

Application du principe des puissances virtuelles
à la construction d'un modèle élancé
de poutres et arcs.

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer le principe des puissances virtuelles à travers une application. On montre comment ce principe permet de construire un modèle cohérent pour les poutres et arcs, qui sont des milieux élancés possédant une dimension bien grande devant les deux autres. La démarche suivie est générale et peut être appliquée à d'autres types de structures, comme les coques ou planches par exemple.

Les équations d'équilibre des milieux élancés, la modélisation des efforts intérieurs et extérieurs sont déduites du principe des puissances virtuelles directement à partir d'un choix de représentation géométrique du milieu et de mouvement virtuel cohérent.

1. Quelques rappels sur les torsions
2. Modélisation géométrique des poutres et arcs
 - 2.1 Représentation géométrique
 - 2.2 Repère de Frenet
 - 2.3 Hypothèse cinématique - mouvement rapide des sections
3. Schematization des efforts et puissances virtuelles associées
 - 3.1 Efforts extérieurs
 - 3.2 Efforts intérieurs
4. Exploitation du principe des puissances virtuelles
 - 4.1 Équations d'équilibre
 - 4.2 Condition d'extremité en effort et interprétation du torsion des efforts intérieurs

4.3 Prend en compte d'effort concentré en un point

4.4 Condition aux limites en effort

4.5 Décomposition des efforts internes et relation avec le tenseur des contraintes tridimensionnel.

5. Loi de comportement de poutres et arcs élastiques

5.1 Déplacement et déformation de milieu élancé

5.2 Hypothèse d'Euler - Navier - Bernoulli et interprétation

5.3 Loi de comportement élastique linéaire

5.4 Condition aux limites en déplacement

6. Flexion plane des poutres et arcs à plan de symétrie

6.1 Hypothèses géométriques et de chargement

6.2 Équations locales

6.3 Cas particulier des poutres redilatrices

Application du principe des puissances virtuelles
à la construction du modèle cléique
de Poutres et Arcs.

■ 1- Quelques rappels sur les torseurs

- Définition: Un torseur $\{T\}$ est l'ensemble

$$\{T\} \leq \begin{matrix} R \\ M(A) \end{matrix}$$
 - d'un vecteur, appelé résultante, noté R
 - d'un champ de vecteur, appelé moment, caractérisé par sa valeur en un point A , noté $M(A)$, tel que les moments en deux points quelconques sont reliés par la formule : $M(B) = M(A) + R \wedge AB$
(relation fondamentale des torseurs)

On dit que R et $M(A)$ sont les éléments de réduction du torseur $\{T\}$ au point A

■ Exemples :

- i) Torseur associé à un ensemble de forces s'exerçant sur un milieu quelconque Ω
 - soit par exemple $f(M)$ une densité volumique d'efforts exercée au point M .

Le torseur $\{T_f\}$ associé à cet effort est défini par :

- sa résultante $R_f = \int_{\Omega} f(M) d\Omega_M$
- son moment au point A $M(A) = \int_{\Omega} AM \wedge f(M) d\Omega_M$

On vérifie que $\{T_f\}$ ainsi défini est bien un torseur au sens où la relation fondamentale est bien satisfait. En effet

$$M(B) = \int_{\Omega} BM \wedge f(M) d\Omega_M = \int_{\Omega} (BA + AM) \wedge f(M) d\Omega_M$$

d la moment en A $M(A) = \alpha M_1(A) + \beta M_2(A)$

$\left. \begin{array}{l} \text{la resultante } \bar{R} \text{ sur la résultante } \alpha R_1 + \beta R_2 \\ \text{et } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Pouvoir + les efforts constitutifs qui peuvent déclencher

�ondu moment des forces et donc \bar{R} est bien un bonne
de sorte que la somme \bar{R} respecte bien la relation

$\bar{U}(B) = \bar{U}(A) + \bar{w} \cdot AB$ pour tout point A et B

On a montré que chaque \bar{f} que nous avons au mouvement appartiennent

au point A.

- un moment sur point A, ou $\bar{w}(A)$, offre cette rotation
- la résultante \bar{w} , offre cette translation de
- On effectue \bar{f} à la force ou même autre coradiante pour
- se régulariser.

soit \bar{f} un couple simple qui a au mouvement quelques

ii) Torseur des vitesses angulaire au point A au mouvement initial

Tourne

Le point isolé pour un couple pur \bar{f} est bien un

- un moment sur point A : $M(A) = \int A H_A F(H) dH$

- la résultante $\bar{E} = \int E H_A dH$

le tourne \bar{f} pour un effort extérieur

en un point B une surface S

- soit moment $E(H)$ sur deux surfaces différentes

nécessaire

$$= M(A) + AB \cdot \bar{E} \quad (\text{par rapport à la produit})$$

$$\text{soit } M(B) = M(A) + BA \cdot \int_B H_A dH = M(A) + BA \cdot \bar{E}$$

sachant que le torseur $\{G_i\}$ est caractérisé par sa résultante R_i et son moment $M_i(A)$ en A pour $i=1,2$

On vérifie aisement la relation fondamentale des torseurs sur le torseur $\{G_1\} + \{G_2\}$

■ Définition: On définit le produit scalaire de deux torseurs de la façon suivante :

$$\text{soient } \{G_1\} \xrightarrow{\substack{R_1 \\ M_1(A)}} \quad \{G_2\} \xrightarrow{\substack{R_2 \\ M_2(A)}} \begin{array}{l} \text{(résultante)} \\ \text{(moment en A)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{G_1\} \cdot \{G_2\} = R_1 \cdot M_2(A) + R_2 \cdot M_1(A) \\ \text{Produit} \\ \text{scalaire} \\ \text{de deux torseurs} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{produit scalaire de deux vecteurs} \\ \text{en un point A quelconque} \end{array}$$

Cette notation est indépendante du point considéré

En effet :

$$\begin{aligned} R_1 \cdot M_2(B) + R_2 \cdot M_1(B) &= R_1 \cdot (M_2(A) + \underline{AB} \wedge R_2) \\ &+ R_2 \cdot (M_1(A) + \underline{AB} \wedge R_1), \text{ not} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 \cdot M_2(B) + R_2 \cdot M_1(B) &= R_1 \cdot M_2(A) + R_2 \cdot M_1(A) \\ &+ R_1 \cdot (\underline{AB} \wedge R_2) + R_2 \cdot (\underline{AB} \wedge R_1) \end{aligned}$$

Par antisymétrie du produit mixte, on a .

$$\begin{aligned} R_1 \cdot (\underline{AB} \wedge R_2) &= R_2 \cdot (R_1 \wedge \underline{AB}) \\ &= - R_2 \cdot (\underline{AB} \wedge R_1) \end{aligned}$$

$$\text{de sorte que } R_1 \cdot M_2(B) + R_2 \cdot M_1(B) = R_1 \cdot M_2(A) + R_2 \cdot M_1(A)$$

■ Théorème fondamental sur le Produit scalaire de torseurs

La puissance d'un système quelconque d'efforts appliqués dans un milieu Ω dans un mouvement de corps rigide est égale au produit scalaire du torseur des efforts

4-

et du torseur des vitesses associé au mouvement de corps rigide :

soit pour des efforts volumiques

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \int_{\Sigma} f(M) \cdot \underline{v}(M) d\Sigma = \{ \mathcal{C}_f \} \cdot \{ \underline{v} \} \\ \text{rigidifiant} \\ = R_f \cdot \underline{v}(A) + \frac{M(A)}{f} \cdot \underline{\omega} \\ A \in \Sigma \end{array} \right.$$

Preuve :

Considérons par exemple des efforts volumiques exercés sur un milieu Σ

$P = \int_{\Sigma} f(M) \cdot \underline{v}(M) d\Sigma$, déigne la puissance de cet effort dans un

mouvement de vitesse \underline{v} . Si l'on considère le mouvement rigidifiant

on a $P = \int_{\Sigma} f(M) \cdot [\underline{v}(A) + \underline{\omega} \wedge \underline{AM}] d\Sigma_A$ A étant un point

quelconque de Σ , par propriété des vitesses dans un mouvement rigidifiant. Soit

$$P = \underbrace{\underline{v}(A) \cdot \int_{\Sigma} f(M) d\Sigma_A}_{R_f} + \int_{\Sigma} f(M) \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{AM}) d\Sigma_A$$

ou encore

$$P = \underline{v}(A) \cdot R_f + \underline{\omega} \cdot \int_{\Sigma} \underline{AM} \wedge f(M) d\Sigma_A$$

(par propriété du produit mixte)

$$\text{de sorte que } P = \underline{v}(A) \cdot \underbrace{R_f}_{\substack{\downarrow \\ \text{Moment en } A \\ \text{du torsur } \{ \underline{v} \}}} + \underline{\omega} \cdot \underbrace{\begin{array}{c} \wedge M(A) \\ \rightarrow \text{résultante du torsur } \{ \underline{v} \} \\ \rightarrow \text{résultante du torsur } \{ \mathcal{C}_f \} \\ \downarrow \\ \text{Moment en } A \\ \text{du torsur } \{ \mathcal{C}_f \} \end{array}}$$

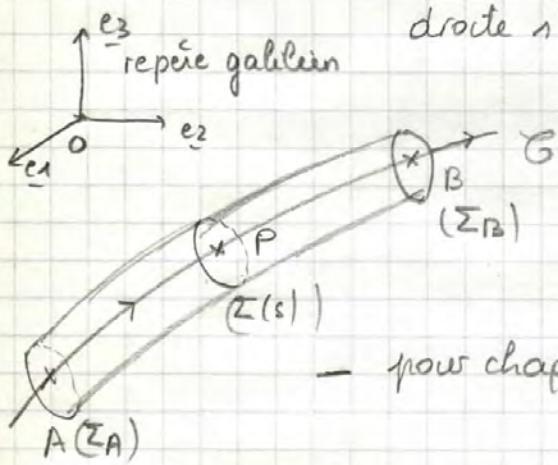
et donc par définition même du produit scalaire de deux vecteurs on obtient le résultat annoncé.

