Examen de 1ère session : Lundi 11 mai 2015
Durée 2h

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (−2 points possibles).

Le sujet comporte 4 pages imprimées.

Questions de cours ($\simeq$ 15 min)

1. Soient O un point, et S_1, S_2, S_3, 3 solides indéformables. Leurs matrices d'inertie dans la base orthonormée directe $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ s'écrivent :

$$[J_1(\mathrm{O})] = \begin{pmatrix} A & -B & 0 \\ C & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad [J_2(\mathrm{O})] = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & B & 0 \\ B & 0 & C \end{pmatrix}, \quad [J_3(\mathrm{O})] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   avec A, B et C trois quantités strictement positives, homogènes à un moment d'inertie.
   Pouvez-vous identifier les directions principales d'inertie au point O de ces solides ?
2. Définir, en précisant les conditions d'existence, le centre instantané de rotation.
3. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides.

Problème

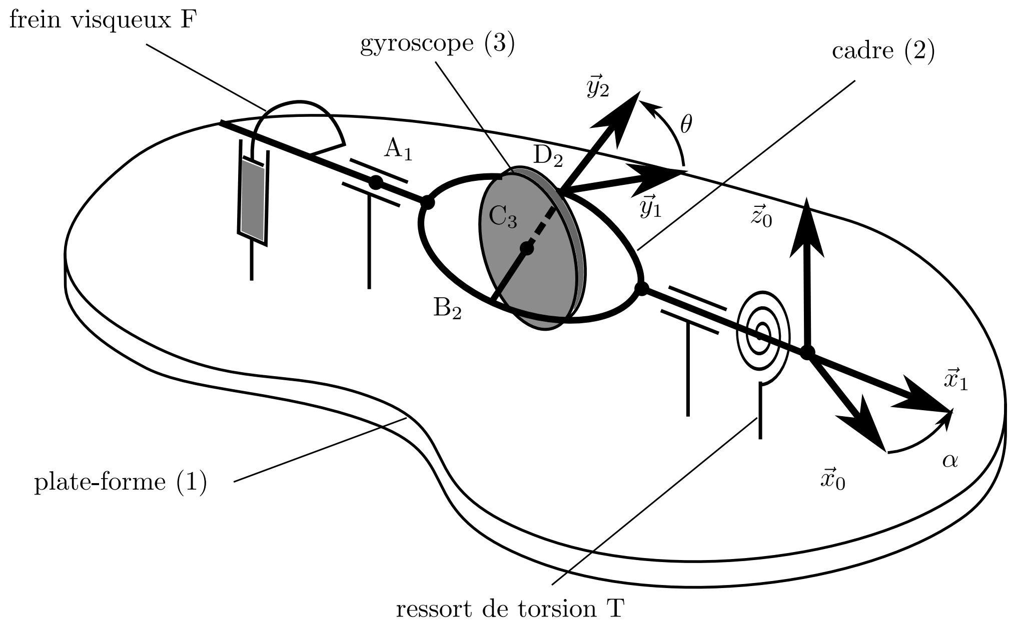


FIGURE 1 – Gyroscope embarqué sur une plateforme flottante.

On souhaite mesurer les oscillations d'une plateforme flottante sous l'effet de la houle à l'aide d'un gyroscope. On se donne un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ où $\overrightarrow{z_0}$ est choisi vertical ascendant de sorte que l'accélération de la pesanteur s'écrive $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{z_0}$ avec $g = 9,81$ m.s^{-2}.

Le gyroscope (3) est assimilé à un disque de rayon r et de masse m. On note C_3 son centre de masse. Le gyroscope est en liaison pivot parfaite autour de son axe de révolution avec un cadre de masse M lui-même en liaison pivot parfaite avec la plateforme.

