

Chapitre 4

Méthodes énergétiques

Sommaire

I	Energie de déformation	67
I.1	Définitions	67
I.2	Théorème de Clapeyron	69
I.3	Expression de l'énergie de déformation dans le cadre de la RDM	71
II	Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	74
III	Théorème de Castigliano	77
IV	Théorème de la charge fictive (théorème de Bertrand de Fontviolant)	80
V	Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)	82

I Energie de déformation

I.1 Définitions

Une énergie est une grandeur qui a pour dimension des Joules [J]. On distingue pour un système isolé, les **énergies propres** (énergies "possédées" par le système) et les **énergies échangées** avec l'extérieur.

I.1.a Energies propres

Parmi les énergies propres on a les **énergies externes** liées à la position du système comme :

- l'énergie cinétique E_c
- l'énergie potentielle E_p (par exemple le poids $E_p = \int_{\Omega} \rho g z dV$)

ainsi que l'**énergie interne** U liée aux mouvements et aux interactions entre les particules constitutives du système.

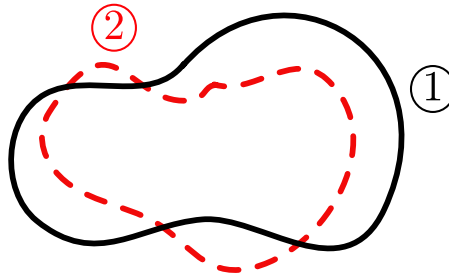
La somme des énergies propres constitue l'énergie totale $E = E_c + E_p + U$.

I.1.b Energies échangées avec l'extérieur

Parmi les énergies échangées avec l'extérieur on a :

- le travail mécanique des efforts extérieurs appliqués au système W_e
- la quantité de chaleur fournie par l'extérieur Q

Considérons un corps Ω ; on peut ramener ce système d'un état ① (état initial) à un état ② (état final) par l'application d'un ensemble de forces extérieures.



D'après le **principe de conservation de l'énergie**, la variation de l'énergie totale du système est égale à la somme des travaux et chaleurs reçus par le système pendant son évolution entre ces deux états :

$$\Delta E = Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) + W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) \quad (4.1)$$

$W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ est le travail des forces extérieures entre les états ① et ②

$Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ est la quantité de chaleur fournie par l'extérieur entre les états ① et ②.

Pour la suite du chapitre, on va faire les hypothèses suivantes :

- le matériau est élastique linéaire
- il ne se produit aucune variation de température
- le poids propre de la poutre est négligé (pour satisfaire au repos initial)
- les déplacements sont petits (donc n'affectent pas la direction d'application des forces)
- les sollicitations extérieures sont appliquées **progressivement** (sans accélération) de manière à n'introduire que des déplacements à **vitesse très lente** (transformation réversible) on peut alors négliger les effets d'inertie soit $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_p = 0$.
- pas d'échange de chaleur, on néglige toute dissipation calorifique (frottements, effets visqueux, ...) d'où $Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = 0$.

D'après (4.1) on a donc :

$$\Delta U = U^{\textcircled{2}} - U^{\textcircled{1}} = W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) \quad (4.2)$$

Si l'on applique le **théorème de l'énergie cinétique** à un corps déformable :

$$\Delta E_c = W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) + W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) \quad (4.3)$$

avec $W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ le travail des forces intérieures entre les états ① et ②.

Comme ici $\Delta E_c = 0$ alors :

$$W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = -W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = \Delta U = U^{\textcircled{2}} - U^{\textcircled{1}}. \quad (4.4)$$

Le passage de l'état initial à l'état final se faisant de **manière réversible** alors $W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ et $W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ ne dépendent que de l'état final et de l'état initial. En particulier, **l'énergie interne de déformation U ne dépend pas de l'ordre de l'application des charges.**

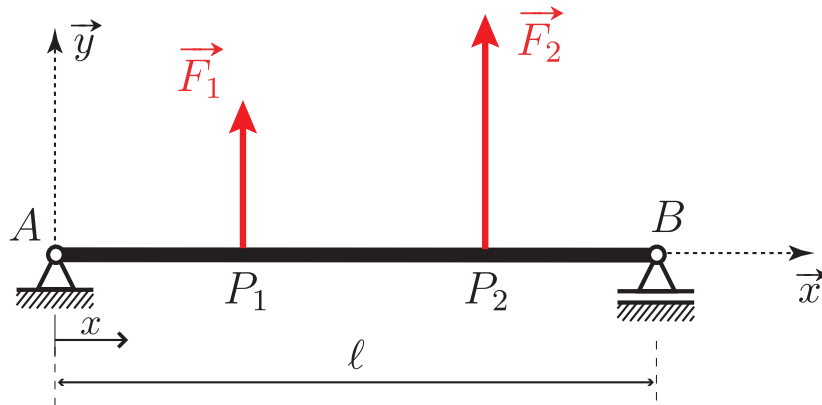
D'après (4.4) pour un état $\textcircled{1}$ au repos ($U^{\textcircled{1}} = 0$ donc $U = U^{\textcircled{2}}$) on a :

$$\boxed{W_e = -W_i = U}. \quad (4.5)$$

I.2 Théorème de Clapeyron

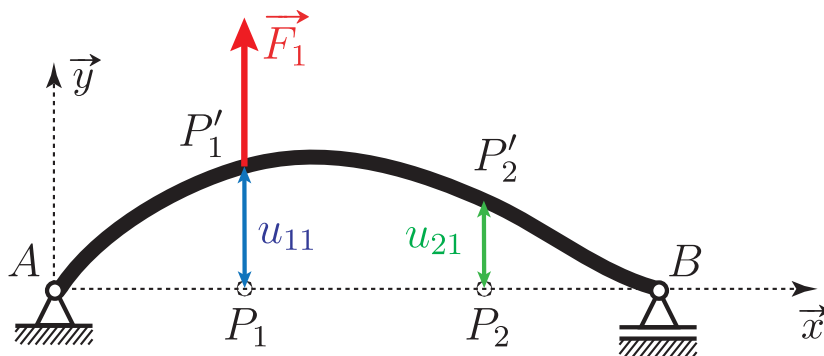
I.2.a Coefficients d'influence

On considère une poutre $[AB]$ en équilibre sous l'action de deux forces concentrées \vec{F}_1 et \vec{F}_2 appliquées respectivement en P_1 et P_2 .



