

Partie 1 - Cinématique

1.1 Accélérations eulériennes: $\underline{\dot{\gamma}}(\underline{x}) = \frac{d\underline{v}^A(\underline{x})}{dt}$

$\underline{v}^A(\underline{x}) = v_0 \underline{e}_1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega^A \Rightarrow \underline{\dot{\gamma}}^A(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega^A$

$\underline{v}^B(\underline{x}) = U \sin \omega t \underline{e}_2 \quad \forall \underline{x} \in \Omega^B \Rightarrow \underline{\dot{\gamma}}^B(\underline{x}) = \frac{d\underline{v}^B}{dt} = \frac{\partial \underline{v}^B}{\partial t}$

$\Rightarrow \underline{\dot{\gamma}}^B(\underline{x}) = U \omega \cos(\omega t) \underline{e}_2 \quad \forall \underline{x} \in \Omega^B$

$\underline{v}^C(\underline{x}) = v_0 \underline{e}_1 + U \sin \omega t \underline{e}_2 \quad \forall \underline{x} \in \Omega^C$

$\Rightarrow \underline{\dot{\gamma}}^C(\underline{x}) = \frac{d\underline{v}^C}{dt} = U \omega \cos \omega t \underline{e}_2 \quad \forall \underline{x} \in \Omega^C$

Le mouvement A dans le domaine Ω^A est stationnaire $\frac{\partial \underline{v}^A}{\partial t} = \underline{0}$, en revanche les mouvements B et C ne le sont pas.

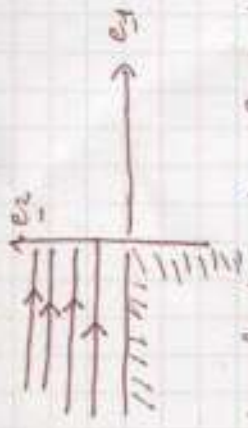
1.2 Lignes de courant dans les domaines Ω^A et Ω^B

• pour $t = t^*$ fixé les lignes de courant sont solutions de

(tel que $x_1(t^*) < 0$) $\begin{cases} dx_1 v_2^A = dx_2 v_1^A \\ dx_3 v_2^A = dx_2 v_3^A \\ dx_1 v_3^A = dx_3 v_1^A \end{cases}$

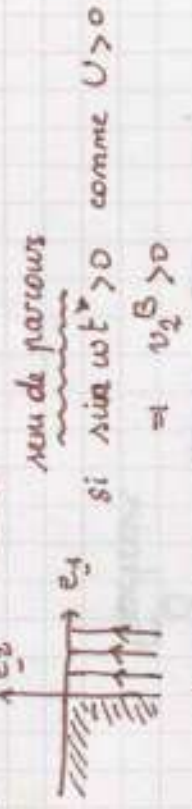
soit comme $\begin{cases} v_2^A = v_3^A = 0 \\ v_1^A \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_2 = 0 \\ dx_3 = 0 \end{cases}$ et donc

$x_2 = \text{cte}$
 $x_3 = \text{cte}$ il s'agit de droites parallèles à l'axe \underline{e}_1 dans le plan $x_3 = 0$ i.e.



• dans le domaine Ω^B à $t = t^*$ fixé tel que $\begin{cases} x_2(t^*) < 0 \\ x_1(t^*) > 0 \end{cases}$ les lignes de courant sont solutions de

$dx_1 = 0$ et $dx_3 = 0$ il s'agit cette fois de lignes droites parallèles à l'axe \underline{e}_2 dans le plan $x_3 = 0$



$\Rightarrow v_2^B > 0$ si $\sin \omega t^* > 0$ comme $U > 0$
si $\sin(\omega t^*) < 0$ comme $U > 0$
 $v_2^B < 0$

1.3 Lignes de courant dans le domaine Ω^C

à $t = t^*$ tel que $x_1(t^*) > 0$ et $x_2(t^*) > 0$, les lignes de courant sont telles que

