
Mécanique des fluides

TP de turbulence

Analyse de simulations de turbulence homogène isotrope



Responsable cours : CINNELLA Paola
paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

Responsable TP : BIENNER Aurélien
aurelien.bienner@ensam.eu

Introduction

Dans ce TP numérique, nous nous intéressons à la décroissance de turbulence homogène isotrope et à la comparaison entre des résultats expérimentaux de turbulence de grille et une simulation numérique modélisant cette expérience. Ce TP a pour objectifs :

- De se familiariser avec des notions de base en turbulence isotrope ;
- De réaliser le post-traitement d'une simulation numérique ;
- De (re)découvrir les transformées de Fourier et l'algorithme *Fast Fourier Transform* ;
- De comparer des résultats numériques et expérimentaux et d'analyser les possibles différences ;
- De se familiariser avec la programmation sous Python.

La partie **I** concerne la présentation du TP. Tout d'abord, certaines définitions sur la turbulence homogène isotrope sont rappelées. Ensuite, une présentation de la transformée de Fourier, ainsi que son implémentation numérique, est réalisée. Enfin, l'expérience avec laquelle les comparaisons seront réalisées est présentée. La partie **II** regroupe les différentes questions du sujet auxquels il vous faudra répondre.

L'ensemble des documents nécessaires sont présents sur Moodle, dans la section TP du cours MU5MEF03-S1. Le rapport est à rendre 2 semaines après la fin du TP, au plus tard le 24 novembre 2021. Il sera à déposer sur Moodle à l'endroit prévu à cet effet. Il devra comporter une introduction, une conclusion, les réponses aux questions des sections **2**, **3** et **4** ainsi que les figures tracées lors du TP.

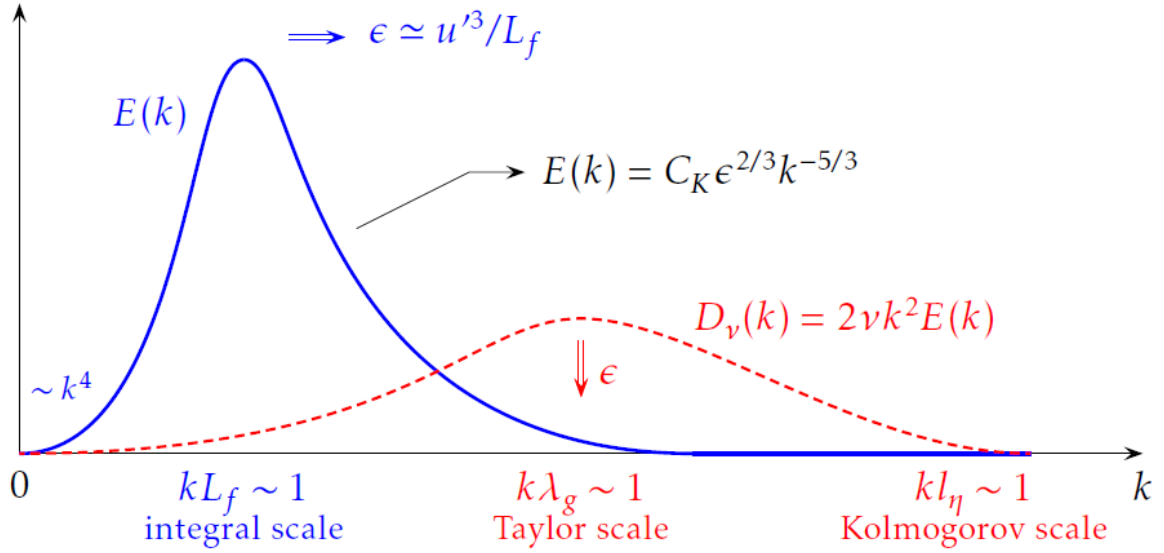


FIGURE 1 – Spectre d'énergie cinétique typique.

Première partie

Présentation du TP

1 Rappels théoriques

1.1 La turbulence homogène isotrope (THI)

On parle de turbulence homogène lorsque les propriétés statistiques sont indépendantes des coordonnées de l'espace \mathbf{x} . Les écoulements turbulents isotrope sont une classe d'écoulement homogène pour laquelle les propriétés statistiques sont invariantes pour toute rotation des axes des coordonnées et pour toute réflexion dans un plan. Par conséquent, un écoulement turbulent isotrope est homogène. Dans le cadre d'un écoulement turbulent isotrope et en supposant de plus l'écoulement incompressible, il est possible de définir l'énergie cinétique turbulente comme l'intégrale d'une fonction scalaire $E_s(k)$ appelé le spectre de l'énergie cinétique turbulente :

$$k_t = \frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} = \int_0^\infty E_s(k) dk \quad (1)$$

où $\langle u_i'^2 \rangle$ est la moyenne du carré des fluctuations de vitesses dans les 3 directions. Cette fonction permet une représentation, dans l'espace des nombres d'ondes k , de l'évolution de l'énergie. Elle prend généralement une forme similaire à celle de la figure 1. On observe que le maximum du spectre se trouve à des nombres d'ondes petits, ce qui correspond aux grandes structures dans l'espace physique.

