Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

5. Modèles non Boussinesq

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

∂'Alembert
Institut Jean le Rond d'Alembert

QCM#3

WEB

1 Connectez-vous sur www.wooclap.com/DHDIAX

2 Vous pouvez participer

SMS

1 Pas encore connecté ? Envoyez @DHDIAX au 06 44 60 96 62

2 Vous pouvez participer

Classification des modèles RANS

Modèles à viscosité tourbillonnaire linéaire (Boussinesq) ***Linear Eddy Viscosity Models (LEVM)***	• **Algébriques:** **→ De longueur de mélange (Prandtl, 1925)** **→ À viscosité tourbillonnaire** **(Baldwin-Lomax, Cebeci-Smith, Michel…)** • **Modèles à une équation de transport** **→ pour l'énergie cinétique turbulente** **→ pour la viscosité turbulente** **(Spalart-Allmaras, Baldwin-Barth)** • **Modèles à deux équations de transport** **→ k-e, k-w, k-l, k-t, q-w, …**
Modèles à viscosité tourbillonnaire non linéaire (Modèles aux tensions de Reynolds algébriques) *Non-linear Eddy Viscosity Models (NLVM)* *Algebraix Stress Models (ASM)*	• Analogie viscoélastique • Modèles aux tensions de Reynolds algébriques • Modèles algébriques explicites (EARSM)
Modèles aux tensions de Reynolds (équations de transport) *Reynolds-Stress Models (RSM)*	Equations de transport pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds + une échelle de longueur Launder-Reece-Rodi, Wilcox-Rubesin,…

Points faibles de l'approximation de Boussinesq

- Hypothèse de Boussinesq :

$$\tau_{ij}^R - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = 2\rho \nu_t \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$ =tenseur du taux de déformation moyen

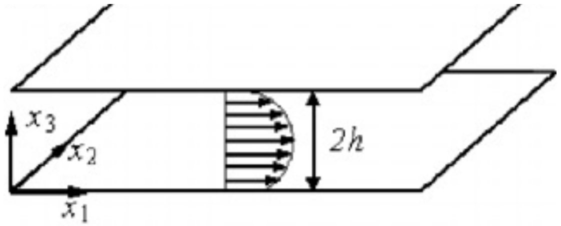
avec $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu l_m v_m$

  - Les axes principaux du tenseur de Reynolds sont alignés avec ceux du tenseur de déformation moyen!
  - La turbulence ne s'adapte pas de façon instantanée aux changements brusques de $\bar{S}_{ij}$
  - Les effets d'histoire ne sont pris en compte que via ν_t
  - Les désalignements entre τ_{ij}^R et $\bar{S}_{ij}$ ne peuvent pas être capturés par un modèle Boussinesq

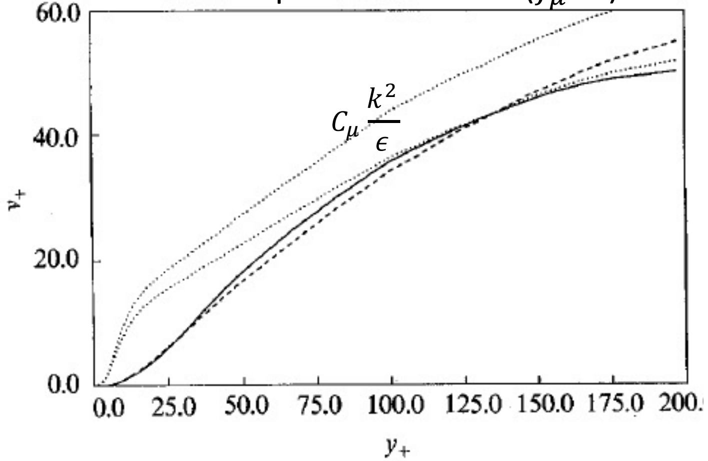
- Exemples :
  - Ecoulements avec changements brusques du taux de déformation moyen
  - Ecoulement sur des surfaces courbes
  - Ecoulements secondaires dans des conduites
  - Ecoulements en rotation
  - Ecoulements 3D
  - Ecoulements décollés
  - Ecoulements avec chocs ou forts gradients de pression

Exemples : ν_t « exact » vs ν_t modélisé

- Ecoulement dans un canal plan :

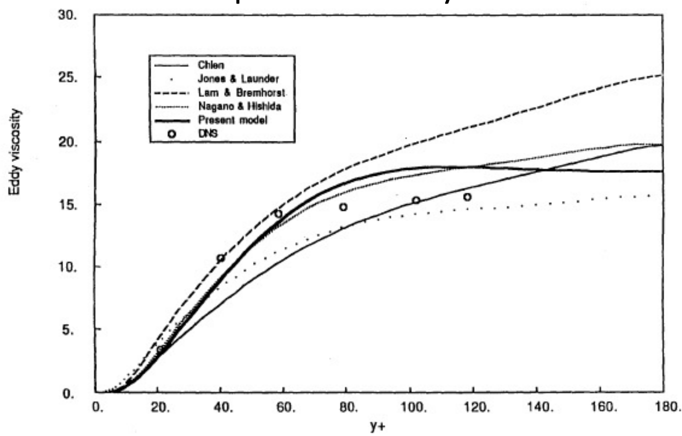


K-epsilon standard (f_μ=1)



[Durbin, 2009]

K-epsilon bas-Reynolds

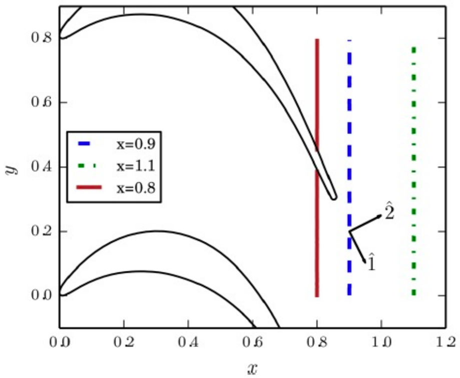


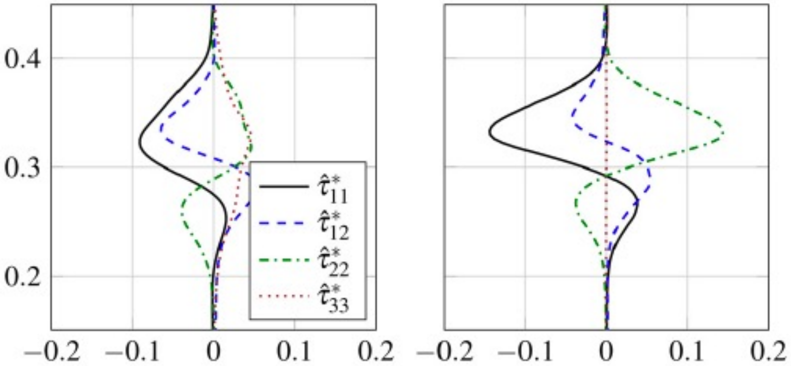
(Shih, 1990)

$$\nu_{t,exact} = \frac{\overline{u'v'}}{\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|}; \qquad \nu_{t,k-\epsilon} = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}; \qquad \nu_{t,v2f} = C_\mu \overline{v'^2} \frac{k^2}{\epsilon}$$