On supposera que la plateforme reste dans un plan $z = \mathrm{Cte}$ au cours de son mouvement dans $\mathcal{R}_0$. Le référentiel $\mathcal{R}_1 = (\mathrm{A}_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ est attaché à la plateforme. Le cadre (2) tourne autour de l'axe $(\mathrm{A}_1, \overrightarrow{x_1})$ grâce à une liaison pivot parfaite de même axe (bien que la FIGURE 1 indique qu'il y a deux liaisons pivot entre (1) et (2), on supposera pour simplifier qu'il n'y en a qu'une seule). Le référentiel $\mathcal{R}_2 = (\mathrm{A}_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ est attaché au cadre. La liaison 3-2 (entre le gyroscope et le cadre) est pivot parfaite d'axe $(\mathrm{C}_3, \overrightarrow{y_2})$. Les angles $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_0}})$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_1}})$ sont introduits pour décrire les rotations de 1 par rapport à 0 et de 2 par rapport à 1, respectivement.

Un moteur permet d'imposer au gyroscope une vitesse de rotation constante $\vec{\Omega}(3/2) = \omega\overrightarrow{y_2}$.

Afin de ramener le gyroscope dans une position verticale lorsque la plateforme ne tourne pas (lorsque $\dot{\alpha} = 0$), on utilise un ressort de torsion T et un frein visqueux F qui exercent un couple sur le cadre. On modélise leur action mécanique à l'aide des torseurs :

$$\{\mathcal{A}(\mathrm{T} \to 2)\}_{\mathrm{C}_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -k\theta\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\} \qquad \text{et} \qquad \{\mathcal{A}(\mathrm{F} \to 2)\}_{\mathrm{C}_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -\mu\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}$$

où k est la raideur de T et μ est le coefficient de frottement de F.

Les points matériels B_2 et D_2, appartenant au solide (2), sont repérés par $\overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_3} = \overrightarrow{\mathrm{C}_3\mathrm{D}_2} = \ell\overrightarrow{y_2}$. Le point E se trouve sur la périphérie du gyroscope et est tel que $\overrightarrow{\mathrm{C}_3\mathrm{E}} = r\overrightarrow{z_2}$.

1 Cinématique ($\simeq$ 20 min)

Pour simplifier, on supposera dans toute la suite que $\vec{V}(\mathrm{C}_3 \in 1/0) = \vec{0}$.

1. Dessiner les diagrammes de changement de base.
2. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
3. Justifier que $\vec{V}(\mathrm{C}_3 \in 1/0) = \vec{V}(\mathrm{C}_3 \in 2/0) = \vec{V}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)$.
4. Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(\mathrm{B}_2 \in 2/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{D}_2 \in 2/0)$.
5. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{E} \in 3/0)$.

2 Cinétique ($\simeq$ 35 min)

Les matrices et vecteurs seront exprimés dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.

1. Exprimer la matrice d'inertie $[J_3(\mathrm{C}_3)]$ du gyroscope en C_3.
2. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)$ du gyroscope en C_3.

On assimile le cadre (2) à un assemblage constitué d'un anneau et de 3 barres (FIGURE 2).

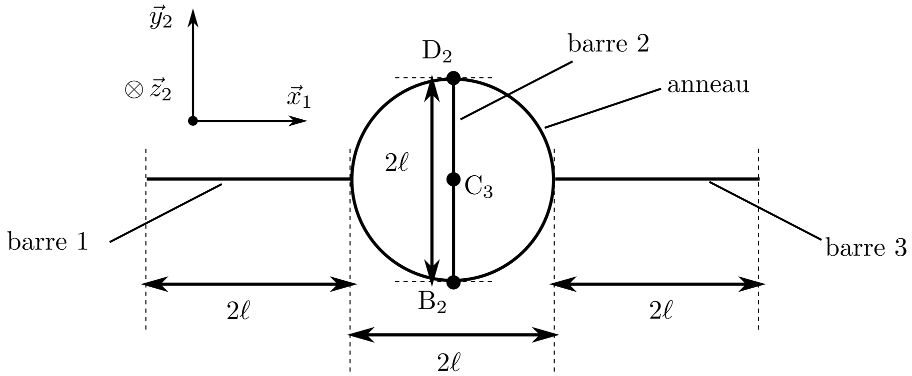
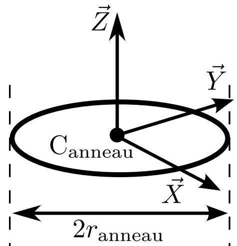


