Année 2016-2017

UE 4AM01 - MMC partie Fluides
2ème session - Jeudi 27 avril 2017 - 2h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit.
En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

1 Explosion nucléaire

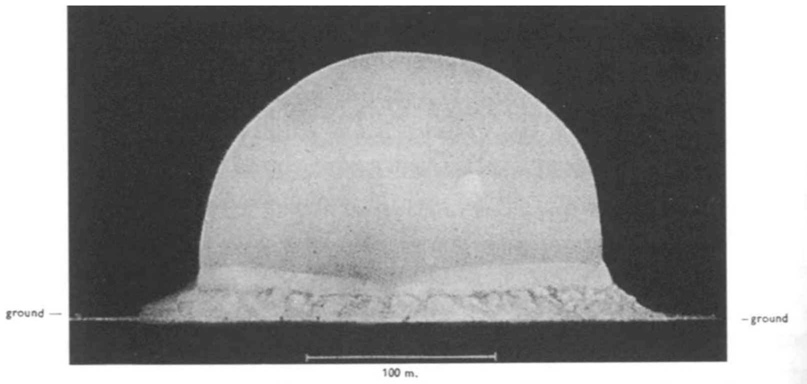

FIGURE 1 – Image de la boule de feu 15 ms après le déclenchement d'une explosion nucléaire au sol. Extrait de : *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*, G. I. Barenblatt, Cambridge (1996).

L'énergie E libérée par une explosion nucléaire peut être évaluée en ordre de grandeur par analyse dimensionnelle en analysant le film de l'explosion. Lors d'une explosion nucléaire, une boule de gaz de forte température et de forte pression se dilate dans l'atmosphère à très grande vitesse (voir figure 1). L'explosion est déclenchée à l'instant $t = 0$. On note $R(t)$ le rayon de la boule de gaz.

1. Déterminez par analyse dimensionnelle la loi d'évolution du rayon de la boule de gaz $R(t)$ en fonction de E et de la masse volumique initiale de l'air atmosphérique ρ. Le facteur numérique apparaissant dans cette loi sera pris égal à un.

Solution: **sur 3 points**
$R = f(\rho, E, t)$; $n + 1 = 4$, $k = 3$ (L,M,T) $\Rightarrow n + 1 - k = 1$: la loi peut s'exprimer comme une loi impliquant une seule grandeur sans dimension. En exprimant la dimension de R en fonction des dimensions des k autres grandeurs dimensionnellement indépendantes ρ, R, t, on trouve $\Pi = RE^{-1/5}\rho^{1/5}t^{-2/5}$ sans dimension. Donc la loi s'écrit : $\Pi =$ constante, soit $R \propto \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} t^{2/5}$.

2. Exprimez $\frac{5}{2}\log R$ en fonction de $\log\frac{E}{\rho}$ et de $\log t$ (log est le logarithme en base 10 : $\log(10) = 1$).

Solution: sur 1 point
$\frac{5}{2}\log R = \frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right) + \log t$

3. A partir du film d'une explosion nucléaire, on a déterminé la loi expérimentale d'évolution du rayon de la boule de gaz chaud en expansion $R(t)$. Ces mesures sont reportées sur la figure 2, où $\frac{5}{2}\log R$ (R exprimé en m) est représentée en fonction de $\log t$ (t exprimé en s).

Solution: sur 1 point
Pour $\log t = -4$, $\frac{5}{2}\log R = 7,8$, donc $\frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right) - 4 = 7,8$, donc $\log\left(\frac{E}{\rho}\right) = 23,6$. Or $\rho \simeq 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ donc $E \simeq 10^{23,6} \simeq 4 \times 10^{23}$ J.

