4AM03 : CC3 - 2016-2017

Durée : 1h30, sans document, ni téléphone

La partie 2 est indépendante et peut être traitée à partir des résultats donnés dans la partie 1. Attention, les échelles des différentes figures ont été exagérées.

Etude des vagues en eau peu profonde et profondeur variable

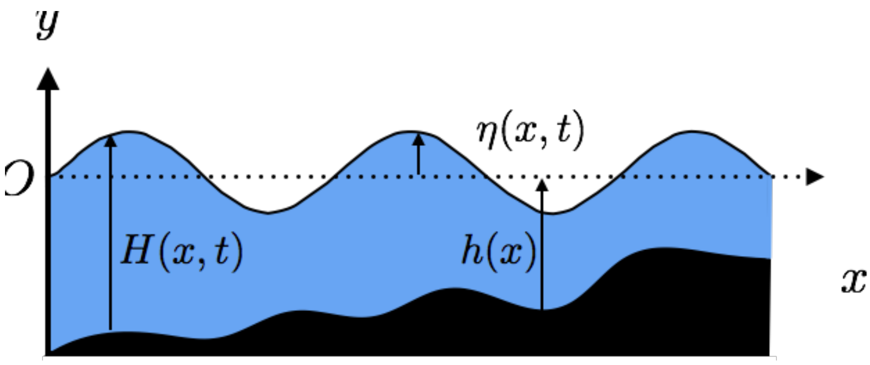

FIGURE 1 – Propagation de vagues avec une profondeur variable

1 Modélisation

On cherche à modéliser la propagation de vagues dans un cas où la profondeur est variable. En prenant comme référence $y = 0$ pour une configuration sans vague, on note (voir 1 :

- $h(x)$ la profondeur de l'eau dans une configuration sans vague,
- $H(x, t)$ la hauteur totale de l'eau avec vagues (état de base + perturbation) au point x et à l'instant t,
- $\eta(x, t)$ la hauteur des vagues (on remarque que $\eta(x, t) = H(x, t) - h(x)$).

Une des hypothèses fondamentales utilisées pour la modélisation de ce problème est de ne considérer que le cas pour lequel la profondeur est très faible devant la longueur d'onde des vagues $h(x) << \lambda$. On note le champ de vitesse : $\underline{V}(x, y, t) = u(x, y, t)\underline{e_x} + v(x, y, t)\underline{e_y}$. D'après l'hypothèse précédente, on supposera que u (composante horizontale de la vitesse du fluide) est de la forme :

$$u(x, y, t) = u(x, t).$$

On suppose que la masse volumique en tout point (x, y) de l'eau et à tout instant t est constante $\rho(x, y, t) = \rho_0$ et on néglige tout les phénomènes de viscosité.

Enfin, on donne le champ de pression dans le fluide :

$$p(x, y, t) = \rho_0 g(\eta(x, t) - y) + P_0$$

avec P_0 la pression atmosphérique (supposée constante).

1. En projetant l'équation d'Euler (bilan de quantité de mouvement) suivant $\underline{e_x}$, montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{1}$$

Solution:
L'équation d'Euler est :

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V}.\underline{\nabla})\underline{V}\right) = -\underline{\nabla}p - \rho\underline{g}$$

L'équation d'Euler projetée sur $\underline{e_x}$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Comme $u(x,t)$, le troisième terme est nul, en injectant l'expression de $p(x,y)$ donné dans l'énoncé, on trouve le résultat demandé

2. En faisant un bilan de masse sur la tranche de fluide d'épaisseur dx, montrer que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

Solution: On fait un bilan de masse (on prend une tranche d'épaisseur 1 dans la direction z).
La masse de la tranche est : $\rho_0 H(x,t)dx$. Son évolution en temps est donc : $\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t}$ L'évolution temporelle est égale au flux entrant (en x moins le flux entrant en $x+dx$:

$$\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t} = \rho_0 H(x,t)u(x,t) - \rho_0 H(x+dx,t)u(x+dx,t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t} = -\rho_0\frac{Hu}{\partial x}dx$$

et donc finalement :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0$$

3. Les deux équations précédentes sont non-linéaires. On rappelle que $|u(x,t)| << 1$ et $|\eta(x,t)| << 1$. Linéariser les équations précédentes et montrer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \qquad (3)$$

Solution: Les 2 équations trouvées précédemment sont

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial Hu}{\partial x} \end{cases}$$

Le 2ème terme de la première équation est un terme quadratique en u, on peut l'éliminer. Dans la deuxième équation, on exprime H en fonction de η :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial (h(x)+\eta(x,t))}{\partial t} = -\frac{\partial (h(x)+\eta(x,t))u}{\partial x} \end{cases}$$

Le terme $h(x)$ ne dépend pas du temps. Par ailleurs, le terme $\eta(x,t)u(x,t)$ est un terme quadratique, on peut l'éliminer :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial h(x)u}{\partial x} \end{cases}$$

4. Montrer qu'on peut écrire une équation de propagation pour la fonction $\eta(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \qquad (4)$$

Solution: d'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x}$$

On remarque que :

$$\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 h(x)u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

En injectant $\frac{\partial u}{\partial t}$ trouvé précédemment :

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)(-g)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

5. Calculer la relation de dispersion de cette équation

Solution: On cherche la solution sous la forme :

$$\eta(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

on trouve :

$$\omega^2 = -gik\frac{dh}{dx} + gk^2 h$$

6. Calculer la vitesse de phase associée. Monter que si la profondeur est constante, alors $c_\phi = \sqrt{gh}$. Est ce cohérent avec les résultats du cours ?

