Contrôle Continu 2 : Partie Vibrations des systèmes continus (13 novembre 2017)

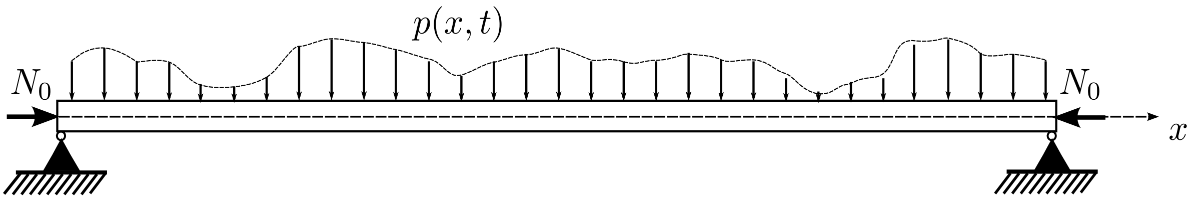
Durée de l'épreuve : 1h30.

Documents et calculatrices interdits. Téléphones portables éteints.

Le but du problème est d'étudier la dépendance des pulsations, modes propres et plus généralement de la réponse dynamique d'une **poutre précontrainte**. Les avantages liés à l'emploi de précontraintes sont d'améliorer les performances ainsi que la stabilité des structures. Les applications de telles structures sont nombreuses, on peut citer notamment les domaines du génie civil (ponts, béton précontraint, ...), l'aéronautique et l'aérospatiale.

On considère une poutre de longueur L, de section droite S constante, **sous appuis simples** aux deux extrémités obéissant à la théorie d'Euler-Bernoulli. On désigne par $\vec{x}$ l'axe de la poutre et par $x = 0$ et $x = L$ ses extrémités. Les axes $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont les axes principaux d'inertie. La poutre est supposée élastique, homogène et isotrope. On note E son module d'Young, ρ sa masse volumique supposée constante et I l'inertie de la section droite de la poutre par rapport à la direction $\vec{z}$.

La configuration initiale de la poutre est supposée déformée résultant d'une précontrainte axiale N_0 supposée **constante**. On étudie le mouvement de la poutre en petites transformations autour de cette configuration initiale préchargée. A chaque instant t, la poutre est soumise à un chargement extérieur transversal $\vec{p}(x,t) = p(x,t)\vec{y}$.



On admet que les équations qui régissent le mouvement de la flèche $v(x,t)$ (composante selon $\vec{y}$ du déplacement) à l'instant $t > 0$ et en tout point $x \in]0, L[$ sont les suivantes :

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x,t) - N_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = p(x,t) \tag{1}$$

avec les conditions d'appui simple associées et les conditions initiales :

$$v(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{2}$$

Calcul des pulsations et modes propres d'une poutre en précontrainte uniforme

1) On cherche les mouvements propres de la poutre ($p(x,t)=0$) sous la forme $v(x,t)=V(x)e^{i\omega t}$. Montrer alors que les modes propres exacts $V(x)$ sont de la forme :

$$V(x)=A\ \cosh(\beta_1 x)+B\ \sinh(\beta_1 x)+C\cos(\beta_2 x)+D\sin(\beta_2 x),$$

où A,B,C,D sont des constantes réelles et $\beta_1,\ \beta_2$ des constantes positives dont on précisera l'expression en fonction de N_0,E,I,ρ,S et ω.

