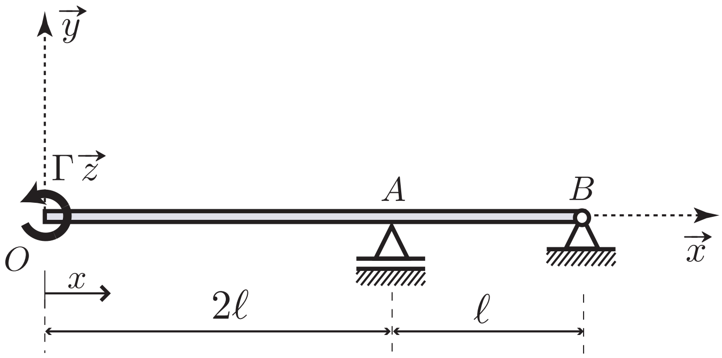
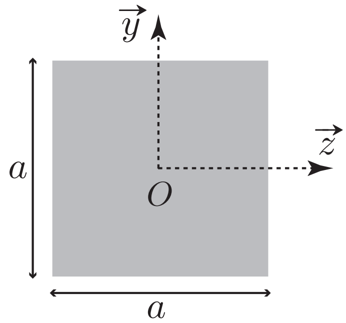
Structures élastiques - LU3ME006
Problème 3

Exo 1 (~ 6 points)

On considère une poutre droite $[OB]$ dirigée suivant l'axe $O\vec{x}$, de longueur 3ℓ. La poutre repose en A ($x = 2\ell$) sur un appui simple mobile et en B ($x = 3\ell$) sur un appui simple fixe. On applique un couple ponctuel autour de $\vec{z}$ d'intensité $\Gamma > 0$ en son extrémité O ($x = 0$). Sa section carrée de côté a suivant le plan Oyz est constante le long de la poutre.





On désigne par I le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module d'élasticité E. Enfin, on fait l'***hypothèse d'Euler-Bernoulli***.

1) En reprenant les résultats établis au problème 2 (voir la correction)

$$\begin{aligned} M_z^{①}(x) &= -\Gamma && (0 \leq x \leq 2\ell) \\ M_z^{②}(x) &= \frac{\Gamma}{\ell}(x - 3\ell) && (2\ell \leq x \leq 3\ell) \end{aligned}$$

et en s'appuyant sur les lois de comportement et les relations cinématiques, déterminer en fonction de Γ le long de la poutre $[OB]$:

- la rotation de la section droite $\omega_z(x)$ ($\omega_z^{①}(x)$ pour $0 \leq x \leq 2\ell$ et $\omega_z^{②}(x)$ pour $2\ell \leq x \leq 3\ell$).

- le déplacement vertical $u_y(x)$ ($u_y^{①}(x)$ pour $0 \leq x \leq 2\ell$ et $u_y^{②}(x)$ pour $2\ell \leq x \leq 3\ell$).

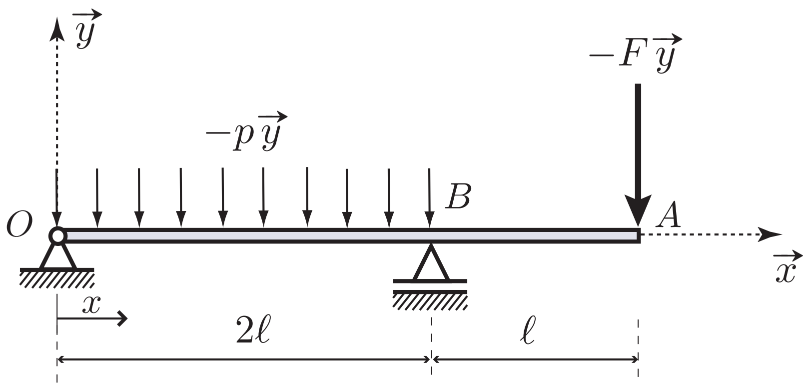
2) En déduire que :

a) $\omega_O = \omega_z^{①}(0) = \dfrac{7}{3}\dfrac{\Gamma\ell}{EI}$

b) $v_O = u_y^{①}(0) = -\dfrac{8}{3}\dfrac{\Gamma\ell^2}{EI}$

Exo 2 (~ `14 points`)

On considère une poutre droite $[OA]$ dirigée suivant l'axe $O\vec{x}$, de longueur 3ℓ. La poutre repose en O $(x = 0)$ sur un appui simple fixe et en B $(x = 2\ell)$ sur un appui simple mobile. On applique une densité linéique de force $-p\vec{y}$ sur le segment $[OB]$ ainsi qu'une force ponctuelle $-F\vec{y}$ au point A $(x = 3\ell)$. On suppose que les axes $(G\vec{y})$ et $(G\vec{z})$ sont axes principaux d'inertie.



On désigne par I le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module d'élasticité E. Enfin, on fait l'**hypothèse d'Euler-Bernoulli**.

1) En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer les réactions aux appuis en O et B lorsque la structure est en équilibre.

2) Etablir les expressions des composantes du torseur de cohésion (effort normal $N(x)$, effort tranchant $T_y(x)$ et moment fléchissant $M_z(x)$) dans la poutre.

3) En s'appuyant sur les lois de comportement et les relations cinématiques, déterminer le long de la poutre $[OA]$:

- la rotation de la section droite $\omega_z(x)$ $\quad(\omega_z^{①}(x)$ pour $0 \leq x \leq 2\ell$ et $\omega_z^{②}(x)$ pour $2\ell \leq x \leq 3\ell)$.

- le déplacement vertical $u_y(x)$ $\quad(u_y^{①}(x)$ pour $0 \leq x \leq 2\ell$ et $u_y^{②}(x)$ pour $2\ell \leq x \leq 3\ell)$.

4) En déduire le déplacement vertical en A $(v_A = u_y(3\ell))$ et la rotation de la section droite en B $(\omega_B = \omega_z(2\ell))$.