

Écrit du Lundi 20 mai
Durée 2h

*Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées; prises en compte dans la notation (-2 points possibles).
Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.
L'usage du crayon est réservé au brouillon.*

Cet énoncé contient 19 questions en tout, pour un total de 30 points et 0 points bonus.
Un formulaire succinct vous est donné page 6.

Questions de cours

- Donner la définition d'un solide indéformable.

Solution :

- On suppose que $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(B \in S/\mathcal{R})$ pour $A \neq B$. Peut-on affirmer que le solide S est en translation pure dans le référentiel \mathcal{R} ?

Solution : L'affirmation est fausse si \vec{AB} et $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ sont colinéaires.

- Soit S un solide de masse m en mouvement de translation pure dans le référentiel \mathcal{R} . Exprimer son énergie cinétique par rapport à \mathcal{R} , $T(S/\mathcal{R})$.

Solution :

$$T(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2m} \vec{p}(S/\mathcal{R})^2 = \frac{1}{2} m \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})^2, \quad \forall A.$$

- On considère un solide constitué de deux points matériels A, B de masse identique m . On se donne un repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que $\vec{OA} = a\vec{X} + b\vec{Y}$ et $\vec{OB} = -b\vec{Y}$ où a, b sont des constantes.
(a) caractériser le centre de masse et le moment d'inertie par rapport à (O, \vec{X}) du solide.

Solution :

$$2m\vec{OC} = m\vec{OA} + m\vec{OB} \Rightarrow \vec{OC} = \frac{a}{2}\vec{X}$$

$$I = m\|\vec{OA} \wedge \vec{X}\|^2 + m\|\vec{OB} \wedge \vec{X}\|^2 = 2mb^2$$

- le solide est-il équilibré statiquement autour de l'axe (O, \vec{X}) ?

Solution : Oui car $C \in (O, \vec{X})$.

(c) si c'est le cas, a-t-on équilibre dynamique autour du même axe ?

Solution : Non car il y a absence de symétrie matérielle (sauf si $a = 0$) et donc (O, \vec{X}) n'est pas principal d'inertie.

5. Énoncer le théorème des axes parallèles.

Solution : $I' = I + md^2$

Problème

Le but de ce problème est de dimensionner un moteur actionnant une bétonnière embarquée sur un camion. Le camion (1) se déplace sur une route horizontale plane (0) liée à un référentiel $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen avec \vec{z}_0 vertical descendant.

La cuve de mélange (ou bétonnière) (2) a une masse m et son centre de masse est noté C_2 . Elle est fixée au camion en A par une liaison rotule et est maintenue par un système de roulements à billes (lui-même fixé sur le camion). L'axe (AC_2) est incliné d'un angle constant α par rapport à la verticale (cf. FIGURE 1) et constitue un axe de symétrie matérielle de révolution pour (2).

À un instant t donné, la vitesse $\vec{V}(C_2 \in 1/0)$ est donnée par $v(t)\vec{y}_1$ où \vec{y}_1 est un vecteur unitaire horizontal. On introduit l'angle orienté $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ mesuré autour de (O, \vec{z}_0) .