Remarque : Le système étudié est isostatique.

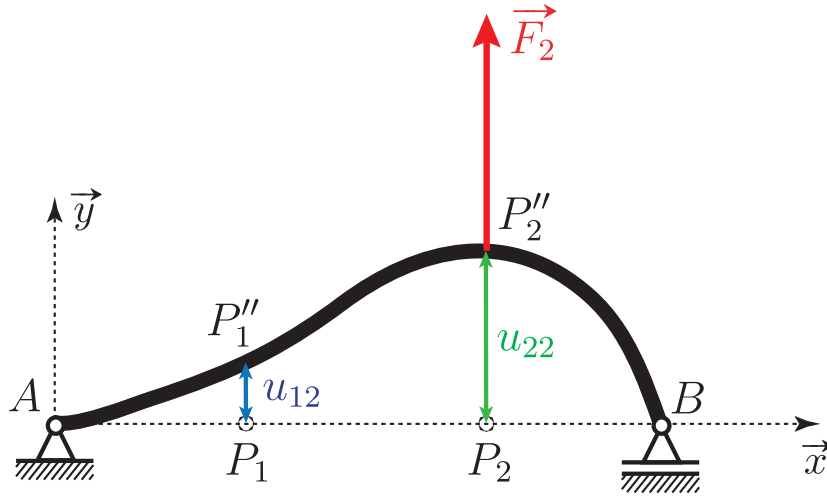
L'application de la force \vec{F}_1 en P_1 va causer un déplacement du point P_1 ($u_{11} = a_{11}F_1$) mais aussi du point P_2 ($u_{21} = a_{21}F_1$).



Remarque : Les déplacements ici sont dans la direction de l'effort imposé.

La proportionnalité entre les forces et les déplacements nous permet d'introduire les **coefficients d'influence** (a_{11} et a_{21} qui ont la dimension d'une souplesse inverse de la raideur) qui représentent ici les déplacements de P_1 et P_2 lorsqu'on applique une force unitaire en P_1 .

De même si l'on applique une force \vec{F}_2 en P_2 cela cause des déplacements des points P_1 ($u_{12} = a_{12}F_2$) et P_2 ($u_{22} = a_{22}F_2$).



On pose :

$\delta_1 = u_{11} + u_{12} = a_{11}F_1 + a_{12}F_2$ le déplacement projeté du point P_1 dans la direction de \vec{F}_1

$\delta_2 = u_{21} + u_{22} = a_{21}F_1 + a_{22}F_2$ le déplacement projeté du point P_2 dans la direction de \vec{F}_2 .

Pour une poutre en équilibre sous l'action de forces concentrées $\vec{F}_i = F_i \vec{n}_i$ ($1 \leq i \leq n$) alors le déplacement projeté de \vec{F}_i sur sa direction est :

$$\delta_i = \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j \quad (4.6)$$

où u_{ij} est la contribution du déplacement provoqué au point P_i par la force \vec{F}_j appliquée en P_j .

Remarque :

Le **1^{er} indice** indique l'**effet** (ici le déplacement en P_i).

Le **2nd indice** indique la **cause** (ici la force \vec{F}_j appliquée en P_j).

1.2.b Formule de Clapeyron

Le travail des forces extérieures est indépendant de l'ordre d'application des forces. On peut faire varier les forces de 0 à leur maximum F_i .

D'après la loi de Hooke, si l'on applique kF_i ($0 < k < 1$), le déplacement de la force kF_i est $k\delta_i$.

Le **travail élémentaire** de l'ensemble des forces s'écrit donc :

$$dW_e = \sum_{i=1}^n (kF_i) d(k\delta_i) = \sum_{i=1}^n kF_i \delta_i dk \quad (4.7)$$

donc

$$W_e = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (k F_i) d(k \delta_i) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 k dk \right) F_i \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i \delta_i \quad (4.8)$$

Remarque :

On peut appliquer le même raisonnement à des couples C_ℓ (autour de \vec{n}_ℓ)

d'où la formule de Clapeyron :

$$U = W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^r C_\ell \omega_\ell. \quad (4.9)$$

On remarquera que l'énergie de déformation U ne dépend que du **travail des forces extérieures données**.

I.3 Expression de l'énergie de déformation dans le cadre de la RDM

Pour un solide élastique linéaire occupant un volume V , l'énergie interne de déformation emmagasinée par le solide est :

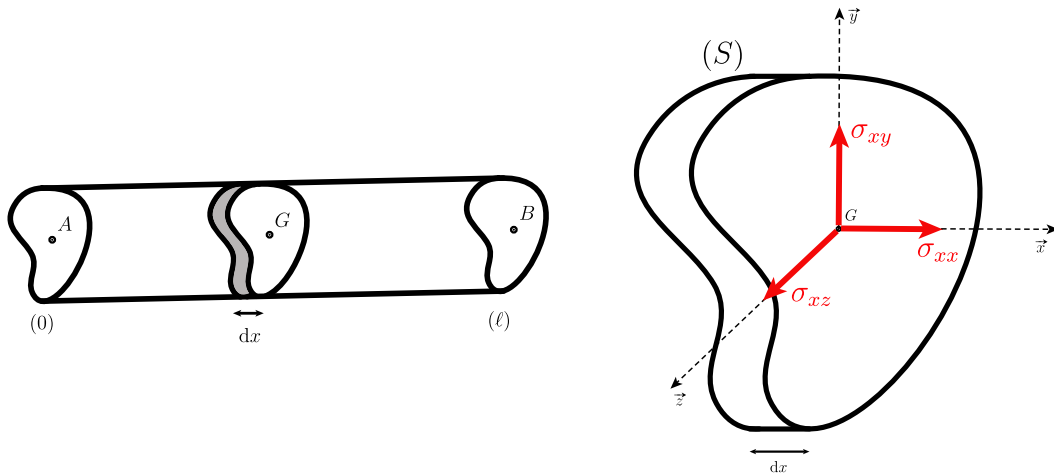
$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dV \quad (4.10)$$

ou en indiciel

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4.11)$$

avec σ_{ij} et ε_{ij} respectivement les composantes du tenseur des contraintes et des déformations.

