

Licence de Mécanique - 3ème année

VIBRATIONS

Notes de Cours

Table des matières

1	Introduction	5
2	Lois de la dynamique des solides et équations de mouvement	7
2.1	Solides rigides - Degrés de liberté - Paramètres généralisés	7
2.2	Géométrie des masses	8
2.2.1	Masse	8
2.2.2	Inertie	8
2.3	Solides rigides - Torseurs utiles	10
2.3.1	Torseur cinématique	10
2.3.2	Torseur cinétique	10
2.3.3	Torseur dynamique	10
2.3.4	Torseur d'action mécanique	10
2.4	Solide rigide : grandeurs énergétiques	11
2.4.1	Énergie cinétique	11
2.4.2	Puissance des forces mécaniques	11
2.4.3	Énergie potentielle	11
2.5	Principe fondamental de la dynamique	12
2.6	Conservation de l'énergie	12
2.6.1	Loi de conservation de l'énergie pour un solide rigide	12
2.6.2	Loi de conservation de l'énergie pour un ensemble de solides rigides	13
2.6.3	Autre écriture de la loi de conservation de l'énergie	13
2.7	Équations de Lagrange	13
2.8	Équations de mouvement - Vibrations	14
3	Système à un degré de liberté (1 ddl)	17
3.1	Modélisation et équation de mouvement	17
3.1.1	Exemple du système masse-ressort en translation	17
3.1.2	Exemple de l'arbre en torsion - 1ddl en rotation	18
3.2	Résolution de l'équation de mouvement	20
3.3	1ddl - Vibrations libres non amorties	20
3.3.1	Pulsation, fréquence, période	21
3.3.2	Amplitude et phase des oscillations	22
3.3.3	Déplacement - vitesse - accélération	22
3.3.4	Écritures équivalentes de la réponse du système	23
3.4	Vibrations libres amorties	23
3.4.1	Résolution de l'équation de mouvement	24
3.4.2	Amortissement sur-critique	24
3.4.3	Amortissement critique	25
3.4.4	Amortissement sous-critique	26
3.4.5	Méthodes de mesure du taux d'amortissement ξ	27
3.5	Vibrations forcées harmoniques du système conservatif (non amorti)	28
3.5.1	Équation de mouvement et réponse	28
3.5.2	Régime établi	29

3.6	Vibrations forcées harmoniques du système amorti	30
3.6.1	Régime établi	31
3.6.2	Méthodes de mesure du taux d'amortissement ξ	33
3.7	Admittance et impédance	34
3.8	Application : transmission et isolation vibratoire	36
3.9	Système soumis à une excitation complexe	39
3.9.1	Principe de superposition	39
3.9.2	Décomposition en série de Fourier	39
3.9.3	Méthode par les transformées de Laplace	41
4	Système à deux degrés de liberté	
	(2 ddl)	45
4.1	Modélisation	45
4.2	Équations de mouvement	45
4.2.1	Par le PFD	45
4.2.2	Par la conservation de l'énergie	46
4.2.3	Par les équations de Lagrange	46
4.3	Vibrations en régime libre	47
4.3.1	régime libre du système 2ddl conservatif	47
4.3.2	Un exemple pour vous entraîner	49
4.4	Résolution par formulation matricielle	50
4.4.1	Formulation pour un système conservatif à n ddls	50
4.4.2	Identification des matrices $[M]$, $[K]$ et $\{F\}$	50
4.4.3	Cas du système 2ddls	50
4.4.4	Détermination des modes propres	51
4.4.5	Exemple	52
4.5	Vibrations forcées - excitation harmonique	53
4.5.1	mise en équation et résolution	53
4.5.2	Exemple	54
4.6	Application : l'absorbeur dynamique accordé	56

Chapitre 1

Introduction

Il s'agit dans ce cours de proposer une première approche des problèmes de vibrations de structures. On entend par vibrations des oscillations d'un système autour d'une position d'équilibre statique (considérée comme la configuration de référence du système).

Les problèmes de vibrations sont couramment rencontrés dans l'industrie, elles peuvent engendrer des problèmes de confort, de tenue mécanique, de sécurité... Les domaines d'application industriels sont nombreux : automobile (confort acoustique et vibratoire), génie civil (résistance au vent, trafic, séismes...), biomécanique, aéronautique, électroménager...

Un exemple très connu d'une mauvaise estimation d'un problème de vibration est la destruction du pont de Tacoma (USA, 7/11/1940) après seulement 4 mois d'existence (figure 1.1 , vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=AAo9NOAFLqw>).



FIGURE 1.1 – Destruction du pont de Tacoma

Les vibrations sont un domaine industriel qui fait autant appel à la modélisation (en particulier via des modèles numériques de type éléments finis) qu'à la mesure. Quelques exemples vous sont proposés figure 1.2

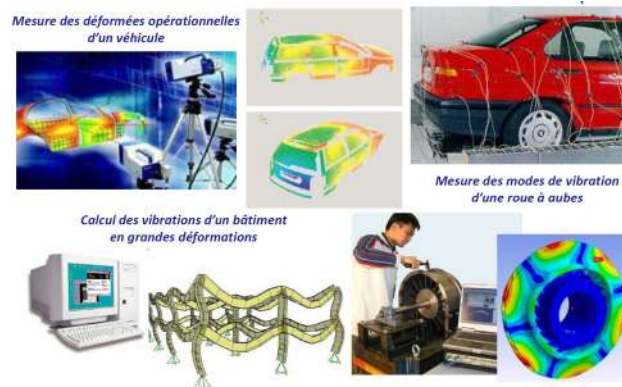


FIGURE 1.2 – Vibrations - Exemples d'applications industrielles

Il nous a semblé utile de positionner ce cours parmi vos différents cours de mécanique, c'est l'objet de la figure 1.3 (planche de présentation du cours présentiel).

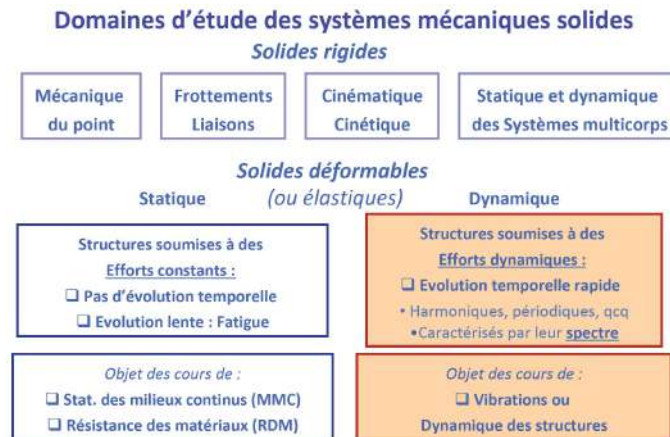
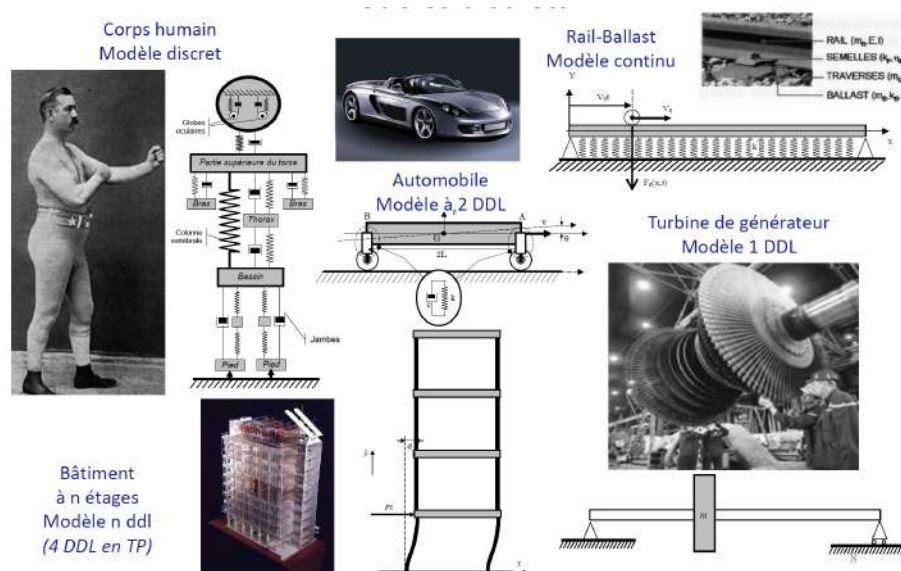


FIGURE 1.3 –

Afin de modéliser un système vibratoire, différentes familles de modèles peuvent être utilisés :

- modèles discrets : le système est modélisé par un nombre fini de degrés de liberté (ddl) reliés par des éléments de liaison (suspensions)
- modèles continus : le système est modélisé par une structure élémentaire continue (poutres-cordes - plaques). La mise en équation et la résolution du problème est analytique.
- modèles à éléments finis : le système est modélisé par l'assemblage d'un nombre fini de structures continues élémentaires (les éléments du modèle). L'écriture et la résolution du problème sont numériques.

Quelques exemples de modèles vous sont proposés figure 1.



Dans ce cours, nous nous contenterons d'aborder les modèles discrets à 1 ou 2 degrés de libertés. Les autres modèles seront abordés dans les cours de Master.

Chapitre 2

Lois de la dynamique des solides et équations de mouvement

Nous allons rappeler brièvement dans ce chapitre quelques éléments de mécanique des solides rigides utiles pour ce cours. Ces éléments ont normalement été abordés en L2, nous vous invitons donc à revoir si besoin votre cours de mécanique des solides rigides de l'an dernier. Vous pouvez également consulter l'ouvrage suivant rédigé par un collectif d'enseignants de Sorbonne Université : Mini Manuel de Mécanique des Solides, Yves Berthaud & Al, Ed. Dunod

Nous verrons ensuite comment mettre en place la ou les équations de mouvement d'un système de solide(s) rigide(s) à partir des lois de la dynamique :

- Principe fondamental de la dynamique
- Conservation de l'énergie
- Équations de Lagrange

Si vous êtes relativement à l'aise avec ces notions et/ou si vous souhaitez commencer de suite par "le vif du sujet", vous pouvez commencer la lecture de ce cours par le chapitre suivant (1ddl) et consulter le présent chapitre au grès de vos besoins.

2.1 Solides rigides - Degrés de liberté - Paramètres généralisés

Pour décrire le mouvement d'un solide rigide libre dans l'espace, il faut 6 paramètres de déplacement (3 translation + 3 rotations).

Il en est de même pour décrire les mouvements relatifs de deux solides en liaison.

Les degrés de liberté sont ceux de ces mouvements qui sont libres (non bloqués) pour le solide considéré ou pour une liaison entre deux solides.

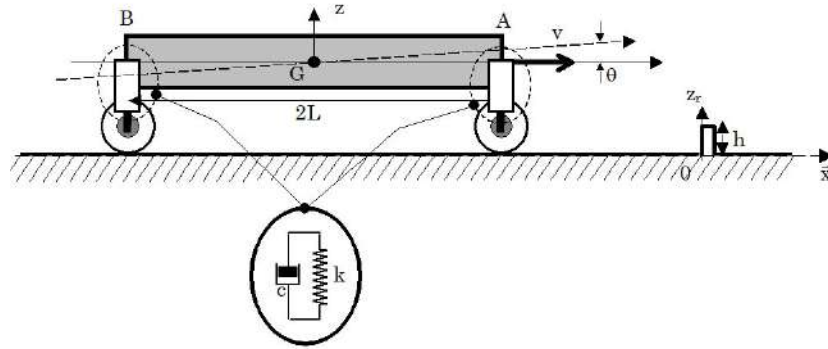
Les mouvements d'un système sont alors décrits par des paramètres généralisés, paramètres indépendants qui sont en général liés aux degrés de liberté du système.

Exemple - modèle simplifié d'un véhicule

On véhicule est modélisée par une poutre rigide homogène de masse M et de longueur $2L$, supportée à ses deux extrémités par des suspensions identiques caractérisées par une raideur k et un amortissement c . Les roues et les pneumatiques sont supposés indéformables et de masse négligeable impliquant que les variations de la route sont intégralement transmises aux suspensions.

Ce modèle induit deux degrés de liberté. Différents couples de paramètres généralisés peuvent être choisis pour décrire les mouvements de ce véhicule autour de sa position d'équilibre, par exemple :

- $(z_A; z_B)$ déplacements verticaux des extrémités A et B de la poutre
- $(z_G; \theta)$ déplacement vertical du centre de masse G de la poutre et angle de pivotement de la poutre par rapport à la position d'équilibre statique.



2.2 Géométrie des masses

2.2.1 Masse

- Masse d'un système discret : la masse d'un système constitué de n points matériels de masse m_i est la somme des masses : $m = \sum_{i=1}^n m_i$
- Masse d'un système continu : $m = \int_V dm(M) = \int_V \rho(M) dv$ où dv est un élément de volume et $\rho(M)$ la masse volumique au point M .
- Centre de masse : on appelle centre d'inertie ou centre de masse G d'un solide S le barycentre des centres M des éléments de volume dv affectés des coefficients des masses élémentaires :

$$\int_V G \vec{M} dm(M) = \vec{0}$$
 Soit : $\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_V O \vec{M} dm(M)$

2.2.2 Inertie

- Moment d'inertie : Le moment d'inertie par rapport à un axe caractérise la répartition de masse par rapport à cet axe et la difficulté à mettre le solide en rotation autour de cet axe.
Moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe Δ :

$$I_{\Delta} = \int_V r^2(M) dm = \int_V \rho(M) r^2(M) dv$$

où r est la distance du point M à l'axe Δ .

- Produit d'inertie : Le produit d'inertie par rapport à un plan caractérise l'asymétrie de la répartition de la masse dans ce plan.
- Matrice d'inertie : moments et produits d'inertie d'un solide sont synthétisés dans la matrice d'inertie :

$$\bar{I}(O, S) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{F} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{B} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{E} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Termes non diagonaux : produits d'inertie} \\ \text{Termes diagonaux : moments d'inertie} \end{matrix}$$

Base de représentation liée au solide $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Point d'expression

$$\text{Avec : } \bar{\bar{I}}(O, S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & - \int_S xy dm & - \int_S xz dm \\ - \int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & - \int_S yz dm \\ - \int_S xz dm & - \int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (repère lié au solide S)

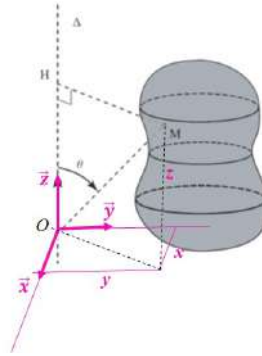


FIGURE 2.1 –

La figure 2.2 rappelle les expressions de matrices d'inertie des solides élémentaires les plus courants, exprimées au centre de masse du solide.

