

Examen 2015-2016

Mercredi 16 décembre 2015 – Durée : 2 heures.

Tout document interdit. Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1 – Loi d'état de l'azote (barème indicatif : 3 points)

On souhaite déterminer la loi d'état de l'azote, sachant qu'entre 0 et 40 bars, on a mesuré pour une mole :

$$\delta P = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V} \right) dT - \frac{RT}{V^2} \left(1 + \frac{2A}{V} \right) dV$$

où P est la pression, V le volume, T la température, R est la constante universelle des gaz parfaits, et A est une constante.

1. Montrer que la différentielle δP est une différentielle totale exacte.
2. En déduire la loi d'état de l'azote sous la forme $P = P(V, T)$.
3. Calculer le coefficient de variation de pression isochore β pour cette loi d'état. Comparer avec le cas du gaz parfait.

Exercice 2 – Questions de cours - Gaz parfait (barème indicatif : 5 points)

1. A partir de la loi d'état des gaz parfaits, calculer les dérivées partielles nécessaires et montrer que l'on a

$$dV = \frac{V}{T} dT - \frac{V}{p} dp$$

2. On considère un système constitué d'un gaz quelconque, et on introduit les coefficients calorimétriques C_v , C_p , l_v et l_p . Donner pour une transformation réversible du système l'expression de la quantité de chaleur élémentaire δQ_{rev} en variables (T, V) et en variables (T, p) . Est-ce une différentielle totale exacte ?
3. Déduire de la question précédente les deux expressions de la différentielle de l'énergie interne d'un gaz quelconque dU , l'une faisant intervenir les coefficients calorimétriques C_v , l_v , et l'autre faisant intervenir les coefficients C_p et l_p .
4. Qu'est-ce que la loi de Joule sur l'énergie interne ? Sachant qu'un gaz parfait suit cette loi de Joule, en déduire l'expression de l_v en fonction des variables d'état. Comment se simplifie l'expression de la différentielle de l'énergie interne d'un gaz parfait dU ?
5. Utiliser les questions (1), (3), (4) précédentes pour retrouver à partir des diverses expressions de dU l'expression, pour un gaz parfait, de l_p en fonction des variables d'état, ainsi que la relation de Mayer liant C_p et C_v .

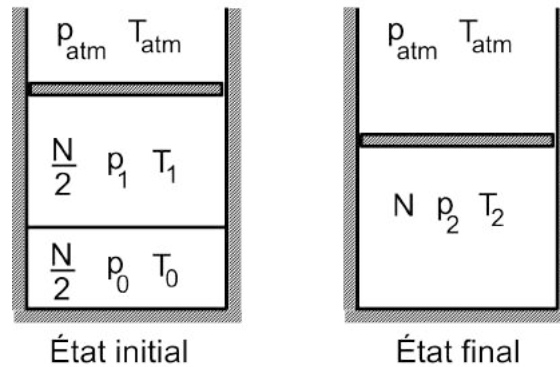
Exercice 3 – refroidissement isovolume d'un gaz parfait (barème indicatif : 4 points)

Un réservoir de volume V_0 aux parois indéformables et diathermes, contient une masse m de gaz parfait (de chaleurs massiques c_p et c_v données), initialement à (T_0, p_0) .

1. Le réservoir est soudainement plongé dans un bain à la température constante $T_1 < T_0$ donnée : exprimer la variation d'énergie interne puis la quantité de chaleur échangée par le gaz avec l'extérieur en fonction de m , c_v et des températures T_0 et T_1 . Calculer l'entropie échangée avec l'extérieur S_{tr1} au cours de la transformation.
2. On repart du même état initial (T_0, p_0, V_0) . Le réservoir est plongé dans le bain à la température T_0 , puis la température du bain est abaissée très progressivement de T_0 à T_1 , de telle sorte que la transformation peut être considérée comme réversible. La variation d'énergie interne du gaz est-elle la même que précédemment ? La quantité de chaleur échangée par le gaz avec l'extérieur est-elle la même que précédemment ? (justifier les réponses). Calculer l'entropie échangée avec l'extérieur S_{tr2} au cours de la transformation et comparer avec le cas précédent. D'où provient l'écart entre S_{tr1} et S_{tr2} ?

