



Dynamique et modélisation de la turbulence

5. Turbulence cisailée

5.1 Ecoulements cisailés libres

5.2 Ecoulements de paroi

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

Écoulements cisailés libres

Ecoulements cisailés libres

- Caractérisés par une direction dominante
- Effets visqueux de proche paroi absents
- Les équations RANS peuvent être simplifiées en adoptant une approximation de type couche limite :

$$\frac{1}{x^m} \frac{\partial(x^m u)}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial(y^j v)}{\partial y} = 0 \text{ (continuité)}$$

(*)

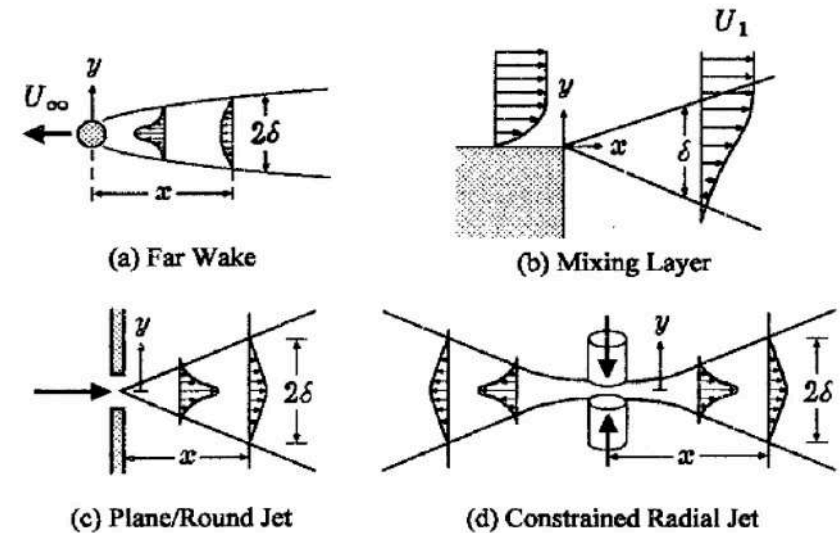
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial(y^j (\tau_{xy} + \tau_{xy}^R))}{\partial y} \text{ (Q. mvt en x)}$$

- Recherche de **solutions auto-similaires**
- Loin de la géométrie, la solution adimensionnée ne dépend que d'une seule variable (variable de similitude)
- Exemple :

$$\frac{u(x, y)}{u_0(x)} = F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

Cas 2D : m=j=0

Cas axi : m ou j =1



Exemples d'écoulements cisailés libres
(From Wilcox, 2006)

Couche de mélange turbulente

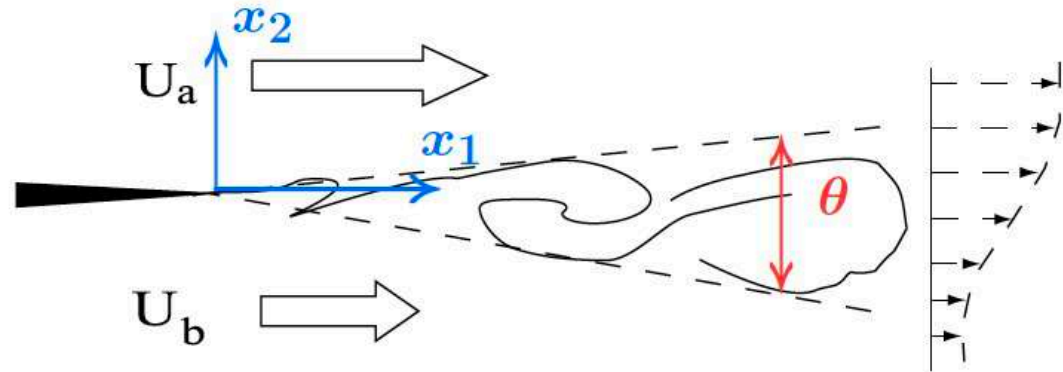
■ Définitions :

$$u_1 = U + \tilde{u}_1, \quad u_2 = V + \tilde{u}_2$$

$$\langle \tilde{u}_1 \rangle = \langle \tilde{u}_2 \rangle = 0$$

$$\bar{U} = \frac{U_a + U_b}{2}$$

$$\beta = \frac{U_a - U_b}{U_a + U_b} \in (0, 1)$$



■ Objectif :

- Calculer $U(x_1, x_2), V(x_1, x_2), \theta(x_1)$, etc.

- Assez loin de l'origine il n'y a pas d'échelle de longueur, hormis la distance à l'origine → **solution autosimilaire**

$$\frac{U(x_2)}{U_a - U_b}, \frac{u'}{U_a - U_b}, \dots = f(x_2/x_1, \beta)$$

Epaisseur de la couche de cisaillement

- Epaisseur de quantité de mouvement

- Défaut de quantité de mouvement par rapport à un profil de vitesse constant par morceaux (variation discontinue)

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(U - U_b)(U_a - U)}{(U_a - U_b)^2} dx_2,$$

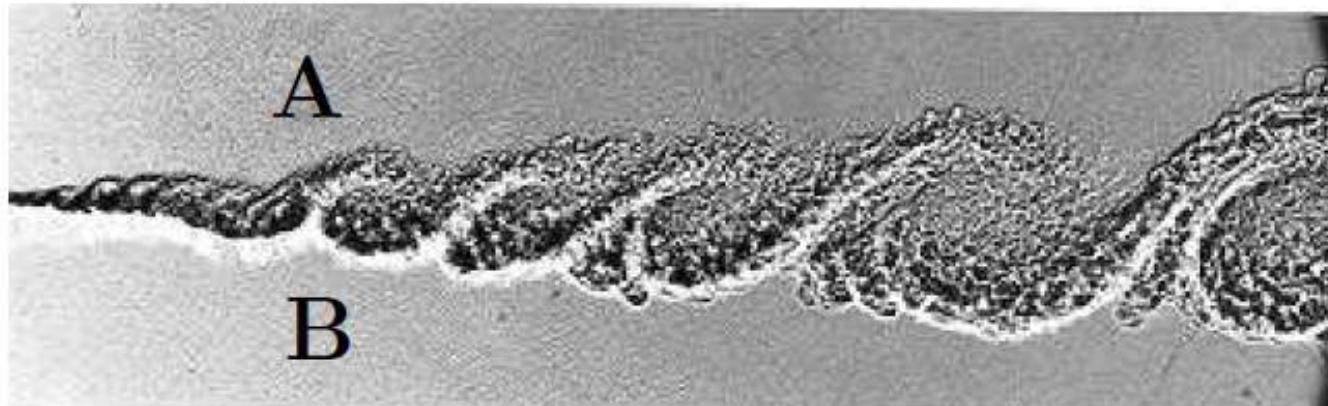
- La couche de mélange s'épaissit à cause de la dissipation d'énergie
- L'épaississement est plutôt lent
 - écoulement qui varie lentement selon la direction longitudinale et rapidement dans la direction transverse
 - couche mince

