0• Pbs d'équilibre élastostatiques ou élastodynamiques

1• Formulation faible ou variationnelle (aussi possible via le PPV ou principe des travaux virtuels, ou encore éqs de Lagrange)

2• Approches de résolution approximées :

→ méthode de Ritz-Galerkin

⇔ " des éléments finis

3• Ecriture des pbs d'équilibre et la formulation EF pour modèles 1D (poutres, plaques en flexion cylindr.) et 2D (si on a le temps : plaques)

4• Couplage de modèles de structure avec modèles aéro : construction du pb. aéroélastique (éqs du pb couplé)

Illustration : • aile en torsion : pb de divergence

• aile ou panneau en flexion : pb de flottement

(exemple : panel flutter)

Approximation Ritz-Galerkin appliquée à la formulation faible :

- approximation de $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$: $\boxed{\underline{u}^{(h)} = \underline{u}^{(D)} + \sum_k \alpha_k \underline{\varphi}_k = \underline{u}^{(D)} + \{\alpha\} \cdot \{\varphi\}}$
  ($\underline{u}^h \in \mathcal{U}_{ad}$)

  où $\{\alpha\} = \underbrace{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]}_{\text{ddl}}^t$ et $\{\varphi\} = [\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \ldots, \underline{\varphi}_N]^t$

- approximation de $\underline{v} \in \mathring{\mathcal{U}}_{ad}$: $\boxed{\underline{v}^{(h)} = \sum_k \hat{\alpha}_k \underline{\varphi}_k = \{\varphi\}^t \{\hat{\alpha}\} = \{\hat{\alpha}\}^t \{\varphi\} = \{\hat{\alpha}\} \cdot \{\varphi\}}$

Injecter ces approximations dans les formulations faible ou min. énergie potentielle :

- $\int_\Omega C\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, d\Omega = \ldots$ [il faut calculer $\varepsilon(u^h)$ et $\varepsilon(v^h)$]

$$\varepsilon(u^h) = \varepsilon(u^D) + \sum_k \alpha_k \varepsilon(\varphi_k)$$

$$\varepsilon(v^h) = \sum_k \hat{\alpha}_k \varepsilon(\varphi_k)$$

RMQ : φ_k fcts de base, donc connues, et donc $\varepsilon(\varphi_k)$ aussi connues

et donc :

$$\ldots = \int_\Omega C\left[\varepsilon(u^D) + \sum_k \alpha_k \varepsilon(\varphi_k)\right] : \left[\sum_k \hat{\alpha}_k \varepsilon(\varphi_k)\right] d\Omega =$$

$$= \int_\Omega C\,\varepsilon(u^D) : \sum_k \hat{\alpha}_k \varepsilon(\varphi_k)\, d\Omega + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_i \hat{\alpha}_j \underbrace{\int_\Omega C\,\varepsilon(\varphi_i) : \varepsilon(\varphi_j)\, d\Omega}_{K_{ij}} =$$

matrice de rigidité

$$= \underbrace{\sum_k \hat{\alpha}_k \left(\int_\Omega C\,\varepsilon(u^D) : \varepsilon(\varphi_k)\, d\Omega\right)}_{\{\hat{\alpha}\}^t\{F_{UD}\}} + \{\hat{\alpha}\}^t [K] \{\alpha\}$$

$$\{\hat{\alpha}\}^t [K] \{\alpha\} = \{\alpha\}^t [K] \{\hat{\alpha}\}$$

symétrie

- $\displaystyle\int_\Omega f_v \, v \, d\Omega \simeq \ldots$ (remplacer avec v^h)

$$\ldots = \int_\Omega f_v \Big(\sum_k \hat{\alpha}_k \varphi_k\Big) d\Omega = \sum_k \hat{\alpha}_k \underbrace{\Big(\int_\Omega f_v \, \varphi_k \, d\Omega\Big)}_{F_{f_k}} =$$

$$= \{\hat{\alpha}\}^t \{F_f\}$$

- $\displaystyle\int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot v \, d\Gamma \simeq \int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot \Big(\sum \hat{\alpha}_k \varphi_k\Big) d\Gamma =$

$$= \sum_k \hat{\alpha}_k \underbrace{\Big(\int_{\partial_f \Omega} F_d \cdot \varphi_k \, d\Gamma\Big)}_{F_{F_k}} = \{\hat{\alpha}\}^t \{F_F\}$$

$\Rightarrow$ approximation R-G de la formulation faible : (P^h) Trouver $\{\alpha\}$:

$$\{\hat{\alpha}\}^t [K] \{\alpha\} = \{\hat{\alpha}\}^t \{F\} \, , \quad \forall \{\hat{\alpha}\}$$

où $\{F\} = \{F_f\} + \{F_F\} - \{F_{U_D}\}$ VECTEUR de FORCES GENERALISEES

RESOLUTION R-G : système linéaire en $\{\alpha\}$

$$\Rightarrow \quad [K]\{\alpha\} = \{F\}$$

donc : $\{\alpha\}_{SOL} = [K]^{-1}\{F\}$

et donc : $u \simeq u^h_{SOL} = u^D + \{\alpha\}_{SOL} \cdot \{\varphi\}$

Et ensuite : $\varepsilon(u) \simeq \varepsilon(u^h_{SOL})$ et $\sigma \simeq C\,\varepsilon(u^h_{SOL})$