

Sorbonne Université
Année Académique 2019-2020
Master 1 – Mécanique des Solides: Matériaux et des Structures

MU4MES03 – Structures élancées. Partie I

Notes de cours
(version préliminaire, August 28, 2020)

Contenu du cours (14h Cours - 14h TD)

Le cours est axé sur la compréhension et la modélisation du comportement des structures élancées mono-dimensionnelles. On traitera les liens entre modélisation 1D et le modèle de solide de Cauchy 3D, les formulations variationnelles et les problèmes liés aux non-linéarités géométriques (fils, stabilité, flambage, post-flambage, claquage).

Author: Corrado Maurini

Contents

1	Poutres élastiques : modèles linéaires 3D et 1D	3
1.1	Rappel de l'élasticité linéaire 2D/3D	5
1.2	Essentials of the the stretching and bending of rods	8
1.3	Modèle 1d de poutres droites dans le plan	11
1.4	Relations entre modèles 1D et 3D	13
1.5	Estimation de la loi de comportement 1D à partir du modèle 3D	14
1.6	Estimation des contraintes 3D à partir de la solution 1D	16
1.7	Approximation de Jourawsky pour le cisaillement	17
2	Approche variationnelle à l'équilibre	21
2.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	21
2.2	Exemple à 1 ddl	21
2.3	Systèmes continus	23
2.4	Approximations variationnelles et discretisation	28
3	Fils	29
3.1	A 2 dofs model problem	29
3.2	Parametric representation of a curve in a plane	30
3.3	Variational model for a cable	31
4	Poutres avec non-linéarités géométriques	35
4.1	Kinematics and deformation	35
4.2	Equilibrium : Variational formulation	38
4.3	Une hiérarchie de modèles pour des structures élancées	39
4.4	Elastica	41
4.5	Flambement	43
4.6	Stabilité	45
4.7	Post-flambement	47

Chapter 1

Poutres élastiques : modèles linéaires 3D et 1D

Contents

1.1	Rappel de l'élasticité linéaire 2D/3D	5
	Géométrie	5
	Déformations	5
	Équilibre	6
	Énergie de déformation et loi de comportement	6
	Commentaires	7
1.2	Essentials of the the stretching and bending of rods	8
	Traction	8
	Bending	9
1.3	Modèle 1d de poutres droites dans le plan	11
	Géométrie	11
	Cinématique	11
	Équilibre	12
	Énergie de déformation et loi de comportement	12
	Le modèle d'Euler-Bernoulli	13
	Commentaire	13
1.4	Relations entre modèles 1D et 3D	13
1.5	Estimation de la loi de comportement 1D à partir du modèle 3D	14
	Équivalence énergétique	14
	Cas sans déformations inélastiques	14
	Cas avec déformations inélastiques	15
1.6	Estimation des contraintes 3D à partir de la solution 1D	16
	Contrainte normale pour $B = 0$	16
	Cisaillement	16
	Commentaires	17
1.7	Approximation de Jourawsky pour le cisaillement	17
	Exemple: poutre console à section rectangulaire	19

Introduction

On considère dans ce cours des structures élancées, assimilables à des cylindres, dont la longueur axiale (L) est très grande par rapport au diamètre des sections droites (h). On considère deux grandes classes de modèles pour ce type de structures: le modèle de continu tridimensionnel (3D) et le modèle continu monodimensionnel (1D). Le modèle 3D retient une description tridimensionnelle de la géométrie du système physique, tandis que le modèle 1D assimile la structure à une ligne correspondant à l'axe du cylindre. Les deux modèles peuvent être formulés de façon indépendante avec des approches phénoménologiques. Néanmoins il existe aussi des approches théoriques permettant de déduire rigoureusement les modèles 1D à partir du 3D. Par moyen de méthodes asymptotiques, on peut montrer que quand le rapport d'élancement $\lambda = L/h$ est grand les solutions du modèle 3D sont approchées par les solutions de certains modèles 1D avec des caractéristiques spécifiques. Il s'agit d'un problème de réduction de dimension. La réduction de la dimension géométrique est associée à un enrichissement du modèle dans la description de la cinématique, des équations de la statique et de la loi de comportement.

Dans la pratique, on utilise souvent les modèles 1D car ils permettent des résolutions analytiques ou des solutions numériques peu coûteuses. Etablir le lien entre les deux types de modélisations est très important du point de vue des applications pour deux aspects fondamentaux :

- (i) Estimer la loi de comportement 1D et l'énergie de déformation 1D à partir de la connaissance de l'énergie de déformation 3D et de la géométrie des sections droites.
- (ii) Estimer les déformations et contraintes 3D à partir des solutions 1D, et donc prévoir la résistance de la structure à l'aide de critères de résistance 3D.

Les deux modèles ont été introduits dans des cours précédents. Dans la première partie de ce cours on rappelle les équations fondamentales, en se focalisant sur leurs relations réciproques. On se place dans ce chapitre dans l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP, voir le cours de Mécanique des Milieux Continus du premier semestre), bien que une grosse partie de résultats présentés ici sont valides aussi dans le cadre plus générale des poutres en petites déformations et grands déplacements.

Les objectifs de ce premier chapitre du cours sont les suivants:

1. Rappeler et maîtriser les éléments fondamentaux de la modélisation des poutres dans le plan en HPP.
2. Approfondir et maîtriser les rapports entre modélisations 3D et 1D.
3. Être capable de déduire à partir de la description 3D, les propriétés (loi de comportement) du modèle 1D.
4. Reconstruire une approximation des contraintes et des déformations 3D à partir du modèle 1D.
5. Être capable de modéliser et résoudre de problèmes avec des poutre non-homogènes (composites), avec des effets inélastiques (precontraintes).

On sera alors capables de résoudre de problèmes de poutres composites (e.g. multicouches ou béton armé) et de maîtriser tous les concepts de base de la théorie des poutres et de la résistance des matériaux.

1.1 Rappel de l'élasticité linéaire 2D/3D

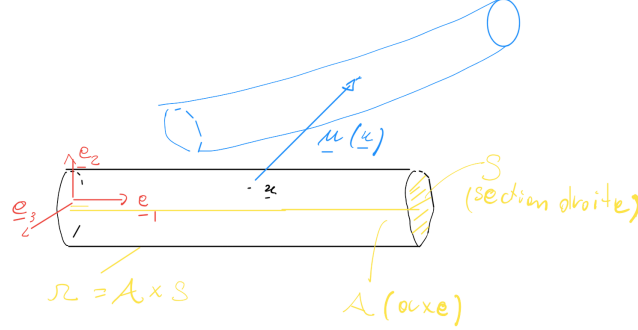


Figure 1.1: Modèle 3D d'une poutre: Géométrie et cinématique

On rappelle ci-dessous les équations fondamentales de l'élasticité linéaire.

Géométrie

On considère un solide élastique occupant dans sa configuration de référence le cylindre $\Omega \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ de axe \mathcal{A} et de section droite \mathcal{S} . Un point générique dans Ω est écrit de la façon suivante

$$\underline{x} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3 \in \Omega, \quad \text{avec} \quad x\underline{e}_1 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3 \in \mathcal{S}$$

On note le vecteur déplacement entre la configuration de référence et la configuration actuelle par (on utilisera les lettres majuscules pour le déplacement dans ce modèle 3D)

$$\underline{U}(\underline{x}) = U(\underline{x})\underline{e}_1 + V(\underline{x})\underline{e}_2 + W(\underline{x})\underline{e}_3$$

Les conditions aux bords cinématiques imposent la valeur $\underline{U} = \bar{\underline{U}}$ sur une partie du bord du domaine, qu'on appellera $\partial_U \Omega$

Déformations

En élasticité linéaire, sous l'hypothèse des petites perturbations ($\|\underline{\nabla} \underline{U}\| \ll 1$), on définit le tenseur des déformations

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{U} + \underline{\nabla}^T \underline{U}) \quad (1.1)$$

On peut montrer qu'il s'agit d'une bonne mesure de déformation: il est nul pour tous les et seulement les déplacements rigides.

Rappel: Un champs de déplacement associé à un déplacement rigide est sur la forme

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}_0) + \underline{\underline{Q}}(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

où $\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^{-1}$ est un tenseur orthogonal à déterminant positif (rotation), qui dans le cas bidimensionnel peut s'écrire sur la forme:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} + o(\theta)$$

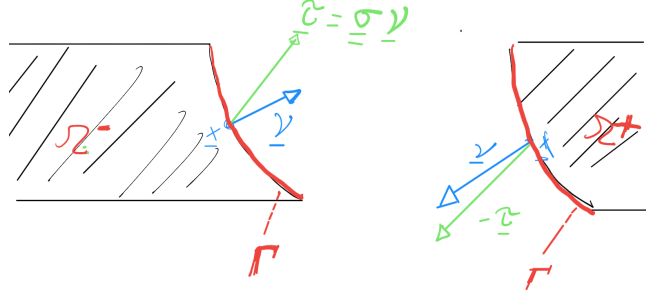


Figure 1.2: Effort de cohésion dans le continu de Cauchy 2D ou 3D

Équilibre

Les contraintes sont les efforts de cohésion du milieu continu. Pour définir les contraintes dans un point \underline{x} , on effectue une coupe imaginaire du solide Ω en deux parties Ω^+ et Ω^- avec une surface Γ , de normal $\underline{\nu}$ en \underline{x} . Dans le modèle de *Continu de Cauchy* on suppose que l'interaction entre les deux parties se fait seulement par une distribution de force pour unité de surface $\underline{\tau}(\underline{\nu})$ sur Γ , qui dépend seulement de la normale $\underline{\nu}$ (et pas, par exemple de la courbure de Γ). On démontre (Théorème de Cauchy) que cette dépendance est linéaire

$$\underline{\tau}(\underline{\nu}) = \underline{\sigma} \underline{\nu}$$

Le tenseur $\underline{\sigma}$ qui définit cette application linéaire est le *tenseur des contraintes de Cauchy*. On démontre aussi que, à l'équilibre, ce tenseur de contraintes doit satisfaire les *équations d'équilibre* suivantes:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{b} = \underline{0}, & \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T, \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{f}, & \text{sur } \partial_f \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

où \underline{b} et \underline{f} désignent respectivement les forces de volume dans Ω et les forces de surface appliquées sur la partie $\partial_f \Omega$ du bord de Ω . On notera que ces équations sont écrites dans la configuration de référence Ω : dans l'hypothèse de petites perturbations on confond la configuration actuelle avec la configuration de référence pour l'écriture des équations d'équilibre (voir Chapitre 2 du cours).

Énergie de déformation et loi de comportement

On suppose ici un comportement élastique linéaire entre contraintes et déformation et un comportement conservatif. Cela revient à supposer l'existence d'une fonction scalaire $\varphi_{3D}(\underline{\epsilon})$, la *densité d'énergie de déformation*, telle que

$$\underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) = \frac{d\varphi_{3D}(\underline{\epsilon})}{d\underline{\epsilon}} \quad (1.3)$$

En élasticité linéaire cette fonction est une fonction quadratique par rapport aux déformations, qu'on peut écrire sous l'une des deux formes suivantes:

$$\varphi_{3D}(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} \mathbb{C} \underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon} + \underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{\epsilon} = \frac{1}{2} \mathbb{C} (\underline{\epsilon} - \underline{\bar{\epsilon}}) \cdot (\underline{\epsilon} - \underline{\bar{\epsilon}}) + c \quad (1.4)$$

avec $\underline{\bar{\sigma}} = -\mathbb{C} \underline{\bar{\epsilon}}$, \mathbb{C} étant le tenseur d'élasticité d'ordre 4, symétrique et défini positif, et c une constante opportune. On désigne par

- $\underline{\epsilon}$: déformation (géométrique)
- $\underline{\bar{\epsilon}}$: déformation inélastique
- $\underline{\epsilon} - \underline{\bar{\epsilon}}$: déformation élastique
- $\underline{\bar{\sigma}}$: contrainte inélastique

La loi de comportement pour les contraintes peut être obtenue en dérivant l'énergie de déformation par rapport à la déformation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d\varphi_{3D}}{d\underline{\underline{\epsilon}}} = \mathbb{C}\underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}) \quad (\text{loi de comportement 3D}) \quad (1.5)$$

On note que $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}$ sont les déformations de la structures correspondant à un état de contraintes nulles ($\underline{\underline{\sigma}} = 0$), et réciproquement $\underline{\underline{\bar{\sigma}}}$ représente le tenseur des contraintes associé à un état de déformations nulles ($\underline{\underline{\epsilon}} = 0$).

Dans le cas isotrope avec modules de Lamé λ et μ :

$$\mathbb{C}\underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}, \quad \varphi_{3D}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}})^2 + \mu (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}) \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}})$$

Dans le cas de contraintes-déformations inélastiques d'origine thermique dans un matériau isotrope avec module d'Young E et coefficient d'expansion thermique α :

$$\underline{\underline{\bar{\epsilon}}} = \alpha \Delta T \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{\bar{\sigma}}} = -\alpha E \Delta T \underline{\underline{I}}.$$

Les déformations inélastiques peuvent aussi être utilisées pour modéliser les effets des déformations plastiques, couplages multiphysiques, humidité, croissances, etc.

Commentaires

Le problème à résoudre est ici un système d'équations différentielles aux dérivées partielles linéaires (1.1), (1.2), (1.5) pour $(\underline{U}, \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$, avec des conditions aux bords sur \underline{U} et $\underline{\underline{\sigma}}$. Il s'agit d'un problème linéaire, à solution unique, mais qui peut être très rarement résolu analytiquement. Une solution numérique (e.g. éléments finis) s'impose dans la plupart des cas. Les données du problème sont la géométrie de Ω , $\underline{\underline{U}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{f}}$, $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}$ (ou $\underline{\underline{\bar{\sigma}}}$) et le tenseur \mathbb{C} de la loi de comportement.

1.2 Essentials of the the streching and bending of rods

Traction

Consider the traction of a straight bar of length L clamped on the left-end ($x = 0$) and loaded by a a concentrated force F at the right-end $x = L$. Let be \underline{e}_1 the direction of the axis, and $u(x)$ the axial displacement.

- If there is not a distributed force, the deformation is constant across cross section and along the axis. We can think the rod as composed of fibres stretching all of the same amount. The axial deformation and the stress is

$$\epsilon_{11} = \frac{u(L)}{L}, \quad \sigma_{11} = E\epsilon_{11} = E\frac{u(L)}{L}$$

and the force is given by

$$F = \frac{EA}{L}u(L)$$

where A is the cross-sectional area. The latter formula allows us to regard the bar as a linear spring of stiffness $c = \frac{EA}{L}$.

- Except for polymers or rubbers (see Figure 1.3 right), in traction problems the displacements before failure are very small with respect to the structural dimensions. The hypothesis of small perturbations can be applied in first approximation and geometrical non-linearities can usually be neglected.

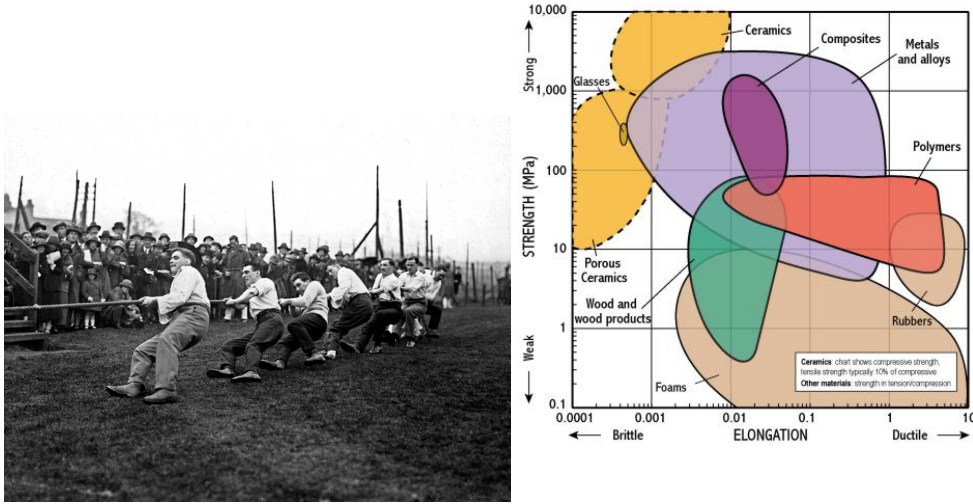


Figure 1.3: Left: *Tug of war* as a typical example of traction. Right: Tensile strengths and maximal elongation of typical materials.

- Consider a quasi-static process where the applied force is increased from 0 to F when the time variable t varies from 0 to \bar{t} . The end-displacement will grow 0 to $u(L)$. The power expended by the external force at each instant of the loading process is

$$F_t \frac{du_t}{dt}(L) = \frac{EA}{L} u_t(L) \frac{du_t}{dt}(L)$$

where we use the subscript t to denote explicitly the dependence on time. For an elastic bar and a quasi-static loading process, the work done by the external force at the end of the process is equal to the total

elastic strain energy stored in the bar:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{EA}{L} u_t(L) \frac{du_t}{dt}(L) dt = \frac{EA}{2L} u(L)^2$$

Since the deformation is homogeneous, we deduce the elastic energy density stored per unit line in the bar by dividing by the length L , obtaining:

$$\varphi = EA \frac{u'(x)^2}{2}$$

- If the bar is loaded also by a distributed force per unit line $f_N(x)$, the deformation is not any more homogeneous along the axis. The problem is solved by integrating the differential equation

$$N'(x) + f_N(x) = 0, \quad N(x) = ESu'(x)$$

with the boundary conditions $u(0) = 0$, $N(L) = F$, where

$$N(x) = \int_S \sigma_{11} dy dz = ESu'(x)$$

is normal stress resultant.

