Chapitre 1 : Éléments de topologie

1. Espaces de Banach

1.1. Définitions (Rappels)

- **Définition d'un espace de Banach**

Un espace E est un espace de Banach si c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet, c'est à dire :

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  $(E, +, \cdot)$ — $\cdot$: loi externe, $+$: loi interne

- E est un espace normé ; on note $\|\cdot\|_E$ la norme.

$$\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}^+ \text{ tq } \begin{cases} \|x\|_E \geq 0, \ \forall x \in E. \\ \|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E. \\ \|x\|_E = 0 \iff x = 0. \\ \|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E, \ \forall x, y \in E \end{cases}$$

- $(E, \|\cdot\|_E)$ = complet, i.e toute suite de Cauchy est convergente.

→ Rappels : Définition d'une suite de Cauchy :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N_\varepsilon : \|u_n - u_m\|_E \leq \varepsilon$

→ Définition d'une suite convergente.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est conv. si $\exists\, l \in E$ tq

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_\varepsilon : \|u_n - l\|_E \leq \varepsilon$.

1.2 Propriétés des suites de Cauchy

1 - Une suite de Cauchy est toujours bornée.

2 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors toute sous-suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est suite de Cauchy

3 - Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.

4 - Toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque est fausse ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).

(Démonstrations vue en TD)

1.3 Exemples des espaces de Banach

1) $\mathbb{R}$ est un espace complet (d'après le théorème de Bolzano - Weierstrass, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente, donc si (u_n) est une suite de Cauchy alors elle est bornée, donc on peut extraire une sous-suite convergente, donc (u_n) est convergente)

2) $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace complet : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (irrationnel), il existe une suite $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tq $x_n \to x$ dans $\mathbb{R}$. $(x_n)_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$, donc suite de Cauchy sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ suite de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ et $x_n \to x \notin \mathbb{Q}$ donc (x_n) n'est pas convergente ds $\mathbb{Q}$.

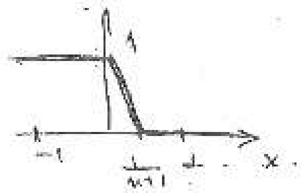
3) $E = (C^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{ continue}\}, \|\cdot\|_E)$

$\|f\|_E = \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ est un espace de Banach (TD1)

4) $E = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ n'est pas un Banach.

<u>Justification</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions de E continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1\le x<0 \\ 1-(n+1)x & \text{si } 0\le x<\frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n+1}\le x\le 1. \end{cases}$$



- On démontre que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy ds E, qui n'est pas convergente.

$$\|f_n - f_m\| = \int_{-1}^{1} |f_n(x)-f_m(x)|\,dx = \int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|\,dx$$

$$\le \underbrace{\int_0^1 |f_n(x)|\,dx}_{\frac{1}{2(n+1)}} + \underbrace{\int_0^1 |f_m(x)|\,dx}_{\frac{1}{2(m+1)}}$$ pas fait

$\forall\varepsilon>0$, prenons $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$; on a $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ $(=N_\varepsilon)$

$\|f_n - f_m\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\Rightarrow$ (f_n) suite de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f(x) = \begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ 0, & 0\le x<1 \end{cases} \notin \mathcal{C}^0([0,1])$$

la limite est ds chaque point et au sens de $\|\cdot\|_1$

5) $E = (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_2)$, $\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Banach (TD1)

6) $E = (L^2([a,b]), \|\cdot\|_2)$, avec

$L^2([a,b]) = \{ f$ intégrable sur $[a,b]$, de carré intégrable $\int_a^b |f(x)|^2dx < \infty \}$

est un espace de Banach.

Plus généralement,

$E = (L^p([a,b]), \|\cdot\|_p)$, $\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p d_p\right]^{\frac{1}{p}}$, $p\in\mathbb{N}^*$

est un espace de Banach

$\left(L^p([a,b]) = \{ f \text{ intégrable sur } [a,b], \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \} \right)$

Mais F contient les limites de ses suites de Cauchy
$\Rightarrow$ $u \in F$. contradiction avec l'hypothèse de départ
($u \in CF$).

1.5. Applications linéaires et bilinéaires continue

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectorels normés.
On note $\mathcal{L}(E,F) = \{ f : E \to F, \ f = \text{application linéaire} \}$

Rappel : f est linéaire $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

▷ Proposition : Caractérisation des applications linéaires continues

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. les affirmations suivantes sont équivalentes :
i) f est continue sur E (en tout point) ;
ii) f est continue en 0.
iii) f est bornée sur la boule fermée $\bar{B}(0,1)$
$(\exists M > 0, \forall y \in \bar{B}(0,1) : \|f(y)\|_F \leq M)$.
iv) f est lipschitzienne :
$\exists M > 0$ telle que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Preuve : Rappel : f est continue en $a \in E$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E$: $\|x - a\|_E \leq \eta$ alors
$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

- i) $\Rightarrow$ ii) évident.
- ii) $\Rightarrow$ iii) f continue en origine $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E$: $\|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$.
f étant linéaire , il vient :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q $\forall x \in E$: $\|\frac{x}{\eta}\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(\frac{x}{\eta})\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}$

Il existe donc $M = \frac{\varepsilon}{\eta} > 0$ t.q. $\forall y \in \overline{B}(0,1)$ $\left(y = \frac{x}{\eta}\right)$.
alors $\|f(y)\|_F \leq M$; f est donc bornée sur $\overline{B}(0,1)$.

