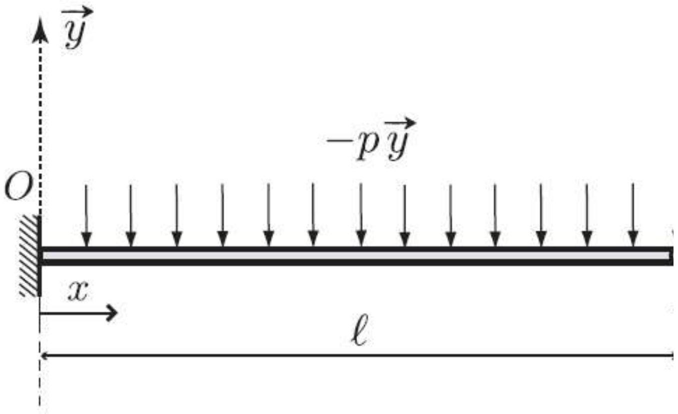
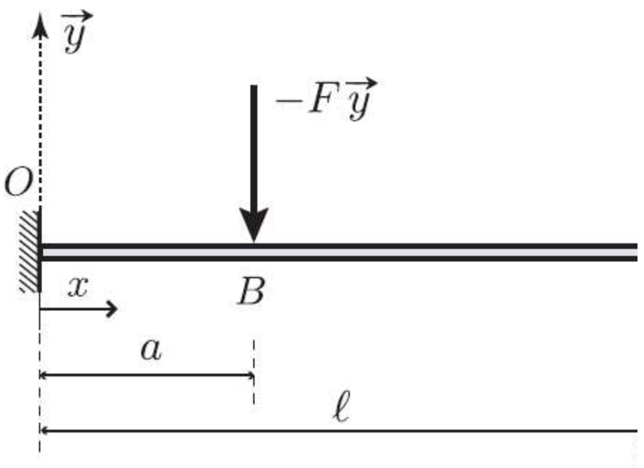
Équilibre de structures hyperstatiques

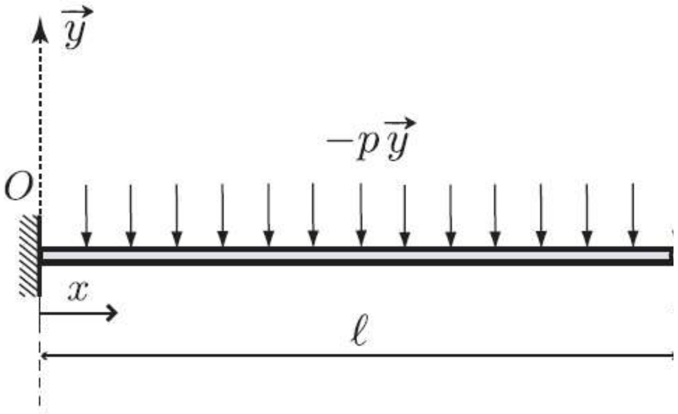
Structures **isostatiques** :
Le PFD suffit à déterminer toutes les inconnues de liaisons du mécanisme

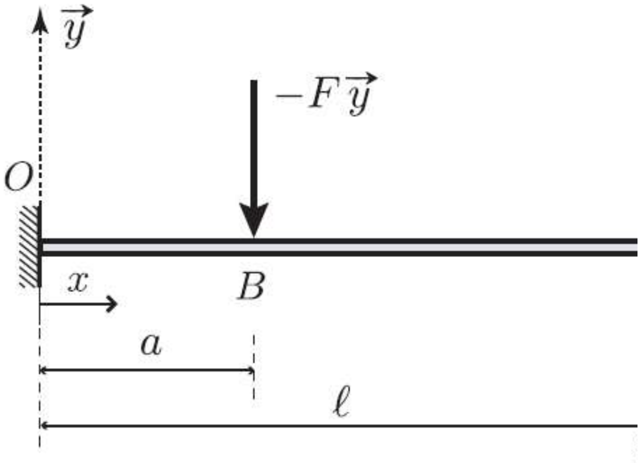




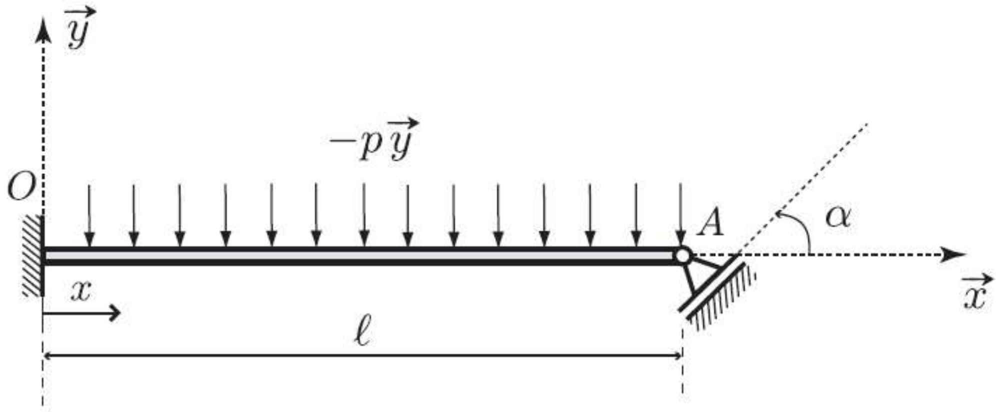
Équilibre de structures hyperstatiques

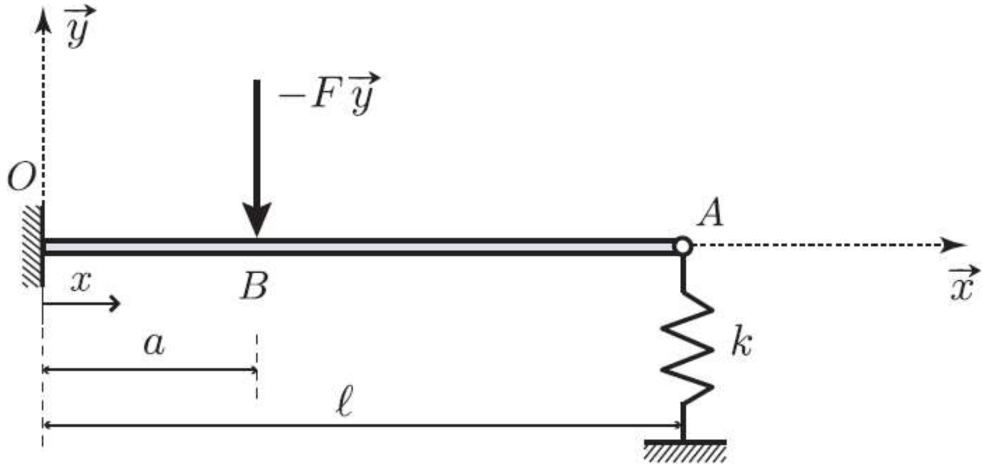
Structures **isostatiques** :
Le PFD suffit à déterminer toutes les inconnues de liaisons du mécanisme





Structure **hyperstatiques :**
Au moins un degré de liberté d'une pièce est supprimé plusieurs fois

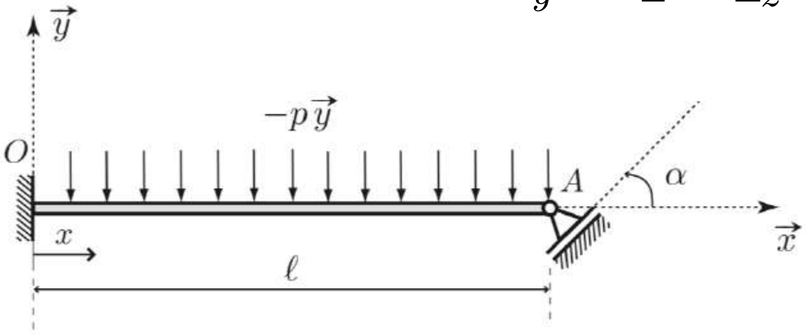




Exo 1 :

Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$



Calcul fait en **2D** (mêmes résultats en 3D)

Degré d'hyperstaticité

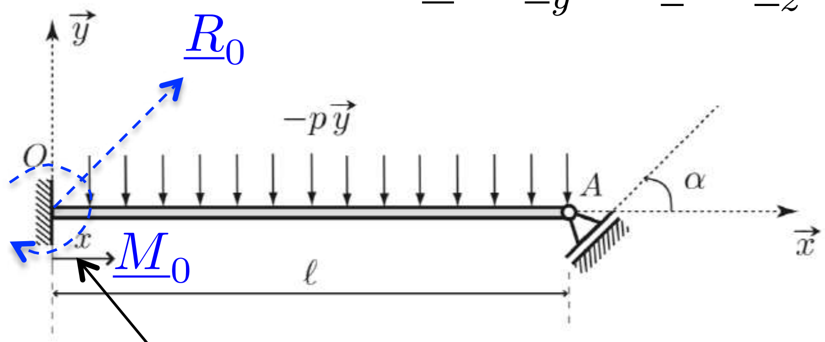
= nb de ddl bloqués – nb équations

ddl = degré de liberté

Exo 1 :

Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$



Encastrement en O :

- 2 translations et 1 rotation bloquées
  $u_x, \; u_y, \; \omega_z$
- Réaction et moment inconnus
  $$\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y$$
  $$\underline{M}_O = M_O \underline{e}_z$$

Calcul fait en **2D** (mêmes résultats en 3D)

Degré d'hyperstaticité

= nb de ddl bloqués – nb équations

ddl = degré de liberté

Exo 1 :

Choix de la base de Frenet :

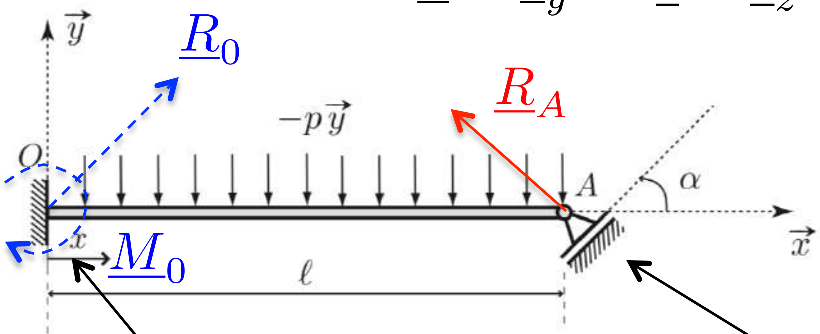
$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

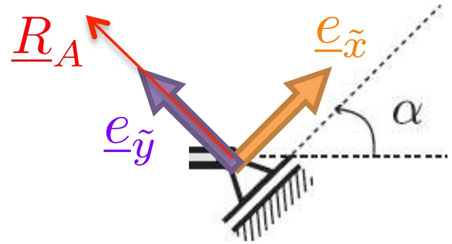
Calcul fait en **2D** (mêmes résultats en 3D)

Degré d'hyperstaticité

= nb de ddl bloqués – nb équations

ddl = degré de liberté





Encastrement en O :

- 2 translations et 1 rotation bloquées
  $u_x, \; u_y, \; \omega_z$
- Réaction et moment inconnus
  $$\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y$$
  $$\underline{M}_O = M_O \underline{e}_z$$

Appui glissant en A :

- Déplacement suivant le plan incliné libre, déplacement normal bloqué, rotation libre
- Réaction partiellement connue (direction) et moment nul

$$\underline{R}_A = R_A \underline{e}_{\tilde{y}} = R_A \left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right)$$

Exo 1 :

Choix de la base de Frenet :

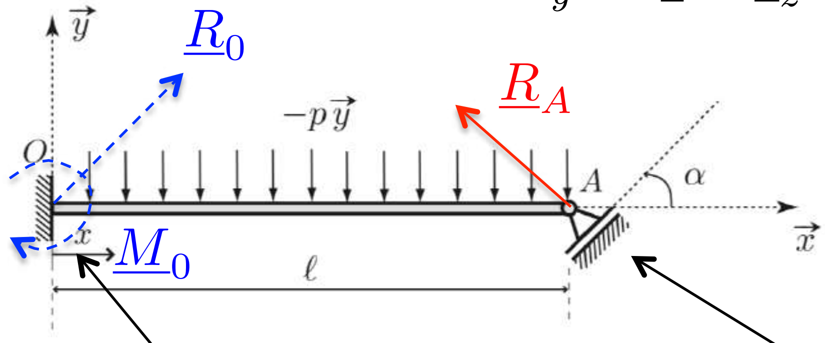
$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

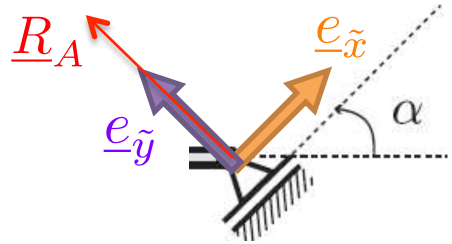
Calcul fait en **2D** (mêmes résultats en 3D)

Degré d'hyperstaticité

= nb de ddl bloqués – nb équations

ddl = degré de liberté





Encastrement en O :

- 2 translations et 1 rotation bloquées
  $u_x,\ u_y,\ \omega_z$
- Réaction et moment inconnus
  $$\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y$$
  $$\underline{M}_O = M_O \underline{e}_z$$

Appui glissant en A :

- Déplacement suivant le plan incliné libre, déplacement normal bloqué, rotation libre
- Réaction partiellement connue (direction) et moment nul
  $$\underline{R}_A = R_A \underline{e}_{\tilde{y}} = R_A\left(-\sin\alpha\,\underline{e}_x + \cos\alpha\,\underline{e}_y\right)$$

- **Nb de ddl bloqués (= connus)** : **4**

  / ou = nb de composantes des efforts de liaison –réactions ou moments- inconnues

  (Rq : 7 en 3D avec Z_O en plus et les composantes du moment en O suivant $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$ *)*

  - 3 au niveau de l'encastrement, 2 déplacements une rotation / ou (X_O, Y_O, M_O)
  - 1 au niveau de l'appui glissant, 1 déplacement normal / ou R_A

- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **3** équations scalaires en 2D (6 en 3D) :

  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x et y
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par z

- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **3** équations scalaires en 2D (6 en 3D) :

  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x et y
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par z

Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = \mathbf{4 - 3 = 1}}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A

L'**équilibre global** (et donc les efforts de liaison) peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **3** équations scalaires en 2D (6 en 3D) :
  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x et y
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par z

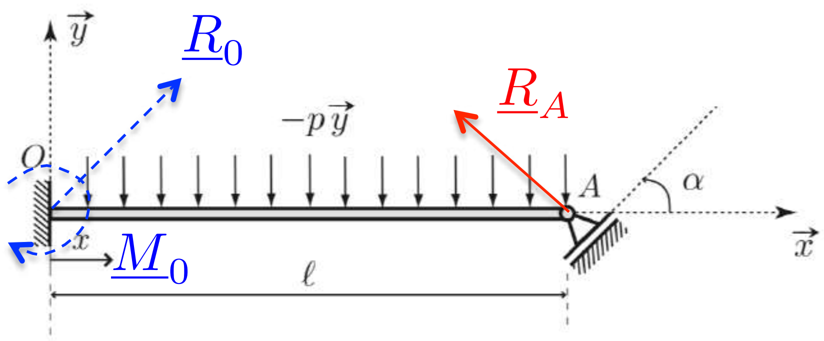
Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = 4 - 3 = 1}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A

L'**équilibre global** (et donc les efforts de liaison) peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- *En efforts :* $\underline{R}_0 + \int_0^\ell (-p\underline{e}_y)dx + R_A(-sin\,\alpha\,\underline{e}_x + cos\,\alpha\,\underline{e}_y) = \underline{0}$

$$\text{2 éq.}\left\{\begin{array}{ll} \text{Sur } \underline{e}_x & 0 = X_O - R_A \sin\alpha \\ \text{Sur } \underline{e}_y & 0 = -p\ell + Y_0 + R_A \cos\alpha \end{array}\right.$$



- **Équilibre global de la structure :**
  Donne **3** équations scalaires en 2D (6 en 3D) :
  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x et y
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par z

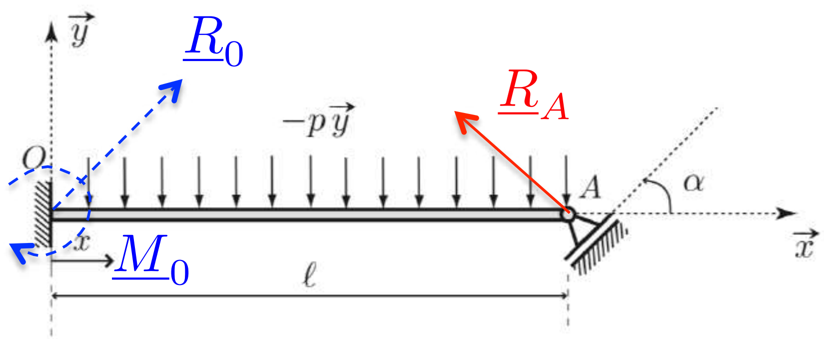
Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = 4 - 3 = 1}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A
L'**équilibre global** (et donc les efforts de liaison) peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- *En moments en O :* $\underline{M}_O + \displaystyle\int_0^\ell x\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)\mathrm{d}x + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A = \underline{0}$

$$\underline{M}_O - \frac{p\ell^2}{2}\underline{e}_z + \ell R_A \cos\alpha \underline{e}_z = \underline{0}$$

1 éq. Sur $\underline{e}_z$ $\quad M_O = \dfrac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha$



- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **3** équations scalaires en 2D (6 en 3D) :
  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x et y
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par z

Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = 4 - 3 = 1}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A

