Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 7-8 - Equations différentielles d'ordre 1

Equations à variables séparables

Exercice 1 - Loi de refroidissement de Newton

A l'instant $t = 0$, on plonge un corps de témperature Θ_0 (témperature initiale) dans un milieu de témperature Θ_{as} (témperature asymptotique). Supposons que la témperature du milieu demeure constante (par exemple, une tasse de café dans une salle à manger). Comment la témperature du corps $\Theta(t)$ va-t-elle évoluer de Θ_0 vers Θ_{as} ? Avec Newton, admettons que la variation de température est proportionnelle à la différence entre la témperature du corps et celle du milieu, la constante de proportionalité étant $k > 0$:

$$\Theta'(t) = -k(\Theta(t) - \Theta_{as})$$

Questions :
(a) De quel type d'équation s'agit-il ? Résolvez l'équation différentielle avec condition initiale.
(b) Sachant que, dans une pièce à $20°C$ une tasse de café passe de $70°C$ à $40°C$ en 8 minutes,

1. calculez k ;
2. dessinez la fonction $\Theta(t)$;
3. calculez le temps nécessaire pour que le café passe de $70°C$ à $20°C$;
4. calculez le temps nécessaire pour que le café passe de $70°C$ à $20°C$ sachant que la témperature finale est mesurée avec une incertitude $\Delta\Theta = \pm 0.5°C$.

Solutions : (a) $\Theta(t) = \Theta_{as} + (\Theta_0 - \Theta_{as})e^{-kt}$. (b) 1) $k \approx 0,114$. 4) $t^* \approx 40$ min.

Exercice 2* (Supplémentaire) - Le parachutiste

Lorsqu'un parachutiste ouvre sa voile à l'instant $t = 0$ sa vitesse est $v(0) = v_0 = 10\ ms^{-1}$. Quelle est la loi d'évolution de la vitesse $v(t)$? Décroît elle jusqu'à s'annuler ?
Question supplémentaire : Peut-on généraliser le résultat précédent à toutes les vitesses initiales ?

Données physiques. On considérera que la personne et son équipement pésent 70 kg, une gravité de 10 $m.s^{-2}$. On supposera une traînée proportionnelle au carré de la vitesse v et notée $T = bv^2$. Le coefficient de traînée b dépend essentiellement du type de parachute. On choisira $b = 30\ kg.m^{-1}$.

*S*olution : $v(t) = k\frac{1+Ce^{\frac{-2bk}{m}t}}{1-Ce^{\frac{-2bk}{m}t}}$ avec $k = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ et $C = \frac{v_0-k}{v_0+k}$.

Equations linéaires

Exercice 3
Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) + y(x) = \cos x + \sin x$.

2. $y'(x) - 2xy(x) = \sinh x - 2x \cosh x$.

Solutions : ((1) $y(x) = \sin x + \lambda e^{-x}$. (2) $y(x) = \cosh x + \lambda e^{x^2}$.

Exercice 4

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, résoudre l' équation différentielle suivante en utilisant la variation de la constante : $(xln(x))\, y'(x) - y(x) = -\frac{1}{x}\,(ln(x) + 1)$.

Solutions : $y(x) = \frac{1}{x} + \lambda lnx$.

Exercice 5 - Problème de Cauchy

Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) - y(x) = x^2 e^x$ munie de la condition initiale $y(1) = 0$ en utilisant la méthode de variation de la constante pour trouver la solution particulière.

Solution : $y(x) = x(e^x - e)$.

Equations non linéaires du premier ordre

Exercice 6*(Supplémentaire) - Equation qui se réduit à une forme séparable

Déterminer la solution réelle sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle suivante. On pourra ensuite raisonner par symétrie pour trouver une solution sur $\mathbb{R}$.

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

Solution : $y(x) = \frac{x^2 - \lambda^2}{2\lambda}$ avec $\lambda \neq 0$.