FIGURE 2 – Schéma du cadre : un anneau de rayon ℓ et de masse m' et 3 barres de longueur 2ℓ et de masse m''.

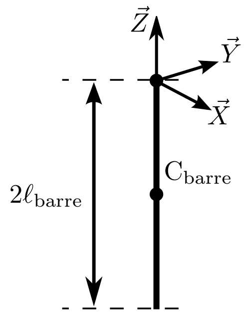
3. On suppose que la densité linéïque est uniforme et identique pour l'anneau et les barres. Exprimer m' et m'' en fonction de M (masse totale du cadre).
4. Identifier les éléments de symétrie pour le cadre (2) et en déduire la position de son centre de masse ainsi que ses directions principales d'inertie au centre de masse.

On rappelle la matrice d'inertie d'un anneau et d'une barre homogènes en leur centre de masse :

$$[J_{\mathrm{anneau}}(\mathrm{C}_{\mathrm{anneau}})]_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{anneau}} r_{\mathrm{anneau}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$[J_{\mathrm{barre}}(\mathrm{C}_{\mathrm{barre}})]_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} = \frac{1}{3} m_{\mathrm{barre}} \ell_{\mathrm{barre}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5. Effectuer l'assemblage afin d'exprimer la matrice d'inertie du cadre (2).

Dans toute la suite, on adoptera la notation suivante :

$$[J_2(\mathrm{C}_3)]_{(\vec{x_1},\vec{y_2},\vec{z_2})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

6. Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_3 \in 2/0)$ du cadre en C_3.

3 Dynamique ($\simeq$ 25 min)

1. Donner, en justifiant, la relation entre le moment dynamique $\vec{\delta}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_3 \in 3/0)$ du gyroscope par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point C_3. (Le calcul explicite du moment dynamique n'est pas demandé.)
2. Même question pour la relation entre $\vec{\delta}(\mathrm{C}_3 \in 2/0)$ et $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_3 \in 2/0)$.
3. Établir le bilan des actions mécaniques agissant sur le système $(2\cup3)$. Comme la vitesse de rotation du gyroscope (3) est constante, l'action du moteur sur ce dernier n'apparaîtra pas dans le bilan.
4. Formuler le Principe Fondamental de la Dynamique pour $(2 \cup 3)$ et en déduire une équation du mouvement. Des points seront accordés si vous faîtes le calcul en prenant $\vec{\delta}(\mathrm{C}_3 \in 2/0) = \vec{0}$ (ce qui revient à négliger l'inertie du cadre vis-à-vis de celle du gyroscope).

4 Étude énergétique ($\simeq$ 25 min)

1. Exprimer la puissance galiléenne $\mathcal{P}(\mathrm{T} \to 2/0)$ de l'action du ressort sur le cadre.
2. Exprimer la puissance galiléenne $\mathcal{P}(\mathrm{F} \to 2/0)$ de l'action du frein sur le cadre.
3. Peut-on décrire l'action du ressort sur le cadre comme dérivant d'une énergie potentielle ? Si oui, donner son expression $E_p(\mathrm{T} \to 2)$.
4. Même question pour l'action du frein sur le cadre.
5. Exprimer l'énergie cinétique $T(3/0)$ du gyroscope dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
6. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système $(2 \cup 3)$ sans effectuer les calculs de dérivation par rapport au temps. Peut-on en déduire directement une intégrale première ?