

# Ondes mécaniques

## - Support de Cours-

*Régis MARCHIANO*  
*regis.marchiano@sorbonne-universite.fr*



*Sorbonne Université*  
*Institut Jean Le Rond d'Alembert - UMR CNRS 7190*  
*4, place Jussieu - 75252 Paris cedex 05 France*

*Décembre 2020*

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Ondes progressive et rétrograde : propagation sur une corde</b>	<b>6</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Mise en équation . . . . .	6
2.2.1	Observations et hypothèses de bases . . . . .	6
2.2.2	État de base . . . . .	7
2.2.3	Ondes transverses sur la corde . . . . .	7
2.3	Solution générale de l'équation de d'Alembert . . . . .	8
2.3.1	Interprétation physique de la solution générale de l'équation de d'Alembert . .	11
2.4	Influence des conditions initiales . . . . .	12
2.4.1	Cas général . . . . .	12
2.4.2	Exemple : ondes générées par le pincement d'une corde . . . . .	13
2.5	Exemple complet : propagation d'ondes le long de caténares . . . . .	14
<b>3</b>	<b>L'onde progressive harmonique illustrée par les ondes acoustiques dans les fluides</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Modélisation de la propagation d'ondes acoustiques 1D dans un fluide parfait . . . . .	19
3.2.1	Équation des ondes 1D pour les ondes acoustiques dans les fluides parfaits . .	19
3.3	L'onde plane progressive harmonique . . . . .	23
3.3.1	La transformée de Fourier et les fonctions harmoniques . . . . .	23
3.3.2	L'onde progressive harmonique . . . . .	24
3.3.3	Relation de dispersion . . . . .	24
3.3.4	La vitesse de phase . . . . .	25
3.4	Impédance caractéristique et vitesse particulière d'une onde acoustique . . . . .	27
3.4.1	Impédance caractéristique . . . . .	27
3.4.2	Vitesse particulière et vitesse de propagation . . . . .	27
3.5	Conclusions . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Ondes 3D : exemple des ondes acoustiques</b>	<b>29</b>
4.1	Introduction . . . . .	29
4.2	Modélisation de la propagation 3D des ondes acoustiques dans les fluides parfaits . . .	29
4.3	Solutions de l'équation des ondes à 3D . . . . .	32
4.3.1	L'onde plane progressive . . . . .	32
4.3.2	L'onde plane progressive harmonique . . . . .	33
4.3.3	L'onde sphérique . . . . .	34
4.4	Conclusions . . . . .	36

<b>5 Ondes longitudinales et transverses : propagation d'ondes élastiques dans un solide isotrope et élastique</b>	<b>37</b>
5.1 Introduction . . . . .	37
5.2 Mise en équation . . . . .	37
5.2.1 Relation de dispersion . . . . .	39
5.2.2 Vitesses de phases . . . . .	39
<b>6 La dispersion : propagation d'ondes de gravité à la surface d'un fluide</b>	<b>42</b>
6.1 Introduction . . . . .	42
6.2 Mise en équation . . . . .	42
6.2.1 Description du problème . . . . .	42
6.2.2 Hypothèses de l'étude . . . . .	42
6.2.3 Etat de base . . . . .	43
6.2.4 Linéarisation des équations . . . . .	45
6.3 Relation de dispersion . . . . .	45
6.4 Vitesse de phase . . . . .	46
6.5 Vitesse de groupe . . . . .	47
6.5.1 Le paquet d'onde . . . . .	47
6.5.2 Vitesse de groupe . . . . .	48
6.6 Hauteur des vagues . . . . .	51
6.7 Trajectoire des particules fluides . . . . .	52
<b>7 Energie transportée par les ondes</b>	<b>54</b>
7.1 Energie associée aux ondes transverses sur une corde . . . . .	54
7.2 Généralisation : énergie pour les ondes non dispersives . . . . .	54
7.2.1 Vitesse de l'énergie pour les ondes dispersives . . . . .	57
<b>8 Ondes stationnaires</b>	<b>58</b>
8.1 Observations expérimentales . . . . .	58
8.2 Oscillations d'une corde tendue fixée à ses extrémités . . . . .	59
8.2.1 Mise en équation . . . . .	59
8.2.2 Détermination des constantes d'intégration . . . . .	60
8.2.3 La corde pincée . . . . .	61
8.2.4 La corde frappée . . . . .	61
8.3 Résolution générale . . . . .	62
<b>9 Réflexion-transmission entre deux milieux en incidence normale</b>	<b>63</b>
9.1 Introduction . . . . .	63
9.2 Réflexion sur une interface rigide en incidence normale . . . . .	63
9.2.1 Corde fixée à une extrémité . . . . .	63
9.2.2 Onde acoustique réfléchi par une paroi rigide . . . . .	65
9.2.3 Bilan . . . . .	66
9.3 Réflexion et transmission entre deux milieux en incidence normale . . . . .	66
9.3.1 Réflexion/transmission à l'interface entre deux cordes . . . . .	66
9.3.2 Réflexion/transmission d'ondes acoustiques à l'interface entre deux fluides parfaits . . . . .	68

<b>10 Réflexion-transmission entre deux milieux en incidence quelconque</b>	<b>73</b>
10.1 Introduction . . . . .	73
10.2 Réflexion et transmission d'ondes acoustiques à une interface entre deux milieux . . .	73
10.2.1 Lois de Snell-Descartes . . . . .	73
10.2.2 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude . . . . .	75
10.3 Réflexion d'ondes élastiques à une surface libre . . . . .	76
<b>11 Du discret au continu : Propagation d'ondes dans une chaîne d'oscillateurs couplés</b>	<b>81</b>
11.1 Présentation du problème . . . . .	81
11.2 Modélisation . . . . .	81
11.2.1 Modèle pour un seul oscillateur . . . . .	81
11.2.2 Modèle pour la chaîne d'oscillateurs couplés . . . . .	82
11.3 Propagation d'ondes dans la chaîne d'oscillateur couplés . . . . .	84
11.3.1 Relation de dispersion de l'équation discrète . . . . .	84
11.3.2 Limite des milieux continus . . . . .	86
11.3.3 Réflexion et transmission sur une chaîne d'oscillateurs couplés . . . . .	86
11.4 Conclusions . . . . .	88

# Chapitre 1

## Introduction

Les ondes mécaniques sont présentes partout dans notre environnement quotidien. Les sons et les vagues sur l'océan sont sans doute les exemples les plus évidents, nous verrons au travers de ce cours qu'il en existe beaucoup d'autres. L'objectif de ce cours est de donner les bases mécaniques, physiques et mathématiques pour appréhender le monde des ondes mécaniques : propagation, polarisation, diffraction, dispersion ... Pour ce faire, chaque concept est abordé successivement en l'illustrant par un type d'onde : corde vibrante, ondes acoustiques dans les fluides, ondes acoustiques dans les solides, ondes de gravité à la surface d'un fluide, chaîne d'oscillateurs, ondes de gravité interne. Bien entendu il faut garder à l'esprit que ce ne sont que des illustrations et que la plupart des phénomènes sont valables pour tous les types d'ondes. Plusieurs grilles de lecture sont possibles :

- une lecture linéaire, la progression entre les chapitres est régulière,
- une lecture par type d'onde : le lecteur intéressé uniquement par la propagation d'onde sur une corde ou les ondes acoustiques pourra passer de paragraphe en paragraphe.
- une lecture par niveau : L3 ou M1, en effet ce cours a été écrit à partir de deux UE la première en L3 et la seconde en M1, le tableau 1 donne les parties associées à chaque niveau.

N'hésitez pas à me communiquer les coquilles que vous trouverez dans le poly (qui en contient encore trop, hélas!). Bonne lecture !

Chapitre	L3	M1
Introduction	X	X
Eq. d'Alembert	X	X
Onde progressive harm.	X	X
Ondes 3D		X
Polarisation		X
Dispersion	X	X
Transport d'énergie	X	
Ondes stationnaires	X	
Réflexion-Transmission 1D	X	
Réflexion-Transmission 3D		X
Chaine d'oscillateurs	X	

TABLE 1.1 – Correspondance entre les chapitre et le niveau (L3 ou M1). Une croix (X) signifie que tout le chapitre est concerné, un numéro signifie que que début du chapitre au numéro indiqué inclus.

# Chapitre 2

## Ondes progressive et rétrograde : propagation sur une corde

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exposé du concept d'onde progressive et d'onde rétrograde. Ce concept est illustré par la propagation d'ondes transverses sur une corde. L'observation expérimentale est simple à mener, il suffit de prendre une corde suffisamment longue, de fixer une des ses extrémités et d'agiter l'autre : on voit alors une déformation de la corde se propager. Si la corde est bien tendue, on peut même observer la perturbation se réfléchir à l'extrémité fixée (nous reviendrons sur ce phénomène au chapitre 9.2.1). En pratique, une observation plus rigoureuse peut être faite assez simplement : on fixe la corde à une extrémité (cf extrémité gauche sur figure 2.2.3) et on fixe un poids de masse  $M$  à l'autre extrémité en faisant passer la corde par une poulie (cf partie droite de la figure 2.2.3). On assure ainsi une tension constante dans toute la corde lorsque la corde est au repos. Dans cette partie, nous allons nous concentrer uniquement sur le phénomène de propagation et nous allons supposer que la corde est très longue (en tout cas suffisamment pour que les ondes n'atteignent pas les extrémités de la corde).

### 2.2 Mise en équation

#### 2.2.1 Observations et hypothèses de bases

Lorsqu'on perturbe la corde (en la pinçant par exemple), on observe l'apparition et la propagation d'une perturbation : la corde se déforme et cette déformation se déplace (cf figure 2.2.3). On suppose que le mouvement de chaque élément de la corde est vertical et on note  $u(x, t)$  le déplacement vertical de la corde au point  $x$  et au temps  $t$  dans la direction  $\underline{e}_z$ . Cette fonction scalaire à deux variables permet de connaître le déplacement vertical de la corde à tous les instants et en tout point de la corde. Autrement dit, lorsqu'on connaît  $u(x, t)$ , le problème de propagation d'ondes est entièrement connu. Le but de cette partie est de déterminer  $u(x, t)$  en fonction des différents paramètres du problème : paramètres physiques de la corde (sa masse linéique notée  $\mu$ , sa tension notée  $T_0$ ), les conditions initiales (forme et vitesse à l'instant initial) et les conditions aux limites (corde infinie pour le moment).

Pour affiner la description, on fait un zoom sur le déplacement vertical (cf figure 2.2.3). On s'intéresse à un brin élémentaire de corde de longueur  $dx$  et d'extrémités A et B. On note  $\theta(x, t)$  l'angle entre la tangente au brin au point A et l'horizontale, et  $\theta(x + dx, t)$  l'angle entre la tangente au brin au point B et l'horizontale. On note  $\underline{T}(x, t)$  la tension exercée par la partie gauche de la corde

sur le brin et  $\underline{T}(x + dx, t)$  la tension exercée par la partie droite de la corde sur le brin. On choisit la convention suivante : la force exercée par la partie droite de la corde est positive. Enfin, on suppose que déplacement vertical est petit, cette hypothèse se traduit par la relation  $|\theta(x, t)| \ll 1$ .

### 2.2.2 État de base

L'état de base est donnée par l'équilibre statique de la corde, illustré à la figure 2.2.3. L'application du principe fondamentale de la statique sur cette configuration projeté sur l'axe  $z$  donne :

$$T_0 - Mg = 0.$$

Le choix de la masse permet donc de régler la tension de la corde.

### 2.2.3 Ondes transverses sur la corde

Pour décrire la propagation d'ondes, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique au brin de corde que l'on suppose déformée. Pour cela, on isole le brin de corde et on fait le bilan des actions extérieures :

- le poids du brin de corde :  $\underline{P}(x + dx/2, t) = -\mu dx \underline{g}$ , cette action est négligée dans la suite,
- la tension exercée par la partie gauche de la corde :  $\underline{T}(x, t)$ ,
- la tension exercée par la partie droite de la corde :  $\underline{T}(x + dx, t)$ .

Le PFD donne alors :

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \underline{e}_z = \underline{T}(x, t) + \underline{T}(x + dx, t) \quad (2.1)$$

On projette le PFD suivant  $\underline{e}_x$  :

$$0 = \underline{T}(x, t) \cdot \underline{e}_x + \underline{T}(x + dx, t) \cdot \underline{e}_x \quad (2.2)$$

$$0 = -|\underline{T}(x, t)| \cos(\theta(x, t)) + |\underline{T}(x + dx, t)| \cos(\theta(x + dx, t)) \quad (2.3)$$

On applique l'hypothèse des petits déplacements  $|\theta(x, t)| \ll 1$  :  $\cos(\theta(x, t)) \approx 1$  et  $\cos(\theta(x + dx, t)) \approx 1$ , par conséquent, on obtient :

$$0 = -|\underline{T}(x, t)| + |\underline{T}(x + dx, t)|. \quad (2.4)$$

La norme de la tension est constante le long de la corde :  $|\underline{T}(x, t)| = |\underline{T}(x + dx, t)| = T_0$

Projetons ensuite le PFD suivant  $\underline{e}_z$  :

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\underline{T}(x, t) \cdot \underline{e}_z + \underline{T}(x + dx, t) \cdot \underline{e}_z \quad (2.5)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -|\underline{T}(x, t)| \sin(\theta(x, t)) + |\underline{T}(x + dx, t)| \sin(\theta(x + dx, t)) \quad (2.6)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T_0 \sin(\theta(x, t)) + T_0 \sin(\theta(x + dx, t)) \quad (2.7)$$

On utilise à nouveau l'hypothèse des petits déplacements  $|\theta(x, t)| \ll 1$  :  $\sin(\theta(x, t)) \approx \theta(x, t)$  et  $\sin(\theta(x + dx, t)) \approx \theta(x + dx, t)$ , ce qui donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0(-\theta(x, t) + \theta(x + dx, t))$$

Comme  $dx$  est petit, on peut utiliser le développement de Taylor de la fonction  $\theta(x + dx, t)$  :

$$\theta(x + dx, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + O(dx^2)$$



Finalement, on obtient une relation entre  $u$  et  $\theta$  :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.8)$$

Pour le moment, on a une équation aux dérivées partielles et deux inconnues :  $u(x, t)$  et  $\theta(x, t)$ . Pour pouvoir résoudre le problème il nous faut une relation supplémentaire entre  $u(x, t)$  et  $\theta(x, t)$ . Pour cela, on utilise des arguments géométriques. On fait l'hypothèse que l'arc AC est un segment de droite. Comme on suppose que  $dx$  est très petit, cette nouvelle hypothèse est parfaitement justifiée. On est alors en présence d'un triangle rectangle et on peut écrire :

$$\tan(\theta(x, t)) = (u(x + dx, t) - u(x, t))/dx$$

L'hypothèse des petits déplacements nous donne :  $\tan(\theta(x, t)) \approx \theta(x, t)$ , par ailleurs en utilisant le développement de Taylor de  $u(x + dx, t)$ , on a :

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + O(dx^2)$$

Finalement, on obtient :

$$\theta(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

En injectant cette relation dans la relation 2.8, on obtient une équation dont  $u(x, t)$  est la seule inconnue :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Le rapport entre la tension et la masse linéique a la dimension d'une vitesse au carré :

$$\left[ \frac{T_0}{\mu} \right] = \frac{N}{kg.m^{-1}} \quad (2.10)$$

$$= \frac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^{-1}} \quad (2.11)$$

$$= m^2.s^{-2} \quad (2.12)$$

On pose alors  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$  et on réécrit l'équation précédente :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

C'est l'**équation de d'Alembert**, aussi appelée **équation des ondes** uni-dimensionnelle (une seule variable d'espace  $x$ ). C'est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en espace et d'ordre 2 en temps qui a une inconnue scalaire  $u(x, t)$ .

## 2.3 Solution générale de l'équation de d'Alembert

L'équation de d'Alembert a une solution générale (*ie* on peut toujours écrire la solution de l'équation de d'Alembert grâce à cette solution). Pour trouver la solution générale, on fait le changement de variable suivant  $u(x, t) = U(\xi, \eta)$  :

$$\begin{cases} \xi &= x - ct, \\ \eta &= x + ct. \end{cases} \quad (2.14)$$

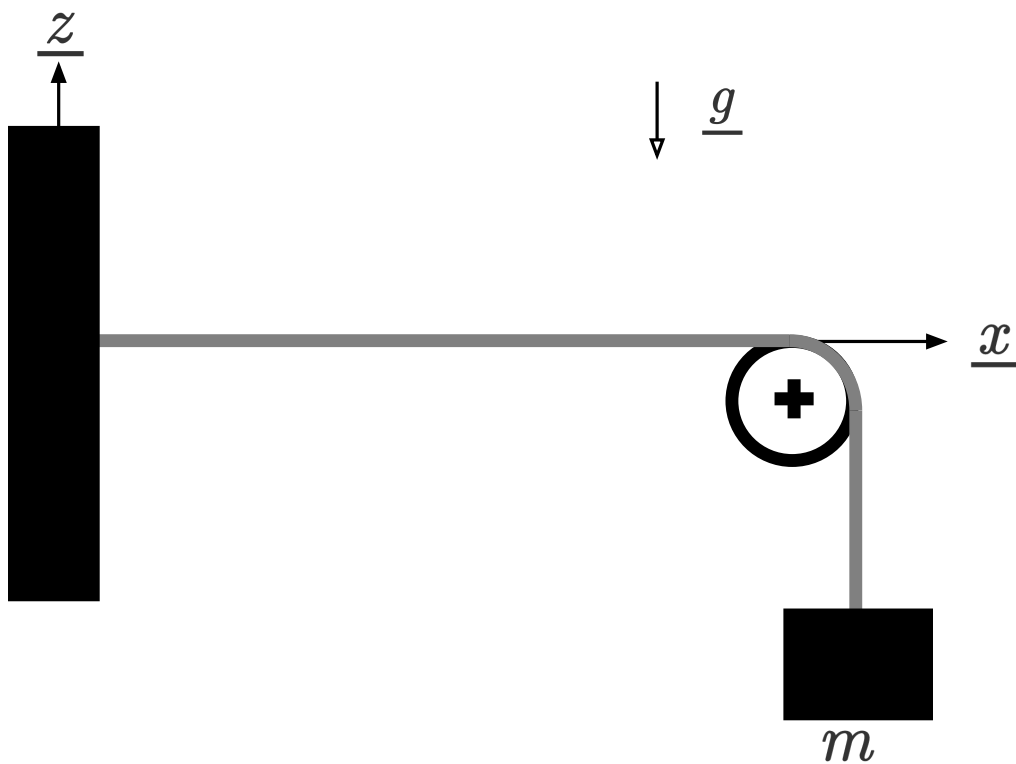


FIGURE 2.1 – Dispositif permettant de régler la tension de la corde

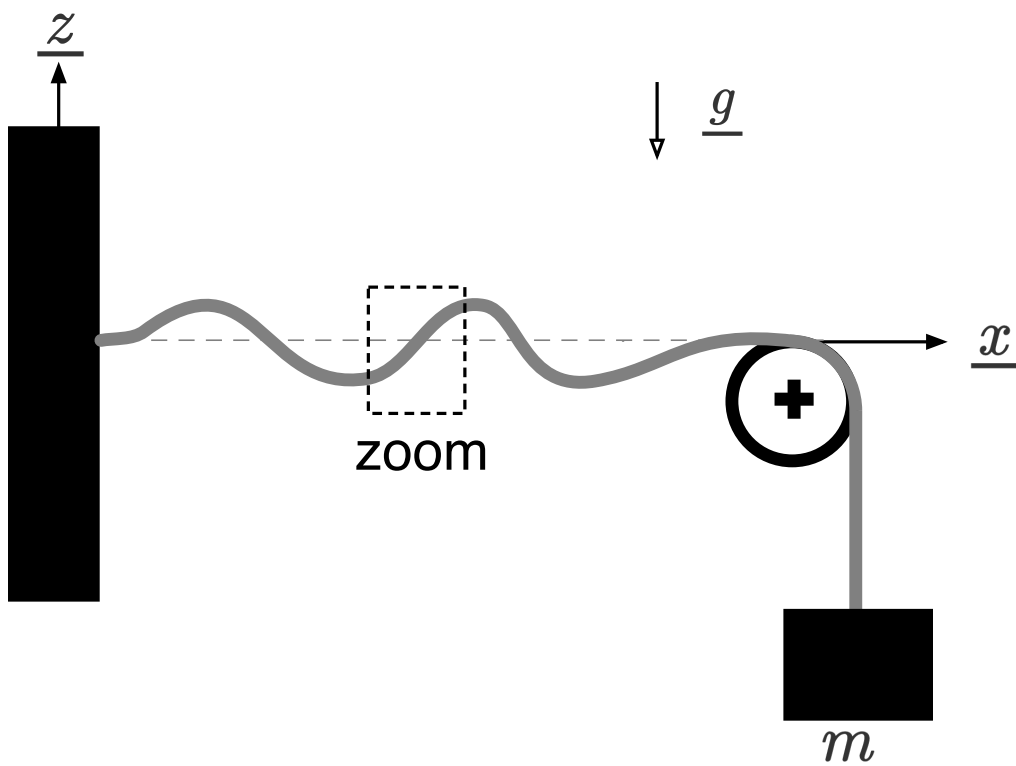


FIGURE 2.2 – Propagation d'une perturbation sur une corde tendue

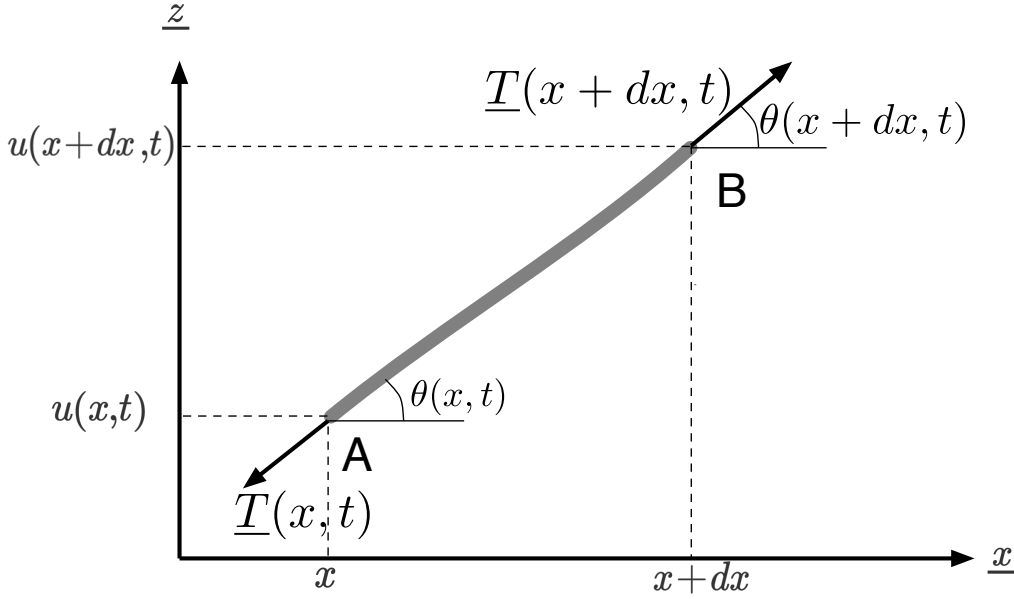


FIGURE 2.3 – Zoom sur la perturbation sur une corde tendue

Lors d'un changement de variables, les dérivées se transforment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \eta}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Par conséquent, avec le changement de variables 2.14, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + c \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}, \end{cases} \quad (2.16)$$

Pour obtenir les dérivées à l'ordre 2, ces opérateurs sont appliqués deux fois :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2c \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}. \end{cases} \quad (2.17)$$

En appliquant ce changement de variables à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.18)$$

Pour le moment, nous n'avons pas encore trouvé la solution de l'équation de d'Alembert, nous avons "simplement" changer la forme de cette équation. Même si au premier abord, cette nouvelle équation ne semble pas plus simple, en fait sa résolution est très rapide. Il "suffit" de l'intégrer deux fois : une fois par rapport à  $\eta$  et une autre fois par rapport à  $\xi$ . On trouve ainsi :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = h(\xi),$$

où  $h(\xi)$  est une fonction quelconque de la variable  $\xi$ . En intégrant cette dernière équation par rapport à  $\xi$  on obtient :

$$U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

où la fonction  $f$  est la primitive de la fonction  $h$  introduite précédemment et  $g$  est une nouvelle fonction scalaire quelconque.

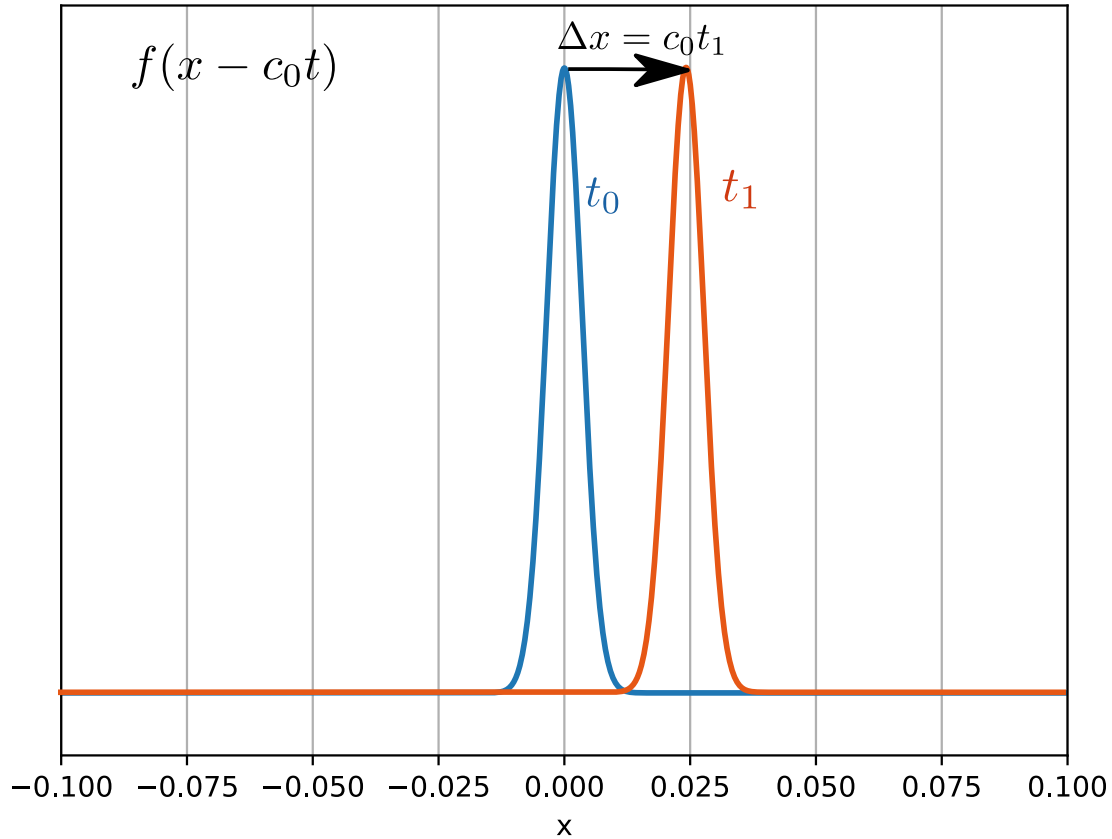


FIGURE 2.4 – Onde progressive

On trouve la **solution générale de l'équation de d'Alembert** , en revenant aux variables physiques  $x$  et  $t$  :

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t),$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions scalaires quelconques à une variable.

### 2.3.1 Interprétation physique de la solution générale de l'équation de d'Alembert

Supposons pour le moment que :

$$u(x, t) = f(x - ct) \tag{2.19}$$

et qu'à l'instant initial le profil de la corde  $u(x, t = 0) = f(x)$  est la forme donnée à la figure 2.4. On cherche à déterminer le profil de la corde à l'instant  $t_1$ . Pour cela, on applique la solution 2.19 :  $u(x, t_1) = f(x - c_0 t_1)$ . Cette relation mathématique signifie que le déplacement vertical de la corde ( $u$ ) en tout point ( $x$ ) et à l'instant précis  $t_1$  est donné par le profil  $f(x)$  mais décalé de la quantité  $c_0 t_1$  vers les  $x$  croissants comme l'illustre la figure 2.4.

La même analyse peut être faite si  $u(x, t) = g(x + c_0 t)$  mais cette fois le décalage du profil est vers les  $x$  décroissants (cf figure 2.5).

Dans les deux cas, on constate que la perturbation se propage à la vitesse  $c_0$  car le profil s'est décalé d'une distance  $c_0 t_1$  en un temps  $t_1$ . Notons aussi que la propagation de l'onde progressive et de l'onde rétrograde se fait sans changement de forme.