- For experimental traction test, see https://fr.wikipedia.org/wiki/Essai_de_traction

Bending



Figure 1.4: Bending of the pole vault (see also https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/beam_bending/index.php).

Consider the uniform bending of an initially straight bar of length L with rectangular cross-section of width b and height h by applying an end-moment M . In the deformed configuration the central axis will be an arc of circle of radius R and curvature $k = 1/R$. The cross section in $x = L$ will rotate of an angle $\beta = L/R$.

- The length of a generic fibre at a (signed) distance y from the axis is

$$\ell(y) = (R - y) \frac{L}{R}$$

and the corresponding extension and stress are

$$\epsilon_{11}(y) = \frac{\ell(y) - L}{L} = -\frac{y}{R} = -ky, \quad \sigma_{11}(y) = -Eyk$$

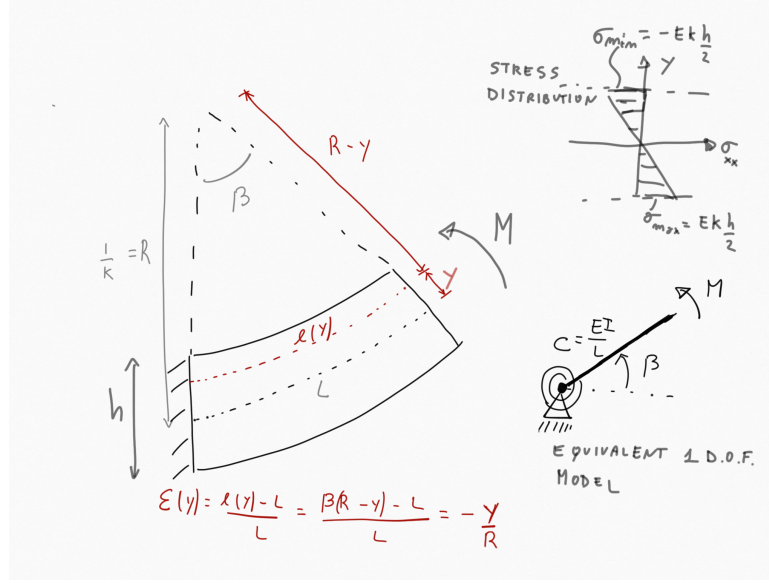


Figure 1.5: The stretching in pure bending is proportional to the distance from the mid-axis y and the curvature k .

The moment resultant is

$$M = \int_S -y\sigma_{11}(y)dydz = EI k = \frac{EI}{L} \theta(L), \quad I = \int_S y^2 dydz.$$

- In a simple 1 dof model, we can regard the beam as rigid bar of length L with an elastic pin-joint including a rotational spring of stiffness $c = \frac{EI}{L}$.
- The maximal absolute value of the deformation are attained at the top (compression) and bottom (traction) fibres and are

$$|\epsilon_{11}|_{\max} = k \frac{h}{2}.$$

The maximum transverse displacement is

$$v(L) = \frac{1}{k}(1 - \cos(kL)) = k \frac{L^2}{2} + o(k)$$

For a beam made of a material characterized by the maximum deformation in the elastic regime ϵ_c , the structure will remain in the elastic regime for transverse displacements up to

$$\frac{v_c}{L} = \epsilon_c \frac{L}{h}$$

This means that sufficiently slender structures (e.g. $L/h=100$) in bending can experience displacements of the order of the length and large change in shape within the elastic regime. For slender structures in bending geometric non-linearities can play an important role and should be accounted for in the modelling for high slenderness ratios ($L/h \gg 1$).

- The elastic energy density per unit line is (the reasoning is similar to the case of traction)

$$\varphi = EI \frac{k^2}{2}$$

1.3 Modèle 1d de poutres droites dans le plan

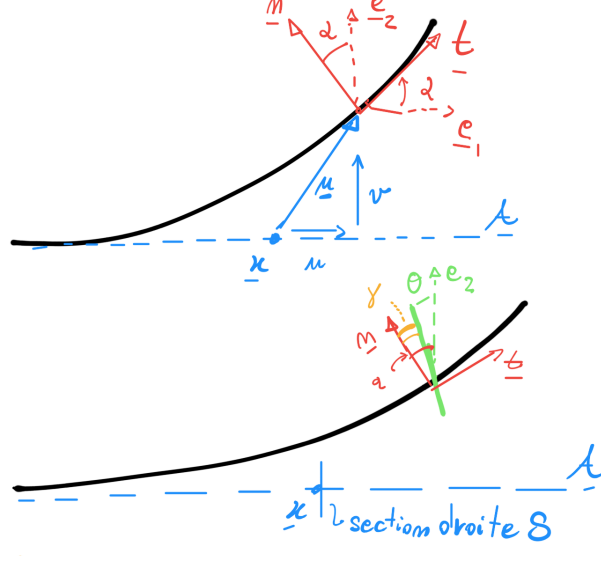


Figure 1.6: Modèle 1D, géométrie et cinématique: le glissement γ est défini comme la différence entre la rotation α de la normale à l'axe et la rotation θ la section, initialement droite.

On rappelle ici la théorie des poutres, particularisée au cas des *poutres droites* dans le plan en HPP. On se focalisera sur la théorie dite de Timoshenko, avec déformations au cisaillement permise. On renvoie au cours de Mécanique de Milieux Continus du premier semestre pour les détails.

Géométrie

Le domaine est l'axe monodimensionnel \mathcal{A} , qu'on suppose ici droit pour simplifier la notation, un point le long de l'axe est repéré par $\underline{x} = x\mathbf{e}_1$. A chaque point de l'axe on doit imaginer associé une section \mathcal{S} , qui constitue une *microstructure*.

Cinématique

Dans une poutre il faut décrire le mouvement de l'axe et de ses sections. On suppose ici que l'axe reste dans le plan $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. La configuration actuelle est identifiée par le déplacement de l'axe \underline{u} et par la rotation des sections θ :

$$\underline{u}(x) = u(x)\mathbf{e}_1 + v(x)\mathbf{e}_2, \quad \underline{\theta}(x) = \theta(x)\mathbf{e}_3$$

On note par α l'angle entre la tangente à l'axe en x et \mathbf{e}_1 . Dans l'hypothèse des petites déformations (on démontrera cette relation plus tard)

$$v' \simeq \tan \alpha \simeq \alpha.$$

L'angle $\gamma = \alpha - \theta \simeq v' - \theta$ représente alors le défaut d'orthogonalité des sections par rapport à l'axe dans la configuration déformée (déformation de cisaillement). On décrit la déformation par une modélisation qui

autorise les déformations de cisaillement (modèle de Timoshenko):

$$e(x) = u'(x) \quad (\text{extension}) \quad (1.6)$$

$$k(x) = \theta'(x) \quad (\text{courbure}) \quad (1.7)$$

$$\gamma(x) = v'(x) - \theta(x) \quad (\text{glissement}) \quad (1.8)$$

On peut montrer que ces sont de bonnes mesures de déformation: le champs de déplacement $\underline{u}(x)$ correspond à un mouvement rigide si et seulement si $e = k = \gamma = 0$.

Équilibre

Les efforts intérieurs (ou de cohésion) au point x sont définis comme les interactions entre la partie \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- obtenues en effectuant une coupe imaginaire en x . Dans la théorie des poutres on suppose que cette interaction se fait par une force $\underline{R}(x) = N(x)\underline{e}_1 + T(x)\underline{e}_2$ et un moment résultant $\underline{M}(x) = M(x)\underline{e}_3$. On peut montrer que les effort de cohésion doivent respecter les équations d'équilibre suivantes (en l'absence de moment réparti):

$$\underline{R}'(x) + \underline{p} = 0$$

$$\underline{M}'(x) + \underline{e}_1 \times \underline{R}(x) = 0$$

\underline{p} étant la densité linéique d'effort (force par unité de longueur) appliquée sur l'axe de la poutre. En projetant

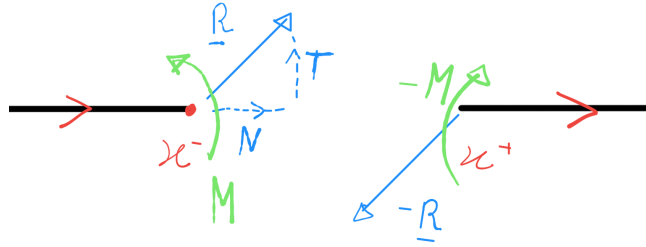


Figure 1.7: Efforts de cohésion dans le modèle 1D

la première équation selon les axes \underline{e}_1 et \underline{e}_2 , et la troisième selon \underline{e}_3 on obtient:

$$N'(x) + p_N = 0 \quad (1.9)$$

$$T'(x) + p_T = 0 \quad (1.10)$$

$$M'(x) + T(x) = 0 \quad (1.11)$$

accompagnées des conditions aux limites associées. N et T représentent respectivement l'effort normal et l'effort de cisaillement.

Énergie de déformation et loi de comportement

On suppose que le système soit conservatif, que la loi de comportement élastique, et qu'il existe une fonction scalaire des déformations, l'*énergie de déformation*. Sur l'hypothèse des petites déformations, on suppose que cette fonction soit au plus quadratique par rapport aux déformations et on l'écrit sous une des deux formes suivantes¹

$$\varphi_{1D}(e, k, \gamma) = \frac{1}{2}K \begin{bmatrix} e \\ k \\ \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ k \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ k \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{2}K \begin{bmatrix} e - \bar{e} \\ k - \bar{k} \\ \gamma - \bar{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e - \bar{e} \\ k - \bar{k} \\ \gamma - \bar{\gamma} \end{bmatrix} + c, \quad K = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

¹Si K est une matrice, a et b des vecteurs, de composantes K_{ij} , a_i , b_i , on utilise les notations suivantes $Ka = \sum_{i,j} K_{ij}a_j$, $a \cdot b = \sum_i a_i b_i$, $Ka \cdot b = \sum_{i,j} b_i K_{ij}a_j$

qu'on peut réécrire aussi sous la forme équivalente :

$$\varphi_{1D}(e, k, \gamma) = \frac{A}{2} e^2 + \frac{D}{2} k^2 + B e k + \frac{F}{2} \gamma^2 + \bar{N} e + \bar{M} k + \bar{T} \gamma \quad (1.12)$$

A noter qu'on suppose ici l'absence de couplage entre extension-flexion et cisaillement (matériaux orthotropes). Les efforts intérieurs sont obtenus en dérivant l'énergie de déformation par rapport aux variables cinématiques correspondantes:

$$N = \frac{\partial \varphi_{1D}}{\partial e} = A e + B k + \bar{N} = A(e - \bar{e}) + B(k - \bar{k}) \quad (1.13a)$$

$$M = \frac{\partial \varphi_{1D}}{\partial k} = B e + D k + \bar{M} = B(e - \bar{e}) + D(k - \bar{k}) \quad (1.13b)$$

$$T = \frac{\partial \varphi_{1D}}{\partial \gamma} = F \gamma + \bar{T} = F(\gamma - \bar{\gamma}) \quad (1.13c)$$

On appelle A rigidité en extension, D rigidité en flexion, B couplage extension-flexion, F rigidité au cisaillement. $(\bar{e}, \bar{k}, \bar{\gamma})$ et $(\bar{N}, \bar{M}, \bar{T})$ sont des déformations et contraintes inélastiques, avec une signification analogue à celle des déformations et contraintes inélastiques dans le cas 3D.

Le modèle d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli est celui obtenu en supposant le glissement nul ($\gamma = 0$, section orthogonales à l'axe). Dans ce cas la loi de comportement pour T est remplacée par la "loi" $\gamma = 0$ et on a

$$\theta(x) = v'(x), \quad k(x) = v''(x),$$

avec l'énergie de déformation

$$\varphi_{1D}(e, k) = \frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{2} D k^2 + B e k + \bar{N} e + \bar{M} k$$

Commentaire

Dans la théorie des poutres le problème à résoudre est un système d'équations linéaires aux dérivées ordinaires pour (e, k, γ, N, T, M) avec des conditions aux limites. Les données sont la longueur de l'axe, L, \underline{p} , les conditions aux limites, $(\bar{e}, \bar{k}, \bar{\gamma})$ ou $(\bar{N}, \bar{M}, \bar{T})$. Ce problème peut être résolu analytiquement dans la plupart des cas et il est celui utilisé pour un premier dimensionnement des structures. Le problème se simplifie ultérieurement par l'élimination de γ et T dans le cas du modèle d'Euler-Bernoulli.

1.4 Relations entre modèles 1D et 3D

Pour établir des relations entre l'état de déformation et contraintes 1D et celui 3D on fait les deux hypothèses suivantes:

- (H1) On approche les déplacements d'une section droite dans le modèle 3D par une translation et une rotation de corps rigide, associées au déplacement du point de l'axe $\underline{u}(x)$ et à la rotation du modèle 1D:

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underbrace{(u(x)\underline{e}_1 + v(x)\underline{e}_2)}_{\text{déplacement de l'axe}} + \underbrace{\theta(x)\underline{e}_3 \times y\underline{e}_2}_{\text{rotation de la section}} = (u(x) - y\theta(x))\underline{e}_1 + v(x)\underline{e}_2 \quad (1.14)$$

- (H2) Dans le modèle 3D on néglige les contraintes transversales $(\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23})$ par rapport aux contraintes axiales $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$:

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la définition des $\underline{\epsilon}$ en fonction de \underline{U} avec l'hypothèse (H1) on trouve

$$\underline{\epsilon} = (u'(x) - y\theta'(x))(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + \frac{(v'(x) - \theta(x))}{2}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1).$$

On a donc le lien suivant entre déformations 3D et 1D:

$$\boxed{\epsilon_{11}(\underline{x}) = e(x) - yk(x), \quad \epsilon_{12}(\underline{x}) = \gamma(x)/2} \quad (1.15)$$

Avec l'hypothèse (H2) la loi de comportement pour un matériau élastique linéaire isotrope donne:

$$\boxed{\sigma_{11} = E\epsilon_{11} + \bar{\sigma}_{11}, \quad \sigma_{12} = 2G\epsilon_{12} + \bar{\sigma}_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G\epsilon_{13} + \bar{\sigma}_{13}} \quad (1.16)$$

où E est le module de Young et G le module de cisaillement.

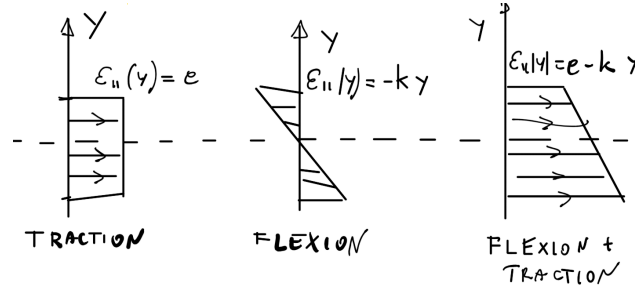


Figure 1.8: Déformation axiale ϵ_{11} dans l'épaisseur d'une poutre: liens entre modèle 1D et 3D.

1.5 Estimation de la loi de comportement 1D à partir du modèle 3D

On résume ici comment l'énergie de déformation du modèle 1D peut être estimée à partir de celle du modèle 3D et de la géométrie du solide. Cette relation est très importante dans la pratique: elle permet de donner des expressions analytiques pour les coefficients de la loi de comportement du modèle 1D en connaissant la géométrie de la section droite et les caractéristiques des matériaux constitutants.

Équivalence énergétique

Afin d'estimer l'énergie de déformation, et donc la loi de comportement du modèle 1D, on suppose que l'énergie de déformation par unité de longueur du modèle 1D soit équivalente à l'énergie de déformation par unité de volume du modèle 3D intégrée sur une section droite, et on suppose que cette dernière quantité peut être estimée par

$$\varphi_{1D}(e, k, \gamma) = \int_S \varphi_{3D}(\underline{\epsilon}) dydz \quad (1.17)$$

Cas sans déformations inélastiques

En utilisant les liens entre les modèles 1D et 3D

$$\varphi_{3D} = \frac{1}{2}E\epsilon_{11}^2 + 2G\epsilon_{12}^2 = \frac{1}{2}E(e(x) - yk(x))^2 + \frac{1}{2}G\gamma^2(x) \quad (1.18)$$

donc, l'équivalence énergétique donne

$$\varphi_{1D}(e, k, \gamma) = \int_S \left(\frac{1}{2} E(e - y k)^2 + \frac{1}{2} F \gamma^2 \right) dydz \quad (1.19)$$

$$= \frac{A}{2} e^2 + \frac{D}{2} k^2 + B e k + \frac{F}{2} \gamma^2 \quad (1.20)$$

où

$$A = \int_S E(y, z) dydz \quad B = \int_S -y E(y, z) dydz \quad D = \int_S y^2 E(y, z) dydz \quad F = \int_S G(y, z) dydz \quad (1.21)$$

Ces formules sont valables pour des poutres dont la section est hétérogène (composée de plusieurs matériaux, e.g. multicouches). Dans le cas d'une poutre à section homogène où l'on choisit de se placer dans le repère principal d'inertie, on a $A = ES$, $B = 0$, $D = EI$.