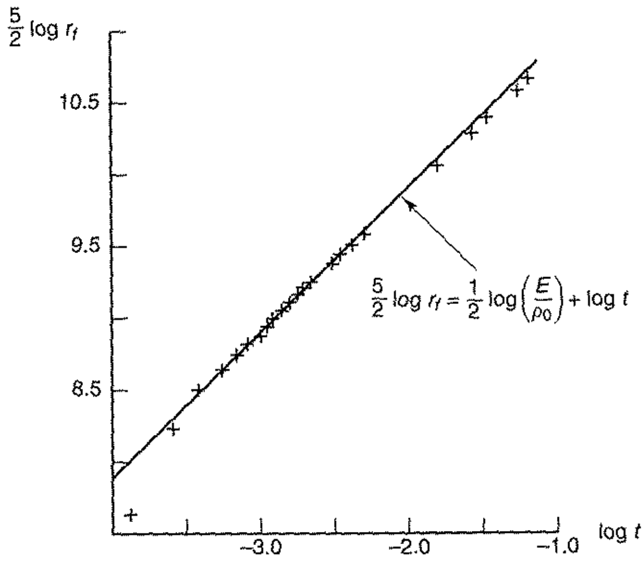

FIGURE 2 – Mesures expérimentales. Même référence que la figure 1.

Déduisez de ce graphe la valeur numérique de l'énergie libérée par la bombe. Cette valeur, déterminée par analyse dimensionnelle, est très proche de la valeur réelle de l'énergie libérée par la bombe.

2 Ecoulement dans un conduit sanguin

Le sang circule dans le circuit sanguin sous l'effet des impulsions de pression de la pompe que constitue le coeur. On constate expérimentalement que l'écoulement du sang est la superposition d'un écoulement permanent et d'un écoulement instationnaire pulsé. On se propose d'étudier cet écoulement.

Le sang est considéré comme incompressible, homogène, de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ, de viscosité cinématique ν. Il est supposé s'écouler dans une conduite cylindrique rigide de section droite circulaire de rayon a, de longueur L très grande devant son rayon, qui représente une artère ou une veine. Le poids est négligé.

On adote les coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe (Ox) coincidant avec l'axe de la conduite, voir la figure 3.

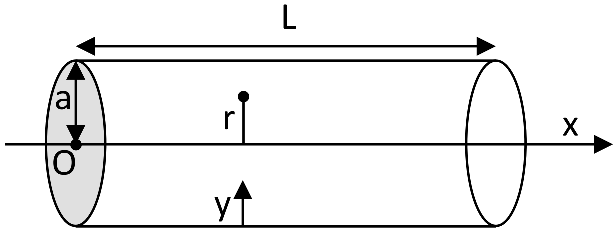

FIGURE 3 – Schéma du conduit sanguin.

Equation - Dans tout le problème on considère que L/a est assez grand pour que l'écoulement, stationnaire ou instationnaire, soit parallèle et axisymétrique : le champ de vitesse s'écrit donc : $\mathbf{v} = u\ \mathbf{e}_x$ où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe (Ox).

1. En vous aidant évenduellement du formulaire donné en fin d'énoncé, montrez que :
   — u est indépendant de x,

   Solution: sur 0,5 point
   Conservation de la matière : $v = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

   — la pression du sang p est indépendante de r.

   Solution: sur 0,5 point
   Navier-Stokes selon r : $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$.

2. Montrez que le problème est gouverné par une seule équation (E) que vous donnerez.

   Solution: sur 1 point

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

3. Quelles est la condition à la limite imposée à la vitesse ?

   Solution: sur 0,5 point
   $u(r = a, t) = 0\ \forall t$

4. Justifiez physiquement pourquoi la vitesse vérifie aussi $\frac{\partial u}{\partial r}(r = 0, t) = 0\ \forall t$. Cette égalité peut être considérée comme une deuxième condition à la limite imposée à la vitesse.

   Solution: sur 0,5 point
   Dans le cas contraire, la dérivée de la vitesse présenterait une discontinuité sur l'axe, ce qui y induirait une discontinuité de la contrainte visqueuse, ce qui est impossible physiquement.

