Calculs de structures élastiques - 3A006

Ecrit 1 - Mardi 28 février 2017

Durée : 2 heures

Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

Exercice

On considère une structure de géométrie cylindrique dans son état non déformé, d'axe $\underline{e}_3$, de hauteur l dans cette direction, de section circulaire de rayon R. On désigne par S_0 la surface terminale d'équation $x_3 = 0$, S_l la surface terminale d'équation $x_3 = l$ et S_e la surface latérale d'équation $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R$.
Une coupe de la structure dans le plan (r, x_3) avant déformation est présentée à la Figure a et ses déformées sous deux chargements différents en déplacement imposé sur les surfaces terminales sont présentées aux Figure b (Chargement 1) et Figure c (Chargement 2).

1. Expliciter pour chacun des deux chargements les conditions aux limites qui conduisent à ces deux déformées.

On veillera à formuler dans chacun des cas les conditions aux limites pour conduire à un problème régulier.

Expliciter pour chacun des deux problèmes les espaces de champs statiquement et cinématiquement admissibles associés.

2. Donner pour chacun des deux problèmes leur type. Justifier la réponse.

Discuter précisément de l'unicité de la solution en déplacement et contraintes de chacun des deux problèmes.

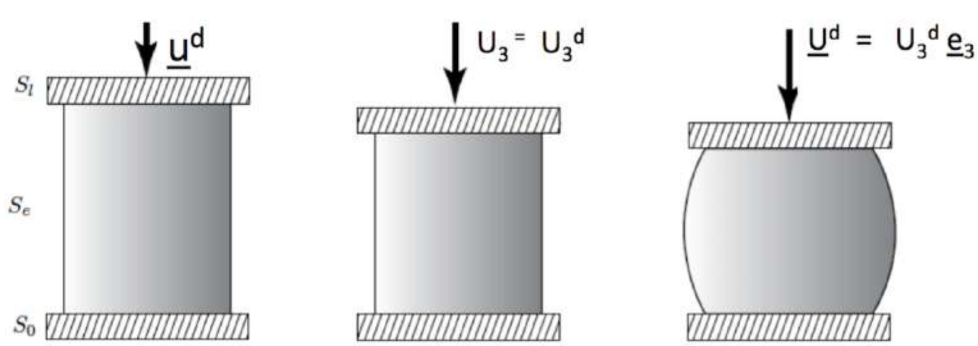

Figure a
Non déformée

Figure b
Chargement 1

Figure c
Chargement 2

Problème

L'objectif de ce problème est de construire la réponse d'un barreau de faible épaisseur sous différents chargements élémentaires et couplés.

On considère un barreau de longueur L dans la direction $\underline{e}_1$, de section rectangulaire S, de largeur $2h$ dans la direction $\underline{e}_2$, d'épaisseur $2e$ dans la direction $\underline{e}_3$. Cette épaisseur $2e$ est faible devant les deux autres dimensions L et $2h$. On désigne par S_0 la surface terminale d'équation $x_1 = 0$, par S_L la surface terminale d'équation $x_1 = L$, $S_{\pm h}$ les surfaces d'équation $x_2 = \pm h$ et par $S_{\pm e}$ les surfaces d'équation $x_3 = \pm e$.

Le barreau est réalisé dans un matériau homogène, élastique linéaire et isotrope, caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ ou de façon équivalente par le module de Young E et coefficient de Poisson ν.

Les efforts volumiques sont supposés négligeables, le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est supposé valide et la structure est en équilibre.

Compte-tenu de la faible épaisseur du barreau, la structure sera supposée en état de contraintes planes parallèlement au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

1. Rappeler ce que traduisent précisément les équations de compatibilité et donner leur expression générale en tridimensionnel.

Donner la forme du champ de contraintes et de déformations associés à un état de contraintes planes parallèlement au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Montrer que les équations de compatibilité se réduisent sous l'hypothèse des contraintes planes à 4 équations que l'on précisera.

2. Montrer que les composantes du tenseur des contraintes peuvent s'exprimer en fonction des dérivées d'une fonction scalaire $\chi(x_1, x_2)$.

Rappeler les 4 équations que doivent nécessairement satisfaire la fonction $\chi(x_1, x_2)$ pour conduire à une solution d'un problème d'élasticité en contraintes planes.

Montrer que ces 4 équations sont bien satisfaites par une fonction $\chi(x_1, x_2)$ de la forme suivante:

$$\chi(x_1, x_2) = A\, x_1^3 + B\, x_2^3 + C\, x_1^2 x_2 + D\, x_1 x_2^2 + F\, x_1^2 + G\, x_1 x_2 + H\, x_2^2 + I\, x_1 + J\, x_2 + K,$$

où $A, B, C, D, F, G, H, I, J, K$ sont des constantes quelconques.

3. On fait le choix dans cette question d'une fonction $\chi^1(x_1, x_2)$ de la forme :

$$\chi^1(x_1, x_2) = H\, x_2^2 + I\, x_1 + J\, x_2 + K.$$

3.1 Calculer le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^1$ associé à ce choix.

Expliciter les conditions aux limites en efforts sur les surfaces du barreau.