$\begin{cases} dx_1 U \sin(\omega t^*) = dx_2 v_0 \\ dx_3 = 0 \end{cases}$ soit $x_2 = \left(\frac{U \sin \omega t^*}{v_0} x_1 + \text{cte} \right)$

il s'agit de droites de pente $\frac{U \sin \omega t^*}{v_0} = \alpha$ avec $\alpha > 0$ si $\sin \omega t^* > 0$

③

si on a $\alpha < 0$



Soit en regroupant les représentations



1.4 Trajectoire dans le domaine Ω^A

Soit $P_0 (X_1, X_2, X_3) / X_1 < 0, X_2 > 0$ et $X_3 = 0$
 l'équation de la trajectoire de P_0 (tout puc $x_1(t) < 0$ / $x_2(t) > 0$)
 est donnée par résolution du système différentiel

$$\frac{dx_1}{dt} = v_0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0$$

avec $x_1(t=0) = X_1, \quad x_2(t=0) = X_2, \quad x_3(t=0) = X_3$

④

soit donc $\begin{cases} x_1 = v_0 t + X_1, & x_2 = X_2, & x_3 = X_3 = 0 \end{cases}$
 il n'agit d'une droite parallèle à l'axe x_1 suite

tant que $t(x_1(t) < 0$ soit $v_0 t + X_1 < 0 \quad t < -\frac{X_1}{v_0}$
 On retrouve une ligne de même nature que les lignes de courant ce qui est bien attendu le mouvement dans ce cas étant stationnaire

1.5 Trajectoire dans le domaine Ω^C

soit $t > t^A = -\frac{X_1}{v_0}$ la particule rentre dans le domaine Ω^C et ena cette foi à l'issue :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_0 \\ \frac{dx_2}{dt} = U \sin \omega t \quad \text{avec} \quad x_2(t=t^A) = \text{position en} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{sortie du mouvement } \Omega^A \text{ de la particule } P_0$$

soit $x_1(t=t^A) = v_0 t^A + X_1 = 0, \quad x_2(t=t^A) = X_2$
 $x_3(t=t^A) = 0$

la sorte puc $\begin{cases} x_1(t) = v_0 t + C_1 \\ x_2(t) = -\frac{U}{\omega} \cos \omega t + C_2 \\ x_3(t) = C_3 \end{cases}$

(5)

avec
$$\begin{cases} x_1(t_A) = v_0 t_A + C_1 = 0 \\ x_2(t_A) = -\frac{U}{\omega} \cos(\omega t_A) + C_2 = X_2 \\ x_3(t_A) = C_3 = 0 \end{cases}$$

d'où
$$\begin{aligned} C_1 &= -v_0 t_A = -v_0 \left(-\frac{X_1}{v_0} \right) = X_1 \\ C_2 &= X_2 + \frac{U}{\omega} \cos \left(-\omega \frac{X_1}{v_0} \right) = X_2 + \frac{U}{\omega} \cos \left(\frac{\omega X_1}{v_0} \right) \\ C_3 &= 0 \end{aligned}$$

et donc l'équation de la trajectoire de P_0 lorsque $t > t_A$ est tel que $x_2(t) \geq 0$ (la particule ne rentre pas dans le domaine Ω^B) et donné par :

équation paramétrique de P_0 trajectoire.

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 t + X_1 \\ x_2(t) = -\frac{U}{\omega} \cos(\omega t) + X_2 + \frac{U}{\omega} \cos \left(\frac{\omega X_1}{v_0} \right) \\ x_3(t) = 0 \end{cases}$$

soit encore en éliminant le temps : $t = \frac{x_1(t) - X_1}{v_0}$

$$\begin{cases} x_2(t) = X_2 - \frac{U}{\omega} \cos \left(\omega \left[\frac{x_1 - X_1}{v_0} \right] \right) + \frac{U}{\omega} \cos \left(\frac{\omega X_1}{v_0} \right) \\ x_3(t) = 0 \end{cases}$$

la trajectoire est sinusoïdale en temps, ce qui est différent des lignes de courant, en cohérence avec le fait que le mouvement est instationnaire dans ce domaine

