# Partie « Structures et éléments finis »
# Etude du comportement aéroélastique d'une aile droite

On considère une aile droite rectangulaire de corde (largeur) $c$ constante et envergure (longueur) $\ell$, que nous pouvons modéliser comme une poutre droite de section constante. En condition de vol, l'aile est investie par un écoulement de vitesse $V$ : on fixe un référentiel où l'axe $x$ est aligné avec l'axe de l'aile (axe élastique, par rapport auquel on écrit les équations d'équilibre), l'axe $y$ est dirigé vers le haut et l'axe $z$ sera donc aligné avec la vitesse $V$ de l'air (voir schéma de l'aile en Figure 1).
On notera alors $v$ le déplacement vertical des points de l'axe et $\alpha$ l'angle de rotation de la section de l'aile autour de son axe (ou angle de torsion).

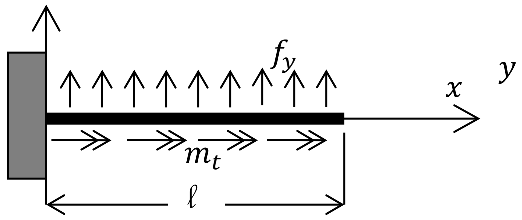


Figure 1 : Schéma du modèle de poutre pour l'étude de l'aile (axe $z$ sortant du plan de la figure)

Le matériau constitutif de l'aile est un alliage d'aluminium, soit un matériau élastique linéaire isotrope de module de Young $E$, module de cisaillement $G$ et masse volumique $\rho$. Soient $S$, $I$ et $J$ respectivement l'aire et les moments d'inertie quadratique et polaire de la section.
Les chargements appliqués sur l'aile sont les résultantes de la distribution de pression aérodynamique :

1. force résultante, correspondant à la sollicitation de flexion : effort linéique $f_y = L$, où $L$ est la portance par unité de longueur de la poutre (on néglige ici l'effet du poids propre de l'aile) ;
2. moment résultant, sollicitation de torsion : moment linéique $m_t = M_{ac}$, où $M_{ac}$ est le moment aérodynamique, défini par unité de longueur de l'aile.

Selon la théorie quasi-stationnaire, la portance et le moment peuvent s'écrire en fonction de $v$ et $\alpha$ :

$$L = ac\left(\alpha + \frac{\dot{v}}{V}\right)$$
$$M_{ac} = a\frac{c^2}{4}\left(\alpha + \frac{\dot{v}}{V}\right)$$

étant le coefficient $a = \rho_a \pi V^2$ ($\rho_a$, masse volumique de l'air).
On considère ces actions appliquées au centre élastique de l'aile (excentricité $e$ = 0).

**Question 1 : mise en équations (formulation forte).** En faisant référence au schéma de la Figure 1, rappeler les équations d'équilibre dynamique de la poutre en termes de la résultante $\mathbf{R}$ et du moment résultant $\mathbf{M}$ des efforts de cohésion (l'abscisse curviligne est ici $x$ le long de l'axe élastique et le vecteur unitaire tangent est $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{e}_x$). On note $\boldsymbol{f} = f_y \boldsymbol{e}_y$ les forces linéiques et $\boldsymbol{m} = m_t \boldsymbol{e}_x$ les moments linéiques appliqués ($f_y$ et $m_t$ sont définis aux points 1 et 2 de la liste ci-dessus).

On s'intéresse aux seules composantes non nulles des équations d'équilibre. Pour cela :

a. projeter l'équation en **R** dans la direction $y$, étant : $\mathbf{R} = T\boldsymbol{e}_y$ ($T$ est l'effort tranchant) ;

b. projeter l'équation en **M** selon les axes $x$ et $z$, étant $\mathbf{M}=M_f \boldsymbol{e}_z + M_t \boldsymbol{e}_x$ ($M_t$ : moment de torsion et $M_f$ flexion) ;

c. rappeler les lois de comportement pour les composantes de sollicitation de torsion (moment $M_t$) et de flexion (moment $M_f$) pour la poutre et montrer donc que les équations d'équilibre s'expriment de la manière suivante :

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L, \text{ soit : } EIv^{IV} + \rho S\ddot{v} = L \qquad (1)$$

$$GJ\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + M_{ac} = \rho J\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, \text{ soit : } GJ\alpha^{II} + M_{ac} = \rho J\ddot{\alpha} \qquad (2)$$

Selon les expressions de la portance $L$ et du moment $M_{ac}$, les équations (1) et (2) sont donc des équations couplées en $v$ et $\alpha$.

