

MU4MEM01
Mécanique des Milieux Continus - partie Fluides
Travaux Dirigés
2020-21

7 décembre 2020

I Révisions

1 Paradoxe de d'Alembert

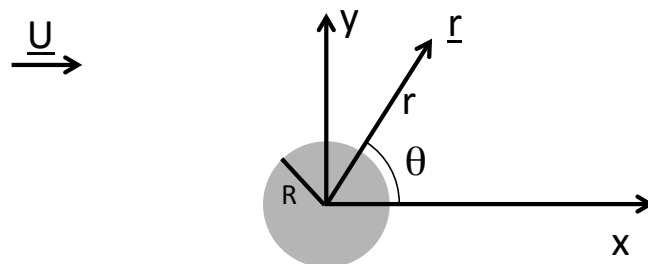


FIGURE 1 –

On considère l'écoulement de fluide parfait isovolume stationnaire irrotationnel d'un fluide de masse volumique ρ autour d'un cylindre infiniment long à section circulaire de rayon R . On se place dans le référentiel du cylindre, supposé galiléen. Loin du cylindre, l'écoulement est homogène, de champ de vitesse : $\underline{u} = U\underline{e}_x$, et sa pression est homogène de valeur p_0 . Le but de cet exercice est de déterminer la force exercée sur le cylindre.

a) Préambule

1. Montrez que l'écoulement est potentiel.

- Montrez que le potentiel des vitesses Φ vérifie l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$.
- Ecrivez la relation entre la pression p , la vitesse \underline{u} dans l'écoulement, U et p_0 (la gravité est négligée).

Solution: Bernoulli : $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$

- On suppose le cylindre absent. Montrez qu'à une constante près, $\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r}$.

b) Cylindre immobile

- Le domaine d'étude est l'ensemble du fluide. Le cylindre est immobile. Ecrivez les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement.
- Déterminez A pour que l'écoulement dérivant du potentiel

$$\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r} + \frac{A \underline{e}_x \cdot \underline{r}}{r^2}$$

vérifie $\Delta\Phi = 0$ et les conditions aux limites. En déduire l'expression de \underline{u} sous la forme $\underline{U} + \underline{v}$

Solution: $A = UR^2$

- Le bilan de quantité de mouvement pour la matière contenue dans un volume V fixe dans le référentiel d'étude, limité par la surface S , et contenant le cylindre s'écrit, dans l'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \underline{u} dV \right) = - \iint_S \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS + \iint_S -p \underline{n} dS + \underline{F}$$

où \underline{F} est la force exercée par l'opérateur sur le cylindre. Dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, exprimez la résultante des forces exercées par l'écoulement sur le cylindre \underline{F}' . F'_y est appelée la portance, F'_x la traînée.

Solution: Le cylindre est soumis à la force exercée par le fluide \underline{F}' et à \underline{F} . Le référentiel lié au cylindre étant galiléen, $\underline{F} + \underline{F}' = \underline{0}$, soit $\underline{F}' = -\underline{F}$. Or, l'écoulement étant stationnaire, $\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \underline{u} dV \right) = \underline{0}$ donc $-\iint_S \rho \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{dS} + \iint_S -p \underline{dS} = -\underline{F}$. Donc $\underline{F}' = -\iint_S \rho \underline{u} \underline{u} \cdot \underline{dS} + \iint_S -p \underline{dS}$.

- En choisissant pour V un cylindre concentrique de rayon $r \rightarrow \infty$, et en évaluant comment se comporte chaque intégrand apparaissant dans l'expression de \underline{F}' lorsque $r \rightarrow \infty$, montrez que $\underline{F}' = \underline{0}$.
L'absence de traînée sur un obstacle immergé dans un écoulement de fluide parfait, $F'_x = 0$, constitue le **paradoxe de d'Alembert**. En effet, on constate expérimentalement qu'à grand nombre de Reynolds $Re = \frac{UR}{\nu}$, c'est-à-dire lorsque les forces visqueuses

sont a priori petites devant l'inertie du fluide, la trainée est toujours non nulle¹, plus précisément $F'_x \sim \rho R^2 U^2$. Ce paradoxe se maintient lorsque le cylindre n'est pas à section circulaire.

c) Cylindre tournant

Le cylindre tourne maintenant à vitesse angulaire constante Ω . On suppose que l'écoulement peut être écrit comme la superposition de l'écoulement autour d'un cylindre immobile et d'un écoulement tourbillonnaire, de potentiel des vitesses associé $\frac{\gamma}{2\pi}\theta$.

$$\Phi = \underline{U} \cdot \underline{r} + \frac{A \underline{e}_x \cdot \underline{r}}{r^2} + \frac{\gamma}{2\pi} \theta$$

1. Montrez que l'écoulement tourbillonnaire est isovolume. On donne $\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$. Est-il irrotationnel ?
2. Montrez que la composante tourbillonnaire de l'écoulement est orthoradiale. Exprimez la circulation de l'écoulement autour d'un cercle C_r de centre O rayon r : $\Gamma_u(r) = \oint_{C_r} \underline{u} \cdot d\underline{l}$.
3. En absence d'écoulement "extérieur" \underline{U} , et en supposant alors que le cylindre entraîne le fluide par adhérence, reliez γ à Ω et R .
4. En présence de l'écoulement extérieur, vérifiez que le champ de vitesse résultant vérifie toujours la condition d'imperméabilité du cylindre. Vérifie-t-il la condition d'adhérence ?
5. On note $\underline{u} = \underline{U} + \underline{v} + \underline{w}$ où \underline{w} est le champ de vitesse de l'écoulement tourbillonnaire. En choisissant de nouveau pour V un cylindre de rayon $r \rightarrow \infty$ pour évaluer \underline{F}' , et en évaluant comment se comporte chaque intégrand apparaissant dans l'expression de \underline{F}' lorsque $r \rightarrow \infty$, montrez que

$$\underline{F}' = -\rho \iint_S [\underline{w}(\underline{U} \cdot \underline{n}) - \underline{n}(\underline{U} \cdot \underline{w})] dS$$

6. En utilisant l'identité $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$, en déduire que la force par unité de longueur exercée sur le cylindre vaut $-\rho U \Gamma_u \underline{e}_y$.

Y-a-t-il une trainée ? Exprimer la portance F'_y par unité de longueur en fonction de ρ , Ω , U et R .

2 Écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire isovolume d'un fluide de masse volumique ρ , viscosité dynamique μ , dans une conduite cylindrique de section circulaire de rayon R , de longueur infinie. Quelle est la "perte de charge linéique" (diminution de pression dans le sens de l'écoulement par unité de longueur) ? L'axe de la canalisation est (Ox) . L'écoulement se fait dans le sens des x croissants. On adopte les coordonnées cylindriques naturelles (r, θ, x) .

1. Ce paradoxe est une des manifestations de la nature singulière des écoulements à grand nombre de Reynolds : l'écoulement de fluide parfait (" $1/\text{Re} = 0$ ") est très différent de l'écoulement à grand nombre de Reynolds ($1/\text{Re} \rightarrow 0$). Cette UE va permettre de lever ce paradoxe.

1. Ecrire la condition d'écoulement isovolume, l'équation de Navier-Stokes et la condition aux limites auxquelles obéit le champ de vitesse.
2. On recherche la solution sous la forme d'un écoulement axisymétrique parallèle : $\underline{u} = u(r, x)\underline{e}_x$. En déduire que $u = u(r)$, puis que $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$.
3. Déduire de la projection de l'équation de Navier-Stokes selon (Ox) que $\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$. On notera $\frac{dp}{dx} = -K$.
4. Intégrer cette équation pour déterminer $u(r)$ en fonction de r , K et μ . Tracer $u(r)$.
5. Calculer le débit volumique Q_v et l'exprimer en fonction de K , R et μ .

II Analyse dimensionnelle

1 Traînée aérodynamique exercée sur un objet

Une application directe de l'analyse dimensionnelle concerne l'estimation de la force s'opposant au mouvement d'un objet dans un fluide, appelée "force de traînée". Nous considérons ici un objet ayant une unique dimension caractéristique D et se déplaçant à une vitesse $U\mathbf{e}_x$ dans un fluide infiniment étendu, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ . La vitesse U est supposée très faible devant la vitesse du son c , et la force de traînée est notée $\underline{T} = -T\mathbf{e}_x$.

1. Appliquer les étapes suivantes, détaillées dans le cours, pour déterminer la loi d'échelle suivie par la traînée T .
 - (a) (Analyse physique) Identifier les paramètres pertinents, en justifiant pourquoi la vitesse du son c n'en fait pas partie.

Solution: Cette étape, la plus délicate en pratique, est fortement simplifiée par les indications de l'énoncé qui liste les paramètres pertinents D , U , ρ , μ et T . La difficulté concerne la vitesse du son c : doit-elle être considérée ? L'analyse physique nous indique ici que *non*, car la vitesse du son est une caractéristique propre aux écoulements compressibles (les ondes acoustiques sont de bons exemples) et l'objet, se déplaçant à une vitesse $U \ll c$, est associé à un sillage quasi-incompressible.

- (b) Choisir une classe de système d'unité (SU) et l'utiliser pour exprimer les dimensions des paramètres pertinents.

Solution: Le système d'unité MLT suffit ici pour exprimer les dimensions des paramètres précédents, comme indiqué ci-dessous :

Grandeur	T	D	U	ρ	μ
Dimension	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	L	$L \cdot T^{-1}$	$M \cdot L^{-3}$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$

- (c) Identification des grandeurs dimensionnellement indépendantes avec lesquelles seront construites les grandeurs sans dimension.

Solution: Plusieurs choix sont possibles, et plusieurs réponses sont donc correctes pour cette question. La solution la plus simple pour exprimer les dimensions du système d'unité MLT est (ρ, U, D) . Les longueurs se construisent alors avec $[D] = L$, les durées avec $[D/U] = T$ et les masses avec $[\rho D^3] = M$.

- (d) Construire les grandeurs sans dimension.

Solution: Ayant identifié 5 paramètres pertinents pouvant tous être exprimés à l'aide de 3 dimensions indépendantes (MLT), $5 - 3 = 2$ nombres

sans dimension indépendants sont à construire. On peut les obtenir simplement en les construisant avec (ρ, U, D) complété avec, successivement, les paramètres pertinents restants (T et μ). La première grandeur sans dimension est donc à obtenir avec (ρ, U, D, T) , la seconde avec (ρ, U, D, μ) et on trouve

$$\pi_1 = \frac{T}{\rho U^2 D^2}, \quad \pi_2 = \frac{\rho U L}{\mu} \equiv Re$$

Remarque : ici aussi, les réponses ne sont pas uniques ! $\mu/(\rho U L)$ ou encore $(\rho U L)^2/\mu^2$ est ainsi tout aussi acceptable que π_2 .

- (e) Appliquer le théorème π et obtenir une loi d'échelle pour la force de traînée.

Solution: Le théorème π indique qu'il existe une fonction F telle que $\pi_1 = F(\pi_2)$, ce qui donne ici

$$T = \rho U^2 D^2 F(Re)$$

2. Donner un exemple d'objet ayant en première approximation "une unique dimension caractéristique D ", ainsi qu'un autre en ayant deux (disons D_1 et D_2) ? En adaptant la question précédente, déterminer la loi d'échelle suivie par la traînée dans ce cas.

Solution: Un objet ayant une unique dimension caractéristique est une boule (par exemple un ballon de football). Lorsque plusieurs longueurs du même ordre de grandeur sont nécessaires pour décrire l'objet, on peut en première approximation se restreindre à une unique dimension caractéristique (exemple du ballon de rugby). A l'inverse, une feuille de papier est caractérisée par sa longueur et sa largeur $D_1 \sim 20$ cm ainsi que par son épaisseur $D_2 \sim 0.1$ mm. Ici D_1 et D_2 sont très différents et il est nécessaire de les conserver. L'analyse précédente inclut alors une nouvelle grandeur sans dimension, $\pi_3 = D_1/D_2$, et la force de traînée devient

$$T = \rho U^2 D_1^2 F\left(Re, \frac{D_1}{D_2}\right)$$

3. La fonction inconnue introduite par le théorème π peut s'obtenir expérimentalement. La variation du coefficient de traînée

$$C_D = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$$

d'une sphère lisse et d'un cylindre lisse est représentée sur la figure 2 en fonction du nombre Reynolds, avec S l'aire de la plus grande section de l'objet perpendiculairement à la direction de l'écoulement ("maître-couple").

- (a) Déterminer à partir de la figure 2 des expressions simplifiées pour C_D dans le cas d'une sphère, dans les régimes $Re \ll 1$ et $Re \in [10^3, 5 \times 10^5]$.

Solution: D'après la figure, on a

$$C_D \underset{Re \ll 1}{\simeq} \frac{24}{Re}, \quad C_D \underset{Re \in [10^3, 5 \times 10^5]}{\simeq} 0.5$$

- (b) Relier C_D à la fonction inconnue introduite par application du théorème π .

Solution: En comparant les deux définitions de la force de traînée,

$$T = \rho U^2 D^2 F(Re) = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_D(Re)$$

et en utilisant $S = \pi(D/2)^2$ pour une sphère de diamètre D , il vient

$$F(Re) = \frac{\pi C_D(Re)}{8}$$

- (c) Simplifier l'expression de T pour une sphère dans les régimes $Re \ll 1$ et $Re \in [10^3, 5 \times 10^5]$.

Solution: Pour $Re \ll 1$, $C_D \simeq 24/Re$ donne $F(Re) \simeq 3\pi/Re$ et donc

$$T \simeq 3\pi\rho U^2 D^2 Re = 3\pi\mu DU$$

Il s'agit de la *formule de Stokes*. A l'inverse, pour $Re \in [10^3, 5 \times 10^5]$, il vient $F(Re) \simeq 2$ et donc

$$T \simeq 2\rho U^2 D^2$$

- (d) Comment varie la traînée exercée sur un ballon de football lors d'une passe si sa vitesse augmente d'un facteur 2? Même question pour une bactérie approximativement sphérique de diamètre $1 \mu\text{m}$ se déplaçant dans l'eau à une vitesse $U \simeq 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On rappelle $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ pour l'air et $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ pour l'eau.

Solution: Pour déterminer la variation de la traînée avec la vitesse de l'objet, il est nécessaire de déterminer le nombre de Reynolds, que l'on estime pour le ballon avec $\rho \simeq 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $D \simeq 0.2 \text{ m}$ et $U \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et ainsi

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} \simeq 10^5.$$

Dans ce régime, nous avons obtenu $T \propto U^2$: la traînée est multipliée par 4 si la vitesse double.

Dans le cas de la bactérie,

$$Re \simeq \frac{10^3 \times 10^{-5} \times 10^{-6}}{10^{-3}} \simeq 10^{-5},$$

et la traînée est alors linéaire en vitesse : T double si U double.

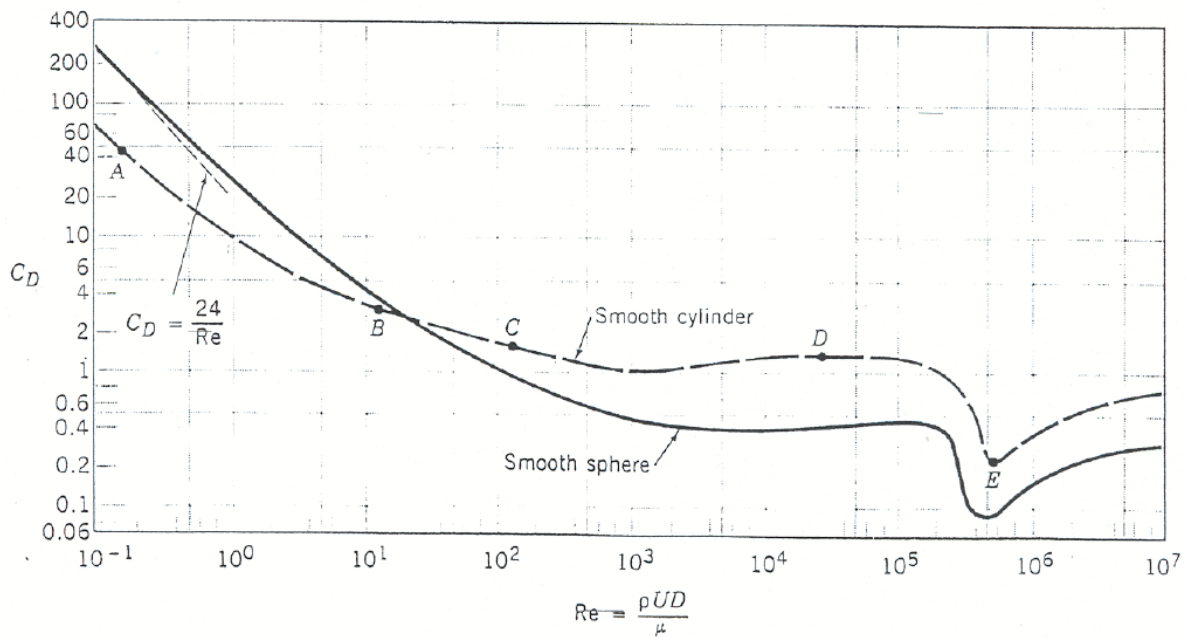


FIGURE 2 – Variation du coefficient de traînée d'une sphère et d'un cylindre en fonction de Re dans des régimes fortement subsoniques.

2 Vagues

On cherche à utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer des propriétés des vagues sur Terre puis sur d'autres planètes. On rappelle l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre $g = 9.81$ SI.

1. Sur Terre, la longueur d'onde λ d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan vaut 1.6 m. Par analyse dimensionnelle, déterminez la longueur d'onde d'une vague de fréquence 2 Hz.

Solution: La propagation des vagues fait intervenir l'action de la gravité qui tend à aplanir la surface et l'inertie de l'eau qui tend à maintenir son mouvement : la longueur d'onde λ des vagues dépend donc a priori de la masse volumique ρ , de l'accélération de la pesanteur g et de leur fréquence f . Choisissons la classe de systèmes d'unités qui contient le système international : L, M, T.

Grandeur	λ	ρ	g	f
Dimension	L	$M \cdot L^{-3}$	$L \cdot T^{-2}$	T^{-1}

L'unité de masse n'intervenant que dans ρ , il sera donc impossible de former une grandeur sans dimension l'impliquant et ce paramètre n'intervient donc pas :

$$\lambda = f_1(f, g)$$

Deux unités, à savoir celles de longueur et de temps, suffisent pour exprimer les 3 grandeurs en relation. D'après le théorème Pi, la loi peut se réécrire comme une loi faisant intervenir $3 - 2 = 1$ GSD. En adimensionnant λ à l'aide de g et f qui sont dimensionnellement indépendants, une GSD possible est $\Pi = \frac{\lambda f^2}{g}$. Donc la relation $\lambda = f_1(f, g)$ peut se réécrire :

$$f_1(\Pi) = 0, \text{ c'est-à-dire } \Pi \text{ est un zéro de la fonction } F_1 :$$

$$\Pi = C \text{ soit : } \boxed{\lambda = C \frac{g}{f^2}}$$

avec C une constante sans dimension. En doublant la fréquence on diminue par 4 la longueur d'onde, d'où $\lambda(f = 2 \text{ Hz}) = 40 \text{ cm}$.

2. Déterminez une expression pour l'accélération de la pesanteur g d'une planète en fonction de ses caractéristiques qui peuvent être trouvées dans le tableau ci-dessous et de la constante de gravitation G . On rappelle que G est telle que la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 séparées de d vaut $F = Gm_1m_2/d^2$.