Viscosité tourbillonnaire

- Une modélisation grossière des contraintes turbulentes est de la forme :

$$\nu_\varepsilon = C' \Delta U \theta$$

- Avec C' une constante
- En pratique, les grandes échelles ne sont pas du tout homogènes et l'analogie de Boussinesq n'est pas justifiée



Van Dyke, M. 1982 Album of Fluid Motion

Exemple de calcul : jet plan turbulent

- Exercice au tableau

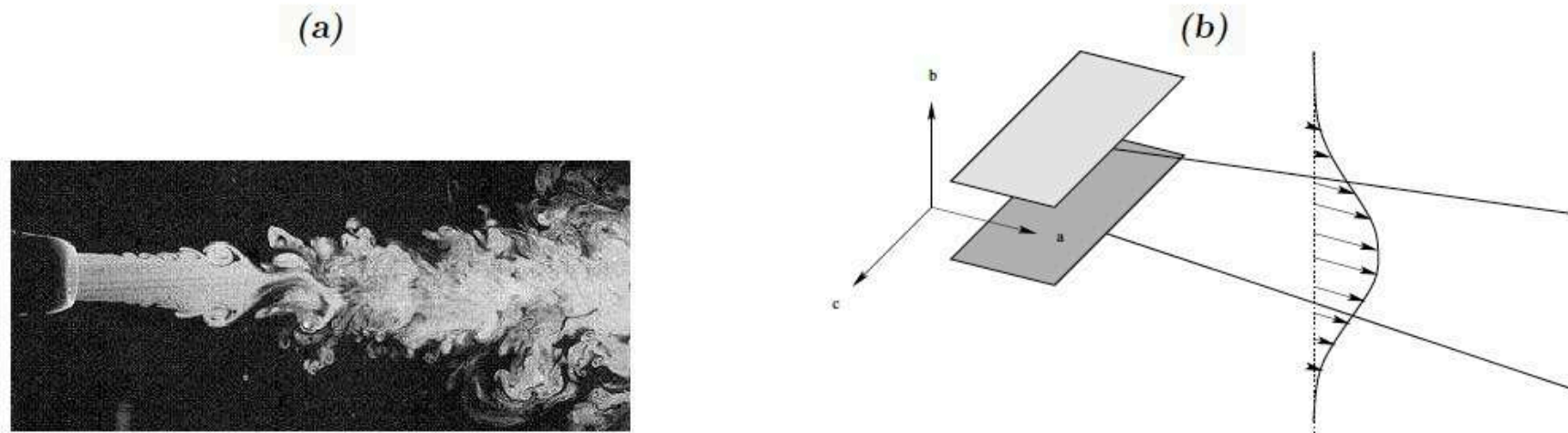


FIGURE 1 – (a) Visualisation d'un jet rond turbulent pour un nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la buse D de $Re_D \approx 10^4$. (b) Vue schématique du jet plan et du système de coordonnées. Directions : x_1 = "axiale", x_2 = "transversale", x_3 = "latérale".

Exemple de calcul : jet plan turbulent

■ Exercice au tableau

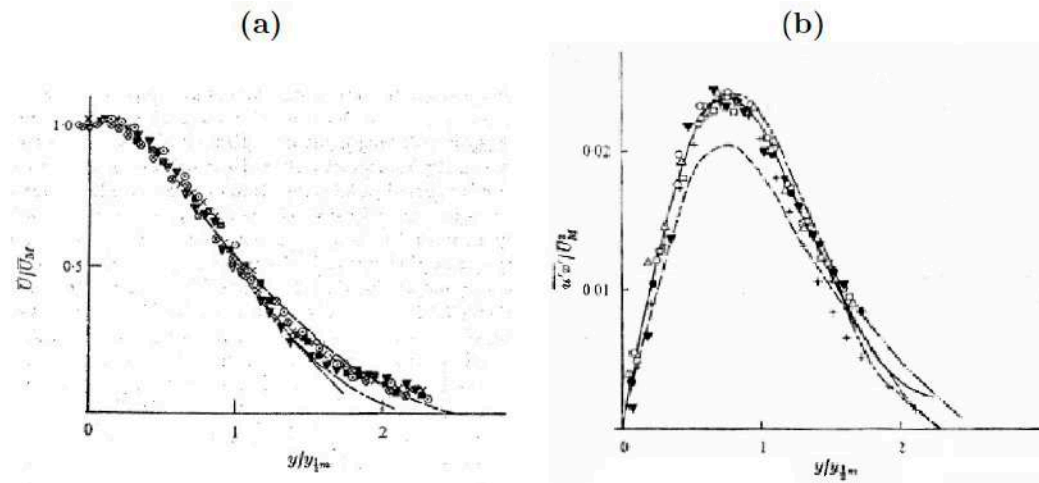
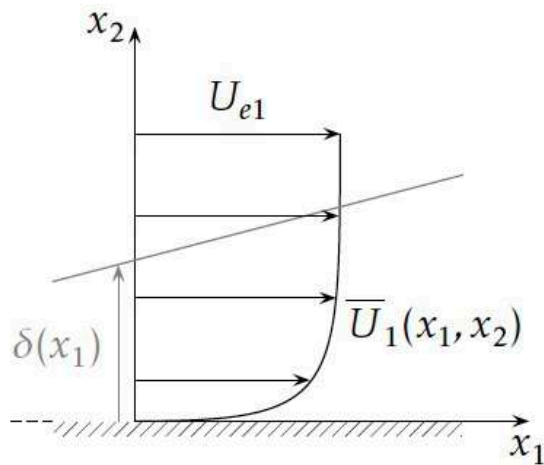


