

Théorème de Castigliano



On part de la formule de Clapeyron :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n u_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} F_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} F_i F_j.$$

On isole les $2n - 1$ termes qui dépendent de la force F_k :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} F_i F_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} F_k F_j + \frac{1}{2} a_{kk} (F_k)^2 + \boxed{\bar{U}} \quad \text{indépendante de } F_k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} F_j + a_{kk} F_k.$$

On réintègre le dernier terme dans les deux premiers :

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} F_j.$$

On utilise le théorème de Maxwell-Betti ($a_{ki} = a_{ik}$) :

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ki} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} F_j = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} \delta_k = \delta_k.$$

22

Théorème de Castigliano :

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force \vec{F}_i appliquée à la poutre est égale au déplacement δ_i du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

De même, la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à un couple \vec{C}_ℓ est égale à la rotation ω_ℓ de la poutre au point de la section droite où s'applique ce couple :

$$\omega_\ell = \frac{\partial U}{\partial C_\ell}$$

Rqs :

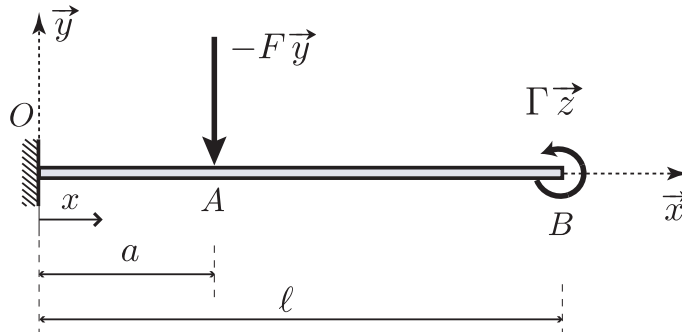
- Le théorème de Castigliano **ne permet** de calculer les déplacements **qu'aux points où les charges sont appliquées** et **selon leur direction d'application**.
- Les forces doivent être **indépendantes**.

Si deux forces extérieures appliquées ont même intensité F , il est alors nécessaire de les renommer F_1 et F_2 par exemple (à priori différentes), de calculer les δ_i puis de remplacer dans les résultats obtenus $F_1 = F_2 = F$.

23

Exemple d'application du théorème de Castigliano :

On considère une poutre de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en $x = a$ et à un couple $\Gamma\vec{z}$ à son extrémité $x = \ell$



Calculer le déplacement vertical au point A ainsi que la rotation de la section droite au point B en utilisant le théorème de Castigliano.

24

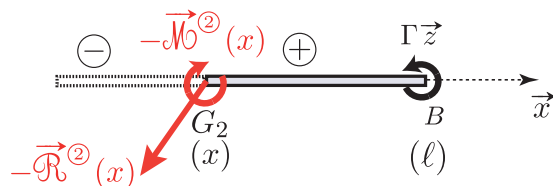
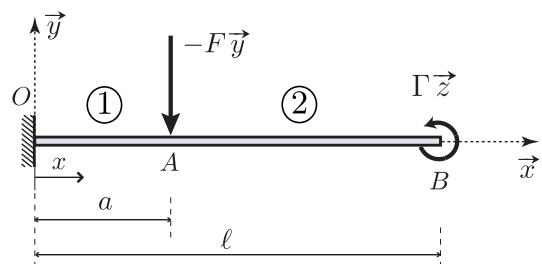
On néglige dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant et comme d'autre part l'effort normal est nul sur toute la poutre, on nécessite alors de **calculer uniquement le moment fléchissant** autour de l'axe ($G\vec{z}$).