Solution: Analyse physique : l'accélération de la pesanteur g est telle que le poids P d'une masse m attirée par la distribution de matière de la planète vérifie $P = mg$. L'accélération de la pesanteur g dépend a priori de la masse de la planète M , de la distance caractéristique séparant l'objet d'intérêt de la matière formant la planète (donc le rayon de la planète R), et de G . Ni la distance au soleil ni la durée du jour n'entrent donc en première approximation dans g . Ainsi,

$$g = f_2(G, M, R)$$

Les dimensions de ces grandeurs sont listées ci-dessous,

Grandeur	g	G	M	R
Dimension	$L \cdot T^{-2}$	$L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$	M	L

D'après le théorème Pi, la loi peut se réécrire comme une loi faisant intervenir $4 - 3 = 1$ GSD. En effectuant l'analyse dimensionnelle comme en question 1, on

obtient :

$$g = C' \frac{GM}{R^2}$$

avec C' une constante sans dimension.

3. Calculez la valeur de l'accélération de la pesanteur g_M sur la surface de Mars connaissant celle sur Terre ainsi que certaines des données du tableau ci-dessous.

Planète	Masse (kg)	Rayon	Distance au soleil	Durée d'un jour
Terre	6.1×10^{24}	6371 km	150×10^6 km	24 h
Mars	6.4×10^{23}	3390 km	228×10^6 km	24 h et 40 mn

Solution: Compte tenu de $g = C' \frac{GM}{R^2}$, on a

$$g_T = C' \frac{GM_T}{R_T^2}, \quad g_M = C' \frac{GM_M}{R_M^2}$$

d'où

$$g_M = g_T \frac{R_T^2 M_M}{R_M^2 M_T} = 3.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4. S'il y avait de l'eau sur Mars, quelle serait la longueur d'onde d'une vague de fréquence 1 Hz dans l'océan ?

Solution: D'après la question 1, on a

$$\lambda_T = C' \frac{g_T}{f}, \quad \lambda_M = C' \frac{g_M}{f} \quad \longrightarrow \quad \lambda_M = \lambda_T \frac{g_M}{g_T} = 59 \text{ cm}$$

3 Théorème de Pythagore

L'aire d'un triangle rectangle ABC, S_{ABC} , est complètement déterminée par la longueur de son hypoténuse c et par l'un de ses angles non droits, par exemple le plus petit, ϕ . Cette observation va nous permettre de démontrer le théorème de Pythagore.

1. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'échelle liant S_{ABC} , c et ϕ .

Solution: Les paramètres pertinents sont ici l'aire S_{ABC} , la longueur de son hypoténuse c ainsi que l'angle $\phi \leq \pi/4$. Le système d'unité L suffit pour exprimer les dimensions de ces paramètres,

Grandeur	S_{ABC}	c	ϕ
Dimension	L^2	L	sans dimension

Ces 3 paramètres pertinents pouvant tous être exprimés à l'aide d'une unique dimension, $3 - 1 = 2$ nombres sans dimension indépendants sont à construire, par exemple

$$\pi_1 = \frac{S_{ABC}}{c^2}, \quad \pi_2 = \phi$$

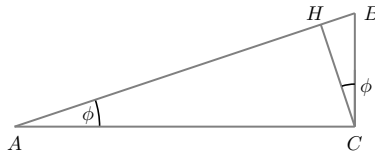
et le théorème π indique qu'il existe une fonction F telle que $\pi_1 = F(\pi_2)$, ce qui donne ici

$$S_{ABC} = c^2 F(\phi)$$

2. Considérons un triangle ABC rectangle en C , et notons (CH) sa hauteur passant par C . Celle-ci divise le triangle ABC en deux triangles HAC et HCB . On suppose sans perdre de généralité que l'angle ϕ correspond à l'angle au point A . Faire un schéma de ce triangle, puis exploiter la loi d'échelle déterminée à la question précédente pour démontrer le théorème de Pythagore.

Solution:

Le triangle considéré est le suivant, en remarquant que l'angle ϕ se retrouve aussi au niveau du point C dans HCB :



La relation obtenue à la question précédente mène alors à

$$S_{ABC} = AB^2 \times F(\phi)$$

$$S_{HAC} = AC^2 \times F(\phi)$$

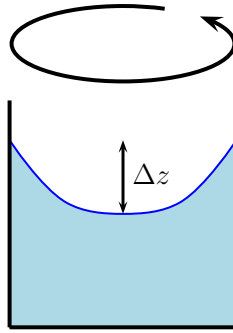
$$S_{HCB} = BC^2 \times F(\phi)$$

enfin, en remarquant que l'aire de ACB est la somme de celle de HAC et HCB , on obtient le théorème de Pythagore

$$S_{ABC} = S_{HAC} + S_{HCB} \longrightarrow \boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2}$$

4 Mise en rotation d'un verre d'eau

Un verre d'eau est déposé sur un support tournant à vitesse constante. On constate que sa surface se déforme : par analyse dimensionnelle, exprimer la différence de hauteur maximale observée Δz en fonction des paramètres du problème



Solution: Les paramètres pertinents sont ici le rayon du verre R , la vitesse de rotation angulaire Ω , l'accélération de la pesanteur g ainsi que la grandeur d'intérêt, Δz . Suivant les régimes de paramètres, d'autres grandeurs peuvent intervenir, par exemple la hauteur d'eau au repos si jamais la rotation est suffisamment forte pour assécher le verre au centre (on suppose que ce n'est pas le cas ici). Le système d'unité L, T suffit pour exprimer les dimensions de ces paramètres,

Grandeur	R	Ω	g	Δz
Dimension	L	T ⁻¹	L · T ⁻²	L

Ces 4 paramètres pertinents pouvant tous être exprimés à l'aide de 2 dimension, $4 - 2 = 2$ nombres sans dimension indépendants sont à construire, par exemple

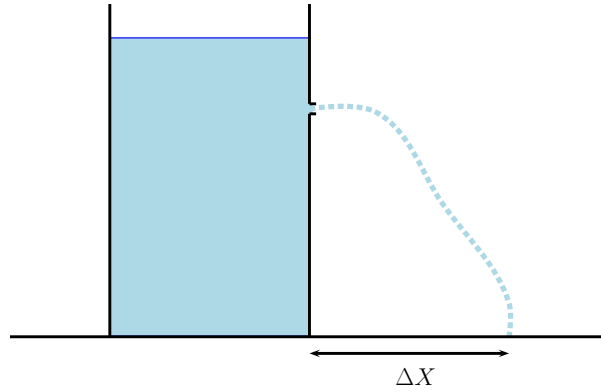
$$\pi_1 = \frac{\Delta z}{R}, \quad \pi_2 = \frac{R\Omega^2}{g}$$

et le théorème π indique qu'il existe une fonction F telle que $\pi_1 = F(\pi_2)$, ce qui donne

$$\Delta z = R \times F\left(\frac{R\Omega^2}{g}\right)$$

5 Fuite de citerne

Une balle percute une citerne contenant plusieurs dizaines de mètres cubes d'eau : il se crée alors un jet représenté très schématiquement ci-dessous. Obtenir une loi d'échelle pour la distance ΔX mise par l'eau avant de toucher le sol en fonction des paramètres pertinents.



Solution: Les paramètres pertinents sont ici la hauteur d'eau séparant la surface libre d'eau du trou, notée H , la hauteur séparant le sol du trou H_0 , l'accélération de la pesanteur g , ainsi que la grandeur d'intérêt ΔX . On suppose que la dimension du trou n'intervient pas, ce qui est bien vérifié dans le contexte présent. Le système d'unité L, T suffit pour exprimer les dimensions de ces paramètres, et on trouve

Grandeur	H	H_0	g	ΔX
Dimension	L	L	$L \cdot T^{-2}$	L

On déduit immédiatement que g , seul paramètre faisant intervenir le temps, ne peut pas intervenir dans des grandeurs sans dimension d'où

$$\Delta X = F(H, H_0)$$

On obtient des 3 paramètres pertinents restant, pouvant tous être exprimés à l'aide d'une dimension L , $3 - 1 = 2$ grandeurs sans dimension indépendantes à construire, par exemple

$$\pi_1 = \frac{\Delta z}{H_0}, \quad \pi_2 = \frac{H}{H_0}$$

et le théorème π indique qu'il existe une fonction F telle que $\pi_1 = F(\pi_2)$, ce qui donne ici

$$\Delta X = H_0 \times F\left(\frac{H}{H_0}\right)$$

Il est possible d'aller plus loin en exploitant l'analyse dimensionnelle de manière plus subtile. Pour cela, on ajoute une étape supplémentaire consistant à évaluer la vitesse de l'eau sortant au niveau du trou v_0 . Chercher une relation entre H , g et v_0 mène à former $3 - 2 = 1$ GSD d'où avec C un nombre sans dimension,

$$v_0 = C \sqrt{gH}$$

Ensuite, exprimons ΔX en fonction de v_0 , g et H .

Grandeur	H	v_0	g	ΔX
Dimension	L	$L \cdot T^{-1}$	$L \cdot T^{-2}$	L

donne $\Delta X = H f_1(gH/v_0^2)$ ce qui n'aide pas. L'étape difficile consiste à ce niveau à assigner, formellement, des dimensions différentes L_x et L_z aux longueurs horizontale et verticale, traduisant le fait que g et H sont reliés à la coordonnée verticale alors que ΔX et v_0 à un mouvement et une vitesse horizontale. Ainsi,

Grandeur	H	v_0	g	ΔX
Dimension	L_z	$L_x \cdot T^{-1}$	$L_z \cdot T^{-2}$	L_x

qui mène cette fois à

$$\Delta X = C' \sqrt{\frac{H}{g}} v_0 = C'' \sqrt{H H_0}$$

On en déduit que ΔX est maximal si le trou est au milieu de la hauteur d'eau.

6 Collision Terre-Lune

On interrompt brusquement le mouvement de rotation de la Lune autour de la Terre. Au bout de quel temps la collision Lune-Terre se produit-elle ?

Solution: La collision a lieu parce que la Lune et la Terre s'attirent avec une force \mathbf{F} telle que :

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

où M est la masse de la Terre, m celle de la Lune, et d la distance entre leurs centres. Le temps avant collision est fini parce que l'inertie de la Terre M et celle de la Lune m limitent leur accélération l'une vers l'autre.

La durée avant collision τ est donc fonction de G , M , m , et de leur distance initiale d :

$$\tau = f(G, M, m, d)$$

Une fois la classe de systèmes d'unités L , M , T , Θ ... choisie, les dimensions L , M , T suffisent pour exprimer les dimensions de ces paramètres,

Grandeur	τ	G	M, m	d
Dimension	T	$M^{-1} \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	M	L

Ces 5 grandeurs pouvant tous être exprimées à l'aide de 3 dimensions, la relation $\tau = f(G, M, m, d)$ pourra se réécrire comme une relation impliquant $5 - 3 = 2$ grandeurs sans dimension. G , m et d étant dimensionnellement indépendants, adimensionnons τ à l'aide de ces 3 grandeurs :

$$\pi = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{d^3}{mG}}}$$

est sans dimension. m étant de même dimension que M , on peut poser $\pi_1 = \frac{m}{M}$. D'après le théorème π , la relation $\tau = f(G, M, m, d)$ peut se réécrire :

$$\pi = \Phi(\pi_1)$$

soit :

$$\tau = \sqrt{\frac{d^3}{mG}} \Phi\left(\frac{m}{M}\right)$$

7 Distance de freinage

Une voiture lancée à la vitesse V pile et part en dérapage jusqu'à son arrêt. Quelle est la distance de freinage ?

Solution: Durant son dérapage, la voiture, de masse m , est freinée par la force de frottement solide dynamique \mathbf{T} telle que :

$$T = f_d mg$$

où $f_d \sim 1$ est le coefficient de frottement dynamique du contact pneu-route. Sa décélération est limitée par son inertie m .

La distance de freinage d est donc fonction de V , g , m et f_d :

$$d = f(V, g, m, f_d)$$

Une fois la classe de systèmes d'unités L , M , T , Θ ... choisie, les dimensions L , M , T suffisent pour exprimer les dimensions de ces paramètres,

Grandeur	V	d	g	m	f_d
Dimension	$L \cdot T^{-1}$	L	$L \cdot T^{-2}$	M	1

Ces 5 grandeurs pouvant tous être exprimées à l'aide de 3 dimensions, la relation $d = f(V, g, m, f_d)$ pourra se réécrire comme une relation impliquant $5 - 3 = 2$ grandeurs sans dimension. V , m et g étant dimensionnellement indépendants, adimensionnons d à l'aide de ces 3 grandeurs. La dimension M n'intervenant que dans m , d n'en dépend pas et :

$$\pi = \frac{dg}{V^2}$$

est sans dimension. f_d étant sans dimension, on peut poser $\pi_1 = f_d$. D'après le théorème π , la relation $d = f(V, g, m, f_d)$ peut se réécrire :

$$\pi = \Phi(\pi_1)$$

soit :

$$d = \frac{V^2}{g} \Phi(f_d)$$

Il faut retenir de cette loi d'échelle que la distance de freinage augmente comme la carré de la vitesse.

8 Disparition d'une bulle de vide

Une “bulle de vide” de rayon initial $R = 1$ mm est créée brusquement dans de l'eau à pression atmosphérique (par impact laser par exemple). Quel est la durée de sa rétractation conduisant à sa disparition ?

Solution: La cavité de vide se rétracte sous l'effet de :

- la pression P de l'eau : une particule fluide à la surface de la cavité de vide est soumise à la pression de l'eau sur sa face extérieure et à une force nulle de la part du vide sur sa face intérieure en contact avec le vide, donc elle est accélérée vers le centre de la cavité de vide.
- possiblement aussi par la tension de surface γ de l'eau qui tend à réduire l'aire de la surface libre de l'eau en réduisant le rayon de la cavité.

Ce processus est freiné par :

- la viscosité μ de l'eau
- l'inertie de l'eau, qui est la résistance de l'eau à son accélération (principe de Newton : accélération = force / masse : plus la masse est grande, plus l'accélération est faible, c'est-à-dire plus l'objet oppose une résistance (inertie) à un changement de sa vitesse). En effet, partant de l'état de repos, l'eau est mise en mouvement lors de la contraction de la cavité et doit donc être accélérée, elle oppose son inertie représentée par sa masse volumique ρ .

Les paramètres pertinents sont donc R , P , μ , ρ , γ . L'expérience conduit à conclure que la tension de surface et la viscosité ont un rôle mineur dans ce processus, si bien que le temps de rétraction de la cavité τ s'écrit en première approximation :

$$\tau = f(R, P, \rho)$$

Une fois la classe de systèmes d'unités L , M , T , Θ ... choisie, les dimensions L , M , T suffisent pour exprimer les dimensions de ces paramètres,

Grandeur	τ	R	ρ	P
Dimension	T	L	$M \cdot L^{-3}$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

Ces 4 grandeurs pouvant tous être exprimées à l'aide de 3 dimensions, la relation $\tau = f(R, P, \rho)$ pourra se réécrire comme une relation impliquant $4 - 3 = 1$ grandeur sans dimension. P , ρ et R étant dimensionnellement indépendants, adimensionnons τ à l'aide de ces 3 grandeurs : $[\tau] = [R]^1 [P]^{-1/2} [\rho]^{1/2}$. Donc

$$\pi = \frac{\tau \sqrt{P}}{R \sqrt{\rho}}$$

est sans dimension. D'après le théorème π , la relation $\tau = f(R, P, \rho)$ peut se réécrire :

$$\Phi(\pi) = 0$$

c'est-à-dire que π peut être considéré comme une racine (notée C) de la fonction Φ : $\pi = C$. Donc :

$$\tau = CR \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

9 Pression au centre de la Terre

Quel est l'ordre de grandeur de la pression P_0 au centre de la Terre ? Pour simplifier, on pourra la considérer comme une sphère liquide de rayon $R = 610^3$ km, de masse volumique homogène $\rho \simeq 510^3$ kg · m⁻³. On rappelle la valeur de la constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6 \times 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻².

Solution: La pression au centre de la Terre P_0 est liée à la force d'attraction gravitationnelle, qui implique \mathcal{G} , la distance entre les différentes parties de la Terre en interaction, d'ordre de grandeur R , et la masse des différentes parties de la Terre en interaction, qui implique elle-même ρ . Donc : $P_0 = f(\rho, \mathcal{G}, R) : n + 1 = 4$.

Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 4 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème Pi, cette loi peut donc s'écrire comme une loi impliquant $n + 1 - k = 1$ grandeur sans dimensions, notée $\Pi : F(\Pi) = 0$, soit $\Pi = \text{constante}$ (une racine de F , a priori de l'ordre de l'unité).

En cherchant à adimensionner P_0 à l'aide des $k = 3$ autres grandeurs ρ , \mathcal{G} et R , qui sont dimensionnellement indépendantes, on trouve :

$$[P_0] = [\rho]^2 [\mathcal{G}] [R]^2$$

Donc $\Pi = P_0 \rho^{-2} \mathcal{G}^{-1} R^{-2}$.

P_0 vérifie donc :

$$P_0 = \text{constante} \times \rho^2 \mathcal{G} R^2$$

En prenant la constante égale à l'unité, on trouve numériquement : $P_0 \sim 5 \times 10^{10}$ Pa

10 Similarité dynamique et modèle réduit

On cherche à dimensionner le moteur d'un navire en eaux profondes, c'est-à-dire déterminer sa puissance requise en fonction de la vitesse de déplacement du navire. Ceci nécessite de déterminer la force exercée par l'eau sur le navire en fonction de sa vitesse et de ses caractéristiques (dimensions et forme de la coque).

Pour déterminer cette force, on souhaite réaliser des essais en bassin sur un modèle réduit du bateau.

a) Surface mouillée

L'expérience montre que les paramètres pertinents pour caractériser l'influence de la géométrie d'un navire sur la force qu'il subit de la part de l'eau lorsqu'il avance sont :

- sa longueur L
 - son volume immergé ("volume de carène") V , qui dépend de sa masse m , appelée "déplacement"
1. Quelle est la relation entre le déplacement et le volume de carène ? Pour répondre à cette question, considérez l'équilibre du navire flottant à l'arrêt.

L'objectif de cette section est de se convaincre que la surface de carène du navire S , c'est-à-dire l'aire de la surface mouillée de sa coque, qui intervient dans l'expression de la force subie par le navire en mouvement, s'exprime en fonction de L et V .

Pour cela, considérons une carène (partie du navire sous la surface de l'eau) en forme de cylindre de section demi-circulaire de rayon R et de longueur L .

2. Exprimez S en fonction de V et L .
3. Déduisez-en l'expression de S en fonction de V et de la **finesse** de la carène φ , grandeur sans dimension caractérisant sa géométrie :

$$\varphi = \frac{L}{V^{1/3}}$$

4. De même, déduisez-en l'expression de S en fonction de L et de φ .
5. De manière générale, montrez que S peut toujours s'exprimer comme :

$$S = L^2 \mathcal{F}(\varphi),$$

\mathcal{F} dépendant des détails de la forme géométrique de la carène.