On introduira la notation $\sigma_1 = 2H$.

Représenter ce chargement sur la section droite S rectangulaire dans le plan $x_3 = 0$.

Interpréter mécaniquement le chargement appliqué au barreau.

Le problème ainsi posé avec les conditions aux limites en effort est-il régulier ?

Si oui quel est son type ? *Justifier la réponse.*

Justifier l'existence d'une solution à ce problème.

3.2 Calculer le champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^1$ associé.

Déterminer un champ de déplacement associé particulier.

Donner la forme générale du champ de déplacement solution $\underline{u}^1$.

3.3 Les champs de déplacement, déformations et contraintes sont-ils uniques ?

Justifier précisément la réponse en relation avec le type du problème considéré.

Le déplacement obtenu satisfait-il une condition d'encastrement sur la face S_0?

Qu'en est-il de l'unicité si le déplacement au point $(0,0,0)$ est supposé nul ?

On impose maintenant le déplacement au point $(0,0,0)$ nul et de plus :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0,0) \;=\; 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0,0,0) \;=\; 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(0,0,0) \;=\; 0,$$

qu'en est-il de l'unicité du déplacement ? Commenter.

Si maintenant le déplacement du point $(0,0,0)$ est nul et de plus :

$$u_2(L,0,0) \;=0, \quad u_3(L,0,0) \;=\; 0,$$

qu'en est-il de l'unicité du déplacement ? Commenter.

4. On fait maintenant, dans cette question, le choix d'une fonction $\chi^2(x_1,x_2)$ de la forme

$$\chi^2(x_1,x_2) \;=\; F\,x_1^2 \,+\, H\,x_2^2 \,+\, I\,x_1 \,+\, J\,x_2 \,+K.$$

Calculer le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^2$ associé à ce choix.

Expliciter les conditions aux limites en efforts sur les surfaces du barreau dans ce cas.

On introduira la notation $\sigma_2 = 2F$.

Représenter ce chargement sur la section droite S rectangulaire dans le plan $x_3 = 0$.

Interpréter mécaniquement le chargement appliqué au barreau dans ce cas.

Donner (sans refaire les calculs) l'expression du champ de déplacement associé $\underline{u}^2$.

5. On fait maintenant, dans cette question, le choix d'une fonction $\chi^3(x_1,x_2)$ de la forme

$$\chi^3(x_1,x_2) \;=\; G\,x_1\,x_2 \,+\, I\,x_1 \,+\, J\,x_2 \,+K.$$

Calculer le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^3$ associé à ce choix.

On introduira la notation $\tau = -\,G$.

Expliciter les conditions aux limites en efforts sur les surfaces du barreau dans ce cas.

Représenter ce chargement sur la section droite S rectangulaire dans le plan $x_3 = 0$.

Interpréter mécaniquement le chargement appliqué au barreau dans ce cas.

Former l'expression générale du champ de déplacement associé $\underline{u}^3$.

6. On fait maintenant, dans cette question, le choix d'une fonction $\chi^4(x_1, x_2)$ de la forme

$$\chi^4(x_1, x_2) \; = \; B\,x_2^3 \, + \, I\,x_1 \, + \, J\,x_2 \, + K.$$

Calculer le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^4$ associé à ce choix.

Expliciter les conditions aux limites en efforts sur les surfaces du barreau dans ce cas.

Représenter ce chargement sur la section droite S rectangulaire dans le plan $x_3 = 0$.

Interpréter mécaniquement le chargement appliqué au barreau dans ce cas.

7. On choisit maintenant la fonction $\hat{\chi}(x_1, x_2) \; = G\,x_1\,x_2 \, + \, M\,x_1\,x_2^3 \, + \, I\,x_1 \, + \, J\,x_2 \, + K.$

Expliquer pourquoi cette fonction ne peut pas conduire à une solution exacte d'un problème d'élasticité en contraintes planes.

Commenter la qualité de l'approximation qu'elle fournit.

8. On suppose le barreau soumis à un chargement de flexion composée caractérisé par le torseur $\mathcal{T}_L$ exercé sur la face S_L de résultante $\underline{R}_L \; = \mathcal{R}\,\underline{e}_1$ et de moment au point O porté par $\underline{e}_3$, $\underline{M}_L(O) \; = \; \mathcal{M}\,\underline{e}_3$, où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}$ sont des constantes données. La surface S_0 est soumise au torseur $\mathcal{T}_0$ de résultante $\underline{R}_0 \; = \; -\mathcal{R}\,\underline{e}_1$ et $\underline{M}_0(O) \; = \; -\mathcal{M}\,\underline{e}_3$. Les autres surfaces sont libres d'efforts.

Quelles sont les unités des données $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}$?

Le problème ainsi posé est-il régulier ? Justifier la réponse.

En s'appuyant sur les questions précédentes, proposer une solution en contraintes de ce problème.

Justifier la validité de la construction.

Enoncer le principe de Saint-Venant.

La solution construite est-elle unique ?