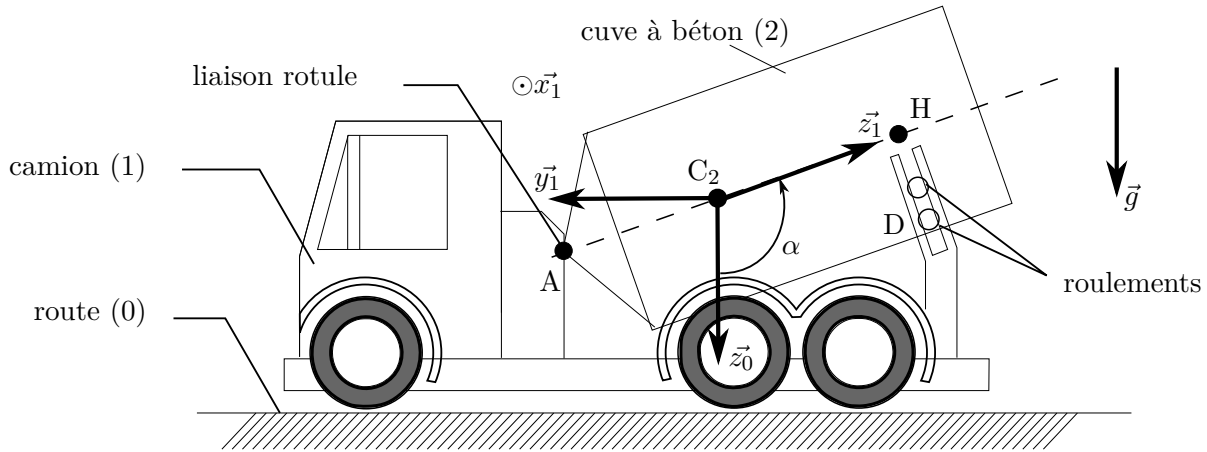


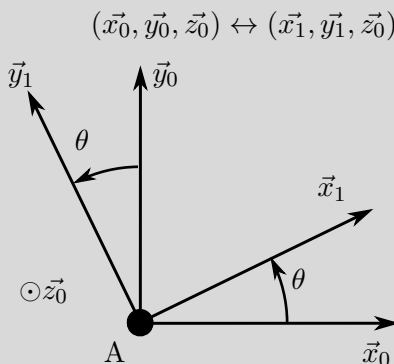
FIGURE 1 – Vue de côté du camion à bétonnière.

On introduit le point matériel $D \in (2)$ situé sur la circonférence de la cuve ainsi que H, son projeté orthogonal sur l'axe (AC_2) (FIGURE 1). On pose $\overrightarrow{AC_2} = \ell \vec{z}_1$, $\overrightarrow{C_2H} = L \vec{z}_1$, $\overrightarrow{HD} = d \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 = \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_0$, $\vec{y}_1' = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$ et $\vec{y}_2 = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$. L'angle $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, mesuré autour de (A, \vec{z}_1) , paramétrise la rotation de la cuve autour de (AC_2) .

1 Cinématique

1. Dessiner le diagramme de changement de base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \leftrightarrow (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Solution :



2. Estimer numériquement la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dans le cas où le camion tourne sur un cercle de rayon 10 m à une vitesse de 20 km/h. Préciser l'unité.

Solution :

$$V = 20 \text{ km.h}^{-1} = \frac{2 \cdot 10^4}{3600} \text{ m.s}^{-1} = \frac{30 \times 6 + 20}{6 \times 6} \text{ m.s}^{-1} \simeq 5.5 \text{ m.s}^{-1}.$$

Pour la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{V}{R} \simeq \frac{5.5}{10} = 0.55 \text{ rad.s}^{-1}$ ce qui signifie que le camion fait un tour complet en $2\pi/\dot{\theta} \simeq 11.4 \text{ s}$.

3. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$ puis $\vec{\Omega}(2/0)$.

Solution :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\phi} \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\phi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{z}_0$$

On peut passer (pas demandé) dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1', \vec{z}_1)$:

$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\phi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} (\cos \alpha \vec{z}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1') = (\dot{\phi} + \dot{\theta} \cos \alpha) \vec{z}_1 + \dot{\theta} \sin \alpha \vec{y}_1'.$$

4. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0)$.

Solution :

Par définition de l'accélération :

$$\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0) = \frac{d}{dt} \vec{V}(C_2 \in 1/0) \Big|_0 = \dot{v}(t) \vec{y}_1 + v(t) \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_0 = \dot{v}(t) \vec{y}_1 - v(t) \dot{\theta} \vec{x}_1.$$

2 Cinétique

On note la matrice d'inertie de (2) en C_2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ de la manière suivante :

$$[J_2(C_2)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (1)$$

1. Justifier l'identité $A = B$ par des arguments de symétrie.
2. Justifier que, bien que le repère $(C_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1', \vec{z}_1)$ ne soit pas lié à la cuve, la matrice d'inertie $[J_2(C_2)]$ exprimée dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1', \vec{z}_1)$ s'écrive encore sous la forme (1).
3. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(C_2 \in 2/0)$.

Solution :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(C_2 \in 2/0) &= \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \sin \alpha \\ \dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= A\dot{\theta} \sin \alpha \vec{y}_1' + C(\dot{\varphi} + \dot{\theta} \cos \alpha) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

3 Dynamique

L'effort $1 \rightarrow 2$ en A est modélisé par une liaison rotule parfaite :

$$\{\mathcal{A}_{\text{rotule} \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = X_A \vec{x}_1 + Y_A \vec{y}_1' + Z_A \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}.$$

Le maintien par les roulements est modélisé par le torseur :

$$\{\mathcal{A}_{\text{roulements} \rightarrow 2}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}' = Y_D \vec{y}_1' \\ \vec{0} \end{array} \right\}.$$

Un moteur, monté entre le camion et la bétonnière, assure la mise en rotation de cette dernière.

Il fournit un couple $\{\mathcal{A}_{\text{moteur} \rightarrow 2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \kappa(t) \vec{z}_1 \end{array} \right\}$

Dans cette partie, on supposera que $v(t) = \text{Cte} = v_0$, $\dot{\theta} = \text{Cte}$ et $\dot{\varphi} = \text{Cte} = \omega$.