Exemples : ν_t « exact » vs ν_t modélisé

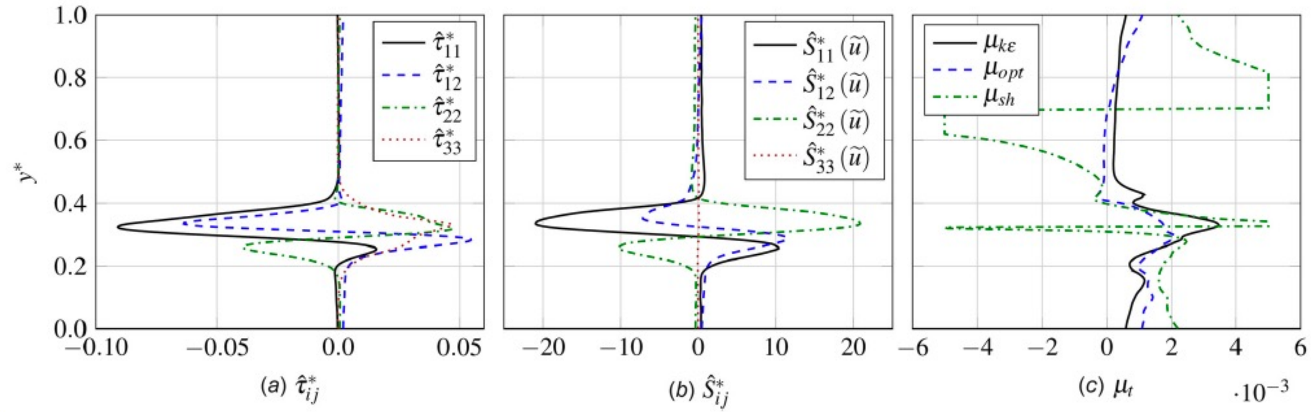
- Ecoulement dans une grille d'aubes de turbine (rotor NASA T106) [Pitchler et al., 2016]





(a) $\hat{\tau}^*_{DNS,ij}$ (b) $\hat{\tau}^*_{k\varepsilon,ij}$

Profils de τ^R_{ij} exacts et modélisés pour x=0.9



(a) $\hat{\tau}^*_{ij}$ (b) $\hat{S}^*_{ij}$ (c) μ_t

Profils de a_{ij} et $\bar{S}_{ij}$ exacts et μ_t associé pour x=0.9

$$\mu_{t,k\varepsilon} = 0.09\overline{\rho}\frac{k^2}{\varepsilon} \qquad \mu_{t,\mathrm{sh}} = \frac{1}{2}\frac{\hat{\tau}^*_{12}}{\hat{S}^*_{12}}$$

$$\mu_{t,\mathrm{opt}} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\tilde{S}^*_{kl}\tau^*_{kl}}{\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}S^{*2}_{kl}}$$

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Exemples : écoulement de Tucker-Reynolds

- Le champ de vitesse moyen est défini par :
  - $\bar{u} = U; \bar{v} = 0; \bar{w} = 0$ pour $x < 0$
  - $\bar{u} = U; \bar{v} = -ay; \bar{w} = az$ a=cte est le taux de cisaillement moyen pour $0 < x < L$
  - $\bar{u} = U; \bar{v} = 0; \bar{w} = 0$ pour $x > L$
- A cause de la deformation appliquée, la turbulence deviant anisotropique, et elle ne retourne à l'isotropie que bien en aval de la zone perturbée
- On introduit le paramètre de distorsion : $K = \dfrac{\overline{v'^2} - \overline{w'^2}}{\overline{v'^2} + \overline{w'^2}}$
- Pour un modèle Boussinesq :

$$\tau_{11}^R = -\frac{2}{3}\rho k; \tau_{22}^R = -\rho \nu_t a - \frac{2}{3}\rho k; \tau_{33}^R = \rho \nu_t a - \frac{2}{3}\rho k;$$

$$\tau_{12}^R = \tau_{13}^R = \tau_{23}^R = 0 \rightarrow$$

  - $K = 0 \quad x < 0\,; K = \frac{3}{2}\frac{a}{k}\,;\; K = 0 \quad x > L$
  - Pour a=0 → retour **immédiat** à l'isotropie $\left(\tau_{ij}^R = -\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}\right)$

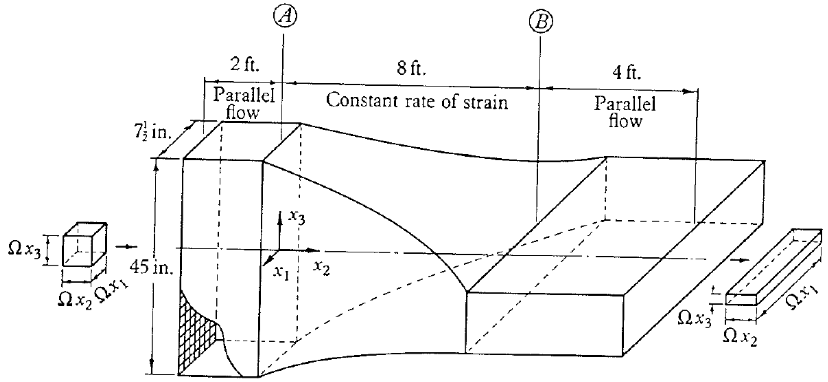


FIGURE 1. Laterally distorting tunnel, schematic representation of the section of wind tunnel producing a constant positive rate of strain in the horizontal direction and an equal negative rate of strain in the vertical direction.

