



**SORBONNE  
UNIVERSITÉ**

## 3A006 - STRUCTURES ÉLASTIQUES

---

### Problème n°3 - RDM - Systèmes plans

---

*Auteur :*

Valentin DUVIVIER

[valentin.duvivier@etu.upmc.fr](mailto:valentin.duvivier@etu.upmc.fr)

*Encadré par :*

Hélène DUMONTET

Amâncio FERNANDES

19 Avril 2020

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Exo 1</b>	<b>2</b>
2.1	Q 1 - Déterminer $u_y(x)$ et $\omega_z(x)$	2
2.1.1	Partie de gauche	3
2.1.2	Partie de droite	4
2.2	Q 2 - Vérification des résultats	6
2.3	Moment d'inertie I	6
<b>3</b>	<b>Exo 2</b>	<b>6</b>
3.1	Q 1 - Réactions des supports	7
3.2	Q 2 - Torseur de cohésion	7
3.2.1	Partie de gauche	8
3.2.2	Partie de droite	9
3.3	Q 3 - Rotation $\omega_z(x)$ et déplacement $u_y(x)$	10
3.3.1	Partie de gauche	10
3.3.2	Partie de droite	11
3.4	Q 4 - Calcul en A et B	12

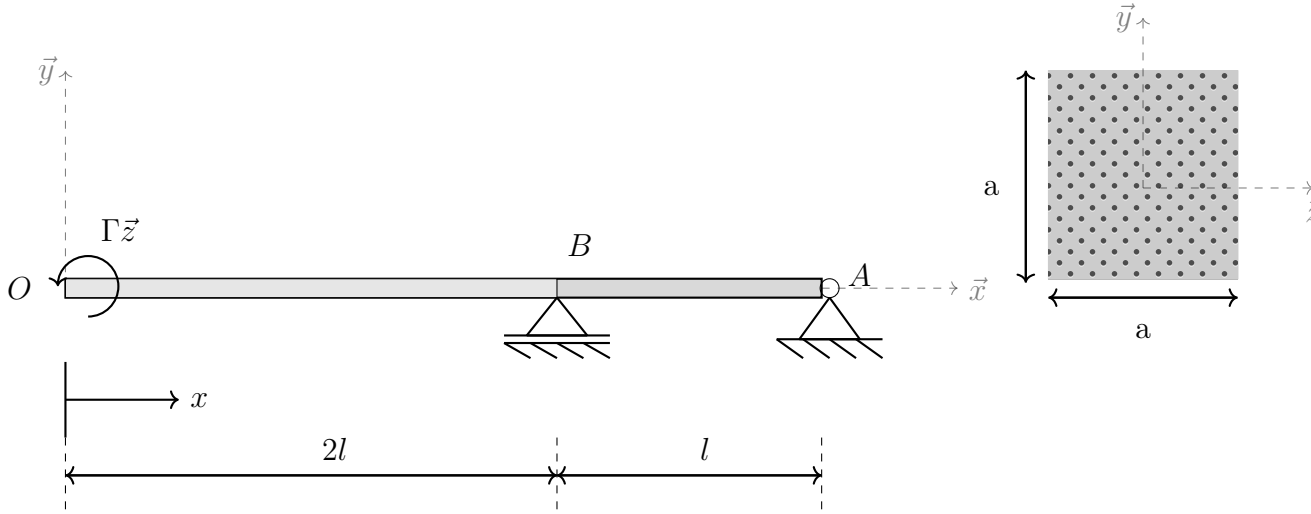
# 1 Introduction

Ce rapport vise à synthétiser le travail fait sur le problème  $n^{\circ}3$ . Il mettra en place les méthodes vues en cours de 3A006 sur l'étude de poutres planes et notamment sur les relations cinématiques et le déplacement déduit dans ce cas.

On va dans ce sens supposé que l'on est dans une étude de poutre planes (1D) et que l'hypothèse d'Euler Bernoulli est vérifiée.