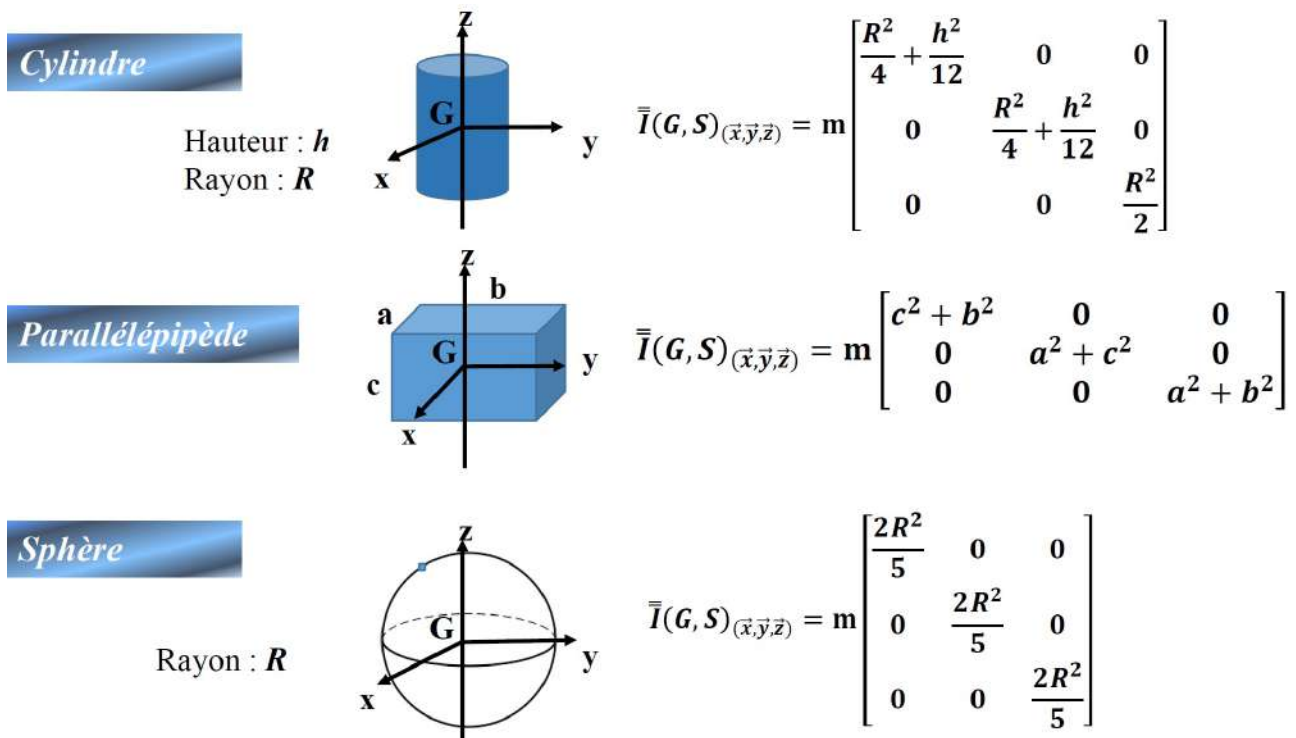


FIGURE 2.2 – Matrices d'inertie de solides élémentaires

2.3 Solides rigides - Torseurs utiles

2.3.1 Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique exprimé au point A du solide S_1 dans son mouvement par rapport au solide S_2 par :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}^{S_1/S_2} \\ \vec{V}_A^{S_1/S_2} \end{array} \right\}$$

$\vec{\Omega}^{S_1/S_2}$ est le vecteur taux rotation du solide S_1 dans son mouvement par rapport au solide S_2

$\vec{V}_A^{S_1/S_2}$ est le vecteur vitesse du point A dans le mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_2

2.3.2 Torseur cinétique

On définit le torseur cinétique exprimé au point A du solide S_1 dans son mouvement par rapport au solide S_2 par :

$$\{\mathcal{C}(S_1/S_2)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} M\vec{V}_G^{S_1/S_2} \\ \vec{\sigma}_A^{S_1/S_2} \end{array} \right\}$$

$M\vec{V}_G^{S_1/S_2}$ est la quantité de mouvement de S_1 dans son mouvement par rapport à S_2 . G est le centre d'inertie du solide S_1

$\vec{\sigma}_A^{S_1/S_2}$ est le moment cinétique en A de S_1 dans son mouvement par rapport à S_2

On retiendra juste ici que pour $A = G$ on a : $\vec{\sigma}_G^{S_1/S_2} = \bar{I}_G(S_1) \cdot \vec{\Omega}^{S_1/S_2}$

2.3.3 Torseur dynamique

On définit le torseur dynamique exprimé au point A du solide S_1 dans son mouvement par rapport au solide S_2 par :

$$\{\mathcal{D}(S_1/S_2)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} M\vec{\Gamma}_G^{S_1/S_2} \\ \vec{\delta}_A^{S_1/S_2} \end{array} \right\}$$

$\vec{\Gamma}_G^{S_1/S_2}$ est l'accélération du centre de masse de S_1 dans le mouvement de S_1 par rapport à S_2

$\vec{\delta}_A^{S_1/S_2}$ est le moment dynamique en A de S_1 dans son mouvement par rapport à S_2

On retiendra juste ici que pour $A = G$ ou si $\vec{V}_A^{S_1/S_2} = \vec{0}$ on a : $\vec{\delta}_A^{S_1/S_2} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A^{S_1/S_2}$

2.3.4 Torseur d'action mécanique

Tout action mécanique peut être caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur. Le torseur représentant l'action mécanique du solide S_2 sur le solide S_1 s'écrit :

$$\{\mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}^{S_2 \rightarrow S_1} \\ \vec{\mathcal{M}}_A^{S_2 \rightarrow S_1} \end{array} \right\}$$

$\vec{F}^{S_2 \rightarrow S_1}$ est la force résultante

$\vec{\mathcal{M}}_A^{S_2 \rightarrow S_1}$ est le moment résultant en A.

2.4 Solide rigide : grandeurs énergétiques

2.4.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système matériel S dans son mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} est défini par : $E_c(S/\mathcal{R}) = \int \int \int_S \frac{1}{2} \vec{V}_M^{S/\mathcal{R}} \cdot \vec{V}_M^{S/\mathcal{R}} dm$

Pour un solide indéformable l'énergie cinétique peut s'écrire comme 1/2 du comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}) \}_A \odot \{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}) \}_A \forall A$$

On écrit les deux torseurs au centre de masse G de S pour simplifier l'écriture du torseur cinétique et on obtient :

Énergie cinétique d'un solide rigide

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{V}_G^{S/\mathcal{R}} \cdot M_S \cdot \vec{V}_G^{S/\mathcal{R}}}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\Omega}_G^{S/\mathcal{R}} \cdot \bar{\bar{I}}_G(S) \cdot \vec{\Omega}_G^{S/\mathcal{R}}}_{\text{Rotation}}$$

Pour un ensemble de solides rigides $\Sigma = \sum S_i$:

$$E_c(\Sigma) = \sum E_c(S_i)$$

On remarque deux contributions à l'énergie cinétique :

- la première correspond au mouvement de translation du centre de masse
- la seconde correspond au mouvement de rotation du solide observé dans un repère dont l'origine est au centre de masse.

2.4.2 Puissance des forces mécaniques

Puissance des actions mécaniques

La puissance des actions mécaniques exercées sur un solide indéformable S en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R} est égale au comoment du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques :

$$\mathcal{P}(F \rightarrow S/\mathcal{R}) = \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}) \}_M \odot \{ \mathcal{A}(F \rightarrow S) \}_M \forall M$$

2.4.3 Énergie potentielle

Le travail d'une force conservative entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. On dit dans ce cas que la force dérive d'un potentiel :

$$\vec{F}_{cons} = -\vec{grad} E_p$$

où E_p est l'énergie potentielle. La puissance d'une force conservative peut alors s'écrire :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{cons}) = -\frac{d}{dt} E_p$$

Exemples de forces conservatives : poids ; force élastique (ressort)

Exemple de forces non conservatives (ne dérivent pas d'un potentiel) : forces de pression ; forces de frottement

2.5 Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique peut s'énoncer sous la forme suivante :

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Pour un solide ou un système isolé ou pseudo-isolé S :

$$\underbrace{\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g)\}_A}_{\text{Torseur Dynamique}} = \underbrace{\{\mathcal{A}(Ext- > S)\}_A}_{\text{Torseur Des Actions Mécaniques}} \quad (2.1)$$

où \mathcal{R}_g est un repère galiléen

Cette écriture à l'aide de l'outil torseur permet de condenser dans une même expression l'équilibre en translation et en rotation du système isolé :

- La résultante de cette équation traduit l'équilibre dynamique en translation de S .
- Le moment de cette équation traduit l'équilibre dynamique en rotation de S .

PFD : équilibre dynamique en translation et rotation

Pour un solide ou un système isolé ou pseudo-isolé S :

$$\left\{ \begin{array}{c} M_S \vec{\Gamma}_G^{S/\mathcal{R}_g} \\ \bar{I}_G(S) \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_A^{S/\mathcal{R}_g} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum \vec{F}^{Ext->S} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_A^{Ext->S} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Équilibre en Translation} \\ \text{Équilibre en Rotation} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

2.6 Conservation de l'énergie

2.6.1 Loi de conservation de l'énergie pour un solide rigide

L'équation de conservation de l'énergie n'est rien d'autre que la version énergétique du PFD. Elle peut d'ailleurs en être déduite :

Rappelons l'expression du PFD pour un solide rigide S : $\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g)\}_A = \{\mathcal{A}(Ext- > S)\}_A$

Si l'on "multiplie" (comoment) chacun des termes par le torseur cinématique :

$$\underbrace{\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g)\} \odot \{\mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g)\}_A}_{\frac{dE_c}{dt} (E_c: \text{énergie cinétique})} = \underbrace{\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g)\} \odot \{\mathcal{A}(Ext- > S)\}_A}_{=\text{puissance des Actions Mécaniques}}$$

Finalement, pour un solide rigide S , on a :

Loi de conservation de l'énergie pour un solide rigide S

$$\frac{dE_c}{dt}(S/\mathcal{R}_g) = P(ext- > S)$$

$E_c(S/\mathcal{R}_g)$: énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g
 $P(ext- > S)$: puissance des action extérieures appliquées à S

2.6.2 Loi de conservation de l'énergie pour un ensemble de solides rigides

Soit un ensemble de solides rigides $\Sigma = \sum_i S_i$.

Pour cet ensemble, la loi de conservation de l'énergie devient :

$$\frac{dE_c}{dt}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_i P(ext- > S_i) = P(ext- > \Sigma) + \sum_{ij} P(S_j- > S_i)$$

$P(ext- > \Sigma) = P_{ext}$ est la puissance des forces extérieures exercées sur l'ensemble Σ

$\sum_{ij} P(S_j- > S_i) = P_{int}$ est la puissance des inter-efforts entre solides S_i de Σ

On notera que pour une liaison parfaite la puissance des forces de liaison est nulle ($P(S_j- > S_i) = 0$ pour une liaison parfaite entre S_i et S_j)

Loi de conservation de l'énergie pour un ensemble de solides Σ

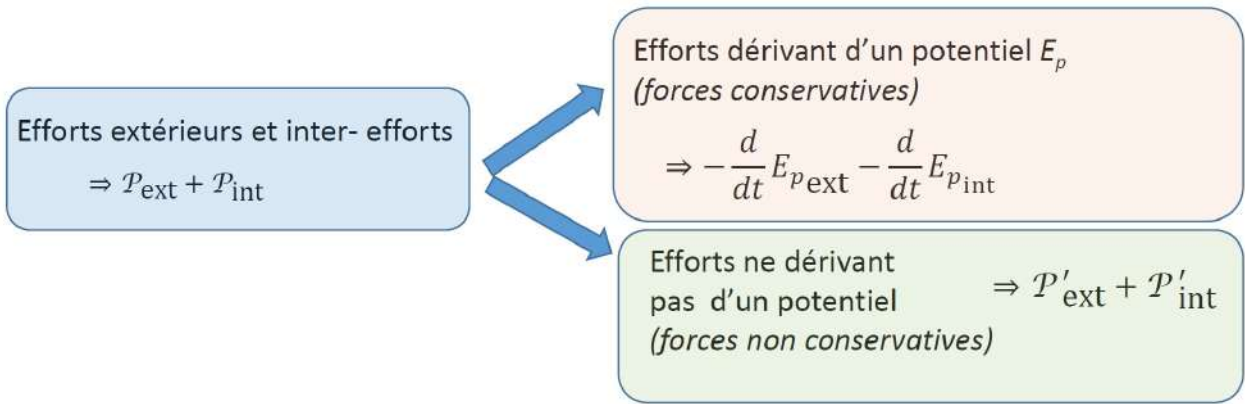
$$\frac{dE_c}{dt}(\Sigma/\mathcal{R}_g) = P_{ext} + P_{int} \quad (2.3)$$

P_{ext} : puissance des forces extérieures exercées sur l'ensemble Σ

P_{int} : puissance des inter-efforts entre solides S_i de Σ

2.6.3 Autre écriture de la loi de conservation de l'énergie

Cette équation de conservation peut également s'écrire en faisant intervenir les énergies potentielles. Il suffit pour cela de décomposer les forces considérées en forces conservatives et non conservatives :



On peut alors réécrire l'équation de conservation de l'énergie :

Loi de conservation de l'énergie pour

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(E_c + E_{p_{int}} + E_{p_{ext}})(\Sigma)}_{\text{énergie mécanique du système}} = \underbrace{P'_{ext} + P'_{int}}_{\text{puissance des forces non conservatives}} \quad (2.4)$$

2.7 Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont un outil très pratique pour obtenir les équations de mouvement, notamment dans le cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté. C'est une autre façon d'exprimer le PFD sous forme énergétique, cette fois en faisant apparaître explicitement les paramètres généralisés du système.

Le Lagrangien d'un système est défini par : $L = E_c - E_p$

Équations de Lagrange

Pour un système Σ dont le mouvement est défini par n paramètres généralisés x_i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_i} \quad (2.5)$$

$L = E_c - E_p$ Lagrangien du système Σ

E_d Énergie dissipée

P_e : puissance des forces extérieures appliquées au système

$\frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_i} = Q_i$: forces généralisées

2.8 Équations de mouvement - Vibrations

L'objet de ce cours est l'étude des vibrations de système plus ou moins complexes (système à un ou plusieurs degrés de liberté). Nous entendons par vibrations des mouvements (dynamique) du système autour de sa position d'équilibre statique.

Pour étudier ces mouvements, la première étape consiste à écrire la ou les équations de mouvement du système considéré. Ceci en considérant le mouvement du système autour de sa position d'équilibre statique.

Les équations de mouvement peuvent être écrites :

- à partir du PFD
- à partir de la loi de conservation de l'énergie
- à partir des équations de Lagrange

Les trois méthodes aboutissant aux mêmes équations de mouvement. Des exemples sont traités au début du chapitre 1ddl et au début du chapitre 2ddl.

Vibrations et position d'équilibre statique

Le cours de vibrations ne s'intéresse qu'à la résolution de la partie dynamique des équations d'équilibre, c'est à dire les variations de mouvement autour de la position d'équilibre statique. Pour mieux comprendre nous allons traiter l'exemple d'un système masse-ressort (1ddl) vertical (figure 2.3

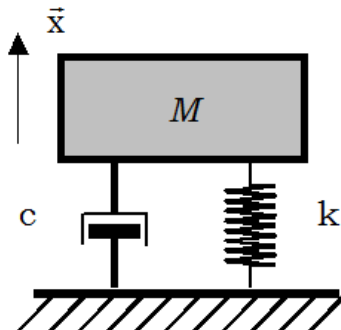


FIGURE 2.3 – Système masse-ressort vertical

On pose : x la position verticale absolue de la masse, avec $x = 0$ pour un allongement nul de la suspension (suspension sans la masse).

La masse est soumise :

- à son poids $mg\vec{x}$
- à la force de rappel du ressort $-kx\vec{x}$
- à la force de frottement visqueuse (amortissement de la suspension) $-c\dot{x}$
- à d'éventuelles forces extérieures $\vec{F} = (F_0 + F(t))\vec{x}$ que l'on décompose en forces constantes ($F_0\vec{x}$) et forces dynamiques ($F(t)\vec{x}$)

L'équilibre de la masse s'écrit (application du PFD par exemple) :

$$m\ddot{x} = -mg - kx - c\dot{x} + F$$

Au repos (pas de mouvement $\dot{x} = \ddot{x} = F(t) = 0$) on pose $x = x_0$ et l'équilibre statique s'écrit : $kx_0 = F_0 - mg$

L'allongement du ressort au repos est donc $x_0 = \frac{F_0 - mg}{k}$

On propose le changement de variable suivant : $x' = x - x_0$

où la nouvelle variable x' est la position verticale mesurée par rapport à la position d'équilibre statique

L'équation de mouvement devient alors :

$$m\ddot{x} = -mg - kx - c\dot{x} + F_0 + F(t)$$

$$m\ddot{x}' = -mg - kx' - kx_0 - c\dot{x}' + F_0 + F(t)$$

$$m\ddot{x}' = -kx' - c\dot{x}' + F(t)$$

On remarque que lorsque l'on écrit l'équation de mouvement à partir de la position d'équilibre statique, les forces constantes (indépendantes du temps) n'interviennent pas dans l'équation de mouvement. Dans cet exemple c'est le cas du poids et de la force \vec{F}_0

Ce résultat peut être généralisé et pour la suite du cours nous écrirons systématiquement les équations de mouvement autour de la position d'équilibre statique du système considéré.

Équations de mouvement et position d'équilibre statique

lorsque l'on écrit les équations de mouvement à partir de la position d'équilibre statique du système, les forces constantes (indépendantes du temps) n'interviennent pas dans les équations de mouvement.

