Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 17 Mai 2017 - Session1

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Définisez le noyau et l'image d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ avec E et F deux espaces vectoriels.
2. Enoncer le théorème du rang.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
4. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donner le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et précisez son rayon de convergence.
5. Donner l'expression de la série de Fourier $SF(f)$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ sur la période principale $[-\pi, \pi]$. Préciser les coefficients de la série a_0, a_n, b_n, $\forall n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

On considère le système différentiel linéaire, à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& 5x + 3y \\ y' &=& x + 3y \end{array} \right. \qquad (1)$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions réelles inconnues.

1. Ecrire le système différentiel précédent sous forme matricielle $Y' = AY$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vecteur inconnu de dimension 2 et A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?
3. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Trouver les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
4. Donner la matrice de passage P à la base de diagonalisation de A ainsi que la matrice diagonale D
5. L'ensemble des solutions du système est-il un espace vectoriel ? Si oui, quelle est la dimension de cet espace ? En utilisant les questions précédentes déduire la solution générale du système différentiel (1).

Corrigé

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\varphi(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

   Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, il a deux racines réelles distinctes, la matrice A est donc diagonalisable.
3. Les valeurs propres sont 2 est 6. Les vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (associé à 2) et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (associé à 6).
4. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   La matrice diagonale associée est :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Une base pour cet espace est formée des matrices :

$$Y_1(t) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{6x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   La solution générale est donc :

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ étant des constantes réelles quelconques. Par la suite, on en déduit :

$$x(t) = c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{6x}$$

$$y(t) = -c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $y(x)$ réelle, $x \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4} \tag{2}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (2). Précisez les deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ qui génèrent l'espace des solutions de l'équation homogène. Calculer leur Wronskien $W(y_1, y_2)$. En déduire que (y_1, y_2) est une famille libre.

2. On cherche une solution particulière de l'équation non homogène (2) de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, avec $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) & = & \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4} \end{array} \right.$$

Montrer que le déterminant du système est le Wronskien $W(y_1, y_2)$ trouvé précédemment. Résoudre le système et déterminer $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$. En déduire $C_1(x)$ et $C_2(x)$, puis $y_p(x)$.

3. Trouver la solution générale pour l'équation différentielle (2).

Corrigé

1. L'équation homogène a comme équation caractéristique

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

La racine $\lambda = 2$ est double, les deux solutions qui génèrent l'espace des solutions sont donc

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = xe^{2x}$$

Pour justifier cela on calcule leur Wronskien :

$$W(y_1, y_2) = \left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right| = e^{4x} \neq 0$$

Donc (y_1, y_2) est une famille libre de solutions, de cardinal 2, elle génère donc l'espace des solutions. La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Le système est un système de Cramer. Le déterminant du système est :

$$\left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right| = W(y_1, y_2)$$

Les solutions du système sont :

$$C_1'(x) = \frac{\left| \begin{array}{cc} 0 & y_2(x) \\ \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4} & y_2'(x) \end{array} \right|}{W(y_1, y_2)} = -\frac{xe^{-4x} + x}{4}$$

$$C_2'(x) = \frac{\left| \begin{array}{cc} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4} \end{array} \right|}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{-4x} + 1}{4}$$

Par intégration, on obtient succésivement :

$$C_1(x) = \int -\frac{xe^{-4x} + x}{4} dx = \frac{xe^{-4x}}{16} + \frac{e^{-4x}}{64} - \frac{x^2}{8} + \text{cte}$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{-4x} + 1}{4} dx = \frac{e^{-4x}}{16} + \frac{x}{4} + \text{cte}$$

On choisit les constantes égales à 0 et après calculs la solution particulière obtenue est :

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

3. La solution générale s'écrit comme superposition de la solution de l'équation homogène et la solution particulière :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2 e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 (Cet exercice contient deux parties indépendantes)

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x \tag{3}$$

dont l'inconnue vérifie la conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Partie I : Résolution directe de l'équation différentielle

1. La solution vérifiant l'équation différentielle et les conditions initiales est-elle unique ? Justifier votre réponse.
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (3).
3. Trouver une solution particulière de l'équation (3). On pourra utiliser la méthode des coefficients indéterminés.
4. Trouver ensuite la solution de l'équation (3) vérifiant les conditions initiales.

