

## Modélisation des solides déformables

Examen du 6 janvier 2016

*Durée de l'épreuve : 3 heures*

*Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.*

*Barème approximatif : problème 1 sur 13 points, problème 2 sur 7 points.*

### Problème 1 : Encadrement de l'inertie de torsion d'un arbre de section quelconque

On considère un arbre cylindrique, de génératrices parallèles à l'axe  $\underline{e}_3$ , de hauteur  $L$  selon cette direction, de section droite  $S$  de géométrie quelconque, identique le long de l'axe  $\underline{e}_3$ , (Figure). On désigne par  $S_0$  et  $S_L$  les sections terminales du cylindre et par  $\Gamma$  sa surface latérale. L'origine  $O$  du repère est prise au centre d'inertie de la section  $S_0$  et les axes  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  coïncident avec les axes principaux d'inertie, c'est à dire que :

$$\int_S x_1 dS = 0, \quad \int_S x_2 dS = 0, \quad \int_S x_1 x_2 dS = 0.$$

Cet arbre est constitué d'un matériau élastique linéaire, isotrope, homogène, de coefficient de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , de module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ .

L'arbre est soumis à une sollicitation de torsion autour de l'axe  $\underline{e}_3$  imposée à travers un déplacement tangentiel donné sur la face  $S_L$  sous la forme :

$$u_1^d(x_1, x_2, L) = -\alpha L x_2, \quad u_2^d(x_1, x_2, L) = \alpha L x_1, \quad \forall (x_1, x_2) \in S,$$

$\alpha$  étant l'angle de torsion unitaire  $\alpha > 0$ , supposé connu et la composante normale de la densité surfacique  $\underline{F}_L$  exercée sur cette face est par ailleurs nulle, soit :

$$\underline{F}_L \cdot \underline{n}_L = 0,$$

$\underline{n}_L$  désignant la normale extérieure unitaire à la face  $x_3 = L$ .

La torsion de la face  $S_0$  est bloquée avec un déplacement tangentiel imposé nul et la composante normale de la densité surfacique  $\underline{F}_0$  exercée sur cette face nulle, soit :

$$u_1^d(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2^d(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \underline{F}_0 \cdot \underline{n}_0 = 0,$$

$\underline{n}_0$  désignant la normale extérieure unitaire à la face  $x_3 = 0$ .

La surface latérale  $\Gamma$  est libre d'effort et les efforts volumiques sont supposés négligeables. L'arbre est en équilibre sous ces sollicitations et l'hypothèse des petites perturbations est supposée valable.

L'objectif de cet exercice est d'encadrer l'inertie de torsion  $J$  définie par la relation suivante :

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha,$$

où  $\mathcal{C}$  désigne le couple de torsion autour de l'axe  $\underline{e}_3$  exercé sur la section terminale  $S_L$ , soit la composante selon  $\underline{e}_3$  du moment  $\underline{M}(O)$  au point  $O$  du torseur des efforts extérieurs appliqués sur la section terminale  $S_L$  :  $\mathcal{C} = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3$ .

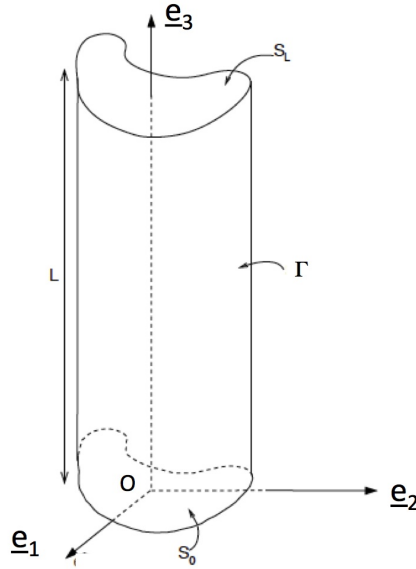


Figure 1: Géométrie de l'arbre

## Partie 1 : Formulations du problème d'équilibre

**1.1** Ecrire les équations et conditions aux limites du problème d'équilibre satisfait par les champs de déplacements, contraintes et déformations sur le domaine  $\Omega$  occupé par l'arbre dans sa configuration non déformée.

Définir les espaces cinématiquement admissibles  $\mathcal{U}_{ad}$  et statiquement admissibles  $\Sigma_{ad}$  pour ce problème.

