Chapitre 1 : Bases de la thermoélasticité linéaire

1. Milieu continu : concept, descriptions géométrique et du mouvement

1.1 Notion de milieu continu

1.2 Description géométrique : référentiel, repère et configuration

1.3 Descriptions du mouvement : lagrangienne et eulérienne

2. Déformations d'un milieu continu

2.1 Tenseur gradient de déformation

2.2 Formules de transport

2.3 Tenseur des déformations de dilatation

2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

2.5 Déplacement

2.6 Transformation infinitésimale et tenseur de déformation linéarisée

2.7 Compatibilité des déformations

2.8 Tenseur des taux de déformation

3. Représentation des efforts

3.1 Hypothèse de Cauchy - vecteur contrainte

3.2 Tenseur des contraintes de Cauchy

3.3 Equations locales du mouvement

3.4 Conditions aux limites en effort et condition de saut

3.5 Etats de contraintes classiques

3.6 Linéarisation des équations locales du mouvement

4. Loi de comportement de solides élastiques

4.1 Cadre de la thermoélasticité sans liaison interne

4.2 Thermoélasticité linéarisée

4.3 Propriétés de symétrie

4.4 Symétrie matérielles

Chapitre 1 : Bases de la thermoélasticité linéaire

1. Milieu continu : concept, descriptions géométrique et du mouvement

1.1 Notion de milieu continu

1.2 Description géométrique : référentiel, repère et configurations

1.3 Descriptions du mouvement : lagrangienne et eulérienne

2. Déformations d'un milieu continu

2.1 Tenseur gradient de déformation

2.2 Formules de transport

2.3 Tenseur des déformations de dilatation

2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

2.5 Déplacement

2.6 Transformation infinitésimale et tenseur de déformation linéarisée

2.7 Compatibilité des déformations

2.8 Tenseur des taux de déformation

3. Représentation des efforts

3.1 Hypothèse de Cauchy - vecteur contrainte

3.2 Tenseur des contraintes de Cauchy

3.3 Equations locales du mouvement

3.4 Conditions aux limites en efforts et condition de saut

3.5 Etats de contraintes classiques

3.6 Linéarisation des équations locales du mouvement

4. Loi de comportement de solides élastiques

4.1 Cadre de la thermoélasticité sans liaison interne

4.2 Thermoélasticité linéarisée

4.3 Propriétés de symétrie

4.4 Symétrie matérielles

- Chapitre 1 -

Bases de la thermoélasticité linéaire

1 Milieu continu : concept, descriptions géométrique et du mouvement

1.1 Notion de milieu continu.

Un milieu, qu'il s'agisse d'un liquide, gaz ou solide pourra être considéré comme un milieu continu si, à l'échelle où il est étudié, on peut supposé que :

- le milieu se présente comme un continuum de points : chaque point est entouré d'un petit volume de matière de taille infinitésimale par rapport à la taille du milieu étudié. Au cours d'un mouvement, le point et le volume infinitésimal qui l'entoure se déplace collectivement. le volume de matière infinitésimal est appelé "point matériel" ou "particule".

- Deux particules ou points matériels voisins restent voisins au cours du mouvement du milieu étudié. On parle de conservation de la proximité géométrique.

- Deux particules voisines ont des propriétés physiques qui évoluent au cours du temps de façon comparable

Cette notion de milieu continu doit être mise en relation avec l'échelle d'étude du milieu. Cette échelle est qualifiée d'échelle macroscopique par rapport à l'échelle corpusculaire ou atomique

du physicien, ce qui ne veut pas dire pour autant que les objets étudiés par le mécanicien sont forcément de grande taille. Ces tailles peuvent en effet être de l'ordre de 10^9 m pour une planète, 10^4 m pour un massif rocheux, 10^2 m pour un ouvrage d'art, 10^1 m pour une automobile, 10^{-1} m pour une turbine, 10^{-6} m pour une micropompe

Ainsi, une dune de sable (ou encore un barrage) étudiée dans sa globalité pourra être considérée comme un milieu continu. A l'échelle du grain de sable, la dune sera considérée comme un milieu granulaire. Mais, si l'on souhaite étudier le milieu constitutif lui même, chaque grain peut être aussi considéré comme un milieu continu.

1.2 Description géométrique : référentiel, repère et configurations

- la formulation mathématique permettant de décrire la notion de milieu continu demande d'introduire la notion de référentiel, qui est l'outil de mesure, et la notion de configuration qui est la modélisation géométrique du milieu tout au long de son évolution au cours du temps.

- le mouvement d'un milieu continu se mesure dans l'espace physique euclidien par rapport à un observateur. le <u>référentiel</u> R est l'espace euclidien qui suit le mouvement de l'observateur choisi. Il est caractérisé par :
  - une chronologie, choisie une fois pour toutes, c'est l'échelle du temps de la mécanique classique qui sera valable pour tous les observateurs
  - l'ensemble des points de l'espace euclidien animé du mouvement de l'observateur.

- Pour repérer les positions spatiales du milieu dans un référentiel R on utilise <u>un repère R</u> souvent orthonormé, d'origine O

$R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)(t)$.

- Un même référentiel peut être muni de plusieurs repères. Les grandeurs physiques doivent être indépendantes du repère utilisé dans un référentiel donné. On dit qu'elles sont intrinsèques. Les grandeurs physiques seront représentées par des vecteurs (déplacement, vitesse) et des tenseurs d'ordre 2 que nous assimilerons à des matrices (3,3) (de déformations, contraintes)

Soit R un référentiel attaché à un observateur, deux repères orthonormés

$R(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)(t)$ et $R'(O\ \underline{e}'_1, \underline{e}'^2\ \underline{e}'_3)(t)$ à un même instant t

avec $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad \underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \delta_{ij}$ $\quad \delta$ symbole de Krönecker

soit $\underline{u}$ un vecteur $\quad \underline{u} = u_i \underline{e}_i = u'_i e'_i \quad \underline{u}$ grandeur intrinsèque

en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés

ou encore $\quad \underline{u} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2\ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\underline{e}'_1\ \underline{e}'_2\ \underline{e}'_3] \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix}$

On a $\quad \underline{u} \cdot \underline{e}_j = u_j = (u'_i\ \underline{e}'_i) \cdot \underline{e}_j$ $\quad$ cette formule n'est autre que la formule de changement de base

ou encore

$$\underline{u} \cdot \underline{e}'_j = u'_j = (u_i\ \underline{e}_i) \cdot \underline{e}'_j$$

soit

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_3 \end{bmatrix} [\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\underline{u}' = \underline{\underline{Q}}\ \underline{u} \quad \text{avec } \underline{\underline{Q}} \text{ orthogonale telle que } \underline{\underline{Q}}\ \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}}$$

car $[\underline{e}_1, \underline{e}_2\ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$ $\quad (e_1, e_2\ e_3)$ base orthonormée de même pour $\underline{e}'_i$

$$\underline{\underline{Q}}\ \underline{\underline{Q}}^T = \begin{bmatrix} \underline{e}'_1 \\ \underline{e}'_2 \\ \underline{e}'_2 \end{bmatrix} \underbrace{[\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{1}}} [\underline{e}'_1\ \underline{e}'_2\ \underline{e}'_3] = \underline{\underline{1}}$$

- le choix de l'observateur n'est pas unique. Par exemple pour étudier le mouvement du pneu d'une roue, on peut choisir un observateur lié à la route ou un observateur suivant la roue dans sa rotation. Cela conduit à deux choix de référentiel. On passe d'un referentiel à un autre par un mouvement de translation plus de rotation (mouvement appelé de corps rigide).
Une grandeur physique est dite objective si son observation par deux observateurs différents est identique. Ainsi le vecteur joignant les position geométriques de deux points d'un milieu à un instant t est une grandeur objective
En revanche, la vitesse d'une particule à un instant t n'est pas une grandeur objective

- Parmi tous les référentiels, il est courant en mécanique de faire le choix du référentiel galiléen. L'existence de ce referentiel est postulé par la loi fondamentale de la dynamique. Dans ce referentiel, on a proportionalité entre force imposée et accélération

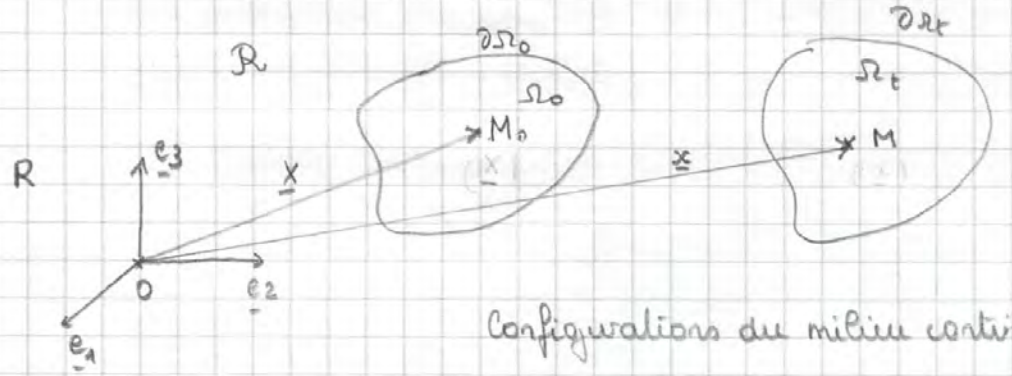
- la configuration d'un milieu continu à un instant t dans un référentiel donné est définie par la position géométrique de l'ensemble de ces points matériels repérés dans le référentiel choisi. le repérage de la position d'un point matériel se fait au moyen du vecteur position
$\underline{OM} = \underline{x} = x_i \, \underline{e_i}$ dans le repère $\mathcal{R}$ choisi dans le referentiel $\mathcal{R}$
(x_1, x_2, x_3) désignent les coordonnées du point matériel M à l'instant t.
le volume occupé par l'ensemble des points matériels du milieu continu à l'instant t est noté Ω_t et sa frontière $\partial\Omega_t$

- Une configuration particulière du milieu continu est la configuration à l'instant t_0 fixé comme instant initial. On prend generalement $t_0 = 0$. Cette configuration est appelée

configuration de référence ou encore initiale. Les points du milieu continu à cet instant t_0 sont repérés par leurs vecteurs positions notés

$\underline{OM_0} = \underline{X} = X_i \, \underline{e_i}$ $\quad$ $\underline{X}$ coordonnées initiales ou de Lagrange

le volume occupé par le milieu à cet instant t_0 est noté Ω_0 et sa frontière $\partial\Omega_0$



Configurations du milieu continu de référence et actuelle

1.3 Descriptions du mouvement d'un milieu continu : lagrangienne et eulérienne

- Une première modélisation du mouvement d'un milieu continu a été proposée par L. Lagrange (1736 - 1813). Dans cette description, le mouvement est caractérisé par une application Φ :

$$\phi : \begin{cases} \Omega_0 \longrightarrow \Omega_t & \forall t \in [0,T] \text{ intervalle d'étude} \\ M_0 \longrightarrow M & M \text{ étant la position du point à l'instant } t \\ & \text{qui était en } M_0 \text{ à l'instant } t_0 \end{cases}$$

