LICENCE SCIENCES & TECHNOLOGIES
ELECTRONIQUE

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE

Filtrage Analogique

partie 1

Les systèmes linéaires

T. Ditchi

Table des matières

I. INTRODUCTION

I INTRODUCTION.

Un filtre en électronique est un circuit ou un programme dont le rôle est de modifier le contenu spectral des signaux le traversant, ou d'extraire une partie de l'information liée au signal, d'éliminer des parasites le perturbant...

Un filtre analogique est plus souvent un "sélecteur" de fréquence alors que les filtres numériques ont un but plus général de transformer le signal (sélecteur de fréquence, écho, translation fréquentielle ...etc...).

Nous nous intéresserons dans ce cours qu'au filtrage analogique et plus spécifiquement aux filtres actifs.

On rencontre ces filtres dans de nombreux domaines.

- radiocommunication : sélection de bande...
- analyse spectrale
- élimination du bruit
- sélecteur de fréquence en sortie de mélangeur
- ...etc...

Les technologies utilisées en filtrage analogique sont très nombreuses et dépendent en général de la gamme de fréquences concernée.

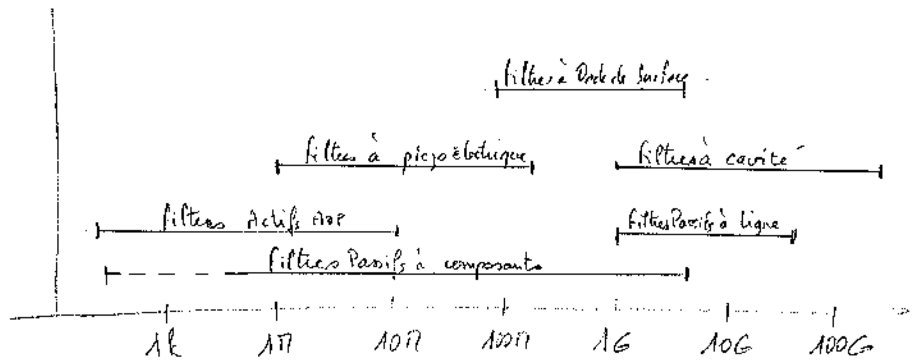
- Les filtres actifs à Amplificateur Opérationnel ne sont utilisés qu'en dessous de 99 MHz mais ont l'avantage de ne pas nécessiter de self dont le prix et l'encombrement sont importants à ces faibles fréquences.
- Les filtres passifs sont utilisables à toute fréquence mais, utilisant des condensateurs et des selfs, ils sont difficilement implémentables à basse fréquence.

En micro-ondes (de 99 GHz à 99 100 GHz) ils sont les seuls filtres utilisables. Dans ce domaine de fréquence, les selfs peuvent être des composants (bobinage autour d'un noyau ou bobinage dans l'air) ou des pistes directement "imprimées" sur les circuits. Elles peuvent encore être réalisées à partir de lignes de transmission (voir cours de lignes). On parle alors de filtres à constante répartie par opposition aux technologies à constante localisée utilisant des composants.

I.3

- Il existe d'autres technologies que celles utilisant des condensateurs, des inductances et des AOP.
- Les filtres à quartz (ou à piézoélectrique)
  → qq MHz à 100 MHz
- Les filtres à onde de surface (SAW)
  → qq 100 MHz à qq GHz
- Les filtres à cavité métallique ou diélectrique
  → qq GHz à qq 100 GHz -

- ...



II. LES SYSTEMES LINEAIRES

II Les Systèmes linéaires

I Définition d'un signal.

Toute grandeur physique qui dépend de paramètres peut être représentée par une fonction réelle.

Ex : – Température = fonction de l'endroit $T°(x,y,z)$.
– Tension = fonction du temps $V(t)$.

Nous limiterons notre cours aux signaux en électronique fonction du temps.

Ces signaux sont naturellement continus (aucun phénomène physique ne peut varier instantanément).

Ces signaux sont périodiques ou non.

Ex de signaux en électronique.

* la tension aux bornes d'une prise de courant est représentée par une fonction périodique sinusoïdale du temps $v(t) = V_0 \sin \omega t$)
* la tension aux bornes d'une capacité au cours de sa décharge est une fonction non périodique $v(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$

Si le signal devient nul à partir d'un certain temps, ce signal est qualifié de transitoire

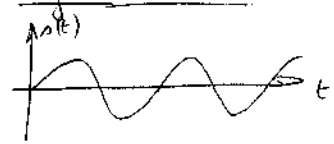
En pratique un signal qui décroît "rapidement" pour s'annuler qdt→∞ (rapidement devant le tps total d'observation) sera qualifié de transitoire également.

Lorsqu'un signal varie "rapidement", il sera parfois plus simple de le représenter à l'aide de "fonctions" discontinues. Par exemple,

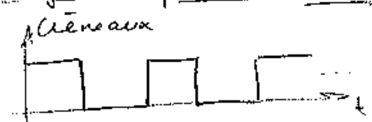
les signaux utilisés en électronique numérique sont souvent assimilés à des créneaux parce que ceux ci peuvent prendre 2 valeurs : 0 ou 1, alors qu'en réalité, les transitions de tension d'un niveau à un autre ne sont pas instantanées.

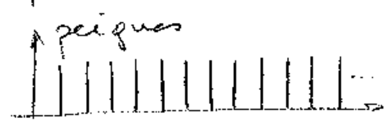
II Exemples de Signaux "Classiques" en électronique.

Signal sinusoïdal



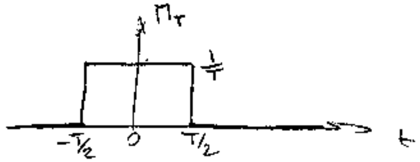
Signaux périodiques discontinus



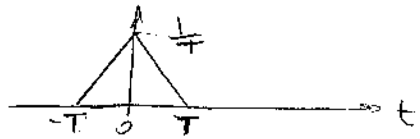


peigne de Dirac $\text{Ш}(t)$ ou $pgn(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

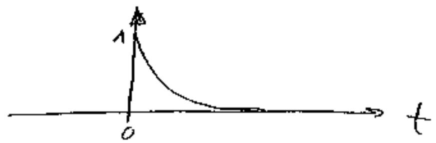
Signaux transitoires ou impulsionnels.



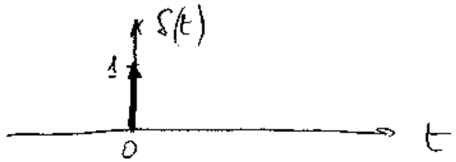
impulsion rectangulaire (ou porte) de largeur T
Π_T ou $rect_T$



impulsion triangulaire.
Δ_T ou $tri_T(t)$



impulsion exponentielle.
$$\begin{cases} = T e^{-t/T} \text{ si } t \geq 0 \\ = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases} \quad \text{ou } e^{-t/T} \times u(t)$$



impulsion de dirac
$\delta(t)$ définie dessous

Impulsion de Dirac.

les impulsions définies ci-dessus de largeur "finie" sont toutes de "surface" unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(T)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(T)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} u(t)\, dt = 1$$

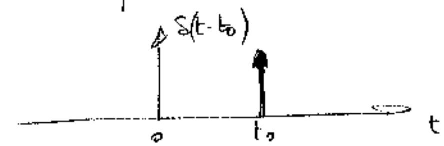
On définit l'impulsion de Dirac comme une impulsion de largeur nulle mais de surface unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$\delta(t)$ peut être définie comme : $\delta(t) = \lim_{T \to 0} \Pi_T = \lim_{T \to 0} tri_T(t)$
$= \lim T e^{-t/T} u(t)$

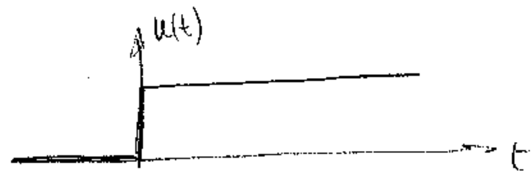
Propriétés de Dirac

- $\delta(t-t_0)$ est l'impulsion de Dirac décalée de t_0.



- $x(t)\ \delta(t-t_0) = x(t_0)\ \delta(t-t_0)$.

Signal Echelon de Heavyside.



$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

II Systèmes linéaires invariants dans le temps (S.L.I)

- Un <u>système</u> est un dispositif qui fournit un signal à sa sortie en réponse à une excitation (signal d'entrée). $e(t) \rightarrow \boxed{\text{Syst}} \rightarrow s(t)$
- Un système est dit <u>linéaire</u> s'il possède la propriété suivante :

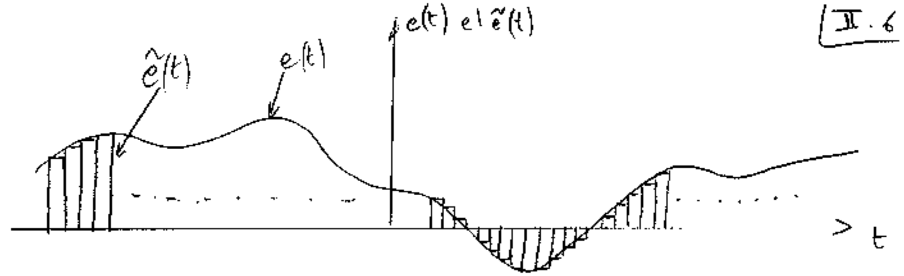
  si $s_1(t)$ est la réponse du syst à l'entrée $e_1(t)$
  et si $s_2(t)$ est " " " $e_2(t)$

  alors la réponse du système à l'entrée $\alpha\, e_1(t) + \beta\, e_2(t)$ est $\alpha\, s_1(t) + \beta s_2(t)$.
- Un système linéaire est dit <u>invariant dans le temps</u> si la propriété suivante est vérifiée :

  si à l'entrée $e_1(t)$ le système répond par $s_1(t)$
  alors à l'entrée $e_1(t-\tau)$ (entrée e_1 décalée de τ)
  le système répond $s_1(t-\tau)$ (s_1 décalée de τ).

1°/ <u>Produit de Convolution</u>

Un signal $e(t)$ peut être approximé par la superposition de fonction à support réduit.
Une approximation à l'ordre 0 de $e(t)$ peut être décrite par la représentation suivante.



la fonction resultat de l'approximation ($\tilde{e}(t)$) peut s'écrire :

$$e(t) \simeq \tilde{e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(t = n\tau)\, \Pi_\tau(t - n\tau) \times \tau$$

l'erreur d'approximation $\varepsilon(t) = e(t) - \tilde{e}(t)$ tend vers 0 lorsque τ tend vers 0. On peut alors écrire sans erreur :

$$e(t) = \lim_{\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n\tau)\, \Pi_\tau(t - n\tau)\, \tau$$

ce qui peut s'écrire en changeant la somme discrète en somme continue : $e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t')\, \delta(t-t')\, dt'$

(en changeant ($n\tau \to t'$) et (τ en dt'))

La fonction intégrale utilisée ci dessus est appelée <u>produit de convolution</u> (noté $*$) :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, y(t-t')\, dt'$$

Et on vient de montrer que :

$$x(t) * \delta(t) = x(t).$$

2°/ Expression du signal de sortie.

Soit le système linéaire indépendant du temps suivant :

$$e(t) \longrightarrow \boxed{S.L.I} \longrightarrow s(t)$$

Supposons que l'on présente à l'entrée du système le signal d'entrée $\delta(t)$ (impulsion de dirac).

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{S.L.I} \longrightarrow h(t)$$

la réponse du système notée $h(t)$ est appelée réponse impulsionnelle.

Si on présente à l'entrée le signal $e(t)$, $e(t)$ peut être décomposé en une somme d'impulsions de Dirac tel que présenté auparavant :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t')\, \delta(t-t')\, dt'$$

Comme le système est linéaire, la réponse $s(t)$ du système à cette succession d'impulsion est la somme de réponse impulsionnelle :

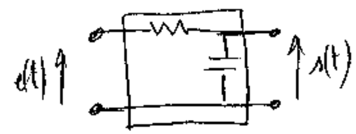
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t')\, h(t-t')\, dt'$$

c'est à dire $\boxed{s(t) = e(t) * h(t)}$

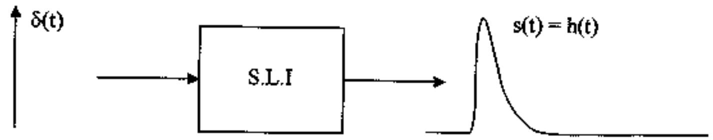
La réponse du système est donc le produit de convolution du signal d'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$: $s(t) = e(t) * h(t)$

3°/ Exemples de Systèmes

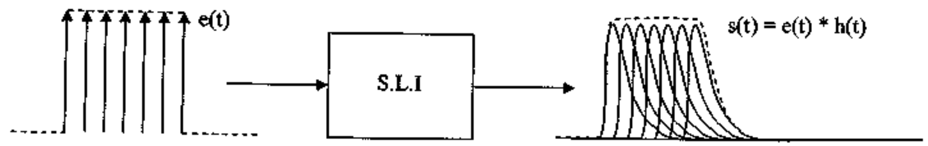
* soit le système suivant



la réponse de ce système à une impulsion de Dirac



alors la réponse à un signal complexe comme le suivant :

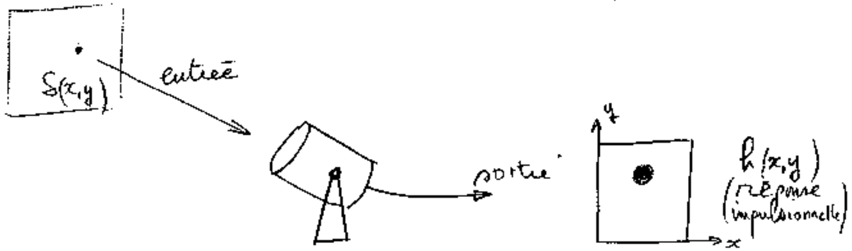


la sortie est une image "floue" de l'entrée.

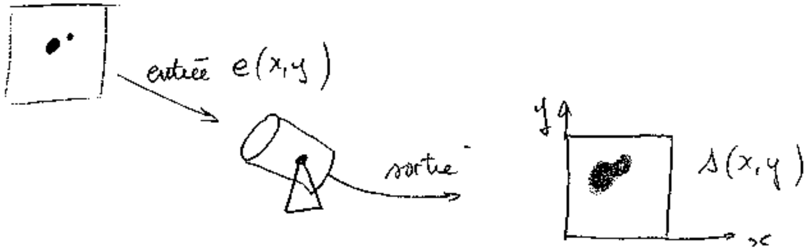
$s(t) = e(t) * h(t)$. le produit de convolution donne une image "floue" ("molle") de l'entrée.

(*) Si l'on considère un télescope, son rôle est de donner une image grossie mais la plus fidèle possible du ciel.

On peut considérer qu'une étoile lointaine est une source ponctuelle de lumière (un dirac spatial). Lu' observe t'on à travers le télescope



Alors la réponse du télescope à une image plus complexe telle que le système binaire "Gamma Andromède" est :



l'image donnée par le télescope est donc une représentation floue de la source.

$$s(x,y) = e * h$$

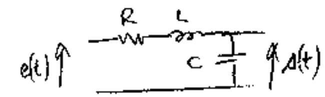
(III) Stabilité des systèmes linéaires.

la réponse $s(t)$ d'un système linéaire indépendant du temps à une excitation $e(t)$ est solution de l'équation différentielle à coefficients constant :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ constants

exemple : soit un circuit résonnant serie



$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + s(t)$$
et $$i(t) = C\frac{ds}{dt}$$

d'où $$e(t) = RC\frac{ds}{dt} + LC\frac{d^2s}{dt^2} + s(t).$$

La résolution de cette equation différentielle dépend du regime temporel. On peut soit considérer que l'on est en régime permanent soit en régime transitoire.

(*) Etre en régime permanent signifie que l'entrée est : soit constante (régime continu)
soit sinusoïdale (régime permanent alternatif).

(*) Etre en régime transitoire signifie que l'entrée est nulle endehors d'un intervalle de temps fini.
On peut alors toujours placer l'origine des tps ($t=0$) au début du signal d'entrée
alors régime transitoire $\Leftrightarrow \begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) \neq 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

La résolution de l'équation différentielle se fait en deux étapes :

- recherche des solutions générales de l'équation sans second membre. Cela correspond à annuler l'entrée $d(t)$ à étudier les variations de la sortie $s(t)$ alors qu'à $t=0$ le système est dans un état quelconque. C'est le régime libre.
- recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Cela correspond à étudier le régime forcé (transitoire suivi ou non d'un régime permanent).

L'étude du régime libre nous renseigne sur la stabilité du système. En effet, le système est stable si, quand l'entrée est nulle, la réponse du système $s(t)$ tend vers 0.

Stabilité du Système

Afin d'étudier le régime libre, nous cherchons donc les solutions de l'équation différentielle sans second membre (càd qd l'entrée est nulle).

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s = 0 \quad \text{(eq1)}$$

Les fonctions de la forme e^{pt} sont solutions de cette équation différentielle. En effet,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{pt}\right) = p\, e^{pt} \; ; \dots \; ; \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{pt}\right) = p^k e^{pt}.$$

L'équation différentielle devient donc :

$$\left[b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0\right] e^{pt} = 0$$

or $e^{pt} \neq 0 \; \forall p, t$. On a donc

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \quad \text{(eq2)} \quad \boxed{\text{équation caractéristique}}$$

appelée équation caractéristique. Cette équation possède n solutions (ou racines) notées : $p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n$. Ces racines peuvent être simples ou multiples, réelles ou complexes. [On retrouvera cette équation caractéristique dans un chapitre ultérieur. Il est égal au dénominateur de la fonction de transfert que l'on obtiendra grâce à la transformée de Laplace.]

On notera que les racines de l'éq(2) peuvent être :

- simples réelles : $p_i = \alpha_i$
- simples complexes : $p_i = \alpha_i + j\omega_i$
- doubles réelles : $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

On peut alors factoriser le polynome caractéristique :

$$(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n) = 0$$

Il faut remarquer que les racines complexes sont par paire. Si $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ est solution de l'équation caractéristique, alors $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ l'est aussi.

En effet $(p-p_i)(p-p_i^*) = p^2 - 2\alpha_i p + |p_i|^2$

coefficients réels

ne donne que des coefficients réels comme c'est le cas dans l'équation différentielle de tout système physique.

Etudier la stabilité revient à étudier l'évolution temporelle des solutions de l'équation (1).

- Si l'équation caractéristique (2) admet une racine simple réelle $p_i = \alpha_i$ alors la solution de l'équation diff (1) s'écrit : $\boxed{s(t) = e^{\alpha_i t}}$

cette solution ne correspond à une réponse stable c'est à dire s'annulant à $t = \infty$ que si $\underline{\alpha_i < 0}$.

- Si l'equation caractéristique (2) admet les racines simples complexes : $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ et $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ alors la solution de l'équation (1) s'écrit comme combinaison linéaire de $e^{p_i t}$ et $e^{p_i^* t}$:

$$s(t) = a\, e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + b\, e^{(\alpha_i - j\omega_i)t}$$

$$= (a+b)\, e^{\alpha_i t}\cos(\omega_i t) + j(a-b)\, e^{\alpha_i t}\sin(\omega_i t).$$

solutions en général complexes qui ne peuvent décrire un système réel. Le choix des constantes ($\in \mathbb{C}$) a et b doit être tel que ces solutions restent réelles. On constate que :

$$e^{\alpha_i t}\cos(\omega_i t) \quad \text{et} \quad e^{\alpha_i t}\sin\omega_i t$$

sont solutions de l'équation (1) et on montre que la solution générale de (1) est donc

$$\boxed{s(t) = c\, e^{\alpha_i t}\cos(\omega_i t) + d\, e^{\alpha_i t}\sin(\omega_i t)}$$

où $c, d \in \mathbb{R}$

Cette solution ne correspond à une réponse stable que si, là aussi, $\underline{\alpha_i < 0}$

- Si l'équation caractéristique (2) admet une racine double réelle : $p_i = \alpha_i$ une seule solution apparait : $s(t) = e^{\alpha_i t}$.

Il manque alors une solution !

Posons $s(t) = x(t)\, e^{\alpha_i t}$ et remplaçons $s(t)$ dans l'équation différentielle (1) en nous limitant à une equation d'ordre **2** ($n = 2$) pour comprendre le principe du calcul.

II.15

equation différentielle d'ordre 2 :

$$b_2 s'' + b_1 s' + b_0 s = 0 \qquad (3)$$

d'équation caractéristique :

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0 \qquad (4)$$

qui admet une racine double (discriminant $\Delta = 0$)

$$p = \alpha = \frac{-b_1}{2 b_2}$$

$e^{\alpha t}$ est solution, cherchons la deuxième solution du type $s(t) = x(t)\, e^{\alpha t}$

On a donc $s'(t) = x' e^{\alpha t} + x \alpha e^{\alpha t}$

et $\quad s''(t) = x'' e^{\alpha t} + x' \alpha e^{\alpha t} + x' \alpha e^{\alpha t} + x \alpha^2 e^{\alpha t}$

$$= e^{\alpha t}\left(x'' + 2x'\alpha + x\alpha^2\right)$$

l'équation (3) devient donc :

$$e^{\alpha t}\left[b_2\left(x'' + 2x'\alpha + x\alpha^2\right) + b_1\left(x' + x\alpha\right) + b_0 x \right] = 0$$

c'est à dire :

$$\left.\begin{array}{l} b_2 x'' \\ + x\left(b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0\right) \\ + x'\left(b_2 2\alpha + b_1\right) \end{array}\right\} = 0$$

or $b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0$ puisque α est solution de (4)

et $2b_2\alpha + b_1 = 2b_2\left(\frac{-b_1}{2b_2}\right) + b_1 = 0$

il reste donc : $\quad b_2 x'' = 0$

qui a comme solution en intégrant 2 fois :

$$x = ct + d$$

La solution est donc de la forme :

II.16

$$\underbrace{s(t) = (ct + d)\, e^{\alpha t}}$$

cette solution ne correspond à une réponse stable que si $\underline{\underline{\alpha < 0}}$.

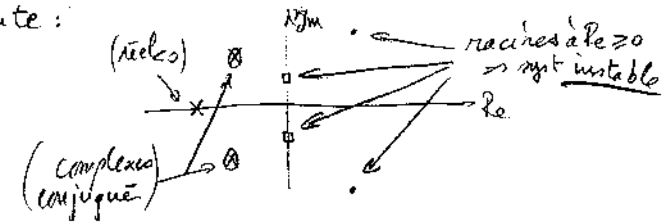
Conclusion sur la stabilité :

Un système physique ne sera stable que si en l'absence d'excitation ($e(t) = 0$) la réponse du système $s(t)$ s'annule qd $t \to \infty$ et ceci quelque soit les conditions initiales.

En étudiant l'équation différentielle du système dans laquelle on a annulé l'entrée $e(t)$ (réponse libre) on a montré que les solutions générales correspondent à une réponse qui tendent à s'annuler si la partie réelle des racines de l'équation caractéristique sont toutes

<u>négatives</u>.

On peut représenter dans le plan complexe, les racines de l'eq caractéristique sur la figure suivante :



(II.17)

α) le polynome de l'équation caractéristique :

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$$

a tous ses <u>coefficients b_k positifs et non nuls</u> s'il correspond à un système <u>stable</u>.

<u>Démonstration</u> :

$D(p)$ peut être factorisé de la manière suivante : $D(p) = (p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)$

où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont les racines de l'équation caractéristique (?).

Les racines sont soit réelles $p_i = \alpha_i$, soit complexes $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$, soit réelles doubles $p_i = \alpha_i$ avec $\alpha_i < 0$ pour un système stable.

- chaque $(p-p_i)$ avec p_i réels <0 donne tous des coefficients réels positifs : $[p+\underbrace{(-\alpha_i)}_{>0}] \times [p+\underbrace{(-\alpha_j)}_{>0}] \times \dots$
- chaque racine complexe $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ donne

$$(p-p_i)(p-p_i^*) = p^2 + p(-p_i-p_i^*) + |p_i|^2$$
$$= \underbrace{\ }_{>0} p^2 + p\underbrace{(-2\alpha_i)}_{>0} + \underbrace{|p_i|^2}_{>0}$$ dont tous les coef sont réels >0.

c q f d.

On appelle un tel polynome, un polynome de <u>Hurwitz</u>,
- tous ses coefficients sont positifs et nuls,
- toutes ses racines sont à partie réelle <0.

III. ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR TRANSFORMEE DE LAPLACE ET DE FOURIER

III. ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR TRANSFORMEE DE LAPLACE ET DE FOURIER

I. RAPPELS SUR LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

1°) Définition

La transformée de Laplace permet de passer d'un signal s(t) à une fonction à variable complexe S(p)

$$s(t) \quad \rightarrow \quad S(p)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt}\,dt$$

où $p=\sigma+j\omega$ est une variable complexe.

On utilisera essentiellement la Transformée de Laplace unilatérale applicable aux signaux causaux (nuls pour t<0)

$$s(t) \quad \rightarrow \quad S(p)=\int_{0}^{+\infty} s(t)e^{-pt}\,dt$$

On définit également la transformée de Laplace inverse :

$$S(p) \quad \rightarrow \quad s(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} S(p)e^{pt}\,dp$$

II. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Propriétés	Signal temporel	Transformée de Laplace
	$s(t)$	$S(p)$
Linéarité	$a s_1(t)+b s_2(t)$	$a S_1(p)+b S_2(p)$
Dérivation temporelle	$s'(t)=\frac{\partial}{\partial t}s(t)$	$p S(p)-s(t=0^+)$
Dérivation	$s^{(n)}(t)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}s(t)$	$p^n S(p)-p^{n-1}s(t=0^+)-p^{n-2}s'(t=0^+)-....-p\,s^{(n-2)}(t=0^+)-s^{(n-1)}(t=0^+)$
	$-t\,s(t)$	$\frac{\partial}{\partial p}S(p)$
Intégration	$\int_0^t s(t')\,dt'$	$\frac{S(p)}{p}$
Décalage	$s(t-a)$	$e^{-ap}S(p)$
	$e^{at}s(t)$	$S(p-a)$
Contraction	$s(at)$	$1/\lvert a\rvert S(p/a)$
Convolution	$s_1(t)*s_2(t)$	$S_1(p)\,S_2(p)$
	$s_1(t)\;s_2(t)$	$S_1(p)*S_2(p)$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p\,S(p)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0^+} s(t)=\lim_{p\to\infty} p\,S(p)$

Théorème de la somme : $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt=\lim_{p\to 0} S(p)$

Table de Transformée de Laplace

n°	s(t) causaux (s(t<0)=0)	S(p)
1	Dirac $\delta(t)$	1
2	*Peigne de Dirac* $pgn_T(t)=\sum_n \delta(t-nT)$	$\sum_n e^{-npT}$
3	*Echelon de Heavyside* $u(t)$	$1/p$
4	t	$1/p^2$
5	t^m	$m!/p^{m-1}$
6	e^{-at}	$1/(p+a)$
7	$t\,e^{-at}$	$1/(p+a)^2$
8	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$	$1/(p+a)^m$
9	$(1-e^{-at})$	$\frac{a}{p(p+a)}$
10	$a\,t-1+e^{-at}$	$\frac{a^2}{p^2(p+a)}$
11	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
12	$b\,e^{-bt}-a\,e^{-at}$	$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$
13	$(1-a\,t)\,e^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
14	$\sin(a\,t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
15	$\cos(a\,t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
16	$\sin(bt)e^{-at}$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
17	$1-\frac{1}{b-a}(b\,e^{-at}-a\,e^{-bt})$	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
18	$\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_N t}\sin(\omega_N\sqrt{1-\zeta^2}\,t)$	$\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_N^2}+2\zeta\frac{p}{\omega_N}+1}$ *avec* $\zeta<1$
19	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_N t}\sin(\omega_N\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\psi)$ *avec* $\psi=arctg(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$	$\frac{1}{p\left(\frac{p^2}{\omega_N^2}+2\zeta\frac{p}{\omega_N}+1\right)}$ *avec* $\zeta<1$

II. Systèmes linéaires et Transformée de Laplace

1°/ Fonction de Transfert

On a vu qu'un système linéaire peut être décrit par une équation différentielle linéaire reliant le signal d'entrée au signal de sortie :

$$b_n \frac{d^n}{dt^n}(s(t)) + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(s) + \dots + b_0\, s(t) = a_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e + \dots + a_0\, e(t) \quad (1)$$

Le système est invariant dans le temps si les coefficients b_i et a_j sont constants.