FIGURE 2 – Données expérimentales de Gutmark & Wygnanski (*Journal of Fluid Mechanics*, **73**, 1976) obtenues pour un jet plan. (a) Profil de la vitesse moyenne axiale normalisée par la vitesse sur l'axe \overline{U}_1/U_m ($\overline{U}/\overline{U}_M$ avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet η ($y/y_{1/2m}$ sur la figure), pour différentes positions axiales : \blacktriangledown , $x_1/h = 118$; \times , $x_1/h = 103$; \blacksquare , $x_1/h = 88$; \otimes , $x_1/h = 76$; \odot , $x_1/h = 65$. (h : hauteur initiale du jet). (b) Profil de la contrainte de Reynolds $\overline{u'_1 u'_2}/U_m^2$ ($\overline{u'v'}/\overline{U}_M^2$ avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet η ($y/y_{1/2m}$ sur la figure), pour différentes positions axiales : \circ , $x_1/h = 143$; \triangle , $x_1/h = 129$; \blacktriangledown , $x_1/h = 118$; \square , $x_1/h = 106$; \bullet , $x_1/h = 95$;

Écoulements de paroi

Types d'écoulements de paroi

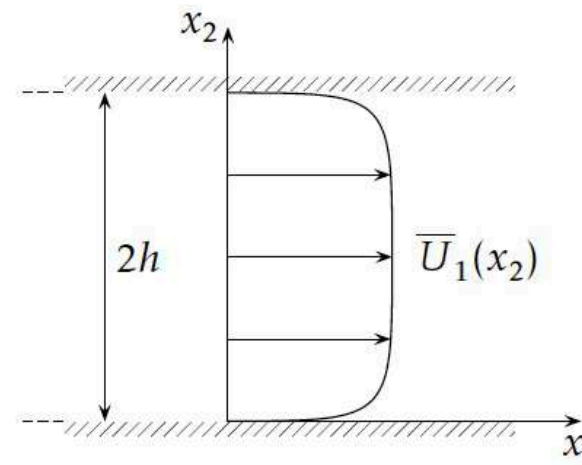
- Ecoulements **externes** ou écoulements **confinés**



flat-plate boundary layer

$$\text{Re}_\delta = \frac{U_{e1} \delta}{\nu}$$

fully turbulent for $\text{Re}_\delta \geq 2800$



channel flow

$$\text{Re}_{2h} = \frac{U_d 2h}{\nu} \quad (U_d \text{ bulk velocity})$$

fully turbulent for $\text{Re}_{2h} \geq 1800$

homogeneous flow along x_1

Canal plan turbulent

- Simplification des équations RANS pour

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_1(x_2) \quad \overline{U}_2 = \overline{U}_3 = 0$$

et écoulement homogène selon x_1

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_1} - \frac{d}{dx_1}(\rho \overline{u_1'^2}) + \frac{d}{dx_2} \left(\mu \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} - \rho \overline{u_1' u_2'} \right) \end{array} \right. \quad (i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_2} - \frac{d}{dx_1}(\rho \overline{u_1' u_2'}) - \frac{d}{dx_2}(\rho \overline{u_2' u_2'}) \end{array} \right. \quad (ii)$$

- En intégrant l'équation (ii) :

$$\overline{P}(x_1, x_2) = \overline{P}_w - \rho \overline{u_2' u_2'}$$

- Pression moyenne à la paroi (mesurable) :

$$\overline{P}_w = \overline{P}(x_1, x_2 = 0)$$

Canal plan turbulent

- L'équation (i) est réécrite sous la forme

$$0 = -\frac{d\bar{P}_w}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} \underbrace{\left(-\rho \overline{u'_1 u'_2} + \mu \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right)}_{\bar{\tau}_t(x_2)}$$

- et intégrée dans la direction transverse jusqu'à la position x_2 :

$$\frac{d\bar{P}_w}{dx_1} x_2 = -\rho \overline{u'_1 u'_2} + \mu \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} - \bar{\tau}_w \quad (*)$$

- Avec la contrainte pariétale :

$$\bar{\tau}_w \equiv \mu \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \Big|_{x_2=0}$$

Canal plan turbulent

- On introduit la **vitesse de frottement** :

$$u_\tau \equiv \sqrt{\bar{\tau}_w / \rho}$$

- Échelle caractéristique au voisinage de la paroi
- Directement liée à la perte de charge

$$\frac{d\bar{P}_w}{dx_1} h = -\bar{\tau}_w \quad \Rightarrow \quad u_\tau^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{P}_w}{dx_1} h = \text{cst}$$

- En injectant la relation précédente dans (*) :

$$u_\tau^2 \left(\frac{x_2}{h} - 1 \right) - \overline{u'_1 u'_2} + \nu \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = 0 \quad \bar{\tau}_t = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{x_2}{h} \right)$$

Couche limite turbulente

- Approximation de Prandtl pour les équations RANS

$$(\delta \ll L)$$

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V \sim \frac{\delta}{L} U$$

- Conservation de la quantité de mouvement longitudinale

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1'^2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \bar{U}_1 \\ \sim \frac{U^2}{L} \quad \sim \frac{U^2}{L} \quad \sim \frac{u^2}{L} \quad \sim \frac{u^2}{\delta} \quad \sim \nu \left(\frac{U}{L^2}; \frac{U}{\delta^2} \right) \end{array} \right.$$