Ecoulement stationnaire - On suppose ici l'écoulement stationnaire (ses champs sont indicés par l'indice 0) établi sous l'effet d'une différence de pression constante entre l'amont ($x = 0$) et l'aval ($x = L$) de la conduite telle que $[p_0(L) - p_0(0)]/L = -K$ où $p_0(0)$ et $p_0(L)$ sont fixés tels que K est une constante positive. C'est l'écoulement de Poiseuille.

5. Dans quel sens le sang s'écoule-t-il ?

> **Solution:** Surpression en amont (**0,5 point**) donc écoulement dans le sens des x croissants (**0,5 point**).

En utilisant les adimensionnements suivants : $r = a\,\bar{r}$, $x = L\,\bar{x}$, $u_0(r) = U_0\,\bar{u}_0(\bar{r})$ (U_0 échelle inconnue à ce stade) et $p_0 = p_0(0) - KL\,\bar{p}_0(\bar{x})$, où $\bar{z}$ est la notation de la partie analytique de z, $z = r, x, u_0$,

6. adimensionnez l'équation (E) écrite pour un écoulement stationnaire et les conditions aux limites imposées à la vitesse et à la pression,

> **Solution:** $\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{d\bar{u}_0}{d\bar{r}}\right) = -\frac{Ka^2}{\mu U_0}\frac{d\bar{p}_0}{\partial \bar{x}}$ (**1 point**), $\bar{u}_0(\bar{r} = 1) = 0$, $\frac{d\bar{u}_0}{d\bar{r}}(\bar{r} = 0) = 0$ (**1 point**), $\bar{p}_0(\bar{x} = 0) = 0$, $\bar{p}_0(\bar{x} = 1) = 1$ (**1 point**).

7. ensuite montrez que $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{x}$,

> **Solution:** **sur 2 point**
> De (E), $\bar{p}_0 = \bar{p}_0(\bar{x})$ et $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(\bar{r})$ on tire $\frac{d\bar{p}_0}{\partial \bar{x}}$ = constante, qui s'intègre en $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{x}$ compte tenu des conditions aux limites.

8. enfin déterminez $\bar{u}_0(\bar{r})$ et choisissez U_0 pour que $\bar{u}_0 = 1 - \bar{r}^2$. Exprimez la vitesse maximale.

> **Solution:** **sur 2 points**
> $\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{r}}\right) = -\frac{Ka^2}{\mu U_0}$ s'intègre en $\bar{u}_0 = \frac{Ka^2}{4\mu U_0}(1 - \bar{r}^2)$ donc $U_0 = \frac{Ka^2}{4\mu}$ vitesse maximale.

Ecoulement complet - Du fait des contractions périodiques du coeur de période T, la pression présente aussi une composante instationnaire $p_1(x,t)$ périodique de période T :

$$p(x,t) = p_0(x) + p_1(x,t)$$

En conséquence, la vitesse de l'écoulement présente aussi une composante instationnaire $u_1(r,t)$ périodique de période T :

$$u(r,t) = u_0(r) + u_1(r,t)$$

(u,p) étant solution de (E).

9. Montrez que u_1 et p_1 vérifient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\right) \tag{1}$$

et écrivez les conditions aux limites vérifiées par u_1.

Solution: sur 2 points
(E) étant linéaire, (u,p) et (u_0,p_0) étant solutions de (E), $(u-u_0=u_1, p-p_0=p_1)$ est aussi solution de (E), qui est précisément l'équation donnée. u et u_0 vérifiant la condition d'adhérence et la condition de dérivée radiale nulle sur l'axe, $u-u_0=u_1$ vérifie aussi la condition d'adhérence et la condition de dérivée radiale nulle sur l'axe : $u_1(a,t)=0$ et $\frac{\partial u_1}{\partial r}(r=0,t)=0\ \forall t$.