Solution: Dans l'équation (1) avec $p(x,t)=0$ et $v(x,t)=V(x)e^{i\omega t}$ on obtient :
$EI\ V''''(x)-N_0\ V''(x)-\rho S\omega^2\ V(x)=0$. En posant $V(x)=V_0e^{rx}$, le polynôme caractéristique est $EI\ r^4-N_0r^2-\rho S\omega^2=0$ soit $r^2=\dfrac{N_0\pm\sqrt{\Delta}}{2EI}$ avec $\Delta=N_0^2+4EI\rho S\omega^2$
Donc $r=\{-\beta_1,\beta_1,-i\beta_2,i\beta_2\}$ avec $\beta_1^2=\dfrac{N_0+\sqrt{\Delta}}{2EI}$ et $\beta_2^2=\dfrac{-N_0+\sqrt{\Delta}}{2EI}$

$V(x)$ est donc de la forme $V(x)=c_1e^{-\beta_1 x}+c_2e^{\beta_1 x}+c_3e^{-i\beta_2 x}+c_4e^{i\beta_2 x}$
ou $V(x)=A\ \cosh(\beta_1 x)+B\ \sinh(\beta_1 x)+C\cos(\beta_2 x)+D\sin(\beta_2 x)$.

2) Déduire des conditions d'appui simple aux deux extrémités que les modes propres $V_n(x)$ sont donnés par $V_n(x)=D_n\sin(\gamma_n x)$ avec $\gamma_n=\dfrac{n\pi}{L}$ où n entier ≥ 1.

Solution: En $x=0$ appui simple donc $v(0,t)=0$ (①)

et le moment fléchissant $M(0,t)=EI\dfrac{\partial\theta(0,t)}{\partial x}=EI\dfrac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2}$ (②) d'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

En $x=L$ appui simple donc $v(L,t)=0$ (③) et $M(L,t)=EI\dfrac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2}$ (④).

(①) => $V(0)=0$ soit $A+C=0$
(②) => $V''(0)=0$ soit $B\beta_1^2-C\beta_2^2=0$
comme $\beta_1^2+\beta_2^2>0$ on en déduit que $A=C=0$.

(③) => $V(L)=0$ soit $B\sinh(\beta_1 L)+D\sin(\beta_2 L)=0$
(④) => $V''(L)=0$ soit $B\beta_1^2\sinh(\beta_1 L)-D\beta_2^2\sin(\beta_2 L)=0$

solution non triviale si $-(\beta_1^2+\beta_2^2)\sinh(\beta_1 L)\sin(\beta_2 L)=0$
deux possibilités : i) $\sinh(\beta_1 L)=0$ => $\beta_1=0$ impossible sauf si $N_0=0$ or ici $N_0\neq 0$
ou ii) $\sin(\beta_2 L)=0$ => $\beta_{2n}L=n\pi$ => $\beta_{2n}=\dfrac{n\pi}{L}=\gamma_n\ \forall n\geq 1$.

En reprenant (③) on a alors $B\sinh(\beta_1 L)=0$ d'où $B=0$.
Par conséquent les modes propres $V_n(x)$ sont $V_n(x)=D_n\sin(\gamma_n x)$ avec n entier ≥ 1

3) En injectant $V_n(x)$ obtenus au **2)** dans l'équation (1), calculer les pulsations propres associées ω_n de la poutre et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme :

$$\omega_n = \gamma_n^2 c_T \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_n^2}\frac{N_0}{EI}} \quad \text{avec} \quad c_T = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{et} \quad n \text{ entier } n \geq 1.$$

Solution: D'après (1) : $EI\ V_n^{''''}(x) - N_0\ V_n^{''}(x) - \rho S \omega_n^2\ V_n(x) = 0$ or $V_n(x) = D_n \sin(\gamma_n x)$

donc $V_n^{''}(x) = -\gamma_n^2 V_n(x)$ et $V_n^{''''}(x) = \gamma_n^4 V_n(x)$
soit $(EI\gamma_n^4 + N_0\gamma_n^2 - \rho S\omega_n^2)\, V_n(x) = 0\ \forall x \in]0, L[\Rightarrow \omega_n^2 = \dfrac{EI}{\rho S}\gamma_n^4 + \dfrac{N_0}{\rho S}\gamma_n^2 = c_T^2\gamma_n^4 + \dfrac{N_0}{\rho S}\gamma_n^2$
$\Rightarrow \omega_n^2 = \gamma_n^4 c_T^2 \left(1 + \dfrac{1}{\gamma_n^2}\dfrac{N_0}{c_T^2 \rho S}\right)$ soit $\omega_n = \gamma_n^2 c_T \sqrt{1 + \dfrac{1}{\gamma_n^2}\dfrac{N_0}{EI}}$.