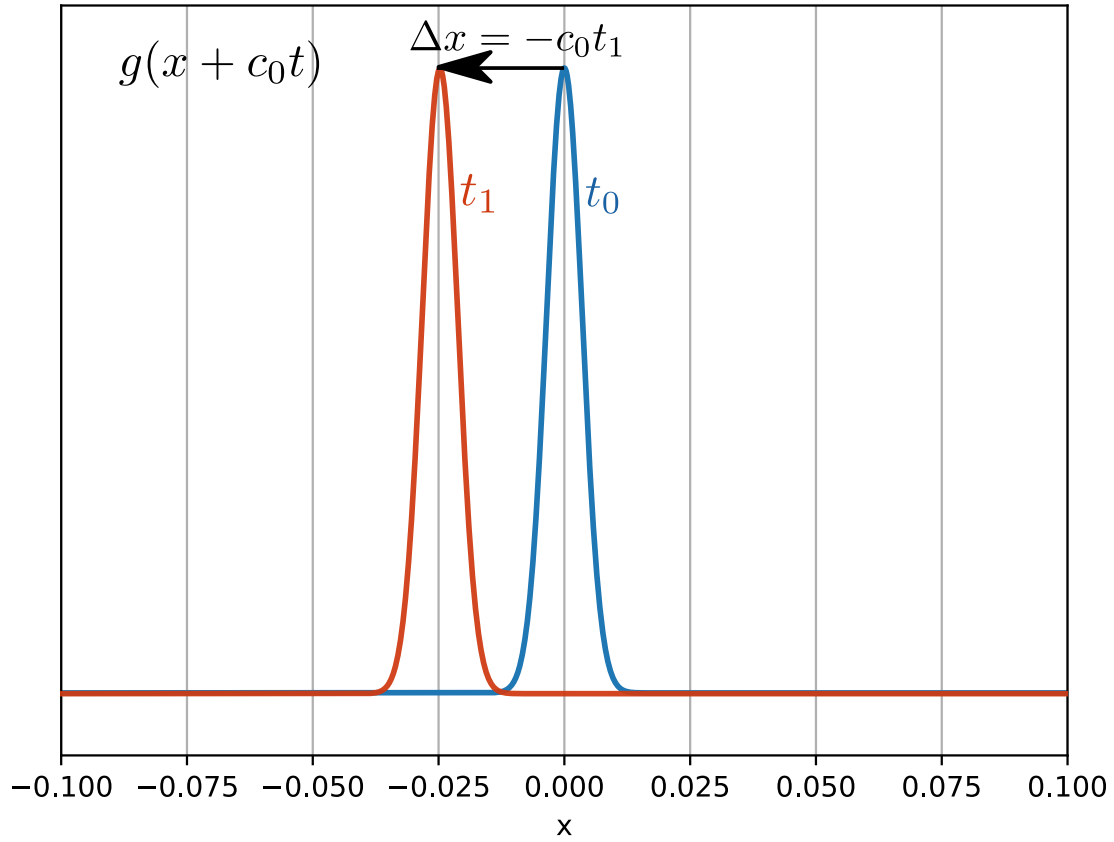


FIGURE 2.5 – Onde retrograde

La solution générale de l'équation de d'Alembert  $u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$  montre qu'on peut toujours décomposer le problème en

- une onde progressive vers les  $x$  croissants à la vitesse  $c_0$  (terme  $f(x - c_0 t)$ ),
- une onde rétrograde vers les  $x$  décroissants à la vitesse  $c_0$  (terme  $g(x + c_0 t)$ ).

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont pour le moment indéterminées. Elles dépendent du problème considéré et en particulier des conditions initiales.

## 2.4 Influence des conditions initiales

### 2.4.1 Cas général

On suppose que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (2.20)$$

où  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sont deux fonctions intégrables qui représentent respectivement le déplacement initial et la vitesse initial de la corde.

On sait que  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ . D'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x), \\ -c_0 f'(x) + c_0 g'(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Par conséquent :  $f(x) = -g(x) + u_0(x)$  et  $f'(x) = -g'(x) + u'_0(x)$ , on en déduit que  $f'(x) = \frac{-v_0(x)}{2c_0} + \frac{u'_0(x)}{2}$ . En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$f(x) = \frac{-1}{2c_0} \int_{-\infty}^x v_0(s)ds + \frac{1}{2}u_0(x)$$

On trouve ensuite :

$$g(x) = \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^x v_0(s)ds + \frac{1}{2}u_0(x)$$

Finalement, l'expression générale de la solution à partir des conditions initiales s'écrit :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2.21)$$

$$= \frac{-1}{2c_0} \int_{-\infty}^{x-c_0t} v_0(s)ds + \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{x+c_0t} v_0(s)ds + \frac{1}{2}u_0(x - c_0t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0t) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} v_0(s)ds + \frac{1}{2}u_0(x - c_0t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0t). \quad (2.23)$$

### 2.4.2 Exemple : ondes générées par le pincement d'une corde

On suppose que lorsqu'on pince une corde (corde de guitare par exemple), on change le profil (déplacement initial) mais sans imposer de vitesse initiale. Les conditions initiales du problème sont donc :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Supposons que le profil de la corde suite au pincement ait la forme d'une fonction gaussienne de hauteur  $A$  et de largeur à mi-hauteur  $\sigma$  (cf figure 2.6) :

$$\begin{cases} u_0(x) = Ae^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \\ v_0(x) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

L'objectif est de déterminer la forme de la corde à l'instant  $t$ . Pour cela traduisons les conditions initiales en fonction du déplacement de la corde :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u_0(x) = Ae^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x) = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

On utilise alors la solution générale de l'équation de d'Alembert :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = Ae^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \\ -c_0f'(x) + c_0g'(x) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Cette dernière relation montre que  $f' = g'$  donc  $f = g + cst$ . Ici la constante est choisie égale à 0 donc  $f(x) = g(x)$ . En reportant cette égalité dans la première relation du système 2.27, on a :

$$2f(x) = u_0(x).$$

Les expressions des deux fonctions inconnues  $f$  et  $g$  sont donc :

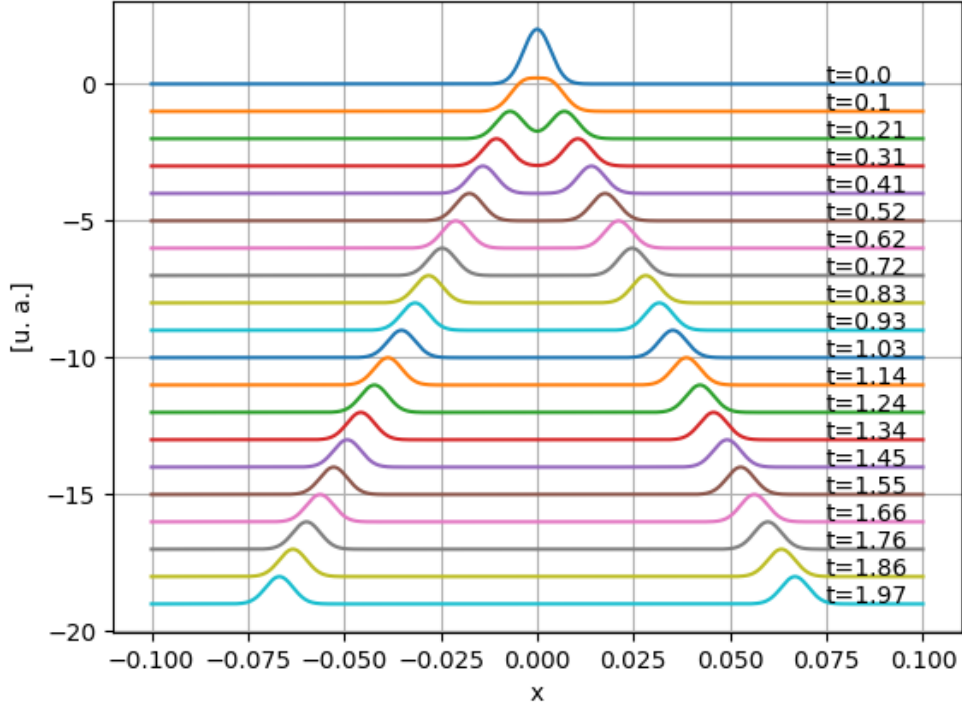


FIGURE 2.6 – Propagation d’une onde progressive et d’une onde rétrograde suite à un pincement au centre de la corde

$$\begin{cases} f(x) = A/2e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \\ g(x) = A/2e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \end{cases} \quad (2.28)$$

et finalement, le déplacement vertical de la corde est :

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \left( e^{-\frac{(x-c_0t)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+c_0t)^2}{\sigma^2}} \right) \quad (2.29)$$

Cette expression montre que le pincement génère deux ondes se propageant dans des directions opposées : une onde propagative et une onde rétrograde. Ces deux ondes ont la même amplitude égale à la moitié du déplacement initial ( $A/2$ ) et se propagent de façon symétrique par rapport à la position du déplacement initial. La figure 2.6 montre le profil de la corde à différents instants.

Remarque : on aurait trouvé le même résultat en appliquant directement la formule 2.23

## 2.5 Exemple complet : propagation d’ondes le long de caténaires

Une caténaire est un ensemble de câbles porteurs et de fils conducteurs destinés à l’alimentation des moyens de transports électriques à captage du courant par dispositif aérien. La caténaire permet de faire circuler la plupart des trains et des trams, ou encore les trolleybus. Les câbles porteurs sont en bronze ou en aluminium-acier, et les fils conducteurs (appelé par abus de langage ”la caténaire” dans toute la suite) sont généralement en cuivre pur à 98 %<sup>1</sup> de masse volumique  $8900 \text{ kg m}^{-3}$ . Au

1. adapté de wikipedia : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Catenaire>

passage d'un train, des ondes sont générées et se propagent le long de la caténaire. Ces ondes sont générées par le contact entre la caténaire et le pantographe (dispositif permettant de capter le courant de la caténaire cf figure 2.7).

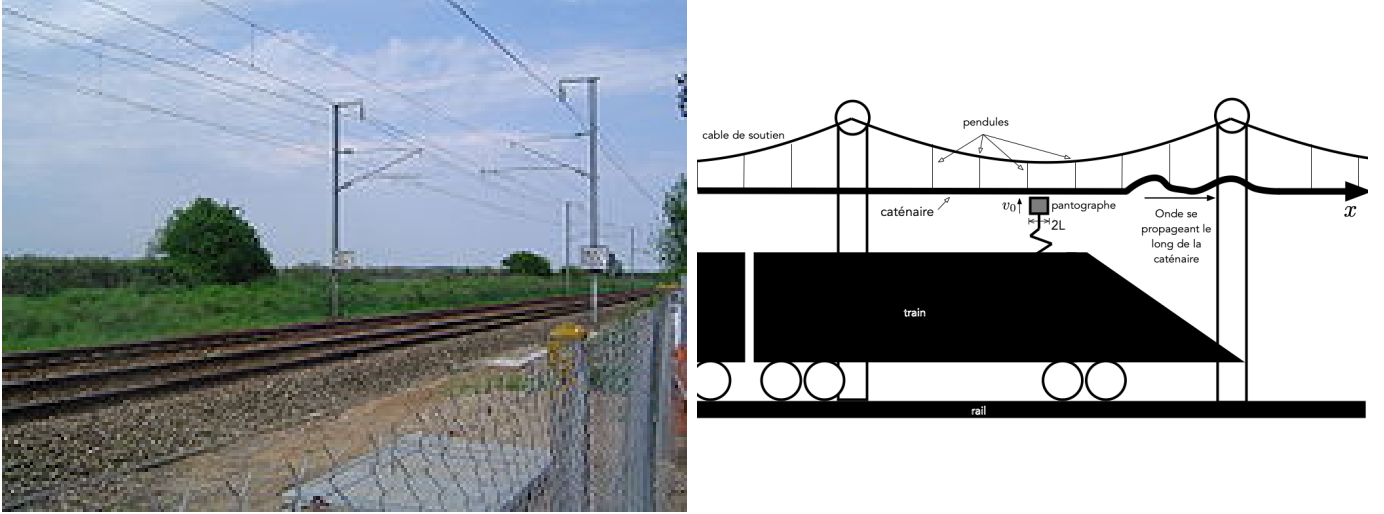


FIGURE 2.7 – (A gauche) Photographique d'une voie équipée d'une caténaire 25kV (A droite) schématisation du problème

On considère que la caténaire est un câble de masse linéique  $\mu$  homogène. Elle est tendue à l'aide d'un dispositif (non décrit ici) qui impose au repos une tension  $T_0$  dans tout le câble. Des pendules (cf figure 2.7) permettent de maintenir la caténaire horizontale à partir d'un câble de soutien. Par conséquent, dans la modélisation, on considérera qu'au repos, la caténaire est parfaitement horizontale, on négligera l'action du poids et on ne prendra pas en compte la présence des pendules. Au passage d'un train, on suppose que les mouvements de la caténaire sont uniquement transverses (suivant la direction verticale ( $Oz$ )). Lorsque la caténaire est en mouvement, on définit la tension  $\underline{T}(x, t)$  comme la force à l'abscisse  $x$  par le brin de droite sur le brin de gauche à l'instant  $t$ . Les propriétés mécaniques d'une caténaire sont telles que cette force est toujours tangente à la caténaire en son point d'application. En conséquence, la direction de la tension est contenue dans le plan ( $Oxz$ ). On se place dans l'hypothèse des petits déplacements, c'est-à-dire que l'angle  $\theta(x, t)$  entre la caténaire et l'horizontale, vérifie à tout instant et quel que soit le point considéré :  $|\theta(x, t)| \ll 1$  ( $\forall x, t$  avec  $\theta$  en radians).

On considère la dynamique du brin de caténaire situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Les forces auxquelles est soumis ce brin en mouvement sont :

Force à gauche :  $\underline{T}(x, t) = -|T(x, t)| (\cos \theta(x, t)\underline{x} + \sin \theta(x, t)\underline{z})$

Force à droite :  $\underline{T}(x + dx, t) = +|T(x + dx, t)| (\cos \theta(x + dx, t)\underline{x} + \sin \theta(x + dx, t)\underline{z})$

En notant  $u(x, t)$  le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ , l'accélération du centre de masse du brin de caténaire situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  en fonction de  $u$  et de ses dérivées partielles s'écrit :

$$\partial_{tt}^2 u(x + dx/2, t)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au brin de caténaire, puis en le projetant successivement sur l'axe ( $O\underline{x}$ ) puis sur l'axe ( $O\underline{z}$ ) on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

En effet, le PFD sur le brin donne :  $\mu dx \partial_{tt}^2 u(x + dx/2, t) \underline{e}_z = \underline{T}(x, t) + \underline{T}(x + dx, t)$



La projection sur  $O\bar{x}$  est :  $0 = |T(x + dx, t)| \cos \theta(x + dx, t) - |T(x, t)| \cos \theta(x, t)$  On a donc  $|T(x + dx, t)| - |T(x, t)| = 0$  On en déduit que la tension est constante le long de la caténaire :  $|T(x + dx, t)| = |T(x, t)| = T_0$

La projection sur  $O\bar{z}$  est :  $\mu dx \partial_{tt}^2 u(x + dx/2, t) = T_0(-\theta(x, t) + \theta(x + dx, t))$  En faisant un développement de Taylor  $\theta(x + dx, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$ , on trouve que  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Grâce à des considérations géométriques (cf figure), on établit une deuxième relation liant  $\theta(x, t)$  et  $u(x, t)$  :

$$\tan \theta(x, t) = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{u(x, t) + \partial_x u(x, t) dx - u(x, t)}{dx} = \partial_x u(x, t)$$

et donc on obtient

$$\tan \theta(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

On en déduit que les ondes dans la caténaire doivent satisfaire l'équation de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

La dimension de  $T_0/\mu$  est

$$\left[ \frac{T_0}{\mu} \right] = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}} = L^2 T^{-2} : \text{c'est le carré d'une vitesse.}$$

La solution générale de l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

avec  $c_0 = \sqrt{T/\mu}$

Avant que le train ne se mette en mouvement, le pantographe vient en contact avec la caténaire. On suppose que le contact se fait à  $t = 0$  et on le modélise les conditions initiales par un déplacement initial nul ( $u(x, t = 0) = 0$ ) et une vitesse initiale non nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } |x| < L \\ 0 & \text{si } |x| > L \end{cases}$$

où  $2L$  désigne la largeur de contact du pantographe.

On montre alors que la solution du problème se met sous la forme :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} v_0(s) ds.$$

En effet, on sait que  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ . D'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ -c_0 f'(x) + c_0 g'(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Par conséquent :  $f(x) = -g(x)$  et  $f'(x) = -g'(x)$ , on en déduit que  $f'(x) = \frac{-v_0(x)}{2c_0}$ . En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$f(x) = \frac{-1}{2c_0} \int_{-\infty}^x v_0(s) ds$$

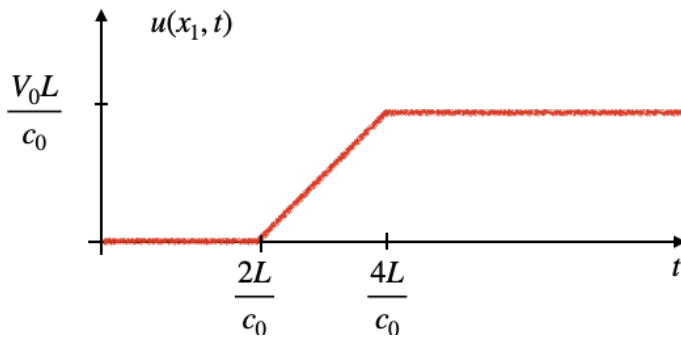
Le déplacement est donc :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= f(x - ct) - f(x + ct) \\
 &= \frac{-1}{2c_0} \int_{-\infty}^{x - c_0 t} v_0(s) ds + \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{x + c_0 t} v_0(s) ds \\
 &= \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} v_0(s) ds
 \end{aligned}$$

On peut alors calculer et tracer le déplacement à l'abscisse  $x_1 = 3L$  en fonction du temps :  $u(x_1, t)$ .

Pour cela il faut calculer l'intégrale dans l'expression de  $u(x, t)$ . Or la fonction  $v_0(x)$  est définie par morceaux, il faut donc distinguer plusieurs cas :

$$u(x_1, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{2L}{c_0} \\ \frac{V_0}{2c_0}(c_0 t - 2L) & \text{si } \frac{2L}{c_0} < t < \frac{4L}{c_0} \\ \frac{V_0 L}{c_0} & \text{si } t > \frac{4L}{c_0} \end{cases}$$



Lorsque la vitesse du train approche la vitesse des ondes sur la caténaire, l'amplitude des ondes devient très importante et le pantographe peut perdre le contact avec la caténaire et ainsi couper l'alimentation du train. Ce phénomène est connu sous le nom de *mur de la caténaire* c'est à dire que les trains ne peuvent pas aller plus vite que la vitesse de propagation des ondes dans la caténaire. Ce phénomène est donc très gênant pour les trains à grande vitesse de type TGV. En 1990, les ingénieurs de la SNCF qui préparaient le record de vitesse du TGV furent confrontés à ce problème<sup>2</sup>.

On considère un câble en cuivre de section  $S = 150 \text{ mm}^2$ . La valeur approximative la valeur de sa masse linéique  $\mu$  est

$$\begin{aligned}
 \mu &= \rho * S \\
 &= 8900 * 0.00015 \\
 &\approx 1.4 \text{ kg/m}
 \end{aligned}$$

Sachant que la tension dans la caténaire est environ 26 000 N, on en déduit que la vitesse des ondes le long de la caténaire :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \\
 &= \sqrt{\frac{26000}{1.4}} \\
 &= \sqrt{18500} \\
 &\approx 136 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

---

2. source : "Chevaucher les ondes", R. LEHOUCQ ET J.-M. COURTY, Pour la Science 286 (2001)

soit  $c_0 \approx 490 \text{ km/h}$  La vitesse des ondes limite la vitesse du train qui ne peut pas avoir une vitesse proche de  $c_0$  sous peine d'abimer la caténaire. Pour pouvoir augmenter la vitesse des trains, il faut d'abord augmenter la vitesse de propagation dans la caténaire. Comme  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ , pour augmenter la vitesse de propagation des ondes dans la caténaire, on peut envisager les solutions suivantes :

- augmenter la tension dans la caténaire
- diminuer la masse linéique

En 1990, c'est la première solution qui a été retenue en augmentant la tension à 30000N.

# Chapitre 3

## L'onde progressive harmonique illustrée par les ondes acoustiques dans les fluides

### 3.1 Introduction

Dans cette partie on s'intéresse principalement à la notion d'onde progressive harmonique qui correspond à la solution de l'équation de d'Alembert (cf chapitre 2) lorsqu'on spécifie que la variation temporelle est harmonique :

$$\phi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

avec  $\phi(x, t)$  la solution de l'équation de d'Alembert,  $k$  le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation (la définition et la signification physique de  $k$  et  $\omega$  seront détaillés plus loin dans ce chapitre).

Cette solution est très importante car elle sert de solution de référence pour tous les types d'ondes. Pour illustrer son importance et son utilisation, nous allons l'étudier dans le contexte de la propagation des ondes acoustiques (supposées ici unidimensionnelles - 1D) dans les fluides parfaits. Cependant, il faut garder à l'esprit que cette solution est valable pour tous les types d'ondes. Le chapitre s'ouvre sur la modélisation des ondes acoustiques dans les fluides parfaits en restreignant le problème à la propagation 1D dans un tube. Cette restriction permet de simplifier la mise en équation (la mise en équation 3D est faite au chapitre ??) mais ne retire rien à l'importance de ces ondes qui sont reliées au sens de l'audition. Mais elles sont en réalité plus générales que les seules ondes audibles. Par exemple, les ondes ultrasonores utilisées en échographie ou dans les SONAR sont aussi des ondes acoustiques.

### 3.2 Modélisation de la propagation d'ondes acoustiques 1D dans un fluide parfait

On suppose que

- le fluide est parfait (pas de viscosité),
- le fluide est homogène (pas de variation en espace),
- le fluide est au repos (pas d'écoulement),
- pas de source, de masse, de force, ou de température.

#### 3.2.1 Équation des ondes 1D pour les ondes acoustiques dans les fluides parfaits

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la propagation d'une onde de pression (dilatation/compression) 1D dans un fluide. L'objectif est d'établir l'équation des ondes 1D en appliquant le principe fonda-

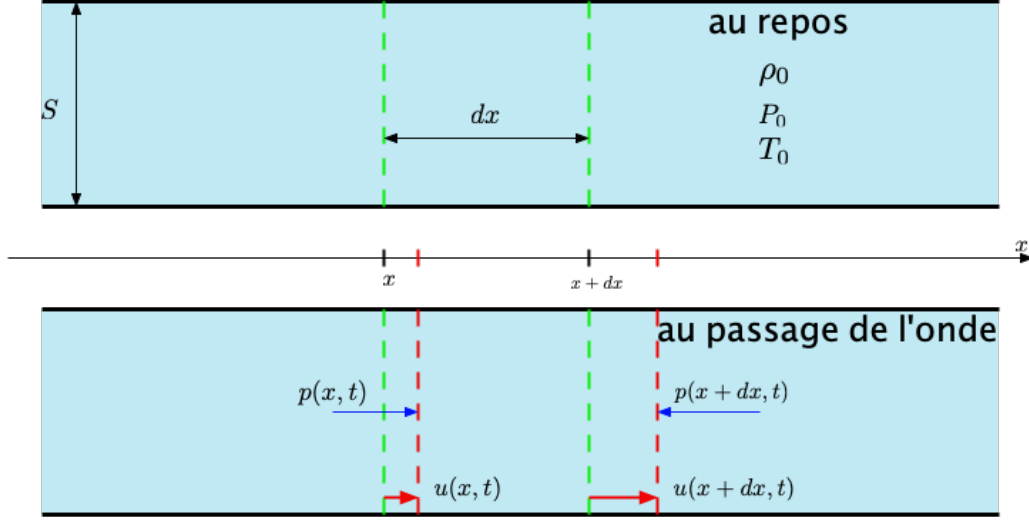


FIGURE 3.1 – Ondes de compression/dilatation dans un fluide

mental de la dynamique puis en faisant un bilan de masse pour une tranche de fluide.

On considère un tube de section  $S$  contenant un fluide à l'équilibre et sans écoulement (cf figure 3.1). Au repos, le fluide est caractérisé par sa pression  $P_0$  ( $[P_0] = \text{Pa}$ ), sa masse volumique  $\rho_0$  ( $[\rho_0] = \text{kg m}^{-3}$ ), sa température  $T_0$  ( $[T_0] = \text{K}$ ). On considère une tranche de fluide comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  d'épaisseur  $dx$ , on note son volume  $V_0 = \rho_0 S dx$ .

Au passage d'une onde acoustique, on suppose que la tranche de fluide peut se comprimer/dilater, de telle sorte que la face située initialement en  $x$  est située en  $x + u(x, t)$  et celle située en  $x + dx$  est maintenant située en  $x + u(x + dx, t)$  avec  $u(x, t)$  le déplacement qu'on suppose être une quantité petite. Ce mouvement de compression/dilatation s'accompagne d'un changement local de pression et on note  $p_a(x, t)$  la pression acoustique au point  $x$  et  $p_a(x + dx, t)$  celle au point  $x + dx$ . Ainsi, sur les faces  $x$  et  $x + dx$ , la pression totale est respectivement  $p(x, t) = P_0 + p_a(x, t)$  et  $p(x + dx, t) = P_0 + p_a(x + dx, t)$ . Les compressions/dilations sont aussi caractérisées par un changement local de masse volumique :  $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_a(x, t)$ . On suppose que la pression acoustique et que la variation de masse volumique sont très faibles en comparaison de la pression et la masse volumique statiques  $|p_a| \ll P_0$  et  $|\rho_a| \ll \rho_0$ .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide, on obtient :

$$\rho S dx \frac{dv_a}{dt} = S(P_0 + p_a(x, t)) - S(P_0 + p_a(x + dx, t)) \quad (3.2)$$

où  $v_a(x, t)$  désigne la vitesse particulière :  $v_a(x, t) = \frac{\partial u_a}{\partial t}$ . En faisant un développement de Taylor du terme  $p_a(x + dx, t)$ , cette expression se simplifie :

$$\rho \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (3.3)$$

Comme on suppose que les ondes acoustiques sont une perturbation de l'état de base, on peut

négliger tous les termes quadratiques :  $\rho_a \frac{dv_a}{dt} \ll \rho_0 \frac{dv_a}{dt}$  et  $|v_a \frac{\partial v_a}{\partial x}| \ll \frac{\partial v_a}{\partial t}$ , il reste :

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (3.4)$$

Cette équation est appelée **équation d'Euler linéarisée**.

La deuxième équation est celle de conservation de la masse. Pour cela, on écrit que la variation de la masse au cours du temps est égal au bilan des flux de masse à travers les faces en  $x$  et  $x + dx$  :

$$\frac{d(\rho S dx)}{dt} = \rho(x, t) S v_a(x, t) - \rho(x + dx, t) S v_a(x + dx, t) \quad (3.5)$$

après simplification (développement de Taylor du second membre) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \rho v_a}{\partial x} \quad (3.6)$$

En linéarisant :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial x} \quad (3.7)$$

C'est l'**équation linéarisée de conservation de la masse**. A ce stade, on a deux équations mais trois inconnues ( $\rho_a$ ,  $p_a$  et  $v_a$ ). On n'a pas encore pris en compte la réponse thermodynamique du milieu. Pour ce faire, on introduit le coefficient de compressibilité adiabatique :

$$\chi_s = \frac{-1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s \quad (3.8)$$

où  $s$  désigne l'entropie. Ce coefficient traduit la variation de volume relative  $\frac{\delta V}{V}$  produite si on exerce la pression  $\delta p$  à entropie constante ( $[\chi_s] = \text{Pa}^{-1}$ ) :  $\frac{\delta V}{V} = -\chi_s \delta p$ . Le signe moins est une convention qui permet au coefficient de compressibilité d'être une quantité positive car sous l'effet de la pression le volume diminue.