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle.

Afin de simplifier les calculs, nous allons limiter notre raisonnement à une équation différentielle du 2nd ordre :

$$b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0\, s = a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + a_0\, e \quad (2)$$

Par l'application de la transformée de Laplace l'équation différentielle (2) devient :

$$\left.\begin{array}{l} b_2\left[p^2 S(p) - p\, s(0^+) - s'(0^+)\right] \\ + b_1\left[p S(p) - s(0^+)\right] \\ + b_0 S(p) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a_2\left[p^2 E(p) - p\, e(0^+) - e'(0^+)\right] \\ + a_1\left[p E(p) - e(0^+)\right] \\ + a_0 E(p) \end{array}\right. \quad (2)$$

ce qui peut encore s'exprimer comme :

$$\left.\begin{array}{l} S(p)\left[b_2 p^2 + b_1 p + b_0\right] \\ - b_2\, s'(0^+) - b_2\, p\, s(0^+) - b_1\, s(0^+) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} E(p)\left[a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right] \\ - a_2\, e'(0^+) - a_2\, p\, e(0^+) - a_1\, e(0^+) \end{array}\right.$$

et donc

$$S(p) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} E(p) \\ + \dfrac{b_2\left[s'(0^+) + p\, s(0^+)\right] + b_1 s(0^+)}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \\ - \dfrac{a_2\left[e'(0^+) + p\, e(0^+)\right] + a_1 e(0^+)}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{N(p)}{D(p)} E(p) \\ + \dfrac{S_0(p)}{D(p)} \\ + \dfrac{E_0(p)}{D(p)} \end{array}\right. \quad (3)$$

où $S_0(p)$ est un polynôme en p associé aux conditions initiales de $s(t)$.

$E_0(p)$ est un polynôme en p associé aux conditions initiales de $e(t)$

$\dfrac{N(p)}{D(p)}$ est le rapport de 2 polynômes et se note $H(p)$.

Quand on étudie un système physique, celui-ci est en général au repos avant d'être excité ! Ceci est vrai sauf lorsque l'on désire étudier le comportement du système en régime permanent. Les régimes permanents étudiés sont le régime continu (l'entrée est un signal constant depuis $t=-\infty$) et le régime alternatif (l'entrée est un signal sinusoïdal qui a commencé en $t = -\infty$). L'étude de la réponse du système dans ces 2 derniers cas se fait alors en utilisant des outils de calcul plus appropriés tel que la transformée de Fourier (voir après).

Si on se limite ici aux régimes "qui ont commencé un jour" on place alors l'origine des temps ($t=0$) à cet instant.
Les 2 polynomes associés aux conditions initiales $E_0(p)$ et $S_0(p)$ sont alors nuls puisque le système est au repos pour $t \leq 0$.

$$S(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} E(p) = \frac{N(p)}{D(p)} E(p) = H(p) E(p).$$

La fonction $H(p)$ est appelée Fonction de Transfert du système et on a :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{TL(s(t))}{TL(e(t))}} \quad \text{où } s(t \leq 0) = 0 \quad (4)$$

2°/ Réponse du système linéaire.

On a vu au chapitre précédent que si $e(t)$ est le signal appliqué à l'entrée du

système, et $s(t)$ le signal en sortie, alors :

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (réponse à un Dirac $e(t) = \delta(t)$)

Par application de la Transformée de Laplace à cette relation on trouve :

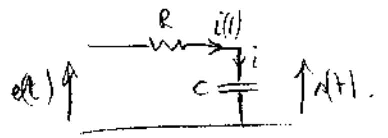
$$S(p) = E(p) \cdot TL[h(t)]$$ ce qui en comparant avec (4) donne : $\boxed{H(p) = TL[h(t)]}$ (5)

La fonction de Transfert est donc la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.
On peut résumer cela par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\delta(t) \arrow[r] \arrow[d, "TL"'] & \boxed{S.L.i} \arrow[r] & h(t) \arrow[d, "TL"] \\
1 \arrow[r] & \boxed{SLi} \arrow[r] & H(p)
\end{tikzcd}$$

3°) Exemple de calcul de réponse d'un système linéaire.

Prenons un système du 1er ordre du type suivant :



équation différentielle	Directement en laplace.
$e - s = R\,i$	$E(p) - S(p) = R\,I(p)$
et $i = C\dfrac{ds}{dt}$	et $I(p) = Cp\,S(p)$
d'où $s + RC\dfrac{ds}{dt} = e(t)$	$\left(S = Z_c\, I \text{ où } Z_c = \dfrac{1}{Cp}\right)$
Par transformée de laplace :	d'où :
$S + RCpS = E$	$E - S = RCpS$
cad $\boxed{\dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}}$	cad $\dfrac{S}{E} = \dfrac{1}{1+RCp}$

Calcul de la sortie quand l'entrée est un échelon de Tension :

$$e(t) = u(t) \longrightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

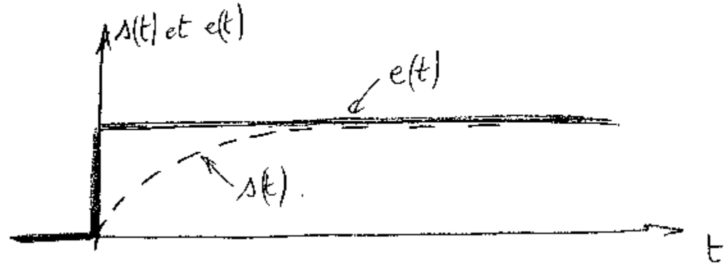
donc $S = \dfrac{1}{p}\,\dfrac{1}{1+RCp}$

en regardant dans le tableau des TL (ligne 9) :

on a $s(t) = TL^{-1}\left(\dfrac{1}{p(1+RCp)}\right)$

$$= TL^{-1}\left(\frac{1/RC}{p\left(\frac{1}{RC}+p\right)}\right)$$

$$\boxed{s(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$



III Rappels sur la transformée de Fourier

1°/ Séries de Fourier

Tout signal périodique peut se décomposer en série de Fourier, c'est à dire en somme de sinusoïdes.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \left(= \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right)$$

$$\text{où } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et T est la période de $x(t)$. $\omega_0 = 2\pi f_0$

Un signal périodique de période T_0 (fréquence f_0) est donc la somme de sinusoïde de fréquence (nf_0). Le premier terme C_0 $(n=0)$ est une sinusoïde de fréquence nulle, c'est à dire un signal continu. C_0 représente la valeur moyenne de $x(t)$.

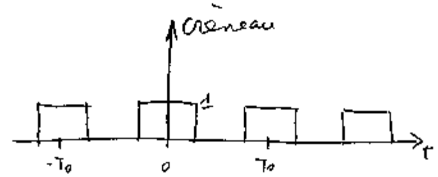
On appelle fréquence fondamentale la fréquence f_0, et harmoniques les sinusoïdes de fréquence nf_0.

exemple 1. le signal créneaux $C_T(t)$ positif pair.

on trouve : $C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} = C_{-n}$

$$C_T(t) = \text{créneau}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$= \sum_{1}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + C_0$$
$$= \sum_{1}^{\infty} 2C_n \cos(n\omega_0 t) + C_0$$

donc $\text{créneau}(t) = 0{,}5 + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \dots$



On peut remarquer que le signal créneau ne contient, en plus de sa composante continue, que la fréquence fondamentale et les harmoniques impaires $((2p+1)f_0)$.

exemple 2 : $x(t) = \sin\omega_0 t$ se décompose en

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}$$

on a donc 2 coef C_n non nuls : $C_{-1} = C_1 = 1$

on peut remarquer qu'un signal purement sinusoïdal se décompose en 2 termes $(C_n e^{jn\omega_0 t})$.

2°/ Transformée de Fourier.

Pour les signaux non périodiques, on généralise la notion de série de Fourier en considérant qu'un signal non périodique est un signal périodique de période infinie ! Ainsi les harmoniques $(n\omega_0)$ deviennent infiniment proches (ω). On a alors :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j\omega t} df$$

(III.11

où $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$

avec $\omega = 2\pi f$.

$X(f)$ est appelée <u>Transformée de Fourier</u> de $x(t)$ et $x(t)$ Transformée de Fourier inverse de $X(f)$.

<u>Exemple</u> : signal carré $\Pi_T(t)$ d'amplitude 1.
calculons la transformée de Fourier de $\Pi_T(t)$

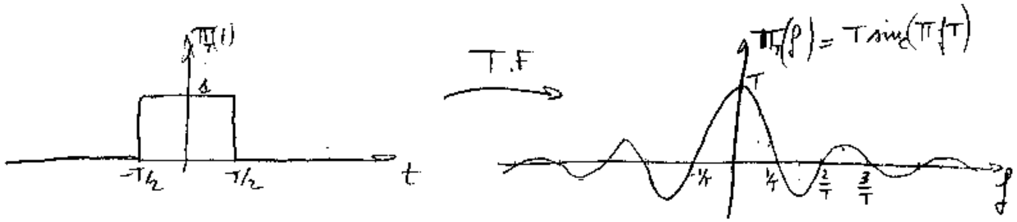
$$\Pi_T(f) = TF\left(\Pi_T(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

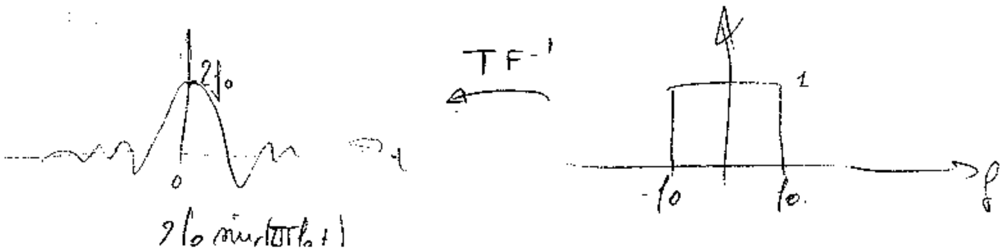
$$= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega T/2} - e^{+j\omega T/2}\right] = \frac{2}{\omega} \sin \omega \frac{T}{2}$$

$$= T\, \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = T \operatorname{sinc}(\omega T/2) = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

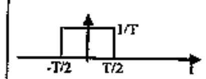
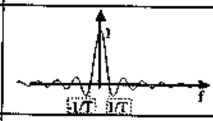
où sinc est le sinus cardinal $\left(\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}\right)$.





3°) Propriétés de la transformée de Fourier

Table de Transformée de Fourier

n°	s(t)		S(f)	
Linéarité	$a s_1(t) + b s_2(t)$ (a et b constants)		$a S_1(f) + b S_2(f)$	
Dérivation temporelle	$s'(t) = \frac{\partial}{\partial t} s(t)$		$j\omega S(f)$	
Intégrale	$\int s(t)\,dt$		$\frac{S(f)}{j\omega}$	
Convolution	$s_1(t) * s_2(t)$		$S_1(f)\, S_2(f)$	
Produit	$s_1(t)\; s_2(t)$		$S_1(f) * S_2(f)$	
Signal réel	$s(t) \in \mathbb{R}$		$\Re e[S(f)]$ paire $\Im m[S(f)]$ impaire $\lvert S(f)\rvert$ pair	
Echelon de Heaviside	$u(t)$		$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{2j\pi f}$	
Porte		$rect_T(t)$		$\operatorname{sinc}(\pi f t) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$
Sinus	$\sin(2\pi f_0 t)$		$[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)] / (2j)$	
Cosinus	$\cos(2\pi f_0 t)$		$[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] / 2$	
Dirac	$\delta(t)$		1	
Peigne de Dirac	$pgn_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$		$\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\frac{1}{T_e})$	
Signal périodique	$s(t)$ signal périodique de période T_0		$S(f)$ est discret (pas d'échantillonnage = $1/T_0 = f_0$) On parle de "spectre de raies"	
	$s(t) = x_0(t) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$		$S(f) = f_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} S_0(f)\; \delta(f - nf_0)$ $S(f) = S_0(f)$ discrétisé tous les n f_0	
Signal discret	$s(t)$ signal discret (pas d'échantillonnage = T_e)		$S(f)$ périodique de période $1/T_e$	
	$s(t) = s_0(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$		$S(f) = \frac{1}{T_e}\; S_0(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\frac{1}{T_e})$ $S(f) = S_0(f)$ "recopié" tous les $1/T_e$	

IV) Systèmes linéaires et Transformée de Fourier.

1°/ Réponse Fréquentielle.

Si l'on transforme l'équation différentielle du système par Fourier on trouve :

$$\left[b_n (j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_0\right] S(f) = \left[a_m (j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_0\right] E(f).$$

d'où

$$\boxed{\frac{S(f)}{E(f)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_0} = H(f).}$$

Le rapport de la TF (sortie) sur la TF (entrée) est appelé réponse fréquentielle et noté $H(f)$.

On peut remarquer que la réponse fréquentielle est égale à la fonction de transfert dans laquelle on prend $p = j\omega$.

$$\boxed{H(f) = H(p = j2\pi f).}$$

2°/ Réponse d'un système linéaire.

On a vu que $e(t) = s(t) * h(t)$

Par Transformée de Fourier cette relation devient :

$$E(f) = S(f)\, H(f).$$

donc $\boxed{H(f) = TF\,(h(t))}$

la réponse fréquentielle est donc la Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

V) Diagramme de Bode

1°/ Définition.

Si l'on se place en régime alternatif

$$e(t) = e_0 \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{TF} E(\omega) = \frac{e_0}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

alors la réponse à cette excitation sinusoïdale :

$$S(\omega) = E(\omega)\, H(\omega) = \frac{e_0}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] H(\omega)$$

$$= \frac{e_0}{2}\left[H(\omega_0)\,\delta(\omega-\omega_0) + H(-\omega_0)\,\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

or $H(\omega_0) = |H(\omega_0)|\, e^{j\varphi(\omega_0)}$ où $\varphi(\omega) = \arg[H(\omega)]$

Comme $H(\omega)$ est la TF de la réponse impulsionnelle qui est un signal réel, $H(\omega)$ est une fonction dont la partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire.

On a donc : $H(-\omega) = H^*(\omega) = |H(\omega)|\, e^{-j\varphi(\omega)}$.

d'où $S(\omega) = \frac{e_0}{2} |H(\omega_0)| \left[e^{j\varphi(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0) + e^{-j\varphi(\omega_0)}\delta(\omega-\omega_0)\right]$

et par transformée de Fourier inverse :

$$s(t) = \frac{e_0}{2}\, |H(\omega_0)| \left[e^{j\varphi(\omega_0)}\, e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi(\omega_0)}\, e^{-j\omega_0 t}\right]$$

cad : $\boxed{s(t) = e_0 |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}$ où $\varphi(\omega_0) = \arg(H(\omega_0))$

Donc : Quand on excite un système par une sinusoïde, le système répond par une sinusoïde de même fréquence. Le gain en amplitude (G) est égal au module de la réponse fréquentielle à la fréquence d'excitation et le déphasage introduit par le passage du signal à travers le système est égal à l'argument de la réponse fréquentielle.

$$G(\omega_0) = |H(\omega_0)|$$

$$\text{déphasage}(\omega_0) = \text{argument}(H(\omega_0))$$

* Le Diagramme de Bode est la représentation graphique de $20\log_{10}|H(\omega)|$ (unité dB) et de la phase $\arg(H(\omega))$ en fonction de $\log_{10}(\omega)$.

2°/ Exemple : $H(\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega\tau}$

donc $G^2(\omega) = |H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\omega^2\tau^2}$

et $\arg[H(\omega)] = -\text{arctg}\left(\dfrac{\omega\tau}{1}\right)$

On calcule le Gain en dB : $G_{dB} = 20\log|H(\omega)|$

cad $G_{dB} = 10\log|H(\omega)|^2$

$$G_{dB} = 10\log\left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right) = -10\log(1+\omega^2\tau^2)$$

Pour comprendre le fonctionnement du système, on observe sa réponse à des fréquences caractéristiques comme $\omega \to 0$, $\omega \to +\infty$.

* $\lim_{\omega\to 0} G = 0$ → On dit donc que le gain possède une asymptote horizontale à l'origine.

(G tend vers une constante qd ω tend vers 0).

* $\lim_{\omega\to\infty} G = -10\log(\omega^2\tau^2)$

$= -10\log\tau^2 - 10\log\omega^2 = -10\log\tau^2 - 20\log(\omega)$

qui est l'équation d'une droite en fonction de $\log(\omega)$ de pente -20 et de valeur $(-10\log\tau^2)$ qd $\log(\omega) = 0$ (ordonnée à l'origine).

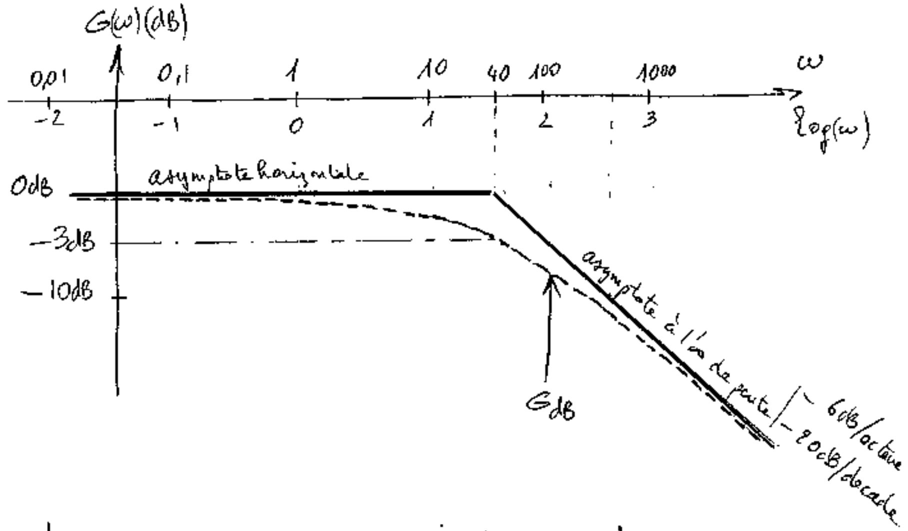
Lorsque ω varie d'un facteur 10 (une décade) la droite varie de $-20\log(10)$ cad de -20 dB.

On dit que la droite possède une pente de -20 dB/décade.

Lorsque ω varie d'un facteur 2 (une octave) la droite varie de $-20\log(2)$ cad de -6 dB.

On dit que la droite possède une pente de -6 dB/octave.

On dit finalement que le gain possède une asymptote à l'infini de pente -20dB/décade ou de -6dB/octave.



les asymptotes se croisent quand

$$-10\log(\omega^2\tau^2) = 0 \quad \text{cad quand} \quad \omega = \frac{1}{\tau}$$

si $\tau = 0{,}025 \Rightarrow \omega = 40$

la valeur de G en ce point vaut :

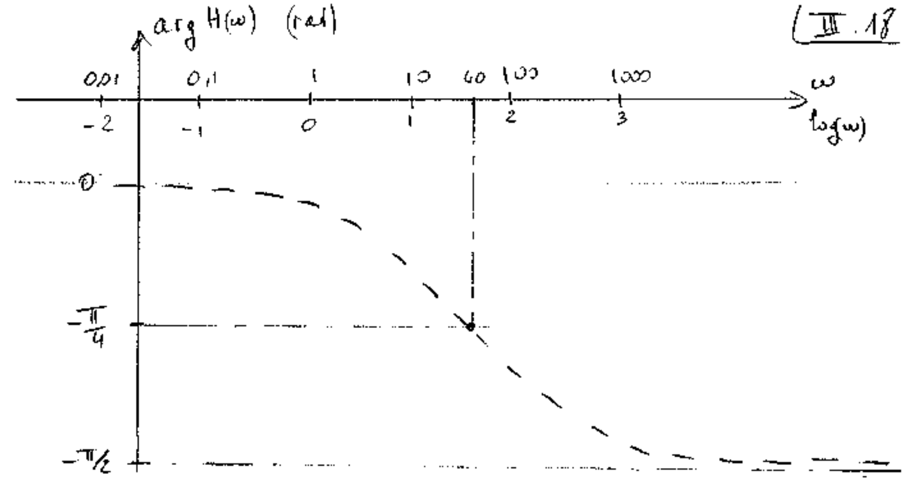
$$G\left(\omega=\frac{1}{\tau}\right) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\bigg|_{\omega=1/\tau} = -10\log\left(1+\omega^2\tau^2\right)\Big|_{\omega=1/\tau}$$

$$= -10\log(2)$$

$$= -3\text{dB}$$

En ce qui concerne la phase de $H(\omega)$,

$$\arg(H(\omega)) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau).$$



VI. Diagramme de Nyquist

1°/ Définition.

On a vu en régime alternatif que le filtre modifie le signal d'entrée, son amplitude est multipliée par un Gain $G(\omega) = |H(\omega)|$ et que sa phase est décalée de $\arg(H(\omega))$.

Le Diagramme de Nyquist consiste à représenter en coordonnée polaire le module et la phase de $H(\omega)$ en fonction de la fréquence.

2°/ Exemple

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \\ \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau) \end{array} \right.$$

On peut soit déterminer l'équation du lieu de $H(\omega)$ dans le plan complexe.

on a $tg(\varphi) = -\omega\tau$ d'où $H(\omega) = \dfrac{1}{1 - j\, tg\, \varphi(\omega)}$

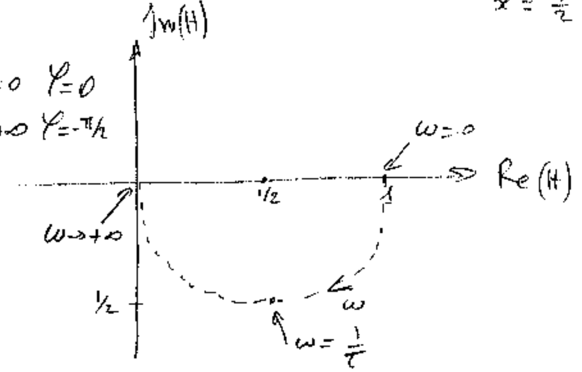
on note $x = Re(H)$
$y = Im(H)$

et on a $x = Re\left(\dfrac{1 + j\, tg\varphi}{1 + tg^2\varphi}\right) = \dfrac{1}{1 + tg^2\varphi}$

$y = Im(\quad) = \dfrac{tg\varphi}{1 + tg^2\varphi}$

et on a $\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}}$ équation d'un cercle de centre $x = \frac{1}{2}$ $y = 0$

de +
pour $\omega = 0$ $\varphi = 0$
$\omega = \infty$ $\varphi = -\pi/2$



Il est en général + simple de tracer point par point le diag de Nyquist.

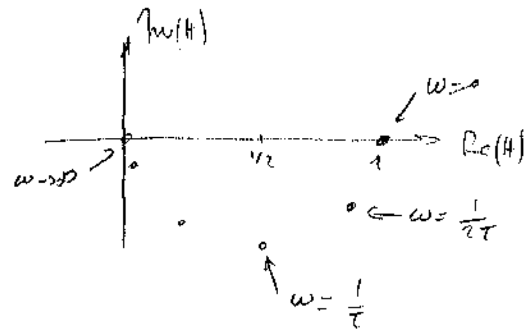
$\omega = 0$ $\quad G = 1$; $\varphi = -\operatorname{arctg}(0) = 0$

$\omega = \frac{1}{2\tau}$ $\quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}25}} = 0{,}89$; $\varphi = -\operatorname{arctg}(0{,}5) = -26°$

$\omega = \frac{1}{\tau}$ $\quad G = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$; $\varphi = -\operatorname{arctg}(1) = -45°$

$\omega = \frac{2}{\tau}$ $\quad$ ... etc ...

$\omega \to \infty$ $\quad G \to 0$ $\quad$; $\varphi = -\operatorname{arctg}(\infty) = -90°$



VII Retard de Phase - Temps de Propagation de Groupe.

1° soit un signal alternatif $e(t) = e_0 \cos\omega t$ injecté dans un filtre $H(\omega) = G\, e^{j\varphi(\omega)}$

la sortie $s(t) = e_0 G \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$
$= e_0 G \cos\omega\left(t + \frac{\varphi(\omega)}{\omega}\right)$

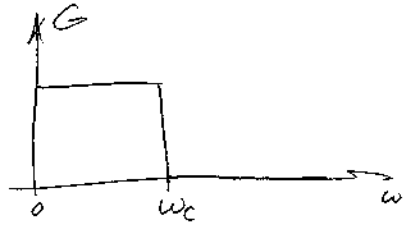
On appelle retard de phase $\boxed{\tau(\omega) = \dfrac{\varphi(\omega)}{\omega}}$.

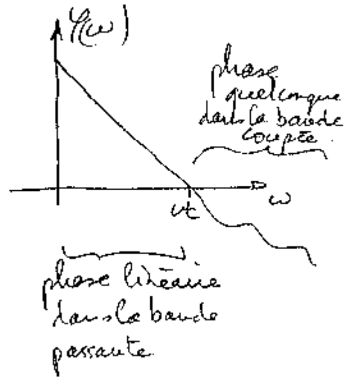
Quand un signal est composé de plus d'une fréquence, ce qui est souvent le cas, ce retard de phase va être différent pour chaque fréquence composant le signal. Le signal en sortie de filtre risque donc d'être déformé si le retard de phase dépend de la fréquence.

DONC si $\tau = \dfrac{\varphi}{\omega} \neq cste \Rightarrow$ déformation du signal à la traversée du filtre.

Si au contraire τ = cte cad (III.21)
si la phase $\varphi(\omega)$ est linéaire en fonction de la fréquence, alors le signal à la traversée du filtre ne sera pas déformé.

<u>Filtre idéal Passe Bas</u>.





Exemple : e(t) signal créneau périodique.

1) dans le cas d'un syst linéaire où τ = cste $\Rightarrow s(t) = e(t)$ décalé

2) dans le cas d'un système linéaire où $\tau = fct(\omega) \Rightarrow s(t) = e(t)$ déformé

IV. SYSTEMES DU 1^ER ET DU 2^ND ORDRE

IV) Systèmes du 1er et 2nd Ordre. IV.1.

1°/ Systèmes du 1er Ordre.

Les fonctions du 1er ordre ont l'une des 5 formes suivantes :

$$\frac{K}{p} \; ; \; \frac{K}{1+\tau p} \; ; \; \frac{K\tau p}{1+\tau p} \; ; \; \frac{K(1+\tau_1 p)}{1+\tau_2 p} \; ; \; \frac{K(1+\tau p)}{\tau p}$$

Nous allons étudier ici que la forme :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}}$$ fonction de transfert d'un filtre passe Bas.