1.2 Simulation et expérience de décroissance de THI

Le modèle de turbulence homogène isotrope (THI) est un cadre d'étude simplifié de la turbulence et a permis notamment, à l'aide d'expériences de laboratoire ou de simulations numériques directes, l'étude et la modélisation des transferts des grosses vers les petites échelles. Dans la suite, le principe derrière les simulations numériques ainsi que les expérience de décroissance de THI est présenté.

1.2.1 Simulation de THI

Les simulations numériques de décroissance de THI sont réalisées dans des domaines cubiques avec conditions de bord périodiques. La résolution, c'est à dire le k_{min} et k_{max} du spectre de l'énergie cinétique turbulente, est fixée par la taille du cube et le nombre de points utilisé pour le discrétiser. En effet, la taille du domaine détermine la limite inférieure des nombres d'onde pour le spectre. De plus, la discrétisation du domaine, c'est à dire le nombre de points dans chaque direction à l'intérieur du domaine de calcul, détermine la limite supérieure des nombres d'onde du spectre d'énergie.

Le champ des vitesses est initialisé à l'aide d'un spectre d'énergie obtenu grâce à un modèle théorique. La vitesse moyenne de l'écoulement est nulle. A l'aide du champ de vitesse initial, et en avançant numériquement en temps les équations de Navier-Stokes, l'évolution du champ de vitesse à différents temps est obtenu. Ce champ de vitesse initial va décroître en fonction du temps à cause de la dissipation. L'étude du spectre d'énergie à différents instants va donc permettre l'observation de plusieurs choses : déclin de la turbulence, transferts des grandes échelles vers les petites échelles, ...

Dans le cadre de ce TP, nous allons analyser les résultats de 2 simulations numériques : une première 512^3 très bien résolue (c'est à dire suffisamment discrétisée) et une deuxième 64^3 sous-résolue. Les simulations numériques ont été réalisés avec des schémas d'ordre élevé aux différences finies discrétisant les équations de Navier-Stokes. Les simulations sont initialisées à partir du spectre d'énergie cinétique expérimentale obtenu à la position $\frac{x}{M} = 42$ (voir suite).

1.2.2 Expérience de THI

Turbulence de grille. Dans le cadre des expériences de THI, on ne connaît pas de méthode pour générer artificiellement un *cube* de turbulence isotrope. Cependant, il a été constaté que si un écoulement uniforme de fluide, convecté à la vitesse U_0 passe à travers une grille régulière de barres maintenu à angle droit par rapport à l'écoulement, le mouvement en aval de la grille est constitué de la même vitesse moyenne U_0 à laquelle est superposée une fluctuation chaotique de la vitesse, c'est à dire de la turbulence (cf. image 2). Ce mouvement chaotique disparaît avec la distance par rapport à la grille et, dans cette mesure, n'est pas statistiquement homogène selon x_1 , mais le taux de décroissance est si faible que l'hypothèse d'homogénéité de la turbulence est valable dans la plupart des cas. De plus, l'écoulement est homogène dans le plan perpendiculaire à l'écoulement (directions x_2 et x_3).

L'approximation de turbulence gelée ou hypothèse de Taylor [1]. Durant l'expérience, on ne dispose généralement que de l'évolution temporelle de la vitesse en un point, ce qui ne permet pas de mesurer directement le tenseur spectral des vitesses et les spectres 1D associés. Il existe cependant un moyen d'estimer ces spectres. Si les fluctuations de vitesses u' sont faibles devant la vitesse moyenne de l'écoulement U_0 ($|u'| \ll U_0$), il est possible d'identifier $\frac{x-x_0}{U_0}$ dans l'expérience avec $t - t_0$ dans la simulation numérique (avec x_0 et t_0 respectivement une position et un temps initial), c'est à dire que la décroissance en aval de la grille dans l'expérience est assimilée à la décroissance temporelle dans la simulation numérique. De plus, comme la décroissance est généralement très faible, la turbulence est supposée *gelée* autour de la position x de l'instrumentation, signifiant que la quantité observée est simplement convecté par U_0 : c'est ce qu'on appelle l'*hypothèse de Taylor*. Il est ainsi possible de remonter au spectre d'énergie (cf. section 1.1).

