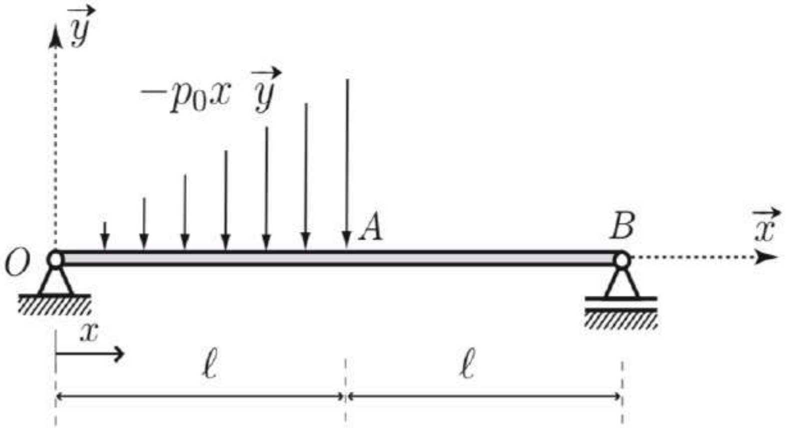
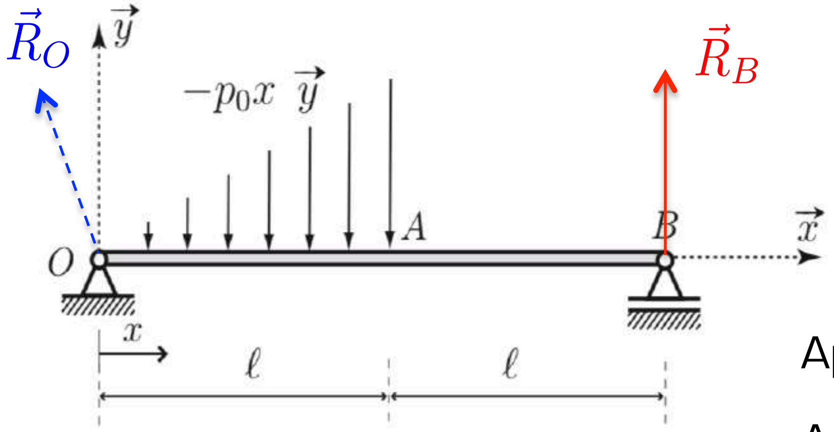
Écrit du mercredi 23 mai 2018



Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \vec{t} = \vec{x}$$
$$\vec{n} = \vec{y} \qquad \vec{b} = \vec{z}$$

Écrit du mercredi 23 mai 2018



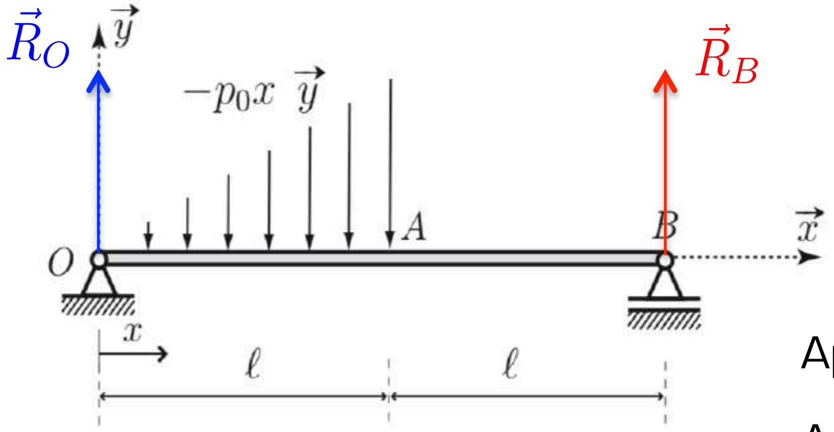
Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \vec{t} = \vec{x}$$
$$\vec{n} = \vec{y} \qquad \vec{b} = \vec{z}$$

Appui simple fixe en O : $\vec{R}_O = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y}$

Appui simple mobile (glissant) en B : $\vec{R}_B = Y_B \vec{y}$

Écrit du mercredi 23 mai 2018



Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \vec{t} = \vec{x}$$
$$\vec{n} = \vec{y} \qquad \vec{b} = \vec{z}$$

Appui simple fixe en O : $\vec{R}_O = X_O\vec{x} + Y_O\vec{y}$

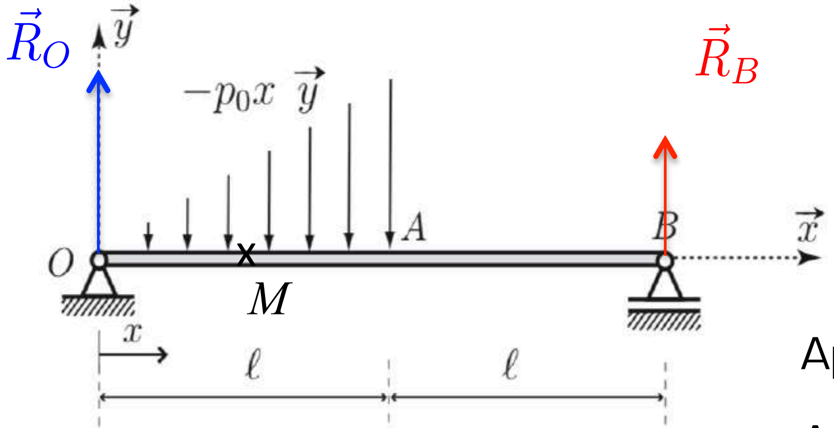
Appui simple mobile (glissant) en B : $\vec{R}_B = Y_B\vec{y}$

Principe fondamental de la statique (ou **Équilibre global**), donne **efforts de liaison :**

- *En efforts (théorème de la résultante) :*

$$\overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R_B} + \int_0^{\ell} -p_0 x \overrightarrow{y}\, dx = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X_O = 0} \quad \text{et} \quad Y_O + Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{2}$$

Écrit du mercredi 23 mai 2018



Choix de la base de Frenet :

$$ds = dx \qquad \vec{t} = \vec{x}$$
$$\vec{n} = \vec{y} \qquad \vec{b} = \vec{z}$$

Appui simple fixe en O : $\vec{R}_O = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y}$

Appui simple mobile (glissant) en B : $\vec{R}_B = Y_B \vec{y}$

Principe fondamental de la statique (ou **Équilibre global**), donne **efforts de liaison :**

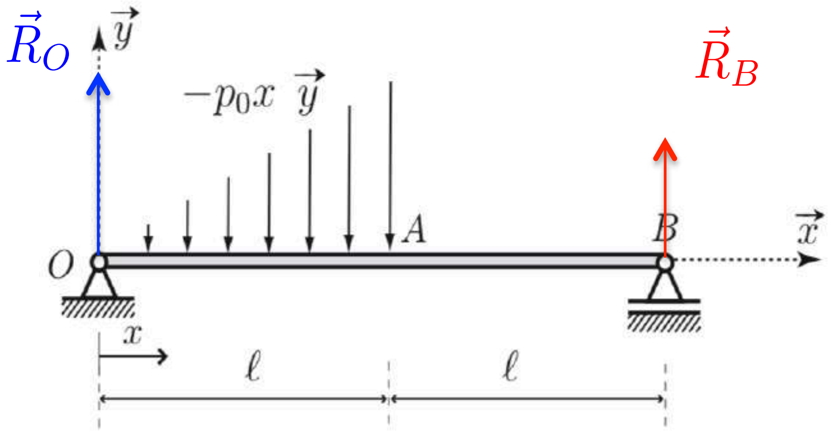
- *En efforts (théorème de la résultante) :*

$$\overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R_B} + \int_0^\ell -p_0 x \vec{y} \, dx = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X_O = 0} \quad \text{et} \quad Y_O + Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{2}$$

- *En moments en O (théorème du moment) :*

$$\overrightarrow{OB} \wedge Y_B \vec{y} + \int_0^\ell \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 x) \vec{y} \, dx = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2\ell \, Y_B - p_0 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\ell = 0$$

soit $\boxed{Y_B = \dfrac{p_0 \ell^2}{6}}$ puis $\boxed{Y_O = \dfrac{p_0 \ell^2}{3}}$

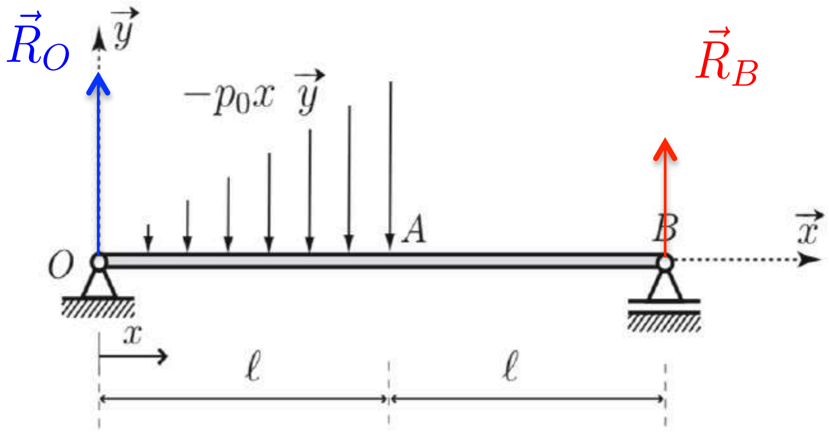


$$\bullet\ 0 < x < \ell$$

Équilibre local donne les **efforts de cohésion :**

- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} - p_0 x\,\vec{y} = \vec{0}$$