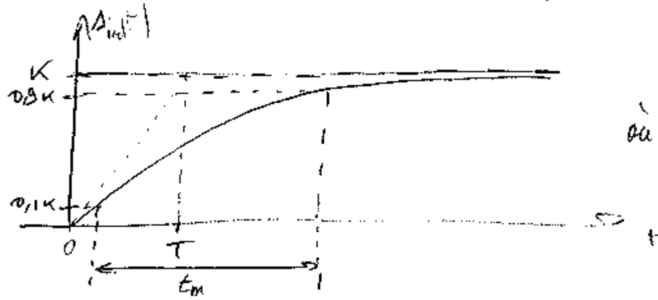
A) Réponse indicielle (réponse à une échelon).

$e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$\rightarrow S_{ind}(p) = H(p)\,E(p) = \frac{K}{1+\tau p}\,\frac{1}{p}$

$= K \frac{1/\tau}{(\frac{1}{\tau}+p)p}$

d'où $s_{ind}(t) = K\, TL^{-1}\left(\frac{1/\tau}{(p+\frac{1}{\tau})p}\right) = \underline{K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}\, u(t)$.



où $\boxed{t_m = t_{90\%} - t_{10\%} = 2{,}2\,\tau}$

IV.2

la réponse à 5% :

$t\,?/\; s_i(t) = 0{,}95\,K$

cad $1 - e^{-t/\tau} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow t = -\tau \ln(0{,}05)$

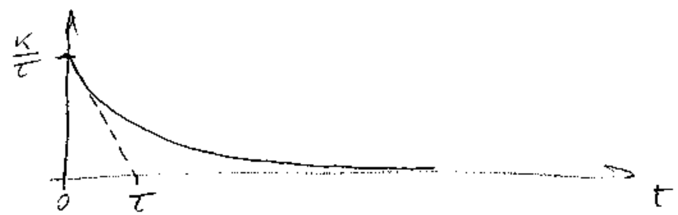
$\boxed{t \simeq 3\tau}$

B) Réponse impulsionnelle.

$e(t) = \delta(t) \rightarrow E(p) = 1$

$\rightarrow S_{imp} = H(p) = \frac{K}{1+\tau p} = K\,\frac{1/\tau}{p+1/\tau}$

$\rightarrow \underline{s_{imp}(t) = \frac{K}{\tau}\, e^{-t/\tau}\, u(t)}$ (stable si $\tau > 0$)



C) Réponse Fréquentielle.

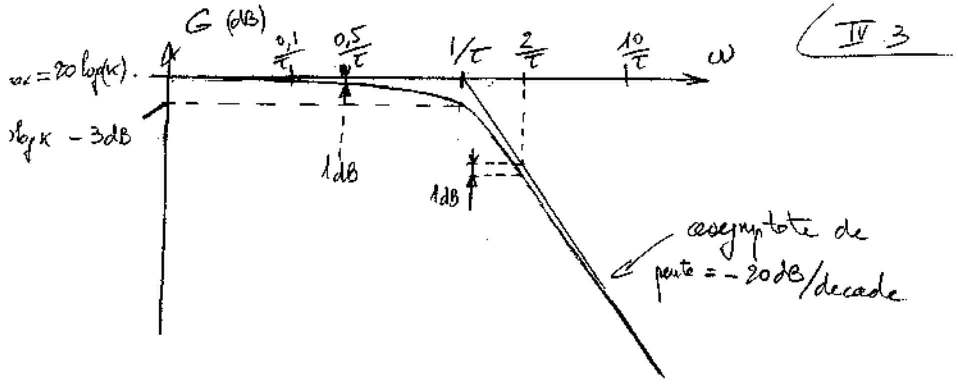
$$H(\omega) = H(p = j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau}$$

④ $G(\omega) = 20\log|H| = 20\log(K) - 10\log(1+\omega^2\tau^2)$

asymptote en ∞ : $G(\omega) \sim 20\log(K) - 10\log(\omega^2\tau^2)$

cad $G(\omega) \sim 20\log(K) - 20\log(\tau) - 20\log(\omega)$

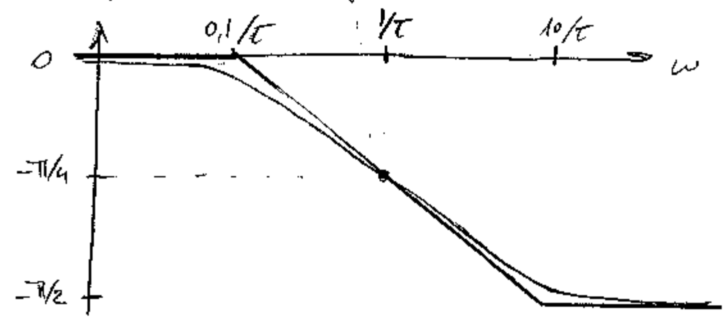
asymptote en 0 : $G(\omega) \simeq 20\log(K)$.



les asymptotes se coupe qd elles valent $20 \log K$ cad qd $\omega = \frac{1}{\tau}$

* phase de $H(\omega)$

$$\phi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau)$$



Remarques :

Pour un filtre passe bas (ou haut) du 1er ordre

* le gain est 1 dB en dessous de ses asymptotes à 1 octave en dessous ou à une octave au dessus de la pulsation de coupure à −3dB ($\omega_c = \frac{1}{\tau}$).

cad $G\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = G_{max} - 1dB$
$G(2\omega_c) =$ asymptote $- 1dB$ | où $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

* il est 0,25 dB en dessous à 2 octaves, et nul les asymptotes à une decade

2°) Système du 2nd ordre.

soit un système du type (passe bas).

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

où ω_N est appelée : pulsation naturelle
ξ " " coefficient d'amortissement. ($\xi > 0$)

pôles de $H(p)$.

discriminant $\Delta = \left(\frac{2\xi}{\omega_N}\right)^2 - 4\frac{1}{\omega_N^2} = \frac{4}{\omega_N^2}(\xi^2 - 1)$

si $\xi > 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \exists$ 2 pôles $p_{1,2}$

$$p_{1,2} = \omega_N\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

si $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists$ 1 pôle double

$$p_1 = -\xi\omega_N$$

si $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ 2 pôles complexes

$$p_{1,2} = \omega_N\left(-\xi \pm j\omega_N\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

A) $\xi > 1$

alors $H(p) = \frac{K\omega_N^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$

où $p_{1,2} = \omega_N\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

IV.5

a) Réponse impulsionnelle.

$$S_{imp}(p) = H(p)$$

$$s_{imp}(t) = TL^{-1}\left(\frac{K\omega_N^2}{(p-p_1)(p-p_2)}\right)$$

$$= TL^{-1}\left[\frac{K\omega_N^2(p_2-p_1)}{(p-p_1)(p-p_2)(p_2-p_1)}\right]$$

$$= \frac{K\omega_N^2}{p_2-p_1}\, TL^{-1}\left(\frac{p_2-p_1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right)$$

$$= \frac{K\omega_N^2}{2\omega_N\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{p_1 t} - e^{+p_2 t}\right)$$

$$= \frac{K\omega_N}{2\sqrt{\xi^2-1}}\, e^{-\xi\omega_N t}\left(e^{\omega_N\sqrt{\xi^2-1}\,t} - e^{-\omega_N\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right)$$

b) Réponse indicielle.

$$S_{ind}(p) = H_{ind}(p)\,\frac{1}{p} = \frac{K\omega_N^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\Rightarrow s_{ind}(t) = \frac{K\omega_N^2}{p_1 p_2}\left[1 - \frac{p_1 e^{tp_2} - p_2 e^{tp_1}}{p_1 - p_2}\right]$$

Or $p_1 p_2 = \omega_N^2$

et $p_1 - p_2 = 2\omega_N\sqrt{\xi^2-1}$

$$\Rightarrow s_{ind}(t) = K\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{tp_2} - \left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{tp_1}\right)\right]$$

IV.6

$$\Rightarrow \boxed{s_{ind}(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\omega_N\xi t}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{\omega_N\sqrt{\xi^2-1}\,t} - \left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{-\omega_N\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right]\right]}$$

B) $\xi < 1$

a) Réponse impulsionnelle.

$$s_{imp}(t) = \frac{K\omega_N}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_N t}\sin\left[\omega_N\sqrt{1-\xi^2}\,t\right]$$

b) Réponse indicielle

$$s_{ind}(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_N t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_N\sqrt{1-\xi^2}\,t + \phi\right)\right]$$

où $\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

C) $\xi = 1$

a) Rép impulsionnelle.

$$S_{imp}(p) = \frac{K\omega_N^2}{(p-p_1)^2}$$

$$\Rightarrow s_{imp}(t) = K\omega_N^2\, t\, e^{p_1 t}$$

$$\boxed{s_{imp}(t) = K\omega_N^2\, t\, e^{-\xi\omega_N t}}$$

b) Rép indicielle.

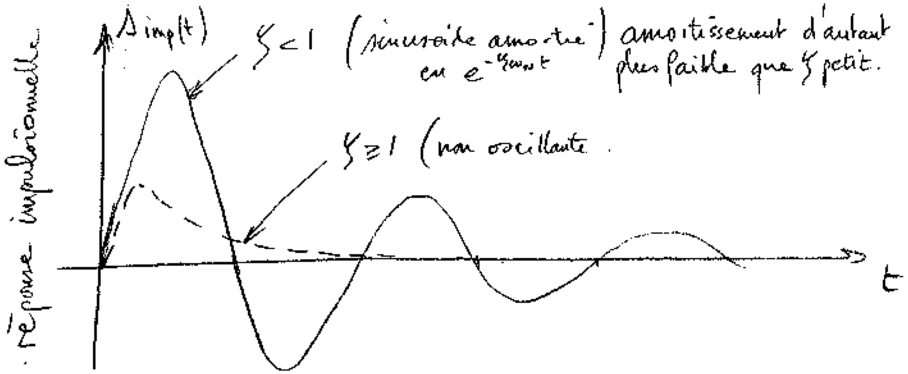
$$S_{ind}(p) = \frac{K\omega_N^2}{p(p-p_1)^2} = \frac{1}{p} S_{imp}(t)$$

$$s_{ind}(t) = \int_0^t s_{imp}(t)\,dt = \int_0^t K\omega_N^2\, t\, e^{-\xi\omega_N t}\,dt$$

(par partie $v = t$; $v' = e^{-\xi\omega_N t}$)

$$\rightarrow \boxed{s_{ind}(t) = K\left[1 - e^{-\omega_N t} - \omega_N t\, e^{-\omega_N t}\right]}$$

D) Tracés des Réponses Temporelles.

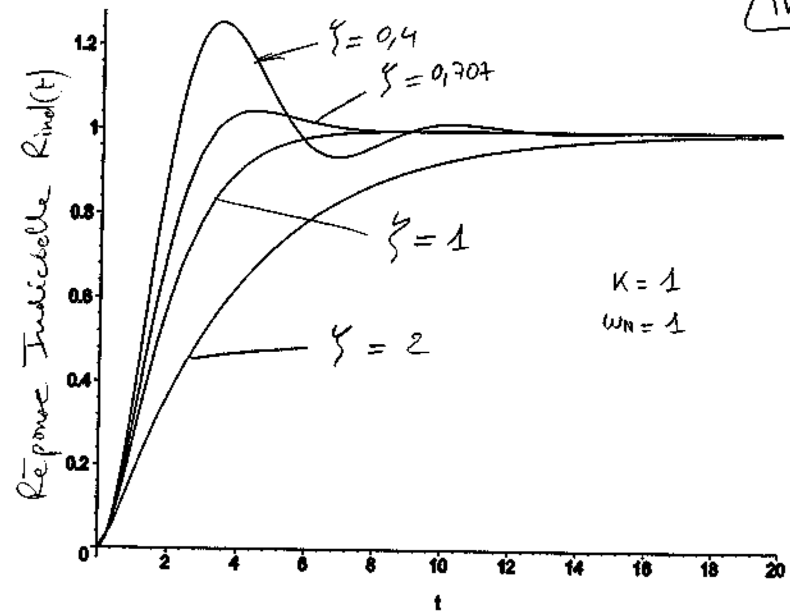


$\xi<1$ réponse en $\sin(\omega_p t + \phi)$

avec $\omega_p = \omega_N\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T_p}$

T_p est la pseudo période

$\xi \geq 1$ réponse non oscillante



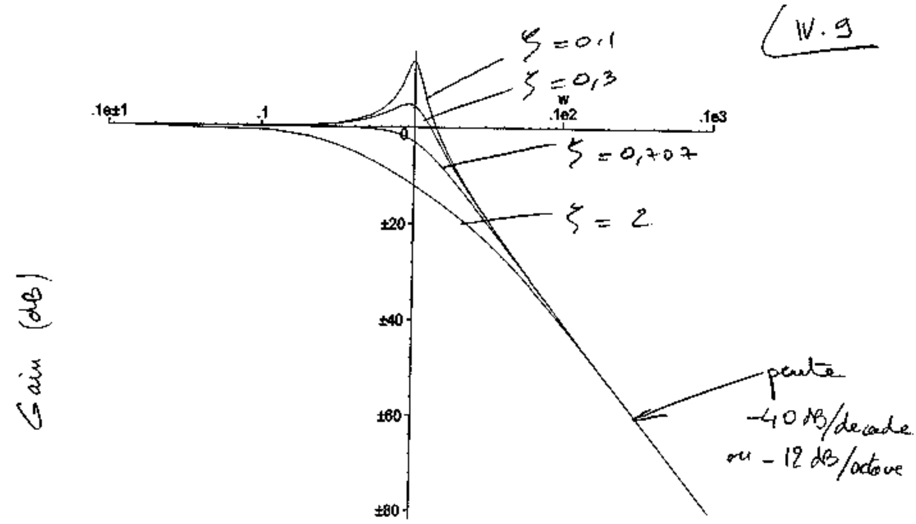
- oscillation pour $\xi < 0,707$
- dépassement présent pour $\xi < 1$

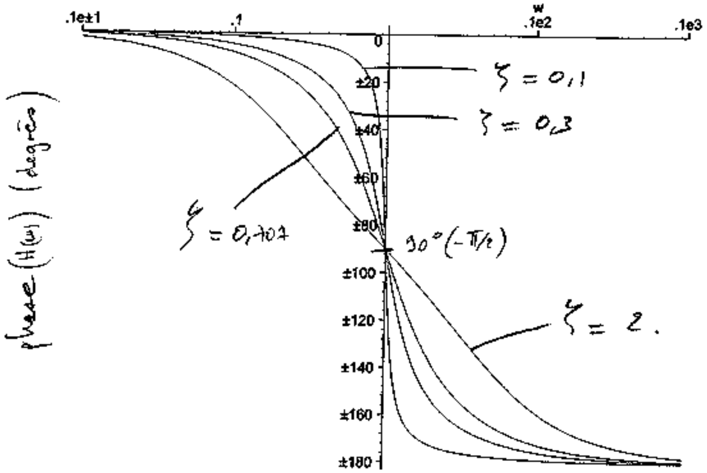
E) Réponses Fréquentielles.

$$H(\omega) = H(p=j\omega) = \frac{K}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right) + j\, 2\xi\frac{\omega}{\omega_N}}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{K^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_N^2}}$$

IV.9





$$\arg(H(\omega)) = -\operatorname{arctg}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_N}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2}\right]$$

Présence d'une résonnance du Gain

si $\xi < 0{,}707$ le gain présente une résonnance pour la pulsation $\omega_r = \omega_N\sqrt{1-\xi^2}$ d'amplitude $G_r = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

IV.10

Remarque :

On voit que G et $\arg(H(\omega))$ présente des points d'inflexion multiples dès que $\xi \gg 1$

En effet si $\xi > 1$ la fct de transfert s'écrit :

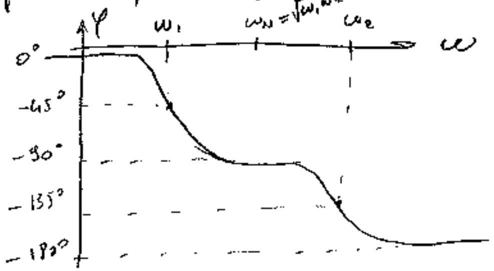
$$H(p) = \frac{K\omega_N^2}{(p_1-p)(p_2-p)} \quad \text{où } p_{1,2} = \omega_N\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right) = \omega_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

donc la réponse fréquentielle s'écrit :

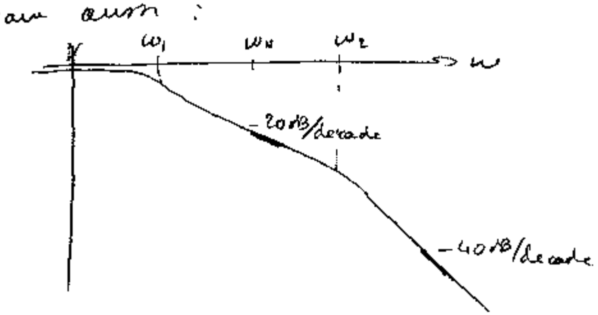
$$H(p) = K\omega_N^2 \frac{1}{(\omega_1 - j\omega)} \frac{1}{(\omega_2 - j\omega)}$$

$$\text{où} \quad \omega_{1,2} = \omega_N\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}\right)$$

quand ξ est suffisamment grand devant 1, ω_1 et ω_2 deviennent très distant. la phase présente alors plusieurs points d'inflexion correspondants aux 2 pulsations de coupure ω_1 et ω_2.



Et le gain aussi :



LICENCE SCIENCES & TECHNOLOGIES
MENTION ELECTRONIQUE

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Filtrage Analogique

partie 2

Le Filtrage

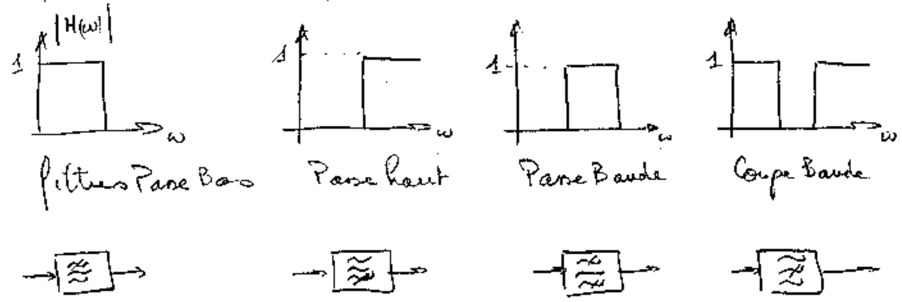
T. Ditchi

V. GABARITS - NORMALISATION - TRANSPOSITION

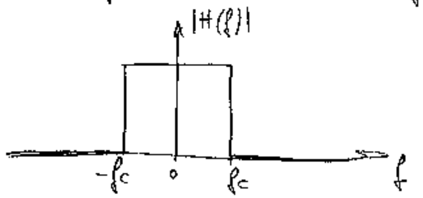
Gabarits - Normalisation - Transposition

I) Filtre Idéal.

On classe les filtres selon la bande de fréquence qu'ils laissent passer :



Ces filtres, tels qu'il sont tracés, sont idéaux. Les coupures sont abruptes.
Cherchons la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal Passe bas tel que celui tracé ci-dessus.
le module de $H(\omega)$ est forcement pair pour correspondre à un signal réel. On a donc

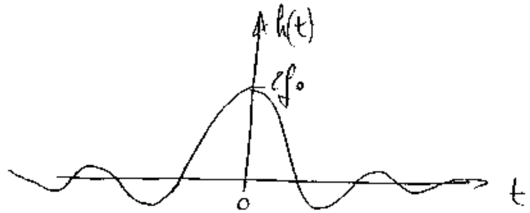


filtre Passe Bas Idéal.

et l'argument doit être impair.
La réponse impulsionnelle $h(t)$ est la Transformée de Fourier inverse de la réponse fréquentielle.

On a donc $h(t) = TF^{-1}(H(f))$

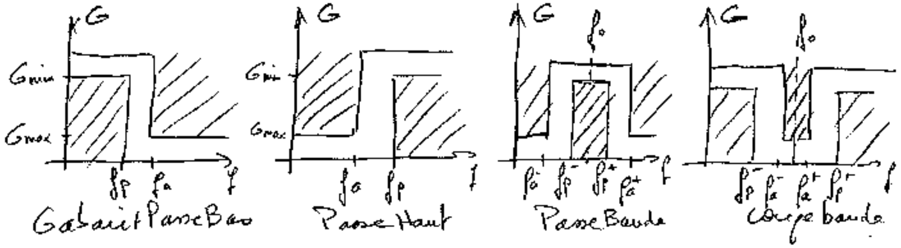
cad $h(t) = 2f_0 \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)$.



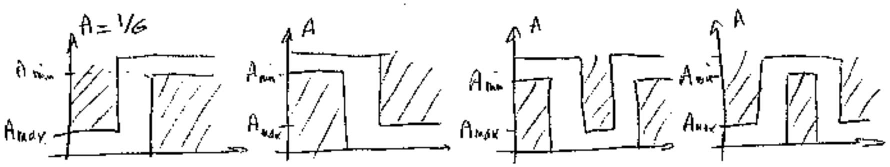
Or cette réponse à une entrée $\delta(t)$ (δ en $t=0$) n'est pas causale puisqu'elle commence avant que le système soit excité !
Même en choisissant une autre phase de $H(f)$ que celle choisie ici ($\arg[H(f)]=0$) telle qu'une phase linéaire ($\varphi(\omega) = -a\omega$) qui permet de ne pas déformer les signaux, on obtient une réponse (sinus cardinal décalé) qui n'est toujours pas causale.
C'est la raison pour laquelle il est necessaire de passer par l'intermédiaire de gabarits fabriqués à partir d'un cahier des charges.

II Gabarit.

Un gabarit définit des zones de fréquences sur lesquelle le gain doit respecter certaines propriétés.



ou en atténuation :



où f_p est la dernière fréquence passante (pour un filtre Passe bas) qui l'on notera aussi f_c.

f_a est la première fréquence atténuée (pour un filtre Passe bas)

G_{min} est le Gain minimum que doit posséder le filtre dans la bande passante.

G_{max} est le Gain maximum dans la bande coupée.

A_{max} est l'atténuation maximum dans la bande passante.

A_{min} est l'atténuation minimum dans la bande coupée.

On définit la sélectivité k :

- filtre infiniment raide $\Rightarrow k = 1$
- filtre moins raide $\Rightarrow k < 1$

$k = \dfrac{f_p}{f_a}$ pour un filtre passe bas $\in]0;1]$

$k = \dfrac{f_a}{f_p}$ pour un filtre passe haut $\in]0;1]$

$k = \dfrac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-}$ pour un filtre passe bande //

$k = \dfrac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-}$ pour un filtre coupe bande. //

III Normalisation

Il est commode de travailler avec des fréquences et des impédances normalisées de façon à pouvoir comparer les filtres entre eux et leur attribuer des caractéristiques. Ainsi les filtres suivants ont des propriétés comparable,

$$H(p) = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_c}}$$

avec $\omega_c = 10^{4}$ pour le filtre de gauche.

et $\omega_c = 10^{3}$ pour le filtre de droite.

excepté leur fréquence de coupure qui est différente.

1°/ Normalisation de la fréquence.

On choisit une fréquence de référence f_0.

- Pour un filtre passe bas (ou passe haut) la fréquence de référence est la dernière (ou première) fréquence passante $f_0 = f_p$.

On définit alors la fréquence normalisée :

$$f_n = \frac{f}{f_0}$$

la pulsation normalisée :

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$$ (à ne pas confondre avec ω_N la pulsation naturelle).

$$p_n = \frac{p}{\omega_0}$$

- Pour un filtre passe bande (ou coupe bande) la fréquence de normalisation est choisie comme étant la fréquence centrale de la bande passante (coupée) notée f_0 et sera définit plus loin dans ce cours.

⊛ La fonction de transfert normalisée s'obtient alors comme le montre l'exemple suivant :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

ω_c est la pulsation de coupure à $-3dB$ car

$$G(\omega_c) = 20 \log |H(\omega_c)| = -3dB$$

et $G_{max} = 0\,dB$

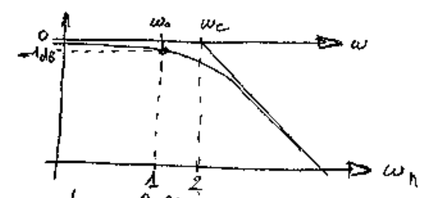
- Si on choisit la pulsation de référence $\omega_0 = \omega_c$ alors : $p_n = \frac{p}{\omega_0} = \frac{p}{\omega_c}$

d'où $$H(p) = \frac{1}{1 + p_n}$$

- si on choisit comme pulsation de référence ω_0 telle que $G(\omega_0) = G_{max} - 1dB = -1dB$

cad $\omega_0 \simeq \frac{\omega_c}{2}$ alors : $p_n = \frac{p}{\omega_0} = \frac{2p}{\omega_c}$

d'où $$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p_n}{2}}$$



Remarque :

⚠ La pulsation de référence d'un filtre passe bas (ou haut) n'est pas forcément la pulsation de coupure à $-3dB$!

2°/ Normalisation des impédances.

On choisit une impédance de normalisation notée R_0.

Cette impédance peut être par exemple l'impédance de sortie du générateur.

On définit alors l'impédance normalisée :

$$z = \frac{Z}{R_0}$$

a) Résistance.

$$R \longrightarrow r = \frac{R}{R_0}$$

b) Inductances

$Z_L = jL\omega \longrightarrow z_L = j\frac{L\omega}{R_0} = j\frac{L\omega_0}{R_0}\frac{\omega}{\omega_0}$

cad $\boxed{z_L = j\,\ell\,\omega_n}$ où $\ell = \frac{L\omega_0}{R_0}$

où ℓ est la valeur normalisée de l'inductance

(ℓ = inductance normalisée).

et ω_n est la pulsation normalisée

c) Condensateurs.

$Z_C = \frac{1}{jC\omega} \longrightarrow z_C = \frac{1}{jC\omega R_0} = \frac{1}{jCR_0\omega_0\frac{\omega}{\omega_0}}$

cad $\boxed{z_C = \frac{1}{jc\,\omega_n}}$ où $c = CR_0\omega_0$

où c est la valeur normalisée de la capacité.

(c = capacité normalisée).

d) Bilan

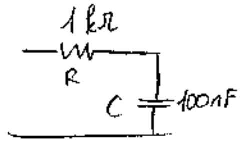
On a donc : $\boxed{r = \frac{R}{R_0}}$; $\boxed{\ell = \frac{L\omega_0}{R_0}}$; $\boxed{c = CR_0\omega_0}$

Si on pose :

$\boxed{C_0 = \frac{1}{R_0\omega_0}}$ et $L_0 = \frac{R_0}{\omega_0} = R_0^2 C_0$

On a $R = r R_0$; $\boxed{C = c\,C_0}$ et $L = \ell L_0 = \ell R_0^2 C_0$

e) Exemple de normalisation

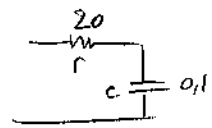
⊛ 

on choisit $R_0 = 50\,\Omega$

et $\omega_0 = 2.10^4$ rad/s

alors $r = \frac{R}{R_0} = 20$; $c = CR_0\omega_0 = 0{,}1$

le filtre normalisé devient :



où $R_0 = 50\,\Omega$ et $\omega_0 = 2\,10^4$ rad/s

et la fonction de transfert.

