Chapitre 3 Méthodes variationnelles appliquées aux problèmes elliptiques

1. Le problème modèle du Laplacien

1.1 Conditions aux limites de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$ une donnée. Le problème modèle que l'on propose de résoudre est :

$$(P.C)\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega. \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

L'approche variationnelle est constitué de trois étapes :

1- établissement de la formulation variationnelle
2- résolution de la formulation variationnelle
3- équivalence avec le problème continu ; interprétation de la formulation.

Etape 1 : Etablissement de la formulation variationnelle

C'est une étape formelle au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution afin que les calculs soit licites. On multiplie l'équation par une fonction test régulière, qui vérifie les conditions limite de type Dirichlet du problème (et en général les conditions aux limites cinématiques) et on intègre sur le domaine. On définit l'espace fonctionnel

$$V = \{ v(x) \text{, régulière dans } \bar{\Omega} \text{ ; } v(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega \}$$

On cherche donc $u \in V$ tel que $\forall v \in V$ on ait :

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Après la formule de Green :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, v \, ds + \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in V$$

or $v=0$ sur $\partial\Omega$, d'où :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad , \forall v \in V .$$

Pour que le terme de gauche ait un sens il suffit que $\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \in L^2(\Omega)$ $\Rightarrow \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \in L^1(\Omega)$ et l'intégrale au sens de Lebesgue est bien définie. Pour que le terme de droite ait un sens il suffit que $v \in L^2(\Omega)$ car on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$.

De toutes ces considérations on déduit le choix de V ; $\boxed{V = H_0^1(\Omega)}$

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ t.q.} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec $a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx$

$L(v) = \int_\Omega f v \, dx$

Remarque : Des choix différents sur a, L ou V peuvent conduire à d'autres formulations variationnelles possibles.

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle

On va démontrer maintenant que le (PV) admet une unique solution. On appliquera le théorème de Lax-Milgram, dont on vérifiera les hypothèses :

- $H_0^1(\Omega) = V$ est un espace de Hilbert pour la norme $|v|_1 = \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ (inégalité de Poincaré)
- a est bilinéaire (et même symétrique)
- a est continue car $\exists M = 1$ tel que $\forall u, v \in V$
  $|a(u,v)| \leq M \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.
  (en appliquant Cauchy-Schwarz)
- a est coercive car $\exists \alpha = 1 > 0$ t.q. $\forall v \in V$:

$$a(v,v) \geq \alpha \int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx .$$

- L est linéaire et continue car

$$|L(v)| = |\int_\Omega f v dx| \leq \left(\int_\Omega f^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2}$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2} \leq C \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx\right)^{1/2} .$$

donc $\exists M > 0$, $M = C\|f\|_{L^2}$ t.q. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|L(v)| \leq M |v|_1 .$$

D'après le théorème de Lax-Milgram $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$a(u,v) = L(v) \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Etape 3 : Equivalence avec le problème aux limites (P.C).

Cette étape est la plus délicate. On doit vérifier qu'en résolvant le problème variationnel, on a bien résolu le problème aux limites. Il faut préciser en quel sens.

Nous allons donc faire une intégration par parties au sens inverse, en les justifiant.

On suppose Ω et u suffisamment régulières : $\underline{u \in H^2(\Omega)}$

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \, \vec{\nabla} v \, dx = -\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\Delta u + f) v \, dx = 0 , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (1)$$

Cette égalité sera vraie, en particulier pour $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$

Or $f \in L^2(\Omega)$, donc, d'après le résultat du chap. précédent

($\int f \varphi \, dx = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f = 0$ pp ds Ω)

$$\Delta u + f = 0 \text{ pp ds } \Omega . \quad (-\Delta u = f \quad \text{ds } L^2(\Omega)) \quad (*)$$

Or, $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \exists\, \gamma u$ trace de u sur $\partial\Omega$, $\gamma u \in L^2(\partial\Omega)$

et $\gamma u = 0$.

$\Rightarrow u = 0$ pp sur $\partial\Omega$. ($u = 0$ ds $L^2(\partial\Omega)$) $(**)$

On a donc retrouvé ((*), (**)) le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pp. ds } \Omega. \\ u = 0 & \text{pp sur } \partial\Omega \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Si l'on ne suppose plus que u = régulière, il faut travailler d'avantage (la formule de Green ne peut plus être utilisée). L'équation (*) sera vérifiée au sens des distributions.

