Examen de 4AM01 Mécanique des Milieux Continus
Partie Mécanique des Fluides

Mercredi 8 janvier 2020 – Durée : **3h**
sans document ni appareil électronique

1 Oscillations d'une sphère liquide

Vous allez étudier les oscillations de forme d'une sphère fluide de masse volumique ρ et de diamètre D supposée isolée dans un espace infini. Sous l'effet d'une perturbation initiale, la sphère commence se déformer de manière oscillante. Ces oscillations résultent des effets combinés de son inertie et d'une force de rappel. Vous allez déterminer la dépendance de la période T des oscillations en fonction des paramètres du problème dans deux situations limites.

1.1 Cas où D est "petit"

Si le diamètre de la sphère fluide est suffisamment petit, on peut négliger les forces d'attraction gravitationnelle exercées par le fluide sur lui-même. Dans ce cas, c'est la tension de surface σ du fluide qui est à l'origine de la force de rappel des déformations oscillantes de la sphère. La tension de surface a la dimension d'une énergie par unité de surface.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminez la loi d'échelle reliant T aux paramètres pertinents.
2. *"Si on double le diamètre de la sphère on double la période des vibrations"* : validez ou contestez cette phrase en justifiant votre réponse.

1.2 Cas où D est "grand"

Si le diamètre de la sphère fluide est suffisamment grand, comme dans le cas d'une étoile, ce sont les forces d'attraction gravitationnelle exercées par le fluide sur lui-même qui jouent le rôle de force de rappel des déformations oscillantes de la sphère, tandis que l'effet de la tension de surface peut être négligé. La force d'attraction entre deux corps fait intervenir la constante gravitationnelle $G = 6 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3\,kg^{-1}s^{-2}}$.

3. Par analyse dimensionnelle, déterminez la loi d'échelle reliant T aux paramètres pertinents.
4. T dépend-elle de D ?

1.3 Diamètre de transition

On peut imaginer que la transition entre les deux régimes d'oscillation d'une sphère fluide a lieu pour un diamètre D^* tel que les forces de rappel dues à la tension de surface sont du même ordre de grandeur que les celles dues à la gravité.

5. Construisez une grandeur sans dimension impliquant les deux forces de la forme $\Pi = \sigma\ G^{\alpha}\ \rho^{\beta} D^{\gamma}$ en déterminant α, β et γ.
6. déterminez l'expression de D^* satisfaisant $\Pi = 1$.
7. Déterminez la valeur de D^* pour une sphère d'eau ($\rho = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\sigma = 7 \times 10^{-2}\ \mathrm{N\ m^{-1}}$).

2 Écoulement de Hele-Shaw

On établit un écoulement de type "Poiseuille" entre deux parois planes parallèles, supposées infiniment étendues et séparées de la distance $2h$, comme schématisé en haut de la figure 1. Cette géométrie d'écoulement est appelée "écoulement de Hele-Shaw". Elle se rencontre couramment en microfluidique et est aussi utilisée pour modéliser les écoulement bidimensionnels dans les milieux poreux.
On adopte les coordonnées cartésiennes représentées sur la figure 1 telles que la direction de l'écoulement imposé est parallèle à l'axe (Ox) et l'axe (Oz) est perpendiculaire aux parois. L'écoulement est induit par une différence de pression entre l'amont (côté $x < 0$) et l'aval (côté $x > 0$). On insère entre les deux parois un obstacle constitué d'une plaque solide de longueur L parallèle au plan (Oxz) et d'épaisseur négligeable, comme schématisé sur la figure 1.

Le but de ce problème est de déterminer et de résoudre les équations simplifiées qui gouvernent l'écoulement établi entre les deux parois autour de la plaque.

