Université Pierre et Marie Curie | **Année universitaire 2018-2019**
4AF16 – Aérodynamique et aéronautique | **Master SdI – Parcours MFFA**

Examen écrit 2nde session (40 points)
jeudi 9 mai 2019
2h sans document.

Correction

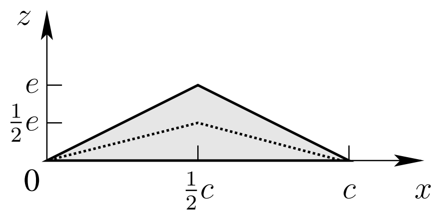
REDIGER PARTIE 1 ET PARTIE 2 SUR DEUX COPIES SEPAREES

PARTIE 1 : Aérodynamique incompressible (1h, 20 points)

Aile à profil triangulaire

On se propose d'étudier la portance d'une aile plane à profil triangulaire d'envergure finie. On étudie d'abord le profil dans l'approximation bi-dimensionnelle (question 1), puis on étudie des effets d'envergure finie (question 2). Dans la partie 1, le fluide est supposé parfait et incompressible de masse volumique ρ. L'angle d'incidence est α et, dans le référentiel lié à l'aile, la vitesse amont du fluide est V_∞.

1. On étudie ici les propriétés du profil bi-dimensionnel figurant ci-dessous.



(a) Identifier la corde, l'épaisseur, la flèche et le point de cambrure maximale de ce profil.

La corde est c, l'épaisseur e, la flèche $f = e/2$, le point de cambrure maximale $x_c = c/2$.

(b) Donner l'équation de la ligne de cambrure moyenne $z = z(x)$ (en pointillés sur la figure). On posera $\epsilon = e/c$.

L'équation est

$$z(x) = \begin{cases} \epsilon x & \text{pour } x \in [0, c/2] \\ \epsilon(c-x) & \text{pour } x \in [c/2, c] \end{cases}$$

(c) A quelle condition l'approximation des profils minces est-elle valide ici ? On se place dans ce cadre dans la suite.

On peut prendre $e/c < 0.12$, suffisant pour l'approximation des profils minces.

(d) Donner la fonction $f(\theta)$ qui est la dérivée de $z(x)$ exprimée en fonction de θ, l'angle défini par le changement de variable $x = \frac{1}{2}c(1-\cos\theta)$. On précisera bien sur quel intervalle en θ chacune des deux expressions est valable (et on n'oubliera pas de dériver $z(x)$:-)

$z'(x)$ vaut $\pm\epsilon$ suivant que x est plus petit ou plus grand que $c/2$, ce qui donne :

$$f(\theta) = \begin{cases} \epsilon & \text{pour } \theta \in [0, \pi/2[\\ -\epsilon & \text{pour } \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

(e) Calculer les coefficients de Glauert A_0, A_1 et A_2 donnés par :

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\mathrm{d}\theta\ , \quad A_{n>0} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta\ .$$

Après des coefficients de Fourier de f,

$$f_0 = 0\ , \quad f_1 = \frac{4\epsilon}{\pi}\ , \quad f_2 = 0\ ,$$

il vient

$$A_0 = \alpha\ , \quad A_1 = \frac{4\epsilon}{\pi}\ , \quad A_2 = 0.$$

(f) Exprimer $C_{L'} = \pi(2A_0 + A_1)$.

On trouve $C_{L'} = 2\pi\alpha + 4\epsilon$.

(g) Exprimer l'angle de portance nulle $\alpha_{L'=0}$ en fonction de ϵ. Justifier le signe du résultat.

En utilisant le résultat précédent ou bien en utilisant la formule $\alpha_{L'=0} = \frac{1}{2}(f_0 - f_1)$, on trouve $\alpha_{L'=0} = -2\epsilon/\pi$. Cet angle est négatif, car en incidence nulle le profil est déjà portant.