10. En utilisant les adimensionnements suivants : $r=a\,\bar{r}$, $x=L\,\bar{x}$, $t=T\,\bar{t}$, $u_1(r,t)=\delta U\,\bar{u}_1(\bar{r},\bar{t})$ (δU échelle inconnue à ce stade), $p_1(x,t)=\delta P\,\bar{p}_1(\bar{x},\bar{t})$ (δP échelle fixée par la dynamique du coeur), où $\bar{z}$ est la notation de la partie analytique de z, $z=r,x,t,u_1,p_1$, adimensionnez l'équation (1) en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes :
$$\mathrm{Re}=\frac{a^2\,\delta P}{\mu L\,\delta U}\ \text{: nombre de Reynolds}$$
$$\mathrm{St}=\frac{\rho L\,\delta U}{T\,\delta P}\ \text{: nombre de Strouhal}$$
Adimensionnez les condition aux limites vérifiées par $\bar{u}_1$.

Solution: sur 2 points
$$\mathrm{St}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}}=-\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}\right)$$
$\bar{u}_1(\bar{r}=1,\bar{t})=0$ et $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}(\bar{r}=0,\bar{t})=0\ \forall \bar{t}$.

11. Identifiez les termes représentant le moteur de l'écoulement périodique, son (ses) éventuel(s) frein(s), sa (ses) éventuelle(s) conséquence(s).

Solution: sur 3 points

— Le moteur de l'écoulement périodique est le gradient de pression périodique induit par les contractions du coeur : terme $-\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}}$, d'ordre 1.

— Le frein de l'écoulement est le frottement visqueux sur les parois immobiles de la conduite : terme $\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}\right)$, d'ordre $\frac{1}{\mathrm{Re}}$.

— L'inertie du fluide, c'est-à-dire le fait que le fluide s'oppose a toute accélération, est aussi un frein à l'écoulement, qui limite son accélération sous l'effet du gradient de pression : terme $\mathrm{St}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}}$, d'ordre St.

12. Dans quelles conditions particulières portant sur Re et St les termes de l'équation sont-ils tous du même ordre de grandeur (problème complet) ? En déduire les expressions des valeurs particulières a^* de a et δU^* de δU correspondantes en fonction des données : $\mu,\nu,\rho,L,\delta P,T$. Evaluer numériquement a^* et δU^*. Les valeurs typiques des données pour le sang et la circulation sanguine sont : $\mu\simeq 6\times10^{-3}$ Pa·s, $\rho\simeq 1000$ kg·m^{-3}, $T\simeq 1$ s, $\delta P\simeq 1$ kPa, $L\simeq 1$ m.

Solution:

$$\mathrm{St} \sim \mathrm{Re}^{-1} \sim 1$$

$$a^* = \sqrt{\nu T} \ (\textbf{1 point})$$
$$\delta U^* = \frac{\delta P\, T}{\rho L} \ (\textbf{1 point})$$

$a^* \simeq 2,5$ mm. $\delta U^* \simeq 1 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (**1 point**).

Ecoulement de fluide parfait - On considère toujours la composante instationnaire de l'écoulement indicée par 1, qui obéit à l'équation (1), et on étudie toujours sa forme adimensionnée.

13. Quelles (in)égalités St et Re vérifient-ils dans l'hypothèse d'écoulement de fluide parfait (effets visqueux négligeables devant l'inertie) ? Montrez que cette situation se rencontre pour $a \gg a^*$. Cette hypothèse est-elle vérifiée pour la grosse artère aorte (de diamètre $2,5$ cm), les plus petites artères (artérioles, de diamètre 2 mm) ?

Solution: Par définition de Re, la situation dans laquelle les effets visqueux sont négligeables devant l'inertie correspond à $\mathrm{Re} \gg 1$. Le terme d'inertie doit donc obligatoirement compenser le terme moteur, donc $\mathrm{St} \sim 1$, c'est-à-dire $\delta U = \delta U^*$. En injectant cette égalité dans $\mathrm{St} \sim 1$, on trouve $a \gg \sqrt{\nu T} = a^*$ (**2 points**). Cette hypothèse est donc valable pour l'aorte mais pas pour les artérioles (**1 point**).

