Analyse vectorielle, intégrales multiples

Examen première session décembre 2016

Deux heures, documents, portables et calculatrices interdits.

Exercice 1 : (Les questions a, b, c et d sont indépendantes) Soit P une plaque dont la surface est comprise entre les graphes des fonctions $y = x^2$ et $y = x$ avec $x \in [0, 1]$.

a) Dessiner P.

b) Calculer la surface de P.

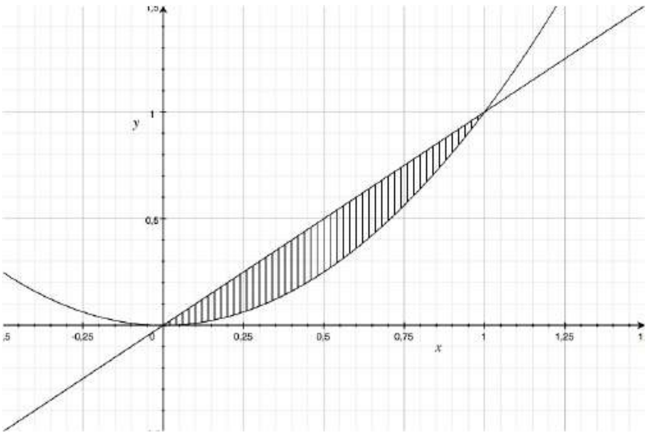
c) On suppose que $f(x, y) = xy$ est la densité de masse de la plaque P. Calculer la masse M de P.

d) Soit ω la 1-forme $ydx + xdy$.

   i) Paramétrer le bord orienté ∂P de P et en déduire un calcul de $\int_{\partial P} \omega$.

   ii) Calculer $d\omega$ et en déduire un autre calcul de $\int_{\partial P} \omega$.

Solution de l'exercice 1.

a) 

b) La surface de P est donnée par l'intégrale $\int_P dxdy$ qui vaut par le théorème de Fubini (domaine compris entre le graphe de deux fonctions)

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x dy \right) dx = \int_0^1 [x - x^2] dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

c) La masse de P est donnée par l'intégrale $M = \int_P f(x, y)dxdy$ donc par le théorème de Fubini, on obtient

$$M = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xydy \right) dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^3 - x^5] dx = 1/2[1/4 - 1/6] = 1/24.$$

d) i) On paramètre le bord de P par deux fonctions définies pour $x \in [0, 1]$ par $\sigma_1(x) = (x, x^2)$ et $\sigma_2(x) = (1 - x, 1 - x)$ On obtient

$$\int_{\sigma_1} \omega = \int_0^1 x^2 dx + xd(x^2) = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$$

et
$$\int_{\sigma_2} \omega = \int_0^1 (1-x)d(1-x) + (1-x)d(1-x) = -\int_0^1 2 - 2xdx = -1$$
ce qui implique que $\displaystyle\int_{\partial P} \omega = 1 - 1 = 0.$

ii) On a $d\omega = dy \wedge dx + dx \wedge dy = 0$ donc par la Formule de Stokes sur P, on a
$$\int_{\partial P} \omega = \int_P d\omega = \int_P 0 = 0.$$

Exercice 2 : On considère les 1-formes $\alpha = (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ et $\beta = y^3dx + xdy$ définies sur $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta$ à l'aide du changement de variables $u = \cos(\theta)$.

b) Calculer l'intégrale de α sur le cercle unité $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

c) Calculer $d\alpha$ et $d\beta$.

d) Existe-t-il une fonction f telle que $df = \alpha$? Si oui, trouver f.

e) Existe-t-il une fonction g telle que $dg = \beta$? Si oui, trouver g.

f) Que signifient ces résultats en termes de champs de vecteurs ?

g) Retrouver l'intégrale de α sur le cercle unité S^1 par une autre méthode.

Solution de l'exercice 2.

a) On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta = -\int_1^1 u^2du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^1 = 0.$

b) On paramètre le cercle unité par $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On a
$$\begin{array}{rcl} M^*\alpha &=& (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))d(\cos\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)d(\sin\theta) \\ &=& d(\cos\theta) - 2\cos^2(\theta)d(\cos\theta). \end{array}$$

L'intégrale de α le long du cercle donne donc
$$\int_{S^1} \alpha = \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos^2(\theta)]d(\cos\theta) = \left[\cos\theta - 2\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) On a $d\alpha = 2ydy \wedge dx + 2ydx \wedge dy = 0$ et $d\beta = 3y^2dy \wedge dx + dx \wedge dy = [1 - 3y^2]dx \wedge dy \neq 0$.

