Corrigé examen LA392 - 4/11/2014 (1)

Questions de cours.

1) $Lu = f$ $L \to$ opérateur linéaire ($L(\lambda u + v) = \lambda L(u) + L(v)$.)

Ex EDP linéaire $O(2)$: $\Delta u = 0$

2) $a u_x + b u_y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \iff ay - bx = c_1$$

$$\text{ou } bx - ay = c_2$$

$O(0,0) \in$ courbe caractéristique $\Rightarrow$ au final: $\boxed{y = \frac{b}{a} x}$

3) Pb. hyperbolique : la (les) singularité(es) se déplacent ~~[illegible]~~ à une vitesse finie (elles ne sont pas lissés)

Pb. parabolique : singularités immédiatement lissées.

5) Pb. de Cauchy pour diffusion 1D.

4) $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \iff$ 2 ondes qui se déplacent à gauche et resp. à droite à vitesse de c.

6) En utilisant la dém. du principe de max ; si le max se trouve ds un point (x_0, t_0) alors les $u_t = 0$ et $u_{xx} \le 0$.

Or, d'après notre pb. $\underbrace{u_t}_{=0} - \overbrace{\underbrace{u_{xx}}_{\le 0}}^{\ge 0} = \overbrace{-(t^2 + x^2)}^{< 0}$

Donc contradiction pour un point (x_0, t_0) intérieur au domaine.

(2)

Exo 1 $u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0$.

(a) $\delta = 9 + 16 = 25 > 0$ ég. hyperbolique

(b) $A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$.

$C = A = 0$.

$\Leftrightarrow (\xi_x - 2\xi_y)(\xi_x + 8\xi_y) = 0$.

$\Leftrightarrow$ (1) $\xi_x - 2\xi_y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2 \Leftrightarrow 2x + y = cte$

(2) $\eta_x + 8\eta_y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 8 \Leftrightarrow y - 8x = cte$

Donc : $\begin{cases} \xi(x,y) = 2x + y \\ \eta(x,y) = -8x + y \end{cases}$

$J = 2 \times 1 - 1 \times (-8) \neq 0$ donc on a bien une transformation non-dégénérée.

$u_x = 2u_\xi - 8u_\eta$

$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 32u_{\eta\xi} + 64u_{\eta\eta}$

$u_y = u_\xi + u_\eta$

$u_{yy} = u_\xi + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$u_{xy} = 2u_{\xi\xi} - 6u_{\eta\xi} - 8u_{\eta\eta}$

Forme standart : $u_{\eta\xi} = 0$

De sol : $u(\xi, \eta) = D(\xi) + E(\eta) =$

Exo 3 (chaleur avec dissipation) :

$$u(t,x) = e^{-b\frac{t^3}{3}} v(t,x)$$

$$u_t = -bt^2 e^{-b\frac{t^3}{3}} v + e^{-b\frac{t^3}{3}} v_t$$

$$u_{xx} = e^{-b\frac{t^3}{3}} v_{xx}$$

$$u_t - Ku_{xx} + bt^2 u =$$

$$= \cancel{-bt^2 e^{-b\frac{t^3}{3}}} v + e^{-b\frac{t^3}{3}} v_t -$$

$$- K e^{-b\frac{t^3}{3}} v_{xx} + bt^2 \cancel{e^{-b\frac{t^3}{3}}} v = 0$$

$$v_t - K v_{xx} = 0.$$

$$u(x,0) = v(x,0) = \phi(x).$$

Sol. fondamentale :

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} \phi(y)\, dy$$

Donc $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi K t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt} - b\frac{t^3}{3}} \phi(y)\, dy.$

Exo 4)

i) + ii) $u(x,y,t) = v(x,t)\, Y(y)$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

$$v_t Y = v_{xx} Y + v Y'' \quad \Big| : vY$$

$$\Rightarrow \frac{v_t - v_{xx}}{v} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad , \lambda > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) = 0 \Rightarrow Y'(1) = 0$$

EDO en Y : $Y'' + \lambda Y = 0$

$Y'(0) = 0$

$Y'(1) = 0$.

On cherche $\lambda = \beta^2$.

$$Y(y) = A\cos(\beta y) + B\sin(\beta y)$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

$$Y'(1) = 0. \Rightarrow -A\beta\sin(\beta) = 0.$$

$A = 0$ impossible sinon sol. triviale.

Donc $\beta = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2$

Donc : $Y_m(y) = \cos(m\pi y)$

$$\lambda_m = m^2\pi^2 \quad , \forall\, m = 0, 1, 2, \dots$$

EDP en v :

$$v_t - v_{xx} + \lambda_m v = 0$$

$v(x,0)\,Y(y) = f(x)\,g(y) \implies v(x,0) = f(x)$

(iii) Soit $v(x,t) = e^{-\lambda_m t} V(x,t)$

$$v_t = -\lambda_m e^{-\lambda_m t} V + e^{-\lambda_m t} V_t$$

$$v_{xx} = e^{-\lambda_m t} V_{xx}$$

$$v_t - v_{xx} + \lambda_m v = 0$$

$$\cancel{-\lambda_m e^{-\lambda_m t} V} + e^{-\lambda_m t} V_t - e^{-\lambda_m t} V_{xx} + \cancel{\lambda_m e^{-\lambda_m t} V} = 0$$

$$\iff V_t = V_{xx}$$

$$V(x,0) = v(x,0) = f(x)$$

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\, dy$$

pour nous $k = 1$

Pour déterminer les A_m, $\forall m = 1, 2, ..$
on multiplie par $\cos(m\pi y)$, $\forall m = 1, 2, ..$
et on intègre entre 0 et 1.

on a alors : $\displaystyle\int_0^1 g(y)\cos(m\pi y)\,dy = A_m \int_0^1 \cos^2(m\pi y)\,dy$

Donc :

$$A_m = \frac{1}{2}\int_0^1 g(y)\cos(m\pi y)\,dy.$$

(v) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(0,t)\left(A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi y)e^{-\lambda_m t}\right)$$

$$= 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(0-y)^2}{4t}}\left(\frac{2y}{4t}\right) f(y)\,dy = 0.$$

si $f(y)$ est paire.