L'**équilibre global** (et donc les efforts de liaison) peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- *En efforts :* $\underline{R}_0 + \int_0^{\ell} (-p\underline{e}_y)dx + R_A(-sin\,\alpha\,\underline{e}_x + cos\,\alpha\,\underline{e}_y) = \underline{0}$

$$\text{2 éq.} \begin{cases} \text{Sur } \underline{e}_x & 0 = X_O - R_A \sin\alpha \\ \text{Sur } \underline{e}_y & 0 = -p\ell + Y_0 + R_A \cos\alpha \end{cases}$$

- *En moments en O :* $\underline{M}_O + \int_0^{\ell} x\underline{e}_x \wedge (-p\underline{e}_y)\mathrm{d}x + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A = \underline{0}$

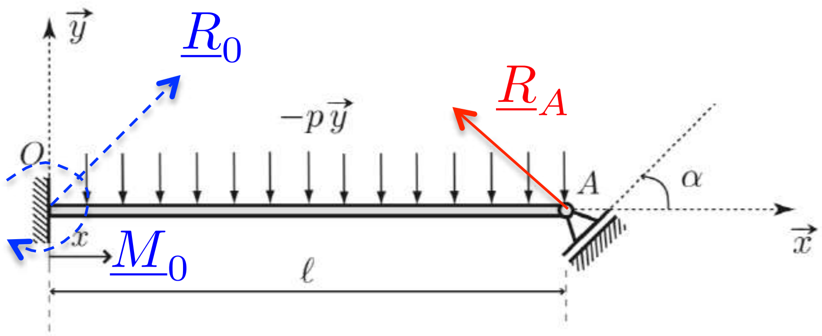
$$\underline{M}_O - \frac{p\ell^2}{2}\underline{e}_z + \ell R_A \cos\alpha\underline{e}_z = \underline{0}$$

1 éq. $\text{Sur } \underline{e}_z \quad M_O = \frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha$

Au final :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{R}_O &= R_A \sin\alpha\underline{e}_x + (p\ell - R_A \cos\alpha)\underline{e}_y \\ \underline{M}_O &= \left(\frac{p\ell^2}{2} - \ell R_A \cos\alpha\right)\underline{e}_z \\ \underline{R}_A &= R_A\left(-\sin\alpha\underline{e}_x + \cos\alpha\underline{e}_y\right) \end{aligned} \quad (*)}$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion, rq ici y compris cpstes 3D)

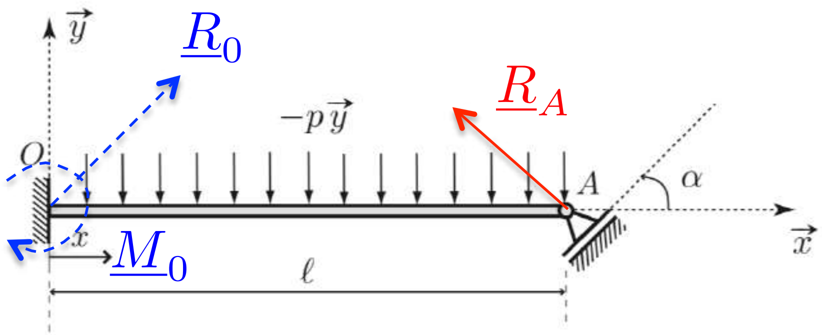


- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} - p\underline{e}_y = \underline{0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = p\underline{e}_y$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x) = px\underline{e}_y + \underline{c}_1$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion, rq ici y compris cpstes 3D)



- *En efforts :*

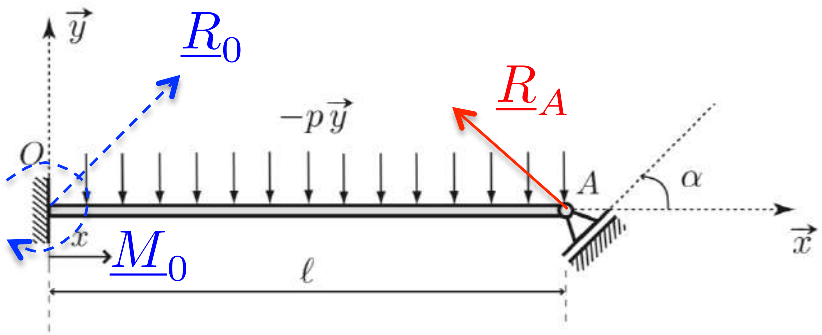
$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} - p\underline{e}_y = \underline{0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = p\underline{e}_y$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x) = px\underline{e}_y + \underline{c}_1$$

CL : $\underline{\mathcal{R}}(0) = -\underline{R}_O \Longrightarrow \underline{c}_1 = -R_A \sin\alpha \underline{e}_x - (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y$

$\underline{\mathcal{R}}(\ell) = \underline{R}_A \Longrightarrow$ vérifiée

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion, rq ici y compris cpstes 3D)



- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} - p\underline{e}_y = \underline{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = p\underline{e}_y$$

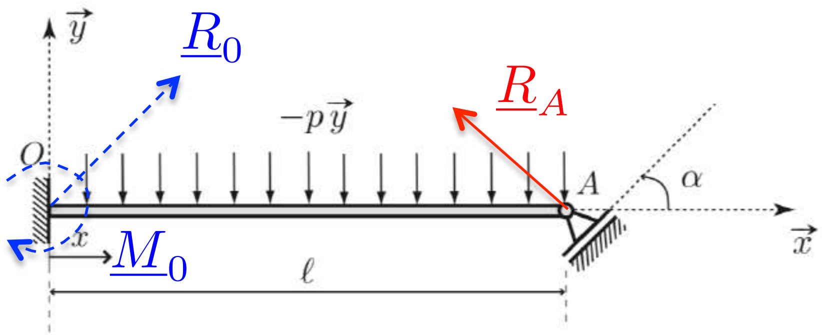
$$\underline{\mathcal{R}}(x) = px\underline{e}_y + \underline{c}_1$$

CL : $\underline{\mathcal{R}}(0) = -\underline{R}_O \Longrightarrow \underline{c}_1 = -R_A \sin\alpha \underline{e}_x - (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y$

$\underline{\mathcal{R}}(\ell) = \underline{R}_A \Longrightarrow$ vérifiée

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}(x) \longrightarrow \begin{cases} N(x) = -R_A \sin\,\alpha \\ T_y(x) = [p(x-\ell) + R_A\cos\alpha]\,\underline{e}_y \\ T_z(x) = 0 \end{cases}}$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion, rq ici y compris cpstes 3D)



- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} - p\underline{e}_y = \underline{0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = p\underline{e}_y$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x) = px\underline{e}_y + \underline{c}_1$$

CL : $\underline{\mathcal{R}}(0) = -\underline{R}_O \Longrightarrow \underline{c}_1 = -R_A \sin\alpha \underline{e}_x - (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y$

$\underline{\mathcal{R}}(\ell) = \underline{R}_A \Longrightarrow$ vérifiée

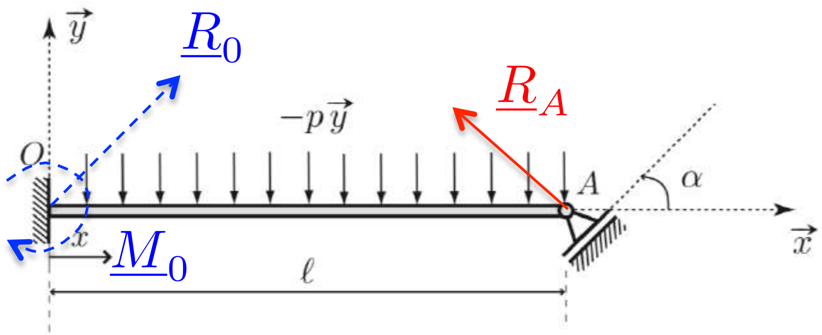
$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}(x) \longrightarrow \begin{cases} N(x) = -R_A \sin\,\alpha \\ T_y(x) = [p(x-\ell) + R_A \cos\alpha]\,\underline{e}_y \\ T_z(x) = 0 \end{cases}}$$

- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\mathcal{R}} = \underline{0} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} = [-p(x-\ell) - R_A\cos\alpha]\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-p\left(\frac{x}{2} - \ell\right) - R_A\cos\alpha\right] x\underline{e}_z + \underline{k}_1$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion, rq ici y compris cpstes 3D)



- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} - p\underline{e}_y = \underline{0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = p\underline{e}_y$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x) = px\underline{e}_y + \underline{c}_1$$

CL : $\underline{\mathcal{R}}(0) = -\underline{R}_O \Longrightarrow \underline{c}_1 = -R_A \sin\alpha \underline{e}_x - (p\ell - R_A\cos\alpha)\underline{e}_y$

$\underline{\mathcal{R}}(\ell) = \underline{R}_A \Longrightarrow$ vérifiée

$$\boxed{\underline{\mathcal{R}}(x) \longrightarrow \begin{cases} N(x) = -R_A \sin\,\alpha \\ T_y(x) = [p(x-\ell) + R_A \cos\alpha]\,\underline{e}_y \\ T_z(x) = 0 \end{cases} \quad (**)}$$

- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\mathcal{R}} = \underline{0} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} = [-p(x-\ell) - R_A\cos\alpha]\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-p\left(\frac{x}{2} - \ell\right) - R_A\cos\alpha\right] x\underline{e}_z + \underline{k}_1$$

CL : $\underline{\mathcal{M}}(0) = -\underline{M}_O \Longrightarrow \underline{k}_1 = \left(\dfrac{p\ell^2}{2} - \ell R_A\cos\alpha\right)\underline{e}_z$

$\underline{\mathcal{M}}(\ell) = \underline{0} \Longrightarrow$ vérifiée

$$(**) \quad \boxed{\underline{\mathcal{M}}(x) = \left[-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha\right]\underline{e}_z}$$

Équations de **Timoshenko** pour les poutres droites **(cours !)** :

Lois de comportement:

$$N(x) = ES\ \varepsilon_x(x) = ES\ \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$T_y(x) = \mu S\ \varepsilon_y(x) = \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) - \omega_z(x)\right)$$

$$T_z(x) = \mu S\ \varepsilon_z(x) = \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}(x) + \omega_y(x)\right)$$

$$M_y(x) = EI_{Gy}\ \gamma_y(x) = EI_{Gy}\ \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_z(x) = EI_{Gz}\ \gamma_z(x) = EI_{Gz}\ \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_t(x) = \mu I_G\ \gamma_x(x) = \mu I_G\ \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

(1) $$-R_A \sin\alpha \underset{=N}{=} ES\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$$

(2) $$p(x-\ell) + R_A \cos\alpha \underset{=T_y}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)$$

(3) $$0 \underset{=T_z}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y\right)$$

(4) $$0 \underset{=M_t}{=} \mu I_G\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}$$

(5) $$0 \underset{=M_y}{=} EI_{Gy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}$$

(6) $$-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha \underset{=M_z}{=} EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$$

Équations de **Timoshenko** pour les poutres droites **(cours !)** :

Lois de comportement:

$$N(x) = ES\ \varepsilon_x(x) = ES\ \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$T_y(x) = \mu S\ \varepsilon_y(x) = \mu S\ \left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) - \omega_z(x)\right)$$

$$T_z(x) = \mu S\ \varepsilon_z(x) = \mu S\ \left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}(x) + \omega_y(x)\right)$$

$$M_y(x) = EI_{Gy}\ \gamma_y(x) = EI_{Gy}\ \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_z(x) = EI_{Gz}\ \gamma_z(x) = EI_{Gz}\ \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_t(x) = \mu I_G\ \gamma_x(x) = \mu I_G\ \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

Avec en plus
Euler Bernoulli :

(1) $$-R_A \sin\alpha \underset{=N}{=} ES\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$$

(2) $$0 \underset{=T_y}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_n(s) = \varepsilon_b(s) = 0}$$

(3) $$0 \underset{=T_z}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y\right)$$

(4) $$0 \underset{=M_t}{=} \mu I_G\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}$$

(5) $$0 \underset{=M_y}{=} EI_{Gy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}$$

(6)

$$-\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha \underset{=M_z}{=} EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$$

Équations (4), (5), (3) et (1) + CL encastrement : $(\omega_x(0) = \omega_y(0) = u_z(0) = u_x(0) = 0)$

$$\boxed{\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_z(x) = 0, \qquad u_x(x) = -R_A x \sin\alpha/(ES)}$$

$$0 \underset{=M_t}{=} \mu I_G \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} \qquad\qquad 0 \underset{=T_z}{=} \mu S \left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y\right)$$

$$0 \underset{=M_y}{=} EI_{Gy} \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x} \qquad\qquad -R_A \sin\alpha \underset{=N}{=} ES \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$$

Équations (4), (5), (3) et (1) + CL encastrement : $(\omega_x(0) = \omega_y(0) = u_z(0) = u_x(0) = 0)$

$$\boxed{\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_z(x) = 0, \qquad u_x(x) = -R_A x \sin\alpha/(ES)}$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{p}{2}\left(x-\ell\right)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha$$

Équations (4), (5), (3) et (1) + CL encastrement : $(\omega_x(0) = \omega_y(0) = u_z(0) = u_x(0) = 0)$

$$\boxed{\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_z(x) = 0, \qquad u_x(x) = -R_A x \sin\alpha/(ES)}$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$\omega_z(0) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^3 + \ell^3\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^2 - \ell^2\right]$$

$$= -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[x^3 - 3x^2\ell + 3x\ell^2\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[x^2 - 2x\ell\right]$$

Équations (4), (5), (3) et (1) + CL encastrement : $(\omega_x(0) = \omega_y(0) = u_z(0) = u_x(0) = 0)$

$$\boxed{\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_z(x) = 0, \qquad u_x(x) = -R_A x \sin\alpha/(ES)}$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$\omega_z(0) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^3 + \ell^3\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^2 - \ell^2\right]$$

$$= -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[x^3 - 3x^2\ell + 3x\ell^2\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[x^2 - 2x\ell\right]$$

$u_y(0) = 0$

$$u_y(x) = -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[\frac{x^4}{4} - x^3\ell + \frac{3x^2\ell^2}{2}\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[\frac{x^3}{3} - x^2\ell\right]$$

Équations (4), (5), (3) et (1) + CL encastrement : $(\omega_x(0) = \omega_y(0) = u_z(0) = u_x(0) = 0)$

$$\boxed{\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_z(x) = 0, \qquad u_x(x) = -R_A x \sin\alpha/(ES)}$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{p}{2}(x-\ell)^2 - R_A(x-\ell)\cos\alpha$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$\omega_z(0) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^3 + \ell^3\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[(x-\ell)^2 - \ell^2\right]$$

$$= -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[x^3 - 3x^2\ell + 3x\ell^2\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[x^2 - 2x\ell\right]$$

$u_y(0) = 0$

$$u_y(x) = -\frac{p}{6EI_{Gz}}\left[\frac{x^4}{4} - x^3\ell + \frac{3x^2\ell^2}{2}\right] - \frac{R_A\cos\alpha}{2EI_{Gz}}\left[\frac{x^3}{3} - x^2\ell\right]$$

$$\boxed{u_y(x) = -\frac{x^2}{24EI_{Gz}}\left[p\left(x^2 - 4x\ell + 6\ell^2\right) + 4R_A\cos\alpha(x-3\ell)\right]} \quad (***)$$

Liaisons supposées **parfaites** ➔ **Travail** des efforts de liaison **nul** :

$$R_A \underline{e}_{\tilde{y}} \cdot \underline{u}(x = \ell) = R_A \left(- \sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_y\right) \cdot \left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$$

Liaisons supposées **parfaites** ➔ **Travail** des efforts de liaison **nul** :

$$R_A \underline{e}_{\tilde{y}} \cdot \underline{u}(x=\ell) = R_A \left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \cdot \left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$$

Comme $R_A \neq 0$ a priori : $\left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \cdot \left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{R_A \ell \sin\alpha}{ES} \\ -\dfrac{\ell^2}{24EI_{Gz}}\left(3\ell^2 p - 8R_A\cos\alpha\ell\right) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u_x(\ell) \\ u_y(\ell) \end{pmatrix}} = 0$$

Liaisons supposées **parfaites** ➔ **Travail** des efforts de liaison **nul** :

$$R_A \underline{e}_{\tilde{y}} \cdot \underline{u}(x=\ell) = R_A \left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \cdot \left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$$

Comme $R_A \neq 0$ a priori : $\left(-\sin\alpha \underline{e}_x + \cos\alpha \underline{e}_y\right) \cdot \left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{R_A \ell \sin\alpha}{ES} \\ -\dfrac{\ell^2}{24EI_{Gz}}\left(3\ell^2 p - 8R_A\cos\alpha\ell\right) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u_x(\ell) \\ u_y(\ell) \end{pmatrix}} = 0$$

$$\boxed{R_A = \frac{3p\ell^3 S\cos\alpha}{24I\sin^2\alpha + 8\ell^2 S\cos^2\alpha}}$$

À remplacer dans les équations :

- Des efforts de **liaison (*)** : $\underline{R}_O,\ \underline{M}_O,\ \underline{R}_A$
- Des efforts de **cohésion (**)** : $\underline{\mathcal{R}},\ \underline{\mathcal{M}}$
- Des **déplacements** et **rotations (***)** : $\underline{u},\ \underline{\omega}$

Liaisons supposées **parfaites** ➔ **Travail** des efforts de liaison **nul** :

$$R_A \underline{e}_{\tilde{y}} \cdot \underline{u}(x=\ell) = R_A\left(-\sin\alpha\underline{e}_x + \cos\alpha\underline{e}_y\right)\cdot\left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$$

Comme $R_A \neq 0$ a priori : $\left(-\sin\alpha\underline{e}_x + \cos\alpha\underline{e}_y\right)\cdot\left(u_x(\ell)\underline{e}_x + u_y(\ell)\underline{e}_y\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{R_A \ell \sin\alpha}{ES} \\ -\dfrac{\ell^2}{24EI_{Gz}}\left(3\ell^2 p - 8R_A\cos\alpha\ell\right) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} u_x(\ell) \\ u_y(\ell) \end{pmatrix}} = 0$$

$$\boxed{R_A = \frac{3p\ell^3 S\cos\alpha}{24I\sin^2\alpha + 8\ell^2 S\cos^2\alpha}}$$