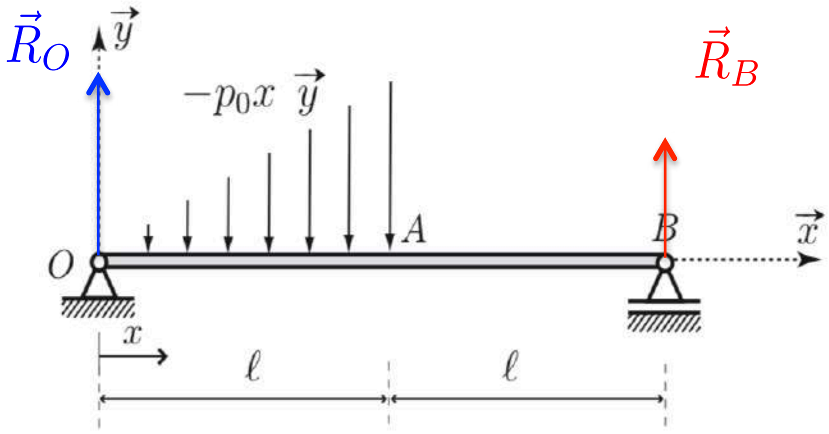
$$\bullet\, 0 < x < \ell$$

Équilibre **local** donne les **efforts de** **cohésion :**

- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} - p_0 x\,\vec{y} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2}\vec{y} + \overrightarrow{C_1} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(0) = -Y_O\,\vec{y} = \overrightarrow{C_1}.$$



$\bullet\ 0 < x < \ell$

Équilibre local donne les **efforts de cohésion :**

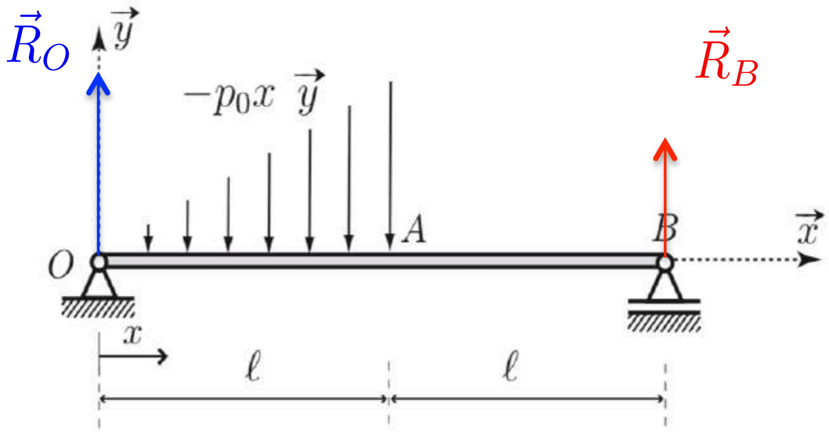
- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} - p_0 x\,\vec{y} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2}\vec{y} + \overrightarrow{C_1} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(0) = -Y_O\,\vec{y} = \overrightarrow{C_1}.$$

En 2D on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x) = N^{①}(x)\vec{x} + T_y^{①}(x)\vec{y} = \left(\frac{p_0 x^2}{2} - Y_O\right)\vec{y}$$



$\bullet\ 0 < x < \ell$

Équilibre local donne les **efforts de cohésion :**

- *En efforts :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathfrak{R}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} - p_0 x \vec{y} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{R}}^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2}\vec{y} + \overrightarrow{C_1} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{\mathfrak{R}}^{①}(0) = -Y_O \vec{y} = \overrightarrow{C_1}.$$

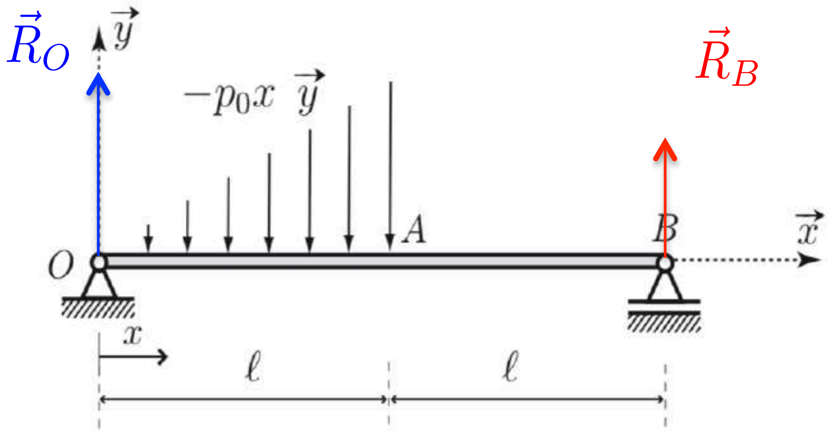
En 2D on a :

$$\overrightarrow{\mathfrak{R}}^{①}(x) = N^{①}(x)\vec{x} + T_y^{①}(x)\vec{y} = \left(\frac{p_0 x^2}{2} - Y_O\right)\vec{y}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{N^{①}(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_y^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2} - Y_O = \frac{p_0}{6}\left(3x^2 - 2\ell^2\right)}$$

Effort normal nul

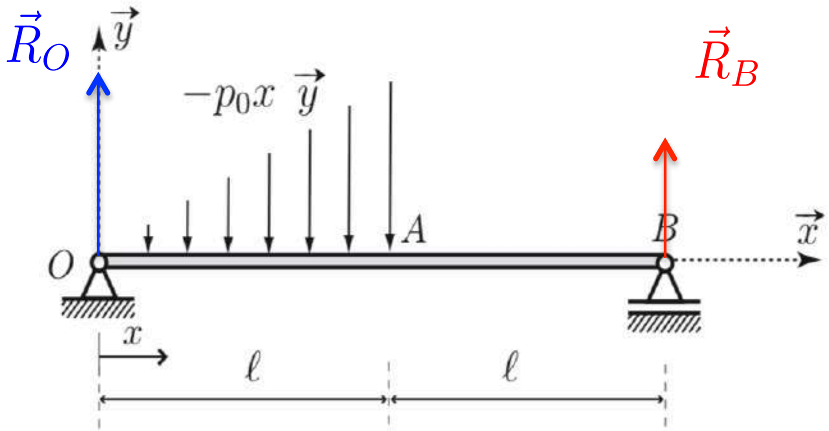
Effort tranchant sur y = quadratique



- *En* *moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}^{(1)}(x)}{\mathrm{d}x} + \vec{x} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}}^{(1)}(x) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M_z^{(1)}(x)}{\mathrm{d}x} + T_y^{(1)}(x) = 0$$



- *En moments :*

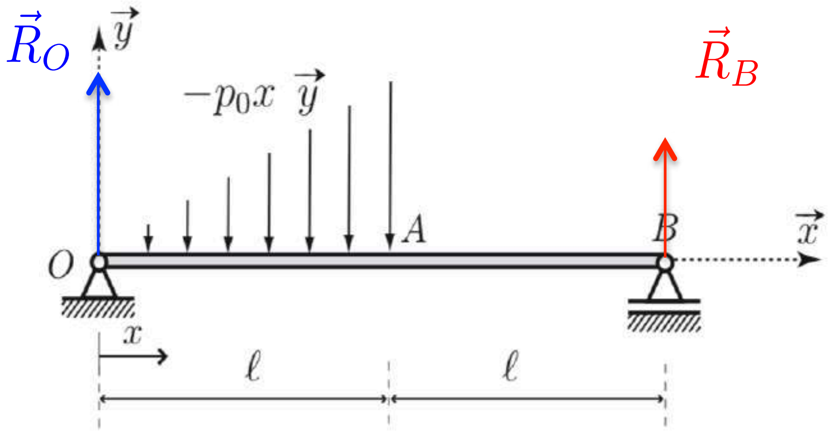
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} + \vec{x} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M_z^{①}(x)}{\mathrm{d}x} + T_y^{①}(x) = 0$$

On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}M_z^{①}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0 x^2}{2} + Y_O$$

Soit : $$M_z^{①}(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + Y_O x + C_2.$$



- *En moments :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}^{①}(x)}{\mathrm{d}x} + \vec{x} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}^{①}(x) = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M_z^{①}(x)}{\mathrm{d}x} + T_y^{①}(x) = 0$$

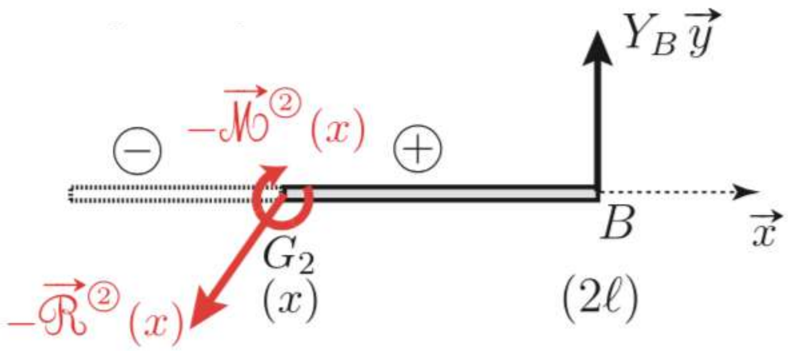
On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}M_z^{①}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0 x^2}{2} + Y_O$$

Soit : $M_z^{①}(x) = -\dfrac{p_0 x^3}{6} + Y_O x + C_2.$

Or $M_z^{①}(0) = 0$ donc $C_2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{M_z^{①}(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + Y_O x = -\frac{p_0}{6} x \left(x^2 - 2\ell^2\right)}.$$