• 2. Modélisation géométrique des poutres et arcs

■ 2.1 Représentation géométrique

les poutres et arcs sont des milieux élancés dont une dimension est très grande devant les deux autres. On les représente géométriquement par :

- une ligne \mathcal{C} courbe si le milieu est un arc,



droite s'il s'agit d'une poutre, d'extrémités A, B

Un point courant sur cette ligne est noté $P(s)$, s désignant l'abscisse curviligne du Point P le long de \mathcal{C}

- pour chaque abscisse curviligne s , une section $\Sigma(s)$

■ 2.2 Repère de Frenet (rappel)

Au point $P(s)$ on associe le repère local (mobi) de Frenet défini par :

- le vecteur tangent unitaire à la ligne \mathcal{C} orientée dans un sens croissant de A vers B défini par

$$\underline{\mathbf{z}} = \frac{d(\underline{\mathbf{OP}})}{ds}$$

- le vecteur normal principal et unitaire, normal à $\underline{\mathbf{z}}$ au point $P(s)$, défini par :

$$\frac{d\underline{\mathbf{z}}}{ds} = \frac{\underline{\mathbf{n}}}{R} \quad \text{avec } R > 0 \quad \text{et } \frac{1}{R} \text{ la courbure de } \mathcal{C} \text{ en } P.$$

- le vecteur $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{z}} \wedge \underline{\mathbf{n}}$ tel que

$$\frac{d\underline{\mathbf{n}}}{ds} = -\frac{\underline{\mathbf{z}}}{R} + \frac{\underline{\mathbf{b}}}{T} \quad \text{avec } T > 0 \quad \text{et } \frac{1}{T} \text{ la torsion géométrique de } \mathcal{C} \text{ en } P.$$

- 2.3. Hypothèse cinématique = mouvement rigide des sections

L'hypothèse adoptée pour représenter les mouvements des poutres et arcs est :

} - Chaque section droite $\Sigma(s)$ au point $P(s)$ a un mouvement
 } de solide rigide

De sorte que si M est un point quelconque de $\Sigma(s)$, on a

$$\underline{v}(M) = \underline{v}(P) + \underline{\omega}(h) \underline{PM}$$

Le champ de vitesses virtuelles associé aux milieux élancés est donc caractérisé par :

- l'ensemble des vitesses $\underline{v}^*(s)$ des points $P(s)$ pour tout $s \in [A, B]$
- l'ensemble des vitesses de rotation $\underline{\omega}^*(s)$ des sections $\Sigma(s)$ pour tout s .

Du même le champ de vitesses virtuelles est caractérisé.

par la donnée pour chaque s , d'un tourur $\{\underline{v}^*(s)\}$
de résultante $\underline{w}^*(s)$ et de moment au point $P(s)$ $\underline{D}^*(s)$

Remarque : le mouvement ne sera rigide que pour l'ensemble de la poutre ou arc que si $\{\underline{D}^*(s)\}$ est indépendant de s .

L'ensemble des sections aura alors le même mouvement de corps rigide, bien que chaque section a un mouvement rigide différent qui peut être différent d'une section à l'autre

3. Schématisation des efforts et puissances virtuelles associées

3.1 Efforts extérieurs

On considère que les efforts exercés sur une portion $[s_1, s_2]$ de la poutre ou arc sont de deux types :

- a. des efforts linéaires : On note $\{f(s)\}$ le torseur associé à ces efforts par unité de longueur au points caractérisé par
 - la résultante $f(s)$, force par unité de longueur exercée au point $P(s)$

- le moment $M(s)$ au point $P(s)$, moment par unité de longueur exercé en s. Souvent $m(s)$ est nul dans les applications

- b. des efforts d'extremes sur les sections $\Sigma(s_1)$ et $\Sigma(s_2)$. On note $\{F_i\}$ le torseur associé à l'effort exercé sur $\Sigma(s_i)$ avec :

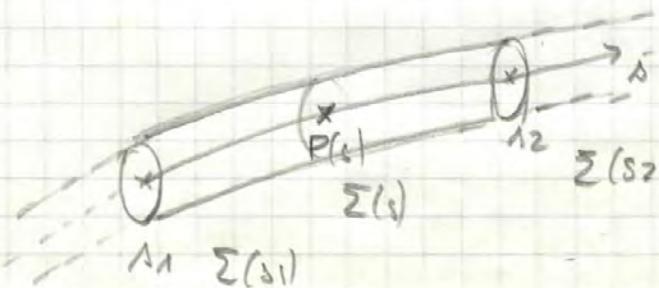
F_i la résultante

M_i le moment au point $P(s_i)$

et ceci pour $i=1$ (sur $\Sigma(s_1)$) et $i=2$ (sur $\Sigma(s_2)$).

Compte tenu du théorème fondamental sur le produit scalaire de torseurs la puissance virtuelle des efforts extérieurs dans un mouvement virtuel considérés pour ces milieux (mouvement rigidifiant pour chaque section) vaut pour la portion d'arc $[s_1, s_2]$

$$\dot{P}_e^* = \int_{s_1}^{s_2} \{f(s)\} \cdot \{\nu^*(s)\} ds + \{F_1\} \cdot \{\nu^*(s_1)\} + \{F_2\} \cdot \{\nu^*(s_2)\}$$



3.2 Efforts intérieurs

On postule que les efforts intérieurs sont caractérisés par un torseur $\{G(1)\}$ sur la section $\Sigma(1)$ défini par :

- sa résultante $R(1)$
- son moment au point $P(1) = M(1)$

L'interprétation physique sera précisée ultérieurement.

On postule également l'expression de la poussance virtuelle des efforts intérieurs sur l'arc $[s_1, s_2]$ dans le mouvement virtuel sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^* = - \int_{s_1}^{s_2} \{G(1)\} \cdot \frac{d\{V^*(1)\}}{ds} ds \end{array} \right.$$

(forme à rapprocher de l'expression de P_i^* en 3D, cf chapitre 2)

Il convient de définir le torseur dérivé $\frac{d\{V^*(1)\}}{ds}$ du torseur des vitesses virtuelles. Ce torseur est caractérisé par

- sa résultante égale à la dérivée par rapport à s de la résultante du torseur $\{V^*(1)\}$, soit

$$\left\{ \text{résultante de } \frac{d\{V^*(1)\}}{ds} = \frac{d}{ds} W^*(1) = \Omega^*(1) \text{ (notation)} \right.$$

- son moment en un point A indépendant de s égal à la dérivée par rapport à s du moment en A de $\{V^*(1)\}$, soit :

$$\left\{ \text{moment en A de } \frac{d\{V^*(1)\}}{ds} = \frac{d}{ds} [M^*(A)] \quad \text{A indépendant des} \right.$$

Remarque : De sorte que si l'on souhaite calculer le moment en $P(1)$ du torseur dérivé, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{moment en } A \text{ du torseur } \frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^*(s) \} &= \frac{d}{ds} (\underline{\nu}^*(A)) = \frac{d}{ds} (\underline{\nu}^*(P(s)) + \underline{\omega}^*(s) \wedge \underline{PA}) \\
 &= \frac{d}{ds} [\underline{\nu}^*(P(s))] + \frac{d}{ds} \underline{\omega}^* \wedge \underline{PA} + \underline{\omega}^*(s) \wedge \frac{d}{ds} (\underline{PA}) \\
 \text{or } \frac{d}{ds} (\underline{PA}) &= - \frac{d}{ds} (\underline{AP}(s)) = - \underline{Z}(s) \quad \text{vecteur tangent à } \mathcal{C}
 \end{aligned}$$

où moment en A du torseur dérivé $\frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^*(s) \}$

$$= \frac{d}{ds} (\underline{\nu}^*(P(s))) + \frac{d}{ds} \underline{\omega}^* \wedge \underline{PA} - \underline{\omega}^*(s) \wedge \underline{Z}(s)$$

de sorte que comme $\frac{d}{ds} \underline{\omega}^* \wedge \underline{PA} = \text{résultante du torseur } \wedge \underline{PA}$
 $\frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^*(s) \}$

on a par identification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Moment en } P(s) \text{ du torseur dérivé } \frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^*(s) \} = \frac{d}{ds} (\underline{\nu}^*(P(s))) + \underline{Z}(s) \wedge \underline{PA} \end{array} \right.$$

Remarque : la définition proposée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs satisfait bien l'énoncé 2 du principe des puissances virtuelles

Soit $\underline{\nu}^*$ mouvement négifiant pour l'ensemble de la poutre

On a $\{ \underline{\nu}^* \}$ indépendant de s (cf remarque précédente)

de sorte que $\frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^*(s) \} = \frac{d}{ds} \{ \underline{\nu}^* \} = \{ 0 \}$

et en conséquence

$P_i^* = 0$ pour tout $\underline{\nu}^*$ négifiant sur l'ensemble des milieux

4- Exploitation du principe des puissances virtuelles :

4.1 Équations locales d'équilibre

On se restreint dans cette étude aux cas statique dans lequel les accélérations sont nulles, de sorte que :

$$P_a^* = 0$$

le principe des puissances virtuelles appliquée aux portes et arcs (compte tenu des hypothèses faites géométriques et cinématiques) s'écrit :
pour toute portion :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^* + P_e^* = 0 \\ \end{array} \right. \quad \text{pour tout mouvement virtuel} \\ \text{régissant dans chaque section}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{s_1}^{s_2} \{ G(s)\} \cdot \frac{d}{ds} \{ v^*(s)\} ds + \int_{s_1}^{s_2} \{ f(s)\} \cdot \{ v^*(s)\} ds + \{ F_1\} \cdot \{ v^*(s_1)\} \\ \quad + \{ F_2\} \cdot \{ v^*(s_2)\} = 0 \end{array} \right.$$

On procède (comme cela a été fait en 3D) à une intégration par parties pour le terme P_i^* soit :

$$0 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} \{ G(s)\} \cdot \{ v^*(s)\} ds - (\{ G(s_2)\} \cdot \{ v^*(s_2)\} - \{ G(s_1)\} \cdot \{ v^*(s_1)\}) \\ + \int_{s_1}^{s_2} \{ f(s)\} \cdot \{ v^*(s)\} ds + \{ F_1\} \cdot \{ v^*(s_1)\} + \{ F_2\} \cdot \{ v^*(s_2)\}$$

pour tout $\{ v^*(s)\}$

soit donc en procédant comme au chapitre 2, on choisit $\{ v^*(s)\}$ tel que $\{ v^*(s_1)\} = \{ v^*(s_2)\} = \{ 0 \}$, on obtient :

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{d}{ds} (\{ G(s)\}) + \{ f(s)\} \right] \cdot \{ v^*(s)\} ds = 0$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} [\{ G(s)\}] + \{ f(s)\} = \{ 0 \} \\ \end{array} \right. \quad \text{pour tout } s \in [s_1, s_2]$$

exprimée en terme de l'ouïe

Puis en revenant au PPV, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ G(s_2)\} = \{ F_2\} \\ \{ G(s_1)\} = - \{ F_1\} \\ \end{array} \right.$$

Ces égalités en terme de "torsors" conduisent à des équations et conditions d'extremité exprimées en termes de résultante et de moments.