$H(p) = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{1 + rR_0\frac{c}{R_0\omega_0}p}$

cad $H(p_n) = \frac{1}{1 + rc\,p_n} = \frac{1}{1+2p_n}$

remarque.

le filtre a été ici normalisé à une pulsation $\omega_0 = 2\,\omega_{3dB}$ cad à une fréquence à laquelle le filtre atténue de 7dB

(−6dB/octave ⇒ −6dB pour l'asymptote + 1dB sous l'asymptote ⇒ atténuation de 7dB)

la preuve est que à $p_n = 1$

$G = -20\log\sqrt{1+4} = -20\log\sqrt{3} \simeq -7$ dB.

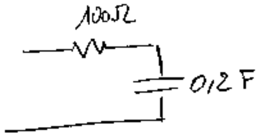
DONC ici filtre normalisé à −7dB

f) Exemple de dénormalisation.

soit un filtre normalisé à $\omega_0 = 10^{-1}$ rad/s avec une impédance de normalisation $R_0 = 10^3\Omega$.

$$\Rightarrow \quad R = r R_0 = 100\Omega$$
$$C = \frac{c}{R_0 \omega_0} = 0{,}2\,F$$

donc filtre dénormalisé mais qui a les mêmes propriétés que le filtre normalisé (décalage de freq).



3°/ Transposition de fréquence.

a) But du jeu :

On désire fabriquer des filtres Passe haut Passe bande ou Coupe Bande dont le comportement est connu parce que identique à celui de filtres passe Bas catalogués.

b) Transposition Passe Bas → Passe haut.

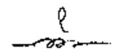
α) Principe.

En remplaçant les capacités par des inductances et les inductances par des capacités On transforme un passe bas en Passe haut.

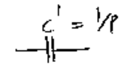
par exemple

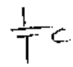
β) Transformation de la fonction de transfert

(*) $\boxed{\text{On transforme } p_n \text{ en } 1/p_n}$ dans la fonction de transfert normalisée ainsi :

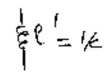


$$z_c = l p_n \longrightarrow \frac{l}{p_n} = \frac{1}{\frac{1}{l} p_n} = \frac{1}{c' p_n}$$





$$z_c = \frac{1}{c p_n} \longrightarrow \frac{p_n}{c} = \frac{1}{c} p_n = l' p_n$$



et la fonction de transfert d'un filtre passe bas devient celle d'un passe haut.

ex : $H(p_n) = \dfrac{1}{1 + \frac{p_n}{2}}$ se transforme en

$$H(p_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2p_n}} = \frac{2p_n}{1 + 2p_n}$$ qui est la fonction de transfert normalisée d'un Passe haut.

(*) On peut aussi Passer d'un passe bas non normalisé de pulsation ω_0 (dernière pulsation passante à G_{min}) à un filtre passe haut de pulsation ω_0' (première fréquence passante à G_{min}) en appliquant la transformation :

$$\boxed{p \longrightarrow \omega_0' \frac{\omega_0}{p}}$$

ex : Soit un filtre passe bas

$H(p) = \dfrac{1}{1+10p}$ ayant une pulsation $\omega_p = 0{,}1$ à $G_{min} = -3\,dB$

On peut alors transposer ce filtre en passe haut possédant une pulsation $\omega_p' = 0{,}2$ à $G_{min} = -3\,dB$ par :

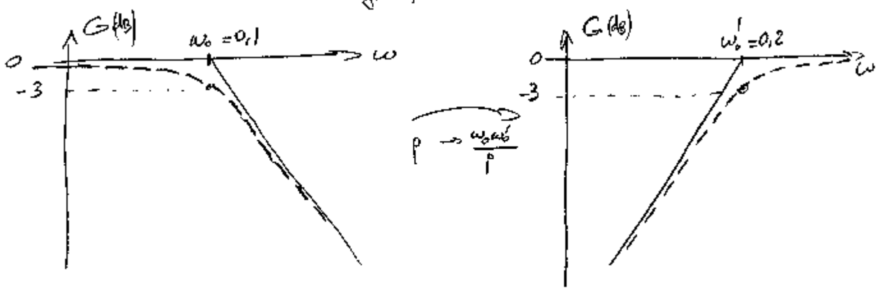
$$H'(p) = H\left(\frac{\omega_0'\omega_0}{p}\right) = \frac{1}{1 + 10\,\frac{\omega_0'\omega_0}{p}} = \frac{1}{1+\frac{0{,}2}{p}}$$

$$= \frac{5p}{1+5p} \quad \text{filtre passe haut.}$$

et on vérifie qu'à $p = j\omega_0' = j0{,}2$ le filtre possède bien un gain $= G_{min} = -3\,dB$ car en effet :

$$H'(j0{,}2) = \frac{j}{1+j} \Rightarrow G' = 10\log\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

cad $G' = 10\log(1/2) = -3\,dB$.



γ) Transposition des Gabarits.

Ex : Prenons par exemple le filtre Passe Bas d'ordre 2 suivant : $H(p_n) = \dfrac{1}{p_n^2 + 2p_n + 1}$ normalisé.

Sa réponse fréquentielle et son gain valent :

$$H(\omega_n) = \frac{1}{(1-\omega_n^2) + 2j\omega_n} \quad \text{et} \quad G_n = -10\log\left(4\omega_n^2 + (1-\omega_n^2)^2\right)$$

à $\omega_n = 1$ son gain vaut : $G_n(\omega_n = 1) = -10\log(4) = -6\,dB$

et $\omega_n = 10$ son gain vaut : $G_n(\omega_n = 10) \simeq -40\,dB$.

Après transposition en Passe haut on trouve :

$$H'(p_n) = H(1/p_n) = \frac{1}{\frac{1}{p_n^2} + \frac{2}{p_n} + 1} = \frac{p_n^2}{1 + 2p_n + p_n^2}$$

son Gain $G'(\omega_n) = 10\log(\omega_n^4) - 10\log\left[(1-\omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2\right]$

à $\omega_n = 1$ $\quad G'(\omega_n = 1) = -6\,dB$

à $\omega_n = 1/10$ $\quad G'(\omega_n = 0{,}1) = -40 - 10\log\left[0{,}99^2 + 0{,}04\right]$

$\simeq -40\,dB$

On constate donc que le gain des filtres par transposition sont conservés :

$G(1) = G'(1)$

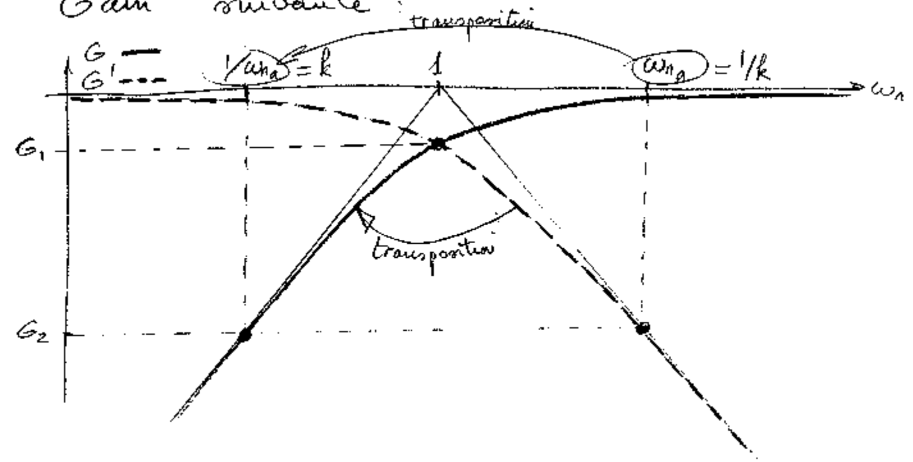
$G(10) = G'(0{,}1)$

Plus Généralement on montre que : LV.13

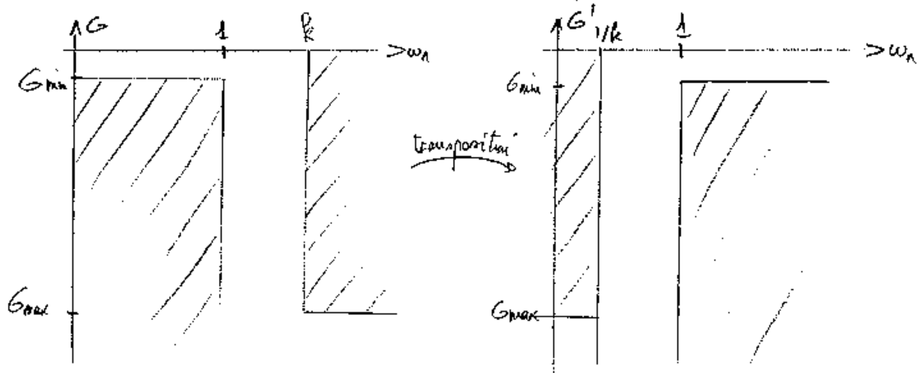
si $\underset{(p\ bas)}{H(p_n)} \xrightarrow{p_n \to \frac{1}{p_n}} \underset{(p\ haut)}{H'(p_n)}$

alors $G(\omega_n) = G'(1/\omega_n)$

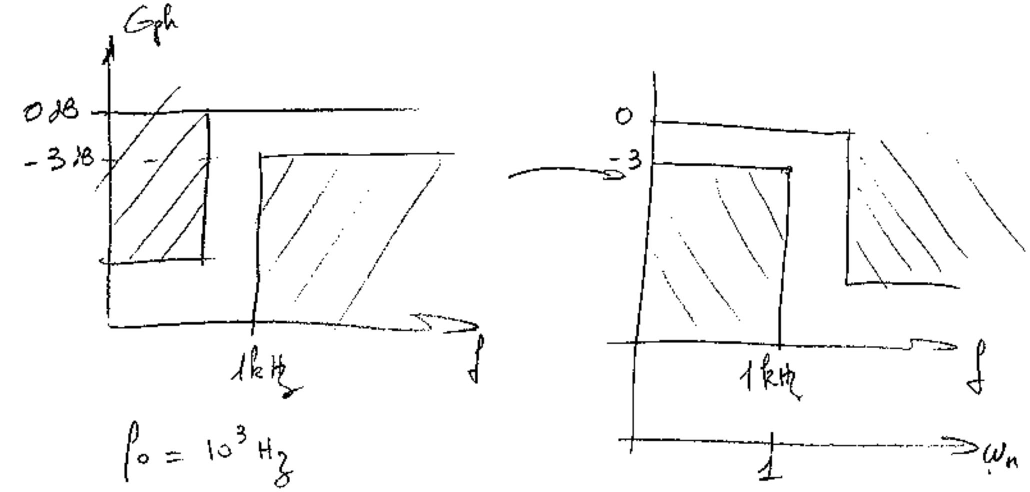
Ce qui se traduit par la transposition de Gain suivante :



Et le Gabarit se conserve également



Exemple de fab d'1 filtre Passe haut



$f_0 = 10^3\ Hz$

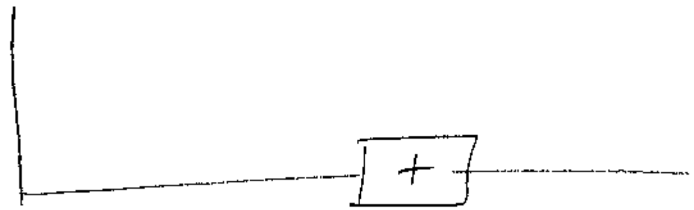
$\Downarrow$

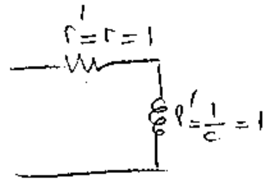
$H(p_n) = \dfrac{1}{1 + 1/p_n} \xleftarrow{p_n \to \frac{1}{p_n}} H(p_n) = \dfrac{1}{1+p_n}$ filtre normalisé à -3 dB à $\omega_n = 1$

$H(p_n) = \dfrac{p_n}{1+p_n}$

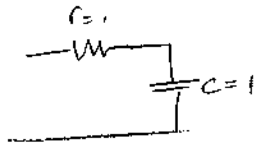
$H(p) = \dfrac{p/\omega_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$

où $\omega_0 = 2\pi 10^3$





$\xleftarrow{p_n \to \frac{1}{p_n}}$

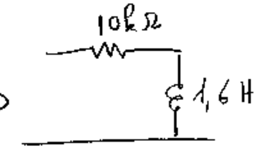


$\Rightarrow R' = r' R_0$ on choisit $R_0 = 10k\Omega$

$\Rightarrow R' = 10k\Omega$

et $L' = \dfrac{l' R_0}{\omega_0} = \dfrac{10^4}{2\pi 10^3} = 1{,}6\ H$

$\Rightarrow$



8) Exemple de fabrication d'un filtre Passe haut

On désire synthétiser un filtre P haut de freq de coupure à -3dB de $f_p = 1kHz$ d'ordre 1 ...

On part pour cela d'un filtre passe bas d'ordre 1 normalisé à -3dB : $H_{pb}(p_n) = \frac{1}{1+p_n}$ $\left(G(\omega_n=1) = -3dB\right)$

On pratique la transposition $p_n \to 1/p_n$

$$H_{ph}(p_n) = H_{pb}(1/p_n) = \frac{1}{1+1/p_n} = \frac{p_n}{1+p_n}$$

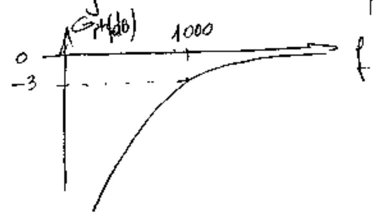
qui à $p_n = 1$ possède bien un gain $G_{ph}(\omega_n=1) = -3dB$.

puis on le dénormalise à la fréquence $f_p = 1kHz$

Pour cela on remplace p_n par $\frac{p}{\omega_p}$ où $\omega_p = 2\pi f_p$

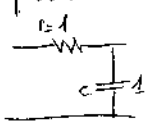
$$H_{ph}(p) = \frac{p/\omega_p}{1+p/\omega_p} = \frac{p}{\omega_p+p} = \frac{j\omega}{2\pi f_p + j\omega}$$

dont le gain vaut : $G_{ph}(\omega) = 10\log(\omega^2) - 10\log(\omega_p^2+\omega^2)$



$G_{ph}(\omega_p) = -3dB$

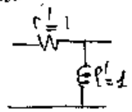
et le filtre Passe Bas devient par transposition



filtre Passe Bas

$r \to r' = 1$

$c \to \ell' = 1/c = 1$



filtre Passe haut

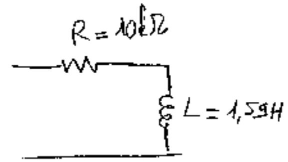
et en dénormalisant :

$R_0 = 10k\Omega$ et $\omega_0 = \omega_p = 2\pi \cdot 1kHz$

$r' \to R' = r'R_0 = 10kHz$

$\ell' \to L' = \frac{\ell' R_0}{\omega_0} = \frac{10^4}{2\pi\, 10^3} = 1{,}59\ H$ (!!! trop grand)

ce qui donne le filtre Passe haut :



Rem: On peut remarquer que la transposition transforme une capacité en une inductance, ce qui n'est pas recommendé à de faibles fréquences. l'exemple ci dessus necessite une inductance de 1,59 Henry, ce qui est une valeur très importante et qui correspond à une bobine très encombrante et probablement coûteuse.

Le même filtre à une fréquence $f_p = 100MHz$ donnerait une inductance de $15{,}9\mu H$, ce qui est bien plus raisonnable -

c) Transposition Passe Bas ⇒ Passe Bande

V.16

α) Principe

Cellules Passe Bas ⟶ Cellules Passe Bande

c ⟶ c' ∥ ℓ'

ℓ ⟶ ℓ' — c'

β) Transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} p_n \longrightarrow \dfrac{1}{B}\left(p_n + \dfrac{1}{p_n}\right) \\ p \longrightarrow \dfrac{\omega_p}{B\omega_0}\left(p + \dfrac{\omega_0^2}{p}\right) \end{array}}$$

où B est la bande passante relative du passe bande $B = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\omega_0}$

⊛ c : $z_c = \frac{1}{c p_n} \longrightarrow \frac{B}{c\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)} = \frac{B}{c p_n + \frac{1}{1/c\, p_n}}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{c}{B}\right) p_n + \frac{1}{\left(\frac{B}{c}\right) p_n}}$$

⟶ $\boxed{c' = \frac{c}{B} \;\parallel\; \ell' = \frac{B}{c}}$

⊛ ℓ : $z_\ell = \ell p_n \longrightarrow \frac{\ell}{B}\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)$

$$= \frac{\ell}{B} p_n + \frac{1}{\frac{B}{\ell} p_n}$$

$$= \ell' p_n + \frac{1}{c' p_n}$$

⟶ $\boxed{\ell' = \ell/B \;—\; c' = B/\ell}$

On transforme bien les éléments du Passe Bas en éléments de Passe Bande.

On choisira arbitrairement $\boxed{\omega_p = \omega_1' - \omega_1}$ où ω_1 et ω_1' sont les 1ère et dernière pulsations...

P. bas ⇒ P. bande (1)

$p_n \longrightarrow \frac{1}{B}\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)$ où $B = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\omega_0}$

Résumé

c : $z_c = \frac{1}{c p_n} \longrightarrow z = \frac{B}{c\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)}$

$$= \frac{1}{\frac{c}{B} p_n + \frac{1}{\frac{B}{c} p_n}}$$

$$= c' = \frac{c}{B} \;\parallel\; \frac{B}{c} = \ell'$$

ℓ : $z_\ell = \ell p_n \longrightarrow z = \frac{\ell}{B}\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)$

$$= \frac{\ell}{B} p_n + \frac{1}{\frac{B}{\ell} p_n}$$

$\ell' = \ell/B$ — $c' = B/\ell$

on choisit $\boxed{\omega_p = \omega_1' - \omega_1}$

On cherche ω / $|H(j\omega_p)| = |H'(j\omega)|$

$$\left(\frac{\omega_p}{B\omega_0}\left(p + \frac{\omega_0^2}{p}\right) = p + \frac{\omega_0^2}{p} \quad B = \omega_1' - \omega_1\right)$$

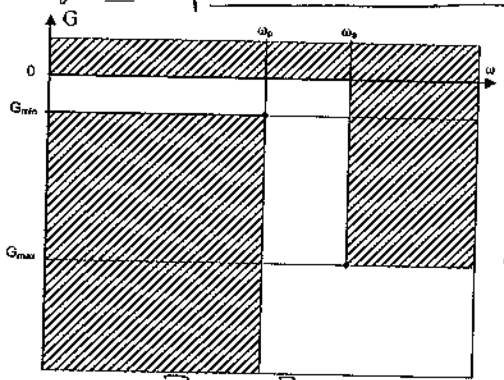
$$= \left|H\left(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\right)\right|$$

... ⟶ $\omega_0 = \sqrt{\omega_1'\omega_1} = \sqrt{\omega_2'\omega_2}$

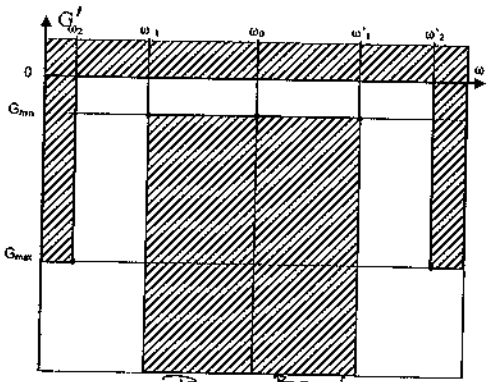
et $\omega_p = \omega_1' - \omega_1$

$\omega_a = \omega_2' - \omega_2$

I) Transposition de Gabarit



Passe Bas



Passe Bande

Pour savoir comment transposer le gabarit du passe Bas en Gabarit Passe bande, il est nécessaire d'imposer que celui ci conserve les propriétés du filtre Passe Bas -

i) On désire donc que : $|H(j\omega_p)| = |H'(j\omega'_1)| = |H'(j\omega_1)|$ (1)

et $|H(j\omega_a)| = |H'(j\omega'_2)| = |H'(j\omega_2)|$ (2)

ω_1 et ω'_1 sont donc solution de l'équation :

$\omega / \quad |H(j\omega_p)| = |H'(j\omega)|$

or $H'(j\omega) = H\left(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\right)$ donc $\omega / |H(j\omega_p)| = \left|H\left(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\right)\right|$

ω_1 et ω'_1 sont donc solution de :

$\omega / \quad \pm j\omega_p = j\omega + \frac{1}{j\omega} = j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)$ $\pm$ car $|H(\omega)|$ est pair

cad $\pm\omega_p = \omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}$

cad $\omega^2 \mp \omega_p\omega - \omega_0^2 = 0$

Les (4) solutions ω_1 et ω'_1 sont

$$\frac{\pm\omega_p \pm \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

donc 2 solutions seulement sont positive -

$$\omega_1 = \frac{-\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

et $\omega'_1 = \frac{+\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

et on a : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega'_1} \\ \text{et } \omega'_1 - \omega_1 = \omega_p \end{array}}$ c'est à dire que le filtre Passe Bande est "centré" sur ω_0 au sens "géométrique"

et la Bande Passante relative B vaut :

$B = \frac{\omega'_1 - \omega_1}{\omega_0}$ cad $\boxed{B = \frac{\omega_p}{\omega_0}}$

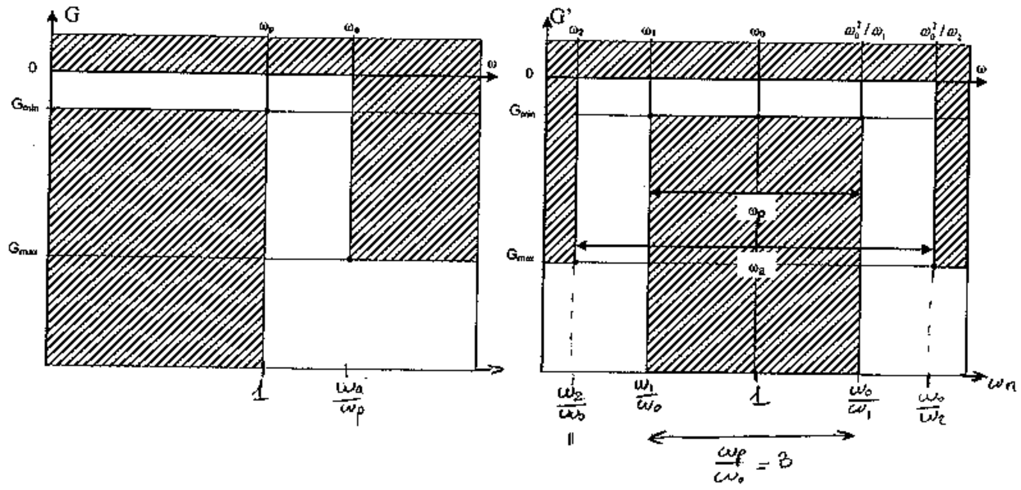
ii) De la même manière on montre que :

$$\omega_2 = \frac{-\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega'_2 = \frac{\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

cad : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\omega_2\omega'_2} \\ \omega_a = \omega'_2 - \omega_2 \end{array}}$

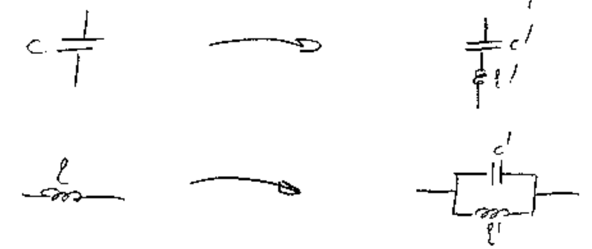
la transposition du Gabarit est donc résumé par la figure suivante :



D) Transposition Passe Bas → Coupe Bande

α) Principe

Cellules Passe Bas → Cellules Coupe Bande.



β) Transformation

$$\boxed{p_n \longrightarrow \frac{B}{p_n + \frac{1}{p_n}}}$$

$$\boxed{p \longrightarrow \frac{B\omega_p\omega_0}{p + \frac{\omega_0^2}{p}}}$$

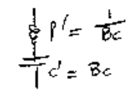
où B = Bande coupée relative.

$$B = \frac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$$

⊗ c $\quad z_c = \dfrac{1}{C p_n} \longrightarrow \dfrac{p_n + \frac{1}{p_n}}{c\,B} = \dfrac{1}{Bc}p_n + \dfrac{1}{Bc\,p_n}$

$$= \ell' p_n + \frac{1}{c' p_n}$$

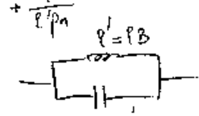
cad



ℓ $\quad z_\ell = \ell p_n \longrightarrow \dfrac{\ell B}{p_n + \frac{1}{p_n}} = \dfrac{1}{\frac{p_n}{\ell B} + \frac{1}{\ell B p_n}}$

$$= \frac{1}{c' p_n + \frac{1}{\ell' p_n}}$$

cad



On transforme bien les éléments du passe-bas en élément de coupe-bande. (V.21)

On choisira arbitrairement, $B = \frac{\omega_p}{\omega_0}$

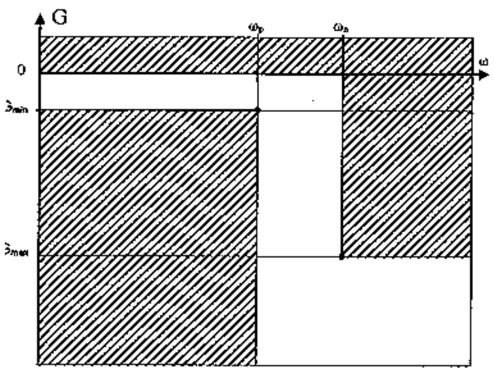
où ω_p = dernière pulsation passante du passe-bas

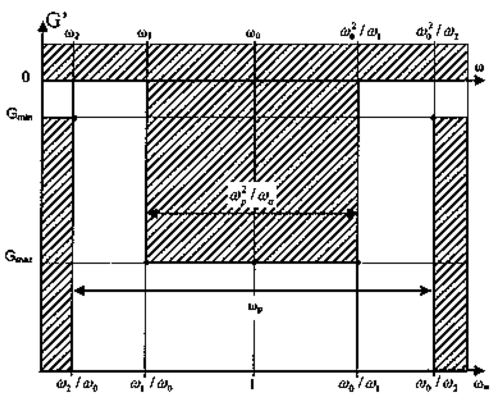
ω_0 = pulsation centrale du coupe-bande.

γ) Transposition du Gabarit.

de la même manière que pour le passe-bande on trouve que :

$$\begin{cases} \omega_2' - \omega_2 = \omega_p & \text{et} \quad \omega_2' \omega_2 = \omega_0^2 \\ \omega_1' - \omega_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_a} & \text{et} \quad \omega_1' \omega_1 = \omega_0^2 \end{cases}$$





VI. CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT A PARTIR DU GAIN

Recherche de $H(p)$ connaissant $|H(\omega)|$.