4) Comparer les expressions des modes propres et des pulsations propres à celles obtenues en cours. Commenter l'influence de la précontrainte sur les pulsations propres pour une contrainte initiale de traction ($N_0 > 0$) ou de compression ($N_0 < 0$).

Examiner le cas où la précontrainte vaut $N_0^{cr} = -\pi^2 EI/L^2$. Interpréter mécaniquement cette situation.

Solution: Si $N_0 = 0$ alors $\omega_n^0 = \gamma_n^2 c_T$ (idem cours)
Si $N_0 > 0$ (traction) alors $\omega_n > \omega_n^0$
Si $N_0 < 0$ (compression) alors $\omega_n < \omega_n^0$

$\exists\ N_0^{cr}$ tel que $1 + \dfrac{1}{\gamma_n^2}\dfrac{N_0^{cr}}{EI} = 0$
$\Rightarrow N_0^{cr} = -EI\gamma_n^2$ correspond au chargement critique de flambement.
La plus petite valeur ($n = 1$) : $N_0^{cr} = -EI\gamma_1^2 = -\pi^2 EI/L^2$ annule la 1ère pulsation propre ($\omega_1 = 0$).

Réponse dynamique - Superposition modale

5) On recherche la flèche solution de ce problème sous la forme $v(x,t) = \sum_{n\geq 1} V_n(x) q_n(t)$ par superposition modale où $V_n(x)$ sont les modes propres calculés au **2)** et où $q_n(t)$ représentent les composantes de la flèche sur la base modale.

Pour établir les équations vérifiées par les composantes $q_n(t)$, on part de l'équation (1) puis on multiplie par la fonction test $V_m(x)$ et on intègre le tout sur le domaine de la poutre. Montrer qu'en utilisant l'orthogonalité des modes (*) que les $q_n(t)$ satisfont les équations :

$$M_n \, \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + (K_n^e + K_n^g) \; q_n(t) = P_n(t), \quad \forall n \geq 1 \tag{3}$$

où les expressions des grandeurs M_n, K_n^e (contribution classique d'origine élastique), K_n^g (contribution d'origine géométrique) et $P_n(t)$ seront précisées en fonction des modes propres $V_n(x)$ et des caractéristiques de la poutre.

Solution: En partant de l'équation (1) puis en multipliant par la fonction test $V_m(x)$ et intégrant le tout sur le domaine de la poutre on obtient :

$$\int_0^L EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\sum_{n\geq 1} V_n(x) q_n(t)\right) V_m(x)\, dx \; - \int_0^L N_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n\geq 1} V_n(x) q_n(t)\right) V_m(x)\, dx$$
$$+ \int_0^L \rho S \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{n\geq 1} V_n(x) q_n(t)\right) V_m(x)\, dx = \int_0^L p(x,t) V_m(x)\, dx$$
$$=> \sum_{n\geq 1}\left(\int_0^L EI \; V_n^{''''}(x) V_m(x)\, dx\right) q_n(t) \; - \sum_{n\geq 1}\left(\int_0^L N_0 \; V_n^{''}(x) V_m(x)\, dx\right) q_n(t)$$
$$+ \sum_{n\geq 1}\left(\int_0^L \rho S \; V_n(x) V_m(x)\, dx\right) \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) = \int_0^L p(x,t) V_m(x)\, dx$$

