

Ecrit 1 - Mardi 12 mars 2014

Durée de l'épreuve : 2 heures

Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.

Les disques de turbine de moteurs d'avions sont des pièces tournantes munis d'aubes soumises à des forces centrifuges importantes. Pour préserver l'intégrité du moteur en service, il est capital de dimensionner ces disques vis à vis de leur éclatement, (Figure 1). L'objectif de ce problème est d'estimer la vitesse limite de fonctionnement de disques par une modélisation simplifiée qui ne tient pas compte de l'aubage des disques.

Nous considérons ici un disque plein d'axe \underline{e}_z , de section circulaire dans le plan $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$, de rayon $r = R$. Le disque a pour épaisseur $2h$ selon \underline{e}_z , épaisseur qui est petite devant le rayon R , (Figure 2).

Le disque est réalisé dans un matériau supposé élastique linéaire, homogène, isotrope, de module de Young E , de coefficient de Poisson ν (ou de manière équivalente de coefficients de Lamé λ et μ).

Le disque est libre d'effort sur sa surface latérale $r = R$, les surfaces supérieure et inférieure $z = -h$ et $z = h$ sont également libres d'efforts.

Il tourne à la vitesse angulaire $\omega \underline{e}_z$ supposée constante. On admettra qu'en se plaçant dans le référentiel tournant à cette vitesse angulaire, le disque peut être supposé en équilibre sous l'action des efforts volumiques suivants induits par sa vitesse d'entraînement :

$$\rho_0 \underline{f}(r) = \rho_0 \omega^2 r \underline{e}_r. \quad (1)$$

On supposera le contexte de petites perturbations licite.

1. Ecrire les équations et conditions aux limites du problème posé.

Ce problème est-il régulier ou non ? Justifier la réponse.

Définir les espaces des champs cinématiquement admissibles \mathcal{U}_{ad} et statiquement admissibles Σ_{ad} pour ce problème.

Discuter de l'existence et l'unicité d'une solution. On justifiera la réponse vis à vis du type du problème.

2. On se propose de rechercher une solution de ce problème en supposant le champ de contraintes plan parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Justifier cette hypothèse pour ce problème.

Rappeler la forme du champ de contraintes et du champ de déformations associé sous cette hypothèse.



(a)



(b)

Figure 1: Disque avec son aubage (a). Disque éclaté après un essai de sur-vitesse (b).
S. Forest, École des Mines de Paris.

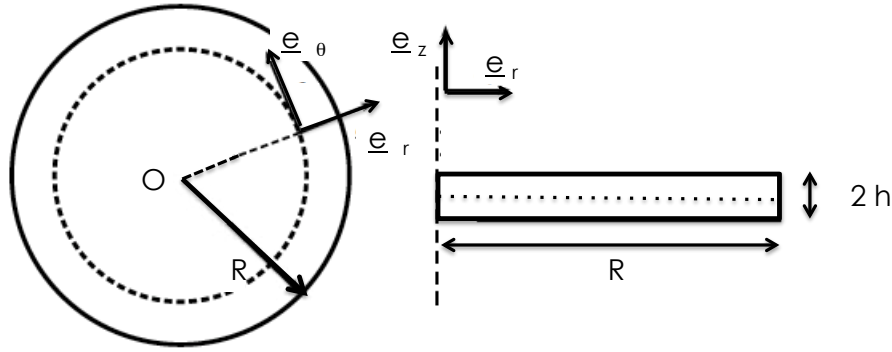


Figure 2: Schématisation du disque.

3. Montrer que les efforts volumiques $\rho_0 \underline{f}$ (donnés par (1)) dérivent d'un potentiel V , c'est à dire s'expriment sous la forme

$$\rho \underline{f} = -\underline{\text{grad}}(V),$$

où $\underline{\text{grad}}$ est le vecteur gradient d'une fonction scalaire $V(x_1, x_2)$.

On montrera que le potentiel $V(x_1, x_2)$ est donné par :

$$V(x_1, x_2) = -\rho_0 \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2), \text{ ou encore } V = V(r) = -\rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 \text{ avec } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

En déduire que, sous l'hypothèse des contraintes planes, les composantes dans le repère $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ d'un tenseur des contraintes statiquement admissibles pour ce problème s'expriment en fonction des dérivées secondes d'une fonction $\chi(x_1, x_2)$ et du potentiel $V(x_1, x_2)$ sous la forme :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_2} + V, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_1} + V, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2)$$

4. Expliciter les composantes $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ et ε_{33} du tenseur des déformations linéarisées en fonction des dérivées de $\chi(x_1, x_2)$ et de $V(x_1, x_2)$.
5. Rappeler l'expression générale des équations de compatibilité en tridimensionnel et expliquer ce qu'elles traduisent.

Montrer que sous l'hypothèse des contraintes planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$, ces équations se réduisent à 4 équations non triviales satisfaites par les composantes du tenseur des déformations linéarisées.

Expliciter ces équations et montrer qu'elles s'expriment en fonction de $\chi(x_1, x_2)$ et du potentiel $V(x_1, x_2)$ sous la forme :

$$\Delta(\Delta\chi)(x_1, x_2) + (1 - \nu) \Delta V(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in S, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta\chi)}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in S, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta\chi)}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in S, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta\chi)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in S, \quad (6)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien, S une section quelconque du disque d'équation $x_3 = z =$ constante.

