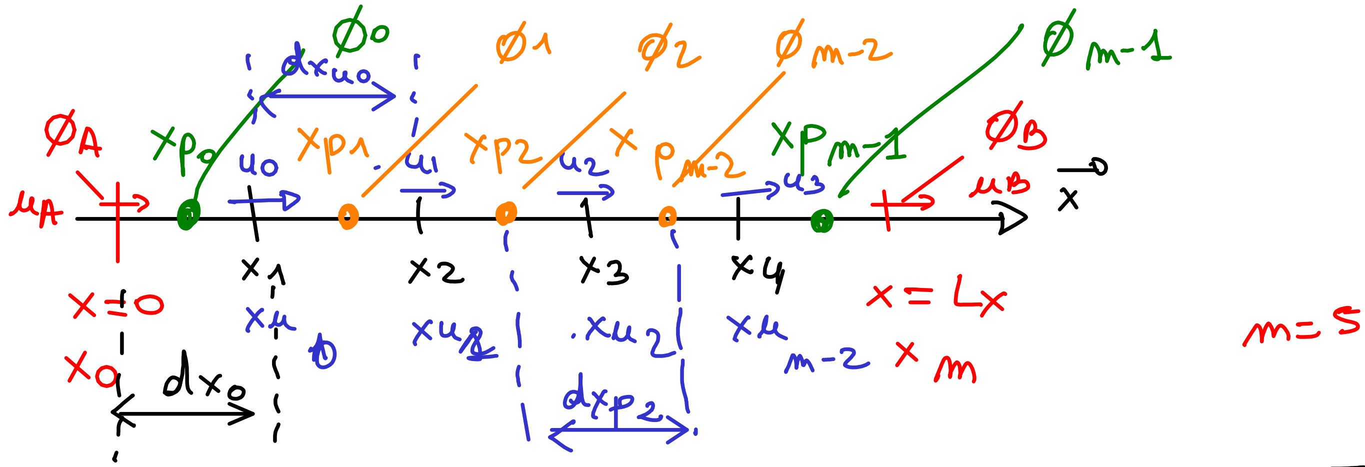
TP n° 1
le 12-02-2021

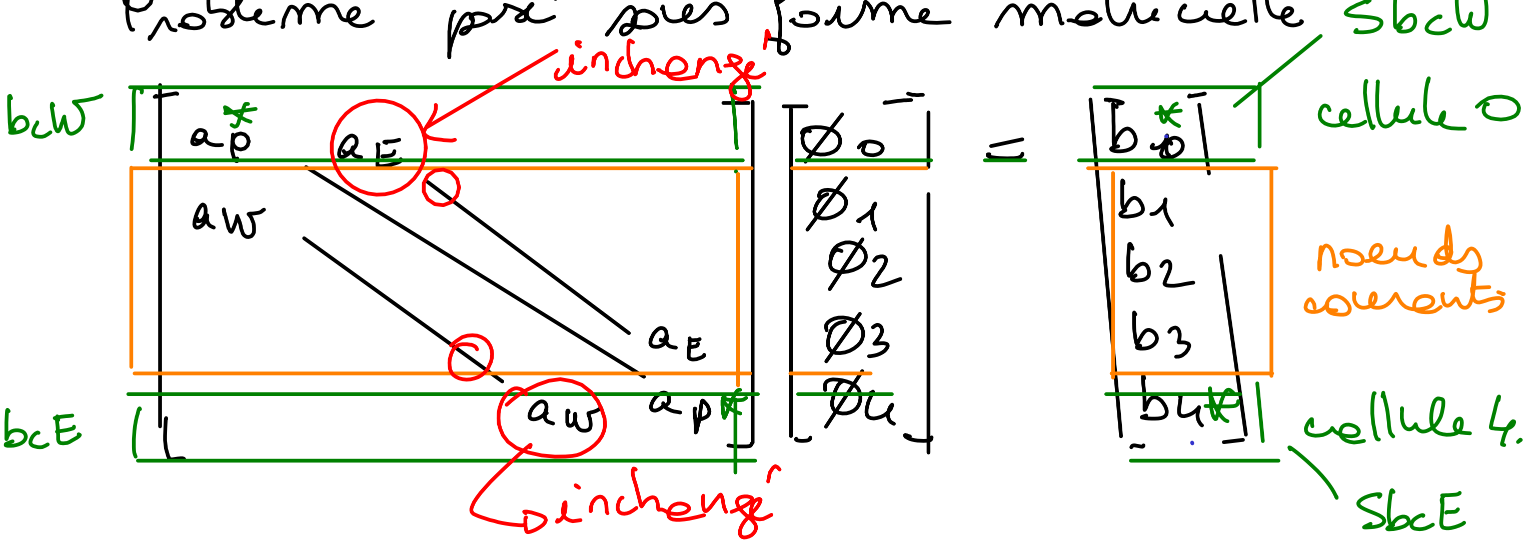
Equation 1D de convection - diffusion



- inconnue du problème $\phi[0:-1]$ $[m, 1]$] sur VC
- coeff. diffusion $\Gamma[0:-1]$ $[m,1]$
- vitesse connue $u[0:-1]$ $[m-1,1]$
- Γ aux interfaces Γ_{ew} de forme $\longrightarrow [m-1,1]$

3 cellules courantes $= \phi_1, \phi_2, \phi_3$
2 cellules frontières $= \phi_0, \phi_4$

Problème posé sous forme matricielle



$$a_E \phi_E + a_P \phi_P + a_W \phi_W = b_P$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx\,dy = 0$$ au point courant P_{ij}

$$\Longrightarrow \Delta y_P \cdot \int_w^e \mathrm{div}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx = \Delta y_P \left(\overbrace{\Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_e}^{Fd_e} - \overbrace{\Gamma_w \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_w}^{Fd_w} \right)$$

- on doit évaluer des gradients aux interfaces (ew)
- appliquer l'opérateur divergence aux noeuds courants.