- Vérifié seulement si

$$u \sim \sqrt{\delta/L} U$$

Couche limite turbulente

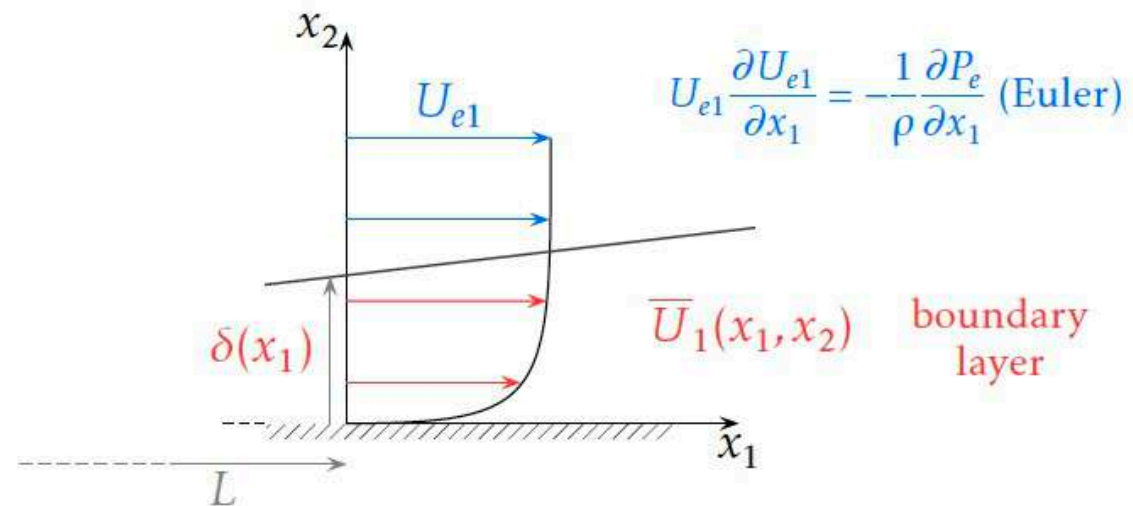
- Conservation de la quantité de mouvement transverse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{U_1} \frac{\partial \overline{U_2}}{\partial x_1} + \overline{U_2} \frac{\partial \overline{U_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u'_1 u'_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u'^2_2}}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{U_2} \\ \sim \frac{\delta U^2}{L L} \quad \sim \frac{\delta U^2}{L L} \quad \sim \frac{\delta U^2}{L L} \quad \sim \frac{\delta U^2}{L \delta} \quad \sim \nu \frac{\delta U}{L \delta^2} \sim \frac{1}{\text{Re}_\delta L} \frac{\delta U^2}{\delta} \end{array} \right.$$

- Il en suit $\overline{P} + \rho \overline{u'^2_2} = \text{cst}$

- Plus particulièrement

$$\overline{P} + \rho \overline{u'^2_2} = P_e = \overline{P}_w$$



Couche limite turbulente

- Récapitulatif des équations :

$$\begin{cases} \overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_e}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} - \overline{u'_1 u'_2} \right) \\ \overline{P}(x_1, x_2) = P_e - \rho \overline{u'^2_2} \end{cases}$$

- Evolution dans la direction longitudinale (écoulement non homogène mais lentement variable)
- L'accroissement dépend du **gradient de pression externe**

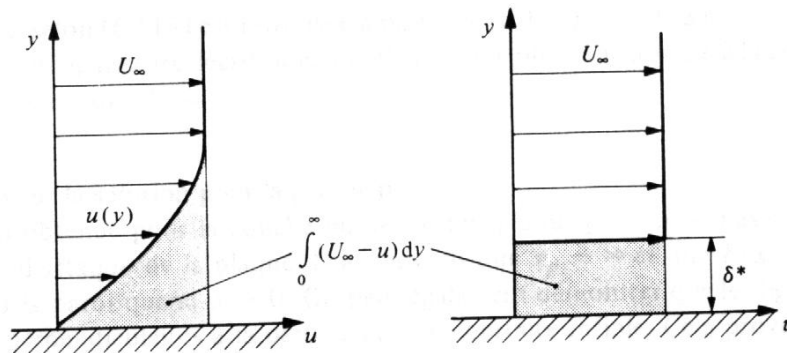
Echelles caractéristiques d'une couche limite

- **Epaisseur de couche limite** à 99% :

$$\frac{u(x, \delta(x))}{u_e(x)} = 0.99$$

- **Epaisseur de déplacement** : perte de débit par rapport à un écoulement idéal

$$\int_0^\delta \rho_e u_e dy - \int_0^\delta \rho u dy = \rho_e u_e \delta^* \quad \text{soit} \quad \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$



Echelles caractéristiques d'une couche limite

■ Epaisseur de quantité de mouvement :

- Perte de quantité de mouvement, à débit constant, par rapport à un écoulement idéal

$$\left(\int_0^\delta \rho u dy \right) \times u_e - \int_0^\delta \rho u^2 dy = \rho u_e^2 \theta \quad \text{i.e.} \quad \theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

■ Facteur de forme

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

- Couche limite de Blasius : 2.59
- Couche limite turbulente : 1.3 – 1.4

Couche limite sans gradient de pression

- Equation intégrale de von Karman (voir cours Aérodynamique)
 - Equations de la masse et q mvt + intégration à travers la c.l.

$$\int_{y=0}^{y \rightarrow \infty} \underbrace{\left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - u_e \frac{du_e}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \right]}_{(ii)} + (u - u_e) \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]}_{(i)} dy = 0$$

* Conditions aux limites

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \tau_w = \frac{du_e}{dx} \cdot \int_0^\infty (u_e - u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\infty u(u_e - u) dy \right)$$

→ Introduction des épaisseurs de déplacement et q mvt

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (\delta^* + 2\theta) + \frac{d\theta}{dx} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx}}$$

Couche limite sans gradient de pression

- Cas sans gradient de pression :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}$$

- Vitesse de frottement :

$$\frac{u_\tau^2}{u_e^2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx}$$

- D'où :

$$\frac{u_\tau^2}{u_e^2} = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow u_\tau^2 = \frac{d\theta}{dx} u_e^2$$

- La vitesse de frottement varie en fonction de la vitesse extérieure et du taux d'épaississement de la couche limite

Profil de vitesse moyen pour une couche limite turbulente

- Intégration de l'équation de quantité de mouvement dans la direction transverse :

$$\int_0^{x_2} \rho \left(\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right) dx_2 = \bar{\tau}_t(x_2) - \bar{\tau}_w \quad \bar{\tau}_t(x_2) \equiv -\rho \overline{u'_1 u'_2} + \mu \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}$$

- Approximation du membre de droite par une relation linéaire :

$$\int_0^{x_2} \rho \left(\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right) dx_2 \simeq -\frac{x_2}{\delta} \tau_w \quad \boxed{\bar{\tau}_t(x_2) \simeq \tau_w \left(1 - \frac{x_2}{\delta} \right)}$$