L'expérience de Comte-Bellot & Corrsin. L'expérience avec laquelle les simulations numériques vont être comparées est l'expérience de Comte-Bellot & Corrsin [2]. L'expérience a été menée dans une soufflerie à air, sur une section d'essai $1.0 \times 1.3 \text{ m}^2$ de longueur 10 m, à $T = 293.15 \text{ K}$ et $P = 1.0158 \text{ bar}$. La vitesse moyenne de l'écoulement est $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Les

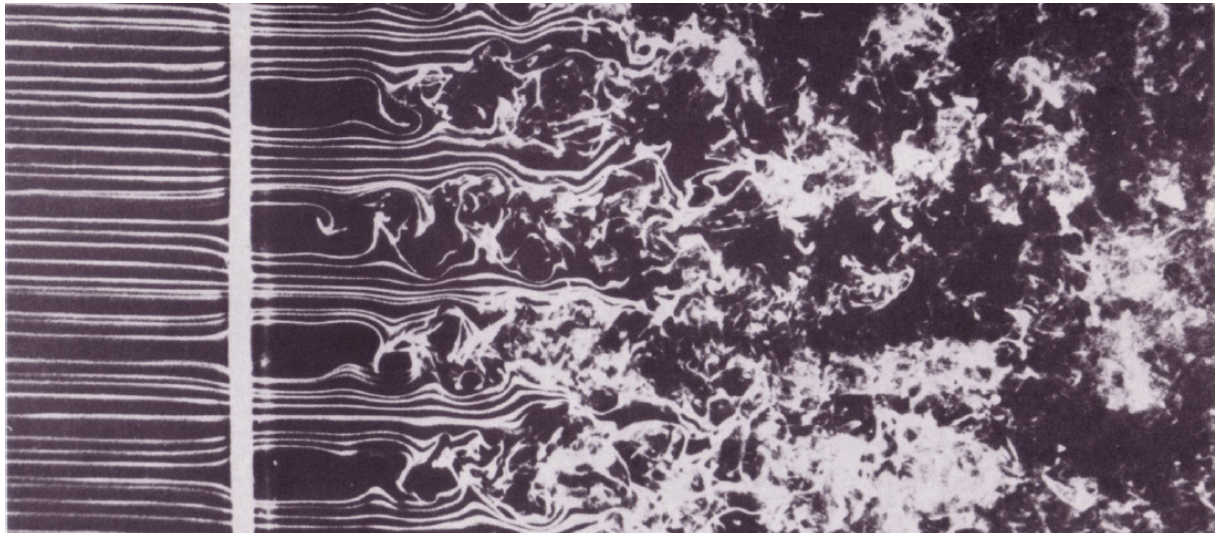


FIGURE 2 – Génération de turbulence derrière une grille ($Re_M = 1500$, $M = 2.54$ cm).

résultats expérimentaux utilisés pour la comparaison sont ceux obtenus pour une grille de taille de maille $M = 5.08$ cm ($Re_M = \frac{U_0 M}{\nu} = 3400$ avec ν la viscosité cinématique), avec les spectres d'énergie cinétique aux positions $\frac{x}{M} = 42, 98$ et 172 .

Deuxième partie

Questionnaire

2 L'expérience Comte-Bellot & Corrsin

Cette section regroupe des questions générales, portant sur les expériences de décroissance de grille. Elle est indépendante des deux autres sections du questionnaire.

Dans le cadre de l'expérience, les mesures de spectre sont faites en aval de $\frac{x}{M} = 40$, les mesures proches de la grille étant hors du cadre de la théorie de THI.

1. En vous basant sur l'image 2, expliquer qualitativement pourquoi.

Lorsqu'on réalise une expérience de décroissance de grille, on cherche à générer une turbulence isotrope. Le caractère isotrope de la turbulence est donc caractérisé pendant l'expérience grâce aux mesures de vitesses dans les différentes directions.

2. On caractérise expérimentalement l'isotropie de la turbulence en aval de la grille à l'aide des moyennes quadratiques de la vitesse $u_{i,rms}$ dans les 3 directions. Expliquer comment.

3 La simulation 512³

Cette section regroupe les questions portant sur la simulation 512³. Pour répondre aux questions, il est nécessaire d'utiliser le code python `simu_512.py`. Le code contient une première partie de pré-traitement, à ne pas toucher, puis une seconde partie de code à compléter afin de répondre

aux questions. Les figures tracées dans la suite doivent être enregistrées et incluses dans le rapport.

On définit l'intensité turbulente comme le rapport entre la moyenne quadratique de la vitesse $u'_{rms} = \sqrt{(u - \bar{u})^2} = \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}$ et la vitesse moyenne d'advection : $T_u = \frac{u'_{rms}}{U_0}$. Cette grandeur expérimentale permet de caractériser l'intensité de la turbulence générée en aval de la grille. En se basant sur la vitesse moyenne $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ de l'expérience, il est possible de définir cette grandeur dans le cadre de la simulation numérique, et de comparer ainsi la décroissance de la turbulence entre l'expérience et la simulation.