À remplacer dans les équations :

- Des efforts de **liaison (*)** : $\underline{R}_O,\ \underline{M}_O,\ \underline{R}_A$
- Des efforts de **cohésion (**)** : $\underline{\mathcal{R}},\ \underline{\mathcal{M}}$
- Des **déplacements** et **rotations (***) :** $\underline{u},\ \underline{\omega}$

Remarque :

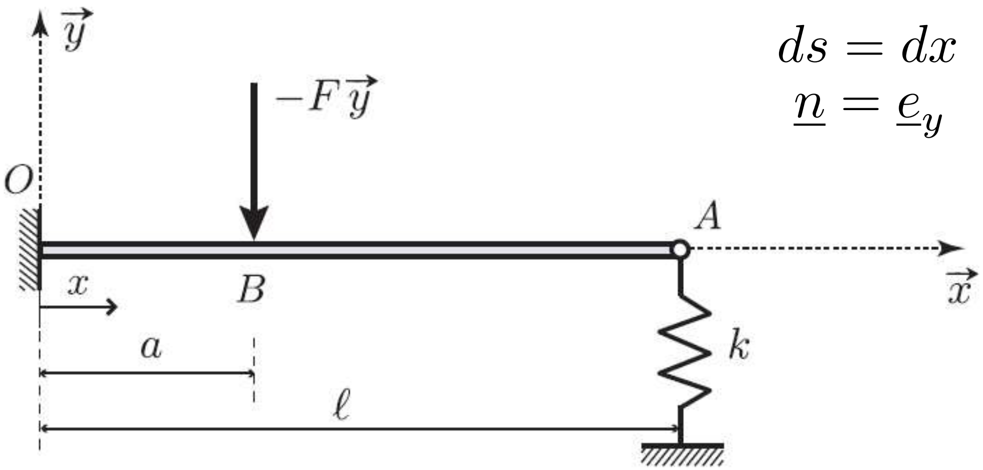
$u_x \propto cos\,\alpha\, sin\,\alpha$

$u_x = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0 \text{ et } \alpha = \pi/2$

$u_y = 0$

$\text{pour } \alpha = 0 \text{ mais pas } \alpha = \pi/2$

Exo 2 :

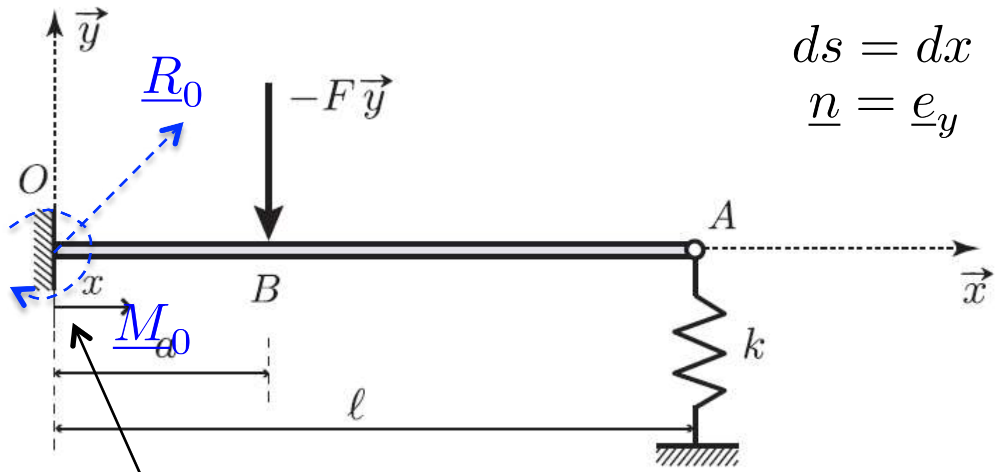


Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Calcul fait en **3D**
(mêmes résultats en 2D)

Exo 2 :



Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Calcul fait en **3D**
(mêmes résultats en 2D)

Encastrement en O :

- 3 translations et 3 rotations bloquées
  $u_x,\ u_y,\ u_y,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$
- Réaction et moment inconnus

$$\underline{R}_O = X_O\underline{e}_x + Y_O\underline{e}_y + Z_O\underline{e}_z$$

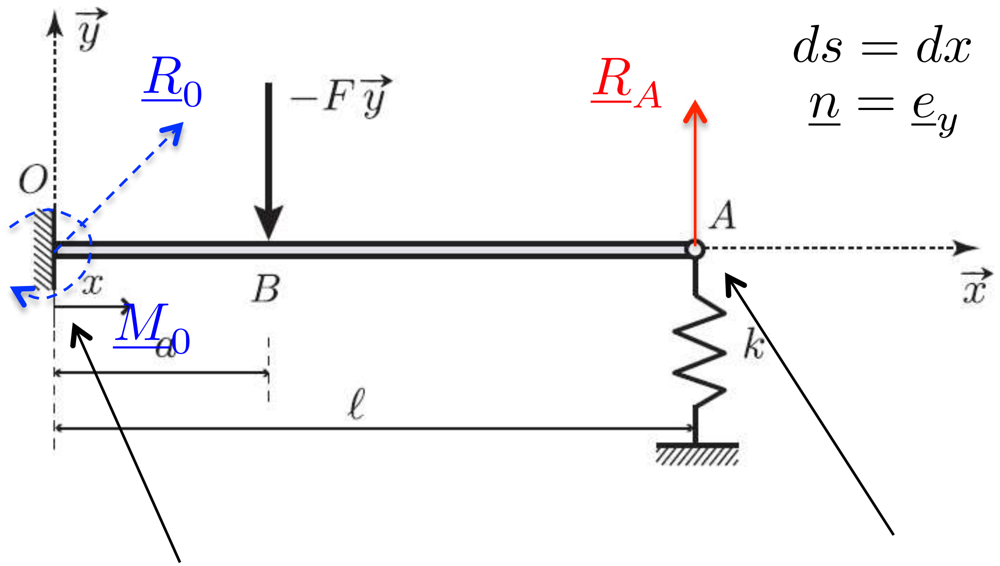
$$\underline{M}_O = M_{Ox}\underline{e}_x + M_{Oy}\underline{e}_y + M_{Oz}\underline{e}_z$$

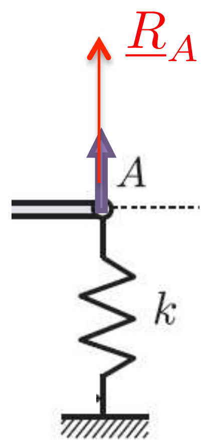
Exo 2 :

Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Calcul fait en **3D**
(mêmes résultats en 2D)





Encastrement en O :

- 3 translations et 3 rotations bloquées
  $u_x,\ u_y,\ u_y,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$
- Réaction et moment inconnus

$$\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y + Z_O \underline{e}_z$$

$$\underline{M}_O = M_{Ox} \underline{e}_x + M_{Oy} \underline{e}_y + M_{Oz} \underline{e}_z$$

Ressort linéaire en A :

- (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z)
- Réaction partiellement connue (direction) et moment nul

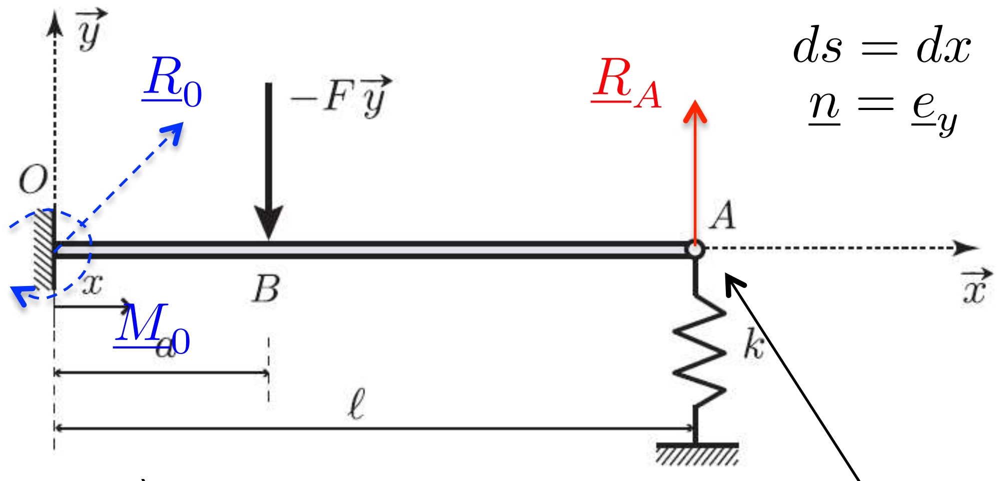
$$\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y = -k u_y(\ell) \underline{e}_y$$