— Concernant la résultante, on a l'équation d'équilibre locale :

$$\frac{dR(s)}{ds} + f(s) = 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[$$

— Concernant l'équilibre en terme de moment, nous cherchons à l'exprimer au point $P(s)$ de la section $\Sigma(s)$ pour tout $s \in]s_1, s_2[$.

Se pose alors la difficulté de calculer le moment du torsor dérivé par rapport à s au point $P(s)$ des effets intérieurs. Nous avons fait cet exercice précédemment pour le torsor dérivé des vitesses dans un mouvement rigidifiant (cf 3.2).

De façon similaire, on a en passant par un point fixe

$$\underline{M}(A) = \underline{M}(P(s)) + \underline{R}(s) \wedge P(s)A \quad \text{par la relation fondamentale des moments pour un torsor}$$

moment en A
du torsor des effets intérieurs

$$\text{et donc } \frac{d[\underline{M}(A)]}{ds} = \frac{d\underline{M}(P(s))}{ds} + \frac{d\underline{R}(s)}{ds} \wedge P(s)A + \underline{R}(s) \wedge \frac{d[P(s)A]}{ds}$$

$$\text{par définition : moment en A du torsor dérivé } \frac{d(\underline{f}\Gamma(s))}{ds}$$

d'où

$$\frac{d[\underline{M}(A)]}{ds} = \frac{d[\underline{M}(P(s))]}{ds} + \underline{\Gamma}(s) \wedge \underline{R}(s) + \frac{d\underline{R}(s)}{ds} \wedge P(s)A$$

s'obtient en identifiant avec la relation fondamentale des moments,

$$\text{pour le torsor dérivé: } \frac{d(\underline{f}\Gamma(s))}{ds}$$

$$\text{Moment en A du torsor dérivé} = \frac{d[\underline{M}(A)]}{ds} = \text{Moment en } P(s) \text{ du torsor dérivé} + (\text{Résultante du torsor dérivé}) \wedge P(s)A$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Moment en } P(s) \\ \text{du torsor dérivé} \end{array} \right. = \frac{d[\underline{M}(P(s))]}{ds} + \underline{\Gamma}(s) \wedge \underline{R}(s)$$

$\frac{dR}{ds}$

- donc l'équation d'équilibre en moment écrite au point $P(s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} [\underline{M}(P(s))] + \underline{\Sigma}(s) \wedge \underline{R}(s) + \underline{m}(s) = 0 \end{array} \right.$$

+ de]s₁, s₂[

où $\underline{m}(s)$ est le moment au point $P(s)$ du torseur des effets binaires (généralement nul dans les applications)

4.2 Condition d'extrémités en effort et interprétation du torseur des effets intérieurs

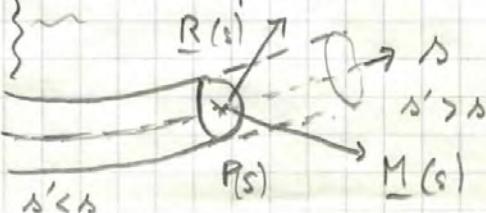
- Exprimons maintenant les conditions d'extrémités obtenues précédemment en termes de résultantes et moments, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(s_2) = \underline{F}_1 \\ \underline{M}(s_2) = \underline{M}_2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(s_1) = -\underline{F}_2 \\ \underline{M}(s_1) = -\underline{M}_1 \end{array} \right\}$$

- les conditions en s_2 sur $\Sigma(s_2)$ fournissent une interprétation physique de la résultante et du moment du torseur des effets intérieurs $\underline{R}(s)$ et $\underline{M}(s)$

$\underline{R}(s_2)$ apparaissent comme la résultante et le moment exercés en s_2 par la partie de la poutre située en $s > s_2$ sur la surface $\Sigma(s_2)$. De sorte que

$\underline{R}(s)$ et $\underline{M}(P(s))$ représentent les résultante et moment exercés au point $P(s)$ par la partie de la poutre située en $s' > s$ sur la partie située en $s' < s$

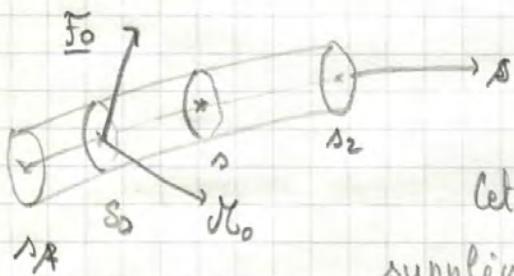


Cette interprétation est bien cohérente avec les conditions d'extémité trouvées en $s = s_1$. En effet, \underline{F}_1 et \underline{M}_1 sont la résultante et le moment exercés par la partie de la poutre $s' < s_1$ sur la partie $s' > s_1$. De sorte que $-\underline{F}_1$ et $-\underline{M}_1$ par le principe d'action et de réaction sont les résultante et moment exercés par $P(s_1)$ par la partie de la poutre $s' > s_1$ sur la partie $s' < s_1$, ce qui correspond bien à l'interprétation des résultante et moment des effets intérieur $R(s_1)$ et $M(P(s_1))$.

■ 4.3. Prise en compte d'effort concentré en un point.

Nous considérons dans cette section des effets extérieur d'une autre nature. Il s'agit d'effets dits concentrés en un certain nombre de points alors que les effets extérieur précédemment traité $\{f(1)\}$ étaient répartis sur la portion de l'arc étudiée.

On convient de noter $\{F_0\}$ le torseur associé à cet effort concentré appliqué au point $P(s_0)$ et exercé sur la section $\Sigma(s_0)$ caractérisée par sa résultante \underline{F}_0 et le moment en $P(s_0)$ \underline{M}_0 .



Cet effet supplémentaire induit un terme supplémentaire P_0^* dans l'équation du principe des puissances virtuelles, soit :

$$\begin{aligned}
 - \int_{s_1}^{s_2} \{\Sigma(s)\} \cdot \frac{d\{QV^*(1)\}}{ds} ds + \{F_1\} \cdot \{V^*(s_1)\} + \{F_2\} \cdot \{V^*(s_2)\} \\
 + \int_M \{f(1)\} \cdot \{V^*(1)\} ds + \{F_0\} \cdot \{V^*(s_0)\} = 0
 \end{aligned}$$

L'intégration par parties du terme dû aux effets intérieurs demande à être reprise pour tenir compte de la discontinuité possible du torrent en s_0 , On a :

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_1}^{s_0} \frac{d}{ds} \{G(s)\} \cdot \{v^*(s)\} ds - [\{G(s_0^-)\} \cdot \{v^*(s_0)\}] - [\{G(s_0^+)\} \cdot \{v^*(s_0^+)\}] \\
 & + \int_{s_0}^{s_2} \frac{d}{ds} \{G(s)\} \cdot \{v^*(s)\} ds - [\{G(s_2)\} \cdot \{v^*(s_2)\}] - [\{G(s_0^+)\} \cdot \{v^*(s_0)\}] \\
 & + \int_{s_1}^{s_2} \{f(s)\} \cdot \{v^*(s)\} ds + \{\bar{F}_1\} \cdot \{v^*(s_1)\} + \{\bar{F}_2\} \cdot \{v^*(s_2)\} \\
 & \quad + \{\bar{F}_0\} \cdot \{v^*(s_0)\} = 0
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_1}^{s_0} \left[\frac{d}{ds} \{G(s)\} + \{f(s)\} \right] \cdot \{v^*(s)\} ds - \\
 & + \int_{s_0}^{s_2} \left[\frac{d}{ds} (\{G(s)\}) \cdot \{f(s)\} \right] \cdot \{v^*(s)\} ds \\
 & + (-[\{G(s_2)\} + \{\bar{F}_2\}] \cdot \{v^*(s_2)\} + [\{G(s_1)\} + \{\bar{F}_1\}] \cdot \{v^*(s_1)\}) \\
 & + (\{\bar{F}_0\} - [\{G(s_0^-)\} + \{G(s_0^+)\}]) \cdot \{v^*(s_0)\} = 0
 \end{aligned}$$

On obtient donc outre l'équilibre en tout point (excepté s_0)

$$\frac{d}{ds} \{G(s)\} + \{f(s)\} = \{0\} \quad \text{pour tout } s \in [s_1, s_0] \cup [s_0, s_2]$$

et les conditions d'extremum en s_1 et s_2 obtenues précédemment une condition en s_0 , dite condition de discontinuité,

$$\left\{ \begin{array}{l} [\{G\}](s_0) + \{\bar{F}_0\} = \{0\} \end{array} \right.$$

avec la notation $[\{G\}](s_0) = \{G(s_0^+)\} - \{G(s_0^-)\}$

soit donc en termes de résultante et moment

$$\left. \begin{cases} \underline{R}(x_0) + F_0 = 0 \\ \underline{M}(x_0) + M_0 = 0 \end{cases} \right\}$$

Généralement le moment concentré M_0 est nul et dans ce cas on a une continuité du moment aux points d'application de forces ponctuelles

■ 4.4 Conditions aux limites en effort

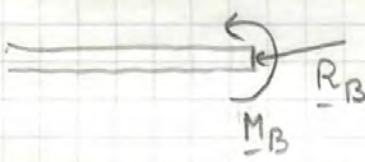
les conditions aux limites en effort sur une poutre ou arc correspondent aux conditions d'extrémités si les effets sont connus. Ils sont généralement nuls. On peut citer quelques exemples typiques de conditions aux limites en effort.