1. A l'aide du code `simu_512.py` (*# Question 1*), tracer l'évolution de T_u en fonction de $\frac{x}{M} = \frac{tU_0}{M}$. Commenter l'évolution de la courbe.

Expérimentalement, il a été montré que, pour une turbulence de grille, $\frac{U_0^2}{u'_{rms}{}^2}$ suivait une loi du type $A_1(\frac{x-x_0}{M})^{n_d}$, où A_1 est un coefficient dépendant des conditions initiales, x la position en aval de la grille, x_0 une origine virtuelle et n_d le coefficient de décroissance.

2. A l'aide de la loi précédente, démontrer que l'intensité turbulente T_u suit une loi du même type et donner sa formule en fonction de A_1 , n_d , x et x_0 .
3. En prenant le logarithme décimal de la loi trouvée à la question précédente, montrer que $\log_{10}(T_u)$ suit une relation linéaire vis à vis de $\log_{10}(\frac{x}{M})$. En utilisant l'échelle logarithmique pour tracer la figure (*# Question 3*), retrouver ce résultat et estimer le coefficient de décroissance n_d .

L'origine virtuelle peut être vue comme la position à laquelle se serait trouvée une turbulence isotrope initiale fictive qui, en décroissant selon la loi précédente, permettrait d'obtenir la turbulence isotrope observée en aval.

4. A l'aide de la question 1 de la section 2, expliquer pourquoi l'origine virtuelle ne correspond pas a priori à la position de la grille. Vérifier que c'est effectivement le cas sur la figure tracée à la question précédente, en estimant l'origine virtuelle et en la comparant à la position de la grille en $\frac{x}{M} = 0$.

On s'intéresse maintenant aux spectres d'énergie cinétique, contenus dans le fichier `es.dat`.

5. A l'aide du code (*# Question 5*), tracer les spectres d'énergie cinétique E_s aux 3 positions $\frac{x}{M} = 42, 98$ et 172 . A l'aide de la définition (cf. section 1.1), dire à quoi correspond graphiquement sur la figure l'énergie cinétique k_t . Commenter ensuite la position des spectres les uns par rapport aux autres.
6. En vous appuyant sur le principe de Nyquist (voir Annexe), expliquez pour quelle raison, dans une simulation numérique, la plage de nombre d'onde possibles (théoriquement, $k \in [0, \infty[$) est en pratique comprise entre une valeur $k_{min} > 0$ et une valeur finie k_{max} . Expliquez ensuite le passage "La résolution, c'est à dire... la limite supérieure des nombres d'onde du spectre d'énergie." de la section 1.2.1. En vous basant sur la taille du domaine ($L = 8.73 \text{ cm}$) et le nombre de points utilisés pour la simulation (512 points), retrouvez par le calcul la résolution obtenue (c'est à dire k_{min} et k_{max}) sur les spectres d'énergie de la question précédente.
7. Ajouter à la figure précédente les spectres issus des données expérimentales (*# Question 7*) et comparer les avec les spectres issus des simulations.

L'échelle intégrale longitudinale, définie comme $L_f = L_{11}^{(1)} = \int_0^\infty \mathcal{R}_{11}(r, 0, 0, 0)dr$ avec \mathcal{R}_{11} le coefficient de corrélation normalisé de la vitesse dans la direction 1. Pour rappel : $\mathcal{R}_{ij}(\Delta \mathbf{x}, \tau) = \frac{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \tau) \rangle}{\langle u_i^2 \rangle}$. De la même manière, on peut définir l'échelle intégrale transverse L_g comme $L_g = L_{11}^{(2)} = \int_0^\infty \mathcal{R}_{11}(0, r, 0, 0)dr$. En turbulence isotrope, toutes les échelles intégrales sont confondues.

L'échelle intégrale représente une estimation de la taille des structures turbulentes les plus énergétiques, c'est à dire que $k_{ext} L_f \sim 1$, en notant k_{ext} le nombre d'onde marquant la position du maximum du spectre d'énergie.

8. Afficher sur une figure l'évolution de l'échelle intégrale L_f en fonction de la distance à la grille (\neq Question 8). Commenter l'évolution de l'échelle intégrale, sans chercher à la justifier. Retrouver ce résultat sur la figure contenant les spectres. Ajouter sur la figure les résultats expérimentaux, et comparer.

4 La simulation 64³

On cherche dans cette section à calculer les spectres d'énergie à partir des variables conservatives. Pour cela, on se base sur un calcul avec 64 points de discrétisations dans chaque direction : le calcul 64³. Les dimensions du domaine de calcul cubique restent les mêmes, c'est à dire $L = 8.73$ cm. Le code associé à cette section est le code python *simu_64.py*. Le code contient une première partie de pré-traitement, à ne pas toucher, puis une seconde partie de code à compléter afin de répondre aux questions. Les figures tracées dans la suite doivent être enregistrées et incluses dans le rapport.