D'après la **méthode des coupures** où l'on considère les deux domaines suivants :

$$a < x \leq \ell \quad (\text{domaine } ②)$$

On coupe le domaine ② en un point G_2 d'abscisse x

On isole la partie droite (\oplus)



$$\text{Rq: } \left\{ \mathcal{C}_{\ominus \rightarrow \oplus} \right\}_{G_2} = - \left\{ \mathcal{C}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -\vec{R}^{\textcircled{2}}(x) \\ -\vec{M}^{\textcircled{2}}(x) \end{Bmatrix}_{G_2}$$

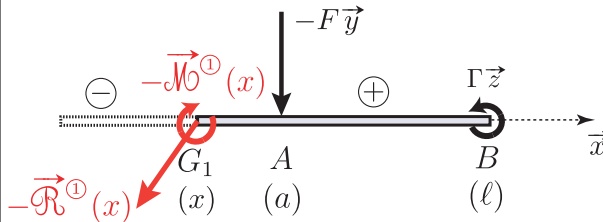
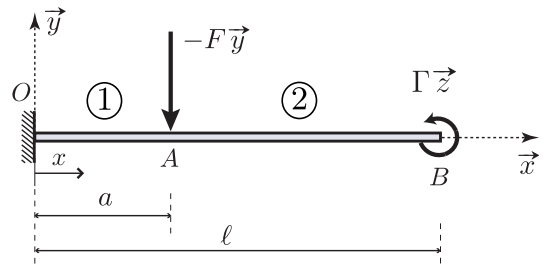
On étudie l'équilibre de la portion $[G_2B]$ (théorème du moment en G_2)

$$-\vec{M}^{\textcircled{2}}(x) + \Gamma\vec{z} = \vec{0} \implies \vec{M}^{\textcircled{2}}(x) = M_z^{\textcircled{2}}(x)\vec{z} = \Gamma\vec{z} \quad \text{soit} \quad \boxed{M_z^{\textcircled{2}}(x) = \Gamma}$$

25

$$0 \leq x < a \quad (\text{domaine } \textcircled{1})$$

On coupe le domaine ① en un point G_1 d'abscisse x
On isole la partie droite (\oplus)



$$\text{Rq: } \{\mathcal{C}_{\ominus \rightarrow \oplus}\}_{G_1} = -\{\mathcal{C}_{\text{int}}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{\mathcal{R}}^{\textcircled{1}}(x) \\ -\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) \end{array} \right\}_{G_1}$$

On étudie l'équilibre de la portion $[G_1 B]$ (théorème du moment en G_1)

$$-\vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) + \overrightarrow{G_1 A} \wedge (-F\vec{y}) + \Gamma \vec{z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}^{\textcircled{1}}(x) = M_z^{\textcircled{1}}(x) \vec{z} = \Gamma \vec{z} + (a - x) \vec{x} \wedge (-F\vec{y})$$

soit $M_z^{\textcircled{1}}(x) = \Gamma + F(x - a)$

26

En appliquant le **théorème de Castigliano**, on peut calculer le déplacement vertical v_A (suivant $-\vec{y}$ car $\vec{F} = -F\vec{y}$) au point A :

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial F}$$

$$\text{avec } U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(M_z^{\textcircled{1}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx + \frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{(M_z^{\textcircled{2}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[\frac{1}{2} \int_0^a \frac{(M_z^{\textcircled{1}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx \right] + \frac{\partial}{\partial F} \left[\frac{1}{2} \int_a^\ell \frac{(M_z^{\textcircled{2}}(x))^2}{EI_{Gz}} dx \right]$$

Le matériau étant homogène, on peut sortir le terme EI_{Gz} des intégrales :

$$v_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a M_z^{\textcircled{1}}(x) \frac{\partial M_z^{\textcircled{1}}(x)}{\partial F} dx + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_a^\ell M_z^{\textcircled{2}}(x) \frac{\partial M_z^{\textcircled{2}}(x)}{\partial F} dx$$

$$\text{avec } M_z^{\textcircled{2}}(x) = \Gamma \Rightarrow \frac{\partial M_z^{\textcircled{2}}(x)}{\partial F} = 0 \quad \text{et} \quad M_z^{\textcircled{1}}(x) = \Gamma + F(x - a) \Rightarrow \frac{\partial M_z^{\textcircled{1}}(x)}{\partial F} = (x - a)$$

$$v_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a [F(x - a)^2 + \Gamma(x - a)] dx \stackrel{X=x-a}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ F \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-a}^0 + \Gamma \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-a}^0 \right\}$$