On peut noter que ces formules coïncident avec celle obtenues en posant:

$$N = \int_S \sigma_{11}(x, y) dydz, \quad M = \int_S -y \sigma_{11}(x, y) dydz, \quad T = \int_S \sigma_{12}(x, y) dydz$$

Cas avec déformations inélastiques

Dans le cas avec déformations/contraintes inélastiques l'énergie de déformation pour unité de volume du modèle 3D est En utilisant les liens entre les modèles 1D et 3D

$$\varphi_{3D} \frac{1}{2} \mathbb{C} \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} + \bar{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} E \epsilon_{11}^2 + 2G \epsilon_{12}^2 + \bar{\sigma}_{11} \epsilon_{11} + 2\bar{\sigma}_{12} \epsilon_{12} \quad (1.22)$$

on obtient l'énergie 1D sous la forme (1.12), avec

$$\bar{N} = \int_S \bar{\sigma}_{11}(y, z) dydz \quad \bar{M} = \int_S -y \bar{\sigma}_{11}(y, z) dydz \quad \bar{T} = \int_S \bar{\sigma}_{12}(y, z) dydz \quad (1.23)$$

et

$$\begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{k} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} = -K^{-1} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Exercices

Exercice 1.5-1: Obtenir (1.23) et (1.24). On conseille d'écrire la loi de comportement 3D sous la forme faisant intervenir les contraintes inélastiques, plutôt que les déformations inélastiques.

Exercice 1.5-2: On considère une poutre de longueur L constituée de 2 couches de module de Young E_1 et E_2 , respectivement, avec $E_1 > E_2$. Les deux couches ont la même épaisseur h et une largeur b . On applique à la poutre une force de traction F par l'intermédiaire de pinces rigides, libres de se déplacer (voir Figure 1.9). Déterminer l'extension e et la courbure k de la poutre à l'équilibre. Donner une estimation des contraintes σ_{11} et représenter graphiquement leur distribution dans l'épaisseur, $\sigma_{11}(y)$.

Exercice 1.5-3: Une poutre encastree-libre de longueur L , de section rectangulaire d'épaisseur h et de largeur b est à la température T_0 dans sa configuration de référence. Calculer le déplacement et les déformations de l'axe de la poutre, ainsi que les contraintes σ_{11} à l'équilibre lorsque la poutre est soumise à une température $T_0 - \Delta T/2$ à l'extrados ($y = h/2$) et $T_0 + \Delta T/2$ à l'intrados ($y = -h/2$). On suppose la poutre homogène et isotrope avec un module de Young E et un coefficient d'expansion thermique α . Répéter l'exercice dans le cas d'une poutre encastree-encastree avec le même chargement thermique.

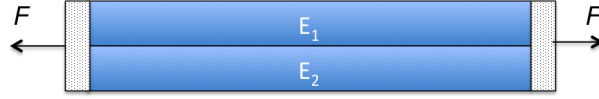


Figure 1.9: Traction d'une poutre bicouche.

Exercice 1.5-4: Démontrer les formules ici: [https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_\(engineering\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_(engineering)) et calculer la distribution de contraintes σ_{11} , en supposant les poutres homogènes (voir ci-dessous pour le calculs des contraintes).

1.6 Estimation des contraintes 3D à partir de la solution 1D

Les relations (1.15) permettent d'estimer les contraintes 3D à partir de la connaissance des déformations de l'axe dans le modèle 1D:

$$\sigma_{11} = E(e(x) - yk(x)) + \bar{\sigma}_{11}, \quad \sigma_{12} = G\gamma(x) + \bar{\sigma}_{12} \quad (1.25)$$

Les déformations (e, k, γ) peuvent être exprimées en fonction des contraintes 1D (N, T, M) par l'intermédiaire de la loi de comportement 1D. Cela permet d'estimer les contraintes 3D en chaque point de la section en fonction des contraintes résultantes sur une section du modèle 1D. On donne ci-dessous des exemples importants pour les applications car à la base de toutes les formules pour le dimensionnement des poutres et des normes techniques.

Contrainte normale pour $B = 0$

Dans le cas d'absence de couplage flexion-extension et de contraintes/déformations inélastiques, la loi de comportement 1D donne $e = N/A$, $k = M/D$. Donc

$$\sigma_{11}(x, y, z) = E(x, y, z) \left(\frac{N(x)}{A} - y \frac{M(x)}{D} \right) \quad (1.26)$$

qui conduit à la formule suivante pour le cas d'une poutre homogène

$$\sigma_{11}(x, y, z) = \frac{N(x)}{S(x)} - y \frac{M(x)}{I(x)} \quad (1.27)$$

On laisse au lecteur le soin d'étendre ces formules dans le cas avec déformations/contraintes inélastiques. On appelle axe neutre, l'axe où $\sigma_{11} = 0$. Il est caractérisé par:

$$y_{\text{neutre}} = \frac{N(x)I(x)}{M(x)S(x)}$$

Cisaillement

L'approche d'estimation des contraintes 3D proposée ci-dessous donne une estimation très grossière de la contrainte de cisaillement. La déformation en cisaillement $\gamma(x)$ étant supposée constante sur une section, on trouve:

$$\sigma_{12} = G\gamma(x) = \frac{T(x)}{S(x)}. \quad (1.28)$$

Une approche améliorée pour l'estimation de la contrainte de cisaillement est donnée ci-dessous.

Commentaires

Considérons une poutre encastrée en $x = 0$ et soumise à une force transversale $Q\mathbf{e}_2$ en $x = L$ (flexion simple). Dans ce cas les équations d'équilibre donnent $T(x) = Q$ constante et $M(x) = Q(L - x)$. Donc

$$\sigma_{11} = -\frac{Q}{I}(L - x)y, \quad \sigma_{12} = \frac{Q}{S}$$

Pour une poutre homogène à section carrée de hauteur h on a $I = h^4/12$, $S = h^2$. Les contraintes maximales sont atteintes à l'encastrement $x = 0$ en $y = \pm h/2$ et :

$$\sigma_{11} \simeq 6\frac{QL}{h^3}, \quad \sigma_{12} \simeq \frac{Q}{h^2}$$

Pour les structures élancées, les contraintes de cisaillement sont petites par rapports aux contraintes normales:

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \sim \frac{h}{L}$$

Au premier ordre on peut se contenter de la connaissance des contraintes normales pour dimensionner la structure. Cela n'est toutefois pas suffisant pour le cas des poutres à parois minces et pour les poutres composites.

Exercices

Exercice 1.6-1: Une poutre console de longueur $L = 0.5m$, a section carrée avec épaisseur h et largeur $b = h/10$ doit supporter un poids $F = 1000N$. Montrer que la flèche correspondante est donnée par

$$v(L) = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4FL^3}{3Ebh^3} \quad (\text{Flèche poutre console})$$

Donner trois choix possibles du matériau constituant et de l'épaisseur h pour avoir une flèche de l'ordre de l'épaisseur. En s'inspirant de données en Figure 1.10, en chiffrant le cout, le poids et les contraintes maximales. Dans le premier choix, essayez de privilégier le critère de légèreté, dans le deuxième celui du cout bas, et dans le troisième essayer de trouver un bon compromis entre les deux. Commentez vos choix.

1.7 Approximation de Jourawsky pour le cisaillement

Considérons une poutre encastrée en $x = 0$ et soumise à une force transversale $F\mathbf{e}_2$ en $x = L$ (flexion simple). Dans ce cas les équations d'équilibre conduisent à un effort tranchant $T(x) = F$ constant, tandis que la variation du moment fléchissant est linéaire en x : $M(x) = F(L - x)$. L'approximation de la contrainte de cisaillement (1.28), obtenue avec la cinématique du modèle de cisaillement, est très grossière. Elle suppose que la contrainte de cisaillement soit constante sur la section droite et égale à la moyenne de l'effort tranchant sur une section droite ($\sigma_{12} = F/S$ dans le cas de la flexion simple). Cette approximation ne vérifie pas les conditions aux limites sur les contraintes 3D sur les bords de la section droite ($\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0}$)². Cette estimation peut être améliorée avec des raisonnements simples sur l'équilibre. Nous considérons ici pour simplifier le cas d'une poutre homogène de section constante et sans déformations inélastiques. Il est néanmoins facile d'étendre la théorie au cas où ces hypothèses ne sont pas vérifiées.

Considérons le tronçon de poutre Ω^* représenté en Figure 1.11, ce tronçon est situé entre les sections x et $x + dx$, délimité par le plan de normale \mathbf{n} et paramétré par η . On désigne par $\mathcal{S}^*(\eta)$ l'aire de la fraction de section droite correspondant à ce tronçon et par

$$N^*(x, \eta) = \int_{\mathcal{S}^*(\eta)} \sigma_{11}(x, y, z) dydz$$

²Par exemple, dans le cas d'une section rectangulaire de hauteur h on ne vérifie pas $\sigma_{12}|_{y=\pm h/2} = 0$

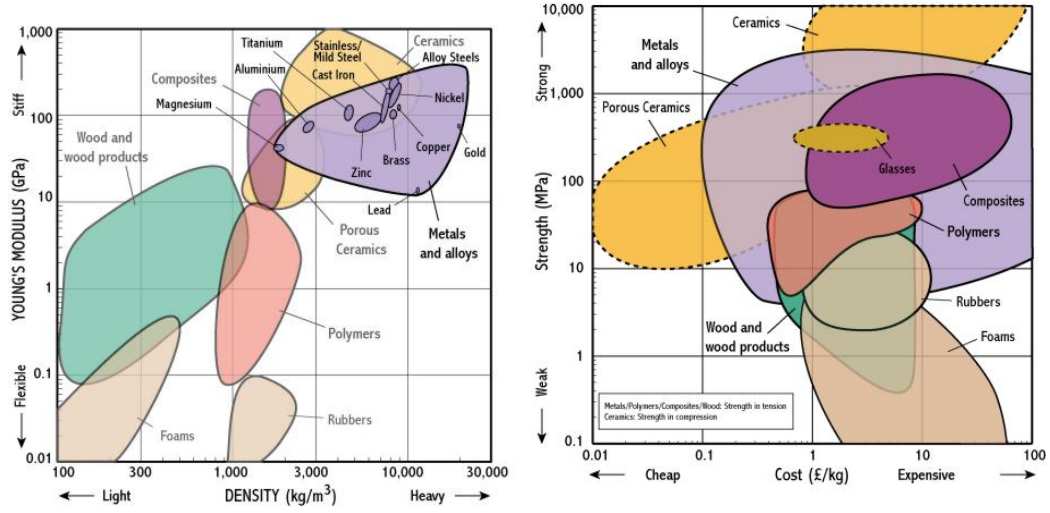


Figure 1.10: Tableaux de selection des matériaux (http://www-g.eng.cam.ac.uk/125/now/mfs/tutorial/non_IE/charts.html).

la résultante des contraintes normales sur cette partie de section. En utilisant l'estimation (1.27) pour la contrainte normale on a

$$N^*(x, \eta) = \int_{S^*(\eta)} \left(\frac{N(x)}{S} - y \frac{M(x)}{I} \right) dydz = S^* \frac{N(x)}{S} - m^*(\eta) \frac{M(x)}{I} \quad (1.29)$$

où

$$m^*(\eta) = \int_{S^*(\eta)} y dydz \quad (1.30)$$

est le moment statique de la partie S^* de la section droite. Le reste de la poutre exerce sur ce tronçon les forces suivantes: (i) les résultantes sur les morceaux de section droite $S^*(\eta)$ en x et $x+dx$ dues à la contrainte normale σ_{11} , données respectivement par $-N^*(x) \underline{e}_1$ et $N^*(x+dx) \underline{e}_1$; (ii) la résultante des forces de cisaillement $\sigma_{1\eta}$ sur le plan de normale \underline{n} (Figure 1.11):

$$q(x, \eta)dx = \tilde{\sigma}_{1\eta}(x) b^*(\eta)dx$$

où $\tilde{\sigma}_{1\eta}$ est la moyenne prise le long de la corde b^* de la contrainte $\sigma_{1\eta}$. L'équilibre de ces forces donne

$$N^*(x+dx) - N^*(x) + q(x, \eta)dx = 0$$

et donc

$$\tilde{\sigma}_{1\eta} = -\frac{1}{b^*(\eta)} \frac{dN^*(x)}{dx} \quad (1.31)$$

En utilisant (1.29) et les équations d'équilibre du modèle de poutre ($N'(x) = 0$, $M'(x) = -T(x)$) dans l'équation précédente on trouve:

$$\tilde{\sigma}_{1\eta} = -\frac{m^*(\eta)T(x)}{b^*(\eta)I} \quad (1.32)$$

L'équation ci-dessus, due à Jourawski³, donne une estimation de la moyenne sur la corde b^* de la section de la contrainte de cisaillement $\sigma_{1\eta}$. Cela permet d'améliorer notablement l'estimation des contraintes de cisaillement par rapport au résultat précédent (moyenne sur une section entière). Une illustration éloquent est donnée par l'exemple ci-dessous.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Dmitrii_Ivanovich_Zhuravskii

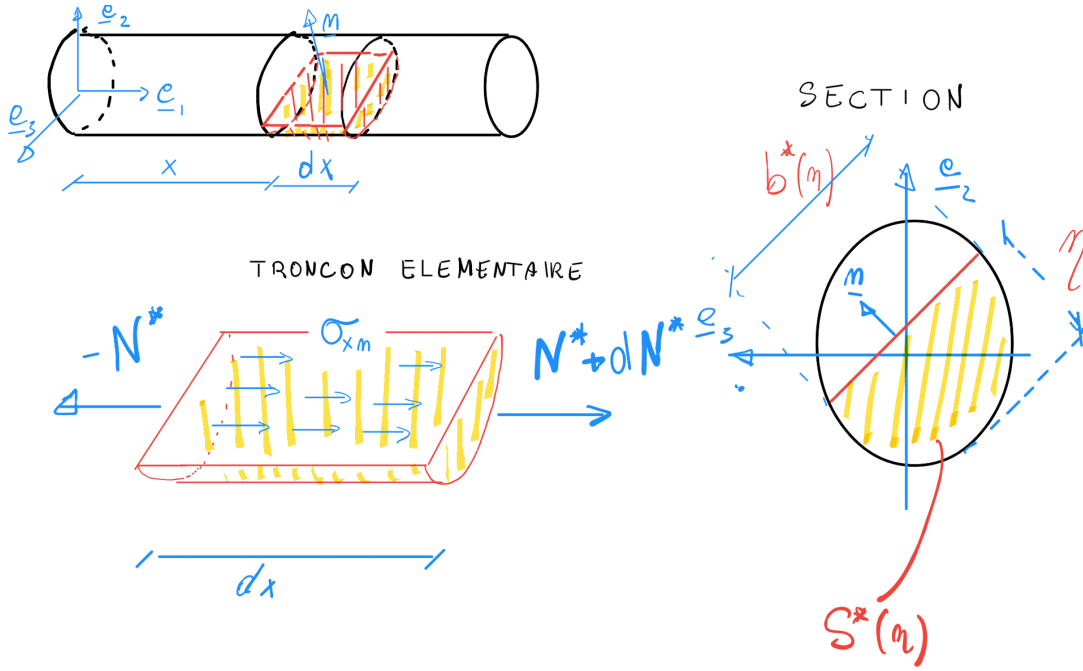


Figure 1.11: Tronçon élémentaire et son équilibre pour la démonstration de la formule de Jourawski et notation.

Exemple: poutre console à section rectangulaire

Considérons le cas d'une poutre console homogène à section rectangulaire constante de hauteur a et de largeur b , encastrée en $x = 0$ et soumise à une force transversale $P\mathbf{e}_2$ en $x = L$. On a $A = ES = Eab$, $B = 0$, $D = EI = E a^3 b / 12$. Les équations d'équilibre du modèle de poutre nous donnent $N = 0$, $T = P$, $M = P(L - x)$. Avec les équations (1.27)-(1.28) on trouve l'estimation suivante pour les contraintes 3D:

$$\sigma_{11} = -\frac{M}{I}y = -\frac{12P(L-x)}{a^3b}y, \quad \sigma_{12} = \frac{P}{ab}, \quad \sigma_{13} = 0.$$

Appliquons maintenant l'approche de Jourawski avec des plans de coupure de normale $\underline{n} = \mathbf{e}_2$. Prenons donc $\eta = y$. On trouve $b^*(y) = b$ et

$$m^*(y) = b \int_{-a/2}^y \hat{y} d\hat{y} = b \left. \frac{\hat{y}^2}{2} \right|_{-a/2}^y = \frac{b}{2} \left(y^2 - \frac{a^2}{4} \right)$$

et donc

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{3P}{2ba} \left(\frac{4y^2}{a^2} - 1 \right).$$

Le contraintes de cisaillement ont une distribution parabolique en fonction de l'épaisseur et leur valeur maximale $\frac{RP}{2ba}$ est atteinte sur l'axe de la poutre ($y = 0$). Notons que $\tilde{\sigma}_{12}$ respecte bien les conditions aux limites sur les contraintes 3D en $y = \pm a/2$. Avec cette estimation pour les contraintes de cisaillement, on peut améliorer l'estimation de l'énergie de déformation due au cisaillement et donc celle de la rigidité au cisaillement:

$$\varphi_{1D}^{(\text{shear})} = \int_S \sigma_{12} \epsilon_{12} dy dz = \int_S \frac{\sigma_{12}^2}{2G} dy dz = \frac{b}{2G} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{9P^2}{4b^2 a^2} \left(\frac{4y^2}{a^2} - 1 \right)^2 dy = \frac{P^2}{2} \frac{6}{5G ab}$$

La rigidité au cisaillement F étant définie par $\varphi_{1D}^{(\text{shear})} = F\gamma^2/2 = T^2/2F$, on trouve

$$F = \frac{5}{6} G ab = \kappa GS \quad (1.33)$$

où $\kappa = 5/6$ est le facteur de correction par rapport à l'estimation grossière obtenue en divisant T par la surface de la section droite.