I) Quelques propriétés de la réponse fréquentielle

$$e(t) \longrightarrow \boxed{S.L.I} \longrightarrow s(t)$$

le système est caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

où b_i et $a_i \in \mathbb{R}^+$ et sont constants.

la réponse fréquentielle $H(j\omega)$ s'écrit :

$$H(\omega) = H(p)\Big|_{p=j\omega} = \frac{a_m (j\omega)^m + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + \dots + b_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \in \mathbb{C}$$

1°/ a) $D(j\omega) = b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n$

$$= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 + \dots + j\omega\left[b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 + \dots\right]$$

$$= \underbrace{D_1(\omega^2)}_{\text{paire en } \omega} + \underbrace{j\omega \underbrace{D_2(\omega^2)}_{\text{paire en } \omega}}_{\text{impaire en } \omega}$$

et D_1 et D_2 sont des fonctions réelles

de même $N(j\omega) = N_1(\omega^2) + j\omega N_2(\omega^2)$

b) $$H(-j\omega) = \frac{N_1 - j\omega N_2}{D_1 - j\omega D_2} = \frac{N^*}{D^*} = H^*(j\omega)$$

c) $$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{N_1^2 + \omega^2 N_2}{D_1^2 + \omega^2 D_2}}$$

donc $|H(j\omega)|$ est une fonction paire de ω.

et $|H(j\omega)|$ est une fonction de ω^2 uniquement

2°/ Stabilité du Système.

On a vu que pour que le système soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert (p_i) soient à partie réelle négative.

3°/ Systèmes à Déphasage minimal.

On montre que pour que le système introduise un déphasage minimal, il faut que les zéros de la fonction de transfert soient à partie réelle négative

De plus, on montre de la même manière que pour les pôles, que si z_k est un zéro alors z_k^* l'est aussi.

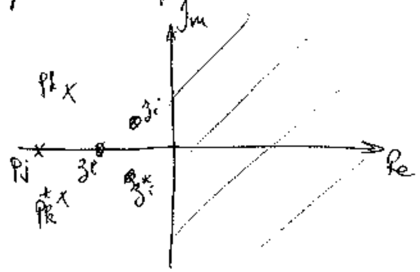
4°/ Pôles et zéros de $|H(j\omega)|^2$

On suppose que le système est stable et à déphasage minimal
Soient $p_1, p_2, \ldots p_n$ l'ensemble des pôles de $H(p)$
et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ l'ensemble des zéros de $H(p)$

⊛ alors on peut écrire $H(j\omega)$ comme :

$$H(j\omega) = H(p)\Big|_{p=j\omega} = K\,\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}$$

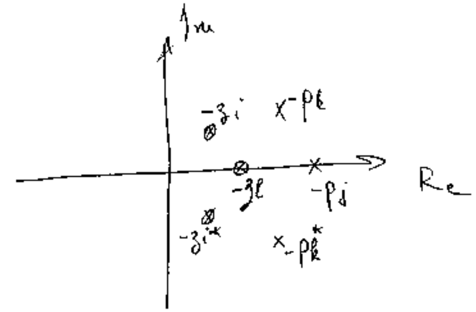
et les pôles et les zéros sont localisés à gauche dans le plan complexe :



⊛ De plus

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) = K(-1)^{m+n}\,\frac{(j\omega+z_1)\cdots(j\omega+z_m)}{(j\omega+p_1)\cdots(j\omega+p_n)}$$

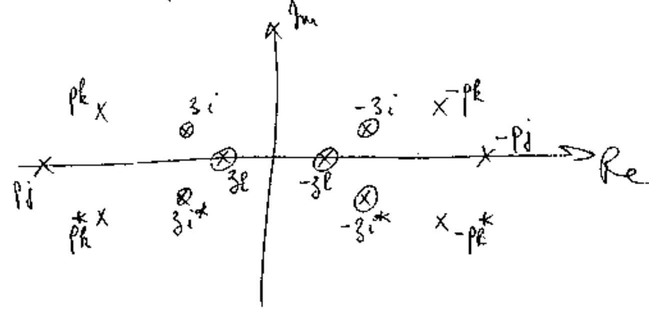
donc les pôles et zéros de $H^*(j\omega)$ sont les opposés de ceux de $H(j\omega)$,
ils sont donc répartis dans le plan complexe comme suit :



⊛ le module de $H(j\omega)$ s'écrit :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\,H^*(j\omega) = H(j\omega)\,H(-j\omega)$$

et possède tous les zéros et tous les pôles de $H(j\omega)$ et de $H(-j\omega)$, qui se répartissent dans le plan complexe comme suit :



(On dit que les pôles et les zéros ont une symétrie quadrantale)

II) Calcul de $H(p)$ à partir du module de $|H(\omega)|$.

Supposons que l'on connaisse le module de $H(\omega)$: $|H(\omega)|$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)\,H^*(\omega) = H(j\omega)\,H(-j\omega)$$
$$= H(p)\,H(-p)\big|_{p=j\omega}$$

comme $|H(\omega)|$ est fonction de ω^2 uniquement, $|H(\omega)|^2$ l'est également.

donc $\quad H(p)\,H(-p)\big|_{p=j\omega} = |H(\omega)|^2$

cad $\quad \underbrace{H(p)\,H(-p)}_{\text{recherché}} = |H(\omega)|^2\big|_{\omega=\frac{p}{j}} = \underbrace{|H(\omega)|^2\big|_{\omega^2=-p^2}}_{\text{connu}}$

Pour déterminer $H(p)$, il faut donc, à partir de $|H(\omega)|^2$ remplacer ω^2 par $-p^2$, et on obtient l'expression de $H(p)\cdot H(-p)$.

On recherche alors tous les zéros et les pôles de $H(p)H(-p)$, on élimine la moitié d'entre eux qui ont une partie réelle positive (ceux qui correspondent à $H(-p)$), la moitié restante correspondent à $H(p)$:

on calcul alors $H(p)$ grace à ses pôles et ses zéros.

Exemple

On choisit une fonction dont la forme convient pour $|H(\omega)|^2$.

par ex : $\quad |H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+2\omega^4}$

(ne pas oublier que $|H(\omega)|^2$ est forcement fonction de ω^2)

en remplaçant ω^2 par $-p^2$ dans $|H(\omega)|^2$ on obtient : $\quad H(p)\,H(-p) = \dfrac{1}{1+2(-p^2)^2} = \dfrac{1}{1+2p^4}$

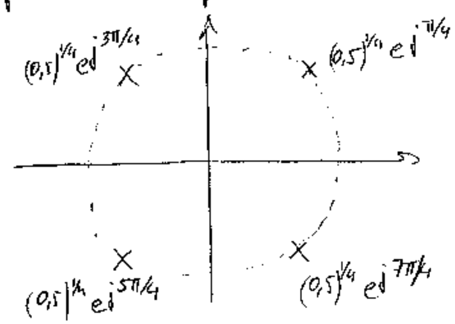
Recherche des pôles et les zéros de $H(p)H(-p)$:

- Il n'y a pas de zéros
- Les pôles sont tels que $\quad 1+2p^4 = 0$

cad $\quad p^4 = -0{,}5 = -0{,}5\,e^{j2k\pi} = 0{,}5\,e^{j(2k+1)\pi}$

cad $\quad p = (0{,}5)^{1/4}\,e^{j(2k+1)\pi/4}$

les pôles se répartissent comme suit :



On ne conserve que les pôles à partie réelle négative, soit :

VI.7

$$p_1 = (0{,}5)^{1/4}\, e^{j3\pi/4}$$

$$p_2 = (0{,}5)^{1/4}\, e^{j5\pi/4} = p_1^*$$

et on a $\quad H(p) = \dfrac{K}{(p-p_1)(p-p_2)}$

cad $\quad H(p) = \dfrac{1}{p^2 + p(-p_1-p_2) + p_1 p_2} = \dfrac{1}{p^2 + (2)^{1/4}\, p + \sqrt{0{,}5}}$

$$= \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, p^2 + 8^{1/4}\, p + 1}$$

Or $\quad H(\omega)_{Max}$ doit être égal à 1 (voir expression de $|H(\omega)|^2$)

donc $\quad K = 1/\sqrt{2}$

d'où $\quad \boxed{H(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, p^2 + 8^{1/4}\, p + 1}}$

VII. FILTRES PROTOTYPES

I. INTRODUCTION

Selon l'application visée, on définit un cahier des charges. Celui-ci se présente comme une liste de fréquence avec les atténuations correspondantes recherchées. Le cahier des charges peut aussi préciser certaines propriétés sur le comportement en phase du système final. On traduit généralement ce cahier des charges en un gabarit qui donne après transposition et normalisation un gabarit passe bas normalisé. Il reste alors à choisir un type de filtre dont on connait à priori certaines propriétés. Ces filtres connus et catalogués sont appelés "Filtres Prototypes".
Nous allons maintenant étudier certains de ces filtres prototypes. Nous étudierons successivement les filtres de:

- Butterworth
- Chebychev
- Legendre
- Cauer
- Bessel
- Gauss

II. FILTRES DE BUTTERWORTH

1°) Définitions

Ces filtres sont caractérisés par une réponse la plus plate possible dans la bande passante. On les appelle ainsi "Maximally Flat" en anglais.
Ce sont des filtres polynomiaux de la forme :

$$|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{a_m\omega^{2m} + a_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \ldots + a_1\omega^2 + 1} = \frac{1}{A^2(\omega^2)}$$ où m est l'ordre du filtre

2°) Calcul de H(ω)

Afin de rendre la réponse de ces filtres passe bas la plus plate possible dans la bande passante, on s'arrange pour que le maximum de dérivées de A^2 soient nulles en ω=0.

$$\left.\frac{\partial(A^2)}{\partial(\omega^2)}\right|_{\omega=0} = \left.\left(ma_m\omega^{2(m-1)} + (m-1)a_{m-1}\omega^{2(m-2)}0 + \ldots 2a_2\omega^2 + a_1\right)\right|_{\omega=0} = 0 \qquad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2(A^2)}{\partial(\omega^2)^2}\right|_{\omega=0} = \left.\left(m(m-1)a_m\omega^{2(m-2)} + (m-1)(m-2)a_{m-1}\omega^{2(m-3)}0 + \ldots 4a_2 + a_1\right)\right|_{\omega=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée (m-1)$^{\text{ième}}$:

$$\left.\frac{\partial^{m-1}(A^2)}{\partial(\omega^2)^{m-1}}\right|_{\omega=0} = \left.\left(m(m-1)\ldots(2)a_m\omega^2 + (m-1)(m-2)\ldots 2a_{m-1}\right)\right|_{\omega=0} = 0 \qquad \Rightarrow \quad a_{m-1} = 0$$

en résumé : $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; ..... ; $a_{m-1} = 0$

ce qui donne le gain des filtres de Butterworth d'ordre m : $|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{a_n\omega^{2m} + 1}$

Il faut ensuite choisir le gain minimum G_{min} dans la bande passante pour normaliser le filtre. Les filtres de Butterworth sont en général normalisés à G_{min} = -3dB .
On cherche donc la pulsation de référence ω_0 telle qu'à $\omega = \omega_0$, $|H_m|^2$ vaille 1/2.

cela donne $\omega_0^{\,2m} = \frac{1}{a_m}$

d'où en posant $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$\boxed{|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_n^{\,2m} + 1}}$$

(Gain normalisé des filtres passe bas de Butterworth d'ordre m

3°) Calcul de la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth

Selon la méthode démontrée dans le chapitre précédent :

$$H(p_n)H(-p_n) = \left.|H(\omega_n)|^2\right|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^m + 1} = \frac{1}{(-1)^n p_n^{\,2n} + 1}$$

Il faut ensuite trouver les zéros (il n'y en a pas...) et les pôles de $H(p_n)\,H(-p_n)$. Les pôles de $H(p_n)\,H(-p_n)$ sont solutions de l'équation suivante :

$$(-1)^n p_n^{\,2n} + 1 = 0$$

Puis on ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert stable.

Ex:

Prenons l'exemple d'un filtre de Butterworth d'ordre 2 (m=2)

$$H(p_n)H(-p_n) = \left.|H(\omega_n)|^2\right|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^m + 1} = \frac{1}{p_n^{\,4} + 1}$$

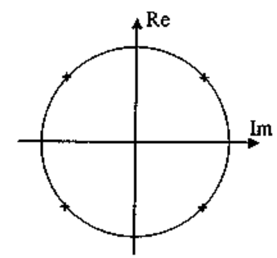
calcul des pôles :

$p_n^{\,4} + 1 = 0$ cad $p_n^{\,4} + 1 = 0$ ou encore $p_n^{\,4} = -1 = e^{j(\pi + 2k\pi)}$

ce qui donne :

$$p_n = e^{j(2k+1)\pi/4} \text{ ou encore } p_n = \begin{cases} e^{j\pi/4} \\ e^{j3\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} \\ e^{j7\pi/4} \end{cases}$$

qui se répartisse dans le plan complexe comme suit :



On ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert $H(p_n)$ d'un système stable (les 2 autres pôles sont associés à $H(-p_n)$)

soient : $p_n = \begin{vmatrix} e^{j3\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} \end{vmatrix}$

et on a : $$H(p_n) = \frac{1}{(p_n - e^{j3\pi/4})(p_n - e^{j5\pi/4})}$$

ce qui donne après calcul $$\boxed{H(p_n) = \frac{1}{1+\sqrt{2}p_n + p_n^2}}$$

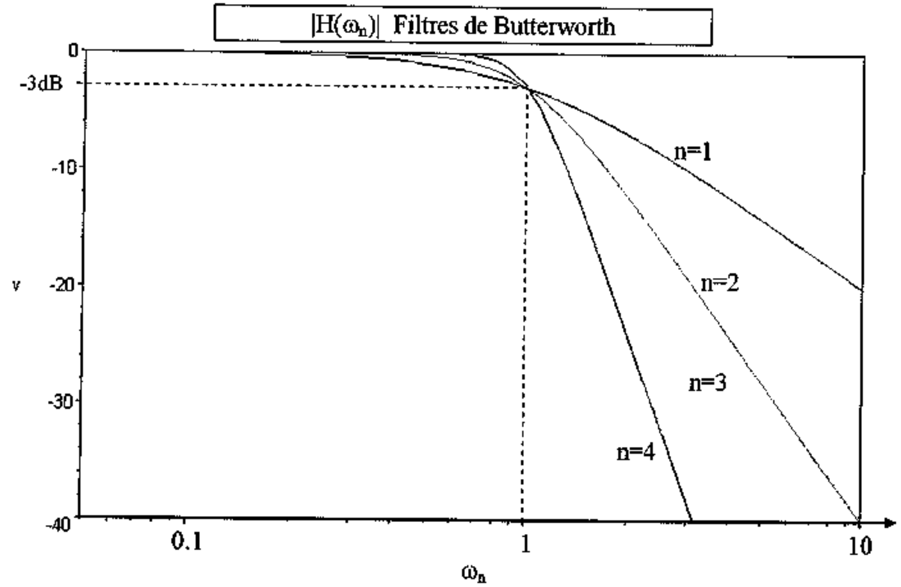
Fonction de transfert d'un filtre de Butterworth du 2nd ordre normalisé à -3dB

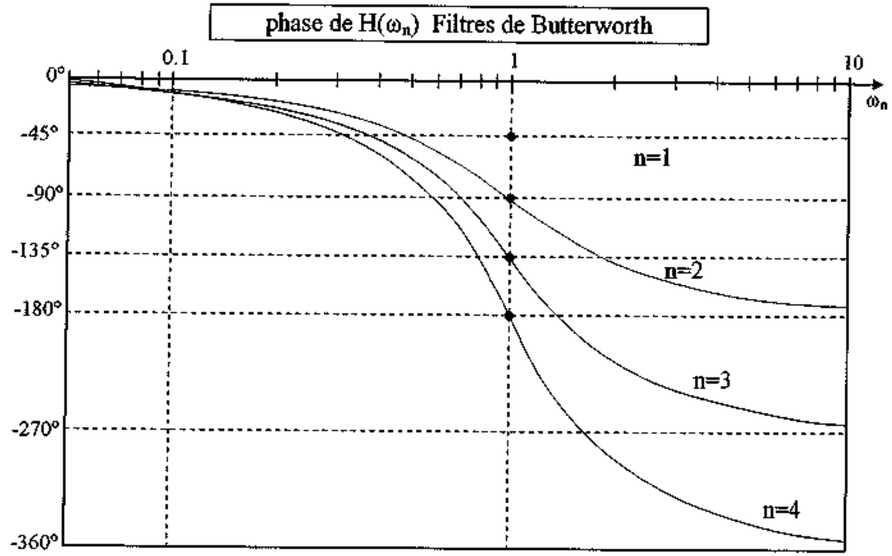
On obtient par la même méthode les fonctions de transfert des filtres de Butterworth listée dans le tableau suivant.

m	Filtres de Butterworth $1/H(p_n)$
1	p_n+1
2	$p_n^2+1,414p_n+1$
3	$(p_n+1)(p_n^2+p_n+1)$
4	$(p_n^2+0,7654p_n+1)(p_n^2+1,8478p_n+1)$
5	$(p_n+1)(p_n^2+0,6180p_n+1)(p_n^2+1,6180p_n+1)$
6	$(p_n^2+0,5176p_n+1)(p_n^2+1,414p_n+1)(p_n^2+1,9318p_n+1)$
7	$(p_n+1)(p_n^2+0,4450p_n+1)(p_n^2+1,247p_n+1)(p_n^2+1,8022p_n+1)$
8	$(p_n^2+0,3986p_n+1)(p_n^2+1,111p_n+1)(p_n^2+1,6630p_n+1)(p_n^2+1,9622p_n+1)$

4°) Propriétés des filtres de Butterworth

Voici le diagramme de Bode des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 4.





a) La pulsation de coupure est en général définie à -3dB

b) Le comportement asymptotique des filtres d'ordre m quand ω tend vers l'infini est classiquement en -20m dB/décade ou encore -6m dB/octave

c) Les filtres de Butterworth n'ondule pas dans la bande passante.

d) La phase ne varie pas linéairement en fonction de ω dans la bande passante mais cette non linéarité n'est pas trop importante par rapport à la plupart des autres prototypes (excepté Bessel). Les signaux passants ces filtres ne seront donc pas trop déformés par rapport aux filtres de Chebychev ou de Cauer.

e) La coupure autour de la fréquence de référence (ω_n=1) n'est pas très raide. Les filtres de Butterworth coupent moins rapidement que d'autres filtres prototypes tels que les filtres de Chebychev ou de Cauer.

III. FILTRES DE CHEBYCHEV

1°) Polynômes de Chebychev

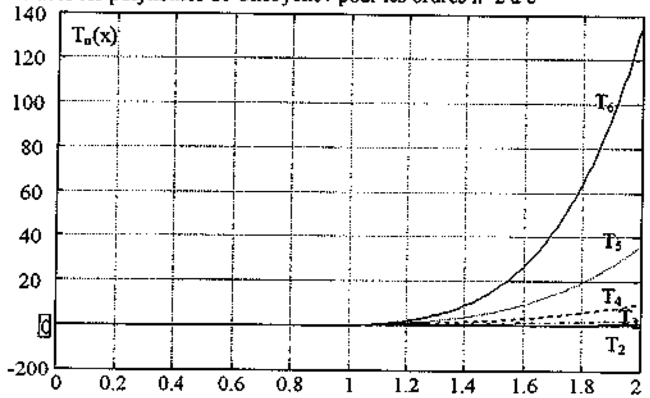
Ces filtres reposent sur les polynômes de Chebychev dont le comportement est intéressant. Ces polynômes sont définis ci-dessous par récurrence :

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

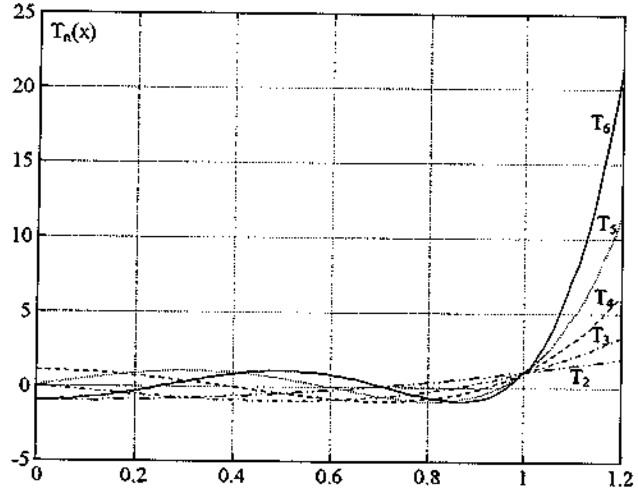
avec

$$T_0(x)=1 \quad \text{et} \quad T_1(x)=x$$

Ci-dessous sont tracés les polynômes de Chebychev pour les ordres n=2 à 6



Polynômes de Chebychev pour n=2 à 6



Polynômes de Chebychev pour n=2 à 6 (détails)

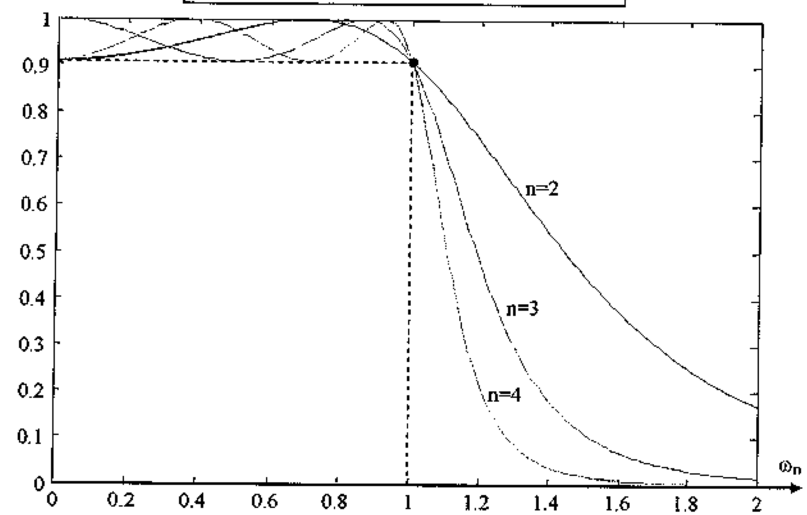
2°) Définition des Filtres de Chebychev

On définit l'atténuation de ces filtres de la manière suivante :

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)$$

La figure suivante montre l'allure de $|H(\omega_n)|^2 = 1/A^2$ pour ε=0.1 et n=2, 3 et 4

$|H(\omega_n)|^2$ Filtres de Chebychev pour ε=0.1



3°) Propriétés des filtres de Chebychev

- $|H(\omega_n)|^2$ oscille n fois entre 1 et $1+\varepsilon^2$ dans la bande passante (ω_n=0…1)
- On appelle ces filtres "equal ripple" (ondulation constante) à cause de la propriété précédente
- $|H(\omega_n=1)|^2$ vaut $1/(1+\varepsilon^2)$ donc le gain (en dB) dans la bande passante vaut 10 $\log_{10}(1/(1+\varepsilon^2)$) par exemple :
  ε=1 → gain de -3 dB et donc une ondulation= 3 dB dans la bande passante
  ε=0.5 → gain de -1 dB et donc une ondulation= 1 dB dans la bande passante
- à ω_n=1, l'atténuation ne vaut pas forcément -3dB comme pour les filtres de Butterworth. Cela dépend de l'ondulation choisie.
- Comportement asymptotique pour w_n grand, $|H(\omega_n)|^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2\,\omega_n^{2n}}$ ce qui donne en gain

  $G = 10\log_{10}|H(\omega_n)|^2 \approx 10\log_{10}\frac{1}{\varepsilon^2\,\omega_n^{2n}} = cste - 10\log_{10}(\omega_n^{2n})$

  cad $G \approx cste - 20n\log_{10}(\omega_n)$ ce qui correspond à une atténuation en 20n dB/décade
- les filtres de Chebychev ont une coupure plus raide que les filtres de Butterworth mais ils ondulent dans la bande passante.
- Leur phase est moins linéaire que les filtres de Butterworth dans la bande passante, et donc que les signaux sont plus déformés avec ces filtres qu'avec les filtres de Butterworth.
- Dans les tableaux les coefficients g_n (valeurs normalisée des composants) on peut remarquer que lorsque l'ordre du filtre est pair, le dernier coefficient (g_{n+1}) est différent de 1. Cela signifie qu'il n'est pas possible de réaliser un filtre de Chebychev symétrique ($g_0=g_{n+1}=1$ cad $R_{source}=R_{charge}=R_0$) pour les ordres pairs. Dans ce cas, le g_{n+1} représente alors la conductance réduite de la charge : $Z_L=R_0/g_{n+1}$ qui est différente de R_0…

IV. FILTRES DE LEGENDRE (PAPOULIS)

1°) Définition

Les filtres de Legendre sont calculés de manière à ce que leur coupure soit la plus raide possible sans pour autant onduler dans la bande passante. Ils possèdent donc une dérivée toujours négative c'est à dire à une atténuation uniformément croissante. Ces filtres reposent sur les polynômes de Legendre de première espèce $P_n(x)$. On définit l'atténuation de ces filtres par :

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 L_n(\omega_n^{\,2})$$

où les L_n sont des polynômes calculés à partir de :

si l'ordre n est pair : $L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1}\left[\sum_{m=0}^{K} a_m P_m(u)\right]du$ où K=(n-1)/2

$$a_m = \frac{2m+1}{(m+1)\sqrt{2}}$$

si l'ordre n est impair : $L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1}\left[(u+1)\sum_{m=0}^{K} a_m P_m(u)\right]du$ où K=(n-2)/2

si K est pair $a_{2n} = \frac{4n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$ $n \in \mathbb{N}$

$a_{2n+1} = 0$ (les coefficients impairs sont nuls)

si K est impair $a_{2n+1} = \frac{4n+3}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}}$ $n \in \mathbb{N}$

$a_{2n} = 0$ (les coefficients pairs sont nuls)

et les polynômes de Legendre de première espèce P_m sont définit par :

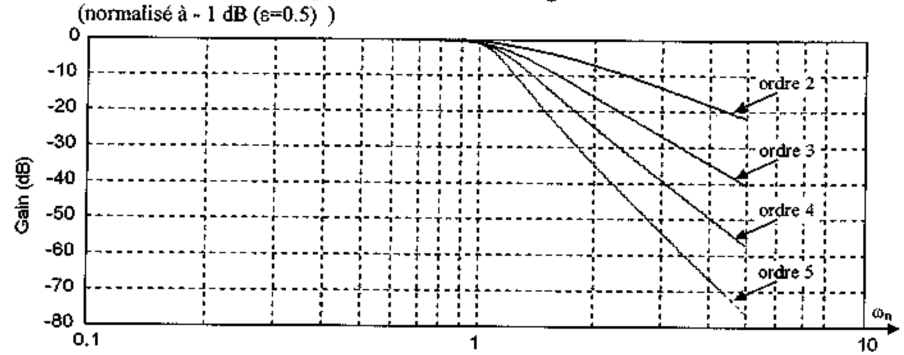
$P_0(u) = 1$; $P_1(u) = u$; $P_m(u) = \frac{1}{m+1}\left[(2m+1)u\,P_{m-1}(u) - m\,P_{m-2}(u)\right]$

On trouve finalement l'expression des fonctions $L_n(x)$:

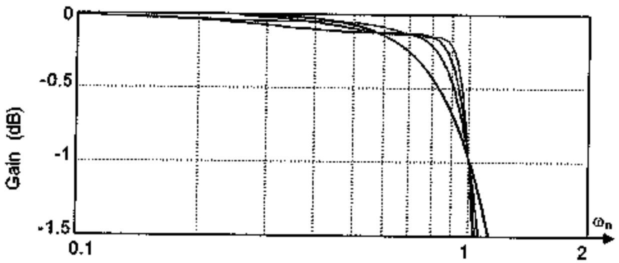
n	$L_n(x)$
1	x
2	x^2
3	$3x^3 - 3x^2 + x$
4	$6x^4 - 8x^3 + 3x^2$
5	$20x^5 - 40x^4 + 28x^3 - 8x^2 + x$
6	$50x^6 - 120x^5 + 105x^4 - 40x^3 + 6x^2$

2°) Réponse fréquentielle

Les figures suivantes montrent le gain en dB des filtres de Legendre d'ordres 2 à 5
(normalisé à - 1 dB (ε=0.5))



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5 (détails)

3°) Propriétés des filtres de Legendre

Les filtres de Legendre sont dit optimaux car leurs propriétés se situent entre les filtres de Butterworth et ceux de Chebychev .Ils sont plus raides que les Butterworth mais moins que les Chebychev, et leur phase est moins linéaire dans la bande passante que les Butterworth mais plus que les Chebychev.

