TD-Projet : Flambement

On étudie la réponse d'une structure élancée soumise à une charge en compression. On determine les charges critiques de flambement d'une poutre encastrée libre, en faisant référence aux "poutres ressorts" du kit Mola. A charge fixée, les expériences montrent l'existence d'une longueur critique au-delà de laquelle la configuration droite pert sa stabilité. La valeur de la charge critique et la forme à l'équilibre pour des charges supérieures à la charge critique, dependent des conditions aux limites. Pour l'étude du problème on utilise un repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, le vecteur $\underline{e}_1$ étant aligné avec l'axe de la poutre, tandis que $\underline{e}_2$ est positionné le long de la largeur b.

Nous avons précédemment montré que les raideurs équivalentes de la poutre-ressort sont données par

$$A_{eq} = \frac{1}{n}\frac{Gd^4}{8H^3}, \quad F_{eq} = \frac{1}{n}\frac{Ed^4}{8H^3}, \quad D_{eq} = \frac{1}{n}\frac{d^4}{16H}\frac{EG}{2G+E}$$

où n est le nombre de spires pour unité de longueur, H le diamètre des spires, d, E et G étant le diamètre, le modèle de Young et le module de cisaillement de la poutre constituante la spire,

Charges et modes de flambement : modèle inextensible et indéformable au cisaillement

1. Déterminer experimentalement la longueur critique de flambement $L_c^{(exp)}$ pour la poutre en figure.
2. Soit $\underline{x}_R(s) = s\,\underline{e}_1$ la configuration de référence de la poutre avec $s \in [0, L]$, $\underline{x}(s)$ la configuration déformée, $\underline{u}(s) = \underline{x}(s) - \underline{x}_R(s)$ le vecteur déplacement et $\theta(s)$ l'angle entre $\underline{e}_1$ et la normale à la section $\underline{\tau}(s)$ à l'axe dans la configuration déformée. A partir de la cinématique non linéaire d'une poutre , montrer que, pour une poutre indéformable au cisaillement, on a pour des *rotations modérées* (à l'ordre 2 en θ) :
$$e(s) \simeq u'(s) + \frac{\theta(s)^2}{2}, \qquad k(s) \simeq \theta'(s).$$
On en déduit que dans le cas **inextensible et indéformable au cisaillement** pour des **rotations modérées**
$$u'(s) \simeq -\frac{v'(s)^2}{2}, \quad k(s) \simeq v''(s).$$
et on peut donc décrire la configuration actuelle de la poutre seulement à l'aide du déplacement transversal v. Souligner la différence par rapport à la cinématique linéaire utilisée pour les poutres droites.
3. On considère le cas de la poutre encastrée en $s = 0$ avec une charge $\underline{P} = -Pe_1$ appliquée en $s = L$ (la rotation et le déplacement sont libres en $s = L$). Sous l'hypothèse de rotations modérées et de

poutre purement flexible (extension et cisaillement nuls), montrer que l'énergie potentielle totale de la structure est donnée par :

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} v''(s)^2 - \frac{P}{2} v'(s)^2 \right) ds$$

Donner les espaces $\mathcal{V}$ et $\hat{\mathcal{V}}$ des fonctions v admissibles et des variations $\hat{v}$ admissibles et la formulation variationnelle de la condition d'équilibre de la structure. En déduire l'équation locale d'équilibre

$$Dv''''(s) + P\,v''(s) \quad = \quad 0, \quad \forall s \in (0, L). \tag{1}$$

et obtenir les conditions aux bords statiques (ou naturelles) et cinématiques (ou essentielles) associées. Donner une interprétation de ces équations avec le principe fondamental de la statique (équilibre dans la configuration déformée). Dans les expressions ci-dessus la rigidité en flexion D a été remplacée par EI.

4. Déterminer une solution du système (1) valable pour toute charge P. Déterminer les valeurs critiques de la charge $P = P_c^{(i)}$ pour lesquelles le système (1) admet des solutions $v^{(i)} \neq 0$.
5. A partir de l'expression de $P_c^{(1)}$, déterminer la longueur critique de flambement de la poutre en figure. Compararer le résultat numérique à la valeur expérimentale.
6. Tracer un diagramme de bifurcation pour la structure.
7. (*Devoir à la maison*). Reprendre les questions 3-4 pour le cas de la poutre encastrée-encastrée (on considère que en $s = 0$ le déplacement axial est libre et la composante axiale de la force est imposée, *i.e.* glissière) et pour la poutre encastrée-libre. Comparer les résultats à ceux disponibles ici : `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_critical_load`, Fig.2.