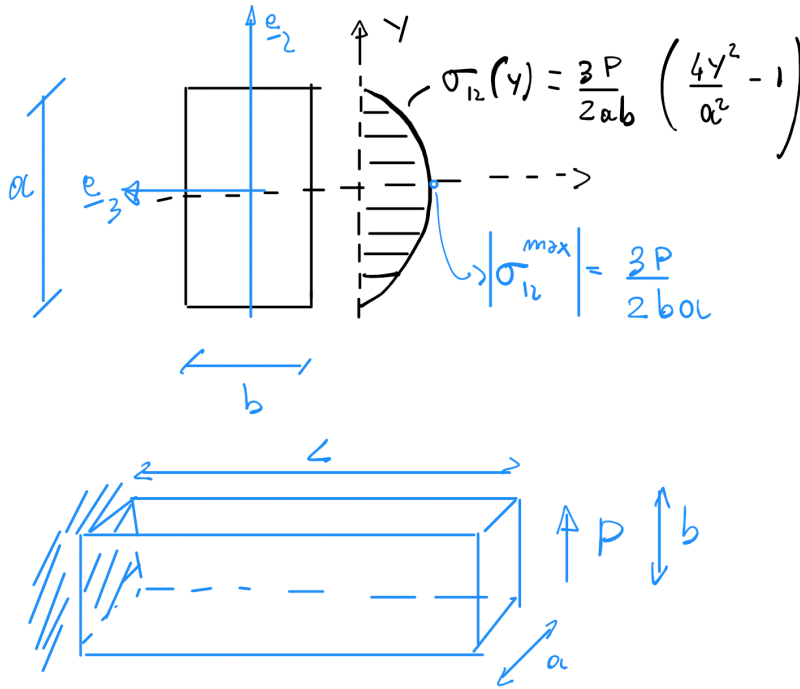


Figure 1.12: Contraintes de cisaillement dans une poutre console à section rectangulaire.

Chapter 2

Approche variationnelle à l'équilibre

Dans cette section on présente brièvement l'approche énergétique à l'équilibre et la stabilité des structures conservatives.

2.1 Principe de minimum de l'énergie potentielle

Soit \mathcal{S} une structure conservative soumise à des charges conservatives, \mathcal{U} l'espace des configurations admissibles pour \mathcal{S} et $\mathcal{E} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ l'énergie potentielle totale de la structure (somme de l'énergie de déformation élastique et de l'énergie potentielle des forces externes). Dans l'approche énergétique on définit les configurations d'équilibre comme les points de stationnarité (stat) de l'énergie parmi toutes les configurations admissibles et les configurations d'équilibre stables comme les minima locaux de l'énergie potentielle.

2.2 Exemple à 1 ddl

On considère le système à 1 degré de liberté constitué d'une barre rigide de longueur L , soumise à une force de compression F , articulée avec un ressort en torsion de rigidité k , au repos pour $\theta = 0$, voir Figure 2.2.

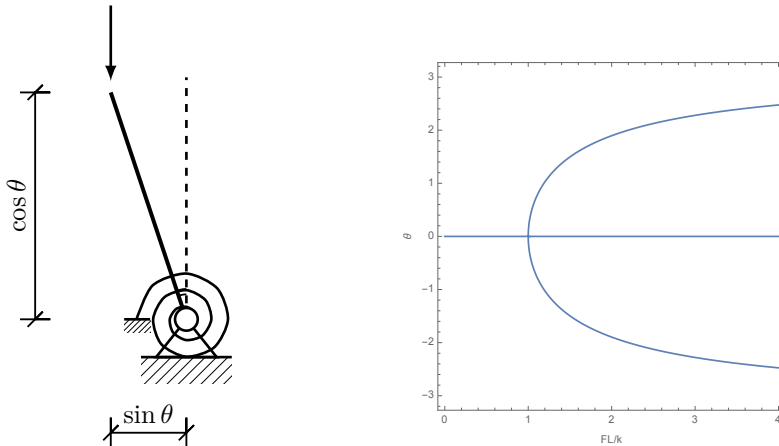


Figure 2.1: Barre rigide avec ressort en torsion et force en compression. Gauche: configuration du système. Droite: diagramme de bifurcation.

On décrit la *configuration* du système par l'angle $\theta \in \mathcal{R}$. On appellera $\mathcal{U} \equiv \{\theta \in \mathcal{R}\}$ espace des configurations

admissibles. L'énergie potentielle du système est une fonction scalaire d'une variable scalaire

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 - FL(1 - \cos \theta)$$

Dans l'approche énergétique, on caractérise les équilibres comme les points de stationnarité de l'énergie dans l'espace des configurations admissibles et les équilibres stables comme les minima locaux de cette fonction. Par définition un minimum local doit vérifier

$$\text{Trouver } \theta \in \mathcal{U} : \exists \bar{h} > 0, \quad \mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

On appelle dans la suite $\hat{\theta}$ *variation*. On utilise cette variation pour tester si un point est un équilibre. Un développement limité à l'ordre 1 en θ nous donne

$$\mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) = \mathcal{E}'(\theta) \hat{\theta} + o(\hat{\theta}) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

Pour tout $\hat{\theta}$ admissible, $-\hat{\theta}$ est admissible, donc à l'ordre 1 la condition de minimalité implique la stationnarité, qui est une condition nécessaire pour avoir un minimum:

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0 \tag{2.1}$$

Cette condition est l'équation d'équilibre de la structure. Pour un θ vérifiant (2.1), un développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle nous donne

$$\mathcal{E}(\theta + \hat{\theta}) - \mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2}\mathcal{E}''(\theta) \hat{\theta}^2 + o(\hat{\theta}^2) \geq 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}, \quad |\hat{\theta}| < \bar{h}.$$

On déduit que

- **Condition suffisante** Si $\mathcal{E}'(\theta) = 0$ et $\mathcal{E}''(\theta) > 0$, θ est un minimum local de l'énergie potentielle et donc un équilibre stable du système.
- **Condition nécessaire** Si $\mathcal{E}'(\theta) = 0$ et $\mathcal{E}''(\theta) < 0$, θ n'est pas un minimum local de l'énergie potentielle et donc il est équilibre instable du système.

Pour notre cas on trouve donc les résultats suivants:

- Les configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \left(\theta - \frac{FL}{k} \sin \theta \right) = 0. \tag{2.2}$$

Une solution possible est $\theta = 0$

- Les équilibres stables sont les solutions de

$$\mathcal{E}'(\theta) = 0, \quad \mathcal{E}''(\theta) = k \left(1 - \frac{FL}{k} \cos \theta \right) > 0$$

Si θ^* est une solution de l'équation d'équilibre, si $\mathcal{E}''(\theta^*) > 0$, alors l'équilibre est stable. Si $\mathcal{E}''(\theta^*) < 0$, l'équilibre est instable. On peut conclure dans notre exemple que $\theta^* = 0$ est un équilibre stable pour $F < k/L$ et instable pour $F > k/L$.

Une étude du système donne le diagramme de bifurcation en figure 2.2.

Remarques:

- **Existence et unicité.** L'équation d'équilibre (2.2) peut admettre plusieurs solutions pour une valeur de paramètres. La possible *non-unicité* des solutions est une caractéristique typique des systèmes non-linéaires. L'existence non plus est garantie en générale.

- **Origine des non-linéarités.** Dans l'exemple en question les non-linéarités sont purement d'origine *géométrique*, la loi du comportement du ressort étant linéaire.
- **Linéarisation.** Un modèle linéarisé de la structure autour d'une position θ^* est obtenu par un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle autour de θ^* :

$$\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta) = \mathcal{E}(\theta^*) + \mathcal{E}'(\theta)(\theta - \theta^*) + \frac{1}{2}\mathcal{E}''(\theta)(\theta - \theta^*)^2$$

L'équation d'équilibre est donnée par la dérivée par rapport à θ de $\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta - \theta^*)$, qui donne une équation linéaire. Evidemment le terme constant du développement $\mathcal{E}(\theta^*)$ n'intervient pas dans l'équation d'équilibre et peut être omis. Dans notre exemple

$$\mathcal{E}_2(\theta^*)(\theta) = \mathcal{E}(\theta^*) + k \left(\theta^* - \frac{FL}{k} \sin \theta^* \right) (\theta - \theta^*) + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \cos \theta^* \right) (\theta - \theta^*)^2$$

La linéarisation autour de la configuration droite $\theta^* = 0$ donne:

$$\mathcal{E}_2(0)(\theta) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \right) \theta^2$$

L'équation d'équilibre pour ce système est donnée par $\mathcal{E}_2(0)'(\theta) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{FL}{k} \right) \theta = 0$. La seule solution est donnée par $\theta = 0$. La solution est unique pour le système linéarisé. On retrouve avec l'étude du signe de $\mathcal{E}_2(0)''(0) = k - FL$ la stabilité de la solution droite.

Exercices

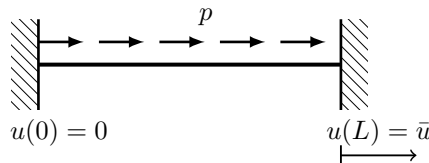
Exercice 2.2-1: Déterminer et résoudre le système linéarisé autour de $\theta^* = \pi/2$. Re-écrire les équations d'équilibre en terme des composantes des déplacements de l'extrémité de la barre.

2.3 Systèmes continus

Le problème modèle de la barre en traction

La configuration d'une structure continue est définie par une (ou plusieurs) fonction(s) de l'espace. L'énergie potentielle est alors une fonction à valeurs scalaires d'une fonction, qu'on appelle *fonctionnelle*. L'espace des *fonctions admissibles* est un espace fonctionnel constitué par toutes les configurations respectant les conditions aux bords "cinématiques" et étant suffisamment régulières pour avoir une énergie potentielle finie.

Problème avec déplacements imposés On considère ici le problème modèle de la barre en traction en figure (homogène, de longueur L , de rigidité $A = ES$). On décrit la configuration de la barre par le déplacement axial $u : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}$, en supposant le déplacement transversal nul. La barre est encastrée aux deux extrémités $x = 0$ et $x = L$, où l'on impose les déplacements $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$, et elle soumise à une force axiale distribuée p , supposée uniforme.



Pour une barre en traction, la densité d'énergie élastique pour unité de ligne est

$$\phi_{1d}(e) = \frac{1}{2}ES e^2$$

où $e = u'(x)$ est la déformation axiale. Pour la barre en figure l'énergie potentielle totale (somme de l'énergie de déformation élastique et de l'énergie potentielle des chargements extérieurs) est donnée par la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)^2 - p u(x) \right) dx \quad (2.3)$$

L'espace des configurations admissibles est constitué par toutes les configuration qui (i) ont une énergie finie et (ii) respectent les conditions aux bords *essentiels* (ou *cinématiques*).¹ Pour avoir $\mathcal{E}(u) < +\infty$ il faut et suffit que la fonction soit dérivable une fois (car la dérivée première apparait dans la fonctionnelle) et que l'intégrale du carré de la dérivée première soit fini. L'espace des fonctions à dérivées à carré intégrable est un espace vectoriel, dit de Hilbert, et il est noté $H^1((0, L))$.

$$\mathcal{C} \equiv \{u : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}, \quad u \in H^1((0, L)), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = \bar{u}\}.$$

On définit aussi l'espace des *variations admissibles* \mathcal{C}_0 , formé par les fonctions v pour lesquelles, si $u \in \mathcal{C}$, alors $u + v \in \mathcal{C}$. Notons en générale que $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ à cause des conditions aux limites non-homogènes. En effet, dans notre cas, s'on prend deux fonctions u et v , leurs somme $w = u + v$ ne respecte pas la condition en L : $w(L) = u(L) + v(L) = 2\bar{u} \neq \bar{u}$. L'espace de variations admissibles doit imposer la *version homogène* des conditions aux limites cinématique. Pour notre exemple:

$$\mathcal{C}_0 \equiv \{v : x \in (0, L) \rightarrow \mathcal{R}, v \in H^1((0, L)), \quad v(0) = 0, v(L) = 0\}$$

Une configuration admissible u est un équilibre s'il est un point de stationnarité de l'énergie, c'est à dire si la variation de l'énergie $\mathcal{E}(u + hv) - \mathcal{E}(u)$ tends vers 0 $h \rightarrow 0$ et cela pour toutes les variations (ou *directions*) v admissibles. Nous pouvons tester cette condition en introduisant la *dérivée directionnelle* de la fonctionnelle \mathcal{E} en u dans la direction v :

$$\mathcal{E}'(u)(v) = \frac{d}{dh} \mathcal{E}(u + hv)|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u + hv) - \mathcal{E}(u)}{h}$$

La condition d'équilibre est alors donnée par la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \quad \mathcal{E}'(u)(v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

Pour l'exemple en question

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(u)(v) &= \frac{d}{dh} \int_0^L \left(\frac{ES}{2} (u'(x) + hv'(x))^2 - p(u(x) + hv(x)) \right) dx|_{h=0} = \int_0^L (ES(u'(x) + hv'(x))v'(x) - pv(x)) dx|_{h=0} \\ &= \int_0^L (ESu'(x)v'(x) - pv(x)) dx \end{aligned}$$

et la formulation variationnelle du problème de recherche des configurations d'équilibre est

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \quad \int_0^L ESu'(x)v'(x) dx = \int_0^L pv(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

En intégrant par partie et en utilisant les conditions $v(0) = v(L) = 0$, on peut réécrire le premier terme sous la forme suivante:

$$\int_0^L ESu'(x)v'(x) dx = \int_0^L -N'(x)v(x) dx + N(L)v(L) - N(0)v(0) = \int_0^L -N'(x)v(x) dx$$

¹En générale, si la densité d'énergie est une fonction des dérivées jusqu'à l'ordre n de u , les conditions aux limites *essentiels* (ou *cinématiques*) sont celles sur la fonction u et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Dans le cas de la barre en traction $n = 1$ est le conditions essentielles sont sur u seulement.

où on a introduit la notation $N(x) = ESu'(x)$. Alors la condition d'équilibre devient:

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \int_0^L (N'(x) + p)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

En utilisant le Lemme Fondamentale du Calculs de Variations² on peut en déduire qu'une fonction admissible u , telle que $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$ est une configuration d'équilibre si et seulement si

$$N'(x) + p = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

Nous avons donc retrouvé en utilisant la méthode énergétique la condition d'équilibre en version "locale" classique pour une barre en traction. En intégrant l'équation d'équilibre et utilisant les conditions aux limites "cinématiques" $u(0) = 0$ et $u(L) = \bar{u}$, on trouve

$$u(x) = \frac{p}{ES} \frac{x(L-x)}{2} + \bar{u} \frac{x}{L}$$

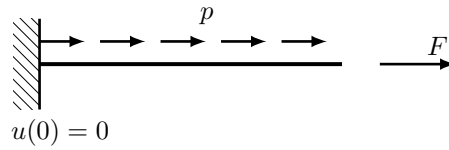
Variante avec force imposée

Pour la barre avec force imposée en $x = L$ (voir Figure) l'énergie potentielle totale est

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)^2 - p u(x) \right) dx - F u(L)$$

et l'espace des fonctions admissible est

$$\mathcal{C} \equiv \{u : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}, \quad u \in H^1([0, L]), \quad u(0) = 0\} \equiv \mathcal{C}_0$$



La formulation variationnelle de la condition d'équilibre est:

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : \int_0^L \left(\frac{ES}{2} u'(x)^2 - p(x)u(x) \right) dx - F u(L) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

et après intégration par parties

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{C} : - \int_0^L (N'(x) + p)v(x)dx + (N(L) - F)v(L) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0$$

où $N(x) = ESu'(x)$. En appliquant le Lemme Fondamental du Calcul des Variations on trouve finalement

$$N'(x) + p = 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad N(L) = F$$

On remarque que l'absence de conditions *essentiels* en $x = L$, donne la possibilité de "jouer" sur la variation arbitraire de $v(L)$ et d'obtenir en conséquence la condition *naturelle* $N(L) = F$. Cette *dualité* entre conditions *essentiels* et *naturelles* est générique et clairement mise en évidence par l'approche variationnelle.

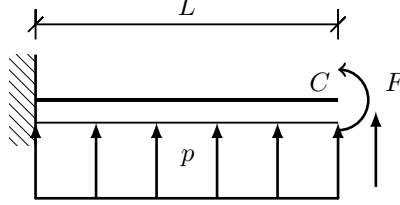
²Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$ une fonction continue. Si, pour toute fonction test $g : (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

alors f est nulle https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_fondamental_du_calcul_des_variations

Variante avec dérivées d'ordre supérieur: flexion d'une poutre d'Euler Bernoulli

On considère le problème de flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli homogène de rigidité en flexion EI et longueur L , encastée en $x = 0$ et avec une force F et une couple C appliqués en $x = L$ (voir figure).