$$v_A = \frac{a^2}{6EI_{Gz}} (2aF - 3\Gamma) \quad \text{suivant } -\vec{y}$$

27

En appliquant le **théorème de Castigliano**, on peut également calculer la rotation de la section droite (autour de \vec{z}) au point B :

$$\omega_B = \frac{\partial U}{\partial \Gamma} = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a M_z^{(1)}(x) \frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial \Gamma} dx + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_a^\ell M_z^{(2)}(x) \frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial \Gamma} dx$$

$$\text{avec } M_z^{(2)}(x) = \Gamma \text{ et } M_z^{(1)}(x) = \Gamma + F(x - a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M_z^{(1)}(x)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial M_z^{(2)}(x)}{\partial \Gamma} = 1$$

$$\text{d'où : } \omega_B = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^a [F(x - a) + \Gamma] dx + \int_a^\ell \Gamma dx \stackrel{X=x-a}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ F \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-a}^0 + \Gamma a + \Gamma(\ell - a) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_B = \frac{1}{2EI_{Gz}} (2\Gamma\ell - a^2 F) \quad \text{suivant } \vec{z}$$

28

Théorème de la charge fictive (théorème de Bertrand de Fontviolant)

Théorème de la charge fictive :

On considère une poutre soumise à n charges \vec{F}_i ($1 \leq i \leq n$) appliquées aux points P_i . On applique en un point non chargé P une **force fictive** Φ de direction \vec{n} fixée.

Si $U(\Phi, F_1, \dots, F_n)$ désigne l'énergie de déformation, alors le déplacement du point P (selon la direction \vec{n}) est égal à :

$$\delta = \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\Phi, F_i) = \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\Phi, F_i) \Big|_{\Phi=0}$$

Rqs :

- Même raisonnement pour l'application d'un couple fictif $C\vec{n}$ en P . La rotation de la section droite en P autour de la direction \vec{n} est alors :

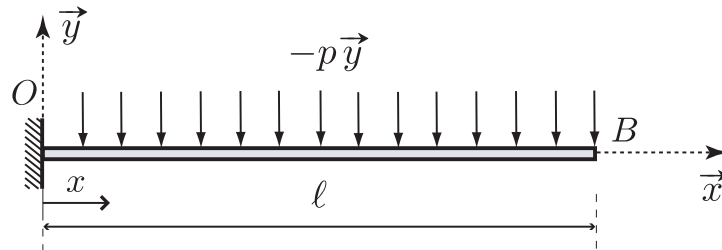
$$\omega = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial C}(C, F_i) = \frac{\partial U}{\partial C}(C, F_i) \Big|_{C=0}$$

- Pratique pour calculer les flèches et rotations des sections droites **aux points où les chargements ponctuels ne sont pas appliqués** ou bien pour le cas de poutres soumises à des **charges réparties**.

29

Exple d'application du théorème de la charge fictive :

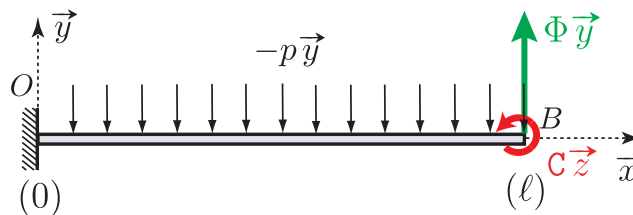
On considère une poutre console de longueur ℓ , encastrée en $x = 0$ soumise à des charges transversales uniformément réparties de densité $-p\vec{y}$ constante et libre d'efforts à son extrémité $x = \ell$.



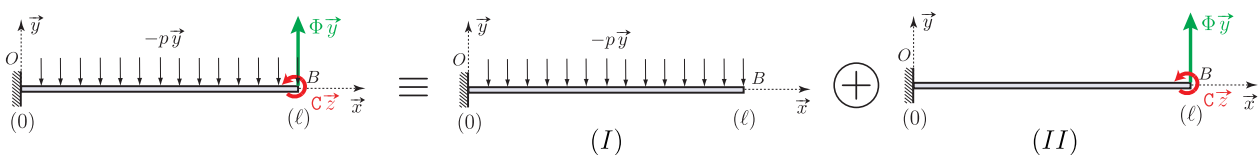
Calculer le déplacement vertical et la rotation de la section droite au point B en utilisant le théorème de la charge fictive.