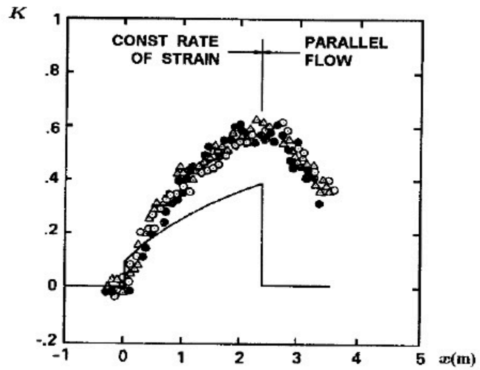


Figure 6.1: *Computed and measured distortion parameter for the Tucker-Reynolds plane-strain flow:* — *k-ω² model;* ○ ● △ *Tucker-Reynolds. [From Wilcox and Rubesin (1980).]*

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Exemples : écoulement sur une paroi courbe

- Parois courbes (convexes ou concaves), le frottement pariétal diffère fortement (>10%) de celui estimé à partir des équations de couche limite pour une paroi plane (par ex. équation intégrale de von Karman) dès que le rapport entre le rayon de courbure *R* et l'épaisseur locale de la couche limite δ est >100.
- La courbure a un effet encore plus important sur le flux de chaleur (20% d'écart)
- Les modèles Boussinesq classiques ne permettent pas de prendre en compte les effets de courbure
  - Pour une couche limite turbulente stationnaire 2D sur une paroi courbe, l'équation de *k* s'écrit :

$$\bar{u}\frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial k}{\partial y} = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\bar{u}}{R}\right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right]$$

  - Les effets de courbure n'apparaissent que dans le terme de production et il sont faibles devant le cisaillement moyen
- Des corrections de courbure ont été proposées pour certains modèles (Spalart-Allmaras, k-ω, …)
- Elles correspondent généralement à des corrections *ad hoc* et elles sont difficilement applicables à des écoulements arbitraires

Exemples : écoulements dans des conduites non axisymétriques

- Formation de tourbillons de coin (écoulements secondaires)
  - Donne lieu à une composante de vorticité selon l'axe du conduit (x)

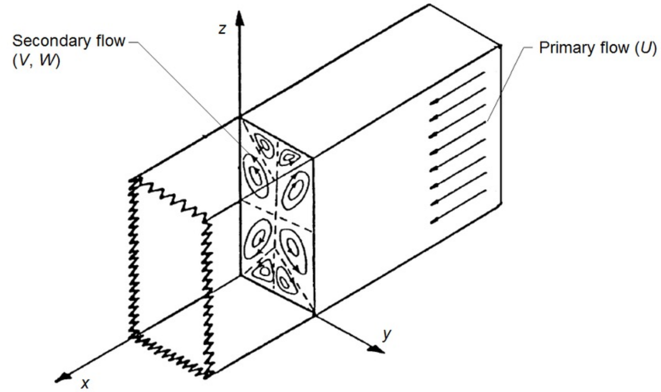
$$\bar{v}\frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2(\overline{w'^2} - \overline{v'^2})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{v'w'}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overline{v'w'}}{\partial z^2}$$

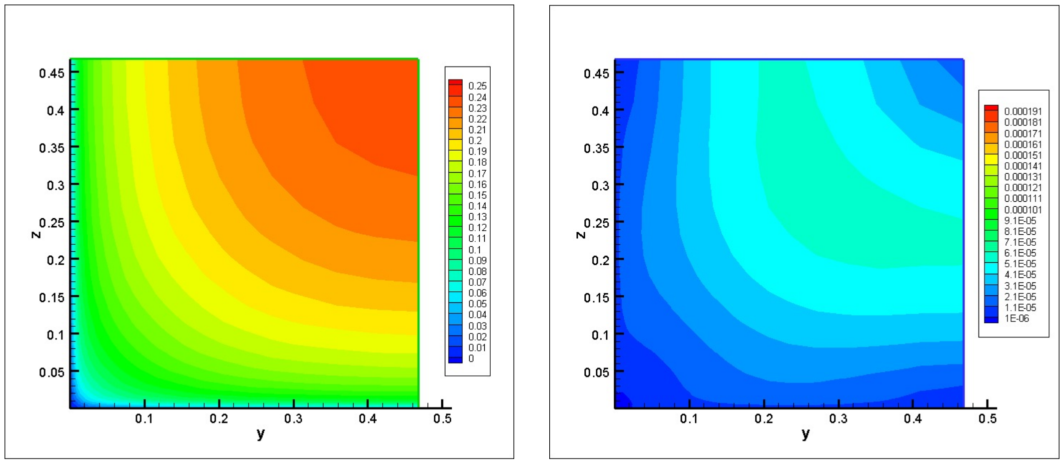
  - On démontre que, si $w'^2 = v'^2$, alors les termes de cisaillement sont 0
    - Pas de vorticité en x
  - Il faut donc $\overline{w'^2}$- $\overline{v'^2}$ $\neq 0$
  - Or, pour un modèle Boussinesq, on a :

$$\overline{v'^2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{2}{3}\bar{k},$$

$$\overline{w'^2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{2}{3}\bar{k},$$

  - A l'état initial, les vitesses $\bar{v}$ et $\bar{w}$ sont nulles dans tout le conduit et $\bar{\omega}_x$ aussi
  - Pas de mécanisme permettant la formation des écoulements secondaires
  - La seule composante de vitesse non nulle est $\bar{u}$





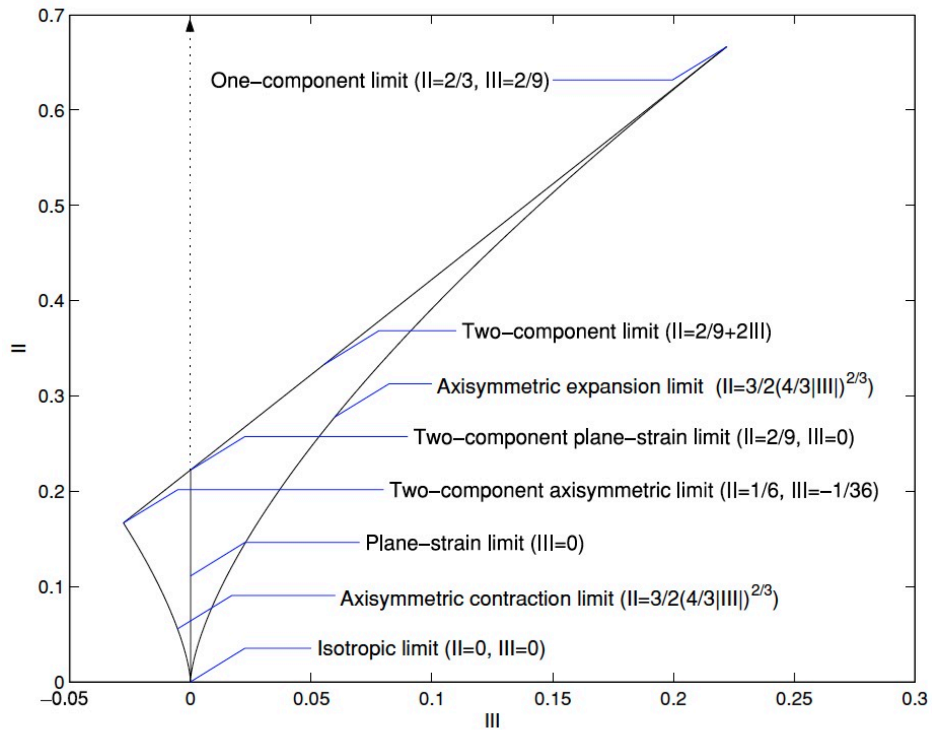
Modèle Spalart-Allmaras, vitesse axiale et transverse