L'écoulement étant supposé symétrique par rapport à la plaque, le domaine d'étude est choisi comme :

$$-L \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L,\ -h \leq z \leq h$$

L'écoulement, stationnaire, est supposé suffisamment lent pour être isovolume, si bien que le fluide, de viscosité cinématique ν, est considéré comme étant de masse volumique homogène ρ.
La valeur caractéristique de la pression du fluide est notée P_0. Le moteur de l'écoulement est la différence de pression entre amont et aval contrôlée par l'expérimentateur définie comme :

$$\begin{cases} p(-L, y, -h \leq z \leq h) = P_0 + \delta P\ \forall y & \text{(1a)} \\ p(L, y, -h \leq z \leq h) = P_0 - \delta P\ \forall y & \text{(1b)} \end{cases}$$

où $\delta P \ll P_0$.
En notant U_0 la vitesse maximale du fluide en amont de l'obstacle, atteinte selon la direction (Ox) dans le plan $z = 0$ (voir la figure 1), les conditions expérimentales sont telles que les trois inégalités suivantes sont vérifiées * :

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1, \quad \mathcal{R} = \frac{LU_0}{\nu} \gg 1, \quad \varepsilon\mathcal{R} \ll 1$$

En utilisant le repère orthonormé $(O,\ \underline{e}_x,\ \underline{e}_y,\ \underline{e}_z)$ définissant les coordonnées cartésiennes (x, y, z), le champ de vitesse du fluide s'écrit $\underline{u} = u(x, y, z)\ \underline{e}_x + v(x, y, z)\ \underline{e}_y + w(x, y, z)\ \underline{e}_z$ et le champ de pression $p(x, y, z)$.

*. La dernière condition garantit que l'écoulement de Poiseuille est établi à partir d'une distance de l'entrée de l'écoulement bien plus petite que L, si bien que l'écoulement incident sur l'obstacle est bien un écoulement de Poiseuille établi.

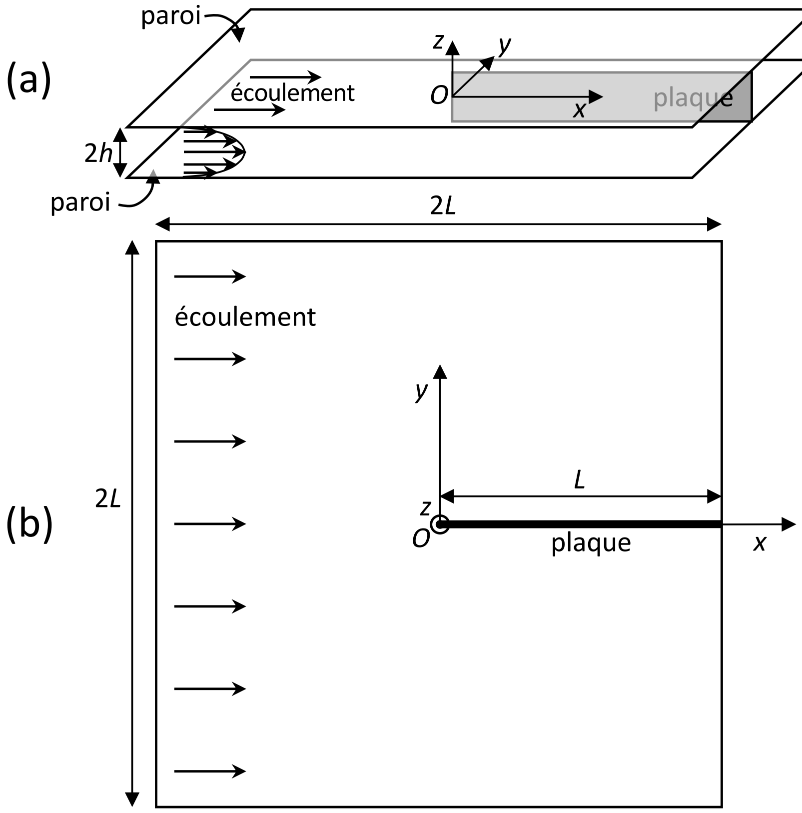

FIGURE 1 – Géométrie de l'écoulement de Hele-Shaw (a) en perspective cavalière, (b) en vue du dessus.

