Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

(i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.

(ii) On applique à ce système isostatique, **en plus des chargements extérieurs** les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs.

$\Longrightarrow$ **choix des inconnues hyperstatiques** X_R

(iii) Par l'application du théorème de Castigliano à l'action de contact d'un appui sans frottement (ou encastrement), on calcule les déplacements et/ou les rotations du système rendu isostatique.

Théorème de Menabrea :

Les valeurs des **réactions hyperstatiques** correspondant à l'équilibre du système rendent **minimale** (stationnaire) l'énergie de déformation U :

$$\frac{\partial U}{\partial X_R} = 0$$

avec X_R les inconnues hyperstatiques

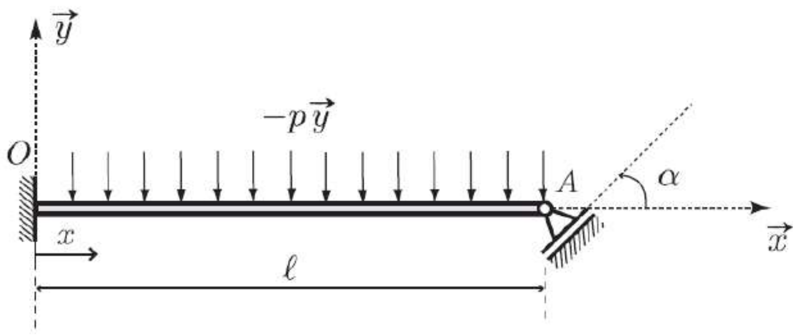
Méthodes énergétiques (Rappel de cours)

Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

(i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.

Exo 4 : Étude d'une poutre hyperstatique



Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Structure étudiée au TD4.

Degré d'hyperstaticité = 1, inconnue R_A

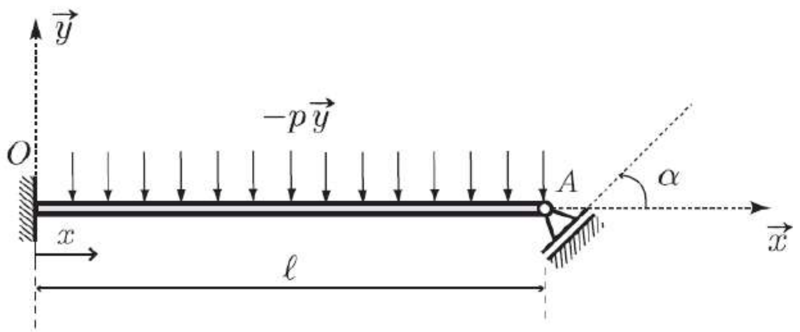
Méthodes énergétiques (Rappel de cours)

Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

(i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.

Exo 4 : Étude d'une poutre hyperstatique

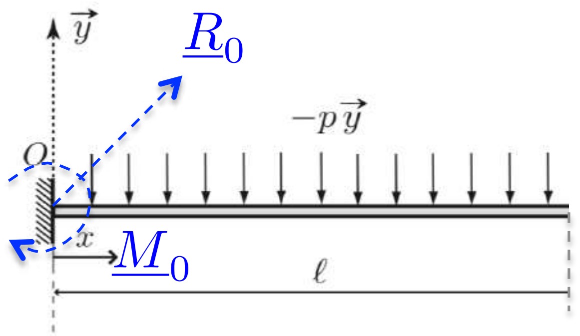


Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Structure étudiée au TD4.

Degré d'hyperstaticité = 1, inconnue R_A



Système isostatique associé, extrémité libre en $x = \ell$

Méthodes énergétiques (Rappel de cours)

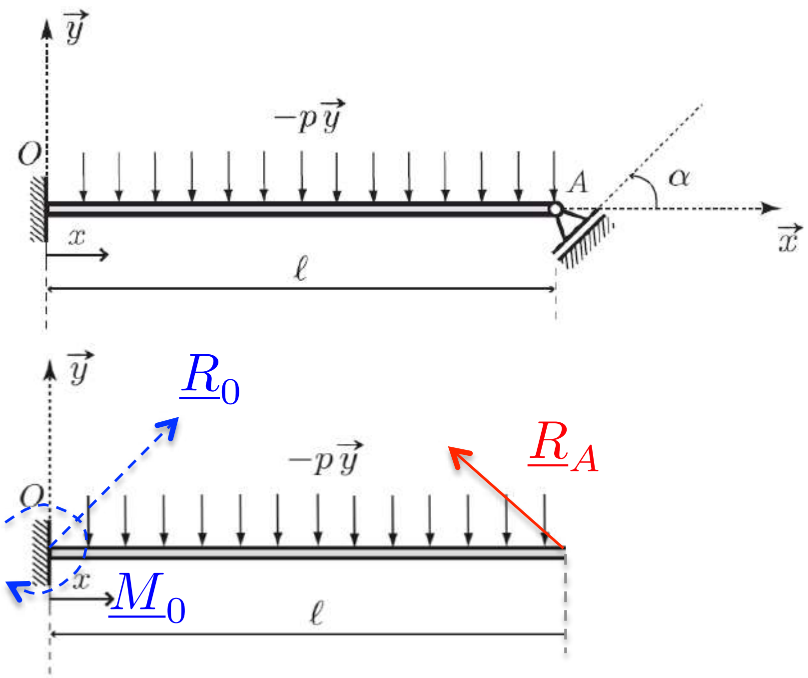
Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux systèmes hyperstatiques en procédant de la façon suivante :

(i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.

