Étude d'un manège forain

Examen de 2ème session : mardi 14 juin 2016

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.
Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (−2 points possibles).
Évitez SVP le crayon papier.

Cet énoncé contient 19 questions en tout, pour un total de $41\frac{1}{2}$ points et 0 points bonus.
Un formulaire succinct vous est donné page 3.

L'ensemble étudié (FIGURE 1) représente un élément de manège tel que l'on en trouve sur la plupart des fêtes foraines. À la différence de modèles classiques dans lesquels on est dans une nacelle attachée par un câble, ce modèle propose des sensations en plus grâce à une nacelle motorisée, qui peut tourner autour de la tige par laquelle elle est fixée au support.

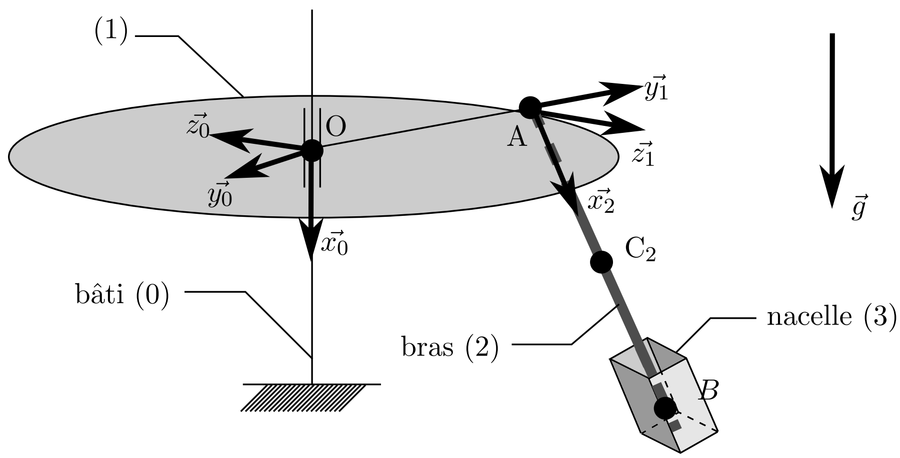

FIGURE 1 – Schéma du manège.

Ce manège est modélisé par trois solides reliés par des liaisons pivot parfaites :

- le corps (1) assimilé à un disque homogène de rayon R (épaisseur négligeable) de masse m_1, est lié au référentiel $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ par une liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{x_0})$ d'angle α entre $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{y_1}$. Son centre de masse est noté C_1 . Le référentiel attaché à (1) est noté $\mathcal{R}_1 = (\mathrm{C}_1, \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$;
- le bras (2) assimilé à une tige homogène AB de longueur $2L$ de masse m_2 . Il est lié en A au solide (1) par une liaison pivot d'axe horizontal $(\mathrm{A}, \vec{z_1})$. Cette liaison autorise une rotation d'angle ϕ entre $\vec{x_0}$ et $\vec{x_2}$. On notera C_2 le centre de masse de (2). Le référentiel attaché à (2) est noté $\mathcal{R}_2 = (\mathrm{C}_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1})$;
- la nacelle (3) de masse m_3, est liée en B au solide (2) par une liaison pivot d'axe $(\mathrm{B}, \vec{x_2})$ autorisant une rotation d'angle θ entre $\overrightarrow{y_2}$ et $\overrightarrow{y_3}$. Ce solide de centre de masse C_3 (supposé confondu avec B). Le référentiel attaché à (3) est noté $\mathcal{R}_3 = (\mathrm{B}, \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$;

On supposera pour simplifier que la nacelle possède une symétrie de révolution autour de l'axe $(\mathrm{B}, \overrightarrow{x_2})$ et que sa matrice d'inertie est donnée par : $[J_3(\mathrm{B})]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_3,\vec{z}_3)} = \begin{pmatrix} I'_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$.

Les angles α, ϕ et θ sont orientés dans le sens direct.

Le repère $\mathcal{R}_0$ est supposé galiléen. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\vec{x_0}$, avec g constante.

Deux moteurs assurent la mise en mouvement du manège (non représentés). Le premier, monté entre (0) et (1), maintient la vitesse de rotation du disque (1) à une valeur constante $\dot{\alpha} = \Omega = \mathrm{Cste}$; le second, monté entre (2) et (3), maintient la vitesse de rotation de (3) à une valeur constante $\dot{\theta} = \omega = \mathrm{Cste}$. Les couples moteurs correspondants seront notés Γ_{01} et Γ_{23}.

Les actions de liaison entre deux solides i et j seront notées : $\overrightarrow{R_{ij}}$ pour la résultante et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{ij}}$ pour le moment des actions au point considéré.