1. En vous basant sur vos réponses à la question 6 (section 3), trouver la nouvelle résolution en nombre d'ondes k du spectre d'énergie pour ce calcul.

Lors de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, les variables que l'on résout sont les variables conservatives ρ , ρu_1 , ρu_2 , ρu_3 et ρE , avec ρ la masse volumique, u_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ les 3 composantes de vitesses et E l'énergie interne totale.

2. Comment calculer les composantes des vitesses à partir des variables conservatives ?

Les valeurs des variables conservatives aux différents points de maillage à l'instant correspondant à la position $\frac{tU_0}{M} = \frac{x}{M} = 98$ sont données dans le fichier binaire *restart_bl10056_0038.bin* (dossier 64) et relues par le code python.

3. A l'aide du code python *simu_64.py* (cf. \neq Question 3), calculer les composantes de la vitesse en tout point du maillage.

On cherche maintenant à calculer les spectres d'énergie à partir du champ de vitesse. En repartant de la définition de E_s , il est possible de le calculer à partir de la transformée de Fourier du coefficient de corrélation dans une direction, mais il y a plus simple. En effet, $k_t = \frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2V} \int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$ avec V le volume sur laquelle la moyenne est réalisée. En utilisant le théorème de Parseval, on obtient $\int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_i'(k)|^2 dk$ avec \hat{u}_i' la transformée de Fourier de u_i' . En utilisant la définition de k_t section 1.1, nous avons donc que $\frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_i'(k)|^2 dk = \int_0^\infty E_s(k) dk$. Par identification, on obtient $E_s(k) = \frac{1}{V} |\hat{u}_i'(k)|^2$. Ainsi, il est possible de déterminer le spectre d'énergie cinétique E_s directement à partir de la transformée de Fourier du champ de vitesse.

4. En utilisant le module *fft* de la librairie python *numpy*, calculer la transformée de Fourier des 3 composantes de la vitesse (# Question 4).

La transformée de Fourier des composantes de la vitesse se trouve dans l'espace des nombres d'ondes (k_x, k_y, k_z) , avec $k = ||\mathbf{k}|| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Dans le domaine discrétisé de la simulation, on a donc, à un facteur de normalisation près α , que $E_s(k_j) = \alpha \sum_{\mathbf{k} \in S_{k_j}} |\hat{u}'_i(\mathbf{k})|^2$

où $S_k = \{\mathbf{k} | \text{arr}(|\mathbf{k}|) = k_j\}$, avec $\text{arr}()$ la fonction arrondissant à l'entier le plus proche et $k_j \in \{1, \dots, k_{\max}\}$.

5. A l'aide du code (cf. # Question 5) et de \hat{u}'_i , calculer le spectre d'énergie cinétique E_s à la position $\frac{x}{M} = 98$.
6. Tracer l'évolution du spectre obtenu (cf. # Question 6). Comparer avec le spectre présent dans le fichier *es.dat* et commenter.

On s'intéresse maintenant à l'évolution temporelle de différentes moyennes volumiques. Le fichier *stats.dat* contient les moyennes volumiques de différentes grandeurs à intervalle de temps régulier. On cherche dans un premier temps à tracer l'évolution de l'énergie cinétique k_t .

7. A l'aide du code (cf. # Question 7), tracer l'évolution de l'énergie cinétique turbulente k_t .

Dans le cadre d'un écoulement incompressible et en l'absence de production de turbulence, le taux de dissipation est égal à $\epsilon = -\frac{dk_t}{dt}$. Il peut donc être estimé à partir de l'évolution temporelle de k_t .

8. A l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, calculer ϵ à partir de k_t (cf. # Question 8). Tracer son évolution. Comparer par rapport aux résultats expérimentaux.

Le taux de dissipation est également défini comme $\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E_s(k) dk$, avec $D_\nu = 2\nu k^2 E_s(k)$ appelé le spectre de dissipation.

9. A quoi correspond graphiquement ϵ sur la figure 1 ?
10. A partir du spectre d'énergie calculé à la question 5, calculer le spectre de dissipation D_ν (cf. # Question 10) et le tracer. Ajouter sur la figure le spectre d'énergie. En observant où le spectre de dissipation est tronqué par rapport à son maximum, montrer alors que le spectre de dissipation D_ν est moins bien capturé que le spectre d'énergie E_s .

Nous avons de plus que $\epsilon = 2\nu\Omega = 2\nu \frac{\langle \omega_i^2 \rangle}{2}$ où l'enstrophie Ω est égale à la somme du carré de la moyenne volumique des composantes de la vorticité ω_i^2 , avec $w_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}$, $w_2 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}$ et $w_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$.