14. Comment se simplifie l'équation (1) adimensionnée sous cette hypothèse d'écoulement de fluide parfait ? Le problème est-il bien posé ? S'attend-on à ce que la solution soit régulière ou singulière ?

Solution: **sur 1 point**
Dans l'hypothèse $\mathrm{Re} \gg 1$, on a nécessairement $\mathrm{St} \sim 1$, donc l'équation se simplifie alors en :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}}$$

Cette équation est du premier ordre et sa solution doit vérifier deux conditions aux limites donc le problème est surdéterminé. On s'attend à ce que la solution soit singulière à la paroi, en effet en absence d'effets visqueux elle n'a pas de raison de s'annuler à la paroi donc de vérifier la condition d'adhérence.

15. Montrez que $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} = f(\bar{t})$ où f est une fonction arbitraire. En déduire l'expression générale de $\bar{p}_1$.

Solution: **sur 2 points**
Le membre de gauche dépend de $\bar{r}$ et de $\bar{t}$, celui de droite de $\bar{x}$ et de $\bar{t}$, comme ils sont égaux ils ne peuvent dépendre que de leur(s) variable(s) commune(s), ici $\bar{t}$. $\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} = f(\bar{t})$ s'intègre en $\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} f(\bar{t}) + g(\bar{t})$, g fonction arbitraire.

16. On donne $\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} \sin(2\pi \bar{t})$. Déterminez l'expression de $\bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t})$ compatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 0$. Quel est la nature de la composante de l'écoulement

dépendant du temps ? Cette solution est-elle compatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 1$?

> **Solution:** sur 2 points
> $\bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi\bar{t}) + h(\bar{r})$, h fonction arbitraire. $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}(\bar{r} = 0, \bar{t}) = 0$ impose $h^{'}(0) = 0$. La composante de l'écoulement dépendant du temps est une écoulement bouchon (pas de dépendance radiale). Aucune forme de h ne permet de vérifier la condition de non-glissement à la paroi à tout instant donc cette solution est incompatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 1$.

Résolution de la singularité de l'écoulement de fluide parfait - Afin de déterminer une solution physiquement acceptable dans la limite $\mathrm{Re} \gg 1$, vous allez mettre en oeuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le voisinage de la singularité de la solution que l'on pressent localisée à la paroi. On définit donc un domaine intérieur intégrant le lieu de la singularité, c'est-à-dire la paroi, d'extension radiale δ telle que $\delta \ll a$, dans lequel vous résoudrez le problème complet puis effectuerez le raccord avec la solution dans le domaine extérieur.

17. Le domaine intérieur est donc défini radialement par $r = a - y$ (voir la figure 3) où $y = \delta\tilde{y}$, $\tilde{y} \sim 1$, et axialement par $x = L\bar{x}$, $\bar{x} \sim 1$. En définissant $\varepsilon = \delta/a$ et en utilisant les adimensionnements suivants, valables dans le domaine intérieur : $u_1(r, t) = \delta U^{'}\, \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})$, $p_1(x, t) = \delta P^{'}\, \tilde{p}_1(\tilde{y}, \bar{t})$, où $\tilde{z}$ est la notation de la partie analytique de z, $z = y, u_1, p_1$, adimensionnez l'équation (1) et montrez que :

$$\mathrm{St}^{'}\, \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}^{'}}\, \frac{1}{1 - \varepsilon\tilde{y}}\, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\left((1 - \varepsilon\tilde{y})\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}}\right) \qquad (2)$$

où $\mathrm{Re}^{'} = \frac{a^2\,\delta P^{'}}{\mu L\,\delta U^{'}}$ et $\mathrm{St}^{'} = \frac{\rho L\,\delta U^{'}}{T\,\delta P^{'}}$.