(ii) On applique à ce système isostatique, **en plus des chargements extérieurs** les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs.

$\Longrightarrow$ choix des inconnues hyperstatiques X_R



Structure étudiée au TD4.

Degré d'hyperstaticité = 1, inconnue R_A

Méthodes énergétiques (Rappel de cours)

Théorème de Menabrea (Théorème du potentiel minimal)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux **systèmes hyperstatiques** en procédant de la façon suivante :

(i) On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaison) du système hyperstatique pour le "rendre" isostatique.

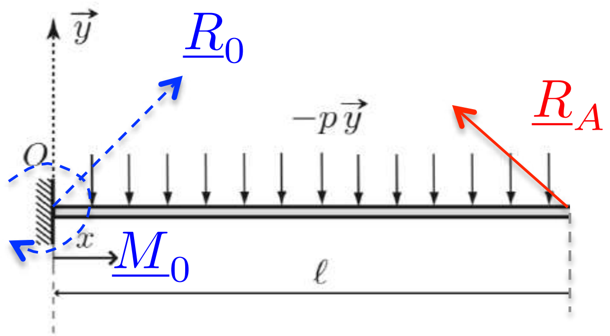
(ii) On applique à ce système isostatique, **en plus des chargements extérieurs** les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs.

$\Longrightarrow$ choix des inconnues hyperstatiques X_R

(iii) Par l'application du théorème de Castigliano à l'action de contact d'un appui sans frottement (ou encastrement), on calcule les déplacements et/ou les rotations du système rendu isostatique.

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

Physiquement le déplacement normal au plan incliné δ_A est nul pour le système hyperstatique.



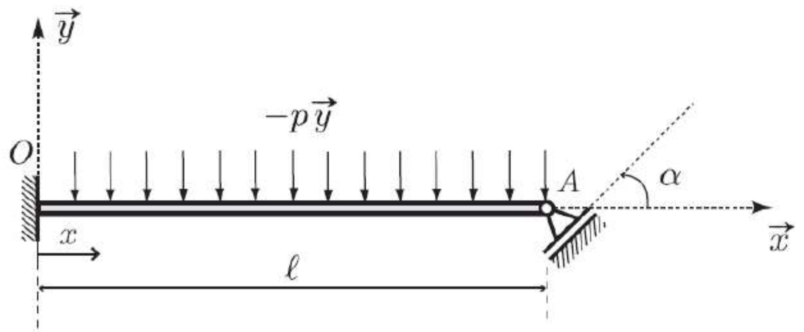
On cherche donc R_A telle que :

$$\boxed{\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0}$$

Soit qui minimise l'énergie de déformation (**Menabrea**)

Méthodes énergétiques

Rappels :

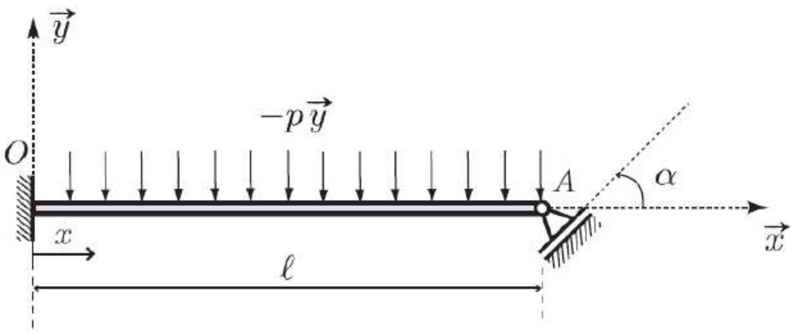


Équilibre global donne les **efforts de liaison** en fonction de l'inconnue hyperstatique.

$$\begin{cases} \underline{R}_O = R_A \sin\alpha \underline{e}_x + (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y \\ \underline{M}_O = \left(\frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha\right)\underline{e}_z \\ \underline{R}_A = R_A\left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \end{cases}$$

Méthodes énergétiques

Rappels :



Équilibre global donne les **efforts de liaison** en fonction de l'inconnue hyperstatique.

$$\begin{cases} \underline{R}_O = R_A \sin\alpha \underline{e}_x + (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y \\ \underline{M}_O = \left(\frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha\right)\underline{e}_z \\ \underline{R}_A = R_A\left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \end{cases}$$

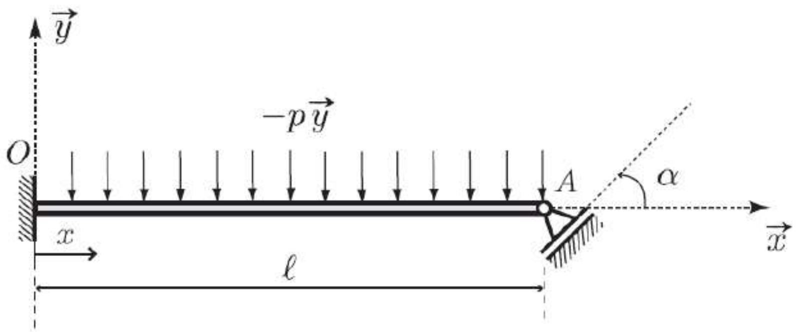
Équilibre local donne les **efforts de cohésion** en fonction de l'inconnue hyperstatique.

$$\underline{\mathcal{R}}(x) \rightarrow \begin{cases} N(x) = -R_A sin\ \alpha \\ T_y(x) = [p(x-\ell) + R_A cos\ \alpha]\ \underline{e}_y \\ T_z(x) = 0 \end{cases}$$