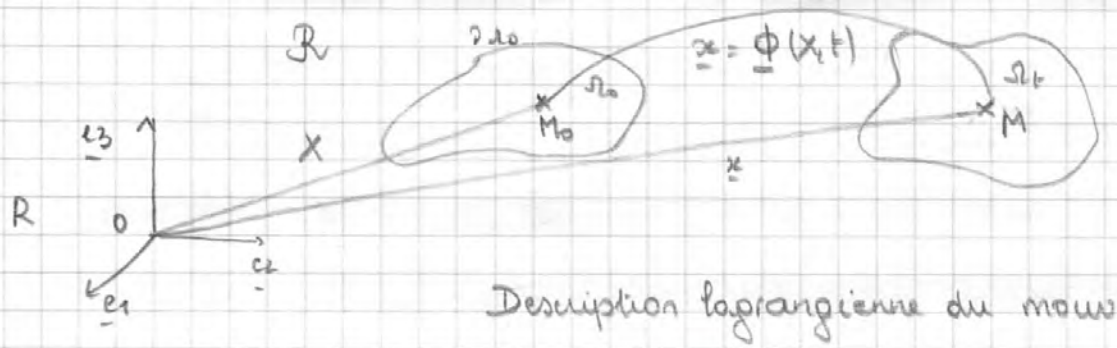
soit encore $\quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \forall t \in [0,T]$ ou $\quad x_i = \phi_i(\underline{X}, t) \quad i = 1,2,3$
$\forall \underline{X} \in \Omega_0$

l'application $\underline{\phi}$ vérifie :

$$\phi(\underline{X}, t=0) = \underline{X} \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0$$

Cette représentation du mouvement qui s'exprime en fonction de la configuration initiale est appelée représentation lagrangienne

Elle est bien adaptée aux solides pour lesquels la configuration initiale est bien identifiée avec la configuration non déformée.



Description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu

. Cette application $\underline{\Phi}$ doit vérifier des propriétés de régularité pour respecter les concepts intuitifs de milieu continu :

- $\underline{\Phi}$ est <u>une bijection de Ω_0 dans Ω_t</u> . On désigne par Ψ la bijection réciproque

$$\underline{\Psi} \quad \begin{array}{l} \Omega_t \longrightarrow \Omega_0 \\ M \longrightarrow M_0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t) \\ \forall \underline{X} \in \Omega_0 \ \forall t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x},t) \\ \forall \underline{x} \in \Omega_t \ \text{et} \ \forall t \end{cases}$$

- $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ <u>sont des applications continues</u> par rapport à chacune de leurs variables $\underline{x}$, $\underline{X}$ et t

  au moins par morceaux en espace pour permettre de traiter des problèmes avec des lignes de discontinuité comme des surfaces de rupture . Dans ce cas, la conservation de la proximité géométrique de points initialement voisins n'est plus satisfaite.

- $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ <u>sont de classe C^1 en espace et temps</u> , voire même C^2 de façon à pouvoir définir les vitesses, accélérations, déformations.

. On définit la vitesse et l'accélération du mouvement avec :

$$\underline{V}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X},t) \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \ \forall t \quad = \frac{d\underline{OM}}{dt}$$

$$\underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial t^2}(\underline{X},t) = \frac{d^2\underline{OM}}{dt^2}$$

On dira que ces grandeurs sont des grandeurs lagrangiennes.

. On définit également une <u>transformation rigidifiante</u>

$\underline{\phi}$ est une transformation rigidifiante sur une partie ω_0 de Ω_0 si et seulement si elle s'écrit comme la composée d'une translation et d'une rotation

soit $\quad \underline{\phi}(\underline{X},t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t).\underline{X} \qquad \forall \underline{X} \in \omega_0 \subset \Omega_0$
$\forall t$.

avec $\underline{\underline{R}}(t)$ une matrice orthogonale $\quad \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{\underline{R}}^T(t) = \underline{\underline{R}}^T(t)\,\underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{I}}$

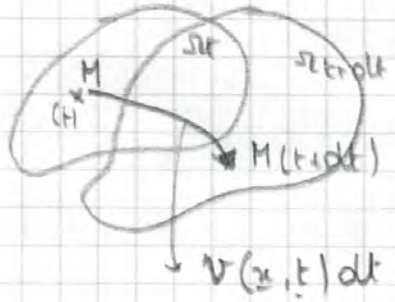
- la description lagrangienne du mouvement nécessite d'introduire une configuration initiale du milieu continu étudié. Ceci est difficile en mécanique des fluides par exemple. Pour surmonter cette difficulté, L. Euler (1707 - 1783) a proposé une représentation du mouvement par le champ de vitesse à l'instant t. Cette description est appelée la <u>description eulérienne</u>. Elle est caractérisé par la donnée de

$$\underline{v}(x,t) \qquad \forall x \in \Omega_t \qquad \forall t$$

Cette description permet une construction incrémentale du mouvement. A partir de la donnée de $\underline{v}(\underline{x},t)$ en tout point x de Ω_t, on peut déterminer la position du point à l'instant $t+dt$ par :

$$\underline{x} + \underline{v}(\underline{x},t)\,dt.$$

On dit que la représentation eulérienne consiste à prendre à chaque instant t la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution du milieu entre les instants t et $t+dt$



$$\underline{x}_{t+dt} = \underline{x}_t + \underline{v}(\underline{x},t)\,dt$$

- Connaissant la description lagrangienne du mouvement, on obtient aisément la description eulérienne en égalant les expressions des vitesses $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t) \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \ \forall t$ connue $\Rightarrow \underline{X} = \underline{\Psi}(\underline{x},t)$

et $\underline{V}(\underline{X},t) = \dfrac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X},t) = \dfrac{d\underline{\Phi}}{dt}(\underline{X},t)$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}(\underline{x},t) = \underline{V}(\Psi(\underline{x},t),t) \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_t \text{ et } \forall t$$

- Inversement, connaissant la description eulérienne, on obtient la description lagrangienne du mouvement par intégration du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t}[\underline{\Phi}(X,t)] = \underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{\Phi}(\underline{X},t),t) \\ \underline{x}(t=0) = \underline{\Phi}(X,t=0) = \underline{X} \end{cases}$$

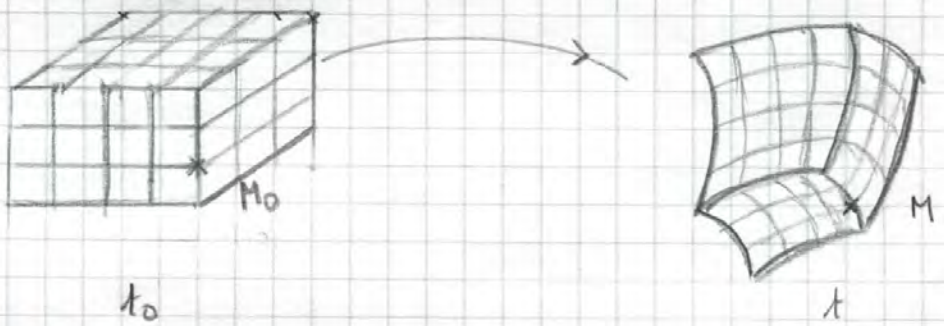
- Un mouvement défini sur Ω_t est dit rigidifiant sur une partie ω_t de Ω_t si et seulement si la vitesse s'écrit comme une superposition d'une translation et d'une rotation instantanée :

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}_0(t) + \underline{\omega}_0(t) \wedge \underline{x} \qquad \forall x \in \omega_t$$
$$= \underline{v}_0(t) + \underline{\underline{\Omega}}_0(t) \cdot \underline{x}$$

si $\underline{\omega}_0(t) = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\Omega}}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\Omega}}_0$ est antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}_0^t = -\underline{\underline{\Omega}}_0$

2. Déformations d'un milieu continu

- Nous allons nous intéresser maintenant à caractériser les changements locaux de forme qui se produisent à l'intérieur d'un milieu continu dans la transformation qui l'envoie de sa configuration de référence à sa configuration actuelle. Ici t est fixé, on ne s'intéresse plus aux positions intermediaires.
- le milieu continu subit des déformations si la distance entre des points matériels varient au cours du temps.
- L'observation de l'emboutissage d'une pièce d'acier sur laquelle a été portée un marquage quadrillé avant emboutissage montre que la deformation n'est pas identique en tout point (applatissement près des bords et étirement au centre). La notion de déformation est donc une notion locale.
- le marquage permet de visualiser les transformations subies par un petit élément de matière.



Dans une tranformation quelconque, les segments peuvent ne pas rester droits. Mais si on se place à une échelle suffisamment petite, il est possible de remplacer une courbe par sa tangente et de supposer localement que la transformation est homogène, c'est à dire que des droites restent droites après transformations

- Différentes grandeurs (sous forme de tenseurs d'ordre 2) permettent de mesurer les transformations locales (allongement, distorsion angulaire

2.1 Tenseur gradient de transformation

- Soit M_0 et M'_0 deux points voisins dans la configuration initiale et (M et M') leurs transformés à l'instant t

On note $d\underline{M}_0 = \underline{M_0 M'_0}$ le vecteur infinitésimal d'extremités M_0 et M'_0

D'après l'expression de la transformation et ses propriétés de différentiabilité on a en première approximation :

$$\underline{\phi}(\underline{OM_0} + d\underline{M_0}, t) = \underline{\phi}(\underline{OM'_0}, t)$$
$$= \underline{\phi}(\underline{OM_0}, t) + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{OM_0}, t) \cdot d\underline{M_0} + o(\| d\underline{M_0} \|)$$

- La transformation matérielle de deux points infiniment proches est donc donnée par $\underline{\phi}(\underline{OM'_0}, t) \simeq \underline{\phi}(\underline{OM_0}, t) + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{OM_0}, t) \cdot d\underline{M_0}$

qui est une transformation affine d'origine M_0, somme d'une translation de vecteur $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ et d'une application linéaire caractérisée par le tenseur gradient de déformation

$$\left\{ \quad \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{\phi}(X, t) \right.$$

Ou encore :

$$\left\{ d\underline{x} = d\underline{M} = \underline{MM'} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\, d\underline{M_0} = \underline{\underline{F}}(X, t) \cdot d\underline{X_0} \right.$$

- On peut remarquer que cette formule de transformation s'obtient directement par différentiation en $\underline{X}$ à t fixé de la transformation $\underline{\phi}$: $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow d\underline{x} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t)\, d\underline{X}$

ou encore en notation indicielle (avec convention de sommation)

$$dx_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}(\underline{X}, t)\, dX_\alpha = F_{i\alpha}(\underline{X}, t)\, dX_\alpha$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ gradient de la transformation au point $\underline{X}$ (M_0) apparaît comme caractérisant le transport d'un vecteur matériel infinitésimal. D'un point de vue mathématique, il s'agit de

l'application linéaire tangente de la transformation au point M_0 à l'instant t.

