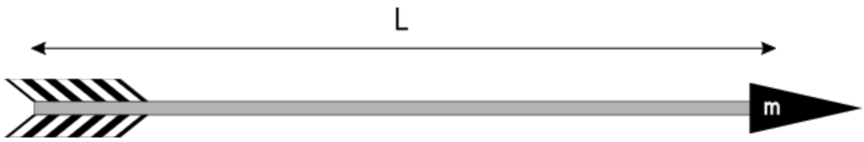
Vibrations et Ondes

Contrôle du 17 décembre 2018
Partie Vibrations des milieux continus
(durée 1h30)

Vibrations d'une flèche



On modélise une flèche par une poutre de longueur L, de section circulaire constante S et constituée d'un matériau homogène et isotrope de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ. Son élancement permet de se placer dans l'hypothèse d'Euler-Bernouilli.
La flèche est dotée d'une pointe de masse m liée rigidement à l'extrémité $x = L$, et d'un empennage de masse négligeable à l'extrémité $x = 0$.
L'objet du problème est de modéliser les vibrations de la flèche dans les phases initiale et finale de sa trajectoire entre l'archer et la cible.
Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1 Au départ, en quittant l'arc : vibrations libres en flexion

Dans un premier temps, on néglige la présence de la pointe.
Après que la flèche quitte la corde, l'empennage entre en contact avec la poignée de l'arc. Ce contact impose une déformation initiale et engendre une vibration de flexion libre pendant la phase de vol.
On rappelle l'équation générale des vibrations libres transverses dans une poutre droite, portant sur le déplacement transverse $v(x,t)$.

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad c_T = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

1. Sous quelle forme générale peut-on chercher la solution de cette équation ? Justifier ce choix.
2. Préciser ensuite les dépendances en temps $\phi(t)$ et en position sur la poutre $X(x)$ ainsi que la relation entre les paramètres caractéristiques ω et γ.

> **Solution:** Solution stationnaire : $v(x,t) = \phi(t)X(x)$
> Dépendance temporelle : $\phi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
> Dépendance spatiale : $X(x) = C_1\cos\gamma x + C_2\sin\gamma x + C_3\cosh\gamma x + C_4\sinh\gamma x$
> Relation de dispersion : $\omega = c_T\gamma^2$

La forme générale des modes propres peut aussi s'écrire :

$$X(x) = D_1(\cos\gamma x + \cosh\gamma x) + D_2(\cos\gamma x - \cosh\gamma x) + D_3(\sin\gamma x + \sinh\gamma x) + D_4(\sin\gamma x - \sinh\gamma x)$$

3. Dans le cas particulier de la flèche, quelles conditions aux limites faut-il considérer ?

> **Solution:** Poutre Libre-Libre

4. Expliciter les quatre conditions aux limites physiques et leur traduction mathématique.

Solution:

$$\text{Bord Libre en } x = 0 : M(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ et } T(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^3 v(0,t)}{\partial x^3} = 0, \forall t$$

$$\Leftrightarrow X''(0) = 0 \text{ et } X'''(0) = 0, \forall t$$

$$\text{Bord Libre en } x = L : M(L,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ et } T(L,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^3 v(L,t)}{\partial x^3} = 0, \forall t$$

$$\Leftrightarrow X''(L) = 0 \text{ et } X'''(L) = 0, \forall t$$

5. Établir la relation de dispersion associée à ces conditions.

Solution:

— $X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$ et $X'''(0) = 0 \Rightarrow D_4 = 0$

$$\Rightarrow X(x) = D_1(\cos\gamma x + \cosh\gamma x) + D_3(\sin\gamma x + \sinh\gamma x)$$

— $X''(L) = 0$ et $X'''(L) = 0$ donnent le système

$$(S)\begin{cases} D_1(-\cos\gamma L + \cosh\gamma L) + D_3(-\sin\gamma L + \sinh\gamma L) = 0 \\ D_1(\sin\gamma L + \sinh\gamma L) + D_3(-\cos\gamma L + \cosh\gamma L) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant doit être nul. Ce qui donne l'équation :

$$\det(S) = 0 \Leftrightarrow \cos\gamma L \cosh\gamma L = 1$$

Les racines de l'équation de dispersion précédente sont obtenues numériquement et notées $\gamma_n L$.