Représentations graphiques du tenseur d'anisotropie

- Rappel : le tenseur d'anisotropie est diagonalisable $\mathbf{A} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}^{\boldsymbol{T}}$, avec $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A)$, et $\mathbf{E}$ la matrice des vecteur propres
- On peut utiliser les invariants de $\mathbf{A}$ pour décrire le caractère multi-dimensionnel des fluctuations turbulentes (1D, 2D ou 3D) :
  $I_A = tr(\mathbf{A}) = \lambda_1^A + \lambda_2^A + \lambda_3^A = 0; \quad (\lambda_1^A \geq \lambda_2^A \geq \lambda_3^A)$
  $II_A = tr(\mathbf{A})^2 - tr(\mathbf{A}^2) = \lambda_1^A\lambda_2^A + \lambda_1^A\lambda_3^A + \lambda_2^A\lambda_3^A;$
  $III_A = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1^A\lambda_2^A\lambda_3^A$
- Compte-tenu des conditions de réalisabilité de τ_{ij}^R , il faut que :

$$-1/3 \leq \frac{a_{ii}}{k} \leq 2/3; -1/2 \leq \frac{a_{ij}}{k} \leq 1/2$$

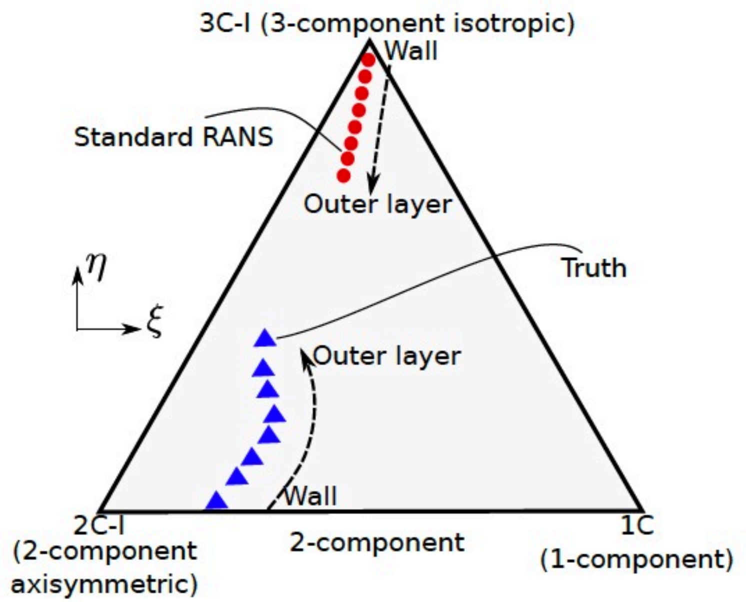
- Représentation via le **triangle de Lumley** (non linéaire)



SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ
∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Triangles baricentriques

- Représentation alternative (Banerjee)
- On pose $C_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \quad C_2 = 2(\lambda_2 - \lambda_3) \quad C_3 = 3\lambda_3 + 1 \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1$
- Un point à l'intérieur du triangle est identifié par ses distances aux trois sommets : $\xi = \xi_{1c}C_1 + \xi_{2c}C_2 + \xi_{3c}C_3$
- Pour un modèle RANS Boussinesq $a_{\mathrm{ij}} = 2\rho\nu_t\bar{S}_{ij}$ → en 2D III_A=0



Etats du tenseur d'anisotropie pour un écoulement pariétal 2D:

- rouge, RANS Boussinesq
- bleu, DNS

Modèles aux tensions de Reynolds (RSM)

- On rappelle l'équation exacte pour les tensions de Reynolds :

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = -\tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} + \rho\overline{u_i' u_j' u_k'}\right]$$

- Le terme $\overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}}$ peut être réécrit sous la forme :
- En posant
  - $\Pi_{ij} = \frac{1}{\rho}\overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$ → correlation pression/deformation
  - $\epsilon_{ij} = 2\frac{\mu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} = 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$ → tenseur de dissipation
  - $C_{ijk} = \overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{1}{\rho}\overline{p' u_i'}\delta_{jk} + \frac{1}{\rho}\overline{p' u_j'}\delta_{ik}$ → transport turbulent et diffusion de pression

on obtient enfin :

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = -\tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \rho\epsilon_{ij} - \rho\Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} + \rho C_{ijk}\right]$$

Modèles aux tensions de Reynolds (RSM)

- Potentiel des modèles RSM pour les écoulements hors équilibre
  - Les équations de transport pour les tensions de Reynolds prennent en compte par construction les effets d'histoire
  - La solution de ces équation n'est pas un tenseur isotrope (en général)
  - Les termes de convection et production des tensions de Reynolds permettent d'inclure les effets de rotation et courbure des lignes de courant

Fermeture des équations RSM

- De nombreuses variantes existent. Les hypothèses de modélisation les plus utilisées sont les suivantes :
  - Tenseur de dissipation isotrope : $\epsilon_{ij} \approx \frac{2}{3}\epsilon\delta_{ij}$, $\quad \epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$ à modéliser (comme pour les modèles à 2 équations)
    - Des versions anisotropiques existent (e.g. Hanjalic et Lauder, 1976)
  - Transport turbulent et de pression (LRR, Launder, Reece, Rodi, 1975) :
    - Une simple modélisation de type gradient ne permet pas d'assurer l'invariance à la rotation
    - LRR proposent une écriture plus générale $C_{ijk} = \frac{2}{3}C_s\frac{k^2}{\epsilon}\left[\frac{\partial \tau_{jk}^R}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}^R}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k}\right]$
  - Corrélation pression/déformation :
    - Rôle prépondérant (même ordre de grandeur que le terme de production)
    - Pour un écoulement incompressible les fluctuations de pression sont la solution de l'équation elliptique suivante :

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 p' = -2\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(u_i'u_j' - \overline{u_i'u_j'}\right)$$

terme « rapide » terme « lent »

(obtenue en prenant la divergence de la quantité de mouvement fluctuante)