On remarque que $L_n(x=1) = 1$ quelque soit n, et donc que l'atténuation des filtres de Legendre à la fréquence de référence (ω_n=1) est fixée par la valeur de ε.

le carré de l'atténuation vaut $A^2(\omega_n=1) = 1+\varepsilon^2$ et donc:

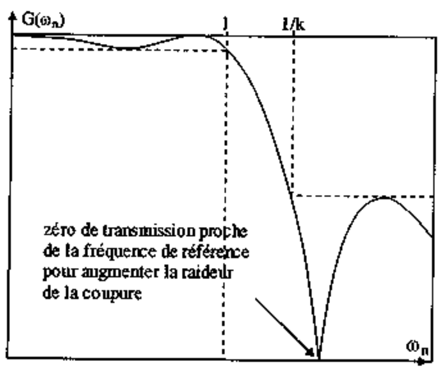
ε=1 correspond à un gain de -3 dB à ω_n=1

ε=0.5 correspond à un gain de -1 dB à ω_n=1

V. FILTRES DE CAUER

1°) Définition

Les filtres de Cauer possèdent des zéros de transmission dans la bande coupée. Cela permet d'éliminer des fréquences indésirables comme par exemple la fréquence porteuse, résidu de démodulation. Cela permet également d'augmenter la raideur de la coupure si le premier zéro de transmission est proche de la fréquence de coupure.



Leur gain se met sous la forme suivante :

$$|H(\omega_n)| = \frac{N(\omega_n^{\ 2})}{D(\omega_n^{\ 2})}$$

2°) Propriétés

Les filtres de Cauer ondulent dans la bande passante, et, comme les filtres de Chebychev, possèdent n extrema.

Ils possèdent n/2 (arrondi à l'entier inférieur) zéros dans la bande coupée.

Leur asymptote quand ω_n tend vers l'infini, est horizontale pour les filtres d'ordre pair, et vaut 20dB/décade pour les filtres d'ordre impair.

La coupure autour de la fréquence de référence est la plus raide des prototypes décrit dans ce cours, mais la phase est la moins linéaire dans la bande passante.

VI. FILTRES DE BESSEL (THOMSON)

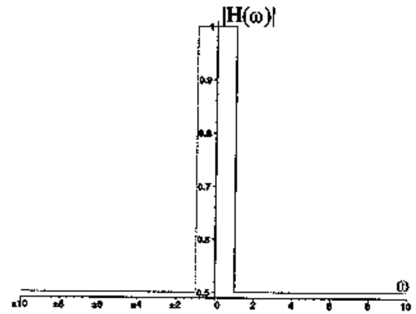
1°) Définition et problématique

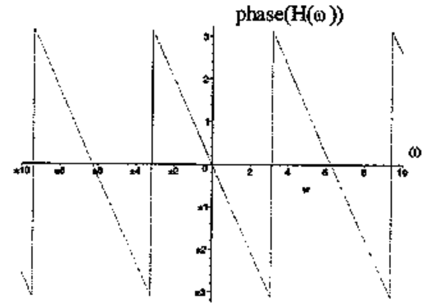
Contrairement aux autres prototypes, les filtres de Bessel ne sont pas caractérisés par une forme particulière du gain mais par le fait que l'on cherche à avoir une phase la plus linéaire possible dans la bande passante pour limité au maximum la distorsion des signaux

La fonction de transfert doit correspondre à un retard pur et est donc de la forme suivante dans la bande passante:

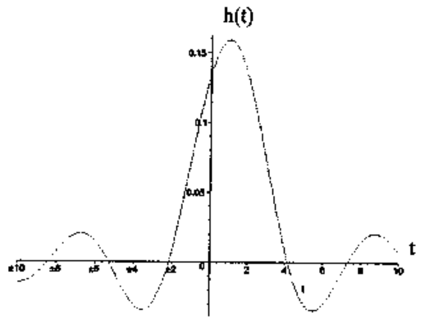
$$H(p_n) = e^{-p_n} = \frac{1}{e^{p_n}}$$

En effet, la réponse fréquentielle d'un tel filtre est dans la bande passante: $H(\omega_n) = e^{-j\tau\omega_n}$ c'est-à-dire possède un gain constant égal à 1 (voir figure ci-dessous à gauche) et dont la phase décroit linéairement (voir figure ci-dessous à droite),





Malheureusement, cette réponse fréquentielle ne correspond pas à un filtre physiquement réalisable puisque la réponse impulsionnelle est non causale ($h(t)=TF^{-1}(H(\omega))$)c 'est à dire qu'elle commence avant t=0 comme on peut le voir sur la figure ci contre.



2°) Détermination de la fonction de transfert d'un filtre de Bessel

a) Une 1ère méthode consiste à faire un développement limité de Taylor de $H(p_n)=\frac{1}{e^{p_n}}$ à l'ordre du filtre considéré. Cette méthode de donne cependant pas de bons résultats car la phase n'est pas correctement approchée avec ce développement.

b) Une seconde méthode consiste à faire un développement plus précis en utilisant les fraction continue de polynômes. Nous passerons le calcul et donnons le résultat ci-dessous. La fonction de transfert d'un filtre de Bessel d'ordre n est donné par :

$$H_n(p)=\frac{a_0^n}{\sum_{i=0}^{n} a_i^n p^i} \quad \text{où} \quad a_i^n=\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}(n-i)!\,i!}$$

les polynômes au dénominateur de H(p) sont des polynômes de Bessel $B_n(p)$. Ils peuvent encore s'exprimer de la manière suivante :

$B_n(p)=(2n-1)B_{n-1}(p)+p^2B_{n-2}(p)$ et $B_0(p)=1$ et $B_1(p)=1+p$

c) Une troisième méthode consiste à partir d'une fonction de transfert polynomiale quelconque, et d'imposer que la phase de la réponse fréquentielle correspondante soit la plus linéaire possible dans la bande passante.

Prenons pour cela une fonction de transfert du type $H(p)=\frac{1}{p^n+a_{n-1}p^{(n-1)}+\ldots+a_1p+a_0}$, ce qui correspond à la réponse fréquentielle $H(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0}$

Dans le but de calculer les coefficients a_0 , a_1 , …a_{n-1} , on impose que la phase $\varphi(\omega)$ de la réponse fréquentielle soit la plus linéaire possible dans la bande passante, c'est-à-dire que :

$$\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=0}=-1 \quad ; \quad \left.\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\right|_{\omega=0}=0 \;;\quad \left.\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}\right|_{\omega=0}=0 \;;\quad \ldots\ldots \quad \left.\frac{d^k\varphi}{d\omega^k}\right|_{\omega=0}=0 \quad \ldots\ldots$$

jusqu'à disposer d'autant d'équations que d'inconnues a_k . (il faut remarquer que les dérivées paires de j sont forcément nulles et ne comptent donc pas dans le nombre d'équation nécessaire.)

Un exemple de script Mapple™ donné ci-dessous, applique le procédé que l'on vient de décrire dans le cas d'une fonction de tranfert d'ordre 4.


```
H:=1/(a0+a1*p+a2*p^2+a3*p^3+p^4);
```

$$H := \frac{1}{a0+a1\,p+a2\,p^2+a3\,p^3+p^4}$$

```
p:=I*w;
assume(w,real);
assume(a0>0);
assume(a1>0);
assume(a2>0);
assume(a3>0);
H;
```

$$H(\omega)= \frac{1}{a0+I\,a1\,w-a2\,w^2-I\,a3\,w^3+w^4}$$

```
phi:=-I*ln(H/abs(H));
phi1:=diff(phi,w):
phi3:=diff(diff(phi1,w),w):
phi5:=diff(diff(phi3,w),w):
phi7:=diff(diff(phi5,w),w):

f1:=subs(w=0,phi1):
f3:=subs(w=0,phi3):
f5:=subs(w=0,phi5):
f7:=subs(w=0,phi7):

eqns := {f1=-1, f3=0, f5=0, f7=0}:
sols := solve( eqns );
```

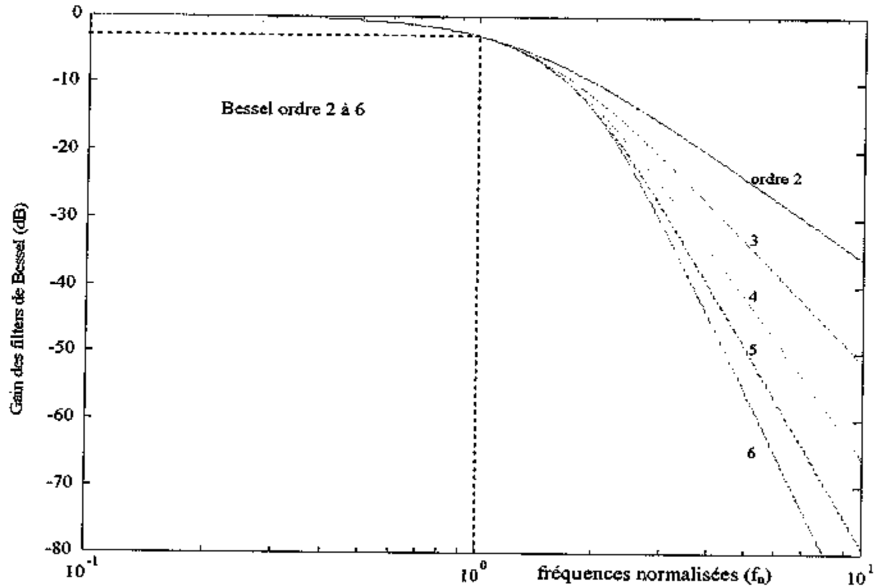
$$sols := \{a0=105, a1=105, a2=45, a3=10\}$$

et on trouve la fonction de transfert de Bessel du 4ème ordre : $H(p) := \frac{1}{105+105p+45p^2+10p^3+p^4}$

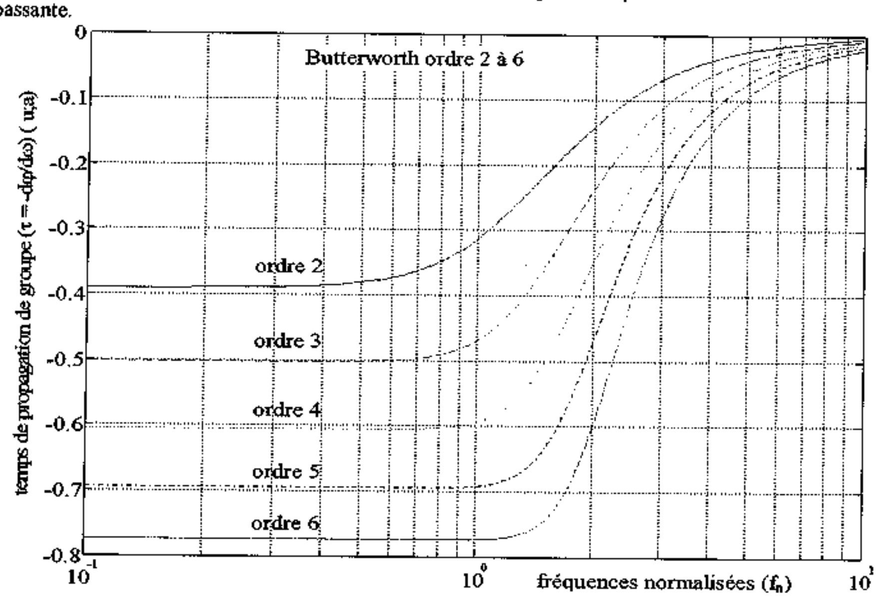
Remarques :

Les fonctions de transfert des filtres de Bessel que l'on obtient par les méthodes ci-dessus ne sont pas normalisées à -3dB. Une normalisation en fréquence et en amplitude est ensuite nécessaire pour obtenir des réponses normalisées (à -3dB par exemple) à ω=1.

3°) Réponse fréquentielle des filtres de Bessel



On constate que la réponse d'un filtre de Butterworth est quasi indépendante de l'ordre dans la bande passante.



On constate que la linéarité de la phase est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé.

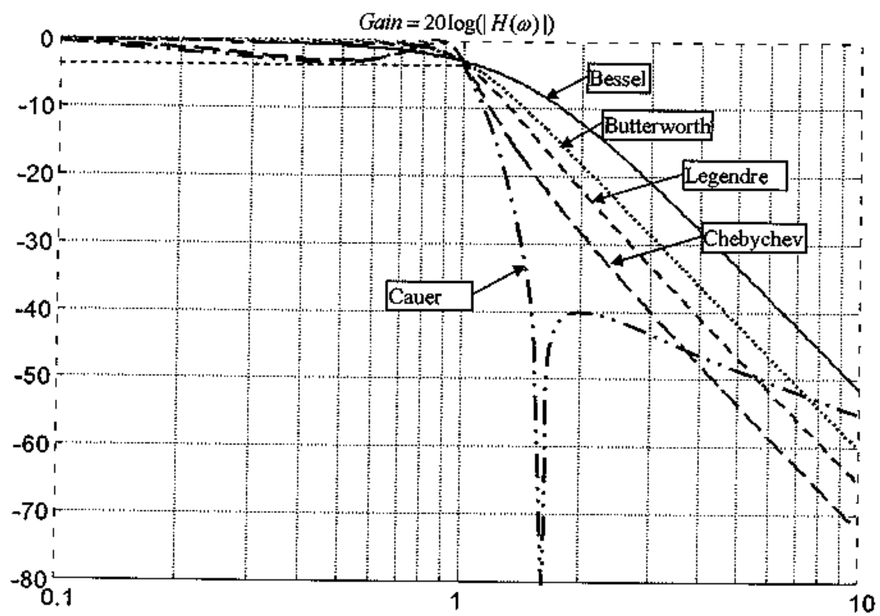
4°) Propriétés

Les filtres de Bessel sont les filtres qui déforment le moins les signaux dans la bande passante.
Par contre leur coupure est la moins raide de tous, et ils sont pour cette raison très difficiles à utiliser car ils nécessitent des ordres très élevés.
Leur pente en $\omega \to \infty$ est en -20 m dB/décade comme tous les autres filtres polynômiaux.

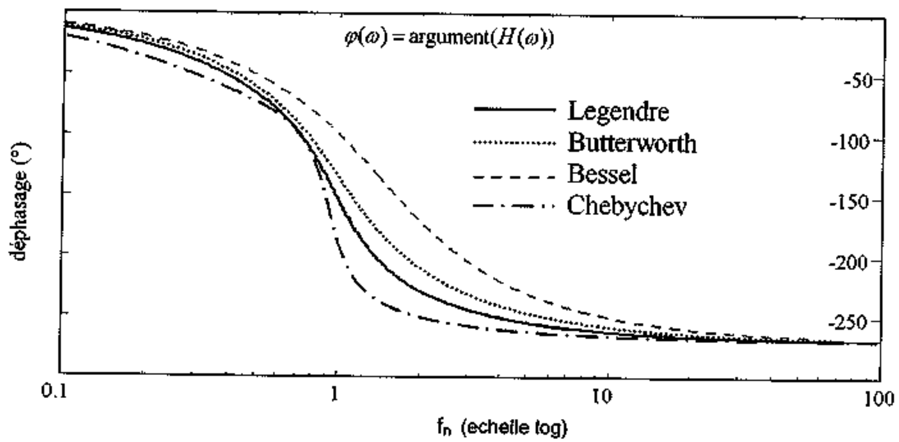
Remarque : Les filtres obtenus par transposition d'un filtre passe bas de Bessel ne possèdent pas les propriétés des filtres de Bessel. En effet, les formules de transposition n'ont pas été prévues pour conserver des propriétés de phase mais plutôt pour conserver les propriétés du gain. Pour cette raison, nous ne réaliserons pas de filtre de Bessel autres que Passe Bas.

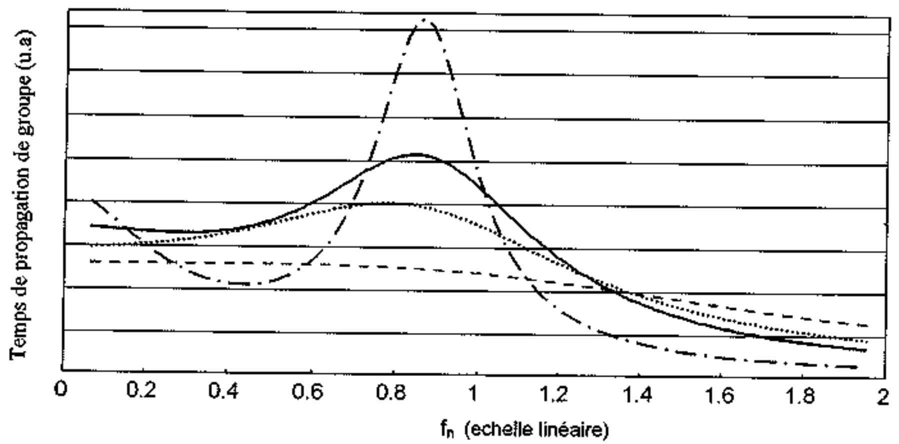
VII. COMPARAISON DES FILTRES

La figure suivante montre les différences de comportement de gain de différents prototypes de filtres d'ordre 3 normalisés à -3dB.



La figure suivante montre la phase en fonction de la fréquence pour chacun des filtres prototypes décrit précédemment. On voit aussi, en bas de la figure, un tracé du temps de propagation de groupe ($-\frac{d\varphi}{d\omega}$) pour chacun des prototypes. On constate que seul le filtre de Bessel possède un tps de propagation de groupe à peu près constant dans la bande passante.





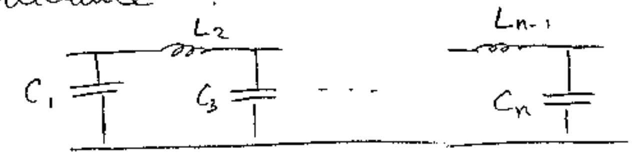
VIII. SYNTHESE DES FILTRES PASSIFS

Synthèse des Filtres Passifs

Comme nous l'avons expliqué précédemment les filtres en hyperfréquence sont toujours constitués d'éléments passifs (self, condensateur, cavité, ..) et n'utilise jamais d'amplificateurs opérationnels. Nous allons voir dans ce chapitre la synthèse des filtres passifs (comprenant des inductances et des condensateurs) en π.

I) Filtres Passe Bas.

Nous n'étudierons dans ce chapitre que les filtres en π dont la structure est la suivante :



filtre Passe Bas d'ordre n.

Le calcul des valeurs des composants C_{k-1} et L_k ($\forall k \in \mathbb{N}$, k pairs) se fait par dénormalisation des valeurs que l'on trouve dans des tableaux (voir annexe).

Par exemple, si l'on désire réaliser un filtre de Butterworth (voir chapitre sur les prototypes de filtres) d'ordre 3 ($n=3$), il suffit de relever les valeurs normalisées des composants dans le tableau correspondant.

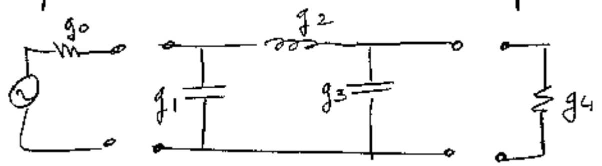
Ainsi on trouve pour un filtre passif symétrique (impédance de source = impédance de charge = 1) d'ordre 3 les valeurs suivantes :

$$g_1 = 1 \;;\; g_2 = 2 \;;\; g_3 = 1$$
$$(\text{et} \quad g_0 = g_4 = 1)$$

Les coefficients g_{k-1} (k pairs) sont les valeurs des capacités normalisées et les coefficients g_k (k pairs) sont les inductances normalisées.

g_0 représente l'impédance normalisée de la source (générateur) et g_4 la conductance normalisée de la charge.

Le filtre normalisé correspondant est donc :



Si on note f_0 la fréquence de référence pour normaliser les fréquences ($f_0 = f_p$ pour un filtre passe bas) alors on peut calculer les valeurs réelles (dénormalisées) des composants en utilisant les formules de dénormalisation :

$$C_{k-1} = \frac{g_{k-1}}{R_0 \omega_0} \quad \text{et} \quad L_k = \frac{R_0 g_k}{\omega_0}$$

Dans l'exemple précédent d'un filtre du 3ème ordre de Butterworth de dernière fréquence passante $f_P = 2\,GHz$, et donc $f_0 = 2\,GHz$, on trouve :

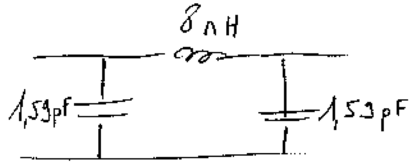
$$C_1 = \frac{1}{50 \cdot 2\pi \cdot 2 10^9} = \underline{\underline{1{,}59\,pF}}$$

$$L_2 = \frac{50 \cdot 2}{2\pi \cdot 2 10^9} = \underline{\underline{8\,nH}}$$

$$C_3 = C_1 = \underline{\underline{1{,}59\,pF}}$$

(en choisissant $R_0 = 50\Omega$ comme impédance de référence cad comme impédance de source).

Le filtre correspondant est donc le suivant :



II) Filtres PassesHauts.

La structure des Filtres Passehauts est obtenu par transposition de la structure des filtres PassesBas détaillés plus haut.

On a vu au chapitre 5 comment il est possible de transposer un filtre passe bas pour le transformer en un filtre passe haut en conservant les propriétés principales du gain.

Il suffit pour cela de remplacer dans la fonction de transfert :

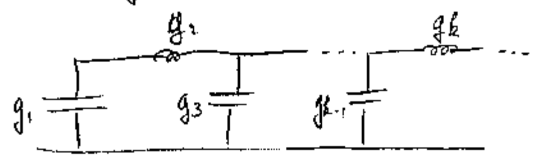
$$p_n \xrightarrow{\text{par}} \frac{1}{p_n}$$

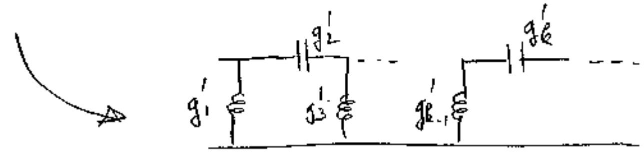
On a vu également que cette transposition transforme :

les capacités $\xrightarrow{\text{en}}$ inductances.

les inductances $\rightarrow$ capacités.

Ainsi un filtre passe bas en π se transforme en un filtre passe haut comme le montre la figure suivante.





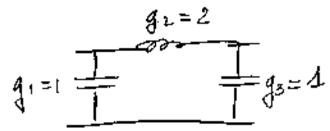
et les valeurs normalisées des composant du filtre passe haut se calculent à partir de celles du filtre passe bas comme suit :

capacité $g_{k-1} \longrightarrow$ inductance $g'_{k-1} = \frac{1}{g_{k-1}}$

inductance $g_k \longrightarrow$ capacité $g'_k = \frac{1}{g_k}$

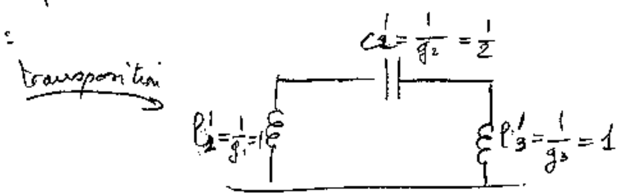
Exemple.

On désire fabriquer un filtre passe haut de 1ère fréquence passante $f_p = 1\,GHz$ du 3ème ordre qui a un gain comparable à celui du passe bas normalisé suivant :



filtre Passe Bas normalisé de départ.

a) on doit d'abord transposer le filtre p.bas normalisé de départ pour le transformer en filtre passe haut normalisé :



b) Il faut ensuite le dénormaliser à la fréquence

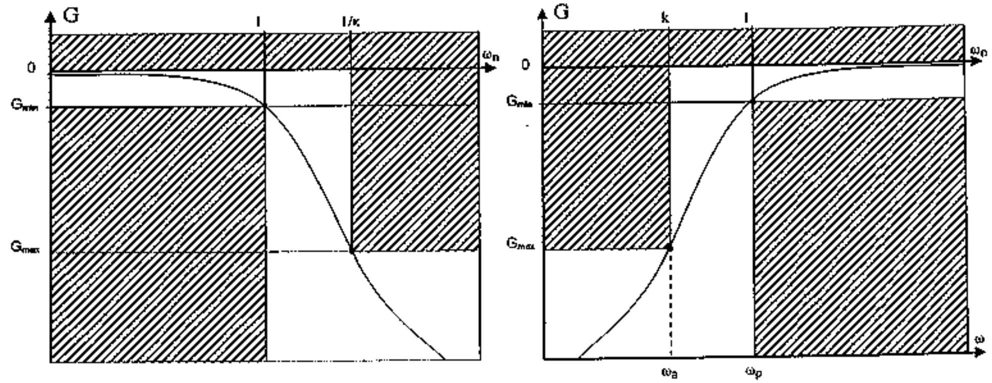
$f_0 = f_p = 1\,GHz$

$$L'_1 = \frac{g'_1 R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{g_1 \omega_0} = 8\,nH$$

$$C'_2 = \frac{g'_2}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{g_2 R_0 \omega_0} =$$

$$L'_2 = L'_1 = 8\,nH$$

et la réponse fréquentielle est obtenue par transposition et dénormalisation de la réponse du filtre passe bas normalisé.



Dans le cas général, le calcul des composants du Passe haut à partir des valeurs normalisée du P.bas associé se fait par :

$$\boxed{L'_{k-1} = \frac{g'_{k-1} R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{g_{k-1}\,\omega_0} \qquad C'_k = \frac{g'_k}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{g_k R_0 \omega_0}}$$

Filtre P.haut
g_k (et g_{k-1}) = valeurs normalisée des capa et des selfs du P.bas associé.