**1.2** Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p(\underline{v})$  pour un champ de déplacement  $\underline{v}$  cinématiquement admissible.

Enoncer le théorème de minimisation de l'énergie potentielle pour ce problème.

**1.3** Donner l'expression de l'énergie complémentaire  $E_c(\underline{\tau})$  pour un champ de contrainte  $\underline{\tau}$  statiquement admissible.

Enoncer le théorème de minimisation de l'énergie complémentaire pour ce problème.

**1.4** Rappeler la formule de Clapeyron.

Donner son expression pour le problème considéré.

**1.5** Dédurre des questions précédentes les inégalités énergétiques suivantes :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{1+\nu}{E} \underline{\tau} : \underline{\tau} - \frac{\nu}{E} [\text{trace } \underline{\tau}]^2 \right] d\omega + \alpha L \int_{S_L} (\tau_{23} x_1 - \tau_{13} x_2) dS \leq \frac{1}{2} \alpha^2 L \mu J, \quad \forall \underline{\tau} \in \Sigma_{ad}$$

$$\frac{1}{2} \alpha^2 L \mu J \leq \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \int_{\Omega} \left[ \underline{\epsilon}(\underline{v}) : \underline{\epsilon}(\underline{v}) + \frac{\nu}{1-2\nu} [\text{trace } \underline{\epsilon}(\underline{v})]^2 \right] d\omega, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On rappelle les relations entre les coefficients d'élasticité :

$$2\mu = \frac{E}{(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

## Partie 2 : Borne supérieure de l'inertie de torsion

**2.1** Soit le champ de déplacement  $\underline{v}$  défini dans  $\Omega$  de la forme :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \alpha x_3 (-x_2 \underline{e}_1 + x_1 \underline{e}_2) + \alpha \phi(x_1, x_2) \underline{e}_3,$$

où  $\phi$  est une fonction régulière quelconque des variables  $(x_1, x_2)$ .

Ce champ de déplacement est-il cinématiquement admissible pour le problème ?

Calculer l'énergie potentielle  $E_p(\underline{v})$  associée.

**2.2** En déduire l'inégalité suivante pour le module d'inertie de torsion :

$$J \leq \int_S \left[ (-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1})^2 + (x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2})^2 \right] dS.$$

## Partie 3 : Borne inférieure de l'inertie de torsion

**3.1** Soit le champ de tenseurs  $\underline{\tau}$  symétrique défini par :

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = \mu \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) - \mu \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_1} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2),$$

où  $\psi$  est une fonction régulière quelconque des variables  $(x_1, x_2)$ .

A quelle condition sur la fonction  $\psi$ , ces champs sont-ils statiquement admissibles pour le problème considéré ?

Calculer l'énergie potentielle complémentaire  $E_c(\underline{\tau})$  associée.

**3.2** En déduire l'inégalité suivante pour le module d'inertie de torsion :

$$J \geq - \int_S \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 + 2 x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + 2 x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right] dS.$$

## Partie 4 : Illustrations pour des sections circulaire et carrée

**4.1** On suppose la section  $S$  circulaire de rayon  $R$ .

Montrer que les fonctions  $\phi(x_1, x_2) = 0$  et  $\psi(x_1, x_2) = A(x_1^2 + x_2^2)$  où  $A$  est une constante conduisent bien à des champs admissibles.

Déterminer la valeur de la constante  $A$  qui conduit à la borne inférieure optimale du module  $J$ .

En déduire l'encadrement optimal du module d'inertie à la torsion dans le cas d'une section circulaire.

Que peut-on conclure sur les champs  $\underline{v}$  et  $\underline{\tau}$  ?

Faire le lien avec la solution du problème de torsion d'un arbre à section circulaire.

**4.2** On suppose dans cette question la section  $S$  carrée de côté  $2a$  avec  $-a \leq x_1 \leq +a$  et  $-a \leq x_2 \leq +a$ .

Vérifier que la fonction  $\psi(x_1, x_2) = A(x_1^2 - a^2)(x_2^2 - a^2)$  où  $A$  est une constante conduit bien à des champs admissibles.

Déterminer l'encadrement optimal du module d'inertie à la torsion dans le cas d'une section carrée, (on conservera  $\phi(x_1, x_2) = 0$ ).