Solution:

1. L'équilibre du navire immobile sous l'effet de son poids et de la poussée d'Archimède conduit à : $\rho V = m$ où ρ est la masse volumique de l'eau.
2. $V = \frac{\pi R^2}{2} L$ et $S = \pi R L$ donc $S = \sqrt{2\pi} V^{1/2} L^{1/2}$.
3. $S = \sqrt{2\pi} \sqrt{\varphi} V^{2/3}$
4. $S = \sqrt{2\pi} L^2 \varphi^{-3/2}$
5. De manière générale, $S = f(L, V) : n + 1 = 3$. L'unité de longueur suffit à décrire S , L et V donc $k = 1$, donc $S = f(L, V)$ se réécrit comme une loi entre $n + 1 - k = 2$ GSD, par exemple $\frac{S}{L^2}$ et φ , donc :

$$S = L^2 \mathcal{F}(\varphi)$$

b) Première analyse dimensionnelle

Lorsqu'un navire avance dans l'eau, sa carène déplace de l'eau en générant un écoulement complexe dont deux caractéristiques peuvent être distinguées :

- l'eau déplacée est soulevée (vague d'étrave), ce qui génère des vagues qui exercent des contraintes sur la coque du navire. La dynamique des vagues fait intervenir l'inertie de l'eau de masse volumique ρ et la gravité g qui ramène l'eau à l'horizontale.
- un écoulement autour de la coque se produit sous la surface. Les contraintes exercées par l'écoulement sur la coque impliquent classiquement l'inertie de l'eau et sa viscosité μ .

On négligera toujours l'effet de l'air sur le navire.

6. Par analyse dimensionnelle, montrez que :

$$R = \frac{1}{2} \rho S U^2 F(\text{Fr}, \text{Re}, \varphi)$$

où $\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ est le nombre de Froude et $\text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}$ le nombre de Reynolds. Ces choix de GSD ont une origine historique et pratique.

Solution: R dépend a priori de L, V, ρ, μ, g, U . $n + 1 = 7, k = 3$ dans la classe de SU LMT donc 4 GSD. En utilisant L, U et ρ comme grandeurs dimensionnellement indépendantes pour adimensionner R, g, μ et V , on définit : $\Pi = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho L^2 U^2}, \Pi_1 = \frac{U}{\sqrt{gL}} = \text{Fr}, \Pi_2 = \frac{UL\rho}{\mu} = \text{Re}$ et $\Pi_3 = \varphi$. Donc :

$$R = \frac{1}{2} \rho L^2 U^2 G(\text{Fr}, \text{Re}, \varphi)$$

Comme $S = L^2 \mathcal{F}(\varphi)$,

$$R = \frac{1}{2} \rho S U^2 \frac{G(\text{Fr}, \text{Re}, \varphi)}{\mathcal{F}(\varphi)} = \frac{1}{2} \rho S U^2 F(\text{Fr}, \text{Re}, \varphi)$$

c) Première tentative d'exploitation des mesures sur maquette en bassin

On ne connaît a priori pas cette fonction F . Pour déterminer R , on peut :

- construire un modèle réduit de navire, c'est-à-dire une maquette du navire ayant la même finesse que le navire, mais une longueur L' très inférieure à celle du navire L et un volume de carène V' très inférieur à celui du navire V ,
 - faire naviguer la maquette dans le bassin d'essai rempli d'eau de mer à une vitesse U' telle que $\text{Fr} = \text{Fr}'$ et $\text{Re} = \text{Re}'$,
 - mesurer la résistance R' subie par la maquette et en déduire la valeur de la résistance R que devrait subir le navire en mouvement à la vitesse U .
7. Montrez qu'il n'y a pas de valeurs de L', V' et U' autres que L, V et U qui permettent de satisfaire $\text{Fr} = \text{Fr}'$ et $\text{Re} = \text{Re}'$. Cette première approche ne permet donc pas d'exploiter des mesures sur maquette pour déterminer R .

Solution: $\text{Fr} = \text{Fr}' \iff \frac{U}{\sqrt{L}} = \frac{U'}{\sqrt{L'}}$, tandis que $\text{Re} = \text{Re}' \iff UL = U'L'$, ce qui implique $L = L'$ et $U = U'$.

d) Distinction entre résistance de vague et traînée hydrodynamique

L'expérience montre que la résistance R est approximativement la somme de deux contributions (voir la figure 3) :

- une “résistance de vague” R_1 associée au rayonnement d’énergie par le bateau sous forme de vagues, pratiquement indépendante de la viscosité,
 - une traînée hydrodynamique R_2 associée à la dissipation d’énergie par viscosité au sein de l’eau et pratiquement indépendante de la génération du sillage de vagues, donc de la gravité.
8. En appliquant le théorème II successivement à R_1 et R_2 , montrez que R peut s’écrire sous la forme :

$$R = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S U^2 F_1(\Pi_1, \varphi)}_{R_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho S U^2 F_2(\Pi_2, \varphi)}_{R_2}$$

Exprimez Π_1 et Π_2 .

Solution: $R_1 = f_1(\rho, g, V, L, U)$ soit $R_1 = \frac{1}{2}\rho S U^2 F_1(\text{Fr}, \varphi)$ compte tenu de $S = L^2 \mathcal{F}(\varphi)$
 $R_2 = f_2(\rho, \mu, V, L, U)$ soit $R_2 = \frac{1}{2}\rho S U^2 F_2(\text{Re}, \varphi)$ compte tenu de $S = L^2 \mathcal{F}(\varphi)$.

e) Exploitation de plusieurs mesures sur maquettes

Cette distinction permet de mettre en oeuvre un autre protocole de mesures :

- mesurer la résistance totale R' subie par une maquette
 - mesurer la demi-résistance hydrodynamique R'_2 subie par une maquette symétrisée (voir plus loin).
 - en déduire la résistance de vague $R'_1 = R' - R'_2$
9. On considère la maquette de dimension L' fixée. L , φ , et U étant fixés, quelle valeur de vitesse U' doit-on choisir pour que $\text{Fr} = \text{Fr}'$? Montrez alors que $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{L'^3}{L^3}$.

Solution: $\text{Fr} = \text{Fr}' \iff \frac{U}{\sqrt{L}} = \frac{U'}{\sqrt{L'}}$ soit $U' = U \sqrt{\frac{L'}{L}}$.

On a alors $F_1(\text{Fr}, \varphi) = F_1(\text{Fr}', \varphi)$ donc $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{S' U'^2}{S U^2}$. Or $S = L^2 \mathcal{F}(\varphi)$ donc $\frac{R'_1}{R_1} = \frac{L'^2 U'^2}{L^2 U^2} = \frac{L'^3}{L^3}$.

En fait, lors d’une mesure sur maquette en bassin d’essai, on ne mesure pas R'_1 mais $R' = R'_1 + R'_2$. Pour mesurer R'_2 , on construit une maquette symétrisée, c’est-à-dire obtenue par symétrisation du volume de carène de la maquette du navire, voir la figure 3. On mesure la traînée hydrodynamique T que subit la maquette symétrisée dans un canal hydrodynamique au sein duquel elle est entièrement immergée (pas de surface libre, pas de vagues). On a alors : $R'_2 = T/2$. On en déduit $R'_1 = R' - R'_2$ et enfin R_1 .

10. Reste à déterminer R_2 . Pour cela, on réutilise la maquette symétrisée de dimension L' . Quelle nouvelle valeur de U' faut-il choisir pour vérifier $\text{Re} = \text{Re}'$? Montrez alors que $R_2 = R'_2$.

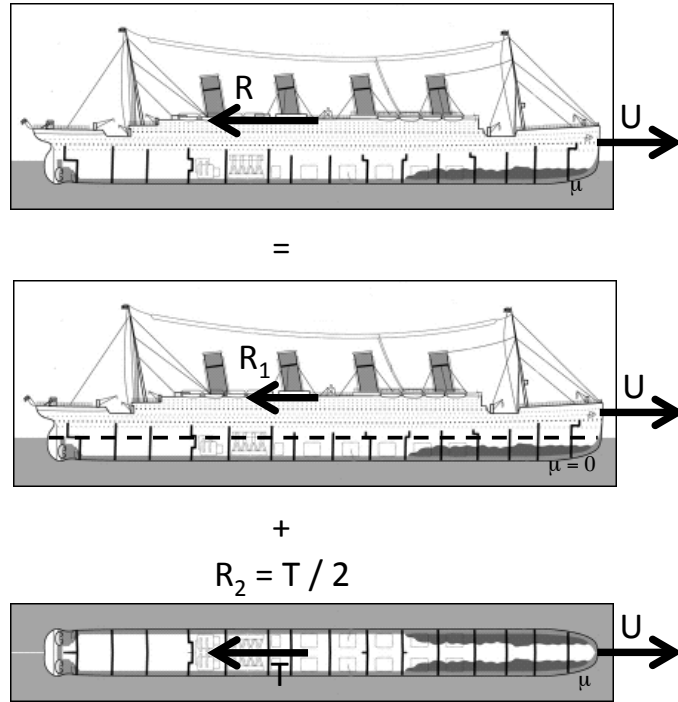


FIGURE 3 – Vue en coupe du Titanic. La résistance totale R subie par le navire est approximativement la somme de la résistance de vague R_1 associée au rayonnement d'énergie par le bateau sous forme de vagues, pratiquement indépendante de la viscosité, et de la trainée hydrodynamique R_2 associée à la dissipation d'énergie par viscosité au sein de l'eau et pratiquement indépendante de la génération du sillage de vagues, donc de la gravité. R_2 peut être déterminée en construisant une maquette obtenue par symétrisation du volume de carène (partie immergée de la coque) de la maquette du navire, voir dessin du bas, et en mesurant la trainée T qu'elle subit dans une soufflerie hydrodynamique (canal entièrement rempli d'eau, donc sans surface libre ni vagues). On a alors : $R_2 = T/2$.

Solution: $Re = Re' \iff UL = U'L'$ soit $U' = U \frac{L}{L'}$.

On a alors $F_2(Re, \varphi) = F_2(Re', \varphi)$ donc $\frac{R'_2}{R_2} = \frac{S'U'^2}{SU^2}$. Or $S = L^2\mathcal{F}(\varphi)$ donc $\frac{R'_2}{R_2} = 1$.

11 Impact d'une coque sur l'eau

Lorsqu'un hydravion amerrit trop violemment sur l'eau, il rebondit, ce qui est très dangereux pour sa structure. Le ricochet d'une pierre rasant l'eau est précisément aussi son rebond sur la surface de l'eau. Ce phénomène est exploité depuis le XVII^e siècle et de manière systématique depuis le XIX^e siècle pour augmenter la portée des tirs des canons de marine; en effet, un tir effectué au ras de l'eau peut permettre au boulet, à l'obus ou à la grenade sous-marine de rebondir plusieurs fois sur la surface de l'eau. Tous ces phénomènes indiquent qu'un objet impactant la surface de l'eau peut subir de la part de celle-ci une force qui excède largement la poussée d'Archimède. Nous allons étudier ce phénomène dans un cas particulier, celui d'une coque prismatique, c'est-à-dire bidimensionnelle et autosimilaire (sans échelle de longueur caractéristique), comme celle adoptée pour la coque des bombardiers d'eau (voir la figure 4), de nombreux autres hydravions et de leurs flotteurs.



FIGURE 4 – Hydravion bombardier d'eau “Canadair”. Notez la forme prismatique de la coque.

On considère donc une coque longue en forme de prisme à faces planes, d'angle α (figure 5). A l'instant $t = 0$, elle impacte la surface de l'eau (de masse volumique ρ , de viscosité dynamique μ) avec une vitesse verticale U que l'on suppose constante durant l'impact. On suppose l'impact suffisamment violent pour que le déplacement de l'eau dans le champ de pesanteur puisse être négligé durant le temps de l'analyse du choc. La gravité est donc négligée. Par contre, on suppose l'impact suffisamment lent pour que l'écoulement de l'eau puisse être considéré comme isovolume. Enfin, compte tenu des très grandes valeurs du nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ usuellement rencontrées dans ces phénomènes, on modélisera l'écoulement comme un écoulement bidimensionnel de fluide parfait, de plus irrotationnel. L'air au-dessus de l'eau est à la pression P_0 .

1. On se place dans le référentiel terrestre. L'écoulement est-il stationnaire? potentiel? Quelle équation le potentiel des vitesses φ vérifie-t-il?

Solution: La limite de l'écoulement que constitue la coque étant mobile, l'écoulement est instationnaire. L'écoulement étant supposé irrotationnel, il est potentiel.

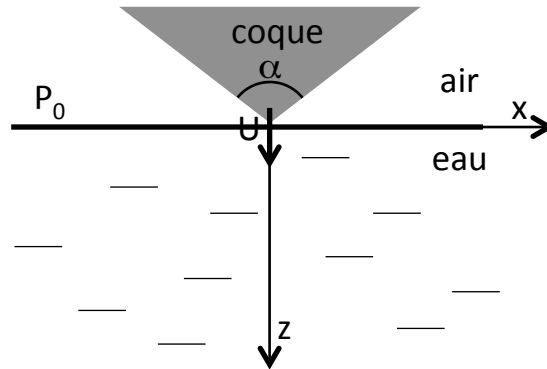


FIGURE 5 – Géométrie de l’impact vertical d’une coque prismatique sur la surface de l’eau. Le repère (O, x, z) est fixe dans le référentiel terrestre.

Etant de plus isovolume, son potentiel vérifie $\Delta\varphi = 0$.

2. Quelles sont les conditions aux limites imposées à l’écoulement ? On supposera pour simplifier que, l’air étant de masse volumique et de viscosité très faibles devant celles de l’eau, son mouvement ne conduit à aucune variation notable de la contrainte qu’il exerce sur la surface de l’eau, ce qui se traduit par la condition $P = P_0$ à la surface durant l’impact.

Solution: Le domaine d’étude est l’eau, limitée par la coque immergée et par la surface libre.

- L’écoulement étant considéré comme parfait et la coque étant imperméable, la condition imposée à l’écoulement de vitesse \underline{u} au contact de la coque est la condition d’imperméabilité : $\underline{u}|_{\text{coque}} \cdot \underline{n} = \underline{U} \cdot \underline{n}$, \underline{n} normale à la coque.
- La contrainte est continue à la traversée de la surface libre. L’air étant supposé exercer une contrainte de pression constante et l’écoulement de l’eau étant considéré comme parfait, cela se traduit par la continuité de la pression : $P|_{\text{surface libre}} = P_0$. On n’aborde pas la condition cinématique ici.
- Loin de la coque, l’eau n’est pas perturbée donc la pression est hydrostatique ($P = P(z) = P_0 + \rho g z$ avec le choix d’orientation de l’axe (Oz) imposé par la figure 5) et la vitesse est nulle.

3. Quelle inégalité doit vérifier quel nombre pour que l’hypothèse d’écoulement isovolume soit vérifiée ?

Solution: $Ma = \frac{U}{c} \ll 1$.

4. En appliquant le théorème de Bernoulli à cet écoulement et en évaluant l'ordre de grandeur des termes intervenant dans le théorème, montrez par un raisonnement en ordre de grandeur que l'on peut négliger la gravité dans la description de l'impact pendant une durée τ telle que $\tau \sim \frac{U}{g}$ (régime purement inertiel de l'impact). Réécrire la forme simplifiée du théorème de Bernoulli dans ce régime en employant la perturbation de pression $p = P - P_0$.

Solution: L'écoulement étant parfait irrotationnel, le deuxième théorème de Bernoulli s'applique : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 - gz = \text{constante}$. L'évaluation de cette égalité loin de la coque, où la vitesse est nulle et la pression hydrostatique, montre que la constante vaut $\frac{P_0}{\rho}$. Donc, en définissant $p = P - P_0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 - gz = 0$. A l'instant $t > 0$ la coque s'est enfoncée de la profondeur Ut , donc l'échelle spatiale caractéristique des variations de vitesse est $H = Ut$ et l'élévation caractéristique de l'eau chassée par la coque doit être de l'ordre de H :

- $u^2 \sim U^2$
- comme $\underline{u} = \underline{\nabla} \varphi$, $\varphi \sim UH$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sim \frac{UH}{t} \sim U^2$
- à la surface libre, $gz \sim gH$ et $p = 0$

donc la gravité est négligeable si $gz \ll \frac{1}{2}u^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, soit en ordre de grandeur $gH \ll U^2$, autrement dit $t \ll \frac{U}{g}$. Donc la gravité est négligeable pendant la durée $\tau \sim \frac{U}{g}$. Dans ce régime, le théorème de Bernoulli se simplifie en $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = 0$.

5. Appliquez le théorème Π pour proposer une loi d'échelle pour la force par unité de longueur instationnaire $f(t)$ subie par la coque. Comment f varie-t-elle avec t ? Quelle expression en ordre de grandeur a-t-elle à la fin du régime purement inertiel?

Solution: Le cône d'angle α impacte l'eau de masse volumique ρ et de viscosité considérée comme nulle avec la vitesse U , donc la force par unité de longueur exercée par l'eau sur la coque, instationnaire, est telle que : $f = F(t, \rho, U, \alpha)$: $n + 1 = 5$. Dans la classe de SU LMT, $k = 3$ unités suffisent à exprimer les 5 grandeurs impliquées donc d'après le théorème Pi, la loi se réécrit comme une relation entre $n + 1 - k = 2$ GSD. ρ , U et t étant $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes, on peut les utiliser pour adimensionner la grandeur d'intérêt f : $[f] = [\rho][U]^3[t]$. La deuxième GSD est simplement α . Donc :

$$f = \rho U^3 t \Phi(\alpha)$$

f augmente linéairement avec t . A $t \sim \tau$, $f \sim \rho U^3 \tau \sim \rho \frac{U^4}{g}$.

On souhaite maintenant exploiter l'analyse dimensionnelle pour simplifier l'écriture du "problème hydrodynamique", c'est-à-dire le modèle décrivant l'écoulement à l'origine

de cette force.

6. Appliquez le théorème Π pour proposer une loi d'échelle pour φ qui fasse intervenir des variables d'espace adimensionnées $\tilde{x} = \frac{x}{Ut}$ et $\tilde{z} = \frac{z}{Ut}$. Idem pour \underline{u} et p .

Solution: Le potentiel des vitesses, champ dépendant de l'espace (champ bidimensionnel donc dépendant des coordonnées x et z) et du temps t , est fonction des mêmes paramètres que f : $\varphi = \varphi(x, z, t, U, \rho, \alpha)$. Dans la classe de SU LMT, seules deux unités, celles d'espace et de temps, suffisent à exprimer φ , x , z , t , U et α . On a besoin de l'unité de masse seulement pour ρ . Donc ρ n'intervient pas dans la loi, c'est-à-dire $\varphi = \varphi(x, z, t, U, \alpha)$: $n + 1 = 6$ et $k = 2$ donc d'après le théorème Π , la loi se réécrit comme une relation entre $n + 1 - k = 4$ GSD. U et t étant deux grandeurs dimensionnellement indépendantes, compte tenu de $[\varphi] = L^2 T^{-1}$, on peut exhiber les 4 GSD suivants : $\Pi = \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{U^2 t}$, $\Pi_1 = \tilde{x} = \frac{x}{Ut}$, $\Pi_2 = \tilde{z} = \frac{z}{Ut}$, $\Pi_3 = \alpha$. D'après le théorème Π :

$$\varphi = U^2 t \Phi(\tilde{x}, \tilde{z}, \alpha)$$

De même, $\underline{u} = U \underline{\Theta}(\tilde{x}, \tilde{z}, \alpha)$ et De même, $p = \rho U^2 \Gamma(\tilde{x}, \tilde{z}, \alpha)$

7. Transformation du domaine d'étude

- En considérant à ce stade que la surface libre reste plane durant l'impact, quelle est l'équation de la surface libre dans les coordonnées (x, z) , dans ces coordonnées adimensionnées ?
- Quelle est l'équation cartésienne de la surface de la coque dans les coordonnées (x, z) ? Dans les coordonnées adimensionnées (\tilde{x}, \tilde{z}) ?
- Représentez la géométrie de l'impact pour $t > 0$ en coordonnées adimensionnées \tilde{x} et \tilde{z} . Les frontières du domaine d'étude sont-elles dépendantes du temps dans les coordonnées adimensionnées (\tilde{x}, \tilde{z}) ?

