## LU3ME002 : Équations aux dérivées partielles de la mécanique

## Feuille d'exercices n° 5 : Méthode de séparation des variables

**Exercice 1** : Equation des ondes avec conditions initiales et condtions aux limites de Dirichlet
Résoudre le problème

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t > 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0, \ 0 < x < l \tag{3}$$

---

**Corrigé**
La solution pour des conditions initiales générales a été obtenue en cours. En la cherchant sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ nous avons trouvé :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{4}$$

Sa dérivée par rapportà $t$ est :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left( -A_n \sin \frac{n\pi ct}{l} + B_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{5}$$

Pour $t = 0$ on obtient :

$$0 = \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

donc $B_n = 0$ pour $n = 1, 2....$
D'autre part, en remplaçant $t = 0$ dans l'expression de $u(x,t)$ on trouve

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{7}$$

D'après la formule des coefficients des séries en sinus :

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{m\pi x}{l} dx = (-1)^{m+1} \frac{2l}{m\pi} \tag{8}$$

et la solution devient

$$u(x,t) = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

**Exercice 2** : Conditions aux limites non-homogènes
Soit $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$, $u_0$ et $l$ des réels strictement positifs tels que :

$$a\pi^2 > bl^2 \tag{10}$$

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \forall (x,t) \in ]0,l[\times]0,+\infty[ \tag{11}$$

avec les conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t} & \forall t > 0 \\ u(l,t) = u_0 e^{-\beta t} & \forall t > 0 \end{cases} \tag{12}$$

et la condition

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in ]0,l[ \tag{13}$$

---

**Corrigé**

On commence par rendre homogènes les conditions aux limites, on cherche un relèvement :

$$U(x,t) = u_0\left(e^{-\alpha t}(1-\frac{x}{l}) + \frac{x}{l}e^{-\beta t}\right) \tag{14}$$

$U$ est régulier et vérifie les conditions aux limites. On pose $v = u - U$, $v$ est solution de :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv + \frac{\partial v}{\partial t} = -\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \frac{\partial U}{\partial t}\right) &= u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}(1-\frac{x}{l}) + (b-\beta)\frac{x}{l}e^{-\beta t}\right) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \qquad & \forall t > 0 \\ \lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to+\infty} u - U = 0 \qquad & \forall x \in ]0,l[ \end{aligned} \tag{15}$$

On injecte la forme à variables séparées dans l'équation homogène $v = XT$

$$a\frac{X''}{X} = -b - \frac{T'}{T} = -\lambda \tag{16}$$

La discussion usuelle sur les conditions aux limites conduit à la base hilbertienne suivante :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \tag{17}$$

Note : Le facteur $\sqrt{\frac{2}{l}}$ peut-être absent de cette expression ; les calculs seront légèrement différents de ce qui suit mais conduiront au même résultat.

On injecte la série $\sum X_n T_n$ dans l'EDP.

$$\sum\left((b - \frac{an^2\pi^2}{l^2})T_n + T_n'\right)X_n = u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}(1-\frac{x}{l}) + (b-\beta)\frac{x}{l}e^{-\beta t}\right) \tag{18}$$

On projette le second membre sur la base, il faut calculer les projections de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x/l$

$$\begin{aligned} (X_n, 1)_{L^2([0,l])} &= \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)dx = \frac{\sqrt{2l}}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \\ \left(X_n, \frac{x}{l}\right)_{L^2([0,l])} &= \frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{l}}\int_0^l \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)xdx = \frac{\sqrt{2l}}{n\pi}(-1)^{n+1} \end{aligned} \tag{19}$$

On a donc en projection :

$$\left((b-\frac{an^2\pi^2}{l^2})T_n+T_n'\right)=u_0\frac{\sqrt{2l}}{n\pi}\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}+(b-\beta)(-1)^{n+1}e^{-\beta t}\right) \tag{20}$$

D'après l'hypothèse $(b-\frac{an^2\pi^2}{l^2})<0$, ce qui donnerait une exponentielle croissante en solution du problème homogène, incompatible avec l'hypothèse de solution nulle à l'infini. On cherche donc une solution particulière qui tend vers 0 en l'infini (sous la forme $T_p(t)=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}$) , et donc (après idéntification de $A$ et $B$) on trouve :

$$T_n(t)=u_0\frac{\sqrt{2l}}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\beta}e^{-\beta t}\right) \tag{21}$$

Ce qui conduit à :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_0\frac{2}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\frac{an^2\pi^2}{l^2}-\beta}e^{-\beta t}\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \tag{22}$$

**Exercice 3** : Vibrations libres d'une poutre simplement appuyée
Résoudre par séparation de variables le problème suivant qui correspond aux vibrations libres d'une poutre sur deux appuis :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 && \forall t>0,\ \forall\, 0<x<1\\
&\left\{\begin{array}{l} u(0,t)=u(1,t)=0\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)=0\end{array}\right. && \forall t>0\\
&\left\{\begin{array}{l} u(x,0)=f(x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\end{array}\right. && \forall\, 0<x<1
\end{aligned} \tag{23}$$

---

**Corrigé**

On pose $u=X(x)T(t)$, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{T''}{T}(t)=k^2\frac{X^{(4)}}{X}(x)&=\lambda\\
X(0)=X(1)=X''(0)=X''(1)&=0\\
\text{on pose }\omega&=\left(\frac{\lambda}{k^2}\right)^{1/4}\\
X(x)=A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)+C\sinh(\omega x)+D\cosh(\omega x)
\end{aligned} \tag{24}$$

On cherche une solution non nulle qui satisfasse les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -\omega^2 & 0 & \omega^2\\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & \sinh(\omega) & \cosh(\omega)\\ -\omega^2\sin(\omega) & -\omega^2\cos(\omega) & \omega^2\sinh(\omega) & \omega^2\cosh(\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}&=0\\
B=D&=0\\
2\omega^2\sin(\omega)\sinh(\omega)=0\Rightarrow C=0,\ \omega=\omega_k&=k\pi
\end{aligned} \tag{25}$$

On normalise les vecteurs : $X_k = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. On pose $u(x,t) = \sum X_k(x)T_k(t)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \sum(T_k'' + k^2\omega^4 T_k)X_k = 0 \\ \sum T_k(0)X_k(x) = f(x) \\ \sum T_k'(0)X_k(x) = g(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T_k(t) = T_k(0)\cos(k\omega^2 t) + T_k'(0)\sin(k\omega^2 t) \\ T_k(0) = \int_0^1 X_k(x)f(x)dx \\ T_k'(0) = \int_0^1 X_k(x)g(x)dx \end{array}\right. \tag{26}$$

**Exercices 4,5** : Corrections dans les Annales