30

Il suffit alors de rajouter une **force fictive** $\Phi\vec{y}$ et un **couple fictif** $C\vec{z}$ en B .
Le nouveau problème à résoudre est le suivant :



Dans le **cadre linéaire** (HPP et élasticité linéaire), il est souvent judicieux de décomposer un problème plus complexe en plusieurs problèmes plus simples pour lesquels les solutions sont connues ou plus faciles à calculer. On pourra alors appliquer le **théorème de superposition** pour déterminer la solution de notre problème initial.

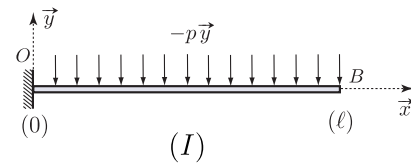


On **néglige** dans le calcul de l'énergie de déformation les **effets dûs à l'effort tranchant**

On doit donc calculer uniquement le moment fléchissant autour de l'axe $(G\vec{z})$.

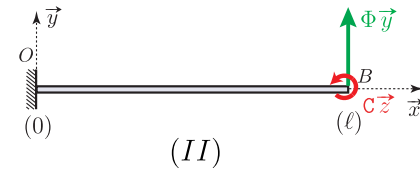
31

Pour (I): $M_z^{(I)}(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2$



Pour (II) avec la méthode des coupures :

$$M_z^{(II)}(x) = -\Phi(x - \ell) + \mathbf{C}$$



Le **théorème de superposition** nous permet donc d'écrire:

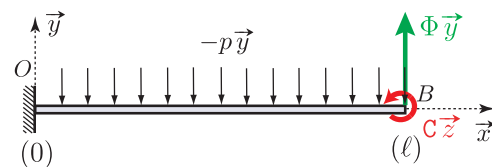
$$M_z(x) = M_z^{(I)}(x) + M_z^{(II)}(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - \Phi(x - \ell) + \mathbf{C}.$$

En appliquant le **théorème de la charge fictive**, on obtient :

$$\begin{aligned} v_B = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{(\Phi=0, \mathbf{C}=0)} &= \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{\dagger} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \Big|_{\dagger} \frac{\partial M_z(x)}{\partial \Phi} \Big|_{\dagger} dx \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 \right) \cdot (-(x - \ell)) dx \stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{p}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^4}{4} \right]_{-\ell}^0 \\ &= -\frac{p\ell^4}{8EI_{Gz}} \quad (\text{suivant } \vec{y}) \end{aligned}$$

32

de même



$$\begin{aligned} \omega_B = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{(\Phi=0, \mathbf{C}=0)} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\dagger} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \Big|_{\dagger} \frac{\partial M_z(x)}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\dagger} dx \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 \right) \cdot (1) dx \stackrel{X=x-\ell}{=} -\frac{p}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 \\ &= -\frac{p\ell^3}{6EI_{Gz}} \quad (\text{suivant } \vec{z}) \end{aligned}$$

33

Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

- (i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.
- (ii) On applique à ce système isostatique, **en plus des chargements extérieurs** les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs.

⇒ **choix des inconnues hyperstatiques X_R**

- (iii) Par l'application du **théorème de Castigliano** à l'action de contact d'un appui sans frottement (ou encastrement), on calcule les déplacements et/ou les rotations du système rendu isostatique.



Théorème de Menabrea :

Les valeurs des **réactions hyperstatiques** correspondant à l'équilibre du système rendent **minimale** (stationnaire) l'énergie de déformation U :

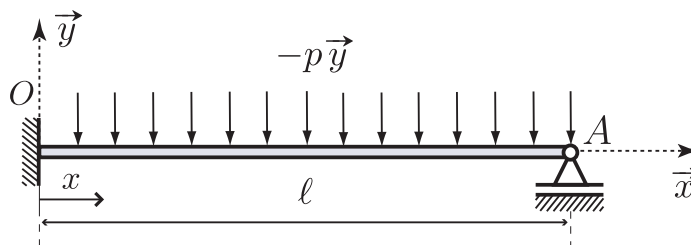
$$\frac{\partial U}{\partial X_R} = 0$$

avec X_R les inconnues hyperstatiques

34

Exple d'application du théorème de Menabrea :

On considère une poutre de longueur ℓ , encastree en O ($x = 0$) et sous appui simple glissant en A ($x = \ell$) soumise à des charges transversales uniformément réparties de densité $-p\vec{y}$ constante.

