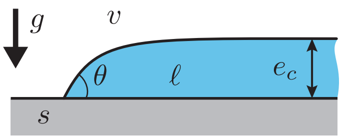
Sorbonne Université – Faculté des Sciences Année 2020-2021
Hydrodynamique à Petits et Grands Nombres de Reynolds – MU4MEF02 Master MF2A

Hydrodynamique
Capillarité & Adhésion

1 Flaques liquides



Une quantité de liquide posée sur un substrat rigide dans le champ de pesanteur adopte spontanément une forme de flaque, telle que représentée sur la figure ci-contre. Le liquide, de masse volumique ρ et de tension de surface γ avec l'air, présente un angle de contact θ lorsqu'il mouille le solide. On note la gravité g.
On cherche ici à déterminer l'épaisseur limite e_c de cette flaque, suffisamment loin des bords.

1. Représenter graphiquement l'ensemble des forces agissant sur la portion de flaque représentée ci-contre.
2. Écrire la condition d'équilibre de cette flaque, et en déduire l'épaisseur e_c en fonction de ρ, g, θ et γ.
3. Que devient e_c dans la limite où $\theta \ll 1$?

2 Adhésion capillaire d'une sphère

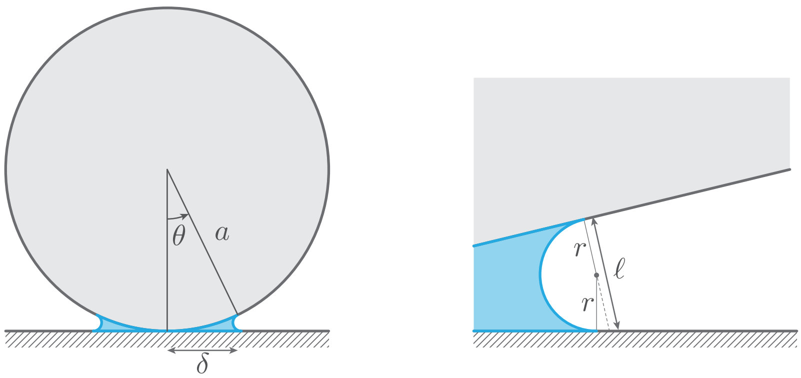


Fig. 1 : **Adhésion capillaire d'une sphère.** Gauche : une sphère de rayon a adhère à un plan par le biais d'un petit ménisque liquide de rayon δ. Droite : le ménisque présente un rayon de courbure r très petit devant le rayon de la sphère.

On s'intéresse dans ce problème à l'adhésion capillaire subie par une sphère solide de rayon a en contact avec un plan rigide. L'adhésion de la sphère est induite par la présence d'un petit ménisque constitué d'un liquide parfaitement mouillant (angle de contact nul). Le ménisque présente une extension radiale δ, supposée petite devant le rayon de la sphère (voir figure 1). On cherche ici à déterminer la composante verticale de la force capillaire notée F_{cap} exercée par le ménisque sur la sphère. On note ρ la masse volumique du liquide et γ la tension de surface du liquide avec l'air. Le liquide sera considéré au repos dans tout l'exercice et on négligera ici l'influence de la pesanteur.

1. Après avoir brièvement justifié pourquoi la viscosité du liquide n'intervient pas dans la détermination de F_{cap}, montrer par analyse dimensionnelle que :
$$F_{\text{cap}} = \gamma a \mathscr{F}(\epsilon),$$
où ϵ est un paramètre sans dimension dont on donnera l'expression. On s'intéresse dans cet exercice à la limite où $\epsilon \ll 1$.
2. Comme l'angle de contact entre le liquide et les solides est nul, l'interface est fortement courbée, comme indiqué sur la figure 1. On suppose que le rayon de courbure r représenté sur ce schéma est en particulier beaucoup plus petit que le second rayon rayon de courbure de l'interface, si bien qu'on peut en première approximation supposer que le ménisque ne présente qu'un seul rayon de courbure : r. Sans faire de calcul, donner le signe de la différence de pression entre le ménisque et l'air extérieur $\Delta p = p_{\text{ménisque}} - p_{\text{atm}}$; le ménisque est-il en surpression ou en dépression par rapport à l'atmosphère ? Expliquer.

3. On introduit l'angle θ représenté sur la figure 1 permettant de repérer l'extension du ménisque. On rappelle que $\delta \ll a$, et donc $\theta \ll 1$. Donner la relation liant en première approximation δ à a et θ.

La force exercée par le ménisque liquide sur la sphère se décompose en deux contributions : une première dûe à la pression de Laplace, et une seconde associée à la ligne de contact. On s'intéresse tout d'abord à la première contribution. Dans tout ce qui suit, on ne considérera pas l'influence de la pression atmosphérique[1].

4. En notant $\mathscr{S}_{\text{sphere}}$ la portion de surface de sphère mouillée par le ménisque, donner l'expression formelle de la force de pression exercée par le ménisque sur la sphère.
5. Montrer que l'on peut avantageusement remplacer cette expression par :

$$\iint_{\mathscr{S}_{\text{disque}}} \Delta p \, \boldsymbol{e}_z \, \mathrm{d}S,$$

où $\mathscr{S}_{\text{disque}}$ représente cette fois la surface du plan mouillée par le ménisque.
6. En considérant que $\ell \simeq 2r$ (voir figure 1), proposer une estimation du rayon de courbure r en fonction de a et de θ au premier ordre en θ (on rappelle $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$ pour $\theta \ll 1$).
7. En déduire l'expression de la contribution dûe à la pression de la force capillaire d'adhésion au premier ordre.
8. Expliquer pourquoi la force de ligne de contact est négligeable dans ce problème.
9. Conclure sur la valeur de la force d'adhésion, et commenter en particulier la dépendance de la force avec le volume du ménisque. Quelle est la limite de la fonction $\mathscr{F}(x)$ de la question 1 lorsque x tend vers 0 ?

3 Courbure d'une goutte pendante

Afin de développer un dispositif de mesure de la tension de surface, on souhaite écrire un code permettant de calculer la forme d'une goutte pendante présentant une symétrie de révolution. Pour cela, il est nécessaire au préalable de connaître la courbure $\varkappa(z)$ de la goutte, et de la relier au profil $r(z)$ de la goutte (l'équation de l'interface est alors $r = r(z)$).

1. Expliquer succinctement pourquoi il n'est pas souhaitable de travailler directement avec $r(z)$. Comment se comporte cette quantité au voisinage du bas de la goutte ?

On fait donc le choix dans la suite de travailler avec la variable $q(z) = r^2(z)$.

2. Proposer une fonction $\mathscr{S}(r,z)$ s'annulant à la surface de la goutte et faisant intervenir $q(z)$.
3. Calculer le gradient normalisé de cette fonction. À quoi correspond la restriction de ce champ à la surface de la goutte ?
4. Montrer que la courbure $\varkappa(z)$ de la goutte peut s'exprimer comme :

$$\varkappa(z) = \frac{4q'(z)^2 - 4q(z)(-2 + q''(z))}{(4q(z) + q'(z)^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

Appendice : les opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Soit $f(r,\theta,z)$ une fonction scalaire de l'espace et $\boldsymbol{u}(r,\theta,z) = (u_r(r,\theta,z), u_\theta(r,\theta,z), u_z(r,\theta,z))$ un champ vectoriel, on définit :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1. On peut en fait montrer que la pression atmosphérique disparaît naturellement du problème : l'intensité de la force d'adhésion n'en dépend pas.