(6)

1.6 Interprétation physique

Un polluant émis d'un point P_0 situé dans Ω^A ne rentrera pas dans le domaine Ω^B si $\forall t$ on a $x_2(t) > 0$, soit donc

$$x_2 + \frac{U}{\omega} \cos \left(\frac{\omega X_1}{v_0} \right) - \frac{U}{\omega} \cos \omega t > 0 \quad \forall t$$

ou $\forall t \quad \cos \omega t < 1 \Rightarrow -\cos \omega t > -1$

et $\cos \frac{\omega X_1}{v_0} > -1$

d'où
$$X_2 + \frac{U}{\omega} \cos \left(\frac{\omega X_1}{v_0} \right) - \frac{U}{\omega} \cos \omega t > X_2 - 2 \frac{U}{\omega}$$

de sorte que si $\left\{ \begin{aligned} &X_2 - 2 \frac{U}{\omega} > 0 \text{ alors la condition} \end{aligned} \right.$

(*1) sera automatiquement satisfaite

De sorte que si le polluant est issu d'un point P_0 du domaine Ω^A situé en $X_2 / X_2 < 2 \frac{U}{\omega}$, il rentrera dans le domaine Ω^B et se rapprochera de la côte

. si U est grand, même si ce point P_0 est situé loin de la côte le long de Ω^A ($X_2 < 2 \frac{U}{\omega}$) le polluant rentrera dans le domaine Ω^B .

il en est de même de w petit (oscillations lentes du courant dans Ω^b) : un polluant même emisé d'un point P_0 / $X_1 < 0$ et $X_2 < \frac{2U}{w}$ et potentiellement loin de la côte $X_2 = 0$ rentrera dans le domaine Ω^B . le risque de pollution est donc accru le long de la côte (située le long de l'axe e_2) si le mouvement dans Ω^B est soit de vitesse U grande, soit de faibles oscillations (w petit).

Partie 2 : Etude de la transformation

2.1 Tenseur gradient de la transformation

pour $t < t_A$ avec $t_A = -\frac{X_1}{v_0}$

$$\underline{\underline{F}} = \nabla_{\underline{x}} \underline{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{transformation} \\ \text{homogène} \end{matrix} \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(t) \quad \begin{matrix} \text{indépendant de} \\ \underline{x} \end{matrix}$$

pour $t > t_A$

$$\underline{\underline{F}} = \nabla_{\underline{x}} \underline{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -U \frac{\cos(\frac{wX_1}{v_0})}{v_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{non homogène} \end{matrix}$$

ici $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\underline{x})$ non homogène

pour $t < t_A$ $\det \underline{\underline{F}} = J(\underline{x}, t) = 1 \quad \forall \underline{x} \forall t$
 de sorte que $\det \underline{\underline{F}} > 0 \quad \forall \underline{x} \forall t$ la transformation est donc bien définie.
 pour $t > t_A$ $\det \underline{\underline{F}} = J(\underline{x}, t) = 1 \quad \forall \underline{x}, \forall t$ de même.
 et soit $d\Omega_0$ un volume infinitésimal centré en P_0 à $t=0$, on a (dsc) son transformé à l'instant t /
 $d\Omega_t = J(\underline{x}, t) d\Omega_0 = d\Omega_0 \quad \forall t < t_A$ et $t > t_A$
 donc le volume est conservé dans la transformation

2.2 - Tenseur de dilatation et de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{C}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad , \quad \underline{\underline{C}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad \underline{\underline{C}}(\underline{x}, t) \quad t < t_A$$

pour $t < t_A$ $\underline{\underline{C}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{I}}$ et $\underline{\underline{C}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}}$

le mouvement est rigidifiant $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}} \quad \forall \underline{x} \forall t < t_A$:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(\underline{x}, t) = \underline{\overset{D}{F}}(t) \underline{x} + \underline{\overset{D}{a}}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{\overset{D}{a}}(t) = v_0 t \underline{e}_1$$

il s'agit d'un mouvement de translation selon \underline{e}_1
 le carré élémentaire ne subit aucun allongement dans la direction $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et les angles sont conservés