Partie 2. Influence du cisaillement.

On étudie maintenant l'influence des deformation en cisaillement sur le flambement. On considère un modèle de poutre en rotation modérées inextensible, mais avec des déformations aux cisaillement possibles.

1. Montrer que l'énergie potentielle de la structure peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{E}(v, \theta) = \int_0^L \left(\frac{D}{2} \theta'(x)^2 + \frac{F}{2} (v'(s) - \theta(s))^2 - \frac{P}{2} v'(s)^2 \right) ds \tag{2}$$

2. A l'aide de l'approche variationnelle, déterminer les équations d'équilibre de la structure et les conditions aux bords associées. Est-il le problème linéaire ou non-linéaire.
3. Montrez que la solution droite $v = 0$, $\theta = 0$ est une solution possible. Donner l'expression des charges critiques de flambement pour lesquelles des solutions non-nulles sont possibles. Determiner les solutions associées (charges critiques de flambement).
4. Discutez les résultats et comparez-le au cas sans cisaillement. Pour la poutre-ressort du kit MOLA, donner la valeur numérique de la longueur critique de flambement obtenue en tenant en compte l'influence du cisaillement et comparer à celle obtenue en négligeant le cisaillement.

Partie 3. Stabilité de la configuration droite (NIVEAU AVANCE).

On a montré précédemment que la configuration droite est un équilibre pour toute charge P. On étudie ici sa stabilité. Pour ce faire on étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie à l'équilibre. Pour traiter cette partie vous devez étudier en autonomie les notes des cours correspondantes.

1. Calculer la dérivée seconde de l'énergie en v dans la direction $\hat{v}$:

$$\mathcal{E}''(v)(\hat{v}) := \frac{d^2}{dh^2}\mathcal{E}(v + h\hat{v})|_{h=0}$$

2. Montrer que la dérivée seconde autour de la configuration droite $\mathcal{E}''(0)(\hat{v})$ peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{E}''(0)(\hat{v}) = \mathcal{K}(\hat{v}) - P\,\mathcal{G}(\hat{v}) \tag{3}$$

   où

$$\mathcal{K}(\hat{v}) = \int_0^L D\hat{v}''(s)^2 ds, \qquad \mathcal{G}(\hat{v}) = \int_0^L \hat{v}'(s)^2 ds$$

   sont des formes quadratiques définies positives, appelées respectivement *rigidité élastique* et *rigidité géométrique.*

3. Montrer que la dérivées seconde de l'énergie est définie positive si et seulement si

$$P < P_c = \inf_{\hat{v}\in\hat{\mathcal{V}}\setminus 0} \mathcal{R}(\hat{v}), \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{R}(\hat{v}) = \frac{\mathcal{K}(\hat{v})}{\mathcal{G}(\tilde{v})} > 0$$

   où $\mathcal{R}$ est le quotient de Rayleigh.

4. Utiliser la relation ci-dessus pour donner une valeur de la charge au-delà de laquelle l'équilibre droit est forcément instable.
5. La détermination de la valeur exacte de la charge implique la minimisation du quotient de Rayleigh défini ci-dessus parmi toutes les variations admissibles $\hat{\mathcal{V}}$ non nulles. Montrer que les solutions de ce problème d'optimisation sont des $v^* \in \hat{\mathcal{V}}$ pour lesquels il existe un P^* tel que :

$$\mathcal{K}'(v^*)(\hat{v}) - P^*\,\mathcal{G}'(v^*)(\hat{v}) = 0, \qquad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}}, \tag{4}$$

6. Résoudre le problème variationnel (4) et montrer que les P^* et v^* solutions de ce problème sont les charges critiques de flambement et les modes propres de la structure $P_c^{(i)}$ et $v^{(i)}$. (A retenir : ce résultat est général, (4) est la formulation variationnelle du problème de recherche de charges et modes de flambement).
7. Calculer la valeur exacte de P_c.
8. Compléter le diagramme de bifurcation tracé dans la Partie I avec les informations sur la stabilité.