On suppose que le solide étudié est une poutre $[AB]$ soumise à des forces extérieures généralisées \vec{F}_i ($1 \leq i \leq n$).



Pour une section droite (S) donnée dans le cas des poutres orientées suivant la direction \vec{x} seules interviennent les composantes σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{xz} [voir (3.14)] :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc ici :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}] dV \quad (4.12)$$

et d'après la loi de Hooke [voir (3.15) à (3.17)] :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\mu} \text{ et } 2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\mu} \text{ avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ le module de rigidité au cisaillement.}$$

On obtient alors :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{\sigma_{xx}^2}{E} + \frac{1}{\mu}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \right] dV \quad (4.13)$$

pour un matériau homogène :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \iiint_V \sigma_{xx}^2 dV + \frac{1}{\mu} \iiint_V (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dV \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{1}{E} \iint_S \sigma_{xx}^2 dS + \frac{1}{\mu} \iint_S (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dS \right] dx \end{aligned}$$

avec d'après (3.30), (3.34) et (3.35) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \\ \sigma_{xy} &= \frac{T_y(x)}{S} - z \frac{M_t(x)}{I_G} \\ \sigma_{xz} &= \frac{T_z(x)}{S} + y \frac{M_t(x)}{I_G} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sigma_{xx}^2 = \left(\frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right)^2 + y^2 \left(\frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \right)^2 - 2y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \left(\frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 &= \left(\frac{T_y(x)}{S} \right)^2 + z^2 \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 - 2z \frac{T_y(x)}{S} \frac{M_t(x)}{I_G} + \left(\frac{T_z(x)}{S} \right)^2 + y^2 \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 \\ &\quad + 2y \frac{T_z(x)}{S} \frac{M_t(x)}{I_G} \end{aligned}$$

Remarque : On va supposer que $(G\vec{y})$ et $(G\vec{z})$ sont **axes principaux d'inertie** d'où :

$$\iint_S y dS = m_{Gz} = 0; \quad \iint_S z dS = m_{Gy} = 0 \text{ et } \iint_S yz dS = I_{Gyz} = 0.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \iint_S \sigma_{xx}^2 dS &= \left(\frac{N(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right)^2 I_{Gy} + \left(\frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \right)^2 I_{Gz} \\ &= \frac{(N(x))^2}{S} + \frac{(M_y(x))^2}{I_{Gy}} + \frac{(M_z(x))^2}{I_{Gz}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dS &= \left(\frac{T_y(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 I_{Gy} + \left(\frac{T_z(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 I_{Gz} \\ &= \frac{(T_y(x))^2}{S} + \frac{(T_z(x))^2}{S} + \frac{(M_t(x))^2}{I_G} \quad \text{car } I_G = I_{Gy} + I_{Gz} \end{aligned}$$

L'énergie interne de déformation pour une poutre droite de longueur ℓ à section droite symétrique est donc :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{(N(x))^2}{ES} + \frac{(M_y(x))^2}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} + \frac{(T_y(x))^2}{\mu S} + \frac{(T_z(x))^2}{\mu S} + \frac{(M_t(x))^2}{\mu I_G} \right\} dx \quad (4.14)$$

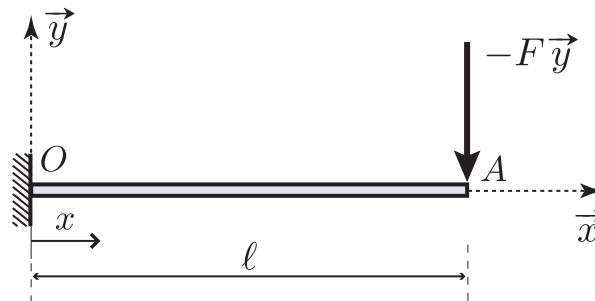
Pour une poutre droite plane dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{(N(x))^2}{ES} + \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} + \frac{(T_y(x))^2}{\mu S} \right\} dx \quad (4.15)$$

Dans le cas où l'**élancement** de la poutre est **suffisamment grand**, on peut négliger les efforts tranchants (voire ceux de l'effet normal).

• Exemple d'application du théorème de Clapeyron :

On considère une poutre $[OA]$ de longueur ℓ , constituée d'un matériau homogène, encastree en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ constante en $x = \ell$. On cherche à calculer la flèche en A .



En utilisant la méthode des coupures, on trouve rapidement que $N(x) = 0$, $T_y(x) = -F$ et $M_z(x) = F(x - \ell)$.

En négligeant les effets de l'effort tranchant, l'expression de l'énergie de déformation pour la poutre $[OA]$ est alors :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} dx = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI_{Gz}} \int_0^\ell (x - \ell)^2 dx \stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{F^2}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 = \frac{F^2 \ell^3}{6EI_{Gz}}.$$

D'autre part, le théorème de Clapeyron nous permet d'écrire que :

$$U = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{u}_A = \frac{1}{2} (-F\vec{y}) \cdot (u_A \vec{x} + v_A \vec{y}) = -\frac{Fv_A}{2}$$

donc

$$-\frac{Fv_A}{2} = \frac{F^2 \ell^3}{6EI_{Gz}} \quad \text{soit} \quad v_A = -\frac{F \ell^3}{3EI_{Gz}}.$$

Remarque :

Le théorème de Clapeyron ne peut calculer le déplacement (ou la rotation) qu'au point où est appliquée la charge ponctuelle (ou le couple). On est également dans l'impossibilité de calculer la flèche pour une charge répartie d'où la nécessité d'utiliser d'autres méthodes énergétiques.

II Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

On considère une poutre en équilibre sous l'action de deux systèmes de forces :

- a) le système de forces \vec{F}_i appliquées aux points P_i
- b) le système de forces \vec{F}_j appliquées aux points P_j

Sous l'action de \vec{F}_i , les déplacements projetés sur la direction \vec{F}_i sont : u_{ii} pour le point P_i et u_{ji} pour le point P_j .

Sous l'action de \vec{F}_j , les déplacements projetés sur la direction \vec{F}_j sont : u_{jj} pour le point P_j et u_{ij} pour le point P_i .

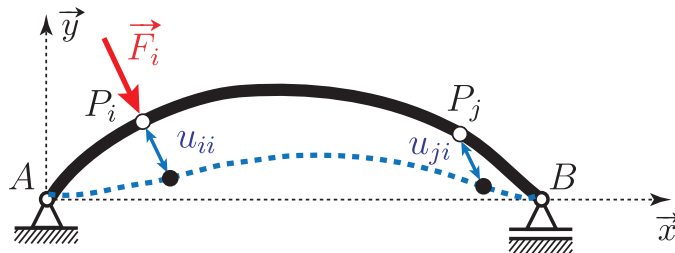
Remarque :

Le premier indice correspond à l'effet (déplacement) et le second indice correspond à la cause (force).

Comme l'énergie interne de déformation ne dépend pas de l'ordre de l'application des charges, on va évaluer cette énergie due à l'action simultanée de \vec{F}_i et de \vec{F}_j de deux manières :

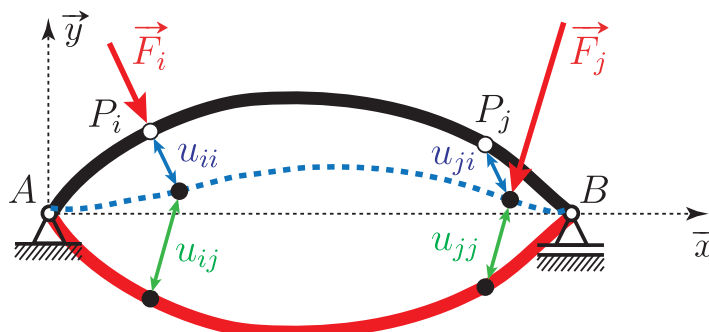
◦ **Phase I :**

- (a) On applique d'abord la force \vec{F}_i au point P_i



En utilisant le théorème de Clapeyron on obtient l'énergie de déformation mise en jeu lors cette première étape : $U_I^{(a)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii}$.

- (b) Lors d'une seconde étape on applique la force \vec{F}_j au point P_j



L'énergie de déformation mise en jeu lors cette seconde étape est : $U_I^{(b)} = \frac{1}{2}F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$.

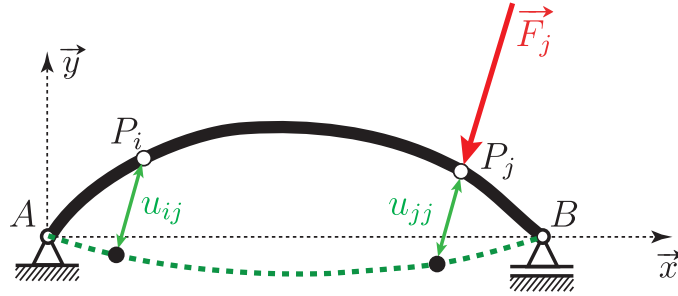
△ Il faut tenir compte du fait que \vec{F}_i reste constante, se déplace et effectue le travail $F_i u_{ij}$.

L'énergie de déformation totale pour la phase I est donc :

$$U_I^{tot} = U_I^{(a)} + U_I^{(b)} = \frac{1}{2}F_i u_{ii} + \frac{1}{2}F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$$

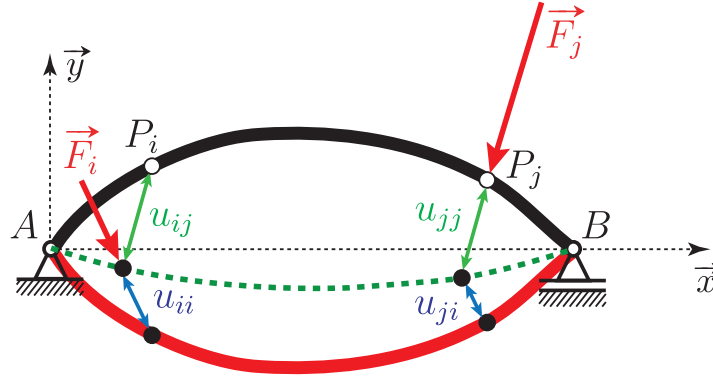
○ **Phase II :**

(a) On applique d'abord la force \vec{F}_j au point P_j



En utilisant le théorème de Clapeyron on obtient l'énergie de déformation mise en jeu lors cette première étape : $U_{II}^{(a)} = \frac{1}{2}F_j u_{jj}$.

(b) Lors d'une seconde étape on applique la force \vec{F}_i au point P_i



L'énergie de déformation mise en jeu lors cette seconde étape est : $U_{II}^{(b)} = \frac{1}{2}F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$.

L'énergie de déformation totale pour la phase II est donc :

$$U_{II}^{tot} = U_{II}^{(a)} + U_{II}^{(b)} = \frac{1}{2}F_j u_{jj} + \frac{1}{2}F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$

Comme $U_I^{tot} = U_{II}^{tot}$ on obtient alors la relation :

$$\boxed{F_i u_{ij} = F_j u_{ji}} \quad (4.16)$$

d'où le **théorème de Maxwell-Betti** :

Le travail du système de forces \vec{F}_i pour les déplacements provoqués par le système de forces \vec{F}_j est égal au travail du système de forces \vec{F}_j pour les déplacements provoqués par \vec{F}_i .