- Nota : pour un écoulement compressible il s'agit d'une équation hyperbolique

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Fermeture des équations RSM

- Dans le cas de turbulence homogène il est possible de résoudre séparément les équations de Poisson pour le terme rapide et le terme lent et obtenir les pression fluctuante :

$$p' = p'_{slow} + p'_{rapid}$$

- Après injection dans la définition de Π_{ij}, on obtient :

$$\Pi_{ij} = \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{M}_{ijkl} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \quad (*)$$

- Avec $\mathcal{A}_{ij}$ et $\mathcal{M}_{ijkl}$ obtenus en utilisant la fonction de Green en espace libre :

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial^2 (u'_k u'_l)}{\partial y_k \partial y_l}} \frac{d^3 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \qquad \mathcal{M}_{ijkl} = \frac{1}{2\pi} \iiint_V \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u'_k}{\partial y_l}} \frac{d^3 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

- Remarque : le terme Π_{ij} dépend **d'intégrales en espace** → les tensions de Reynolds ne dépendent pas que des propriétés locales de l'écoulement
- En pratique, les corrélations turbulentes décroissent assez rapidement et il est possible d'étendre la formule (*) à des écoulements génériques, sous l'hypothèse d'homogénéité locale
- Les convolutions avec la fonction de Green sont très coûteuses à calculer : → remplacées par des modèles
  - Terme lent : Rotta, 1951
  - Terme rapide : LRR, 1975

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ ∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Fermeture des équations RSM

- Il reste encore à modéliser → équation de transport supplémentaire
  - Modèle RSM de Launder, Reece et Rodi : équation de transport pour ϵ
  - Alternative (modèle RSM de Wilcox) : une équation de transport pour ω

- **Remarques** :
  - un modèle RSM requiert la résolution de 7 équations de transport supplémentaires (en 3D)
  - un modèle RSM ne fait pas intervenir la viscosité tourbillonnaire
  - ce manque de dissipation peut entraîner des problèmes de robustesse numérique
  - Modèles a priori plus précis
  - Le coût accru et la moindre robustesse ont empêché une large utilisation des RSM dans les applications industrielles

Modèles RSM algébriques

- Modèles aux tensions de Reynolds algébriques (ARSM)
  - Equations pour τ_{ij}^R simplifiées sous l'hypothèse : $\frac{D\tau_{ij}^R}{Dt} \approx \frac{\tau_{ij}^R}{k}\frac{Dk}{Dt}$
  - On ne résout que des équations pour l'énergie cinétique turbulente et pour l'échelle de longueur
  - Relations algébriques implicites pour τ_{ij}^R → couteux en temps de calcul, parfois instables
- Modèles aux tensions de Reynolds algébriques explicites (EARSM)
  - Les relations précédentes sont réécrites de façon explicite sous une hypothèse d'équilibre local
  - On obtient des relations constitutives où le premier terme est de type Boussinesq, suivi par des termes qui sont des fonctions quadratiques du gradient de vitesse moyen
- Gatski and Speziale (1993) EARSM:

$$\tau_{ij}^R = 2\rho\nu_t\left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\,\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} - \rho\nu_t\,\frac{\alpha_4}{\omega}(\bar{S}_{ik}\bar{\Omega}_{kj} - \bar{\Omega}_{ik}\,\bar{S}_{kj}) + \rho\nu_t\,\frac{\alpha_5}{\omega}(\bar{S}_{ik}\,\bar{S}_{kj} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kl}\,\bar{S}_{kl}\delta_{ij})$$

avec $\nu_t = C_\mu^*\frac{k}{\omega}$; $C_\mu^* = \frac{3(1+\eta^2)\alpha_1}{3+\eta^2+6\eta^2\xi^2+6\xi^2}$; $\eta^2 = \frac{\alpha_2}{\omega^2}\bar{S}_{kl}\,\bar{S}_{kl}$; $\xi^2 = \frac{\alpha_3}{\omega^2}\bar{\Omega}_{kl}\,\bar{\Omega}_{kl}$

+ équations de transport pour k et ω (ou une grandeur permettant de calculer une longueur turbulente)

Modèles « non linéaires »

- L'approximation de Boussinesq donne lieu à une loi de comportement linéaire pour le tenseur d'anisotropie

$$a_{\mathrm{ij}} = 2\rho\nu_t\bar{S}_{ij}$$

- On peut imaginer d'utiliser un polynôme tensoriel d'ordre supérieur, par exemple en incluant des termes quadratiques
- On suppose que a_{ij} ne dépend que du gradient de vitesse et on cherche une fonction tensorielle de la forme :

$$a_{\mathrm{ij}}= a_{\mathrm{ij}}(\bar{S}_{ij}, \bar{\Omega}_{ij})$$

- Théoriquement, celle-ci peut-être écrite sous la forme d'une série infinie de polynomes
- La théorie des invariants montre que le tenseur d'anisotropie peut-être écrit sous la forme :

$$a_{ij} = \sum_{l=1,\ldots,10} \alpha_l(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)T_{ij}^l$$

où seulement 10 tenseurs (3 en 2D) et 5 invariants (2 en 2D) sont nécessaires :