6. Expliquer comment on identifie les modes propres $X_n(x)$ et donner les fréquences propres associées ω_n.

Solution:

Pour trouver les modes propres, on résout le système linéaire (S) pour chaque valeur de $\gamma_n L$.
Ce qui donne le rapport $\left(\frac{D_1}{D_3}\right)_n$

Les fréquences propres sont données par :

$$\omega_n = c_T\gamma_n^2 \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\gamma_n L}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

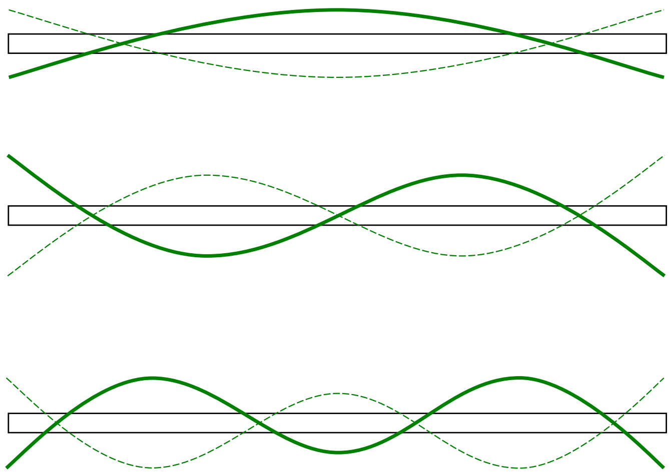
La résolution numérique du problème issu des conditions aux limites permet d'établir que les modes sont tels que

$$X_n(x) \approx \cos\gamma_n x + \cosh\gamma_n x + \sin\gamma_n x + \sinh\gamma_n x$$

Ce résultat est donné pour information, il ne sera pas utilisé dans la suite. Les modes seront représentés par $X_n(x)$.

7. Compte tenu des conditions aux limites cinématiques, tracer l'allure des 4 premiers modes propres.

Solution:



8. En écrivant les énergies cinétiques et potentielle, identifier les masses modales m_n et les raideurs modales k_n en fonction de $X_n(x)$.

Solution:
- Énergie cinétique :

$$T_n = \int_0^L \frac{1}{2}\rho S(\dot{v}_n(x,t))^2 dx = \frac{1}{2}\dot{\phi}_n^2 \int_0^L \rho S X_n^2(x) dx = \frac{1}{2}m_n\dot{\phi}_n^2$$

  on identifie la masse modale : $m_n = \int_0^L \rho S X_n^2(x)dx$
- Énergie potentielle :

$$U_n = \int_0^L \frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(x,t)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\phi_n^2 \int_0^L EIX_n''^2(x)dx = \frac{1}{2}k_n\phi_n^2$$

  on identifie la raideur modale : $k_n = \int_0^L EIX_n''^2(x)dx$

Au contact de l'empennage avec la poignée, la flèche se trouve déformée dans des conditions initiales notées :

$$v(x,0) = v_0(x) \qquad \dot{v}(x,0) = 0$$

9. Montrer que la réponse libre $v(x,t)$ de la flèche à ces conditions initiales s'écrit :

$$v(x,t) = \sum_n \frac{\rho S}{m_n}\cos(\omega_n t)X_n(x)\int_0^L X_n(x)v_0(x)dx$$

Solution: On considère la solution écrite par décomposition modale :

$$v(x,t) = \sum_n (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)X_n(x)$$

En utilisant les propriétés mathématiques de la base modale, on arrive à $v(x,t)$.

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{\rho S}{m_n}\displaystyle\int_0^L X_n(x)v_0(x)dx \\ B_n = 0 \end{cases}$$

On prend finalement en compte la masse m de la pointe de la flèche.

10. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentiel de l'ensemble en mouvement libre en fonction des raideurs modales k_n , des masses modales m_n et de la masse m de la pointe.
11. En déduire l'expression des nouvelles fréquences propres en les comparant à celles obtenues à la question 6

Solution: On écrit les énergies cinétique et potentielle :
— Énergie cinétique modale modifiée :

$$T_n = \frac{1}{2}(m_n + mX_n(L))\dot{\phi}_n^2$$

— Énergie potentielle modale :

$$U_n = \frac{1}{2}k_n\phi_n^2$$

d'où les nouvelles fréquences propres :

$$\omega_n' = \sqrt{\frac{k_n}{m_n + mX_n(L)}} < \omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

2 A l'arrivée sur la cible : vibrations longitudinales

A l'arrivée sur la cible, la flèche est au repos dans son repère propre et la décélération brutale engendre une force d'inertie longitudinale $f(x,t)$ qui s'applique de façon uniforme sur toute la longueur et donne naissance à une onde longitudinale stationnaire régie par l'équation du mouvement forcé suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_L^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f(x,t)}{\rho S}$$

La poutre est considérée encastrée à la pointe et libre à l'empennage.
Les fréquences propres et les modes propres s'écrivent

$$\omega_n = \gamma_n c_L = (2n+1)\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad X_n(x) = \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)$$

Et on rappelle l'expression de masses et raideurs modales pour les ondes longitudinales :

$$m_n = \rho S\int_0^L X_n^2(x)dx \qquad \text{et} \qquad k_n = -ES\int_0^L X_n(x)X_n''(x)dx$$

Par ailleurs, si on considère la vitesse V_o de la flèche constante sur la fin de la trajectoire sa variation brutale s'exprime simplement :

$$\dot{u}_0(t) = V_o(1 - H(t)) = \begin{cases} V_o & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \qquad \text{d'où l'accélération} \qquad \ddot{u}_0(t) = -V_o\delta(t)$$

12. En partant de l'équation des ondes forcées, établir l'équation différentielle vérifiée par chaque mode et faisant intervenir m_n et k_n.

Solution: L'équation du mouvement forcé devient :

$$\sum_n \ddot{\phi}_n(t)X_n(x) - c_L^2\phi_n(t)X_n''(x) = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n(t)X_n(x)X_m(x) - c_L^2\phi_n(t)X_n''(x)X_m(x) = X_n(x)\frac{V_o\delta(t)}{\rho S}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}_n(t)\int_0^L X_n^2(x)dx - c_L^2\phi_n(t)\int_0^L X_n''(x)X_n(x)dx = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}\int_0^L X_n(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_n}{\rho S}\ddot{\phi}_n(t) + c_L^2 \frac{k_n}{ES}\phi_n(t) = \frac{V_o\delta(t)}{\rho S}\int_0^L X_n(x)dx$$
$$\Leftrightarrow m_n\ddot{\phi}_n(t) + k_n\phi_n(t) = -\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi}V_o\delta(t)$$

13. A l'aide de la transformée de Laplace, déterminer l'expression de la vibration longitudinale $u(x,t)$ de la flèche heurtant la cible.

Solution: On passe dans Laplace avec des conditions initiales nulles en déplacement et en vitesse :

$$(m_n s^2 + k_n)\tilde{\phi}(s) = -\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi\rho S}V_o$$
$$\Leftrightarrow m_n(s^2 + \omega_n^2)\tilde{\phi}(s) = -\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi\rho S}V_o$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\phi}_n(s) = -\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2L}{\pi m_n}\frac{V_o}{s^2+\omega_n^2}$$

Par transformation de Laplace inverse :

$$\phi_n(t) = -\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{2LV_o}{\pi m_n\omega_n}H(t)\sin\omega_n t$$

et finalement la vibration complète est la superposition des contributions de tous les modes.

$$u(x,t) = \sum_n \phi_n(t)X_n(x) = -\frac{2LV_o}{\pi}H(t)\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)m_n\omega_n}\cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right)\sin\omega_n t$$

14. Commenter ce résultat

Solution: Au moment du contact avec la cible, la vibration est la superposition des modes libres, chacun intervenant avec une contribution inversement proportionnelle à la fréquence propre associée. Cette contribution décroit avec l'ordre du mode. Les modes d'ordre faible sont prépondérants.

On rappelle les relations utiles pour l'utilisation de la transformée de Laplace :

$$f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(s)$$
$$\ddot{f}(t) \longleftrightarrow s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$
$$\sin(\omega_0 t)H(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$