- On convient de noter $\underline{J = \det(\underline{\underline{F}}(\underline{X},t))}$ le jacobien de la transformation

D'après les propriétés de la transformation Φ (continuité et différentiabilité continue), le jacobien $J(\underline{X},t)$ est continu par rapport à $\underline{X}$ et t

De plus il ne peut pas être nul ni infini car les matrices jacobiennes de $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ doivent être inversibles. Il conserve donc un signe constant sur Ω_0 et au cours du temps. Or $J(\underline{X},0) = \det[\underline{\underline{F}}(\underline{X},0)] = 1 \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0$

de sorte que $\left\{ 0 < J(\underline{X},t) < +\infty \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \ \forall t \right.$

2.2 Formules de transport

La connaissance du tenseur gradient de déformations $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ permet de décrire la façon dont des éléments géométriques infinitésimaux attachés au point $\underline{X}$ de Ω_0 (vecteur, volume, surface) se transforment (sont transportés) entre la configuration de référence et la configuration actuelle

- Ainsi, on a vu au paragraphe précédent que $\underline{d\underline{M}_0}$ un vecteur infinitésimal à partir du point M_0 de Ω_0 est transporté en $d\underline{M}(t)$ dans la configuration actuelle par la relation

$$\left\{ d\underline{M}(t) = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\, d\underline{M}_0 \qquad \forall d\underline{M}_0 \in \Omega_0 \right.$$

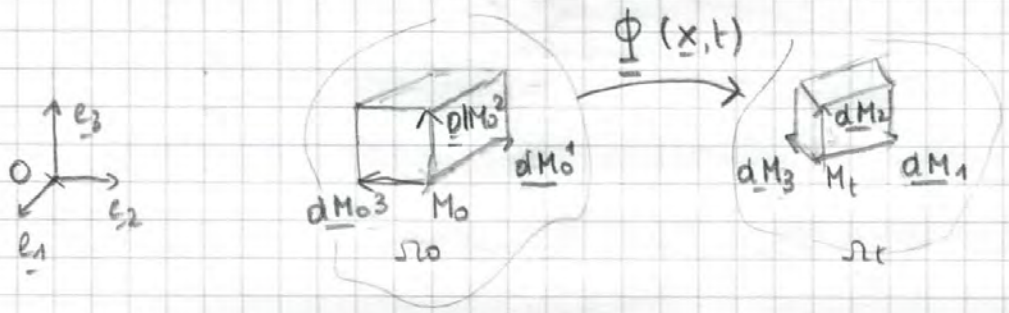
- Un volume infinitésimal $d\Omega_0$ situé autour de M_0 dans la configuration de référence Ω_0 est transporté dans la configuration actuelle en $d\Omega(t)$ par la relation suivante :

$$\left\{ d\Omega(t) = J(\underline{X},t)\,(d\Omega_0) \qquad \forall |d\Omega_0| \in \Omega_0 \right.$$

S'il y a invariance de volume, on aura en particulier $J(\underline{X},t) = 1$

La formule de transport est admise ici. Elle se démontre aisement

en introduisant le produit mixte des vecteurs $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$



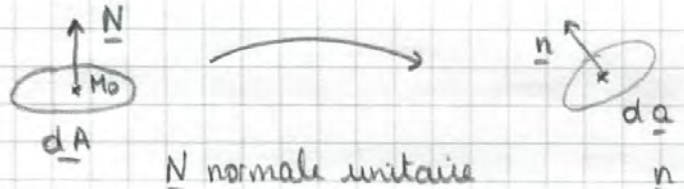
$d\Omega_0 = (\underline{dM_0^1} \wedge \underline{dM_0^2}) \cdot \underline{dM_0^3}$ $\qquad$ $d\Omega_t = (\underline{dM_1} \wedge \underline{dM_2}) \cdot \underline{dM_3}$

avec $\underline{dM_i} = \underline{\underline{F}}\, \underline{dM_0^i}$. D'après la formule $(\underline{u} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w}) = \varepsilon_{ijk} u_j v_k w_i$,

on a $d\Omega_t = \varepsilon_{ijk} F_{j\alpha} dM_{0\alpha} F_{k\beta} dM_{0\beta} F_{i\gamma} dM_{0\gamma} = J\, d\Omega_0$

- <u>Une surface élémentaire infinitésimale $d\underline{A}$</u> orientée centrée autour de M_0 dans la configuration de référence se transporte dans la configuration actuelle en $d\underline{a}$ par la relation suivante

$$d\underline{a} = J(\underline{x},t)\ {}^t(\underline{\underline{F}}^{-1})\, d\underline{A}$$



$\underline{N}$ normale unitaire à dA $\qquad$ $\underline{n}$ normale unitaire à da

$d\underline{A} = dA\, \underline{N}$ $\qquad$ $d\underline{a} = da\, \underline{n}$

Cette formule s'établit en considérant l'élément de volume qui s'appuie sur la la surface $d\underline{A}$ et de generatrice $\underline{M_0M_0'}$.

$$d\Omega_0 = \underline{dA} \cdot \underline{M_0M_0'}.$$

et sa transformé $\qquad d\Omega_t = \underline{da} \cdot \underline{MM'}$

or $d\Omega_t = J\, d\Omega_0 = J\, \underline{dA} \cdot \underline{M_0M_0'}$

d'où $\qquad \underline{da} \cdot \underline{\underline{F}}\, \underline{M_0M_0'} = J\, \underline{dA} \cdot \underline{M_0M_0'}$

2.3. Tenseur du déformation de dilatation

- Afin de mettre en évidence la notion de déformations du milieu entre les configurations de référence et actuelle, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires $d\underline{M}_0$ et δM_0 issus du même point M_0

- D'après la formule de transport d'un vecteur on a :

$$d\underline{M} \cdot \delta\underline{M} = (\underline{\underline{F}}\, d\underline{M}_0) \cdot (\underline{\underline{F}}\, \delta\underline{M}_0) = d\underline{M}_0\, {}^t\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{F}}\, \delta M_0$$
$$= F_{i\alpha}\, dX_\alpha\, F_{i\beta}\, \delta X_\beta = dX_\alpha \left[({}^tF)_{\alpha i} F_{i\beta}\right] \delta X_\beta$$

soit $\left\{ d\underline{M} \cdot \delta\underline{M} = d\underline{M}_0\, \underline{\underline{C}}(X,t)\, \delta\underline{M}_0 \right.$

le tenseur $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{F}}\,(X,t)$ est appelé <u>tenseur de dilatation</u>.

- le <u>tenseur de dilatation est symétrique, défini positif</u>

$${}^t\underline{\underline{C}}(X,t) = \underline{\underline{C}}(X,t)\ \forall \underline{X} \qquad \text{et} \quad \forall \underline{X} \quad \underline{X} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{X} = |\underline{X}|^2 \geq 0$$
$$\text{si} \quad \underline{X}\, \underline{\underline{C}}\, \underline{X} = 0 \iff \underline{X} = \underline{0}$$

- <u>le tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}$ permet de mesurer les variations de longueur</u> et d'angle entre la configuration actuelle et de référence.

Soient $d\underline{M}_0$ un vecteur élémentaire issu de M_0 et $d\underline{M}$ son transformé

$\lambda = \dfrac{|d\underline{M}|}{|dM_0|}$ représente la dilatation du vecteur $d\underline{M}_0$.

$$\left\{ \lambda = \frac{|d\underline{M}|}{|d\underline{M}_0|} = \frac{\left[d\underline{M}_0 \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{X},t) \cdot d\underline{M}_0\right]^{1/2}}{|d\underline{M}_0|} \right.$$

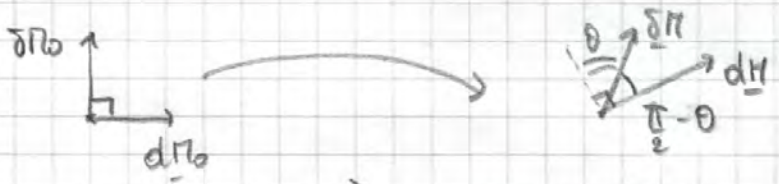
Si l'on suppose $|dM_0|$ porté par $\underline{e}_i$, soit $d\underline{M}_0 = |d\underline{M}_0|\, \underline{e}_i$

alors $\lambda = \sqrt{C_{ii}}$ (sans sommation sur i répété.

de sorte que la composante $C_{ii}(\underline{x},t)$ du tenseur des dilatations mesure le carré de la dilatation subie par un vecteur matériel issu du point $\underline{x}$ porté par $\underline{e_i}$.

Soit maintenant deux vecteurs infinitésimaux $\underline{dM_0}$ et $\underline{\delta M_0}$ issus de M_0 et M_0 initialement orthogonaux par exemple $\underline{dM_0} = |dM_0|\, e_i$ et $\underline{\delta M_0} = |\delta M_0|\, e_j$ avec $i \neq j$, leurs transformés $\underline{dM}$ et $\underline{\delta M}$ vérifient

$$\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} = \sin\theta\, |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}| = |dM_0|\, \underline{e_i}\, \underline{\underline{C}}\, |\delta M_0|\, e_j = |dM_0|\,|\delta M_0|\, C_{ij}$$



or $\dfrac{|dM_0|}{|dM|} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{ii}}}$

de sorte que $\left\{ \sin\theta = \dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}} \right.$ sans sommation sur indice répété

La composante C_{ij} avec $i \neq j$ du tenseur de dilatations permet donc de mesurer les variations d'angle subies dans le mouvement par deux vecteurs matériels initialement portés par $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$

o 2.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Il est également pratique de comparer la variation du produit scalaire de deux vecteurs infinitésimaux, soit

$$\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} - \underline{dM_0} \cdot \underline{\delta M_0} = \underline{dM_0} \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{\delta M_0}$$

On définit alors le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\left\{ \underline{\underline{E}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(\underline{x},t) - \underline{\underline{1}}\right) = \frac{1}{2}\left({}^T\underline{\underline{F}}(\underline{x},t)\,\underline{\underline{F}}(\underline{x},t) - \underline{\underline{1}}\right) \right.$$

d'où $\underline{dM} \cdot \underline{\delta M} - \underline{dM_0} \cdot \underline{\delta M_0} = 2\, \underline{dM_0} \cdot \underline{\underline{E}}(\underline{x},t) \cdot \underline{\delta M_0}$

- Le tenseur est symétrique. Il admet les mêmes directions principales que le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$

- Son introduction se justifie également par le résultat suivant :

Une transformation est rigidifiante sur le domaine $\omega_0 \subset \Omega_0$ si et seulement si le tenseur des déformations de Green Lagrange $\underline{\underline{E}}(X,t)$ est nul en tout point $\underline{X}$ de ω_0 : $\left\{ \underline{x} = \underline{\phi}(X,t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X} \right. \Leftrightarrow \underline{\underline{E}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{0}} \;\; \forall \underline{X}\; \forall t$

preuve : i) Une transformation est rigidifiante par définition $\Leftrightarrow$

$$\underline{\phi}(\underline{X},t) = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{X} \quad \text{avec} \quad {}^t\underline{\underline{R}}\;\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}\;{}^t\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}} \quad \forall \underline{X} \in \omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\phi} = \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{F}}(X,t) = \underline{\underline{F}}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = {}^t\underline{\underline{F}}(X,t)\,\underline{\underline{F}}(X,t) = {}^t\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{\underline{F}}(t) = {}^t\underline{\underline{R}}\;\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(X,t) - \underline{\underline{1}}\right) = \underline{\underline{0}} \qquad \forall \underline{X} \in \omega_0$$

ii) Réciproque admise (nécessite la décomposition polaire)

