Sorbonne Université
Licence EEA

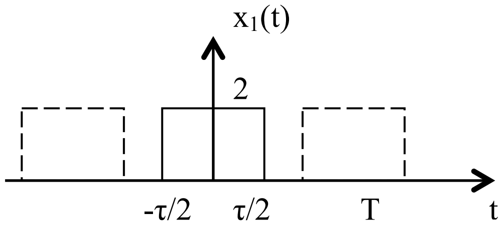
Travaux dirigés
de
Signaux et Systèmes

Mohamed CHETOUANI
Mohamed.Chetouani@sorbonne-universite.fr

TD 1 : Séries de Fourier, Transformée de Fourier

Exercice 1

1. Déterminer la représentation spectrale du signal périodique (séries de Fourier) :



2. Représenter le spectre de $x_1(t)$. Que se passe-t-il si τ tends vers + l'infini ? Interpréter le résultat.
3. On suppose que $x_1(t)$ représente, pour τ=T/2, le signal d'entrée d'un filtre passe-bas idéal.

Déterminer la bande passante du filtre afin de récupérer, en sortie, 98% du la puissance du signal d'entrée $x_1(t)$.

Note : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 2

1. Donner les transformées de Fourier des signaux :

$\delta(t),\ \ \delta(t-T_0),\ \ \ \delta^{(n)}(t)$

$\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

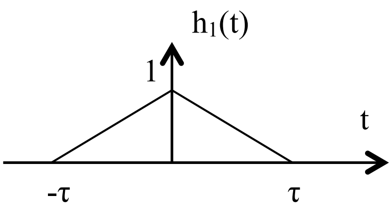
$g(t) = e^{-|a|t}$

2. Calculer la transformée de Fourier inverse de :

$$X(\nu) = j\,\frac{\delta(\nu+\nu_0) - \delta(\nu-\nu_0)}{2}$$

Exercice 3

1. Calculer la TF de la fonction porte $\prod_{T/2}(t)$ qui vaut 1 dans l'intervalle [-T/2,T/2] et 0 ailleurs.
2. En déduire les TF de :



et $h_2(t) = \frac{\sin(\pi\nu_0 t)}{\pi\nu_0 t}$

3. Calculer $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

TD 2 : Convolution

Exercice 1

1. Calculer la TF de la fonction $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ limitée par la fenêtre rectangulaire $\Pi_{T/2}(t)$.

2. Calculer la nouvelle TF si f(t) est limitée par la fenêtre de Hanning $h_N(t)$:

$$h_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right] & si\ t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0\ ailleurs \end{cases}$$

Exercice 2

On considère les trois signaux :

$$y_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t),\quad y_2(t) = \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_1),\quad y_3(t) = \cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

1. Calculer les TF : $Y_1(\nu)$, $Y_2(\nu)$, $Y_3(\nu)$.

2. Calculer les produits de convolution :
$y_1(t) \otimes y_1(t)$, $y_1(t) \otimes y_2(t)$ et $y_1(t) \otimes y_3(t)$

Exercice 3

Soit $x(t)$ un signal et $X(f)$ sa transformée de Fourier ;

1. Déterminer la transformée de Fourier de $x^*(-t)$ en fonction de $X(f)$.
2. On a $Z(f) = X(f)Y^*(f)$. Déterminer $z(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
3. Montrer que $z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$ et $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$
4. En déduire la relation de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$

TD 3 : Corrélation et Modulation

Exercice 1
On considère les trois signaux :

$$y_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t), \quad y_2(t) = \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_1), \quad y_3(t) = \cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

1. Calculer les corrélations : $C_{y1y1}(\tau)$, $C_{y1y2}(\tau)$ et $C_{y1y3}(\tau)$.
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 2
La détection de signaux par corrélation est une technique utilisée dans plusieurs domaines : système radar, échographie biomédicale, sismique…
Principe : Une onde représentée par le signal x(t) (connu) est émise. Cette onde est reflétée par une cible, et l'émetteur reçoit en retour, un signal y(t) :

$$y(t) = Ax(t - t_0) + n(t)$$

où n(t) est un bruit que l'on négligera {n(t)=0}

1. Que représentent A et t_0 ?
2. Comment relier t_0 à la distance de la cible ?
3. Proposer une méthode basée sur l'intercorrélation pour estimer t_0 ?

Exercice 3
Soit h(t) la réponse impulsionnelle d'un système S. Soient x(t) l'entrée de ce système et y(t) la sortie :
$y(t) = h(t) \otimes x(t)$
La réponse indicielle du système est donnée par : $y_{ind}(t) = h(t) \otimes u(t)$
Où u(t) est l'échelon d'Heaviside.