On appelle $v : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}$ le champs de déplacement transversal de la poutre. Dans l'hypothèse des petites perturbations pour le modèle d'Euler-Bernoulli $\theta(x) \simeq v'(x)$ et la courbure est approchée par $k(x) = \theta'(x) \simeq v''(x)$. Pour la barre avec force F et couple C imposés en $x = L$ (voir Figure) et une force distribué pour unité de ligne $p(x)$, l'énergie potentielle totale est

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \frac{EI}{2} v''(x)^2 dx - \int_0^L p(x) v(x) dx - F v(L) - C v'(L).$$

La condition d'énergie finie, implique que les fonctions admissibles doivent être continues, à dérivées premières continues, et à dérivées secondes à carré intégrable (espace fonctionnel H^2). La présence de dérivées d'ordre 2 dans l'expression de l'énergie implique que les conditions aux bords essentielles (ou cinématiques) dans ce cas seront celles sur v et v' . Donc nous pouvons conclure que l'espace de fonctions cinématiques admissibles pour la poutre en figure est:

$$\mathcal{C} \equiv \{v : x \in [0, L] \rightarrow \mathcal{R}, \quad v \in H^2([0, L]), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0\} \equiv \mathcal{C}_0$$

Les conditions aux bords essentielles étant homogènes, \mathcal{C} coïncide aussi avec l'espace des variations admissibles \mathcal{C}_0 . La condition $v'(0) = 0$ traduit le fait que la rotation est bloquée à l'encastrement. La formulation variationnelle de l'équilibre est donnée par la condition de stationnarité de \mathcal{E} :

$$\text{Trouver } v \in \mathcal{C} : \mathcal{E}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L (EI v''(x) \hat{v}''(x) - p(x) \hat{v}(x)) dx - F \hat{v}(L) - C \hat{v}'(L) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}_0.$$

Après deux intégrations par partie, en notant $M(x) = EI v''(x)$ et en tenant en compte que $v(0) = v'(0) = 0$, on trouve:

$$\mathcal{E}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L (M''(x) - p(x)) \hat{v}(x) dx - (M'(L) + F) \hat{v}(L) + (M(L) - C) \hat{v}'(L).$$

Finalement, par application du Lemme Fondamentale du Calculs des Variations, on trouve l'équation d'équilibre

$$M''(x) - p(x) = 0, \quad \forall x \in (0, L)$$

et les conditions aux bords naturelles:

$$M(L) = C, \quad -M'(L) = F$$

ou $M'(x) = EI v'''(x)$. Cela donne, avec les conditions essentielles $v(0) = v'(0) = 0$, une equation différentielle ordinaire linéaire du quatrième ordre à résoudre pour v , avec 4 conditions aux bords.

Cas avec plusieurs fonctions

On considère ici le cas où la fonctionnelle à minimiser depends de plusieurs fonctions inconnues, qui décrivent la configuration du système. On considère l'exemple d'un modèle linéaire d'une poutre dans le plan considéré au chapitre précédent. En considérant un modèle de Timoshenko, la configuration du système est décrite par

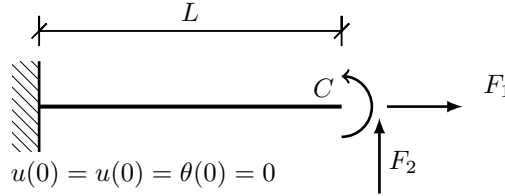
- Le déplacement axial $u : x \in (0, L) \rightarrow u(x) \in \mathcal{R}$
- Le déplacement transversal $v : x \in (0, L) \rightarrow v(x) \in \mathcal{R}$
- La rotation des sections droites $\theta : x \in (0, L) \rightarrow \theta(x) \in \mathcal{R}$

Pour une poutre homogène et isotrope, la densité d'énergie élastique est donnée par

$$\varphi_{1d}(e, k, \gamma) = \frac{A}{2}e^2 + \frac{D}{2}k^2 + \frac{F}{2}\gamma^2$$

et on note par $N = \partial_e \varphi_{1d} = Ae$, $M = \partial_k \varphi_{1d} = Dk$, $T = \partial_\gamma \varphi_{1d} = F\gamma$ l'effort normal, le moment flechissant et l'effort tranchant. On considère le problème modèle en figure, constitué par une poutre console de longueur L , encastée en $x = 0$ et soumise à une force $\underline{F} = F_1 \underline{e}_1 + F_2 \underline{e}_2$ et un couple $\underline{C} = C \underline{e}_3$ en $x = L$. L'énergie potentielle totale est donnée par:

$$\mathcal{E}(u, v, \theta) = \int_0^L \left(\frac{A}{2} u'(x)^2 + \frac{D}{2} \theta'(x)^2 + \frac{F}{2} (v'(x) - \theta(x))^2 \right) dx - F_1 u(L) - F_2 v(L) - C \theta(L) \quad (2.4)$$



$$\mathcal{E}'(v, \theta)(\hat{v}, \hat{\theta}) = D_v \mathcal{E}(v, \theta)(\hat{v}) + D_\theta \mathcal{E}(v, \theta)(\hat{\theta})$$

L'espace des configurations admissibles est

$$\mathcal{U} \equiv \{(u, v, \theta) \in H_1((0, L)) \times H_1((0, L)) \times H_1((0, L)), \quad u(0) = 0, v(0) = 0, \theta(0) = 0\}$$

La condition de stationnarité est

$$\text{Trouver } (u, v, \theta) \in \mathcal{U} : \quad \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) = 0, \quad \forall (u, v, \theta) \in \mathcal{U}_0. \quad (2.5)$$

Par la linéarité de l'opération de dérivation, on a

$$\mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) = \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) + \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) + \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta})$$

Donc la condition de stationnarité (2.5) peut être réécrite sur la forme équivalente:

$$\text{Trouver } (u, v, \theta) \in \mathcal{U} : \quad \begin{cases} \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) = 0, & \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) = 0, & \forall \hat{v} \in \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta}) = 0, & \forall \hat{\theta} \in \mathcal{U}_0 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(u, v, \theta)(\hat{u}, 0, 0) &= \int_0^L N(x) u'(x) dx - F_1 u(L), \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, \hat{v}, 0) &= \int_0^L T(x) v'(x) dx - F_2 v(L), \\ \mathcal{E}'(u, v, \theta)(0, 0, \hat{\theta}) &= \int_0^L M(x) \theta'(x) dx - C \theta(L). \end{aligned}$$

Après intégration par partie et application du lemme fondamental du calcul des variations on trouve que les conditions de stationnarités impliquent les conditions d'équilibre et conditions aux limites naturelles:

$$\begin{aligned} N'(x) &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & N(L) &= F_1, \\ T'(x) &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & T(L) &= F_2, \\ M'(x) + T &= 0 \text{ for } x \in (0, L), & M(L) &= C. \end{aligned}$$

En conclusion, avec cet exemple on a illustré comment dans le cas à plusieurs variables on peut imposer la stationnarité sur chacune des variables indépendamment et obtenir les équations d'équilibre correspondantes.

Functionnelle de champs vectoriels: exemple de l'élasticité linéaire

...

Approche variationnelle et principe des puissances virtuelles

On peut montrer que pour les systèmes conservatifs, la condition de stationnarité de l'énergie potentielle est équivalente au principe des puissances virtuelles. Les variations jouent le rôle des vitesses virtuelles. A différence de l'approche variationnelle, le principe de puissances virtuelles peut s'appliquer aussi aux systèmes non-conservatifs et il est donc d'une majeure généralité. En revanche, pour les systèmes conservatifs, la formulation du problème en terme de la minimisation de l'énergie potentielle permet suivant de dégager des propriétés importantes du problème.

2.4 Approximations variationnelles et discretisation

La méthode variationnelle est très utile aussi pour obtenir des solutions approchées et pour la discrétisation d'un problème continu. On peut en particulier rechercher la solution du problème de minimisation d'un sous-espace $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ de l'espace des fonctions admissibles obtenu comme combinaison linéaire de n fonctions de base connues $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n q_i f_i(x) \tag{2.6}$$

On peut alors définir à partir de l'énergie potentielle d'un système continu $\mathcal{E}(u)$ l'énergie potentielle d'un système discret:

$$\mathcal{E}_n(q_1, \dots, q_n) := \mathcal{E}(u_n)$$

Les conditions de stationnarité pour \mathcal{E}_n

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

donnent alors n équations (possiblement non-linéaires) pour les n inconnues (q_1, \dots, q_n) . On peut montrer que, parmi toutes les fonctions dans \mathcal{U}_n , les solutions de ces conditions de stationnarité représentent la meilleure approximation possible de la solution du problème continu dans la norme de l'énergie. Cette démarche est la même à la base de la méthode des éléments finis. L'approximation sous la forme (2.6) est dite *approximation à la Galérkin*.

Chapter 3

Fils

Pour cette partie J.J.-Marigo MEC430, Edition 2018, section 4.3 *Statique des fils* et Chapitre 7.4 est une excellente référence.

3.1 A 2 dofs model problem

Let us consider the structure in figure ?? consisting of two extensible rods of initial length ℓ_0 articulated by pin-joints. Let us call by ℓ the length of the bars in the deformed configuration and α the angle they form with the \underline{e}_1 axis. The structure is loaded by two dead loads: a transverse force $\underline{Q} = 2Q\underline{e}_2$ in B and a force $\underline{P} = P\underline{e}_2$ in C . We assume that the deformed configuration is symmetric with the rods with the same length ℓ_0 . In the following we will denote the extension of the rods by

$$e = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}.$$

Kinematics. We can describe the configuration of the structure by the coordinate of the point B (x_B, y_B) or by the extension and the orientation (e, α). One can find the following relationships:

$$x_B = (1 + e) \ell_0 \cos(\alpha) = \frac{(1 + e) \ell_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad y_B = (1 + e) \ell_0 \sin(\alpha) = (1 + e) \ell_0 \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}},$$

and, viceversa,:

$$e = \sqrt{\frac{x_B^2}{\ell_0^2} + \frac{y_B^2}{\ell_0^2}} - 1, \quad \alpha = \arctan \frac{y_B}{x_B}.$$

Equilibrium. Let us denote by N the normal stress in each rod. By writing the equilibrium of the points P and Q under the action of the applied forces and the force of intensity N exerted by the rods

$$N \cos \alpha = P, \quad N \sin \alpha = Q, \quad (3.1)$$

from which we find

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \tan \alpha = \frac{Q}{P} \quad (3.2)$$

Constitutive law. We assume that each rod has a linear constitutive behavior and $N = A e$, with $A = ES$.

Solution From the constitutive law and the equilibrium equation we find

$$e = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} \sqrt{1 + \tan^2(Q/P)}, \quad \alpha = \frac{Q}{P}$$

Hence, from the kinematics, we express the position of the point B in terms of the applied forces:

$$\frac{x_B}{\ell_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(Q/P)}} + \frac{P}{A} = 1 + \frac{P}{A} + \frac{(Q/P)^2}{2} + o((Q/P)^3), \quad (3.3)$$

$$\frac{y_B}{\ell_0} = \frac{Q/P}{\sqrt{1 + \tan^2(Q/P)}} + \frac{Q}{A} = \frac{Q}{P} \left(1 + \frac{P}{A}\right) - \frac{(Q/P)^3}{2} + o((Q/P)^5), \quad (3.4)$$

Remarks.

- This structure behaves like a cable: its bending stiffness is null, but it withstands the transversal load only thanks to the normal stress and its change of shape.
- The structure can be regarded as 2-dof model of an extensible cable.
- The equilibrium should be imposed in the deformed configuration. If one tries to impose the equilibrium condition on the initial shape, as done in linear approaches, one finds that the structure cannot withstand transversal loads, i.e. that the equilibrium is possible only for $Q = 0$.

3.2 Parametric representation of a curve in a plane

We consider the deformations of a cable in a plane. In a one-dimensional model, we regard the cable as a curve. To describe its configuration, we need to recall the parametric representation of a curve in a plane.

Generic parametrisation

Let us consider a parametric representation of a curve in a plane in the form

$$\underline{x}(\zeta) = x(\zeta)\underline{e}_1 + y(\zeta)\underline{e}_2, \quad \zeta \in (\zeta_1, \zeta_2 > \zeta_1) \quad (3.5)$$

Let us call by $s(\zeta)$ the *arc-length* of the curve. By Pythagora's theorem, the length ds of an infinitesimal segment of the curve is given by

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (x'(\zeta)^2 + y'(\zeta)^2)d\zeta^2 \quad (3.6)$$

Hence, denoting by $'$ the derivatives with respect to ζ

$$s'(\zeta) := \frac{ds}{d\zeta} = \|\underline{x}'(\zeta)\| = \sqrt{x'(\zeta)^2 + y'(\zeta)^2} \quad (3.7)$$

The total length of the curve is given by:

$$\ell(\underline{x}) = s(\zeta_2) - s(\zeta_1) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \|\underline{x}'(\zeta)\| d\zeta. \quad (3.8)$$

The *tangent vector* is defined

$$\underline{t}(\zeta) := \frac{\underline{x}'(\zeta)}{\|\underline{x}'(\zeta)\|}. \quad (3.9)$$

Being a unit vector, introducing the angle $\alpha(s)$ formed by $\underline{t}(\zeta)$ with the \underline{e}_1 axis, we can write the tangent in the form

$$\underline{t}(\zeta) = \cos \alpha(\zeta) \underline{e}_1 + \sin \alpha(\zeta) \underline{e}_2. \quad (3.10)$$

Let us introduce the associated normal vector

$$\underline{n}(\zeta) = \frac{\underline{t}'(\zeta)}{\|\underline{t}'(\zeta)\|} = \underline{e}_3 \times \underline{t}(\zeta) = -\sin \alpha(\zeta) \underline{e}_1 + \cos \alpha(\zeta) \underline{e}_2 \quad (3.11)$$

The *algebraic curvature* $C(\zeta)$ is defined as the norm of derivative of the angle α with respect to arc-length. Using the chain rule for derivative and that $d\zeta/ds = 1/s'(\zeta)$:

$$C(\zeta) := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\zeta} \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\alpha'(\zeta)}{s'(\zeta)} \quad (3.12)$$

Normal parametrization

The parametrization of a curve is not unique. A parametrization is called *normal* when the arc-length is taken as parameter to describe the curve, *i.e.* $\zeta \equiv s$. In this case several relationships simplify, in particular

$$\underline{x}'(s) = \underline{t}(s) = \cos \alpha(s) \underline{e}_1 + \sin \alpha(s) \underline{e}_2, \quad \|\underline{x}'(s)\| = 1 \quad (3.13)$$

$$C(s) = \alpha'(s), \quad \underline{t}'(s) = C(s)\underline{n}(s), \quad \underline{n}'(s) = -C(s)\underline{t}(s) \quad (3.14)$$

3.3 Variational model for a cable

We consider an extensible cable of length L . The cable is clamped on its left-side and loaded by a distributed force per unit line \underline{p} and by an end-force \underline{F} on its right-end.

Kinematics

Let introduce the following notation:

- The reference configuration of the cable,

$$\{\underline{x}_R(s), s \in (0, L)\}$$

where s is the arc-length in the reference configuration.

- The current configuration of the cable

$$\{\underline{x}(s) = x(s)\underline{e}_1 + y(s)\underline{e}_2, s \in (0, L)\}$$

which is given in terms of the arc-length in the reference configuration. This parametrization is not normal. The arc-length in the current configuration is given by

$$d\tilde{s} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = \|\underline{x}'(s)\| ds.$$

Hence, we denote by

$$e(s) := \frac{d\tilde{s}}{ds} - 1 = \|\underline{x}'(s)\| - 1 \quad (3.15)$$

the *extension* of the cable in its current configuration with respect to the reference configuration.

- $\underline{t}(s)$ the tangent vector to the current configuration

$$\underline{t}(s) = \frac{\underline{x}'(s)}{\|\underline{x}'(s)\|}. \quad (3.16)$$

- $\alpha(s)$ the angle defining orientation of the tangent vector, such that

$$\underline{t}(s) = \cos \alpha(s) \underline{e}_1 + \sin \alpha(s) \underline{e}_2.$$

Using the definition of the tangent vector and the extension, we find the following relation:

$$\underline{x}'(s) = (1 + e(s))\underline{t}(s) \Rightarrow \begin{cases} x'(s) = (1 + e(s)) \cos \alpha(s) = (1 + e(s)) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(s)}} \\ y'(s) = (1 + e(s)) \sin \alpha(s) = (1 + e(s)) \frac{\tan \alpha(s)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(s)}} \end{cases} \quad (3.17)$$

Equilibrium : Variational formulation

- **Variational formulation (energy minimization):**

$$\min_{(\underline{x}) \in \mathcal{C}} \mathcal{E}(\underline{x}, \theta), \quad \mathcal{E}(\underline{x}) = \int_0^L W(\|\underline{x}'(s)\| - 1) ds - \int_0^L \underline{p} \cdot \underline{x} ds - \underline{P} \cdot \underline{x}(L),$$

$$\text{where } \mathcal{C} \equiv \{(\underline{x}, \theta) : s \in (0, L) \rightarrow (\underline{x}(s) \in \mathcal{R}^2, \theta \in \mathcal{R}), \quad (\underline{x}(0) = 0)\}$$

- **Directional derivative.** Let us start computing the directional derivative of the elastic energy density with respect to the kinematical variables. The calculation can be performed with the usual definition of the directional derivative:

$$W'(\underline{x}'(s))(\hat{\underline{x}}'(s)) = \frac{\partial W}{\partial e} \frac{d}{dh} \|\underline{x}'(s) + h\hat{\underline{x}}'(s)\| \Big|_{h=0} = N(s) \frac{\underline{x}'(s)}{\|\underline{x}'(s)\|} \cdot \hat{\underline{x}}'(s) = \underline{R}(s) \cdot \hat{\underline{x}}'(s) \quad (3.18)$$

where we introduce the definitions

$$\underline{R}(s) := N(s)\underline{t}(s), \quad N(s) := \frac{\partial W}{\partial e}$$

Hence for $(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) \in \mathcal{C}_0 \equiv \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\underline{x})(\hat{\underline{x}}) &= \int_0^L \underline{R}(s) \cdot \hat{\underline{x}}'(s) - \underline{p}(s) \cdot \underline{x}(s) ds - \underline{P} \cdot \underline{x}(L) \\ &= \int_0^L -(\underline{R}(s) + \underline{p}(s)) \cdot \hat{\underline{x}}'(s) ds - \underline{P} \cdot \underline{x}(L) \end{aligned} \quad (3.19)$$

where we used that $\underline{x}(0) = 0$ for the given boundary conditions.

