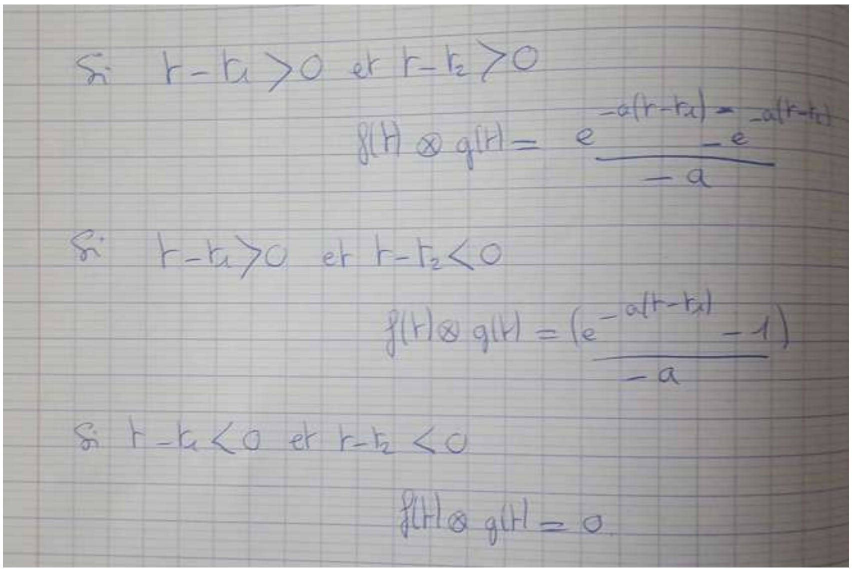
TP 2 : Convolution

1. Convolution de signaux

a)



Si $t - t_1 > 0$ et $t - t_2 > 0$

$$f(t) \otimes g(t) = \frac{e^{-a(t-t_1)} - e^{-a(t-t_2)}}{-a}$$

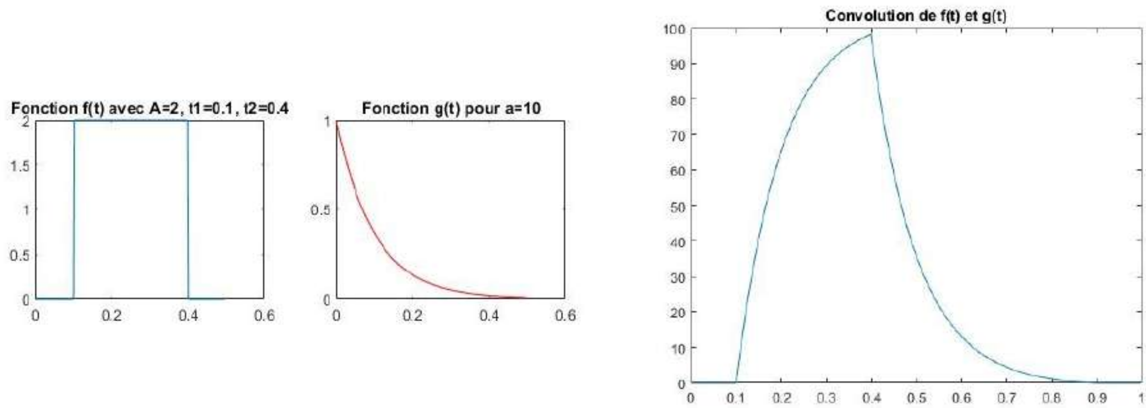
Si $t - t_1 > 0$ et $t - t_2 < 0$

$$f(t) \otimes g(t) = \frac{(e^{-a(t-t_1)} - 1)}{-a}$$

Si $t - t_1 < 0$ et $t - t_2 < 0$

$$f(t) \otimes g(t) = 0$$

b) On modélise les fonctions f(t) et g(t) sur MATLAB. En ce qui concerne la première fonction, nous l'avons tracé pour un temps compris entre un *t1* et un *t2* donné.
Plus simplement, pour la fonction g(t), on a déclaré la fonction *exp(-a*t)* pour des valeurs de temps positive.



c)Nous avons modifié les valeurs des constantes, et nous obtenons les conclusions suivantes :

- l'augmentation de l'amplitude A de la fonction porte f(t) amène une amplification du produit de convolution (cf. figure 1)