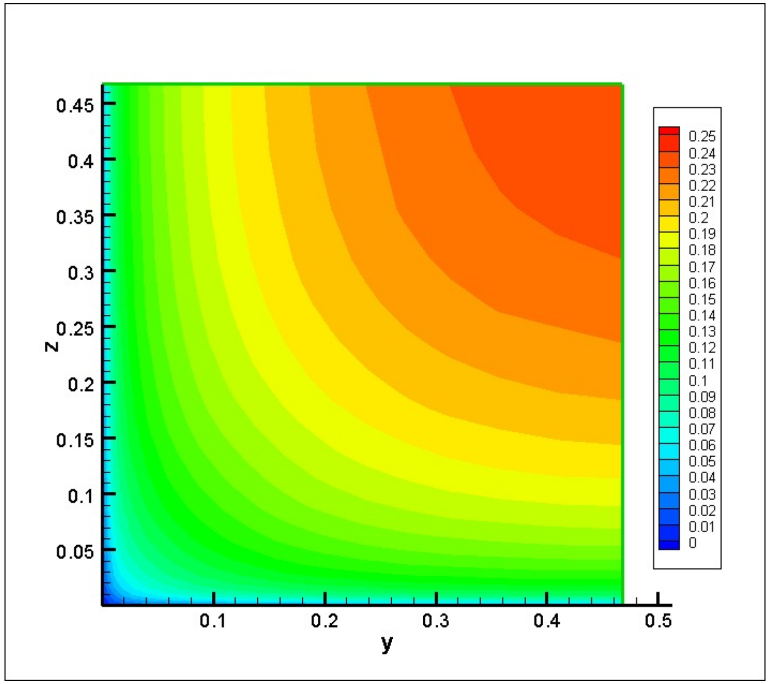
- $T_{ij}^1 = \bar{S}_{ij}; T_{ij}^2 = \bar{S}_{ik}\bar{\Omega}_{kj} - \bar{\Omega}_{ik}\,\bar{S}_{kj}; T_{ij}^3 = \bar{S}_{ik}\,\bar{S}_{kj} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kl}\,\bar{S}_{kl}\delta_{ij}; T_{ij}^4 = \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3}\bar{\Omega}_{kl}\,\bar{\Omega}_{kl}\delta_{ij}$ → termes quadratiques (seuls en 2D)
- $T_{ij}^5 = \bar{\Omega}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{S}_{lj} - \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{\Omega}_{lj};\ T_{ij}^6 = \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{S}_{lj} + \bar{S}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{\Omega}_{lj} - \frac{2}{3}(\bar{S}_{nk}\,\bar{\Omega}_{kl}\bar{\Omega}_{lm})^2\ \delta_{ij}$ → termes cubiques
- $T_{ij}^7 = \bar{\Omega}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{\Omega}_{lm}\bar{\Omega}_{mj} - \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{S}_{lm}\bar{\Omega}_{mj}; T_{ij}^8 = \bar{S}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{S}_{lm}\bar{S}_{mj} - \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{\Omega}_{lm}\bar{S}_{mj};$
  $T_{ij}^9 = \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{S}_{lm}\bar{S}_{mj} + \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{\Omega}_{lm}\bar{\Omega}_{mj} - \frac{2}{3}\left(\bar{S}_{pk}\bar{S}_{kl}\bar{\Omega}_{lm}\bar{\Omega}_{mn}\right)^2\delta_{ij}$ →ordre 4
- $T_{ij}^{10} = \bar{\Omega}_{ik}\bar{S}_{kl}\bar{S}_{lm}\bar{\Omega}_{mn}\bar{\Omega}_{nj} - \bar{\Omega}_{ik}\bar{\Omega}_{kl}\bar{S}_{lm}\bar{S}_{mn}\bar{S}_{nj}$ → ordre 5
- $I_1 = |\bar{S}^2|; I_2 = |\bar{\Omega}^2|; I_3 = |\bar{S}^3|; I_4 = |\bar{\Omega}^2\bar{S}|; I_5 = |\bar{\Omega}^2\bar{S}^2|$ (invariants 2D)

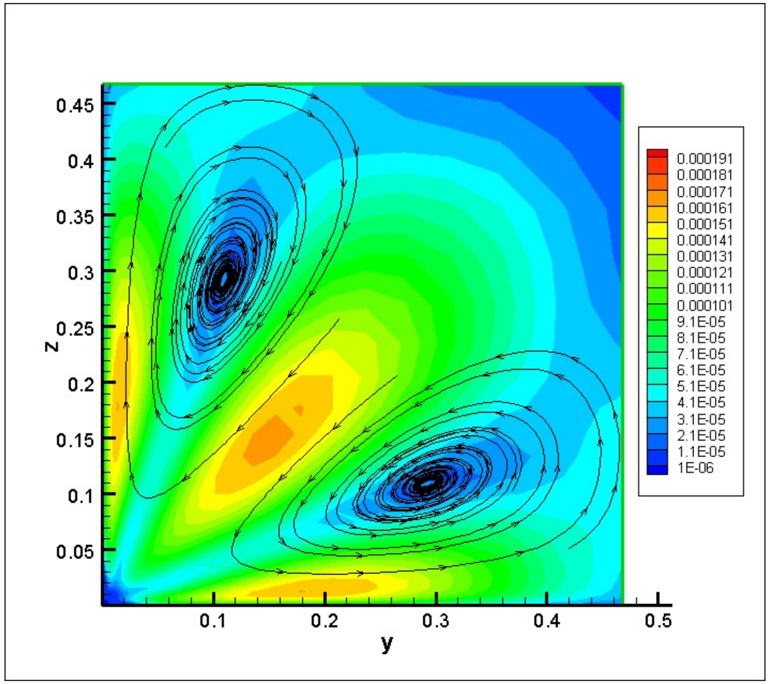
Modèles « non linéaires »

- Pope (1975) introduit la notion de « viscosité tourbillonnaire effective » (non linéaire), en s’appuyant sur la décomposition tensorielle précédente
- Les modèles EARSM de Gatski et Speziale utilisent la même base tenseurs et peuvent donc être vus comme des modèles non linéaires
- Modèles non linéaires alternatifs:
  - Modèle QCR (*quadratic constitutive relation*) de Spalart (2000) :
    loi de comportement quadratique + équation de transport pour la viscosité tourbillonnaire
  - Modèle non linéaire de Speziale (1989) :
    analogie avec les lois de comportement pour les fluides de Oldroyd (viscoélastiques)

Applications

- Ecoulement dans un conduit carré, modèles EARSM k-l



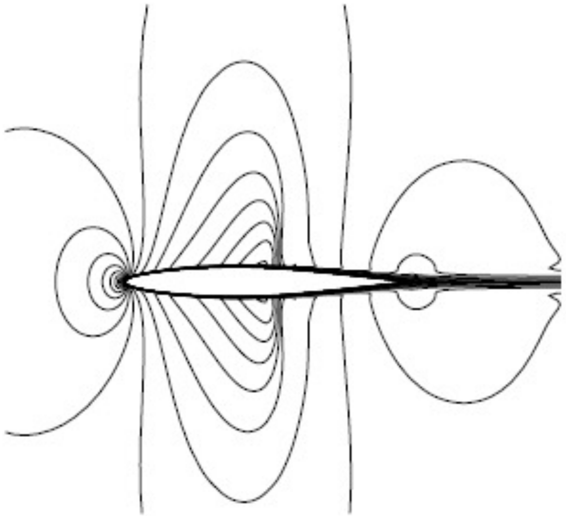


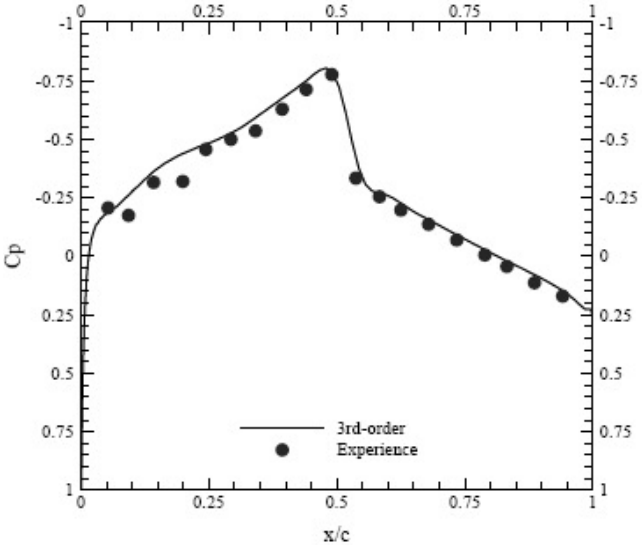
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