- extrémité libre d'effort en B : le tenseur des effets extérieurs appliqués en B est nul $\{C_B\} = \{0\}$ ($R_B = 0$, $M_B = 0$)

les conditions aux limites en efforts viennent alors =

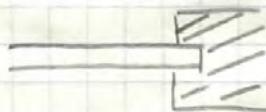
$$\left. \begin{cases} R(\lambda=\lambda_B) = R_B = 0 \\ M(\lambda=\lambda_B) = M_B = 0 \end{cases} \right\}$$

- extrémité chargé en effort en B : le tenseur des effets extérieurs appliqués en B est donné $\{C_B\}$ non nul.. les conditions aux limites en efforts sont -



$$\left. \begin{cases} R(\lambda=\lambda_B) = R_B \\ M(\lambda=\lambda_B) = M_B \end{cases} \right\}$$

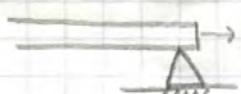
- extrémité encastree



la valeur du tenseur des effets extérieurs est arbitraire et inconnue. : $R(\lambda=\lambda_B)$ et $M(\lambda=\lambda_B)$ inconnus

Nous verrons par la suite qu'en ce point, il conviendra de bloquer le torsion déplacement, c'est à dire les valeurs du déplacement en B et de la rotation en B à zéro.

- extrémité simplement supportée



Dans cette situation, on suppose que la poutre ou arc peut glisser (sans frottement) sur l'appui dans la direction de l'axe de la poutre.

Dans ce cas :

$$\text{le moment est nul en } B = \underline{M}_B = 0$$

et la résultante \underline{R}_B au point B est normale à l'axe de la poutre mais son intensité est inconnue :

$$\underline{R}_B \cdot \underline{\beta} = 0$$

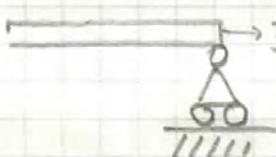
$\underline{\beta}$ étant le vecteur tangent à l'arc ou poutre

- les conditions aux limites en effets sont :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{M} (\lambda = \lambda_B) = 0 \\ \underline{R} (\lambda = \lambda_B) \cdot \underline{\beta} (\lambda = \lambda_B) = 0 \end{array} \right\}$$

Nous verrons par la suite que ces conditions seront complétées par des conditions sur le torsion déplacement avec une condition traduisant que le déplacement en B se fait selon $\underline{\beta}$ (mais inconnue) (composantes du déplacement selon \underline{n} et \underline{b} nuls)

- extrémité en appui simple mobile dans une direction (droite)



Dans cette situation, la liaison à rouleaux peut induire un déplacement de la poutre dans la direction de la mobilité de l'appui

Dans ce cas, comme précédemment on a :

$$\underline{M}_B = 0$$

et la résultante en B est normale à la poutre $\underline{R}_B \cdot \underline{z} = 0$

les conditions aux limites en effets en B sont analogues au cas précédent

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M}(A=A_B) = 0 \\ \underline{R}(A=A_B) \cdot \underline{z} = 0 \end{array} \right.$$

- extrémité fixe avec articulation (appui fixe sans encastrement)

 Dans ce cas l'extrémité est liée à une liaison rotatoire ou sphérique.

le moment en B est nul

- la condition aux limites en effet est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M}(A=A_B) = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce type d'appui, nous verrons par la suite que le déplacement au point B sera imposé nul.

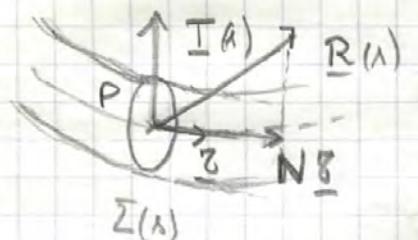
Attention au risque de confusion avec la terminologie d'appui simple qu'il convient de se référer plutôt aux deux réactions associées à des mobilités possibles du point B, qui diffèrent de la condition d'un appui fixe.

- 4.5. Décomposition des effets internes et relation avec le tenseur des contraintes tridimensionnel

la résultante et le moment du tourbillon des effets internes [G41] peut être décomposé pour chaque section de la façon suivante :

- La résultante $\left\{ \underline{R}(A) = N(A) \underline{z} + T(A) \right.$

avec $N(\lambda)$ effort normal (selon la tangente à la ligne directrice)
 $\underline{\Gamma}(\lambda)$ effets tranchants dans le plan de la section

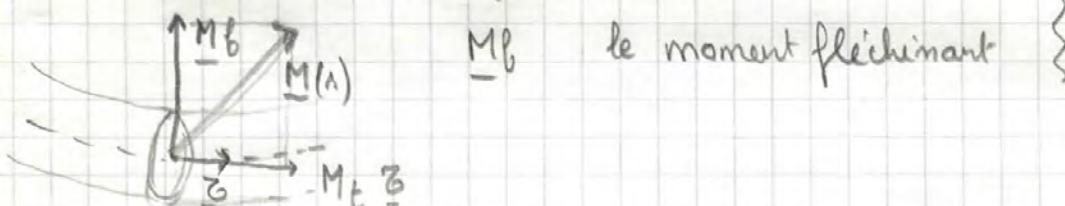


si $N > 0$ effort normal de traction
 $N < 0$ " " de compression

- le moment $\underline{M}(s) = \underline{M}_t \underline{z} + \underline{M}_f(s)$

avec $M_t(\lambda)$ le moment de torsion

\underline{M}_f le moment fléchissant



- Si l'on revient à la caractérisation des effets intérieurs en tridimensionnel.

. $\underline{\Pi}(M) \cdot \underline{z}$ le vecteur contrainte représente la densité superficielle d'effets exercé sur la surface $\Sigma(s)$ en un point M par la partie du milieu située en $s > s$ \underline{z} est la normale à $\Sigma(s)$

De sorte que le torseur annulé est défini par

$$\underline{R}(s) = \int_{\Sigma(\lambda)} \underline{\Pi}(M) \cdot \underline{z} \, ds \quad \text{la résultante}$$

et

$$\underline{M}(s) = \int_{\Sigma(s)} \underline{P} \underline{M} \wedge \underline{\Pi}(M) \, ds_M \quad \text{le moment en } P$$

Par rapport au tridimensionnel, on a évidemment perdu une information locale en intégrant les effets sur la section.

5. loi de comportement de poutre et arcs élastiques

Dans cette section, nous nous intéressons à formuler une loi de comportement traduisant la relation entre les efforts intérieurs en un point matériel et l'évolution des déformations induites en ce point par le mouvement réel.

Il nous faut donc commencer par définir les mouvements réel des milieux élancés (par opposition à mouvement virtuel).

5.1 Déplacement et déformations de milieu élancé

On adopte ici le cadre classique de la théorie des milieux curvilignes linearisées :

- les déplacements sont supposés petits, ainsi que les déformations
- les déplacements sont rigidifiants dans chaque section plane orthogonale à la ligne directrice (axe) du milieu curviligne. ce qui signifie que les sections planes restent planes mais pivotent librement autour de leur axe
- Un tel champ de déplacement est caractérisé par l'ensemble des torsions déplacements de chaque section $\Sigma(s)$, noté $\underline{\underline{u}}(s)$
On distingue ces éléments de réduction pour tout s
 - { - $\underline{\underline{\gamma}}(s)$ le vecteur résultant appelé vecteur rotation de la section
 - { - $\underline{u}(s)$ le moment au point $P(s)$, appelé déplacement du point $P(s)$

Par la relation fondamentale des moments, le déplacement d'un point M de la section $\Sigma(s)$ s'écrit :

$$\underline{u}(M) = \underline{u}(s) + \underline{\underline{\gamma}}(s) \wedge \underline{PM} \quad M \text{ quelconque de } \Sigma(s)$$

— les déformations associées sont définies par le tenseur dérivé du tenseur déplacement

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) = \frac{d}{ds} \{ \underline{\underline{U}}(s) \} \text{ pour tout } s \end{array} \right.$$

au sens de la dérivation de tenseur définie précédemment

Le champ de torsion est caractérisé par sa résultante notée

$\underline{\underline{\gamma}}(s)$ appelée rotation unitaire de la section $\Sigma(s)$ et son moment $\underline{\underline{\xi}}(s)$ au point $P(s)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \\ \underline{\underline{\gamma}}(s) \end{array} \right\} \quad \underline{\underline{\xi}}(s) \quad \text{Torseur des déformations de la section}$$

le moment $\underline{\underline{\xi}}(s)$ est obtenue comme cela a été fait pour le moment du torsion dérivé du tenseur des vitesses virtuelles en passant par un point fixe A : $\underline{\underline{u}}(A) = \underline{\underline{u}}(s) + \underline{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{PA}$

$$\frac{du}{ds}(A) = \frac{du}{ds}(s) + \frac{d\Omega}{ds} \wedge \underline{PA} + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \frac{d(PA)}{ds}.$$

or $\frac{d(PA)}{ds} = \underline{\underline{\gamma}}(s)$ d'où

$$\frac{du}{ds}(A) = \underbrace{\frac{du}{ds}(s)}_{\text{moment du torsion}} + \underbrace{\underline{\underline{\gamma}}(s) \wedge \underline{\underline{\Omega}}(s)}_{\text{résultante du torsion } \{ \underline{\underline{\xi}}(s) \}} + \frac{d\underline{\underline{\Omega}}}{ds} \wedge \underline{PA}$$

moment du torsion = moment du torsion $\{ \underline{\underline{\xi}}(s) \} = \frac{d}{ds} \{ \underline{\underline{U}}(s) \}$ résultante du torsion $\{ \underline{\underline{\xi}}(s) \}$
 $\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \}$ au point P(s)

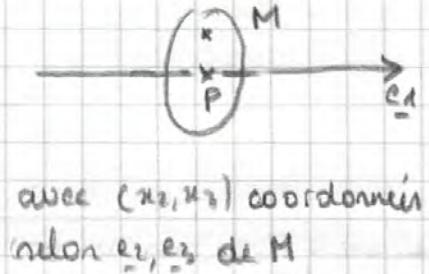
soit donc $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) = \frac{du}{ds}(s) + \underline{\underline{\gamma}}(s) \wedge \underline{\underline{\Omega}}(s) \\ \underline{\underline{\gamma}}(s) = \frac{d\underline{\underline{\Omega}}}{ds} \end{array} \right. \quad \text{moment en P(s) de } \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \}$
et $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \\ \underline{\underline{\gamma}}(s) \end{array} \right\} = \text{résultante de } \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(s) \}$

— Interprétation du tenseur des déformations, lien avec l'elasticité 3D.