- La vitesse est donc régie par la même relation trouvée pour le canal plan mais avec une vitesse de frottement variable le long de la paroi

$$u_\tau = u_\tau(x_1)$$

Profil de vitesse moyen pour une couche limite turbulente

▪ Sous-couche visqueuse

- Près de la paroi le nombre de Reynolds local tend vers zéro et les fluctuations turbulentes ne peuvent subsister (elles sont nulles à la paroi)
- La contrainte totale se réduit à :

$$\bar{\tau}_t \simeq \mu \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \quad \text{and} \quad \bar{\tau}_w = \rho u_\tau^2 \quad \text{in the viscous sublayer}$$

- Par conséquent la vitesse suit une loi linéaire :

$$\frac{\bar{U}_1}{u_\tau} = \frac{x_2 u_\tau}{\nu}$$

- En introduisant les variables adimensionnelles

$$\bar{U}_1^+ \equiv \frac{\bar{U}_1}{u_\tau} \quad x_2^+ \equiv \frac{x_2 u_\tau}{\nu} = \frac{x_2}{l_v} \quad l_v = \frac{\nu}{u_\tau} \equiv \text{wall unit length}$$

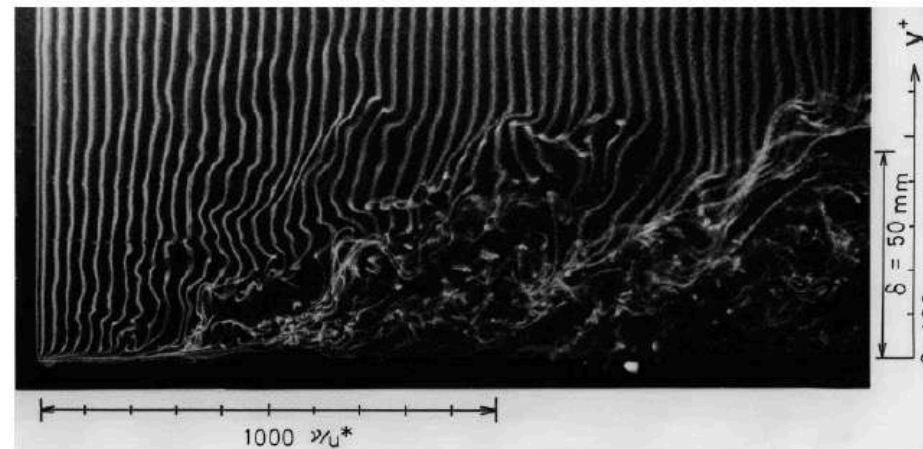
- On a

$$\boxed{\bar{U}_1^+ = x_2^+}$$

Echelles caractéristiques dans une couche limite turbulente

- Echelle externe δ et échelle interne l_v

Turbulent boundary layer along a flat plate : particle tracing in water, hydrogen bubble method, $U_\infty = 20.4 \text{ cm.s}^{-1}$, $\text{Re}_{\delta_0} = 990$
from *Visualized flow*, Japan Soc. Mech. Eng. (1988)



Spatially developing turbulent boundary layer on a flat plate
from Lee, Kwon, Hutchins & Monty (University of Melbourne)

Profil de vitesse moyen pour une couche limite turbulente

- Sous-couche logarithmique

$$x_2^+ = \frac{x_2 u_\tau}{\nu} = \text{Re}^+ \times \frac{x_2}{\delta}$$

$$\text{Re}^+ \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \delta^+$$

Karman number

- Satisfait les deux relations :

- Contraintes visqueuses négligeables : $x_2^+ \gg 1, \quad \text{Re}^+ \gg 1$
- Forces d'inertie faibles : $x_2/\delta \ll 1$

Profil de vitesse moyen pour une couche limite turbulente

- Analyse dimensionnelle :

$$\frac{\bar{U}_1}{u_\tau} = f\left(\frac{x_2 u_\tau}{\nu}, \frac{x_2}{\delta}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\bar{U}_1}{u_\tau} = f_1\left(\frac{u_\tau x_2}{\nu}\right) & \text{in the inner layer} \\ \frac{U_{e1} - \bar{U}_1}{u_\tau} = f_2\left(\frac{x_2}{\delta}\right) & \text{in the outer layer} \end{cases}$$

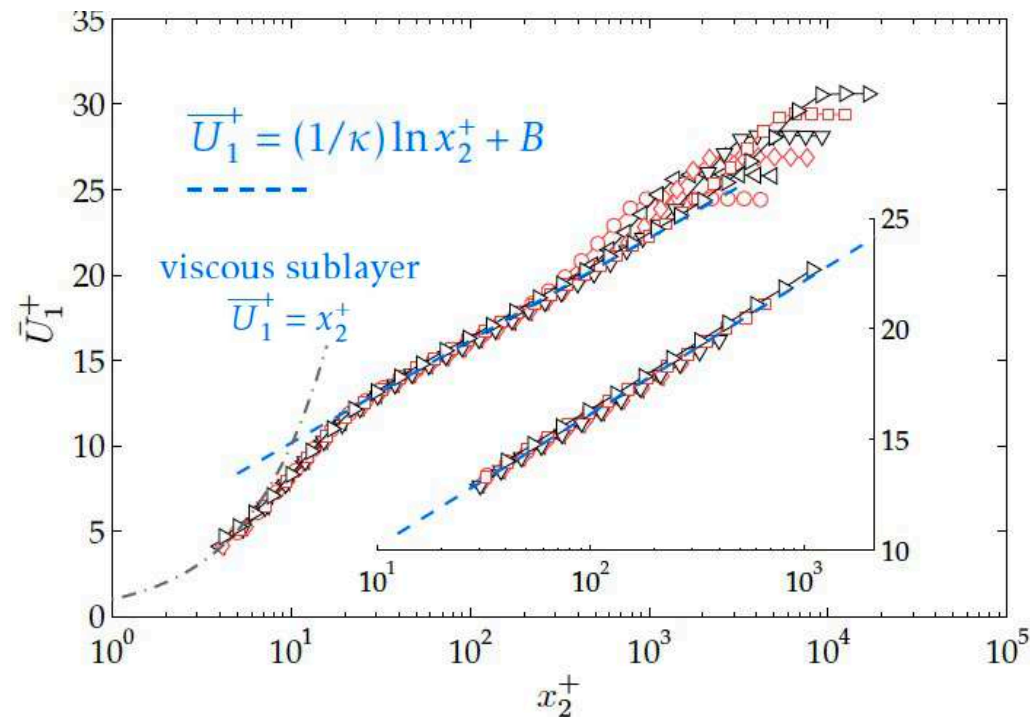
- En imposant la continuité de la vitesse et de ses dérivées entre les deux couches :

$$\begin{cases} \frac{\bar{U}_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_\tau x_2}{\nu}\right) + B \\ \frac{U_{e1} - \bar{U}_1}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{x_2}{\delta}\right) + A \end{cases} \quad \text{with} \quad \frac{U_{e1}}{u_\tau} = \ln(\text{Re}^+) + A + B$$