L'objectif de ce problème est de dimensionner les moteurs et donc de trouver l'expression des couples en fonction des données. Un autre objectif est de calculer quelques actions de liaison afin de les dimensionner.

Cinématique (10½ Pts)

1. (1 Pt) Dessiner les diagrammes de changement de base.
2. (1½ Pts) Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$.
3. (1 Pt) Calculer la vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in 1/0)$ du point A dans le mouvement du solide (1) par rapport à $\mathcal{R}_0$.
4. (a) (1 Pt) Calculer $\vec{V}(\mathrm{C}_2 \in 1/0)$;
   (b) (1 Pt) calculer $\vec{V}(\mathrm{C}_2 \in 2/1)$;
   (c) (½ Pt) En déduire $\vec{V}(\mathrm{C}_2 \in 2/0)$.
5. (a) (1 Pt) Calculer $\vec{V}(\mathrm{B} \in 2/0)$;
   (b) (½ Pt) En déduire $\vec{V}(\mathrm{B} \in 3/0)$.
6. (3 Pts) Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{B} \in 3/0)$.

Cinétique (12 Pts)

7. (2 Pts) Donner la forme de la matrice d'inertie de (1) en O. Vous préciserez la base choisie.

On rappelle que le moment d'inertie d'un disque de masse m et de rayon r par rapport à son axe de révolution est $\frac{1}{2}mr^2$.

8. (2 Pts) Calculer $\vec{\sigma}(\mathrm{O} \in 1/\mathcal{R}_0)$, le moment cinétique du solide (1) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point O.
9. (2 Pts) Donner, en précisant la base, la forme de la matrice d'inertie de (2) en C_2.

On rappelle que le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur ℓ par rapport à un axe perpendiculaire et passant par le centre de masse est $\frac{1}{12}m\ell^2$.

10. (3 Pts) Calculer $\vec{\sigma}(\mathrm{C}_2 \in 2/\mathcal{R}_0)$.
11. (3 Pts) Calculer le torseur cinétique $\{\mathcal{C}(3/0)\}_\mathrm{B}$ de (3) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en B.

Dynamique (11 Pts)

12. (2 Pts) Écrire les torseurs d'actions mécaniques pour les trois liaisons ainsi que pour les moteurs. Indiquer les composantes nulles dans les éléments de réduction.
13. (3 Pts) Calculer le torseur Dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}_\mathrm{B}$ de (3) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point B.
14. (2 Pts) Appliquer le PFD au solide (3) au point de votre choix sachant que l'objectif est de déterminer les actions de liaison entre (2) et (3). Vous devrez être précis dans vos réponses.
15. (2 Pts) Écrire les deux équations vectorielles qui s'en déduisent et montrer (sans calculs) que l'on peut en déduire les actions de liaison.
16. (2 Pts) Par projection de l'équation de moment (je vous laisse le choix de la projection) en déduire l'expression du couple Γ_{23}.

Énergétique (8 Pts)

Nous allons utiliser le Théorème de l'Énergie Cinétique pour calculer directement les équations du mouvement du système. On supposera pour simplifier que $\Gamma_{23} = 0$ et $\omega = 0$, càd que la nacelle est rigidement liée à la barre.

17. (3 Pts) Calculer l'énergie cinétique galiléenne $T(1 \cup 2 \cup 3/\mathcal{R}_0)$ de l'ensemble de solides (1), (2) et (3).
18. (2 Pts) Calculer les termes relatifs aux puissances de toutes les actions mises en jeu.
19. (3 Pts) Appliquer le Théorème de l'Énergie Cinétique au système $1 \cup 2 \cup 3$ et en déduire l'équation du mouvement relative au seul paramètre cinématique ϕ.

FORMULAIRE : Règle de dérivation vectorielle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{U}, \quad \forall \mathcal{R}, \mathcal{R}'$$

où $\vec{U}$ est un vecteur quelconque.

Matrice d'inertie du solide S au point A dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[J_\mathrm{S}(\mathrm{A})]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \int_\mathrm{S}(y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} xy\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} xz\mathrm{d}m \\ -\int_\mathrm{S} xy\mathrm{d}m & \int_\mathrm{S}(x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} yz\mathrm{d}m \\ -\int_\mathrm{S} xz\mathrm{d}m & -\int_\mathrm{S} yz\mathrm{d}m & \int_\mathrm{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, avec $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Moment cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})[\vec{\Omega}(\mathrm{S}/\mathcal{R})]$$

où C est le centre de masse de S et $\mathcal{J}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A})$ est l'opérateur d'inertie en A de S.

Moment dynamique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ en un point A :

$$\vec{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = m\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathcal{R})\bigg|_{\mathcal{R}}.$$