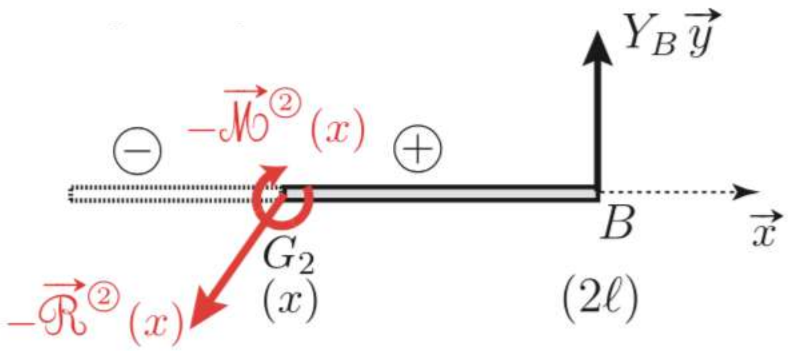


$$\bullet\ \ell < x < 2\ell$$

Méthode des **coupures** donne les **efforts de** **cohésion :**

On isole la partie droite, on considère donc les efforts de la partie (-) sur la partie (+)

$$\left\{\mathcal{C}_{\ominus\rightarrow\oplus}\right\}_{G_2} = -\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathcal{R}}^{②}(x)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}^{②}(x)\end{array}\right\}_{G_2}$$



- $\ell < x < 2\ell$

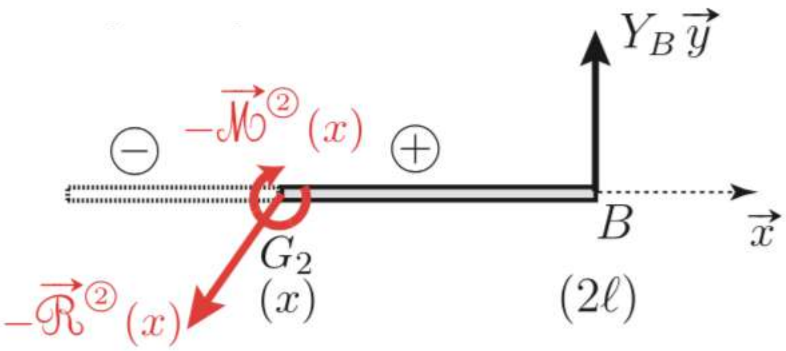
Méthode des coupures donne les **efforts de cohésion :**

On isole la partie droite, on considère donc les efforts de la partie (-) sur la partie (+)

$$\left\{\mathcal{C}_{\ominus\to\oplus}\right\}_{G_2} = -\left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}^{②}(x)\\ \vec{\mathcal{M}}^{②}(x)\end{array}\right\}_{G_2}$$

- *En efforts :*

$$-\vec{\mathcal{R}}^{②}(x) + Y_B\,\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{R}}^{②}(x) = N^{②}(x)\,\vec{x} + T_y^{②}(x)\,\vec{y} = Y_B\,\vec{y}$$



• $\ell < x < 2\ell$

Méthode des **coupures** donne les **efforts de cohésion :**

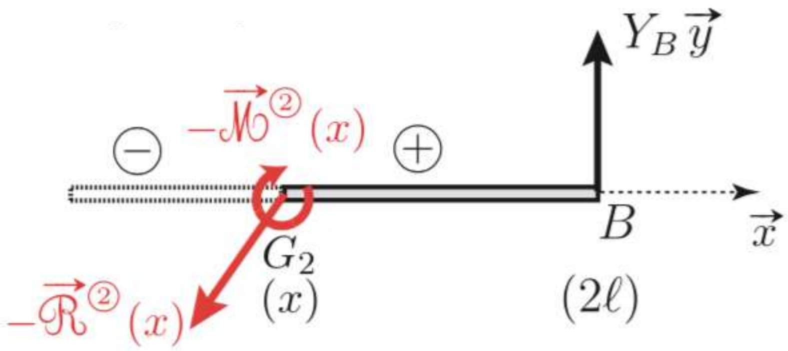
On isole la partie droite, on considère donc les efforts de la partie (-) sur la partie (+)

$$\{\mathcal{C}_{\ominus\rightarrow\oplus}\}_{G_2} = -\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathcal{R}}^{②}(x)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}^{②}(x)\end{array}\right\}_{G_2}$$

- *En efforts :*

$$-\overrightarrow{\mathcal{R}}^{②}(x) + Y_B\,\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{\mathcal{R}}^{②}(x) = N^{②}(x)\,\vec{x} + T_y^{②}(x)\,\vec{y} = Y_B\,\vec{y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N^{②}(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_y^{②}(x) = Y_B = \frac{p_0\ell^2}{6}}$$



• $\ell < x < 2\ell$

Méthode des coupures donne les **efforts de cohésion :**

On isole la partie droite, on considère donc les efforts de la partie (-) sur la partie (+)

$$\{\mathcal{C}_{\ominus \to \oplus}\}_{G_2} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}^{②}(x) \\ \vec{\mathcal{M}}^{②}(x) \end{array} \right\}_{G_2}$$

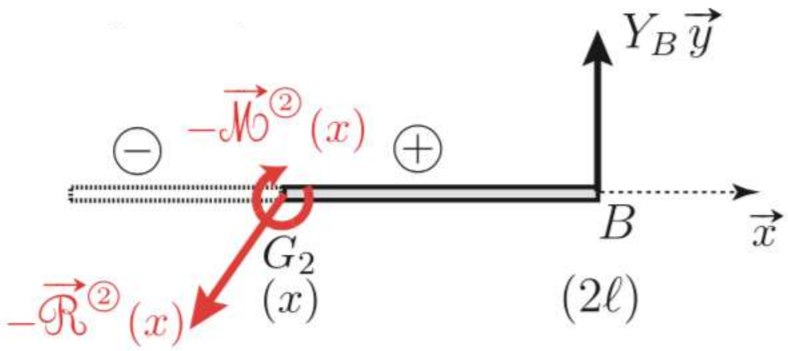
- *En efforts :*

$$-\vec{\mathcal{R}}^{②}(x) + Y_B\,\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{R}}^{②}(x) = N^{②}(x)\,\vec{x} + T_y^{②}(x)\,\vec{y} = Y_B\,\vec{y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N^{②}(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_y^{②}(x) = Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{6}}$$

- *En moments :*

$$-\vec{\mathcal{M}}^{②}(x) + \overrightarrow{G_2B} \wedge Y_B\,\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{M}}^{②}(x) = M_z^{②}(x)\,\vec{z} = (2\ell - x)\,\vec{x} \wedge Y_B\,\vec{y}$$



• $\ell < x < 2\ell$

Méthode des coupures donne les **efforts de cohésion :**

On isole la partie droite, on considère donc les efforts de la partie (-) sur la partie (+)

$$\{\mathcal{C}_{\ominus\to\oplus}\}_{G_2} = -\left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}^{②}(x)\\ \vec{\mathcal{M}}^{②}(x)\end{array}\right\}_{G_2}$$

- *En efforts :*

$$-\vec{\mathcal{R}}^{②}(x) + Y_B\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{R}}^{②}(x) = N^{②}(x)\vec{x} + T_y^{②}(x)\vec{y} = Y_B\vec{y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N^{②}(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_y^{②}(x) = Y_B = \frac{p_0\ell^2}{6}}$$

- *En moments :*

$$-\vec{\mathcal{M}}^{②}(x) + \overrightarrow{G_2B} \wedge Y_B\vec{y} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mathcal{M}}^{②}(x) = M_z^{②}(x)\vec{z} = (2\ell - x)\vec{x} \wedge Y_B\vec{y}$$

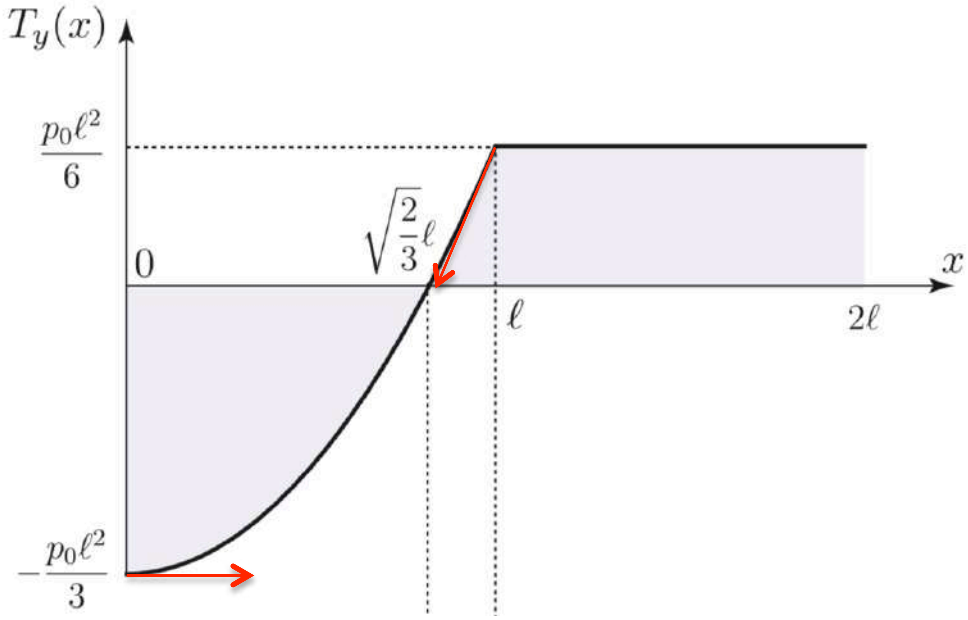
$$\Longrightarrow \boxed{M_z^{②}(x) = -(x-2\ell)Y_B = -\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)}$$