Efforts normal et tranchant non nuls

Méthodes énergétiques

Rappels :



Équilibre global donne les **efforts de liaison** en fonction de l'inconnue hyperstatique.

$$\begin{cases} \underline{R}_O = R_A \sin\alpha \underline{e}_x + (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y \\ \underline{M}_O = \left(\frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha\right)\underline{e}_z \\ \underline{R}_A = R_A\left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \end{cases}$$

Équilibre local donne les **efforts de cohésion** en fonction de l'inconnue hyperstatique.

$$\underline{\mathcal{R}}(x) \rightarrow \begin{cases} N(x) = -R_A sin\ \alpha \\ T_y(x) = [p(x-\ell) + R_A cos\ \alpha]\,\underline{e}_y \\ T_z(x) = 0 \end{cases}$$

Efforts normal et tranchant non nuls

$$\underline{\mathcal{M}}(x) \rightarrow \begin{cases} M_t(x) = 0 \\ M_y(x) = 0 \\ M_z(x) = \left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right] \end{cases}$$

Moment de flexion suivant z non nul uniquement.

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right)\mathrm{d}x$

Pour une structure **élancée**, on **néglige l'énergie de cisaillement** associée à l'effort tranchant

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L}\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \ \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : $N, \ M_z, \ T_y$

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

Pour une structure **élancée**, on **néglige l'énergie de cisaillement** associée à l'effort tranchant

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right) \mathrm{d}x$$

Pour faciliter les calculs on passe la dérivée dans l'intégrale :

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{ES}\int_0^\ell N \frac{\partial N}{\partial R_A}\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell M_z \frac{\partial M_z}{\partial R_A}\mathrm{d}x = 0$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{N^2}{ES}+\frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}+\frac{{T_y}^2}{\mu S}\right)\mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{ES}\int_0^{\ell} N\frac{\partial N}{\partial R_A}\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell} M_z\frac{\partial M_z}{\partial R_A}\mathrm{d}x = 0$$

En remplaçant les efforts de cohésion par leurs valeurs :

$$N(x) = -R_A sin\ \alpha \qquad M_z(x) = \left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{ES}\int_0^{\ell} R_A\sin^2\alpha\,\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell} -(x-\ell)\cos\alpha\left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right]\mathrm{d}x$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O},\ \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : $N,\ M_z,\ T_y$

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{ES}\int_0^\ell R_A \sin^2 \alpha \mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell -(x-\ell)\cos\alpha\left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{R_A \sin^2 \alpha \ell}{ES} + \frac{1}{EI_{Gz}}\left[\frac{p\cos\alpha}{2}\int_0^\ell (x-\ell)^3 \mathrm{d}x + R_A \cos^2\alpha \int_0^\ell (x-\ell)^2\mathrm{d}x\right]$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}$, $\underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\ell} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S} \right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial R_A} &= \frac{1}{ES}\int_0^{\ell} R_A \sin^2\alpha \mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell} -(x-\ell)\cos\alpha\left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{R_A \sin^2\alpha\ell}{ES} + \frac{1}{EI_{Gz}}\left[\frac{p\cos\alpha}{2}\int_0^{\ell}(x-\ell)^3\mathrm{d}x + R_A\cos^2\alpha\int_0^{\ell}(x-\ell)^2\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{R_A \sin^2\alpha\ell}{ES} + \frac{1}{EI_{Gz}}\left[-\frac{p\ell^4\cos\alpha}{8} + \frac{R_A\cos^2\alpha\ell^3}{3}\right]
\end{aligned}
$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : $N, \; M_z, \; T_y$

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{ES}\int_0^\ell R_A \sin^2 \alpha \mathrm{d}x + \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell -(x-\ell)\cos\alpha \left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{R_A \sin^2 \alpha \ell}{ES} + \frac{1}{EI_{Gz}}\left[\frac{p\cos\alpha}{2}\int_0^\ell (x-\ell)^3 \mathrm{d}x + R_A \cos^2\alpha \int_0^\ell (x-\ell)^2 \mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{R_A \sin^2 \alpha \ell}{ES} + \frac{1}{EI_{Gz}}\left[-\frac{p\ell^4 \cos\alpha}{8} + \frac{R_A \cos^2 \alpha \ell^3}{3}\right]$$

$$= R_A\left(\frac{\ell \sin^2\alpha}{ES} + \frac{\ell^3 \cos^2\alpha}{3EI_{Gz}}\right) - \frac{p\ell^4\cos\alpha}{8EI_{Gz}} = 0$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}$, $\underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\ell} \left(\dfrac{N^2}{ES} + \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \dfrac{{T_y}^2}{\mu S} \right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$R_A \left(\frac{\ell \sin^2 \alpha}{ES} + \frac{\ell^3 \cos^2 \alpha}{3EI_{Gz}} \right) - \frac{p\ell^4 \cos \alpha}{8EI_{Gz}} = 0$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$R_A \left(\frac{\ell \sin^2 \alpha}{ES} + \frac{\ell^3 \cos^2 \alpha}{3EI_{Gz}}\right) - \frac{p\ell^4 \cos \alpha}{8EI_{Gz}} = 0$$

$$R_A \left(\frac{3I_{Gz}\ell \sin^2 \alpha + S\ell^3 \cos^2 \alpha}{3S\cancel{EI_{Gz}}}\right) = \frac{p\ell^4 \cos \alpha}{8\cancel{EI_{Gz}}}$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \frac{{T_y}^2}{\mu S}\right) \mathrm{d}x$