- **Local equilibrium conditions.** Using the first order optimality condition

$$\mathcal{E}'(\underline{x})(\hat{\underline{x}}) = 0, \quad \forall (\hat{\underline{x}}) \in \mathcal{C}_0$$

we get the equilibrium equations

$$\underline{R}'(s) + \underline{p}(s) = \underline{0} \quad \underline{R}(L) = \underline{P}, \quad (3.20)$$

Remarks

- Finding the generalizations of the equations above to different boundary conditions and loading is left as an exercise for the reader. One can find, for example, that when considering a point force P_i applied on a generic point s_i , the continuity conditions are:

$$\llbracket \underline{R} \rrbracket(s_i) + \underline{P}_i = \underline{0} \quad (3.21a)$$

$$\llbracket \underline{x} \rrbracket(s_i) = \underline{0} \quad (3.21b)$$

where $\llbracket f \rrbracket(s_i) := f(s_i^+) - f(s_i^-)$ denotes the jump of the function f at s_i .

- The equilibrium equations can be projected in the tangent and normal ($\underline{n}(s) = -\sin \alpha(s)\underline{e}_1 + \cos \alpha(s)\underline{e}_2$) directions to get

$$\begin{cases} N'(s) + p_t(s) = 0 \\ N(s) \alpha'(s) + p_n(s) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

The equations above show that the cable can withstand transversal load with a pure axial stress $N(s)$ thanks to the curvature $\alpha'(s)$.

- For a cable, it is not possible to impose the orientation of the tangent at one end as a Dirichlet boundary condition. If a force is applied to an end, the tangent should be directed as the applied force, see equation (3.20).
- If a cable is free of applied distributed load in a segment, say ($\underline{p}(s) = \underline{0}$ for $s \in (s_1, s_2)$), then the equilibrium configuration in that segment is in the form of a straight line:

$$\underline{p}(s) = \underline{0} \text{ for } s \in (s_1, s_2) \Rightarrow \underline{x}(s) = \underline{x}(s_1) + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}(\underline{x}(s_2) - \underline{x}(s_1)), \quad s \in (s_1, s_2).$$

Showing this result is left as an exercise.

Summary. A possible strategy to solve a problem for a cable is the following application of the *method of forces*, i.e. solving first for the forces and then for the kinematics:

1. Solve the equilibrium equation for $\underline{R}(s)$ with the associated static boundary conditions (i.e. $\underline{R}(L) = \underline{P}$):

$$\underline{R}'(s) + \underline{p}(s) = \underline{0}, \quad (3.23)$$

2. Find the extension and the orientation e, α

$$e(s) = \frac{N(s)}{A} = \frac{\sqrt{R_x^2(s) + R_y^2(s)}}{A} \quad (3.24)$$

$$\alpha(s) = \arctan\left(\frac{R_y(s)}{R_x(s)}\right) \quad (3.25)$$

3. Find the parametric equations for the equilibrium configuration by integrating the following first-order differential equations and use the Dirichlet boundary conditions to determine the constants of integration.

$$x'(s) = (1 + e(s)) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(s)}} \quad (3.26)$$

$$y'(s) = (1 + e(s)) \frac{\tan \alpha(s)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(s)}} \quad (3.27)$$

- If the system includes discontinuities in the form of concentrated applied forces, non-smooth distributed loads, or internal Dirichlet boundary conditions (as pin-joints), one can subdivide the system in multiple regular segments when the equations above hold, and use the continuity conditions (3.21) between the segments.
- If the problem is isostatic, one can determine completely the internal force $\underline{R}(s)$ from the equilibrium equation and the boundary and continuity conditions on \underline{R} . If the system is hyperstatic one will find some of the constant of integration for \underline{R} only at the last steps, when imposing the kinematical boundary conditions.

Equilibrium configuration of a heavy cable (TO WRITE)

For this part see the notes taken in class and the reference [5].

Chapter 4

Poutres avec non-linéarités géométriques: équilibre, stabilité, flambement

4.1 Kinematics and deformation

Configuration

We regard the rod as a curve (its central-line) with an embedded micro-structure, representing the orientation of its cross-section. We focus only on the descriptions of rods in a plane. Hence, we describe the configuration of the point of the rod labelled by the parameter ζ with the placement of the center-line $\underline{x}(\zeta)$ and the orientation of the cross-section at this point $\theta(\zeta)$:

$$\text{Configuration: } \quad \zeta \rightarrow (\underline{x}(\zeta), \theta(\zeta))$$

With the angle, $\theta(\zeta)$ we define the two unit vectors

$$\underline{\tau}(\zeta) = \cos \theta(\zeta) \underline{e}_1 + \sin \theta(\zeta) \underline{e}_2, \quad \underline{\nu}(\zeta) = -\sin \theta(\zeta) \underline{e}_1 + \cos \theta(\zeta) \underline{e}_2$$

representing the normal and tangent to the cross-section, respectively. If the cross-section is orthogonal to the tangent to the axis of the beam

$$\underline{x}'(\zeta) \cdot \underline{\nu}(\zeta) = 0$$

and $\theta(\zeta) = \alpha(\zeta)$, where α is the angle defining the orientation of the center-line (see Section 3.2).

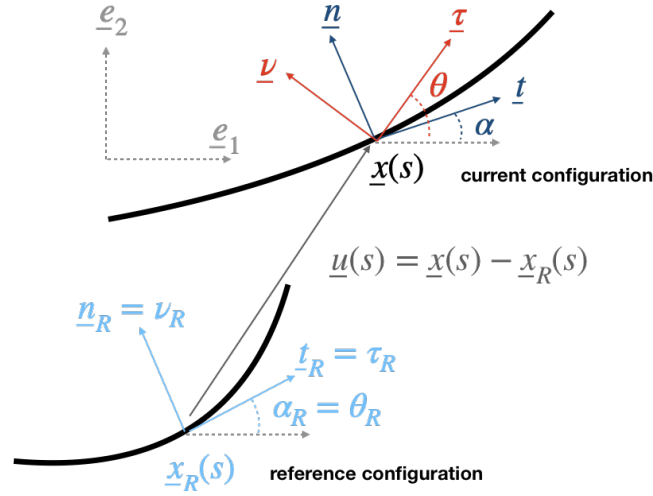
Let us call by s and \mathbf{s} the arc-length in the reference and current configurations of the beam. Using a *Lagrangian* description, we decide to *parametrize both the reference and current configuration by the arc-length of the reference configuration*. Moreover, we define the cross-section to be orthogonal to the axis in the reference configuration, *i.e.* $\theta_R(s) = \alpha_R(s)$ where here and henceforth we use a subscript R to denote quantities of the reference configuration. We have

- Reference configuration $s \rightarrow (\underline{x}_R(s), \theta_R(s) = \alpha_R(s))$, $\|\underline{x}'_R(s)\| = 1$:

$$\underline{t}_R(s) = \cos \alpha_R(s) \underline{e}_1 + \sin \alpha_R(s) \underline{e}_2 = \underline{\tau}_R(s) \quad (4.1)$$

$$\underline{n}_R(s) = \cos \alpha_R(s) \underline{e}_1 + \sin \alpha_R(s) \underline{e}_2 = \underline{\nu}_R(s) \quad (4.2)$$

$$C_R(s) = \alpha'_R(s) \quad (4.3)$$



- Current configuration $s \rightarrow (\underline{x}(s), \theta(s))$, $s'(s) = \|\underline{x}'_R(s)\| \geq 0$:

$$\underline{t}(s) = \cos \alpha(s) \underline{e}_1 + \sin \alpha(s) \underline{e}_2 \quad (4.4)$$

$$\underline{n}(s) = -\sin \alpha(s) \underline{e}_1 + \cos \alpha(s) \underline{e}_2 \quad (4.5)$$

$$\underline{\tau}(s) = \cos \theta(s) \underline{e}_1 + \sin \theta(s) \underline{e}_2 \quad (4.6)$$

$$\underline{\nu}(s) = -\sin \theta(s) \underline{e}_1 + \cos \theta(s) \underline{e}_2 \quad (4.7)$$

$$C(s) = \frac{\alpha'(s)}{s'(s)} \quad (4.8)$$

We define the displacement and relative rotation of the cross section as

$$\underline{u}(s) = \underline{x}(s) - \underline{x}_R(s) \quad (4.9)$$

$$\omega(s) = \theta(s) - \theta_R(s) \quad (4.10)$$

Deformations

The rod is deformed if the difference between the reference and the current configuration is not a rigid motion, the rigid motion being the composition of a translation and a rotation. Measures of deformation for a continuum body are fields that should vanish if and only if the motion is rigid. The measures of deformation are not unique and several definitions are possible.

Deformations of unshearable rod

The rod is *unshearable* if the cross-section remains orthogonal to the tangent to the axis, *i.e.* if

$$\underline{t}(s) \cdot \underline{\nu}(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(s) = \theta(s)$$

We define the following *measures of deformation* :

$$e(s) = \|\underline{x}'(s)\| - 1 \quad (4.11)$$

$$k(s) = \omega'(s) = \alpha'(s) - \alpha'_R(s) \quad (4.12)$$

Clearly $e(s)$ can be interpreted as the extension of the axis, being related to the change of its arc-length. Recalling that $s'(S) = \|\underline{x}'(s)\|$, the arc-length of the current and the reference configurations coincides if and only if $e(s) = 0$. We will denote $k(s)$ as the curvature of the rod. Other measures of deformation are possible.

For example, one could measure the curvature of the rod by the change in the algebraic curvature. The reason for the specific choice above will appear later.

As an exercise, one can verify that the difference between the current and the reference configuration is a rigid motion if and only if $e(s) = k(s) = 0$ (and the rod is unshearable).

Given the deformations, one can find the configuration as $\underline{x}(s)$ and $\theta(s) = \alpha(s)$:

$$\alpha(s) = \alpha_R(s) + \int_0^s k(s^*) ds^* \quad (4.13)$$

$$x(s) = x(0) + \int_0^s (1 + e(s^*)) \cos \alpha(s^*) ds^* \quad (4.14)$$

$$y(s) = y(0) + \int_0^s (1 + e(s^*)) \sin \alpha(s^*) ds^* \quad (4.15)$$

Deformations: initially straight rods

When the reference configuration of the rod is taken to be the straight configuration $\underline{x}_R(s) = s\mathbf{e}_1$, $\alpha_R(s) = 0$ and

$$\underline{x}(s) = (s + u(s))\mathbf{e}_1 + v(s)\mathbf{e}_2,$$

where $u(s)$ and $v(s)$ are the two components of the displacement vector $\underline{u}(s) = u(s)\mathbf{e}_1 + v(s)\mathbf{e}_2$.

Deformations: small perturbations of an unshearable beam about a straight configuration

The expansion of the nonlinear kinematics for moderate rotations θ gives

$$x'(s) = 1 + u'(s) = (1 + e(s)) \cos \theta(s) = (1 + e(s)) \left(1 - \frac{\theta^2(s)}{2} + o(\theta^3(s))\right) \quad (4.16)$$

$$y'(s) = v'(s) = (1 + e(s)) \sin \theta(s) = (1 + e(s)) (\theta(s) + o(\theta^2(s))) \quad (4.17)$$

Hence at the *second order in θ* for **moderate rotations** et **moderate extension** ($e \sim o(\theta)$) we get:

$$u'(s) \simeq e(s) - \frac{\theta^2(s)}{2} \quad (4.18)$$

$$v'(s) \simeq \theta(s). \quad (4.19)$$

Hence the extension and the curvature for an unshearable beam are approached by

$$e(s) \simeq u'(s) + \frac{v'(s)^2}{2}, \quad k(s) \simeq v''(s).$$

For an **inextensible beam without shear deformation**, under the approximation of **moderate rotations**:

$$u'(s) \simeq -\frac{v'(s)^2}{2}.$$

Deformation of a shearable rod

For a shearable, beam we define the deformation as

$$e(s) = \underline{x}'(s) \cdot \underline{\tau}(s) - 1 \quad (4.20)$$

$$\gamma(s) = \underline{x}'(s) \cdot \underline{\nu}(s) \quad (4.21)$$

$$k(s) = \omega'(s) = \theta'(s) - \alpha'_R(s) \quad (4.22)$$

We will denote by e the *extension*, γ the *shear* and $k(s)$ the *curvature*. Note that

$$\underline{x}'(s) = (1 + e(s)) \underline{\tau}(s) + \gamma(s) \underline{\nu}(s)$$

and the definition of e as extension is an abuse of language, since

$$\|\underline{x}'(s)\| - 1 = \sqrt{(1 + e(s))^2 + \gamma(s)^2} - 1$$

and the e defined above coincides with the local change in length of the axis only in the case where the extensional and shear deformations are small or the rod is unshearable.

Given the deformations, one can find the configuration of the rod by integrating the following system of first order differential equations:

$$\theta(s) = \alpha_R(s) + \int_0^s k(s^*) ds^* \quad (4.23)$$

$$x(s) = x(0) + \int_0^s [(1 + e(s^*)) \cos \theta(s^*) - \gamma(s^*) \sin \theta(s^*)] ds^* \quad (4.24)$$

$$y(s) = y(0) + \int_0^s [(1 + e(s^*)) \sin \theta(s^*) + \gamma(s^*) \cos \theta(s^*)] ds^* \quad (4.25)$$

4.2 Equilibrium : Variational formulation

Let us consider a shearable beam clamped on the left end and submitted to a point force \underline{P} on the right end and a distributed load per unit line of the reference configuration $\underline{p}(s)$. Both loads are assumed to be *dead* loads. The deformations and the kinematics are given in the previous section, see (4.22). We derive here the equilibrium equation from the energy minimization principle

- **Variational formulation (energy minimization):**

$$\min_{(\underline{x}, \theta) \in \mathcal{C}} \mathcal{E}(\underline{x}, \theta), \quad \mathcal{E}(\underline{x}, \theta) = \int_0^L W(e(\underline{x}, \theta), \gamma(\underline{x}, \theta), k(\theta)) ds - \int_0^L \underline{p} \cdot \underline{x} ds - \underline{P} \cdot \underline{x}(L),$$

$$\text{where (4.22) et } \mathcal{C} \equiv \{(\underline{x}, \theta) : s \in (0, L) \rightarrow (\underline{x}(s) \in \mathcal{R}^2, \theta \in \mathcal{R}), \quad (\underline{x}(0) = 0, \theta(0) = 0)\}$$

and

$$e(\underline{x}, \theta) = \underline{x}' \cdot \underline{\tau} - 1 \quad (4.26)$$

$$\gamma(\underline{x}, \theta) = \underline{x}' \cdot \underline{\nu} \quad (4.27)$$

$$k(\theta) = \omega' = \theta' - \alpha'_R \quad (4.28)$$

In the expressions above, we rewrite the deformations noting explicitly the dependence on the kinematic variables (\underline{x}, θ) and dropping the dependence on s in the notation for the sake of conciseness. Hence, we have the following expression for the derivatives

$$e'(\underline{x}, \theta)(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) = \hat{\underline{x}}' \cdot \underline{\tau} + \underline{x}' \cdot \underline{\nu} \hat{\theta} \quad (4.29)$$

$$\gamma(\underline{x}, \theta)(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) = \hat{\underline{x}}' \cdot \underline{\nu} - \underline{x}' \cdot \underline{\tau} \hat{\theta} \quad (4.30)$$

$$k(\theta)(\hat{\theta}) = \hat{\theta}' \quad (4.31)$$

- **Directional derivative.** Let us start computing the directional derivative of the elastic energy with respect to the kinematical variables. The calculation can be performed with the usual definition of directional derivative:

$$\begin{aligned} W'(\underline{x}, \theta)(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) &= \frac{\partial W}{\partial e} e'(\underline{x}, \theta)(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \gamma'(\underline{x}, \theta)(\hat{\underline{x}}, \hat{\theta}) + \frac{\partial W}{\partial k} k'(\theta)(\hat{\theta}) \\ &= N(\hat{\underline{x}}' \cdot \underline{\tau} + \underline{x}' \cdot \underline{\nu} \hat{\theta}) + T(\hat{\underline{x}}' \cdot \underline{\nu} - \underline{x}' \cdot \underline{\tau} \hat{\theta}) + M \hat{\theta}' \\ &= (N \underline{\tau} + T \underline{\nu}) \cdot \hat{\underline{x}}' + (N \underline{x}' \cdot \underline{\nu} - T \underline{x}' \cdot \underline{\tau}) \hat{\theta} + M \hat{\theta}' \\ &= \underline{R} \cdot \hat{\underline{x}}' + (\underline{e}_3 \times \underline{R}) \cdot \underline{x}' \hat{\theta} + M \hat{\theta}' \end{aligned} \quad (4.32)$$

where

$$R(s) = N(s)\underline{\tau}(s) + T(s)\underline{\nu}(s), \quad \begin{cases} N(s) = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \\ T(s) = \frac{\partial W}{\partial \gamma} \\ M(s) = \frac{\partial W}{\partial k} \end{cases}$$

Hence for $(\hat{x}, \hat{\theta}) \in \mathcal{C}_0 \equiv \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\underline{x}, \theta)(\hat{x}, \hat{\theta}) &= \int_0^L \underline{R} \cdot \hat{x}' - (\underline{e}_3 \times \underline{x}') \cdot \underline{R} + M\hat{\theta}' - \underline{p} \cdot \underline{x} \, ds - \underline{P} \cdot \underline{x}(L) \\ &= \int_0^L -(\underline{R} + \underline{p}) \cdot \hat{x}' - ((\underline{x}' \times \underline{R}) \cdot \underline{e}_3 + M') \cdot \hat{\theta}' \, ds + M(L)\hat{\theta}(L) - (\underline{R}(L) + \underline{P}) \cdot \underline{x}(L) \end{aligned} \quad (4.33)$$

where we used that $\underline{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ for the given boundary conditions.