- Avec κ la « constante » de von Karman

$$0.38 \leq \kappa \leq 0.41$$

Profil de vitesse moyen pour une couche limite turbulente



For a zero-pressure-gradient boundary layer,
 $\kappa \simeq 0.384$ $B \simeq 4.17$

log-law $x_2^+ \geq 30$ & $x_2/\delta \leq 0.20$

(data from Osterlünd, 1999)

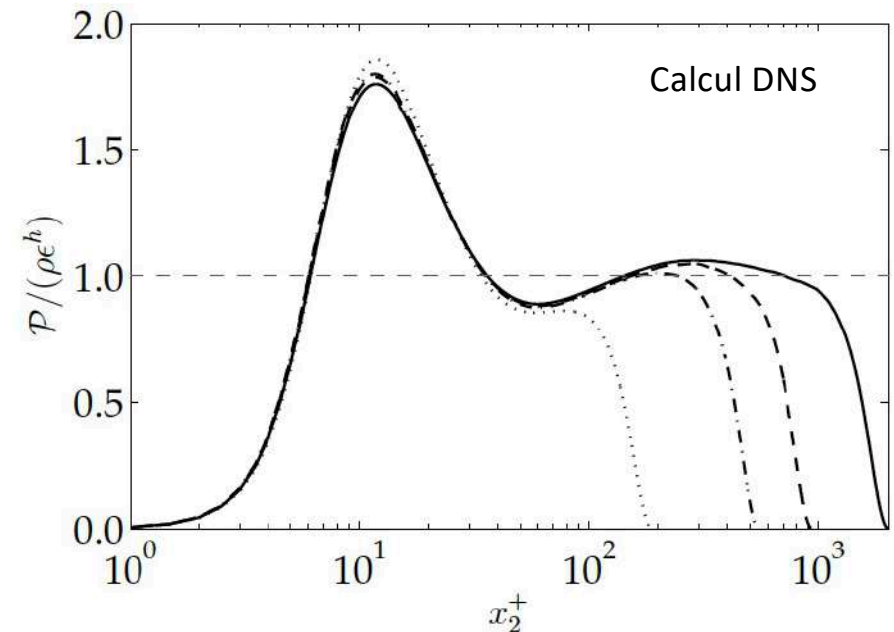
$Re_{\delta_{0.95}}$	1.7×10^4	2.8×10^4	4.3×10^4	6.9×10^4	1.1×10^5	1.9×10^5
$Re_{\delta_{0.95}}^+$	684	1092	1594	2462	3944	6147
	○	◁	◇	▽	□	▷

Loi-log et gamme inertielle

- Dans la zone logarithmique, contraintes visqueuses et les forces d'inertie moyennes négligeables
 - Les seuls termes actifs dans l'équation de l'énergie cinétique sont la **production** et la **dissipation**

$$\mathcal{P} \equiv -\overline{\rho u'_1 u'_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \simeq \rho \epsilon$$

- Ce constat est utilisé pour le développement de nombreux modèles de turbulence
- Cette condition « d'équilibre » n'est pas rigoureusement vérifiée



Ratio of $\mathcal{P}/(\rho\epsilon^h)$ for $Re^+ = 180, 550, 950, 2000$
Hoyas & Jiménez (2006)

Echelle de Kolmogorov

- Rappel : échelle représentative des plus petites structures turbulentes

- La viscosité équilibre les termes non-linéaires

$$Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$$

- Comportement régi par la dissipation et la viscosité du fluide :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$$

- Dans la zone logarithmique :

$$\mathcal{P} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \cong \epsilon$$

- D'après la loi-log :

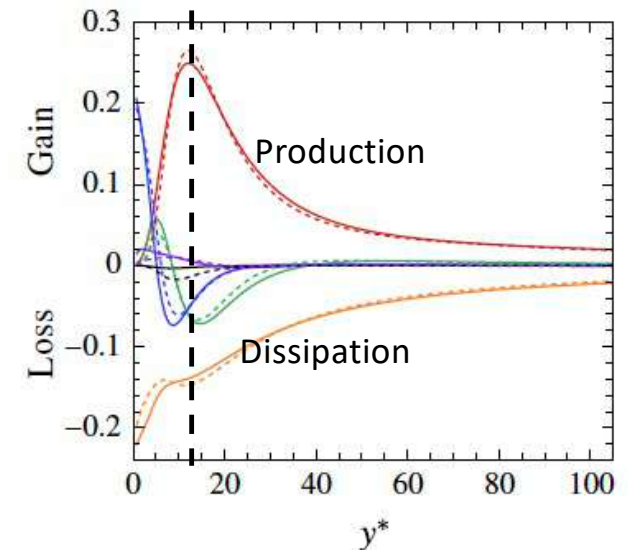
$$\mathcal{P} = \frac{u_\tau^4}{\nu(\kappa x_2^+)^2} \Rightarrow \eta^+ = \frac{\eta u_\tau}{\nu} = u_\tau \left(\frac{\nu^3 \nu (\kappa x_2^+)^2}{\nu^4 u_\tau^4} \right)^{\frac{1}{4}} = (\kappa x_2^+)^{\frac{1}{2}}$$

→ Production décroissante avec la distance à la paroi dans la zone log

→ Echelle de Kolmogorov croissante (plus petites structures proches de la paroi)