Exercice 4 – Premier et second principe (*barème indicatif : 8 points*)

Un réservoir indéformable, de section S donnée, et isolé thermiquement par des parois adiabatiques, contient N moles d'un gaz parfait de constante γ donnée, réparties dans deux chambres contenant $N/2$ moles chacune. Un piston de section S et de masse négligeable, supposé adiabatique et libre de se déplacer sans frottement sépare la chambre supérieure de l'atmosphère, supposée à pression uniforme p_{atm} et température uniforme T_{atm} . La température T_0 et la pression p_0 dans la chambre inférieure sont connues. Les deux chambres sont séparées initialement par une cloison rigide, immobile et diatherme.



1. En effectuant un bilan des forces sur le piston, déterminer la pression p_1 .
Déterminer ensuite, à l'état d'équilibre initial, la température T_1 et le volume V_1 dans la chambre supérieure, et le volume V_0 dans la chambre inférieure, en fonction des données du problème.
2. On retire brutalement par le côté la paroi rigide séparant les deux chambres. Après un temps suffisamment long le piston trouve une nouvelle position d'équilibre et la pression, la température et le volume du gaz (inconnues) sont notées p_2 , T_2 et V_2 , respectivement.
Déterminer la pression p_2 . On considère le système constitué de l'ensemble des N moles de gaz. Déterminer la quantité de chaleur échangée par ce système avec l'extérieur au cours de la transformation, et donner l'expression du travail échangé par ce système avec l'extérieur au cours de la transformation en fonction de p_{atm} , V_0 , V_1 et V_2 .
3. En considérant successivement le système constitué par le gaz contenu dans une chambre, puis dans l'autre, exprimer la variation d'énergie interne du système constitué des N moles de gaz en fonction de N , R , γ , T_0 et T_2 .
4. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, et à partir de la question précédente, montrer que le rapport des températures T_2/T_0 s'écrit

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{2\gamma} [2 + (\gamma - 1) \left(\frac{p_{atm}}{p_0} + 1 \right)]$$

5. Utiliser le résultat précédent pour étudier le rapport T_2/T_0 en fonction de la valeur du rapport $x = p_{atm}/p_0$. Dans quel cas le gaz est-il refroidi dans l'état final ? En déduire dans quel cas le piston est monté au cours de la transformation et dans quel cas il est descendu.
6. On rappelle que pour un gaz parfait, la différentielle de l'entropie $S(T, p)$ est donnée par :

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp$$

En considérant successivement le système constitué par le gaz contenu dans une chambre, puis dans l'autre, exprimer la variation d'entropie du système constitué des N moles de gaz en fonction de N , R , γ , T_0 , T_2 et x .

7. Calculer la production d'entropie du système. Le résultat est-il compatible avec le second principe quelle que soit la valeur de x ? Justifier la réponse.

Exercice 1

1) On a $\delta P = X(T, V) dT + Y(T, V) dV$, avec $X = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right)$ et $Y = -\frac{RT}{V^2} \left(1 + \frac{2A}{V}\right)$
 $\delta P \equiv$ différentielle totale exacte si $\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V$ (égalité Schwarz)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = -\frac{R}{V^2} - \frac{2AR}{V^3} \text{ et } \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V = -\frac{R}{V^2} \left(1 + \frac{2A}{V}\right) \Rightarrow \delta P \equiv dP$$

2) On a donc $dP = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) dT + \left(-\frac{RT}{V^2}\right) \left(1 + \frac{2A}{V}\right) dV = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) \Rightarrow P(T, V) = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) T + f(V) \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(-\frac{R}{V^2} - \frac{2AR}{V^3}\right) T + f'(V)$$

$$\text{or } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{V^2} \left(1 + \frac{2A}{V}\right) = \left(-\frac{R}{V^2} - \frac{2AR}{V^3}\right) T + f'(V) \Rightarrow f'(V) = 0 \Rightarrow f(V) = K.$$

$$\boxed{P(T, V) = \frac{RT}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) + K}$$

$$3) \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{ et } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) = \frac{P-K}{T} \Rightarrow \beta = \frac{P-K}{TP} = \frac{1}{T} - \frac{K}{TP}$$

Pour un gaz parfait $\beta = \frac{1}{T}$ - On retrouve la même expression si $K=0$.