Comme $V_n^{''}(x) = -\gamma_n^2 V_n(x)$ et $V_n^{''''}(x) = \gamma_n^4 V_n(x)$ nous avons alors :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^L \rho S \; V_n(x) V_m(x)\, dx\right) \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + \sum_{n\geq 1}\left(\gamma_n^4 \int_0^L EI \; V_n(x) V_m(x)\, dx\right) q_n(t)$$
$$+ \sum_{n\geq 1}\left(\gamma_n^2 \int_0^L N_0 \; V_n(x) V_m(x)\, dx\right) q_n(t) = \int_0^L p(x,t) V_m(x)\, dx$$

On utilise l'orthogonalité des modes (cf indications (*)) pour en déduire que :

$$M_n \, \frac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + (K_n^e + K_n^g) \; q_n(t) = P_n(t)$$

avec : $M_n = \int_0^L \rho S \; V_n^2(x)\, dx$; $K_n^e = \gamma_n^4 \int_0^L EI \; V_n^2(x)\, dx$; $K_n^g = \gamma_n^2 \int_0^L N_0 \; V_n^2(x)\, dx$

et $P_n(t) = \int_0^L p(x,t) V_n(x)\, dx$

6) En imposant que $M_n = 1$ (normalisation des modes par rapport à l'opérateur masse), en déduire que $D_n = \sqrt{\dfrac{2}{\rho S L}}$, $K_n^e = \gamma_n^4 c_T^2$ et $K_n^g = \gamma_n^2 \dfrac{N_0}{\rho S}$ pour une valeur de $n \geq 1$ fixée.

(*) Indications : $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ L/2 & \text{si} \quad n = m \end{cases}$

Solution: $M_n = 1 = \rho S \int_0^L V_n^2(x)\,dx = \rho S D_n^2 \int_0^L \sin^2(\gamma_n x)\,dx$

donc d'après (*) => $M_n = 1 = \rho S D_n^2 \dfrac{L}{2}$ soit $D_n = \sqrt{\dfrac{2}{\rho S L}}$

$K_n^e = \gamma_n^4\ EI \int_0^L V_n^2(x)\,dx = \gamma_n^4 \dfrac{EI}{\rho S} M_n = \gamma_n^4 c_T^2$

$K_n^g = \gamma_n^2\ N_0 \int_0^L V_n^2(x)\,dx = \gamma_n^2 \dfrac{N_0}{\rho S} M_n = \gamma_n^2 \dfrac{N_0}{\rho S}$

On suppose que l'excitation est harmonique de pulsation Ω et est uniforme en x. La charge $p(x,t)$ s'écrit donc sous la forme $p(x,t) = p_0 \sin(\Omega t) \quad \forall t > 0$ (p_0 constant).

7) Calculer $P_n(t)$ et en déduire que $P_n(t) = \hat{p}_n \sin(\Omega t)$ où $\hat{p}_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{pair} \\ \dfrac{2p_0}{\gamma_n}\sqrt{\dfrac{2}{\rho S L}} & \text{si} \quad n \quad \text{impair} \end{cases}$.

Solution: $P_n(t) = \int_0^L p_0 \sin(\Omega t) V_n(x)\,dx = p_0 D_n \int_0^L \sin(\gamma_n x)\,dx\ \sin(\Omega t)$

or $\int_0^L \sin\gamma_n(x)\,dx = -\left[\dfrac{\cos(\gamma_n x)}{\gamma_n}\right]_0^L = \dfrac{1}{\gamma_n}(1-\cos(n\pi)) = \dfrac{1}{\gamma_n}(1-(-1)^n)$.

On pose $P_n(t) = \hat{p}_n\ \sin(\Omega t)$ avec $\hat{p}_n = \dfrac{p_0 D_n}{\gamma_n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{pair} \\ \dfrac{2p_0}{\gamma_n}\sqrt{\dfrac{2}{\rho S L}} & \text{si} \quad n \quad \text{impair} \end{cases}$

8) Montrer que $q_n(t)$ vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + \omega_n^2\ q_n(t) = \hat{p}_n\ \sin(\Omega t)$.
Donner la forme générale (solution libre + solution forcée) de la solution $q_n(t)$.