Théorème de Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

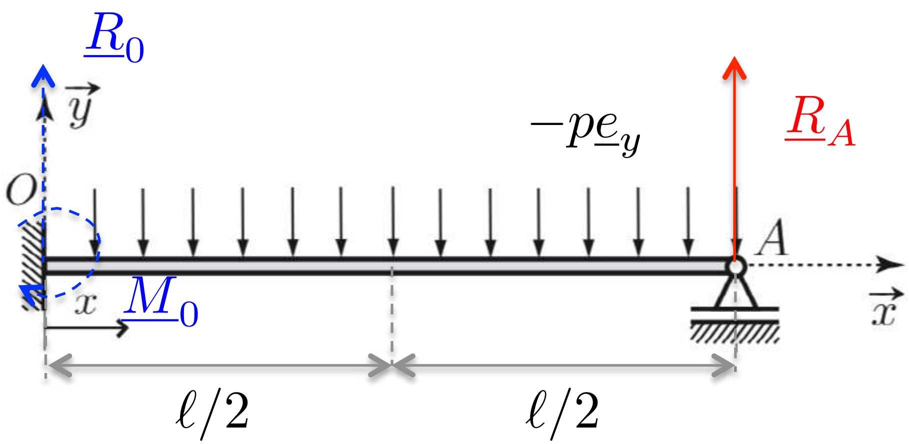
$$R_A\left(\frac{\ell\sin^2\alpha}{ES} + \frac{\ell^3\cos^2\alpha}{3EI_{Gz}}\right) - \frac{p\ell^4\cos\alpha}{8EI_{Gz}} = 0$$

$$R_A\left(\frac{3I_{Gz}\ell\sin^2\alpha + S\ell^3\cos^2\alpha}{3S\cancel{EI_{Gz}}}\right) = \frac{p\ell^4\cos\alpha}{8\cancel{EI_{Gz}}}$$

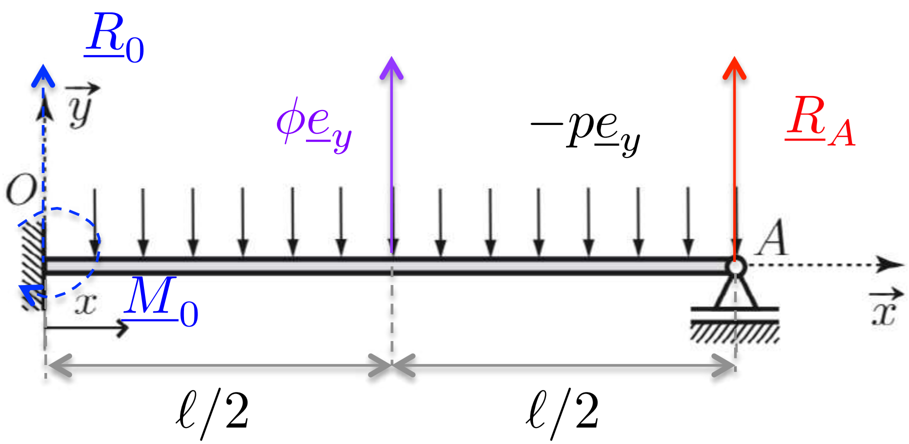
$$\rightarrow \boxed{R_A = \frac{3p\ell^3 S\cos\alpha}{24I\sin^2\alpha + 8\ell^2 S\cos^2\alpha}}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)

$$\alpha = 0 \rightarrow \boxed{R_A = \frac{3p\ell}{8}}$$



Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)



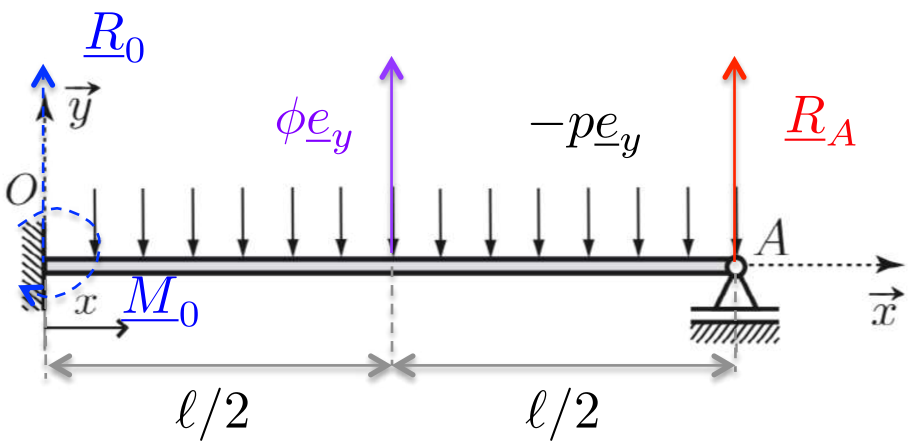
$$\alpha = 0 \rightarrow \boxed{R_A = \frac{3p\ell}{8}}$$

Utilisation du **théorème de la charge fictive** (de Bertrand de Fontviolant)

➔ On rajoute une force fictive Φ en l/2, dirigée suivant y

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)

$$\alpha = 0 \rightarrow \boxed{R_A = \frac{3p\ell}{8}}$$



Utilisation du **théorème de la charge fictive** (de Bertrand de Fontviolant)

➔ On rajoute une force fictive Φ en l/2, dirigée suivant y

Équilibre global :