2.5 . Déplacement

le déplacement $\underline{u}(\underline{X},t)$ d'une particule située en M_0 dans la configuration de référence entre la configuration de référence et la configuration actuelle Ω_t est défini dans le référentiel $\mathcal{R}$ par le vecteur

$$\left\{ \underline{u}(\underline{X},t) = \underline{M_0M} = \underline{x}(X,t) - \underline{X} = \underline{\phi}(\underline{X},t) - \underline{X} \right.$$

Il vient alors

$$\left\{ \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\phi}(X,t) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right.$$

$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}$ désigne le tenseur d'ordre 2 gradient de déplacement de composantes $\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}(X,t)$

et $\left\{ \underline{\underline{C}}(X,t) = {}^t\underline{\underline{F}}(X,t)\,\underline{\underline{F}}(X,t) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\;\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \right.$

$$\left\{ \underline{\underline{E}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\;\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right) \right.$$

Ces deux formules mettent en évidence la non linéarité entre le champ de déformation de Green-Lagrange et le champ de déplacement.

o 2.6 Transformation infinitésimale et tenseur de déformations linéarisés

. la transformation du milieu entre les configurations de référence et actuelle dans le référentiel $\mathcal{R}$ est dite <u>infinitésimale</u> si et seulement si

$$\left\{ |d\underline{M} - d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0| \quad \forall d\underline{M}_0 \in \Omega_0 \right.$$

la variation $d\underline{M} - d\underline{M}_0$ du vecteur matériel entre les configurations de référence et actuelle est petite vis à vis de la taille du vecteur $d\underline{M}_0$

soit encore

$$|(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})\, d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0| \quad \forall d\underline{M}_0 \in \Omega_0$$

ou

$$|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \cdot d\underline{M}_0| \ll |d\underline{M}_0|$$

et donc

$$\left\{ |\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t)| \ll 1 \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0 \right.$$

Concrètement, on parle de transformation infinitésimale quand la valeur de la norme du gradient de déplacement est inférieure au %

. Sous cette hypothèse, nous allons pouvoir linéariser les tenseurs de déformations $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{E}}$.

$$\underline{\underline{C}}(X,t) \simeq \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + O(|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}|^2)$$

$$\underline{\underline{E}}(X,t) \simeq \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(X,t) \right] + O(\|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\|^2)$$

On convient de noter $\underline{\underline{\varepsilon}}(X,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)(X,t)$ <u>le tenseur des déformations linéarisées</u>

qui est la partie symétrique du gradient de déplacement

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est un tenseur symétrique

et on a $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}} + 2\,\underline{\underline{\varepsilon}} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2)$

$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + O(|\nabla u|^2)$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$J = \det(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla u}}) \simeq 1 + \operatorname{trace}(\underline{\underline{\nabla u}}) + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2) = 1 + \operatorname{trace}\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) + O(|\nabla u|)$$

et donc $\left\{ \dfrac{|d\Omega| - |d\Omega_0|}{|d\Omega_0|} = J - 1 = \operatorname{trace}\underline{\underline{\varepsilon}} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2) \right.$

$= \operatorname{div}\underline{u} + O(|\underline{\underline{\nabla u}}|^2)$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$\lambda = \frac{|d\underline{M}|}{|d\underline{M_0}|} = \sqrt{C_{ii}} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)}$$ où $d\underline{M_0} = dM_0\,\underline{e_i}$

et $d\underline{M}$ son transformé

soit donc $\dfrac{|d\underline{M}|}{|d\underline{M_0}|} \simeq 1 + \varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)$

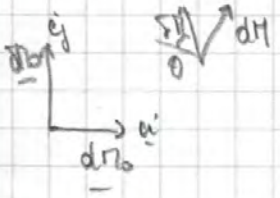
et donc $\left\{ \dfrac{|d\underline{M}| - |d\underline{M_0}|}{|d\underline{M_0}|} \simeq \varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2) \right.$

ε_{ii} mesure donc au 1er ordre la variation d'allongement relatif d'un vecteur infinitésimal initialement porté par $\underline{e_i}$

De plus, $\sin\theta = \dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}}$ devient au 1er ordre

$$\sin\theta \simeq \frac{2\,\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2)}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj} + O(\varepsilon^2)}} = 2\,\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2)$$

de sorte que, la composante ε_{ij} du tenseur des déformations linéarisées mesure au 1er ordre les variation d'angle subies dans le transport par deux vecteurs matériels infinitésimaux initialement portés par $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$ $\left\{ \theta \simeq 2\,\varepsilon_{ij} + O(\varepsilon^2) \right.$



- L'hypothèse des <u>transformations infinitésimales</u> implique des <u>déformations infinitésimales</u>. Mais la <u>réciproque est fausse</u>. On peut avoir des déformations petites et des grands déplacements qui ne conduisent pas à des transformations infinitésimales.

En effet si $|\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}| \ll 1$ alors $\underline{\underline{F}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}^T)$ petit

mais prenons $\underline{\phi} = \underline{a}(t) + \underline{\underline{R}}(t).\underline{X}$ c'est à dire une transformation rigidifiante $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{1}}$ et $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$

par contre $\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$ n'est pas petit forcement

et $\underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \frac{1}{2}\left[(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}) + (\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}})\right] = \frac{1}{2}(\underline{\underline{R}} + {}^T\underline{\underline{R}}) - \underline{\underline{1}} \neq \underline{\underline{0}}$

Cette situation de petites déformations et grands déplacements interviennent notamment dans le cas des structures élancées poutres plaques.

- Compte-tenu de la remarque précédente, il est légitime de chercher les champs de déplacements $\underline{u}$ tel que $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{0}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(X,t)) = \underline{\underline{0}} \quad \forall X \in \Omega_0 \iff \underline{u}(X,t) = \underline{a}(t) + \underline{b}(t) \wedge \underline{X} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \underline{a}(t) + \underline{\underline{B}}(t).\underline{X} \\ \qquad\qquad \text{avec } \underline{\underline{B}} \text{ antisymétrique } {}^t\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{B}} \end{array} \right.$$

preuve : - Si $\underline{u} = \underline{a}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\,\underline{X}$ avec $\underline{\underline{B}}$ antisymétrique

alors $\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{u} = \underline{\underline{B}}(t) \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{B}}(t) + {}^t\underline{\underline{B}}(t)) = \underline{\underline{0}}$

- Reciproquement s'obtient en intégrant le système de 6 equation aux dérivées partielles à 3 inconnues (u_1, u_2, u_3)

2.7 Compatibilité des déformations

A partir d'un champ de déplacement $\underline{u}(X,t)$ on peut former le tenseur des déformations linéarisés avec la relation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{x},t)) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x},t) + {}^{t}\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x},t)\right]$$

On peut se poser le problème inverse, étant donné un tenseur symétrique d'ordre 2 défini sur r_0 à quelles conditions ce champ est-il un champ de déformation de milieu continu en petites transformations, c'est-à-dire à quelles conditions existe-t-il un champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x},t)$ dont il dérive au sens suivant :

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^{t}\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x},t) \text{ donné}$$

- Le problème général, dit de compatibilité géométrique d'un champ de déformation, correspond au <u>problème mathématique</u> suivant :
  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a six composantes indépendantes et $\underline{u}$ 3 composantes
  il existe nécessairement des conditions pour qu'un tel système à 6 équations indépendantes soit intégrable.
- D'un <u>point de vue physique</u>, ce problème de compatibilité géométrique correspond au fait que la continuité du milieu doit être conservée par ce champ de déformation.

Considérons à titre d'applications, des processus physiques qui engendrent des déformations locales en absence d'efforts mécaniques. C'est le cas par exemple de l'évaporation d'eau par séchage d'un matériau. Cette évaporation peut conduire à diminuer la porosité du matériau et son volume en conséquence, ce qui crée des déformations locales. Ou encore, un chauffage induit une augmentation de volume et donc des déformations locales. Il s'agit alors de savoir si ces déformations sont compatibles, c'est-à-dire s'il existe un champ de déplacement qui en dérivent, qui va respecter la continuité du milieu (ou plus généralement si le champ de déplacement va vérifier les conditions aux limites en déplacement imposés)

Si ce n'est pas le cas, on parle de déformations incompatibles. Quand un milieu continu est soumis à un champ de déformation incompatible, il doit mettre en place des efforts intérieurs pour assurer la continuité du milieu. Ces efforts intérieurs génèrent des déformations complémentaires telles que la somme des deux déformations soit compatible géométriquement.

Si ces efforts intérieurs nécessaires à la continuité géométrique du milieu sont trop importants vis à vis des capacités de résistance du matériau, ils ne peuvent s'instaurer et une autre solution géométrique compatible par morceaux se met alors en place avec des ruptures localisées dans le solide (exemple du sol craquelé lors du séchage, ou encore du flambage du rail sous forte chaleur).

- Un champ de déformation $\underline{\underline{e}}$ symétrique donné est compatible si et seulement si ses composantes dans le système de coordonnées cartésiennes satisfont les 6 équations indépendantes suivantes

$$e_{33,22} - 2e_{23,32} + e_{22,33} = 0$$

$$e_{32,31} - e_{12,33} - e_{33,12} + e_{13,23} = 0$$

et par permutation

$$e_{11,22} - 2e_{21,21} + e_{22,11} = 0$$

$$e_{12,13} - e_{23,11} - e_{11,23} + e_{13,12} = 0$$

$$e_{11,33} - 2e_{13,13} + e_{33,11} = 0$$

$$e_{13,12} - e_{32,11} - e_{11,32} - e_{12,13} = 0$$

- En pratique, une fois vérifiées les 6 conditions d'intégrabilité, le champ de déplacement qui dérive d'un tenseur de déformation symétrique s'écrit $\underline{u}(X,t) = \underline{u}^{part}(X,t) + \underline{a}(t) + \underline{\omega}(t) \wedge \underline{X}$

  avec $\underline{u}^{part}(\underline{X},t)$ solution particulière du système $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}^{par}(X,t) + \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}(X,t)\right) = \underline{\underline{E}}$

- On remarque que les conditions d'intégrabilité portent sur les dérivées secondes du tenseur $\underline{\underline{E}}$ en coordonnées cartésiennes. Elles sont en conséquence automatiquement vérifiées dès que E_{ij} sont des fonctions affines des coordonnées $\underline{X}$

o 2.8 Tenseur taux de déformation

Jusque là, nous nous sommes intéressés à étudier sur un plan géométrique la déformation subie par un milieu entre la configuration de référence et la configuration actuelle, indépendamment de la vitesse à laquelle s'est produite cette transformation, c'est à dire sans se préoccuper de l'histoire intermédiaire.