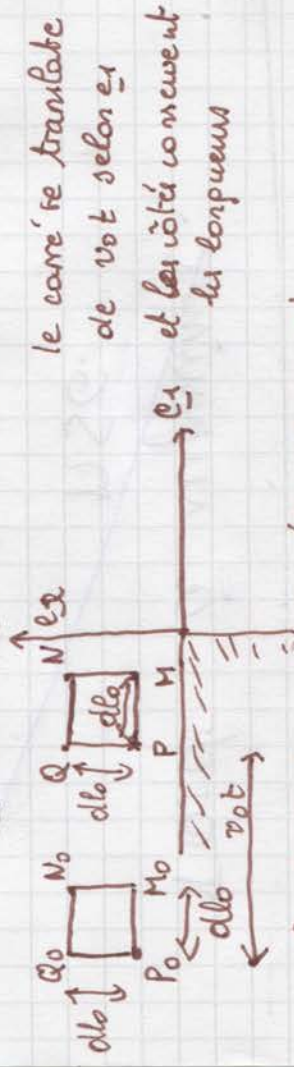
• $\lambda(e_1) = \sqrt{C_{11}} = \lambda(e_2) = \lambda(e_3) = 1$

• $\sin \theta = 0 \quad (C_{12} = 0) \Rightarrow \theta = \pi/2$

angle de glissement entre e_1 et e_2 après transformation

la transformation écart homopène (pour $t < t_A$)

les côtés du carré restent droits



$P_0: (x_1, x_2, 0) \Rightarrow P: (x_1 + v_0 t, x_2, 0)$

$M_0: (x_1 + d_{lo}, x_2, 0) \Rightarrow M: (x_1 + d_{lo} + v_0 t, x_2, 0)$

$N_0: (x_1 + d_{lo}, x_2 + d_{lo}, 0) \Rightarrow N: (x_1 + d_{lo} + v_0 t, x_2 + d_{lo}, 0)$

$Q_0: (x_1, x_2 + d_{lo}, 0) \Rightarrow Q: (x_1 + v_0 t, x_2 + d_{lo}, 0)$

0 2.3 Transformation pour $t > t_A$

$t > t_A \quad \underline{\underline{C}}(X, t) = \begin{pmatrix} 1 & +a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{C}}(X, t) = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}}(X, t) = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \end{matrix}$

Par définition $\lambda(e_1) = \sqrt{C_{11}}$ dilatation selon e_1

d'un élément de longueur init de $P_0: (x_1, x_2, 0)$ tel que $x_1 > 0$
 $x_2 > 0$
(cas $t > t_A$) dans la direction e_1

$\lambda(e_1) = \sqrt{1+a^2}$

$\lambda(e_2) = 1 \quad \lambda(e_3) = 1$

$\sin \gamma_{12} = \frac{\lambda(e_1) \lambda(e_2)}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

γ_{12} angle de glissement subi par 2 vecteurs initialement de longueur portés par e_1 et e_2 initialement

Partie 3 : Transformation infinitésimale

3.1 déplacement, gradient de déplacement

Pour $t > t_A$ $\begin{cases} \delta_1(X, t) = x_1 - X_1 = v_0 t \\ \delta_2(X, t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cos(\frac{\omega X_1}{v_0}) \\ \delta_3(X, t) = 0 \end{cases}$

$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\delta}}(X, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\delta}}(X, t) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\delta}}^T) = \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \\ e_1 e_2 e_3 \end{matrix}$

3.2 Hypothèse des transformations infinitésimales

l'hypothèse des petites perturbations est satisfaite si

$$\forall X, \forall t \quad \|\nabla \underline{\underline{\varepsilon}}\| \ll 1 \quad \text{soit ici} \quad a \ll 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U}{v_0} \sin(\omega X_1) \ll 1 \quad \forall X_1 \end{array} \right\} \text{ si } \begin{array}{l} \text{très petit ou très grand} \end{array}$$

cette condition sera automatiquement satisfaite

si la lenteur du mouvement du ΩA est importante ou celle dans ΩB est très petite

Dans ce cas $a^2 \ll 1$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}(X, t)$ calculé à la

question 2.3 devient $\underline{\underline{\varepsilon}}(X, t) \approx \begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on retrouve $\underline{\underline{\varepsilon}}(X, t) \approx \underline{\underline{\varepsilon}}(X, t)$ tenseur des déformations linéaires calculé à la question 3.1.