III Filtres Passe-Bandes

On a vu au chapitre V que l'on peut passer d'un filtre Passe Bas à un filtre Passe Bande par transposition :

$$p_n \longrightarrow \frac{1}{B}\left(p_n + \frac{1}{p_n}\right)$$

(avec $B = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\omega_0}$ Bande Passante relative)

On a vu également que les composants normalisés du filtre Passe Bas deviennent par transposition :

g_{k-1} (condensateur) $\longrightarrow$ $C'_{k-1} = \frac{g_{k-1}}{B}$ en parallèle avec $\ell'_{k-1} = \frac{B}{g_{k-1}}$

g_k (inductance) $\longrightarrow$ $\ell'_k = \frac{g_k}{B}$ en série avec $c'_k = \frac{B}{g_k}$

Le calcul des valeurs des composants du filtre Passe Bande se fait donc de la manière suivante par dénormalisation des valeurs réduites :

Branche parallèle :

$$C'_{k-1} = \frac{c'_{k-1}}{R_o \omega_o} = \frac{g_{k-1}}{B R_o \omega_o}$$

$$L'_{k-1} = \frac{\ell'_{k-1} R_o}{\omega_o} = \frac{B R_o}{g_{k-1} \omega_o}$$

P.bande centre ω_o, $B = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\omega_o}$

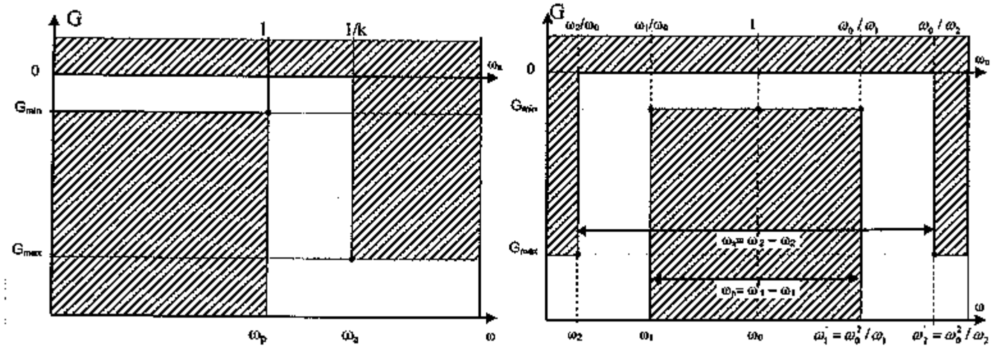
Branches Séries :

$$L'_k = \frac{\ell'_k R_o}{\omega_o} = \frac{g_k R_o}{B \omega_o}$$

$$C'_k = \frac{c'_k}{R_o \omega_o} = \frac{B}{g_k R_o \omega_o}$$

Passe Bande centre ω_o, $B = \frac{\omega_1' - \omega_1}{\omega_o}$

Et on passe du Gabarit Passe Bande au gabarit Passe Bas (ou réciproquement) par :

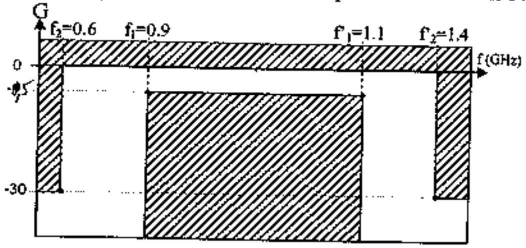


Exemple de synthèse d'un filtre Passe Bande

On veut fabriquer un filtre P.Bande de bande passante $f_1 = 0{,}9\,GHz$, $f_1' = 1{,}1\,GHz$ avec une atténuation maximale de 1 dB et qui coupe les fréquences de 30 dB en dessous de $f_2 = 0{,}8\,GHz$ et au dessus de $f_2' = 1{,}2\,GHz$.
Le Gabarit correspondant au cahier des charges est le suivant.

Exemple :

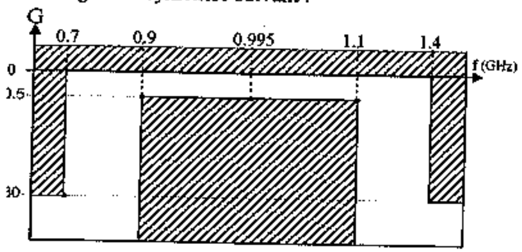
On veut fabriquer un filtre Passe Bande de bande passante 0.9 → 1.1 GHz avec une atténuation maximale dans la bande de 0.5 dB, et qui atténue les fréquences d'au moins 30 dB en dessous de 0.6 GHz et au dessus de 1.4 GHz.



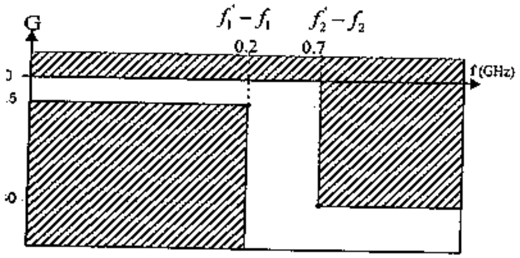
La fréquence centrale f_0 est calculée par les relations :

$f_0 = \sqrt{f_1 . f_1'} = 0.995\,GHz$ et $f_0 = \sqrt{f_2 . f_2'} = 0.916\,GHz$

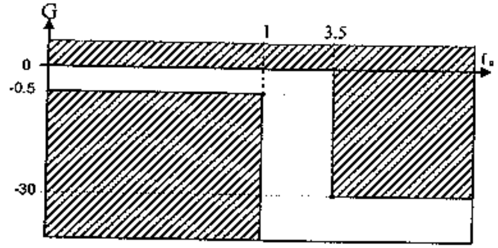
On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque $\sqrt{f_1 . f_1'} \neq \sqrt{f_2 . f_2'}$. Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter f_2.
Par exemple il faut que $\sqrt{f_2 . f_2'} = 0.995\,GHz$ ce qui donne $f_2 = 0.995^2 / f_2'$ =0.7 GHz
D'où le gabarit symétrisé suivant :



On en déduit le gabarit du Passe Bas associé :



On normalise le gabarit passe bas :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire.
On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebychev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit.
Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

$g_0 = 1$; $g_1 = 1.5963$; $g_2 = 1.0967$; $g_3 = 1.5963$; $g_4 = 1$

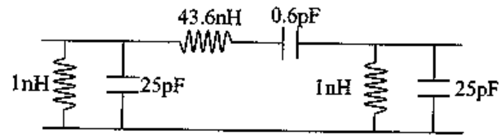
Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

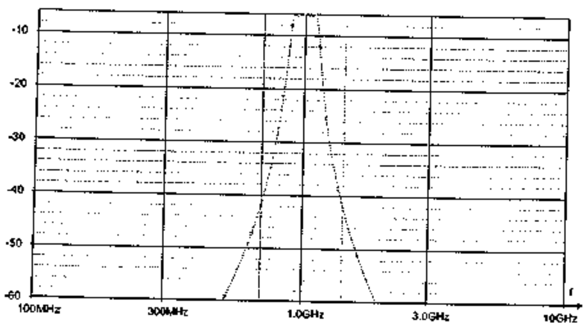
$$C_1' = \frac{g_1}{B R_0 \omega_0} \quad L_1' = \frac{B R_0}{g_1 \omega_0} \quad C_2' = \frac{B}{g_2 R_0 \omega_0} \quad L_2' = \frac{g_2 R_0}{B \omega_0} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

avec $B = \frac{0.2}{0.995} = 0.2 = 20\%$ et $\omega_0 = 2\pi\, 0.995\ 10^9$ rad/s
ce qui donne :

$C_1' = 25\,pF \quad L_1' = 1\,nH \quad C_2' = 0.6\,pF \quad L_2' = 43.6\,nH \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :





IV) Filtres Coupe-Bandes

On a vu que l'on peut passer d'un filtre P.bas à un Coupe-Bande par la transposition : $p_n \longrightarrow \dfrac{B}{p_n + \frac{1}{p_n}}$

où $B = \dfrac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$

On a vu également que les composants normalisé du Passe-Bas deviennent alors :

g_{k-1} (condensateur) $\longrightarrow$ $c'_{k-1} = g_{k-1} B$; $l'_{k-1} = \dfrac{1}{g_{k-1} B}$

g_k (inductance) $\longrightarrow$ $l'_k = B\, g_k$; $c'_k = \dfrac{1}{B\, g_k}$

les valeurs des composants du filtre Coupe-Bande sont alors calculées par dénormalisation des valeurs réduites c'_{k-1} ; l'_{k-1} ; l'_k et c'_k.

Branche Parallèle : $\boxed{C'_{k-1} = \dfrac{c'_{k-1}}{R_0 \omega_0} = \dfrac{g_{k-1} B}{R_0 \omega_0} \qquad L'_{k-1} = \dfrac{l'_{k-1} R_0}{\omega_0} = \dfrac{R_0}{g_{k-1} B \omega_0}}$

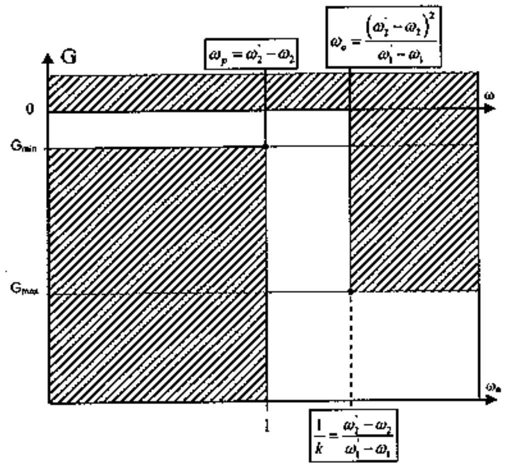
où $B = \dfrac{\omega_2' - \omega_2}{\ldots}$

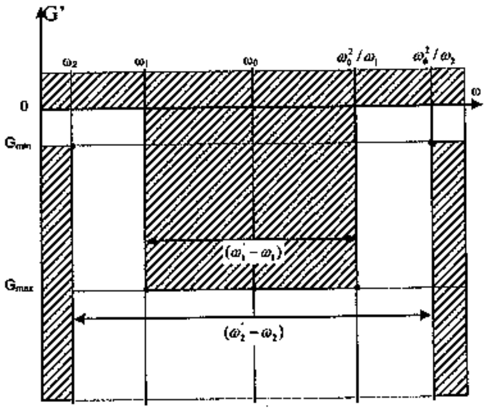
Branches série :

$$\boxed{L'_k = \frac{l'_k R_0}{\omega_0} = \frac{B g_k R_0}{\omega_0} \qquad C'_k = \frac{c'_k}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{B g_k R_0 \omega_0}}$$

où $B = \dfrac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$

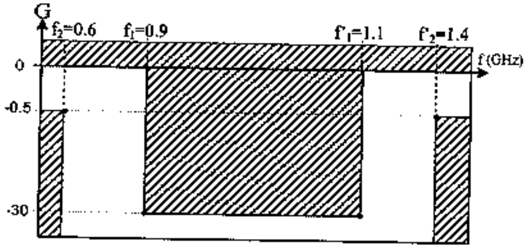
On passe du Gabarit Coupe-Bande au Gabarit Passe-bas normalisé par :





Exemple :

On veut fabriquer un filtre Coupe Bande de bande coupée 0.9 → 1.1 GHz avec une atténuation minimale dans la bande coupée de 30 dB, et qui laisse passer les fréquences avec une atténuation maximale de 0.5dB en dessous de 0.6 GHz et au dessus de 1.4 GHz.



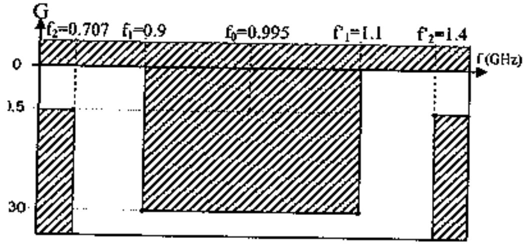
La fréquence centrale f_0 est calculée par les relations :

$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_1'} = 0.995\,GHz$ et $f_0 = \sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.916\,GHz$

On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque $\sqrt{f_1 \cdot f_1'} \neq \sqrt{f_2 \cdot f_2'}$. Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter f_2.

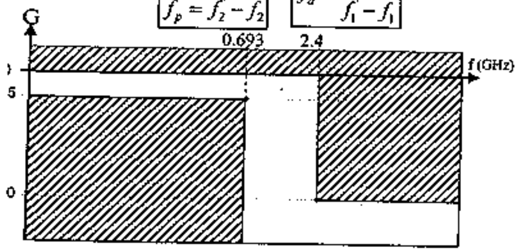
Par exemple il faut que $\sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.995\,GHz$ ce qui donne $f_2 = 0.995^2 / f_2'$ =0.707 GHz

D'où le gabarit symétrisé suivant :

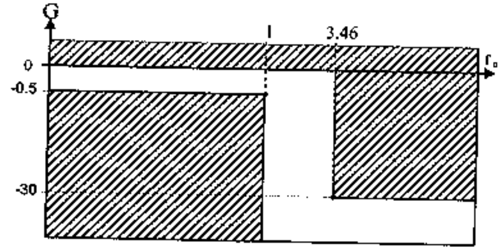


On en déduit le gabarit du Passe Bas associé :

$\boxed{f_p = f_2' - f_2}$ $\boxed{f_a = \frac{f_p^2}{f_1' - f_1}}$



On normalise le gabarit passe bas :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire.
On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebychev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit.
Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

g_0= 1 ; g_1=1.5963 ; g_2= 1.0967 ; g_3=1.5963 ; g_4= 1

Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

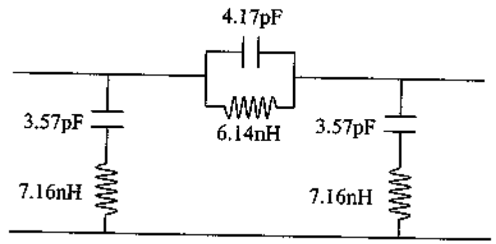
$C_1' = \frac{B g_1}{R_0 \omega_0}$ $L_1' = \frac{R_0}{B g_1 \omega_0}$ $C_2' = \frac{1}{B g_2 R_0 \omega_0}$ $L_2' = \frac{B g_2 R_0}{\omega_0}$ $C_3' = C_1'$ $L_3' = L_1'$

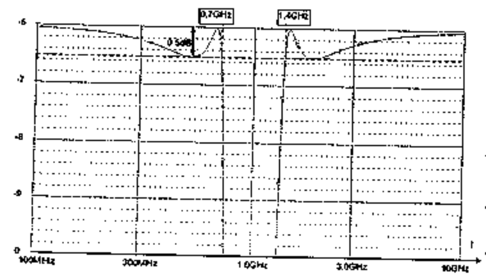
avec $B = \frac{0.69}{0.995} = 0.7 = 70\%$ et $\omega_0 = 2\pi\, 0.995\ 10^9$ rad/s

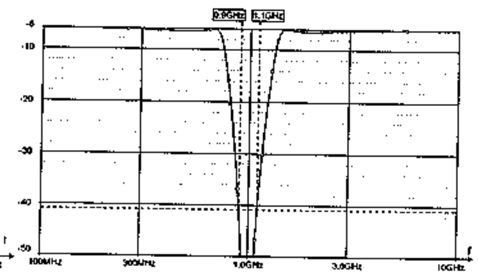
ce qui donne :

$C_1' = 3.57\,pF$ $L_1' = 7.16\,nH$ $C_2' = 4.17\,pF$ $L_2' = 6.14\,nH$ $C_3' = C_1'$ $L_3' = L_1'$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :







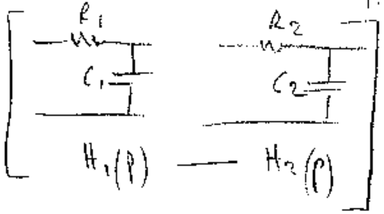
IX. SYNTHESE DES FILTRES ACTIFS
GENERALITES

Synthèse des Filtres Actifs
(Généralités)

I) Introduction

Défauts des Filtres passifs

- mise en cascade difficile



$\neq H_1(p).H_2(p)$

- étage du 2nd ordre résonnant
  - ⇒ utilisation de self
  - a self ⇒ { - élément encombrant à basse fréquence ; - perte élevée (R)

⇒ - aux fréquences basses et moyennes ($f <$ qq 100aine kHz). utilisation de filtre actif (AOP).

- aux fréquences intermédiaires $f \sim 1$ à 100 MHz
  - ⇒ filtres passifs (R, L, C), à onde de surface ... etc.

- aux fréquences hautes $f \sim$ qq 100 MHz → qq 10aine GHz
  - ⇒ filtres passifs L, C | - à éléments localisés | - à constante répartie (lignes).
    - | - en technologies hybride (circuits imprimés + composants + Ci fines)
    - | - en technologies intégrées (MMIC).
  - ⇒ filtres à cavité métallique ou diélectrique

II) Méthodes de Synthèse

On procède à la décomposition de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

en éléments simples du 1er ou du 2nd ordre.

La réalisation s'effectue alors en cascadant des circuits réalisant ces fonctions du 1er ou 2e ordre, circuits nécessairement d'impédance d'entrée élevée et de sortie faible (typiquement en insérant des AOP si nécessaire) pour éviter de modifier ces fonctions au moment de l'assemblage. Ces fct élémentaires peuvent elle même être synthétisée de façon différente :

1°/ synthèse par variable d'état

On synthétise dans ce cas directement l'équation différentielle. Par exemple prenons un système du second ordre du type passe haut (High Pass : HP).

$$H(p) = \frac{K\,p^2}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\xi\frac{p}{\omega_N} + 1} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

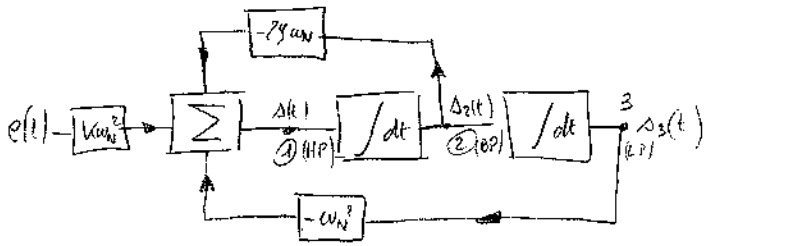
correspond à l'équation :

$$K\omega_N^2 E(p) = \left[1 + 2\xi \frac{\omega_N}{p} + \frac{\omega_N^2}{p^2}\right] S(p)$$

cad $S(p) = K\omega_N^2 E(p) - 2\xi \frac{\omega_N}{p} S(p) - \frac{\omega_N^2}{p^2} S(p)$

qui correspond à l'équation différentielle :

$$s(t) = K\omega_N^2 e(t) - 2\xi\omega_N \int s(t)\,dt - \omega_N^2 \iint s(t)\,dt^2$$



La sortie ① donne alors bien la fonction désirée.

* On peut remarquer à la sortie ② que le signal $s_2(t)$ correspond à un filtre passe bande puisque :

$$s_2(t) = \int^t s(t)\,dt \Rightarrow S_2(p) = \frac{S(p)}{p}$$

cad $$S_2(p) = \underbrace{\frac{Kp}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\xi\frac{p}{\omega_N} + 1}}_{\text{fct de transfert d'un Passe bande (BP)}} E(p)$$

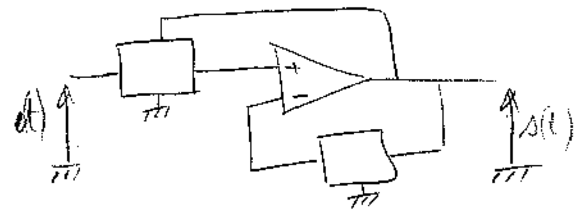
et que la sortie ③ donne la fonction de transfert d'un filtre Passe Bas. En effet

$$s_3(t) = \int^t s_2(t) \Leftrightarrow S_3(p) = \frac{S_2(p)}{p}$$

cad $$S_3(p) = \underbrace{\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\xi\frac{p}{\omega_N} + 1}}_{\text{filtre Passe Bas (LP)}} E(p)$$

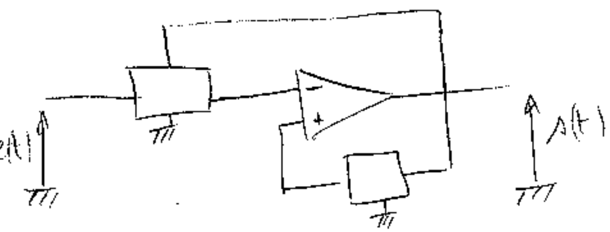
2°/ Synthèse de cellules élémentaires à 1 AOP.

i) à rétroaction positive



type Salen-Key

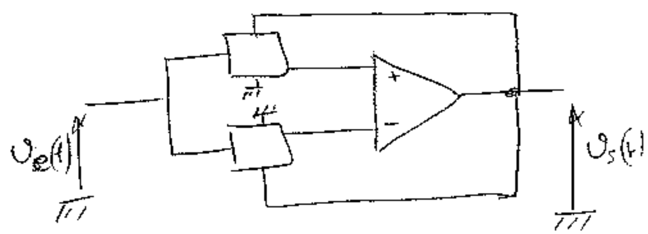
ii) à rétroaction négative



type Rauch.

mais la synthèse à 1 AOP type Salen-Key ou Rauch conduit à une sensibilité qui croît avec le coef de qualité Q (1/2ξ) ⇒ donc utilisable pour des Q < 8 cad $\xi \geq 0{,}06$.

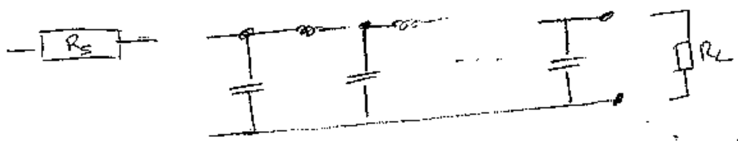
iii) A rétroaction double.



Q élevé (càd ξ faible) possible.

3°) Synthèse par simulation de Composants

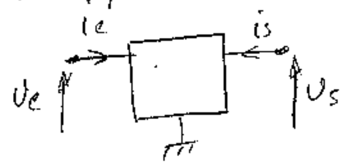
On part dans ce cas de structures de filtre passif LC en échelle du type :



et on simule les inductances par des circuits convertisseurs d'impédance qui sont des quadripôles définit par les équations :

$v_e = k\,v_s$

$i_s = -k'\,i_e$



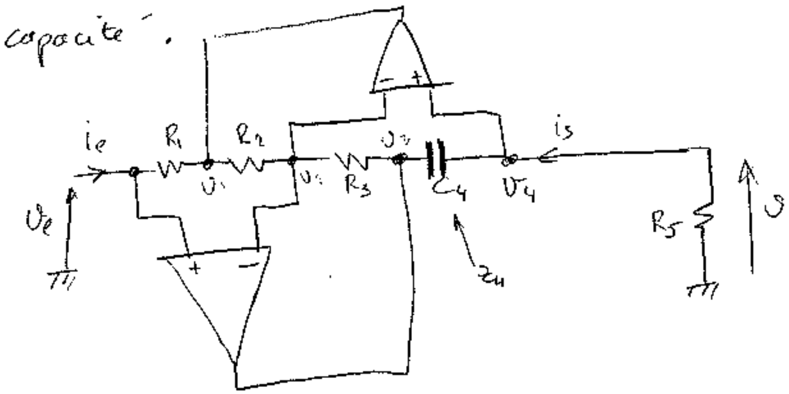
donc $\dfrac{v_e}{i_e} = \dfrac{k\,v_s}{i_s/-k'} = -kk'\dfrac{v_s}{i_s}$

donc $Z_e = K\,Z_s$

si K est négatif on parle de NIC (Negative impedance converter).

si K est complexe on parle alors de GIC (Generalised Impedance Converter)

i) On peut par exemple utiliser un GIC pour simuler une inductance en utilisant une capacité.



et on a alors $Z_e = \dfrac{v_e}{i_e} = \dfrac{R_1 R_3}{R_2 Z_4} R_5 = K R_5$

si on prend $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$

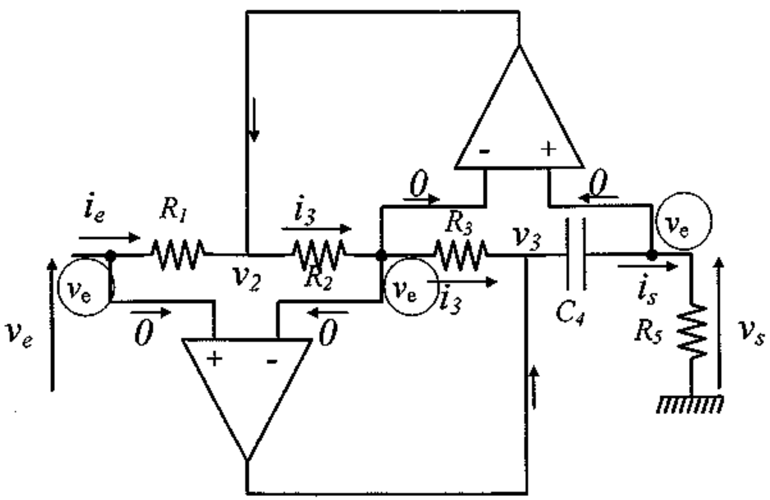
et $Z_4 = Z_c = \dfrac{1}{jC\omega}$

on a $Z_e = KR$ où $K = \dfrac{R}{Z_c}$

càd $Z_e = \dfrac{R^2}{Z_c} = jR^2C\omega \Rightarrow \boxed{L = R^2C}$

il s'agit ici d'une inductance L à la masse.

Calcul détaillé du GIC:



Amplificateurs opérationnels considérés comme parfait → $V_+ = V_-$ donc $v_s = v_e = R_5\ i_s$

or $\quad i_s = \dfrac{v_3 - v_e}{Z_{C_4}}$

d'où $\quad v_e = R_5 \dfrac{v_3 - v_e}{Z_{C_4}} = R_5\,(v_3 - v_e)\,C_4\,p$ cad $\quad v_3 = v_e\left(\dfrac{1}{R_5 C_4 p} + 1\right)$

On a $\quad i_3 = \dfrac{v_e - v_3}{R_3} = v_e \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{R_5 C_4 p} + 1\right)}{R_3} = \dfrac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$ $\quad$ et $\quad i_3 = \dfrac{v_2 - v_e}{R_2}$

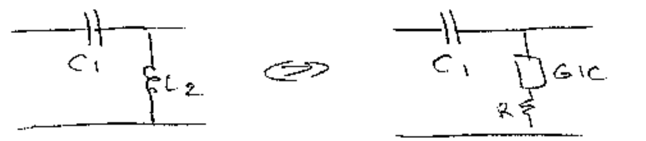
donc $\quad \dfrac{v_2 - v_e}{R_2} = \dfrac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$ $\quad$ d'où $\quad (v_2 - v_e) R_3 R_5 C_4\, p = -v_e R_2$ $\quad$ cad $\quad v_2 = v_e\left(1 - \dfrac{R_2}{R_3 R_5 C_4 p}\right)$

or on a $i_e = \dfrac{v_e - v_2}{R_1}$ $\quad$ donc $\quad i_e = v_e \dfrac{R_2}{R_1 R_3 R_5 C_4 p}$

or $\quad Z_e = \dfrac{v_e}{i_e}$

donc $\quad Z_e = \dfrac{R_1 R_3 R_5 C_4\, p}{R_2}$

exemple de simulation d'un filtre LC

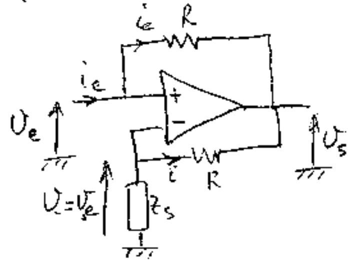


où le GIC possède un $K = \dfrac{R}{Z_{C_2}}$

et $L_2 = R^2 C_2$.

ii) NIC.

le NIC est un circuit qui réalise la fonction : $\quad Z_e = -Z_s$ où Z_s est une impédance choisie.



on a $v_e - v_s = R\, i_e$

et $v_- - v_s = R\, i$

or $v_- = v_e$

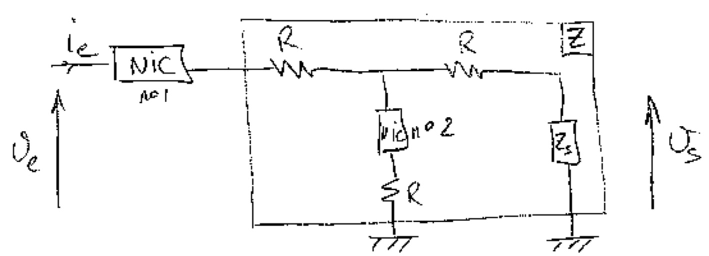
d'où $v_e - v_s = R\, i$ $\quad$ donc $\underline{i = i_e}$

et $v_e = -Z_s\, i$ $\quad$ donc $v_e = -Z_s\, i_e$

d'où $\quad \boxed{Z_e = -Z_s}$

Le NIC seul ne permet pas de réaliser l'inversion d'impédance pour transformer une capacité en une inductance. Cependant, en combinant 2 NIC on peut alors réaliser un gyrateur qui autorise cette opération.