$$\boxed{T_y^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2} - Y_O = \frac{p_0}{6}\left(3x^2 - 2\ell^2\right)}$$

$$\boxed{T_y^{②}(x) = Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{6}}$$

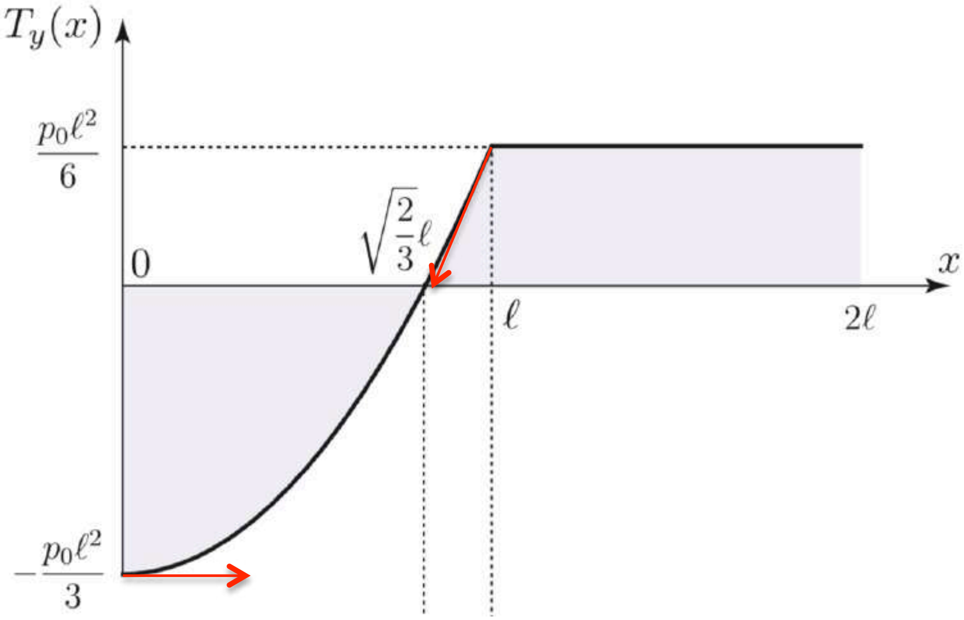
$$\frac{dT_y^{(1)}}{dx} = p_0 x \qquad \frac{dT_y^{(1)}}{dx}(x=0) = 0$$

$$\frac{dT_y^{(1)}}{dx}(x=\ell) = p_0 \ell$$



$$\boxed{T_y^{①}(x) = \frac{p_0 x^2}{2} - Y_O = \frac{p_0}{6}\left(3x^2 - 2\ell^2\right)}$$

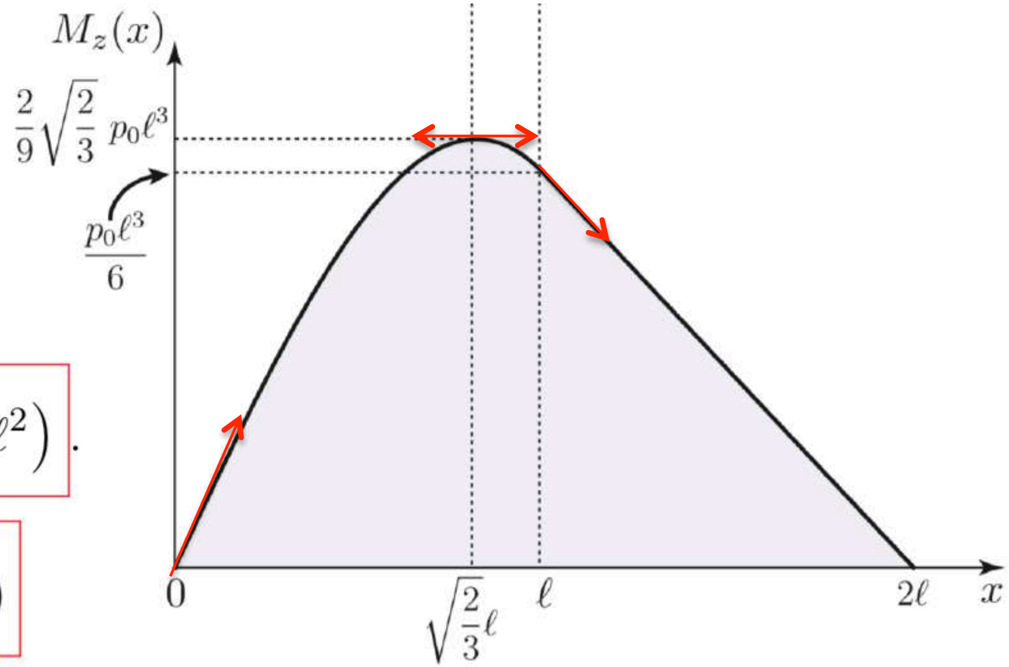
$$\boxed{T_y^{②}(x) = Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{6}}$$



$$\frac{dM_z^{(1)}}{dx} = -\frac{p_0}{6}(3x^2 - 2\ell^2)$$

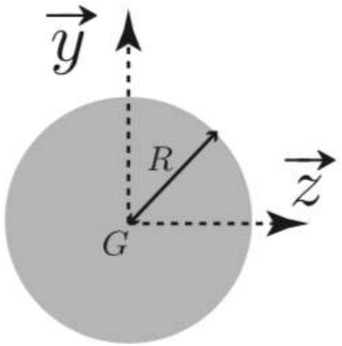
$$\frac{dM_z^{(1)}}{dx}(x=0) = \frac{p_0\ell^2}{3}$$

$$\frac{dM_z^{(1)}}{dx} = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell$$



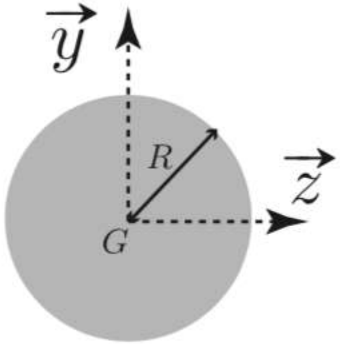
$$\boxed{M_z^{①}(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + Y_O x = -\frac{p_0}{6}x\left(x^2 - 2\ell^2\right)}.$$

$$\boxed{M_z^{②}(x) = -(x - 2\ell)Y_B = -\frac{p_0\ell^2}{6}(x - 2\ell)}$$



Moment d'inertie suivant z :

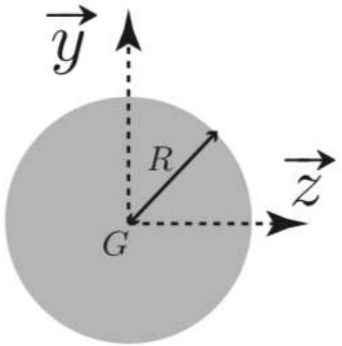
$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} (r \cos\theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$



Moment d'inertie suivant z :

$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} (r\cos\theta)^2\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\, d\theta \int_0^{R} r^3\, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

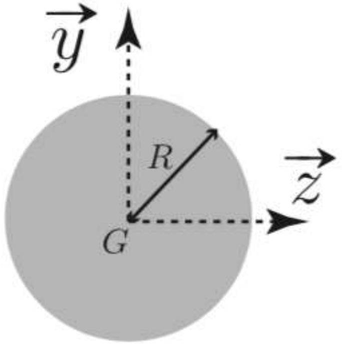


Moment d'inertie suivant z :

$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r\cos\theta)^2\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\, d\theta \int_0^R r^3\, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Contrainte normale :

$$\boxed{\sigma_{xx}(x,y,z) = \underbrace{\frac{N(x)}{S}}_{\text{traction-compression}} + \underbrace{z\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y\frac{M_z(x)}{I_{Gz}}}_{\text{flexion (évolution linéaire en y et z)}}}$$



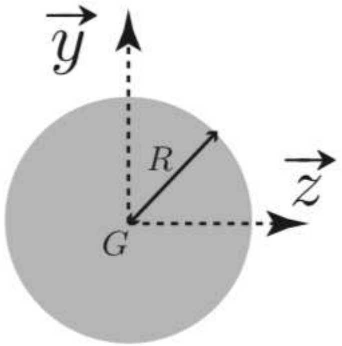
Moment d'inertie suivant z :

$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} (r\cos\theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Contrainte normale :

$$\boxed{\sigma_{xx}(x,y,z) = \underbrace{\frac{N(x)}{S}}_{\text{traction-compression}} + \underbrace{z\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y\frac{M_z(x)}{I_{Gz}}}_{\substack{\text{flexion} \\ \text{(évolution linéaire en y et z)}}}}$$

Or : $N(x) = M_y(x) = 0$ d'où : $\sigma_{xx} = -y\dfrac{M_z(x)}{I_{Gz}} = -y\dfrac{M_z(x)}{I}.$



Moment d'inertie suivant z :

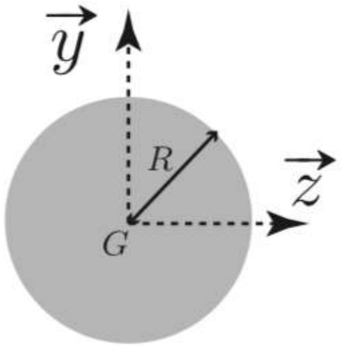
$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r\cos\theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Contrainte normale :

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \underbrace{\frac{N(x)}{S}}_{\text{traction-compression}} + \underbrace{z\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y\frac{M_z(x)}{I_{Gz}}}_{\substack{\text{flexion} \\ \text{(évolution linéaire en y et z)}}}$$

Or : $N(x) = M_y(x) = 0$ d'où : $\sigma_{xx} = -y\dfrac{M_z(x)}{I_{Gz}} = -y\dfrac{M_z(x)}{I}.$

Au final : $$|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|y|_{max} \, |M_z(x)|_{max}}{I} = \frac{R \, \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}} \, p_0 \ell^3}{\frac{\pi R^4}{4}} \boxed{= \frac{8}{9\pi}\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_0 \ell^3}{R^3}}$$



Moment d'inertie suivant z :

$$I_{Gz} = I = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r\cos\theta)^2\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\, d\theta \int_0^R r^3\, dr = \boxed{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Contrainte normale :

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = \underbrace{\frac{N(x)}{S}}_{\text{traction-compression}} + \underbrace{z\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y\frac{M_z(x)}{I_{Gz}}}_{\substack{\text{flexion} \\ \text{(évolution linéaire en y et z)}}}$$

Or : $N(x) = M_y(x) = 0$ d'où : $\sigma_{xx} = -y\dfrac{M_z(x)}{I_{Gz}} = -y\dfrac{M_z(x)}{I}$.