Chapitre 3

Système à un degré de liberté (1 ddl)

3.1 Modélisation et équation de mouvement

3.1.1 Exemple du système masse-ressort en translation

Nous prendrons comme exemple le système masse-ressort en translation représenté figure 3.1. La masse m est en translation suivant l'axe x , elle est reliée à un bâti fixe par un ressort modélisé par une raideur k et un amortissement visqueux c . La masse est soumise à une force extérieure \vec{F} suivant l'axe x

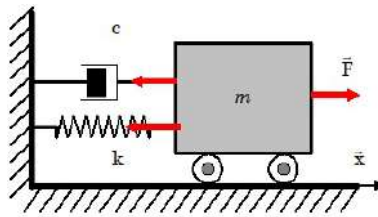


FIGURE 3.1 – Système 1 ddl en translation

L'équation de mouvement de ce système peut être déterminée grâce à l'application du principe fondamental de la dynamique, par la conservation de l'énergie, ou par l'équation de Lagrange. Le paramètre généralisé choisi pour décrire le mouvement est x , déplacement suivant \vec{x} de la masse autour de sa position d'équilibre statique.

Principe fondamental de la dynamique

Bilan des forces appliquées à la masse :

- Force d'excitation $\vec{F} = F(t)\vec{x}$
- Force de rappel élastique : $-k.x(t)\vec{x}$
- Force de frottement visqueux : $-c\dot{x}(t)\vec{x}$
- poids : $-mg\vec{y}$
- force de contact sol/roue (contact parfait, sans frottement) : $R\vec{y}$

L'équilibre dynamique en translation du système s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m\ddot{x}\vec{x}$

Ce qui aboutit à l'équation de mouvement : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$

Conservation de l'énergie

Bilan énergétique du système :

- Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

- énergie potentielle du poids : $E_p(\text{poids}) = 0$ (pas de variation d'altitude)
- Puissance interne dissipée : $P_i = c\dot{x}^2$
- Puissance extérieure $P_e = F\dot{x}$ (la puissance de la force de contact sol/roue est nulle puisque le contact est parfait)

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit alors pour ce système : $\frac{d}{dt}E_c + \frac{d}{dt}E_p = P_e + P_i$
 Ce qui aboutit à l'équation de mouvement : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$

Équation de Lagrange

Bilan énergétique du système :

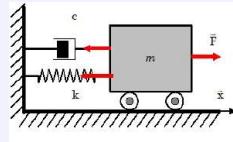
- Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
- Energie dissipée $E_d = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$
- Puissance extérieure $P_e = F\dot{x}$

Lagrangien : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}}$ Ce qui aboutit à l'équation de mouvement : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$

Quelle que soit la méthode choisie, nous aboutissons bien entendu à la même équation de mouvement pour ce système élémentaire :

Équation de mouvement du système 1ddl en translation



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (3.1)$$

3.1.2 Exemple de l'arbre en torsion - 1ddl en rotation

Nous prendrons comme exemple le système représenté figure 3.2. Un disque d'inertie I peut pivoter d'un angle θ autour d'un axe x , il est relié au bâti fixe par un arbre de torsion d'axe z de masse négligeable, de raideur de torsion k_t et d'amortissement visqueux de torsion c_t . Il est soumis à un couple extérieur $\vec{\Gamma}$.

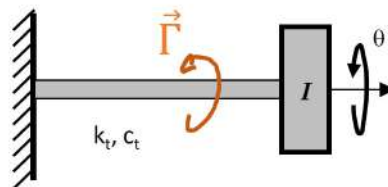


FIGURE 3.2 – Système 1 ddl en rotation

Le paramètre généralisé choisi pour décrire le mouvement est le déplacement angulaire θ autour de la position d'équilibre statique.

Principe fondamental de la dynamique

Bilan des actions mécaniques appliquées au système :

- couple extérieur : $\Gamma \vec{z}$
- moment de résistance élastique : $-k_t \theta \vec{z}$
- moment de frottement visqueux : $-c_t \dot{\theta} \vec{z}$

L'équilibre en rotation du système s'écrit : $\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} = I \ddot{\theta} \vec{z}$

Ce qui aboutit à l'équation : $I \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = \Gamma$

Conservation de l'énergie

Bilan énergétique :

- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$
- Énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k_t \theta^2$
- Puissance interne dissipée : $P_i = c_t \dot{\theta}^2$
- Puissance extérieure : $P_e = \Gamma \dot{\theta}$

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit alors pour ce système : $\frac{d}{dt} E_c + \frac{d}{dt} E_p = P_e + P_i$

Ce qui aboutit à l'équation de mouvement : $I \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = \Gamma$

Équation de Lagrange

Bilan énergétique :

- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$
- Énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k_t \theta^2$
- Énergie dissipée : $E_d = \frac{1}{2} c_t \dot{\theta}^2$
- Puissance extérieure : $P_e = \Gamma \dot{\theta}$

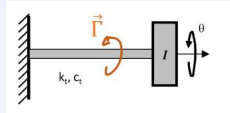
$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_t \theta^2$$

$$\text{Equation de Lagrange : } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{\theta}}$$

Ce qui aboutit à l'équation de mouvement : $I \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = \Gamma$

Quelle que soit la méthode choisie, nous aboutissons bien entendu à la même équation de mouvement pour ce système élémentaire :

Équation de mouvement du système 1ddl en rotation



$$I \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = \Gamma \quad (3.2)$$

3.2 Résolution de l'équation de mouvement

Pour la suite de ce chapitre, nous travaillerons sur l'équation de mouvement du système à 1ddl en translation : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$

Pour résoudre cette équation, nous considérerons deux états de vibrations possibles :

- **Les vibrations libres** : le système n'est soumis à aucune force d'excitation entretenue ($F(t) = 0 \quad \forall t > 0$). Le système est soumis à des conditions initiales (déplacement et/ou vitesse et/ou accélération), puis laissé libre de toute intervention extérieure.
- **Les vibrations forcées** : le système est soumis à une excitation extérieure entretenue

Ces deux états vibratoires sont résumés dans la figure 3.3, la réponse du système (solution de l'équation de mouvement) sera détaillée dans les paragraphes suivants :

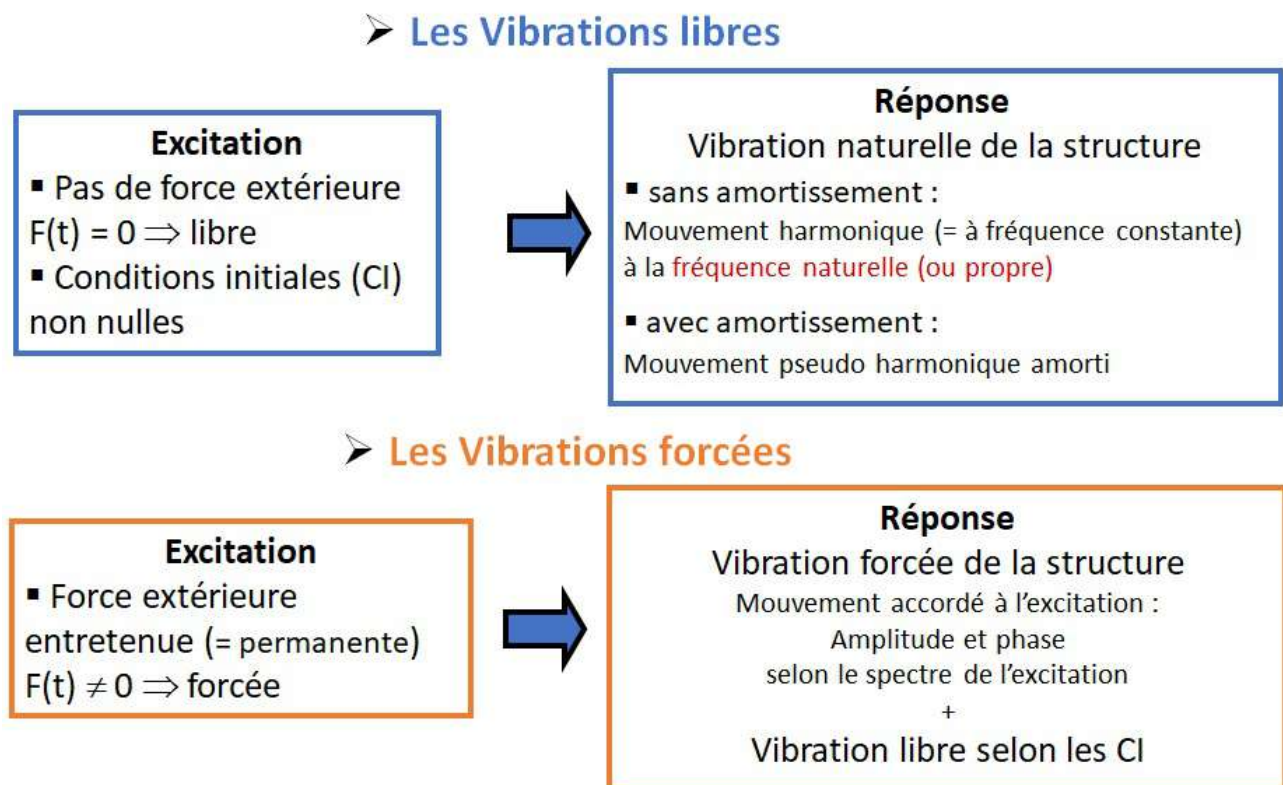


FIGURE 3.3 – Deux états de vibration des structures

3.3 1ddl - Vibrations libres non amorties

Nous considérons ici le modèle d'un système 1ddl **conservatif** (ie sans force de dissipation). L'équation du mouvement de ce système s'écrit alors : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$
En régime libre, le système n'est soumis à aucune excitation extérieure, on a alors : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$

Cette équation peut se réécrire : $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

Cette équation linéaire du second ordre admet une solution harmonique que l'on peut écrire sous la forme : $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$

Cette expression traduit un mouvement oscillant dont :

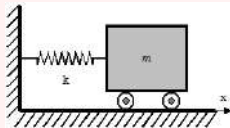
- X est l'amplitude

- ω_0 est la pulsation des oscillations libres, c'est la **pulsation propre** du système, elle vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- ϕ est la phase

On remarquera que :

- la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ne dépend que des caractéristiques du système, elle est indépendante des conditions initiales, c'est la "carte d'identité" vibratoire du système
- l'amplitude et la phase des oscillations dépendent des conditions initiales.

Oscillations d'un système 1ddl non amorti en régime libre



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.3)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.4)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre de l'oscillateur

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (3.5)$$

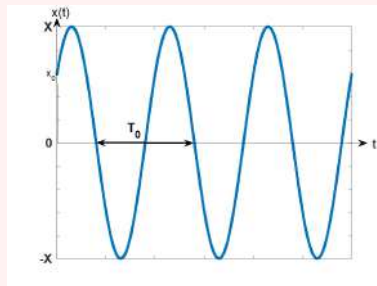
X amplitude des oscillations
 ϕ phase

} dépendent des conditions initiales

3.3.1 Pulsation, fréquence, période

L'évolution temporelle du déplacement x de la masse du système 1ddl s'écrit :

Pulsation - Fréquence - Période



$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi) = X \cos(2\pi f t - \phi) = X \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \phi\right)$$

- la pulsation des oscillations est ω_0
- la période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- la fréquence des oscillations est $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$,
 c'est la "rapidité" avec laquelle la masse oscille autour de sa position d'équilibre

L'animation suivante (cliquer sur le lien) illustre les oscillations libre de trois oscillateurs conservatifs de pulsation propre respective ω_0 , $2\omega_0$ et $3\omega_0$: On remarque que ce modèle 1ddl conservatif produit une oscillation permanente non amortie, à une fréquence constante (la fréquence propre du système). C'est un mouvement perpétuel...qui n'est bien sûr pas réaliste...il faudra ajouter une source de dissipation d'énergie au modèle pour le rendre plus réaliste

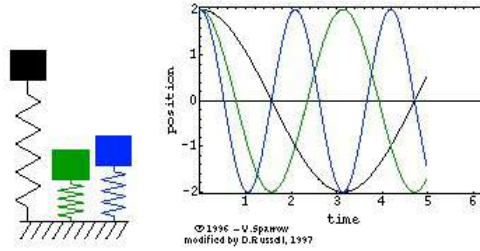


FIGURE 3.4 – Oscillations libres de trois systèmes 1ddl conservatifs.

<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/SH0/mass.html>

3.3.2 Amplitude et phase des oscillations

L'amplitude X et la phase ϕ des oscillations peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

Considérons le cas où, à l'instant initial $t = 0$ les conditions initiales sont les suivantes :

- $x(t = 0) = x_0$
- $v(t = 0) = v_0$ ($v = \frac{dx}{dt}$)

Avec des oscillations de la forme $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$ on obtient :

- $X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$
- $\tan \phi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$

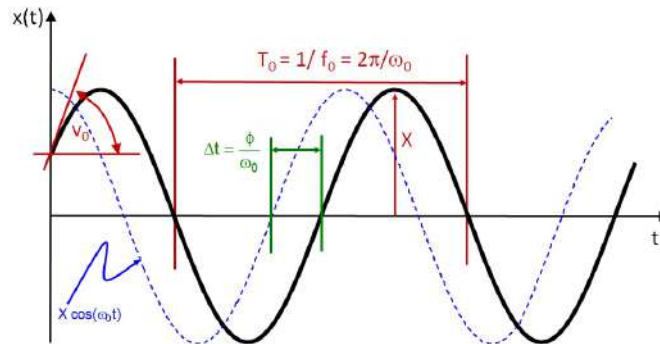


FIGURE 3.5 – 1ddl conservatif en régime libre - Caractéristiques du signal de déplacement

3.3.3 Déplacement - vitesse - accélération

Les relations de phase entre les grandeurs de déplacement, de vitesse et d'accélération sont particulières dans le cas des vibrations libres du système 1ddl conservatif. Cela vaut la peine de s'y attarder un peu.

Reprenons l'expression du déplacement de la masse x : $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$

On a donc (figure 3.6) :

- $\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \phi) = \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \phi + \frac{\pi}{2})$
déplacement et vitesse sont en quadrature de phase

- $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \phi) = \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \phi + \pi)$
déplacement et accélération sont en opposition de phase

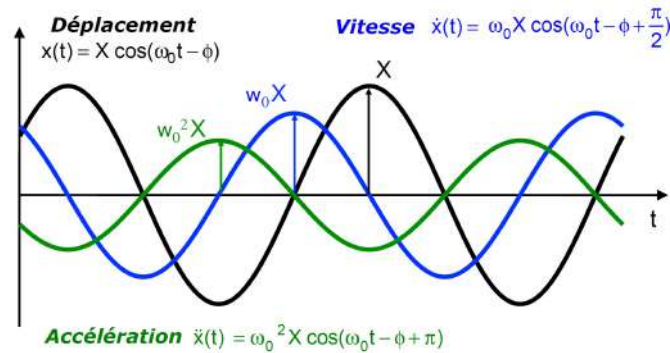


FIGURE 3.6 – 1ddl conservatif en régime libre - déplacement/vitesse/accélération

3.3.4 Écritures équivalentes de la réponse du système

La solution de l'équation de mouvement $m\ddot{x} + kx = 0$ peut en fait s'écrire sous différentes formes, qui sont toutes équivalentes. Selon les applications, l'une ou l'autre est privilégiée pour des raisons pratiques :

- $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$
- $x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$
- $x(t) = X_1 e^{-j\omega_0 t} + X_2 e^{j\omega_0 t}$

Les couples de constantes (X, ϕ) , (A, B) et (X_1, X_2) se déterminent à partir des conditions initiales.