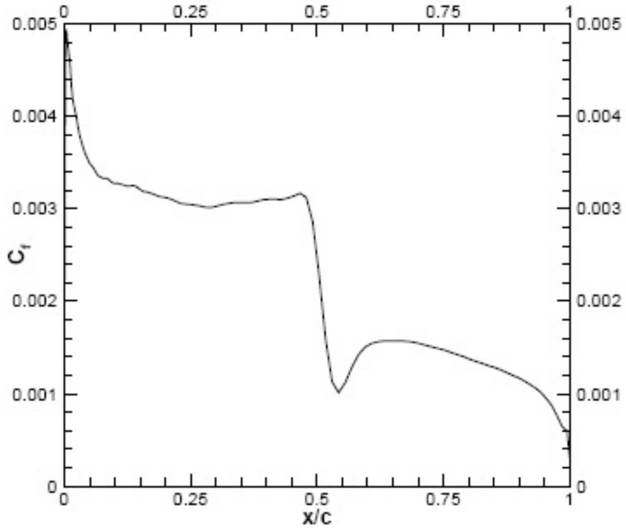
∂'Alembert Institut Jean le Rond d'Alembert

Applications

- Ecoulement transsonique à faible incidence autour d’un NACA64A010
- Mach=0.796, Re=12e6, AoA=0
- Résultats, modèle de Baldwin-Lomax