La déformation étant mesurée par le produit scalaire de deux vecteurs matériels infinitésimaux, la vitesse de déformation ou taux de déformation sera mesurée par $\frac{d}{dt}(d\underline{M} \cdot \delta\underline{M})$, cette fois $d\underline{M}_0$, $\delta\underline{M}_0$ sont fixés.

$$\frac{d}{dt}(d\underline{M} \cdot \delta\underline{M}) = \frac{d}{dt}(d\underline{M}) \cdot \delta\underline{M} + d\underline{M} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\underline{M})$$

or $\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt}(F_{i\alpha}\, dX_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) dX_\alpha$

$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}[V_i(X,t)]\, dX_\alpha$ avec $\underline{V}$ vitesse lagrangienne

$= \frac{\partial}{\partial x_j}(V_i(\underline{x},t)) \frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha} dX_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} F_{j\alpha}\, dX_\alpha$ ($\underline{v}$ vitesse eulérienne)

d'où $\frac{d}{dt}(d\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot d\underline{M}$

et donc $\frac{d}{dt}(d\underline{M} \cdot \delta\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(x,t)\, d\underline{x} \cdot \delta\underline{x} + d\underline{x} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \delta\underline{x}$

soit $\frac{d}{dt}(d\underline{M} \cdot \delta\underline{M}) = d\underline{x} \cdot {}^t\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \delta\underline{x} + d\underline{x} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \delta\underline{x}$

$$\left\{ \frac{d}{dt}(d\underline{M} \cdot \delta\underline{M}) = 2\, d\underline{x}\, \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) \cdot \delta\underline{x} \right.$$

avec $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left[{}^t\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) + \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) \right]$ tenseur des taux de déformations

- le tenseur des taux de déformations est symétrique, il dépend linéairement du champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x},t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \dot{\underline{\underline{E}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \\ \text{avec } \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2}\left({}^t\dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} \right)^{\cdot} \end{array} \right.$$

en effet $\frac{d}{dt}(d\underline{M}) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot d\underline{M} = \frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}}\, d\underline{M}_0) = \dot{\underline{\underline{F}}}\, d\underline{M}_0$

$= \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1} d\underline{M}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v}(\underline{x},t) = \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{d}}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \frac{1}{2}\left[{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, {}^t\dot{\underline{\underline{F}}} + \dot{\underline{\underline{F}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1} \right]$

$= {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \dot{\underline{\underline{E}}}\, \underline{\underline{F}}^{-1}$

- les composantes de $\underline{\underline{d}}$ s'interprètent physiquement de façon analogue à celles du tenseur des déformations linéarisés $\underline{\underline{\varepsilon}}$, mais en terme de taux de variation par rapport à la configuration actuelle. La configuration actuelle devient configuration de référence et la configuration à $t+dt$ (avec dt petit) la configuration déformée dans un mouvement infinitésimal.

Ainsi si $\underline{dM} = |\underline{dM}|\,\underline{e_i}$, $\quad |\underline{dM}|^2 = \underline{dM}\cdot\underline{dM}$

$$\frac{d}{dt}\left(|\underline{dM}|^2\right) = 2\,|\underline{dM}|^2\,\underline{e_i}\cdot\underline{\underline{d}}\cdot\underline{e_i}$$

d'où $\quad 2\,\dot{\overline{|\underline{dM}|}}\,\underline{dM} = 2\,|\underline{dM}|^2\,d_{ii}$

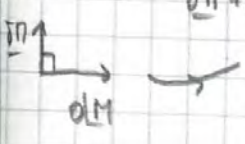
et $\quad d_{ii} = \dfrac{\dot{\overline{|\underline{dM}|}}}{|\underline{dM}|}$ sans sommation sur i

d_{ii} représente le taux d'extension ou taux d'allongement unitaire dans la direction $\underline{e_i}$.

Soient $\quad \underline{d\Pi} = |\underline{dM}|\,\underline{e_i} \quad \underline{\delta M} = |\underline{\delta\Pi}|\,\underline{e_j} \quad \underline{d\Pi}\cdot\underline{\delta\Pi} = |\underline{d\Pi}|\,|\underline{\delta\Pi}|\,\underline{e_i}\cdot\underline{e_j}$

$$\frac{d}{dt}(\underline{dM}\cdot\underline{\delta M}) = |\underline{dM}|\,|\underline{\delta M}|\,\dot{\overline{\sin\theta}} \simeq |\underline{d\Pi}|\,|\underline{\delta\Pi}|\,\dot{\theta} = 2\,|\underline{d\Pi}|\,|\underline{\delta\Pi}|\,d_{12}$$

d'où $\quad \dot{\theta} = 2\,d_{ij}(x,t)$



d_{ij} avec $i \neq j$ représente le taux de glissement de deux directions orthogonales selon $\underline{e_i}$ et $\underline{e_j}$ au point M

- Un mouvement est rigidifiant sur une partie de Ω_t si et seulement si $\quad \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{0}} \quad \forall\, \underline{x} \in \Omega_t$

  mouvement rigidifiant $\Leftrightarrow \underline{v} = \underline{a}(t) + \underline{b}(t)\wedge\underline{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \underline{\underline{0}}$

- Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, on a :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{u}}(\underline{x},t)) + O(|\underline{\underline{\nabla}}_x\,\underline{u}|^2)$$
$$= \dot{\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\underline{u}(\underline{x},t)) + O(|\underline{\underline{\nabla}}_x\,\underline{u}|^2)$$

en effet $\quad (\underline{\underline{\nabla}}_x\,\underline{v})_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial V_i}{\partial X_\beta}\dfrac{\partial X_\beta}{\partial x_j} = (\underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{V})_{i\beta}\,(F^{-1})_{\beta j}$

d'ou $\quad \underline{\underline{\nabla}}_x\,\underline{v} = \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{V}\;\mathbb{F}^{-1} = \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{V}(X,t)\,(\mathbb{1} + \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{u})^{-1}$

$$= \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{V}\,(\mathbb{1} - \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{u} + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{u}|^2)) = \underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{V} + O(|\underline{\underline{\nabla}}_X\,\underline{u}|^2)$$

3. Representation des efforts

3.1 Hypothèse de Cauchy : vecteur contrainte

Nous adoptons le postulat de Cauchy qui suppose que les efforts qui s'exercent sur un sous domaine $\omega(t)$ d'un milieu continu $\Omega(t)$ à l'instant t sont de deux types :

- des forces de volume exercées à distance par l'extérieur indépendamment du sous domaine $\omega(t)$. Elles sont modélisées par une densité massique de force $\underline{f}(\underline{x},t)$. Sur un élément de volume $d\Omega$, la force élémentaire exercée au point M s'écrit :

$$\left\{ d\underline{f} = \underline{f}(\underline{x},t)\, dm = \rho(\underline{x},t)\, \underline{f}(\underline{x},t)\, d\Omega \right.$$

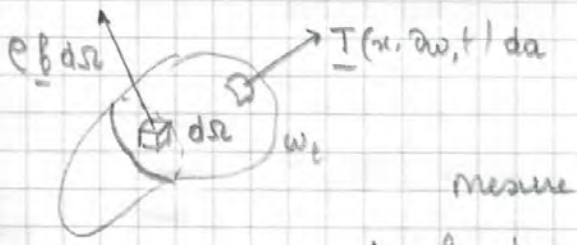
Par exemple, il s'agit des forces de pesanteur ou encore forces électromagnétiques.

- des forces de contact qui s'exercent sur chaque élément de surface de la frontière de $\omega(t)$. Elles sont modélisées par une densité surfacique de force $\underline{T}(\underline{x}, \partial\omega(t), t)$. Sur un élément d'aire da au point M, la force élémentaire s'écrit :

$$\left\{ d\underline{T}(\underline{x}, \partial\omega(t), t) = \underline{T}(x, \partial\omega_t, t)\, da \right.$$

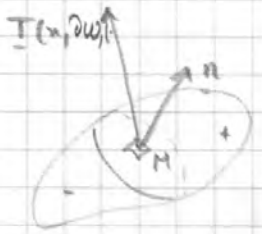
Par exemple, s'il s'agit de force de pression exercée par un fluide, on aura

$T(\underline{x}, \partial\omega, t) = -p(\underline{x},t)\, \underline{n}(x,t)$ où $\underline{n}$ désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\omega_t$ au point M



$\underline{T}(x, \partial\omega, t)$ est appelé vecteur contrainte. Il mesure la densité surfacique exercé par l'extérieur $\Omega_t \setminus \omega_t$ sur le domaine ω à travers l'interface $\partial\omega_t$.

- le second postulat de Cauchy que l'on admet est que le vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{x}, \partial\omega_t, t)$ qui représente la densité surfacique d'efforts exercés sur un sous-système ω_t par le reste du milieu continu à travers une interface $\partial\omega_t$ ne depend que de la normale à l'interface



$$\underline{T}(\underline{x}, \partial\omega_t, t) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$$

Autrement dit, l'effort de contact à l'intérieur du milieu sera le même par deux interfaces de même normale et même courbure. Cette hypothèse est satisfaite pour un liquide exerçant une pression sur une surface de normale $\underline{n}$. Cauchy propose de supposer que tout effort de contact depend de la normale mais n'est pas forcément porté par la normale. C'est une generalisation des efforts de pression à des efforts de contact ("pression oblique)

3.2 Tenseur des contraintes de Cauchy

- Sur la base des deux postulats enoncés précédemment, Cauchy a établi le résultat suivant qui précise la dépendance du vecteur contrainte en fonction de la normale $\underline{n}$

Théorème de Cauchy : le vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ exercé en tout point M à l'instant t sur une surface intérieure du milieu continu de normale $\underline{n}$ dépend linéairement de la normale à cette surface, soit

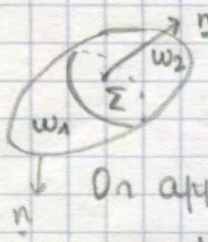
$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy (du second ordre) au point M à l'instant t.

preuve : a) Montrons tout d'abord que sous des hypothèses de régularité sur $\underline{f}$, $\underline{\gamma}$ et $\underline{T}$ continue à l'interface, on a

$$\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = -\underline{T}(\underline{x},-\underline{n},t)$$

On considère pour cela un domaine ω séparé par une surface Σ constitué de deux parties ω_1 et ω_2, soit



$\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, on note $\partial\omega$ la frontière extérieure de ω

On applique le principe fondamental de la dynamique à ω_1, ω_2 et ω en terme de résultante :

$$\int_{\omega_1} \rho(\underline{\gamma}-\underline{f})\,d\omega = \int_{\Sigma} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\,da + \int_{\partial\omega_1\setminus\Sigma} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\,da$$

$$\int_{\omega_2} \rho(\underline{\gamma}-\underline{f})\,d\omega = \int_{\Sigma} \underline{T}(\underline{x},-\underline{n},t)\,da + \int_{\partial\omega_2\setminus\Sigma} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\,da$$

$$\int_{\omega} \rho(\underline{\gamma}-\underline{f})\,d\omega = \int_{\partial\omega} \underline{T}(\underline{x},\underline{n},t)\,da$$

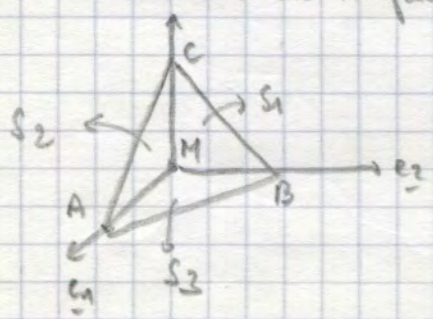
d'où en ajoutant les 2 premières égalités et en retranchant la 3e.