11. A partir des données contenues dans le fichier *stats.dat*, calculer l'enstrophie Ω puis le taux de dissipation ϵ aux différents instants (cf. # Question 11).
12. Tracer l'évolution du taux de dissipation ϵ et le comparer avec la manière de le calculer de la question 8. A l'aide de la figure, montrer alors que l'identité $-\frac{dk_t}{dt} = 2\nu\Omega$ n'est pas respecté ici. Proposer une explication.

Références

- [1] TAYLOR, G. I., 1938, The spectrum of turbulence, *Proc. of the Royal Society of London A*, **164**, p. 476–490.
- [2] COMTE-BELLOT, G. & CORRSIN, S., 1966, The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence, *J. Fluid Mech.*, **25**, p. 657–682.
- [3] BALAC, S. La transformée de fourier vue sous l'angle du calcul numérique, 2011. cel-01862054.

Annexe : La transformée de Fourier et son implémentation numérique

Dans cette partie, la transformée de Fourier ainsi que son implémentation numérique sont présentées. Pour plus d'informations à ce sujet, voir [3].

Définition. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on définit sa transformée de Fourier \hat{f} , aussi notée $\mathcal{F}(f)$, pour tout $k \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (2)$$

De la même manière, pour $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on définit la transformée de Fourier inverse pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \quad (3)$$

Dans le cadre où f représente une fonction temporelle, la fonction \hat{f} représente une fonction dans le domaine fréquentiel et la valeur $\hat{f}(\nu)$ apparaît comme le poids associé à la fréquence ν . Ainsi, la transformée de Fourier permet donc de représenter dans le domaine fréquentiel des signaux qui ne sont pas périodiques.

Effet du fenêtrage. On remarque figure 2 que la définition de la transformée de Fourier porte sur un intervalle non borné. En réalité, la fonction f étant intégrable, elle tend vers 0 en $\pm\infty$ donc si l'intervalle d'intégration $[a, b]$ est assez grand ou si la fonction décroît assez rapidement, l'approximation suivante est généralement satisfaisante :

$$\hat{f}(\nu) \approx \int_a^b f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (4)$$

Considérons un signal temporel f dont on aurait fait l'acquisition sur une période de signal T . On note $\mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ la fonction indicatrice sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (qui prend la valeur 1 sur cet intervalle et 0 partout ailleurs). Le signal enregistré peut donc se noter $g = f \times \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$. Ainsi, l'intégrale sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ correspond à la transformée de Fourier de la fonction g :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} e^{-2i\pi\nu t} dt = \mathcal{F}(f \times \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}) \quad (5)$$

Il est possible de démontrer que :

$$\mathcal{F}(f \times \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}) = \hat{f} * \hat{\mathbf{1}}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \quad (6)$$

où $*$ représente l'opérateur de convolution et où $\hat{\mathbf{1}}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}$. Afin de montrer l'impact du fenêtrage sur la transformée de Fourier, prenons par exemple la fonction $f : t \mapsto (\frac{\sin(\pi at)}{\pi at})^2$, dont la transformée de Fourier est $\hat{f} : \nu \mapsto \frac{1}{a} \max(1 - |\frac{\nu}{a}|, 0)$. L'impact du fenêtrage est représentée figure 3. On observe, comme escompté, que plus l'enregistrement du signal est long, plus on s'approche vers la transformée de Fourier de f .

Transformée de Fourier discrète et approximation numérique. En pratique, lorsqu'un signal est enregistré, celui-ci est discrétisé, c'est à dire qu'il ne prend qu'un nombre fini de valeurs au cours du temps. On parle alors de signal numérique. On peut le modéliser par une fonction constante par morceaux sur chaque intervalle d'enregistrement $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On peut