Pour simplifier cette analyse nous supposons la poutre droite et utilisons le repère $(P(s), \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ avec \underline{e}_1 l'axe de la poutre

et (e_2, e_3) le plan d'une section $\Sigma(s)$. Dans ce cas, le déplacement d'un point M de la section $\Sigma(\lambda)$ ($\lambda = x_1$) vaut :

$$\begin{aligned} u_1(M) &= u_1(x_1) \quad | \quad \sigma_1(x_1) \quad | \quad 0 \\ u_2(M) &= u_2(x_1) + \left| \begin{array}{c} \sigma_2(x_1) \\ \wedge \end{array} \right| x_2 \\ u_3(M) &= u_3(x_1) \quad \sigma_3(x_1) \quad | \quad x_3 \end{aligned}$$



avec (x_2, x_3) coordonnées selon e_2, e_3 de M

x_1 abscisse de P point de la ligne directrice

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(M) = u_1(x_1) + \sigma_2(x_1) x_3 - \sigma_3(x_1) x_2 \\ u_2(M) = u_2(x_1) + \sigma_1(x_1) x_3 \\ u_3(M) = u_3(x_1) + \sigma_1(x_1) x_2 \end{array} \right.$$

le tenseur des déformations 3D, $\underline{\underline{\epsilon}}(M)$ au point M, est alors de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11}(M) = \frac{\partial u_1(M)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(P)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} x_3 - \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1} x_2 \\ \epsilon_{22}(M) = \frac{\partial u_2(M)}{\partial x_2} = 0 \\ \epsilon_{33}(M) = \frac{\partial u_3(M)}{\partial x_3} = 0 \\ \epsilon_{12}(M) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(M)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(M)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-\sigma_3(x_1) + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} x_3 \right) \\ \epsilon_{13}(M) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(M)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(M)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-\sigma_2(x_1) + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1}(P) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} x_2 \right) \\ \epsilon_{23}(M) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2(M)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(M)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\sigma_1(x_1) + \sigma_1(x_1) \right) = 0 \end{array} \right.$$

On observe le fait que les déformations dans le plan de la section en M $\epsilon_{22}(M) = \epsilon_{33}(M) = \epsilon_{23}(M) = 0$ sont nulles, ce qui est attendu compte tenu que les déplacements sont répétitifs dans chaque section.

Par ailleurs, dans le cas d'une poutre droite, le tenseur des déformations : $\{\epsilon(\lambda)\}$ caractérisé par sa résultante $\Sigma(s)$ qui vaut ici

$$\gamma_1(s) = \frac{dx_1}{ds}, \quad \gamma_2(s) = \frac{dx_2}{ds}, \quad \gamma_3(s) = \frac{dx_3}{ds}$$

et plus son moment au point P(s)

$$\underline{\epsilon}(s) = \begin{pmatrix} \frac{du_1(P)}{ds} \\ \frac{du_2(P)}{ds} \\ \frac{du_3(P)}{ds} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) \\ \omega_2(x_1) \\ \omega_3(x_1) \end{pmatrix}$$

$$(\underline{e} = \underline{e}_1) \text{ ici}$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon}_1(s) = \frac{du_1(P)}{ds} \\ \underline{\epsilon}_2(s) = \frac{du_2(P)}{ds} + \omega_3(x_1) \\ \underline{\epsilon}_3(s) = \frac{du_3(P)}{ds} + \omega_2(x_1) \end{array} \right.$$

$$\text{et } \underline{\epsilon}_3(s) = \frac{du_3(P)}{ds} + \omega_2(x_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon}_M(M) = \underline{\epsilon}_1(s) + \gamma_2(s)x_3 - \gamma_3(s)x_2 \\ \underline{\epsilon}_{12}(M) = \frac{1}{2} (\underline{\epsilon}_2(s) - \gamma_1(s)x_3) \\ \underline{\epsilon}_{13}(M) = \frac{1}{2} (\underline{\epsilon}_3(s) + \gamma_3(s)x_2) \end{array} \right.$$

Si l'on se place en P, sur la fibre directrice, on a $x_2 = x_3 = 0$
et donc

$$\underline{\epsilon}_{11}(P) = \underline{\epsilon}_1(s) \quad \underline{\epsilon}_{12}(P) = \frac{1}{2} \underline{\epsilon}_2(s) \quad \underline{\epsilon}_{13}(P) = \frac{1}{2} \underline{\epsilon}_3(s)$$

- $\underline{\epsilon}_1(s)$ s'interprète donc comme allongement unitaire de la norme
($\underline{\epsilon}_{11}$ = allongement dans la direction \underline{e}_1)
- $\underline{\epsilon}_2(s)$ s'interprète comme le double des déformations de cisaillement
 $\underline{\epsilon}_{12}$ et $\underline{\epsilon}_{13}$. Ce sont donc des termes reliés à la variation d'angle des vecteurs $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ et $\underline{e}_1, \underline{e}_3$ (initialement perpendiculaires) dans la transformation.

- $\gamma_1(s) = \frac{ds}{ds}$ représente la dérivée de l'angle de torsion α_1 le long de la norme. Il s'agit de la déformation de torsion

les interprétations pour γ_2 et γ_3 sont moins évidentes à ce stade sans hypothèse supplémentaire.

- Une autre façon d'interpréter les composantes du tenseur $\{\underline{\underline{\epsilon}}(1)\}$ des déformations est de partir d'états spécifiques du torseur et d'intégrer pour analyser le déplacement induit. On se place toujours dans le cas

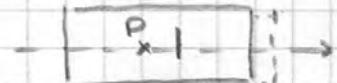
a) Soit $\{\underline{\underline{\epsilon}}(1)\}$ tel que $\{\underline{\underline{\gamma}} = \underline{0}\}$ résultante nulle

$$\{\underline{\underline{\epsilon}} = (\epsilon_0, 0, 0) \text{ moment en P selon } e_3\}$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega} = \underline{0} \text{ et } \epsilon_1 = \frac{du_1}{dx_1} = \epsilon_0 \Rightarrow u_1 = \epsilon_0 x_1 \quad (\text{on élimine les champs rigides pour l'ensemble de la poutre})$$

$$\epsilon_2 = \frac{du_2}{dx_1} - \Omega_3 = \frac{du_2}{dx_1} = 0 \Rightarrow u_2 = 0$$

$$\epsilon_3 = \frac{du_3}{dx_1} + \Omega_2 = 0 \Rightarrow u_3 = 0$$



d'où $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} = (\epsilon_0 x_1, 0, 0) \text{ déplacement du point P} \\ \underline{\Omega} = \underline{0} \quad \text{rotation du point P} \end{array} \right.$ (qui correspond à un déplacement induit par une traction de la poutre selon e_1)

On voit donc que ϵ_1 caractérise l'allongement de la poutre

On perd la notion de contrainte transversale du 3D.

b) Soit $\{\underline{\underline{\epsilon}}(1)\}$ tel que $\{\underline{\underline{\gamma}} = (0, 0, \gamma_0) = \gamma_0 e_3\}$
et $\{\underline{\underline{\epsilon}}(1) = \underline{0}\}$

L'intégration donne $\underline{\Omega} = (0, 0, \gamma_0 x_1) = \gamma_0 x_1 e_3$

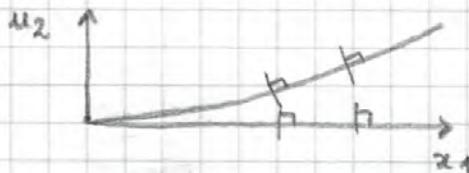
et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dx_1} = 0 \\ \frac{du_2}{dx_1} - \gamma_0 x_1 = 0 \\ \frac{du_3}{dx_1} + 0 = 0 \end{array} \right. \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = \gamma_0 \frac{x_1^2}{2} \\ u_3 = 0 \end{array} \right.$$

d'où $\underline{\Omega} = \gamma_0 x_1 e_3$ et $\underline{u}(1) = \gamma_0 \frac{x_1^2}{2} e_2$

du déplacement de P

d'où



On retrouve la déformation de la ligne moyenne induite par une flexion simple, de sorte que $\underline{\theta} = \theta_0 \underline{e}_3 = \underline{\theta}_T$ (mesure les variations d'angle) correspond à la rotation unitaire de flexion

c) Soit $\underline{\epsilon}(x)$ tel que $\begin{cases} \underline{\theta}(x) = (\theta_0, 0, 0) = \theta_0 \underline{e}_3 \\ \underline{\epsilon}(x) = \underline{0} \end{cases}$

l'intégration donne $\underline{\Omega} = (\theta_0 x_1, 0, 0) = \theta_0 x_1 \underline{e}_1$

$$\text{et } \frac{du_1}{dx_1} = 0 \Rightarrow u_1 = 0$$

$$\frac{du_2}{dx_1} = 0 = 0 \Rightarrow u_2 = 0 \quad \text{soit } \underline{u}(x) = \underline{0}$$

$$\frac{du_3}{dx_1} \neq 0 = 0 \Rightarrow u_3 = 0$$

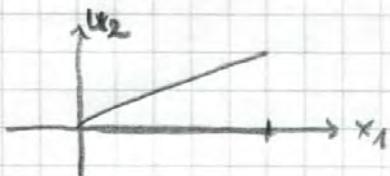
Cette déformation s'interprète comme celle issue d'une torsion

$\underline{\theta}_T$ représente la torsion unitaire

(augmentation près de la section)

d). Soit $\underline{\epsilon}(x)$ tel que $\begin{cases} \underline{\theta} = \underline{0} \\ \underline{\epsilon}(x) = (0, \epsilon_0, 0) \end{cases}$

en intégrant on obtient $\underline{\Omega} = \underline{0}$ et $u_1 = 0$



$$\frac{du_2}{dx_1} = \epsilon_0 \Rightarrow u_2 = \epsilon_0 x_1$$

$$\frac{du_3}{dx_1} = 0 \Rightarrow u_3 = 0$$

Cette déformation ressemble à celle induite par un glissement simple

Elle va être induite par un effet tranchant comme nous le verrons plus tard.