> **Solution:** sur 2 points
> on peut partir de l'équation (1) ou de sa forme adimensionnée.

18. Montrez que $\varepsilon \ll 1$ et effectuez les simplifications permises par l'approximation de plan tangent.

> **Solution:** sur 1,5 point
> $$\mathrm{St}^{'}\, \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Re}^{'}}\, \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}^2}$$

19. Ecrivez la condition à la limite vérifiée par $\tilde{u}_1$.

> **Solution:** sur 0,5 point
> adhérence à la paroi : $\tilde{u}_1(\tilde{y} = 0, \bar{t}) = 0\ \forall \bar{t}$

20. Ecrivez les conditions de raccord imposées à $\tilde{u}_1$ et $\tilde{p}_1$. En déduire les égalités vérifiées par les échelles et les parties analytiques des solutions. Montrez enfin que $\mathrm{St}^{'} = \mathrm{St}$ et $\mathrm{Re}^{'} = \mathrm{Re}$.

Solution: Les solutions au problème singulier dans les domaines intérieur et extérieur $(\bar{u}_1, \bar{p}_1)$ et $(\tilde{u}_1, \tilde{p}_1)$ étant cherchées sous la forme de l'approximation à l'ordre le plus bas en $1/\mathrm{Re}$, et compte tenu du fait que (i) $\bar{p}_1$ ne dépend pas de $\bar{r}$ (conséquence de l'écoulement extérieur parallèle), (ii) $\tilde{p}_1$ ne dépend pas de $\tilde{y}$ (conséquence de l'écoulement intérieur parallèle), (iii) $\bar{u}_1$ ne dépend pas de $\bar{r}$ (conséquence de la nature parallèle et parfaite de l'écoulement extérieur), les conditions de raccord de ces solutions s'écrivent sous la forme simple suivante :

$$\lim_{\tilde{y}\to+\infty} (\delta U' \ \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})) = \delta U \ \bar{u}_1(\bar{t}) \ (\mathbf{1\ point})$$

$$\delta P' \ \tilde{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \delta P \ \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) \ (\mathbf{1\ point})$$

Donc $\delta U = \delta U'$, $\delta P = \delta P'$ (**1 point**), $\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t}) = \bar{u}_1(\bar{t})$ (**1 point**) et $\tilde{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t})$ (**1 point**). D'où $\mathrm{St}' = \mathrm{St}$ et $\mathrm{Re}' = \mathrm{Re}$ (**1 point**).

21. Montrez que la condition de non-dégénéresence du problème dans le domaine intérieur impose $\varepsilon \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$. En déduire la forme simplifiée de l'équation (2) dans le domaine intérieur.

Solution: Dans le domaine intérieur on souhaite prendre en compte les effets visqueux négligés dans le domaine extérieur, c'est-à-dire équilibrer le moteur de l'écoulement avec son frein, donc $1 \sim \frac{1}{\varepsilon \mathrm{Re}'^2}$. Or $\mathrm{Re}' = \mathrm{Re}$ donc $\varepsilon \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ (**1 point**). Comme $\mathrm{St}' = \mathrm{St} \sim 1$ on a :

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}^2} \ (\mathbf{1\ point})$$

$\tilde{p}_1$ étant connue, cette e.d.p. linéaire inhomogène s'identifie à une équation de diffusion de $\tilde{u}_1$ forcée qui est soluble analytiquement.

Formulaire : équations bilan en coordonnées cylindriques (r, θ, x) **-** Pour un champ de vitesse axisymétrique $\mathbf{v} = v(r, x, t)\,\mathbf{e}_r + u(r, x, t)\,\mathbf{e}_x$ et un champ de pression axisymétrique $p(r, x, t)$:

— Conservation de la matière au sein d'un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible (équation de Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)\right]$$