- **Local equilibrium conditions.** Using the first order optimality condition

$$\mathcal{E}'(\underline{x}, \theta)(\hat{x}, \hat{\theta}) = 0, \quad \forall (\hat{x}, \hat{\theta}) \in \mathcal{C}_0$$

we get the equilibrium equations

$$\begin{cases} \underline{R}'(s) + \underline{p}(s) = \underline{0} & \underline{R}(L) + \underline{P} = 0, \\ (\underline{x}' \times \underline{R}) \cdot \underline{e}_3 + M' = 0, & M(L) = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

where the second condition can also be rewritten in the form

$$M'(s) + (1 + e(s))T(s) - \gamma(s)N(s) = 0$$

Finding the generalizations of the equations above to different boundary conditions and loading is left as an exercise for the reader. One can find, for example, that when considering a point force P_i or a couple $C_i \underline{e}_3$ applied on a generic point s_i , the continuity conditions are:

$$[[R]](s_i) + \underline{P}_i = \underline{0} \quad (4.35a)$$

$$[[M]](s_i) + C_i = 0 \quad (4.35b)$$

$$[[x]](s_i) = \underline{0} \quad (4.35c)$$

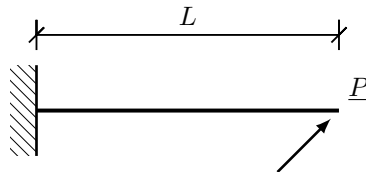
$$[[\theta]](s_i) = 0 \quad (4.35d)$$

4.3 Une hiérarchie de modèles pour des structures élancées

Considérons une modèle monodimensionnel pour la poutre console en figure caractérisé par l'énergie potentielle

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left(\frac{A}{2} e^2 + \frac{F}{2} \gamma^2 + \frac{D}{2} k^2 \right) dx - \underline{P} \cdot \underline{x}(L)$$

où e , γ , κ sont les déformation en extension, cisaillement et flexion dans la configuration actuelle $\underline{x}(s)$, $s \in [0, L]$ étant l'abscisse curviligne de la structure dans la configuration de référence.



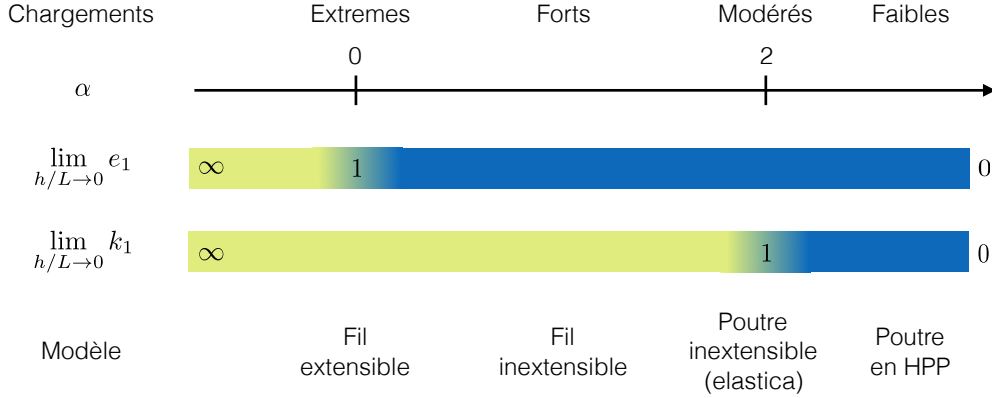


Figure 4.1: Hiérarchie de modèles de poutre en fonction de l'ordre de grandeur du chargement $P_0 = A \left(\frac{h}{L} \right)^\alpha$.

En introduisant les variables sans dimensions définies par les relations suivantes:

$$s^* = s/L, \underline{x}^* = \underline{x}/L, \quad \underline{P}^* = \underline{P}/P_0, \quad k^* = kL, \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}/(PL)$$

on peut récrire l'énergie sous la forme

$$\mathcal{E}^* = \int_0^1 \left(\frac{A}{P_0} \left(\frac{e^2}{2} + \frac{F}{A} \frac{\gamma^2}{2} \right) + \frac{D}{AL^2} \frac{A}{P_0} \frac{k^{*2}}{2} \right) ds^* - \underline{F}^* \cdot \underline{x}^*(1) \quad (4.36)$$

On considère des poutres homogènes à section massive, pour lesquelles (voir Chapitre 1)

$$D/A \sim h^2 \quad F/A \sim 1$$

La condition d'avoir une *énergie de déformation finie* impose des bornes supérieures pour les déformations e , γ , k . Considérons des chargements de l'ordre:

$$P_0 = A \left(\frac{h}{L} \right)^\alpha.$$

Les différents termes de l'énergie élastique seront d'ordre 1 pour

$$(e, \gamma) \sim e_1 := \sqrt{\frac{P_0}{A}} = \left(\frac{h}{L} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad k \sim k_1 := \sqrt{\frac{AL^2}{D} \frac{P_0}{A}} = \left(\frac{h}{L} \right)^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

où l'on fait apparaître explicitement le rapport d'élancement. Dans la limite $h/L \rightarrow 0$ nous pouvons en déduire différentes restrictions sur les déformations en fonction de α . Pour que l'énergie soit finie, l'extension et le cisaillement doivent tendre à 0 comme $(h/L)^{\frac{\alpha}{2}}$ et la courbure k comme $(h/L)^{\frac{\alpha}{2}-1}$, au minimum (elles pourraient être plus petites), voir (4.36) On en déduit le classement des chargements et des modèles correspondants ci-dessous:

- Pour des chargements faibles ($P_0 \ll A(h/L)^2$, $\alpha > 2$) dans la limite $h/L \rightarrow 0$, toutes les déformations doivent tendre vers 0. Nous avons le modèle de poutres de Timoshenko, ou Euler-Bernoulli, en HPP, qui a été présenté au chapitre 1.

- Pour des chargements modérés ($P_0 \sim A(h^2/L)^2$, $\alpha = 2$) dans la limite $h/L \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$. La courbure peut être jusqu'à l'ordre 1 en maintenant une énergie finie. Cela correspond au modèle de poutre inextensible et indéformable au cisaillement en grandes transformations (*Elastica*).
- Pour des chargement forts ($A(h/L)^2 \ll P_0 \ll A$, $0 < \alpha < 2$) dans la limite $h/L \rightarrow 0$, les déformations en extensions et cisaillement doivent tendre vers 0, alors que la courbure peut être très grande sans que l'énergie de déformation soit d'ordre 1. En d'autres termes la courbure n'est plus contrôlée par la condition d'énergie finie. Nous avons le modèle de *fil inextensible*.
- Pour des chargement extrêmes ($P_0 \sim A$, $\alpha = 0$), ni le cisaillement ni la courbure sont contrôlés par la condition d'énergie finie. La déformation en extension peuvent être jusqu'à l'ordre 1, tout en conservant une énergie de déformation finie. Nous avons le modèle de *fil extensible*.
- Des chargement $P_0 \gg A$ ne sont pas supportables dans la limite de l'élasticité linéaire.

Ce type de raisonnement "asymptotique" sur l'estimation des déformations et de l'énergie est à la base des méthodes mathématiques modernes pour la réduction de dimension.

4.4 Elastica

On appelle *Elastica* une poutre inextensible et indéformable au cisaillement en grands déplacements et grandes rotations.

Cinématique.

Pour le cas $e(s) = 0$ et $\gamma(s) = 0$, nous avons:

$$\begin{cases} \alpha(s) = \theta(s) \\ \underline{x}'(s) = \underline{t}(s) \Rightarrow x'(s) = \cos \theta(s), \quad y'(s) = \sin \theta(s) \\ k(s) = \theta'(s). \end{cases}$$

Energie potentielle

Pour le cas d'une poutre console avec une charge morte en compression $\underline{P} = -P\underline{e}_1$ l'énergie potentielle est donnée par

$$\mathcal{E}(\theta, x) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} \theta'(s)^2 \right) ds - (-P)x(L)$$

en utilisant $x'(s) = \cos(\theta)$, l'énergie potentielle peut s'écrire uniquement en fonction de θ :

$$\mathcal{E}(\theta) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} \theta'(s)^2 + P \cos \theta(s) \right) ds$$

Solutions numériques

LA REDACTION DE CE PARAGRAPHE EST INCOMPLETE

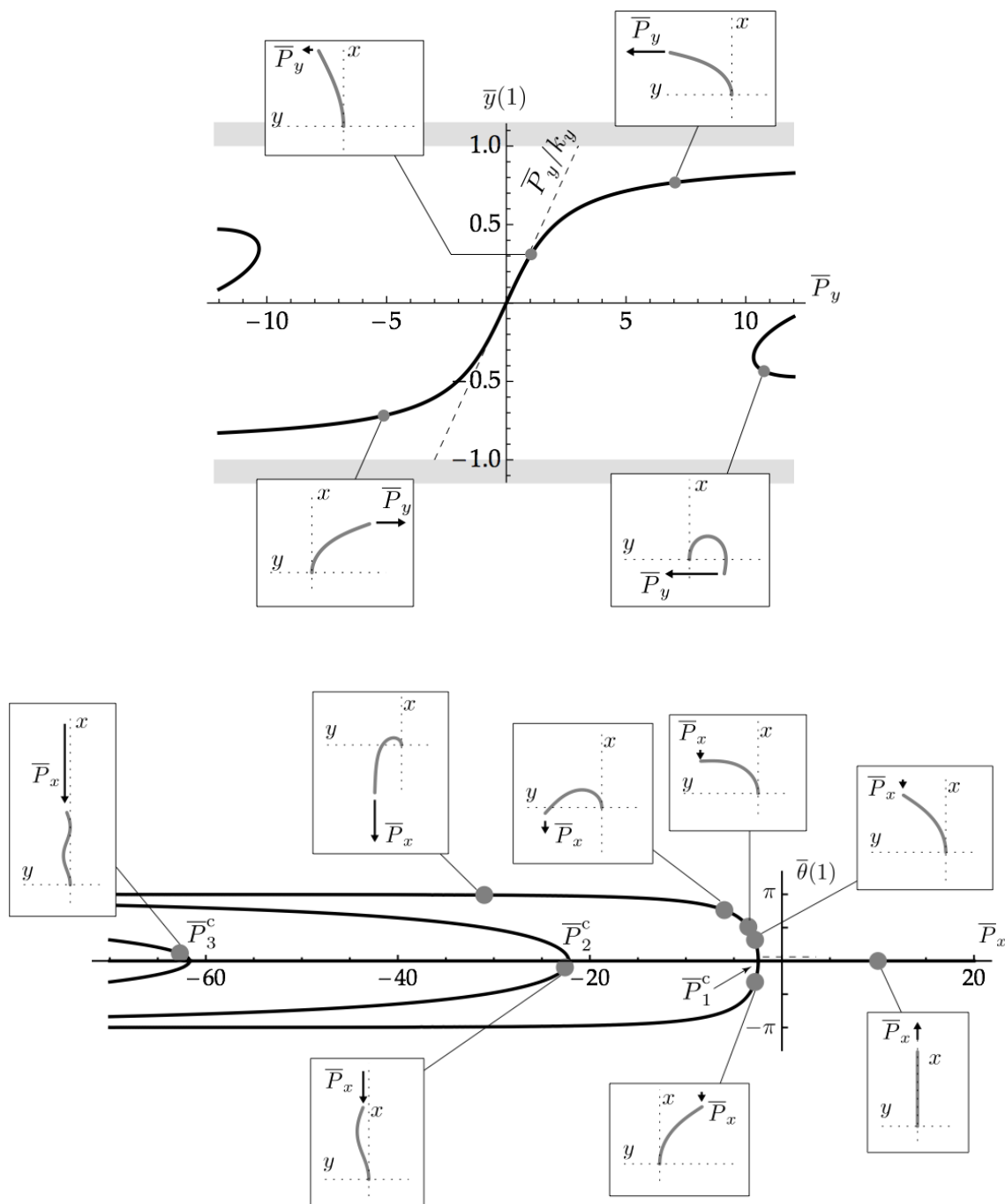


Figure 4.2: Elastica: solutions numériques pour une poutre console avec charge appliquée à l'extrémité. Source: Basile Audoly, Thin Structures, Presse de l'Ecole Polytechnique, Chapitre 1 [1].

4.5 Flambement

Pour des configurations proches de la configuration droite, nous pouvons adopter des modèles simplifiés du point de vue cinématique, tout en étant plus riches que le modèle linéaire utilisé dans la théorie linéaire des poutres. Cela nous donne la possibilité de décrire le phénomène de flambement, notamment les charges critiques et les modes de flambement.

Nous considérons dans la suite le problème modèle d'une poutre console de longueur L avec une charge de compression $\underline{P} = -P\underline{e}_1$ appliquée à l'extrémité $s = L$ et encastrée en $s = 0$.

Modèle en rotations modérées (Von Karman)

L'expansion pour des rotations modérées de la cinématique non-linéaire nous donne

$$x'(s) = 1 + u'(s) = (1 + e(s)) \cos \theta(s) = (1 + e(s)) \left(1 - \frac{\theta^2(s)}{2} + o(\theta^3(s))\right) \quad (4.37)$$

$$y'(s) = v'(s) = (1 + e(s)) \sin \theta(s) = (1 + e(s)) (\theta(s) + o(\theta^2(s))) \quad (4.38)$$

Donc à l'ordre 2 en θ **rotations modérées et faible extension** ($e \sim o(\theta)$):

$$u'(s) \simeq e(s) - \frac{\theta^2(s)}{2} \quad (4.39)$$

$$v'(s) \simeq \theta(s). \quad (4.40)$$

Les déformations en extension et courbure pour une poutre indéformable au cisaillement sont alors approchées par

$$e(s) \simeq u'(s) + \frac{v'(s)^2}{2}, \quad k(s) \simeq v''(s).$$

On en déduit que dans le cas **inextensible et indéformable au cisaillement** pour des **rotations modérées**

$$u'(s) \simeq -\frac{v'(s)^2}{2}.$$

Sous ces hypothèses nous pouvons écrire l'énergie en fonction du déplacement $v(s)$, comme dans la théorie linéaire des poutres (mais en tenant en compte du déplacement axiale induit par la deflexion ci-dessous):

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} v''(s)^2 - \frac{P}{2} v'(s)^2 \right) ds$$

Pour le cas d'une poutre console, l'espace des fonctions admissibles v est

$$\mathcal{V} = \{v \text{ rég.}, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0\} = \hat{\mathcal{V}}$$

La formulation variationnelle de l'équilibre est alors donnée par

$$\text{Trouver } v \in \mathcal{V} : \quad \mathcal{E}'(v)(\hat{v}) = 0, \quad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

Charges et modes de flambement

En écrivant la condition de stationnarité de l'énergie, après intégration par partie et application du lemme fondamental du calcul des variations, on trouve les équations locales d'équilibre et les conditions aux bords suivantes:

$$EI v''''(s) + P v''(s) = 0, \quad \forall s \in (0, L) \quad (4.41)$$

$$EI v''(L) = 0 \quad (4.42)$$

$$EI v'''(L) + P v'(L) = 0 \quad (4.43)$$

$$v(0) = 0 \quad (4.44)$$

$$v'(0) = 0 \quad (4.45)$$

La configuration droite $v = 0$ est toujours un équilibre. Nous cherchons les conditions sous lesquelles des solutions non-nulles sont possibles (charges critiques de flambement et modes de flambement). La solution générale de l'équation d'équilibre est

$$v(s) = a + b s + c \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} s \right) + d \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} s \right) \quad (4.46)$$

Les conditions aux limites nous donnent un système linéaire homogène de 4 équations à 4 inconnues:

$$A \underline{X} = \underline{0}, \quad \underline{X} = [a, b, c, d]^T$$

Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si $\det A = 0$, ce qui nous donne une équation pour P . Les charges critiques $P^{(i)}$ solution de cette équation constituent les *charges critiques de flambement* et les $\underline{X}^{(i)}$ associés définissent par l'intermédiaire de (4.46) les *modes de flambement*. Pour les conditions (4.45), on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\frac{P}{EI}} \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P \cos(L\sqrt{\frac{P}{EI}})}{EI} & -\frac{P \sin(L\sqrt{\frac{P}{EI}})}{EI} \end{pmatrix}, \quad \det A = -P \left(\frac{P}{EI} \right)^{3/2} \cos \left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \quad (4.47)$$

Les charges critiques de flambement sont:

$$P^{(i)} = (2i - 1)^2 \pi^2 \frac{EI}{(2L)^2}, \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

Les modes de flambement sont sous la forme (4.46) avec $b = d = 0$, $a = -c$, voir (4.47). Donc:

$$v^{(i)}(s) = a \left(1 - \cos \frac{(2i - 1)\pi s}{2L} \right) \quad (4.48)$$

où l'amplitude a reste indéterminée.