Le circuit suivant est un gyrateur :



Gyrateur

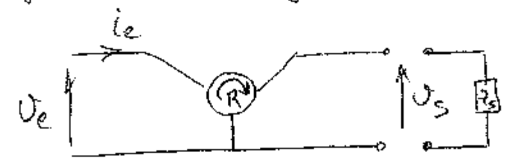
On a $\frac{V_e}{i_e} = Z_e \underset{\text{NIC n°1}}{=} -Z$

or $Z = R + \left[(\underset{\text{NIC n°2}}{-R}) // (R + Z_s)\right] = R + \frac{-R(R+Z_s)}{-R+R+Z_s}$

càd $Z = R + \frac{-R(R+Z_s)}{Z_s} = \frac{-R^2}{Z_s}$

donc $\boxed{Z_e = \frac{R^2}{Z_s}}$ l'impédance d'entrée est l'inverse de l'impédance Z_s.

Un gyrateur est symbolisé par :



avec $Z_e = \frac{R^2}{Z_s}$

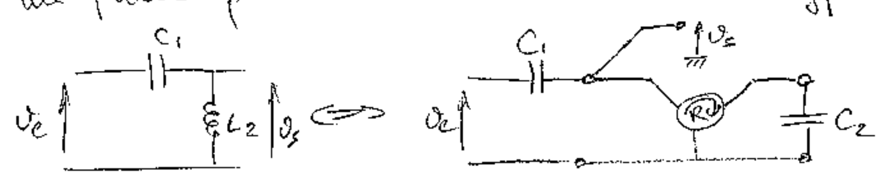
On voit donc que si on place un condensateur en sortie (à la place de Z_s) alors on voit en entrée une impédance :

$$Z_e = \frac{R^2}{Z_c} = R^2 C p$$

ce qui peut s'écrire : $Z_e = L p$

l'impédance d'entrée est donc équivalente à une inductance $L = R^2 C$.

ex d'utilisation : Si on désire synthétiser un filtre passe bas du 2ème ordre du type

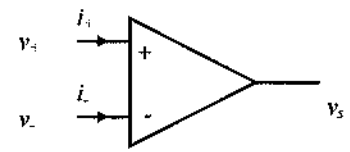


CHAPITRE X
SYNTHESE DES FILTRES ACTIFS EN CASCADE DE CELLULES A A.O.P ET A INTEGRATEUR

On a vu qu'il existait de multiples méthodes de synthèse des filtres actifs. Parmi celles succinctement présentées dans le chapitre précédent, nous ne détaillerons que les cellules utilisant un seul amplificateur opérationnel à contre réaction positive simple du type Salen-key et celles à cellules à intégrateur multiple (à variables d'état).

I. RAPPELS SUR LES MONTAGES A AMPLIFICATEURS OPERATIONNELS PARFAITS

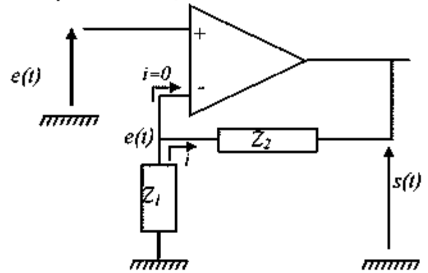
Nous nous limiterons à la description rapide de quelques montages de base utilisant un amplificateur opérationnel parfait (A.O.P.)



Un A.O.P. parfait est amplificateur différentiel dont les impédances d'entrée et le gain sont infinis. La sortie vaut: $V_s = G\,(v_+ - v_-)$
Pour avoir $v_s \neq \infty$ (ou $\pm V_{alim}$), il faut que $v_+ = v_-$
De plus les impédances d'entrée sont infinies et les courants d'entrée i+ et i- donc nuls : $i_+ = i_- = 0$

1°) Amplificateur de gain positif

Un amplificateur de gain positif peut être conçu comme suit :



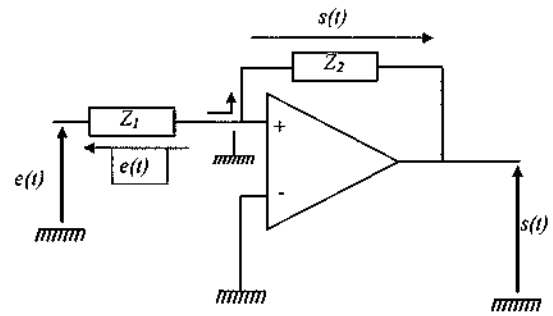
On a $v_+ = v_-$ $\Longrightarrow$ $v_- = e$ or $e = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}s$

$$\Longrightarrow \boxed{s = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)e}$$

et si $Z_1 = R_1$ et $Z_2 = R_2$ alors $s = \left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)e$

2°) Amplificateur de gain négatif

Un amplificateur de gain négatif peut être conçu comme suit :



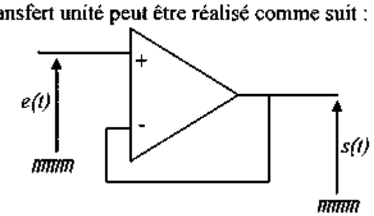
$v_+ = v_- = 0$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{e}{Z_1} = \dfrac{-s}{Z_2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{s}{e} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

si $Z_1 = R_1$ et $Z_2 = R_2$ alors $\dfrac{s}{e} = -\dfrac{R_2}{R_1}$

3°) Montage suiveur

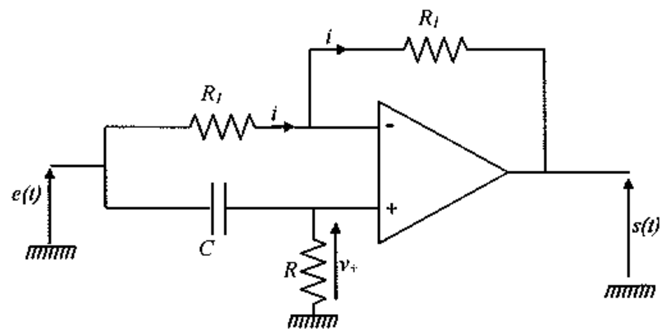
Un montage de fonction de transfert unité peut être réalisé comme suit :



On a en effet $v_- = v_+ = e$ et $s = v_-$ d'où $\underline{s = e}$. Ce montage possède une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Il rend tout montage placée à sa gauche indépendant de la charge placée à sa sortie.

II. CELLULE PASSE-TOUT

Une cellule passe tout d'ordre 1 possède par exemple une fonction de transfert du type :
$H(p) = \dfrac{1 - RCp}{1 + RCp}$ ce qui donne un gain de : $|H(\omega)| = 1$ et une phase de : $\arg(H) = -arctg(RC\omega)$
Un exemple de réalisation donne :



Vérification par le calcul.

on a $e - v_- = R_1 i$ et $v_- = v_+ = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{Cp}} e = \dfrac{RCp}{1+RCp} e$

cad : $e\left(1 - \dfrac{RCp}{1+RCp}\right) = R_1 i$

de plus : $e - s = 2R_1 i$ d'où $e\left(1 - \dfrac{RCp}{1+RCp}\right) = \dfrac{e-s}{2}$

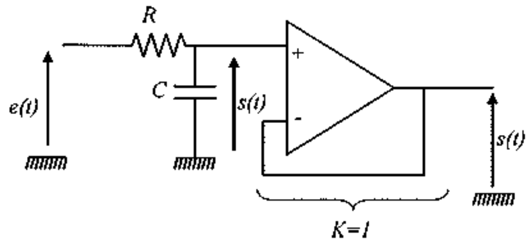
d'où $\dfrac{s}{e} = 1 - \dfrac{2RCp}{1+RCp}$ cad $\boxed{H(p) = \dfrac{s}{e} = \dfrac{1-RCp}{1+RCp}}$

Ces cellules sont utilisées pour déphaser le signal d'entrée. Le déphasage dépend des valeurs de R et C.

III. CELLULES DU 1ER ORDRE

1°) Passe Bas

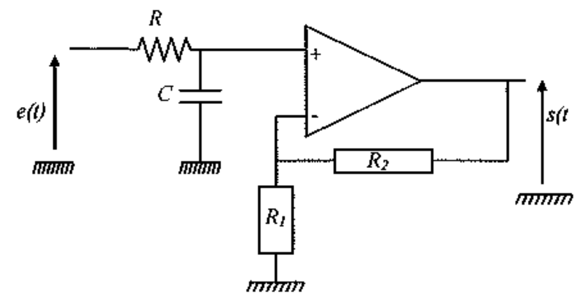
Un exemple de réalisation d'une cellule passe bas est donné ci-dessous.



La fonction de transfert vaut : $H(p) = \dfrac{s}{e} = \dfrac{1/Cp}{R + 1/Cp}$ c'est-à-dire $\boxed{H(p) = \dfrac{1}{1+RCp}}$

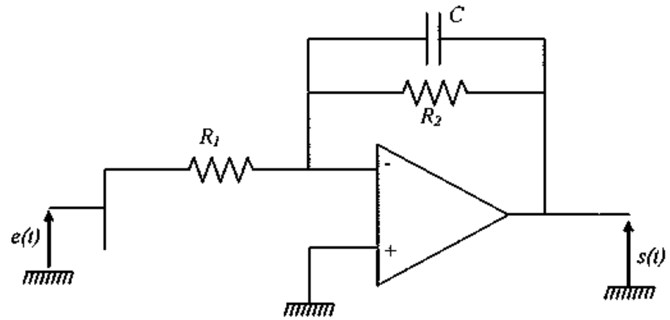
L'intérêt du suiveur placé en sortie est d'avoir une impédance de sortie très faible par rapport à la simple cellule RC. Le filtre devient alors indépendant de l'étage suivant.

Le montage suivant est aussi un filtre du 1er ordre mais son gain est supérieur à 1 :



Sa fonction de transfert vaut : $\boxed{H(p) = (1 + \dfrac{R_2}{R_1}) \dfrac{1}{1+RCp}}$ [de gain continu ($\omega \to 0$) $\boxed{K = (1 + \dfrac{R_2}{R_1})}$]

Le montage suivant est un passe bas de gain négatif :

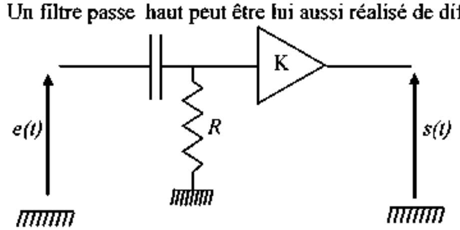


En effet, on a $s = \dfrac{-R_2 // C}{R_1} e$ c'est-à-dire $H(p) = \dfrac{-R_2/Cp}{R_2 + 1/Cp} \dfrac{1}{R_1}$ ce qui donne :

$\boxed{H(p) = -\dfrac{R_2}{R_1} \dfrac{1}{1+R_2Cp}}$ [de gain continu K= -R$_2$ / R$_1$]

2°) Passe Haut

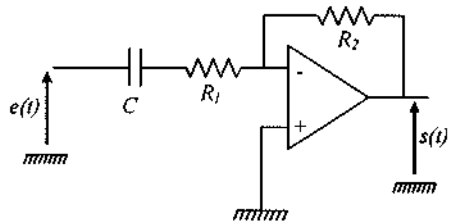
Un filtre passe haut peut être lui aussi réalisé de différentes façons.



de fonction de transfert $\boxed{H = K \dfrac{RC\,p}{1+RC\,p}}$

où K est le gain de l'amplificateur placé en sortie.

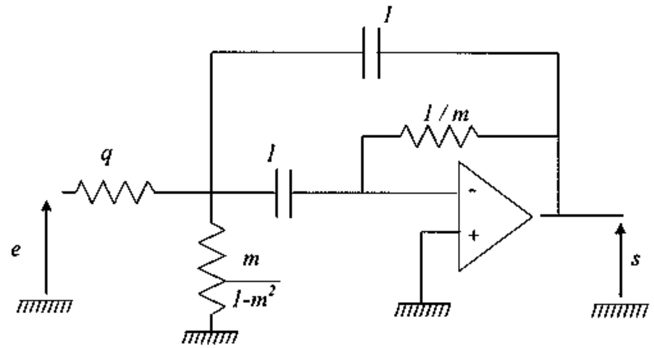
Ou encore comme suit :



de fonction de transfert :

$$H(p)=\frac{-R_2}{R_1+1/Cp}=\frac{-R_2Cp}{1+R_1Cp}$$

3°) Passe Bande normalisée de Rauch

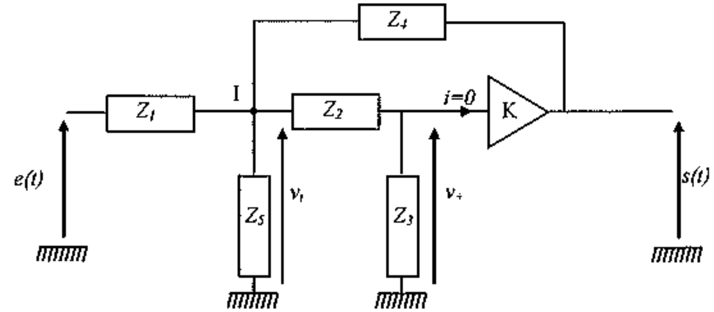


Sa fonction de transfert normalisée vaut : $H=\frac{m\,p_n}{p_n^2+2m\,p_n+1}$ d'amortissement $\zeta=m$ et de pulsation naturelle normalisée $\omega_N=1$ et de gain max $G_0=\frac{1}{4}$.

IV. CELLULES DU 2ÈME ORDRE

1°) Struture générale des cellules de base de Salen-Key

Considérons la structure suivante :



On a : $s=K\,v_+$ (1)

On écrit que la somme des courants incidents au point I est nul :

$$(v_i-e)Y_1+(v_i-s)Y_4+v_iY_5+v_i\frac{1}{Z_2+Z_3}=0 \quad (2)$$

On note : $Y_i=1/Z_i$ et $Y_t=\frac{1}{Z_2+Z_3}$

On a : $v_+=\frac{Z_3}{Z_2+Z_3}v_i=\frac{Y_2}{Y_2+Y_3}v_i$

d'où : $v_i=\frac{Y_2+Y_3}{Y_2}v_i=\frac{Y_2+Y_3}{Y_2}\frac{s}{K}$ (3)

L'équation (2) se met sous la forme suivante : $v_i(Y_1+Y_4+Y_5+Y_t)-sY_4=eY_1$ (4)

On injecte (1) et (3) dans (4) : $s\left(\frac{(Y_1+Y_4+Y_5+Y_t)(Y_2+Y_3)}{K\,Y_2}-Y_4\right)=eY_1$

d'où finalement $H(p)=\frac{K\,Y_2\,Y}{(Y_1+Y_4+Y_5+Y_t)(Y_2+Y_3)-K\,Y_2Y_4}$

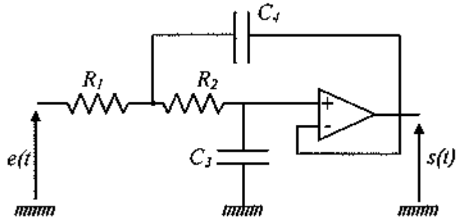
2°) Cellule de base du Passe Bas de Salen-Key

On remplace dans la cellule précédente :

$Y_1=1/R_1$; $Y_2=1/R_2$; $Y_3=C_3\,p$; $Y_4=C_4\,p$; $K=1$

On a alors :

$$H(p)=\frac{1}{R_1R_2C_3C_4p^2+\left[C_3(R_1+R_2)+C_4(1-K)R_1\right]p+1}$$

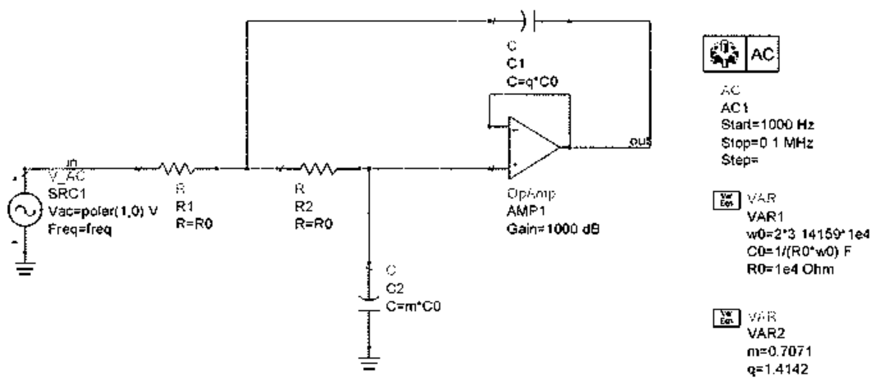


Si on pose : $R_1 = R_2 = R_0$; $C_3 = m\,C_0$ et $C_4 = q\,C_0$ on a alors : $\boxed{H(p)=\dfrac{1}{mq(R_0C_0)^2p^2+2mC_0R_0p+1}}$

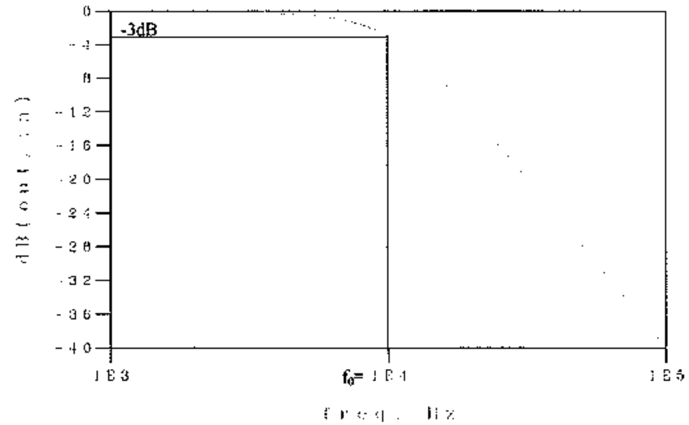
La pulsation naturelle est égale à $\omega_N=\dfrac{1}{R_0C_0\sqrt{mq}}$ et le coefficient d'amortissement $\zeta=\sqrt{\dfrac{m}{q}}$ ce qui correspond à un coefficient de qualité $Q=\dfrac{1}{2\zeta}\sqrt{\dfrac{q}{m}}$

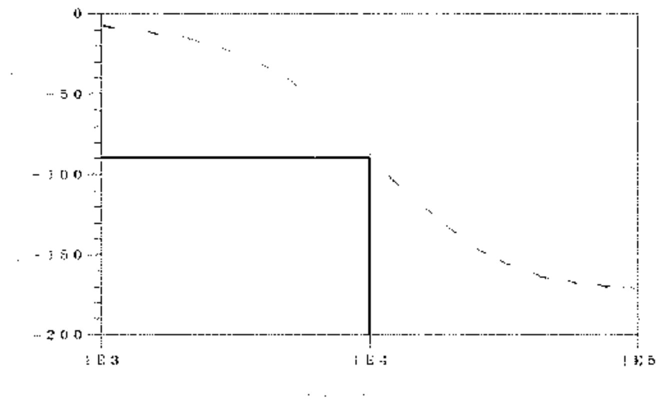
on a alors $H(p)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{\omega_N}\right)^2+2\zeta\dfrac{p}{\omega_N}+1}$

La figure suivante montre le schéma de simulation d'un filtre Passe Bas de Salen Key de Butterworth.



Sa réponse fréquentielle est figurée ci-dessous.





Son gain passe par -3dB à la fréquence $f_0=10^4$ Hz et sa phase à -90°

3°) Cellule normalisée Passe Bas de Salen-Key

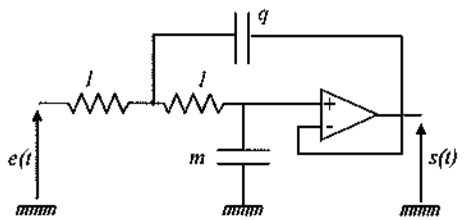
Dans le but de normaliser le filtre ainsi construit, il faut choisir une impédance et une pulsation de normalisation. Prenons par exemple R_0 comme impédance de normalisation et $\omega_0 = 1/R_0C_0$ comme pulsation de normalisation. Les valeurs normalisées des résistances et de C_0 valent alors :

$r_1 = r_2 = \dfrac{R_0}{R_0} = 1$ et $c_0 = C_0\omega_0 R_0 = 1$

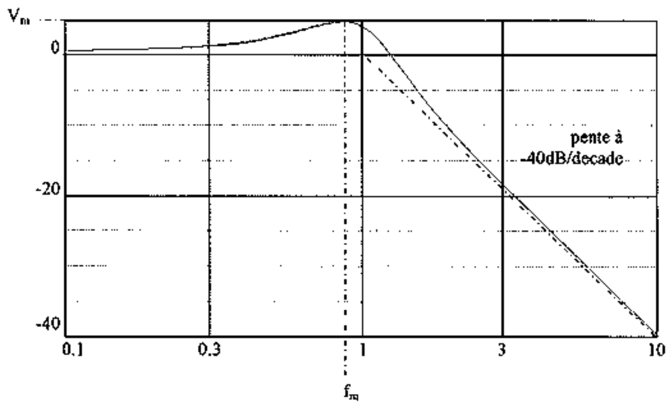
d'où la valeur normalisée de $C_3 = mC_0$ et de $C_4 = qC_0$: $c_3 = m$ et $c_4 = q$

La fonction de transfert en variable normalisée devient : $\boxed{H(p)=\dfrac{1}{mq\,p_n^2+2m\,p_n+1}}$ avec $p_n=\dfrac{p}{\omega_0}$, expression que l'on retrouve dans les tableaux de Salen-Key fourni en TD.

Le schéma électrique de la cellule de Salen-Key normalisé est donc :

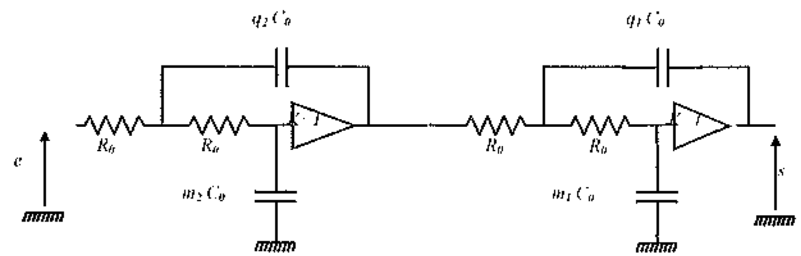


On voit d'après la fonction de Transfert $H(p)=\dfrac{1}{mq\,p_n^{\,2}+2m\,p_n+1}$, que la pulsation normalisée $\omega_n = 1/\sqrt{mq}$ et l'amortissement $\zeta=\sqrt{m/q}$ dépendent uniquement des valeurs de m et de q. La résonnance est donc plus ou moins marquée voire inexistante si la réponse du filtre le nécessite.



Passe Bas de Salen-Key : exemple Passe Bas de Butterworth d'ordre 4

$$H=\frac{1}{p_n^{\,2}+0.7653\,p_n+1}\cdot\frac{1}{p_n^{\,2}+1.8477\,p_n+1}$$

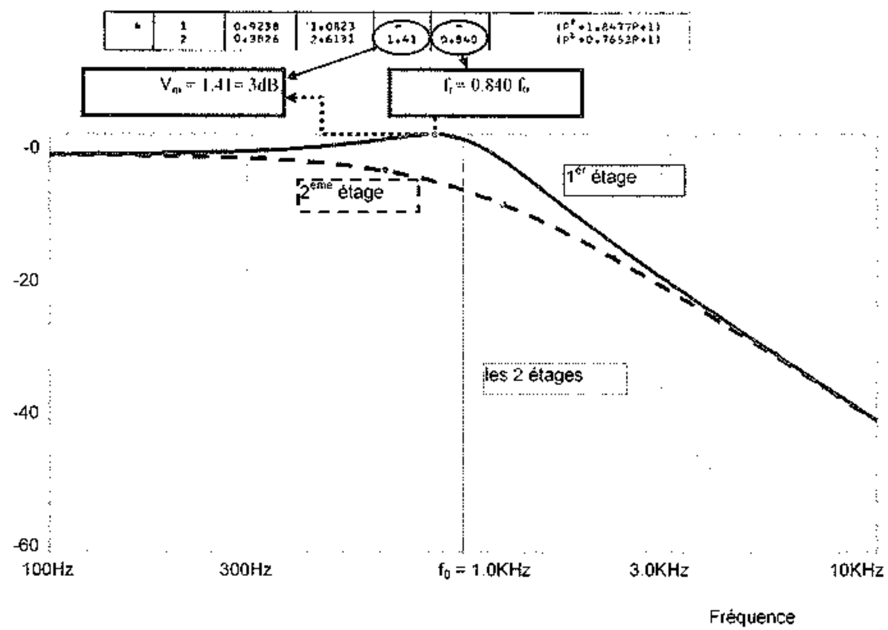


m2 0.3826 ; q2 2.6131

m1 0.9238 ; q1 1.0823

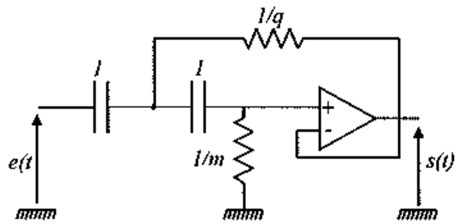
G(ωr = 0.840 ω0) = Vm = 1.41

Les Q élevé en tête



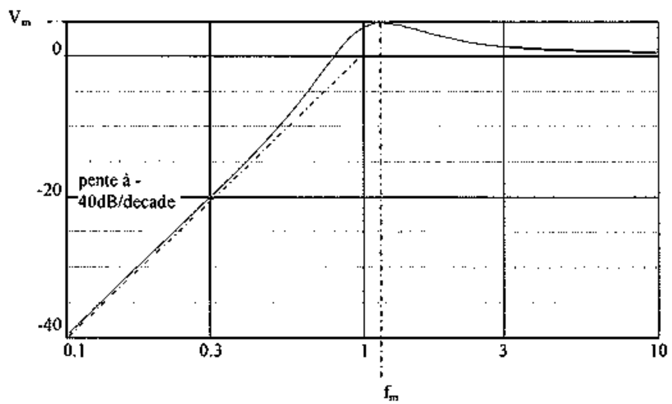
4°) cellule normalisée Passe Haut de Salen Key

De la même manière on définit la cellule de base du 2ème ordre d'un filtre Passe Haut de Salen Key :



De fonction de Transfert : $H(p)=\dfrac{p_n^2/(mq)}{\dfrac{p_n^{\,2}}{mq}+2\,\dfrac{p_n}{q}+1}$ de pulsation naturelle $\omega_n=\sqrt{mq}$ et d'amortissement $\zeta=\sqrt{m/q}$.

La réponse fréquentielle est la suivante :



à suivre……

(voir transparents de cours)