- iii) $\Rightarrow$ iv) Soit f bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$

Alors, $\exists M > 0$, $\forall x \in E$, $x \neq 0$, on pose $y = \frac{x}{\|x\|}$.

Alors $y \in \overline{B}(0,1) \Rightarrow \|f(y)\|_F \leq M$.

$$\Updownarrow$$

$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_F \leq M \overset{f = \text{linéaire}}{\Longleftrightarrow} \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$$

Par ailleurs, cette inégalité est vraie pour $x = 0$ aussi ;
donc elle est vraie $\forall x \in E \Rightarrow f$ est lipschitzienne.

- iv) $\Rightarrow$ i) Soit f lipschitzienne, donc

$\exists M > 0$, $\forall x \in E$: $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Soit $x_0 \in E$ $\Rightarrow$ $x - x_0 \in E$ et $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq M \|x - x_0\|_E.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ $\left(\eta = \frac{\varepsilon}{M}\right)$ t.q. $\forall x \in E$ avec $\|x - x_0\|_E \leq \eta$

alors $\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq M \|x - x_0\|_E \leq \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} = \varepsilon$.

ce qui démontre la continuité en x_0.

x_0 étant quelconque ds E, f est continue sur E. q.e.d.

▶ Remarque : Si E est de dimension finie, E = e.v.n.
alors toute application linéaire de $E \to F$ = evn est continue.

Preuve : à faire ! avec indication à donner !

E étant de dimension finie, soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base (n = dimension de E)

$\forall x \in E \; , \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \; , \quad x_i \in \mathbb{K}.$

E = dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes

On choisit $\|x\|_E = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Si f est une application linéaire, $f : E \to F$ alors

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

$\Downarrow$ propriétés de la norme.

$$\|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_F .$$

Soit $M = \max\{ \|f(e_1)\|_F, \|f(e_2)\|_F, \dots, \|f(e_n)\|_F \}$.

Alors $\|f(x)\|_F \leq M\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\Big) = M \cdot \|x\|_E$.

Avec la propriété précédente on trouve que f est continue

▸ <u>Généralisation</u> : Applications bilinéaires

Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ deux e.v.n. et

$$a : E_1 \times E_2 \to F \; , \quad (F, \|\cdot\|_F) = \text{e.v.n}$$
$$(x, y) \mapsto a(x, y)$$

une application bilinéaire, i.e. a est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

▸ <u>Proposition</u> : Caractérisation des applications bilinéaires continues

Soit $a \in \mathcal{L}((E_1, E_2); F)$. les propriétés suivantes sont équivalentes

i) a est continue sur (E_1, E_2), muni de la topologie produit

$$\|(x_1, x_2)\|_{E_1 \times E_2} = \mathrm{Max}\,(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}) \; ;$$

ii) a est continue à l'origine $(0,0)$;

iii) a est bornée sur $\overline{B}(0,1) = \{ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, tel que $\|(x_1, x_2)\|$

iv) $\exists M > 0$ t.q $\forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2$:

$$\|a(x_1, x_2)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}$$

2. Espaces de Hilbert

2.1. Définitions et propriétés

$\boxed{\text{Rappels}}$:

▶ Définition d'un produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}.$$

bilinéaire, symétrique, définie positive, i.e. satisfaisant :

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z) \in E^3$: $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$
$\varphi(x, \lambda y + z) = \varphi(x,z) + \lambda \varphi(y,z)$

ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

iii) $\forall x \in E$ $\varphi(x,x) \geq 0$.

iv) $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Notation : $\varphi(x,y) = \langle x, y \rangle$

▶ Exemples de produit scalaire :

1) $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ produit scalaire usuel

2) $E = (C^0([a,b]), \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ ($f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue)

$$(f,g) \xrightarrow{\varphi} \varphi(f,g) = \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

▶) Propriétés du produit scalaire :

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit E un espace vect. réel, φ un produit scalaire sur E.

$\forall (x,y) \in E^2$, $|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\, \varphi(y,y)$

$\Updownarrow$

$|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\, \sqrt{\varphi(y,y)}$

Norme dérivée d'un produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ un produit scalaire sur E.
Alors $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ définit une norme sur E.

Définition d'un espace de Hilbert

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ un produit scalaire sur E.
E = espace de Hilbert si $(E, \|\cdot\|_E)$ = espace de Banach,
$\|\cdot\|_E$ étant la norme associée au produit scalaire φ.

Exemples de Hilbert :

- $E = L^2(]a,b[) = \{ f :]a,b[\to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2 dx < \infty \}$

fonctions définies sur $]a,b[$, de carré intégrables

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

et la norme associée $\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

ou plus général

$$L^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega = \text{domaine ouvert} \subset \mathbb{R}^n_{n \geq 1},\ \int_\Omega f^2(x)\, dx < \infty]$$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega f^2 dx \right)^{1/2}.$$

Théorème de Riesz (représentation de Riesz d'une forme linéaire)

Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue L de H dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$, $\exists!\, u \in H$ tel que

$$L(v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$