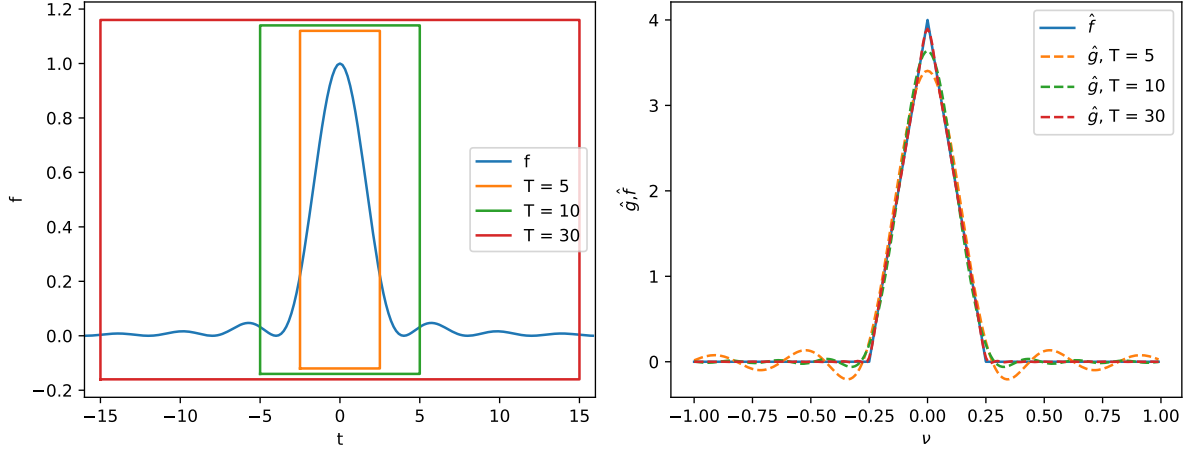


FIGURE 3 – Fonction f , avec $a = 0.25$, et fenêtres d'acquisition du signal pour les différentes périodes testées (gauche). Transformées de Fourier de la fonction f et de la fonction $g : t \mapsto f(t) \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$ (droite).

alors lui définir une transformée de Fourier discrète \hat{f} , application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie $\forall \nu \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi \nu n} \quad (7)$$

Comme dans le cas continue, on peut également définir la transformée de Fourier inverse grâce à la formule d'inversion suivante, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi \nu n} d\nu \quad (8)$$

De plus, le signal numérique ne va comporter qu'un nombre fini de valeurs. Si le signal numérique considéré est périodique et représentable par une fonction f périodique, constante par morceaux et prenant un nombre fini N de valeurs sur une période, alors on appelle transformée de Fourier discrète de f l'application \hat{f} de \mathbb{N} dans \mathbb{C} définie par, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} = \text{TFD}((f(0), f(1), \dots, f(N-1)), k) \quad (9)$$

et la formule d'inversion devient, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{2i\pi \frac{kn}{N}} = \text{ITFD}((\hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots, \hat{f}(N-1)), n) \quad (10)$$

De manière général, le signal numérique ne sera pas périodique et l'équation 9 ne permet donc pas d'obtenir la transformée de Fourier d'un signal numérique quelconque. Cependant, il est possible de construire à partir la fonction TFD une approximation de la transformée de Fourier discrète de la fonction f en certaines valeurs ν . Pour une fonction f à support dans $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$ où T est la durée d'enregistrement, une approximation de la transformée de Fourier de f en les valeurs $\frac{j}{T}$, $j \in -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 1$ est obtenue à l'aide la formule suivante :

$$\hat{f}\left(\frac{j}{T}\right) \approx \hat{S}\left(\frac{j}{T}\right) = \frac{T}{n} (-1)^{|j|} \text{TFD}((f_0, f_1, \dots, f_{n-1}), \frac{j}{T}) \quad (11)$$

où, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $f_k = f\left(\frac{2k-n}{2n}T\right)$. L'estimation de \hat{f} aux différents points $\frac{j}{T}$ requiert donc le calcul de n sommes de transformée de Fourier discrète. Le calcul d'une somme représente n

produits et $n - 1$ additions de nombres complexes. Le total d'opération est donc de $2n^2 - n$, ce qui laisse imaginer une complexité de $O(n^2)$ pour l'algorithme associé. En réalité, il existe des algorithmes relativement performant avec une complexité de l'ordre de $O(n \log_2(n))$, dont l'idée générale se cachant derrière est présentée au paragraphe intitulé *Fast Fourier Transform*.

Principe de Nyquist. Bien que le signal numérique f , sur support $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$, n'ai pas de raison d'être périodique, il est intéressant de noter que l'estimation de sa transformée de Fourier à partir de l'équation 11 est périodique, de période $\nu_{\max} = \frac{n}{T}$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{S}\left(\frac{j}{T} + \frac{n}{T}\right) &= \frac{T}{n}(-1)^{|j|} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2i\pi\left(\frac{j}{T} + \frac{n}{T}\right)T \frac{k}{n}} \\ &= \frac{T}{n}(-1)^{|j|} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2i\pi k} e^{-2i\pi j \frac{k}{n}} \\ &= \hat{S}\left(\frac{j}{T}\right) \quad \text{car, } \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, e^{-2i\pi k} = 1\end{aligned}\tag{12}$$

Ainsi, l'estimation de la transformée de Fourier de f ainsi obtenue ne va fournir des informations sur \hat{f} uniquement sur l'intervalle $[-\frac{\nu_{\max}}{2}, \frac{\nu_{\max}}{2}]$.

Cela implique qu'il est impossible de calculer par cette approche, une fois la durée d'enregistrement T et le nombre de valeurs discrètes n fixés, la valeur de $\hat{f}(\nu)$ pour n'importe quelle valeur de ν et en particulier pour $\nu \geq \frac{\nu_{\max}}{2}$ ou $\nu \leq -\frac{\nu_{\max}}{2}$. Ainsi, $\frac{\nu_{\max}}{2}$ correspond à la fréquence critique de Nyquist. En pratique, tout signal pouvant être décomposé en une somme de sinusoides, cette fréquence correspond à la fréquence des sinusoides la plus élevée pouvant être capté par le signal enregistré. On considère qu'il faut donc généralement 2 points par période pour correctement capter le contenu fréquentiel d'un signal périodique.