En conclusion, on a démontré le résultat suivant :

▶ <u>Proposition</u> : Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$.
Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} a(u,v) = L(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \\ a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega f v \, dx . \end{array} \right.$$

De plus, u vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pp ds } \Omega. \\ u = 0. & \text{pp sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution u vérifie l'équation et la condition aux limites au sens faible, i.e. presque partout. On dira qu'il s'agit d'une solution faible par opposition aux solutions fortes vérifiant les équations en tout point.
En réalité, la solution faible peut être même une solution forte si le second membre est plus régulier.

Il nous reste maintenant à vérifier que le pb. soit bien posé au sens de Hadamard, c'est-à-dire que la solution dépende continûment des données. Pour cela on utilisera le corollaire de Lax-Milgram du chap. précédent.

Proposition : Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$

L'application $\left| \begin{array}{l} L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \\ f \mapsto u = \text{unique solution du (P.V)} \end{array} \right.$

est une application linéaire, continue et on a :

$\exists C > 0$, telle que $\forall f \in L^2(\Omega)$

$$\boxed{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}} \quad (*)$$

Preuve : La linéarité est évidente. Pour obtenir la continuité on prend $v = u$ dans (P.V) :

$$a(u,u) = L(u) \iff \int_\Omega |\vec{\nabla} u(x)|^2 dx = \int_\Omega f u \, dx .$$

On applique Cauchy - Schwarz :

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} u(x)|^2 dx = \int_\Omega f u \, dx \leq \left(\int_\Omega f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après la coercivité de a, on a :

$$\exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \quad a(u,u) = \underbrace{\|\vec{\nabla} u\|^2_{L^2(\Omega)}}_{|u|_1} \geq \overbrace{\left(\frac{1}{C+1}\right)}^{\gamma} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Donc $\quad \gamma \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma}\right)}_{= C} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Il existe donc $C = \frac{1}{\gamma} > 0$ t.q. l'inégalité ci-dessus ait lieu

Remarque : L'inégalité $(*)$ est une estimation énergétique : estimation "a priori". Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par la donnée.

<u>Proposition</u> : Soit Ω ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$,

$f \in L^2(\Omega)$

u l'unique solution du pb variationnel

$$(PV) \begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Alors u est aussi l'unique point minimum de l'énergie sur $H^1_0(\Omega)$, i.e u est solution unique du problème de minimisation :

$$(PM) \begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ I(u) \leq I(v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \\ \text{avec } I(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \end{cases}$$

Réciproquement, si u est l'unique solution de (PM) alors u est l'unique solution du (PV)

<u>Preuve</u> : c'est une application directe de la conséquence du th. de Stampacchia avec $K = H^1_0(\Omega)$ sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega) = H$ espace de Hilbert.

<u>Hypothèse essentielle</u> : $\boxed{\text{Symétrie de } a}$!

Si ce n'est pas le cas la solution u de la formulation variationnelle ne minimise pas l'énergie $I(v)$ sur $H^1_0(\Omega)$.

<u>Interprétation mécanique</u> : problème d'équilibre d'une membrane élastique.

$H^1_0(\Omega)$ = espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles.

$v \in H^1_0(\Omega)$ = champ de déplacement virtuel admissible.

$a(u,v)$ = le travail des efforts intérieurs élastiques dans un champ virtuel v

$L(v)$ = travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacement virtuel v

Formulation variationnelle = équilibre (égalité des travaux)

Pb de minimisation = théorème de l'énergie potentielle (le déplacement solution minimise l'énergie totale = énergie de déformation $\frac{1}{2} a(v,v)$ + l'énergie potentielle des forces extérieures sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles).

1.2 Conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes

On considère le problème suivant :

$$(D.N) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{ds } \Omega \\ u = \bar{u} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in L^2(\partial\Omega)$ données du problème

Etape 1 . Formulation variationnelle :

Si on fait un choix de V similaire au pb. de Dirichlet homogène, on est amené à considérer

$$V = \{ v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ régulier sur } \Omega, \ v(x) = \bar{u}(x), \forall x \in \partial\Omega \}$$

! Problème : V n'est pas un espace vectoriel donc on ne pourra pas appliquer Lax-Milgram.

Il va falloir donc faire un changement de variable pour se ramener sur l'espace $\tilde{V} = H_0^1(\Omega)$ sur lequel on pourra appliquer les résultats d'I !

Pour faire ce changement de variable on utilise le résultat suivant (sans dém) :

Proposition : Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$ et soit $h \in L^2(\partial\Omega)$. Il existe alors une fonction $g \in H^1(\Omega)$ telle que

$g(x) = h(x)$ p.p sur $\partial\Omega$

g = relèvement de h ; $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_{|\partial\Omega} = h$.

g n'est pas unique !

