left[-p_a h_1 - \rho g\left[h_1 y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{h_1}\right]$$

$$= p_a h_1 + \rho g \frac{h_1^2}{2}$$

$$(B) = \int_0^{h_2} -p_a - \rho g(h_2 - y)\,dy = -p_a h_2 - \rho g \frac{h_2^2}{2}$$

donc

$$R = \rho\left(U_1^2 h_1 - U_2^2 h_2\right) + \rho g\left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2}\right) + \underbrace{p_a(h_1 - h_2)}_{=0} \quad \overbrace{-p_a(h_1-h_2)}^{(C)}$$

~~force~~ extérieur ~~à la vanne~~.

(5) Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + \cancel{\rho g y_1} + p_1 = \frac{1}{2}U_2^2 + \cancel{\rho g y_2} + p_2$$

$$U_1^2 - U_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)$$

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - y) - \rho g(h_1 - y) = \rho g(h_2 - h_1)$$

donc $$U_1^2 - U_2^2 = 2g(h_2 - h_1)$$

$$\boxed{U_2^2 - U_1^2 = 2g(h_1 - h_2)}$$

6 $\begin{cases} U_2^2 - U_1^2 = 2g(h_1 - h_2) \\ U_2 h_2 = U_1 h_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{U_1^2}{h_2^2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) = 2g(h_1 - h_2)$$

car $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\frac{U_1^2}{h_2^2}\cancel{(h_1 - h_2)}(h_1 + h_2) = 2g\cancel{(h_1 - h_2)}$$

$$\boxed{2gh_2^2 - U_1^2 h_2 - U_1^2 h_1 = 0}$$

donc

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{U_1^2}{4gh_1}\left(1 + \left(1 + \frac{8gh_1}{U_1^2}\right)^{1/2}\right)$$

7 Pour que $h_2 < h_1$ il faut que $F_r = \frac{U_1^2}{2h_1} < 1$.

8 même que 6 ; cela donne $F_r = \frac{U_2^2}{2h_2} > 1$

Sous critique

Super criten

Froude critique $= 1$.

9 $F_r = \frac{\text{vitesse écoulement}}{\text{vitesse ondes de surface.}}$

Exe 2

1) TD N°

2) IDEM avec $\vec{g}=0$ et $\vec{\nabla p}=0$

3) $\frac{d^2U}{dy^2}=0 \Rightarrow U=ay+b.$

Conditions aux limites

$$\begin{cases} U(y=0)=0 & \Rightarrow U=b=0. \\ U(y=h)=U_0 & \Rightarrow U_0=ah \Rightarrow a=\frac{U_0}{h} \end{cases}$$

donc $\boxed{U(y)=\frac{U_0}{h}y}$

$$Q=\int_0^h \frac{U_0}{h}\,y\,dy$$

$$Q=\frac{U_0}{h_0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h=\frac{U_0 h}{2}$$

4) $\tau=\mu\frac{dU}{dy}\Big|_{y=0}$

$$\boxed{\tau=\mu\frac{U_0}{h}}$$

Deux fluides

$$\begin{cases} U_t = a y + b \\ U_p = c y + d \end{cases}$$

$$U_p(y=0) = 0 \Rightarrow d = 0 . \quad U_p = c y .$$

$$U_t(y=e) = U_p(y=e) \Rightarrow ae + b = ce . \qquad (1)$$

$$U_t(y=h) = U_0 \Rightarrow ah + b = U_0 \qquad (2)$$

$$\mu_p \left.\frac{dU_p}{dy}\right|_{y=e} = \mu_t \left.\frac{dU_p}{dy}\right|_{y=e} \Rightarrow \mu_p\, a = \mu_t\, c \qquad (3)$$

$$(1) - (2) \quad \mu_p a (e-h) = (ce - U_0)\mu_p \qquad (4)$$

4 $$\underline{\mu_p\, a\, (e-h)} = \mu_t\, c\, \underline{(e-h)}$$

$$0 = ce\mu_p - U_0\mu_p - \mu_t c (e-h)$$

$$U_0 \mu_p = c\left(e\mu_p - \mu_t (e-h)\right)$$

$$\boxed{c = \frac{U_0\, \mu_p}{e\mu_p - \mu_t (e-h)}} = \frac{U_0\, \mu_p}{\mu_p e + \mu_t (h-e)}$$

$$a = \frac{U_0 \cancel{\mu_p}}{\mu_p - \mu_t (e-h)} \cdot \frac{\mu_t}{\cancel{\mu_p}} = \frac{U_0\, \mu_t}{e\mu_p + \mu_t (h-e)}$$

(2) $\tau = \mu_p \dfrac{dU_p}{dy}\Big|_{y=0}$ avec $U_p = \dfrac{U_0 \mu_p}{e\mu_p + \mu_t(h-e)}\, y$

$$\tau = \frac{U_0 \mu_p^2}{e\mu_p - \mu_t(e-h)} = \frac{U_0 \mu_p^2}{e\mu_p + \mu_t(h-e)}$$

$$= \frac{U_0 \mu_p}{h} \frac{1}{\left(\frac{e}{h} + \frac{\mu_t}{\mu_p}\left(\frac{h-e}{h}\right)\right)}$$

Si $e \ll h$ $\quad \frac{e}{h} \sim 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{\mu_t}{\mu_p} h}$

$$\tau \sim \frac{U_0 \mu_p}{h \frac{\mu_t}{\mu_p}} \sim \frac{U_0 \mu_t}{h}$$

Si $e \sim h$ $\quad \frac{e}{h} \sim 1 \quad h - e \sim 0$

$$\tau \sim \frac{U_0 \mu_p}{e}$$

$$Q = \int_0^e + \int_e^h$$ etc....