Partie II : Résolution à l'aide du développement en série entière

On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme de fonction développable en série entière, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Donner le développement en série entière de e^x.
2. En remplaçant $f(x)$ et e^x dans (3) par leurs développements en série entière, établir une relation de récurrence entre les coefficients a_n, a_{n+1} et a_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer a_0 et a_1 à l'aide des conditions initiales. Puis calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.
4. En utilisant les questions précédentes calculer a_n, $n \in \mathbb{N}$ et écrivez ensuite le développement en série entière de f.
   Indication : On considérera les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.
5. Trouver le rayon de convergence de cette série. Précisez le critère utilisé.

Corrigé

Partie I : Résolution directe de l'équation différentielle

1. Il s'agit d'un problème de Cauchy. Les coefficients des dérivées de f sont des constantes et le second membre e^x est une fonction de classe C^∞. La solution est donc unique.
2. L'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène est

$$r^2 + r + 1 = 0$$

   qui a pour racines j et j^2 ($j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$). La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (3) est :

$$f_h(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

3. Une solution particulière de l'équation complète est $\dfrac{e^x}{3}$.
4. En utilisant $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ on trouve $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$ et donc la solution du problème est :
$$f(x) = \frac{1}{3}(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

Partie II : Résolution à l'aide du développement en série entière

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. Par dérivations successives on a :
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
On fait un changement d'indice de sommation dans les deux dernières sommes :
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
ou alors,
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + (n+1)a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
Par unicité du développement en série entière, les coefficients de x^n doivent être les mêmes, donc :
$$a_n + (n+1)a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} = \frac{1}{n!}$$
ce qui représente la relation de récurrence entre les coefficients a_n, a_{n+1} et a_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$
3. $f(0) = 1$ et $f(0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. En utilisant la deuxième condition initiale on trouve $f'(0) = a_1 = 0$. Avec la relation de récurrence on déduit pour $n = 0$:
$$a_0 + a_1 + 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$a_1 + 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}$$
$$a_2 + 3a_3 + 4 \cdot 3a_4 = \frac{1}{2!} \Rightarrow a_4 = 0$$
$$a_3 + 4a_4 + 5 \cdot 4a_5 = \frac{1}{3!} \Rightarrow a_5 = 0$$
4. Si on continue on trouve que
$$a_4 + 5a_5 + 6 \cdot 5a_6 = \frac{1}{4!} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{4!}\frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6!}$$
On observe donc que si $n = 3k$ alors $a_{3k} = \frac{1}{(3k)!}$, si $n = 3k+1$, alors $a_{3k+1} = 0$ et si $n = 3k+2$, $a_{3k+2} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. On justifie cela par récurrence. On a déjà vérifié pour

$k=1$. On suppose que c'est vrai pour k et on vérifie que l'affirmation est vrai pour $k+1$:

$$a_{3k+1}+(3k+2)a_{3k+2}+(3k+1+2)(3k+1+1)a_{3(k+1)}=\frac{1}{(3k+1)!}$$

$$\Rightarrow 0+0+(3k+3)(3k+2)a_{3(k+1)}=\frac{1}{(3k+1)!}\Rightarrow a_{3(k+1)}=\frac{1}{(3k+3)!}=\frac{1}{(3(k+1))!}$$

En écrivant la relation de récurrence pour $n=3k+2$ et $n=3k+3$ on trouve que $a_{3(k+1)+1}=a_{3k+4}=0$ et $a_{3(k+1)+2}=a_{3k+5}=0$.

Le développement en série entière de $f(x)$ est donc $f(x)=\displaystyle\sum_{0}^{+\infty}\frac{x^{3k}}{(3k)!}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. La règle de d'Alembert donne immédiatement $R=\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{3(k+1)}|}{|a_{(3k)}|}=0$$

(La série ayant des termes manquants on peut noter $U_n=a_{3k}$ et la série $\sum_{0}^{+\infty}\frac{x^{3k}}{(3k)!}$ devient $\sum_{0}^{+\infty}U_nx^n$, avec $U_n=\frac{1}{n!}=\frac{1}{(3k)!}=a_{3k}$)