Au final : $$|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|y|_{max}\,|M_z(x)|_{max}}{I} = \frac{R\,\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\,p_0\ell^3}{\frac{\pi R^4}{4}} \boxed{= \frac{8}{9\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{p_0\ell^3}{R^3}}$$

Dimensionnement :

$$|\sigma_{xx}|_{max} \leq \sigma_\ell \implies \boxed{R \geq \left(\frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{p_0}{\pi\sigma_\ell}\right)^{1/3} \ell = R_{min}}.$$

Rotation de la section droite $\omega_z(x)$ et flèche $u_y(x)$:

En utilisant les lois de comportement : $M_z = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$ et $T_y = \mu S \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)}_{\varepsilon_y}$

Hypothèse d'Euler Bernoulli : $\varepsilon_y = 0 \quad \rightarrow \omega_z(x) = \dfrac{du_y(x)}{dx}$

Rotation de la section droite $\omega_z(x)$ et flèche $u_y(x)$:

En utilisant les lois de comportement : $M_z = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$ et $T_y = \mu S \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)}_{\varepsilon_y}$

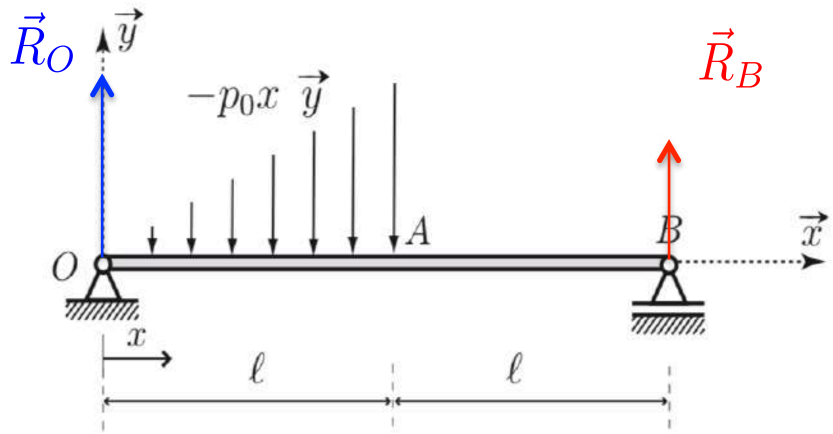
Hypothèse d'Euler Bernoulli : $\varepsilon_y = 0 \quad \rightarrow \omega_z(x) = \dfrac{du_y(x)}{dx}$

$\bullet\ 0 < x < \ell$

$$EI\omega_z^{①}(x) = EI\frac{\mathrm{d}u_y^{①}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) + C_1$$

$$EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) + C_1 x + C_2$$

Or : $u_y^{①}(0) = 0 \implies \boxed{C_2 = 0}$



Rotation de la section droite $\omega_z(x)$ et flèche $u_y(x)$:

En utilisant les lois de comportement : $M_z = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$ et $T_y = \mu S \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)}_{\varepsilon_y}$

Hypothèse d'Euler Bernoulli : $\varepsilon_y = 0 \quad \rightarrow \omega_z(x) = \dfrac{du_y(x)}{dx}$

• $0 < x < \ell$

$$EI\omega_z^{①}(x) = EI\frac{\mathrm{d}u_y^{①}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) + C_1$$

$$EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) + C_1 x + C_2$$

Or : $u_y^{①}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_2 = 0}$

• $\ell < x < 2\ell$

$$EI\omega_z^{②}(x) = EI\frac{\mathrm{d}u_y^{②}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0\ell^2}{12}(x-2\ell)^2 + \overline{C}_1$$

$$EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0\ell^2}{36}(x-2\ell)^3 + \overline{C}_1(x-2\ell) + \overline{C}_2$$

Or : $u_y^{②}(2\ell) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overline{C}_2 = 0}$

Rotation de la section droite $\omega_z(x)$ et flèche $u_y(x)$:

En utilisant les lois de comportement : $M_z = EI_{Gz}\dfrac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}x}$ et $T_y = \mu S \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} - \omega_z\right)}_{\varepsilon_y}$

Hypothèse d'Euler Bernoulli : $\varepsilon_y = 0 \quad \rightarrow \omega_z(x) = \dfrac{du_y(x)}{dx}$

• $0 < x < \ell$

$$EI\omega_z^{1}(x) = EI\frac{\mathrm{d}u_y^{1}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) + C_1$$

$$EIu_y^{1}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) + C_1 x + C_2$$

Or : $u_y^{1}(0) = 0 \implies \boxed{C_2 = 0}$

• $\ell < x < 2\ell$

$$EI\omega_z^{2}(x) = EI\frac{\mathrm{d}u_y^{2}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_0\ell^2}{12}(x-2\ell)^2 + \overline{C}_1$$

$$EIu_y^{2}(x) = -\frac{p_0\ell^2}{36}(x-2\ell)^3 + \overline{C}_1(x-2\ell) + \overline{C}_2$$

Or : $u_y^{2}(2\ell) = 0 \implies \boxed{\overline{C}_2 = 0}$

Pour déterminer les constantes restantes il faut assurer la continuité de la rotation et de la flèche en $x = \ell$

□ $\omega_z^{1}(\ell) = \omega_z^{2}(\ell) \implies -\dfrac{p_0\ell^4}{6}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) + C_1 = -\dfrac{p_0\ell^4}{12} + \overline{C}_1 \implies \overline{C}_1 - C_1 = \dfrac{5p_0\ell^4}{24}$

Rotation de la section droite $\omega_z(x)$ et flèche $u_y(x)$:

En utilisant les lois de comportement : $M_z = EI_{Gz}\dfrac{d\omega_z}{dx}$ et $T_y = \mu S \underbrace{\left(\dfrac{du_y}{dx} - \omega_z\right)}_{\varepsilon_y}$

Hypothèse d'Euler Bernoulli : $\varepsilon_y = 0 \quad \rightarrow \omega_z(x) = \dfrac{du_y(x)}{dx}$

$\bullet\ 0 < x < \ell$

$$EI\omega_z^{①}(x) = EI\frac{du_y^{①}(x)}{dx} = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) + C_1$$

$$EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) + C_1 x + C_2$$

Or : $u_y^{①}(0) = 0 \implies \boxed{C_2 = 0}$

$\bullet\ \ell < x < 2\ell$

$$EI\omega_z^{②}(x) = EI\frac{du_y^{②}(x)}{dx} = -\frac{p_0\ell^2}{12}(x-2\ell)^2 + \overline{C}_1$$

$$EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0\ell^2}{36}(x-2\ell)^3 + \overline{C}_1(x-2\ell) + \overline{C}_2$$

Or : $u_y^{②}(2\ell) = 0 \implies \boxed{\overline{C}_2 = 0}$

Pour déterminer les constantes restantes il faut assurer la continuité de la rotation et de la flèche en $x = \ell$

- ☐ $\omega_z^{①}(\ell) = \omega_z^{②}(\ell) \implies -\dfrac{p_0\ell^4}{6}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) + C_1 = -\dfrac{p_0\ell^4}{12} + \overline{C}_1 \implies \overline{C}_1 - C_1 = \dfrac{5p_0\ell^4}{24}$

- ☐ $u_y^{①}(\ell) = u_y^{②}(\ell) \implies -\dfrac{p_0\ell^5}{6}\left(\dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{3}\right) + C_1\ell = \dfrac{p_0\ell^5}{36} - \overline{C}_1\ell \implies \overline{C}_1 + C_1 = -\dfrac{7p_0\ell^4}{360}$

donc $\boxed{C_1 = -\dfrac{41p_0\ell^4}{360} \quad \text{et} \quad \overline{C}_1 = \dfrac{34p_0\ell^4}{360}}$

Au final on obtient les résultats suivants :

$$\boxed{EI\omega_z^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360} x}$$

$$\boxed{EI\omega_z^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{12}(x - 2\ell)^2 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{36}(x - 2\ell)^3 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}(x - 2\ell)}$$

Au final on obtient les résultats suivants :

$$\boxed{EI\omega_z^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360}x}$$

$$\boxed{EI\omega_z^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{12}(x-2\ell)^2 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{36}(x-2\ell)^3 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}(x-2\ell)}$$

