ETIREMENT DE LA VORTICITE ET ECHELLE DE BURGERS

Equation de Helmholtz pour un écoulement non visqueux :

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla\vec{u} = \vec{w} \cdot \bar{\bar{S}}$$

avec :

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

- Intégrer l'équation précédente et en déduire le comportement des composantes de vorticité en temps.

****

Solution

Dans ce cas :

$$\vec{\omega} \circ \bar{\bar{S}} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] \begin{bmatrix} \lambda, & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = [\lambda_1\omega_1 \quad \lambda_2\omega_2 \quad \lambda_2\omega_3]$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \bar{\bar{s}} \Leftrightarrow \frac{D\omega_i}{Dt} = \lambda_i\omega_i; i = 1_1 2_1 3$$

$$\Rightarrow \frac{dw_i}{dt} = \lambda_i\omega_i \Rightarrow \omega_i = \omega_i^{(0)}\exp(\lambda_i t)$$

Le composantes de vorticité augmentent de façon exponentielle en temps.

- Quand est-ce que la vorticité cessera de croître ?

Dans un écoulement non visqueux, jamais.
En pratique, l'écoulement sera visqueux. Comme l'effet de l'étirement est d'augmenter la vorticité et de réduire le
diamètre et donc l'échelle caractéristique du tourbillon), ce dernier finira par avoir une taille à laquelle les
effets de la viscosité deviennent importants. La vorticité sera alors dissipée à l'échelle moléculaire et cessera de croître.

TOURBILLON DE LAMB-OSEEN

- Solution exacte des équations de Navier-Stokes 2D : évolution d'un point de vorticité sous l'effet de la viscosité
- Décrit par un champ de vorticité de la forme :

$$\omega_z(r,t) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_0(t)^2}\exp\left(-\left(\frac{r}{r_0(t)}\right)^2\right); \quad \omega_r = \omega_\theta = 0 \qquad\qquad r_0^2(t) = 4\mu t$$

- Calculer le champ de vitesse, de la forme : $\vec{v} = (0, v_\theta, 0)$

Pour cela, nous utilisons la relation circulation/ vorticité (théorème de Stokes):

$$\Gamma = \oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \iint_S \omega_z dS$$

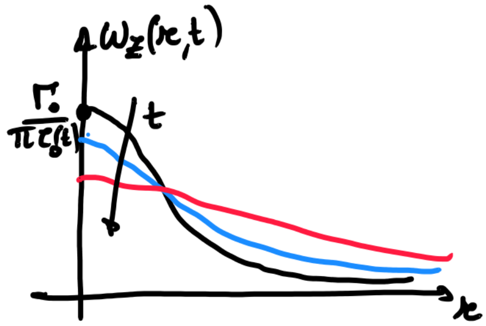
Nous calculons les intégrales pour un chemin circulaire centré sur le tourbillon, qui est axysymmétrique, donc $v_\theta = const$ sur C. En utilisant les coordonnées polaires, nous écrivons :

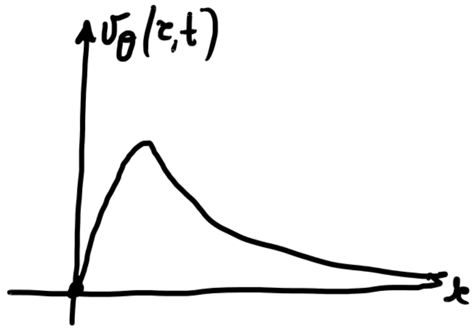
$$\int_0^{2\pi} v_\theta r\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^r \omega_z(r',t)\, r'\, dr'\, d\theta$$

$$\rightarrow \quad 2\pi r v_\theta = 2\pi\int_0^r \omega_z(r',t)\, r'\, dr'$$

$$\rightarrow \quad v_\theta(r,t) = \frac{1}{r}\,\frac{-\Gamma_0\, r_0^2}{2\pi r_0(t)^2}\int_0^r -\exp\left(-\frac{r'^2}{r_0^2}\right)\frac{2r'}{r_0^2}\, dr' =$$

$$= -\frac{1}{r}\,\frac{\Gamma_0}{2\pi}\left[\exp\left(-\frac{r'^2}{r_0^2}\right)\right]_0^r = \frac{1}{r}\,\frac{\Gamma_0}{2\pi}\left[1-\exp\left(-\left(\frac{r}{r_0(t)}\right)^2\right)\right]$$





- On superpose à ce vortex un champ de déformation le soumettant à un étirement :

$$v_r = -\frac{1}{2}\gamma r; \quad v_\theta = 0; \qquad v_z = \gamma z$$

- Les valeurs propres dans la base du taux de déformation sont $\left(-\frac{\gamma}{2}, -\frac{\gamma}{2}, \gamma\right)$
- Intégrer l'équation de la vorticité et montrer que

L'expression du gradient de vitesse en coordonnées polaires est :

$$\nabla\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le champ de déformation a un gradient de la forme :

$$\nabla\vec{v}_D = \begin{bmatrix} -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \overline{\overline{S}}_D \rightarrow$$ tenseur symétrique, coïncident avec une déformation pure.

Les valeurs propres de $\overline{\overline{S}}_D$ sont donc bien $\left(-\frac{\gamma}{2}, -\frac{\gamma}{2}, \gamma\right)$.

On calcule :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega}\cdot\overline{\overline{S}}_D = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)\begin{bmatrix} -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_r \gamma/2 \\ -\omega_\theta \gamma/2 \\ \omega_z \gamma \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega_r}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}\omega_r \\ \frac{d\omega_\theta}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}\omega_\theta \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \gamma\,\omega_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_r &= \omega_r(t=0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) = 0 \\ \omega_\theta &= \omega_\theta(t=0)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) = 0 \\ \omega_z &= \omega_z(t=0)\exp(\gamma t) \end{aligned}$$

Avec $\omega_r(t=0) = \omega_\theta(t=0) = 0$ et

$$\omega_z(t=0, r) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_0^2(t)}\exp\left(-\left(\frac{r}{r_0(t)}\right)^2\right)\exp(\gamma t) =$$

$$= \frac{\Gamma_0}{\pi r_D^2(t)} \qquad r_D^2(t) = r_0^2(t)\exp(-\gamma t)$$

Pour $t \rightarrow \infty$, $\omega_z \rightarrow \infty$ et le rayon du tourbillon $r_D \rightarrow 0$ comme attendu.

- La vorticité reste alignée avec l'axe du tourbillon
- La vorticité au centre diverge de façon exponentielle.

- Le rôle de la viscosité consiste à arrêter la divergence de lavorticité. [...] déduire l'échelle de Burgers.

Soit δ la taille caractéristique du cœur du tourbillon.

Analyse dimensionnelle : $T_V \sim \frac{\delta^2}{\nu}$ (temps visqueux)

$T_D \sim \frac{1}{\gamma}$ (temps de déformation)

A l'équilibre : $T_V \approx T_S \Rightarrow \frac{\delta^2}{\nu} \sim \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}}$

L'échelle de Burgers dépend donc de la viscosité ν et du taux d'étirement γ.