Remarque :

En introduisant les coefficients d'influence a_{ij} on obtient la relation $u_{ij} = a_{ij}F_j$ de même $u_{ji} = a_{ji}F_i$.

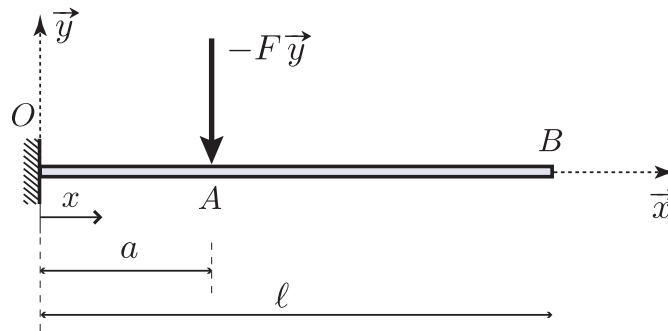
D'après (4.16) :

$$F_i u_{ij} = F_i a_{ij} F_j = F_j u_{ji} = F_j a_{ji} F_i \quad \text{d'où la relation} \quad \boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

Le théorème de Maxwell-Betti revient donc à écrire l'égalité des coefficients d'influence réciproques.

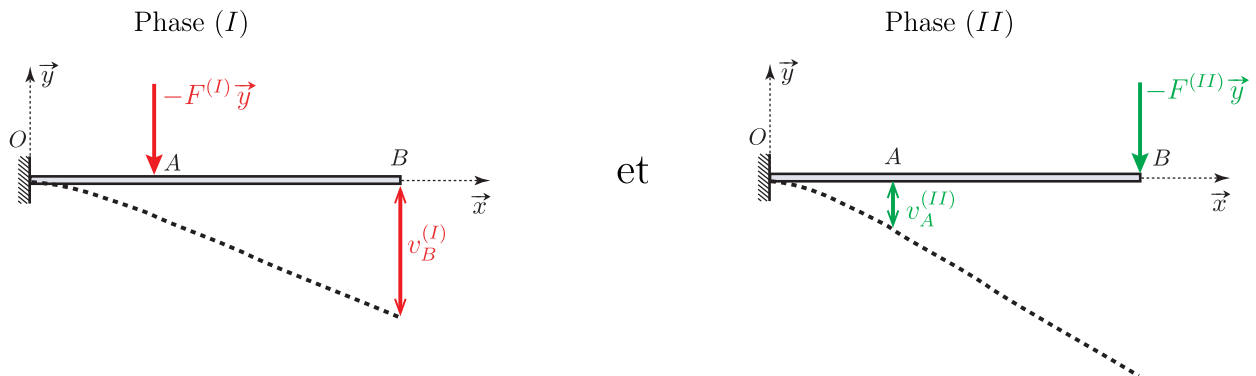
• **Exemple d'application du théorème de Maxwell-Betti :**

On reprend la poutre de l'exemple 2 de la Section VI du chapitre 2.



On veut calculer la flèche en B provoquée par la force $-F\vec{y}$ appliquée en A ($x = a$).

On va faire appel au théorème de Maxwell-Betti en considérant les deux phases suivantes :



Lors de la phase (II) :

$$M_z^{(II)} = EI_{Gz} \frac{d\omega_z^{(II)}(x)}{dx} = F^{(II)}(x - \ell)$$

$\Rightarrow EI_{Gz} \omega_z^{(II)}(x) = F^{(II)}\left(\frac{x^2}{2} - \ell x\right) + C_1$
 comme $\omega_z^{(II)}(0) = 0$ (encastrement en O) donc $C_1 = 0$.

En utilisant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli : $EI_{Gz} \omega_z^{(II)}(x) = EI_{Gz} \frac{du_y^{(II)}(x)}{dx} = F^{(II)}\left(\frac{x^2}{2} - \ell x\right)$
 soit $EI_{Gz} u_y^{(II)}(x) = F^{(II)}\left(\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2}\right) + C_2$ avec $C_2 = 0$ car $u_y^{(II)}(0) = 0$ (encastrement en O).

Par conséquent :

$$v_A^{(II)} = u_y^{(II)}(a) = \frac{F^{(II)}}{6EI_{Gz}} a^2(a - 3\ell)$$

D'après le théorème de Maxwell-Betti :

$$(-F^{(I)} \vec{y}) \cdot (v_A^{(II)} \vec{y}) = (-F^{(II)} \vec{y}) \cdot (v_B^{(I)} \vec{y}) \Rightarrow F^{(I)} v_A^{(II)} = F^{(II)} v_B^{(I)}$$

On obtient donc la relation :

$$v_B^{(I)} = \frac{F^{(I)}}{F^{(II)}} v_A^{(II)} = \frac{F^{(I)}}{6EI_{Gz}} a^2(a - 3\ell)$$

Comme $v_B^{(I)} = v_B$ et $F^{(I)} = F$, on a donc la valeur de la flèche en B : $v_B = -\frac{F}{6EI_{Gz}} a^2(3\ell - a)$.

III Théorème de Castigliano

On part de la formule de Clapeyron (4.9) :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n u_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} F_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} F_i F_j.$$

On isole les $2n - 1$ termes qui dépendent de la force F_k :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} F_i F_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} F_k F_j + \frac{1}{2} a_{kk} (F_k)^2 + \bar{U}$$

où \bar{U} est indépendante de F_k .