Si, on suppose que la variation de volume ne dépend que des variables thermodynamique  $P$  et  $s$ , on peut alors écrire :

$$V(P, s) = V(P_0, s_0) + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s p_a + \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_P s_a \quad (3.9)$$

$$V(P, s) = V_0 + dV \quad (3.10)$$

La variation de volume due au passage de l'onde acoustique s'écrit donc :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s p_a + \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_P s_a \quad (3.11)$$

En supposant que la propagation de l'onde acoustique dans un fluide parfait est un processus isentropique (cf partie suivante pour une justification plus poussée), on obtient :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s p_a \quad (3.12)$$

cette dernière expression peut s'exprimer en fonction du coefficient de compressibilité adiabatique :

$$dV = -V \chi_s p_a \quad (3.13)$$

Or, la variation de volume est reliée à la variation de masse volumique :

$$V_0 + dV = \frac{M}{\rho_0 + \rho_a} \quad (3.14)$$

Comme  $|\rho_a| \ll \rho_0$ , on peut faire un développement limité de la fonction  $1/(1 + \rho_a/\rho_0)$  :

$$V_0 + dV = \frac{M}{\rho_0(1 + \rho_a/\rho_0)} \approx \frac{M}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_0}\right) = V_0 - V_0 \frac{\rho_a}{\rho_0} \quad (3.15)$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{\rho_a}{\rho_0} = -\frac{dV}{V_0} \quad (3.16)$$

Cela permet de relier les variations de masse volumique et de pression acoustique :

$$\frac{\rho_a}{\rho_0} = \chi_s p_a \quad (3.17)$$

On peut combiner les trois relations précédentes, on obtient alors l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0 \quad (3.18)$$

où on a posé  $c_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}$ , la vitesse des ondes acoustiques dans un fluide dépend donc de la masse volumique du fluide et aussi de sa compressibilité.

Remarquons que la définition de  $c_0$  permet de réécrire la relation entre  $p_a$  et  $\rho_a$  plus simplement :

$$p_a = c_0^2 \rho_a \quad (3.19)$$

## Vitesse du son dans l'air

La propagation des ondes acoustiques est un processus adiabatique (entropie constante). Elle doit donc suivre la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = cste \quad (3.20)$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma = 1.4$  dans l'air). En différenciant cette équation on obtient :

$$V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0 \quad (3.21)$$

soit encore

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \quad (3.22)$$

Donc le coefficient de compressibilité adiabatique s'écrit :

$$\chi_s = \frac{1}{\gamma P} \quad (3.23)$$

et la vitesse du son est

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (3.24)$$

L'air peut être assimilé à un gaz parfait, son équation d'état s'écrit alors :

$$PV = nRT \quad (3.25)$$

avec  $n$  le nombre de môle et  $R = 8.31431 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits. En faisant apparaître la masse volumique, cette relation s'écrit :

$$P = \rho r T \quad (3.26)$$

avec  $r = R/m_{\text{air}}$  où  $m_{\text{air}} = n/M$  est la masse molaire de l'air ( $m_{\text{air}} = 28.96 \text{ g/mol}$  avec  $V = \rho M$ ).

Finalement, la vitesse du son dans l'air ne dépend que de la température :

$$c_0 = \sqrt{\gamma r T} \quad (3.27)$$

on trouve que la vitesse du son est égale à  $c_0 = 343.5 \text{ m s}^{-1}$  à  $T = 20^\circ \text{C}$  (Attention pour faire le calcul il faut utiliser les unités SI : kg pour les masses et K pour les températures). Il est important de retenir cet ordre de grandeur.

### 3.3 L'onde plane progressive harmonique

#### 3.3.1 La transformée de Fourier et les fonctions harmoniques

Petit rappel de maths sur les transformées de Fourier.

**Théorème :** On considère une fonction  $h(t)$  intégrable sur l'axe des réels, alors cette fonction admet une transformée de Fourier.

La transformée de Fourier directe est définie par :

$$\hat{h}(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.28)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{h}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.29)$$

Cette dernière relation montre que la fonction  $h(t)$  peut être vue comme une superposition de fonctions harmoniques ( $e^{-i\omega t}$ ) pondérées par les coefficients  $\hat{h}(\omega)$ .

La fonction  $\hat{h}(\omega)$  est souvent appelé **spectre**. La variable  $\omega$  est la variable associée à  $t$  dans la transformation, c'est **la pulsation**. Elle est reliée à **la fréquence** par la relation  $\omega = 2\pi f$ .

La transformée de Fourier permet donc d'exprimer une fonction sous une autre forme plus "pratique" à manipuler. Dans le cadre des ondes, on utilise beaucoup les fonctions "harmoniques" *i.e.* des fonctions de type cos ou sin. Cependant, il est souvent plus commode de travailler avec les complexes.

La transformée de Fourier n'est pas réservée qu'aux fonctions du temps. Elle se généralise à toutes les fonctions intégrables. Par convention, la transformée de Fourier d'une fonction de l'espace sera notée :

$$\hat{u}(k) = \mathcal{F}\{u(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-ikx} dx \quad (3.30)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk \quad (3.31)$$

où  $k$  est le **nombre d'onde**. Notons qu'on a pris une convention opposée sur le signe des exponentielles. La transformée de Fourier d'une fonction de 2 variables (en espace/temps) se généralise :

$$\phi(x, t) = A \int \int \hat{\phi}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega$$



### 3.3.2 L'onde progressive harmonique

On a vu qu'une onde progressive dans la direction des  $x$  croissants s'écrit :  $f(x - ct)$  où  $f$  est une fonction qui dépend du problème (des conditions initiales). Intéressons-nous au cas particulier où  $f$  est une fonction harmonique, on pose :

$$f(x) = A \exp(ikx) \quad (3.32)$$

$A$  est l'**amplitude**. Le nombre d'onde a la dimension de l'inverse d'une longueur :  $[k] = \text{rad/m}$ , on pose  $k = 2\pi/\lambda$ . En substituant  $k$  par  $2\pi/\lambda$ , on a

$$f(x) = A \exp\left(i \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Cette fonction est périodique, de période  $\lambda$  :  $f(x + \lambda) = f(x)$ .

Exprimons à présent  $f(x - ct)$  :

$$f(x - ct) = A \exp(ik(x - ct)) \quad (3.33)$$

en posant  $\omega = kc$ , on trouve :

$$f(x - ct) = A \exp(i(kx - \omega t)) \quad (3.34)$$

$\omega$  est la pulsation introduite précédemment. On a  $\omega = 2\pi f$  avec  $f$  la fréquence, ou encore  $\omega = 2\pi/T$  avec  $T$  la **période**.

On constate qu'une onde progressive harmonique a une double périodicité :

- en espace de période  $\lambda$ ,
- en temps de période  $T$ .

En effet,  $k$  et  $\omega$  jouent un rôle symétrique dans la relation 3.34 respectivement par rapport à  $x$  et  $t$ . De plus, les périodes spatiales et temporelles sont reliées par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (3.35)$$

qui montre que plus la longueur d'onde est grande, plus basse est la fréquence et inversement. Ceci est illustré à la figure 3.2

### 3.3.3 Relation de dispersion

On appelle **relation de dispersion**, la relation qui lie la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ . De manière générale, pour trouver la relation de dispersion, on cherche la solution du problème sous la forme d'une onde progressive harmonique.

La relation de dispersion des ondes acoustiques à 1D s'obtient en cherchant la solution de l'équation 4.9 sous la forme :  $p_a(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$ , on obtient alors :

$$\omega = kc_0. \quad (3.36)$$

Comme l'équation modélisant la propagation des ondes transverses sur la corde vibrante est aussi l'équation de d'Alembert, la relation de dispersion pour les ondes sur la corde est la même :  $\omega = kc_0$

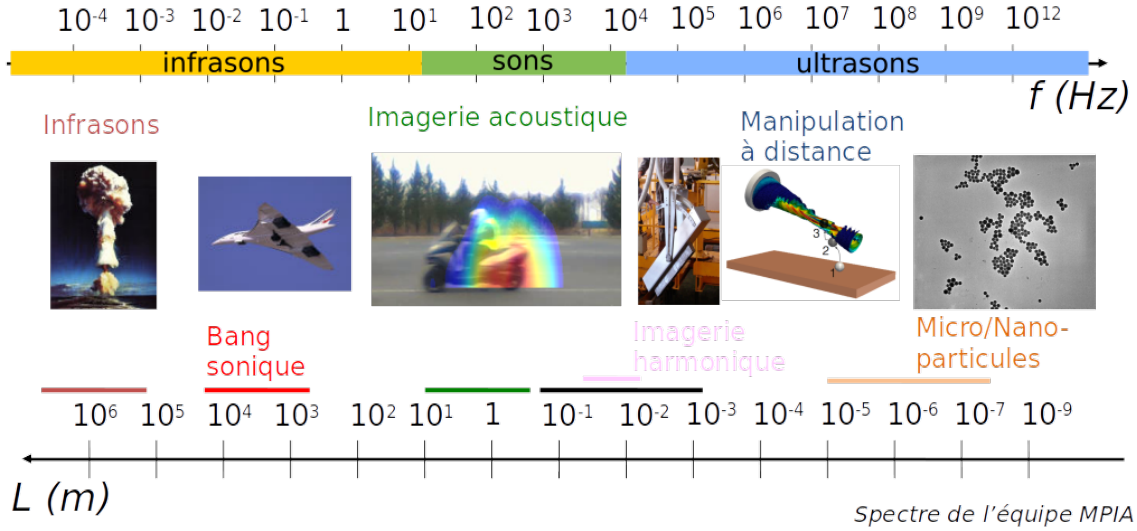


FIGURE 3.2 – Relation en fréquence et longueur d'ondes pour différents problèmes de propagation d'ondes acoustiques dans les fluides

### 3.3.4 La vitesse de phase

La **vitesse de phase** est la vitesse de propagation des plans équiphases d'une onde. Pour comprendre cette définition, revenons à l'expression de l'onde progressive harmonique :

$$p_a(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t)).$$

Avec cette écriture complexe,  $A$  est appelée amplitude de l'onde et  $(kx - \omega t)$  est sa phase (ou l'argument).

La figure 3.3 présente une onde harmonique se propageant vers les  $x$  croissants à deux instants proches mais différents :  $t$  et  $t + \Delta t$ . On voit que l'onde s'est légèrement décalée vers la droite : pendant la durée  $\Delta t$ , l'onde a parcouru la distance  $\Delta x$ . Pour exprimer la vitesse de propagation des plans équiphases de l'onde, on repère un point précis (par exemple un maximum ou un passage à zéro) et on exprime que deux points de l'onde avec la même phase doivent avoir la même amplitude :

$$p_a(x + \Delta x, t + \Delta t) = p_a(x, t)$$

Or

$$\begin{aligned} p_a(x + \Delta x, t + \Delta t) &= A \exp(i(k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t))) \\ &= A \exp(i(k\Delta x - \omega\Delta t)) \exp(i(kx - \omega t)) \\ &= \exp(i(k\Delta x - \omega\Delta t)) p_a(x, t) \end{aligned}$$

Cette relation n'est possible que si  $k\Delta x - \omega\Delta t = 2n\pi$  (ici, seule le cas  $n = 0$  est intéressant, si  $n \neq 0$  on suit deux points différents), c'est à dire si  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$ . La quantité  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  est homogène à une vitesse, c'est la vitesse à laquelle s'est propagé un point de l'onde (sa phase est restée constante).

De manière générale, on retiendra que la vitesse de phase se note  $c_\phi$  et vaut :

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (3.37)$$

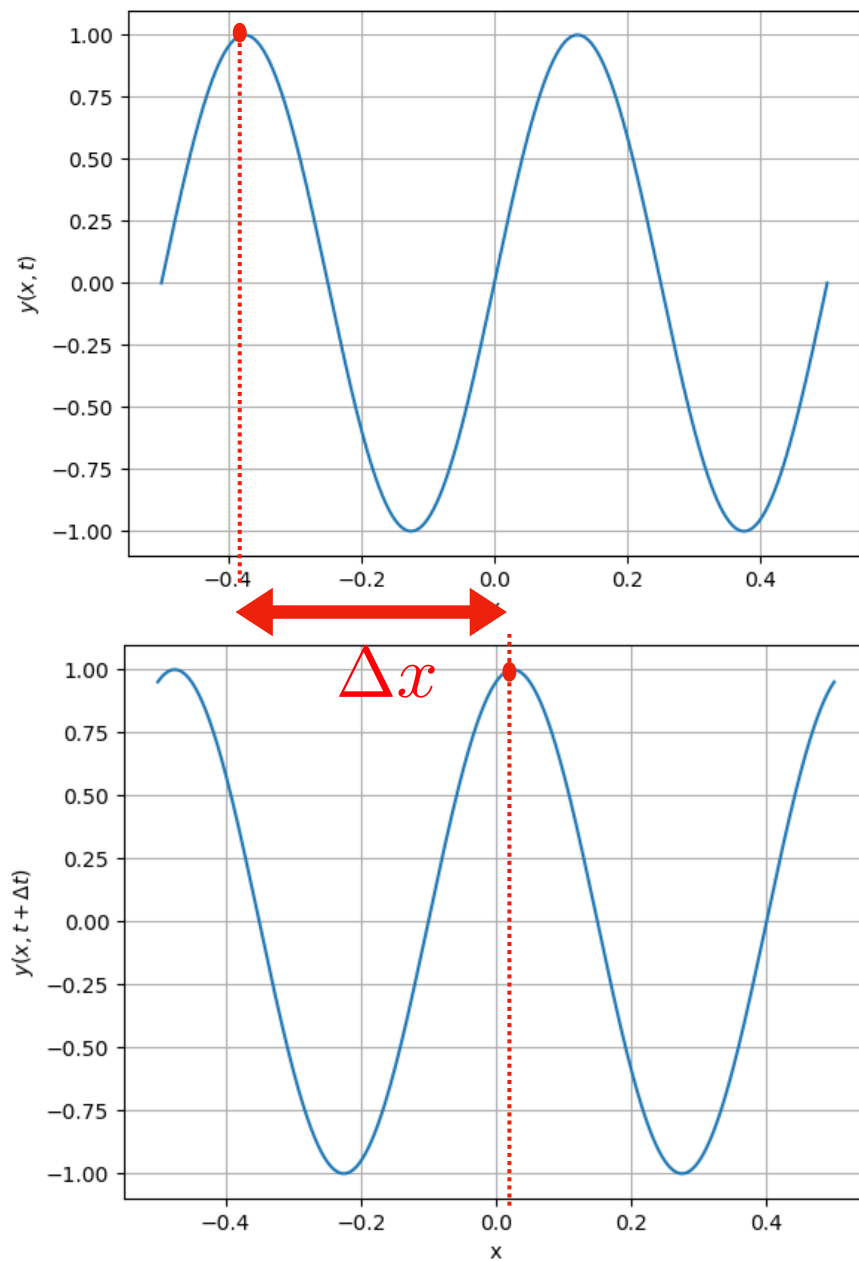


FIGURE 3.3 – Illustration du concept de vitesse de phase

Pour calculer la vitesse de phase, il faut donc connaître la relation de dispersion (cf 3.3.3). Pour le cas des ondes acoustiques dans les fluides parfaits et les ondes transverses sur une corde, on a  $c_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0$ , la vitesse de phase est confondue avec la vitesse de propagation des ondes dans le milieu et ne dépend pas de la fréquence ( $c_0$  est une constante). Ces ondes sont dites non dispersives par opposition aux ondes dispersives que nous verrons au chapitre suivant dont la vitesse de phase dépend de la fréquence.

## 3.4 Impédance caractéristique et vitesse particulière d'une onde acoustique

### 3.4.1 Impédance caractéristique

Reprenons la relation d'Euler linéarisée (Eq. 3.4) et introduisons la pression sous la forme d'une onde progressive harmonique :

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} &= -\frac{\partial p_a}{\partial x} \\ &= -ikAe^{i(kx-\omega t)}\end{aligned}$$

soit en intégrant par rapport au temps

$$\begin{aligned}v_a &= \frac{ikA}{i\omega\rho_0}e^{i(kx-\omega t)} \\ &= \frac{A}{\rho_0 c_0}e^{i(kx-\omega t)}\end{aligned}$$

A 1D, la vitesse particulière et la pression sont reliées par :

$$v_a(x, t) = \frac{p_a(x, t)}{Z_0} \quad (3.38)$$

où  $Z_0$  est l'impédance caractéristique du milieu (cette grandeur ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation). Attention, cette relation, vraie en 1D, ne se généralise pas à tous les types d'ondes en 3D (cf partie sur les solutions à 3D).

### 3.4.2 Vitesse particulière et vitesse de propagation

Les vitesses particulières et de propagation sont deux vitesses différentes. La première traduit la vitesse d'oscillation d'une particule fluide autour de sa position d'équilibre et la seconde traduit la vitesse de propagation des ondes donc du "mouvement d'ensemble". Les ordres de grandeur de ces deux vitesses sont aussi assez différents. En repartant de la relation d'impédance établie dans le paragraphe précédent, on a :

$$|v_a| = \frac{|p_a|}{\rho_0 c_0} = \frac{|c_0^2 \rho_a|}{\rho_0 c_0} = c_0 \frac{|\rho_a|}{\rho_0}$$

or, pour pouvoir linéariser les équations, on a supposé que  $|\rho_a| \ll \rho_0$ , par conséquent :

La vitesse de propagation des ondes acoustiques est bien supérieure à la vitesse particulaire :

$$|v_a| \ll c_0.$$

## 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons vu que les ondes acoustiques 1D doivent satisfaire l'équation de d'Alembert comme les ondes transverses sur une corde (cf chapitre 2). La solution générale de l'équation de d'Alembert peut être particularisée au cas important des ondes harmoniques. Dans ce cas elle prend la forme 3.34. Cette forme est importante car nous considérerons qu'un système admet une solution de type "ondes" si l'onde progressive harmonique est solution de ce problème. Pour cela la démarche de mise en équation sera la même que celle entreprise jusqu'à présent : (1) identifier un état de base stable (ex : corde sans perturbation, milieu fluide au repos), (2) identifier les petites perturbations susceptibles d'exister (ex : ondes transverses sur la corde, compression/dilatation dans le fluide), (3) écrire les équations générales et les linéariser autour de l'état d'équilibre (on obtient l'équation des ondes, jusqu'à maintenant on a obtenu à chaque fois l'équation de d'Alembert mais il existe d'autres équations des ondes), (4) on injecte l'onde progressive harmonique dans l'équation des ondes et on cherche la relation de dispersion (relation entre  $k$  et  $\omega$ ). Si la relation de dispersion existe, cela montre que l'onde progressive harmonique existe et que le système admet des ondes. On peut alors étudier ces propriétés comme la vitesse de phase vu dans ce chapitre mais également d'autres propriétés qui sont présentées dans les chapitres suivants (vitesse de groupe, vitesse d'énergie ...).

# Chapitre 4

## Ondes 3D : exemple des ondes acoustiques

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre partie, on considère une approche plus générale que celle du chapitre 3. Partant des équations de conservation de la mécanique des fluides, on introduit les ondes acoustiques comme une perturbation de l'état de base du fluide et on linéarise les équations autour de cet état d'équilibre pour obtenir l'équation des ondes 3D. On généralise ensuite le concept d'onde progressive harmonique à celui d'onde plane progressive harmonique. Enfin, on introduit un nouveau type d'onde dont l'amplitude varie en fonction de la distance de propagation : l'onde sphérique.

### 4.2 Modélisation de la propagation 3D des ondes acoustiques dans les fluides parfaits

#### Équations du mouvement en fluide parfait

Dans un premier temps, nous rappelons les équations de bilan pour la quantité de mouvement, pour la masse et pour l'énergie dans le cas d'un fluide parfait. En un point  $\underline{x}$ , à l'instant  $t$ , on note  $\rho(\underline{x}, t)$  la masse volumique ( $[\rho]=\text{kg m}^{-3}$ ),  $p(\underline{x}, t)$  la pression ( $[p]=\text{Pa}$ ),  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  la vitesse ( $[\underline{v}]=\text{m s}^{-1}$ ) et  $T(\underline{x}, t)$  la température ( $[T]=\text{K}$ ). En outre, on appelle  $u$  son énergie interne spécifique (i.e. par unité de masse,  $[e]=\text{J kg}^{-1}$ ) et  $s$  son entropie spécifique ( $[s]=\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

— Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0. \quad (4.1)$$

— Équation de conservation de la quantité de mouvement (ou équation d'Euler) :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p. \quad (4.2)$$

où  $D\underline{a}/Dt$  est la dérivée particulaire :

$$D\underline{a}/Dt = \partial \underline{a} / \partial t + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a}$$

— Pour un fluide parfait, l'équation de bilan d'énergie est :

$$\frac{Ds}{Dt} = 0. \quad (4.3)$$

- L'équation d'état s'obtient à partir de l'identité fondamentale de la thermodynamique reliant l'énergie interne spécifique<sup>1</sup>, l'entropie spécifique, la température, la pression et la masse volumique :

$$de = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad (4.4)$$

#### Ces 4 équations définissent l'état de base du fluide

Remarque : la relation 4.4 permet de définir, en fonction des variables d'état  $(\rho, s)$  :

- la température :  $T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_\rho = T(\rho, s)$
- la pression :  $p = \rho^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_s = p(\rho, s)$ .

#### Perturbations : les ondes acoustiques

On suppose que les ondes acoustiques sont une perturbation de l'état de base du fluide.

La perturbation acoustique est notée avec l'indice  $a$  :

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}, t) &= \rho_0 + \rho_a(\underline{x}, t) \\ p(\underline{x}, t) &= p_0 + p_a(\underline{x}, t) \\ T(\underline{x}, t) &= T_0 + T_a(\underline{x}, t) \\ s(\underline{x}, t) &= s_0 + s_a(\underline{x}, t) \\ \underline{v}(\underline{x}, t) &= \underline{v}_a(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

avec  $|\phi_a(\underline{x}, t)| \ll |\phi(\underline{x}, t)|$  où  $\phi = \{\rho, p\}$

#### Linéarisation des équations

##### Equation de conservation de la masse

En injectant les expressions précédentes dans l'équation de conservation de la masse (eq. 4.1), il vient :

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_a)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_a)\underline{v}_a) = 0.$$

On ne garde que les termes d'ordre 1

La masse volumique au repos :

- ne dépend pas du temps :  $\partial \rho_0 / \partial t = 0$
- ne dépend pas de l'espace : fluide homogène,  $\underline{\nabla} \rho_0 = 0$ ,

On obtient l'équation de conservation de la masse linéarisée :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_a = 0. \quad (4.5)$$

##### Equation d'Euler

Les perturbations sont injectées dans l'équation d'Euler (eq. 4.2) :

$$(\rho_0 + \rho_a) \left( \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} + (\underline{v}_a \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}_a \right) = -\underline{\nabla}(p_0 + p_a).$$

Là aussi, on ne garde que les termes d'ordre 1. Par conséquent, on néglige les termes d'ordre 2 :

- $(\underline{v}_a \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}_a \ll 1$  (terme convectif)
- $\rho_a \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} \ll 1$ .

---

1. spécifique signifie par unité de masse

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\nabla p_a. \quad (4.6)$$

D'après la définition de la pression acoustique

$$p(\rho, s) = p(\rho_0 + \rho_a, s_0 + s_a) \approx p(\rho_0, s_0) + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_0} \rho_a + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho_0} s_a$$

Or d'après l'équation de l'énergie  $s_a = cst$ . Or, si on suppose qu'il n'y a pas d'onde acoustique dans le domaine à l'instant initial  $s_a(x, t=0) = 0$ , alors  $cst = 0$  et  $s_a(x, t) = 0$ . Comme on a posé  $p(\underline{x}, t) = p_0 + p_a(\underline{x}, t)$ , on en déduit que :

$$p_a = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_0} \rho_a.$$

### Équation d'état - célérité des ondes

L'analyse dimensionnelle de  $\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_0}$  montre que cette quantité est homogène au carré d'une vitesse :

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_0} \right] = \frac{p_a}{\rho_a} = \frac{[N.m^{-2}]}{[kg.m^{-3}]} = \frac{[kg.m.s^{-2}.m^{-2}]}{[kg.m^{-3}]} = \frac{[m^2]}{[s^2]}$$

On pose alors :  $c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s_0}$

Notons, que même si  $c_0$  est homogène à une vitesse, nous n'avons pas encore formellement montré à quelle vitesse cela correspond. Nous verrons plus tard qu'il s'agit de la vitesse de propagation du son.

Dans un fluide homogène, les perturbations en pression ( $p_a$ ) et en masse linéique ( $\rho_a$ ) sont reliées par la relation :

$$p_a = c_0^2 \rho_a \quad (4.7)$$

C'est bien le même résultat que celui établi en 1D.

### L'équation des ondes

L'équation d'état permet de remplacer la perturbation en masse volumique par la perturbation en pression dans l'équation linéarisée de conservation de la masse :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{v}_a = 0.$$

On dérive ensuite cette équation par rapport au temps :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{v}_a = 0.$$



En commutant les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\underline{\nabla}$ , cette équation devient :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \rho_0 \underline{\nabla} \cdot \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} = 0$$

En substituant l'expression de  $\partial \underline{v}_a / \partial t$  donnée par l'équation d'Euler linéarisée (eq. 4.6), on trouve l'équation des ondes scalaire à trois dimensions :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0.$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Rmq : On peut établir la même équation de propagation pour les autres champs.

La propagation des ondes acoustiques dans les fluides parfaits est régie par l'équation des ondes 3D :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0. \quad (4.8)$$

Si on suppose que le champ ne varie pas dans les directions  $y$  et  $z$ , on retrouve l'équation de d'Alembert obtenue précédemment pour la corde et la mise en équation unidimensionnelle :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} = 0. \quad (4.9)$$

## 4.3 Solutions de l'équation des ondes à 3D

A trois dimensions, on ne peut pas généraliser la méthode utilisée avec l'équation des ondes unidimensionnelle pour déterminer la solution générale. Cependant, il existe plusieurs solutions. Dans ce qui suit, nous allons introduire, l'onde plane progressive, l'onde plane progressive harmonique et l'onde sphérique.

### 4.3.1 L'onde plane progressive

L'onde plane progressive s'écrit :

$$p_a(\underline{x}, t) = f\left(t - \frac{\underline{x} \cdot \underline{n}}{c_0}\right), \quad (4.10)$$

$f$  est une fonction scalaire quelconque,  $\underline{n}$  est un vecteur unitaire appelé vecteur direction de propagation. En injectant cette solution (eq. 4.10) dans l'équation des ondes à trois dimensions (eq. ??), on vérifie aisément que l'onde plane est solution de l'équation des ondes.

Ce type d'onde possède des propriétés intéressantes. Tout d'abord, la solution dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation est identique en tout point et ne dépend que du temps

(Fig. 4.1). L'appellation d'onde plane est due à cette propriété. Ensuite, on peut déduire la pression dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation à partir de la pression dans un autre plan perpendiculaire à la direction de propagation. Pour cela, on applique à la pression un déphasage égal à  $\Delta t = d/c_0$ , où  $d$  est la distance séparant les deux plans<sup>2</sup>.

Si on se déplace, en suivant l'onde à la vitesse  $c_0$ , alors la pression est identique en tous points (onde plane) et ne dépend pas du temps : on mesure à chaque instant la même pression. On peut traduire mathématiquement cette propriété par la relation :

$$p_a(t, \underline{x} = \underline{x}_0 + c_0 t \underline{n}) = cste. \quad (4.11)$$

Cette relation définit une surface (dans notre cas un plan) où la phase est constante, appelée front d'onde. Toute droite parallèle à  $\underline{n}$  et par conséquent, perpendiculaire au front d'onde, est appelée rayon acoustique.

Comme pour l'onde progressive, il est possible d'établir une relation simple liant la pression à la vitesse. Pour cela, on utilise l'équation d'Euler linéarisée (eq. ??) dans laquelle on injecte l'expression de  $p_a$  pour une onde plane (eq. 4.10) :

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = \frac{n}{c_0} f'. \quad (4.12)$$

En intégrant cette relation par rapport au temps, on trouve la même relation d'impédance que pour l'onde progressive :

$$v_a = \frac{p_a}{Z} n. \quad (4.13)$$

La relation d'impédance dans le cas d'une onde plane progressive montre que d'une part la vitesse est proportionnelle à la pression et d'autre part, la vitesse est dirigée selon  $\underline{n}$ , c'est à dire dans la direction de propagation, on dit alors que c'est une onde longitudinale.

Pour conclure, remarquons que l'onde plane n'a pas de réalité physique. En effet, il est difficile d'envisager un tel type d'onde, d'extension spatiale infinie ! Cependant, l'onde plane a un intérêt important car elle permet de fabriquer des modèles simples et elle permet également de décomposer les solutions plus complexes comme une combinaison d'ondes planes.

### 4.3.2 L'onde plane progressive harmonique

L'onde plane progressive du paragraphe précédent peut s'écrire comme une fonction harmonique et généralise alors l'onde progressive harmonique introduite en 1D (partie 3.3.2) :

$$p_a(\underline{x}, t) = \tilde{P} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}. \quad (4.14)$$

où  $\underline{k} = k \underline{n}$  est le vecteur d'onde et  $k = \omega/c_0$  est le nombre d'onde ( $[k] = rad/m$ ).