$$0 = \int_{\Sigma} \left[\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) + \underline{T}(\underline{x},-\underline{n},t)\right] da \qquad \forall\omega\ \forall\Sigma\ \forall\underline{n}$$

soit donc $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = -\underline{T}(\underline{x},-\underline{n},t) \qquad \forall\underline{x}\ \forall\underline{n}$

b) Montrons la linéarité en $\underline{n}$ du vecteur contrainte

On écrit l'équilibre d'un petit tétraèdre ω de sommet M ayant 3 faces normales aux directions $-\underline{e_i}$ et une quatrième face de surface S et normale $\underline{n}$ et de surface S_i



$$|\omega| = \frac{1}{3} h\,|S|$$

D'après la formule de la divergence, on a

$$\int_{\partial\omega} \underline{e_i}\cdot\underline{n}\,da = \int_{\omega} \operatorname{div}(\underline{e_i})\,d\omega = 0$$

d'où $-|S_i| + |S|(\underline{e_i}\cdot\underline{n}) = 0$

On traduit l'équilibre de ω avec le PFD

$$\frac{1}{|S|}\int_{\omega} \rho(\underline{\gamma}-\underline{f})\,d\Omega = \frac{1}{|S|}\int_{S_1} \underline{T}(\underline{x},-\underline{e}_1,t)\,da + \frac{1}{|S|}\int_{S_2} \underline{T}(\underline{x},-\underline{e}_2,t)\,da$$
$$+\frac{1}{|S|}\int_{S_3} \underline{T}(x,-e_3,t)\,da + \frac{1}{|S|}\int_{S} \underline{T}(x,\underline{n},t)\,da$$

on fait tendre h vers 0 :

or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{|S|}\int_{\omega} \rho(\underline{\gamma}-\underline{f})\,d\Omega = 0$ $\qquad \frac{|\omega|}{|S|}\,|\rho(\underline{\gamma}-\underline{f})|(M_0) = O(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|S|}\int_{S_1} T(x,-e_1,t)\,da \simeq \frac{|S_1|}{|S|}\,T(\underline{x},-e_1,t) = (\underline{e}_1\cdot\underline{n})\,T(\underline{x},-\underline{e}_1,t)$$

idem pour S_2 et S_3

d'où
$$T(\underline{x},\underline{n},t) = T(x,-e_1,t)(\underline{e}_1\cdot\underline{n}) + T(\underline{x},-\underline{e}_2,t)(\underline{e}_2\cdot\underline{n}) + T(\underline{x},-e_3,t)(\underline{e}_3\cdot\underline{n})$$

et donc comme $T(x,-e_i,t) = -T(x,e_i,t)$, on a

$$T(\underline{x},\underline{n},t) = T(\underline{x},\underline{e}_1,t)\,n_1 + T(\underline{x},\underline{e}_2,t)\,n_2 + T(\underline{x},\underline{e}_3,t)\,n_3$$

avec $\underline{n} = n_1\underline{e}_1 + n_2\underline{e}_2 + n_3\underline{e}_3$

donc $T(\underline{x},\underline{n},t)$ est linéaire par rapport à $\underline{n}$

de sorte qu'il existe un tenseur d'ordre 2 representant cette fonction

$$T(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}(x,t).$$

• <u>Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy</u>

$\underline{\underline{\sigma}}$ est symetrique $\quad \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$

la preuve peut être établie en écrivant le principe Fondamental de la Dynamique sur un petit cube de côté h et en traduisant cette fois le principe en terme de moment. On divise par h^3 (le volume) et on passe à la limite

Il en existe également d'autres preuves, dont une que nous verrons ultérieurement. $\underline{\underline{\sigma}}$ étant symetrique, en conséquence

$\underline{\underline{\Pi}}(\underline{x},t)$ est diagonalisable dans une base orthonormée
Ses valeurs propres sont réelles

$$\underline{\underline{\Pi}}(\underline{x},t) = \sigma_i(\underline{x},t)\ \underline{v}_i \otimes \underline{v}_i \qquad (\text{sans } \Sigma \text{ sur } i)$$

où σ_i est appelée contraintes principales
$\underline{v}_i$ direction principales $\qquad \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{v}_i = \sigma_i\ \underline{v}_i$

- Dimensions, unités

le vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = \underline{\underline{\Pi}}(\underline{x},t)\,\underline{n}$ a la dimension d'une force par unité de surface

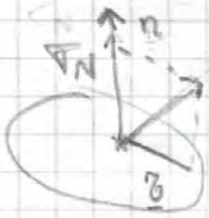
$d\underline{T} = T(\underline{x},\underline{n},t)\,da$ mesure la force élémentaire s'exercant sur une surface da de normale $\underline{n}$

de sorte que l'unité de $\underline{\underline{\Pi}}$ est en $\frac{N}{m^2} = Pa$

les ordres de grandeur typiques varient de 10^5 Pa (bar) pour un gaz à pression atmosphérique au GPa $= 10^9$ Pa pour des metaux sous forte sollicitation

- Contrainte normale, contrainte tangentielle

le vecteur contrainte, soit donc la force de contact exercée sur une surface de normale $\underline{n}$ donnée peut toujours se décomposer en une composante normale portée par la normale $\underline{n}$ à l'interface et une composante portée par le plan tangent



$\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) =$

$$\underline{T}(\underline{x},\underline{n},t) = \sigma_N\,\underline{n} + \underline{\tau}$$

$\underline{\tau}$ est appelé contrainte de cisaillement (vecteur)
σ_N est appelé contrainte normale

- Interpretation des composantes du tenseur des contraintes

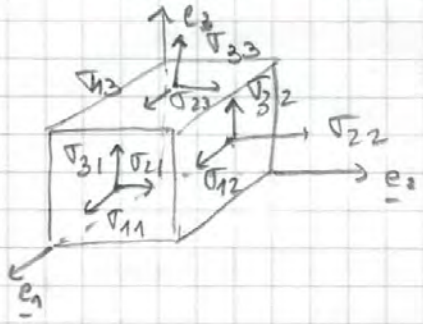
Considerons une base orthonormée, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

et $\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e}_j = \sigma_{ij}\, \underline{e}_i$

autrement dit σ_{ij} est la i^e composante du vecteur contrainte exercé sur une surface de normale $\underline{e}_j$

Soit un cube dont les faces ont pour normale $\underline{e}_i$



o 3.3 Equations locales du mouvement.

- Les équations locales du mouvement vont être obtenues en écrivant les lois de conservation de la quantité de mouvement sur des volumes élémentaires. On rappele au préalable quelques resultats d'analyse vectorielle : Théorème de la divergence :

Sous des hypothèses de régularité des champs sur un domaine ω

$$\int_\omega \operatorname{div}(\underline{v})\, d\omega = \int_{\partial\omega} \underline{v}\cdot\underline{n}\, da$$

$$\int_\omega \underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{b}})\, d\omega = \int_{\partial\omega} \underline{\underline{b}}\cdot\underline{n}\, da \qquad \text{divergence d'un tenseur}$$

$$\int_\omega \frac{\partial}{\partial x_i}(A)\, d\omega = \int_{\partial\omega} A\, n_i\, da$$

Le PFD écrit en termes de résultante sur un domaine matériel quelconque du milieu continu conduit à traduire l'équilibre des efforts d'accélération, des efforts volumiques et des efforts de contact, soit :

$$\int_\omega \rho \underline{\gamma} \, d\omega = \int_\omega \rho \underline{f} \, d\omega + \int_{\partial\omega} \underline{T}(x, \underline{n}, t) \, da \qquad \forall \omega \subset \Omega_t .$$

En appliquant le théorème de la divergence et en introduisant le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$: ($\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$)

$$\int_\omega \left[\rho \underline{\gamma} - \underline{\mathrm{div}} \, \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{f} \right] d\omega = 0 \qquad \forall \omega \subset \Omega_t$$

On en déduit les <u>équations locales du mouvement</u> :

$$\left\{ \underline{\mathrm{div}} \, \underline{\underline{\sigma}}(x,t) + \rho(x,t) \, \underline{f}(x,t) = \rho(x,t) \, \underline{\gamma}(x,t) \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_t, \ \forall t \right.$$

Dans une base de coordonnées cartésiennes orthonormée,

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x,t) + \rho(x,t) \, f_i(x,t) = \rho(x,t) \, \gamma_i(x,t) \qquad i = 1,2,3, \ \forall \underline{x} \in \Omega_t \right.$$

avec sommation sur j répété

ou encore les équations développées suivantes écrites en tout point du milieu continu

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= \rho \gamma_1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= \rho \gamma_2 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= \rho \gamma_3 \end{aligned} \right.$$

L'écriture locale de l'équilibre dynamique en terme de moment conduit à la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$

3.4 Condition aux limites en effort et condition de saut.

- Supposons que sur une partie du bord du milieu continu, l'extérieur exerce des efforts surfaciques $\underline{F}_d(\underline{x}, t)$ $\underline{x} \in \partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_t$.

Nous cherchons à écrire une condition aux limites en $\underline{\underline{\sigma}}$ pour traduire cette donnée. Cette condition peut s'obtenir aisément en écrivant l'équilibre d'une couche fine du domaine en frontière du domaine. Plus rapidement ici, nous invoquons la notion

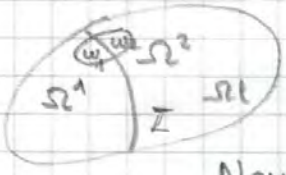
de continuité du vecteur contrainte pour écrire

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{F}_d(\underline{x},t) \qquad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_t$$

($\underline{n}$ normale extérieure à $\partial\Omega_1$ au point x)

Le vecteur contrainte sur la surface extérieure est égal à la densité surfacique d'efforts exercée par l'extérieur sur le milieu continu

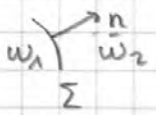
- Considérons maintenant une <u>surface de discontinuité matérielle</u> au sein d'un milieu continu : $\Omega_t = \Omega_t^1 \cup \Omega_t^2$ et $\Sigma = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$



le milieu continu est constitué de deux matériaux Ω^1 et Ω^2

Nous cherchons à écrire une relation sur cette surface de discontinuité. Pour cela, on considère une couche ω de part et d'autre de Σ divisée en ω_1 et ω_2 et on applique le principe fondamental de la dynamique à ω_1, ω_2 et ω entier :

$$\int_{\omega_1} \rho(\underline{\gamma} - \underline{f})\, d\omega = \int_{\omega_1} \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^1\, d\omega = \int_{\partial\omega_1 \setminus \Sigma} \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}\, da + \int_{\Sigma \cap \partial\omega_1} \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}\, da$$



$$\int_{\omega_2} \rho(\underline{\gamma} - \underline{f})\, d\omega = \int_{\omega_2} \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^2\, d\omega = \int_{\partial\omega_2 \setminus \Sigma} \underline{\underline{\sigma}}^2 \cdot \underline{n}\, da + \int_{\Sigma \cap \partial\omega_2} \underline{\underline{\sigma}}^2 \cdot (-\underline{n})\, da$$

avec $\underline{n}$ dirigé de ω_1 vers ω_2

$$\int_{\omega} \rho(\underline{\gamma} - \underline{f})\, d\omega = \int_{\partial\omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, da$$

soit en ajoutant les 2 premières et en soustrayant la 3e égalité, on a

$$0 = \int_{\Sigma \cap \partial\omega_1} \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot n - \underline{\underline{\sigma}}^2 \cdot \underline{n}\, da \qquad \forall \omega$$

d'où

$$[\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \,]\!] \cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \qquad \forall \underline{x} \in \Sigma$$

surface de discontinuité matérielle

Au franchissement d'une surface de discontinuité matérielle, le vecteur contrainte est continu sur la facette tangente à cette surface

En tout point d'un milieu continu, à un instant t donné, les équations locales du mouvement s'écrivent (en absence d'onde de choc) :

$$\underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(x,t)\,\underline{f}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\underline{\gamma}(\underline{x},t) \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_t$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\sigma}}^T(\underline{x},t)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x,t)\cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{F}_d(x,t) \qquad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t^1$$ (dans le cas où un effort extérieur est imposé)

$$[\![\ \underline{\underline{\sigma}}(x,t)\ ]\!]\cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \qquad \forall \underline{x} \in \Sigma$$ surface interne.