Solution:

- En supposant la surface libre plane durant l'impact, dans les coordonnées (x, z) , la surface libre a pour équation : $z = 0$, soit $\tilde{z} = 0$.
- Dans les coordonnées (x, z) , la coque a pour équation :

$$z(x, t) = Ut - \frac{|x|}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

En divisant par Ut avec $t > 0$:

$$\tilde{z} = 1 - \frac{|\tilde{x}|}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \tilde{z}(\tilde{x})$$

- La géométrie en coordonnées adimensionnées est représentée sur la sous-figure b sur le document `géométrie_impact.pdf`. Dans les coordonnées adimensionnées (\tilde{x}, \tilde{z}) , la coque et la surface libre sont donc indépendantes du temps.

8. **Transformation des conditions aux limites** - En notant \tilde{u} le champ de vitesse adimensionnée et \tilde{p} la pression adimensionnée, comment se transforment les conditions imposées à l'écoulement par la coque ? par la surface libre ?

Solution: Les abscisses et les ordonnées subissant la même homothétie d'un facteur Ut , la normale à la coque \underline{n} est inchangée. Compte tenu du fait que $\tilde{u} = \frac{u}{U}$ et $\underline{U} = U\underline{e}_z$, la condition d'imperméabilité se réécrit : $\tilde{u}|_{\text{coque}} \cdot \underline{n} = \underline{e}_z \cdot \underline{n}$. A la surface libre, compte tenu de la définition de la pression adimensionnée $\tilde{p} = \frac{p}{p_0}$, à la surface libre, la condition $p = 0$ se réécrit : $\tilde{p} = 0$.

9. **Transformation de l'équation potentielle** - En notant $\tilde{\varphi}$ le potentiel des vitesses adimensionné, quelle relation y-a-t-il entre \tilde{u} et $\tilde{\varphi}$? Quelle équation $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z})$ vérifie-t-il ?

Solution: $\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi$ donc $u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = U^2 t \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} = U^2 t \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}} \frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} = U \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}}$. Donc $\tilde{u} = \frac{u}{U} = \underline{\tilde{\nabla}}\tilde{\varphi}$ où $\underline{\tilde{\nabla}}$ est l'opérateur différentiel par rapport à (\tilde{x}, \tilde{z}) . φ vérifie $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$. Or $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = U \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}}$ donc $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = U^2 \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}^2}$. Donc $\tilde{\varphi}$ vérifie $\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}^2} = 0$

10. **Transformation de la relation de Bernoulli dans le régime inertiel** - Montrez d'abord que $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = U^2 \left(\tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}} \right)$. En déduire que la relation de Bernoulli dans le régime inertiel se réécrit :

$$\left(\tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}} \right) + \frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{p} = 0$$

Solution: $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(U^2 t \tilde{\varphi}) = U^2 \tilde{\varphi} + U^2 t \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}$. Or $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{x}} \frac{\partial\tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{z}} \frac{\partial\tilde{z}}{\partial t} = \frac{-\tilde{x}}{t} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{x}} - \frac{\tilde{z}}{t} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{z}}$ donc $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = U^2 \left(\tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}} \right)$. Avec $\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}$, la relation de Bernoulli s'écrit $\left(\tilde{\varphi} - \tilde{x} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}} - \tilde{z} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}} \right) + \frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{p} = 0$.

11. **Synthèse** - La description de l'écoulement en coordonnées adimensionnées dépend-elle explicitement du temps ? Quel est le bénéfice de l'emploi de ces coordonnées adimensionnées ?

Solution: $\tilde{\varphi}$ vérifie $\tilde{\Delta}\tilde{\varphi} = 0$ et des conditions indépendantes du temps à des frontières indépendantes du temps. La relation de Bernoulli exprimée à l'aide des coordonnées adimensionnées ne dépendant pas non plus du temps, la pression n'en dépend donc pas non plus. La solution $(\tilde{\varphi}, \tilde{p})$ de ce système d'équations ne dépend donc plus de trois variables (x, z, t) mais de deux variables seulement (\tilde{x}, \tilde{z}) : exprimé à l'aide des coordonnées réduites, le problème est donc simplifié.

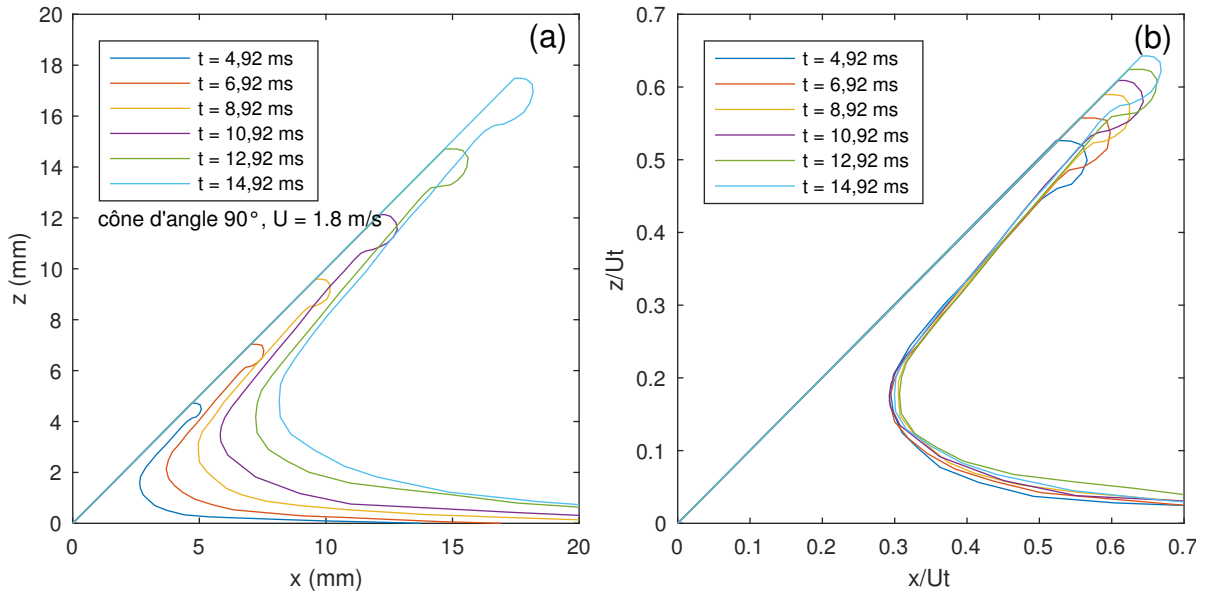


FIGURE 6 – (a) Formes de la surface libre de l’eau filmée de côté à différents instants après le début de l’impact d’un cône d’angle $\alpha = 90^\circ$ à la vitesse $U = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (b) Les mêmes formes de surface libre représentées en coordonnées adimensionnées (\tilde{x}, \tilde{z}). Expériences réalisées au cours de leur stage de recherche à l’Institut d’Alembert par Gaétan Labrosse et Shady Masry, étudiants en Master 1 en 2017-2018.

Postlude - Pour simplifier, nous avons supposé que la surface libre restait plane durant l’impact, ce qui est irréaliste : en effet, le cône s’enfonçant dans l’eau, celle-ci est projetée vers le haut (c’est la vague d’étrave). Or, pour que l’adimensionnement permette de simplifier le problème en le rendant stationnaire, il faut que les conditions aux limites représentées en coordonnées adimensionnées, en particulier la forme de la surface libre, soient indépendantes du temps. Cette forme étant difficile à déterminer analytiquement, elle peut par contre être déterminée expérimentalement. L’expérience consiste à filmer avec une caméra rapide la surface de l’eau contenue dans un aquarium durant l’impact d’un cône métallique d’angle $\alpha = 90^\circ$. Sur la figure 6 a sont représentées les formes de la surface libre de l’eau filmée de côté à différents instants après le début d’un impact à la vitesse $U = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Sur la figure 6 b sont représentées les mêmes formes en coordonnées adimensionnées. On constate que dans cette représentation, les formes se superposent avec précision (sauf au contact du cône où ce sont probablement les effets capillaires et visqueux qui modifient les conditions d’écoulement) : la forme de la surface libre est donc bien indépendante du temps en coordonnées adimensionnées. Cette observation valide notre hypothèse et rend pertinente l’approche adoptée pour simplifier ce problème.

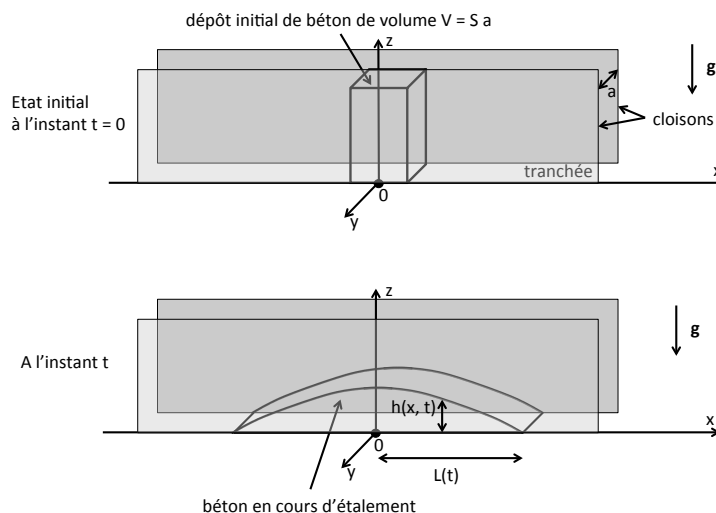


FIGURE 7 –

III Invariance d'échelle

1 Coulage d'un mur de béton (extrait du partiel du 6 novembre 2017)

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur a , comme schématisé sur la figure 9. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume V au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de "prendre" (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement μ . L'accélération de la gravité est notée \mathbf{g} . On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon (Oy) et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan (Oxz) . La forme du volume de béton est donc entièrement donnée par sa hauteur h fonction de l'abscisse x et du temps t .

a) Analyse dimensionnelle

1. Exprimez l'aire S de la portion de cloison mouillée par le béton en fonction de V et de a et justifiez pourquoi S est constante au cours de l'écoulement.

Solution: Le volume de béton étant invariant selon (Oy) , $S = \frac{V}{a}$. V étant conservé, S est constante. **1 point**

2. On suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon

(Oy). Déduisez-en quel paramètre géométrique n'a pas d'influence sur l'étalement du béton.

Solution: L'écoulement du béton est invariant selon la direction perpendiculaire aux cloisons, donc la distance entre les cloisons a n'a pas d'influence sur l'écoulement. **1 point**

3. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'évolution temporelle de la demi-longueur de la flaque de béton L (cf. figure 9) exprimée à l'aide de grandeurs sans dimension. Compte tenu de la nature bidimensionnelle de l'écoulement du béton, vous considérerez la surface mouillée S plutôt que son volume V comme paramètre pertinent. Pour former les grandeurs sans dimensions, vous emploierez g , S et ρ en justifiant préalablement pourquoi vous pouvez choisir ces trois grandeurs.

Solution: sur 6 points

L est fonction du temps t , du volume de béton représenté par la surface mouillée S , du moteur de l'écoulement, à savoir le poids du béton, impliquant ρ et g , ainsi que de ses freins, à savoir sa viscosité μ et son inertie ρ :

$$L = f(t, \rho, \mu, g, S) : n + 1 = 6 \quad \mathbf{1 \text{ point}}$$

Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 6 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème Pi, cette loi peut donc s'exprimer entre $n + 1 - k = 3$ grandeurs sans dimensions. **1 point**

On forme ces 3 GSD à l'aide de $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes. g , S et ρ étant 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes (g est la seule à impliquer le temps, ρ la seule à impliquer la masse **1 point**), ceci permet effectivement de les choisir. En cherchant à adimensionner L , t et μ à l'aide de g , S et ρ on forme alors les GSD suivants : $\Pi = LS^{-1/2}$ (**1 point**), $\Pi_1 = tg^{1/2}S^{-1/4}$ (**1 point**), $\Pi_2 = \nu g^{-1/2}S^{-3/4}$ (**1 point**) où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du béton. D'où :

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

b) Recherche de solution invariante d'échelle dans un régime d'écoulement lent

L'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique des équations décrivant l'écoulement du béton permettent de mettre en évidence l'existence d'un régime quasistatique (frein inertiel négligeable devant le frein visqueux) lorsque la flaque, de demi-longueur $L(t)$, est déjà bien étalée ($|\frac{\partial h}{\partial x}| \ll 1$), pour lequel l'approximation à l'ordre dominant du problème s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = D \frac{\partial^2(h^4)}{\partial x^2} & \text{pour } 0 \leq x \leq L(t) \\ h(x, t) = 0 & \text{pour } x > L(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $D = \frac{g}{12\nu}$, $\nu = \mu/\rho$, sachant que :

— l'épaisseur de béton est nulle au bord de la flaque :

$$h(x = L(t), t) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

— le sommet de la flaque reste au milieu des cloisons, en $x = 0$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (3)$$

— le volume de béton est constant :

$$\int_0^{+\infty} h(x, t) \, dx = S/2 \quad \forall t \quad (4)$$

1. Expliquez pourquoi ce problème {équation aux dérivées partielles (1), conditions (2, 3, 4)} est a priori bien posé, c'est-à-dire que le nombre de conditions aux limites et initiales est en accord avec l'ordre de l'e.d.p. Vous vous souviendrez avec profit de la diffusion de la chaleur dans un barreau dans lequel une quantité d'énergie donnée est déposée initialement en son milieu, étudiée en cours.

Solution: sur 2 points

L'edp est d'ordre 2 en x , 1 en t . On a donc besoin de deux conditions aux limites spatiales et d'une condition aux limites temporelle. Les conditions (2) et (3) constituent deux conditions aux limites spatiales. La condition (4) est le résidu de la condition initiale temporelle. En principe, la condition initiale devrait porter explicitement sur le profil de la flaque à l'instant initial $h(x, 0)$. Mais aux temps longs, la flaque oublie le détail de sa forme initiale et ne retient que l'information intégrale de sa forme initiale, c'est-à-dire son volume, qui est conservé, ce que traduit la condition (4) (comme le champ de température dans la barre aux temps longs oublie le détail de la distribution de température initiale et ne retient que l'information intégrale de ce profil de température initial, c'est-à-dire l'énergie déposée initialement, qui est conservée).

2. Afin de déterminer si ce problème admet une solution auto-similaire, on cherche une solution invariante d'échelle. Pour cela, on définit le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x' \quad / \quad x = x^* x' \\ t \mapsto t' \quad / \quad t = t^* t' \\ h \mapsto h' \quad / \quad h = h^* h' \\ D \mapsto D' \quad / \quad D = D^* D' \\ S \mapsto S' \quad / \quad S = S^* S' \end{array} \right.$$

où $\{x^*, t^*, h^*, D^*, S^*\}$ sont des facteurs de changement d'échelle². Déterminez les deux relations entre facteurs d'échelle imposés par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (1, 2, 3, 4).

2. L n'est ni une variable du problème ni un de ses paramètres mais une des caractéristiques de sa solution, donc on ne lui impose pas de changement d'échelle autre que celui imposé à x .

Solution:

$$\begin{cases} t^* &= \frac{x^{*2}}{D^* h^{*3}} \\ h^* x^* &= S^* \end{cases} \quad \text{2 points}$$

3. Le groupe des changements d'échelle laissant invariant le problème est donc à 3 paramètres libres. En choisissant comme paramètres libres t^* , D^* et S^* , montrez que les deux autres paramètres s'écrivent :

$$\begin{cases} h^* &= \left(\frac{S^{*2}}{D^* t^*} \right)^{1/5} \\ x^* &= (S^{*3} D^* t^*)^{1/5} \end{cases} \quad (5)$$

4. En écrivant que la solution $h(t, x, D, S)$ de ce problème invariant par ce groupe de changements d'échelle est aussi invariante par ce même groupe, puis en choisissant comme changements d'échelle particuliers $D^* = 1/D'$ et $S^* = 1/S'$, montrez que :

$$\left(\frac{D' t'}{S'^2 t^* t'} \right)^{1/5} h' = f \left(t^* t', (t^* t')^{1/5} \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

En déduire que :

$$\left(\frac{D' t'}{S'^2} \right)^{1/5} h' = g \left(\frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

h est donc autosimilaire, sa variable d'auto-similarité étant $\eta = \frac{x}{(S^3 D t)^{1/5}}$

Solution: sur 4 points

$h(t, x, D, S)$ se transforme en $h^* h' = f(t^* t', x^* x', D^* D', S^* S')$. En prenant $D^* = 1/D'$ et $S^* = 1/S'$, et en utilisant les expressions (5), on trouve :

$$\left(\frac{D'}{S'^2 t^*} \right)^{1/5} h' = f \left(t^* t', \frac{x' t^{*1/5}}{(S'^3 D')^{1/5}}, 1, 1 \right) = f \left(t^* t', \frac{x' t^{*1/5}}{(S'^3 D')^{1/5}} \right)$$

En faisant apparaître $t^* t'$:

$$\left(\frac{D' t'}{S'^2 t^* t'} \right)^{1/5} h' = f \left(t^* t', \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} (t^* t')^{1/5} \right)$$

Donc :

$$\left(\frac{D' t'}{S'^2} \right)^{1/5} h' = (t^* t')^{1/5} f \left(t^* t', \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} (t^* t')^{1/5} \right) = g \left(t^* t', \frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

$h'(t', x', D', S')$ étant invariant par changement d'échelle, il est indépendant de t^* , donc de $t^* t'$. Donc :

$$\left(\frac{D' t'}{S'^2} \right)^{1/5} h' = g \left(\frac{x'}{(S'^3 D' t')^{1/5}} \right)$$

5. L'extrémité de la flaque est définie par (2). Montrez que l'abscisse L de cette extrémité est telle que :

$$L(t) = \eta_0 \left(S^3 \frac{g}{12\nu} t \right)^{1/5}$$

où η_0 est une constante dont vous donnerez la signification.

Pour étaler le plus rapidement possible le béton dans la tranchée, vaut-il mieux fractionner le versement du béton ou le verser d'un seul coup ?

Solution: sur 4 points

h vérifie :

$$\left(\frac{Dt}{S^2} \right)^{1/5} h = g \left(\frac{x}{(S^3 Dt)^{1/5}} \right)$$

A l'extrémité de la flaque, c'est-à-dire en $x = L(t)$, h s'annule. Donc

$$g \left(\frac{L}{(S^3 Dt)^{1/5}} \right) = 0 \quad \mathbf{1 \text{ point}}$$

Soit η_0 le (premier) zéro de g (**1 point**), on a donc $\eta_0 = \frac{L}{(S^3 Dt)^{1/5}}$ soit $L = \eta_0 \left(S^3 \frac{g}{12\nu} t \right)^{1/5}$.