- *En efforts :*

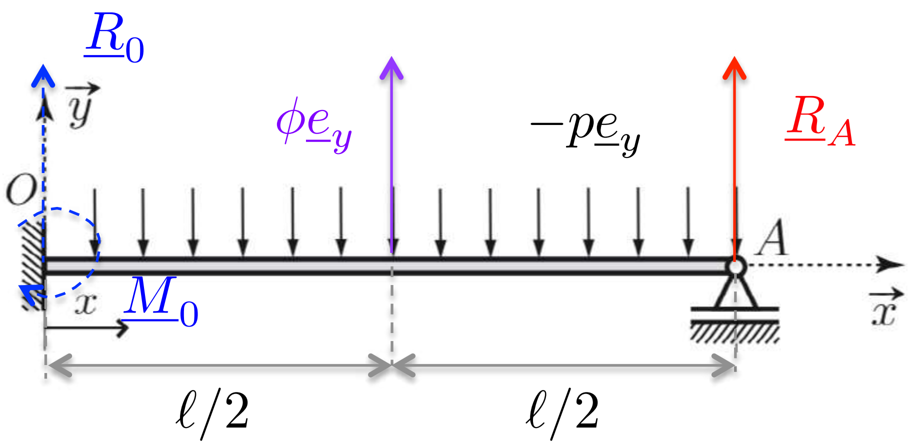
$$\underline{R}_O + \phi\underline{e}_y + R_A\underline{e}_y + \int_0^\ell (-p\underline{e}_y)dx = \underline{0}$$

$$\text{Sur } \underline{e}_y \rightarrow R_O + \phi + R_A - p\ell = 0$$

$$R_O = p\ell - R_A - \phi \rightarrow \boxed{R_O = \frac{5p\ell}{8} - \phi}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)

$$\alpha = 0 \rightarrow \boxed{R_A = \frac{3p\ell}{8}}$$



Utilisation du **théorème de la charge fictive** (de Bertrand de Fontviolant)

➔ On rajoute une force fictive Φ en l/2, dirigée suivant y

Équilibre global :

- *En efforts :*

$$\underline{R}_O + \phi \underline{e}_y + R_A \underline{e}_y + \int_0^\ell (-p\underline{e}_y)dx = \underline{0}$$

$$\text{Sur } \underline{e}_y \rightarrow R_O + \phi + R_A - p\ell = 0$$

$$R_O = p\ell - R_A - \phi \rightarrow \boxed{R_O = \frac{5p\ell}{8} - \phi}$$

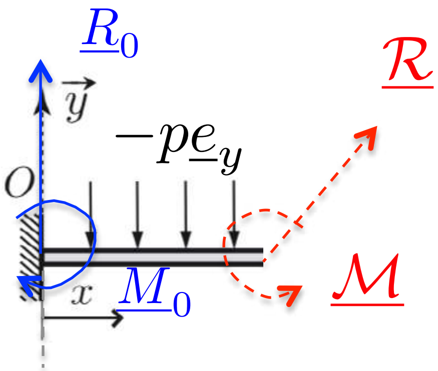
- *En moments en O :*

$$\underline{M}_O + \frac{\ell}{2}\underline{e}_x \wedge \phi \underline{e}_y + \ell \underline{e}_x \wedge \underline{R}_A + \int_0^\ell s\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$M_{Oz} = p\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell}{2}\phi - \ell R_A \rightarrow \boxed{M_{Oz} = p\frac{\ell^2}{8} - \frac{\ell}{2}\phi}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)

Efforts de cohésion par la méthode des coupures :



$$\bullet\; 0 < x < \frac{\ell}{2}$$

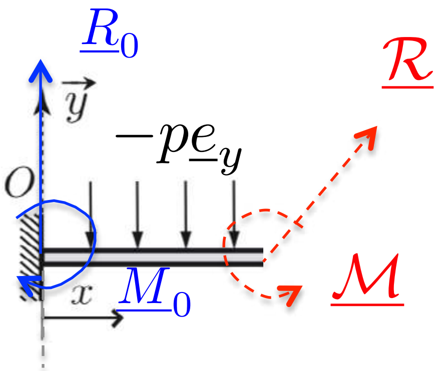
- *En efforts :* $$\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_O + \int_0^x (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{R}} = px\underline{e}_y - R_O\underline{e}_y = px\underline{e}_y - \left(\frac{5p\ell}{8} - \phi\right)\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \left[p\left(x - \frac{5\ell}{8}\right) + \phi\right]\underline{e}_y}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)

Efforts de cohésion par la méthode des coupures :



$$\bullet\ 0 < x < \frac{\ell}{2}$$

- *En efforts :* $\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_O + \int_0^x (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$

$$\underline{\mathcal{R}} = px\underline{e}_y - R_O\underline{e}_y = px\underline{e}_y - \left(\frac{5p\ell}{8} - \phi\right)\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \left[p\left(x - \frac{5\ell}{8}\right) + \phi\right]\underline{e}_y}$$

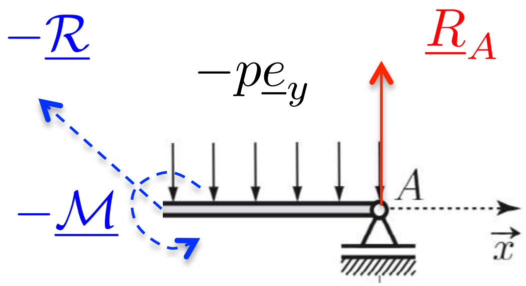
- *En moments :*

$$\underline{\mathcal{M}} + M_{Oz}\underline{e}_z + (-x)\underline{e}_x \wedge \underline{R}_O + \int_0^x -(x-s)\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{M}} = -M_{Oz}\underline{e}_z + p\left[\frac{(x-s)^2}{2}\right]_0^x \underline{e}_z + xR_O\underline{e}_z = \left[-p\frac{\ell^2}{8} + \frac{\ell}{2}\phi - p\frac{x^2}{2} + x\left(\frac{5p\ell}{8} - \phi\right)\right]\underline{e}_z$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = \left[\frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right) + \frac{\phi}{2}(\ell - 2x)\right]\underline{e}_z}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)



