3A005 – Examen du 26 Octobre 2016

Durée 2h, Documents et calculatrice non autorisés. Tout matériel électronique interdit

Exercice 1. Racines d'équation (12/30)

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^4 - x^3 - 18\,x^2 - 52\,x + 32$.

1. Montrer qu'il existe une racine réelle r dans l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que cette racine r est l'unique racine dans l'intervalle $[0,1]$.
3. Montrer que $f'(x)$ est borné par $a \leq f'(x) \leq b$. Calculer les valeurs de a et b.
4. On propose une méthode de point fixe définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n + \lambda f(x_n)$, où λ est un réel. Montrer que la condition $0 < \lambda < 2/87$ assure la convergence quelle que soit l'initialisation de $x_0 \in [0,1]$.
5. On définit l'erreur à l'itération n, par $e_n = x_n - r$. Exprimer l'erreur e_{n+1} en fonction de e_n.
6. On admet que la relation $|1 + \lambda f'(x)| < 0.1$ est vérifiée à chaque itération. Quel est le nombre minimum d'itérations n pour réduire l'erreur en-dessous de 10^{-6}, pour $x_0 \in [0,1]$?
7. Construire le schéma de la méthode de Newton pour ce problème. Comparer avec la méthode du point fixe précédente.

Exercice 2. Méthodes directes (12/30)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

1. Peut-on appliquer la factorisation de Cholesky sur la matrice A ? pourquoi ?
2. Trouver la décomposition LU de A avec le formulaire suivant (détailler les calculs).
   $A = LU$, avec :
   Pour $1 \leq j \leq n$: $U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}$, pour $1 \leq i \leq j$
   $L_{jj} = 1$
   $L_{ij} = \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}\right) / U_{jj}$, pour $j + 1 \leq i \leq n$
3. Résoudre avec une méthode de descente puis remontée, le système $Ax_1 = b_1$, avec
   $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Résoudre le système $Ax_2 = b_2$, avec $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $Ax_3 = b_3$, avec $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Déduire des questions précédentes la matrice A^{-1}.

6. Calculer le nombre de conditionnement $Cond_\infty(A)$.

7. Au vu de la valeur obtenue à la question précédente, que peut-on dire du conditionnement de A ? Argumenter.

Exercice 3. Méthodes itératives (6/30)

1. Un schéma itératif est défini par $x^{(k+1)} = \Omega x^{(k)} + c$. Exprimer l'erreur à l'itération $(k+1)$ en fonction de l'erreur à l'itération (k). En déduire que la convergence de ce schéma ne dépend pas du vecteur c.
2. La condition nécessaire et suffisante de convergence du schéma défini dans 3.1 est $\rho(\Omega) < 1$. Montrer que $\|\Omega\| < 1$ est une condition suffisante de convergence pour ce schéma.
3. La méthode du gradient est définie par $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$,

   $$\text{avec } r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \text{ et } \alpha_k = \frac{\left(r^{(k)}\right)^T r^{(k)}}{\left(r^{(k)}\right)^T A r^{(k)}}$$

   Montrer que le vecteur résidu $r^{(k+1)}$ est perpendiculaire à $r^{(k)}$: $\left(r^{(k+1)}\right)^T r^{(k)} = 0$