On peut donc calculer la **rotation et la flèche en A** :

$$EI\omega_A = EI\omega_z^{②}(\ell) = -\frac{p_0 \ell^4}{12} + \frac{34 p_0 \ell^4}{360} = \frac{4 p_0 \ell^4}{360} = \frac{p_0 \ell^4}{90}.$$

$$\boxed{\omega_A = \frac{p_0 \ell^4}{90 EI}}$$

Au final on obtient les résultats suivants :

$$\boxed{EI\omega_z^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360} x}$$

$$\boxed{EI\omega_z^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{12}(x - 2\ell)^2 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{36}(x - 2\ell)^3 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}(x - 2\ell)}$$

On peut donc calculer la **rotation et la flèche en A** :

$$EI\omega_A = EI\omega_z^{②}(\ell) = -\frac{p_0 \ell^4}{12} + \frac{34 p_0 \ell^4}{360} = \frac{4 p_0 \ell^4}{360} = \frac{p_0 \ell^4}{90}.$$

$$\boxed{\omega_A = \frac{p_0 \ell^4}{90 EI}}$$

$$EIv_A = EIu_y^{②}(\ell) = \frac{p_0 \ell^5}{36} - \frac{34 p_0 \ell^5}{360} = -\frac{24 p_0 \ell^5}{360} = -\frac{p_0 \ell^5}{15}$$

$$\boxed{v_A = -\frac{p_0 \ell^5}{15 EI}}$$

Au final on obtient les résultats suivants :

$$\boxed{EI\omega_z^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^4}{4} - \ell^2 x^2\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{①}(x) = -\frac{p_0}{6}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\ell^2 x^3}{3}\right) - \frac{41 p_0 \ell^4}{360} x}$$

$$\boxed{EI\omega_z^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{12}(x - 2\ell)^2 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}}$$

$$\boxed{EIu_y^{②}(x) = -\frac{p_0 \ell^2}{36}(x - 2\ell)^3 + \frac{34 p_0 \ell^4}{360}(x - 2\ell)}$$

On peut donc calculer la **rotation et la flèche en A** :

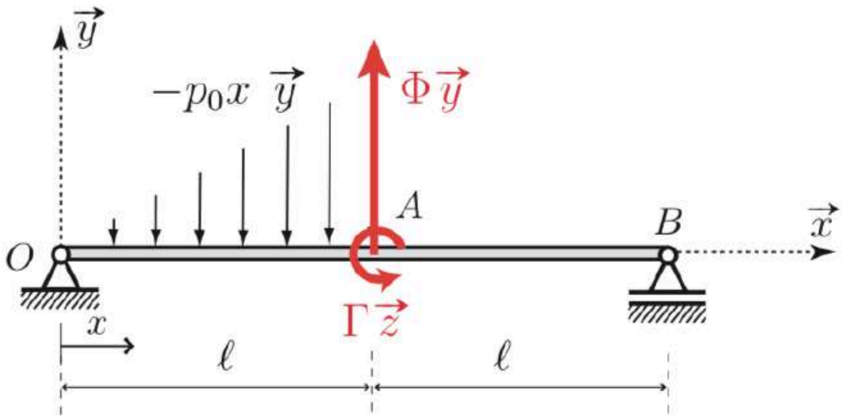
$$EI\omega_A = EI\omega_z^{②}(\ell) = -\frac{p_0 \ell^4}{12} + \frac{34 p_0 \ell^4}{360} = \frac{4 p_0 \ell^4}{360} = \frac{p_0 \ell^4}{90}.$$

$$\boxed{\omega_A = \frac{p_0 \ell^4}{90 EI}}$$

$$EIv_A = EIu_y^{②}(\ell) = \frac{p_0 \ell^5}{36} - \frac{34 p_0 \ell^5}{360} = -\frac{24 p_0 \ell^5}{360} = -\frac{p_0 \ell^5}{15}$$

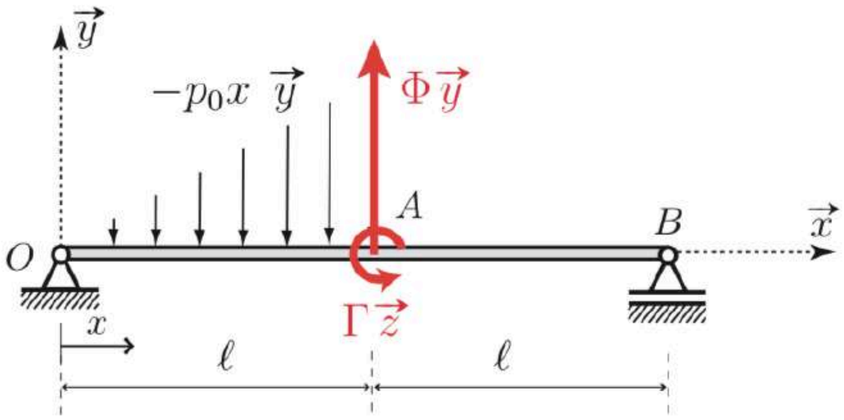
$$\boxed{v_A = -\frac{p_0 \ell^5}{15 EI}}$$

On propose ensuite de retrouver ces résultats par les **méthodes énergétiques**



Méthode de la charge fictive (Théorème de Bertrand de Fontviolant)

On ajoute une **force ponctuelle** suivant y en A pour calculer la flèche et un **moment ponctuel** porté par z pour y calculer la rotation.



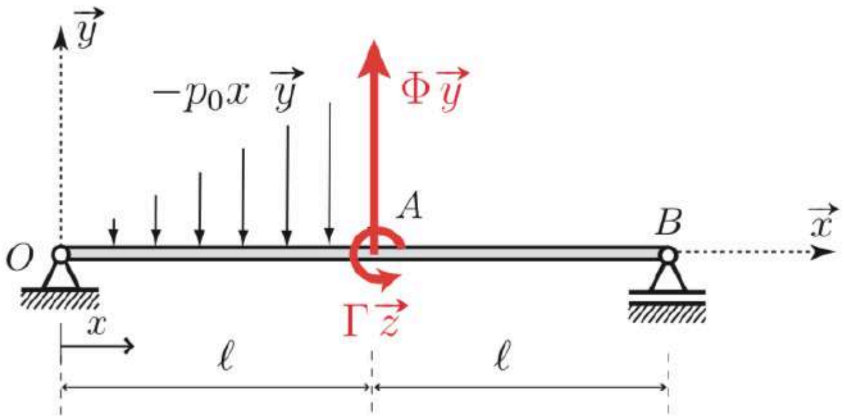
Méthode de la charge fictive (Théorème de Bertrand de Fontviolant)

On ajoute une **force ponctuelle** suivant y en A pour calculer la flèche et un **moment ponctuel** porté par z pour y calculer la rotation.

Équilibre global, donne **efforts de liaison :**

- *En efforts :*

$$\overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R_B} + \int_0^{\ell} -p_0 x \vec{y}\, dx + \Phi \vec{y} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X_O = 0} \quad \text{et} \quad Y_O + Y_B = \frac{p_0 \ell^2}{2} - \Phi$$



Méthode de la charge fictive (Théorème de Bertrand de Fontviolant)

On ajoute une **force ponctuelle** suivant y en A pour calculer la flèche et un **moment ponctuel** porté par z pour y calculer la rotation.

Équilibre global, donne **efforts de liaison :**

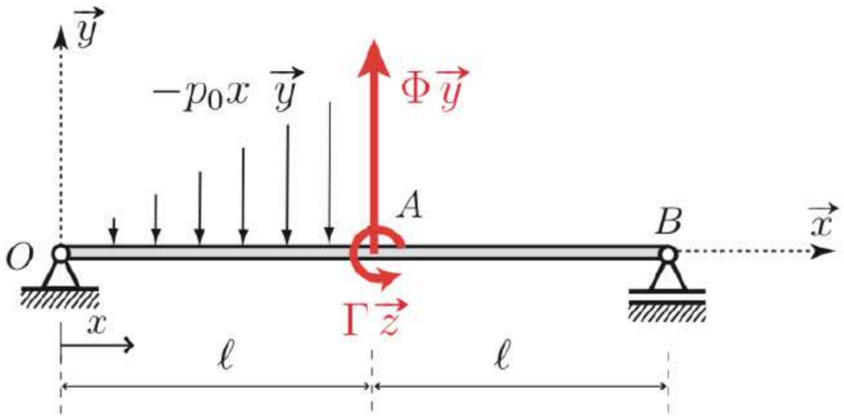
- *En efforts :*

$$\overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R_B} + \int_0^\ell -p_0 x \vec{y}\, dx + \Phi\vec{y} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{X_O = 0} \quad \text{et} \quad Y_O + Y_B = \frac{p_0\ell^2}{2} - \Phi$$

- *En moments en O :*

$$\overrightarrow{OB} \wedge Y_B\vec{y} + \int_0^\ell \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 x)\vec{y}\, dx + \overrightarrow{OA} \wedge \Phi\vec{y} + \Gamma\vec{z} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2\ell\ Y_B - \frac{p_0\ell^3}{3} + \ell\Phi + \Gamma = 0$$

soit $\boxed{Y_B = \frac{p_0\ell^2}{6} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Gamma}{2\ell}}$ Et on en déduit : $\boxed{Y_O = \frac{p_0\ell^2}{3} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Gamma}{2\ell}}$.