Exercice 2.

$$1) pV = NRT \Rightarrow V = \frac{NRT}{p} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{NR}{p} = \frac{V}{T} \text{ et } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{NRT}{p^2} = -\frac{V}{p}$$

$$\Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \frac{V}{T} dT - \frac{V}{p} dp.$$

$$2) \begin{cases} \delta Q_{rev} = C_V dT + l_V dV & \text{en variables } (T, V) \\ \delta Q_{rev} = C_p dT + l_p dp & \text{en variables } (T, p) \end{cases}$$

δQ_{rev} n'est pas une différentielle totale exacte.

$$3) dU = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev} = C_V dT + l_V dV - p dV$$

$$dU = C_p dT + l_p dp - p dV$$

4) Loi de Joule sur l'énergie interne: $U = U(T)$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = l_V - p = 0 \Rightarrow \boxed{l_V = p} \Rightarrow dU = C_V dT.$$

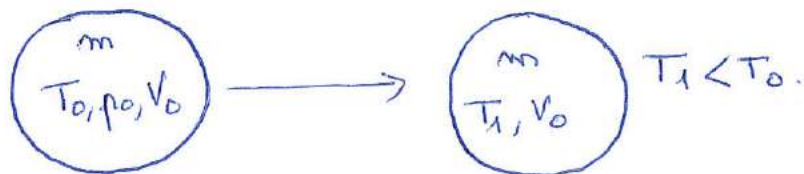
$$5) dU = C_V dT = C_p dT + l_p dp - p \left[\frac{V}{T} dT - \frac{V}{p} dp \right]$$

$$C_V dT = (C_p - NR) dT + (l_p + V) dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_V = C_p - NR \\ l_p = -V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_p - C_V = NR \\ l_p = -V \end{cases} \text{ (relation de Mayer)}$$

Exercice 3.

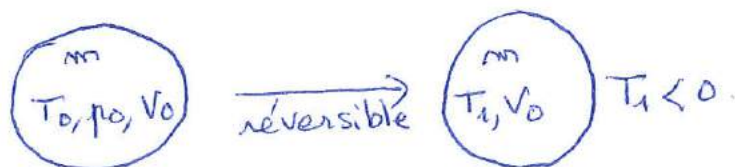
1)



$$\Delta U = m c_v (T_1 - T_0) = Q + W \text{ et } W = 0 \Rightarrow Q = \Delta U = m c_v (T_1 - T_0)$$

$$S_{tr1} = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q}{T_e} = \frac{Q}{T_1} = m c_v \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) < 0. \quad \text{On a } \Delta S_1 = S_{tr1} + S_{pr1} \text{ par second principe.}$$

2)



ΔU est la même que précédemment, car U est une fonction d'état, et ΔU ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

$\Delta U = Q + W = Q \Rightarrow Q$ est la même que précédemment.

$$S_{tr2} = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q}{T_e} = \int_{ini}^{fin} \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int_{ini}^{fin} \frac{m c_v dT}{T} = m c_v \ln \frac{T_1}{T_0} > 0.$$

2nd principe: $\Delta S_2 = S_{tr2} + S_{pr2}$ avec $S_{pr2} = 0$ (transformation réversible)

et $\Delta S_2 = \Delta S_1$ car S est une fonction d'état et ΔS ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

$$\Rightarrow \Delta S_2 = S_{tr2} = \Delta S_1 = S_{tr1} + S_{pr1} \Rightarrow S_{tr2} - S_{tr1} = S_{pr1} > 0$$

L'écart entre S_{tr2} et S_{tr1} est l'entropie produite dans le premier cas (> 0 par 2nd principe) $\Rightarrow \boxed{S_{tr2} > S_{tr1}}$

Exercice 4.

1) Equilibre du piston $\Rightarrow p_{\text{atm}} S = p_1 S \Rightarrow \boxed{p_1 = p_{\text{atm}}}$

Paroi diatherme entre les 2 chambres $\Rightarrow \boxed{T_1 = T_0}$

Loi d'état: $p_1 V_1 = \frac{N}{2} R T_0 \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{N}{2} \frac{R T_0}{p_{\text{atm}}}}$

$p_0 V_0 = \frac{N}{2} R T_0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{N}{2} \frac{R T_0}{p_0}}$

2) équilibre du piston à l'état final $\Rightarrow \boxed{p_2 = p_{\text{atm}}}$
 $Q = 0$ (piston adiabatique + parois cylindrique adiabatiques)

$W = - \int_{V_0+V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV$ avec $p_{\text{ext}} = p_{\text{atm}} \Rightarrow W = - p_{\text{atm}} (V_2 - (V_0 + V_1))$

3) $\Delta U = \Delta U_{\text{chambre sup}} + \Delta U_{\text{chambre inf}} = \frac{N}{2} \bar{C}_v (T_2 - T_1) + \frac{N}{2} \bar{C}_v (T_2 - T_0)$
 $\boxed{\Delta U = N \bar{C}_v (T_2 - T_0)} = \boxed{\frac{NR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0)}$