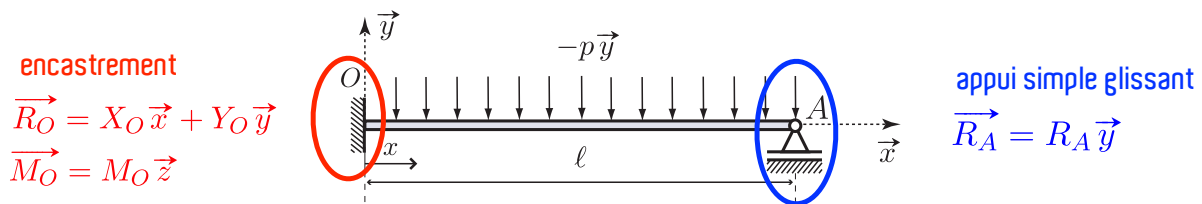


Déterminer la (les) inconnue(s) hyperstatique(s) de notre problème en utilisant le théorème de Menabrea.

35

(i) Calcul du **degré d'hyperstatisme** de la poutre et **choix des inconnues hyperstatiques** :

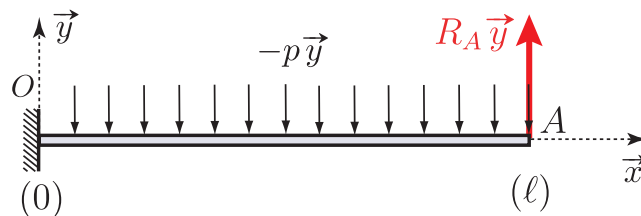
Pour une structure plane $h_{2D} = r - 3$ où r représente le nb d'inconnues de liaison



ici $r = 4 \Rightarrow h_{2D} = 4 - 3 = 1$ (poutre hyperstatique de degré 1)

Choix de prendre R_A comme inconnue hyperstatique (seule inconnue qui est isolée à l'extrémité droite).

R_A considérée par la suite comme un **chargement extérieur** pour rendre le système isostatique. Le nouveau problème (système équivalent) à résoudre est le suivant~:



36

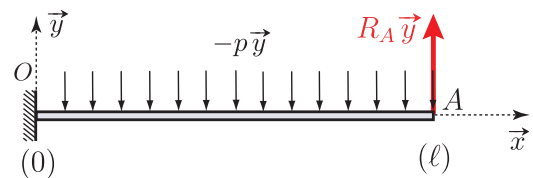
(ii) Calcul des éléments de réduction du torseur de cohésion pour notre système équivalent :

Les effets de l'effort tranchant seront négligés dans le calcul de l'énergie de déformation.

Besoin de connaître uniquement le moment fléchissant autour de l'axe ($G \vec{z}$) :

Par analogie avec les calculs faits à l'exemple précédent on trouve :

$$M_z(x) = -\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - R_A(x - \ell).$$



(iii) **Théorème de Menabrea** :

$$0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial R_A} dx$$

$$= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \left(-\frac{p}{2}(x - \ell)^2 - R_A(x - \ell) \right) \cdot (-(x - \ell)) dx \Rightarrow R_A = \frac{3p\ell}{8}$$

$$\stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{p}{2} \left[\frac{X^4}{4} \right]_{-\ell}^0 + R_A \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 \right\} = \frac{1}{EI_{Gz}} \left\{ \frac{-p\ell^4}{8} + \frac{R_A\ell^3}{3} \right\}.$$

En remplaçant R_A dans les éléments de réduction du torseur de cohésion on pourra calculer les déplacements ou les rotations en n'importe quels points de la poutre.

37