Efforts de cohésion par la méthode des coupures :

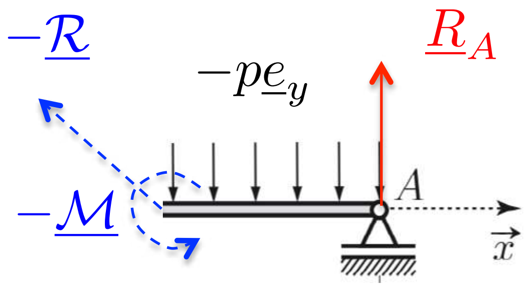
- $\frac{\ell}{2} < x < \ell$

- *En efforts :* $-\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_A + \int_x^\ell (-p\underline{e}_y) ds = \underline{0}$

$$\underline{\mathcal{R}} = \frac{3p\ell}{8}\underline{e}_y + p(x-\ell)\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(2)}(x) = p\left[(x-\ell) + \frac{3\ell}{8}\right]\underline{e}_y}$$

Flèche au milieu de la poutre pour $\alpha = 0$
(cas traité en cours)



Efforts de cohésion par la méthode des coupures :

- $\dfrac{\ell}{2} < x < \ell$

- *En* *efforts :* $-\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_A + \displaystyle\int_x^\ell (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$

$$\underline{\mathcal{R}} = \frac{3p\ell}{8}\underline{e}_y + p(x-\ell)\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(2)}(x) = p\left[(x-\ell) + \frac{3\ell}{8}\right]\underline{e}_y}$$

- *En* *moments en O :*

$$-\underline{\mathcal{M}} + \int_x^\ell s\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)ds + (\ell - x)\underline{e}_x \wedge R_A\underline{e}y = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{M}} = -\int_x^\ell ps\underline{e}_z ds + (\ell - x)\frac{3p\ell}{8}\underline{e}_z$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{p}{2}\left[\left(x^2 - \ell^2\right) + \frac{3\ell}{4}(\ell - x)\right]\underline{e}_z \rightarrow \boxed{\underline{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]\underline{e}_z}$$

Théorème de Castigliano avec charge fictive :

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^{\ell}\left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x_{|\phi=0} \simeq \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell} M_z \frac{\partial M_z}{\partial \phi}\mathrm{d}x_{|\phi=0}$$

Théorème de Castigliano avec charge fictive :

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^\ell \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x_{|\phi=0} \simeq \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell M_z \frac{\partial M_z}{\partial \phi}\mathrm{d}x_{|\phi=0}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = \left[\frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right) + \frac{\phi}{2}\left(\ell - 2x\right)\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(1)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right)$$

$$\frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{(\ell - 2x)}{2}$$

Théorème de Castigliano avec charge fictive :

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^\ell \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x_{|\phi=0} \simeq \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell M_z \frac{\partial M_z}{\partial \phi}\mathrm{d}x_{|\phi=0}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = \left[\frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right) + \frac{\phi}{2}\left(\ell - 2x\right)\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(1)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right)$$

$$\frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{(\ell - 2x)}{2}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(2)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]$$

$$\frac{\partial M_z^{(2)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = 0$$

Théorème de Castigliano avec charge fictive :

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^{\ell}\left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x_{|\phi=0} \simeq \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell} M_z \frac{\partial M_z}{\partial \phi}\mathrm{d}x_{|\phi=0}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = \left[\frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right) + \frac{\phi}{2}\left(\ell - 2x\right)\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(1)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right)$$

$$\frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{(\ell - 2x)}{2}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(2)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]$$

$$\frac{\partial M_z^{(2)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = 0$$

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell/2}\frac{p}{8}\left(-4x^2 + 5\ell x - \ell^2\right) \times \frac{(\ell - 2x)}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p}{16EI_{Gz}}\int_0^{\ell/2}(8x^3 - 14\ell x^2 + 7\ell^2 x - \ell^3)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p\ell^4}{16EI_{Gz}}\left(\frac{1}{8} - \frac{7}{12} + \frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)$$

Théorème de Castigliano avec charge fictive :

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^\ell \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x_{|\phi=0} \simeq \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^\ell M_z \frac{\partial M_z}{\partial \phi}\mathrm{d}x_{|\phi=0}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = \left[\frac{p}{8}\left(-4x^2+5\ell x-\ell^2\right) + \frac{\phi}{2}(\ell-2x)\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(1)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{8}\left(-4x^2+5\ell x-\ell^2\right)$$

$$\frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = \frac{(\ell-2x)}{2}$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]\underline{e}_z$$

$$M_z^{(2)}{}_{|\phi=0} = \frac{p}{2}\left[x^2 - \frac{3\ell}{4}x - \frac{\ell^2}{4}\right]$$