On notera au passage les équivalences : $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \phi = \frac{A}{B}$

3.4 Vibrations libres amorties

On remarque que le modèle 1ddl conservatif produit une oscillation permanente non amortie, à une fréquence constante (la fréquence propre du système). C'est un mouvement perpétuel...qui n'est bien sûr pas réaliste...il faut ajouter une source de dissipation d'énergie au modèle pour le rendre plus réaliste. C'est ce que nous faisons en ajoutant un amortissement visqueux au modèle précédent :

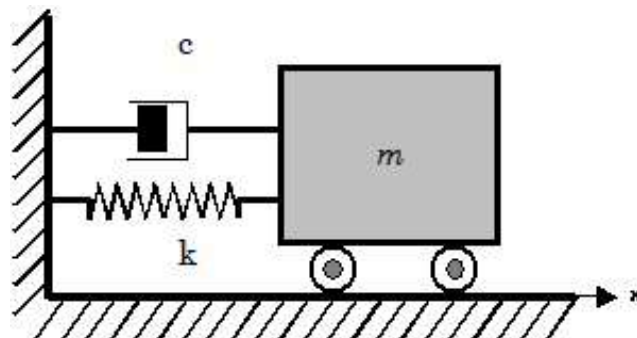


FIGURE 3.7 – Système masse-ressort dissipatif en régime libre

En régime libre, le système n'est soumis à aucune excitation extérieure, on a alors :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx(t) = 0$$

Cette équation peut se réécrire : $\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

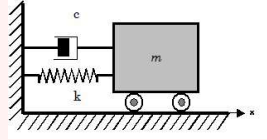
3.4.1 Résolution de l'équation de mouvement

L'équation de mouvement du système 1ddl amorti en régime libre s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

ou encore :

Équation de mouvement du système 1ddl amorti en régime libre



$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (3.6)$$

où : $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$ est le **facteur d'amortissement** du système

On cherche une solution à cette équation différentielle sous la forme : $x(t) = X e^{st}$

L'équation caractéristique associée s'écrit :

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (3.7)$$

et a pour racines : $s = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$

La forme de la réponse du système va alors dépendre de la valeur du facteur d'amortissement ξ :

- si $\xi > 1$: l'amortissement est dit sur-critique, le système n'oscille pas
- si $\xi = 1$ l'amortissement est dit critique, le système n'oscille pas
- si $\xi < 1$ l'amortissement est dit sous-critique, le système oscille

Ces trois cas sont traités dans les paragraphes suivants.

Dans le cadre d'un cours de vibrations, c'est bien sûr le troisième cas qui va nous intéresser le plus (c'est le seul pour lequel le système est mis en vibration).

3.4.2 Amortissement sur-critique

Lorsque l'amortissement est sur-critique ($\xi > 1$), les racines de l'équation caractéristique 3.7 sont réelles : $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

La réponse du système (solution générale de l'équation homogène) s'écrit alors :

$$x(t) = \left[A e^{-\alpha t} + B e^{\alpha t} \right] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (3.8)$$

avec :

$$\alpha = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

A et B dépendent des conditions initiales :

$$A = \frac{x_0\omega_0(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) - v_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$B = \frac{x_0\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) + v_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

La forme de cette réponse est illustrée figure 3.8.

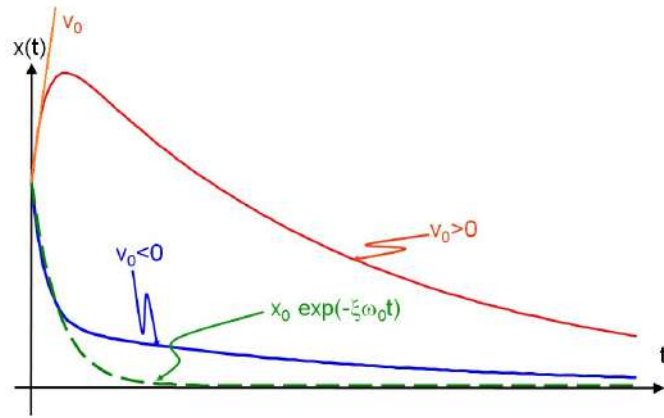


FIGURE 3.8 – Mouvement libre d'un système 1ddl amorti - amortissement sur-critique $\xi > 1$

3.4.3 Amortissement critique

Lorsque l'amortissement est critique ($\xi = 1$), l'équation caractéristique 3.7 admet une racine réelle unique : $s = -\xi\omega_0 = \omega_0$

La réponse du système (solution générale de l'équation homogène) s'écrit alors :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \quad (3.9)$$

où A et B dépendent des conditions initiales : $A = x_0$ et $B = x_0\omega_0 + v_0$

La forme de cette réponse est illustrée figure 3.9. .

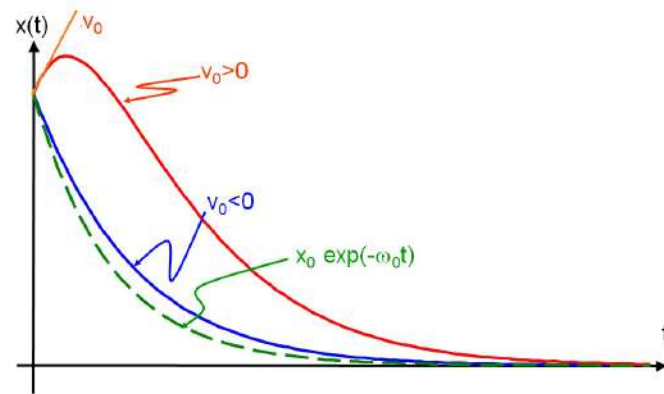


FIGURE 3.9 – Mouvement libre d'un système 1ddl amorti - amortissement critique $\xi = 1$

3.4.4 Amortissement sous-critique

C'est le cas où l'amortissement est faible. Lorsque l'amortissement est sur-critique ($\xi < 1$), les racines de l'équation caractéristique 3.7 sont complexes : $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

La réponse du système (solution générale de l'équation homogène) s'écrit alors :

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d)$$

Le système est mis en vibrations, ses oscillations sont amorties de pseudo-pulsation ω_d , d'amplitude X . La forme de cette réponse est illustrée figure 3.10.

La pseudo-pulsation des oscillations vaut $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. C'est la **pulsation propre du système amorti**. Elle est de valeur plus faible que la pulsation propre du système non amorti ω_0 . Dans la pratique ces deux valeurs sont souvent très proches et il est courant que l'on assimile ω_d à ω_0 . On remarquera que l'enveloppe du signal $x(t)$ est exponentielle, c'est une caractéristique d'un amortissement de type visqueux (force de dissipation proportionnelle à la vitesse).

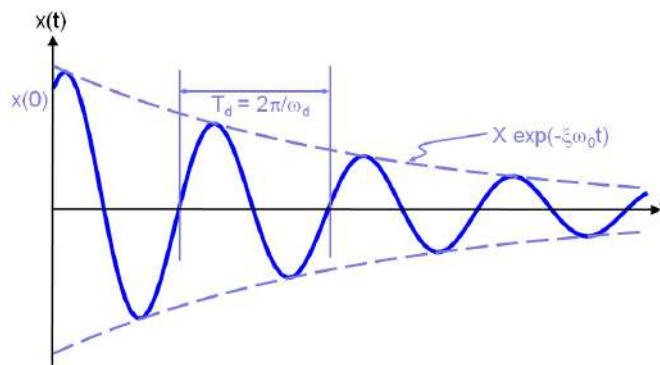


FIGURE 3.10 – Mouvement libre d'un système 1ddl amorti - amortissement sous-critique $\xi < 1$

L'animation illustrée par la figure 3.11 montre le mouvement oscillant (et le signal de déplacement correspondant) d'un système masse-ressort avec ou sans amortissement (ici l'amortissement est sous-critique). On remarque que la différence de période propre n'est pas perceptible dans cet exemple (ce qui est réaliste pour la plupart des applications en mécanique) et que la prise en compte de l'amortissement rend le résultat plus réaliste (le mouvement n'est plus perpétuel!).

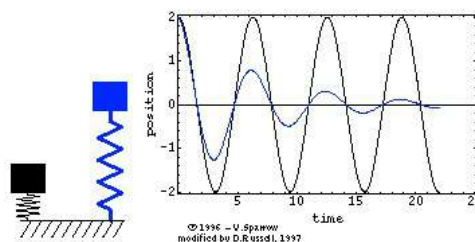
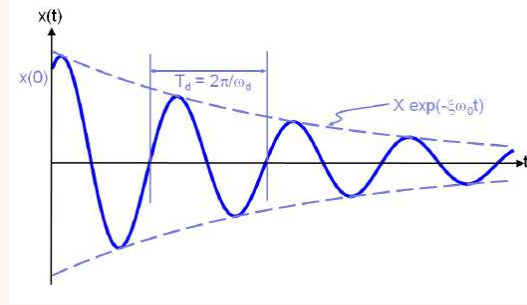
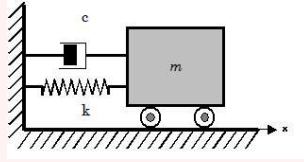


FIGURE 3.11 – Effet de l'amortissement sur la réponse libre
<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/SH0/damp.html>

Vibrations libres d'un système 1ddl amorti - amortissement sous-critique ($\xi < 1$)



$$x(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d) \quad (3.10)$$

pulsation propre (pseudo-pulsation) : $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

amplitude : $X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_0 x_0}{\omega_d} \right)^2}$

phase : $\tan \phi_d = \frac{v_0 + x_0 \xi \omega_0}{\omega_d} x_0$

3.4.5 Méthodes de mesure du taux d'amortissement ξ

Il est possible de déterminer expérimentalement la pulsation propre ω_d et le facteur d'amortissement ξ d'un système assimilable à un système 1ddl amorti à partir du relevé temporel des vibrations de déplacement.

- **Fréquence propre**

La fréquence propre se déduit de la pseudo-période que l'on peut relever simplement du signal temporel (voir encadré) : $f_d = \frac{1}{T_d}$

- **Facteur d'amortissement - méthode du "décrément logarithmique"**

Cette méthode exploite le fait que l'enveloppe théorique du signal temporel $x(t)$ est exponentielle décroissante. On mesure les amplitudes de deux extrema successif X_n et X_{n+1} (voir encadré)

On a alors : $\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_d)} = \frac{X e^{-\xi \omega_0 t_1}}{X e^{-\xi \omega_0 (t_1 + T_d)}} = e^{-\xi \omega_0 T_d}$.

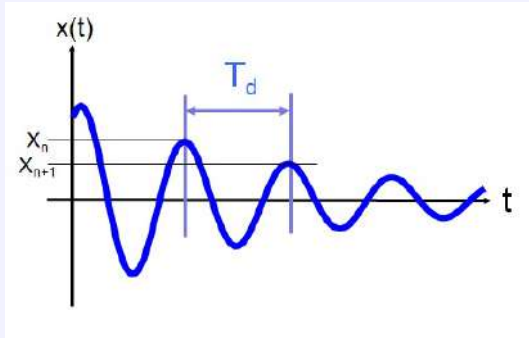
On va introduire le "décrément logarithmique" : $\delta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}}$

On a alors : $\delta = \xi \omega_0 T_d = 2\pi \xi \frac{\omega_0}{\omega_d} = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$

On en déduit alors le facteur d'amortissement : $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$

Dans la pratique, le signal n'étant pas toujours parfaitement assimilable à une sinusoïde amortie d'enveloppe exponentielle, on mesure δ plus précisément avec des maxima séparés de pT_p :

$$\delta = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{X_n}{X_{n+p}} \right)$$



Relevé expérimental

$$\delta = \ln \left(\frac{X_n}{X_{n+1}} \right) = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{X_n}{X_{n+p}} \right)$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

3.5 Vibrations forcées harmoniques du système conservatif (non amorti)

3.5.1 Équation de mouvement et réponse

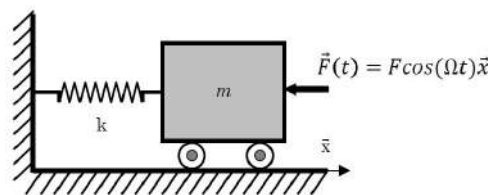


FIGURE 3.12 – Système masse-ressort conservatif en régime forcé harmonique

On rappelle l'équation de mouvement du système en régime forcé : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

Pour une excitation harmonique, on pose : $F(t) = F_0 \cos \Omega t$
où Ω est la pulsation de l'excitation.

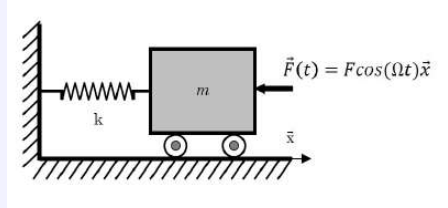
La réponse du système est la superposition :

- de la **réponse transitoire** $x_t(t)$, qui est la solution générale, celle en régime libre. C'est la réponse vue précédemment :
 $x_t(t) = X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)$, oscillations à la pulsation propre ω_0 du système.
 X_t et ϕ_t sont déterminés à partir des conditions initiales (voir paragraphes précédents).

- de la **réponse permanente** (régime établi), qui est la solution particulière de la forme
 $x_p(t) = X_p \cos(\Omega t)$, oscillations à la pulsation de l'excitation Ω .

En substituant la forme de la solution permanente dans l'équation de mouvement 3.11 on trouve :

$$X_p = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (3.11)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) = \underbrace{X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)}_{\text{régime libre}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t)}_{\text{régime établi}} \quad (3.12)$$

En réalité l'amortissement n'étant pas nul (on n'est plus alors avec un système conservatif), la réponse due aux conditions initiales (régime transitoire) disparaît au bout d'un certain temps. Pour cette raison, on ne s'intéresse dans ce qui suit qu'au régime établi (ou permanent), qui correspond à la partie de l'excitation uniquement due à l'excitation extérieure.

3.5.2 Régime établi

Le mouvement forcé permanent (régime établi) s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{k} \left(\frac{1}{1 - (\Omega/\omega_0)^2} \right) \cos(\Omega t)$$

On fait ainsi apparaître la solution statique du système à une force d'amplitude F_0 : $x_{stat} = F_0/k$. Ce qui nous permet d'écrire la réponse du système sous une forme adimensionnelle :

$$\frac{x_p(t)}{x_{stat}} = \left(\frac{1}{1 - (\Omega/\omega_0)^2} \right) \cos(\Omega t) = H(\Omega) \cos(\Omega t)$$

La figure 3.13 représente l'influence de la fréquence d'excitation sur l'amplitude et la phase de la réponse du système.

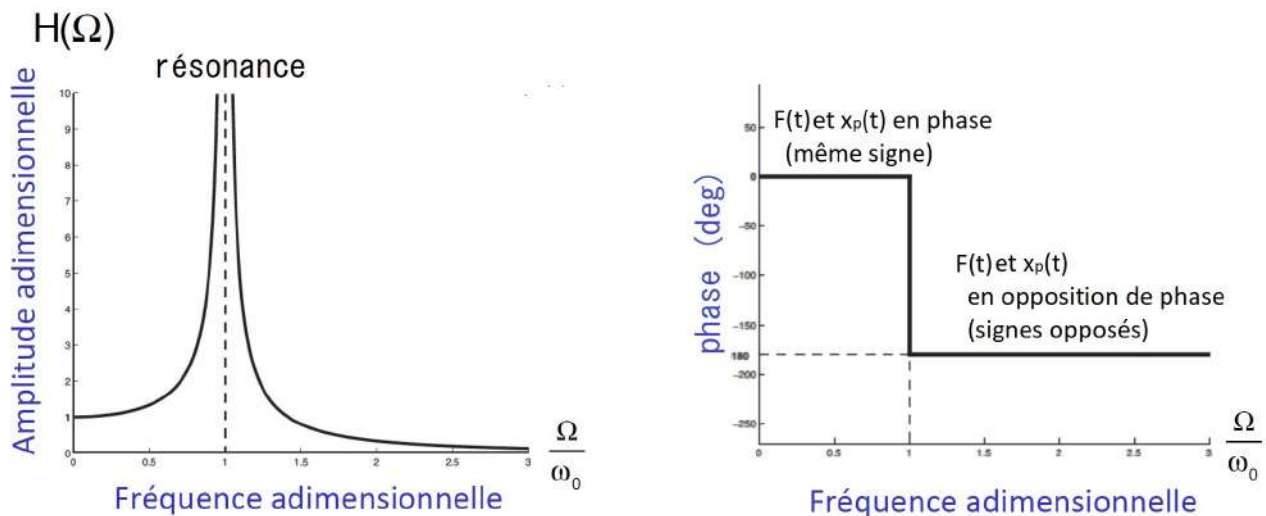


FIGURE 3.13 – Régime établi du système 1ddl conservatif - Réponse adimensionnelle

- $\frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1$: Lorsque la fréquence d'excitation est faible (devant la fréquence propre), le système oscille lentement avec une amplitude qui est proche de la déflexion statique.
- $\frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$: Lorsque la fréquence d'excitation est très grande devant la fréquence propre, l'amplitude des oscillations tend vers 0. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'excitation change de sens (de signe) tellement rapidement que le système n'a pas le temps de répondre aussi rapidement à cause de son inertie m .
- $\frac{\Omega}{\omega_0} \approx 1$: Lorsque la fréquence d'excitation s'approche de la fréquence propre, on voit apparaître le **phénomène de résonance** pour lequel l'amplitude de la réponse permanente devient infinie (pour un système non amorti)

Dans la pratique, ce diagramme de gain est la plupart du temps tracé en décibels ($20\log H(\Omega)$), il est appelé **diagramme de Bode**.