Solution: Vitesse de phase

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh - i\frac{g}{k}\frac{dh}{dx}}$$

2 Dimensionnement de la hauteur d'une digue

Dans cette partie on cherche à dimensionner la hauteur D d'une digue pour éviter que les vagues ne passent au-dessus. Pour cette configuration, la hauteur d'eau au repos est supposée constante : $h(x) = h$.

1. Ecrire l'équation de propagation pour cette configuration.

Solution: Comme $h(x) = h$ est constant, l'équation de propagation se simplifie :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 x} = 0$$

Dans ce cas la vitesse de phase est : $c_\phi = \sqrt{gh}$

2. On considère une onde incidente harmonique (à la pulsation ω), d'amplitude A arrivant du large et se propageant vers les x croissants. Donner l'expression de cette onde incidente $\eta_I(x,t)$.

Solution:

$$\eta_I(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t})$$

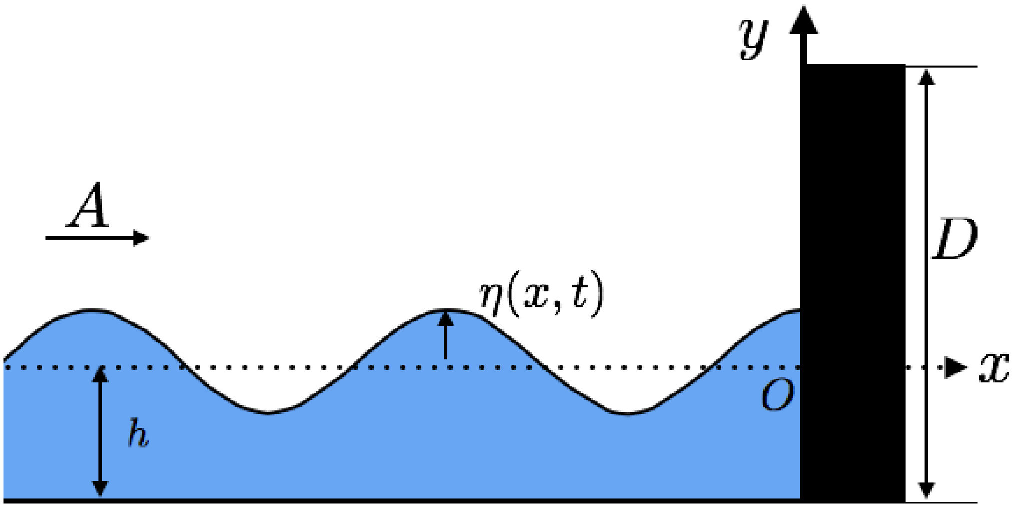

FIGURE 2 – Propagation de vagues en eau peu profonde

3. On note R le coefficient de réflexion en amplitude de la hauteur des vagues sur la digue. Donner l'expression de l'onde réfléchie sur la digue $\eta_R(x,t)$ et de l'onde totale $\eta(x,t)$.

> **Solution:** L'onde réfléchie s'écrit :
>
> $$\eta_R(x,t) = ARe^{i(-kx-\omega t)}$$
>
> L'onde totale est donc :
>
> $$\eta(x,t) = \eta_I(x,t) + \eta_R(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + ARe^{i(-kx-\omega t)}$$

4. On suppose que la digue est située en $x = 0$ et qu'elle est parfaitement rigide. Montrer que la condition en $x = 0$ est

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x = 0, t) = 0 \tag{5}$$

> **Solution:** La digue est parfaitement rigide, on a donc :
>
> $$u(x = 0, t) = 0$$
>
> On sait que
>
> $$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
>
> On en déduit que :
>
> $$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

5. Calculer la valeur du coefficient de réflexion en amplitude R.

> **Solution:** D'après la question précédente
>
> $$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

En utilisant l'expression de $\eta(x, t)$, on trouve :

$$Aik - ARik = 0$$

Par conséquent $R = 1$.

6. Quelle est la hauteur des vagues en $x = 0$? Quelles sont vos conseils pour choisir la hauteur de la digue

Solution: Comme $R = 1$, la hauteur des vagues est $2A$.
On choisira une hauteur de digue D supérieure à $2A_{max}$ où A_{max} est la hauteur maximale des vagues observées sur une grande période.