Dans le cas statique ou quasi statique, système à l'équilibre, les équations locales du mouvement deviennent des équations d'équilibre :

$$\underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(x,t) + \rho(x,t)\,\underline{f}(x,t) = \underline{0} \qquad \forall\ \underline{x} \in \Omega_t$$

(forces d'inertie négligeables)

Les équations sont écrites en tout point de la configuration déformée, configuration actuelle.

Elles sont indépendantes du type du milieu continu considéré (fluide, ou solide)

Restent à introduire des équations supplémentaires qui vont relier les efforts aux déformations et qui seront caractéristiques du milieu. Il s'agit de la loi de comportement.

Au préalable, nous introduisons quelques états de contraintes simples.

3.5 Etats de contraintes classiques

- L'état de traction simple (ou compression simple) est caractérisé par

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \sigma\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad \text{avec } \sigma \text{ constante}$$

$$\left\{ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \quad \text{il est tel que} \quad \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$$

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_1} = \sigma\, \underline{e_1}$ de sorte que si l'on considère un barreau soumis

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_2} = \underline{0}$ à cet état

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_3} = \underline{0}$

il est soumis à des efforts de traction $\sigma > 0$ dans la direction $\underline{e_1}$ sur face de normale $\underline{e_1}$ et $-\sigma\, \underline{e_1}$ sur la face de normale $-\underline{e_1}$

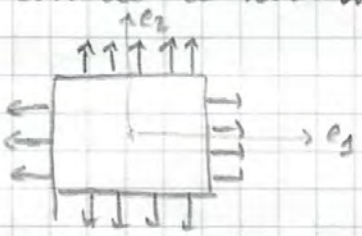
D'une façon générale $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma\, \underline{a} \otimes \underline{a}$ correspond à un état de traction simple dans la direction $\underline{a}$ pour $\sigma > 0$ ou compression simple ($\sigma < 0$).

- <u>L'état de traction biaxiale</u> est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \sigma_1\, \underline{e_1} \otimes \underline{e_1} + \sigma_2\, \underline{e_2} \otimes \underline{e_2} \quad \text{avec } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ constants}$$

soit $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il est associé à un chargement de traction dans les directions $\underline{e_1}$ et $\underline{e_2}$



avec $\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0}$

- <u>L'état de traction triaxial</u> caractérisé par $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \sigma_1\, \underline{e_1} \otimes \underline{e_1} + \sigma_2\, \underline{e_2} \otimes \underline{e_2} + \sigma_3\, \underline{e_3} \otimes \underline{e_3}$$

- <u>L'état de compression hydrostatique</u> est caractérisé par un tenseur sphérique $\underline{\underline{\sigma}}(x) = -p\, \underline{\underline{1}}$ $p = \text{constant}$

tel que $\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(x) = \underline{0}$ en tout point et

$\underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n} = -p\, \underline{n}$ chargement de pression

- L'état de chargement de cisaillement simple est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme (dans le plan $\underline{e}_1, \underline{e}_2$)

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \tau\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad \text{avec } \tau = \text{constante}$$

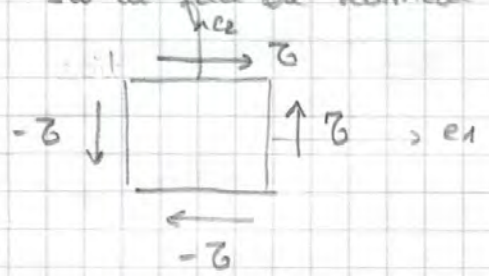
soit

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Cet état correspond au chargement suivant :

sur la face de normale $\underline{e}_1$ $\quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1 = \tau\, \underline{e}_2$

sur la face de normale $\underline{e}_2$ $\quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2 = \tau\, \underline{e}_1$, soit :



o 3.6 Linéarisation des équations locales du mouvement

Dans le cadre des transformations infinitésimales les équations locales du mouvement et les conditions aux limites se linéarisent

- On a ainsi

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\sigma_{ij}(x,t)\right] = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} F_{kj}$$

$$= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

si $\left|\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right| \ll 1$ alors $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + O\left(|\underline{\underline{\nabla}} u|^2\right)$

De sorte que l'équations locales du mouvement sont écrites dans la configuration de référence Ω_0 sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(X,t) + \rho_0(X)\, f_i(\Phi(\underline{X},t),t) = \rho_0(X)\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(X,t)$$

$$\forall X \in \Omega_0 \quad \forall t$$

En supposant que les forces de masse peuvent être identifiées à leur partie principale - $\underline{f}(\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}, t) \simeq \underline{f}(X,t)$ (hypothèse petits déplacements)

On obtient finalement les equations linéarisées du mouvement

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial X_j}(X,t) + \rho_0(X)\, f_i(X,t) = \rho_0(X)\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(X,t) \quad \forall X \in \Omega_0 \right.$$

$i = 1,2,3$

ou encore en écriture vectorielle

$$\left\{ \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\Pi}}(X,t) + \rho_0(X)\, \underline{f}(X,t) = \rho_0(X)\, \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(X,t) \quad \forall X \in \Omega_0 \right.$$

$\forall t$

- les conditions aux limites se linéarisent également de la façon suivante :

On rappelle que sur $\partial\Omega_t$ $\quad \underline{\underline{\Pi}}(x,t)\cdot \underline{n} = \underline{F}^d(x,\underline{n},t)$

dans le cas d'un effort imposé sur la frontière

(eventuellement, sur une partie seulement de la frontière)

et $\quad \underline{da} = \underline{n}\, da = J\, {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\, \underline{N}\, dA$

De sorte puisque l'hypothèse des transformations infinitésimales $\underline{\underline{F}} \simeq \underline{\underline{I}}$

$(J \simeq 1 + \mathrm{div}\, \underline{u}) \qquad \underline{n}\, da = \underline{N}\, dA$

et donc :

$$\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{N} = \underline{F}^d(\underline{X}+\underline{u}, \underline{n}, t)\, \frac{da}{dA} = \underline{F}^d(\underline{X}+\underline{u}, \underline{N})$$

$$\underline{\underline{\Pi}} \cdot N \simeq \underline{F}^d(X, N)$$

en supposant que l'on puisse identifier l'effort surfacique à sa partie principale c'est le cas en petits déplacements

La condition aux limites linéarisée s'écrit alors

$$\left\{ \underline{\underline{\Pi}}(X,t)\cdot \underline{N}(X) = \underline{F}^d(X,t) \quad \forall \underline{X} \in \partial\Omega_0. \right.$$

4- Loi de comportement de solide élastique

le tenseur des contraintes de Cauchy introduit au paragraphe précédent pour modéliser les efforts internes a 6 composantes indépendantes... les équations de la dynamique fournissent 3 équations aux dérivées partielles indépendantes du milieu constitutif étudié. Il manque donc en conséquence des relations complémentaires caractérisant le comportement des milieux sous les sollicitations. Il s'agit d'identifier des lois reliant les déformations ou vitesses de déformation subis localement par le matériau aux sollicitations qui les engendrent (de type thermique ou contraintes).

On se restreint dans ce cours à caractériser le comportement de milieu continu solide élastique. On admet un certain nombre de résultats qui se justifient par les 1e et 2e principes de la thermodynamique

4.1 Cadre de la thermoélasticité sans liaison interne

la loi de comportement d'un milieu solide élastique (*) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \underline{\underline{\Pi}}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x})\, \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\, \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}},T)\, {}^{T}\underline{\underline{F}}(X,t) \right.$$

en tout point $\underline{x} \in \Omega_t$ avec $\underline{x} = \underline{\Phi}(X,t)$ à t fixé

où ρ désigne la masse volumique au point $\underline{x}$

$\underline{\underline{F}}$ le tenseur gradient de déformation

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\Phi}$$

et où $\Psi(\underline{\underline{E}}, T)$ désigne l'énergie interne massique qui dépend du tenseur des déformations $\underline{\underline{E}}$ de Green-Lagrange et de la température T

(*) en absence de liaison interne, c'est à dire que son comportement peut être déterminé à partir des valeurs des déformations actuelles et de la température, indépendamment de l'histoire des déformations subis

04.2. Thermoélasticité linéarisée - hypothèses des petites déformations et petits échauffements de température

Une forme simplifiée de la loi de comportement des milieux solides s'obtient dans le cas où les déformations subies par le milieu et les échauffements sont petits. Sous ces hypothèses :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \simeq \underline{\underline{1}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{E}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) \quad , \rho \simeq \rho_0$$

la loi de comportement s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Pi}}(x,t) = \rho_0(X)\dfrac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \dfrac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\left[(\rho_0 \Psi)(X, \underline{\underline{\varepsilon}}, T)\right] \\ \quad \text{avec } \rho_0(X) \text{ la masse volumique du milieu dans sa configuration} \\ \quad \text{non déformée} \end{array} \right.$$

On procède à un développement limité de l'énergie autour de la configuration de référence $(\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}, T = T_0)$ au 1er ordre :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{0}}, T_0) + \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\left[\frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\right](\underline{\underline{0}}, T_0) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\right)(\underline{\underline{0}}, T_0)\,(T - T_0)$$

soit
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\,\underline{\underline{K}} \quad \text{ou encore} \\ \Pi_{ij} = \Pi_{ij}^0 + C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} - (T - T_0)\,K_{ij} \quad \forall (i,j) \end{array} \right.$$

avec $\underline{\underline{\Pi}}_0$ le tenseur des contraintes observé en configuration de référence pour $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$ et $T = T_0$ en absence de déformation. Dans le cas où la configuration de référence est un état naturel, bilan d'effort $\underline{\underline{\Pi}}_0 = \underline{\underline{\Pi}}(t=0) = \underline{\underline{0}}$

et $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ le tenseur du 4e ordre d'élasticité $\quad C_{ijkl} = \dfrac{\partial^2(\rho_0 \Psi)}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}}$

$\underline{\underline{K}}$ le tenseur du 2e ordre de dilatation thermique

$$K_{ij} = -\frac{\partial^2 \rho_0 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial T}$$

ou encore $\begin{cases} \underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}) = \dfrac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} [(\rho_0 \Psi)(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)] \\ \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = (T - T_0)\, \underline{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{K}} \end{cases}$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$ désignent les déformations d'origine thermique

et $\rho_0 \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\, \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\Pi}}^{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