4) $\Delta U = W + Q \Rightarrow \frac{NR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) = - p_{\text{atm}} V_2 + p_{\text{atm}} V_0 + p_{\text{atm}} V_1$

or $p_{\text{atm}} V_2 = p_2 V_2 = N R T_2$ $p_{\text{atm}} V_0 = \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} p_0 V_0 = \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \frac{N}{2} R T_0$

et $p_{\text{atm}} V_1 = p_1 V_1 = \frac{N}{2} R T_0$

$\Rightarrow \frac{NR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) = - N R T_2 + \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \frac{N}{2} R T_0 + \frac{N}{2} R T_0$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right] T_2 = \frac{1}{\gamma - 1} T_0 + \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_2$

$\Rightarrow \frac{T_2}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} + \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2\gamma} \left[2 + (\gamma - 1) \left(1 + \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \right) \right]$

5) $\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{2\gamma} [2 + (\gamma - 1)(1 + x)] = f(x)$ et $f'(x) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} > 0$ car $\gamma > 1$

On a $f(1) = \frac{1}{2\gamma} [2 + (\gamma - 1)(2)] = 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_0} < 1$

$x > 1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_0} > 1$

pour $x < 1$: $p_{\text{atm}} < p_0 \Rightarrow T_2 < T_0$ le gaz se refroidit
 $\Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow W < 0 \Rightarrow V_2 > V_0 + V_1 \Rightarrow$ le piston monte

$x > 1$: $p_{\text{atm}} > p_0 \Rightarrow T_2 > T_0$ le gaz se réchauffe
 $\Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow W > 0 \Rightarrow V_2 < V_0 + V_1 \Rightarrow$ le piston descend

$$6) \Delta S_{\text{chambre sup}} = \int_{\text{ini}}^{\text{fin}} \left(\bar{C}_p \frac{NdT}{T} - \frac{N}{2} R \frac{dp}{p} \right) = \frac{N\bar{C}_p}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{N}{2} R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= \frac{N\bar{C}_p}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_{\text{chambre inf}} = \int_{\text{ini}}^{\text{fin}} \left(\bar{C}_p \frac{NdT}{T} - \frac{N}{2} R \frac{dp}{p} \right) = \frac{N\bar{C}_p}{2} \ln \frac{T_2}{T_0} - \frac{N}{2} R \ln \frac{p_2}{p_0}$$

$$= \frac{N\bar{C}_p}{2} \ln \frac{T_2}{T_0} - \frac{N}{2} R \ln \frac{p_2}{p_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{\text{total}} = N\bar{C}_p \ln \frac{T_2}{T_0} - \frac{N}{2} R \ln \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} = \frac{NR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_0} - \frac{NR}{2} \ln \frac{p_{\text{atm}}}{p_0}}$$

$$7) \text{ On a } \Delta S_{\text{total}} = S_{pr} + S_{tr}$$

Or $S_{tr} = 0$ (transformation adiabatique).

$$\Rightarrow S_{pr} = \Delta S_{\text{total}} = NR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \right]$$

$$S_{pr} = NR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{1}{2\gamma} (2 + (\gamma-1)(1+x)) - \frac{1}{2} \ln x \right]$$

$$\boxed{S_{pr} = NR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{1}{2\gamma} (\gamma+1 + (\gamma-1)x) - \frac{1}{2} \ln x \right]}$$

Etudions le signe de $S_{pr}(x)$.

$$S_{pr}(x=1) = 0$$

$$S_{pr} = f(x) \quad f'(x) = NR \left[\frac{\gamma}{\cancel{2\gamma}} \frac{1 \times (\gamma-1)/2\gamma}{\frac{1}{2\gamma}(\gamma+1 + (\gamma-1)x)} - \frac{1}{2x} \right]$$

$$= NR \left[\frac{\gamma}{\gamma+1 + (\gamma-1)x} - \frac{1}{2x} \right]$$

$$= NR \frac{2\gamma x - (\gamma+1 + (\gamma-1)x)}{2x(\gamma+1 + (\gamma-1)x)}$$

$$= NR \frac{(\gamma+1)(x) - (\gamma+1)}{2x(\gamma+1 + (\gamma-1)x)}$$

$$f'(x) = NR \frac{(\gamma+1)(x-1)}{2x(\gamma+1 + (\gamma-1)x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ pour } x < 1 \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \text{ pour } x > 1$$



$\Rightarrow f(x) \text{ toujours } \geq 0 \Rightarrow S_{pr} \geq 0 \forall x.$
2nd principe OK.