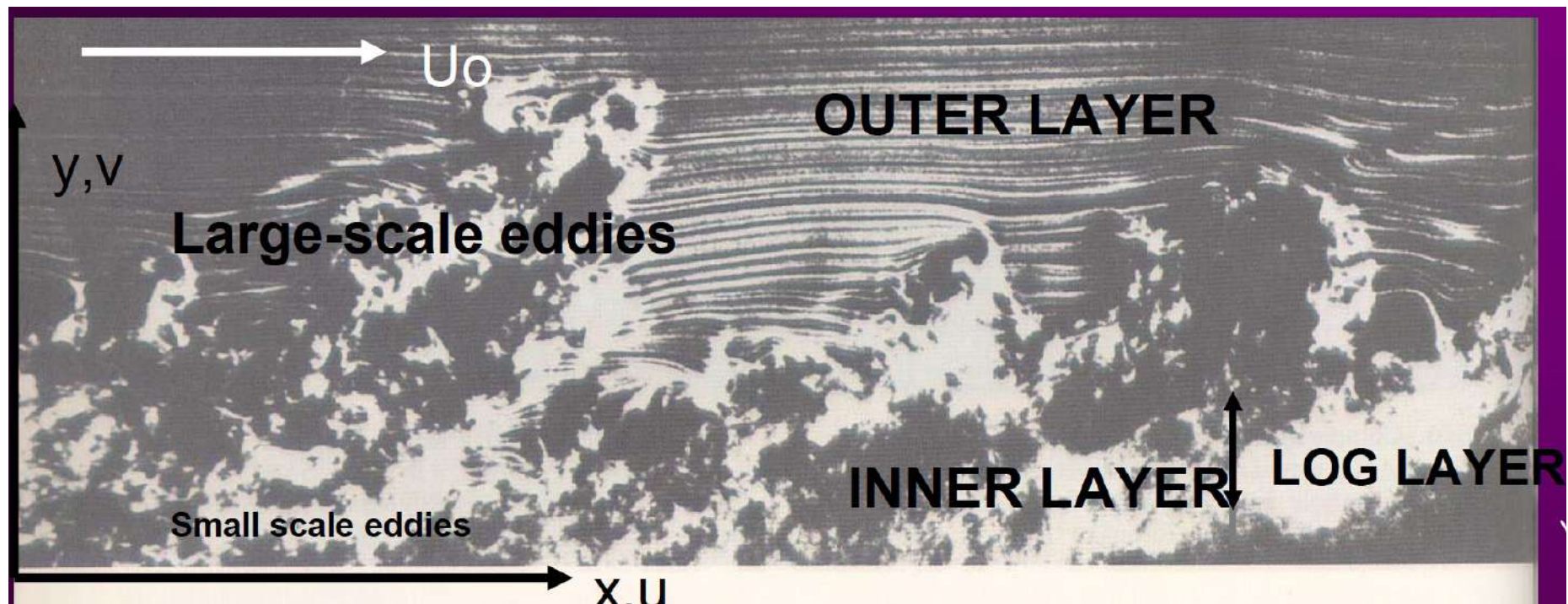
→ Pic de production autour de $x_2^+ \approx 12$

DNS canal plan turbulent à Mach 3
(Sciacovelli, Cinnella, Gloerfelt 2017)



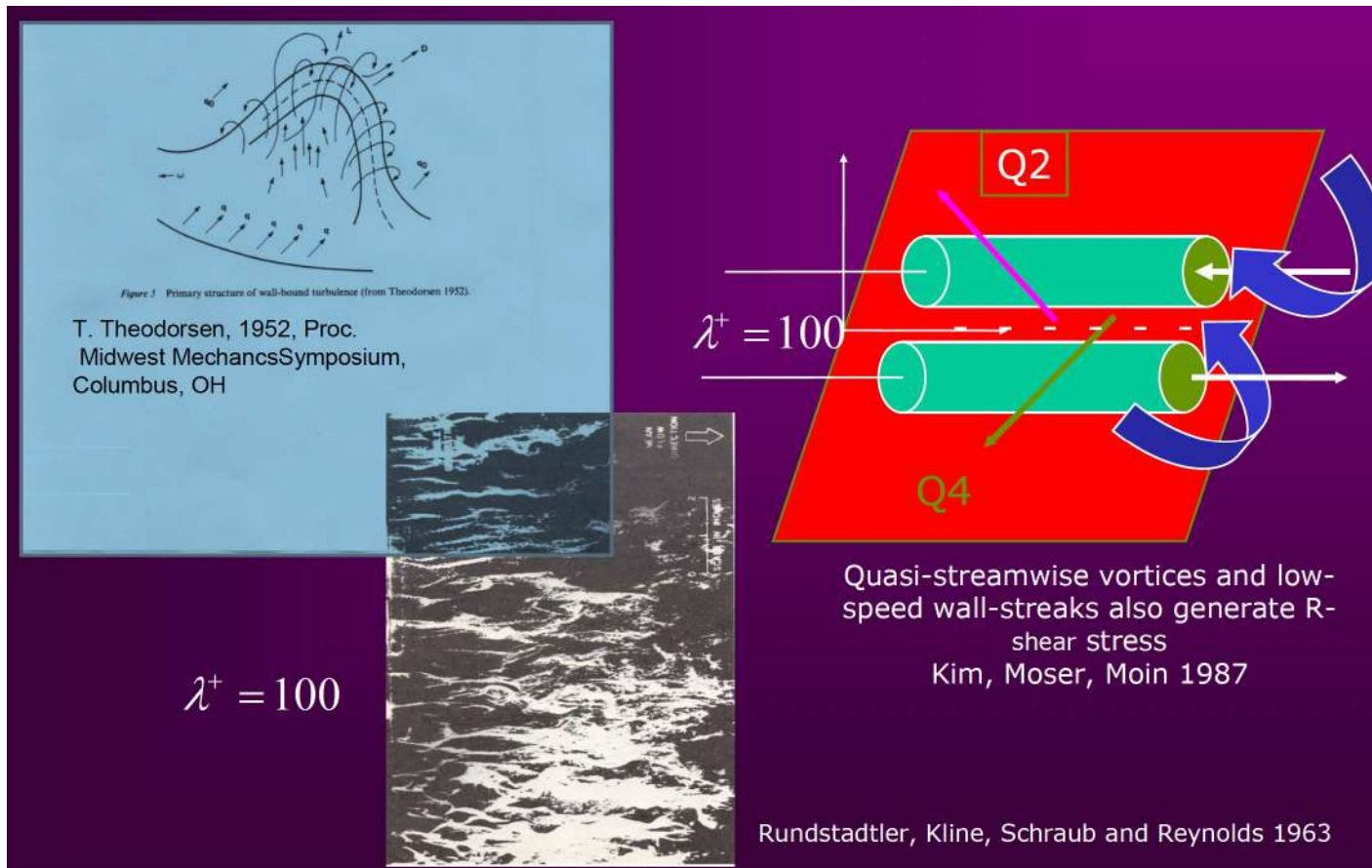
Structures turbulentes

- Les écoulements de paroi sont statistiquement inhomogènes dans la direction normale
- Ils sont caractérisés par des structures très petites près de la paroi et très grandes dans la région extérieure