Le diagramme de phase montre que la phase entre l'excitation et la réponse est de :

- 0° pour $\Omega < \omega_0$: le système vibre en phase avec l'excitation
- 180° pour $\Omega > \omega_0$: le système vibre en opposition de phase avec l'excitation

3.6 Vibrations forcées harmoniques du système amorti

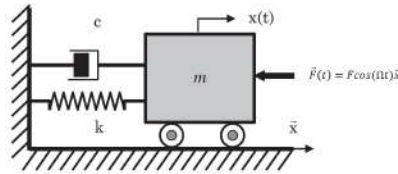


FIGURE 3.14 – Système masse-ressort amorti en régime forcé harmonique

On rappelle l'équation de mouvement du système en régime forcé : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$
ou encore $\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \frac{F(t)}{m}$

Pour une excitation harmonique, on pose : $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ où Ω est la pulsation de l'excitation.

La réponse du système est la superposition :

- de la **réponse transitoire** $x_t(t)$, qui est la solution générale, celle en régime libre. C'est la réponse vue précédemment :

$x_t(t) = X_t e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_t)$, oscillations à la pulsation propre ω_d du système.

X_t et ϕ_t sont déterminés à partir des conditions initiales (voir paragraphes précédents).

- de la **réponse permanente** (régime établi), qui est la solution particulière de la forme $x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$, oscillations à la pulsation de l'excitation Ω .

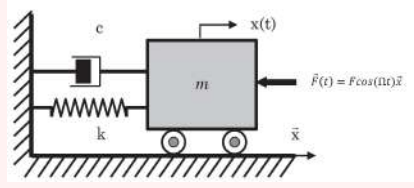
En substituant la forme de la solution permanente dans l'équation de mouvement 3.13 on trouve :

$$X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + [2\xi\omega_0\Omega]^2}}$$

et

$$\tan \phi_p(\Omega) = \frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

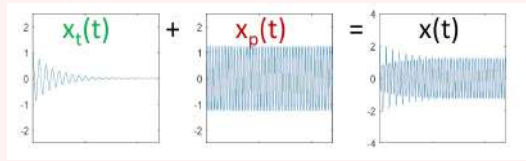
Vibrations forcées harmoniques du système 1ddl conservatif (non amorti)



$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad (3.13)$$

⇓

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) = \underbrace{[X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{régime libre}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{régime établi}} \quad (3.14)$$



3.6.1 Régime établi

Le mouvement forcé permanent s'écrit :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$$

Afin de rendre cette expression adimensionnelle, on introduit :

$x_{stat} = F_0/k$ et $\beta = \Omega/\omega_0$ la pulsation relative.

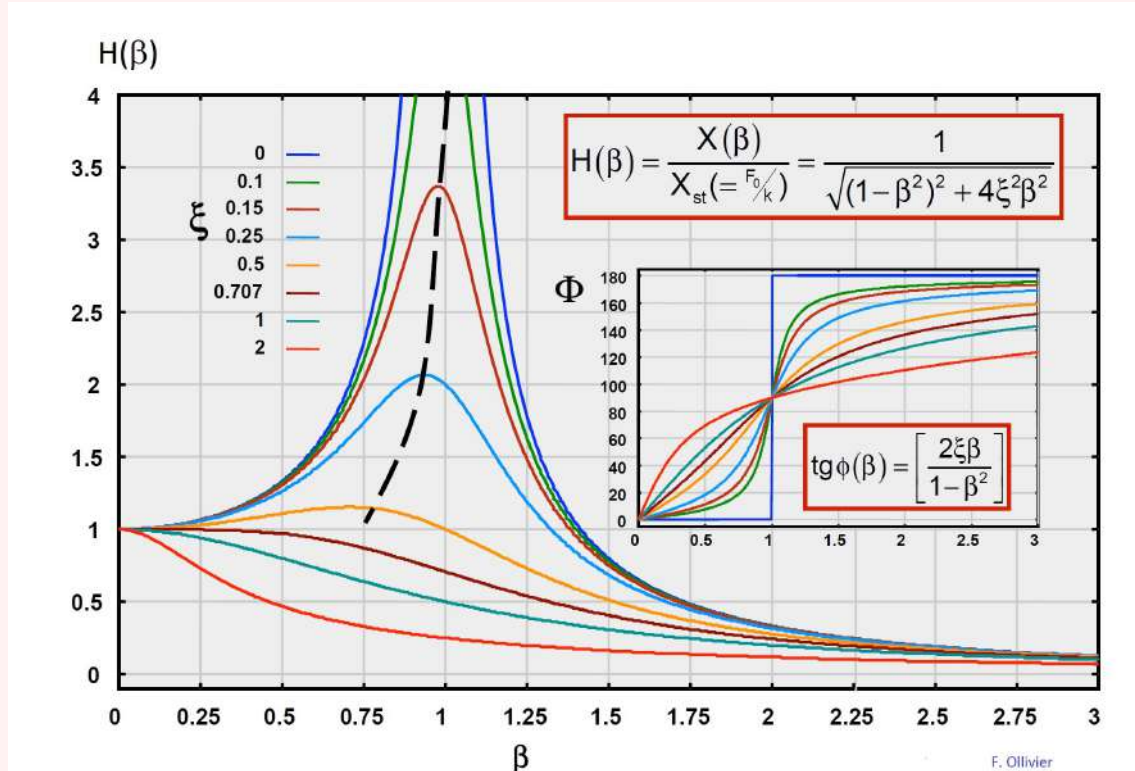
On a alors :

$$H(\beta) = \frac{X_p}{X_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2 \beta^2}} \quad (3.15)$$

et

$$\tan \phi_p = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (3.16)$$

Ces résultats et les tracés correspondants sont illustrés dans l'encart suivant :



Le diagramme d'amplitude montre des tendances proches de celles vues pour le système conservatif :

- $\frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1$: Lorsque la fréquence d'excitation est faible (devant la fréquence propre), le système oscille lentement avec une amplitude qui est proche de la déflexion statique.
- $\frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$: Lorsque la fréquence d'excitation est très grande devant la fréquence propre, l'amplitude des oscillations tend vers 0.
- $\Omega \approx \omega_d$: Lorsque la fréquence d'excitation s'approche de la fréquence propre ω_d , on voit apparaître le **phénomène de résonance** pour lequel l'amplitude de la réponse permanente devient maximale (et non infinie ce qui est plus réaliste)

Le diagramme de phase montre un changement de phase à la résonance, ce changement est d'autant plus brusque que l'amortissement est faible.

3.6.2 Méthodes de mesure du taux d'amortissement ξ

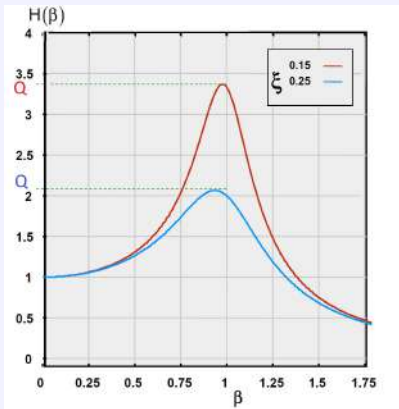
On propose ici deux méthodes de mesure du taux d'amortissement à partir du relevé de la réponse fréquentielle d'un système. Ces méthodes sont valides pour un taux d'amortissement faible ($\xi \ll 1$) : on suppose alors que $\beta \approx 1$ (c'est à dire que $\omega_d \approx \omega_0$)

Méthode du facteur de qualité

Méthode du facteur de qualité

A la résonance, l'amplitude du déplacement est maximale et $\beta \approx 1$.

On mesure le facteur de qualité : $Q = H_{max} \approx H(1) = \frac{1}{2\xi}$ (équation 3.15)



On en déduit le facteur d'amortissement :

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

Méthode de la bande passante à -3dB

On relève le niveau de réponse maximale H_{max} puis les fréquences relatives pour lesquelles la réponse vaut $H(\beta_1) = H(\beta_2) = H_{max}/\sqrt{2}$ (soit un niveau de H_{max} -3dB pour une représentation en échelle logarithmique)

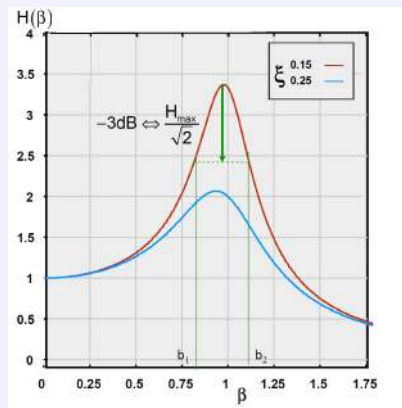
On a alors : $H^2(\beta_{-3dB}) = \frac{1}{(1 - \beta_{-3dB}^2)^2 + 4\xi^2\beta_{-3dB}^2} \approx \frac{1}{4\xi^2}$

soit $\beta_{-3dB}^2 \approx 1 - 2\xi^2 \pm 4\xi\sqrt{1 - \xi^2}$

avec $\xi \ll 1$ cette expression se simplifie : $\beta_{-3dB} \approx 1 \pm \xi$

On en déduit une expression approchée du facteur d'amortissement : $\xi \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$

Méthode de la bande passante à -3dB



$$\xi \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0} = \frac{\Delta\omega_{-3dB}}{2\omega_0}$$

3.7 Admittance et impédance

Dans la pratique, en particulier dans le domaine de la mesure des vibrations, il est courant de représenter le comportement vibratoire d'un système par la représentation en fréquence de fonctions de transfert entre l'excitation représentée par la force $F(\Omega)$ et la réponse du système en déplacement $X(\Omega)$, en vitesse $\dot{X}(\Omega)$ ou en accélération $\ddot{X}(\Omega)$:

- l'admittance traduit la susceptibilité au mouvement du système sous l'effet d'une force :

admittance en déplacement ou compliance : $\frac{X}{F}(\Omega)$

admittance en vitesse ou mobilité : $\frac{\dot{X}}{F}(\Omega)$

admittance en accélération ou inertance $\frac{\ddot{X}}{F}(\Omega)$

- l'impédance traduit la résistance au mouvement du système sous l'effet d'une force :

impédance en déplacement ou raideur dynamique $\frac{F}{X}(\Omega)$

impédance en vitesse ou impédance mécanique : $\frac{F}{\dot{X}}(\Omega)$

impédance en accélération ou masse apparente : $\frac{F}{\ddot{X}}(\Omega)$

Ces représentations ont l'avantage de fournir un résultat indépendant de l'amplitude et de la forme de l'excitation (du moment que l'amplitude d'excitation est suffisante dans le domaine fréquentiel étudié). Elles sont une "carte d'identité" vibratoire du système.

Pour le système 1ddl amorti en régime forcé harmonique, on a :

$$\frac{X}{F}(\Omega) = \frac{1}{k} H(\beta) = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2 \beta^2}}$$

La réponse permanente du système est de la forme $x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$,

on a donc : $\dot{x}_p(t) = -\Omega X_p \sin(\Omega t - \phi_p) = \Omega X_p \cos(\Omega t - \phi_p + \frac{\pi}{2}) = \dot{X} \cos(\Omega t - \phi_p)$ soit :

$$\frac{\dot{X}}{F}(\Omega) = \frac{\Omega X}{F}(\Omega)$$

De même :

$$\frac{\ddot{X}}{F}(\Omega) = \frac{\Omega^2 X}{F}(\Omega)$$

Il est intéressant d'examiner les tendances asymptotiques des fonctions d'impédance et d'admittance :

- lorsque $\Omega \ll \omega_0$: $\frac{X}{F} \approx \frac{1}{k}$ et $\frac{F}{X} \approx k$. Le comportement du système est contrôlé par sa raideur
- lorsque $\Omega \gg \omega_0$: $\frac{X}{F} \approx \frac{\omega_0^2}{k\Omega^2} = \frac{1}{m\Omega^2}$ et $\frac{F}{X} \approx m\Omega^2$. Le comportement du système est contrôlé par sa masse
- autour de la résonance $\Omega \approx \omega_0$: $\frac{X}{F} \approx \frac{1}{2\xi k}$ et $\frac{F}{X} \approx 2\xi k$. Le comportement du système est contrôlé par l'amortissement.

La figure 3.15 montre l'allure des impédances et inertances de déplacement, vitesse et accélération, ainsi que leurs asymptotes. On remarque que l'amortissement n'a sur ces courbes d'influence notable que dans le domaine proche de la résonance.

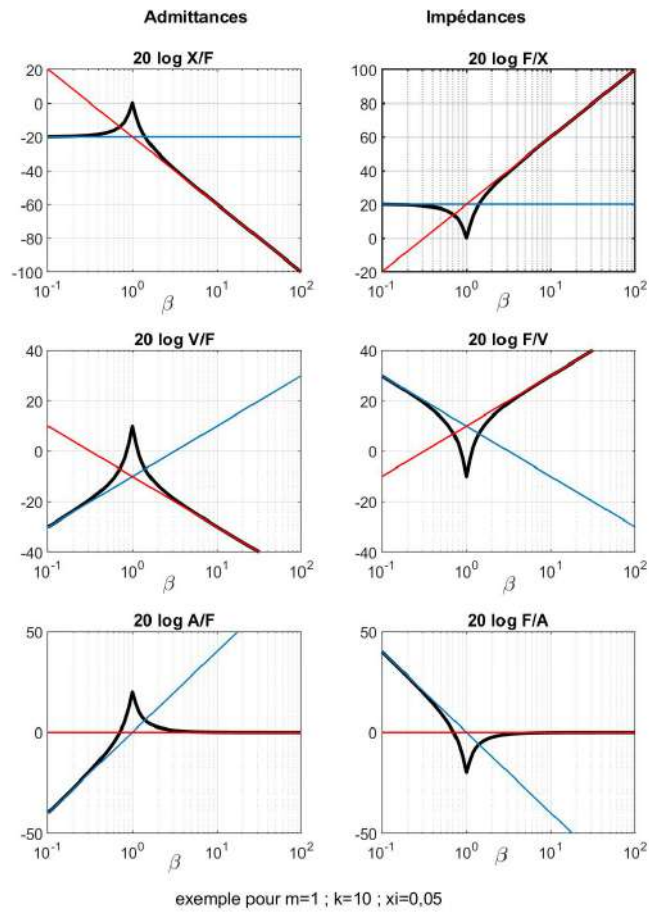


FIGURE 3.15 – Impédances et admittances du système 1ddl amorti

3.8 Application : transmission et isolation vibratoire

Le modèle 1ddl est suffisant pour comprendre le principe d'une méthode très courante de réduction des vibrations : l'isolation vibratoire. Cette méthode consiste à intercaler entre l'objet à isoler et son support un système ressort-amortissement que l'on nomme en général une suspension.

Pour en comprendre le principe, nous proposons le modèle suivant (figure 3.16) : Un objet de masse M subit les vibrations de son support. On note $x_s(t)$ le déplacement du support et $x(t)$ celui de la masse.

On souhaite évaluer le transfert vibratoire du support vers l'objet.