1. Donner l'expression de $y_{ind}(t)$ uniquement en fonction de la réponse impulsionnelle.
2. On considère le système décrit figure 1, déterminer $Cxy(\tau)$ en fonction de la réponse impulsionnelle h(t) et du produit d'auto-corrélation $Cxx(\tau)$

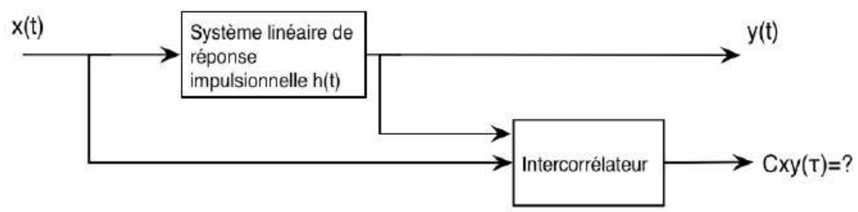


Figure 1 Système d'intercorrélation

Exercice 4

1. On désire moduler un signal m(t), d'amplitude bornée ($|m(t)| < A, \forall t$) et de spectre borné (M(f)=0 si $|f|>f_0$) afin de le transmettre sur une ligne. La fréquence de modulation est telle que : $F_0 >> f_0$. Déterminer la représentation spectrale des signaux modulés en amplitude sans et avec porteuse, $f_1(t)$ et $f_2(t)$ respectivement.

2. Réaliser la démodulation des deux signaux $f_1(t)$ et $f_2(t)$ en utilisant la porteuse.

T.D. 4 : Transformée de Laplace et Systèmes du premier ordre

Exercice 1

1. Trouver la transformée de Laplace de la fonction porte $\Pi_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{2})$ de hauteur A.
2. Trouver les transformées de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{2}{p^2 + 7p + 12},$$

$$F_2(p) = \frac{p + 2}{p^2 + 7p + 12},$$

$$F_3(p) = \frac{p^2 + p + 9}{p(p^2 + 9)},$$

Exercice 2

Soit le système suivant :

$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec $K = 10$ et $\tau = 0.1$s.

1. Déterminer l'équation différentielle qui régit le système.
2. Calculer la réponse indicielle.
3. Déterminer le régime transitoire et le régime permanent.

Exercice 3

On considère un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$ avec $T = 0.1s$.

1. Calculer l'expression de la pulsation de coupure à 0dB définie par $|G(\omega_{c_0})| = 1$.
2. Montrer que si $K \gg 1$, on a $\omega_{c_0} \approx \frac{K}{T}$.
3. Calculer la valeur du gain K qui permet d'obtenir une pulsation $\omega_{c_0} = 10$rad/s

Exercice 4

Soit la fonction de transfert du premier ordre suivant : $F(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ avec $\tau = 10$s.

1. Tracer le diagramme de Bode en amplitude et en phase. En déduire la bande passante à -3dB.
2. Déterminer la réponse indicielle. En déduire le temps de montée de 10 à 90%, le temps de réponse à 5% à partir de la constante de temps.
3. Quelle est la relation entre la bande passante et le temps de montée. Conclusion.

T.D. 5 : Systèmes du second ordre

Exercice 1

Soit la fonction de transfert du premier ordre suivant : $F_1(p) = \frac{1}{1+10p} \times \frac{1}{1+p}$.

1. Donner le coefficient d'amortissement ζ et la pulsation naturelle ω_n.
2. Tracer le diagramme de Bode (gain et phase).
3. Déterminer la réponse indicielle. En déduire le temps de réponse à 5% et la bande passante à -3dB. Conclusion.

Même question pour $F_2(p) = \frac{1}{1+10p} \times \frac{1}{1+10p} = \frac{1}{(1+10p)^2}$.

Exercice 2

On veut déterminer les paramètres d'un système du second ordre $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\frac{2\zeta p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$ en prenant le cahier des charges suivant :

– Le gain statique doit être unitaire.
– Le dépassement doit être inférieur à 10%.
– Le temps de réponse doit être inférieur à 1s et le temps de montée inférieur à 0.5s.

1. Calculer K, ζ et ω_n qui valident ce cahier des charges.
2. On désire diviser le temps de montée par 5 sans changer les autres contraintes. Recalculer les paramètres du modèle.

ζ	$t_m\omega_n$	$t_r\omega_n$ (5%)	$t_{pic}\omega_n$	$T_p\omega_n$	D%	$\frac{\omega_R}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_R}$	M_{dB}	ζ
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	**0,1**
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	**0,15**
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	**0,2**
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	**0,25**
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	**0,3**
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	**0,35**
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	**0,4**
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	**0,45**
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2	**0,5**
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	**0,55**
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	**0,6**
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	**0,65**
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0	**0,7**
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	-	0,94	-	-	**0,75**
0,80	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-	**0,80**
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-	**0,85**
0,90	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-	**0,90**
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-	**0,95**