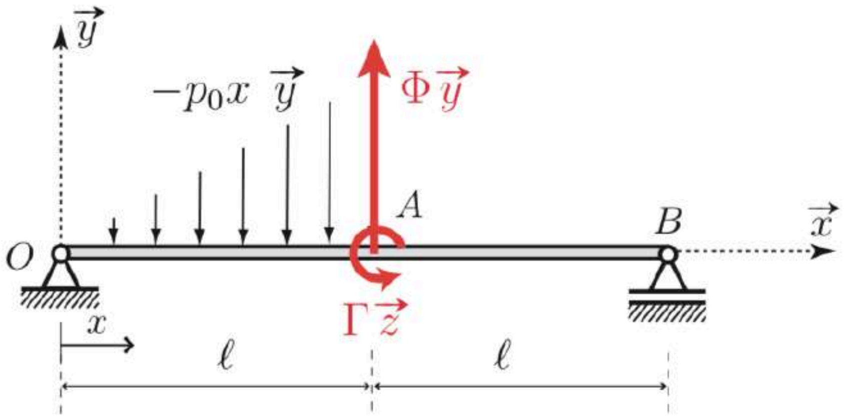


Équilibre local donne les **efforts de cohésion :**

Rq : on peut s'inspirer des résultats obtenus à la question 2 (en remplaçant R_0 par sa valeur)

- $0 < x < \ell$ $$M_z^{①}(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + Y_O x = -\frac{p_0 x^3}{6} + \left(\frac{p_0 \ell^2}{3} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Gamma}{2\ell}\right) x$$

- $\ell < x < 2\ell$ $$M_z^{②}(x) = -(x - 2\ell) Y_B = -\left(\frac{p_0 \ell^2}{6} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Gamma}{2\ell}\right)(x - 2\ell)$$



Équilibre local donne les **efforts de cohésion :**

Rq : on peut s'inspirer des résultats obtenus à la question 2 (en remplaçant R_0 par sa valeur)

- $0 < x < \ell$ $$M_z^{①}(x) = -\frac{p_0 x^3}{6} + Y_O x = -\frac{p_0 x^3}{6} + \left(\frac{p_0 \ell^2}{3} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Gamma}{2\ell}\right) x$$

- $\ell < x < 2\ell$ $$M_z^{②}(x) = -(x - 2\ell) Y_B = -\left(\frac{p_0 \ell^2}{6} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Gamma}{2\ell}\right)(x - 2\ell)$$

Efforts de liaison : $\vec{R}_O,\ \vec{R}_B$

Efforts de cohésion : $N,\ M_z,\ T_y$

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell}\left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}}\right)\mathrm{d}x$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_B}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\delta_A = \dfrac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0,\ \Gamma=0} = v_A$

$$v_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\dagger}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}, \; \vec{R_B}$

Efforts de cohésion : $N, \; M_z, \; T_y$

Énergie interne de déformation : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\delta_A = \frac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0,\, \Gamma=0} = v_A$

$$v_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_B}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\delta_A = \dfrac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0,\ \Gamma=0} = v_A$

$$v_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger}\left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger}\left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell}(-\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{p_0\ell^2}{3}x).(-\frac{x}{2})\,dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left(-\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)\,dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_B}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\delta_A = \dfrac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0,\ \Gamma=0} = v_A$

$$v_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell}\left(-\frac{p_0x^3}{6}+\frac{p_0\ell^2}{3}x\right).\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left(-\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)dx\right\}$$

$$= \frac{p_0}{12EI}\left\{\int_0^{\ell}\left(x^4-2\ell^2x^2\right)dx - \ell^2\int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\,dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}, \ \vec{R_B}$

Efforts de cohésion : $N, \ M_z, \ T_y$

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\delta_A = \dfrac{\partial U}{\partial \phi}_{|\phi=0,\ \Gamma=0} = v_A$

$$v_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Phi}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell}(-\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{p_0\ell^2}{3}x).(-\frac{x}{2})\, dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left(-\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)\, dx\right\}$$

$$= \frac{p_0}{12EI}\left\{\int_0^{\ell}\left(x^4 - 2\ell^2x^2\right)\, dx - \ell^2\int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\, dx\right\}$$

$$= \frac{p_0}{12EI}\left\{\frac{\ell^5}{5} - 2\ell^2\frac{\ell^3}{3} - \ell^2\left[\frac{X^3}{3}\right]_{-\ell}^{0}\right\} = \frac{p_0\ell^5}{12EI}\left\{\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right\} = \boxed{-\frac{p_0\ell^5}{15EI}}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_B}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\omega_A = \dfrac{\partial U}{\partial \Gamma}_{|\phi=0,\ \Gamma=0}$

$$\omega_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}, \ \vec{R_B}$

Efforts de cohésion : $N, \ M_z, \ T_y$

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\omega_A = \dfrac{\partial U}{\partial \Gamma}_{|\phi=0,\ \Gamma=0}$

$$\omega_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}, \ \vec{R_B}$

Efforts de cohésion : $N, \ M_z, \ T_y$

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\omega_A = \dfrac{\partial U}{\partial \Gamma}_{|\phi=0, \ \Gamma=0}$

$$\omega_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} (-\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{p_0 \ell^2}{3} x).(\frac{x}{2\ell})\, dx + \int_{\ell}^{2\ell} \left(-\frac{p_0 \ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2\ell}(x-2\ell)\right)\, dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_B}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \dfrac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\omega_A = \dfrac{\partial U}{\partial \Gamma}_{|\phi=0,\ \Gamma=0}$

$$\omega_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell}\left(-\frac{p_0x^3}{6}+\frac{p_0\ell^2}{3}x\right).\left(\frac{x}{2\ell}\right)dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left(-\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2\ell}(x-2\ell)\right)dx\right\}$$

$$= \frac{p_0}{12EI\ell}\left\{\int_0^{\ell} -\left(x^4-2\ell^2x^2\right)dx - \ell^2\int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\,dx\right\}$$

Efforts de liaison : $\vec{R}_O, \ \vec{R}_B$

Efforts de cohésion : $N, \ M_z, \ T_y$

Énergie interne de déformation : $U \simeq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x$

Théorème de Castigliano appliquée au cas fictif : $\omega_A = \dfrac{\partial U}{\partial \Gamma}_{|\phi=0,\ \Gamma=0}$

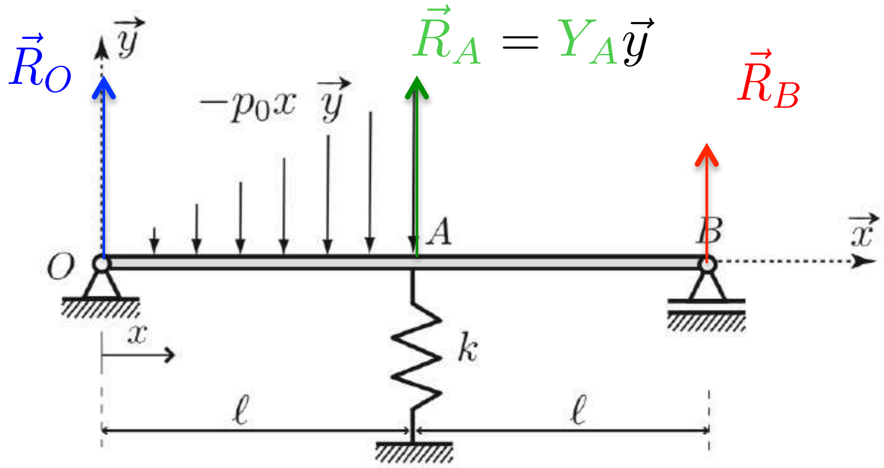
$$\omega_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{(\Phi=0,\Gamma=0)} = \left.\frac{\partial U}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\Big|_{\dagger} \left.\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial \Gamma}\right|_{\dagger} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} (-\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{p_0 \ell^2}{3}x).(\frac{x}{2\ell})\, dx + \int_{\ell}^{2\ell}\left(-\frac{p_0\ell^2}{6}(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2\ell}(x-2\ell)\right)\, dx\right\}$$

$$= \frac{p_0}{12EI\ell}\left\{\int_0^{\ell} -\left(x^4 - 2\ell^2 x^2\right)\, dx - \ell^2\int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\, dx\right\}$$

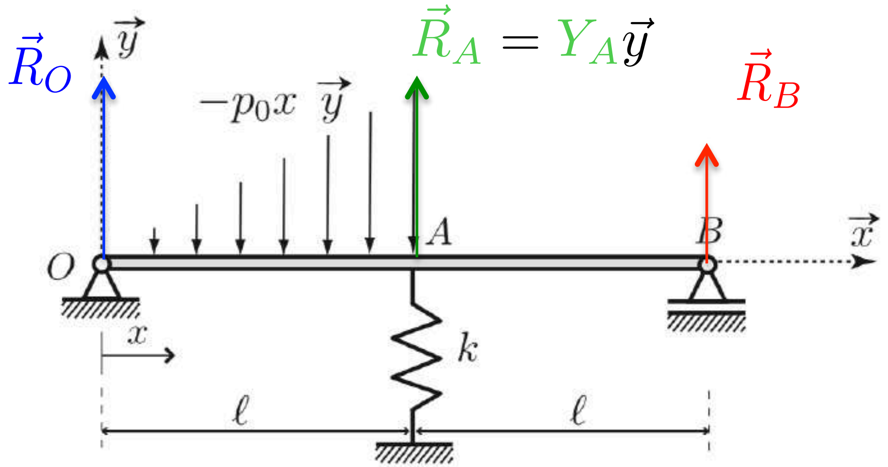
$$= \frac{p_0\ell^4}{12EI}\left\{-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right\} = \frac{p_0\ell^4}{12EI}\,\frac{2}{15} \boxed{= \frac{p_0\ell^4}{90EI}}$$