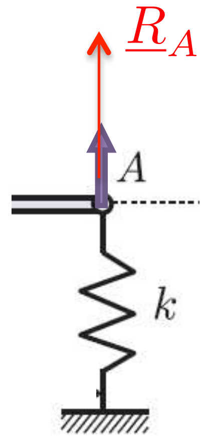
Exo 2 :

Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \underline{t} = \underline{e}_x$$
$$\underline{n} = \underline{e}_y \qquad \underline{b} = \underline{e}_z$$

Calcul fait en **3D**
(mêmes résultats en 2D)





Encastrement en O :

- 3 translations et 3 rotations bloquées
  $u_x, \ u_y, \ u_y, \ \omega_x, \ \omega_y, \ \omega_z$
- Réaction et moment inconnus

$$\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y + Z_O \underline{e}_z$$

$$\underline{M}_O = M_{Ox} \underline{e}_x + M_{Oy} \underline{e}_y + M_{Oz} \underline{e}_z$$

Ressort linéaire en A :

- (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z)
- Réaction partiellement connue (direction) et moment nul

$$\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y = -k u_y(\ell) \underline{e}_y$$

- **Nb de ddl bloqués** : **7** (Rq : 4 en 2D)
  - 6 au niveau de l'encastrement, 3 déplacements 3 rotations / ou
    $(X_O, Y_O, Z_O, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz})$
  - 1 au niveau du ressort, déplacement vertical, / ou R_A

- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **6** équations scalaires en 2D (3 en 2D) :

  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x, y et z
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par x, y et z

- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **6** équations scalaires en 2D (3 en 2D) :

  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x, y et z
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par x, y et z

Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = \mathbf{7 - 6 = 1}}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A

L'équilibre global peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

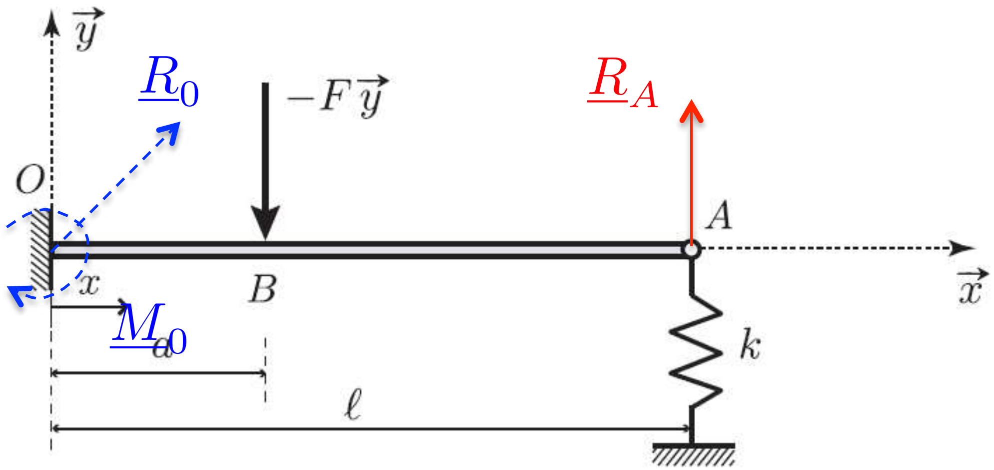
- **Équilibre global de la structure :**
  Donne **6** équations scalaires en 2D (3 en 2D) :
  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x, y et z
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par x, y et z

Au final : $\boxed{\textbf{Degré d'hyperstaticité} = 7 - 6 = 1}$

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A
L'équilibre global peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- *En efforts :* $\underline{R}_O + \underline{F} + \underline{R}_A = \underline{0}$

3 éq. $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sur } \underline{e}_x & X_O = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_y & Y_O + R_A - F = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_z & Z_O = 0 \end{array} \right.$



- **Équilibre global de la structure :**

  Donne **6** équations scalaires en 2D (3 en 2D) :

  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x, y et z
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par x, y et z

Au final : **Degré d'hyperstaticité = 7 - 6 = 1**

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A

L'équilibre global peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

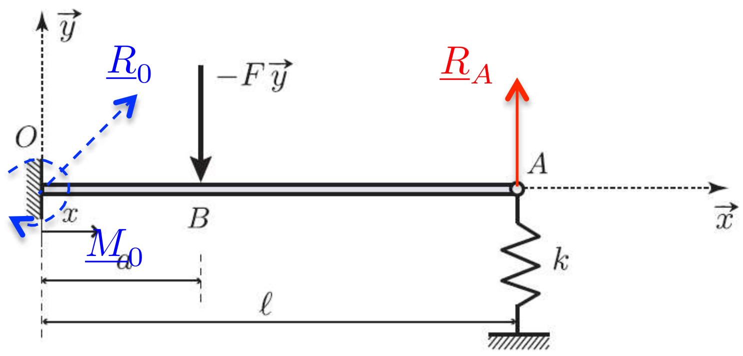
- *En efforts :* $\underline{R}_O + \underline{F} + \underline{R}_A = \underline{0}$

3 éq. $\begin{cases} \text{Sur } \underline{e}_x & X_O = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_y & Y_O + R_A - F = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_z & Z_O = 0 \end{cases}$

- *En moments en O :* $\underline{M}_O + \underline{OB} \wedge (-F\underline{e}_y) + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A = \underline{0}$

$$\underline{M}_O - (aF - R_A\ell)\underline{e}_z = \underline{0}$$

3 éq. $\begin{cases} \text{Sur } \underline{e}_x & M_{Ox} = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_y & M_{Oy} = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_z & M_{Oz} = -aF + R_A\ell \end{cases}$



- **Équilibre global de la structure :**
  Donne **6** équations scalaires en 2D (3 en 2D) :
  - Équilibre translationnel (en efforts) suivant x, y et z
  - Équilibre rotationnel (en moment) porté par x, y et z

Au final : **Degré d'hyperstaticité = 7 - 6 = 1**

On choisit de libérer une inconnue hyperstatique : R_A
L'équilibre global peut être entièrement réécrit en fonction de cette inconnue :

- *En efforts :* $\underline{R}_O + \underline{F} + \underline{R}_A = \underline{0}$

$$\text{3 éq.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Sur } \underline{e}_x & X_O = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_y & Y_O + R_A - F = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_z & Z_O = 0 \end{array} \right.$$

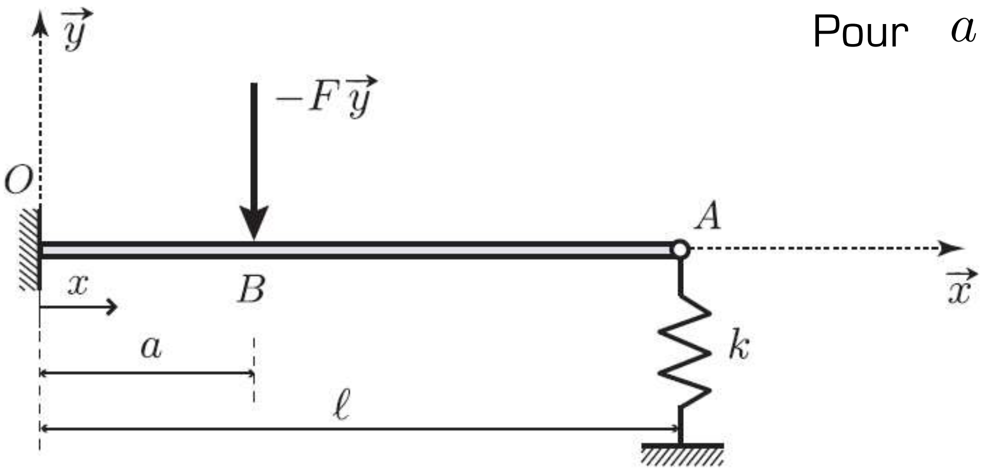
- *En moments en O :* $\underline{M}_O + \underline{OB} \wedge (-F\underline{e}_y) + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A = \underline{0}$

$$\underline{M}_O - (aF - R_A \ell)\underline{e}_z = \underline{0}$$

$$\text{3 éq.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Sur } \underline{e}_x & M_{Ox} = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_y & M_{Oy} = 0 \\ \text{Sur } \underline{e}_z & M_{Oz} = -aF + R_A \ell \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{R}_O = [F - R_A]\,\underline{e}_y \\ \underline{M}_O = -\,[aF - R_A \ell]\,\underline{e}_z \\ \underline{R}_A = R_A \underline{e}_y \end{array}}$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion)