En ne tenant pas compte la gravité puisqu'elle n'est pas le moteur de l'écoulement, l'écoulement du fluide obéit aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & \text{(3a)} \\[2ex] u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) & \text{(3b)} \\[2ex] u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) & \text{(3c)} \end{cases}$$

2.1 Ecoulement à l'échelle de l'obstacle

2.1.1 Adimensionnement du problème à l'échelle de l'obstacle

Dans un premier temps, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de l'obstacle. On rappelle que ceci consiste à opérer sur toutes les variables du problème un changement de variable $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ défini par $\alpha = \alpha_{\mathrm{m}} + A\bar{\alpha}$, α pouvant être x, y, z u, v, w ou p, et où

— α_{m} est la valeur caractéristique de α dans le domaine d'étude,

— A est son échelle caractéristique de variation dans le domaine d'étude, appelée échelle,

— $\bar{\alpha}$ est la partie analytique de α, variable adimensionnée d'ordre unité dans son domaine de définition.

1. Proposez un adimensionnement des variables d'espace x, y et z permettant de décrire le domaine d'étude et donnez les domaines de variation des parties analytiques correspondantes.
2. Proposez un adimensionnement pour u, v, w et p en justifiant votre choix. Vous noterez V_0 l'échelle (inconnue) de v, W_0 l'échelle (inconnue) de w.
3. Adimensionnez l'équation (2) et reliez V_0 et W_0 à U_0.
4. Adimensionnez les équations (3a), (3b) et (3c) en faisant apparaître les grandeurs sans dimensions $\frac{\delta P}{\rho U_0^2}$, $\mathcal{R}$ et ε.
5. Procédez aux simplifications automatiques.

2.1.2 Analyse physique

6. En faisant l'analyse physique de l'écoulement selon sa direction principale, que vous expliciterez, montrez que $\frac{\delta P}{\rho U_0^2} \sim \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}$. Dans la suite, vous poserez $\boxed{\dfrac{\delta P}{\rho U_0^2} = \varepsilon^{-2}\mathcal{R}^{-1}}$.
7. Déduisez-en une expression de U_0 en fonction de δP, $\mu = \rho\nu$, h et L.
8. En considérant maintenant l'écoulement selon la direction (Oz), montrez qu'en première approximation $\bar{p}$ ne dépend pas de $\bar{z}$.
9. Ecrivez les équations du problème simplifié.
10. Ecrivez les conditions imposées à l'écoulement aux frontières solides du domaine d'étude (conditions aux limites) sous forme dimensionnée puis adimensionnée.
11. Ecrivez les conditions aux limites imposées à la pression en amont et en aval du domaine d'étude sous forme adimensionnée.

2.1.3 Résolution du problème simplifié

12. Intégrez chacune des équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent $\bar{u}$ et $\bar{v}$ pour montrer :

$$\begin{cases} \bar{u} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y})\,(1 - \bar{z}^2) & (5a) \\[2ex] \bar{v} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})\,(1 - \bar{z}^2) & (5b) \end{cases}$$

13. Exprimez maintenant $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$ en tenant compte de (5a) et (5b), puis intégrez cette expression pour montrer finalement que $\bar{w} = 0$. Comment qualiferiez-vous cet écoulement ?
14. Montrez que la pression est une fonction harmonique, c'est-à-dire :

$$\bar{\Delta}\bar{p} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

2.1.4 Caractère potentiel de l'écoulement moyen

15. En écrivant

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{U}(\bar{x},\bar{y})\,(1-\bar{z}^2) \\ \bar{v} &= \bar{V}(\bar{x},\bar{y})\,(1-\bar{z}^2) \end{aligned}$$

exprimez la fonction potentiel Φ dont dérive l'écoulement "moyen" de Hele-Shaw $\underline{\bar{U}} = \bar{U}\underline{e}_x + \bar{V}\underline{e}_y$.

16. (a) Montrez que $\underline{\bar{U}}$ obéit aux mêmes équations que l'écoulement bidimensionnel isovolume parfait stationnaire dans la même géométrie †.
    (b) Quel est le caractère paradoxal (en apparence) de ce résultat ?
    (c) Quelle différence existe-t-il néanmoins entre le champ de pression de l'écoulement de Hele-Shaw et celui de l'écoulement bidimensionnel isovolume parfait stationnaire ?
17. En considérant les conditions aux limites requises pour résoudre l'équation à laquelle obéit la pression, justifiez pourquoi on ne peut imposer à l'écoulement moyen $\underline{\bar{U}}$ que la condition d'imperméabilité le long de l'obstacle, et pas la condition de non-glissement.
18. Montrez qu'un champ de pression ne dépendant que de x et variant linéairement selon x est solution, et déduisez-en la solution $\{\bar{U},\bar{V},\bar{p}\}$ en vérifiant qu'elle obéit à la condition d'imperméabilité de l'obstacle.