Le temps mis au béton pour atteindre la demi-longueur L est donc :

$$t = \frac{12\nu}{gS^3} \left(\frac{L}{\eta_0} \right)^5$$

t décroissant avec S , donc avec V , il vaut mieux verser le béton en une seule fois (V maximal) pour obtenir l'étalement le plus rapide dans une tranchée de demi-longueur donnée L (**2 points**).

6. En comparant ce résultat et celui donné par l'analyse dimensionnelle, exprimez Π en fonction de Π_1 et Π_2 dans ce régime quasistatique aux temps longs.

Solution:

$$\Pi = \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right)^{1/5}$$

IV Analyse en ordre de grandeur et analyse physique

1 Forces de lubrification

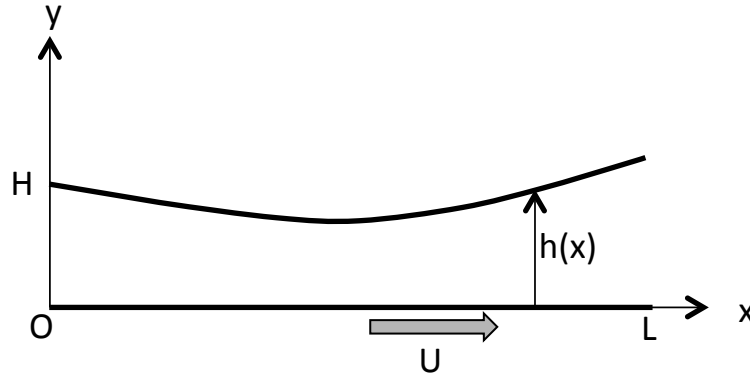


FIGURE 8 –

On considère l'écoulement stationnaire isovolume d'un fluide visqueux (masse volumique ρ , viscosité dynamique μ) entre deux parois séparées d'une distance $\sim H$ petite devant leur longueur L , une paroi inférieure plane mobile à la vitesse U et une paroi supérieure fixe, non parallèle à la paroi inférieure. L'objectif de l'exercice est d'exprimer les contraintes exercées par le fluide sur la paroi supérieure pour mettre en évidence l'existence d'une force de portance exercée par l'écoulement sur la paroi supérieure.

Pour simplifier, on considère un écoulement bidimensionnel. Dans le repère $(Oxyz)$ lié à la surface fixe, la paroi plane inférieure, supposée infinie, se confond avec le plan (Oxz) . La surface supérieure non plane et fixe est invariante par translation dans la direction (Oz) et sa forme est décrite par la fonction $y = h(x)$ où $h(x) \sim H$. Sa longueur dans la direction (Ox) vaut L . Comme $H \ll L$, on note $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$.

La vitesse de la paroi plane s'écrivant $\underline{U} = U\underline{e}_x$, l'écoulement est noté $\underline{u} = u(x, y)\underline{e}_x + v(x, y)\underline{e}_y$, et sa pression $p(x, y)$.

En amont ($x \leq 0$) et en aval ($x \geq L$), le fluide est supposé au repos à la pression P_a .

a) Etude de l'écoulement

1. Le domaine d'étude étant l'espace entre les deux parois, c'est-à-dire la portion d'espace située entre les deux surface solides limitée par les abscisses $x = 0$ et $x = L$, écrire les équations (sous leur forme scalaire) régissant l'écoulement et les conditions aux limites qui lui sont imposées.

Solution: Equations :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (7b)$$

Conditions aux limites :

▷ adhérence à la paroi mobile inférieure et imperméabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = U \text{ pour } y = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, y) = 0 \text{ pour } y = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (8b)$$

▷ adhérence à la paroi fixe supérieure et imperméabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = 0 \text{ pour } y = h(x) \quad \forall 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, y) = 0 \text{ pour } y = h(x) \quad \forall 0 \leq x \leq L \end{array} \right. \quad (9b)$$

▷ pression fixée en amont et en aval :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, y) = P_a \text{ pour } x = 0 \quad \forall 0 \leq y \leq h(0) \end{array} \right. \quad (10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, y) = P_a \text{ pour } x = L \quad \forall 0 \leq y \leq h(L) \end{array} \right. \quad (10b)$$

2. Adimensionnez les variables, puis les inconnues du problème (vous noterez \bar{x} la variable x adimensionnée). On notera V l'échelle de v , δp l'échelle de p .

Solution:

- x varie de 0 à L sur le domaine d'étude donc son ordre de grandeur, L , est comparable à son échelle caractéristique de variation, L , donc on peut poser : $x = L\bar{x}$, $\bar{x} \sim 1$.
- y varie de 0 à $h(x) \sim H$ sur le domaine d'étude donc son ordre de grandeur H est comparable à son échelle (caractéristique de variation) H , donc on peut poser : $y = H\bar{y}$, $\bar{y} \sim 1$.

- u varie de 0 à U à cause de l'adhérence donc en supposant que ses variations restent de l'ordre de U , son ordre de grandeur est comparable à son échelle donc on peut poser $u = U\bar{u}$, $\bar{u} \sim 1$.
- Dans le domaine d'étude v atteint 0 à cause de l'adhérence donc son ordre de grandeur est comparable à son échelle, inconnue à ce stade, notée V : on peut poser $v = V\bar{v}$, $\bar{v} \sim 1$.
- L'ordre de grandeur de p est P_a et son échelle, notée δp , est inconnue, donc on pose $p = P_a + \delta p \bar{p}$, $\bar{p} \sim 1$.

3. En adimensionnant l'équation de conservation de la matière, montrez que $V = \varepsilon U$.

Solution: (15) se réécrit :

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{H} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0.$$

En absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il n'est pas raisonnable de simplifier cette équation sans aboutir à une solution triviale non pertinente (Principe de Non Simplification Abusive). On doit supposer que les deux termes de l'équation sont *a priori* du même ordre de grandeur. Compte tenu de l'hypothèse $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \sim \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \sim 1$, ceci implique $\frac{U}{L} \sim \frac{V}{H}$, soit $V \sim \underbrace{\frac{H}{L}}_{\varepsilon} U$.

4. Adimensionnez l'équation de Navier-Stokes en utilisant comme notation $\text{Re} = \frac{UH}{\nu}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ et procédez aux simplifications automatiques.

Solution: En adimensionnant et en tenant compte de $\frac{V}{H} = \frac{U}{L}$, (30) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}}_{\ll \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}} \right) \quad (11a) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}}_{\ll \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}} \right) \quad (11b) \end{array} \right.$$

5. Adimensionnez les conditions aux limites.

Solution: \bar{u} s'exprimant en fonction de \bar{x} et \bar{y} , la condition (8a) se réécrit : $U\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = U$ pour $H\bar{y} = 0 \ \forall \ 0 \leq L\bar{x} \leq L$, soit $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ pour $\bar{y} = 0$

$\forall 0 \leq \bar{x} \leq 1$. En raisonnant de la même manière sur les autres conditions aux limites et en définissant $h = H\bar{h}$, $\bar{h}(\bar{x}) \sim 1$, on a

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = 1 \text{ pour } \bar{y} = 0 \quad \forall 0 \leq \bar{x} \leq 1 & (12a) \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{y} = 0 \quad \forall 0 \leq \bar{x} \leq 1 & (12b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{y} = \bar{h}(\bar{x}) \quad \forall 0 \leq \bar{x} \leq 1 & (13a) \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{y} = \bar{h}(\bar{x}) \quad \forall 0 \leq \bar{x} \leq 1 & (13b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{x} = 0 \quad \forall 0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}(0) & (14a) \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ pour } \bar{x} = 1 \quad \forall 0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}(1) & (14b) \end{cases}$$

6. Quelle est la direction principale de l'écoulement du fluide ? Quel est le moteur de l'écoulement ? Quels sont les freins, les conséquences de l'écoulement ? En raisonnant sur la projection de l'équation de Navier-Stokes le long de la direction principale de l'écoulement, montrez que :

$$\frac{1}{\epsilon \text{Re}} \sim \sup \left(1, \frac{\delta p}{\rho U^2} \right)$$

Solution: La direction principale de l'écoulement est (Ox) donc on appliquera les conclusions de l'analyse physique à (11a) :

- Le moteur de l'écoulement n'est ni une différence de pression imposée entre la gauche et la droite, ni un jet imposé qui serait dirigé le long de la direction (Ox) . Le moteur est l'entraînement par viscosité du fluide par la paroi inférieure mobile. En effet, si la paroi inférieure est immobilisée, il n'y a pas d'écoulement.
- Le frein de l'écoulement est l'inertie du fluide situé à gauche du domaine d'étude qui, partant du repos est accéléré entre les plaques.
- Le rôle de l'éventuel gradient de pression n'est pas clair : on le considère à ce stade simplement comme une conséquence de l'écoulement.

L'écoulement étant stationnaire, le moteur de l'écoulement doit donc être compensé par son frein si celui-ci peut lui être comparable en ordre de grandeur, ou par la conséquence de l'écoulement qui alors joue clairement le rôle de frein.

Considérons maintenant les implications de ce raisonnement sur l'équation gouvernant la direction principale de l'écoulement. Dans (11a), compte tenu de l'hypothèse que toutes les parties analytiques sont d'ordre 1, l'amplitude du moteur visqueux est $\frac{1}{\epsilon \text{Re}}$, celle du frein inertiel 1, celle de la pression-conséquence $\frac{\delta p}{\rho U^2}$. Donc :

- soit $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim 1$ et dans ce cas on peut avoir $1 \gg \frac{\delta p}{\rho U^2}$ ou $1 \sim \frac{\delta p}{\rho U^2}$,
- soit $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \gg 1$ auquel cas on a nécessairement $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim \frac{\delta p}{\rho U^2}$.

Résultat qu'on peut résumer sous la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim \text{Sup} \left(1, \frac{\delta p}{\rho U^2} \right)$$

7. On suppose que le régime d'utilisation de ce dispositif est tel que $\varepsilon \text{Re} \ll 1$. Justifiez qu'on peut alors fixer $\frac{\delta p}{\rho U^2} = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}}$ et en déduire qu'en ne conservant que les termes prépondérants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned}$$

Intégrez cette dernière équation et exprimez u en fonction de \bar{h} , \bar{y} et $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$. Identifiez les écoulements génériques correspondants et tracez les profils de vitesse correspondants.

Solution: Puisque $\varepsilon \text{Re} \ll 1$, $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \gg 1$: le frein inertiel ne peut pas compenser le moteur visqueux et c'est alors nécessairement la conséquence qui compense le moteur :

$$\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim \frac{\delta p}{\rho U^2} \gg 1$$

On peut donc fixer l'échelle de pression en cohérence avec cette relation valable en ordre de grandeur en posant $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} = \frac{\delta p}{\rho U^2}$. Dans (11a), les deux termes prépondérants, qui sont du même ordre de grandeurs, sont le moteur visqueux et le frein de pression. En ne gardant que ces deux termes prépondérants et compte tenu de $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} = \frac{\delta p}{\rho U^2}$, on a donc :

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

Considérons enfin les conséquences de la relation $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \sim \frac{\delta p}{\rho U^2} \gg 1$ sur l'autre direction de l'écoulement gouvernée par (11b). On a :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \gg \frac{\delta p}{\rho U^2} \sim \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \gg 1$$

donc dans (11b) :

terme de pression \gg terme visqueux \gg terme d'inertie

Donc en ne gardant que le terme prépondérant, (11b) se réécrit :

$$0 = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

soit :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ donc } \bar{p} \text{ ne dépend que de } \bar{x}$$

Donc $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$. En intégrant successivement deux fois $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$ par rapport à \bar{y} , on a :

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \frac{\bar{y}^2}{2} + f(\bar{x})\bar{y} + g(\bar{x})$$

f et g étant deux fonctions inconnues à ce stade. (12a) impose $g(\bar{x}) \equiv 1$. (13a) impose :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \frac{\bar{h}(\bar{x})^2}{2} + f(\bar{x})\bar{h}(\bar{x}) + 1 = 0$$

soit :

$$f(\bar{x}) = -\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \frac{\bar{h}(\bar{x})}{2} - \frac{1}{\bar{h}(\bar{x})}$$

Donc :

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{y} (\bar{h}(\bar{x}) - \bar{y})}_{\text{écoulement de Poiseuille}} + \underbrace{1 - \frac{\bar{y}}{\bar{h}(\bar{x})}}_{\text{écoulement de Couette}}$$

8. Exploitez la conservation de la matière pour exprimer \bar{v} en fonction de \bar{p} et ses dérivées, \bar{h} et ses dérivées, \bar{y} , et d'une fonction $f(\bar{x})$ indéterminée à ce stade.

Solution: (15) s'écrivant $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$, en dérivant \bar{u} par rapport à \bar{x} , on a donc :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{x}^2} \bar{y} (\bar{h} - \bar{y}) + \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{y} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{h}^2} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

soit en intégrant par rapport à \bar{y} :

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{x}^2} \left(\bar{h} \frac{\bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{y}^3}{3} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \frac{\bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2\bar{h}^2} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} + f(\bar{x})$$

9. En exploitant les conditions aux limites portant sur v , montrez que :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{\bar{h}^3}{6} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

puis que :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{6}{\bar{h}^2} + \frac{c}{\bar{h}^3},$$

c constante.

Solution: (12b) impose $f(\bar{x}) \equiv 0$. (13b) impose :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{x}^2} \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \frac{\bar{h}^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} = 0$$

soit :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{\bar{h}^3}{6} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

En intégrant :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{h}^3 = 6\bar{h} + c,$$

c constante, soit :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{6}{\bar{h}^2} + \frac{c}{\bar{h}^3}.$$

10. En exprimant le débit volumique \bar{Q} de l'écoulement dans la direction (Ox) de la gauche vers la droite, montrez que $c = -12\bar{Q}$.

Solution: Q débit volumique est défini par :

$$Q = \int_0^h u \, dy = UH \int_0^{\bar{h}} \bar{u} \, d\bar{y},$$

indépendant de \bar{x} . Donc :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{UH} = \int_0^{\bar{h}} \bar{u} \, d\bar{y} = -\frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{\bar{h}}{2}$$

En remplaçant $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$ par son expression déterminée à la question précédente, il vient :

$$\bar{Q} = \frac{-c}{12} \longrightarrow c = -12\bar{Q}$$

11. En exploitant les conditions aux limites portant sur \bar{p} , exprimez \bar{Q} en fonction de $\bar{h}(\bar{x})$. Dans quel sens est orienté le transport de matière ?

Solution: Le gradient de pression est par ailleurs contraint par les conditions aux limites portant sur la pression en $x = 0$ et $x = L$:

$$\bar{p}(1, \bar{y}) - \bar{p}(0, \bar{y}) = 0 = \int_0^1 \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \, d\bar{x}$$

soit :

$$\int_0^1 \left(\frac{6}{\bar{h}^2} - 12 \frac{\bar{Q}}{\bar{h}^3} \right) d\bar{x} = 0$$

donc :

$$\bar{Q} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{h^2(\bar{x})} d\bar{x}}{2 \int_0^1 \frac{1}{h^3(\bar{x})} d\bar{x}}$$

$\bar{Q} > 0$, ce qui signifie que le transport de matière se fait dans le même sens que le mouvement de la paroi inférieure.

b) Contraintes

12. Montrez que le vecteur $\underline{\nabla}f$ est orthogonal aux courbes iso-valeur de la fonction $f(x, y)$. En déduire que le vecteur unitaire normal à la surface solide fixe de forme $y = h(x)$ et orienté vers le fluide est :

$$\underline{n} = \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_x + \frac{-1}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_y,$$

où h' est l'autre notation de $\frac{dh}{dx}$.

Solution: Par définition de $\underline{\nabla}f$, la variation de f entre les points M et M' tel que $\underline{OM}' = \underline{OM} + \underline{dM}$ est telle que :

$$df = f(M') - f(M) = \underline{\nabla}f \cdot \underline{dM}$$

Par conséquent, si M et M' appartiennent à une surface isovaleur de f , $f(M) = f(M')$ donc $df = 0 = \underline{\nabla}f \cdot \underline{dM}$, donc $\underline{\nabla}f \perp \underline{dM}$ avec \underline{dM} appartenant à la surface isovaleur. Donc $\underline{\nabla}f$ est orthogonale aux courbes iso-valeur de f .

La surface de la paroi supérieure étant décrite par $y = f(x)$, définissons la fonction $f(x, y) = y - h(x)$: la surface de la paroi est la courbe iso-valeur 0, en effet $f(x, y) = y - h(x) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$. $\underline{\nabla}f$ est donc orthogonale à la paroi.

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}f &= \frac{\partial f}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{e}_y \\ &= - \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{h'} \underline{e}_x + 1 \underline{e}_y \end{aligned}$$

est orienté vers le haut, donc du fluide vers la paroi. Donc le vecteur unitaire normal à la paroi orienté vers le fluide est défini par :

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \frac{-\underline{\nabla}f}{\|\underline{\nabla}f\|} \\ &= \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_x - \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \underline{e}_y \end{aligned}$$

13. Adimensionnez \underline{n} pour montrer qu'en ne conservant que les termes prépondérants,

$$\underline{n} = \varepsilon \overline{h}' \underline{e}_x - \underline{e}_y.$$

Solution:

$$h' = \frac{dh}{dx} = \underbrace{\frac{H}{L}}_{\varepsilon} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

donc $\sqrt{1 + h'^2} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}^2} = 1 + O(\varepsilon^2)$. Donc en ne conservant que les termes prépondérants :

$$\underline{n} = \varepsilon \underbrace{\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}}_{\overline{h}'} \underline{e}_x - \underline{e}_y$$

On rappelle que la contrainte \underline{T} exercée par le fluide sur la surface solide a pour expression :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \Big|_{\text{paroi}} \cdot \underline{n}$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{D}} = (\underline{\nabla}\underline{u} + \underline{\nabla}\underline{u}^T)$. Adimensionnez $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}$, puis $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ en ne considérant que la partie dépendant de l'écoulement de $p - P_a = \delta p \bar{p}$, et procédez aux simplifications automatiques. En déduire l'expression de \underline{T} en ne tenant compte que des termes prépondérants.

Solution:

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p\underline{n} + 2\mu\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_y \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_x + 2\frac{\partial v}{\partial y} n_y \end{pmatrix}$$

En exprimant \underline{T} en fonction des grandeurs adimensionnées, on montre que :

$$\begin{aligned} p &= \delta P \bar{p} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{U}{H} \varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{U}{H} \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{U}{H} \varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U}{H} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ à l'ordre le plus bas en } \varepsilon$$

et :

$$\underline{D} \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} \frac{U}{H} \left(2\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{h}' - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{H} \left(\varepsilon \left(\bar{h}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right) \text{ à l'ordre le plus bas en } \varepsilon$$

Depuis la question 7, $\frac{\delta P}{\rho U^2} = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}}$ Donc :

$$\underline{T} = -\frac{\rho U^2}{\varepsilon \text{Re}} \bar{p} \begin{pmatrix} \varepsilon \bar{h}' \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \frac{U}{H} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ \varepsilon \left(\bar{h}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \end{pmatrix}$$

Or :

$$\frac{\rho U^2}{\varepsilon \text{Re}} = \mu \frac{U}{H} \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc

$$\underline{T} = \mu \frac{U}{H} \begin{pmatrix} -\bar{h}' \bar{p} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ -\frac{1}{\varepsilon} \bar{p} + \varepsilon \left(\bar{h}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \end{pmatrix} = \mu \frac{U}{H} \begin{pmatrix} -\bar{h}' \bar{p} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ -\frac{1}{\varepsilon} \bar{p} \end{pmatrix} \text{ à l'ordre le plus bas en } \varepsilon$$

Montrez que la contrainte verticale est bien plus grande que la contrainte horizontale. C'est cet effet qui est exploité sur les paliers de machines tournantes ou les patins hydrauliques, et qui explique qu'on peut glisser sur un trottoir mouillé ou qu'une feuille de papier puisse glisser sur une table : les forces de portance exercées par le fluide lubrifiant cisailé entre une surface fixe et une surface mobile non parfaitement parallèles peuvent être très grandes, bien plus que les forces de frottement.