De façon analogue à ce qui a été fait pour les effets, on introduit les notations suivantes en projetant $\underline{\gamma}$ et $\underline{\varepsilon}$ sur \underline{z} et le plan de la section.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\gamma} = \gamma_n \underline{z} + \underline{\gamma}_T \\ \underline{\varepsilon} = \varepsilon_n \underline{z} + \underline{\varepsilon}_T \end{array} \right.$$

- γ_n représente la torsion unitaire
- $\underline{\gamma}_T$ la rotation unitaire de flexion
- ε_n allongement unitaire
- $\underline{\varepsilon}_T$ l'effet de l'effort tranchant

5.2 Hypothèse d'Euler-Bernoulli et interprétation

L'hypothèse d'Euler Bernoulli qui sera adoptée ici pour développer la loi de comportement consiste à négliger l'effet de l'effort tranchant dans la déformation, c'est à dire supposer :

$$\left\{ \underline{\varepsilon}_T = 0 \right.$$

Interpretons cette hypothèse : On considère pour cela une poutre droite d'axe e_1 en flexion avec le torseur de déplacement de la forme :

$$\underline{u}(P) = u(x_1) \underline{e}_2$$

$$\underline{\Omega}(P) = \Omega(x_1) \underline{e}_3$$



La déformée a pour équation : $x_2 = U(x_1)$

Soit P' le transformé de P

la tangente à P' à la déformée de l'axe e_1 (e_1') fait un angle α' avec e_1 tel que $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{du}{dx_1} \approx \alpha'$ sous l'hypothèse des petites déformations

Si par ailleurs, on note α la rotation de la section droite en P

$$\text{on a } \underline{\sigma}_2 = D\alpha(x_1) \underline{e}_3 = \alpha \underline{e}_3$$

$$\text{d'où } (\alpha' - \alpha) \underline{e}_3 = \left(\frac{du}{dx_1} - \underline{\sigma}_2(x_1) \right) \underline{e}_3$$

$$\text{or } \underline{\epsilon}_T(s) = \left(\frac{du}{dx_1} - \underline{\sigma}_2(x_1) \right) \underline{e}_3 \text{ du reste que } (\alpha' - \alpha) \underline{e}_3 = \underline{\epsilon}_T(s)$$

donc $(\alpha' - \alpha)$ représente l'effet de l'effort tranchant.

Dire que $\underline{\epsilon}_T = 0$ revient à dire que $\alpha' = \alpha$ c'est à dire que

la normale à la poutre avant déformation reste normale à la poutre déformée

Or nous avons vu en 3D (LA 396) qu'au 1^e ordre, lorsque l'on étudie la flexion d'une poutre par un couple terminal, cette propriété est bien satisfaisante au 1^e ordre.

* L'hypothèse d'Euler-Bernoulli est donc bien légitime lorsque le milieu est élancé.

5.3. Loi de comportement élastique linéaire d'un milieu curviligne

- La recherche de la loi de comportement du milieu curviligne consiste donc à établir une relation entre $\{\underline{\sigma}(s)\}$ et $\{\underline{\epsilon}(s)\}$ les termes caractérisant les effets extérieurs et les déformations :

$$\{\underline{\sigma}(s)\} = \{R, M(P)\} \quad \text{et} \quad \{\underline{\epsilon}(s)\} = \{\underline{\gamma}(s), \underline{\epsilon}(s)\}$$

Il s'agit d'une loi locale fondue au point s éventuellement qui peut-être représentée par une matrice (6,6) dans un repère local

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 = \epsilon_n \\ \epsilon_2 = \epsilon_{T_2} \\ \epsilon_3 = \epsilon_{T_3} \\ \gamma_1 = \gamma_n \\ \gamma_2 = \gamma_{T_2} \\ \gamma_3 = \gamma_{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & | & C \\ - & - & - \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_T \\ M_{T_2} \\ M_{T_3} \end{pmatrix}$$

avec les matrice A et B qui sont symétriques.

Si l'on fait l'hypothèse de Navier-Euler-Bernoulli, la matrice recherchée se réduit à une matrice 4×4

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \gamma_n \\ \gamma_{T_2} \\ \gamma_{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ M_t \\ M_{B_2} \\ M_{f_3} \end{pmatrix} \text{ avec } \underline{\varepsilon_T} = \underline{0}$$

Pour déterminer les coefficients de ces matrices, deux approches sont possibles,

- on peut utiliser la loi de comportement 3D et exploiter les relations entre les déformations 3D et les déformations de poutre ainsi que celles entre les contraintes 3D et les effets de poutre
- on peut également interpréter directement les expériences de chargement élémentaires vues en 3D : traction, flexion, torsion dans le cas de milieux élancés

Nous adoptons cette seconde approche. On suppose la poutre droite d'axe $\underline{x_1}$ pour simplifier la présentation.

- a) On considère tout d'abord une expérience de traction simple sur cette poutre. On impose un effet Normal N opposé aux deux extrémités. On rappelle la relation 3D = $TM(x_1) = \frac{N}{S}$ N effet de traction avec S la section de la poutre, les autres composantes étant nulles. Par ailleurs $\varepsilon_{11}(x_1) = \frac{1}{E} T_{11} = \frac{1}{E} \frac{N}{S}$ et $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{13} = 0$ où E désigne le module de Young du matériau.

De sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon_{11}}{dx_1} = \frac{1}{E} N = \varepsilon_n \\ \underline{\varepsilon_T} = \underline{0} \\ \text{et } \underline{\gamma} = \underline{0} \end{array} \right.$$

avec les notations adoptées pour le tenseur des déformations de poutre

(On renvoie aux relations entre le 3D et le tenseur de déformation dans une rotule droite) $\varepsilon_{12} = 0 \Rightarrow \underline{\varepsilon_T} = \underline{0}$ et $\underline{\gamma} = \underline{0}$

la loi de comportement s'écrit dans ce cas =

$$\left\{ \begin{array}{l} N(u) = E S \varepsilon_n(u) \\ \underline{\sigma}_T = 0 \\ \underline{\gamma}_T = 0 \end{array} \right.$$

ce qui permet de compléter la première colonne de la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \varepsilon_n & \frac{1}{E S} & & & & N \\ \underline{\sigma}_{T_1} & 0 & & & & \underline{\sigma}_{T_2} = 0 \\ \underline{\sigma}_{T_2} & 0 & & & & \underline{\sigma}_{T_3} = 0 \\ \gamma_n & 0 & & & & M_f = 0 \\ \underline{\gamma}_{T_2} & 0 & & & & M_{f_1} = 0 \\ \underline{\gamma}_{T_3} & 0 & & & & M_{f_2} = 0 \end{array} \right)$$

b) On considère maintenant une expérience de torsion simple autour de l'axe de la poutre - On impose un couple M_t en opposition aux deux extrémités
On rappelle donc ce cas que la solution bidimensionnelle avait conduit à la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_t = \mu J \alpha \quad (M_t \text{ moment de torsion autour de } e_1) \\ \text{avec } \mu \text{ le module de cisaillement} \quad (\text{second coefficient de Lamé}) \\ J \text{ l'inertie de torsion qui est une grandeur géométrique qui a} \\ \text{la dimension d'une longueur}^4 \text{ dépend de la géométrie} \\ \text{de la section} \\ \alpha \text{ l'angle de torsion unitaire} \end{array} \right.$$

$\alpha = \gamma_n$ avec les notations adoptées pour le tenseur des déformations de poutre

Plus précisément, J dépend de la fonction de gauchissement de la section Σ : Ici pour une section droite de normale e_1

$$J = \int_{\Sigma} y \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right) - z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right) ds \quad \text{avec } \Psi(y, z) \text{ solution de}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Psi(y, z) = 0 \quad \text{dans } S \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = n_y z - n_z y \quad \text{sur } \partial S \end{array} \right.$$

On rappelle que pour cette nullité, la solution 3D avait conduit à $\varepsilon_{11} = 0$ de sorte que comme $\varepsilon_{11} = \varepsilon_n + \gamma_T x_3 - \gamma_3 x_2$ on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_n = 0 \\ \gamma_T = 0 \end{array} \right.$$

Par ailleurs, on a du fait des termes de gauchissement de section

ε_{12} et $\varepsilon_{13} \neq 0$ ce qui conduit à $\underline{\gamma}_T \neq 0$ non identifiés à ce stade (sauf si l'on se place dans la théorie d'Euler-Navier-Bernoulli)