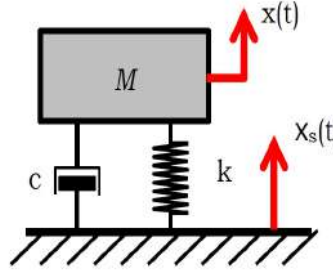


FIGURE 3.16 – Isolation vibratoire - Modèle

L'équation du mouvement de ce système s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) = -c(\dot{x}(t) - \dot{x}_s(t)) - k(x(t) - x_s(t))$$

On suppose les vibrations du support harmoniques :

$$x_s(t) = X_s \cos(\Omega t)$$

On a alors : $\dot{x}_s(t) = -\Omega X_s \sin(\Omega t)$

L'équation de mouvement se réécrit :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = c\dot{x}_s + kx_s$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= 2\xi\omega_0\dot{x}_s + \omega_0^2x_s \\ &= -2\xi\omega_0\Omega X_s \sin(\Omega t) + \omega_0^2 X_s \cos(\Omega t) \\ &= X_s \omega_0^2 \sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1} \cos(\Omega t - \psi) \\ &= \frac{F_s}{m} \cos(\Omega t - \psi) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{F_s}{m} = X_s \omega_0^2 \sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1}$$

On reconnaît l'équation de mouvement d'un système 1ddl amorti en régime forcé harmonique. La réponse vibratoire de la masse, en régime permanent est alors de la forme :

$$x(t) = X \cos(\Omega t - \psi - \phi)$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= \frac{F_s}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} \\ &= X_s \frac{\sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} \end{aligned}$$

On évalue le transfert vibratoire du support vers la masse par la transmissibilité :

Cette transmissibilité est tracée figure 3.17 pour différentes valeur du facteur d'amortissement ξ (animation en cliquant sur le lien de la figure) :

$$T = \frac{X}{X_s} = \frac{\sqrt{4\xi^2\beta^2 + 1}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

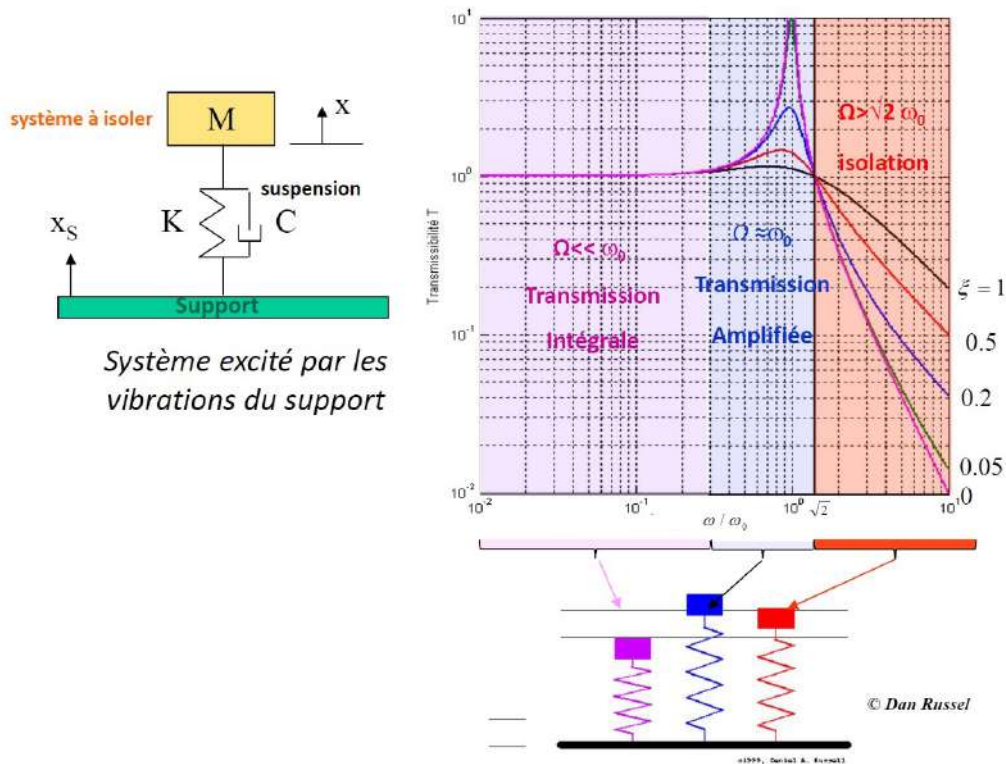


FIGURE 3.17 – Isolation vibratoire - Transmissibilité

<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/basemotion/BaseMotion.html>

Il apparaît sur ces courbes trois domaines distincts :

- pour $\Omega \ll \omega_0$: la transmission est intégrale, $T = 1$, le système se comporte comme si la masse était en liaison encastrement parfait avec son support.
- près de la résonance $\Omega \approx \omega_0$: le mouvement est amplifié, l'amplitude du mouvement de la masse X est plus important que celui de son support X_s .
- pour $\Omega > \sqrt{2}\omega_0$ l'isolation est efficace, on a $t > 1$, l'amplitude des vibrations de la masse est plus faible que celle des vibrations de son support.

Le système est isolé des vibrations de son support pour une pulsation d'excitation $\Omega > \sqrt{2}\omega_0$. On dit que $\sqrt{2}\omega_0$ est la pulsation critique de la suspension.

Exemple

Une machine est initialement mal isolée, elle subie des vibrations dans une gamme de fréquences de 8Hz à 200Hz.

La machine et sa liaison à son support peuvent être modélisées par un système 1ddl de caractéristiques suivantes :

$$M = 1kg; k = 10^5 N/m; \xi = 0,1$$

La fréquence propre du système conservatif associé est alors de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50Hz$.

La liaison originale de la machine à son support lui assure une isolation vibratoire pour les fréquences supérieures à $\sqrt{2}f_0 = 71Hz$ (transmissibilité courbe bleue figure 3.18). Cette liaison n'assure pas une adaptée aux excitations subies par la structure de la machine. Il faut donc modifier la suspension qui assure la liaison. On choisi dans un catalogue un suspension dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$k' = k/200 = 500N/m \text{ et } \xi' = 5\xi = 0,5$$

La transmissibilité de ce nouveau système est tracé en rouge figure 3.18. Le système est désormais isolé à partir de $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{M}} = 5Hz$, ce qui répond au cahier des charges.

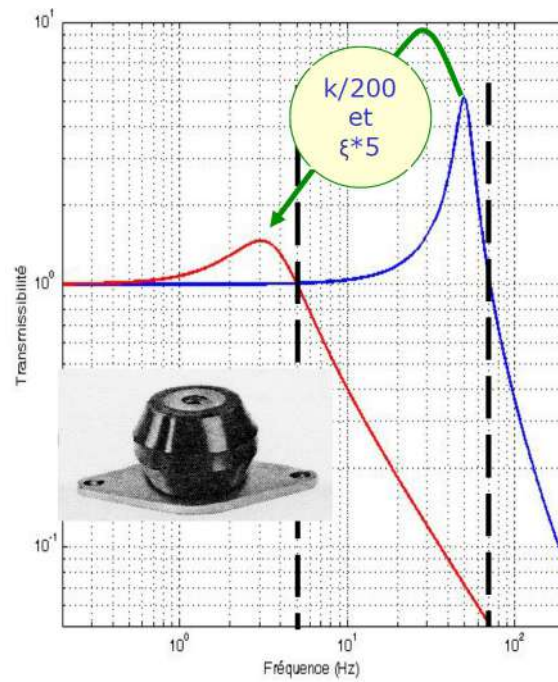


FIGURE 3.18 – Isolation vibratoire - Exemple

3.9 Système soumis à une excitation complexe

3.9.1 Principe de superposition

Dans la réalité, les forces d'excitations vibratoires sont rarement harmoniques. Il est par contre très souvent possible d'approcher une force d'excitation complexe par la somme de forces élémentaires (on utilise pour cela des méthodes de décomposition comme les transformées de Fourier ou Laplace). La réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations est la superposition (somme) des réponses à chacune des excitations (figure 3.19). Ainsi si l'excitation complexe d'un système peut être décomposée en une somme d'excitations élémentaires, la réponse du système pourra être décomposée en la superposition des réponses à ces excitations élémentaires.

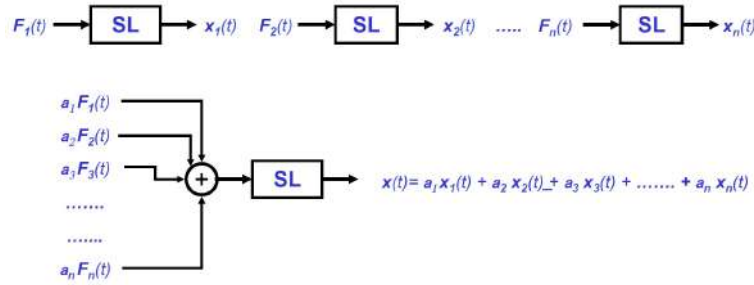
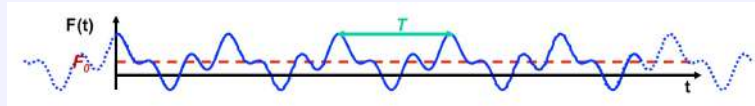


FIGURE 3.19 – Excitations multiples - Principe de superposition

3.9.2 Décomposition en série de Fourier

Décomposition en série de Fourier

Soit une fonction $F(t)$ périodique de période T : $F(t + nT) = F(t)$:



Une excitation périodique de période T peut être décomposée en série de Fourier :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\Omega t - \Psi_n) = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t) \quad (3.17)$$

F_0 est la valeur moyenne de $F(t)$: $F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$

F_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n : $F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$

avec $A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt$

et $B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt$

Ψ_n est la phase de l'harmonique de rang n : $\tan \Psi_n = \frac{B_n}{A_n}$

On notera au passage les cas particuliers suivants :

- si $F(t)$ est paire la partie impaire du développement est nulle : $B_n = 0 \quad \forall n$
- si $F(t)$ est impaire la partie paire du développement est nulle : $A_n = 0 \quad \forall n$

Exemple d'excitation périodique : fonction signal carré

On suppose une excitation $F(t)$ sous la forme du signal carré représenté figure 3.20.

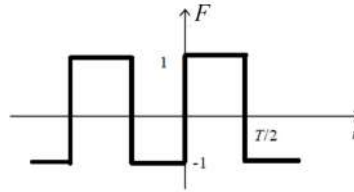


FIGURE 3.20 – Fonction signal carré

On cherche à écrire $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\Omega t - \Psi_n) = F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t)$$

$F(t)$ est une fonction impaire, on a donc : $F_0 = 0$ et $A_n = 0 \quad \forall n$

Calcul des amplitudes B_n :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \sin(n\Omega t) dt - \int_{T/2}^T \sin(n\Omega t) dt \right] \\ &= \frac{\Omega}{\pi} \frac{1}{n\Omega} \left[[-\cos(n\Omega t)]_0^{T/2} + [\cos(n\Omega t)]_{T/2}^T \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \end{aligned}$$

$$\text{soit : } B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Finalement, la décomposition en série de Fourier de fonction de force en signal carré s'écrit :

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\Omega t) + \frac{\sin(3\Omega t)}{3} + \frac{\sin(5\Omega t)}{5} + \dots \right) = \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p+1} \sin((2p+1)\Omega t)$$

Qualitativement, plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent à l'infini. C'est le cas pour la fonction carré : $\lim_{p \rightarrow \infty} B_{2p+1} = 0$. Ce résultat a une grande importance pratique : pour avoir une bonne approximation de la fonction $F(t)$, il suffira souvent de calculer les premiers termes du développement en série de Fourier. C'est ce qui est illustré figure 3.21 où la fonction carré (signal en bleu) est approchée par une série de Fourier tronquée à un, deux, trois ou quatre termes (signal en rouge).

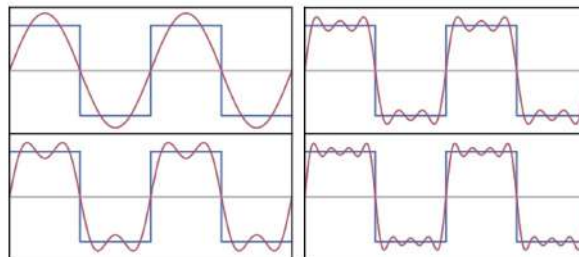


FIGURE 3.21 – Approximation du signal carré par une série de Fourier tronquée à 1, 2, 3 ou 4 termes

Réponse à une excitation périodique

On suppose que le système 1ddl étudié dans ce chapitre est soumis à une excitation périodique que l'on décompose en série de Fourier sous la forme :

$$F(t) = \sum_0^{\infty} F_n(t) = \sum_0^{\infty} F_n \cos(n\Omega t - \Psi_n)$$

Selon le principe de superposition, la réponse du système sera également une somme de fonctions harmoniques de la forme :

$$x(t) = \sum_0^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \Psi_n - \phi_n)$$

avec :

$$X_n(n\Omega) = \frac{F_n}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - (n\beta)^2)^2 + 4(\xi n\beta)^2}}$$

et :

$$\tan \phi_n(n\Omega) = \frac{2\xi n\beta}{1 - (n\beta)^2}$$

A chaque composante harmonique $F_n(t)$ de l'excitation correspond une composante harmonique $x_n(t)$ de la réponse à la même pulsation $n\Omega$.

3.9.3 Méthode par les transformées de Laplace

Lorsque $F(t)$ est une fonction non exprimable en combinaison linéaire de fonctions harmoniques, il peut être plus simple de passer dans l'espace complexe de Laplace où les calculs peuvent s'avérer plus directs.

La transformée de Laplace permet de remplacer un problème différentiel par un problème algébrique.

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle t est l'intégrale

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

C'est une fonction de la variable s .

Pour résoudre un problème par la méthode de Laplace, la procédure est la suivante :

- on transforme le problème avec la transformée de Laplace
- on résout l'équation algébrique ainsi obtenue
- on effectue la transformée de Laplace inverse

Vous trouverez ci-après les propriétés essentielles et les transformées usuelles :

Transformées de Laplace - Propriétés essentielles

Transformée de Laplace

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (3.18)$$

Théorème de linéarité

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s) + \alpha_3 F_3(s)$$

Théorème des dérivées

$$\dot{f}(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \leftrightarrow s^2 F(s) - sF(0) - \dot{f}(0)$$

Propriétés du décalage temporel

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

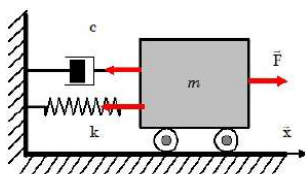
$$e^{-ts_0} f(t) \leftrightarrow F(s + s_0)$$

Transformées de Laplace usuelles

- échelon $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$
- impulsion $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- $t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$
- $e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s - a}$
- $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
- $\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- $\sinh(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
- $\cosh(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Réponse à une excitation quelconque : méthode de Laplace

Reprenons le problème du système 1ddl amorti en régime forcé :



$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

On commence par transformer chaque terme de l'équation de mouvement :

- $F(t) \leftrightarrow F(s)$

- $x(t) \leftrightarrow X(s)$
- $\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x_0$
- $\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx_0 - v_0$

L'équation du mouvement se réécrit alors :

$$(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)X(s) - (s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0 = \frac{F(s)}{m}$$

On en déduit immédiatement la transformée de Laplace recherchée :

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 + v_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Soient s_1 et s_2 les racines du dénominateur $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \text{ si } \xi \geq 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \text{ si } \xi < 1$$

On a alors :

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 + v_0}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Les deux termes se décomposent facilement en éléments simples. On en déduit ensuite l'expression de la réponse temporelle totale $x(t)$ par transformation inverse : $X(s) \leftrightarrow x(t)$

Réponse impulsionnelle

La force impulsionnelle est un cas très fréquemment rencontré, en particulier en mécanique vibratoire expérimentale : pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une structure, le système initialement au repos est excité ponctuellement à l'aide d'un "marteau de choc".

Nous allons ici supposer que le système 1ddl amorti est soumis à une force impulsive :

$$f(t) = F_0\delta(t)$$

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$L(f(t)) = F(s) = F_0$$

Le système est supposé initialement au repos, la réponse du système est donc uniquement constituée de la réponse permanente :

$$X(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

soit :

$$X(s) = \frac{F_0}{m(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right)$$

On utilise la transformée inverse : $e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s - a}$ et on en déduit :

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

- **cas de l'amortissement sur-critique $\xi > 1$**

on a alors $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

En remplaçant s_1 et s_2 par leurs expressions, on trouve finalement :

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi\omega_0 t} \sinh((\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1})t)$$

- **cas de l'amortissement sous-critique $\xi < 1$**

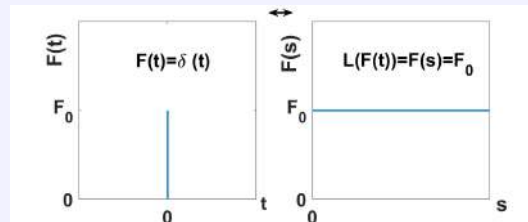
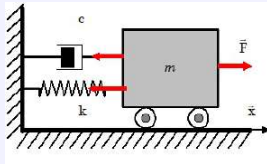
on a alors $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

En remplaçant s_1 et s_2 par leurs expressions, on trouve finalement :

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t)$$

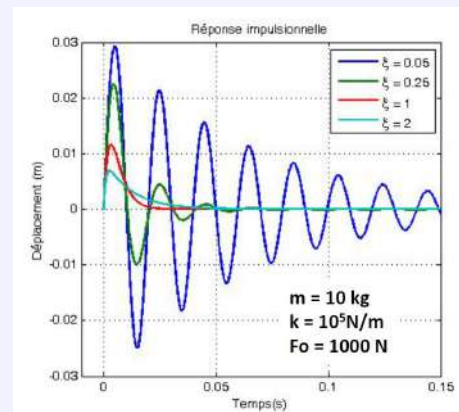
avec : $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

Réponse impulsionnelle



$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) & \text{si } \xi < 1 \\ \frac{F_0}{m\omega_0} t e^{-\omega_0 t} & \text{si } \xi = 1 \\ \frac{m\omega_0}{F_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sinh(\alpha t) & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$

avec : $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ et $\alpha = \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$



Chapitre 4

Système à deux degrés de liberté (2 ddl)

Ce chapitre a pour onjectif de vous initier, au travers du cas simple d'un système 2ddl conservatif, au cas plus général et complexe des systèmes discrets à n degrés de liberté ($n \geq 2$) qui est abordé en première année de Master.