Dans le cas d'une onde plane progressive harmonique se déplaçant dans la direction  $\underline{n}$  :  $p_a(\underline{x}, t) = \tilde{P} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}$ , la pression et la vitesse vérifient toujours la relation d'impédance :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_a}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_a \\ &= \frac{-i \underline{k} \tilde{P} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}}{\rho_0} \\ v_a &= \frac{k \underline{n} \tilde{P} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}}{\omega \rho_0} \\ v_a &= \frac{p_a}{Z} \underline{n}. \end{aligned}$$

---

2. Soit  $D$  une droite portant le vecteur direction de propagation et coupant le plan P1 au point  $O1 = (x_1, y_1, z_1)$  et le plan P2 au point  $O2 = (x_2, y_2, z_2)$ , la distance  $d$  vaut alors  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

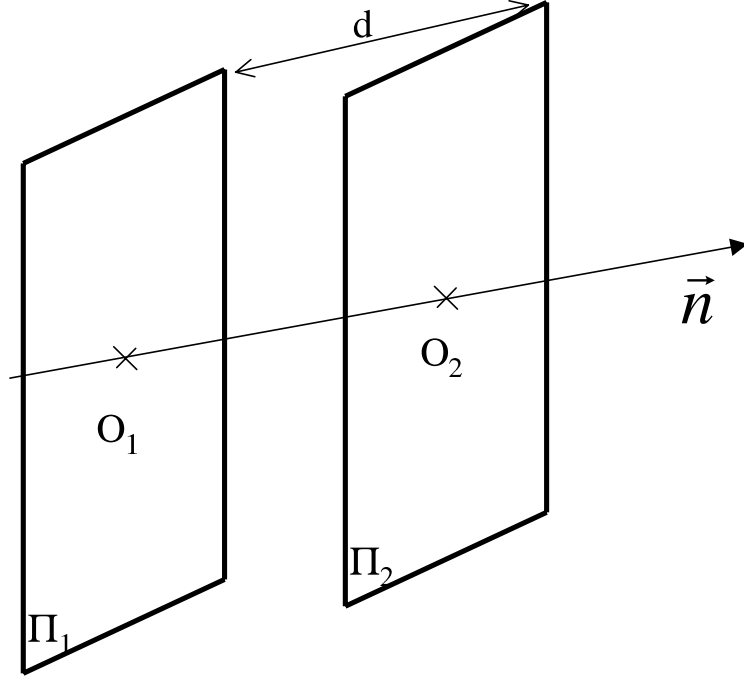


FIGURE 4.1 – Propagation d’une onde plane progressive

Comme en 1D, cette analyse est un cas particulier (une seule onde harmonique) généralisable avec le formalisme des transformées de Fourier<sup>3</sup> :

$$\tilde{P}(\underline{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(\underline{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.15)$$

$$p_a(\underline{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\underline{x}, \omega) e^{-i2\pi f t} df. \quad (4.16)$$

La définition de la transformée de Fourier inverse illustre le fait que la pression dans le domaine temporel est une superposition (une somme) d’ondes harmoniques de différentes fréquences ( $e^{-i\omega t}$ ).

Dans le domaine fréquentiel, l’équation des ondes est ”transformée” par l’intermédiaire de la transformation de Fourier en :

$$\Delta \tilde{P} + k^2 \tilde{P} = 0, \quad (4.17)$$

c’est l’équation de Helmholtz.

### 4.3.3 L’onde sphérique

Lorsqu’on étudie des sources ponctuelles, il est plus commode de travailler en coordonnées sphériques plus adaptées à la géométrie du problème. En coordonnées sphériques, le Laplacien vaut :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (4.18)$$

3. ATTENTION : le signe de l’exponentielle est une convention, dans le cours de Traitement Numérique du Signal, c’est la convention opposée qui est utilisée.

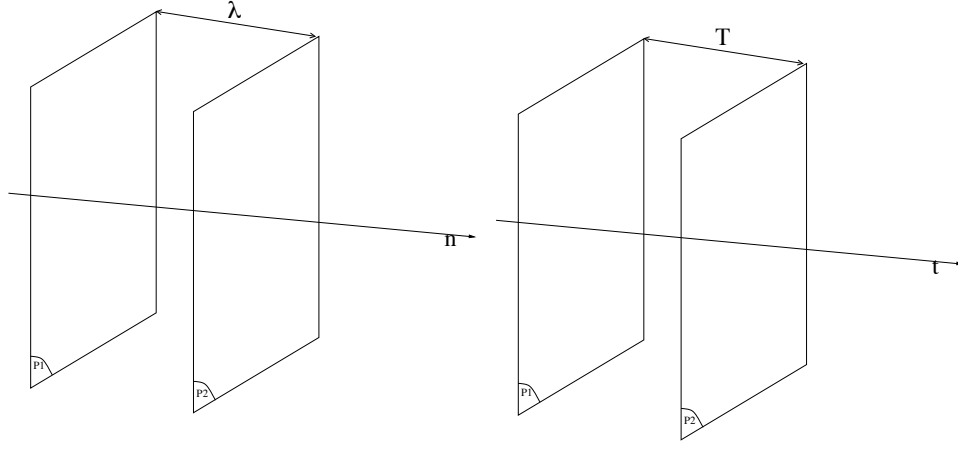


FIGURE 4.2 – Illustration de la périodicité en espace et en temps pour une onde plane harmonique

On s'intéresse dans ce paragraphe à des ondes avec une symétrie sphérique (dépendance uniquement en  $r$ ). Le Laplacien se réduit au premier terme et l'équation des ondes en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0 \quad (4.19)$$

En développant la dérivée par rapport à  $r$ , il vient :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial p_a}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0$$

En multipliant cette équation par  $r$  et en remarquant que  $2 \frac{\partial p_a}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2}$ , on trouve l'expression classique de l'équation des ondes en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 r p_a}{\partial t^2} = 0 \quad (4.20)$$

La structure de cette équation est formellement identique à celle de l'équation d'onde unidimensionnelle étudiée précédemment (cf ??). La seule différence est que c'est la quantité  $r p_a$  qui vérifie cette équation. On connaît la forme des solutions :

$$r p_a = f(t - r/c_0) + g(t + r/c_0). \quad (4.21)$$

Par conséquent, la pression acoustique est :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c_0) + \frac{1}{r} g(t + r/c_0). \quad (4.22)$$

L'interprétation physique de cette solution est similaire à celle de l'onde progressive. La fonction  $f$  décrit la propagation d'une onde vers les  $r$  croissants ( $r \rightarrow \infty$ ), c'est une onde divergente. Le terme en  $1/r$  rend compte de la décroissance du champ en fonction de la distance à l'origine. Les fronts d'onde sont alors des sphères de plus en plus grandes et les rayons acoustiques sont les droites normales à ces surfaces. La fonction  $g$  décrit la propagation d'une onde vers les  $r$  décroissants (jusqu'à  $r = 0$ ), c'est une onde convergente. Le terme en  $1/r$  rend compte de l'augmentation de l'amplitude au fur et à mesure que l'onde se rapproche de l'origine. En  $r = 0$ , il y a une singularité, toutes les parties de l'onde convergent en ce point et l'amplitude attendue est infinie ! Ceci est bien sûr physiquement impossible : on est dans un cas de figure où la modélisation adoptée n'est plus valable ! Dans le cas

d'une onde divergente (*i.e.* une source ponctuelle en  $r = 0$  et pas de source à l'infini), la pression se réduit à :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c_0), \quad (4.23)$$

on peut alors calculer la vitesse acoustique à partir de l'équation d'Euler généralisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} = -\underline{\nabla} \left( \frac{1}{r} f(t - r/c_0) \right). \quad (4.24)$$

Dans le cas de la symétrie sphérique en coordonnées sphériques, le gradient se réduit à  $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r$ , par conséquent :

$$\frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} = \left( \frac{f}{\rho_0 r^2} + \frac{f'}{r \rho_0 c_0} \right) \underline{e}_r. \quad (4.25)$$

En intégrant cette expression, on trouve la vitesse acoustique :

$$\underline{v}_a = \left( \frac{F}{\rho_0 r^2} + \frac{f}{r Z} \right) \underline{e}_r. \quad (4.26)$$

où  $F$  est la primitive de la fonction  $f$ . Cette expression est différente de celles obtenues pour l'onde progressive et l'onde plane. Cependant, lorsque  $r$  est très grand ( $r \rightarrow \infty$ ), le premier terme est négligeable par rapport au second et on retrouve une expression formellement identique à la relation d'impédance pour une onde plane progressive. En effet, si  $r \rightarrow \infty$ , localement on peut considérer le front d'onde comme plan et assimiler alors l'onde sphérique à une onde plane.

Comme nous l'avons fait pour l'onde plane, il est aussi possible de caractériser un peu plus le problème et d'introduire la notion d'onde sphérique harmonique. Nous ne traitons pas explicitement ce cas, mais nous y reviendrons au travers d'exemples dans la suite.

## 4.4 Conclusions

Ce chapitre contient la modélisation 3D des ondes acoustiques. A travers cet exemple particulier, on constate que l'équation de d'Alembert peut se généraliser à 3D (cf eq. 4.8). Il n'esite alors plus de solution générale à cette équation mais en s'inspirant des résultats obtenus en 1D on peut trouver des solutions comme l'onde plane ou l'onde sphérique.

# Chapitre 5

## Ondes longitudinales et transverses : propagation d'ondes élastiques dans un solide isotrope et élastique

### 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, un seul type d'onde par système a été obtenu. Dans ce chapitre, on montre que plusieurs type d'onde avec des polarisations différentes peuvent coexister dans un même système. Le système modèle choisi est le solide isotrope et élastique. Dans la première partie dévolue à la mise en équation, il est montré que l'équation que soit satisfaire le déplacement est l'équation de Navier. Cette équation peut se découpler en deux équations des ondes régissant la propagation d'onde longitudinales d'une part et d'ondes transverses d'autres part.

### 5.2 Mise en équation

Dans un solide élastique et isotrope, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f}$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

avec

- $\underline{u}(x, t)$  le vecteur déplacement ( $\underline{x}_t = \underline{X}_0 + \underline{u}$ , où  $\underline{X}_0$  est la position de référence et  $\underline{x}_t$  la position après déformation),
- $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes,
- $\underline{f}$  les efforts volumiques agissant sur le système (dans la suite on suppose que la contribution des efforts volumiques est négligeable :  $\underline{f} \approx \underline{0}$ )

La loi de Hooke relie le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  au tenseur des déformations linéarisées  $\underline{\epsilon}$ .  
Pour un solide élastique et isotrope :

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{tr} \underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les constantes de Lamé.

Les constantes de Lamé sont reliées au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par les relations :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}.\end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation de propagation, on injecte la loi de Hooke dans la relation obtenue avec le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \text{div} [\lambda(\text{tr} \underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}]$$

ou encore :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

Cette expression relie le champ de déplacement au champ des déformations. Les déformations peuvent être exprimées en fonction du déplacement au travers de la définition du tenseur des déformations linéarisées :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En injectant cette relation dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\end{aligned}$$

ou encore sous forme intrinsèque :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 \underline{u} \quad (5.1)$$

C'est l'**équation de Navier**. Cette équation régit la propagation des ondes dans les solides élastiques et isotropes. Remarquons que pour obtenir cette équation, nous avons suivi le même schéma que précédemment :

- Choix d'un état de base (ici le solide élastique isotrope sans déformation et sans précontrainte)
- Choix d'une grandeur subissant la perturbation (ici  $\underline{u}$  tel que  $|\underline{u}| \ll 1$ )

Ces hypothèses permettent d'utiliser :

- le tenseur des déformations linéarisées
- la loi de Hooke (version linéarisée de la relation contraintes-déformations, normalement non linéaire).

### 5.2.1 Relation de dispersion

La relation de dispersion s'obtient en injectant une solution de type onde plane progressive harmonique dans l'équation de Navier 5.1

$$\underline{u} = \underline{U} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)},$$

où  $\underline{U}$  est l'amplitude de l'onde harmonique, remarquons qu'il s'agit ici d'un vecteur.

Il vient :

$$\rho \omega^2 \underline{U} = (\lambda + \mu) (\underline{U} \cdot \underline{k}) \underline{k} + \mu |\underline{k}|^2 \underline{U} \quad (5.2)$$

En faisant le produit scalaire avec  $\underline{k}$ , on obtient la relation de dispersion :

$$(\underline{U} \cdot \underline{k}) (\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu) |\underline{k}|^2) = 0$$

### 5.2.2 Vitesses de phases

Pour satisfaire la relation de dispersion, il y a deux possibilités :

1.  $\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) |\underline{k}|^2$ ,
2.  $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$ .

Les solutions de l'équation  $\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) |\underline{k}|^2$ , sont :

$$\omega = \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} |\underline{k}|$$

Les solutions associées à  $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$ , se trouvent en injectant cette relation dans la relation de dispersion (Eq. 5.2) :

$$\rho \omega^2 \underline{U} = \mu |\underline{k}|^2 \underline{U}$$

soit :

$$\omega = \pm \sqrt{\mu/\rho} |\underline{k}|$$

On voit qu'il y a plusieurs vitesses de phase ( $c_\phi = \omega/k$  associées à la propagation d'ondes dans un solide élastique isotrope :

- $c_{\phi_1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$
- $c_{\phi_2} = \sqrt{\mu/\rho}$

Les ondes ayant une vitesse de phase  $c_{\phi_1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  doivent vérifier l'égalité  $\underline{U} = (\underline{U} \cdot \underline{k}) \underline{k} / |\underline{k}|^2$ , donc la direction du déplacement  $\underline{U}$  est colinéaire à la direction de l'onde  $\underline{k}$  : ce sont des **ondes longitudinales**, on notera  $c_{\phi_1} = c_L$ .

Les ondes ayant une vitesse de phase  $c_{\phi_2} = \sqrt{\mu/\rho}$  doivent vérifier l'égalité  $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$ , donc la direction du déplacement  $\underline{U}$  est perpendiculaire à la direction de l'onde  $\underline{k}$  : ce sont des **ondes transverses**, on notera  $c_{\phi_2} = c_T$ .

Par conséquent, dans les solides élastiques, les ondes peuvent être longitudinales ou transverses. Généralement, on a la supersposition des deux types d'ondes. Il est important de remarquer que les ondes longitudinales se propagent toujours plus vites que les ondes transverses puisque  $c_L > c_T$ .

L'équation de Navier décrit le déplacement général dans un solide élastique isotrope (superposition des ondes longitudinales et transverses). Dans le volume, on peut trouver une équation pour chaque type d'onde.

Pour cela on décompose  $\underline{u}$  en une partie longitudinale et une partie transverse :

$$\underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_T$$



On peut écrire ces 2 composantes comme dérivant chacune d'un potentiel, respectivement scalaire et vectoriel :

$$\underline{u}_L = \underline{\nabla}\phi \quad \text{et} \quad \underline{u}_T = \underline{\nabla} \times \underline{\psi}$$

avec les relations d'algèbre vectorielle

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \cdot = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \cdot) = 0$$

On injecte la décomposition en potentiels scalaire et vectoriel dans l'équation de Navier

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 \underline{u} \\ \rho \frac{\partial^2 \underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\psi}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\psi})) + \mu \nabla^2 (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\psi}) \\ \rho \frac{\partial^2 \underline{\nabla}\phi}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 \underline{\nabla} \times \underline{\psi}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \underline{\nabla}(\nabla^2 \phi) + \mu \nabla^2 \underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla}^2 (\underline{\nabla} \times \underline{\psi}) \end{aligned}$$

d'où

$$\underline{\nabla} \left[ \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi \right] + \underline{\nabla} \times \left[ \rho \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \underline{\psi} \right] = 0$$

et donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi = 0, \\ \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{\psi} = 0. \end{cases}$$

On trouve deux équations des ondes (1 scalaire et 1 vectorielle) avec 2 vitesses de propagation différentes (et égales à celles trouvées précédemment). Ces deux équations peuvent être ré-exprimées en fonction des déplacements longitudinaux et transverses :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} - c_L^2 \Delta u_L = 0, \\ \frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} - c_T^2 \Delta u_T = 0. \end{cases}$$

On trouve deux équations des ondes avec 2 vitesses différentes (et égales à celles trouvées précédemment).

La figure 5.1 illustre la propagation d'ondes longitudinales et transverses dans un solide isotrope. Les ondes ont été générées par un point source à la surface du solide. On voit clairement deux types d'ondes (non dispersives) se propager les ondes rapides (longitudinales) et les ondes lentes (transverses) car les ondes longitudinales se propagent à la vitesse  $c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et les ondes transverses se propagent à la vitesse  $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} < c_L$ . Dans le volume (loin des frontières), les ondes L et T sont découplées. Près de la surface les ondes ne sont plus découplées et se combinent pour donner des ondes de surface (cf chapitre onde de surface).

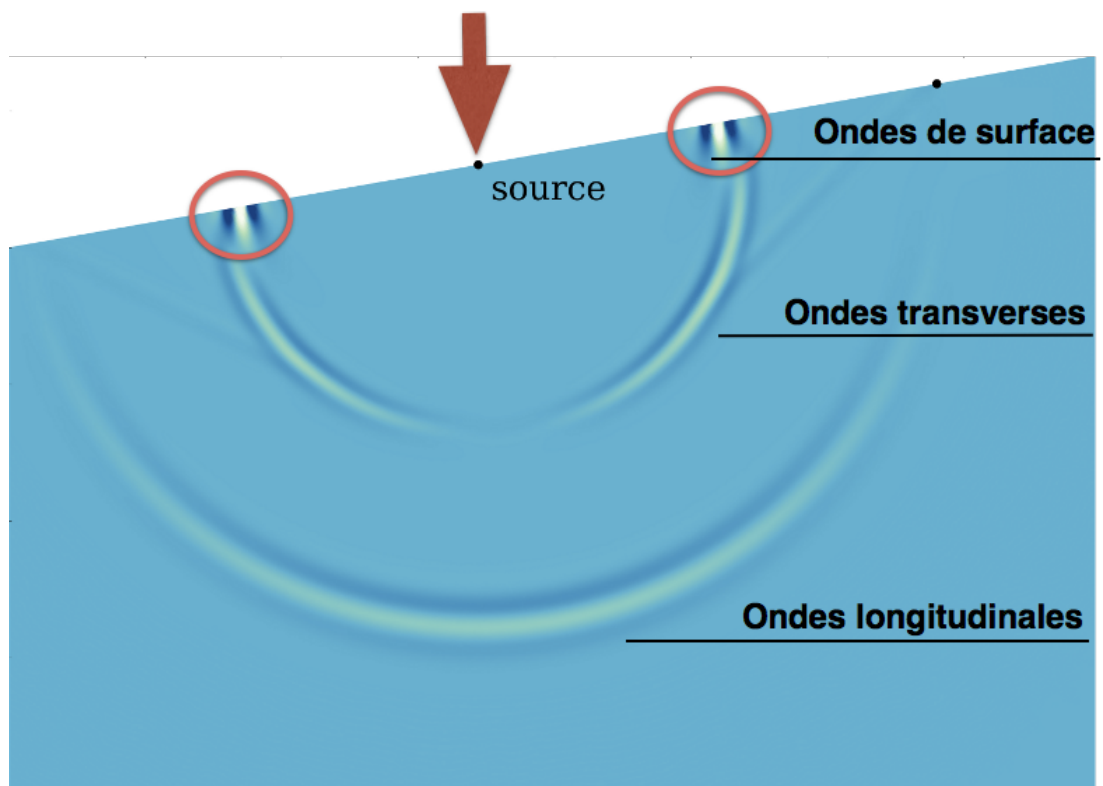


FIGURE 5.1 – Champ de déplacement dans un solide isotrope généré par une source ponctuelle.

# Chapitre 6

## La dispersion : propagation d'ondes de gravité à la surface d'un fluide

### 6.1 Introduction

Ce chapitre a comme objectif de discuter le phénomène de dispersion. Comme il sera vu dans le chapitre, la dispersion est la capacité pour certaines ondes de se propager plus ou moins vite en fonction de leur fréquence (ou de manière équivalente, de leur longueur d'onde). Dans les chapitres précédents, seules des ondes non dispersives (avec une vitesse de phase qui ne dépend pas de la fréquence) ont été considérées. Pour illustrer ce concept, nous allons étudier la propagation des ondes de gravité plus communément appelée **vagues**.

### 6.2 Mise en équation

Les étapes de la mise en équations sont analogues à celles déjà mis en oeuvre pour les autres types d'ondes :

1. choisir un état de base (le fluide au repos),
2. choisir les perturbations (le potentiel des vitesses et la hauteur de vagues),
3. Injecter les perturbations dans les équations de l'état de base et linéariser les équations ainsi obtenues.

#### 6.2.1 Description du problème

La configuration étudiée est illustrée à la figure 6.1, on note :

- $y$  la hauteur d'eau (au repos la hauteur d'eau est  $h$ ),
- en  $y = 0$ , le fond est supposé rigide,
- $x$  est la direction de propagation des vagues,

On cherche  $\eta(x, t)$  la hauteur des vagues :

$$y(x, t) = h + \eta(x, t)$$

.

#### 6.2.2 Hypothèses de l'étude

L'écoulement est supposé

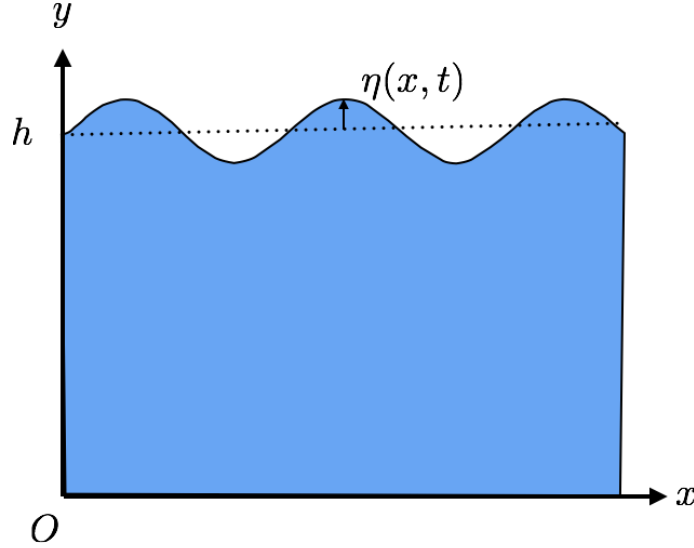


FIGURE 6.1 – Configurations géométrique pour l'étude des vagues

— incompressible :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0,$$

— irrotationnel :

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{0},$$

— on néglige la viscosité, l'équation du mouvement du fluide (bilan de quantité de mouvement ou Navier-Stokes) s'écrit :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p + \rho_0 \underline{g}.$$

avec :

- $\underline{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  la vitesse du fluide avec respectivement  $(u, v)$  les composantes du vecteur vitesse,
- $p(x, y)$  la pression dans le fluide,
- $\rho_0$  la masse volumique dans le fluide (supposée constante),
- $\underline{g}$  l'accélération de la pesanteur.

### 6.2.3 Etat de base

#### A l'intérieur du fluide

D'après les hypothèses, l'écoulement est irrotationnel, on introduit  $\phi(x, t)$  le potentiel des vitesses tel que

$$\underline{v} = \underline{\nabla} \phi$$

Par ailleurs, l'écoulement est incompressible, on a donc :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \phi = \Delta \phi = 0$$

C'est l'équation de Laplace qui est valable dans le fluide ( $x \in ]-\infty, +\infty[$  et  $y \in [0, h]$ ).

On cherche à présent à exprimer les conditions aux limites.

#### Conditions aux limites

*Condition au fond*

Le fond de l'eau ( $y = 0$ ) est supposé rigide. Par conséquent, la composante normale de la vitesse doit être nulle :

$$\underline{v}(x, y = 0, t) \cdot \underline{n} = v(x, y = 0, t) = 0.$$

On en déduit le potentiel des vitesses au fond de l'eau :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

*Condition à la surface*

On part de l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \right) + \nabla p + \rho_0 \underline{g} &= 0, \\ \rho_0 \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \underline{v}^2 \right) + \nabla p + \rho_0 \underline{g} &= 0, \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \underline{v}^2 + \frac{\nabla p}{\rho_0} + \underline{g} &= 0, \\ \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{v}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gy \right) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la relation suivante est vraie le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{v}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gy = Cste$$

C'est la relation de Bernoulli.

A la surface et sans perturbation, on a  $\underline{v} = \underline{0}$ ,  $y = h$  et  $p = p_0$  :

$$\frac{p_0}{\rho_0} + gh = Cste$$

Cela permet de réécrire la relation de Bernoulli, à la surface avec perturbations, sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{v}^2 + \frac{(p_0 - p_0)}{\rho_0} + g(y - h) = 0$$

et donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{v}^2 + g\eta = 0$$

Attention cette relation dépend de 3 variables, nous avons besoin d'une relation supplémentaire.

*Condition cinématique*

On part de la définition de  $\eta$  et on la dérive pour obtenir la vitesse :

$$\frac{d\eta(x, t)}{dt} = \frac{dy - h}{dt} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=surf} = v(x, y = surf, t)$$

La dérivée d'une fonction à deux variables  $\eta(x, t)$  est :

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v(x, y = surf, t) &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = surf, t) \end{aligned}$$

### 6.2.4 Linéarisation des équations

L'état de base du fluide (position d'équilibre) correspond au cas où le fluide est au repos. On peut donc assimiler directement  $\underline{v}$  et  $\phi$  à des perturbations (puisque  $\underline{v} = \underline{0}$  et  $\phi = 0$  à l'équilibre) et on suppose que :

$$y(x, t) = h + \eta(x, t) \quad \text{avec} \quad \eta(x, t) \ll h$$

— l'équation régissant  $\phi$  dans le volume est déjà linéaire en  $\phi$  :

$$\Delta\phi = 0$$

— la condition au fond de l'eau est déjà linéaire en  $\phi$  :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

— l'équation de Bernoulli à la surface devient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, y = surf, t) + g\eta = 0$$

— l'équation cinématique devient :

$$\frac{d\phi}{dy}(x, y = surf, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t}$$

Les conditions à la surface libre font intervenir deux équations avec deux variables couplées  $\phi$  et  $\eta$ . Ces deux équations se combinent :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Big|_{y=surf} + g\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=surf} = 0$$

Donc, les vagues doivent satisfaire aux 3 équations suivantes :

$$\Delta\phi = 0 \text{ avec } x \in ]0, surf[$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Big|_{y=surf} + g\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=surf} = 0$$

## 6.3 Relation de dispersion

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans la direction  $Ox$  dans l'épaisseur du fluide. Pour cela, on cherche la solution du problème sous la forme :

$$\phi(x, y, t) = A(y) \exp(i(kx - \omega t)) \quad (6.1)$$

L'amplitude de l'onde peut varier avec la hauteur de l'eau puisque  $A$  est une fonction de  $y$ . On injecte cette solution dans l'équation de Laplace, on trouve alors :

$$\frac{d^2 A(y)}{dy^2} - k^2 A(y) = 0$$

La solution de cette équation différentielle homogène est :

$$A(y) = C \exp(ky) + D \exp(-ky)$$

Par conséquent :

$$\phi(x, y, t) = (C \exp(ky) + D \exp(-ky)) \exp(i(kx - \omega t))$$

La condition au fond de l'eau impose :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

soit  $k(C - D)e^{i(kx - \omega t)} = 0$  soit  $C = D$  et donc :  $A(y) = C \cosh(ky)$ .

Enfin, la condition à la surface libre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{y=surf} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=surf} = 0$$

implique que

$$-\omega^2 (C \cosh(kh) \exp i(kx - \omega t)) + gkC \exp i(kx - \omega t) \sinh(kh) = 0,$$

la relation de dispersion est :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

Cette relation de dispersion est différentes de celles obtenues jusqu'à présent. Sa structure es plus complexe : c'est une fonction non linéaire de  $k$ .

## 6.4 Vitesse de phase

La relation de dispersion trouvée au paragraphe précédent permet d'exprimer la vitesse de phase des ondes de gravité :

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

La vitesse de phase peut aussi s'exprimer en fonction de de la longueur d'onde :

$$c_\phi = \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

On constate que la vitesse de phase varie en fonction de la fréquence ou de la longueur d'onde. Ceci est illustré sur la figure 6.2 : les vagues sont des **ondes dispersives**.

Deux cas limites sont importants :

- $kh = \frac{2\pi h}{\lambda} \ll 1$ , la longueur d'onde est très grande par rapport à la hauteur d'eau : on est dans le régime "eau peu profonde". On a alors  $\tanh(kh) \approx kh$ , donc :

$$c_\phi \approx \sqrt{gh}$$

La vitesse ne dépend pas de la fréquence (courbe en pointillés rouges sur fig. 6.2) : ondes non dispersives.

