$Ax = b$

Un exemple (optimisation quadratique à contraintes linéaires) :
Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive. Soit B une matrice rectangulaire de taille mxn. Soit b vecteur de $\mathbb{R}^n$. On veut résoudre le problème :

$$\inf_{x \in KerB} \left\{ J(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x \right\}.$$

$$K = \operatorname{Ker} B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{Bx = 0}_{\in \mathbb{R}^m} \}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} | \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{F(x)}$$

$\rightarrow$ m contrainte.

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid b_i x = 0 \ , \forall i = \overline{1,m} \}$$

D'après le th. 2.4 $\Rightarrow \exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q un point de minimum $\bar{x}$ vérifie :

$$J'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{(b_i \bar{x})'}_{F'(\bar{x})} = 0$$

$$J'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$$

A travers cette relation on peut déterminer une expression explicite de notre min : $\bar{x}$.

or $J'(\bar{x}) = A\bar{x} - b$

$$A\bar{x} - b + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$$

On suppose A inversible :

$$\boxed{\bar{x} = A^{-1}\left(b - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i\right)} \quad (*)$$

On cherche également à exprimer les multiplicateurs de Lagrange λ_i $(\forall i = \overline{1,m})$

or $\bar{x} \in \operatorname{Ker} B$: $B\bar{x} = 0$

On applique B à gauche de l'expression $(*)$

$$\underbrace{B\bar{x}}_{= 0} = BA^{-1}(b - \underbrace{B^* \lambda}_{= ?})$$

$$(BA^{-1}B^*)^{-1} \times \Big| \quad \underbrace{BA^{-1}B^*}\lambda = BA^{-1}b$$

$$\boxed{\lambda = (BA^{-1}B^*)^{-1} BA^{-1} b.} \quad (**)$$