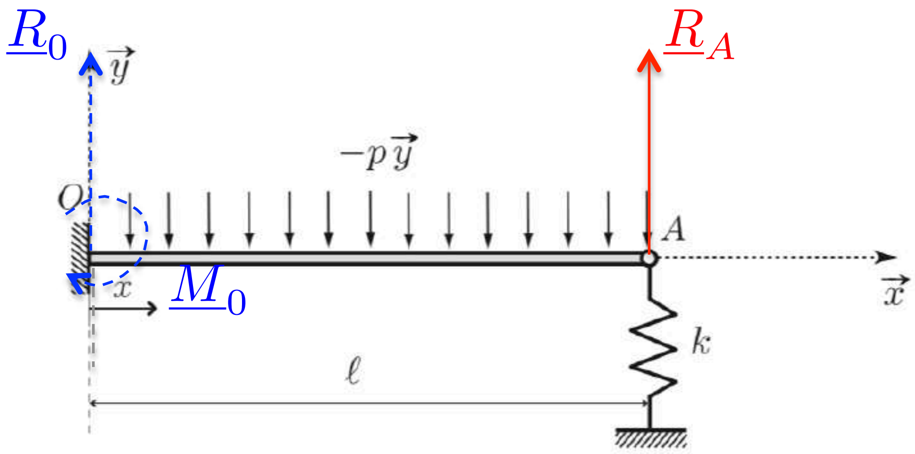
$$\frac{\partial M_z^{(2)}}{\partial \phi}_{|\phi=0} = 0$$

$$u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EI_{Gz}}\int_0^{\ell/2}\frac{p}{8}\left(-4x^2+5\ell x-\ell^2\right)\times\frac{(\ell-2x)}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p}{16EI_{Gz}}\int_0^{\ell/2}(8x^3-14\ell x^2+7\ell^2x-\ell^3)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p\ell^4}{16EI_{Gz}}\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{12}+\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right) \longrightarrow \boxed{u_y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{p\ell^4}{192EI_{Gz}}}$$

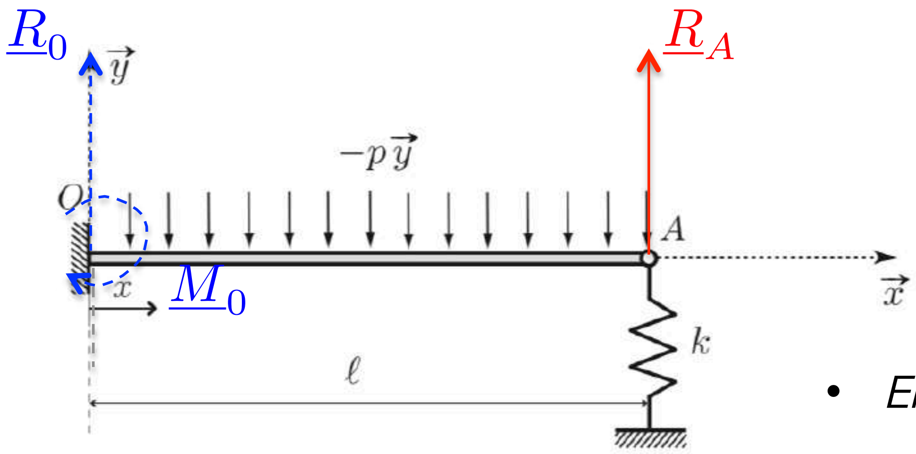
Si changement de CL :



R_A Inconnue hyperstatique telle que :

$$\boxed{\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y}$$

Si changement de CL :



R_A Inconnue hyperstatique telle que :

$$\boxed{\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y}$$

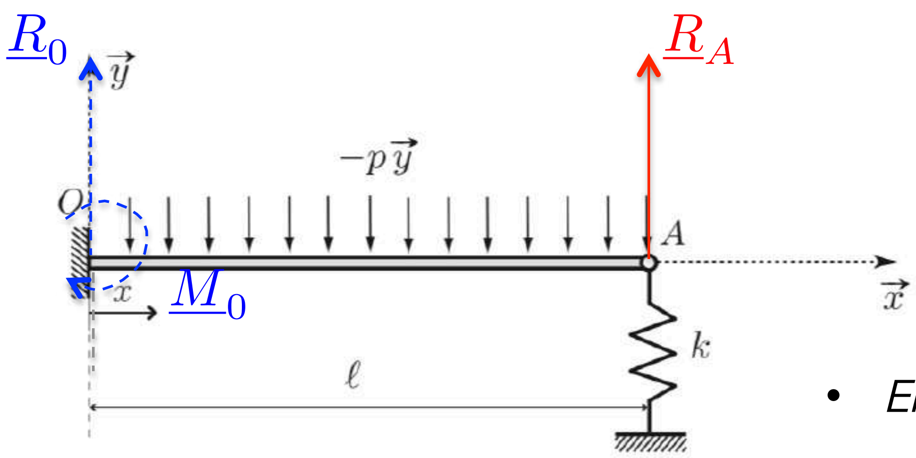
Équilibre global (efforts de liaison) :

- *En efforts :* $\underline{R}_O + R_A \underline{e}_y + \int_0^\ell (-p\underline{e}_y)dx = \underline{0}$

$$\text{Sur } \underline{e}_y \rightarrow R_O + R_A - p\ell = 0$$

$$\boxed{\underline{R}_O = (p\ell - R_A)\,\underline{e}_y}$$

Si changement de CL :



R_A Inconnue hyperstatique telle que :

$$\boxed{\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y}$$

Équilibre global (efforts de liaison) :