- $kh = \frac{2\pi h}{\lambda} \gg 1$  la longueur d'onde est très inférieure à la hauteur d'eau : on est dans le régime "eau profonde". On a alors  $\tanh(kh) \rightarrow 1$ , donc :

$$c_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$$

La vitesse de phase dépend de la fréquence (courbe en pointillés verts sur fig. 6.2) : ondes dispersives.

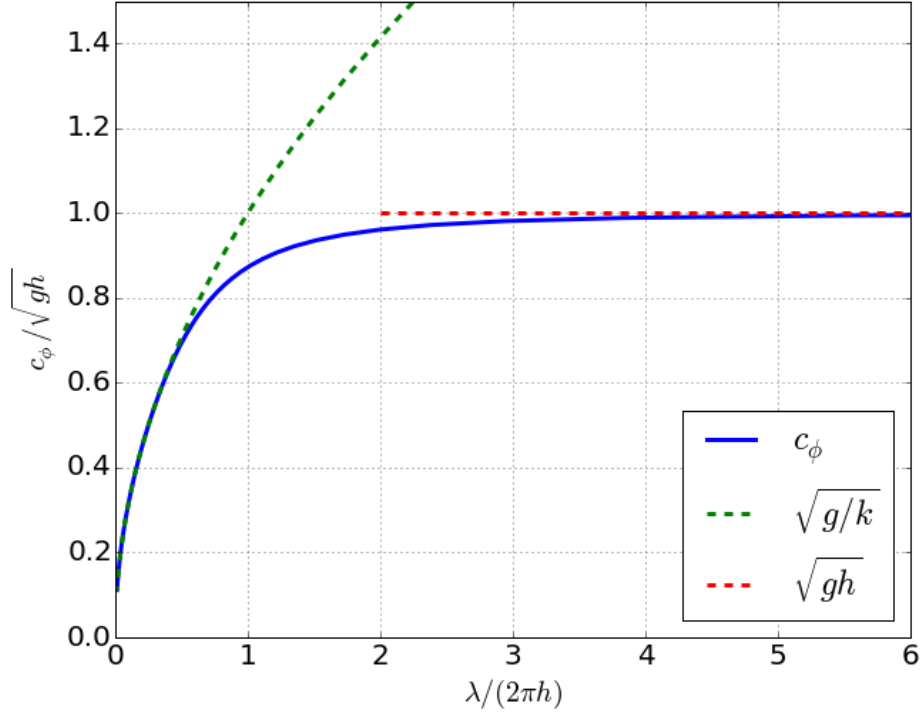


FIGURE 6.2 – Vitesse de phase pour les vagues

## 6.5 Vitesse de groupe

Dans cette partie on note  $\phi(x, t)$  une onde.

### 6.5.1 Le paquet d'onde

On appelle **paquet d'onde** une onde localisée spatialement à l'intérieur d'une **enveloppe**. La figure 6.5.1 présente une onde monofréquentielle avec une enveloppe gaussienne ( $A = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ ) :

$$\phi(x, t = 0) = A \sin(2\pi x / \lambda) \exp(-x^2 / \sigma^2)$$

On peut voir le paquet d'onde comme une superposition de plusieurs ondes avec des longueurs d'ondes différentes. La transformée de Fourier (par rapport à l'espace) est l'outil mathématique qui permet de mettre en avant cette propriété. En effet, d'après les formules 3.28 et 3.29, on a :

avec  $\omega(k)$  est déterminé par la relation de dispersion et  $A(k)$  est le spectre du paquet d'onde à  $t = 0$  :

$$\phi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad (6.2)$$

et

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t = 0) e^{-ikx} dx \quad (6.3)$$

La transformée de Fourier du paquet d'onde présenté à la figure 6.5.1 est tracée à la figure 6.5.1. On constate que  $A(k)$  a la forme d'une gaussienne centrée en  $k_0$  (avec  $k_0 \approx 12.56 m^{-1}$ ). Cela signifie que le paquet d'onde est principalement constitué d'ondes de longueurs d'ondes proches de  $\lambda \approx \frac{2\pi}{k_0}$ .

La solution du problème au temps  $t$  est la double transformée de Fourier (en temps et en espace) :



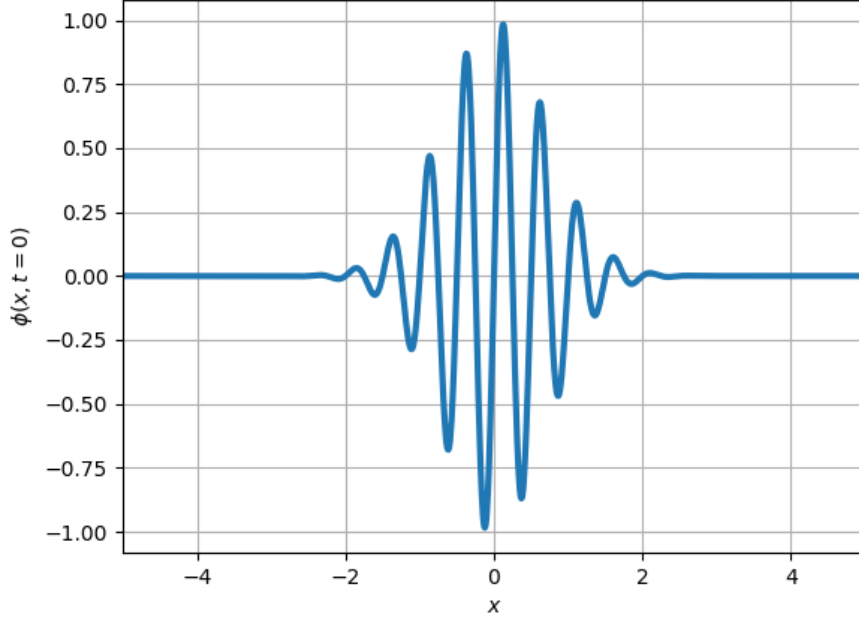


FIGURE 6.3 – Illustration d'un paquet d'onde

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega \quad (6.4)$$

Dans le cas sans dispersion,  $\omega = c_0 k$ , la vitesse de phase vaut alors :  $c_\phi = \omega/k = c_0$  : toutes les composantes de l'onde (quelque soient la longueur d'onde et la fréquence) se propagent à la même vitesse  $c_0$ . La propagation se fait donc en "groupe", c'est à dire sans déformation du paquet d'onde. C'est ce qu'illustre la figure 6.5.1 sur laquelle le paquet initial (courbe bleue à  $t = 0$ ), reste invariant au cours de la propagation (voir courbes orange et verte à  $t = 5s$  et  $t = 15s$ ).

Dans le cas avec dispersion,  $\omega \neq c_0 k$ , chaque partie de l'onde a une vitesse différente. Comme chaque partie se propage à une vitesse différente, l'ensemble va se déformer. La figure 6.5.1 montre la déformation du paquet d'onde initial (courbe bleue) qui se déforme au cours de la propagation et évolue pour donner la courbe orange à  $t = 5s$  (la loi  $\omega = f(k)$  utilisée pour tracer cette figure est arbitraire). On voit que l'amplitude a légèrement diminuée et que le paquet d'onde s'est étalé.

Dès lors se pose une question : comment déterminer la vitesse de propagation du paquet d'onde ? On parle de **vitesse de groupe**.

## 6.5.2 Vitesse de groupe

Supposons, comme dans l'exemple du paragraphe précédent que

$$\begin{cases} A(k) \neq 0 & \text{si } |k - k_0| \leq \Delta k \\ A(k) = 0 & \text{si } |k - k_0| > \Delta k \end{cases} \quad (6.5)$$

Si  $\Delta k$  est petit, alors, le développement de la relation de dispersion de Taylor s'écrit :

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right) \Delta k + \dots$$

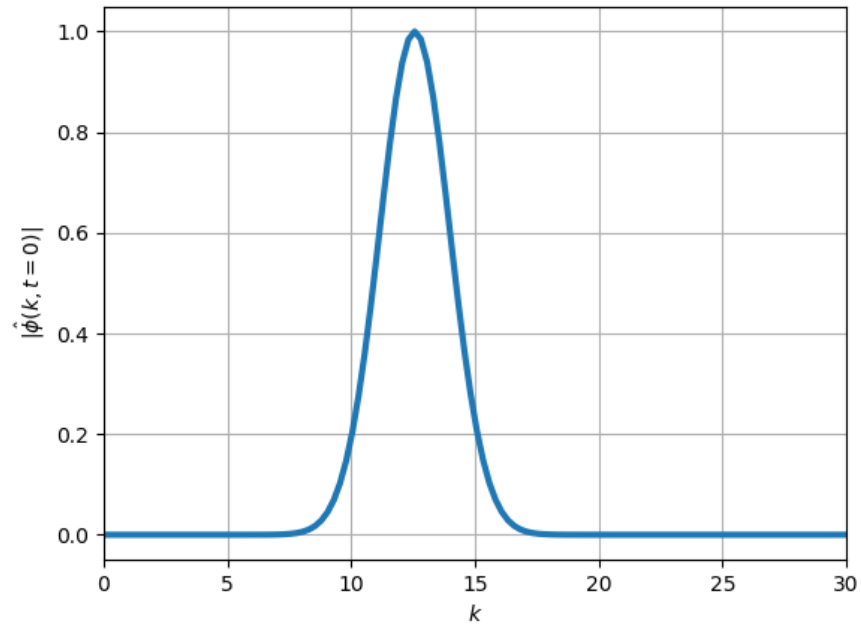


FIGURE 6.4 – Transformée de Fourier du paquet d'onde de la figure 6.5.1

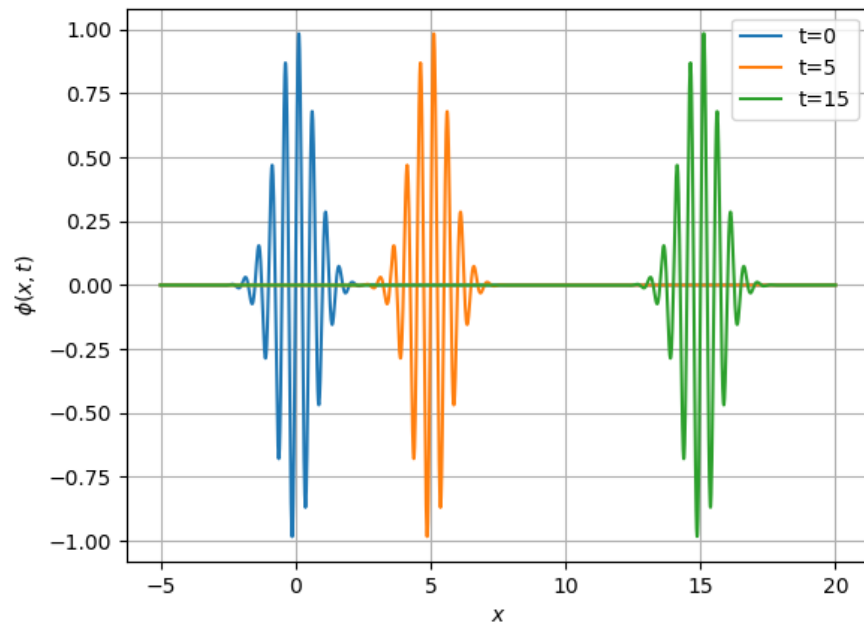


FIGURE 6.5 – Paquet d'onde à trois instants différent après propagation dans un milieu sans dispersion

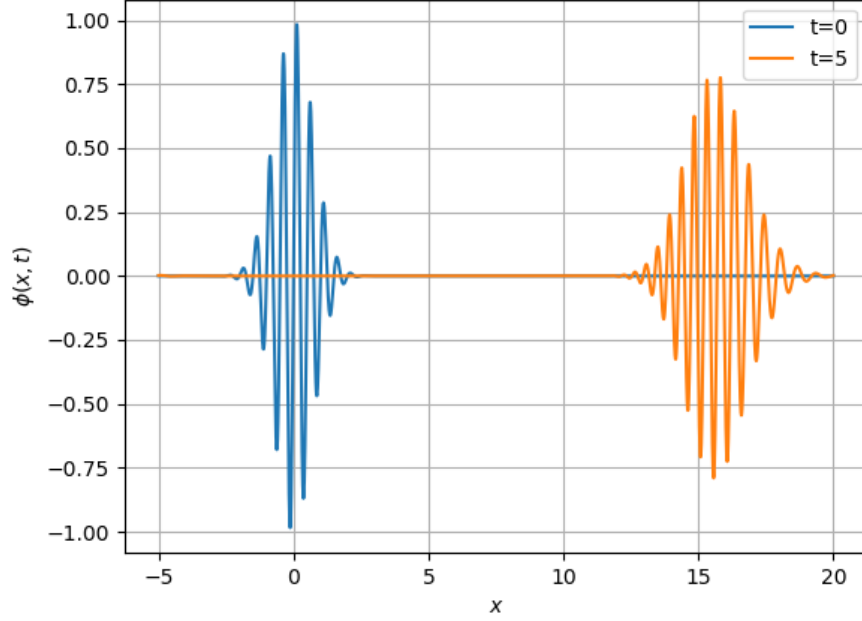


FIGURE 6.6 – Paquet d’onde à deux instants différent après propagation dans un milieu avec dispersion

En injectant cette relation dans la relation 6.4

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - (\omega_0 + (\frac{\partial \omega}{\partial k}) \Delta k) t)} dk \quad (6.6)$$

En remarquant que  $k = k_0 + \Delta k$  et en notant  $\omega'(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i((k_0 + \Delta k)x - \omega_0 t - \omega' \Delta k t)} dk \\ &= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i \Delta k (x - \omega' t)} dk \end{aligned}$$

La solution se décompose en une onde progressive harmonique et une enveloppe (le terme intégrale) dans laquelle on voit apparaître une nouvelle vitesse qui par analogie avec la vitesse de phase vaut :  $c_g = \omega' = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ , c’est la vitesse de groupe. Remarquons que ce résultat a été obtenu pour une forme particulière de  $A(k)$ . Si le spectre du paquet d’onde n’a pas de la même forme, le résultat reste le même mais les développements sont plus compliqués

On appelle vitesse de groupe, la vitesse ”moyenne” du paquet d’onde, cette vitesse est définie par la relation :

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (6.7)$$

Par définition :

Pour les vagues, la vitesse de groupe vaut :

$$c_g = \frac{c_\phi}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

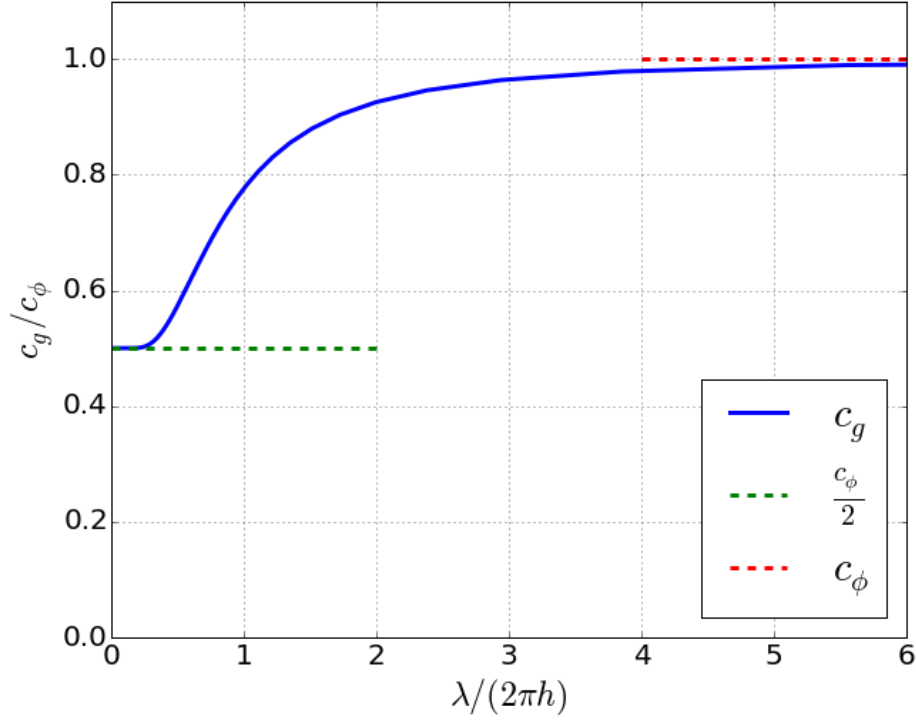


FIGURE 6.7 – Vitesse de groupe pour les vagues

On constate que la vitesse de groupe n'est pas constante. Évidemment, ce constat est relié au caractère dispersif de ces ondes :

- $c_g$  varie entre  $0.5c_\phi$  et  $c_\phi$
- pour  $\lambda/h \gg 1$  (donc  $kh \ll 1$ ), on est en régime non dispersif (eau peu profonde) et on retrouve  $c_g = c_\phi$ .

## 6.6 Hauteur des vagues

Le potentiel des vitesses  $\phi(x, y, t)$  est une grandeur pratique pour faire les calculs mais la grandeur physique observable est la hauteur des vagues  $\eta(x, t)$ .

D'après la relation de Bernoulli linéarisée :

$$\eta(x, t) = \frac{-1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y = \text{surf}, t),$$

avec le potentiel (sous forme réelle<sup>1</sup>) :

$$\phi(x, y, t) = C \cosh(ky) \sin(kx - \omega t),$$

on obtient :

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

avec  $A = \frac{C\omega \cosh(kh)}{g}$  une constante.

et

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

---

1. rmq : on aurait pu choisir la forme en cos

## 6.7 Trajectoire des particules fluides

On considère une particule fluide dont la position à  $t = 0$  est  $(X_0, Y_0)$ . On cherche la trajectoire de cette particule au passage d'une vague. On note  $(x, y) = (X_0 + X_1(t), Y_0 + Y_1(t))$  et on suppose que  $|X_1(t)| \ll |X_0|$  et  $|Y_1(t)| \ll |Y_0|$ .

A cet ordre de grandeur, on peut confondre les représentations eulérienne et lagrangienne.

Le champ de vitesse est donné par  $\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$  :

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}(X_0, Y_0) \\ \frac{dY_1}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial y}(X_0, Y_0)\end{aligned}$$

On intègre ces relations pour trouver la position de la particule  $(X_1(t), Y_1(t))$  au cours du temps. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{-Ag}{kc^2} \cosh(kY_0) \sin(k(X_0 - \omega t)) \\ Y_1 &= \frac{Ag}{kc^2} \sinh(kY_0) \cos(k(X_0 - \omega t))\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation de la trajectoire est :

$$\frac{X_1^2}{\cosh^2(kY_0)} + \frac{Y_1^2}{\sinh^2(kY_0)} = \left(\frac{Ag}{kc^2}\right)^2$$

C'est l'équation d'une ellipse (figures 6.7 et 6.7) :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{Y_1^2}{b^2} = 1$$

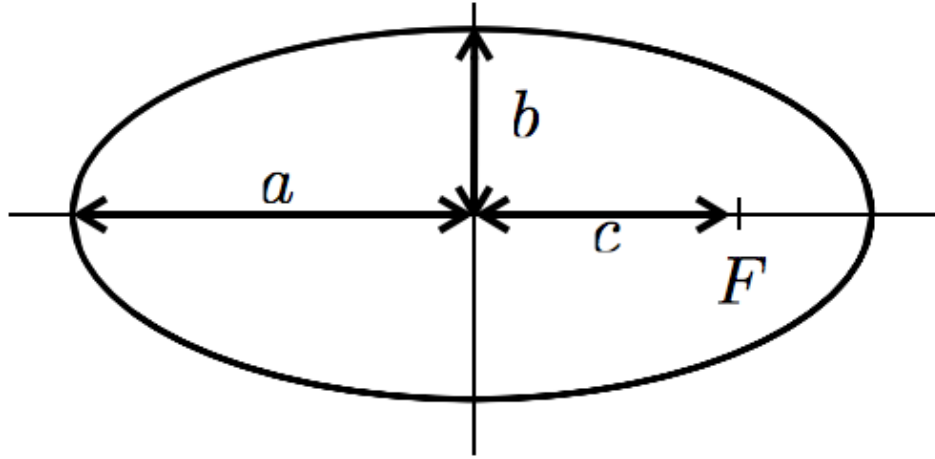


FIGURE 6.8 – Paramétrisation d’une ellipse

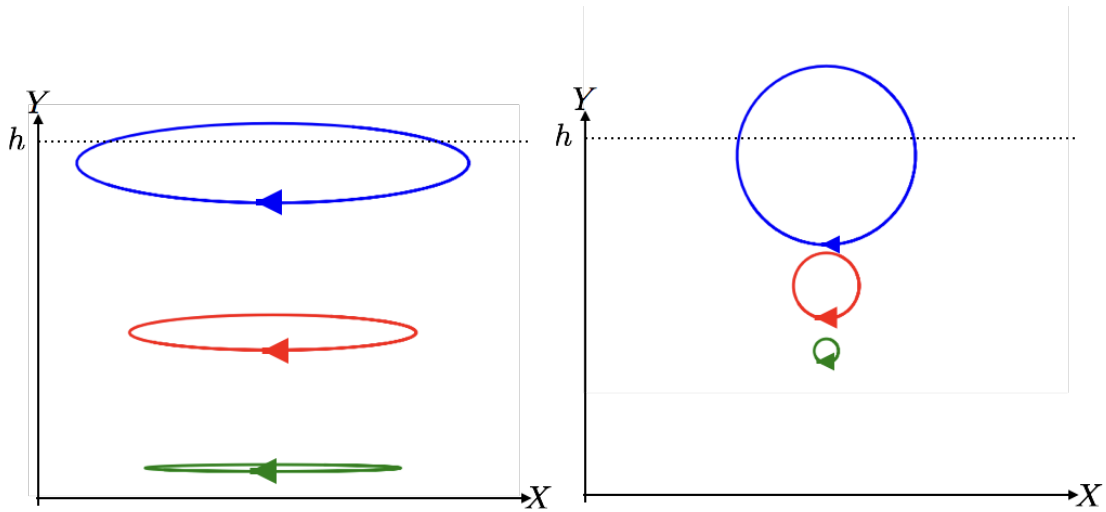


FIGURE 6.9 – A gauche : trajectoires en eau peu profonde ( $kh$  petit), à droite : trajectoires en eau profonde ( $kh$  grand)

# Chapitre 7

## Energie transportée par les ondes

### 7.1 Energie associée aux ondes transverses sur une corde

L'énergie cinétique de la corde entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  est la somme continue (l'intégrale) de l'énergie cinétique de chaque élément de corde :

$$K = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (7.1)$$

Pour trouver l'énergie potentielle de la corde, on calcule le travail  $\delta U$  pour passer de l'état au repos à l'état étiré :  $dx \rightarrow ds$  :

$$\begin{aligned} \delta U &= T_0(ds - dx) \\ &= T_0((dx^2 + dy^2)^{1/2} - dx) \end{aligned}$$

On remarque que  $dy = u(x+dx, t) - u(x, t)$ , soit en faisant un développement de Taylor de  $u(x+dx, t)$  :  $dy \approx \frac{\partial u}{\partial x} dx$

$$\begin{aligned} \delta U &= T_0 \left( dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - dx \right) \\ &= T_0 \left( dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) - dx \right) \\ &= \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

On en déduit que l'énergie potentielle de la corde entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  est :

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (7.2)$$

L' énergie totale est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique :  $E = K + U$

### 7.2 Généralisation : énergie pour les ondes non dispersives

Les ondes non dispersives sont modélisées par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

la fonction  $\phi(x, t)$  est une notation générique désignant une onde (on a vu que  $\phi$  peut être homogène à différentes grandeurs : pression, vitesse, densité, déplacement, etc ...). L'objectif est d'obtenir une équation sur l'énergie transportée par les ondes. Pour cela, on multiplie l'équation de d'Alembert par  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  et on intègre entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx = 0 \quad (7.3)$$

En utilisant l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

il vient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \quad (7.4)$$

En utilisant l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t},$$

et en intégrant le deuxième terme par partie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2c_0^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \quad (7.5)$$

Finalement, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2c_0^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) dx = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (7.6)$$

## Conservation de l'énergie pour la corde vibrante

Tout d'abord, on identifie  $\phi(x, t)$  avec le déplacement transverse le long de la corde  $u(x, t)$ . Puis, en multipliant la relation précédente (Eq. 7.6) par la tension  $T_0$  et en utilisant la définition de la vitesse de propagation des ondes sur la corde  $c_0 = \sqrt{T/\mu}$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx = T_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (7.7)$$

Cette dernière expression fait apparaître l'énergie cinétique (eq. 7.1) et l'énergie potentielle (eq. 7.2) de la corde :

$$\frac{\partial}{\partial t} (K + U) = \frac{\partial}{\partial t} E = T_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (7.8)$$

C'est la forme globale de la conservation de l'énergie. La forme locale s'obtient en remarquant que :

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (7.9)$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (7.10)$$



On pose  $e = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  et  $I = T_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = 0. \quad (7.11)$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie des ondes se propageant sur la corde.

La quantité  $e$  est homogène à une énergie par unité de longueur. Elle s'exprime  $J.m^{-1}$ . La quantité  $I$  est homogène à une puissance :  $W = J.s^{-1}$ .

## Conservation de l'énergie pour les ondes acoustiques

On assimile la vitesse particulière  $v_a$  à la quantité  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ . On utilise alors l'équation de conservation de la masse linéarisée pour trouver  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial x} = 0$$

par conséquent :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = 0$$

donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-1}{\rho_0 c_0^2} p_a$$

En utilisant ces relations dans l'équation établie précédemment (Eq. 7.6) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2c_0^2} v_a^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^4} p_a^2 \right) dx = \left[ \frac{-p_a v_a}{\rho_0 c_0^2} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\rho_0}{2} v_a^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p_a^2 \right) dx = - [p_a v_a]_{x_1}^{x_2} \quad (7.13)$$

On définit les énergies cinétiques et potentielles acoustiques :

$$\begin{cases} K = \frac{\rho_0}{2} v_a^2, \\ U = \frac{p_a^2}{\rho_0 c_0^2} \end{cases} \quad (7.14)$$

L'énergie par unité de longueur est la somme de ces deux énergies :  $e = K + U$ . On appelle intensité acoustique le produit de la pression acoustique par la vitesse particulière :  $I = p_a v_a$ .

La forme locale de l'équation de l'énergie acoustique s'obtient en intégrant l'équation précédente :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (7.15)$$

par conséquent,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = 0$$

c'est l'équation de conservation de l'énergie acoustique en 1D. Cette équation a bien la structure d'une équation de bilan. On remarque que la quantité  $e$  est homogène à une énergie par unité de volume ( $J.m^{-3}$ ) tandis que  $I$  est homogène à une puissance par unité de surface ( $J.s^{-1}.m^{-2}$ ). Ces quantités sont donc différentes de celles trouvées au paragraphe précédent pour la corde. C'est normale car, pour établir les résultats sur les ondes acoustiques en 1D on a supposé que les ondes étaient 3D mais sans variation suivant les directions  $y$  et  $z$ . Donc en toute rigueur, il faudrait faire une intégration volumique et non pas linéique mais cela ne change pas le résultat.

## Vitesse de l'énergie

Dans le cas des ondes sur la corde et des ondes acoustiques, on obtient la même équation locale de conservation de l'énergie. Le rapport  $I/e$  est homogène à une vitesse :

$$v_e = \frac{I}{e} = \frac{Js^{-1}}{Jm^{-1}} = \frac{m}{s}$$

C'est la vitesse de l'énergie des ondes non dispersives

**vitesse de l'énergie pour les ondes acoustiques**

**vitesse de l'énergie pour les ondes transverses sur la corde**

Pour les ondes non dispersives (modélisées par l'équation de d'Alembert, on retiendra que la vitesse de l'énergie est égale à la vitesse de groupe qui dans ce cas est aussi égale à la vitesse de phase et à  $c_0$  (le coefficient apparaissant dans l'équation de d'Alembert) :

$$v_e = v_g = c_\phi = c_0$$

### 7.2.1 Vitesse de l'énergie pour les ondes dispersives

On admettra que pour les ondes dispersives, la vitesse de l'énergie est égale à la vitesse de groupe :

$$v_e = v_g$$

# Chapitre 8

## Ondes stationnaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter le concept d'ondes stationnaires. Les ondes stationnaires apparaissent lorsque le milieu est fini et que des ondes sont générées continuellement. Ces ondes existent pour tous les types de systèmes : corde, ondes acoustiques, vagues, etc... Dans ce chapitre, le concept d'ondes stationnaires est illustré par le cas des vibrations sur une corde fixée à ses extrémités.

### 8.1 Observations expérimentales

Lorsqu'un vibreur est placé à une extrémité d'une corde tendue (fixée à l'autre extrémité), on peut observer des figures particulières. Un exemple est donné sur la photographie (Figure 8.1) qui montre l'oscillation d'une corde suivant un mode particulier (ici le mode 4 - le concept de mode est défini plus loin dans le chapitre). Cette forme résulte d'une excitation particulière. Dans le cas général les vibrations sont moins organisées mais pour certaines fréquences précises, on observe l'apparition de noeuds (pas de vibration) et de ventres (vibrations maximales).