Solution: D'après **3)**, **5)**, **6)** et **7)**

$M_n\ \dfrac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + (K_n^e + K_n^g)\ q_n(t) = P_n(t)$ => $\dfrac{d^2 q_n}{dt^2}(t) + \omega_n^2\ q_n(t) = \hat{p}_n\ \sin(\Omega t) \quad (\bigcirc)$

donc $q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) + q_n^{(p)}(t)$
avec la solution particulière $q_n^{(p)}(t)$ de la forme $q_n^{(p)}(t) = c_n \sin(\Omega t)$.
D'après $(\bigcirc)$, la solution particulière $q_n^{(p)}(t)$ vérifie la relation $c_n(\omega_n^2 - \Omega^2) = \hat{p}_n$.

=> $q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) + \dfrac{\hat{p}_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}\ \sin(\Omega t)$

9) En utilisant les conditions initiales (2) montrer que $q_n(t)$ s'écrit sous la forme :

$$q_n(t) = \frac{\hat{p}_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}\left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$$

Solution: D'après les conditions initiales :
$v(x,0) = \sum_{n\geq 1} V_n(x) q_n(0) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\geq 1} V_n(x)\frac{dq_n}{dt}(0) = 0.$
L'orthogonalité des modes nous donne :

$$\int_0^L v(x,0)V_m(x)\,dx = 0 \Rightarrow q_n(0) = a_n = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)V_m(x)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dq_n}{dt}(0) = 0$$

or $\frac{dq_n}{dt}(t) = b_n\omega_n \cos(\omega_n t) + \frac{\hat{p}_n\Omega}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$ soit $\frac{dq_n}{dt}(0) = 0 = b_n\omega_n + \frac{\hat{p}_n\Omega}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}$

donc $b_n = -\frac{\hat{p}_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}\frac{\Omega}{\omega_n}$

$$\Rightarrow \quad q_n(t) = \frac{\hat{p}_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}\left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$$

10) Construire la réponse dynamique $v(x,t)$ de la poutre.

Solution: $v(x,t) = \sum_{n\geq 1} V_n(x)q_n(t) = \sum_{n\geq 1} D_n \sin(\gamma_n x)\frac{\hat{p}_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)}\left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n\ impair} \frac{4p_0}{\rho S L}\frac{\sin(\gamma_n x)}{\gamma_n(\omega_n^2 - \Omega^2)}\left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$$

11) Décrire brièvement le processus pour obtenir une approximation de la première pulsation propre. Comment s'appelle cette méthode ?
La solution approchée $\tilde{\omega}_1$ aura-t-elle une valeur supérieure ou inférieure à la pulsation fondamentale ω_1 obtenue avec la formule de la question **3)** ?

Solution: On cherche une approximation de la pulsation fondamentale en utilisant une solution approchée sous la forme :

$\tilde{v}(x,t) = g(x)\ \phi(t)$ avec $g(x)$ une fonction cinématiquement admissible pour notre problème.

On calcule ensuite l'énergie cinétique ainsi que l'énergie potentielle totale de la poutre. Dans notre cas on doit rajouter à l'énergie de déformation élastique en flexion de la poutre, l'énergie de précontrainte $\frac{1}{2}\int_0^L N_0 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 dx$.
On peut utiliser l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left[\frac{dT}{d\dot{\phi}}\right] + \frac{dU_{tot}}{d\phi} = 0$ pour en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\phi(t)$ sous la forme $\ddot{\phi}(t) + \tilde{\omega}_1^2 \phi(t) = 0$ avec $\tilde{\omega}_1$ la pulsation propre approchée.

Cette méthode s'appelle la méthode de Rayleigh et $\tilde{\omega}_1$ aura une valeur supérieure à ω_1 obtenue avec la formule de la question **3)**.