Ce qui permet de compléter (en partie) une colonne supplémentaire seulement avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_n = \frac{1}{\mu_j} M_t \\ \varepsilon_n = 0 \\ \gamma_T = 0 \end{array} \right. \text{ soit } \begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{T_3} \\ \varepsilon_{T_2} \\ \gamma_n \\ \gamma_{T_2} \\ \gamma_{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ ? \\ \frac{1}{\mu_j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} N \\ \frac{1}{\mu_j} \\ T_3 \\ M_t \\ M_{f2} \\ M_{f2} \end{matrix}$$

- c) On considère une expérience de flexion simple maintenant par des couples terminaux opposés $\pm M_{3f} e_3$

On rappelle que la solution 3D avait conduit à

$$M_{3f} = E I_3 \gamma_{3t}$$

avec I_3 le moment d'inertie géométrique de la section défini par

$$I_3 = \int \sum x_3^2 ds \quad \text{par rapport à } P_{ez}$$

γ_{3t} = la rotation de la section

sous la condition que les axes P_{ez} et P_{ez} soient des axes principaux d'inertie ie que $\int \sum x_2 x_3 ds = 0$

et que le point $P(s)$ soit le centre de gravité géométrique de la section soit $\int \sum x_2 ds = \int \sum x_3 ds = 0$

On rappelle la solution 3D en déformation et contrainte

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{M_3}{E I_3} y ((e_x \otimes e_x) - \nu e_y \otimes e_y - \nu e_z \otimes e_z) \quad \text{et} \quad \underline{\sigma} = -\frac{M_{3f}}{I_3} y e_x \otimes e_x$$

de sorte que

$$\underline{\underline{E}}_T = \underline{\underline{0}}, \quad E_n = 0$$

$$\gamma_n = 0 \text{ et } \gamma_{T_2} = 0$$

d'où

$$\begin{pmatrix} E_n \\ \underline{\underline{E}}_{T_2} \\ \underline{\underline{E}}_{T_3} \\ \gamma_n \\ \gamma_{T_2} \\ \gamma_{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{EI_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_E \\ M_{f_2} \\ M_{f_3} \end{pmatrix}$$

c) De la même manière, on utilise la rotation de flexion par un couple terminal autour de $\underline{\underline{e}}_2$: $\pm M_{2f} \underline{\underline{e}}_2$

$$\text{On obtient } \left\{ \begin{array}{l} M_{2f} = EI_2 \gamma_{2t} \\ \text{avec } I_2 \text{ moment d'inertie géométrique de la section par rapport à } \underline{\underline{P}} e_3 \end{array} \right.$$

avec I_2 moment d'inertie géométrique de la section par rapport

$$I_2 = \int \int x_3^2 ds$$

toujours sous les mêmes hypothèses géométriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{E}}_T = \underline{\underline{0}} \quad E_n = 0 \\ \gamma_n = 0 \text{ et } \gamma_{T_3} = 0 \end{array} \right.$$

et donc la 5^e colonne est identifiée et au final, on a :

$$\begin{pmatrix} E_n \\ \underline{\underline{E}}_{T_2} \\ \underline{\underline{E}}_{T_3} \\ \gamma_n \\ \gamma_{T_2} \\ \gamma_{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{1}{EI_2} & & & & \\ & 0 & ? & 0 & 0 & \\ & 0 & ? & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_3} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_E \\ M_{f_2} \\ M_{f_3} \end{pmatrix}$$

On convient de prendre dans le cas général une relation linéaire entre $\underline{\underline{E}}_T$ et I de la forme suivante

$$\underline{\underline{E}}_{T_2} = \frac{1}{d_2 \mu S} T_2 \quad (\text{avec } E_n = \underline{\underline{E}}_{T_3} = 0 \quad \gamma_n = \gamma_{T_2} = \gamma_{T_3} = 0)$$

$$\underline{\underline{E}}_{T_3} = \frac{1}{d_3 \mu S} T_3 \quad (\text{avec } E_n = \underline{\underline{E}}_{T_2} = 0 \quad \gamma_n = \gamma_{T_2} = \gamma_{T_3} = 0)$$

D'où la loi de comportement du modèle de Timoshenko ou théorie naturelle qu'on écrit :

$$\begin{pmatrix} \Sigma n \\ \Sigma T_2 \\ \Sigma T_3 \\ \Delta n \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2 I_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_3 I_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \\ M_f \\ M_{t2} \\ M_{t3} \end{pmatrix}$$

dans le repère e_1, e_2, e_3

avec e_1 axe de la poutre

e_2, e_3 axes principaux d'inertie

Dans la théorie de Euler-Nauki-Bernoulli, on introduit des liaisons internes $\Sigma T_2 = \Sigma T_3 = 0$

la rigidité du ~~de~~ l'effort tranchant doit être considérée comme infinie et l'effort tranchant n'est plus déterminé par la loi de comportement mais directement par les équations et conditions aux limites du problème. Dans ce cas, on ne garde comme loi de comportement que les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Sigma n \\ \Delta n \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ M_f \\ M_{t2} \\ M_{t3} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \Sigma T_2 = 0 \quad \Sigma T_3 = 0$$

5.4 Condition aux limites en déplacement

Les conditions aux limites en déplacement viennent compléter les conditions aux limites en effort précédemment décrites pour la résolution des problèmes. On reprend les cas simples envisagés précédemment :

- extrémité libre d'effort ou chargé



Dans ce cas, le tenseur des déplacements est inconnu = $\underline{\underline{\delta}}_B$ et $\underline{\underline{\mu}}_B$ inconnus.

On rappelle qu'en revanche les effets résultante et moment sont donnés

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_B \\ M = M_B \end{array} \right.$$

- extrémité encastrée

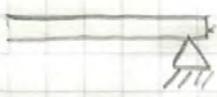


le torseur déplacement est bloqué à $\{O\}$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}_B = 0 \\ \underline{u}_B = 0 \end{array} \right.$$

On rappelle qu'en revanche les effets (résultante et moment) sont cette fois arbitraires (inconnus en B)

- extrémité simplement supportée

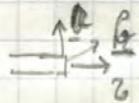


l'extrémité peut glisser dans la direction de l'axe de la route.

Dans ce cas, le déplacement \underline{u} est parallèle à l'axe



$$\underline{u}_B \cdot \underline{n} = 0, \quad \underline{u}_B \cdot \underline{b} = 0$$



avec $(\underline{g}, \underline{n}, \underline{b})$ triade directe

et \underline{g} vecteur tangent en B à la ligne directrice

On rappelle qu'à ces conditions s'ajoutent les conditions en effort :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_B = 0 \\ R_B \cdot \underline{g} = 0 \end{array} \right.$$

- extrémité en appui mobile dans une direction



les conditions sont analogues aux précédentes

- extrémité en appui fixe avec articulation



le déplacement du point B est nul

en revanche la rotation est inconnue

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_B = 0 \\ \underline{\Omega}_B = 0 \end{array} \right.$$

On rappelle que par ailleurs $\left\{ \begin{array}{l} M_B = 0 \end{array} \right.$

On observe qu'à chaque composante nulle du donnée de la résultante au du moment correspond une composante inconnue de u ou τ et réciproquement.

Cela assure la régularité des conditions aux limites. On reviendra sur ce point au chapitre 4.

De cette façon, on a : (excepté cas chargement ou déplacement imposé = 0)

$$\sum_B \{G_B\} \cdot \{u_B\} = R_B \cdot u_B + M_B \cdot z_B = 0$$

- extrémité libre d'effort $P_B = R_B \cdot u_B + M_B \cdot s_{RB} = 0$
 $\begin{array}{c} \text{---} \\ \parallel \\ 0 \end{array}$ inconnue \parallel inconnue
 - extrémité encastrée $P_B = R_B \cdot u_B + M_B \cdot s_{RB} = 0$
 $\begin{array}{c} \text{inconnu} \\ \parallel \\ 0 \end{array}$ inconnu \parallel inconnu
 - extrémité supplément supporté

$$P_B = N_B u_{Bz} + T_B n u_{Bn} + T_B u_{Bg} + M_B - \Omega_B = 0$$

	unison		0		0	
0		unison		unison		0

- o extrémité en appui fixe

$$P_B = \frac{R_D \cdot M_B}{H} + \frac{M_B \cdot S_D}{H} = 0$$

inconnu 0 inconnue

On parle de dualité entre $(\underline{R}_B, \underline{M}_B)$ et $(\underline{\mu}_B, \underline{\Omega}_B)$

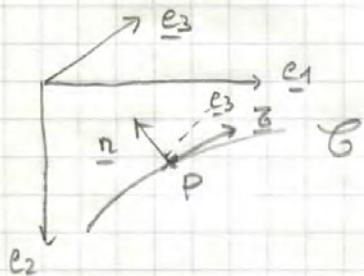
• 6 - Flexion plane des poutres et arcs élastiques à plan de symétrie

Dans cette section, nous effectuons un bilan des équations présentées précédemment dans un cas particulier celui de milieux curvilignes à plan de symétrie et en flexion plane.

■ 6.1 Hypothèses géométriques et de chargement.