1. Exprimer la quantité d'accélération $m\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0)$.

Solution :

Comme $\dot{v}(t) = 0$, on a d'après la dernière question de cinématique :

$$m\vec{\Gamma}(C_2 \in 2/0) = -mv_0 \dot{\theta} \vec{x}_1.$$

2. Exprimer l'accélération de la pesanteur \vec{g} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1', \vec{z}_1)$.

Solution :

$$\vec{g} = g\vec{z}_0 = g(\cos \alpha \vec{z}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1').$$

3. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la cuve. Exprimer, lorsque c'est possible, les composantes de l'action de la liaison rotule sur la cuve.

Solution :

Le référentiel \mathcal{R}_0 étant considéré comme galiléen, le théorème de la résultante dynamique appliqué à la cuve fournit :

$$-mv_0\dot{\theta}\vec{x}_1 = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{R}'$$

que l'on projète suivant \vec{z}_1 (ce qui permet d'exploiter $\vec{R}' \cdot \vec{z}_1 = \vec{0}$) :

$$0 = -mg(\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1) + (\vec{R} \cdot \vec{z}_1)$$

ou encore

$$Z_A = \vec{R} \cdot \vec{z}_1 = mg \cos \alpha$$

La projection suivant \vec{x}_1 fournit :

$$X_A = -mv_0\dot{\theta}.$$

4. Exprimer le moment dynamique $\vec{\delta}(C_2 \in 2/0)$.

Solution :

$$\vec{\delta}(C_2 \in 2/0) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(C_2 \in 2/0) \Big|_0 = \frac{d}{dt} \left(A\dot{\theta} \sin \alpha \vec{y}_1' + C(\omega + \dot{\theta} \cos \alpha) \vec{z}_1 \right) \Big|_0$$

On a $\dot{\theta} = \text{Cte}$ et $\omega = \text{Cte}$, donc seuls les vecteurs \vec{y}_1' et \vec{z}_1 sont fonction du temps.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}_1'}{dt} \Big|_0 &= (\dot{\theta}\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_1' = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge (\cos \alpha \vec{y}_1 + \sin \alpha \vec{z}_0) = -\dot{\theta} \cos \alpha \vec{x}_1 \\ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_0 &= (\dot{\theta}\vec{z}_0) \wedge \vec{z}_1 = \dot{\theta} \sin \alpha \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\vec{\delta}(C_2 \in 2/0) = ((C - A)\dot{\theta}^2 \cos \alpha + C\omega\dot{\theta}) \sin \alpha \vec{x}_1.$$

5. Appliquer le théorème du moment dynamique au système (2).

Solution :

Le référentiel \mathcal{R}_0 étant galiléen, le théorème du moment dynamique appliqué à la cuve fournit la relation vectorielle :

$$\vec{\delta}(C_2 \in 2/0) = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{poids} \rightarrow 2}(C_2)}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{rotule}}(C_2)}}_{=\vec{R} \wedge \vec{AC}_2} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{moteur}}(C_2)}}_{=\kappa \vec{z}_1} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{roulement}}(C_2)}}_{=\vec{R}' \wedge \vec{DC}_2}$$

6. En déduire une expression du couple κ que doit fournir le moteur.

Solution :

On projète $\vec{\delta}(C_2 \in 2/0)$ suivant \vec{z}_1 :

$$\vec{\delta}(C_2 \in 2/0) \cdot \vec{z}_1 = 0 = (\vec{R} \wedge \overrightarrow{AC_2}) \cdot \vec{z}_1 + \kappa(t) + (\vec{R}' \wedge \overrightarrow{DC_2}) \cdot \vec{z}_1$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= (\overrightarrow{AC_2} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{z}_1 + (\overrightarrow{DC_2} \wedge \vec{R}') \cdot \vec{z}_1 \\ &= (\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{AC_2}) \cdot \vec{R} + (\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{DC_2}) \cdot \vec{R}' \\ &= \ell(\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1) \cdot \vec{R} - (\vec{z}_1 \wedge (L\vec{z}_1 + dx_2)) \cdot \vec{R}' = -d\vec{R}' \cdot \vec{y}_2. \end{aligned}$$

7. **Bonus :** Peut-on, comme ci-dessus, parvenir à la détermination du couple κ si l'on remplace la liaison rotule par une liaison pivot parfaite d'axe (A, \vec{z}_1) ?

4 Formulaire

Relation de torseur pour le champ de vitesse d'un solide S par rapport à un référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Moment cinétique d'un solide S de masse m par rapport à \mathcal{R} au point A :

$$\vec{\sigma}(A \in S/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AC} \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + \mathcal{J}_S(A)[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})]$$

où C est le centre de masse et $\mathcal{J}_S(A)$ est l'opérateur d'inertie en A de S.

Moment dynamique de S dans son mouvement par rapport à \mathcal{R} en un point A :

$$\vec{\delta}(A \in S/\mathcal{R}) = \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(A \in S/\mathcal{R}) \right|_{\mathcal{R}} + m\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(C \in S/\mathcal{R}).$$