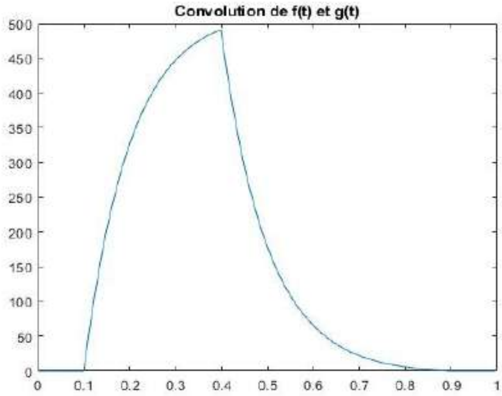
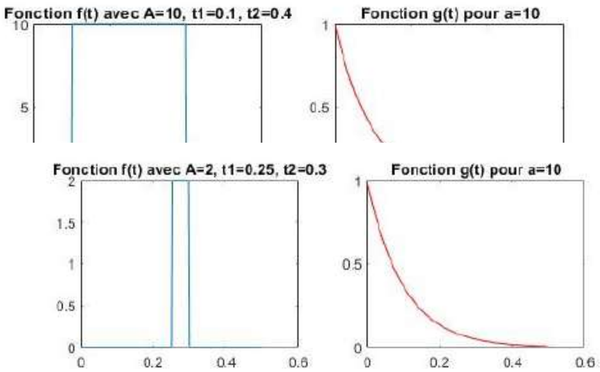
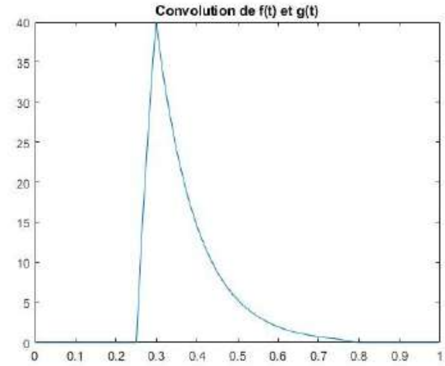


Figure 1.



des conclusions similaires que l'étude de la de l'intervalle (t1, t2) approche la fonction



Dirac, rendant le produit de convolution égale à la fonction g(t)(cf, figure 2).

Figure 2.

De même, l'augmentation du coefficient 'a' approche aussi la fonction Dirac, tendant le produit de convolution vers la fonction f(t) (cf. figure 3).

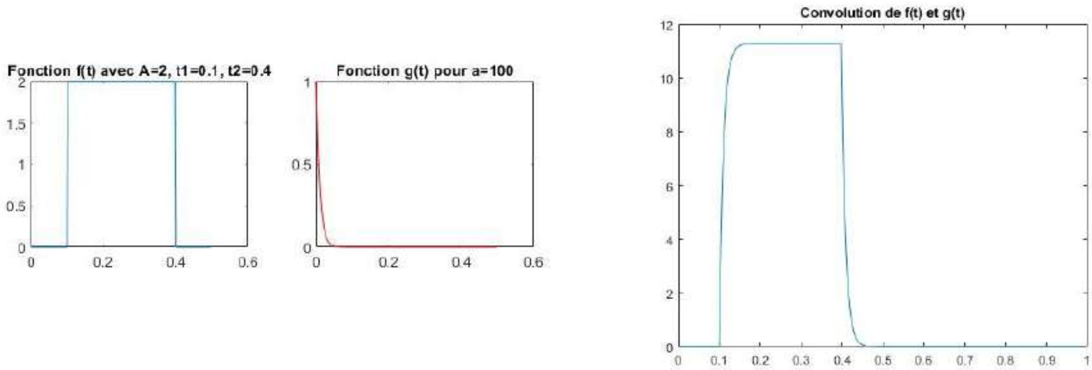


Figure 3.

2. Théorème de Plancherel

a)

b) Plancherel : $TF[f(t) \otimes g(t)] = TF[f(t)] . TF[g(t)] = F(f) . G(f)$

$$\left[F(f) = E T_0 \,\mathrm{sinc}(\pi f T_0)\right]$$

$$\left[G(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-2i\pi f t}\, dt \rightarrow G(f) = \left[\frac{e^{-t(a+2i\pi f)}}{-(a+2i\pi f)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi f}\right]$$

c) On utilise la fonction *fft()* de MATLAB afin de calculer les transformées de Fourier demandées. Dans un premier temps, nous avons calculé indépendamment les transformés de Fourier de chacun des signaux précédents.
Puis, par la même méthode, on a calculé la transformée de Fourier du produit de convolution des deux mêmes signaux.

Toutes ces manipulations ont eu pour but d'étudier le théorème de Plancherel et d'en vérifier la définition. On va ainsi comparer les spectres des deux transformées et d'étudier graphiquement le théorème précédemment cité.

Nous allons décrire comment nous avons procéder pour le tracée des transformées de Fourier.
- pour ce qui est de la transformée de Fourier des produits de convolution, on passe de N points pour les fonctions f(t) et g(t) à N-1 points pour le résultat final.
- au contraire, en faisant le produit des transformées de chaque signal, on conserve N points.
Cela résulte en un pas de fréquence plus précis pour le premier cas (Fe/(2n-1) contrairement à Fe/N pour le second cas).