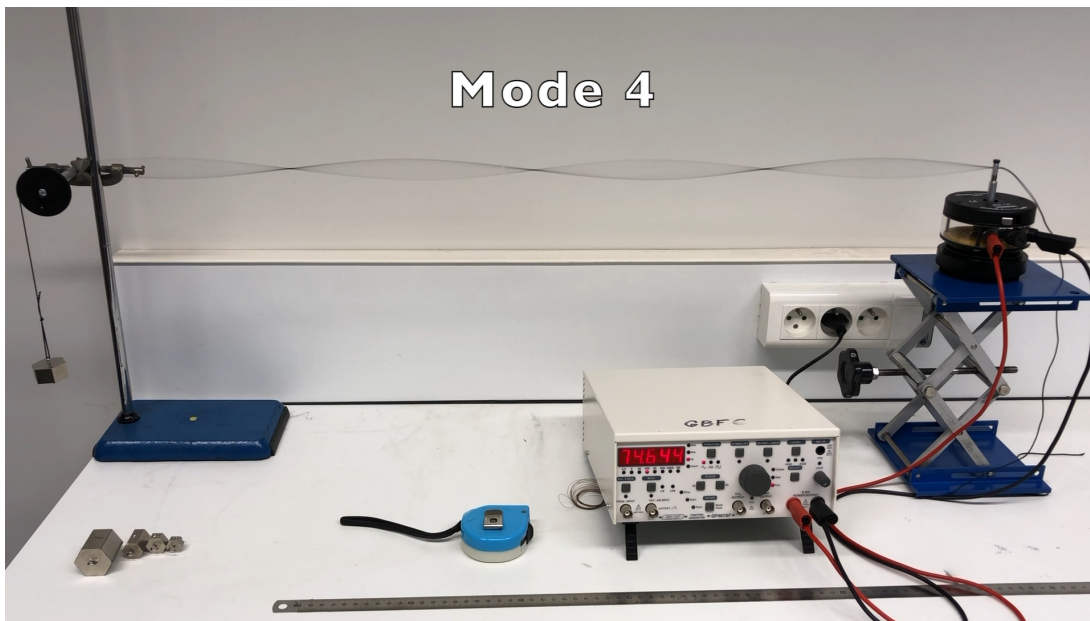


FIGURE 8.1 – Photographie d'ondes stationnaires sur une corde vibrante

## 8.2 Oscillations d'une corde tendue fixée à ses extrémités

### 8.2.1 Mise en équation

On considère une corde tendue et on note  $y(x, t)$  son déplacement transverse. On suppose que les déplacements sont suffisamment petits pour que l'approximation des petits déplacements soit valable. On note  $\mu$  sa masse linéique et  $T_0$  sa tension. On suppose que la corde est fixée à ses extrémités situées en  $x = 0$  et  $x = L$  par conséquent  $y(x = 0, t) = 0$  et  $y(x = L, t) = 0$ . Par ailleurs on suppose que les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (8.1)$$

où  $u_0(x)$ , le profil initial de la corde, et  $v_0(x)$ , la vitesse initiale de la corde, sont deux fonctions connues.

On a vu dans le premier chapitre que le déplacement transverse doit satisfaire l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On sait que la solution générale de l'équation de d'Alembert est :

$$u(x, t) = f(t + x/c_0) + g(t - x/c_0)$$

Compte tenu des conditions aux limites (corde fixée à ses extrémités), on a les deux relations suivantes :

- $f(t) + g(t) = 0$ ,
- $f(t - L/c_0) + g(t + L/c_0) = 0$ .

On en déduit que  $f(t - L/c_0) = f(t + L/c_0)$ . Le changement de variables  $t' = t - L/c_0$  montre que la fonction  $f$  est périodique en temps de période  $2L/c_0$ , en effet :  $f(t') = f(t' + 2L/c_0)$ . Comme la fonction  $f$  est périodique et 'suffisamment régulière', on peut la décomposer en série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

où  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{c_0}{2L}$

d'après ce qui précède, le déplacement transverse peut s'écrire :  $u(x, t) = f(t - x/c_0) - f(t + x/c_0)$ . En injectant, dans cette relation, le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ , il vient :

$$\begin{aligned} u(x, t) = & a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(t - x/c_0)) + b_n \sin(n\omega_0(t - x/c_0)) \\ & - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(t + x/c_0)) + b_n \sin(n\omega_0(t + x/c_0)) \end{aligned}$$

En développant ce calcul (un peu fastidieux), on trouve :

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_0 t) \sin(n\omega_0 x/c_0) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_0 t) \sin(n\omega_0 x/c_0)$$

On pose alors  $A_n = -2b_n$  et  $B_n = 2a_n$  ainsi l'expression du déplacement vertical de la corde tendue fixée à ses deux extrémités est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)) \sin(n\omega_0 x/c_0)] \quad (8.2)$$

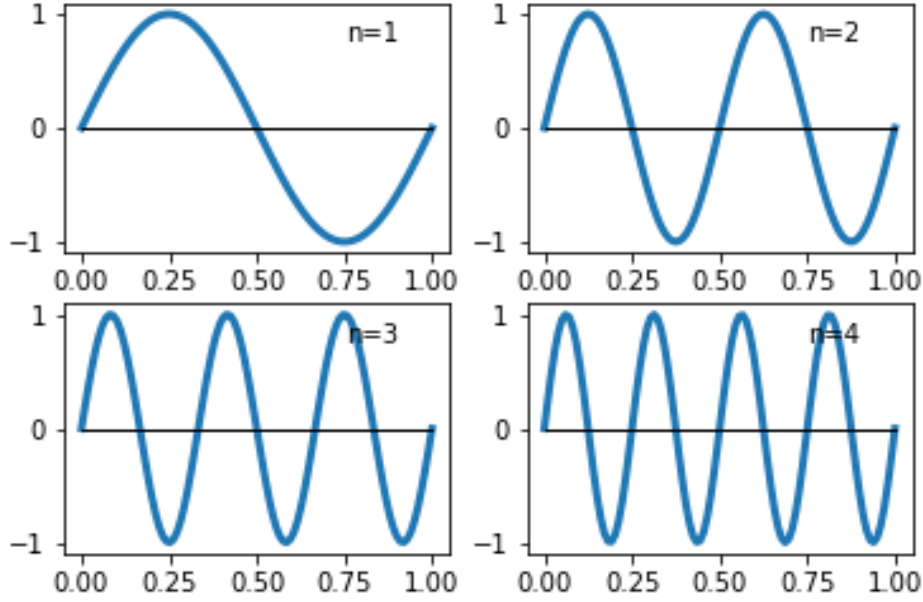


FIGURE 8.2 – Modes  $n = 1$  à  $n = 4$  pour une corde fixée à ses extrémités

On constate que cette expression est de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) X_n(x) \quad (8.3)$$

c'est à dire une combinaison linéaire d'un produit d'une fonction du temps et d'une fonction de  $x$ . On a ainsi perdu la structure particulière des ondes propagatives en  $t \pm x/c_0$ . C'est la marque des ondes stationnaires. Les fonctions  $X_n(x)$  sont appelés modes. Elles décrivent l'organisation spatiale des vibrations. Pour la corde fixée à ses extrémités les modes sont de la forme :  $X_n(x) = \sin(n\omega_0 x/c_0)$ . La figure 8.2 montre les premiers modes. On retrouve bien la présence de maxima (les ventres) et de points pour lesquels  $X_n(x) = 0$  (les noeuds) comme observé dans l'expérience.

### 8.2.2 Détermination des constantes d'intégration

Pour déterminer les constantes  $A_n$  et  $B_n$ , on utilise les conditions initiales. A l'instant initial  $t = 0$  :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(n\omega_0 x/c_0)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [n\omega_0 B_n \sin(n\omega_0 x/c_0)],$$

Pour obtenir  $A_n$  et  $B_n$  en fonction de  $y_0(x)$  et  $v_0(x)$  à partir de ces expressions, on peut utiliser les résultats sur les séries de Fourier. En effet, les expressions précédentes peuvent être vues comme des décomposition en série de Fourier des fonctions  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$ . Plus précisément :

- Les coefficients  $A_n$  sont les coefficients de Fourier de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique  $Y(x)$ , de période  $2L$ , impaire (pas de terme en cosinus). Cette fonction  $Y(x)$  est obtenue en prolongement par 'périodicité' de la fonction  $u_0(x)$ .
- Les coefficients  $n\omega_0 B_n$  sont les coefficients de Fourier de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique  $V(x)$ , de période  $2L$ , impaire (pas de terme en cosinus). Cette fonction  $V(x)$  est obtenue en prolongement par 'périodicité' de la fonction  $v_0(x)$ .

Par conséquent, en utilisant les résultats du cours sur les séries de Fourier, on trouve que :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(n\pi x/L) u_0(x) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \sin(n\pi x/L) v_0(x) dx.$$

### 8.2.3 La corde pincée

Le cas de la corde pincée, correspond à celui d'une corde sur laquelle on vient imposer un profil initial non nul qu'on lâche sans vitesse initiale. On peut modéliser une corde pincée par un profil initial de la corde en forme de triangle et une vitesse initiale nulle :

$$\begin{cases} u_0(x) = \begin{cases} 2hx/L & \text{pour } 0 < x < L/2 \\ -2hx/L + 2h & \text{pour } L/2 < x < L \end{cases} \\ v_0(x) = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

Pour connaître le déplacement de la corde au cours du temps ( $u(x, t)$ ), on calcule les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ . Il est évident que  $B_n = 0$ , il reste :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \sin(n\pi x/L) \frac{2hx}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \sin(n\pi x/L) \frac{2h(L-x)}{L} dx,$$

En intégrant par partie les deux termes, on trouve :

$$A_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Cette expression montre que les harmoniques pairs sont nuls et que les harmoniques impairs décroissent en  $1/n^2$  : si  $n = 2p$ , alors  $A_{2p} = 0$  et si  $n = 2p + 1$  alors :  $A_{2p+1} = \frac{8h}{\pi^2 (2p+1)^2} (-1)^p$

Finalement, la solution générale est de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{8h}{\pi^2 (2p+1)^2} (-1)^p \cos((2p+1)\omega_0 t) \sin((2p+1)\omega_0 x/c_0) \right]$$

### 8.2.4 La corde frappée

Le cas de la corde frappée, correspond à celui d'une corde qu'on vient exciter à l'instant initial en la "frappant" d'un coup sec avec un instrument de largeur  $\epsilon$  à l'abscisse  $a$ . On modélise une corde frappée par un profil initial nul (pas de déformation initiale) mais la vitesse initiale est non nulle et a la forme d'un créneau :

$$\begin{cases} u_0(x) = \begin{cases} 2hx/L & \text{pour } 0 < x < L/2 \\ -2hx/L + 2h & \text{pour } L/2 < x < L \end{cases} \\ v_0(x) = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

On procède de la même manière que précédemment. Les coefficients  $A_n$  sont tous nuls. Il reste à calculer les coefficients  $B_n$ .

$$B_n = \frac{2}{n\pi c_0} \int_0^L \sin(n\pi x/L) v_0(x) dx.$$

car l'argument de l'intégrale est une fonction paire. D'après la définition de  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$ , on a :

$$B_n = \frac{2}{n\pi c_0} \int_a^{a+\epsilon} \sin(n\pi x/L) V_0 dx.$$

En supposant que  $\epsilon \ll L$ , on a

$$B_n = \frac{2V_0\epsilon}{n\pi c_0} \sin(n\pi a/L).$$

Les harmoniques décroissent en  $1/n$ , soit beaucoup moins vite que dans le cas de la corde pincée. Ceci explique pourquoi le son du piano est beaucoup plus riche (plus chaud) alors que celui du clavecin est plus 'pur' (monochromatique).

### 8.3 Résolution générale

De façon générale, la résolution d'un problème d'ondes stationnaires se fait en cherchant la solution sous la forme :

$$\phi_n(x, t) = X_n(x) e^{j\omega_n t}$$

En exprimant les conditions aux limites, on obtient les modes propres  $X_n(x)$ . La solution générale s'obtient en superposant tous les modes possibles :

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) e^{j\omega_n t}.$$

# Chapitre 9

## Réflexion-transmission entre deux milieux en incidence normale

### 9.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, le milieu de propagation était considéré infini (pas de prise en compte des conditions aux limites). Or en pratique, le milieu de propagation (quel que soit le type d'onde) est rarement infini et les ondes atteignent les limites du domaine pendant la propagation.

Dans ce chapitre, nous allons illustrer les phénomènes de réflexion et de transmission lorsque l'onde atteint une frontière du domaine. Nous utiliserons pour cela les exemples vus dans les chapitres précédents comme les ondes transverses sur une corde, ou les ondes acoustiques mais à chaque fois le problème sera restreint aux ondes en incidence normale à l'interface, ou dit autrement aux problèmes unidimensionnels.

### 9.2 Réflexion sur une interface rigide en incidence normale

#### 9.2.1 Corde fixée à une extrémité

On s'intéresse au cas d'une corde dont l'extrémité est fixée en  $x = 0$  (cf Figure 9.1). On suppose qu'une onde est générée en  $x < 0$  et se propage vers les  $x$  croissants vers  $x = 0$ . Lorsque l'onde incidente arrive sur l'interface, on observe qu'elle se réfléchit et se propage alors en sens inverse vers les  $x$  décroissants. On observe aussi que l'onde réfléchie a une amplitude opposée à celle de l'onde incidente.

L'onde progressive incidente s'écrit :  $u_i(x, t) = f(x - c_0 t)$ .

L'onde rétrograde réfléchie s'écrit :  $u_r(x, t) = g(x + c_0 t)$ .

Le déplacement total est la somme de ces deux ondes :

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

En  $x = 0$ , l'extrémité est fixée :

$$u(x = 0, t) = 0 = f(-c_0 t) + g(c_0 t)$$

Par conséquent :

$$g(w) = -f(-w)$$

(ici  $w$  représente l'argument de la fonction).



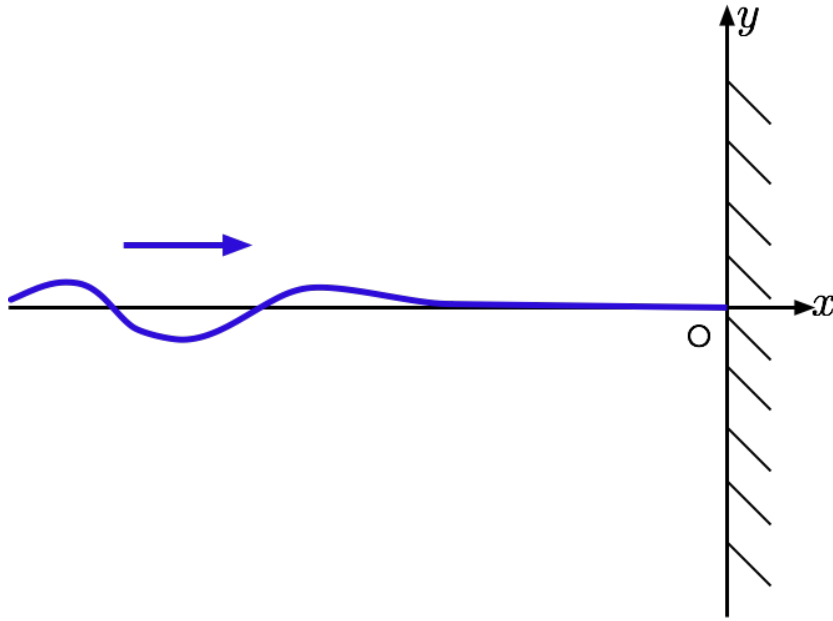


FIGURE 9.1 – Onde transverse se propageant sur une corde fixée en  $x = 0$

Le déplacement est donc :

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) - f(-x - c_0 t) \quad (9.1)$$

Cela signifie que l'onde réfléchie aura la même amplitude que l'onde incidente mais avec un signe opposé. Cela est conforme avec les observations expérimentales.

### Interprétation

Cela revient à considérer une corde infinie (donc sans la condition physique en  $x = 0$ ) sur laquelle se propagerait deux ondes de formes opposées (le fonction totale est une fonction impaire). Cela permet à la condition  $u(x = 0, t) = 0$  d'être respectée.

### Analyse pour une onde progressive harmonique

Le résultat précédent a été établi pour une onde quelconque, spécifions le problème pour une onde progressive harmonique :

$$u_i(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

avec  $A$  est l'amplitude de l'onde incidente,  $k$  le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation.

L'onde réfléchie s'écrit alors :

$$u_r(x, t) = AR e^{i(-kx - \omega t)}.$$

Le coefficient  $R$  est appelé coefficient de réflexion en amplitude, l'amplitude de l'onde incidente est  $R \times A$ ,  $R$  est donc un coefficient sans dimension. Le signe "—" devant  $k$  traduit le sens de propagation de l'onde vers les  $x$  décroissants.

Le déplacement total sur la corde est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + AR e^{i(-kx - \omega t)}$$

A l'extrémité de la corde :

$$u(x = 0, t) = 0 = Ae^{-i\omega t} + AR e^{-i\omega t}$$

Par conséquent,  $R = -1$ . On retrouve le résultat de la partie précédente : l'onde réfléchie conserve la forme de l'onde incidente mais avec un signe opposé.

De manière générale, la résolution d'un problème de réflexion et de transmission (voir après) d'ondes est plus simple à faire en raisonnant sur les ondes harmoniques. Comme une onde quelconque est la superposition d'ondes harmoniques (cf transformées de Fourier) :

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega,$$

on travaillera de préférence avec les ondes harmoniques et si besoin, une onde non harmonique est reconstruite à partir des ondes harmoniques.

## 9.2.2 Onde acoustique réfléchiée par une paroi rigide

Une onde acoustique se propage vers les  $x$  croissants. Une paroi rigide est située en  $x = 0$ . Lorsque l'onde incidente rencontre la paroi rigide, l'onde se réfléchit et se propage vers les  $x$  décroissants.

Pour étudier ce problème, on fait appel à la même analyse que précédemment en utilisant le formalisme des ondes harmoniques. On note l'onde incidente harmonique progressive :

$$p_{ai}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

L'onde réfléchiée est

$$p_{ar} = AR e^{i(-kx - \omega t)}$$

La pression totale est :

$$p_a(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + AR e^{i(-kx - \omega t)} \quad (9.2)$$

La condition sur la paroi rigide ne s'exprime pas aussi facilement que dans le cas précédent (on ne connaît pas explicitement  $p_a(x, t)$ ). En revanche, la vitesse particulaire est connue : elle est nulle si la paroi est parfaitement rigide :

$$v_a(x = 0, t) = 0.$$

Pour résoudre le problème, il faut relier  $p_a$  et  $v_a$ . Cela se fait par l'intermédiaire de l'équation d'Euler linéarisée, en 1D :

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial p_a}{\partial x}$$

Par conséquent, sur la paroi rigide, le champ total de pression acoustique satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial p_a}{\partial x}(x = 0, t) = 0,$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_a(x, t)}{\partial x} &= A \frac{\partial e^{i(kx - \omega t)}}{\partial x} + AR \frac{\partial e^{i(-kx - \omega t)}}{\partial x} \\ &= ikAe^{i(kx - \omega t)} - ikAR e^{i(-kx - \omega t)} \end{aligned}$$

Ensuite, on évalue cette expression en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_a}{\partial x}(x = 0, t) &= 0 \\ &= ikAe^{-i\omega t} - ikAR e^{-i\omega t} \\ &= 1 - R \end{aligned}$$

On en déduit que  $R = 1$ , il y aura donc une onde réfléchiée avec le même signe que l'onde incidente.

### 9.2.3 Bilan

Le coefficient de réflexion dépend du problème considéré. Nous avons vu un seul type de condition pour l'onde transverse sur corde (extrémité fixée) et pour l'onde acoustique (paroi rigide). Il en existe beaucoup d'autres, par exemple extrémité libre pour la corde ou pour l'onde acoustique (cf TD). Les résultats seront alors bien sûr différents. Cependant la méthode utilisée reste valable :

- utiliser les ondes harmoniques,
- introduire un coefficient de réflexion en amplitude  $R$ ,
- écrire la condition à la limite (pour cela il est utile (indispensable) d'utiliser les équations du premier ordre obtenues pendant la modélisation et pas seulement l'équation des ondes),
- faire les calculs.

## 9.3 Réflexion et transmission entre deux milieux en incidence normale

Dans cette partie, on s'intéresse aux situations pour lesquelles, il existe une interface entre deux milieux de propagation supposés unidimensionnels (de façon équivalente, cela revient à considérer des ondes en incidence normale en 2D ou 3D). Par exemple, deux cordes reliées entre elles, deux milieux pour les ondes acoustiques, ou des bassins avec des hauteurs d'eau différentes pour les vagues (cf TD pour les illustrations). Dans chacune de ces situations, une onde incidente va produire à l'interface entre les deux milieux une onde réfléchie qui va se propager en sens inverse, et une onde transmise qui va se propager dans le deuxième milieu (après l'interface).

### 9.3.1 Réflexion/transmission à l'interface entre deux cordes

On considère deux cordes de masses linéiques différentes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  attachées ensemble en  $x = 0$  (figure 9.2). On suppose que le déplacement transverse  $u(x, t)$  et la pente de la corde  $\partial u / \partial x$  sont des grandeurs continues en  $x = 0$ . Un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 de la forme :  $u_I(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega t))$ . On observe qu'une partie de l'onde se réfléchit en  $x = 0$  et qu'une autre partie est transmise. On note  $R$  et  $T$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. L'objectif est de déterminer ces coefficients en fonction des données physiques du problème.

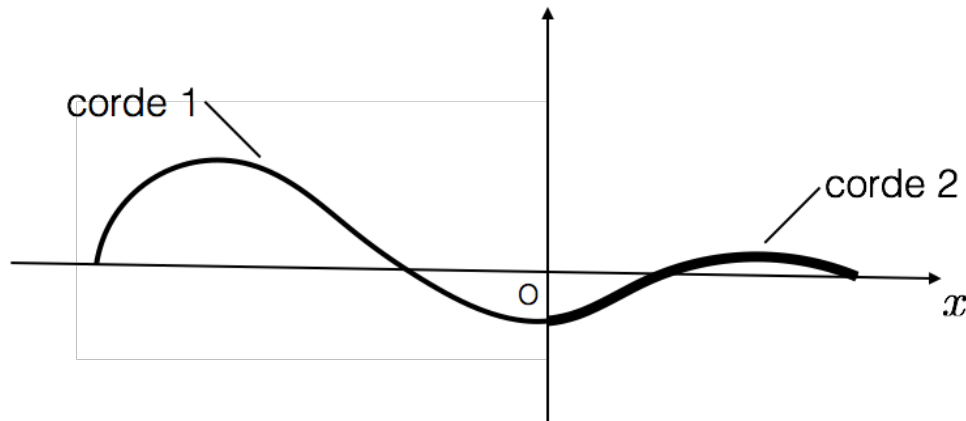


FIGURE 9.2 – Cordes de masses linéiques différentes assemblées en  $x = 0$

Les déplacements transverses dans les cordes 1 et 2 (respectivement  $u_1(x, t)$  et  $u_2(x, t)$ ) satisfont

chacun à une équation de d'Alembert, on a donc 2 cordes avec 2 vitesses de propagation différentes :

$$c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \text{ et } c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

Le déplacement sur la corde 1 résulte de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie :

$$u_1(x, t) = u_I(x, t) + u_R(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega t)) + AR \exp(i(-k_1 x - \omega t))$$

Le déplacement sur la corde 2 n'est dû qu'à l'onde transmise :

$$u_2(x, t) = u_T(x, t) = AT \exp(i(k_2 x - \omega t))$$

Le déplacement transverse est continu à l'interface :

$$u_1(x = 0, t) = u_2(x = 0, t)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} A \exp(i(-\omega t)) + AR \exp(i(-\omega t)) &= AT \exp(i(-\omega t)) \\ 1 + R &= T \end{aligned}$$

La pente de la corde est continue à l'interface :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x = 0, t)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} ik_1 A \exp(i(-\omega t)) - ik_1 AR \exp(i(-\omega t)) &= ik_2 AT \exp(i(-\omega t)) \\ (1 - R)k_1 &= Tk_2 \end{aligned}$$

avec  $k_1 = \omega/c_1$  et  $k_2 = \omega/c_2$ . Les coefficients  $R$  et  $T$  s'obtiennent par la résolution du système à deux équations suivant :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ (1 - R)\frac{c_2}{c_1} = T \end{cases}$$

Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction des vitesses de propagation dans les cordes 1 et 2 sont donc

$$\begin{cases} R = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \\ T = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \end{cases}$$

On remarque que quand les vitesses dans les deux cordes sont égales ( $c_1 = c_2$ ) il n'y a pas de réflexion et le coefficient de transmission en amplitude est égal à 1, ce cas correspond à une corde uniforme ( $\mu_1 = \mu_2$ ). D'autre part, si on considère que la corde 2 a une masse linéique très grande (on modélise un mur), alors  $c_2 \rightarrow 0$  et donc  $R = -1$  et  $T = 0$ . C'est cohérent avec ce qui a été dit dans la partie précédente sur la réflexion sur une extrémité fixée.

### 9.3.2 Réflexion/transmission d'ondes acoustiques à l'interface entre deux fluides parfaits

On se place dans la situation de la figure 9.3. On considère deux milieux de propagation différents, leurs masses volumiques respectives sont notées  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , leurs vitesses du son respectives sont notées  $c_1$  et  $c_2$ . L'interface est située en  $x = 0$ . L'analyse est faite avec des ondes harmoniques. On note l'onde incidente :

$$p_{ai}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)},$$

où  $k_1$  est le nombre d'onde dans le milieu 1 :  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ . On suppose que le passage par l'interface de l'onde incidente va créer une onde réfléchie<sup>1</sup> :

$$p_{ar}(x, t) = AR e^{i(-k_1x - \omega t)}$$

avec  $R$  le coefficient de réflexion en amplitude.

En plus d'une onde réfléchie, on suppose qu'à l'interface, l'onde incidente donne naissance à une onde transmise dans le milieu 2<sup>2</sup> :

$$p_{at}(x, t) = AT e^{i(k_2x - \omega t)}$$

où  $T$  est le coefficient de transmission en amplitude et  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  est le nombre d'onde dans le milieu 2. Dans le milieu 1, il y a l'onde incidente et l'onde réfléchie, la pression totale s'écrit :

$$p_{a1}(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)} + AR e^{i(-k_1x - \omega t)}, \quad (9.3)$$

et dans le milieu, il n'y a que l'onde transmise :

$$p_{a2}(x, t) = AT e^{i(k_2x - \omega t)}. \quad (9.4)$$

Les conditions aux limites s'appliquent de la même façon qu'en Mécanique de Milieux Continus :

— continuité des contraintes à l'interface :  $P_{01} + p_{a1}(x = 0, t) = P_{02} + p_{a2}(x = 0, t)$

où  $P_{01}$  et  $P_{02}$  sont respectivement les pressions à l'équilibre des milieux 1 et 2. Pour que l'interface soit à l'équilibre en l'absence d'ondes, il faut que  $P_{01} = P_{02}$ . Par conséquent, la continuité des contraintes est simplement  $p_{a1}(x = 0, t) = p_{a2}(x = 0, t)$ . Si on applique cette condition, on trouve :

$$Ae^{-i\omega t} + AR e^{-i\omega t} = AT e^{-i\omega t}$$

ou encore :

$$1 + R = T \quad (9.5)$$

— continuité des vitesses normales à l'interface  $v_{a1}(x = 0, t) = v_{a2}(x = 0, t)$

Les vitesses s'expriment en fonction des pressions par l'intermédiaire de la relation d'Euler linéarisée dans chaque milieu :

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial v_{a1}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_{a1}}{\partial x}, \\ \rho_2 \frac{\partial v_{a2}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_{a2}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les vitesses particulières dans les milieux 1 et 2 sont :

$$v_{a1} = \frac{A}{\rho_1 c_1} e^{i(k_1x - \omega t)} - \frac{AR}{\rho_1 c_1} e^{i(-k_1x - \omega t)}$$

1. On peut remarquer que si cette hypothèse est fausse on trouvera  $R = 0$  ce qui signifiera qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

2. là aussi, si cette hypothèse est fausse on trouvera  $T = 0$  ce qui signifiera qu'il n'y a pas d'onde transmise.