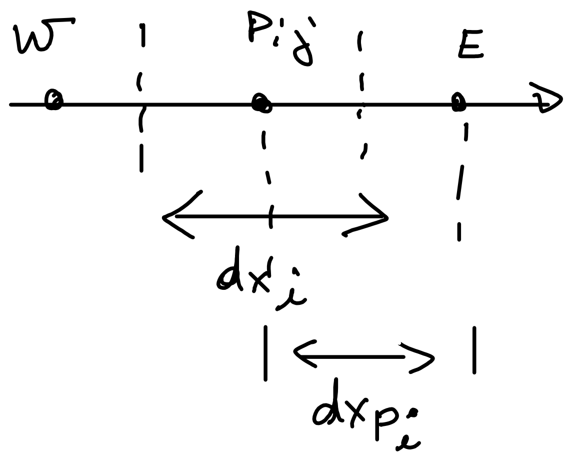
- $\underline{\phi}$ = vecteur $[m \times 1]$
- $\underline{\underline{grad}}\ \underline{\phi} \Rightarrow [(m-1)\times 1]$ avec $Fd = \underline{\Gamma}_{ew}\, \underline{\underline{grad}}\, \underline{\phi}$
  - $\Rightarrow \underline{\underline{grad}}\ [(m-1)\times m]$
- $\Gamma_{ew} \to$ s'applique aux interfaces
  - $\to \mathbb{I}d - [(m-1)\times(m-1)]$ ou vecteur $(m-1)$
- $\underline{\underline{div}}\,(\underline{Fd}) \longrightarrow [(m-2)\times 1]$
  - $\underline{Fd} \Rightarrow [(m-1)\times 1]$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{div}}\ [(m-2)\times(m-1)]$

- $\underline{b} = \underline{\underline{div}}\,(\underline{\Gamma}_{ew}\,\underline{\underline{grad}}\,\underline{\phi})\quad [(m-2)\times 1]$

Pour un noeud courant



• $\underline{\underline{Gne}}(\underline{\emptyset})\Big|_{\underline{P}} = \dfrac{\emptyset_E - \emptyset_P}{dxp_P}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{dxp_0} & \frac{1}{dxp_0} & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -\frac{1}{dxp_4} & \frac{1}{dxp_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

scipy. bibliothèque

vecteur

Gne = sp.diags([-1/dxp, +1/dxp],

position → [0, 1],

dimension → (m-1, m)).toarray

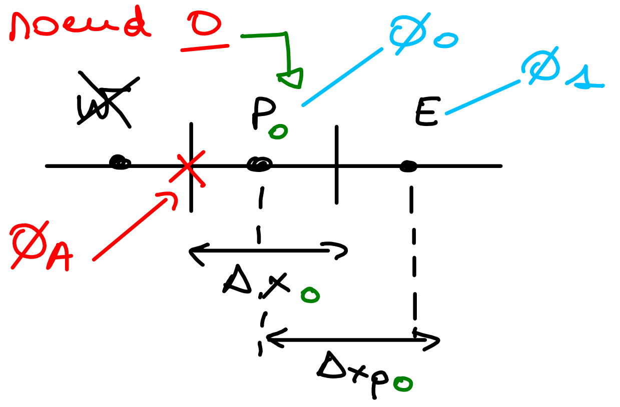
• on pose Fd comme le flux diffusif.

$$Fd = \Gamma_{ew} \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\Big|_{ew} \quad [m-1, 1]$$

$$\oint \underline{div}(F\underline{d}) = (Fd_e - Fd_w)$$

$$div = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [m-2, m-1]$$

scipy → sp.diags(   ).toarray cellule influencée par $\Phi_A \longrightarrow$ noeud 0



$$\Delta y \left(\Gamma_e \operatorname{grad} \Phi|_e - \Gamma_w \operatorname{grad} \Phi|_w \right) = 0$$

$$0 = \Big(\underbrace{\Gamma_e \operatorname{grad}}_{\text{inchangé}}|_e - \Gamma_A \frac{\Phi_0 - \Phi_A}{\Delta x_0 / 2} \Big) \Delta y$$

$$0 = \left(\Gamma_0 \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Delta x_{p0}} - 2\Gamma_A \frac{\Phi_0 - \Phi_A}{\Delta x_0} \right) \Delta y$$

$$\Delta y \Big(\underbrace{\frac{\Gamma_0}{\Delta x_{p0}}}_{a_E} \Phi_1 - \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{\Gamma_0}{\Delta x_p}}_{a_E} + \underbrace{\frac{2\Gamma_A}{\Delta x_0}}_{a_A} \Big)}_{a_P^* = -a_E - a_A} \Phi_0 \Big) = \underbrace{\Delta y \, \Phi_A \Big(- \underbrace{\frac{2\Gamma_A}{\Delta x_0}}_{a_A} \Big)}_{\text{terme source}}$$

$$a_P^* = -a_E - a_A$$ à la place de a_W courant

Idem pour le noeud 4