UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

master SdI électronique mécanique

Devoir surveillé

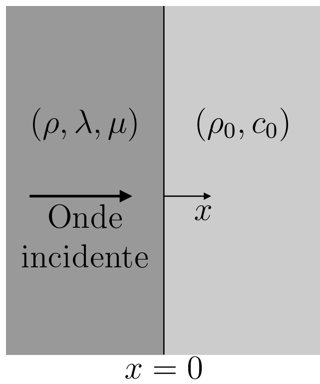
—

Ondes

Sans document — sans calculatrice

Réflexion et transmission d'une onde plane

On considère une interface située en $x = 0$ séparant un solide isotrope homogène caractérisé par la masse volumique ρ et les coefficients de Lamé λ et μ et un fluide parfait caractérisé par la masse volumique ρ_0 et la célérité du son c_0. On s'intéresse à la réflexion et à la transmission d'une onde plane harmonique de pulsation ω se propageant dans le solide. On sait qu'il existe un couplage entre les ondes longitudinale et transverse lors de l'interaction avec une interface. L'objectif de cet exercice est d'étudier ce couplage dans le cas d'ondes se propageant en incidence normale.



On rappelle que le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ dans un matériau solide isotrope s'exprime en fonction du tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$ par la loi de Hooke :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \overline{\overline{I}}\ \mathrm{Tr}\, \overline{\overline{\varepsilon}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}}.$$

1. Donner les expressions des vitesses des ondes longitudinales c_L et transverses c_T.

On a $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$.

1 Onde longitudinale incidente

On s'intéresse dans un premier temps à la propagation d'une onde plane longitudinale incidente. Le champ de déplacement associé à cette onde a pour expression

$$\overline{u}_i(x,t) = A \overline{e}_x e^{j(\omega t - k_L x)} \qquad \text{avec} \qquad k_L = \omega / c_L.$$

2. Justifier l'expression du champ de déplacement de l'onde incidente.

L'onde incidente est une onde plane harmonique de pulsation ω. Sa dépendance temporelle et spatiale doit alors être décrite par la fonction

$$e^{j(\omega t - jk_L x)}.$$

De plus, l'onde incidente étant une onde longitudinale, sa polarisation doit être colinéaire à la direction de propagation.

3. Donner l'expression de la composante non nulle du tenseur des déformations associée à l'onde incidente.

La composante non nulle du tenseur des déformations associée à l'onde incidente a pour expression

$$\varepsilon_{xx}^{i} = -jk_L A e^{j(\omega t - jk_L x)}.$$

4. Donner l'expression de la composante non nulle du tenseur des contraintes associée à l'onde incidente.

La composante non nulle du tenseur des contraintes associées à l'onde incidente a pour expression

$$\sigma_{xx} = -j(\lambda + 2\mu)k_L A e^{j(\omega t - jk_L x)} = -j\omega Z_L A e^{j(\omega t - jk_L x)}.$$

L'interaction de l'onde incidente avec la paroi donne naissance à deux ondes réfléchies dans le solide : une onde longitudinale et une onde transverse. Les champs de déplacement associés à ces deux ondes ont pour expressions respectives

$$\begin{cases} \overline{u}_L(x,t) = r_L A \overline{e}_x e^{j(\omega t + k_L x)}, \\ \overline{u}_T(x,t) = r_T A \overline{e}_y e^{j(\omega t + k_T x)} \qquad \text{avec} \qquad k_T = \omega / c_T, \end{cases}$$

où r_L et r_T sont les coefficients de réflexion en amplitude de déplacement respectivement pour l'onde longitudinale et l'onde transverse.

5. Donner les expressions des composantes non nulles des tenseurs des déformations associées aux deux ondes réfléchies.

Les composantes non nulles du tenseur des déformations associées aux deux ondes réfléchies ont pour expressions

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{L} = jk_L r_L A e^{j(\omega t + k_L x)}, \\ \varepsilon_{xy}^{T} = j\dfrac{k_T r_T}{2} A e^{j(\omega t + k_T x)}. \end{cases}$$

6. Donner les expressions des composantes non nulles du tenseur des contraintes associées aux deux ondes réfléchies.

Les composantes non nulles des tenseurs des contraintes associés aux deux ondes réfléchies ont pour expressions

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{L} = j(\lambda + 2\mu)k_L r_L A e^{j(\omega t + k_L x)} = j\omega Z_L r_L A e^{j(\omega t + k_L x)}, \\ \sigma_{xy}^{T} = j\mu k_T r_T A e^{j(\omega t + k_T x)} = j\omega Z_T r_T A e^{j(\omega t + k_T x)}. \end{cases}$$

Une seule onde est transmise dans le fluide. Le champ de déplacement de cette onde est défini par la relation

$$\overline{u}_a(x,t) = A t_f \overline{e}_x e^{j(\omega t - k_0 x)} \qquad \text{avec} \qquad k_0 = \omega / c_0,$$

où t_f est le coefficient de transmission en amplitude de déplacement de l'onde transmise dans le fluide.