En appliquant cette proposition $\Rightarrow \exists\, \bar{u}_p \in H^1(\Omega)$ telle que

$\bar{u}_{p|\partial\Omega} = \bar{u}$ pp sur $\partial\Omega$.

On construit

$$\boxed{\tilde{u}(x) = u(x) - \bar{u}_p(x)}$$

et on cherche le problème dont $\tilde{u}$ est solution.

$$u = \tilde{u} + \bar{u}_p \Rightarrow \begin{cases} -\Delta(\tilde{u} + \bar{u}_p) = f & \text{ds } \Omega \\ \tilde{u}_{|\partial\Omega} + \underbrace{\bar{u}_{p|\partial\Omega}}_{=\bar{u}} = \bar{u} \end{cases}$$

Or

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta(\tilde{u} + \bar{u}_p) = f & \text{ds } \Omega \\ \tilde{u}_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On cherche donc $\tilde{u} \in \tilde{V} = \{ v(x) \text{ régulier} \mid v_{|\partial\Omega} = 0 \}$

On multiplie l'équ. par $\tilde{v} \in \tilde{V}$ (fonction test) et on intègre sur Ω :

$$\underbrace{\int_\Omega -\Delta(\tilde{u} + \bar{u}_p)\, \tilde{v}\, dx}_{=} = \int_\Omega f \tilde{v}\, dx$$

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(\tilde{u} + \bar{u}_p) \underbrace{\tilde{v}}_{0}\, ds + \int_\Omega \vec{\nabla}(\tilde{u} + \bar{u}_p) \cdot \vec{\nabla}\tilde{v}\, dx = \int_\Omega f \tilde{v}\, dx$$

$$\underbrace{\int_\Omega \vec{\nabla}\tilde{u} \cdot \vec{\nabla}\tilde{v}\, dx}_{a(\tilde{u}, \tilde{v})} = \underbrace{\int_\Omega f \tilde{v}\, dx - \int_\Omega \vec{\nabla}\bar{u}_p \cdot \vec{\nabla}\tilde{v}\, dx}_{\tilde{L}(\tilde{v}) = L(\tilde{v}) - a(\bar{u}_p, \tilde{v})}$$

$\tilde{u}$ est donc solution du problème :

$$\text{V-DH} \begin{cases} \tilde{u}(x) \in \tilde{V}(x) \\ a(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{L}(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \end{cases}$$

Obs : D'ailleurs, si u est solution du pb. (DN) alors il est solution du pb.

$$\text{V-DN} \begin{cases} u \in V = \{ v(x) \text{ régulier ds } \Omega \mid v(x) = \bar{u}(x) \text{ sur } \partial\Omega \} \\ \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\,dx}_{a(u,\,v-u)} = \underbrace{\int_\Omega f(v-u)\,dx}_{L(v-u)}, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

et on observe que $(\text{V-DN}) \iff (\text{V-DH})$.

- Etape 2 : Résultat d'existence.

Le problème

$$(1) \begin{cases} \tilde{u} \in \tilde{V} = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ pp sur } \partial\Omega \} = H^1_0(\Omega) \\ a(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{L}(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \end{cases}$$

admet une solution unique $\tilde{u} \in H^1_0(\Omega)$, qui dépend du relèvement $(\bar{u}_p)$.

Justification : – $H^1_0(\Omega)$ = espace de Hilbert, muni de la norme $|v| = \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

– a est bilinéaire, continue et coercive (même symétrique) (idem pb. conditions de Dirichlet hom.)

– $\tilde{L}$ est linéaire, continue car.

$$|\tilde{L}(\tilde{v})| = \left| \int_\Omega f\tilde{v}\,dx - \int_\Omega \vec{\nabla}\bar{u}_p \cdot \vec{\nabla}\tilde{v}\,dx \right| \le \left| \int_\Omega f\tilde{v}\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int_\Omega \vec{\nabla}\bar{u}_p \cdot \vec{\nabla}\tilde{v}\,dx \right| \underset{CS}{\le} \|f\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|\tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}}_{\underset{\text{Poincaré}}{\le} \sqrt{C}\, \|\vec{\nabla}\tilde{v}\|_{L^2}} + \|\vec{\nabla}\bar{u}_p\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\vec{\nabla}\tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\le \sqrt{C}\, \|\vec{\nabla}\tilde{v}\|_{L^2} + \|\vec{\nabla}\bar{u}_p\|_{L^2} \|\vec{\nabla}\tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \le \underbrace{\left(\sqrt{C} + \|\vec{\nabla}\bar{u}_p\|_{L^2}\right)}_{M} |\tilde{v}|$$

En utilisant le th. de Lax-Milgram on a
$\exists ! \, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ solution du pb (1).