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

- a) la ligne directrice (\underline{G}) du milieu est une courbe plane dans le plan ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$). Soit ($\underline{\zeta}, \underline{n}, \underline{e}_3$) le trièdre local au point P

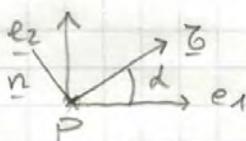


On introduit α l'angle entre la tangente $\underline{\zeta}$ en P

et l'axe \underline{e}_1 : $\underline{\zeta} = \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2$

$$\alpha = \alpha(s)$$

$$\underline{n} = \cos \alpha \underline{e}_2 - \sin \alpha \underline{e}_1$$



$$\text{on a } \frac{d\underline{\zeta}}{ds} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} \underline{e}_1 + \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} \underline{e}_2 = \frac{d\alpha}{ds} \underline{n}$$

on convient de noter

$R(s)$ le rayon de courbure de la ligne directrice au point P (dans la configuration non déformée)

$$R(s) = \frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}}, \text{ on a alors}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{\zeta}}{ds} = \frac{1}{R(s)} \underline{n} \\ \frac{dn}{ds} = -\frac{1}{R(s)} \underline{\zeta} \end{array} \right.$$

- b) Chaque section droite du milieu $\Sigma(s)$ est symétrique par rapport au plan $x_3=0$

En conséquence $P \underline{e}_3$ est une direction principale d'inertie

On note I_3 le moment d'inertie de la section par rapport à \underline{e}_3

c) les effets extérieurs appliqués au milieu sont caractérisés par le torseur $\{f(\lambda)\}$ tel que

- la résultante $f(\lambda)$ est exercée dans le plan (e_1, e_2)

on note $\underline{f}(\lambda) = q(\lambda) \underline{\mathbf{z}} + f(\lambda) \underline{n}$ ses composantes

- le moment $\underline{m}(\lambda)$ est porté par e_3 , il s'agit d'un moment de flexion

$$\underline{m}(\lambda) = M(\lambda) \underline{e}_3$$

On parle de flexion plane.

- En conséquence, les effets intérieurs caractérisés par le torseur $\{\Sigma(\lambda)\}$ sont également de cette forme, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\lambda) = N(\lambda) \underline{\mathbf{z}} + T(\lambda) \underline{n} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\lambda) = M(s) \underline{e}_3 \end{array} \right.$$

- le torseur déplacement est de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}(s) = \omega(s) \underline{e}_3 \text{ pour la résultante, vecteur rotation de la section} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(s) = u(s) \underline{\mathbf{z}} + v(s) \underline{n}, \text{ pour le déplacement en } P(s) \end{array} \right.$$

- En conséquence, le torseur des déformations est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon}(\lambda) = \frac{d\underline{\Omega}(\lambda)}{ds} = \frac{d\omega(\lambda)}{ds} \underline{e}_3, \text{ pour la résultante} \end{array} \right.$$

$$\text{et donc } \gamma_n = 0 = \gamma_2$$

$$\left. \begin{array}{l} - \underline{\epsilon}(\lambda) = \frac{du}{ds} + \underline{\mathbf{z}}(\lambda) \wedge \underline{\Omega}(\lambda), \text{ pour le moment en } P(s) \end{array} \right.$$

$$= \frac{du}{ds}(s) \underline{\mathbf{z}} + u(s) \frac{d\underline{\mathbf{z}}}{ds} + \frac{dv}{ds}(s) \underline{n} + v(s) \frac{d\underline{n}}{ds} + \underline{\mathbf{z}}(s) \wedge \underline{\Omega}(s) \underline{e}_3$$

soit

$$\underline{\epsilon}(\lambda) = \frac{du}{ds}(s) \underline{\mathbf{z}} + u(s) \frac{1}{E(\lambda)} \underline{n} + \frac{dv}{ds}(s) \underline{n} - \frac{1}{E(\lambda)} v(s) \underline{\mathbf{z}} - \omega(s) \underline{n}$$

$$\text{soit } \underline{\epsilon}(\lambda) = \underline{\epsilon}_n \underline{\mathbf{z}} + \underline{\epsilon}_T \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon}_n = \frac{du}{ds} - \frac{1}{E(\lambda)} v(s) \\ \underline{\epsilon}_T = \underline{\epsilon}_T \underline{n} = \left(\frac{dv}{ds} + \frac{du}{ds} - \omega(s) \right) \underline{n} \end{array} \right.$$

6.2 Équations locales du problème

- Écrivons maintenant les équations locales d'équilibre, tout d'abord en termes de résultants :

$$\frac{d \underline{R}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = \underline{0} \quad \text{pour tout } s \text{ devant dans le cas particulier}$$

$$\frac{d}{ds} (N(s) \underline{\mathbf{z}} + T(s) \underline{\mathbf{n}}) + q(s) \underline{\mathbf{z}} + p(s) \underline{\mathbf{n}} = \underline{0} \quad \text{soit}$$

$$\frac{dN(s)}{ds} \underline{\mathbf{z}} + N(s) \frac{d\underline{\mathbf{z}}}{ds} + \frac{dT(s)}{ds} \underline{\mathbf{n}} + T(s) \frac{d\underline{\mathbf{n}}}{ds} + q(s) \underline{\mathbf{z}} + p(s) \underline{\mathbf{n}} = \underline{0}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dN}{ds} \underline{\mathbf{z}} + \frac{N(s)}{E(s)} \underline{\mathbf{n}} + \frac{dT}{ds} \underline{\mathbf{n}} - \frac{T(s)}{E(s)} \underline{\mathbf{z}} + q(s) \underline{\mathbf{z}} + p(s) \underline{\mathbf{n}} = \underline{0}$$

et donc deux équations scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{1}{E(s)} T(s) + q(s) = 0 \\ \frac{dT(s)}{ds} + \frac{1}{E(s)} N(s) + p(s) = 0 \end{array} \right. \quad \forall s \in]s_A, s_B[$$

$$\text{En terme de moment :} \quad \frac{dM(s)}{ds} + \underline{\mathbf{z}} \wedge \underline{R}(s) + \underline{m}(s) = \underline{0}$$

$$\text{devient ici} \quad \frac{d}{ds} [M(s)] e_3 + \underline{\mathbf{z}} \wedge (N(s) \underline{\mathbf{z}} + T(s) \underline{\mathbf{n}}) + m(s) e_3 = \underline{0}$$

soit une équation scalaire :

$$\left\{ \frac{d(M(s))}{ds} + T(s) + m(s) = 0 \quad \forall s \in]s_A, s_B[\right.$$

- À ces équations d'équilibre, il convient d'ajouter la loi de comportement de milieu curviligne, soit pour le modèle de Navier-Euler-Bernoulli

$$\left\{ N(s) = E S \mathbf{e}_n = E S \left[\frac{du}{ds} - \frac{1}{E(s)} v(s) \right] \right. \quad \forall s$$

$$\left. M(s) = E I_3 \gamma_3 = E I_3 \frac{d\omega(s)}{ds} \right.$$

avec $\underline{\underline{E}}_T = \underline{\underline{0}}$ soit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{ds} + \frac{1}{E(s)} u(s) - r(s) = 0 \\ \underline{\underline{M}}(s) = E I_3 \frac{du}{ds} \end{array} \right.$

Dans le cas du modèle de Timoshenko, on a en tout :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(s) = E S \left[\frac{du}{ds} - \frac{1}{E(s)} v(s) \right] \\ M(s) = EI_3 \frac{du}{ds} \\ T(s) = \alpha_2 \mu s \quad E_2^2 = \alpha_2 \mu s \left(\frac{dv}{ds} + \frac{1}{E(s)} u(s) - r(s) \right) \end{array} \right.$$

A ces 6 équations scalaires, il convient d'ajouter des conditions limites, comme décrit précédemment, qui sont propres à chaque problème.

Remarque : les équations sont érites ici sur la configuration non déformée du milieu, cadre de l'hypothèse des petits déplacements.

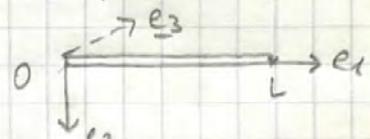
6.3. Cas particulier des poutres rectilignes en flexion plane

(et à plan de symétrie)

Nous considérons dans cette partie, une poutre rectiligne d'axe $\underline{\underline{x}}$.

Dans cette configuration $\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{e}}_1$, $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{e}}_2$ et $\underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{e}}_3$.

Par ailleurs $\frac{d\underline{\underline{d}}}{ds} = \frac{1}{E(s)} = 0$



On suppose $f(s) = p(s) \underline{\underline{e}}_2$ uniquement (effort linéaire de pesanteur).

les équations d'équilibre s'écrivent alors :

- $\frac{dN(x_1)}{dx_1} = 0 \quad \forall x_1 \in]0, L[$

- $\frac{dT(x_1)}{dx_1} + p(x_1) = 0$

- $\frac{dM(x_1)}{dx_1} + T(x_1) = 0 \quad (\text{si on suppose } m(x_1) = 0)$

les équations de comportement suivent :

- $N(u) = E S \frac{du}{dx_1}$
- $M(u) = EI_3 \frac{d^2u}{dx_1^2}$

avec dans le cas de l'hypothèse d'Euler-Navier-Bernoulli :

$$\frac{dv}{dx_1} - \nu(u) = 0$$

et dans le cas du modèle de Timoshenko :

$$T(x_1) = \alpha_2 \mu S \left[\frac{dv}{dx_1} - \nu(u) \right]$$

la résolution de ce système d'équation conduit à :

$$N(u) = N_0 = ES \frac{du}{dx_1}$$

et dans le cas de l'hypothèse d'Euler-Navier-Bernoulli

$$\frac{dv}{dx_1} = \nu(u) \quad , \text{d'où} \quad M(u) = EI_3 \frac{d^2v}{dx_1^2} \quad \text{et donc}$$

$$EI_3 \frac{d^3v}{dx_1^3} + T(u) = 0 \quad , \text{soit en dérivant par } x_1$$

$$EI_3 \frac{d^4v}{dx_1^4} + \frac{\partial T}{\partial u} = 0 \quad \text{et en exploitant l'équilibre}$$

$$EI_3 \frac{d^4v}{dx_1^4} - p(u) = 0 \quad \forall x_1$$

la solution (u, v) en terme de déplacement du problème de poussée doit satisfaire le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx_1} = \frac{1}{ES} N_0 \\ EI_3 \frac{d^4v}{dx_1^4} = p(u) \end{cases} \quad \forall x_1 \in]0, L[$$

Et $\nu(u)$ se calcule avec $\nu(u) = \frac{dv}{dx_1}$

$$M(u) \text{ avec } M(u) = EI_3 \frac{d^2v}{dx_1^2}$$

$$\text{et } T(u) \text{ avec } T(u) = -EI_3 \frac{d^3v}{dx_1^3}$$

À ce système, il convient d'ajouter les conditions aux limites qui détermineront les constantes d'intégration.