On dérive cette expression par rapport à F_k :

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} F_j + a_{kk} F_k.$$

On réintègre le dernier terme dans les deux premiers :

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} F_j.$$

On utilise alors le théorème de Maxwell-Betti ($a_{ki} = a_{ik}$) d'où :

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ki} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} F_j = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} \delta_k = \delta_k.$$

Théorème de Castigliano :

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force \vec{F}_i appliquée à la poutre est égale au déplacement δ_i du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (4.17)$$

De même, la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à un couple \vec{C}_ℓ est égale à la rotation ω_ℓ de la poutre au point de la section droite où s'applique ce couple :

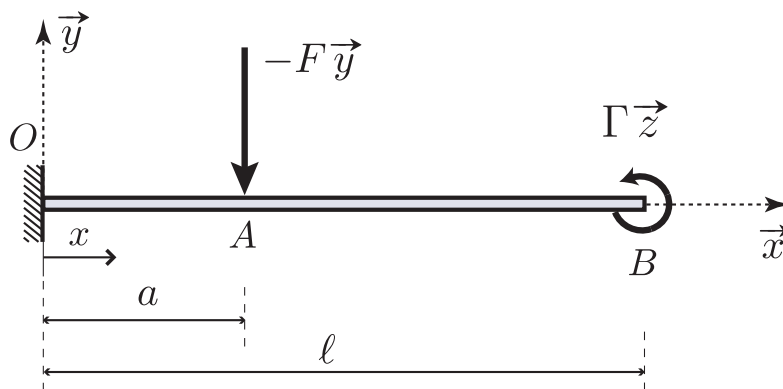
$$\omega_\ell = \frac{\partial U}{\partial C_\ell} \quad (4.18)$$

Remarques :

- Le théorème de Castigliano ne permet de calculer les déplacements qu'aux points où les charges sont appliquées et selon leur direction d'application. On ne peut pas par exemple déterminer la rotation d'une section au droit de laquelle une charge ponctuelle est appliquée.
- Les forces doivent être **indépendantes**. Si deux forces extérieures appliquées ont même intensité F , il est alors nécessaire de les renommer F_1 et F_2 par exemple (à priori différentes), de calculer les δ_i puis de remplacer dans les résultats obtenus $F_1 = F_2 = F$.

• Exemple d'application du théorème de Castigliano :

On considère une poutre de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en $x = a$ et à un couple $\Gamma\vec{z}$ à son extrémité $x = \ell$.



On veut calculer le déplacement vertical au point A ainsi que la rotation de la section droite au point B en utilisant le théorème de Castigliano.

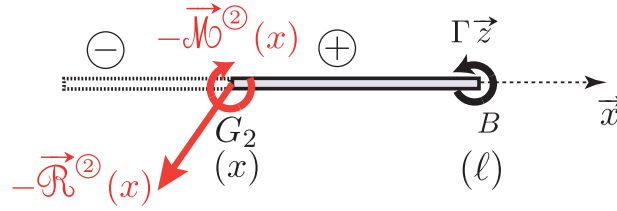
On néglige dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant et comme d'autre part l'effort normal est nul sur toute la poutre, on nécessite alors de calculer uniquement le moment fléchissant autour de l'axe ($G\vec{z}$). La méthode la plus simple ici est la méthode des coupures où l'on considère les deux domaines suivants :

□ Pour $a < x \leq \ell$ (domaine ②)

On coupe le domaine ② en un point G_2 d'abscisse x et on isole la partie droite (ici \oplus).
On considère donc les efforts de la partie \ominus sur la partie \oplus :

$$\{\mathcal{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_{G_2} = -\{\mathcal{C}_{\text{int}}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{\mathcal{R}}^{\textcircled{2}}(x) \\ -\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{2}}(x) \end{array} \right\}_{G_2}$$

On étudie l'équilibre de la portion $[G_2B]$



▷ Théorème du moment en G_2 :

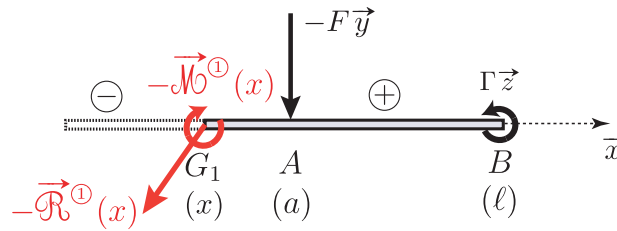
$$-\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{2}}(x) + \Gamma \vec{z} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{2}}(x) = M_z^{\textcircled{2}}(x) \vec{z} = \Gamma \vec{z} \quad \Rightarrow \quad M_z^{\textcircled{2}}(x) = \Gamma .$$

□ Pour $0 \leq x < a$ (domaine ①)

On coupe le domaine ① en un point G_1 d'abscisse x et on isole la partie droite (ici \oplus).
On considère également les efforts de la partie \ominus sur la partie \oplus :

$$\{\mathcal{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_{G_1} = -\{\mathcal{C}_{\text{int}}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{\mathcal{R}}^{\textcircled{1}}(x) \\ -\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) \end{array} \right\}_{G_1}$$

On étudie l'équilibre de la portion $[G_1B]$



▷ Théorème du moment en G_1 :

$$-\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) + \overrightarrow{G_1A} \wedge (-F\vec{y}) + \Gamma \vec{z} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) = M_z^{\textcircled{1}}(x) \vec{z} = \Gamma \vec{z} + (a-x) \vec{x} \wedge (-F\vec{y})$$

$$\Rightarrow \quad M_z^{\textcircled{1}}(x) = \Gamma + F(x-a) .$$

En appliquant le théorème de Castigliano, on peut calculer le déplacement vertical v_A (suivant $-\vec{y}$ car $\vec{F} = -F\vec{y}$) au point A :

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial F} \quad \text{avec ici} \quad U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(M_z^{\textcircled{1}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{(M_z^{\textcircled{2}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx$$

Remarque :

Plutôt que de calculer l'énergie de déformation U , qui passe par un calcul intégral du terme $(M_z(x))^2$, puis de dériver U par rapport à F , il est souvent plus commode de dériver directement sous l'intégrale.