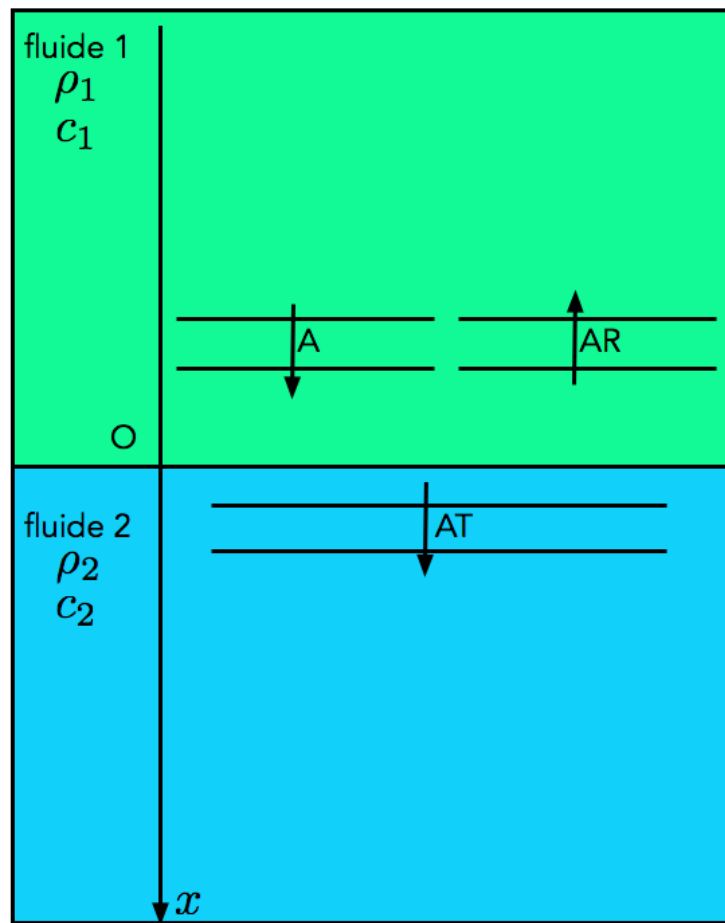


FIGURE 9.3 – Réflexion/transmission d'ondes acoustiques à l'interface entre deux fluides

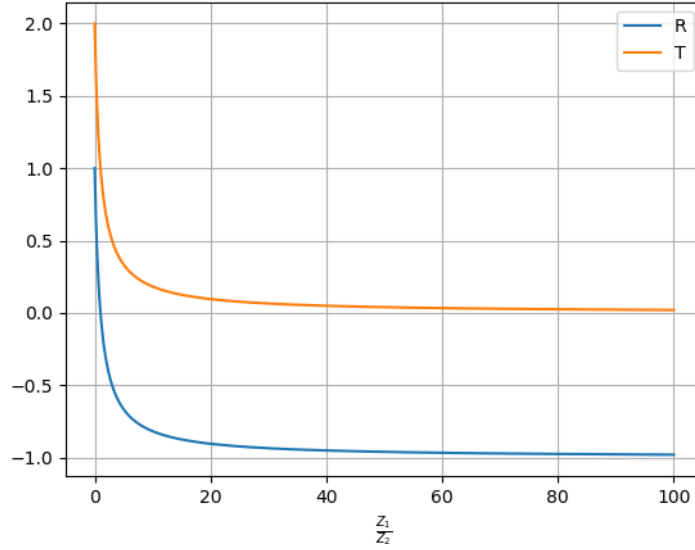


FIGURE 9.4 – Evolution des coefficients de réflexion et transmission en amplitude en fonction du rapport des impédances  $Z_1/Z_2$

$$v_{a2} = \frac{AT}{\rho_2 c_2} e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

et la condition de continuité des vitesses normales devient :

$$\frac{1 - R}{Z_1} = \frac{T}{Z_2} \quad (9.6)$$

où  $Z_1 = \rho_1 c_1$  et  $Z_2 = \rho_2 c_2$  sont les impédances caractéristiques des milieux 1 et 2.

On obtient ainsi deux équations (Eqs. 9.5 et 9.6), à deux inconnues  $R$  et  $T$ . La résolution de ce système permet d'exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction des données du problème :

$$\begin{cases} R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \\ T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \end{cases} \quad (9.7)$$

Le phénomène de réflexion transmission dépend donc uniquement des impédances caractéristiques des milieux. La figure 9.4 montre l'évolution de ces coefficients en fonction du rapport  $Z_1/Z_2$ . Si les deux milieux sont identiques ( $\rho_1 = \rho_2$  et  $c_1 = c_2$ ) alors logiquement  $R = 0$  et  $T = 1$ , il n'y a pas d'onde réfléchie et tout est transmis. Un cas intéressant est celui pour lequel  $Z_1 = Z_2$ , ce cas se comportera comme si les deux milieux de propagation étaient identiques (c'est ce qui se passe pour l'interface eau/chloroforme ( $\rho_{eau} = 1000 \text{kg.m}^{-3}$ ,  $c_{eau} \approx 1480 \text{m.s}^{-1}$ ,  $\rho_{chlo} = 1490 \text{kg.m}^{-3}$ ,  $c_{chlo} \approx 997 \text{m.s}^{-1}$ ). Lorsque  $Z_1 \gg Z_2$  alors  $R \approx -1$  et  $T \approx 0$ , c'est ce qui se passe par exemple dans le cas d'une réflexion/transmission à une interface eau/air ( $\rho_{eau} = 1000 \text{kg.m}^{-3}$ ,  $c_{eau} \approx 1480 \text{m.s}^{-1}$ ,  $\rho_{air} = 1.2 \text{kg.m}^{-3}$ ,  $c_{air} \approx 340 \text{m.s}^{-1}$ ). Dans le cas inverse  $Z_2 \gg Z_1$  (interface air/eau), alors  $R \approx 1$  et  $T \approx 2$ . La valeur du coefficient de transmission en amplitude peut sembler paradoxale car supérieure à 1. Nous allons voir que ce n'est pas grave car ce qui compte c'est l'énergie et pas l'amplitude (phrase mystérieuse qui prendra tout son sens dans le paragraphe suivant).

### Coefficients de réflexion et transmission en énergie

Ce paragraphe nécessite d'avoir étudié le chapitre sur l'énergie transportée par les ondes (cf chapitre 7). Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie, notés respectivement  $r$  et  $t$ , sont définis

comme l'intensité moyenne réfléchie (respectivement transmise) normalisée par l'intensité moyenne incidente :

$$\begin{cases} r = \frac{|\langle \underline{I}_r \rangle|}{|\langle \underline{I}_i \rangle|} \\ t = \frac{|\langle \underline{I}_t \rangle|}{|\langle \underline{I}_i \rangle|} \end{cases} \quad (9.8)$$

On rappelle que  $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  et que  $\langle f.g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(fg^*)$ . Les intensités moyennes sont :

$$|\langle \underline{I}_i \rangle| = |\langle p_{ai} \underline{v}_{ai} \rangle| = \left| \frac{1}{2} \text{Re}(p_{ai} \underline{v}_{ai}^*) \right| \quad (9.9)$$

On rappelle la relation d'impédance liant pression et vitesse en 1D :  $\underline{v}_{ai} = \frac{p_{ai}}{Z_1} n_i$ , On en déduit que :

$$|\langle \underline{I}_i \rangle| = \frac{|A|^2}{2Z_1} \quad (9.10)$$

Les autres intensités se calculent de la même manière :

$$|\langle \underline{I}_r \rangle| = \frac{|A|^2 |R|^2}{2Z_1} \quad (9.11)$$

et

$$|\langle \underline{I}_t \rangle| = \frac{|A|^2 |T|^2}{2Z_2} \quad (9.12)$$

On en déduit les coefficients en énergie :

$$\begin{cases} r = |R|^2 = \frac{(1-Z_1/Z_2)^2}{(1+Z_1/Z_2)^2} \\ t = \frac{Z_1}{Z_2} |T|^2 = 4 \frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{(1+Z_1/Z_2)^2} \end{cases} \quad (9.13)$$

L'évolution des coefficients  $r$  et  $t$  en fonction du rapport des impédances  $Z_1/Z_2$  est tracé sur la figure 9.5. Les coefficients  $r$  et  $t$  sont bien compris entre 0 et 1. Par ailleurs, on constate que

$$r + t = 1 \quad (9.14)$$

ce qui traduit bien le principe de conservation de l'énergie. Revenons au cas du paragraphe précédent,  $Z_2 \gg Z_1$ , on a  $r = 1$  et  $t = 0$  qui traduit le fait que toute l'énergie est réfléchie et aucune énergie n'est transmise.



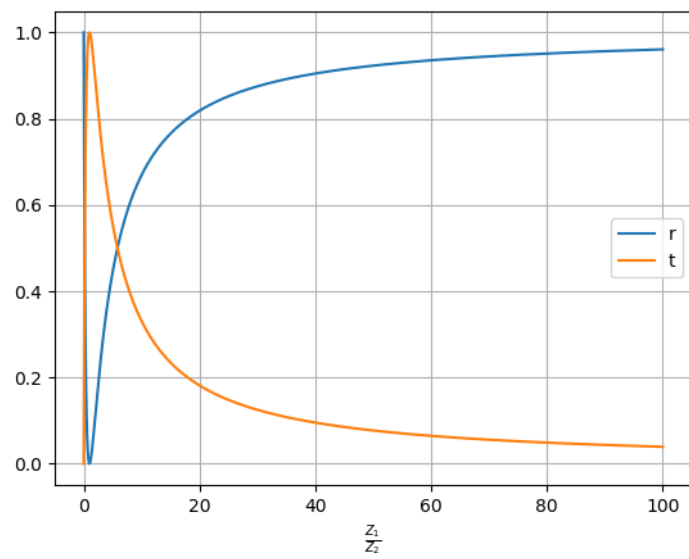


FIGURE 9.5 – Evolution des coefficients de réflexion et transmission en énergie en fonction du rapport des impédances  $Z_1/Z_2$

# Chapitre 10

## Réflexion-transmission entre deux milieux en incidence quelconque

### 10.1 Introduction

### 10.2 Réflexion et transmission d'ondes acoustiques à une interface entre deux milieux

#### 10.2.1 Lois de Snell-Descartes

On suppose qu'une onde plane progressive harmonique incidente se propage dans le milieu 1 :

$$p_i = A \exp [i (\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_i t)] = A \exp [i (k_{ix}x + k_{iz}z - \omega_i t)], \quad (10.1)$$

avec  $\underline{k} = (k_{ix}, 0, k_{iz})$ , donc la direction de propagation de l'onde incidente est dans le plan  $(x, z)$ .

D'après la relation de dispersion dans le fluide 1 :  $\underline{k}_i = k_i \underline{n}_i$  avec  $k_i = \omega_i / c_1$ .

L'angle entre la normale à l'interface et la direction de propagation incidente est noté  $\theta_i$ . Les composantes du vecteur d'ondes s'expriment en fonction de  $\theta_i$  :

$$\begin{cases} k_{ix} &= \frac{\omega_i}{c_1} \sin \theta_i \\ k_{iy} &= 0 \\ k_{iz} &= -\frac{\omega_i}{c_1} \cos \theta_i \end{cases} \quad (10.2)$$

Au passage de l'interface, l'onde plane progressive harmonique incidente génère une onde plane réfléchie et l'onde plane transmise :

$$\begin{aligned} p_R &= RA \exp [i(k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z - \omega_r t)], \\ p_T &= TA \exp [i(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z - \omega_t t)]. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Les coefficients  $R$  et  $T$  sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

Les relations de dispersion dans les milieux 1 et 2 imposent :

$$\begin{aligned} \|\underline{k}_r\| &= \frac{\omega_r}{c_1}, \\ \|\underline{k}_t\| &= \frac{\omega_t}{c_2}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

avec  $\underline{k}_r = (k_{rx}, k_{ry}, k_{rz})$  et  $\underline{k}_t = (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$ .

La condition de continuité de la pression en  $z = 0$  s'écrit :

$$p_1 = P_{01} + p_i + p_R = p_2 = P_{02} + p_T \quad (10.5)$$

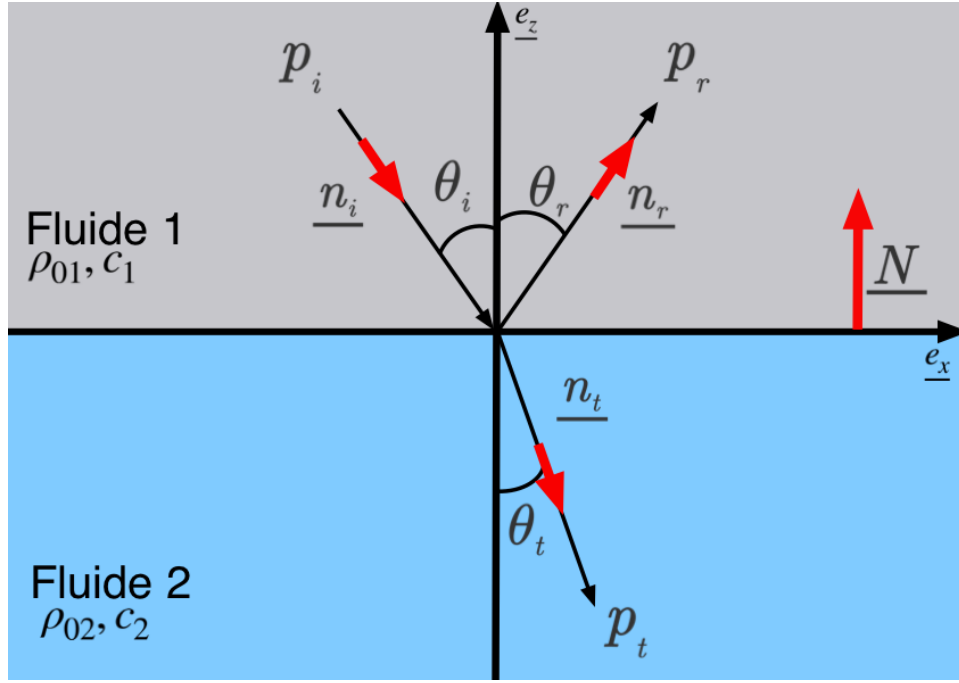


FIGURE 10.1 – Une onde incidente dans le fluide 1 vient se réfléchir sur une interface située en  $z = 0$ . On suppose que cette onde donne naissance à une onde réfléchi  $p_R$  dans le fluide 1 et une onde transmise  $p_T$  dans le fluide 2. On cherche les relations entre ces 3 ondes.

En l'absence d'onde acoustique, l'interface est à l'équilibre, et donc  $P_{01} = P_{02}$ . La condition d'équilibre mécanique devient donc en  $z = 0$ ,  $p_i + p_R = p_T$ , soit, en explicitant les pressions :

$$A \exp[i(k_{ix}x - \omega_i t)] + R A \exp[i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega_r t)] = T A \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega_t t)]$$

Cette condition doit être vérifiée en tout point de l'interface et à tout instant. Ceci ne pourra donc être vérifié que si les arguments des exponentielles sont égaux, à savoir :

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t, \\ 0 = k_{ry} = k_{ty}, \\ k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x \end{cases} \quad (10.6)$$

On déduit de ces 3 relations que :

1. la fréquence acoustique est inchangée. On note  $\omega$  la pulsation.
2. les directions de propagation des ondes réfléchies et transmises restent dans le plan  $(Oxz)$ .  
On introduit  $\theta_r$  et  $\theta_t$  repérant les vecteurs directions de propagation réfléchi  $\underline{n}_r$  et transmis  $\underline{n}_t$  par rapport à la normale à l'interface
3. le nombre d'onde dans la direction parallèle à l'interface est identique pour les trois ondes. On le notera simplement  $k_x$ .

D'après les remarques précédentes :

$$\begin{cases} k_{rx} = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_r, \\ k_{rz} = \frac{\omega}{c_1} \cos \theta_r, \\ k_{tx} = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t, \\ k_{tz} = -\frac{\omega}{c_2} \cos \theta_t. \end{cases}$$

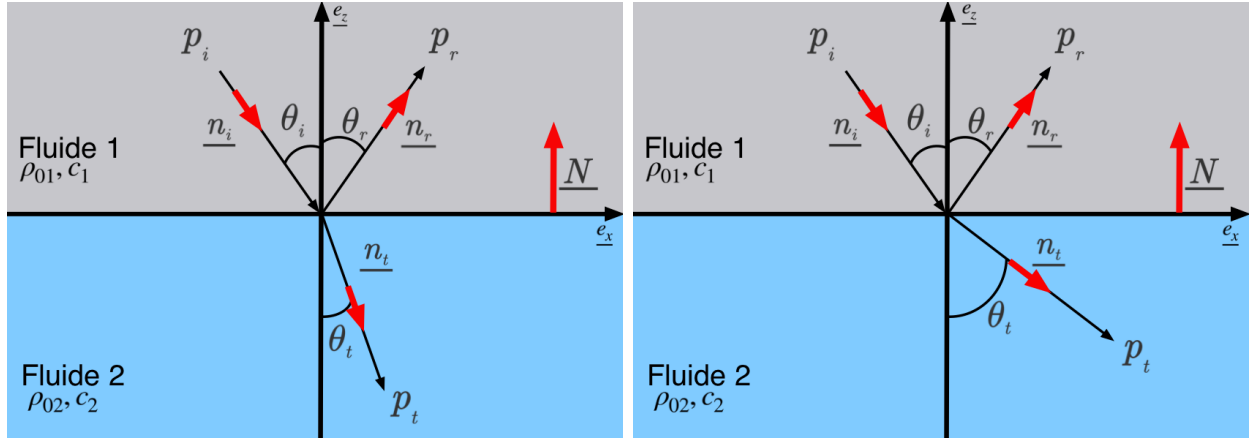


FIGURE 10.2 – Transmission à une interface plane : (à gauche)  $c_1 > c_2$  et (à droite)  $c_1 < c_2$

et :

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_r = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t.$$

donc  $\theta_r = \theta_i$  et  $\frac{\sin \theta_t}{c_2} = \frac{\sin \theta_i}{c_1}$

Ces relations sont connues sous le nom de lois de Snell-Descartes <sup>1</sup>

Remarquons que comme :  $\theta_t = \arcsin(\frac{c_2}{c_1} \sin(\theta_i))$ , si  $c_1 < c_2$ , on peut avoir  $\frac{c_2}{c_1} \sin(\theta_i) > 1$  et dans ce cas  $\theta_t$  n'est pas défini. Dans ce cas, il existe une onde se propageant uniquement à la surface du milieu 2 (cf TD problème de l'onde plane inhomogène).

La pression acoustique dans les milieux 1 et 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} p_1(x, z, t) &= A \exp i [k_x x + k_{iz} z - \omega t] + AR \exp i [k_x x + k_{rz} z - \omega t], \\ p_2(x, z, t) &= AT \exp i [k_x x + k_{tz} z - \omega t] \end{aligned}$$

## 10.2.2 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

La condition d'équilibre mécanique à l'interface :  $1 + R = T$ .

La condition de continuité des vitesses normales :  $(\underline{v}_i + \underline{v}_r) \cdot \underline{e}_z = \underline{v}_t \cdot \underline{e}_z$ .

Pour une onde plane progressive, on sait que :  $\underline{v} = \frac{p}{Z} \underline{n}$ .

Donc :

$$(R - 1) \frac{\cos \theta_i}{Z_1} = -T \frac{\cos \theta_t}{Z_2}, \quad (10.7)$$

ou encore en fonction des nombres d'onde :

$$\frac{k_{iz}}{\rho_{01}} (R - 1) = -T \frac{k_{tz}}{\rho_{02}}. \quad (10.8)$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission :

$$R = \frac{\cos \theta_i - \frac{Z_1}{Z_2} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \frac{Z_1}{Z_2} \cos \theta_t} \quad (10.9)$$

$$T = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{Z_1}{Z_2} \cos \theta_t} \quad (10.10)$$

1. elles ont été établies en optique par Descartes en 1637, sans doute à partir des travaux antérieurs de Snell

ou, en fonction des nombres d'onde :

$$R = \frac{k_{iz} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} k_{tz}}{k_{iz} + \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} k_{tz}}, \quad (10.11)$$

$$T = \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} k_{tz}}. \quad (10.12)$$

Cas particulier important : **l'incidence normale** ( $\theta_i = 0$ ).

D'après les lois de Snell-Descartes, l'angle de transmission est nul :  $\theta_t = 0$  (génération d'une onde suivant  $-\underline{e}_z$  dans le milieu 2). Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (10.9 et 10.10) se simplifient :

$$R = \frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}},$$

$$T = \frac{2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}.$$

On retrouve les résultats obtenus en incidence normale.

### 10.3 Réflexion d'ondes élastiques à une surface libre

On considère une interface entre deux milieux 1 et 2 avec deux points  $M$  et  $M'$  situés de part et d'autre de l'interface (et infiniment proches). Les conditions de continuité sont :

— **Continuité du déplacement** :

$$\underline{u}(M, t) = \underline{u}(M', t)$$

Rmq : pour une interface solide/liquide seule la composante normale est continue

— **Continuité de la tension mécanique (vecteur contrainte)** :

$$T_i(M, t) = T'_i(M', t)$$

avec  $T_i = \sigma_{ij}n_j$ .

Pour une surface libre la continuité de la tension mécanique impose donc :  $T_i = 0$

Le déplacement total est  $\underline{u} = \underline{u}_I + \underline{u}_L + \underline{u}_T$

$$\underline{u}_I(\underline{x}, t) = \underline{U} e^{i(\underline{k}_I \cdot \underline{x} - \omega t)} = \underline{U} e^{ik_I(x \sin \theta_I + z \cos \theta_I - c_L t)} \quad (10.13)$$

$$\underline{u}_L(\underline{x}, t) = \underline{U}_L e^{i(\underline{k}_L \cdot \underline{x} - \omega t)} = \underline{U}_L e^{ik_L(x \sin \theta_{RL} - z \cos \theta_{RL} - c_L t)} \quad (10.14)$$

$$\underline{u}_T(\underline{x}, t) = \underline{U}_T e^{i(\underline{k}_T \cdot \underline{x} - \omega t)} = \underline{U}_T e^{ik_R(x \sin \theta_{RT} - z \cos \theta_{RT} - c_T t)} \quad (10.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{U} &= A(\sin \theta_I \underline{e}_x + \cos \theta_I \underline{e}_z) \\ \underline{U}_L &= AR_L(\sin \theta_{RL} \underline{e}_x - \cos \theta_{RL} \underline{e}_z) \\ \underline{U}_T &= AR_T(\cos \theta_{RT} \underline{e}_x + \sin \theta_{RT} \underline{e}_z) \end{aligned}$$

A l'interface, les **lois de Snell-Descartes** s'appliquent :

$$\frac{\sin \theta_I}{c_L} = \frac{\sin \theta_{RL}}{c_L} = \frac{\sin \theta_{RT}}{c_T}$$

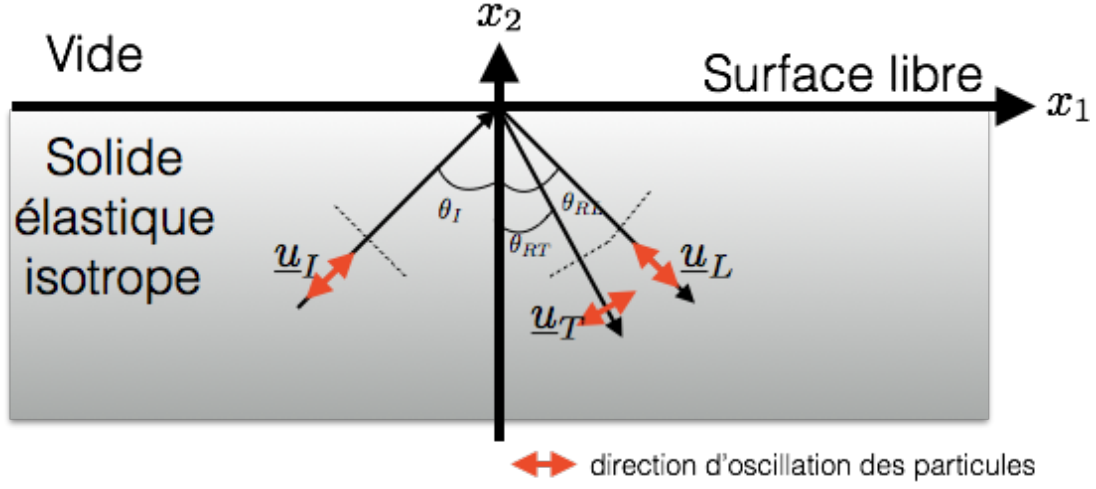


FIGURE 10.3 – Une onde plane longitudinale incidente  $\underline{u}_I$  se propage dans un solide isotrope et se réfléchit sur une surface libre (interface solide/vide). On suppose qu'elle donne naissance à deux ondes réfléchies :  $\underline{u}_L$  une onde longitudinale et  $\underline{u}_T$  une onde transverse et on cherche les relations entre ces différentes ondes.

Par conséquent,  $\theta_I = \theta_{RL}$  et  $\theta_{RT} < \theta_{RL}$  car  $c_L > c_T$ . Compte tenu des lois de Snell Descartes, le déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) = & \underline{U} e^{i\omega \left( \frac{x \sin \theta_I + z \cos \theta_I}{c_L} - t \right)} \\ & + \underline{U}_L e^{i\omega \left( \frac{x \sin \theta_I - z \cos \theta_I}{c_L} - t \right)}, \\ & + \underline{U}_T e^{i\omega \left( \frac{x \sin \theta_{RT} - z \cos \theta_{RT}}{c_T} - t \right)}. \end{aligned}$$

La continuité de la tension mécanique à travers l'interface en  $z = 0$  impose que  $T'_i = T_i = 0$  soit :

$$\sigma_{iz} n_z = 0$$

On relie ensuite les contraintes aux déformations par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

et les déformations aux déplacements (définition du tenseur des déformations linéarisée) :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Après calcul, on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = iA\rho c_T^2 (k_I(1 - R_L) \sin(2\theta_I) - k_T R_T \cos(2\theta_{RT})) e^{\Omega} \\ \sigma_{zz} = iA\rho c_L^2 (k_I(1 + R_L) \cos(2\theta_{RT})) + iA\rho c_T^2 (k_T R_T \sin(2\theta_{RT})) e^{\Omega} \end{cases}$$

avec  $\Omega = i(k_I x \sin \theta_I - \omega t)$ ,  $k_I = \omega/c_L$  et  $k_T = \omega/c_T$ .

En introduisant les impédances caractéristiques du milieu  $Z_L = \rho c_L$  et  $Z_T = \rho c_T$ , il vient :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = iA\omega \frac{c_T}{c_L} ((1 - R_L)Z_T \sin(2\theta_I) - R_T Z_L \cos(2\theta_{RT})) e^{\Omega} \\ \sigma_{zz} = iA\omega ((1 + R_L)Z_L \cos(2\theta_{RT}) - R_T Z_T \sin(2\theta_{RT})) e^{\Omega} \end{cases}$$

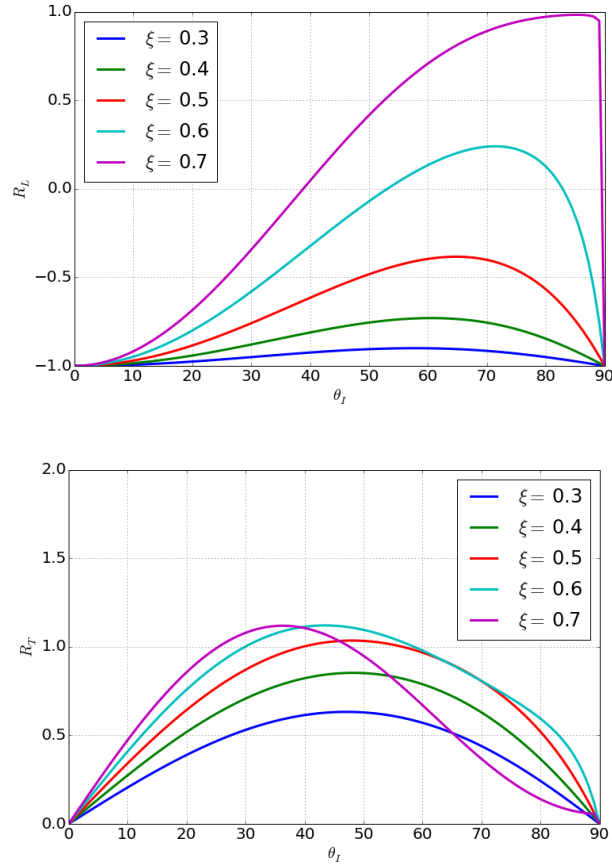


FIGURE 10.4 – Coefficients de réflexion des ondes longitudinales (en haut) et transverses (en bas) en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du rapport des vitesses longitudinales et transverses.