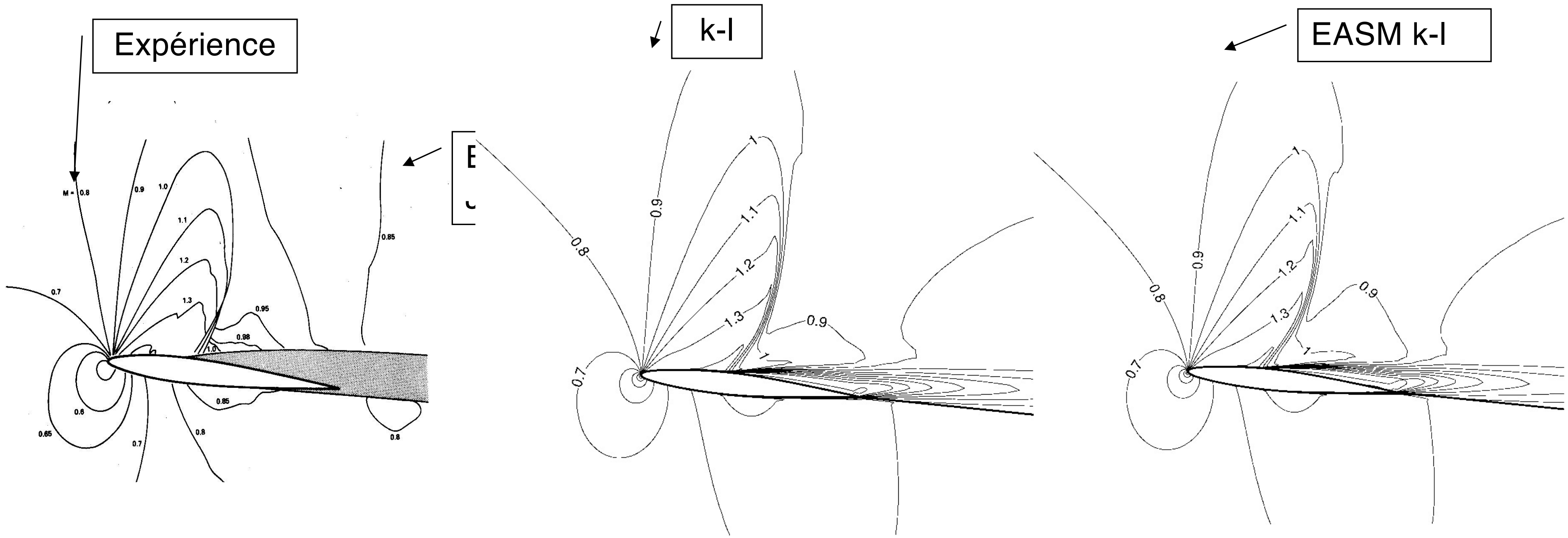




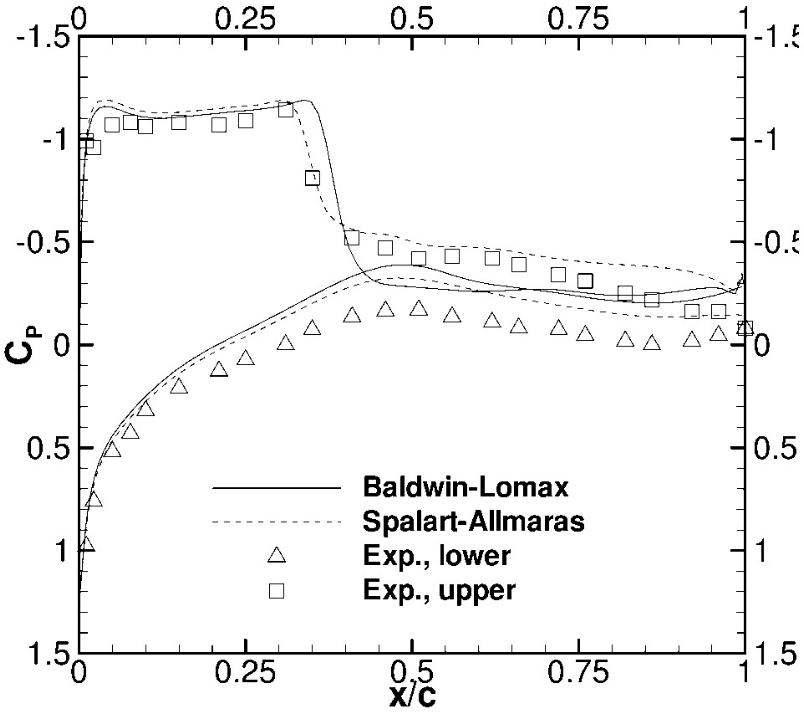


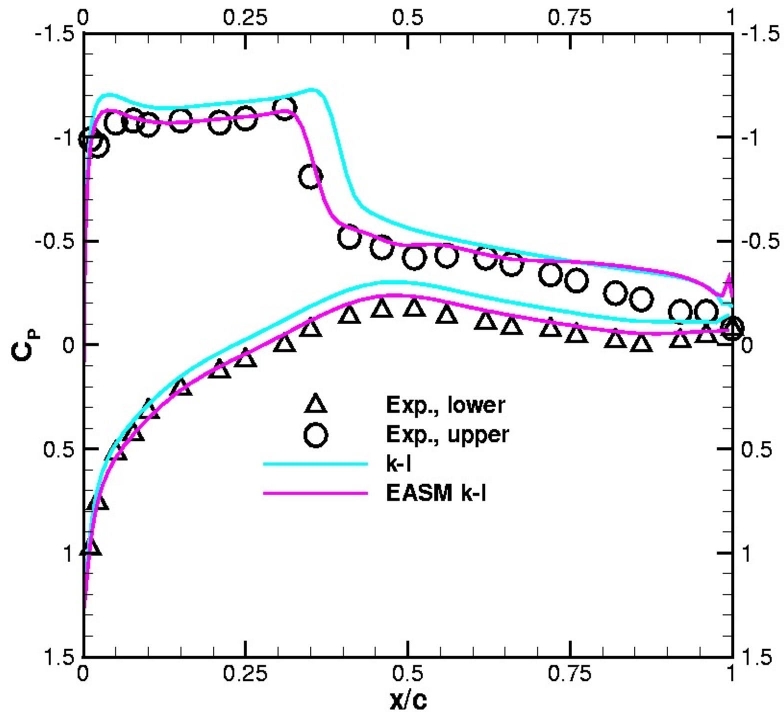
Applications

- Ecoulement transsonique à faible incidence autour d'un NACA64A010
- Mach=0.796, Re=12e6, AoA=4°
- Lignes isoMach



Coefficient de pression à la paroi

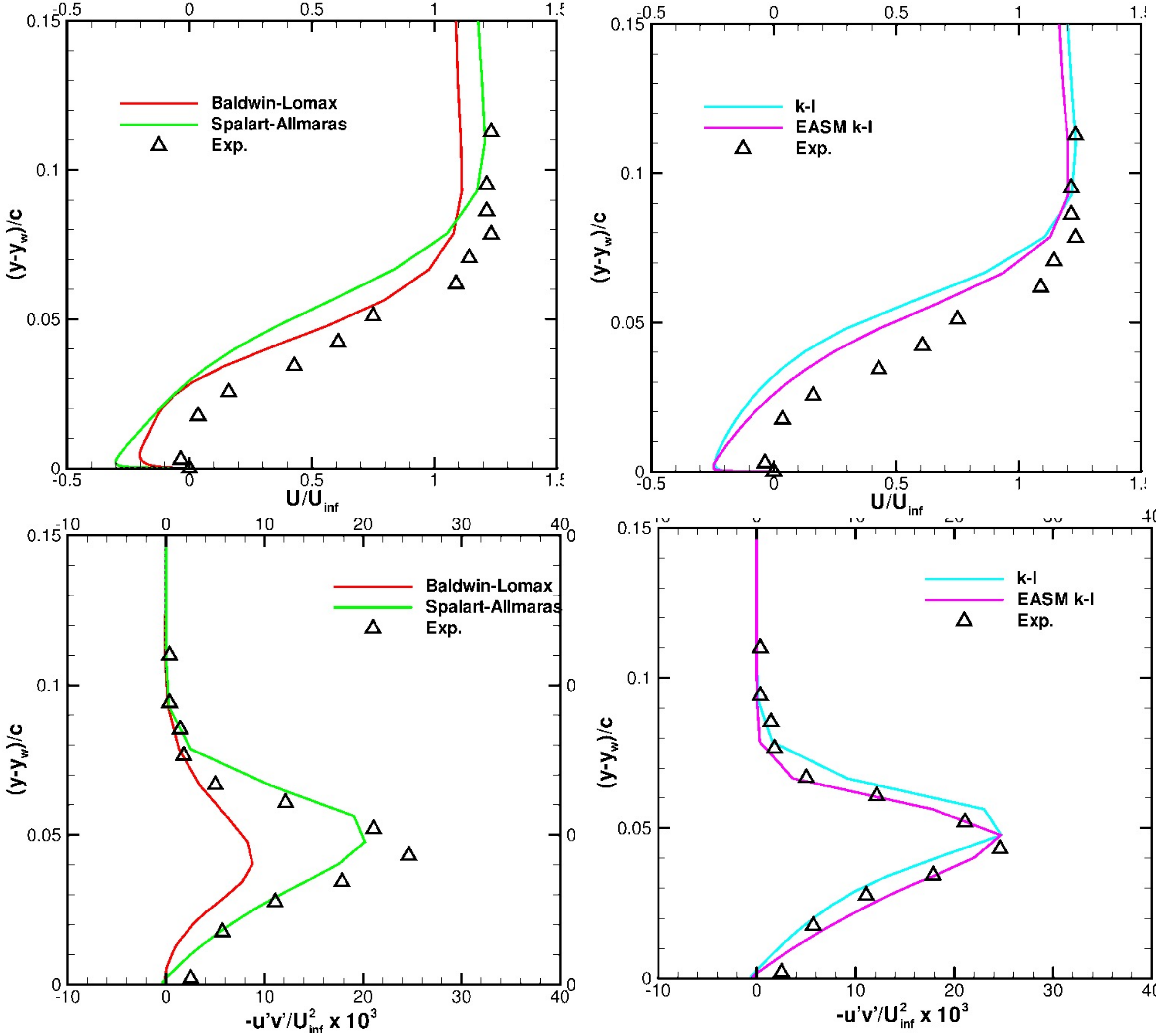




SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

∂'Alembert
Institut Jean le Rond d'Alembert

Profils de vitesse/cisaillement pour x/c=0.67 (extrados)



SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Coût de calcul

Model	CFL	Total cost
B-L	2	0.433
S-A	2	0.533
k-ε	2	1
k-l	2	0.833
EASM k-ε	1	2.33
EASM k-l	1	1.70

Convergence level: 5 orders of magnitude

Récapitulatif sur les modèles RSM et non linéaires

Avantages

- Modèles complets
- Tiennent (mieux) compte des effets
  - d'histoire,
  - rotation,
  - Courbure
  - gradients de pression
  - anisotropie

Inconvénients

- Plus grande complexité que les modèles Boussinesq
- Coût de calcul plus important
- Moindre robustesse numérique