Fast Fourier Transform. D'après ce que l'on a vu précédemment, l'estimation de \hat{f} aux différents points $\frac{j}{T}$ ($j \in -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 1$) requiert un total d'environ $2n^2$ opérations. Lorsque n est une puissance de 2, la complexité de certains algorithmes est alors de $O(n \log_2(n))$. L'idée générale derrière ces algorithmes est présentée ci-dessous.

On suppose que n est une puissance de 2, telle que $n = 2^m$ avec $m \in \mathbb{M}^*$. Pour rappel, le but de l'algorithme est d'évaluer la somme $\hat{S}_j(f_0, \dots, f_{2^m-1}) = \sum_{k=0}^{2^m-1} f_k e^{-2i\pi j \frac{k}{2^m}}$ pour tout $j \in \{0, \dots, 2^m-1\}$. Pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$, scindons la somme $\hat{S}_j^{2^m}$ en deux sommes correspondant aux indices k pairs ($k = 2l$ avec $l \in \{0, \dots, 2^{m-1}-1\}$) et aux indices k impairs ($k = 2l+1$ avec $l \in \{0, \dots, 2^{m-1}-1\}$). On a donc :

$$\begin{aligned}\hat{S}_j^{2^m}(f_0, \dots, f_{2^m-1}) &= \sum_{k=0}^{2^m-1} f_k e^{-2i\pi j \frac{k}{2^m}} = \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f_{2l} e^{-2i\pi j \frac{2l}{2^m}} + \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f_{2l+1} e^{-2i\pi j \frac{2l+1}{2^m}} \\ &= \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f_{2l} e^{-2i\pi j \frac{l}{2^{m-1}}} + e^{-2i\pi j \frac{1}{2^m}} \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f_{2l+1} e^{-2i\pi j \frac{l}{2^{m-1}}} \\ &= \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_0, \dots, f_{2^{m-1}-1}) + e^{-2i\pi j \frac{1}{2^m}} \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_1, \dots, f_{2^{m-1}-1})\end{aligned}\tag{13}$$

où $\hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_0, \dots, f_{2^{m-1}-1})$ et $\hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_1, \dots, f_{2^{m-1}-1})$ sont des transformées de Fourier à $2^{m-1} = \frac{1}{2}n$ points. On observe de plus que la connaissance de ces deux sommes avec chacune 2^{m-1} points permet de complètement déterminer la somme $\hat{S}_j^{2^m}(f_0, \dots, f_{2^m-1})$ qui comporte 2^m points. En effet :

$$\begin{aligned}e^{-2i\pi(j+2^{m-1})\frac{l}{2^{m-1}}} &= e^{-2i\pi j \frac{l}{2^{m-1}}} e^{-2i\pi l} = e^{-2i\pi j \frac{l}{2^{m-1}}} \\ \text{et } e^{-2i\pi(j+2^{m-1})\frac{1}{2^m}} &= e^{-2i\pi j \frac{1}{2^m}} e^{-i\pi} = -e^{-2i\pi j \frac{1}{2^m}}\end{aligned}\tag{14}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\hat{S}_{j+2^{m-1}}^{2^{m-1}}(f_0, \dots, f_{2^m-2}) &= \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_0, \dots, f_{2^m-2}) \\ \hat{S}_{j+2^{m-1}}^{2^{m-1}}(f_1, \dots, f_{2^m-1}) &= \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_1, \dots, f_{2^m-1})\end{aligned}\quad (15)$$

et donc :

$$\hat{S}_{j+2^{m-1}}^{2^m}(f_0, \dots, f_{2^m-1}) = \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_0, \dots, f_{2^m-2}) - \hat{S}_j^{2^{m-1}}(f_1, \dots, f_{2^m-1}) \quad (16)$$

L'évaluation de chacune des deux sommes $\hat{S}_j^{2^{m-1}}$ comporte $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ opérations par somme, soit un total de $n^2 - n$ opérations, soit environ 2 fois moins d'opérations que pour le calcul directe de la somme $\hat{S}_j^{2^m}$. En itérant le raisonnement, on peut de la même manière subdivisé les deux sous-sommes $\hat{S}_j^{2^{m-1}}$ en deux et réduire à nouveau le nombre d'opérations par 2. En réalisant cela jusqu'à bout, on arrive à la subdivision finale de toutes les sommes \hat{S}_j^2 en deux, ce qui correspond à la subdivision la plus petite envisageable. Il est possible de démontrer que la complexité globale de ce type d'algorithme est de $O(n \log_2(n))$.