- Cette loi est valable sous l'hypothèse $|\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}| \ll 1$ (petites déformations) et $|(T - T_0)\, \underline{\underline{\alpha}}| \ll 1$ (petites déformations induites par des petits échauffements)

- Dans le cas où la transformation est isochore $T = T_0$, la loi de comportement en petites transformations est purement élastique et s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases}$$

et pour un milieu de référence naturel :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \Pi_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}.$$

4.3 Propriétés de symétrie

- Le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ possède les symétries suivantes :

$$\begin{cases} \bullet\ C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \\ \bullet\ C_{ijkl} = C_{klij} \end{cases}$$

Il est donc défini par 21 coefficients indépendants qui ont la dimension d'une contrainte. (N/m^2, Pa)

Les premières symétries résultent de celles de $\underline{\underline{\Pi}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$\Pi_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} = \Pi_{ji} = C_{jikl}\, \varepsilon_{kl}$ (Symétrie de $\underline{\underline{\Pi}}$) $\Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} = C_{ijkk}\,\varepsilon_{kk} = C_{ijkk}\,\varepsilon_{kl} \quad \text{(symétrie de } \varepsilon\text{)}$$

$$\Rightarrow C_{ijkk} = C_{ijkl}$$

Par ailleurs l'existence de l'énergie massique conduit à

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \rho_0 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \rho_0 \Psi}{\partial \varepsilon_{kl}\,\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$$

le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ a donc a priori $3\times3\times3\times3$ coefficients indépendants (81)

de fait la symétrie $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijkk}$, il dépend seulement de $6\times6 = 36$ coefficients

et de par la seconde symétrie $6\times\left(\frac{6+1}{2}\right) = 21$ coefficients

- le tenseur de dilatation thermique $\underline{\underline{K}}$ est symétrique

$\Big\}$ $K_{ij} = K_{ji}$ les coefficients ont la dimension d'une contrainte par degré Kelvin.

le tenseur $\underline{\underline{\alpha}}$ est également symétrique

- Ces symétries de coefficients conduisent à l'écriture suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j - (T-T_0)\,K_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

- Cette loi peut être également écrite sous forme matricielle en adoptant la notation de Voigt : soient les vecteurs à 6 composantes $\underline{\sigma}$ et $\underline{\gamma}$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix}$$

alors $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\sigma} \cdot \underline{\gamma}$ (cela justifie l'introduction des facteurs 2 dans la définition de $\underline{\gamma}$)

Il existe différentes conventions : le coefficient 2 peut être affecté aussi pour partie à travers $\sqrt{2}$ sur les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\sqrt{2}$ " " de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

Avec cette convention, la loi de comportement s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ \text{Sym} & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

$$-(T-T_0)\begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{33} \\ K_{12} \\ K_{23} \\ K_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^0_{11} \\ \sigma^0_{22} \\ \sigma^0_{33} \\ \sigma^0_{12} \\ \sigma^0_{23} \\ \sigma^0_{31} \end{pmatrix}$$

le tenseur de rigidité $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ est représenté avec cette notation sous la forme d'une matrice $[C]$ (6,6) symétrique

Cette notation est intéressante sur le plan numérique : elle permet de stocker les déformations, les contraintes de façon économique sous la forme d'un vecteur à 6 composantes au lieu de matrices (3×3) et le tenseur $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ du 4e ordre sous forme d'une matrice (6,6)

4.4 Invariances Matérielles

Dans la configuration de référence, les matériaux présentent le plus souvent une structure qui dépend de l'orientation suivant laquelle on les regarde. On parle d'anisotropie. Cette anisotropie résulte d'une anisotropie des éléments homogènes constitutifs qui peut être due aussi à un arrangement spatial des éléments (forme, orientation).

Il existe cependant des situations où le matériau présente des symétries locales, c'est à dire qu'il existe des symétries et des rotations qui laissent le matériau invariant.

l'énergie libre d'un matériau respecte ces symétries de la matière et est donc invariante quand on compose le tenseur des déformation de Green Lagrange ou des déformations linéarisées dans le cas des transformation infinitésimales par une symétrie $\underline{\underline{R}}$ telle que ${}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$,

soit: $\Psi(X, T, \underline{\underline{E}}) = \Psi(X, T, {}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{R}})$

ou $\Psi(X, T, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \Psi(X, T, {}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{R}})$

- Un cas de symétrie matérielle important en pratique est le cas de l'isotropie il conduit à une forme très simple de la loi de comportement

Un matériau est isotrope s'il est localement invariant dans toute rotation de sa configuration matérielle

On peut montrer que dans ce cas l'energie libre s'écrit sous la forme

$$\Psi(X, T, \underline{\underline{E}}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{trace}\,\underline{\underline{E}})^2 + \mu\,\mathrm{trace}(\underline{\underline{E}}^2) - 3K\alpha(T-T_0)\,\mathrm{Trace}(\underline{\underline{E}})$$

pour un milieu de référence naturel. Elle dépend de 3 paramètres matériau indépendants (λ, μ, α)

Ainsi, pour milieu élastique linéaire isotrope dans un état naturel la loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{T}} = \lambda\,\mathrm{trace}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} - 3K\alpha(T-T_0)\,\underline{\underline{1}}$$

où . (λ, μ) sont appelés coefficients de Lamé (en Pa)

. K le module de compressibilité qui s'exprime en fonction de λ et μ

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

. et α le coefficient de dilatation thermique (en Kelvin^{-1})

Cette loi s'inverse sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{T}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{trace}\,\underline{\underline{T}})\,\underline{\underline{1}} + \alpha(T-T_0)\,\underline{\underline{1}}$$

avec E le module de Young $= \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$

ν le coefficient de Poisson $= \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

Si le matériau est hétérogène $(\lambda, \mu$ et α | ou (E, ν, α) dépendent du point $\underline{x}$.

- Un grand nombre de matériaux présente la symétrie minimale de l'orthotropie, c'est à dire présente des symétries matérielles autour de trois plans perpendiculaires.

Dans ce cas de symétrie, la loi de comportement élastique dépend de 9 coefficients indépendants et on a avec la notation de Voigt

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

dans la base d'orthotropie

Et la matrice des coefficients de dilatation thermique est de la forme :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Un exemple de matériau orthotrope est le bois. Localement, les directions d'orthotropie sont $\underline{e_r}, \underline{e_\theta}, \underline{e_z}$. La rigidité du bois est plus élevée dans les directions des fibres que dans les directions perpendiculaires

La forme de la loi de comportement orthotrope s'établit en traduisant l'invariance du comportement par les 3 symétries par rapport au plan x_1Ox_2, x_2Ox_3 et x_1Ox_3. Ainsi, traduisons la symétrie par rapport au plan x_2Ox_3, on a $\{\sigma\}=[C]\{\gamma\}$ et on a $\{\sigma'\}=[C]\{\gamma'\}$

avec

$$\{\gamma'\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ -2\varepsilon_{12}\\ 2\varepsilon_{23}\\ -2\varepsilon_{13}\end{Bmatrix} \qquad \{\sigma'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ -\sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ -\sigma_{31}\end{Bmatrix}$$

De sorte que par exemple, on a :

$$\sigma_{11}=C_{1111}\varepsilon_{11}+C_{1122}\varepsilon_{22}+C_{1133}\varepsilon_{33}-2C_{1112}\varepsilon_{12}+2C_{1123}\varepsilon_{23}+2C_{1131}\varepsilon_{31}$$

et $$\sigma'_{11}=\sigma_{11}=C_{1111}\varepsilon_{11}+C_{1122}\varepsilon_{22}+C_{1133}\varepsilon_{33}+2C_{1112}\varepsilon_{12}+2C_{1123}\varepsilon_{23}-2C_{1131}\varepsilon_{31}$$

d'où $C_{1112}=-C_{1112}$ et $C_{1113}=-C_{1113}$

et donc $C_{1112}=C_{1113}=0$

De la même manière on établit $C_{2212}=C_{2223}=0$ . . .

La loi de comportement élastique d'un milieu orthotrope s'écrit également sous la forme inverse avec la notation de Voigt sous la forme :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{12}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0\\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0\\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ & & & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0\\ & & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0\\ & & & & & \frac{1}{2G_{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{pmatrix}$$

et faut intervenir 3 modules de Young
3 coefficient de Poisson (dit de contraction)
3 modules de cisaillement

- Un matériau est dit isotrope transverse (ou encore orthotrope de revolution, s'il est orthotrope et s'il possède de plus une symetrie de revolution autour d'un axe d'orthotropie.

Ainsi s'il est isotrope transverse dans le plan (O, x_1, x_2), (soit possède une symetrie de révolution autour de l'axe x_3, la matrice de rigidité $\mathbb{C}$ est de la forme

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Symetrique} & & C_{1111}-C_{1122} & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1313} \end{pmatrix}$$

elle dépend de 5 coefficients indépendants

C_{1111} C_{1122} C_{1133} C_{3333} C_{1313}

la matrice des coefficients de dilatation thermique dépend de deux coefficients indépendants

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

les sols qui resultent du dépôt de couches horizontales successives de sédiments sont des milieux transversalement isotropes

les composites à fibres longues unidirectionnelles à section circulaire presentent également un comportement isotrope transverse.

BILAN : Sous les hypothèses de transformations infinitésimales, de petits déplacements et de petites déformations induites par des petits échauffements ($|\nabla u| \ll 1$ $|u| \ll L$ $|\underline{\alpha}(T-T_0)| \ll 1$, les équations de la thermoélasticité peuvent être linéarisées et écrites sur la configuration non déformée du milieu

Soient avec les notations suivantes (les indices ^{0} sont omis et $\underline{X}$ note $\underline{x}$)

Ω le domaine Ω_0

$\underline{\underline{\sigma}}(x,t)$ le tenseur de Cauchy en tout point $X \in \Omega = \Omega_0$

$\rho(x) = \rho_0(\underline{X})$ la masse volumique dans la configuration de référence

$x = \underline{X}$ un point de Ω_0

$\underline{n} = \underline{N}$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega_0$

les champs de déplacement $\underline{u}$, de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de contraintes satisfont en tout point X de Ω_0 les équations suivantes :

$$\begin{cases}
\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{f} = \rho_0 \dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \text{ dans } \Omega & \text{ou} \quad \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 f_i = \rho_0 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\
\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(u) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right) \text{ dans } \Omega & \sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^{th}_{kl}\right) \\
\underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}^T\right) & \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = (T - T_0)\, \underline{\underline{\alpha}} & \varepsilon^{th}_{ij} = (T - T_0)\, \alpha_{ij} \\
\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \text{sur } \partial_1\Omega & \sigma_{ij} n_j = F_i^d \\
\underline{u} = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial_2\Omega & u_i = u_i^d \\
[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \text{ interne} & [\![\sigma_{ij}]\!]\, n_j = 0
\end{cases}$$

Dans le cas d'un milieu à l'équilibre à l'instant t ,

l'équation du mouvement devient l'équation d'équilibre

$$\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}(x) + \rho_0(x)\, \underline{f}(x) = \underline{0} \quad \forall x \in \Omega$$