Solution: On constate que $|T_y| \sim \mu \frac{U}{H} \frac{1}{\varepsilon}$ et $|T_x| \sim \mu \frac{U}{H}$ donc $|T_y| \gg |T_x|$.

2 Coulage d'un mur de béton

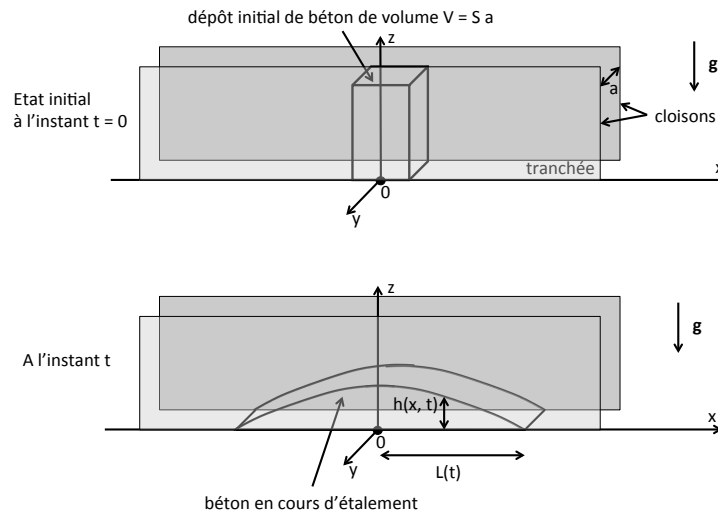


FIGURE 9 –

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur a , comme schématisé sur la figure 9. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume V au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de "prendre" (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement μ . L'accélération de la gravité est notée \underline{g} . On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon (Oy) et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan (Oxz) . En conséquence, la forme du volume de béton est entièrement donnée par sa hauteur h (hauteur de sa surface libre) fonction de l'abscisse x et du temps t . Enfin, on suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon (Oy) . Son champ de vitesse \underline{u} , inscrit dans le plan (Oxz) , ainsi que son champ de pression P sont donc fonctions de x , z et t seulement.

a) Modélisation de l'écoulement

Mise en équations

Equations-bilan

1. L'écoulement du béton est-il stationnaire ?

Solution: La surface libre du béton étant mobile, l'écoulement est par nature instationnaire.

On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que non seulement il puisse être considéré comme isovolume mais aussi que l'accélération du béton puisse être négligée dans l'analyse de son écoulement (hypothèse d'évolution quasistationnaire). Les équations de bilan de matière et de quantité de mouvement s'expriment donc sous la forme simplifiée :

$$0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \quad (15)$$

$$\underline{0} = -\underline{\nabla} P + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underline{g} \quad (16)$$

Dans le repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_z)$ associé aux coordonnées cartésiennes (x, z) , on note $\underline{u} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_z$ et $\underline{g} = -g \underline{e}_z$.

2. Ecrivez les trois équations scalaires liant u , v et P résultant de l'expression de (15) et (16) en coordonnées cartésiennes.

Solution:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{aligned}$$

Conditions aux limites

3. **Conditions au fond de la tranchée** - Traduisez l'imperméabilité du fond de la tranchée et l'adhérence du béton sur le fond.

Solution:

$$\begin{aligned} \text{adhérence : } u(x, 0, t) &= 0 \text{ pour } -L(t) \leq x \leq L(t), \forall t \\ \text{imperméabilité : } v(x, 0, t) &= 0 \text{ pour } -L(t) \leq x \leq L(t), \forall t \end{aligned}$$

4. **Condition cinématique à la surface** - La surface libre du béton peut être décrite comme la surface isovaleur zéro de la fonction $f(x, z, t) = z - h(x, t)$. Exprimez le vecteur unitaire normal à la surface libre du béton orienté vers le haut \underline{n} en fonction de h et ses dérivées partielles.

Solution: ∇f est normal aux surfaces isovaleur de f donc à la surface libre.

$\underline{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ donc :

$$\underline{n} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \underline{e}_z$$

5. Le caractère constant de f le long de la surface libre se traduit par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u}|_{s.l.} \cdot \nabla f = 0$$

où $|_{s.l.}$ indique que la grandeur est évaluée à l'endroit de la surface libre. Montrez que :

$$v|_{s.l.} = \frac{\partial h}{\partial t} + u|_{s.l.} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (17)$$

Solution: Compte tenu de $f(x, z, t) = z - h(x, t)$,

$$\frac{df}{dt} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial t} + u|_{s.l.} \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right) + v|_{s.l.} \times 1 \text{ cqfd}$$

6. **Condition dynamique à la surface** - La viscosité et l'inertie de l'air sont tellement faibles devant celles du béton que tout se passe pour l'écoulement comme si l'air au-dessus du béton liquide restait immobile à la pression atmosphérique P_0 . Sous cette hypothèse, la continuité de la contrainte à la surface libre du béton $\underline{T}|_{s.l.}$ s'écrit :

$$\underline{T}|_{s.l.} = \underline{\underline{\sigma}}|_{s.l.} \cdot \underline{n} = -P_0 \underline{n} \quad (18)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes qui a pour expression intrinsèque $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{u} + \underline{\nabla}\underline{u}^T)$, $\underline{\underline{1}}$ étant le tenseur identité. Montrez que :

$$\left(-P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{s.l.} n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{s.l.} n_z = -P_0 n_x \quad (19)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{s.l.} n_x + \left(-P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{s.l.} n_z = -P_0 n_z \quad (20)$$

Solution: En coordonnées cartésiennes, $\underline{\underline{D}}$ a pour expression :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

d'où (19) et (20).

Formulation intégrale de la conservation de la matière

7. En intégrant par rapport à z de l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, montrez que :

$$v(x, h(x, t), t) = - \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz \quad (21)$$

Solution: $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ s'intègre par rapport à z en

$$\int_0^{h(x, t)} \frac{\partial v}{\partial z} dz = v(x, h(x, t), t) - \underbrace{v(x, 0, t)}_0 = - \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz$$

8. Montrez que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \right) = \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz + u(x, h(x, t), t) \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \quad (22)$$

Pour cela, vous pourrez éventuellement utiliser la fonction $H(x, z) = \int_0^z u(x, z') dz'$ et évaluer $\frac{dH(x, z(x))}{dx}$, puis rajouter la variable t et remplacer $z(x)$ par $h(x, t)$.

Solution:

Si z est indépendant de x :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^z u(x, z') dz' \right) = \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x}(x, z') dz'$$

Si z dépend de x :

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, z(x))}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{dz}{dx}(x) \frac{\partial H}{\partial z}(x, z(x)) \\ &= \int_0^{z(x)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z') dz' + \frac{dz}{dx} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^z u(x, z') dz' \right)}_{u(x, z(x))} \end{aligned}$$

Donc en rajoutant la variable t et en remplaçant $z(x)$ par $h(x, t)$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \right) = \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z', t) dz' + \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) u(x, h(x, t), t)$$

9. Déduisez de (17), (21) et (22) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \right) \quad (23)$$

Solution: (17) se réécrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v|_{\text{s.l.}} - u|_{\text{s.l.}} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Or (22) se réécrit :

$$u|_{\text{s.l.}} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,t)} u(x, z, t) dz \right) - \underbrace{\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz}_{-v|_{\text{s.l.}} \text{ compte tenu de (7)}}$$

d'où (23).

b) Adimensionnement

Le béton occupe initialement un volume V approximativement parallélépipédique de largeur a , de longueur $2L_0$ et de hauteur h_0 , voir la figure 9, avec $h_0 \ll L_0$.

Dans la suite, vous effectuerez les adimensionnements suivants : $x = L_0 \bar{x}$, $z = h_0 \bar{z}$, $u = U \bar{u}$ (U échelle de vitesse inconnue à ce stade), $v = V \bar{v}$ (V échelle de vitesse inconnue à ce stade) $p = P_0 + \delta P \bar{p}$ (P_0 est la pression de l'air, supposée constante, δP est l'échelle de pression inconnue à ce stade), où $\bar{\alpha}$ est la notation de la partie analytique de la variable α , α pouvant être x, z, t, u, v, P . Vous n'adimensionnez pas t à ce stade.

- Adimensionnez l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, puis appliquez-lui le Principe de Non Simplification Abusive pour proposer une relation entre U et V faisant intervenir le paramètre $\varepsilon = h_0/L_0$.

Solution:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{VL_0}{Uh_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$

A ce stade de l'analyse, on n'a aucune raison de négliger a priori l'un des termes de cette équation, donc on a $\frac{VL_0}{Uh_0} \sim 1$. On pose donc $V = \frac{h_0}{L_0} U = \varepsilon U$.

- Adimensionnez les deux équations scalaires de bilan de quantité de mouvement écrites à la question 2 en effectuant les simplifications automatiques, en utilisant la relation entre U et V établie à la question 10 et en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes : $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$, $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$ et ε .

Solution: Compte tenu de $\varepsilon \ll 1$,

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \left(\underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

$$0 = -\frac{\delta P}{\rho g h_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\delta P}{\rho g h_0} \frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \varepsilon^2 \left(\underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) - 1$$

12. Adimensionnez les conditions au fond de la tranchée.

Solution: En définissant $\bar{L}(t) = L(t)/L_0$,

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0, t) &= 0 \text{ pour } -\bar{L}(t) \leq \bar{x} \leq \bar{L}(t), \forall t \\ \bar{v}(\bar{x}, 0, t) &= 0 \text{ pour } -\bar{L}(t) \leq \bar{x} \leq \bar{L}(t), \forall t \end{aligned}$$

13. Adimensionnez (23). Déduisez-en une échelle T pour t et adimensionnez t .

Solution: $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\frac{U}{L_0} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{z} \right)$ donc en posant $t = T\bar{t}$ avec $T = \frac{L_0}{U}$,

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{z} \right)$$

c) Analyse physique

14. Appliquez le Principe de Non Simplification Abusive à l'équation de bilan de quantité de mouvement correspondant à la direction principale de l'écoulement pour proposer une valeur pour $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$.

Solution: La direction principale de l'écoulement est la direction (Ox) . L'équation de bilan de quantité de mouvement selon (Ox) ne présente que 2 termes. A ce stade de l'analyse, on n'a aucune raison de négliger a priori l'un des termes de cette égalité et on suppose donc qu'ils s'équilibrent l'un l'autre, c'est-à-dire $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \sim 1$. On pose donc $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} = 1$.

15. Considérez maintenant l'autre direction de l'écoulement.

(a) Quel sont les termes moteurs, de frein, les conséquences de l'écoulement ?

- (b) En déduire une relation valable en ordre de grandeur entre $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$, $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$ et ε .
(c) En déduire les lois d'échelles suivantes :

$$\begin{aligned}\delta P &= \rho g h_0 \\ U &= \frac{\rho g h_0^3}{\mu L_0}\end{aligned}$$

Solution:

- (a) Considérons maintenant la direction (Oz) . La gravité est le moteur de l'écoulement, la viscosité en est le frein, le gradient de pression est une conséquence de l'écoulement.
(b) Dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, le terme moteur doit être équilibré par le frein ou la conséquence :

$$1 \sim \text{Sup} \left(\frac{\delta P}{\rho g h_0}, \frac{\delta P}{\rho g h_0} \frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \varepsilon^2 \right)$$

- (c) Or $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \sim 1$ donc $\frac{\delta P}{\rho g h_0} \frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \varepsilon^2 \sim \frac{\delta P}{\rho g h_0} \varepsilon^2 \ll \frac{\delta P}{\rho g h_0}$ donc nécessairement $\frac{\delta P}{\rho g h_0} \sim 1$. On pose donc $\frac{\delta P}{\rho g h_0} = 1$. Comme $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} = 1$, on a finalement $\delta P = \rho g h_0$ et $U = \frac{\rho g h_0^3}{\mu L_0}$.

16. Montrez qu'en ne retenant que les termes dominants, l'adimensionnement des relations 19 et 20 en tenant compte des lois d'échelles données en question 15c conduit à :

$$\bar{p}|_{\text{s.l.}} = 0 \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right|_{\text{s.l.}} = 0 \quad (25)$$

Solution: $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{V}{L_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}$. Or $\frac{V}{L_0} = \varepsilon^2 \frac{U}{h_0} \ll \frac{U}{h_0}$ donc en ne conservant que les termes dominants $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$. De même, $\underline{n} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \underline{e}_x + \underline{e}_z$. Les relations 19 et 20 se réécrivent donc :

$$\begin{aligned}\left(-\delta P \bar{p} + 2\mu \frac{U}{L_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \Big|_{\text{s.l.}} \left(-\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) + \mu \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\text{s.l.}} &= 0 \\ \mu \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\text{s.l.}} \left(-\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) + \left(-\delta P \bar{p} + 2\mu \frac{V}{h_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{\text{s.l.}} &= 0\end{aligned}$$

$\mu \frac{U}{L_0} = \varepsilon^2 \delta P$ et $\mu \frac{U}{h_0} = \varepsilon \delta P$ donc la première relation se réécrit :

$$\bar{p}|_{\text{s.l.}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\text{s.l.}} = 0$$

$\mu \frac{V}{h_0} = \varepsilon \frac{\mu U}{h_0} = \varepsilon^2 \delta P$ donc la deuxième relation se réécrit :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\text{s.l.}} + \bar{p}|_{\text{s.l.}} = 0$$

On en déduit qu'à l'ordre dominant, $\bar{p}|_{\text{s.l.}} = 0$, donc que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\text{s.l.}} = 0$.

17. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants les équations de bilan s'écrivent finalement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1 \quad (28)$$

Solution: $V = \varepsilon U$ donc $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$.

$\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} = 1$ donc $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}$.

$\varepsilon \ll 1$ et $\frac{\delta P}{\rho g h_0} = 1$ donc à l'ordre dominant : $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1$.

18. Déterminez \bar{p} .

Solution: On intègre (28) en tenant compte de (24) : $\bar{p}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{h}(\bar{x}) - \bar{z}$.

19. En intégrant (27), montrez que :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{2} - \bar{h} \right)$$

Solution: $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ donc en intégrant par rapport à \bar{z} , $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} + f(\bar{x})$. Or d'après (25) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x}, t)) = 0 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{h} + f(\bar{x})$$

donc $f(\bar{x}) = -\bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} (\bar{z} - \bar{h})$. En intégrant encore une fois par rapport à \bar{z} , $\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} - \bar{h} \bar{z} \right) + g(\bar{x})$. Or $\bar{u}(\bar{x}, 0, t) = 0$ donc $g(\bar{x}) = 0$ donc $\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{2} - \bar{h} \right)$.

20. En injectant cette expression de \bar{u} dans l'expression adimensionnée de $\frac{\partial h}{\partial t}$ trouvée en question 13, déterminez l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit \bar{h} .

Solution:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{h}^4}{\partial \bar{x}^2}$$

V Problèmes singuliers

1 Contrôle de couche limite

Nous avons mis en évidence qu'au sein d'un écoulement à grand nombre de Reynolds (noté Re) autour d'une plaque une couche limite visqueuse laminaire s'établit le long de la plaque. Or cette couche limite laminaire se déstabilise et devient turbulente au-delà de $Re \simeq 5 \times 10^5$, ce qui affecte fortement l'écoulement et augmente notablement la force de traînée subie par la plaque. Dans le contexte de l'aéronautique, il est crucial de repousser à des valeurs plus élevées de Re cette transition laminaire-turbulent. Le but de ce problème est d'étudier une technique de stabilisation de la couche limite visqueuse par aspiration. Dans un premier temps, vous allez ré-établir les propriétés de la couche limite visqueuse se développant le long d'une plaque plane à grand nombre de Reynolds. Dans un second temps, vous étudierez l'effet sur l'écoulement d'une aspiration du fluide à travers la plaque.

a) Écoulement à $Re \gg 1$ le long d'une plaque plane

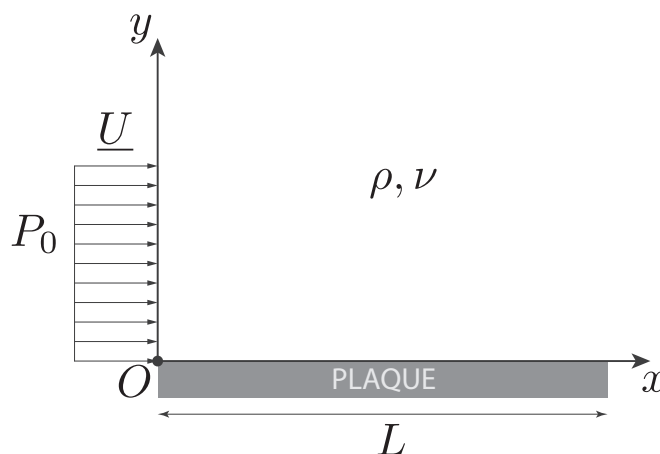


FIGURE 10 – Géométrie de l'écoulement autour d'une plaque plane.

On considère une plaque plane rectangulaire d'épaisseur négligeable qui se déplace à vitesse constante U avec un angle d'incidence nul dans un fluide homogène au repos de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν . Dans le référentiel de la plaque, l'écoulement incident sur la plaque est donc stationnaire, parallèle et homogène de vitesse U et de pression P_0 , voir la figure 10.

On suppose l'écoulement isovolume, bidimensionnel plan et stationnaire. En utilisant les coordonnées cartésiennes associées au repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$, le champ de vitesse

du fluide s'écrit $\underline{u} = u(x, y) \underline{e}_x + v(x, y) \underline{e}_y$ et le champ de pression $p(x, y)$. L'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (30a)$$

$$\quad (30b)$$

Le domaine d'étude est défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq L \end{cases} \quad (31a)$$

$$\quad (31b)$$

1. La plaque est imperméable et le fluide au contact de la plaque adhère à la plaque par viscosité. Ecrivez les conditions imposées à u et v le long de la plaque.

Solution:

$$\begin{aligned} u(x, y = 0) &= 0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \\ v(x, y = 0) &= 0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

2. Donnez les expressions de u , v et de p à la verticale du bord d'attaque de la plaque, c'est-à-dire le long du segment défini par $\{x = 0, 0 < y \leq L\}$.

Solution:

$$\begin{aligned} u(x = 0, y) &= U \quad \forall y / 0 < y \leq L \\ v(x = 0, y) &= 0 \quad \forall y / 0 < y \leq L \\ p(x = 0, y) &= P_0 \quad \forall y / 0 < y \leq L \end{aligned}$$

On considère la situation correspondant à $Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1$, où L est la corde de la plaque, voir la figure 10. Dans ce régime, l'observation indique qu'à une distance de l'ordre de L l'écoulement n'est pas perturbé par la plaque, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} u(x, y = L) = U \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (32a)$$

$$\begin{cases} p(x, y = L) = P_0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (32b)$$

Adimensionnement du problème à l'échelle de la plaque – Pour adimensionner les équations (29) et (30), vous noterez

- \bar{z} la partie analytique de z , z pouvant être x , y , u , v ou p ,
 - V l'échelle de v et δp l'échelle de p .
3. Définissez les adimensionnements de x , y , u , v et p .