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[\frac{1}{2} \int_0^a \frac{(M_z^{(1)}(x))^2}{EI_{Gz}} dx \right] + \frac{\partial}{\partial F} \left[\frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{(M_z^{(2)}(x))^2}{EI_{Gz}} dx \right]$$

Le matériau étant homogène, on peut sortir le terme EI_{Gz} des intégrales et on obtient alors :

$$v_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a M_z^{(1)}(x) \frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial F} dx + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_a^\ell M_z^{(2)}(x) \frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial F} dx$$

or $\frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial F} = (x-a)$ et $\frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial F} = 0$ d'où :

$$v_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a [F(x-a)^2 + \Gamma(x-a)] dx \stackrel{X=x-a}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ F \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-a}^0 + \Gamma \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-a}^0 \right\}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{a^2}{6EI_{Gz}} (2aF - 3\Gamma) \quad (\text{ici suivant } -\vec{y}).$$

En appliquant le théorème de Castigliano, on peut également calculer la rotation de la section droite (autour de \vec{z}) au point B :

$$\omega_B = \frac{\partial U}{\partial \Gamma} = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a M_z^{(1)}(x) \frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial \Gamma} dx + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_a^\ell M_z^{(2)}(x) \frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial \Gamma} dx$$

or $\frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial \Gamma} = 1$ d'où :

$$\omega_B = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a [F(x-a) + \Gamma] dx + \int_a^\ell \Gamma dx \stackrel{X=x-a}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ F \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-a}^0 + \Gamma a + \Gamma(\ell - a) \right\}$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{1}{2EI_{Gz}} (2\Gamma\ell - a^2F) \quad (\text{suivant } \vec{z}).$$

IV Théorème de la charge fictive (théorème de Bertrand de Fontviolant)

Théorème de la charge fictive :

On considère une poutre soumise à n charges \vec{F}_i ($1 \leq i \leq n$) appliquées aux points P_i . On applique en un point non chargé P une **force fictive** Φ de direction \vec{n} fixée.

Si $U(\Phi, F_1, \dots, F_n)$ désigne l'énergie de déformation, alors le déplacement du point P (selon la direction \vec{n}) est égal à :

$$\delta = \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\Phi, F_i) = \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\Phi, F_i) \Big|_{\Phi=0}. \quad (4.19)$$

Remarques :

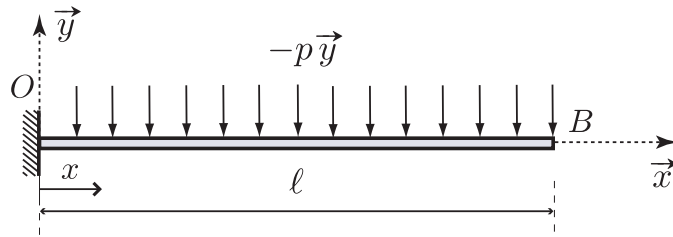
- On applique le même raisonnement si l'on applique un couple fictif $\mathcal{C}\vec{n}$ en P . La rotation de la section droite en P autour de la direction \vec{n} est alors :

$$\omega = \lim_{\mathcal{C} \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{C}}(\mathcal{C}, F_i) = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{C}}(\mathcal{C}, F_i) \Big|_{\mathcal{C}=0}. \quad (4.20)$$

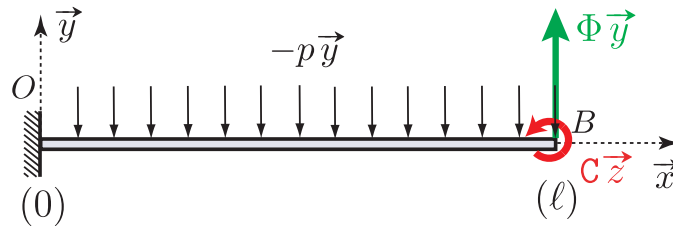
- L'application du théorème de la charge fictive est pratique pour calculer les flèches et rotations des sections droites aux points où les chargements ponctuels ne sont pas appliqués ou bien pour le cas de poutres soumises à des charges réparties.

• Exemple d'application du théorème de la charge fictive :

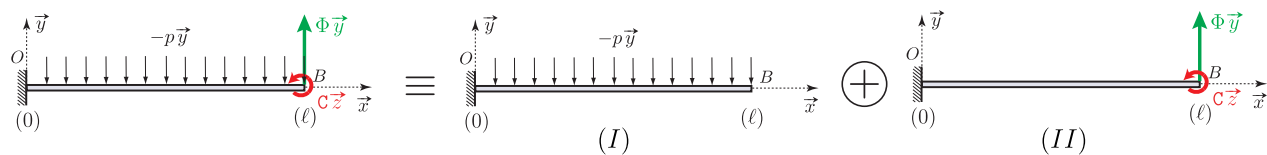
On considère une poutre console de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ soumise à des charges transversales uniformément réparties de densité $-p\vec{y}$ constante et libre d'efforts à son extrémité $x = \ell$.



On veut calculer le déplacement vertical et la rotation de la section droite au point B en utilisant le théorème de la charge fictive. Il suffit alors de rajouter une force fictive $\Phi\vec{y}$ et un couple fictif $\mathcal{C}\vec{z}$ en B . Le nouveau problème à résoudre est le suivant :



Dans le cadre linéaire (HPP et élasticité linéaire), il est souvent judicieux de décomposer un problème plus complexe en plusieurs problèmes plus simples pour lesquels les solutions sont connues ou plus faciles à calculer. On pourra alors appliquer le **théorème de superposition** pour déterminer la solution de notre problème initial.



On néglige dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant, on doit donc ici calculer uniquement le moment fléchissant autour de l'axe $(G\vec{z})$.

◦ Le calcul du torseur de cohésion pour le problème (I) a déjà été effectué à l'exemple 1 du chapitre 2 section VI : $M_z^{(I)}(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2$.

◦ En appliquant la méthode des coupures au problème (II), on trouve facilement que : $M_z^{(II)}(x) = -\Phi(x - \ell) + \mathcal{C}$.