6. Compte-tenu des symétries du problème, on recherche la fonction χ solution de l'équation (3) uniquement fonction de la variable radiale, soit $\chi = \chi(r)$.

En effectuant le changement de repère (ce que l'on ne demande pas de faire), on peut exprimer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans le repère $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ en fonction de $\chi(r)$ à partir des relations (2). On admettra qu'elles sont données par :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + V(r) \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{d^2\chi}{dr^2} + V(r), \quad \sigma_{r\theta}(r) = 0.$$

Déduire de l'équation (3) satisfaite par $\Delta\chi(r)$ la relation suivante :

$$\Delta\chi(r) = B + (1 - \nu) \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2}, \quad \forall 0 \leq r < R,$$

où B est une constante quelconque.

On utilisera le formulaire et un argument physique en $r = 0$ que l'on justifiera.

Poursuivre l'intégration et montrer que les composantes non nulles du tenseur des contraintes sont nécessairement de la forme :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{B}{2} + (1 - \nu) \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{8} - \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2},$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{B}{2} + 3(1 - \nu) \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{8} - \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2}.$$

7. Achiver la détermination du tenseur des contraintes.

On vérifiera qu'il est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r) = \rho_0 \omega^2 \frac{(3 + \nu)}{8} [R^2 - r^2] (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho_0 \frac{\omega^2}{8} [(3 + \nu)R^2 - (1 + 3\nu)r^2] (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta),$$

où \otimes désigne le produit tensoriel.

8. Expliciter les 6 composantes du tenseur des déformations linéarisées dans le repère cylindrique.
9. On recherche un champ de déplacement indépendant de la variable θ .

Déduire de la composante $\varepsilon_{\theta\theta}$ du tenseur des déformations linéarisées et du formulaire, l'expression suivante de la composante radiale du déplacement :

$$u_r(r) = \frac{1}{E} \rho_0 \frac{\omega^2}{8} r (1 - \nu) \left[(3 + \nu) R^2 - (1 + \nu) r^2 \right].$$

Justifier que l'exploitation de la composante ε_{rr} conduirait au même résultat.

Montrer que la composante du déplacement selon \underline{e}_θ est de la forme $u_\theta = \alpha r$, où α est une constante quelconque.

Interpréter cette expression en lien avec la question 1.

10. Montrer qu'il n'est pas possible de déterminer la composante du déplacement selon \underline{e}_z .

Rapprocher ce résultat des relations de la question 5. Commenter la difficulté rencontrée. Quelle hypothèse doit-on remettre en question ?

La Figure 3 présente la déformée du disque obtenue par résolution numérique. Commenter cette déformée vis à vis des résultats obtenus analytiquement.

11. Pour procéder à un dimensionnement simplifié du disque, on exploite malgré tout la solution analytique en contraintes obtenue en question 7.

On adopte un critère de rupture fragile piloté par la contrainte normale maximale et on note σ_0 la contrainte critique.

En s'appuyant sur le tracé des contraintes présenté à la Figure 4, positionner les 3 contraintes principales dans la représentation de Mohr.

En quel(s) point(s) la contrainte normale maximale atteint-elle sa plus grande valeur ?

Montrer alors que la vitesse limite supportable par le disque est donnée par

$$\rho_0 \omega_*^2 = \frac{8 \sigma_0}{R^2 (3 + \nu)}.$$

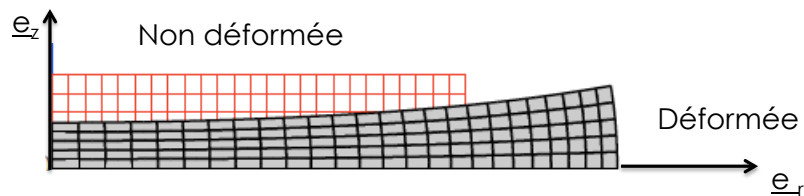


Figure 3: Déformée d'un disque mince en rotation, (S. Forest, École des Mines).

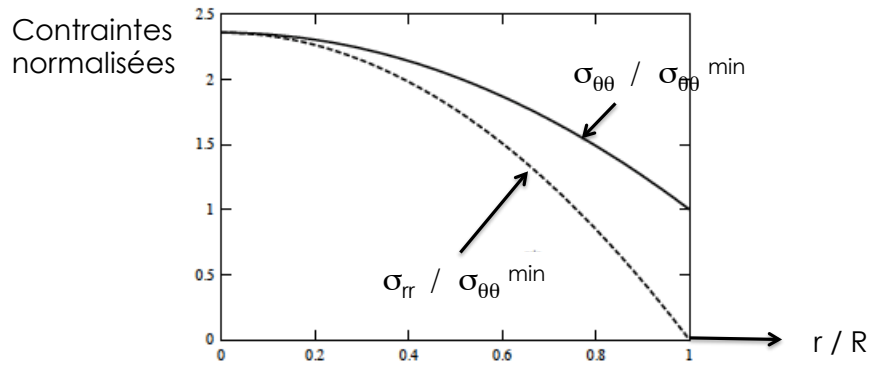


Figure 4: Profil des contraintes dans un disque mince en rotation normalisé par la contrainte circonférentielle minimale (avec $\nu = 0,3$), (*S. Forest, École des Mines*).

Formulaire en coordonnées cylindriques

Laplacien d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{v}(r, \theta, z) = v_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$