(h) Exprimer le coefficient de moment au quart de corde $C_{M',c/4} = \frac{1}{4}\pi(A_2 - A_1)$. En déduire la position du centre de pression. Commenter la limite $\epsilon \to 0$.

Le moment est $C_{M',c/4} = -\epsilon$. Cette valeur ne dépend pas de α, le quart de corde est donc le centre aérodynamique, comme pour tous les profils minces. La position du centre de pression est donnée par

$$\frac{x_p}{c} = -\frac{C_{M',\mathrm{BA}}}{C_{L'}} = \frac{1}{4} - \frac{C_{M',\frac{c}{4}}}{C_{L'}} = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\pi\alpha + 4\epsilon}\ .$$

Quand $\epsilon \to 0$, le centre de pression rejoint le quart de corde, le profil devenant symétrique.

2. On veut maintenant calculer la portance d'une aile d'envergure b dont le profil est le profil triangulaire précédent, avec une corde qui dépend de la coordonnée y :

$$c(y) = c_m\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}\ , \quad y \in [-b/2, b/2].$$

L'épaisseur $e(y)$ dépend aussi de y mais le rapport $e(y)/c(y) = \epsilon$ est constant, de telle sorte que les relations établies en question 1 sont valides pour chaque section y =cte, avec une valeur unique de ϵ.

(a) Faire un schéma de l'aile. Que représente c_m ?

c_m est la corde maximale.

(b) Rappeler le théorème de Kutta–Joukowsky pour une section bi-dimensionnelle $y = \mathrm{cte}$. Montrer qu'ici la distribution de circulation $\Gamma(y)$ le long de l'envergure est donnée par :

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2}V_\infty c_m C_{L'}(y)\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}\ .$$

Le théorème relie la portance à la circulation autour du profil : dans une section bi-dimensionnelle, on a $L'(y) = q_\infty C_{L'}(y)c(y) = \rho V_\infty \Gamma(y)$. On en déduit directement la distribution de circulation $\Gamma(y)$.

(c) Pour cette aile, la vitesse V_z induite au niveau du profil par la nappe tourbillonnaire ne dépend pas de y et vaut $V_z = -\frac{1}{4}(c_m/b)V_\infty C_{L'}$. Donner l'expression de la (petite) modification α_i de l'angle d'incidence au niveau de l'aile, induite par cette vitesse V_z.

On trouve $\alpha_i \simeq \tan\alpha_i = -V_z/V_\infty = \frac{1}{4}(c_m/b)C_{L'}$.

(d) Pourquoi V_z est-il constant (aucun calcul n'est demandé) ? Pourquoi $C_{L'}$ est-il constant ?

Le chargement est elliptique, le seul à donner une vitesse induite uniforme sur tout le profil (cf. cours). Par conséquent, α_i est constant, et $C_{L'}$ aussi, c'est le coefficient de portance pour l'angle $\alpha - \alpha_i$.

(e) Expliquer l'origine de la traînée induite. En admettant que le coefficient de portance de l'aile entière est donné par $C_L = C_{L'}$, exprimer la traînée induite D_i et le coefficient C_{D_i} associé.

La traînée induite vient de l'inclinaison de la portance avec la verticale, due à l'angle induit sur l'écoulement amont. Vu que α_i ne dépend pas de y, on a simplement

$$D_i \simeq \alpha_i L = \frac{c_m}{4b}C_{L'}q_\infty A C_{L'} = \frac{c_m}{4b}q_\infty A C_{L'}^2\ ,$$

d'où le coefficient de traînée induite

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{q_\infty A} = \frac{c_m}{4b}C_{L'}^2\ .$$

On trouve bien $C_{D_i} = C_L^2/(\pi A_R)$ puisque $C_{L'} = C_L$, l'aire de l'aile peut être calculée comme $A = \frac{1}{4}\pi b c_m$ et le rapport de forme $A_R \equiv b^2/A = 4b/(\pi c_m)$.