Pour $a < x < \ell$

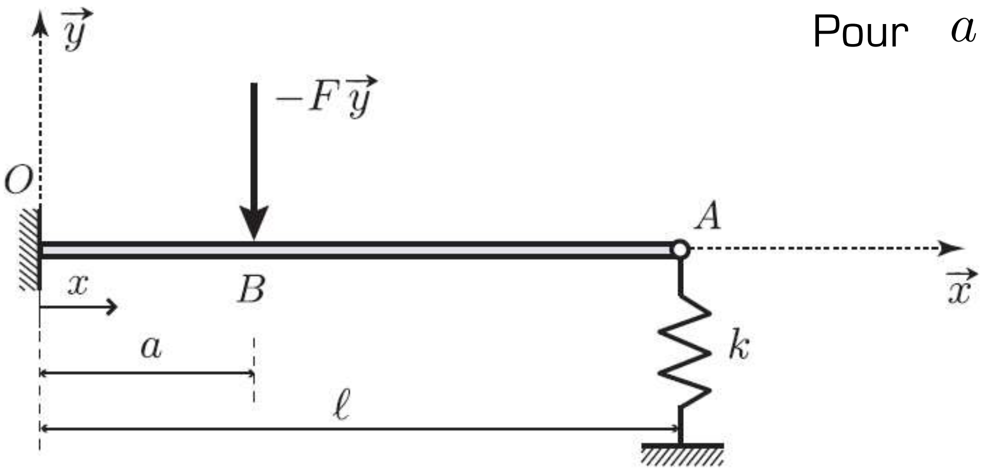
- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\mathcal{R}} = \underline{c}_2$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x = \ell) = R_A \underline{e}_y \longrightarrow \underline{c}_2 = R_A \underline{e}_y$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(2)} = R_A \underline{e}_y}$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion)



Pour $a < x < \ell$

- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\mathcal{R}} = \underline{c}_2$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x=\ell) = R_A \underline{e}_y \longrightarrow \underline{c}_2 = R_A \underline{e}_y$$

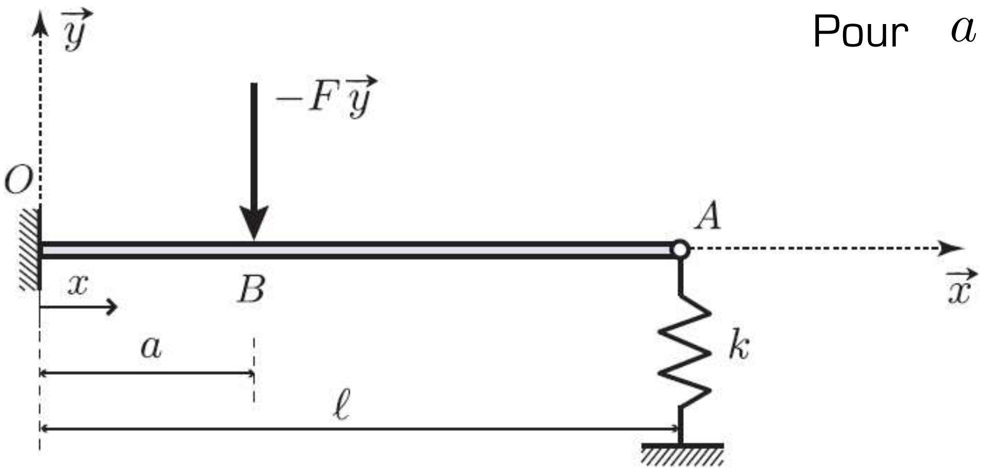
$$\longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(2)} = R_A \underline{e}_y}$$

- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\mathcal{R}} = \underline{0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} = -R_A \underline{e}_z \longrightarrow \underline{\mathcal{M}} = -R_A x \underline{e}_z + \underline{k}_2$$

$$\underline{\mathcal{M}}(x=\ell) = \underline{0} \longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{M}}^{(2)}(x) = -R_A (x-\ell)\underline{e}_z}$$

- **Équilibre local de la structure** (calcul des efforts de cohésion)



Pour $a < x < \ell$

- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\mathcal{R}} = \underline{c}_2$$

$$\underline{\mathcal{R}}(x=\ell) = R_A \underline{e}_y \longrightarrow \underline{c}_2 = R_A \underline{e}_y$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(2)} = R_A \underline{e}_y}$$

- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\mathcal{R}} = \underline{0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} = -R_A \underline{e}_z \qquad \longrightarrow \underline{\mathcal{M}} = -R_A x \underline{e}_z + \underline{k}_2$$

$$\underline{\mathcal{M}}(x=\ell) = \underline{0} \longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{M}}^{(2)}(x) = -R_A(x-\ell)\underline{e}_z}$$

Conditions de saut en $x = a$

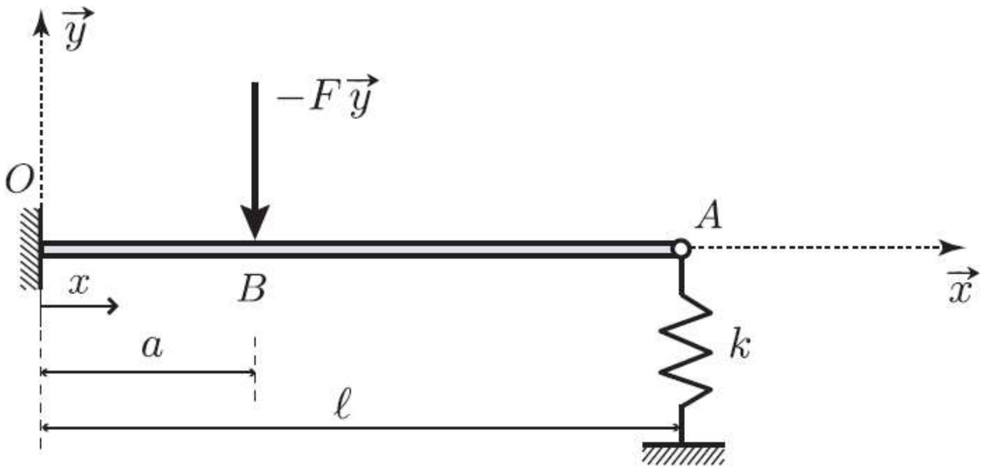
$$[|\underline{\mathcal{R}}|]\,(a) + \left(-F\underline{e}_y\right) = \underline{0} \qquad \rightarrow \underline{\mathcal{R}}^{(2)}(a) - \underline{\mathcal{R}}^{(1)}(a) = F\underline{e}_y$$

$$[|\underline{\mathcal{M}}|]\,(a) = \underline{0} \qquad \rightarrow \underline{\mathcal{M}}^{(2)}(a) = \underline{\mathcal{M}}^{(1)}(a)$$

Pour $0 < x < a$

- *En efforts :* $\dfrac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\mathcal{R}} = \underline{c}_3$

Condition de saut : $\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(a) = (R_A - F)\underline{e}_y \longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = [R_A - F]\,\underline{e}_y}$



Pour $0 < x < a$

- *En efforts :* $\dfrac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}x} = \underline{0} \longrightarrow \underline{\mathcal{R}} = \underline{c}_3$

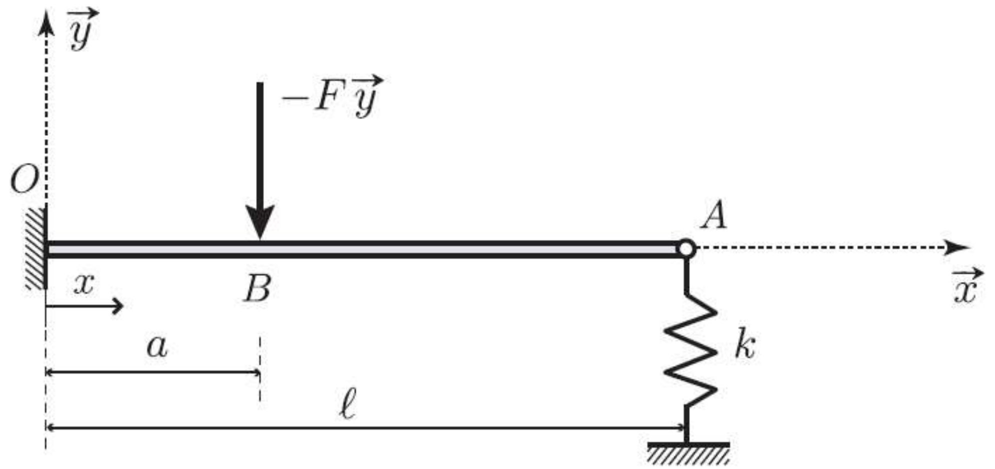
Condition de saut : $\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(a) = (R_A - F)\underline{e}_y \longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = [R_A - F]\,\underline{e}_y}$

- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\mathcal{R}} = \underline{0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}x} = [-R_A + F]\,\underline{e}_z \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}(x) = [F - R_A]\,x\underline{e}_z + \underline{k}_3$$

Condition de saut :

$$\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(a) = -R_A(a - \ell) \longrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{M}}^{(1)}(x) = [F(x-a) - R_A(x-\ell)]\,\underline{e}_z}$$



Équations de **Timoshenko** pour les poutres droites **(cours !)** :

Lois de comportement:

$$N(x) = ES\ \varepsilon_x(x) = ES\ \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$T_y(x) = \mu S\ \varepsilon_y(x) = \mu S\ \left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) - \omega_z(x)\right)$$

$$T_z(x) = \mu S\ \varepsilon_z(x) = \mu S\ \left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}(x) + \omega_y(x)\right)$$

$$M_y(x) = EI_{Gy}\ \gamma_y(x) = EI_{Gy}\ \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_z(x) = EI_{Gz}\ \gamma_z(x) = EI_{Gz}\ \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_t(x) = \mu I_G\ \gamma_x(x) = \mu I_G\ \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$0 < x < a$$