Pour une poutre sur appuis simples on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{EI} & 0 \\ 1 & L & \cos \left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) & \sin \left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{P \cos(L\sqrt{\frac{P}{EI}})}{EI} & -\frac{P \sin(L\sqrt{\frac{P}{EI}})}{EI} \end{pmatrix}, \quad \det A = -\frac{LP^2 \sin \left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{EI^2}$$

$$P^{(i)} = i^2 \pi^2 \frac{EI}{(L)^2}, \quad v^{(i)}(s) = a \left(\sin \frac{\pi s}{L} \right) \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (4.49)$$

4.6 Stabilité

On se propose d'étudier la stabilité de la configuration droite d'une poutre sous chargement axial. Pour fixer les idées on considère le problème modèle de la **poutre console avec charge de compression P appliquée à l'extrémité libre**. En utilisant l'approximation cinématique de rotations modérées et un modèle de poutre inextensible et indéformable au cisaillement, l'énergie potentielle totale s'exprime sous la forme suivante:

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} v''(s)^2 - P \frac{v'(s)^2}{2} \right) ds, \quad \mathcal{V} = \hat{\mathcal{V}} = \{v \text{ rég.} : v(0) = 0, v'(0) = 0\}$$

Condition de stabilité: positivité de la dérivée seconde

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre on utilise le Principe de Minimum de l'Energie Potentielle:

- Equilibres \Leftrightarrow Points de stationnarité de l'énergie potentielle
- Equilibres stables \Leftrightarrow Minima de l'énergie potentielle

Soit $\mathcal{E}(v)$ l'énergie potentielle totale de la structure et v_e un équilibre. L'équilibre v_e est un minimum de l'énergie potentielle si et seulement si

$$\exists \bar{h} > 0 : \quad \mathcal{E}(v_e + h\hat{v}) - \mathcal{E}(v_e) > 0, \quad \forall h < \bar{h}, \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

Si on considère le développement limité de l'énergie potentielle autour de l'équilibre v_e dans une direction admissible $\hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$ on a:

$$\mathcal{E}(v_e + h\hat{v}) - \mathcal{E}(v_e) = h \mathcal{E}'(v_e)(\hat{v}) + h^2 \mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) + o(h^2)$$

où

$$\mathcal{E}'(v_e)(\hat{v}) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{E}(v_e + h\hat{v}) \right|_{h=0}, \quad \mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) = \left. \frac{d^2}{dh^2} \mathcal{E}(v_e + h\hat{v}) \right|_{h=0}$$

Etant donné que $\mathcal{E}'(v_e)(\hat{v}) = 0$ (équilibre), on en déduit que:

- l'équilibre v_e est stable si

$$\mathcal{E}'(v_e)(\hat{v}) = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) > 0, \quad \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

- l'équilibre v_e est instable si

$$\exists \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}} : \quad \mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) < 0 \quad (\text{un seul suffit!})$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre il est nécessaire d'étudier le signe de la dérivée seconde.

Pour le problème modèle considéré, en appliquant la définition de la dérivée seconde, on trouve:

$$\mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) = \int_0^L (D \hat{v}''(s)^2 - P \hat{v}'(s)^2) ds$$

qu'on peut réécrire sur la forme:

$$\mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) = \mathcal{K}(\hat{v}) - P \mathcal{G}(\hat{v})$$

avec $\mathcal{K}(\hat{v}) = \int_0^L D \hat{v}''(s)^2 ds$ et $\mathcal{G}(\hat{v}) = \int_0^L \hat{v}'(s)^2 ds$ deux formes quadratiques positives pour tout $\hat{v} \neq 0$ appelées *rigidité élastique* et *rigidité géométrique*.

Quotient de Rayleigh

Si on définit, pour tout $v \neq 0$, le **quotient de Rayleigh** comme le rapport de la rigidité élastique sur la rigidité géométrique:

$$\mathcal{R}(\hat{v}) = \frac{\mathcal{K}(\hat{v})}{\mathcal{G}(\hat{v})}$$

on a

$$\mathcal{E}''(v_e)(\hat{v}) = \mathcal{G}(\hat{v})(\mathcal{R}(\hat{v}) - P)$$

$\mathcal{G}(\hat{v})$ étant définie positive, le signe de la dérivée seconde est positif si $P < \mathcal{R}(\hat{v})$ pour tout \hat{v} admissible. En appelant P_c le minimum de \mathcal{R} dans $\hat{\mathcal{V}}$ (il s'agit en réalité d'un infimum dans le cas général car on ne peut pas assurer qu'il soit atteint!): l'équilibre v_e est stable si

$$P < P_c := \inf_{v \in \hat{\mathcal{V}}} \mathcal{R}(v)$$

et instable si $P > P_c$. P_c est la charge limite de stabilité pour l'équilibre v_e de la poutre (dans notre cas la configuration droite).

Nous pouvons utiliser ce résultat de deux façons:

1. Estimation par excès de la charge critique.
2. Calcul exact de la charge critique.

Estimation de la charge critique

Dans le cas général, la résolution du problème de minimisation pour $\mathcal{R}(v)$ est complexe. Néanmoins, nous pouvons utiliser une fonction arbitraire $\hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$ pour donner une estimation de P_c par excès, car

$$P < P_c := \inf_{v \in \hat{\mathcal{V}}} \mathcal{R}(v) \leq \mathcal{R}(\hat{v})$$

A titre d'exemple pour la poutre console avec $\hat{v} = as^2/2$ (admissible) on trouve $\mathcal{K}(\hat{v}) = \int_0^L D\hat{v}''(s)^2 ds = a^2 DL$, $\mathcal{G}(\hat{v}) = \int_0^L \hat{v}'(s)^2 ds = a^2 L^3/3$, $\mathcal{R}(\hat{v}) = 3D/L^2 = 3EI/L^2$ et

$$P < P_c < \frac{3EI}{L^2}$$

On peut conclure que la configuration droite $v = 0$ est instable pour $P > \frac{3EI}{L^2}$. Néanmoins on ne peut pas se prononcer sur la stabilité pour $P < \frac{3EI}{L^2}$.

Calcul exact de la charge critique: minimisation du quotient de Rayleigh

Pour trouver la charge critique P_c de flambement il est nécessaire de résoudre le problème de minimisation¹

$$P_c := \inf_{v \in \hat{\mathcal{V}} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(v)$$

Une solution v^* doit être une fonction dans $\hat{\mathcal{V}}$ qui vérifie la condition de stationnarité:

$$\mathcal{R}'(v^*)(\hat{v}) = 0, \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

¹on écrit inf à la place de min car on ne peut pas assurer que le inf soit atteint en général.

En appliquant la règle de dérivation d'un quotient on obtient

$$\mathcal{R}'(v^*)(\hat{v}) = \frac{\mathcal{K}'(v^*)(\hat{v})\mathcal{G}(v^*) - \mathcal{G}'(v^*)(\hat{v})\mathcal{K}(v^*)}{\mathcal{G}^2(v^*)} = \frac{1}{\mathcal{G}(v^*)}(\mathcal{K}'(v^*)(\hat{v}) - P_c \mathcal{G}'(v^*)(\hat{v}))$$

où dans le dernier passage on a utilisé la définition $P^* = \mathcal{K}(v^*)/\mathcal{G}(v^*)$. La condition de stationnarité du quotient de Rayleigh peut se formuler comme un problème aux valeurs propres: trouver $P_c > 0$ et $v^* \in \hat{\mathcal{V}}$ tel que

$$\mathcal{K}'(v^*)(\hat{v}) - P^* \mathcal{G}'(v^*)(\hat{v}) = 0, \quad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

Il est possible de montrer (théorème spectral) qu'il existe un ensemble dénombrable de solutions de ce problème aux valeurs propres P_i^*, v_i^* . Donc, $P_c = \inf_i \{P_i^*\}$ et on peut conclure avec la condition de stabilité suivante.

Condition de stabilité.

Soit $P_i^* > 0$ et $v_i^* \in \hat{\mathcal{V}} \setminus 0$ tels que

$$\mathcal{K}'(v_i^*)(\hat{v}) - P_i^* \mathcal{G}'(v_i^*)(\hat{v}) = 0, \quad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}} \quad (4.50)$$

et $P_c = \inf_i P_i^*$ où \mathcal{K} et \mathcal{G} sont des formes quadratiques définies positives telles que $\mathcal{E}''(v)(\hat{v}) = \mathcal{K}(\hat{v}) - P \mathcal{G}(\hat{v})$. La structure est:

- **stable** pour $P < P_c$
- **instable** pour $P > P_c$.

Application

Pour le problème modèle de la poutre encastrée-libre:

$$\mathcal{K}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L Dv''(s)\hat{v}''(s) ds, \quad \mathcal{G}'(v)(\hat{v}) = \int_0^L v'(s)\hat{v}'(s) ds$$

Le problème aux valeurs propres est

$$\text{Trouver } P \text{ et } v \in \hat{\mathcal{V}} \setminus 0 : \int_0^L Dv''(s)\hat{v}''(s) - P v''(s)\hat{v}'(s) ds = 0, \quad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}$$

On note que ce problème coïncide avec celui de la recherche des modes propres de flambement, pour lequel on a déjà calculé les solutions. On a

$$P^i = i^2 \pi^2 \frac{EI}{(2L)^2}, \quad v_i(s) = A \left(1 - \cos \frac{\pi s}{2L} \right), \quad \forall i > 0 \in \mathcal{N}$$

et

$$P_c = P_1 = \pi^2 \frac{EI}{(2L)^2}$$

On conclut que la configuration droite de la poutre est stable pour $P < P_c$ et instable pour $P > P_c$.

4.7 Post-flambement

L'analyse de flambement et stabilité de la solution droite montre que pour $P > P_c$ la configuration droite n'est plus stable. Une nouvelle configuration d'équilibre est possible pour $P = P_c$. La solution du problème de flambement nous donne la *forme* de cette solution d'équilibre. Néanmoins son amplitude reste indéterminée. Le but de cette section est d'illustrer une stratégie pour déterminer l'amplitude de la solution flambée, au

moins pour P proche de P_c . Différentes approches sont possibles (méthodes asymptotiques, des approches purement numériques, solution exacte sous forme d'intégrales elliptiques). On choisit ici d'adopter une approche simplifiée, qui a le mérite de donner une vision qualitative du problème et de pouvoir s'étendre facilement à de problèmes plus complexes. Cette approche est aussi adoptée dans les codes de calculs aux éléments finis (avec les adaptations nécessaires).

Approximation du quatrième d'ordre sur les rotations

Pour une poutre inextensible et indéformable au cisaillement, initialement droite, avec une charge de compression $\underline{P} = -P\mathbf{e}_1$ appliquée à l'extrémité, l'énergie potentielle est:

$$\mathcal{E}(\theta) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} \theta'(s)^2 - P(1 - \cos \theta(s)) \right) ds$$

Nous avons:

$$1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + o(\theta^6)$$

Dans la théorie linéaire des poutres on néglige tous les termes d'ordre supérieur à 1 en θ (cinématique linéaire): cela revient à négliger tout déplacement axial induit par la rotation de l'axe de la poutre. Avec ce modèle à cinématique linéaire on n'est pas capable de prédire le phénomène du flambement. Si on retient seulement le terme à l'ordre 2 dans ce développement limité, un obtient un modèle équivalent à celui utilisé dans la section précédente. Il s'agit d'un modèle capable de prédire correctement la charge critique de flambement et les modes de flambement, mais pas le régime post-critique. On note en particulier que les amplitudes des modes de flambement sont indéterminées dans ce modèle. Nous étudions ici le régime post-critique (post-flambement) en incluant les termes jusqu'à l'ordre 4 dans le développement limité. Dans ce cadre la description cinématique utilisant la rotation θ est plus pratique que celle utilisant les composantes u et v du déplacement (à cause de la simplification dans l'écriture du terme d'énergie élastique due à la courbure). A l'ordre 4 en θ on obtient le développement suivant de l'énergie potentielle:

$$\mathcal{E}_4(\theta) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} \theta'(s)^2 - P \left(\frac{\theta(s)^2}{2} - \frac{\theta(s)^4}{24} \right) \right) ds$$

Pour la poutre console, le problème de recherche des équilibres stables de la structure se formalise comme suit:

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathcal{E}_4(\theta), \quad \text{avec } \Theta = \{\theta \text{ rég.}, \theta(0) = 0\}.$$

On peut en principe écrire la condition de stationnarité et en déduire des équations locales d'équilibre avec des conditions aux bords. Il s'agira néanmoins d'une équation différentielle non-linéaire dont la résolution s'avère complexe. On propose ici une stratégie pour obtenir une approximation discrète de la solution. C'est la stratégie la plus utilisée dans les applications.

Approximations sur base modale

On peut développer des modèles approchés de la structure (*approximations de type Galerkin*) en recherchant des solutions dans des sous-espaces de Θ sous la forme

$$\theta_n(s) = f_0 + \sum_{i=1}^n q_i f_i(s), \quad \text{avec } f_i \in \hat{\Theta}, \quad f_0 \in \Theta$$

f_i et f_0 étant des fonctions connues et supposées constituer une bonne *base* pour décrire la solution du problème. Le problème se réduit donc à la recherche de $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_n\}$ *optimaux* pour chaque valeur de la charge. Une façon naturelle de poser ce problème (discret) est de chercher la solution de

$$\min_{\underline{q} \in R^n} E(\underline{q}) = \mathcal{E}(\theta_n) = \mathcal{E} \left(f_0 + \sum_{i=1}^n q_i f_i \right)$$

ce qui correspond à un problème de minimisation d'une fonction E de n variables $\{q_1, \dots, q_n\}$. L'approximation discrète des conditions d'équilibre est donnée par les n équations (algébriques non-linéaires) $\partial E / \partial q_i = 0$. La condition approchée de stabilité d'un équilibre est alors donnée par l'étude du signe de la matrice hessienne $H_{ij} = \partial^2 E / \partial q_i \partial q_j$ (voir cours LA3M3). Dans le cas du flambement un choix naturel pour f_0 et les coefficients f_i est donné par la solution fondamentale $\theta = 0$ et par les modes de flambement $\theta^{(i)}$ (il s'agit bien de fonctions admissibles!). On développe ici cette approche pour $n = 1$.

Analyse de post-flambement par approximation sur le premier mode.

On peut développer une solution valide pour P proche de P_c en utilisant une approximation incluant seulement le premier mode de flambement $\theta_1(s)$, i.e. en recherchant des solutions sous la forme suivante:

$$\theta(s) = q_1 \theta_1(s)$$

Pour des solutions sur cette forme, l'énergie potentielle s'écrit sous la forme

$$E(q_1) = \left(\frac{D}{L} a_1 - PL a_2 \right) \frac{q_1^2}{2} + a_3 PL \frac{q_1^4}{24} \quad (4.51)$$

où

$$a_1 = L \int_0^L \theta_1'(s)^2 ds > 0 \quad a_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \theta_1(s)^2 ds > 0, \quad a_3 = \frac{1}{L} \int_0^L \theta_1(s)^4 ds > 0,$$

Les équilibres sont solutions de

$$E'(q_1) = \frac{D}{L} \left(\left(a_1 - \frac{PL^2}{D} a_2 \right) q_1 + a_3 \frac{PL^2}{D} \frac{q_1^3}{6} \right) = 0$$

Cette équation admet la solution $q_1^{(1)} = 0$ pour tout P et

$$q_1^{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{6a_2}{a_3} \left(1 - \frac{a_1 D}{a_2 PL^2} \right)}, \quad \text{pour} \quad P > \frac{a_1 D}{a_2 L^2}.$$

On a donc déterminé une approximation

$$\theta(s) = \pm \sqrt{\frac{6a_2}{a_3} \left(1 - \frac{a_1 D}{a_2 PL^2} \right)} \theta_1(s)$$

des solutions pour des charges supérieures à la charge critique de flambement.

Si on considère le problème modèle de la poutre console, les modes de flambement ont été déterminés précédemment. Le premier mode écrit en fonction de l'angle θ est ² $\theta_1(s) = \sin \frac{\pi s}{2L}$. On calcule:

$$a_1 = \frac{\pi^2}{8}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{8}.$$

Donc pour

$$P > \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = P_c$$

les solutions bifurquées sont

$$\theta(s) = \pm \sqrt{8 \left(1 - \frac{P_c}{P} \right)} \sin \frac{\pi s}{2L} = \pm \sqrt{8 \left(\frac{P}{P_c} - 1 \right)} \sin \frac{\pi s}{2L} + o \left(\frac{P}{P_c} - 1 \right).$$

²Dans le modèle à l'ordre 2 en θ utilisé pour le flambement $\theta(s) = v'(s)$.

Bibliography

- [1] B. Audoly. *Structures élancées (MEC 553)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2010.
- [2] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry*. Oxford University Press, 2010.
- [3] P. Ballard. *Structures élancées (MEC 553)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2008.
- [4] J.-P. Basset et al. *Introduction à la résistance des matériaux*. Ecole d'ingénieurs. Nantes, 2007. URL: <https://hal-univ-tlse3.archives-ouvertes.fr/EC-NANTES/cel-00594957v1>.
- [5] J.J. Marigo. *Mécanique des Milieux Continus (MEC430)*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 2018.
- [6] F. Valdoire and Y. Bamberger. *Mécanique des Structures*. Presses de l'ENPC, 2008.