Cas **hyperstatique** de degré 1

Loi de comportement du ressort :

$$Y_A = -kv_A$$



Cas **hyperstatique** de degré 1

Loi de comportement du ressort :

$$Y_A = -k v_A$$

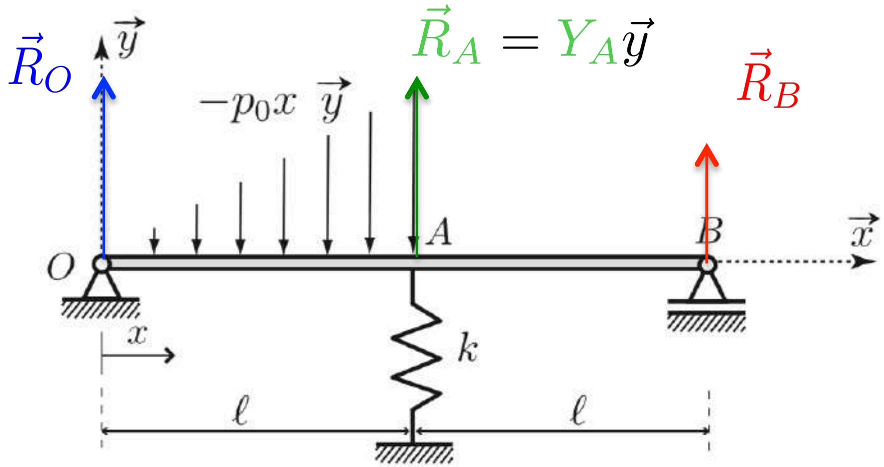
Équilibre local donne les **efforts de cohésion**

Rappel dans le cas de la charge fictive :

- $0 < x < \ell$ $\quad M_z^{①}(x) = -\dfrac{p_0 x^3}{6} + Y_O x = -\dfrac{p_0 x^3}{6} + \left(\dfrac{p_0 \ell^2}{3} - \dfrac{\Phi}{2} + \dfrac{\Gamma}{2\ell}\right) x$
- $\ell < x < 2\ell$ $\quad M_z^{②}(x) = -(x - 2\ell) Y_B = -\left(\dfrac{p_0 \ell^2}{6} - \dfrac{\Phi}{2} - \dfrac{\Gamma}{2\ell}\right)(x - 2\ell)$

Adaptation au cas hyperstatique :

- $0 < x < \ell$ $\quad M_z^{①}(x) = -\dfrac{p_0 x^3}{6} + \left(\dfrac{p_0 \ell^2}{3} - \dfrac{Y_A}{2}\right) x$
- $\ell < x < 2\ell$ $\quad M_z^{②}(x) = -\left(\dfrac{p_0 \ell^2}{6} - \dfrac{Y_A}{2}\right)(x - 2\ell)$



Efforts de liaison : $\vec{R_O}$, $\vec{R_A}$

Efforts de cohésion : N, M_z, T_y

Système {poutre+ressort}

Énergie interne de déformation : $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\ell} \left(\cancel{\frac{N^2}{ES}} + \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} + \cancel{\frac{{T_y}^2}{\mu S}} \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} k v_A^2$

$$U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$$

Théorème de Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial Y_A} = 0$

Énergie de **déformation élastique** : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{\left(M_z^{①}(x)\right)^2}{EI}\,dx \; + \; \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} \frac{\left(M_z^{②}(x)\right)^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\frac{Y_A^2}{k}$$

Énergie de **déformation élastique** : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{\left(M_z^{①}(x)\right)^2}{EI}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} \frac{\left(M_z^{②}(x)\right)^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\frac{Y_A^2}{k}$$

On « passe » la dérivée dans l'intégrale pour appliquer Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial Y_A} = 0$

$$0 \;=\; \frac{\partial U}{\partial Y_A} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial Y_A}\,dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial Y_A}\,dx\right\} + \frac{Y_A}{k}$$

Énergie de **déformation élastique** : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{\left(M_z^{①}(x)\right)^2}{EI}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} \frac{\left(M_z^{②}(x)\right)^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\frac{Y_A^2}{k}$$

On « passe » la dérivée dans l'intégrale pour appliquer Menabrea : $\dfrac{\partial U}{\partial Y_A} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial Y_A} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial Y_A}\,dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial Y_A}\,dx\right\} + \frac{Y_A}{k} \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-\frac{p_0x^3}{6} + \left(\frac{p_0\ell^2}{3} - \frac{Y_A}{2}\right)x\right).(-\frac{x}{2})\,dx \\ &\quad + \frac{1}{EI}\int_{\ell}^{2\ell}\left(-\left(\frac{p_0\ell^2}{6} - \frac{Y_A}{2}\right)(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)\,dx + \frac{Y_A}{k} \end{aligned}$$

Énergie de **déformation élastique** : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{\left(M_z^{①}(x)\right)^2}{EI}\, dx \; + \; \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} \frac{\left(M_z^{②}(x)\right)^2}{EI}\, dx + \frac{1}{2}\frac{Y_A^2}{k}$$

On « passe » la dérivée dans l'intégrale pour appliquer Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial Y_A} = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial U}{\partial Y_A} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial Y_A}\, dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial Y_A}\, dx\right\} + \frac{Y_A}{k} \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-\frac{p_0 x^3}{6} + \left(\frac{p_0\ell^2}{3} - \frac{Y_A}{2}\right)x\right).(-\frac{x}{2})\, dx \\
&\quad + \frac{1}{EI}\int_{\ell}^{2\ell}\left(-\left(\frac{p_0\ell^2}{6} - \frac{Y_A}{2}\right)(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)\, dx + \frac{Y_A}{k} \\
&= -\frac{p_0\ell^5}{15EI} + \frac{Y_A}{4EI}\left\{\int_0^{\ell} x^2\, dx + \int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\, dx\right\} + \frac{Y_A}{k}
\end{aligned}$$

Énergie de **déformation élastique** : $U \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \frac{{M_z}^2}{EI_{Gz}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{{Y_A}^2}{k}$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{\left(M_z^{①}(x)\right)^2}{EI}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{\ell}^{2\ell} \frac{\left(M_z^{②}(x)\right)^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\frac{Y_A^2}{k}$$

On « passe » la dérivée dans l'intégrale pour appliquer Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial Y_A} = 0$

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \frac{\partial U}{\partial Y_A} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\ell} M_z^{①}(x)\frac{\partial M_z^{①}(x)}{\partial Y_A}\,dx + \int_{\ell}^{2\ell} M_z^{②}(x)\frac{\partial M_z^{②}(x)}{\partial Y_A}\,dx\right\} + \frac{Y_A}{k}\\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-\frac{p_0x^3}{6} + \left(\frac{p_0\ell^2}{3} - \frac{Y_A}{2}\right)x\right).(-\frac{x}{2})\,dx\\
&\quad + \frac{1}{EI}\int_{\ell}^{2\ell}\left(-\left(\frac{p_0\ell^2}{6} - \frac{Y_A}{2}\right)(x-2\ell)\right).\left(\frac{1}{2}(x-2\ell)\right)\,dx + \frac{Y_A}{k}\\
&= -\frac{p_0\ell^5}{15EI} + \frac{Y_A}{4EI}\left\{\int_0^{\ell} x^2\,dx + \int_{\ell}^{2\ell}(x-2\ell)^2\,dx\right\} + \frac{Y_A}{k}\\
&= -\frac{p_0\ell^5}{15EI} + \frac{Y_A}{4EI}\left\{\frac{\ell^3}{3} + \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-\ell}^{0}\right\} + \frac{Y_A}{k} \boxed{= -\frac{p_0\ell^5}{15EI} + Y_A\left\{\frac{\ell^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right\}}
\end{aligned}$$

$$-\frac{p_0\ell^5}{15EI}+Y_A\left\{\frac{\ell^3}{6EI}+\frac{1}{k}\right\}=0\rightarrow \boxed{Y_A=\frac{\dfrac{p_0\ell^5}{15EI}}{\dfrac{\ell^3}{6EI}+\dfrac{1}{k}}}$$

$$-\frac{p_0\ell^5}{15EI} + Y_A\left\{\frac{\ell^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right\} = 0 \rightarrow \boxed{Y_A = \frac{\dfrac{p_0\ell^5}{15EI}}{\dfrac{\ell^3}{6EI} + \dfrac{1}{k}}}$$

On remonte à la flèche grâce à la loi de comportement du ressort :

$$v_A = -kY_A = \boxed{-\frac{\dfrac{p_0\ell^5}{15EI}}{\dfrac{\ell^3 k}{6EI} + 1}}$$

$$-\frac{p_0\ell^5}{15EI} + Y_A\left\{\frac{\ell^3}{6EI} + \frac{1}{k}\right\} = 0 \rightarrow \boxed{Y_A = \frac{\dfrac{p_0\ell^5}{15EI}}{\dfrac{\ell^3}{6EI} + \dfrac{1}{k}}}$$

On remonte à la flèche grâce à la loi de comportement du ressort :

$$v_A = -kY_A = \boxed{-\frac{\dfrac{p_0\ell^5}{15EI}}{\dfrac{\ell^3 k}{6EI} + 1}}$$

Si au point A on remplace le ressort par un appui simple mobile cela revient à faire tendre la rigidité du ressort vers l'infini :

$$\boxed{Y_A = \frac{6p_0\ell^2}{15} \quad \text{et} \quad v_A = 0}$$