d) Comme $d\alpha = 0$ (α fermée) et que α est définie sur $\mathbb{R}^2$ domaine sans trou, le Lemme de Poincaré implique que α est exacte, i.e., admet une primitive f. On peut choisir $f = x^3/3 + y^2x + c$ avec c constante réelle.

e) Comme $d\beta \neq 0$, β n'est pas fermée donc n'admet pas de primitive.

f) En termes de champs de vecteurs, ceci signifie que $\vec{V} = (x^2 + y^2, 2xy)$ est un champ dont le rotationnel scalaire est nul et égal au champ gradient de f et que $\vec{W} = (y^3, x)$ est de rotationnel scalaire non nul donc n'est pas un champ gradient.

g) La formule de Stokes nous donne, si D^1 est le disque unité de bord S^1, que
$$\int_{S^1} \alpha = \int_{D^1} d\alpha = 0.$$

Exercice 3 : On considère le domaine V dont le bord est composé de la demi-sphère

$$S = \{(x, y, z),\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

du cylindre

$$C = \{(x, y, z),\ -1 \leq z \leq 0,\ x^2 + y^2 = 1\},$$

et du disque

$$D = \{(x, y, z),\ z = -1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Dessiner V.

b) On va calculer le volume de V.

   i) Donner une paramétrisation de la demi-boule $B = \{(x, y, z),\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, et en déduire son volume.

   ii) Donner une paramétrisation du cylindre plein $E = \{(x, y, z),\ -1 \leq z \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et en déduire son volume.

   iii) En déduire le volume de V.

c) On oriente le bord ∂V de V en utilisant le normale extérieure. Soit

$$\omega = (x + y)\, dy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

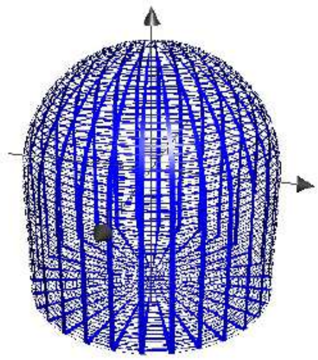
   i) Calculer $d\omega$.

   ii) En déduire un calcul rapide de la valeur de l'intégrale $\int_{\partial V} \omega$.

   iii) Que signifie cette intégrale en termes de champs de vecteurs ?

d) (Question bonus) Calculer $\int_D \omega$ avec D orienté par la normale vers le haut, et déduire des résultats précédents un calcul de $\int_{S \cup C} \omega$ avec $S \cup C$ orienté vers l'extérieur de V.

Solution de l'exercice 3.



a)

b) i) On paramètre par les coordonnées sphériques $(r, \phi, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ par $\sigma_1(r, \phi, \theta) = (r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi)$ (attention, ϕ et θ sont inversés dans les conventions de l'amphi A). Le Jacobien est $r^2 \sin(\phi)$. On obtient par Fubini

$$\int_B dx \wedge dy \wedge dz = \int_0^1 (\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2\pi} r^2 \sin(\phi) d\theta) d\phi) dr = \frac{1}{3}.1.2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

ii) On paramètre par les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) \in [0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,0]$ par $\sigma_2(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec pour Jacobien r. On obtient par Fubini

$$\int_E dx \wedge dy \wedge dz = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{-1}^0 r dz) d\theta) dr = \frac{1}{2}.1.2\pi = \pi.$$

iii) On obtient que le volume de V est $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

c) i) On a

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz.$$

ii) La formule de Stokes nous donne que

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_V 3dx \wedge dy \wedge dz = 3 \cdot \mathrm{Vol}(V) = 5\pi.$$

iii) C'est le flux du champ de vecteur $\vec{V} = (x+y, y, z)$ à travers le bord de V, orienté en utilisant la normale extérieure à V.

d) Soit $\sigma(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), -1)$ avec $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ la paramétrisation standard de D (orienté par la normale vers le haut). On a $\sigma^*(dz) = d(-1) = 0$ donc les deux premiers termes de $\sigma^*\omega$ s'annulent et on obtient $\sigma^*\omega = -1.\sigma^*(dx \wedge dy) = -rdr \wedge d\theta$. Par Fubini, on a

$$\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sigma^*\omega = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} -r d\theta) dr = \frac{-1}{2} 2\pi = -\pi.$$

On a $\int_{\partial V} \omega = \int_{S\cup C} \omega + \int_D \omega$ donc

$$\int_{S\cup C} \omega = \int_{\partial V} \omega - \int_D \omega = 5\pi + \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sigma^*\omega = 5\pi - \pi = 4\pi.$$

On aura pris soin ici de remarquer que l'orientation de D induite par la normale extérieure à V est opposée à celle donnée par sa paramétrisation polaire ci-dessus, d'où le changement de signe.