3.3 Transformation du carré en HPP

$$\varepsilon_1 = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \varepsilon_{11} = 0 \quad \text{allongement relatif d'un élément de longueur portée par } \underline{e}_1 \text{ dans } \Omega_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{direction } \underline{e}_2$$

donc les côtés d'un carré élémentaire ne subissent aucun allongement (hypothèse HPP).

• résultat cohérent avec $\lambda(\underline{e}_1) = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1+a^2}$

obtenu en partie 2 soit $\lambda(\underline{e}_1) \approx 1 + \frac{1}{2}a^2$ si $a^2 \text{ petit}$

d'aut $\lambda(\underline{e}_1) - 1 = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \varepsilon_1 = \frac{1}{2}a^2 \ll 1$

$$\lambda(\underline{e}_2) = 1 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$$

$$\lambda(\underline{e}_3) = 1 \Rightarrow \varepsilon_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \delta_{12} = \delta_{12} = 2 \varepsilon_{12} = a \\ \text{en HPP} \end{array} \right.$$

de même ce résultat est en accord avec ce qui

a été obtenu dans une transformation quelconque

(partie 2) $\sin \delta_{12} = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \approx 2a$ si $a \ll 1$

3.4. Déformations principales linéaires

$$\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & a/2 & 0 \\ a/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (\lambda^2 - a^2/4) = 0$$

soit $(-\lambda)(\lambda^2 - \frac{a^2}{4}) = 0$ 3 valeurs propres distinctes

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ (vidente)} \\ \lambda_I = -\frac{a}{2} \\ \lambda_{II} = \frac{a}{2} \end{array} \right. \quad \text{déformations principales}$$

\underline{e}_3 associée à $\lambda_{II} = 0$ (direction principale associée à $\lambda_{II} = 0$)

$\underline{e}_I, \underline{e}_{III} = \pm \frac{a}{2} \underline{e}_{III}$ (direction principale associée à $\lambda_{III} = a/2$)

soit
$$\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{pmatrix}$$

ou encore
$$\begin{cases} a e_{II} = a/2 e_I \\ e_{III} = 0 \end{cases} \text{ d'où } \underline{e_{III}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et après normalisation $\underline{e_{III}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_I + e_{II})$

} direction principale associée à $\lambda_{III} = \frac{a}{2}$

de la même manière

} $\underline{e_I} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_I - e_{II})$ direction principale associée à

$\lambda_I = -\frac{a}{2}$

} Les directions principales sont les diagonales du carré de côtés parallèles à e_I et e_{II}

Dans la base des directions principales la tenseur $\underline{\underline{\epsilon}}$

est diagonal :

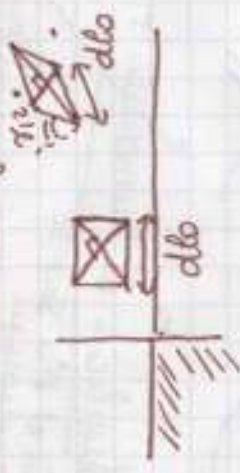
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{pmatrix}$$

Dans cette base $\epsilon_{I II} = \epsilon_{I III} = \epsilon_{II III} = 0$

de sorte que $\gamma_{I II} = \gamma_{I III} = \gamma_{II III} = 0$

aucune variation d'angle : les directions principales orthogonales avant transformation le restent après transformation.

Un carré élémentaire soumise dans SC se transforme en losange, il subit un cisaillement



$(\alpha/2 = a)$

les côtés conservent leur longueur.