Finalement, on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} (1 - R_L)Z_T \sin(2\theta_I) - R_T Z_L \cos(2\theta_{RT}) = 0 \\ (1 + R_L)Z_L \cos(2\theta_{RT}) - R_T Z_T \sin(2\theta_{RT}) = 0 \end{cases}$$

où  $R_L$  et  $R_T$  sont les inconnues recherchées. En posant  $\xi = Z_T/Z_L = c_T/c_L$ , on trouve :

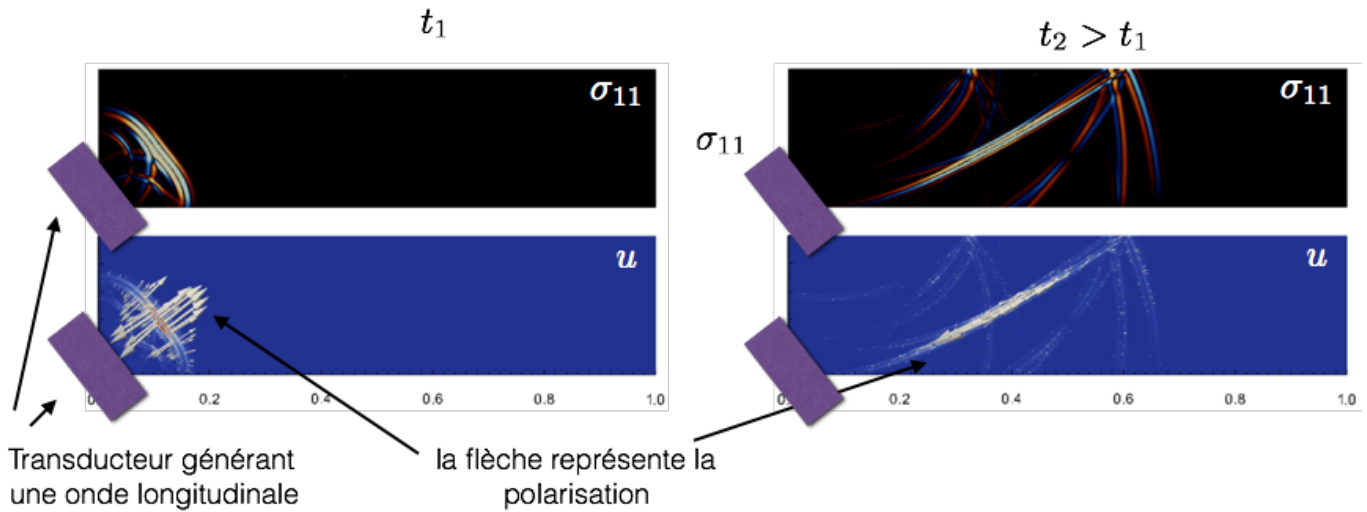
$$\begin{cases} R_L = \frac{\xi^2 \sin(2\theta_I) \sin(2\theta_{RT}) - \cos^2(2\theta_T)}{\xi^2 \sin(2\theta_I) \sin(2\theta_{RT}) + \cos^2(2\theta_{RT})}, \\ R_T = \frac{2\xi \sin(2\theta_I) \cos(2\theta_{RT})}{\xi^2 \sin(2\theta_I) \sin(2\theta_{RT}) + \cos^2(2\theta_{RT})}. \end{cases}$$

Les expressions de  $R_L$  et  $R_T$  montrent que dans le cas général, une onde longitudinale engendre des ondes longitudinales et transverses si elle se réfléchit sur les frontières du domaine. On parle alors de **conversion modes**. L'évolution des coefficients  $R_L$  et  $R_T$  en fonction de l'angle d'incidence sont tracées sur la figure 10.3 pour différents valeurs du rapport des vitesses longitudinales et transverses  $\xi$ .

Il faut souligner **2 cas particuliers** importants :

1. le cas de l'incidence normale  $\theta_I = 0$ , dans ce cas :

$$\begin{cases} R_L = -1, \\ R_T = 0. \end{cases}$$



il n'y a pas de conversion d'ondes longitudinales en ondes transverses. Les ondes générées par la réflexion à l'interface sont uniquement longitudinales.

- les cas pour lesquels  $R_L = 0$ . Ces cas ne sont possibles que si  $\xi > 0.565$  (cf figure 10.3), dans ce cas, à la réflexion, l'onde incidente longitudinale est entièrement convertie en une transverse (pas d'onde longitudinale réfléchie). Ce phénomène est visible sur la figure 10.3. Cette figure présente les champs de déplacement (en bas) et de contrainte ( $\sigma_{xx}$  en haut) générés par un transducteur (en bas à gauche) dans le solide à deux instants différents (gauche  $t_1$  et droite  $t_2 = t_1 + T$ ). Les flèches visibles sur le champ de déplacement représentent la polarisation de l'onde. On voit sur la partie de gauche (avant réflexion) que les flèches sont orientées dans la direction de propagation de l'onde (donc onde longitudinale), en revanche sur la partie de droite qui présente le champ après réflexion, les flèches sont perpendiculaires à la direction de propagation (donc onde transverse).

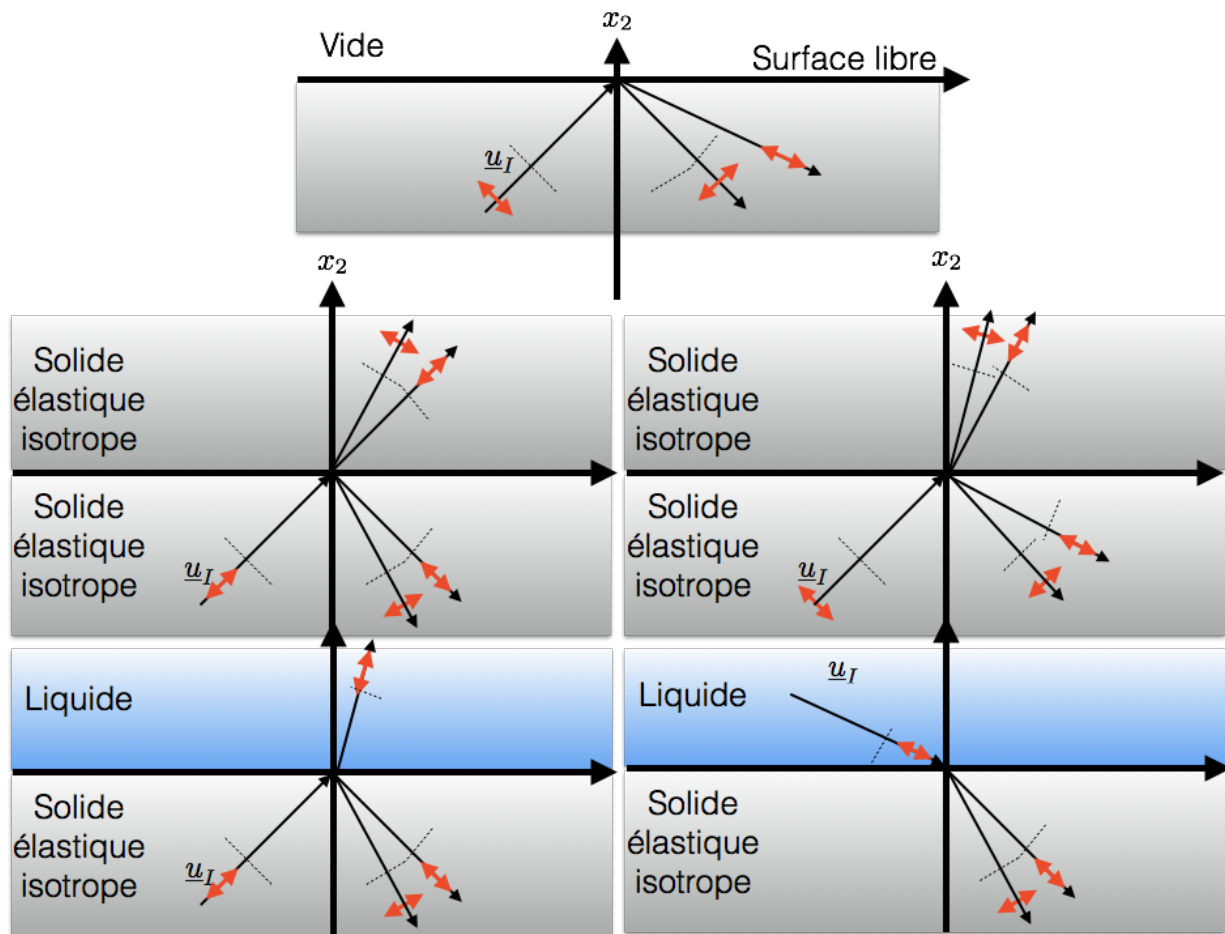
Le cas précédent solide/vide est un cas particulier. En suivant le même principe on peut étudier beaucoup d'autres systèmes

### Pour aller plus loin ...

La partie précédente montre que la réflexion d'une onde longitudinale sur une interface libre est un phénomène riche. D'autres configurations peuvent être envisagées comme l'illustre la figure 10.3 :

- réflexion d'une onde transverse sur une interface solide/vide,
- réflexion/transmission d'une onde longitudinale sur une interface solide/solide,
- réflexion/transmission d'une onde transverse sur une interface solide/liquide,
- réflexion/transmission d'une onde longitudinale sur une interface solide/fluide,,
- réflexion/transmission d'une onde transverse sur une interface solide/fluide,,
- réflexion/transmission d'une onde longitudinale sur une interface liquide/solide,
- d'autres configurations impliquant des ondes de surfaces (Rayleigh, etc), ondes de flexion (plaques), etc ...





# Chapitre 11

## Du discret au continu : Propagation d'ondes dans une chaîne d'oscillateurs couplés

### 11.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la propagation d'ondes sur une chaîne d'oscillateurs. Le système choisi est une chaîne de perroquet : un ensemble d'oscillateurs en torsion. Le système est présenté sur la figure 11.1, une vidéo est disponible à l'adresse <https://youtu.be/vIWz4oSgib4>. Un oscillateur individuel est constitué d'un pic à brochettes sur lequel sont fixés symétriquement deux marshmallows. Tous les oscillateurs sont couplés grâce à du ruban adhésif large.

### 11.2 Modélisation

#### 11.2.1 Modèle pour un seul oscillateur

Dans cette partie, on ne considère qu'un seul oscillateur (cf figure 11.2). Cet oscillateur est constitué d'une tige sur laquelle sont fixées deux masses  $M$  à égales distances du centre de la tige. On note  $J_0$  le moment d'inertie de l'oscillateur par rapport à l'axe  $x$  ( $[J_0]=\text{kg m}^{-2}$ ). La tige peut osciller autour de l'axe  $x$  et  $\alpha$  et on note  $\alpha$  la raideur en torsion exercée par l'axe sur la tige ( $[\alpha]=\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$ ). Le mouvement de l'oscillateur est repéré par l'angle  $\theta$  : angle entre la tige et l'horizontale.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique on trouve :

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha\theta \quad (11.1)$$

Cette relation s'écrit encore sous la forme classique d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (11.2)$$

où on a fait apparaître la pulsation propre du système  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{J_0}}$

La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique est :

$$\theta(x, t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (11.3)$$

Pour les conditions initiales suivantes : angle imposé  $\theta_0$  à  $t = 0$  et vitesse initiale nulle, on trouve :

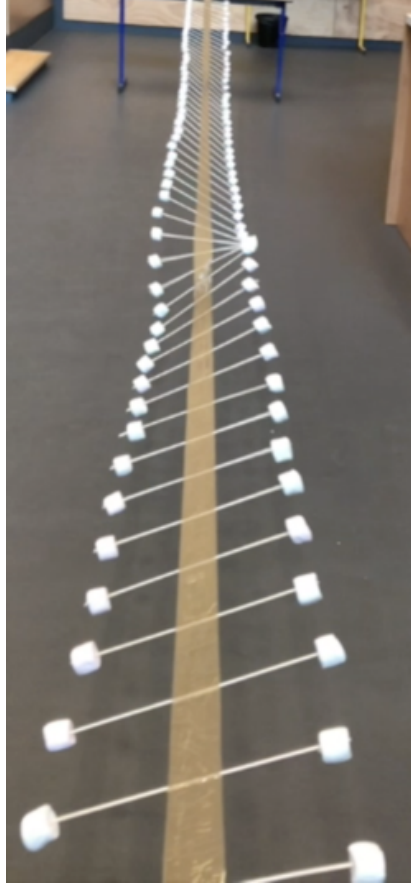


FIGURE 11.1 – Propagation d’une onde de torsion le long d’une chaîne de perroquet

$$\theta(x, t) = \theta_0 \cos \omega_0 t. \quad (11.4)$$

Le système va osciller à la pulsation  $\omega_0$  entre les angles  $\pm\theta_0$ .

### 11.2.2 Modèle pour la chaîne d’oscillateurs couplés

On considère maintenant une chaîne d’oscillateurs constitués des oscillateurs décrits dans le paragraphe précédents (figure 11.3 espacés régulièrement d’une distance  $d$ ).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l’oscillateur  $j$  s’écrit :

$$J_0 \frac{d^2 \theta_j}{dt^2} = \alpha(\theta_{j+1} - \theta_j) + \alpha(\theta_{j-1} - \theta_j) \quad (11.5)$$

Cette relation se met sous la forme :

$$\frac{d^2 \theta_j}{dt^2} = \omega_0^2 (\theta_{j+1} + \theta_{j-1} - 2\theta_j) \quad (11.6)$$

C’est l’équation du mouvement du  $j$ ème oscillateur. Dans la partie suivante, pour voir si ce système permet la propagation d’ondes, nous allons chercher la solution sous la forme d’une onde progressive harmonique

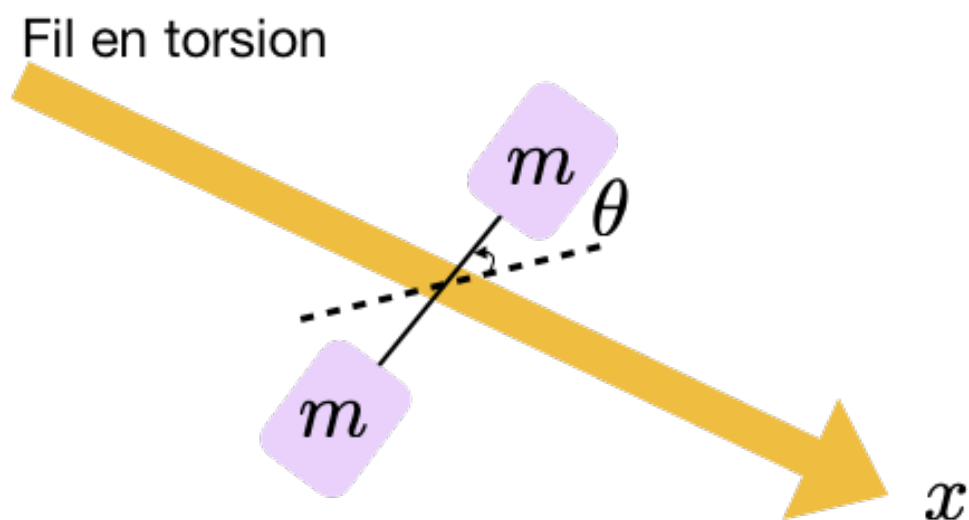


FIGURE 11.2 – Modélisation d'un oscillateur en torsion seul

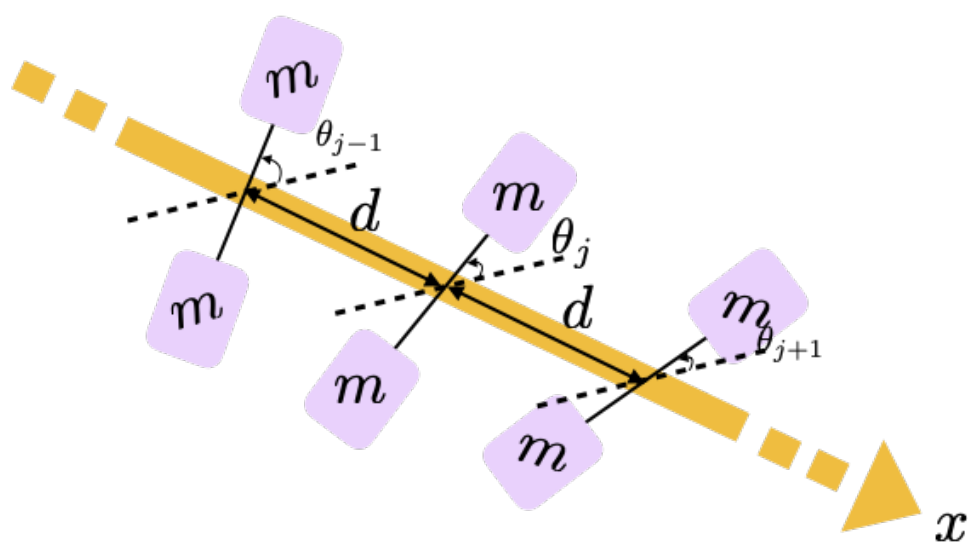


FIGURE 11.3 – Modélisation d'une chaîne d'oscillateurs en torsion : la chaîne de perroquet

## 11.3 Propagation d'ondes dans la chaîne d'oscillateur couplés

### 11.3.1 Relation de dispersion de l'équation discrète

La solution du problème (eq. 11.6) est cherchée sous la forme d'une onde progressive harmonique :

$$\theta_j = \theta(x_j, t) = Ae^{i(kx_j - \omega t)} \quad (11.7)$$

avec :  $x_j = jd$  la position du  $j$ ème oscillateur. En injectant l'onde progressive harmonique dans l'équation du mouvement, on trouve :

$$-\omega^2 Ae^{i(kx_j - \omega t)} = \omega_0^2 A (e^{i(kx_{j+1} - \omega t)} + e^{i(kx_{j-1} - \omega t)} - 2e^{i(kx_j - \omega t)}) \quad (11.8)$$

cette relation peut se simplifier :

$$\begin{aligned} -\omega^2 e^{ikjd} &= \omega_0^2 (e^{i(k(j+1)d} + e^{i(k(j-1)d} - 2e^{i(kjd)}) \\ &= \omega_0^2 e^{ikjd} (e^{ikd} + e^{-ikd} - 2) \\ &= \omega_0^2 e^{ikjd} (2 \cos(kd) - 2) \\ &= 2\omega_0^2 e^{ikjd} (\cos(kd) - 1) \\ &= -2\omega_0^2 e^{ikjd} 2 \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation de dispersion de la chaîne de d'oscillateurs couplés en torsion est :

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \quad (11.9)$$

Cette relation montre que conformément aux observations expérimentales faites dans l'introduction, les ondes de torsion peuvent se propager sur la chaîne d'oscillateurs si la relation de dispersion est satisfaite. La figure 11.4 montre l'évolution de la pulsation normalisée ( $\omega/\omega_0$ ) en fonction de  $kd$ .

La vitesse de phase associée aux ondes de torsion est :

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0}{k} \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \quad (11.10)$$

La vitesse de phase dépend de la fréquence, les ondes de torsion sont des ondes dispersives.

La vitesse de groupe associée aux ondes de torsion est :

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \omega_0 d \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \quad (11.11)$$

Les vitesses de phase et de groupe normalisées ( $c_\phi/(\omega_0 d)$ ) et  $c_g/(\omega_0 d)$  sont tracées sur la figure 11.5 (vitesse de phase à gauche et vitesse de groupe à droite).

On remarque que ces vitesses ont une valeur constante lorsque la longueur d'onde est grande devant la distance entre deux oscillateurs ( $kd \ll 1$  soit  $2\pi d \ll \lambda$ ). Dans cette limite, le comportement est donc non dispersif.

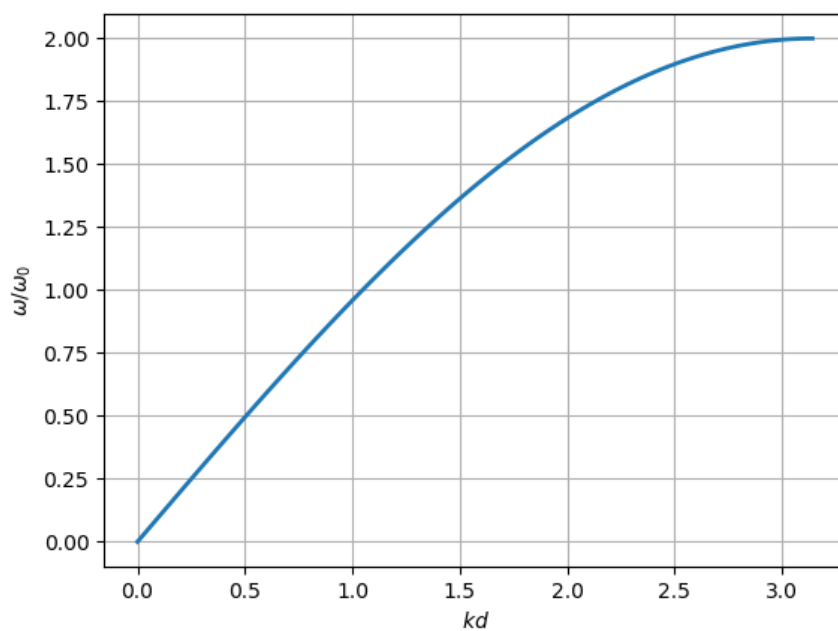


FIGURE 11.4 – Relation de dispersion pour les ondes se propageant sur l'échelle de perroquet

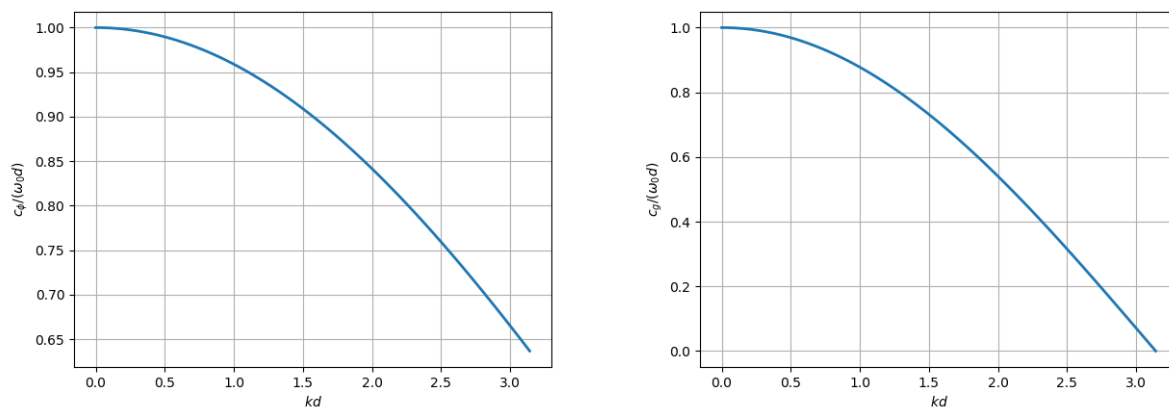


FIGURE 11.5 – Vitesses de phase (à gauche) et de groupe (à droite)

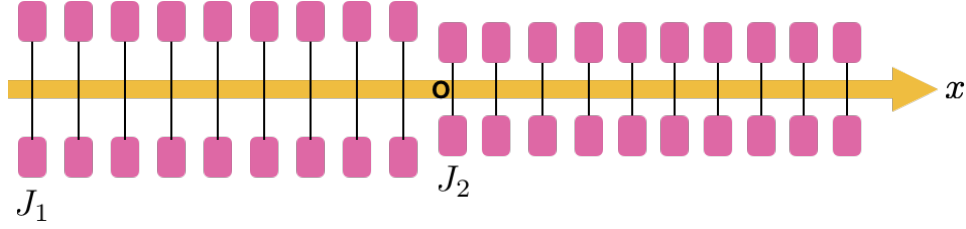


FIGURE 11.6 – Chaîne d'oscillateurs en torsion avec deux catégories d'oscillateurs

### 11.3.2 Limite des milieux continus

Lorsque la longueur d'onde est grande devant la distance entre deux oscillateurs, on parle de limite des milieux continus. En effet, dans ce régime l'onde ( $\lambda$ ) "voit" le milieu dans lequel elle se propage comme un milieu continu ( $d \ll 1$ ). D'après le paragraphe précédent, la propagation dans ce régime est non dispersive. Nous allons établir ce résultat d'une autre manière en repartant de l'équation du mouvement (eq. 11.6) :

$$\frac{d^2\theta_j}{dt^2} = \omega_0^2(\theta_{j+1} + \theta_{j-1} - 2\theta_j)$$

Comme  $d \ll \lambda$ , on fait un développement de Taylor des fonctions  $\theta_{j-1}$  et  $\theta_{j+1}$  :

$$\theta_{j-1} = \theta(x - d, t) = \theta(x, t) - \frac{\partial\theta}{\partial x}d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}d^2 + \dots \quad (11.12)$$

$$\theta_{j+1} = \theta(x + d, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}d^2 + \dots \quad (11.13)$$

En reportant ces développements dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \omega_0^2 \left( \theta(x, t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}d^2 + \theta(x, t) - \frac{\partial\theta}{\partial x}d + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}d^2 - 2\theta(x, t) \right) \quad (11.14)$$

$$= \omega_0^2 d^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad (11.15)$$

En remarquant que  $\omega_0^2 d^2$  est homogène à une vitesse au carré, on pose  $c_0^2 = \omega_0^2 d^2$  et on obtient :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \quad (11.16)$$

on reconnaît l'équation de d'Alembert qui caractérise la propagation d'ondes non dispersives dont la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales à  $c_0$  :

$$c_\phi = c_g = c_0. \quad (11.17)$$

Ce résultat est cohérent avec l'analyse des vitesses de phase et de groupe du paragraphe précédent.

### 11.3.3 Réflexion et transmission sur une chaîne d'oscillateurs couplés

On considère une chaîne d'oscillateurs couplés en torsion dont les masses constituant un oscillateur sont plus écartées pour  $x < 0$  que pour  $x \geq 0$  (figure 11.6). Le fait de changer ce paramètre modifie le moment d'inertie d'un oscillateur unique : on note  $J_1$  le moment d'inertie des oscillateurs pour  $x < 0$  et  $J_2$  le moment d'inertie des oscillateurs pour  $x \geq 0$ . On s'intéresse au problème d'une onde incidente générée dans la partie  $x < 0$  et se propageant vers les  $x$  croissants. On suppose que

la longueur d'onde est grande devant la distance entre deux oscillateurs  $kd \ll 1$ . Dans ce cas, on peut se placer dans la cadre des milieux continus et écrire que l'onde se propage dans deux milieux différents :

1. milieu de célérité  $c_1^2 = \frac{\alpha}{J_1} d^2$  pour  $x < 0$  avec l'équation de propagation

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

et la relation de dispersion

$$\omega = k_1 c_1$$

2. milieu de célérité  $c_2^2 = \frac{\alpha}{J_2} d^2$  pour  $x \geq 0$  avec l'équation de propagation

$$\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

et la relation de dispersion

$$\omega = k_2 c_2$$

On suppose que l'onde incidente est une onde progressive harmonique :

$$\theta_I(x, t) = A e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

A l'interface entre les deux milieux, cette onde donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise qui s'écrivent respectivement :

$$\theta_R(x, t) = A R e^{i(-k_1 x - \omega t)}$$

et

$$\theta_T(x, t) = A T e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

où  $R$  et  $T$  sont respectivement, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

A l'interface ( $x = 0$ ), l'angle  $\theta$  est continu :

$$\theta_I(x = 0, t) + \theta_R(x = 0, t) = \theta_T(x = 0, t)$$

Ainsi,

$$1 + R = T$$

On a aussi continuité du couple à l'interface :

$$\frac{\partial \theta_I}{\partial x}(x = 0, t) + \frac{\partial \theta_R}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial \theta_T}{\partial x}(x = 0, t)$$

On obtient :

$$k_1(1 - R) = k_2 T$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \\ T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \end{cases} \quad (11.18)$$

Les amplitudes des coefficients  $R$  et  $T$  dépendent des vitesses de propagation dans les deux milieux.



## 11.4 Conclusions

Lorsqu'une infinité d'oscillateurs sont couplés, une onde peut se propager le long de la chaîne ainsi formée. On retrouve ainsi la notion de vibration autour de la position d'équilibre que nous avons utilisée dans la modélisation des différents systèmes dans les chapitres précédents. Dans le cas de l'onde de torsion le long de l'échelle de perroquet, les ondes sont dispersives. Cependant dans la limite "grande longueur d'onde" (ou milieux continus), l'onde est régit par l'équation de d'Alembert. On peut alors appliquer tous les résultats obtenus précédemment : vitesse de phase, de groupe, réflexion/transmission, énergie. Ce comportement se retrouve dans beaucoup de chaîne d'oscillateurs (une chaîne linéaire de masses/ressorts, chaîne de pendules, ...).