⚠ $\tilde{u}$ dépend du relèvement $\bar{u}_p$. (qui n'est pas unique !)
On a donc démontré l'existence de la solution du problème :

$$(2) \quad \begin{cases} u \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v(x) = \bar{u}(x) \text{ pp sur } \partial\Omega \} \\ a(u, v-u) = L(v-u), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

$u = \tilde{u} + \bar{u}_p$ avec $\tilde{u}$ sol. unique du pb 1.

→ Démontrons maintenant l'unicité : soit u^* et u deux solutions $u^* \in V$, $u \in V$ tq.

$$a(u^*, v-u^*) = L(v-u^*), \quad \forall v \in V \quad (3)$$
$$a(u, v-u) = L(v-u), \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

On prend $v = u$ ds (3) et $v = u^*$ ds (4) :

$$\left. \begin{aligned} a(u^*, u-u^*) &= L(u-u^*) \\ a(u, u^*-u) &= L(u^*-u) \end{aligned} \right\} +$$

$$a(u^*-u, u-u^*) = 0 \implies a(u-u^*, u-u^*) = 0.$$

Comme a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ et que $u-u^* \in \tilde{V} = H_0^1(\Omega)$

$$\implies |u-u^*|^2 \alpha \leq a(u-u^*, u-u^*) = 0$$
$$\implies u = u^* \text{ pp ds } \Omega. \quad \left(\text{car } |\cdot| \text{ est équivalente à la norme } \|\cdot\|_{H^1} \right)$$

• Etape 3 : Interprétation de la formulation variationnelle :
(retour à la formulation forte)

Pour $\tilde{u}$ suffisamment régulier, on fait une intégration par parties : $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ et $\bar{u}_p \in H^2(\Omega)$

On a : $$\int_\Omega -\Delta\tilde{u}\,\tilde{v}\,dx = \int_\Omega f\tilde{v}\,dx + \int_\Omega \Delta\bar{u}_p \cdot \tilde{v}\,dx, \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$$

$$\implies \int_\Omega [\Delta(\tilde{u}+\bar{u}_p) + f] \cdot \tilde{v}\,dx = 0, \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$$

Or $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $\Delta(\tilde{u}+\bar{u}_p)$ L^2, $f \in L^2$.

d'où $\quad -\Delta(\tilde{u}+\bar{u}_p) = f$ pp ds Ω.

$\Rightarrow \quad -\Delta u = f$ pp ds Ω.

Par ailleurs $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \gamma\tilde{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ (au sens de $L^2(\partial\Omega)$)

$\bar{u}_p \in H^1(\Omega)$, $\gamma\bar{u}_p = \bar{u}$ sur $\partial\Omega$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma(\tilde{u}+\bar{u}_p) = \bar{u}$ sur $\partial\Omega \Rightarrow \gamma u = \bar{u}$ sur $\partial\Omega$.

Obs. Si $\tilde{u}$ et $\bar{u}_p$ ne sont pas suffisamment régulières on peut quand même s'en sortir, mais c'est plus laborieux.

On peut donc énoncer le résultat suivant d'$\exists !$:

Proposition : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in L^2(\partial\Omega)$. Alors le problème

$$\begin{cases} u \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid \gamma u = \bar{u} \text{ pp. sur } \partial\Omega \} \\ a(u, v-u) = L(v-u), \ \forall v \in V \end{cases}$$

avec $a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx$, $L(v) = \int_\Omega f v \, dx$

admet une solution unique et cette solution vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ pp ds } \Omega \\ u = \bar{u} \text{ pp sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Proposition : Soit u solution du pb. variationnel

$$\left\| \begin{array}{l} u \in V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = \bar{u} \text{ pp sur } \partial\Omega \} \\ a(u, v-u) = L(v-u) \end{array} \right.$$

Alors $\exists C > 0$ telle que $\forall f \in L^2(\Omega)$, $\forall \bar{u} \in L^2(\partial\Omega)$ on ait

$$\|u\|_{H^1} \le C(\|f\|_{L^2} + \|\bar{u}\|_{L^2(\partial\Omega)})$$

Preuve : On a $a(\tilde{u},\tilde{u}) = \tilde{L}(\tilde{u}) \Rightarrow \exists \alpha > 0$ tq

$$\alpha \|\tilde{u}\|_{H^1}^2 \le \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2} \|\tilde{u}\|_{L^2} + |\bar{u}_p|_1 |\tilde{u}|_1 .$$