4.1 Modélisation

Nous allons considérer le système représenté figure 4.1 : deux solides rigides de masses respectives M_1 et M_2 sont reliées entre elles par une suspension de raideur k_c . Chaque masse est reliée au bâti supposé fixe par une suspension de raideur $k_{1,2}$. Elles peuvent être soumises à des efforts dynamiques $F_{1,2}(t)$.

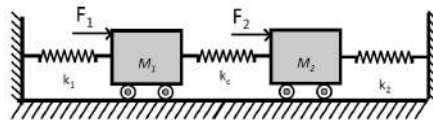


FIGURE 4.1 – Système à 2 ddl conservatif

La modélisation consiste à identifier les différents éléments du modèle :

- les degrés de liberté et le choix des coordonnées généralisées correspondantes : ici les deux degrés de liberté sont les déplacement horizontaux des deux masses. Les coordonnées généralisées choisies seront les déplacements horizontaux des deux masses à partir de leur position d'équilibre statique : $x_1(t)$ et $x_2(t)$
- les inerties (masses et moments d'inertie) : ici les deux masses M_1 et M_2
- les raideurs : ici k_1 , k_2 et k_c
- les forces extérieures dynamiques : ici $F_1(t)$ et $F_2(t)$

4.2 Équations de mouvement

Comme pour le système 1ddl, nous détaillons ici différentes méthodes pour écrire ces équations de mouvement.

Nous obtenons dans tous les cas un système de deux équations différentielles couplées.

4.2.1 Par le PFD

Il faut pour cela isoler successivement les deux masses et leur appliquer le PFD :

- PFD appliqué à M_1 :

$$M_1 \ddot{x}_1 = \sum F_{->M_1} = -k_1 x_1 - k_c(x_1 - x_2) + F_1$$

- PFD appliqué à M_2 :

$$M_2 \ddot{x}_2 = \sum F_{->M_2} = -k_2 x_2 - k_c(x_2 - x_1) + F_2$$

On en déduit le système de deux équations de mouvement :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c(x_1 - x_2) = F_1 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

4.2.2 Par la conservation de l'énergie

- Bilan énergétique de la masse M_1 :

$$\begin{cases} E_{c1} = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 \\ E_{p1} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_c(x_1 - x_2)^2 \\ P_{e1} = F_1 \dot{x}_1 \end{cases}$$

=> conservation de l'énergie pour la masse M_1 : $\frac{d}{dt}(E_{c1} + E_{p1}) = P_{e1}$

soit : $M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c(x_1 - x_2) = F_1$

- Bilan énergétique de la masse M_2 :

$$\begin{cases} E_{c2} = \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 \\ E_{p2} = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_c(x_2 - x_1)^2 \\ P_{e2} = F_2 \dot{x}_2 \end{cases}$$

=> conservation de l'énergie pour la masse M_2 : $\frac{d}{dt}(E_{c2} + E_{p2}) = P_{e2}$

soit : $M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c(x_2 - x_1) = F_2$

On obtient le système de deux équations de mouvement :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c(x_1 - x_2) = F_1 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

4.2.3 Par les équations de Lagrange

Bilan énergétique du système :

- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2$
- Énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_c(x_2 - x_1)^2$
- puissance des forces extérieures : $P_e = F_1 \dot{x}_1 + F_2 \dot{x}_2$

Lagrangien : $L = E_c - E_p$

Equations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_2} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M_1 \dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = M_2 \dot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_c(x_2 - x_1) \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2 x_2 - k_c(x_1 - x_2) \\ \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \\ \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_2} = F_2 \end{cases}$$

On en déduit les équations de mouvement :
$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c(x_1 - x_2) = F_1 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

4.3 Vibrations en régime libre

4.3.1 régime libre du système 2ddl conservatif

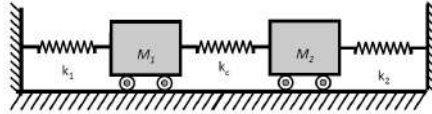


FIGURE 4.2 – Système à 2 ddl conservatif en régime libre

En régime libre les équations de mouvement s'écrivent :
$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c(x_1 - x_2) = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Comme pour le système à 1ddl, pour déterminer le mouvement naturel du système en régime libre, on cherche les solutions sous la forme :

$$x_i(t) = X_i e^{rt}$$

Le système des équations de mouvement se réécrit alors :

$$(S) = \begin{cases} (M_1 r^2 + k_1 + k_c)X_1 - k_c X_2 = 0 \\ -k_c X_1 + (M_2 r^2 + k_2 + k_c)X_2 = 0 \end{cases}$$

Pour vérifier (S) avec Q_1 et Q_2 non nul (cas du système au repos), il faut vérifier :

$$\det(S) = (M_1 r^2 + k_1 + k_c)(M_2 r^2 + k_2 + k_c) - k_c^2 = 0$$

Cette équation du second degré en r^2 admet 4 racines que l'on peut écrire sous la forme :

$$r_a = \pm j\omega_a \quad \text{et} \quad r_b = \pm j\omega_b$$

Nous ne détaillerons pas ici les expressions de ω_a et ω_b pour ce cas général.
Les mouvements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires des solutions possibles :

$$\begin{cases} x_1(t) = Q_{1p}^a e^{j\omega_a} + Q_{1m}^a e^{-j\omega_a} + Q_{1p}^b e^{j\omega_b} + Q_{1m}^b e^{-j\omega_b} \\ x_2(t) = Q_{2p}^a e^{j\omega_a} + Q_{2m}^a e^{-j\omega_a} + Q_{2p}^b e^{j\omega_b} + Q_{2m}^b e^{-j\omega_b} \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire également sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1^a \cos(\omega_a t - \phi) + X_1^b \cos(\omega_b t - \psi) \\ x_2(t) = X_2^a \cos(\omega_a t - \phi) + X_2^b \cos(\omega_b t - \psi) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^a \\ X_2^a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi) + \begin{Bmatrix} X_1^b \\ X_2^b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \psi)$$

Le mouvement libre des deux mobiles est la superposition de deux mouvements sinusoïdaux, l'un à la pulsation ω_a , l'autre à la pulsation ω_b .

ω_a et ω_b sont les **pulsation naturelles (ou propre) du système**

Pour déterminer les couples d'amplitude (Q_1^a, Q_2^a) et (Q_1^b, Q_2^b) , on reprend le système d'équations (S) en remplaçant r par son expression $r = \pm j\omega_{a,b}$:

$$(S)^{a,b} = \begin{cases} (k_1 + k_c - M_1\omega_{a,b})X_1^{a,b} - k_c X_2^{a,b} = 0 \\ -k_c X_1^{a,b} + (k_2 + k_c - M_2\omega_{a,b})X_2^{a,b} = 0 \end{cases}$$

Comme $\det(S)^{a,b} = 0$ ces deux équations sont équivalentes et donnent :

$$X_2^{a,b} = \frac{M_1\omega_{a,b}^2 - k_1 - k_c}{k_c} X_1^{a,b} = \frac{k_c}{M_2\omega_{a,b}^2 - k_2 - k_c} = \eta_{a,b} X_1^{a,b}$$

Finalement les déplacements sont connus à une constante multiplicative près.

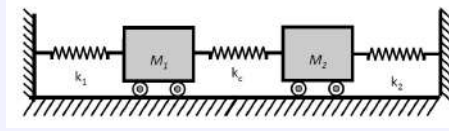
Le mouvement libre s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \psi)$$

Les constantes (A, ϕ, B, ψ) dépendent des conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0))$.

Les mouvements $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi)$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \psi)$ sont les deux **modes propres du système**.

$\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix}$ sont les déplacements modaux et ω_a et ω_b sont leurs pulsations propres respectives.



Equations du mouvement :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c (x_1 - x_2) = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Réponse du système :

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \psi)$$

Le mouvement libre des deux mobiles est la superposition de deux mouvements sinusoïdaux qui sont les deux **modes propres du système** :

l'un à la pulsation ω_a , de déplacement modal $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix}$

l'autre à la pulsation ω_b , de déplacement modal $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix}$

ω_a et ω_b sont les **pulsation naturelles (ou propre) du système**

ω_a , ω_b , η_a et η_b dépendent des caractéristiques du système : $(M_1, M_2, k_1, k_2, k_c)$

Les amplitudes et phases de la réponse (A, B, ϕ, ψ) dépendent des conditions initiales.

4.3.2 Un exemple pour vous entraîner

Nous vous proposons de considérer le système décrit figure 4.3.

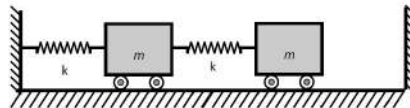


FIGURE 4.3 – Exemple d'un système à 2 ddl conservatif en régime libre

C'est en fait un cas particulier de celui étudié précédemment avec : $k_1 = k_c = k$; $k_2 = 0$; $M_1 = M_2 = m$

Vous pourrez vérifier en appliquant la méthode exposée précédemment que les deux modes propres de ce systèmes vérifient :

- premier mode propre : $\omega_a = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} \approx 1,37 \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix}$
- second mode propre : $\omega_b = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} \approx 2,03 \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$

On remarque que pour le premier mode les deux mobiles oscillent en phase, alors qu'ils oscillent en opposition de phase pour le second.

4.4 Résolution par formulation matricielle

4.4.1 Formulation pour un système conservatif à n ddls

La formulation matricielle est systématiquement utilisée pour résoudre des problèmes de vibration de systèmes discrets à plus de 2 degrés de liberté. Cette formulation permet une écriture et une résolution plus claire des équations de mouvement. Elle permet aussi et surtout de résoudre simplement les équations de mouvement numériquement.

Formulation matricielle - système n ddls conservatif

Pour un système à n degrés de libertés conservatif, paramétré par n coordonnées généralisée q_i , le mouvement est décrit par un système de n équations de mouvement. La formulation matricielle consiste à réécrire ces équations de mouvement sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,n} & \cdots & M_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1,n} & \cdots & K_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

Soit :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$$

avec :

- $[M]$: matrice d'inertie ou de masse
- $[K]$: matrice de raideur
- $\{q\}$: vecteur des coordonnées généralisées
- $\{F\}$: vecteur des forces généralisées

Les matrices $[M]$ et $[K]$ sont des matrices symétriques.

4.4.2 Identification des matrices $[M]$, $[K]$ et $\{F\}$

Les matrices $[M]$, $[K]$ et $\{F\}$ peuvent être identifiés :

- à partir des équations de mouvement :
on réécrit le système des équations de mouvement sous la forme matricielle

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$$

- à partir des expressions des énergies :

$$E_c = \frac{1}{2} \{\ddot{q}\}^t [M] \{\ddot{q}\}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\}$$

$$P_e = \{\ddot{q}\}^t \{F\}$$

4.4.3 Cas du système 2ddls

Reprenons le système 2ddl conservatif vu précédemment (figure 4.4) :

$$\text{Nous avons vu que les équations de mouvement de ce système s'écrivent : } \begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_c (x_1 - x_2) = F_1 \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_c (x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

La formulation matricielle de ces équations donne :

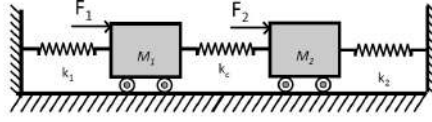


FIGURE 4.4 – Système à 2 ddl conservatif

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

les matrices $[M]$, $[K]$ et $\{F\}$ peuvent également être identifiées à partir des énergies :

- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}[\dot{x}_1, \dot{x}_2] \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$
- Énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}[x_1, x_2] \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- puissance des forces extérieures : $P_e = F_1\dot{x}_1 + F_2\dot{x}_2 = [\dot{x}_1, \dot{x}_2] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

4.4.4 Détermination des modes propres

Pour déterminer les modes propres du système, on considère l'équation matricielle du mouvement libre :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (4.2)$$

pour laquelle on cherche des solutions sous la forme : $q_i(t) = Q_i e^{j\omega t}$

L'équation matricielle 4.2 s'écrit alors :

$$([K] - [M]\omega^2) \{q\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Cette équation matricielle admet des solutions non nulles pour :

$$\det([K] - [M]\omega^2) = 0$$

Pour un système à 2ddl on obtient une équation de degré 4 qui donne 4 racines : $\pm\omega_a; \pm\omega_b$ (ω_a, ω_b) sont les **pulsation naturelles ou propres** du système.

Les solutions en mouvement libre s'écrivent (combinaison linéaire des solutions possibles) :

$$\{q\}(t) = \{Q_a\}\cos(\omega_a t - \phi_a) + \{Q_b\}\cos(\omega_b t - \phi_b)$$

C'est à dire :

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^a \\ Q_2^a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi_a) + \begin{Bmatrix} Q_1^b \\ Q_2^b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \phi_b)$$

Pour déterminer les déplacements propres, on résout :

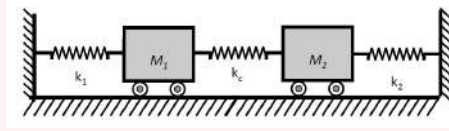
$$([K] - [M]\omega_a^2) \begin{Bmatrix} Q_1^a \\ Q_2^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad ([K] - [M]\omega_b^2) \begin{Bmatrix} Q_1^b \\ Q_2^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chacun de ces 2 équations admet une infinité de solutions, toutes proportionnelles les unes aux autres. Il faut chercher l'une de ces solutions pour résoudre l'équation, on parle de normalisation.

On peut par exemple chercher une solution sous la forme $\begin{Bmatrix} Q_1^{a,b} \\ Q_2^{a,b} \end{Bmatrix} \propto \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_{a,b} \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix}$ sont les **vecteurs propres** normalisés du système

Résolution matricielle - détermination des modes propres



Équation du mouvement : $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$

Forme de la solution : $\{q(t)\} = \{Q\}e^{j\omega t} \Rightarrow ([K] - [M]\omega^2)\{q\} = \{0\}$

Détermination des pulsations naturelles ou propre :

$\det([K] - [M]\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega_a \text{ et } \omega_b \text{ pulsations naturelles}$

Détermination des vecteurs propres :

résolution de $([K] - [M]\omega_{a,b}^2) \begin{Bmatrix} Q_1^{a,b} \\ Q_2^{a,b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ par un choix de normalisation,

par ex. $\begin{Bmatrix} Q_1^{a,b} \\ Q_2^{a,b} \end{Bmatrix} \propto \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_{a,b} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix}$ vecteurs propres normalisés

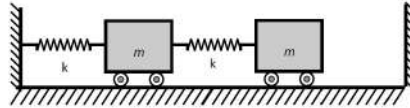
Solution : $\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} \cos(\omega_a t - \phi_a) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} \cos(\omega_b t - \phi_b)$

$\omega_a, \omega_b, \eta_a$ et η_b dépendent des caractéristiques du système : $(M_1, M_2, k_1, k_2, k_3)$

Les amplitudes et phases de la réponse (A, B, ϕ_a, ϕ_b) dépendent des conditions initiales.

4.4.5 Exemple

Reprenons le système décrit figure 4.3.



Les équations de mouvement en régime libre s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Ce qui sous forme vectorielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Détermination des pulsations propres :

$$\det([K] - [M]\omega^2) = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0$$

Les pulsation propres sont les racines positives de cette équation :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_b = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Détermination des vecteurs propres

On cherche des solution normalisées sous la forme $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_{a,b} \end{Bmatrix}$ à l'équation $([K] - [M]\omega^2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega_a^2 & -k \\ -k & k - m\omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2k - m\omega_b^2 & -k \\ -k & k - m\omega_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve : $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 1 \\ \eta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$

4.5 Vibrations forcées - excitation harmonique

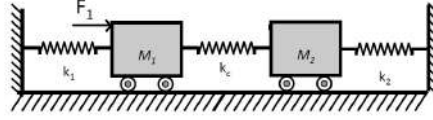


FIGURE 4.5 – Système à 2 ddl en régime forcé

Nous utiliserons pour cette partie la formulation matricielle.