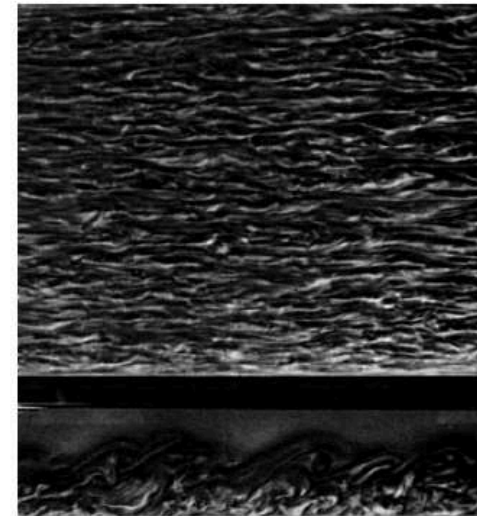
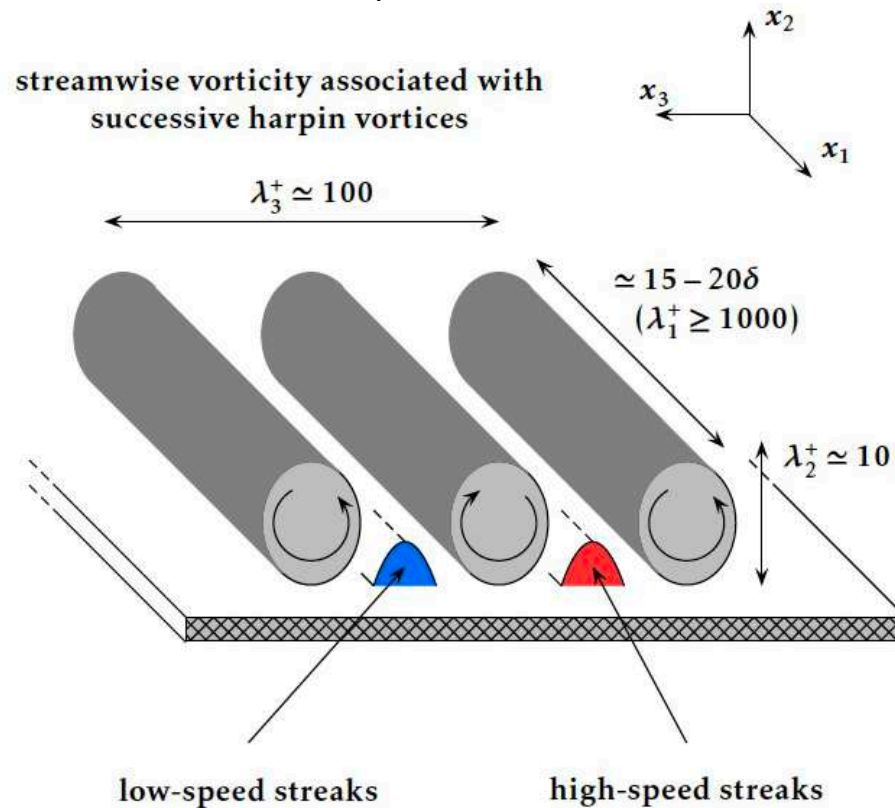
Structures observées dans une couche limite

- Tourbillons en épingle à cheveux, stries et tourbillons longitudinaux



Tourbillons et stries

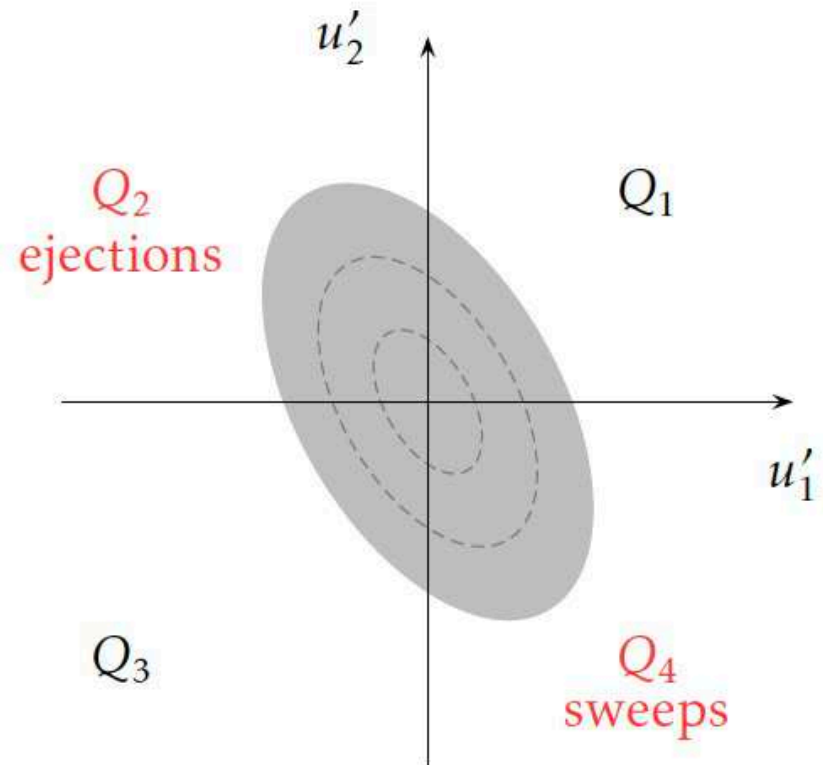
- Structures fortement anisotropes
- Entraînement de fluide basse/haute vitesse



Cantwell, Coles & Dimotakis (1978)

Visualization of sublayer streaks from a suspension of aluminium particles (water, $U_\infty = 15 \text{ cm.s}^{-1}$)

Sweeps/ejections



- Drag generating events fall in the second and fourth quadrant, **positive turbulent production**

$$\mathcal{P} \simeq -\rho \overline{u'_1 u'_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}$$

Coming soon...

- Méthodes numériques et expérimentales pour la turbulence