- *En efforts :* $\underline{R}_O + R_A \underline{e}_y + \int_0^\ell (-p\underline{e}_y)dx = \underline{0}$

$$\text{Sur } \underline{e}_y \to R_O + R_A - p\ell = 0$$

$$\boxed{\underline{R}_O = (p\ell - R_A)\,\underline{e}_y}$$

- *En moments en O :*

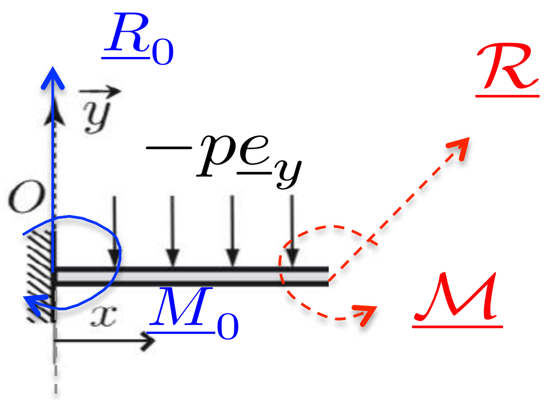
$$\underline{M}_O + \ell\underline{e}_x \wedge \underline{R}_A + \int_0^\ell s\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\text{Sur } \underline{e}_z \to M_{Oz} + \ell R_A - \int_0^\ell psds = 0$$

$$M_{Oz} = \left[p\frac{s^2}{2}\right]_0^\ell - \ell R_A$$

$$\boxed{\underline{M}_O = \left[\frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A\right]\underline{e}_z}$$

Efforts de liaison exprimés en fonction de l'inconnue hyperstatique



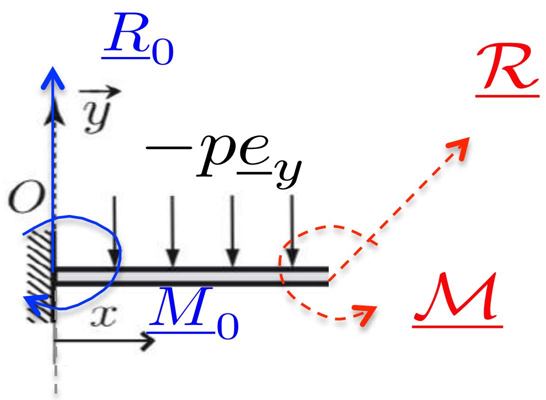
Méthode des coupures (efforts de cohésion) :

- *En efforts :*

$$\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_O + \int_0^x (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{R}} = px\underline{e}_y - R_O\underline{e}_y = px\underline{e}_y - (p\ell - R_A)\,\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}(x) = [p\,(x-\ell) - R_A]\,\underline{e}_y}$$



Méthode des coupures (efforts de cohésion) :

- *En efforts :*

$$\underline{\mathcal{R}} + \underline{R}_O + \int_0^x (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{R}} = px\underline{e}_y - R_O\underline{e}_y = px\underline{e}_y - (p\ell - R_A)\,\underline{e}_y$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}(x) = [p\,(x-\ell) - R_A]\,\underline{e}_y}$$

- *En moments :*

$$\underline{\mathcal{M}} + M_{Oz}\underline{e}_z + (-x)\underline{e}_x \wedge \underline{R}_O + \int_0^x -(x-s)\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)ds = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{M}} = -M_{Oz}\underline{e}_z + xR_O\underline{e}_z + p\left[\frac{(x-s)^2}{2}\right]_0^x \underline{e}_z = \left[\ell R_A - \frac{p\ell^2}{2} + x(p\ell - R_A) - \frac{px^2}{2}\right]\underline{e}_z$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-\frac{p(\ell-x)^2}{2} + R_A(\ell - x)\right]\underline{e}_z}$$

Efforts de cohésion exprimés en fonction de l'inconnue hyperstatique

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Système {poutre+ressort}

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}k u_y(\ell)^2$

Théorème de Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-\frac{p(\ell - x)^2}{2} + R_A(\ell - x)\right]\underline{e}_z \qquad R_A = -k u_y(\ell)$$

$$\longrightarrow U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{{R_A}^2}{2k}$$

On reprend ici la méthode énergétique :

Efforts de liaison : $\underline{R_O}, \underline{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Système {poutre+ressort}

Énergie interne de déformation : $U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}k u_y(\ell)^2$

Théorème de Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$

$$\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-\frac{p(\ell - x)^2}{2} + R_A(\ell - x)\right] \underline{e}_z \qquad R_A = -k u_y(\ell)$$

$$\longrightarrow U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x + \frac{{R_A}^2}{2k}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial R_A} &= \frac{R_A}{k} + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell M_z \frac{\partial M_z}{\partial R_A} \mathrm{d}x \\
&= \frac{R_A}{k} + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell (\ell - x) \times \left[-\frac{p(\ell - x)^2}{2} + R_A(\ell - x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{R_A}{k} + \frac{1}{EI_{Gz}} \left[-\frac{p\ell^4}{8} + \frac{R_A \ell^3}{3}\right] = 0
\end{aligned}$$

Au final :

$$\boxed{R_A = \frac{3p\ell}{8}\frac{1}{1+\frac{3EI_{Gz}}{k\ell^3}}}$$

$k \to \infty$ On retrouve le cas précédent pour lequel $\alpha = 0$

$k \to 0$ On retrouve le cas d'une extrémité libre $R_A = 0$

La flèche à l'extrémité est obtenue grâce à la loi de comportement du ressort :

$$R_A = -k u_y(\ell)$$

$$\boxed{u_y(\ell) = -\frac{R_A}{k} = -\frac{3p\ell}{8k}\frac{1}{1+\frac{3EI_{Gz}}{k\ell^3}}}$$