Afin de simplifier l'étude, nous allons nous intéresser à l'équation de flexion (1) et nous nous limitons à l'influence du terme $\dot{v}$. L'équation (1) se réduira alors à la suivante :

$$EIv^{IV} + \rho S\ddot{v} = \frac{ac}{V}\dot{v} \qquad (3)$$

**Question 2 : formulation variationnelle.** A partir de l'équation (3) et en considérant la condition limite d'encastrement à l'extrémité $x$=0 de l'aile, définir l'espace de champs de déplacements cinématiquement admissibles et écrire la formulation variationnelle en $v$ du problème.

**Question 3 : approximation des déplacements pour l'élément « poutre en flexion ».** Pour résoudre le problème d'équilibre en flexion, on veut appliquer une méthode de résolution par éléments finis.

Sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli (poutre mince), introduire l'approximation du champ de déplacement $v$ et du champ des rotations $\theta_z = \frac{dv}{dx}$ pour l'élément « poutre en flexion » via les fonctions de forme $N(x)_i$, ($i$ = 1, ..., 4).

Spécifier la forme du vecteur $\{U_e\}$ des degrés de liberté élémentaires (déplacements généralisés aux nœuds de l'élément).

Combien de degrés de liberté pour cet élément ?

Spécifier les conditions que les fonctions de forme $N_i(x)$ doivent respecter aux nœuds 1 et 2, sommets de l'élément. Sans donner les expressions complètes des fonctions de forme, dire quel est leur ordre polynomial.

**Question 4 : calcul des matrices élémentaires.** En remplaçant l'approximation éléments finis des déplacements ($w^{(e)} = [N_e]\{U_e\}$) dans les intégrales élémentaires de la formulation variationnelle, montrer que les contributions élémentaires s'écrivent en termes d'une matrice de masse élémentaire $[M_e]$, d'une matrice de raideur élémentaire $[K_e]$ et d'une matrice d'amortissement aérodynamique élémentaire $[D_e]$ : donner les expressions de ces matrices sous forme d'intégrales sur l'élément, en fonction des paramètres du problème et de la matrice des fonctions de forme $[N_e]$.

Préciser la relation entre les matrices de masse et d'amortissement aérodynamique élémentaires.

**Question 5 : étude de stabilité.** Sans expliciter le calcul des matrices élémentaires, et dans le cas d'un maillage constitué d'un seul élément de poutre en flexion, expliquer comment l'équation d'équilibre peut s'écrire sous la forme :

$$\{\ddot{U}_R\} + \frac{ac}{\rho V}\{\dot{U}_R\} + [M_R]^{-1}[K_R]\{U_R\} = \{0\} \qquad (4)$$

où $\{U_R\}$ est le vecteur réduit des degrés de liberté du système en prenant en compte les conditions limites. Donner l'expression de $\{U_R\}$ et expliquer comment sont obtenues les matrices réduites $[K_R]$ et $[M_R]$.

On considère que la matrice de rigidité dynamique $[M_R]^{-1}[K_R]$ soit diagonale et on note $\lambda_i = \omega_i^2$ les termes sur la diagonale. Ecrire la i-ème équation découplée issue du système (4) pour le degré de liberté $U_i$ et donner la forme de solution en termes de $a$, $c$, $V$, $\rho$ et $\lambda_i$.

Discuter la stabilité de cette solution en fonction du signe du coefficient $a$. De quel type d'instabilité s'agit-il, dynamique (type flottement) ou de divergence ? Expliquer.