7. Quelle est la nature de l'onde transmise dans le fluide. Pourquoi une seule onde est-elle transmise dans le fluide parfait ?

L'onde transmise est obligatoirement une onde longitudinale, car les ondes transverses ne se propagent pas dans les fluides.

8. En faisant usage de l'équation de conservation de la masse et de la loi d'état $p_a = \rho_a c_0^2$, où p_a est la pression acoustique et ρ_a est la variation de densité dans le fluide, montrer que la pression acoustique peut être exprimée par la relation

$$p_a(x,t) = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \overline{u}_a(x,t)$$

L'équation de conservation de la masse ayant pour expression

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \overline{v}_a = 0,$$

on peut écrire directement

$$\rho_a + \rho_0 \operatorname{div} \overline{u}_a = 0,$$

d'où

$$p_a = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \overline{u}_a.$$

9. Déduire de la question précédente l'expression de la pression acoustique dans le fluide.

On a directement

$$p_a = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \overline{u}_a = j\rho_0 k_0 c_0^2 A t e^{j(\omega t - k_0 x)} = jZ_0 \omega A t e^{j(\omega t - k_0 x)}.$$

10. Exprimer les conditions aux frontières à l'interface $z = 0$.

Les conditions aux frontières sont la continuité des contraintes et des déplacements normaux à l'interface $x = 0$,

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^i + \sigma_{xx}^L = -p_a, & \text{en} \quad z = 0, \\ \sigma_{xy}^T = 0, & \text{en} \quad z = 0, \\ \overline{u}_i.\overline{e}_x + \overline{u}_L.\overline{e}_x = \overline{u}_a.\overline{e}_x, & \text{en} \quad z = 0. \end{cases}$$

11. Appliquer les conditions aux frontières et en déduire un système de trois équations à trois inconnues r_L, r_T et t. En déduire les expressions de r_L, r_T et t.

Les conditions aux frontières sont la continuité des champs de pression et des vitesses normales à l'interface,

$$\begin{cases} -Z_L + Z_L r_L = -Z_0 t, \\ r_T = 0, \\ 1 + r_L = t. \end{cases}$$

On déduit tout de suite que le coefficient de réflexion r_T est nul. Il n'y a donc pas d'onde transverse réfléchie. Les coefficients de réflexion r_L et de transmission t ont alors pour expressions respectives :

$$\begin{cases} r_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}, \\ t = \dfrac{2Z_L}{Z_L + Z_0}. \end{cases}$$

2 Onde transverse incidente

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde plane transverse incidente. Le champ de déplacement associé à cette onde a pour expression

$$\overline{u}_i(x,t) = A\overline{e}_y e^{j(\omega t - k_T x)}.$$

On considère toujours que deux ondes sont réfléchies dans le solide et une seule onde est transmise dans le fluide. Les champs de déplacement, de contraintes et de pression calculées dans la première partie peuvent être repris.

12. Justifier l'expression du champ de déplacement de l'onde incidente.

L'onde incidente est une onde plane harmonique de pulsation ω. Sa dépendance temporelle et spatiale doit alors être décrite par la fonction

$$e^{j(\omega t - jk_T x)}.$$

De plus, l'onde incidente étant une onde transverse, sa polarisation doit être orthogonale à la direction de propagation.

13. Donner les expressions des composantes non nulles des tenseurs des déformations et des contraintes associées à l'onde incidente.

La composante non nulle du tenseur des déformations associée à l'onde incidente a pour expression

$$\varepsilon^i_{xy} = -j\frac{k_T r_T}{2} A e^{j(\omega t - k_T x)},$$

et celle du tenseur des contraintes a pour expression

$$\sigma^i_{xy} = -j\mu k_T r_T A e^{j(\omega t - k_T x)} = -j\omega Z_T r_T A e^{j(\omega t - k_T x)}.$$

14. Appliquer les conditions aux frontières et en déduire un système de trois équations à trois inconnues. En déduire r_L, r_T et t.

Les conditions aux frontières sont la continuité des champs de pression et des vitesses normales à l'interface,

$$\begin{cases} Z_L r_L = -Z_0 t, \\ 1 + r_T = 0, \\ r_L = t. \end{cases}$$

On déduit tout de suite que les coefficients r_L et t sont nuls. Il n'y a donc pas d'onde longitudinale réfléchie et d'onde transmise dans le fluide. Le coefficient de réflexion est égal à $r_T = -1$.

15. Pour quel type de condition limite peut-on obtenir les mêmes coefficients r_L, r_T et t qu'à la question précédente.

Si la paroi est libre, le coefficient de réflexion est directement égal à -1.

16. Si on souhaite générer des ondes acoustiques dans un liquide à l'aide d'un matériau en contact avec le liquide, quel type d'onde doit être généré dans le solide ?

Une onde longitudinale, évidemment.