Le théorème de superposition nous permet donc de dire que le moment fléchissant $M_z(x)$ pour notre problème est :

$$M_z(x) = M_z^{(I)}(x) + M_z^{(II)}(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - \Phi(x - \ell) + \mathcal{C}.$$

En appliquant le théorème de la charge fictive, on obtient :

$$\begin{aligned} v_B = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{(\Phi=0, \mathcal{C}=0)} &= \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{\dagger} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \Big|_{\dagger} \frac{\partial M_z(x)}{\partial \Phi} \Big|_{\dagger} dx \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 \right) \cdot (-(x - \ell)) dx \stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{p}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^4}{4} \right]_{-\ell}^0 \\ &= -\frac{p\ell^4}{8EI_{Gz}} \quad (\text{suivant } \vec{y}) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \omega_B = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{C}} \Big|_{(\Phi=0, \mathcal{C}=0)} &= \frac{\partial U}{\partial \mathcal{C}} \Big|_{\dagger} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \Big|_{\dagger} \frac{\partial M_z(x)}{\partial \mathcal{C}} \Big|_{\dagger} dx \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 \right) \cdot (1) dx \stackrel{X=x-\ell}{=} -\frac{p}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 \\ &= -\frac{p\ell^3}{6EI_{Gz}} \quad (\text{suivant } \vec{z}) \end{aligned}$$

V Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

- (i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.
- (ii) On applique à ce système isostatique, en plus des chargements extérieurs les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs. On devra donc à cette étape faire un choix pour les inconnues hyperstatiques X_R .

- (iii) Par l'application du théorème de Castigliano à l'action de contact d'un appui sans frottement (ou encastrement), on calcule les déplacements et/ou les rotations du système rendu isostatique. Comme les appuis sont invariables, les réactions hyperstatiques dues aux liaisons surabondantes ne travaillent pas pendant la déformation du système.

On peut donc énoncer le **théorème de Menabrea** (cas particulier du théorème de Castigliano) :

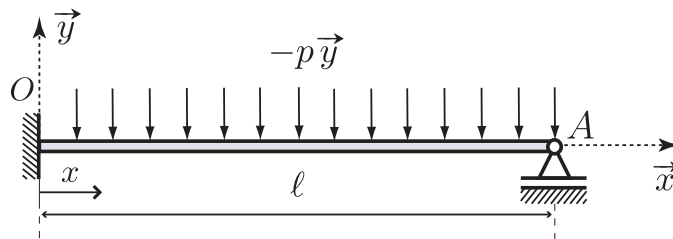
Les valeurs des **réactions hyperstatiques** correspondant à l'équilibre du système rendent **minimale** (stationnaire) l'énergie de déformation U :

$$\frac{\partial U}{\partial X_R} = 0 \quad (4.21)$$

avec X_R les inconnues hyperstatiques.

• **Exemple d'application du théorème de Menabrea :**

On considère une poutre de longueur ℓ , encastree en O ($x = 0$) et sous appui simple glissant en A ($x = \ell$) soumise à des charges transversales uniformément réparties de densité $-p\vec{y}$ constante.



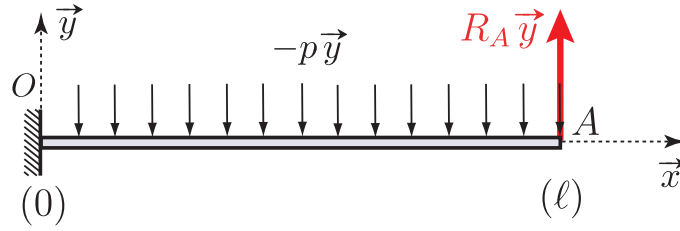
On veut déterminer la (les) inconnue(s) hyperstatique(s) de notre problème en utilisant le théorème de Menabrea.

- i) On calcule le degré d'hyperstatisme de la poutre et on choisit les inconnues hyperstatiques :

Pour une structure plane, on dispose de 3 équations pour écrire l'équilibre global de la structure (2 pour le théorème de la résultante, 1 pour le théorème du moment d'après le PFS), donc pour le cas plan $h_{2D} = r - 3$ où r représente le nombre d'inconnues de liaison.

Pour notre exemple $r = 4$, une inconnue de liaison pour l'appui simple glissant en A ($\vec{R}_A = R_A \vec{y}$) et trois pour l'encastrement en O ($\vec{R}_O = R_{Ox} \vec{x} + R_{Oy} \vec{y}$ et $\vec{M}_O = M_O \vec{z}$). Par conséquent $h_{2D} = 4 - 3 = 1$. La poutre est hyperstatique de degré 1 et l'on choisit de prendre R_A comme inconnue hyperstatique (choix le plus judicieux ici car c'est la seule inconnue qui est isolée à l'extrémité droite).

R_A est donc considérée par la suite comme un chargement extérieur pour rendre notre système isostatique. Le nouveau problème (système équivalent) à résoudre est le suivant :



ii) On calcule les éléments de réduction du torseur de cohésion pour notre système équivalent :

Comme les effets de l'effort tranchant seront négligés dans le calcul de l'énergie de déformation, on a besoin uniquement de connaître le moment fléchissant autour de l'axe $(G\vec{z})$.

Par analogie avec les calculs faits à l'exemple précédent on trouve que :

$$M_z(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - R_A(x - \ell).$$

iii) Théorème de Menabrea :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial R_A} dx \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - R_A(x - \ell) \right) \cdot (-(x - \ell)) dx \\ &\stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{p}{2} \left[\frac{X^4}{4} \right]_{-\ell}^0 + R_A \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 \right\} = \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{-p\ell^4}{8} + \frac{R_A\ell^3}{3} \right\}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$R_A = \frac{3p\ell}{8}.$$

En remplaçant R_A dans les éléments de réduction du torseur de cohésion on pourra maintenant calculer les déplacements ou les rotations en n'importe quels points de la poutre.