4.5.1 mise en équation et résolution

En régime forcé, l'équation matricielle du mouvement s'écrit : $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$

Forme de l'excitation

On suppose une excitation harmonique sur la mobile de masse M_1 , le vecteur force généralisée s'écrit alors :

$$\{F\} = \mathcal{R}e \left[\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]$$

où Ω est la pulsation de l'excitation.

Forme de la réponse du système

La réponse du système est la superposition d'une réponse transitoire (le régime libre étudié précédemment) et d'une réponse permanente.

La réponse permanente à une excitation de pulsation Ω est un mouvement harmonique à la même pulsation :

$$\{q(t)\} = \mathcal{R}e \left[\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]$$

En substituant ces expressions dans l'équation du mouvement on obtient (on omet le $\mathcal{R}e[\]$ pour alléger les écritures) :

$$([K] - [M]\Omega^2) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Détermination des amplitudes Q_1 et Q_2

Q_1 et Q_2 peuvent alors être déterminés par exemple par la méthode de résolution de Gauss (déterminant relatif/déterminant de la matrice) :

$$\text{Posons } [M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ et } [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$$

(nous proposons ici volontairement des formes de matrices générales), nous pourrions par la suite adapter les résultats obtenus au cas particulier de la figure ??)

l'équation 4.4 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution s'écrit :

$$Q_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} F_1 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ 0 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{pmatrix}} \text{ et } Q_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & F_1 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{pmatrix}}$$

or les pulsations propres ω_a et ω_b sont solutions de $\det \begin{pmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{pmatrix} = 0$ et :

$$\det \begin{pmatrix} K_{11} - M_{11}\Omega^2 & K_{12} - M_{12}\Omega^2 \\ K_{12} - M_{12}\Omega^2 & K_{22} - M_{22}\Omega^2 \end{pmatrix} = (M_{11}M_{22} - M_{12}^2)(\omega_a^2 - \Omega^2)(\omega_b^2 - \Omega^2)$$

On a donc :

$$Q_1 = \frac{F_1(K_{22} - M_{22}\Omega^2)}{(M_{11}M_{22} - M_{12}^2)(\omega_a^2 - \Omega^2)(\omega_b^2 - \Omega^2)} \text{ et } Q_2 = \frac{-F_1(K_{12} - M_{12}\Omega^2)}{(M_{11}M_{22} - M_{12}^2)(\omega_a^2 - \Omega^2)(\omega_b^2 - \Omega^2)}$$

Réponse

finalement :

$$\begin{cases} q_1(t) \\ q_2(t) \end{cases} = \frac{1}{(M_{11}M_{22} - M_{12}^2)(\omega_a^2 - \Omega^2)(\omega_b^2 - \Omega^2)} \begin{Bmatrix} F_1(K_{22} - M_{22}\Omega^2) \\ -F_1(K_{12} - M_{12}\Omega^2) \end{Bmatrix} \cos(\Omega t)$$

Résonances

On remarque que pour $\Omega = \omega_a$ et $\Omega = \omega_b$ les amplitudes de mouvement des deux mobiles sont infinies (en l'absence d'amortissement) : le système entre en résonance pour ces deux pulsations.

Antirésonances

On remarque que :

- pour $\Omega = \sqrt{\frac{K_{22}}{M_{22}}}$ on a : $Q_1 = 0$ (et $Q_2 \neq 0$)
- pour $\Omega = \sqrt{\frac{K_{12}}{M_{12}}}$ on a : $Q_2 = 0$ (et $Q_1 \neq 0$)

On parle de phénomène d'antirésonance : à chacune de ces pulsations, l'un des mobile est immobile alors que l'autre oscille.

4.5.2 Exemple

On considère le système symétrique de la figure 4.6

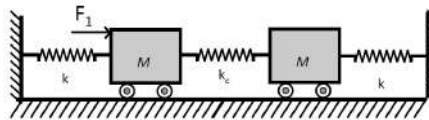


FIGURE 4.6 – Exemple Système à 2 ddl symétrique

On vous propose de déterminer :

- les pulsation propres de ce système
- les vecteurs propres associés
- la réponse de ce système à une force harmonique d'amplitude F_1 sur sa première masse

Vous pouvez vous entraîner en tentant de déterminer par vous même ces éléments avant de regarder les solutions ci-après.

Identification des matrices du modèle

Les matrices masse, raideur et force généralisée de ce système s'écrivent (vous pouvez vous entraîner à les identifier par l'écriture des équations de mouvement ou des énergies du système) :

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pulsations propres

Les pulsations propres sont solutions de :

$$\begin{aligned} \det([K] - [M]\omega^2) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} &= 0 \\ (2k - M\omega^2)^2 + k^2 &= 0 \\ (2k - m\omega^2 + k)(2k - m\omega^2 - k) &= 0 \\ (3k - m\omega^2)(k - m\omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

Les pulsations propres de ce système sont donc : $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et $\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

Vecteurs propres

Les vecteurs propres sont solution de : $([K] - [M]\omega_{a,b}^2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On cherche des solution normalisées sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{a,b} \end{pmatrix}$

- Premier mode propre : $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et donc $\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ \eta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les deux mobiles oscillent en phase à la même amplitude

- Deuxième mode propre : $\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{M}}$ et donc $\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ \eta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les deux mobiles oscillent en opposition de phase à la même amplitude

Réponse en régime forcé harmonique

L'excitation est de la forme : $\{F\} = \mathcal{R}e \left[\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]$

La réponse du système est de la forme : $\{x(t)\} = \mathcal{R}e \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]$

Nous devons résoudre l'équation : $([K] - [M]\Omega^2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$X_1(\Omega) = \frac{F_1(2k - M\Omega^2)}{M^2(\omega_a^2 - \Omega^2)}$$

$$X_2(\Omega) = \frac{F_1 k}{M^2(\omega_a^2 - \Omega^2)}$$

On identifie :

- deux pulsations de résonance : $\Omega = \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\Omega = \omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
- une pulsation d'antirésonance pour le premier mobile : $\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

La réponse à une excitation forcée harmonique de ce système est illustrée figure 4.7. On distingue clairement sur les courbes d'amplitude les deux pulsations de résonance ainsi que la pulsation d'anti-résonance.

On remarque qu'aux pulsations de résonance la phase des deux mobiles varie brutalement (le signe de X_1/F_1 et de X_2/F_1 change).

On note également une variation de la phase du premier mobile à son antirésonance.

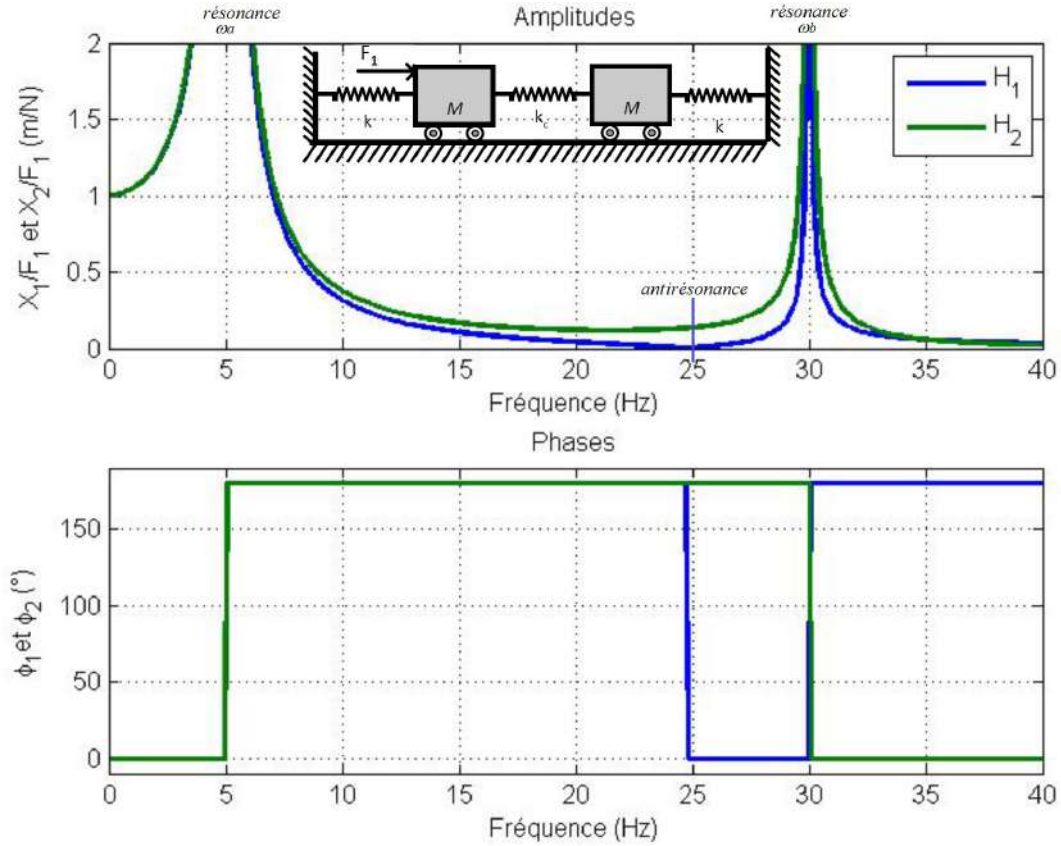


FIGURE 4.7 – Exemple d'un système à 2 ddl symétrique - Réponse en régime forcé harmonique

4.6 Application : l'absorbeur dynamique accordé

Certaines structures telles que les ponts, les passerelles piétonnes, les cheminées, les antennes, les mâts ou les tours, ont tendance à osciller avec des amplitudes importantes - voire dangereuses - sous des excitations provoquées par le vent, les machines, le trafic routier ou ferroviaire, le passage de piétons ou les séismes. Ces phénomènes sont la plupart du temps particulièrement importants et préjudiciables pour le premier mode propre de ces structures (elles se comportent alors comme des systèmes à 1ddl). Afin de réduire les amplitudes de ces oscillations, une solution simple à dimensionner et efficace est l'absorbeur dynamique accordé.

Un exemple d'application de cette technique de réduction des vibrations est la tour Taïpei 101 à Taïwan : une boule d'acier suspendue aux étages supérieurs permet d'atténuer les amplitudes du mouvement qui peut être causé par des vents violents (figure 4.8).

Cette technique est également appliquée dans les mats d'éoliennes (figure 4.9)



FIGURE 4.8 – Tour Taïpei 101 et son absorbeur dynamique



FIGURE 4.9 – Absorbeurs dynamiques dans des mat d'éolienne

Principe et modèle simplifié

la structure initiale est modélisée par un système masse-ressort (masse m_1 , raideur k_1) et son absorbeur par un système masse-ressort (masse m_2 raideur k_2) relié à la masse m_1 (figure 4.10).

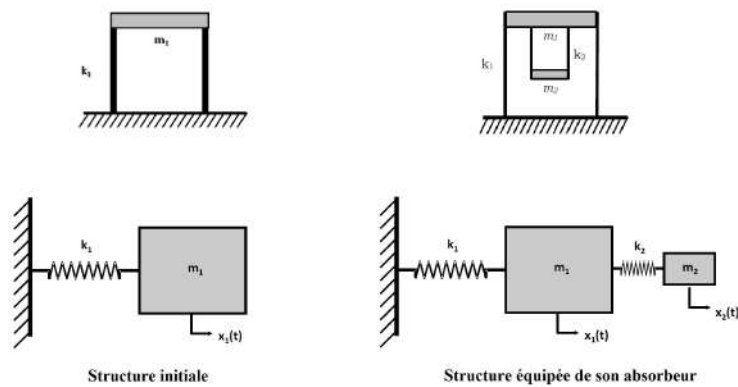


FIGURE 4.10 – Absorbeur dynamique - Modèle simplifié

La structure initiale (sans son absorbeur) a une pulsation de résonance $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$. Une fois l'absorbeur installé, le système se comporte comme un système à 2ddl, avec :

- deux pulsations de résonances : ω_a et ω_b
- une pulsation d'antirésonance pour la masse m_1 : $\omega_{ar} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$

Le principe de l'absorbeur dynamique consiste à dimensionner l'absorbeur (c'est à dire m_2 et k_2) de manière à ce que l'antirésonance du nouveau système soit à la pulsation de la résonance initiale : $\omega_{ar} = \omega_0$. On dit alors que l'absorbeur est "accordé".

A l'antirésonance ($\omega = \omega_{ar}$), la masse m_1 reste immobile et seule la masse m_2 oscille, c'est elle qui "absorbe" l'énergie.

Le résultat théorique avec un modèle non amorti est illustré figure 4.11. Ces figures sont issues d'une animation que nous vous invitons à visualiser sur le lien suivant :

<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/absorber/DynamicAbsorber.html>

Vous pourrez y visualiser le mouvement des deux masses pour les pulsations de résonance et d'antirésonance.

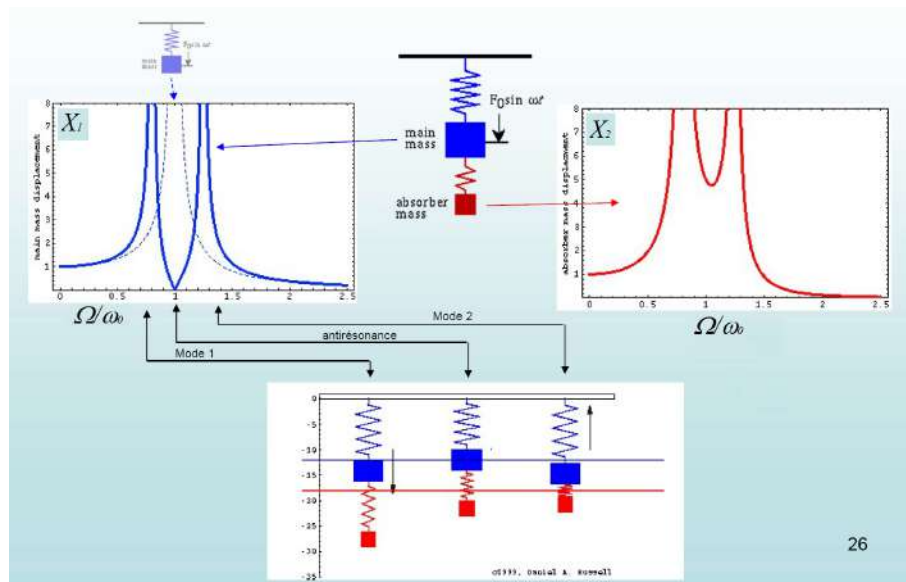


FIGURE 4.11 – Absorbeur dynamique - Réponses pour un système non amorti

Afin d'obtenir des résultats plus réalistes, il faudrait prendre en compte dans le modèle les amortissement des deux suspensions. La figure 4.12 illustre le type de résultat que l'on peut attendre (courbe bleu : "avant", courbe rouge "après"). On remarque qu'une fois l'absorbeur installé, l'immeuble ne vibre pratiquement plus à la pulsation propre initiale (avant : résonance de la courbe bleu - après : antirésonance de la courbe rouge) mais les amplitudes des vibrations de l'immeuble aux deux nouvelles résonances (amplitudes des deux pics de la courbe rouge) sont beaucoup plus faibles que celle à la résonance initiale (amplitude du pic de la courbe bleue).

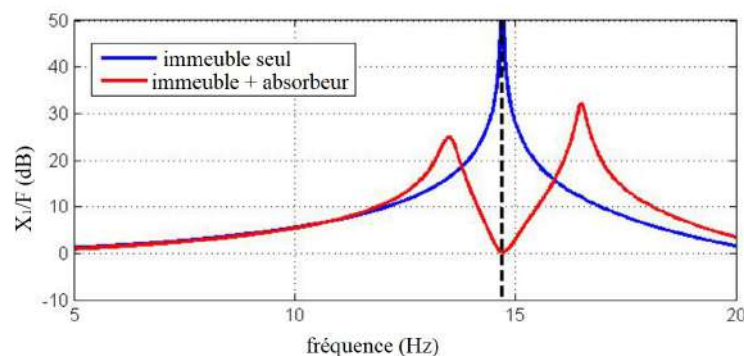


FIGURE 4.12 – Absorbeur dynamique - Réponses pour un système amorti