Avec en plus **Euler Bernoulli** :

(1) $\quad 0 \underset{=N}{=} ES\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$

(2) $\quad 0 \underset{=T_y}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)$

$$\varepsilon_n(s) = \varepsilon_b(s) = 0$$

(3) $\quad 0 \underset{=T_z}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y\right)$

(4) $\quad 0 \underset{=M_t}{=} \mu I_G\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}$

(5) $\quad 0 \underset{=M_y}{=} EI_{Gy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}$

(6)

$$F(x-a) - R_A(x-\ell) \underset{=M_z}{=} EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites d'encastrement :

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites d'encastrement :

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = F(x-a) - R_A(x-\ell)$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites d'encastrement :

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = F(x-a) - R_A(x-\ell)$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$$\omega_z(0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{-R_A}{2EI_{Gz}}\left(x^2 - 2\ell x\right) + \frac{F}{2EI_{Gz}}\left(x^2 - 2ax\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{-aR_A(a-2\ell) - a^2 F}{2EI_{Gz}}}$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites d'encastrement :

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = F(x-a) - R_A(x-\ell)$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$\omega_z(0) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{-R_A}{2EI_{Gz}}\left(x^2 - 2\ell x\right) + \frac{F}{2EI_{Gz}}\left(x^2 - 2ax\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{-aR_A(a-2\ell) - a^2F}{2EI_{Gz}}}$$

$u_y(0) = 0$

$$u_y(x) = \frac{-R_A}{6EI_{Gz}}\left(x^3 - 3\ell x^2\right) + \frac{F}{6EI_{Gz}}\left(x^3 - 3ax^2\right) \quad 0 \le x \le a$$

$$\longrightarrow \boxed{u_y(a) = \frac{-a^2R_A(a-3\ell) - 2a^3F}{6EI_{Gz}}}$$

Équations de **Timoshenko** pour les poutres droites **(cours !)** :

Lois de comportement:

$$\boxed{N(x) = ES\ \varepsilon_x(x) = ES\ \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}(x)}$$

$$T_y(x) = \mu S\ \varepsilon_y(x) = \mu S \left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) - \omega_z(x)\right)$$

$$T_z(x) = \mu S\ \varepsilon_z(x) = \mu S \left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}(x) + \omega_y(x)\right)$$

$$M_y(x) = EI_{Gy}\ \gamma_y(x) = EI_{Gy}\ \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$M_z(x) = EI_{Gz}\ \gamma_z(x) = EI_{Gz}\ \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$\boxed{M_t(x) = \mu I_G\ \gamma_x(x) = \mu I_G\ \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}(x)}$$

$$a < x < \ell$$

Avec en plus **Euler Bernoulli** :

(1) $0 \underset{=N}{=} ES\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}$

(2) $0 \underset{=T_y}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)$

$$\boxed{\varepsilon_n(s) = \varepsilon_b(s) = 0}$$

(3) $0 \underset{=T_z}{=} \mu S\left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} + \omega_y\right)$

(4) $0 \underset{=M_t}{=} \mu I_G\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}$

(5) $0 \underset{=M_y}{=} EI_{Gy}\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}x}$

(6) $-R_A(x-\ell) \underset{=M_z}{=} EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites à l'extrémité droite (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z):

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites à l'extrémité droite (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z):

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -R_A(x-\ell).$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites à l'extrémité droite (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z):

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -R_A(x-\ell).$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{-aR_A(a-2\ell) - a^2F}{2EI_{Gz}}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{ku_y(\ell)\left(x^2-2\ell x\right) - a^2F}{2EI_{Gz}}$$

Équations (1), (3), (4) et (5)+ Conditions aux limites à l'extrémité droite (Hypothèse pas de déplacement suivant x et z):

$$\omega_x(x) = \omega_y(x) = 0, \qquad u_x(x) = u_z(x) = 0$$

En mettant l'équation (2) dans l'équations (6) :

$$EI_{Gz}\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2} = -R_A(x-\ell).$$

CL pour identif. des cstes d'intégration :

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{-aR_A(a-2\ell) - a^2F}{2EI_{Gz}}$$

$$u_y(a) = \frac{-a^2R_A(a-3\ell) - 2a^3F}{6EI_{Gz}}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{ku_y(\ell)\left(x^2-2\ell x\right) - a^2F}{2EI_{Gz}}$$

$$u_y(x) = \frac{-R_A\left(x^3-3\ell x^2\right) - 3a^2Fx + a^3F}{6EI_{Gz}}$$

$$\boxed{u_y(x) = \frac{-R_A x^2\left(x-3\ell\right) + a^2F(a-3x)}{6EI_{Gz}}}$$

Ici la **liaison n'est pas parfaite** au niveau du ressort qui emmagasine de l'énergie.

L'équation supplémentaire permettant de déterminer l'inconnue hyperstatique est ici la relation constitutive des ressorts $R_A = -k u_y(\ell)$

$$u_y(\ell) = \frac{-2\ell^3 k u_y(\ell) + a^2 F(a - 3\ell)}{6EI_{Gz}} \longrightarrow u_y(\ell) = -\frac{a^2 F(3\ell - a)}{6EI_{Gz} + 2\ell^3 k}$$

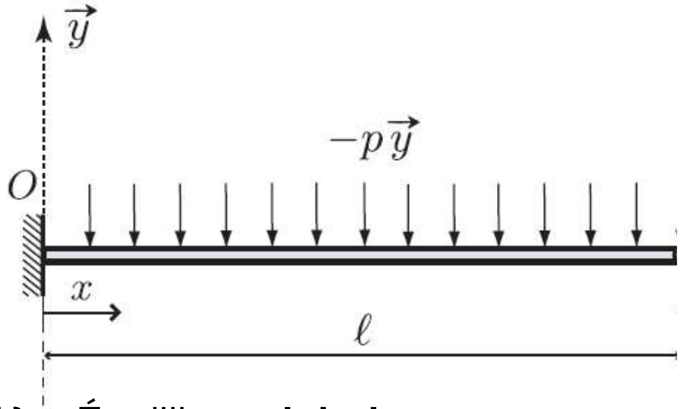
$$\boxed{R_A = \frac{a^2 F(3\ell - a)}{6kEI_{Gz} + 2\ell^3 k^2}}$$

À remplacer dans les équations :

- Des efforts de **liaison** : $\underline{R}_O,\ \underline{M}_O,\ \underline{R}_A$
- Des efforts de **cohésion** : $\underline{\mathcal{R}},\ \underline{\mathcal{M}}$
- Des **déplacements** et **rotations :** $\underline{u},\ \underline{\omega}$

Bilan sous forme de méthode de résolution

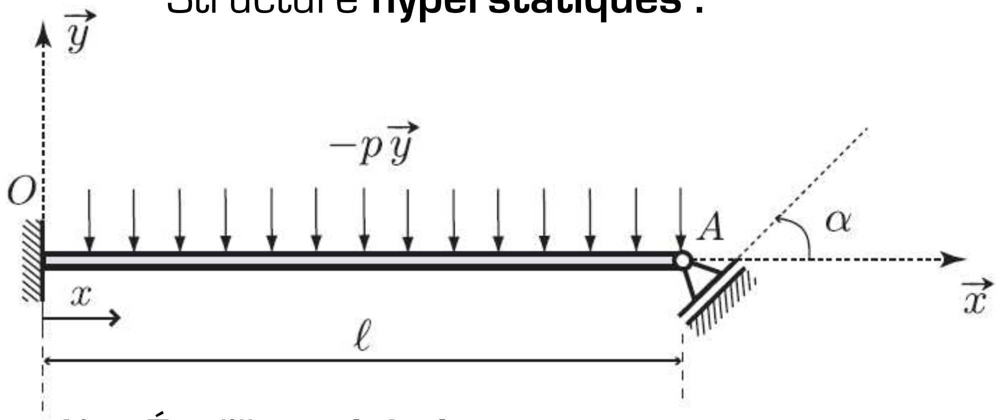
Structures **isostatiques** :



1) Équilibre **global**
   ➔ *Efforts de **liaison***
2) Équilibre **local**
   (ou méthode des coupures)
   ➔ *Efforts de **cohésion***
3) Lois de **comportement**
   (Timoshenko ±Euler Bernoulli)
   ➔ ***Déplacements** et **rotations***

Toutes les grandeurs exprimées en fonction des données du pb (connues).

Structure **hyperstatiques :**



1) Équilibre **global**
   ➔ *Efforts de **liaison***
2) Équilibre **local**
   (ou méthode des coupures)
   ➔ *Efforts de **cohésion***
3) Lois de **comportement**
   (Timoshenko ±Euler Bernoulli)
   ➔ ***Déplacements** et **rotations***

Toutes les grandeurs exprimées en fonction des données du pb connues + de l'**inconnue hyperstatique** choisie.

4) Équation de **liaison**
   Identification de l'**inconnue hyperstatique**