Exercice 7

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l' équation différentielle :

$$\textbf{(E)} \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle :

$$\textbf{(E1)} \quad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E1) sur $]0, \infty[$.
4. Donnez toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Solution : $y(x) = 3x - \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{k}{x} e^{-3x^2}}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 9-10 - Equations différentielles d'ordre 2

Equations à coefficients constants

Exercice 1 - Quelques équations non-homogènes

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$
2. $4y'' + 4y' + 5y = \mathrm{e}^{-x/2} \sin x$
3. $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$
4. $y'' + 4y = \sin x$.

Solutions :
1. $y = (\alpha - x)\mathrm{e}^x + \beta \mathrm{e}^{2x}$,
2. $y = \left[\left(\alpha - \frac{x}{8}\right) \cos x + \beta \sin x \right] \mathrm{e}^{-x/2}$,
3. $y = (x^2 + \alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-x}$,
4. $y = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 - Régimes d'oscillations d'un système Masse+Ressort

On considère un système (masse+ressort) où la masse M est supposée ponctuelle. Le ressort, de raideur k, a une longueur à vide X_0 et est posé sur un support horizontal (de telle sorte que le poids n'intervienne pas dans l'équation du mouvement). Soit $X(t)$ la position de la masse M à l'instant t. On appelera $x(t) = X(t) - X_0$ la position relative.

On suppose dans un premier temps que les frottements sont négligeables.

1) Donnez l'équation du mouvement sous la forme canonique $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$. Résolvez l'équation en supposant qu'à $t = 0$ la masse est en $X = X_0$, et qu'on lui impose une vitesse initiale $v(t = 0) = V_0$.

Solution : $x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$.

On suppose dans toute la suite que les frottements ne peuvent plus être négligés. On les modélise par un frottement fluide de la forme $-fv(t)$ où f est le facteur de frottement, qui dépend de la forme de l'objet et de la viscosité de l'air (Formule de Stokes).

2) Donnez l'équation du mouvement amorti sous la forme canonique $\ddot{x}(t) + \frac{\omega}{Q}\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ en précisant l'expression du facteur de qualité Q.

3) De quel paramètre physique va dépendre la forme de la solution ? Combien de régimes possibles peut-on avoir ? À quoi correspondent-ils ? Donnez un critère pour chaque régime.

4) Résoudre l'équation amortie pour ces trois régimes différents en utilisant les conditions initiales de la question 1). Esquissez le graphe de $x = x(t)$.

Equations à coefficients variables

Exercice 3 - Méthode de la variation des constantes

On considère l'équation différentielle :

$$(x+1)y'' - (2x-1)y' + (x-2)y = x+1 \tag{2}$$

1. Vérifier que $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle homogène associée.
2. Trouver une deuxième solution $y_2(x)$ de l'équation différentielle homogène, de sorte que y_1, y_2 soient linéairement indépendantes.
3. Trouver une solution particulière pour l'équation différentielle non-homogène (2).
4. Conclure quant à la solution générale de l'équation (2).

Solution :

$$y(x) = 1 + 3\frac{x+2}{(x+1)^2} + \left[\alpha + \frac{\beta}{(x+1)^2}\right]\mathrm{e}^x.$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4* : Supplémentaire

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0.$$

Solution :

$$y(x) = x(\lambda \cosh x + \mu \sinh x) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

TD 11-12 - Systèmes différentiels

Exercice 1- Systèmes différentiels linéaires

1. Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les solutions réelles du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Solution : 2. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

Exercice 3 - Système Masses+Ressorts

On considère un système masse-ressort, composé de deux masses reliées par deux ressorts élastiques. Si le mouvement de ces deux masses se fait sans amortissement, on décrit leur déplacement par le système différentiel :

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ m_2 y_2'' = -k_2(y_2 - y_1) \end{cases}$$

où $y_1 = y_1(t)$ représente le déplacement de la première masse, $y_2 = y_2(t)$ le déplacement de la deuxième masse et k_1, k_2 sont les constantes d'élasticité des deux ressorts.
Résoudre le système pour $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$ et $k_2 = 2$.

Solution : $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{6}t) \\ -\cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{6}t) \\ -\sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$