Solution:

$$\begin{aligned}x &= L \bar{x}, \bar{x} \sim 1 \\y &= L \bar{y}, \bar{y} \sim 1 \\u &= U \bar{u}, \bar{u} \sim 1 \\v &= V \bar{v}, \bar{v} \sim 1 \\p &= P_0 + \delta p \bar{p}, \bar{p} \sim 1\end{aligned}$$

4. Adimensionnez l'équation (29) et justifiez brièvement pourquoi $V \sim U$. Dans la suite, vous poserez $V = U$.

Solution:

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

Principe de Non Simplification Abusive : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, il convient de ne pas trop simplifier sa description donc de supposer qu'aucun terme dans l'équation ne domine a priori : $U \sim V$.

5. Adimensionnez les équations (30a) et (30b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta p}{\rho U^2}$ et Re .

Solution:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)\end{aligned}$$

6. Adimensionnez les conditions imposées à u , v et p aux limites du domaine d'étude.

Solution: A la verticale du bord d'attaque :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 1 \\ \bar{v}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 0 \\ \bar{p}(\bar{x} = 0, 0 < \bar{y} \leq 1) &= 0\end{aligned}$$

Au contact de la plaque :

$$\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$$

$$\bar{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$$

Loin au-dessus de la plaque :

$$\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 1$$

$$\bar{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 0$$

$$\bar{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 1) = 0$$

Solution de type écoulement parfait Comme $Re \gg 1$, on peut supposer les effets de la viscosité négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque.

7. Sous ces hypothèses, quelle condition à la limite disparaît ? Ré-écrivez les équations scalaires modifiées sous ces hypothèses sous leur forme adimensionnée. Quel est le nom de l'équation vectorielle correspondante ?

Solution: La condition d'adhérence $\bar{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \bar{y} = 0) = 0$ disparaît. Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme dépendant de la viscosité disparaît :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

L'équation correspondante est l'équation d'Euler.

8. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$. Dans la suite, vous poserez $\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1$.

Solution: La direction principale de l'écoulement est (Ox) . Analyse physique :

- le moteur de l'écoulement est l'inertie de l'écoulement incident, représentée dans la projection selon (Ox) par le terme $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ qui est d'ordre de grandeur l'unité ,
- le frein de l'écoulement est l'adhérence du fluide à la paroi immobile et le frottement visqueux, représenté par le terme $Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$ qui est d'ordre de grandeur $Re^{-1} \ll 1$,

- les forces de pression, représentées par le terme $\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$, sont une conséquence de l'écoulement d'ordre de grandeur $\frac{\delta p}{\rho U^2}$.

Le frein étant d'amplitude très petite devant celle du moteur de l'écoulement, c'est la conséquence qui constitue le frein et qui compense donc le moteur :

$$\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$$

9. Vérifiez par le calcul que l'écoulement homogène non perturbé $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$ est une solution exacte de ce problème simplifié.

Solution: L'écoulement homogène annule tous les termes dans les edp décrivant l'écoulement. Par ailleurs, il vérifie les conditions aux limites d'imperméabilité de la plaque, à la verticale du bord d'attaque, loin au-dessus de la plaque. Donc c'est bien une solution exacte du problème simplifié.

10. Quel comportement non physique cette solution présente-elle ?

Solution: L'écoulement homogène solution glisse au contact de la plaque, ce qui est non physique (même si c'est permis par le modèle d'écoulement de fluide parfait).

Développements asymptotiques raccordés Pour déterminer une solution plus satisfaisante, vous allez employer la méthode des développements asymptotiques raccordés, c'est-à-dire :

- supposer qu'à $Re \gg 1$ les effets de la viscosité sont négligeables presque partout sauf au voisinage d'une singularité que vous allez supposer située sur la plaque,
- déterminer la solution du problème dans ce voisinage puis la raccorder à la solution du problème déterminée précédemment qui est *a priori* valable en-dehors de ce voisinage.

Le voisinage de la plaque dans lequel les effets de la viscosité sont supposées notables, appelé domaine singulier et noté D.S., est d'épaisseur notée $\delta \ll L$. Dans l'objectif de résoudre le problème dans le domaine singulier, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de ce domaine et en faire l'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique.

Le domaine singulier est donc défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (33a)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (33b)$$

Pour adimensionner les équations (29) et (30), vous noterez :

- \tilde{z} la partie analytique de z , z pouvant être y , u , v ou p (l'extension du domaine selon x étant inchangée, vous utiliserez l'adimensionnement précédemment utilisé pour x qui implique \bar{x}),
 - U_1 l'échelle de u , V_1 l'échelle de v et δp_1 l'échelle de p .
11. Définissez les adimensionnements de x , y , u , v et p adaptés à l'étude dans le domaine singulier.

Solution:

$$\begin{aligned}x &= L \bar{x}, \quad \bar{x} \sim 1 \\y &= \delta \tilde{y}, \quad \tilde{y} \sim 1 \\u &= U_1 \tilde{u}, \quad \tilde{u} \sim 1 \\v &= V_1 \tilde{v}, \quad \tilde{v} \sim 1 \\p &= P_0 + \delta p_1 \tilde{p}, \quad \tilde{p} \sim 1\end{aligned}$$

Compte tenu de la simplicité de la solution approchée visée ici, le raccordement de la solution à la frontière entre le domaine singulier et l'extérieur du domaine singulier, appelé domaine extérieur et noté D.E., s'écrit :

$$\lim_{y \gg \delta} (\text{solution dans le D.S.}) = \lim_{y \rightarrow 0} (\text{solution dans le D.E.})$$

12. Montrez que :

- $U_1 = U$ et $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$,
- $\delta p_1 = \delta p$ et $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 0$.

Solution:

- $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} U_1 \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} U \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = U$; on égale d'une part les échelles, soit $U_1 = U$, d'autre part les limites des parties analytiques, soit :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(\bar{x}, \tilde{y}) = 1$$

- $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} P_0 + \delta p_1 \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} P_0 + \delta p \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = P_0$, donc $\delta p_1 = \delta p$ et

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(\bar{x}, \tilde{y}) = 0$$

13. On note $\varepsilon = \frac{\delta}{L} \ll 1$. Adimensionnez l'équation (29) et justifiez brièvement pourquoi

$$V_1 \sim \varepsilon U$$

Dans la suite, vous poserez $V_1 = \varepsilon U$.

Solution:

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_1}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

PNSA : en absence d'information supplémentaire sur l'écoulement, on suppose les deux termes de l'équation d'amplitudes comparables, donc $V_1 \sim \frac{\delta}{L} U$.

14. Adimensionnez les équations (30a) et (30b) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta p}{\rho U^2}$, ε et Re et procédez aux simplifications automatiques.

Solution:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \cancel{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{x}^2}} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= -\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \cancel{\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \bar{x}^2}} \right) \end{aligned}$$

15. Adimensionnez les conditions imposées à la solution au contact de la plaque.

Solution:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) &= 0 \\ \tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y} = 0) &= 0 \end{aligned}$$

16. Dans le domaine singulier, on considère précisément que les effets de la viscosité sont notables. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, montrez que :

$$\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1$$

Dans la suite, vous poserez $\boxed{\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} = 1}$. Déduisez-en l'expression de δ en fonction de L et de Re .

Solution: Par définition du D.S., dans celui-ci le frein visqueux est comparable au moteur inertiel : $\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1$, soit $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \ll L$.

17. En considérant maintenant la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement principal, montrez qu'en première approximation \tilde{p} ne dépend pas de \tilde{y} . En déduire $\tilde{p} = 0$.

Solution: $\frac{\delta p}{\rho U^2} \sim 1$ donc $\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \gg 1$ et $\text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2} \sim 1$ donc $\frac{\delta p}{\rho U^2} \gg \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2}$.
Donc ne conserver que les termes dominants conduit à écrire :

$$0 = -\varepsilon^{-2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \text{ soit } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 : \tilde{p} \text{ ne dépend pas de } \tilde{y}$$

Or $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 0$ donc $\tilde{p} = 0$.

18. Réécrivez le système d'équations et les conditions aux limites auxquelles obéissent \tilde{u} et \tilde{v} dans le D.S (problème de couche limite le long d'une plaque plane). Ce problème est-il bien posé ?

Solution:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Avec $\frac{\delta p}{\rho U^2} = 1 = \text{Re}^{-1} \varepsilon^{-2}$:

$$\bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0, \tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0, \lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1.$$

— \tilde{u} obéit à une edp d'ordre 2 et doit vérifier deux CL : $\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$
et $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$

— \tilde{v} obéit à une edp d'ordre 1 : $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}}$ et doit vérifier une seule CL :
 $\tilde{v}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$

donc le problème est bien posé.

Trainée visqueuse On rappelle que la contrainte pariétale \underline{T}_p exercée par le fluide sur la plaque a pour expression :

$$\underline{T}_p = \underline{\underline{\sigma}} \Big|_{\text{plaque}} \cdot \underline{n}$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{1}$ est le tenseur identité, \underline{n} est le vecteur normal à la plaque orienté vers le fluide et

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\{\underline{e}_x, \underline{e}_y\}}$$

19. Montrez que la composante horizontale de la contrainte pariétale $T_{p,x}$ a pour expression :

$$T_{p,x}(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) \right)$$

Solution: $\underline{n} = \underline{e}_y$ donc $\underline{T}_p = -p(x, 0) \underline{e}_y + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) \right) \underline{e}_x + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) \underline{e}_y}_{T_{p,x}}$

20. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants, $T_{p,x}$ a pour expression approchée :

$$T_{p,x}(x) = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0)$$

Solution: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon^2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}$ donc $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x}$. D'autre part, $\mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \frac{\nu}{UL} \frac{L}{\delta} = \rho U^2 \text{Re}^{-1/2}$.

21. La solution invariante d'échelle du problème de couche limite le long d'une plaque plane (solution de Blasius) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0) = \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}}$$

où C est une constante d'ordre unité. Montrez que la trainée par unité de largeur exercée par l'écoulement sur la plaque sur ses deux faces :

$$f_T = 2 \int_0^L T_{p,x}(x) dx$$

a pour expression :

$$f_T = 4C\rho U^2 L \text{Re}^{-1/2} = 4C\rho \nu^{1/2} U^{3/2} L^{1/2}$$

Solution:

$$T_{p,x} = \rho U^2 \text{Re}^{-1/2} \frac{C}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{C \rho U^2}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc :

$$f_T = \frac{2C \rho U^2}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}} \underbrace{\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{L}} = 4C \rho U^2 L \text{Re}^{-1/2} = 4C\rho \nu^{1/2} U^{3/2} L^{1/2}$$

b) Effet d'une aspiration du fluide

Préambule On considère maintenant que la plaque est percée d'une multitude de trous reliés à un dispositif d'aspiration, comme schématisé sur la figure 11. Leur densité surfacique est telle que tout se passe comme si le fluide pénétrait dans la plaque avec une vitesse verticale \underline{v}_0 homogène le long de la plaque, petite en comparaison de U :

$$v(x, 0) = -v_0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \quad \text{avec } v_0 > 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\eta = \frac{v_0}{U} \ll 1} \quad (34)$$

sans que le fluide glisse le long de la plaque :

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x / 0 \leq x \leq L \quad (35)$$

Les conditions expérimentales étudiées dans la partie 1 sont inchangées. Par conséquent,

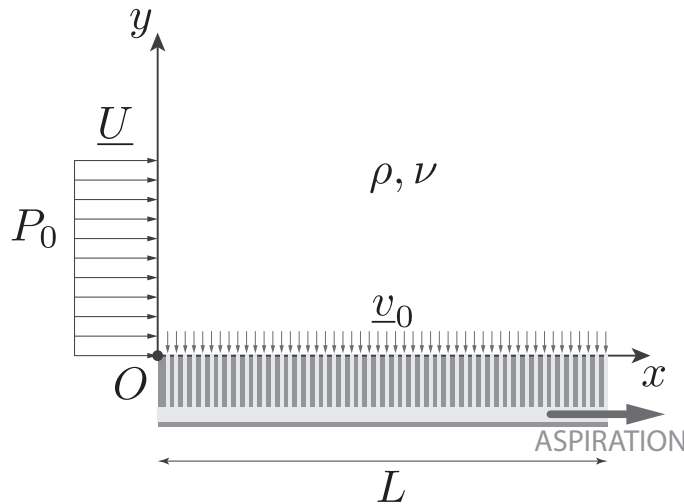


FIGURE 11 – Schéma de la plaque percée d'une multitude de trous aspirant le fluide en écoulement.

tous les résultats établis jusqu'à la question 6 incluse s'appliquent à cette situation, exceptée l'adimensionnement de la condition 34.

22. Adimensionnez la condition (34) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle de la plaque faits au paragraphe a).

Solution: $\bar{v}(\bar{x}, 0) = \frac{v}{V}$ avec $V = U$ donc $\bar{v}(\bar{x}, 0) = -\eta$.

Comme $Re \gg 1$ et $\eta \ll 1$, pour approcher la solution de ce problème, on peut dans un premier temps supposer les effets de la viscosité et de l'écoulement d'aspiration pariétale négligeables partout. Cela revient à supposer un écoulement parfait ($Re^{-1} = 0$) et non aspiré ($\eta = 0$) et à permettre le glissement du fluide le long de la plaque. L'écoulement homogène non perturbé $\{\underline{u} = \underline{U}, p = P_0\}$ est une solution exacte de ce problème simplifié.

23. Quels comportements non physique cette solution présente-elle ?

Solution: L'écoulement homogène solution glisse à la paroi et n'est pas aspiré.

Pour déterminer une solution plus satisfaisante, l'approche du paragraphe a) peut être mise en oeuvre : après avoir scindé le domaine d'étude en domaine singulier près de la plaque et domaine extérieur, on applique la méthode des développements asymptotiques raccordés. Avec les mêmes notations et les mêmes choix de relations entre échelles, l'écoulement dans le domaine singulier où les effets de la viscosité sont notables vérifie :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (36)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (37)$$

avec comme conditions aux limites :

- l'adhérence du fluide à la plaque : $\tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0) = 0$
- la condition (34) adimensionnée de manière adéquate (voir question suivante).
- le raccordement à la frontière entre D.S. et D.E. : $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0 \leq \bar{x} \leq 1, \tilde{y}) = 1$

24. Montrez que l'adimensionnement de la condition (34) en utilisant les choix d'adimensionnement adaptés à l'étude à l'échelle du D.S. faits au paragraphe a) s'écrit :

$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = -\eta \operatorname{Re}^{1/2}$$

Solution:

$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = \frac{v(x, 0)}{V_1} = -\frac{v_0}{V_1} \text{ avec } V_1 = \varepsilon U$$

donc

$$\tilde{v}(\bar{x}, 0) = -\frac{\eta}{\varepsilon} = -\eta \operatorname{Re}^{1/2}$$

Dans la suite, on définit $\alpha = \eta \operatorname{Re}^{1/2} = \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Recherche d'une solution invariante d'échelle Mis en confiance par l'efficacité de la recherche de solution invariante d'échelle dans la situation de la partie 1 qui permet de mettre en évidence la solution de Blasius, on applique cette technique à ce problème.

25. En imposant un changement d'échelle à toutes les grandeurs impliquées dans ce problème de la forme $a = a^* a'$, où a , qui est la grandeur de départ, peut être \bar{x} , \tilde{y} , \tilde{u} , \tilde{v} , α , a' est la notation pour la grandeur dilatée par changement d'échelle, et a^* le facteur de changement d'échelle, montrez que le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à un seul paramètre libre.

Solution: Le groupe de changements d'échelles est à 5 facteurs d'échelle $x^*, y^*, u^*, v^*, \alpha^*$, qui sont liés par les relations issues de (36), (37), la condition d'adhérence adimensionnée et la condition (34) adimensionnée) :

$$\begin{aligned}\frac{u^*}{x^*} &= \frac{v^*}{y^*} \\ \frac{u^{*2}}{x^*} &= \frac{u^* v^*}{y^*} = \frac{u^*}{y^{*2}} \\ v^* &= \alpha^* \\ u^* &= 1\end{aligned}$$

qui sont équivalentes aux 4 relations suivantes :

$$\begin{aligned}u^* &= 1 \\ v^* &= \alpha^* \\ v^* &= \frac{y^*}{x^*} \\ v^* &= \frac{1}{y^*}\end{aligned}$$

Donc le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à $5 - 4 = 1$ paramètre libre.

26. Exprimez les facteurs de changement d'échelle laissant le problème invariant en fonction de α^* choisi comme le paramètre libre.

Solution:

$$\begin{aligned}u^* &= 1 \\ v^* &= \alpha^* \\ y^* &= (\alpha^*)^{-1} \\ x^* &= (\alpha^*)^{-2}\end{aligned}$$

27. La solution du problème invariant par changement d'échelles étant elle-même invariante par ce même groupe de changements d'échelle,

- listez les grandeurs dont dépend \tilde{u} sous la forme $\tilde{u} = f(\dots)$, f fonction inconnue,
- opérez les changements d'échelle sur toutes les grandeurs impliquées dans cette relation,
- exprimez tous les facteurs de changements d'échelle en fonction de α^* ,
- choisissez enfin une valeur particulière pour α^* ,

pour montrer finalement que :

$$\tilde{u} = f(\alpha^2 \bar{x}, \alpha \bar{y})$$

Solution: \tilde{u} s'exprime sous la forme :

$$\tilde{u} = f(\bar{x}, \tilde{y}, \alpha)$$

qui se transforme par changements d'échelles en :

$$u^* u = f(^*x, y^*y, \alpha^* \alpha)$$

soit :

$$u = f(\alpha^{*-2}x, \alpha^{*-1}y, \alpha^* \alpha)$$

On pose $\alpha^* = \alpha^{-1}$:

$$u = f(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = f(\alpha^2 x, \alpha y)$$

donc en revenant aux variables initiales :

$$\tilde{u} = f(\alpha^2 \bar{x}, \alpha \tilde{y})$$

28. Procédez de même pour \tilde{v} .

Solution: \tilde{v} s'exprime sous la forme :

$$\tilde{v} = g(\bar{x}, \tilde{y}, \alpha)$$

qui se transforme par changements d'échelles en :

$$v^* v = g(^*x, y^*y, \alpha^* \alpha)$$

soit :

$$\alpha^* v = g(\alpha^{*-2}x, \alpha^{*-1}y, \alpha^* \alpha)$$

On pose $\alpha^* = \alpha^{-1}$:

$$\frac{v}{\alpha} = g(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = f(\alpha^2 x, \alpha y) \text{ soit } v = \alpha g(\alpha^2 x, \alpha y, 1) = \alpha g(\alpha^2 x, \alpha y)$$

donc en revenant aux variables initiales :

$$\tilde{v} = \alpha g(\alpha^2 \bar{x}, \alpha \tilde{y})$$

Il se trouve qu'il existe une solution particulière exacte à ce problème qui est indépendante de \bar{x} . En posant $\xi = \alpha \tilde{y}$, on écrit cette solution sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u} = F(\xi) \\ \tilde{v} = -\alpha G(\xi) \end{cases} \quad \begin{matrix} (38a) \\ (38b) \end{matrix}$$

F et G étant deux fonctions à déterminer.

29. Réécrivez le problème (36, 37) et ses conditions aux limites comme un système d'équations différentielles couplées impliquant les fonctions inconnues F et G .

