UE 3A005 : Méthodes Numériques pour la mécanique
Examen du 27 octobre 2016, durée 2 h
Corrigé

Sans document papier. Sans équipement électronique.

Exercice 1 : Racines d'équations (12/30)

1. $f(0) = 32$, $f(1) = -38 \rightarrow f(0) * f(1) < 0$. Il y a une racine réelle pour $x \in]0, 1[$.
2. $f'(x) = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 36\,x - 52$. Pour $x \in [0, 1]$, $f'(x)$ est monotone donc la racine r est unique.
3. $f''(x) = 12\,x^2 - 6\,x - 36 < 0 \rightarrow f'(x)$ est monotone décroissante pour $x \in [0, 1]$. Sachant que $f'(x) < 0 \rightarrow f'(0) > f'(x) > f'(1) \rightarrow -87 < f'(x) < -52$.
4. $x_{n+1} = x_n + \lambda\, f(x_n) \rightarrow \phi(x) = x + \lambda\, f(x) \rightarrow \phi'(x) = 1 + \lambda\, f'(x)$
   $|\phi'(r)| < 1 \rightarrow |1 + \lambda\, f'(r)| < 1 \rightarrow -1 < 1 + \lambda\, f'(r) < 1$.
   D'où $-2 < \lambda\, f'(r) < 0 \rightarrow -2 < \lambda\, f'(r) < 0 \rightarrow -2/f'(r) > \lambda > 0 \rightarrow 0 < \lambda < 2/87$.
5. Pour $x_{n+1} = x_n + \lambda\, f(x_n)$, on a $(x_{n+1} - r) = |1 + \lambda\, f'(x_n)|\,(x_n - r)$.
6. $|1 + \lambda\, f'(x)| < 0.1 \rightarrow |x_{n+1} - r| \leq (0.1)^n |x_0 - r| \leq 10^{-6} \rightarrow n\, log(0.1) \leq log(10^{-6})$ car $x_0 - r < 1$.
   D'où $n(-1) \leq -6 \rightarrow n \geq 6$.
7. La méthode du point fixe $x_{n+1} = x_n + \lambda\, f(x_n)$ et la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ sont de la forme $x_{n+1} = x_n + \Phi\, f(x_n)$. La méthode du point fixe est d'ordre 1. Elle convergera moins vite que celle de Newton qui est d'ordre 2.

Exercice 2 : Méthodes directes (12/30)

1. La méthode de Cholesky s'applique aux matrices symétriques dédinies positives. La matrice A n'est pas symétrique, donc on ne peut pas appliquer la méthode de Cholesky.
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$.
   $u_{11} = a_{11} = 1$, $u_{12} = a_{12} = -3$, $u_{13} = a_{13} = 1$,
   $l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2$, $u_{22} = a_{22} - l_{21}\,u_{12} = -5 + 3 * 2 = 1$, $u_{23} = a_{23} - l_{21}\,u_{13} = 2 - 2 * 1 = 0$,
   $l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2$, $l_{32} = (a_{32} - l_{31}\,u_{12})/u_{22} = (-7 + 2 * 3)/1 = -1$,
   $u_{33} = a_{33} - l_{31}\,u_{13} - l_{32}\,u_{23} = 1 - 2 = -1$.
   D'où $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Pour $b_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, on obtient $x_1 = \begin{vmatrix} -9 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$.
4. Pour $b_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, on obtient $x_1 = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. Pour $b_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, on obtient $x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$.
5. On obtient la matrice inverse : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
6. $Cond_\infty(A) = ||A||_\infty\, ||A^{-1}||_\infty = max(5, 9, 10) * max(14, 3, 6) = 140$.
7. $Cond_\infty(A) = 140$ est faible. Une perturbation du second membre affecte peu l'erreur relative de la solution.

Exercice 3 : Méthodes itératives (6/30)

1. $M\,x^{k+1} = N\,x^k + b \rightarrow x^{k+1} = (M^{-1}\,N)\,x^k + M^{-1}\,b$. iD'où $\Omega = M^{-1}\,N$ et $C = M^{-1}\,b$
   On a : $M\,(x - x^{k+1}) = M\,x - N\,x^k - b = M\,(x - x^k) - b + A\,x^k = M\,(x - x^k) - A\,(x - x^k) = N\,(x - x^k)$ d'où $M\,(x - x^{k+1}) = N\,(x - x^k)$.
   $M\,e^{k+1} = N\,e^k \rightarrow e^{k+1} = \Omega\,e^k$. La convergence du schéma ne dépend pas du vecteur C.
2. $||e^{k+1}|| = ||\Omega\,e^k|| \leq ||\Omega||\,||e^k||$. Donc si $||\Omega|| < 1$, on a $||e^{k+1}|| \leq ||\Omega||\,||e^k|| \rightarrow ||e^{k+1}|| < ||e^k||$.
3. $r^{k+1} = b - A\,x^{k+1} = b - A\,x^k - \alpha_k\,A\,r^k = r^k - \alpha_k\,A\,r^k = r^k - (< r^k, r^k > / < r^k, A\,r^k >)\,A\,r^k$
   $< r^{k+1}, r^k > = < r^k, r^k > - (< r^k, r^k > / < r^k, A\,r^k >) < A\,r^k, r^k > = 0$.