2.2 Couche limite

La solution du problème simplifié dans la limite $\varepsilon \ll 1$, $\mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2} \ll 1$ déterminée à la question 18 ne vérifie pas la condition d'adhérence au contact de l'obstacle et n'est donc pas physiquement satisfaisante : ce problème est donc singulier.

Pour déterminer une solution physiquement acceptable, nous allons donc supposer d'emblée que la singularité du problème est localisée le long de l'obstacle et qu'elle a des effets notables dans un domaine intérieur (couche limite) d'épaisseur caractértistique $\delta \ll L$. Le domaine intérieur est donc défini par :

$$0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \lesssim \delta,\ -h \leq z \leq h$$

2.2.1 Adimensionnement du problème à l'échelle de la couche limite

Dans un premier temps, vous allez adimensionner le problème à l'échelle de la couche limite. Compte tenu de sa définition, on peut conserver les mêmes adimensionnements pour x et z : $x = L\bar{x}$ avec $\bar{x} \in [0\ 1]$, $z = h\bar{z}$ avec $\bar{z} \in [-1\ 1]$. En posant $y = \delta\tilde{y}$, on a $\tilde{y} \in [0,\ \mathcal{O}(1)]$.

19. Proposez un adimensionnement pour u, v, w et p en justifiant votre choix. Vous noterez U_1 l'échelle (inconnue) de u, V_1 l'échelle (inconnue) de v, W_1 l'échelle (inconnue) de w et δP_1 l'échelle (inconnue) de p dans ce domaine, et $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ et $\tilde{p}$ les parties analytiques correspondantes.
20. Adimensionnez l'équation (2) et reliez V_1 et W_1 à U_1. Vous noterez $\frac{\delta}{L} = \eta \ll 1$.

†. Cette propriété est utilisée pour obtenir expérimentalement et visualiser les champs de vitesse d'écoulements bidimensionnels isovolumes parfaits.

21. Ecrivez les conditions de raccord de la composante de la vitesse selon x et de la pression au passage du domaine intérieur au domaine extérieur. Déduisez-en :

$$U_1 = U_0,\ \delta P_1 = \delta P_0$$

et

$$\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{u}(\bar{x},\tilde{y},\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(1-\bar{z}^2\right) \tag{6}$$

$$\lim_{\tilde{y}\to+\infty} \tilde{p}(\bar{x},\tilde{y}) = -\bar{x}$$

Dans la suite, on suppose que dans la couche limite la composante transverse w du champ de vitesse est nulle et que p ne dépend pas de z, comme dans le domaine extérieur.

22. Ecrivez les conditions aux limites imposées à l'écoulement au contact de l'obstacle pour les grandeurs adimensionnées.
23. Adimensionnez les équations (3a) et (3b) et procédez aux simplifications automatiques pour montrer que :

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right] \tag{9}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\delta P}{\rho U_0^2}\eta^{-2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \mathcal{R}^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon^2\eta^{-2}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right] \tag{10}$$

2.2.2 Principe de Moindre Dégénérescence dans la couche limite

Pour guérir la singularité du problème, il s'agit de tenir compte dans la couche limite d'effets qui étaient négligés dans le domaine extérieur.

24. En considérant la projection selon la direction de l'écoulement principal de l'équation de Navier-Stokes adimensionnée à l'échelle de la couche limite, quel terme ne peut pas être négligé dans la couche limite ? En déduire un ordre de grandeur pour δ puis fixer sa valeur et celle de η.

2.2.3 Analyse physique

25. Reprenez les résultats de l'analyse physique menée à la question 6 pour simplifier l'équation (9) en ne conservant que les termes dominants.
26. En considérant maintenant l'équation (10), montrez que $\tilde{p}$ ne dépend pas de $\tilde{y}$ puis que $\tilde{p} = -\bar{x}$.
27. Ecrivez le problème simplifié (équations et conditions aux limites) dans la couche limite. Montrez que l'ordre des différentes dérivées partielles est en accord avec le nombre de conditions.