Solution:

$$\begin{cases} G' &= 0 \end{cases} \quad (39a)$$

$$\begin{cases} -G F' &= F'' \end{cases} \quad (39b)$$

$$\begin{cases} F(0) &= 0 \end{cases} \quad (39c)$$

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) &= 1 \end{cases} \quad (39d)$$

$$\begin{cases} G(0) &= 1 \end{cases} \quad (39e)$$

30. Résolvez ce système pour montrer que :

$$\begin{cases} F(\xi) = 1 - \exp(-\xi) \end{cases} \quad (40a)$$

$$\begin{cases} G(\xi) = 1 \end{cases} \quad (40b)$$

Solution: $G' = 0$ et $G(0) = 1$ impliquent $G = 1$. $F'' = -G F'$ implique $F' = F_0 \exp(-\xi)$ soit $F = -F_0 \exp(-\xi) + F_1$. $F(0) = 0$ implique $F_1 = F_0$. $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = 1$ implique $F_0 = 1$.

31. Cette solution n'a de sens que si elle rejoint la solution dans le domaine extérieur avant la sortie de la couche limite, c'est-à-dire pour $\tilde{y} \sim 1$. Montrez que ceci nécessite $\alpha \gtrsim 1$.

Solution: F rejoint 1 pour $\xi = \alpha \tilde{y} \gtrsim 1$, soit $\tilde{y} \gtrsim \alpha^{-1}$. Si $\alpha \ll 1$, F rejoint 1 pour $\tilde{y} \gg 1$, c'est-à-dire trop loin en sortie de couche limite. Donc nécessairement $\alpha \gtrsim 1$.

32. Exprimez la solution $\tilde{u} = F(\xi)$ en variables dimensionnées pour montrer que :

$$u = U \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{\ell}\right) \right]$$

où ℓ est une longueur caractéristique dont vous établirez l'expression. Quelle est l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse en présence d'aspiration ? Varie-t-elle avec x ?

Solution: $u = U \tilde{u} = U F(\xi)$ avec

$$\xi = \alpha \tilde{y} = \frac{\eta y}{\epsilon \delta} = \frac{v_0 y L}{U \underbrace{\delta^2}_{\frac{L^2}{\text{Re}}}} = \frac{v_0 y L \frac{UL}{\nu}}{U L^2} = \frac{v_0}{\nu} y$$

On pose donc :

$$\ell = \frac{\nu}{v_0}$$

33. Quelle est la principale différence avec la solution de Blasius pour la couche limite visqueuse en absence d'aspiration :

$$u = U f_B \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)$$

où $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ et f_B est une fonction telle que $f_B(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} f_B(\eta) = 1$?

Solution: La couche limite aspirée est d'épaisseur caractéristique δ qui est indépendante de x , tandis que l'épaisseur caractéristique de la couche limite de Blasius augmente avec x .

c) Trainée visqueuse

34. En utilisant l'expression de la composante horizontale de la contrainte pariétale $T_{p,x}$ donnée dans la question 20, montrez que :

$$T_{p,x} = \rho v_0 U$$

Solution: Avec $\tilde{u} = 1 - \exp(-\alpha \tilde{y})$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(0) = \alpha = \frac{\eta}{\epsilon} = \frac{v_0}{U} \text{Re}^{1/2}$ donc

$$T_{p,x} = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\bar{x}, 0) = \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{v_0}{U} \text{Re}^{1/2} = \rho U v_0$$

2 Ecoulement dans un conduit sanguin

Le sang circule dans le circuit sanguin sous l'effet des impulsions de pression de la pompe que constitue le coeur. On constate expérimentalement que l'écoulement du sang est la superposition d'un écoulement permanent et d'un écoulement instationnaire pulsé. On se propose d'étudier cet écoulement.

Le sang est considéré comme incompressible, homogène, de masse volumique ρ , de viscosité dynamique μ , de viscosité cinématique ν . Il est supposé s'écouler dans une conduite cylindrique rigide de section droite circulaire de rayon a , de longueur L très grande devant son rayon, qui représente une artère ou une veine. Le poids est négligé.

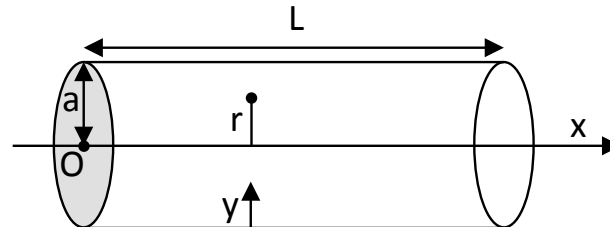


FIGURE 12 – Schéma du conduit sanguin.

On adopte les coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe (Ox) coïncidant avec l'axe de la conduite, voir la figure 12.

Equation - Dans tout le problème on considère que L/a est assez grand pour que l'écoulement, stationnaire ou instationnaire, soit parallèle et axisymétrique : le champ de vitesse s'écrit donc : $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_x$ où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) .

1. En vous aidant éventuellement du formulaire donné en fin d'énoncé, montrez que :
— u est indépendant de x ,

Solution: Conservation de la matière : $v = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

- la pression du sang p est indépendante de r .

Solution: Navier-Stokes selon r : $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$.

2. Montrez que le problème est gouverné par une seule équation (E) que vous donnerez.

Solution:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

3. Quelles est la condition à la limite imposée à la vitesse ?

Solution: $u(r = a, t) = 0 \quad \forall t$

4. Justifiez physiquement pourquoi la vitesse vérifie aussi $\frac{\partial u}{\partial r}(r = 0, t) = 0 \forall t$. Cette égalité peut être considérée comme une deuxième condition à la limite imposée à la vitesse.

Solution: Dans le cas contraire, la dérivée de la vitesse présenterait une discontinuité sur l'axe, ce qui y induirait une discontinuité de la contrainte visqueuse, ce qui est impossible physiquement.

Ecoulement stationnaire - On suppose ici l'écoulement stationnaire (ses champs sont indicés par l'indice 0) établi sous l'effet d'une différence de pression constante entre l'amont ($x = 0$) et l'aval ($x = L$) de la conduite telle que $[p_0(L) - p_0(0)]/L = -K$ où $p_0(0)$ et $p_0(L)$ sont fixés tels que K est une constante positive. C'est l'écoulement de Poiseuille.

5. Dans quel sens le sang s'écoule-t-il ?

Solution: Surpression en amont donc écoulement dans le sens des x croissants.

En utilisant les adimensionnements suivants : $r = a\bar{r}$, $x = L\bar{x}$, $u_0(r) = U_0\bar{u}_0(\bar{r})$ (U_0 échelle inconnue à ce stade) et $p_0 = p_0(0) - KL\bar{p}_0(\bar{x})$, où \bar{z} est la notation de la partie analytique de z , $z = r, x, u_0$,

6. adimensionnez l'équation (E) écrite pour un écoulement stationnaire et les conditions aux limites imposées à la vitesse et à la pression,

Solution: $\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{r}} \right) = -\frac{Ka^2}{\mu U_0} \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}}$, $\bar{u}_0(\bar{r} = 1) = 0$, $\frac{d\bar{u}_0}{d\bar{r}}(\bar{r} = 0) = 0$, $\bar{p}_0(\bar{x} = 0) = 0$, $\bar{p}_0(\bar{x} = 1) = 1$.

7. ensuite montrez que $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{x}$,

Solution: De (E), $\bar{p}_0 = \bar{p}_0(\bar{x})$ et $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(\bar{r})$ on tire $\frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}} = \text{constante}$, qui s'intègre en $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{x}$ compte tenu des conditions aux limites.

8. enfin déterminez $\bar{u}_0(\bar{r})$ et choisissez U_0 pour que $\bar{u}_0 = 1 - \bar{r}^2$. Exprimez la vitesse maximale.

Solution: $\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{r}} \right) = -\frac{Ka^2}{\mu U_0}$ s'intègre en $\bar{u}_0 = \frac{Ka^2}{4\mu U_0}(1 - \bar{r}^2)$ donc $U_0 = \frac{Ka^2}{4\mu}$ vitesse maximale.

Ecoulement complet - Du fait des contractions périodiques du coeur de période T , la pression présente aussi une composante instationnaire $p_1(x, t)$ périodique de période T :

$$p(x, t) = p_0(x) + p_1(x, t)$$

En conséquence, la vitesse de l'écoulement présente aussi une composante instationnaire $u_1(r, t)$ périodique de période T :

$$u(r, t) = u_0(r) + u_1(r, t)$$

(u, p) étant solution de (E).

9. Montrez que u_1 et p_1 vérifient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (41)$$

et écrivez les conditions aux limites vérifiées par u_1 .

Solution: (E) étant linéaire, (u, p) et (u_0, p_0) étant solutions de (E), $(u - u_0 = u_1, p - p_0 = p_1)$ est aussi solution de (E), qui est précisément l'équation donnée. u et u_0 vérifiant la condition d'adhérence et la condition de dérivée radiale nulle sur l'axe, $u - u_0 = u_1$ vérifie aussi la condition d'adhérence et la condition de dérivée radiale nulle sur l'axe : $u_1(a, t) = 0$ et $\frac{\partial u_1}{\partial r}(r = 0, t) = 0 \forall t$.

10. En utilisant les adimensionnements suivants : $r = a \bar{r}$, $x = L \bar{x}$, $t = T \bar{t}$, $u_1(r, t) = \delta U \bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t})$ (δU échelle inconnue à ce stade), $p_1(x, t) = \delta P \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t})$ (δP échelle fixée par la dynamique du coeur), où \bar{z} est la notation de la partie analytique de z , $z = r, x, t, u_1, p_1$, adimensionnez l'équation (41) en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\text{Re} = \frac{a^2 \delta P}{\mu L \delta U} : \text{nombre de Reynolds}$$

$$\text{St} = \frac{\rho L \delta U}{T \delta P} : \text{nombre de Strouhal}$$

Adimensionnez les condition aux limites vérifiées par \bar{u}_1 .

Solution:

$$\text{St} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}} \right)$$

$$\bar{u}_1(\bar{r} = 1, \bar{t}) = 0 \text{ et } \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}(\bar{r} = 0, \bar{t}) = 0 \forall \bar{t}.$$

11. Identifiez les termes représentant le moteur de l'écoulement périodique, son (ses) éventuel(s) frein(s), sa (ses) éventuelle(s) conséquence(s).

Solution:

- Le moteur de l'écoulement périodique est le gradient de pression périodique induit par les contractions du coeur : terme $-\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}}$, d'ordre 1.
- Le frein de l'écoulement est le frottement visqueux sur les parois immobiles de la conduite : terme $\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}} \right)$, d'ordre $\frac{1}{\text{Re}}$.

— L'inertie du fluide, c'est-à-dire le fait que le fluide s'oppose à toute accélération, est aussi un frein à l'écoulement, qui limite son accélération sous l'effet du gradient de pression : terme $St \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}$, d'ordre St .

12. Dans quelles conditions particulières portant sur Re et St les termes de l'équation sont-ils tous du même ordre de grandeur (problème complet) ? En déduire les expressions des valeurs particulières a^* de a et δU^* de δU correspondantes en fonction des données : $\mu, \nu, \rho, L, \delta P, T$. Evaluer numériquement a^* et δU^* . Les valeurs typiques des données pour le sang et la circulation sanguine sont : $\mu \simeq 6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho \simeq 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $T \simeq 1 \text{ s}$, $\delta P \simeq 1 \text{ kPa}$, $L \simeq 1 \text{ m}$.

Solution:

$$St \sim Re^{-1} \sim 1$$

$$a^* = \sqrt{\nu T}$$

$$\delta U^* = \frac{\delta P T}{\rho L}$$

$$a^* \simeq 2,5 \text{ mm}. \quad \delta U^* \simeq 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Écoulement de fluide parfait - On considère toujours la composante instationnaire de l'écoulement indicée par 1, qui obéit à l'équation (41), et on étudie toujours sa forme adimensionnée.

13. Quelles (in)égalités St et Re vérifient-ils dans l'hypothèse d'écoulement de fluide parfait (effets visqueux négligeables devant l'inertie) ? Montrez que cette situation se rencontre pour $a \gg a^*$. Cette hypothèse est-elle vérifiée pour la grosse artère aorte (de diamètre 2,5 cm), les plus petites artères (artérioles, de diamètre 2 mm) ?

Solution: Par définition de Re , la situation dans laquelle les effets visqueux sont négligeables devant l'inertie correspond à $Re \gg 1$. Le terme d'inertie doit donc obligatoirement compenser le terme moteur, donc $St \sim 1$, c'est-à-dire $\delta U = \delta U^*$. En injectant cette égalité dans $St \sim 1$, on trouve $a \gg \sqrt{\nu T} = a^*$. Cette hypothèse est donc valable pour l'aorte mais pas pour les artérioles.

14. Comment se simplifie l'équation (41) adimensionnée sous cette hypothèse d'écoulement de fluide parfait ? Le problème est-il bien posé ? S'attend-on à ce que la solution soit régulière ou singulière ?

Solution: Dans l'hypothèse $Re \gg 1$, on a nécessairement $St \sim 1$, donc l'équation se simplifie alors en :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}}$$

Cette équation est du premier ordre et sa solution doit vérifier deux conditions aux limites donc le problème est surdéterminé. On s'attend à ce que la solution

soit singulière à la paroi, en effet en absence d'effets visqueux elle n'a pas de raison de s'annuler à la paroi donc de vérifier la condition d'adhérence.

15. Montrez que $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} = f(\bar{t})$ où f est une fonction arbitraire. En déduire l'expression générale de \bar{p}_1 .

Solution: Le membre de gauche dépend de \bar{r} et de \bar{t} , celui de droite de \bar{x} et de \bar{t} , comme ils sont égaux ils ne peuvent dépendre que de leur(s) variable(s) commune(s), ici \bar{t} . $\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} = f(\bar{t})$ s'intègre en $\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x}f(\bar{t}) + g(\bar{t})$, g fonction arbitraire.

16. On donne $\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} \sin(2\pi\bar{t})$. Déterminez l'expression de $\bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t})$ compatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 0$. Quel est la nature de la composante de l'écoulement dépendant du temps ? Cette solution est-elle compatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 1$?

Solution: $\bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi\bar{t}) + h(\bar{r})$, h fonction arbitraire. $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}}(\bar{r} = 0, \bar{t}) = 0$ impose $h'(0) = 0$. La composante de l'écoulement dépendant du temps est une écoulement bouchon (pas de dépendance radiale). Aucune forme de h ne permet de vérifier la condition de non-glissement à la paroi à tout instant donc cette solution est incompatible avec la condition à la limite en $\bar{r} = 1$. Comme h est indépendante de t , dans la suite, on peut considérer $h = 0$ puisque la partie stationnaire de l'écoulement est décrite par u_0 .

Résolution de la singularité de l'écoulement de fluide parfait - Afin de déterminer une solution physiquement acceptable dans la limite $Re \gg 1$, vous allez mettre en oeuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le voisinage de la singularité de la solution que l'on pressent localisée à la paroi. On définit donc un domaine intérieur intégrant le lieu de la singularité, c'est-à-dire la paroi, d'extension radiale δ telle que $\delta \ll a$, dans lequel vous résoudrez le problème complet puis effectuerez le raccord avec la solution dans le domaine extérieur.

17. Le domaine intérieur est donc défini radialement par $r = a - y$ (voir la figure 12) où $y = \delta \tilde{y}$, $\tilde{y} \sim 1$, et axialement par $x = L\bar{x}$, $\bar{x} \sim 1$. En définissant $\varepsilon = \delta/a$ et en utilisant les adimensionnements suivants, valables dans le domaine intérieur : $u_1(r, t) = \delta U' \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})$, $p_1(x, t) = \delta P' \tilde{p}_1(\tilde{y}, \bar{t})$, où \tilde{z} est la notation de la partie analytique de z , $z = y, u_1, p_1$, adimensionnez l'équation (41) et montrez que :

$$St' \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 Re'} \frac{1}{1 - \varepsilon \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left((1 - \varepsilon \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (42)$$

où $Re' = \frac{a^2 \delta P'}{\mu L \delta U'}$ et $St' = \frac{\rho L \delta U'}{T \delta P'}$.

Solution: on peut partir de l'équation (41) ou de sa forme adimensionnée.

18. Montrez que $\varepsilon \ll 1$ et effectuez les simplifications permises par l'approximation de plan tangent.

Solution:

$$\text{St}' \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}'} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \bar{y}^2}$$

19. Ecrivez la condition à la limite vérifiée par \tilde{u}_1 .

Solution: adhérence à la paroi : $\tilde{u}_1(\tilde{y} = 0, \bar{t}) = 0 \forall \bar{t}$

20. Ecrivez les conditions de raccord imposées à \tilde{u}_1 et \tilde{p}_1 . En déduire les égalités vérifiées par les échelles et les parties analytiques des solutions. Montrez enfin que $\text{St}' = \text{St}$ et $\text{Re}' = \text{Re}$.

Solution: Le raccord des solutions intérieure et extérieure s'écrit :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} (\delta U' \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})) = \lim_{\bar{r} \rightarrow 1} (\delta U \bar{u}_1(\bar{r}, \bar{t}))$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} (\delta P' \tilde{p}_1(\bar{x}, \bar{t})) = \lim_{\bar{r} \rightarrow 1} (\delta P \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t}))$$

Or (i) \bar{p}_1 ne dépend pas de \bar{r} (conséquence de l'écoulement extérieur parallèle), (ii) \tilde{p}_1 ne dépend pas de \tilde{y} (conséquence de l'écoulement intérieur parallèle), (iii) \bar{u}_1 ne dépend pas de \bar{r} (cf. question 15), les conditions de raccord de ces solutions s'écrivent sous la forme simple suivante :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} (\delta U' \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t})) = \delta U \bar{u}_1(\bar{t})$$

$$\delta P' \tilde{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \delta P \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t})$$

Donc $\delta U = \delta U'$, $\delta P = \delta P'$, $\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}_1(\tilde{y}, \bar{t}) = \bar{u}_1(\bar{t})$ et $\tilde{p}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{p}_1(\bar{x}, \bar{t})$. D'où $\text{St}' = \text{St}$ et $\text{Re}' = \text{Re}$.

21. Montrez que la condition de non-dégénérescence du problème dans le domaine intérieur impose $\varepsilon \sim \text{Re}^{-1/2}$. En déduire la forme simplifiée de l'équation (42) dans le domaine intérieur.

Solution: Dans le domaine intérieur on souhaite prendre en compte les effets visqueux négligés dans le domaine extérieur, c'est-à-dire équilibrer le moteur de l'écoulement avec le frein visqueux, donc $1 \sim \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}'}$. Or $\text{Re}' = \text{Re}$ donc $\varepsilon \sim$

$\text{Re}^{-1/2}$. Comme $\text{St}' = \text{St} \sim 1$, en posant $\text{St} = 1$ on a :

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}^2}$$

\tilde{p}_1 étant connue, cette e.d.p. linéaire inhomogène s'identifie à une équation de diffusion de \tilde{u}_1 forcée qui est soluble analytiquement.

Formulaire : équations bilan en coordonnées cylindriques (r, θ, x) - Pour un champ de vitesse axisymétrique $\mathbf{v} = v(r, x, t) \mathbf{e}_r + u(r, x, t) \mathbf{e}_x$ et un champ de pression axisymétrique $p(r, x, t)$:

— Conservation de la matière au sein d'un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible (équation de Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \right]$$