**4.3** Rappeler le résultat du cours sur la qualité de l'approximation en introduisant la fonctionnelle en erreur en loi de comportement  $\Psi(\underline{v}, \underline{\tau})$ .

Estimer l'erreur en déplacement et en contraintes commise dans le cas de la section carrée en approchant la solution en déplacement et en contraintes par les champs  $\underline{v}$  et  $\underline{\tau}$  construits à la question 4.2.

### Problème 2 : Arc circulaire sous charge linéique radiale

On considère un quart d'anneau circulaire de centre  $O$ , de rayon  $a$ , situé dans le plan  $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ , de section constante  $S$ , d'inertie  $I$ . Un point quelconque de l'anneau est repéré par son abscisse curviligne  $s = a\theta$ , l'angle  $\theta$  étant mesuré à partir de l'axe  $\underline{e}_x$  et l'anneau étant décrit dans le sens des angles  $\theta$  croissants avec  $\theta \in [0, \pi/2]$ . On désigne par  $A$  et  $B$  les points d'extrémités repérés respectivement par  $\theta_A = 0$  et  $\theta_B = \pi/2$  et on note  $(\underline{\tau}(s), \underline{n}(s), \underline{e}_3)$  le trièdre orthonormé direct en un point courant d'abscisse  $s$ .

L'arc est en équilibre sous l'action d'une charge linéique radiale, centripète, uniforme, d'intensité  $p_0$ , ainsi que d'une force ponctuelle appliquée à son extrémité  $B$  portée par  $\underline{e}_x$ , soit  $\underline{F} = F \underline{e}_x$ . L'arc est encastré à son extrémité  $A$ , (Figure 2). Les efforts de pesanteur sont négligés.

Le matériau constitutif de l'arc est élastique linéaire, homogène et isotrope, de module de Young  $E$ .

*L'objectif de l'exercice est de déterminer le déplacement à l'appui en  $B$  selon  $\underline{e}_x$ , noté  $x_B$ , inconnue hyperstatique du problème en exploitant l'approche énergétique.*

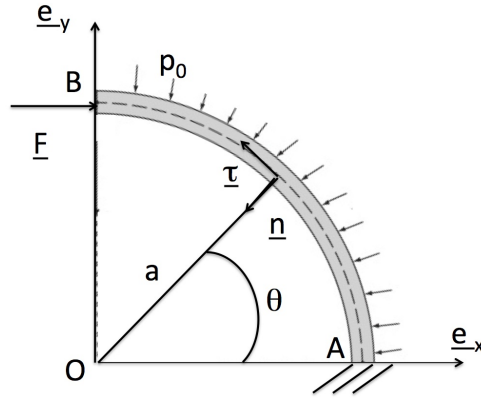


Figure 2: Quart d'anneau. Géométrie et chargement

**2.1** Expliciter les équations d'équilibre en termes de résultante et moment de ce problème.

Donner les conditions aux limites en effort du problème.

**2.2** Montrer que l'effort tranchant  $T(\theta)$  satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2}(\theta) + T(\theta) = 0.$$

En déduire les expressions de l'effort tranchant  $T(\theta)$ , de l'effort normal  $N(\theta)$  et du moment  $M(\theta)$  en tout point de l'arc.

On vérifiera en particulier que :

$$N(\theta) = -p_0 a + (a p_0 - F) \sin \theta, \quad M(\theta) = a (F - a p_0) (\sin \theta - 1).$$

**2.3** Montrer que, sous l'hypothèse de Navier-Euler-Bernoulli, l'énergie complémentaire  $E_c$  pour ce problème est donnée par :

$$E_c = \frac{a}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{N^2(\theta)}{ES} + \frac{M^2(\theta)}{EI} \right) d\theta - F x_B.$$

Rappeler le théorème de l'énergie et expliquer comment l'on peut obtenir le déplacement selon  $\underline{e}_x$  du point  $B$ .

**2.4** En négligeant la contribution de l'effort normal dans l'expression de l'énergie, montrer que le déplacement du point  $B$  selon  $\underline{e}_x$  est donné par:

$$x_B = \frac{a^3}{EI} \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) (F - a p_0).$$

**2.5** Calculer l'expression de la rotation  $\Omega(\theta)$  en tout point de l'arc.

On vérifiera qu'au point  $B$  elle vaut :

$$\Omega_B = \frac{a^2}{EI} \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) (F - a p_0).$$