## 2 Exo 1

Le schéma de la poutre étudiée dans cette partie est le suivant :



### 2.1 Q 1 - Déterminer $u_y(x)$ et $\omega_z(x)$

On admet vrai les résultats du problème 2 suivant :

$$M_z^1(x) = -\Gamma \quad (0 \leq x \leq 2l)$$

$$M_z^2(x) = \frac{\Gamma}{l}(x - 3l) \quad (2l \leq x \leq 3l)$$

On recherche les termes  $w_z(x)$  et  $u_y(x)$ . Nous allons pour cela nous appuyer sur les lois de comportement et les relations cinématiques.

Pour une poutre plane, présentant une section symétrique plane, et pour laquelle  $\vec{t}(s) = \vec{x}$  et  $\vec{n}(s) = \vec{y}$ , nous avons les relations suivantes :

$$N(x) = E \times S \times \epsilon_x = E \times S \frac{du_x(x)}{dx} \quad (1)$$

$$T_n(x) = \mu \times S \times \epsilon_y = \mu \times S \left( \frac{du_y(x)}{dx} - \omega_z(x) \right) \quad (2)$$

$$M_z(x) = E \times I \times \gamma_z(x) = E \times I \frac{d\omega_z(x)}{dx} \quad (3)$$

avec  $I = I_{Gz}$  le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe  $\vec{z}$ ,  $E$  le module d'Young,  $\mu$  le module de cisaillement.

Or, en considérant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli vérifiée, on peut négliger les efforts tranchant ( $T_n(x) = 0$  car  $\epsilon_y = 0$ ). On peut ainsi réécrire les égalités ci-dessus :

$$\begin{aligned} N(x) &= E \times S \times \epsilon_x = E \times S \times \frac{du_x(x)}{dx} \\ T_n(x) &= 0 \quad - > \frac{du_y(x)}{dx} = \omega_z(x) \\ M_z(x) &= E \times I \times \frac{d\omega_z(x)}{dx} - > E \times I \times \frac{d^2u_y(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

### 2.1.1 Partie de gauche

On considère comme section gauche la partie comprise entre 0 et 2l.

D'après les expressions des moments exprimés ci-dessus nous avons pour cette partie gauche :

$$M_z^1(x) = E \times I \times \frac{d^2u_y(x)}{dx^2} = -\Gamma$$

Par intégration :

$$\frac{du_y^1(x)}{dx} = \omega_z^1(x) = -\frac{\Gamma}{E \times I} \times x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Soit encore :

$$u_y^1(x) = -\frac{\Gamma}{2 \times E \times I} \times x^2 + C_1 \times x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Une condition que nous avons, étant donné la liaison en A, est que le déplacement est nul en  $x = 2l$ , nous avons donc :

$$u_y^1(2l) = -\frac{2 \times \Gamma \times l^2}{E \times I} + 2 \times C_1 \times l + C_2 = 0$$

Or, nous n'avons pas de condition supplémentaire directe, que ce soit sur le déplacement ou la rotation.

Nous voyons donc que pour cette partie gauche, les conditions aux limites qui nous sont données ne pourront permettre de n'aboutir qu'à l'expression d'une des deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'autre.

En sommes, nous allons regarder la partie droite de la poutre afin d'ensuite faire jouer les relations de saut. Ainsi, nous pourrons déterminer  $C_1$  comme  $C_2$ , et donc par la même occasion avoir une expression du déplacement vertical et de la rotation de la section droite.

### 2.1.2 Partie de droite

Pour cette section, l'expression du déplacement vertical est, par le même procédé d'intégration que ci-dessus, le suivant :

$$u_y^2(x) = \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{x^3}{6 \times l} - \frac{3 \times x^2}{2} \right) + C_3 \times x + C_4, \quad C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

D'après les liaisons en A et B (respectivement un appui simple mobile et un appui simple fixe), nous avons un déplacement selon y qui est nul en  $x = 2l$  et  $x = 3l$ .

Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_y^2(2l) &= \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{8 \times l^3}{6 \times l} - \frac{3 \times 4 \times l^2}{2} \right) + C_3 \times 2 \times l + C_4 = 0 \\ u_y^2(3l) &= \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{27 \times l^3}{6 \times l} - \frac{3 \times 9 \times l^2}{2} \right) + C_3 \times 3 \times l + C_4 = 0 \end{aligned}$$

En associant les deux équations, nous trouvons les deux constantes  $C_3$  et  $C_4$  :

$$C_3 = \frac{13 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \quad (4)$$

$$C_4 = -\frac{4 \times \Gamma \times l^2}{E \times I} \quad (5)$$

On a au final :

$$u_y^2(x) = \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{x^3}{6 \times l} - \frac{3 \times x^2}{2} + \frac{13 \times l \times x}{3} - 4 \times l^2 \right) \quad (6)$$

$$\omega_z^2(x) = \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{x^2}{2 \times l} - 3 \times x + \frac{13 \times l}{3} \right) \quad (7)$$

Or, nous savons qu'en  $x = 2l$  nous avons un saut qui vérifie une égalité entre les termes de la partie gauche et celles de la partie droite.

Il en revient que :

$$\begin{aligned} u_y^1(2l) &= u_y^2(2l) \\ \omega_z^1(2l) &= \omega_z^2(2l) \end{aligned}$$

On cherche à déterminer  $C_1$  dans un premier temps. Pour ce faire, on va utiliser l'égalité liant les deux rotations de la section :

$$\begin{aligned} \omega_z^1(2l) &= -\frac{\Gamma}{E \times I} \times 2 \times l + C_1 \\ \omega_z^2(2l) &= \frac{\Gamma}{3 \times E \times I} \\ - > C_1 &= \frac{\Gamma \times l}{E \times I} \left( \frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \end{aligned} \quad (8)$$

Pour finir, en appliquant la condition sur  $u_y^1(x)$ , qui est que la poutre ne subit pas de déplacement en  $x = 2l$ , nous trouvons finalement une expression pour la constante  $C_2$  exprimée précédemment et nous obtenons les expressions finales pour le déplacement et la rotation :

$$u_y^1(x) = -\frac{\Gamma}{2 \times E \times I} \times x^2 + \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \times x + \frac{8 \times \Gamma \times l^2}{3 \times E \times I} \quad (9)$$

$$\omega_z^1(x) = -\frac{\Gamma}{E \times I} \times x + \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \quad (10)$$

$$u_y^2(x) = \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{x^3}{6 \times l} - \frac{3 \times x^2}{2} + \frac{13 \times l \times x}{3} - 4 \times l^2 \right) \quad (11)$$

$$\omega_z^2(x) = \frac{\Gamma}{E \times I} \times \left( \frac{x^2}{2 \times l} - 3 \times x + \frac{13 \times l}{3} \right) \quad (12)$$

Pour conclure, nous avons été en mesure de fournir l'expression de  $u_y(x)$  et de  $\omega_z(x)$  vérifiant les conditions selon les différentes liaisons et une continuité en A.

## 2.2 Q 2 - Vérification des résultats

Nous allons pour terminer cet exercice vérifier que nous aboutissons bien aux résultats fournis dans le sujet en  $x = 0$  :

$$v_0 = u_y^1(0) = -\frac{\Gamma}{2 \times E \times I} \times 0 + \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \times 0 + \frac{8 \times \Gamma \times l^2}{3 \times E \times I} = \frac{8 \times \Gamma \times l^2}{3 \times E \times I} \quad (13)$$

$$\omega_0 = \omega_z^1(0) = -\frac{\Gamma}{E \times I} \times 0 + \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} = \frac{7 \times \Gamma \times l}{3 \times E \times I} \quad (14)$$

On retrouve bien les égalités attendues, ce qui nous permet d'être conforté dans nos résultats.

## 2.3 Moment d'inertie I

Si jamais on souhaite faire une étude du modèle de validité de la poutre en fonction de ses dimensions par exemple, il devient nécessaire de déterminer le moment d'inertie I.

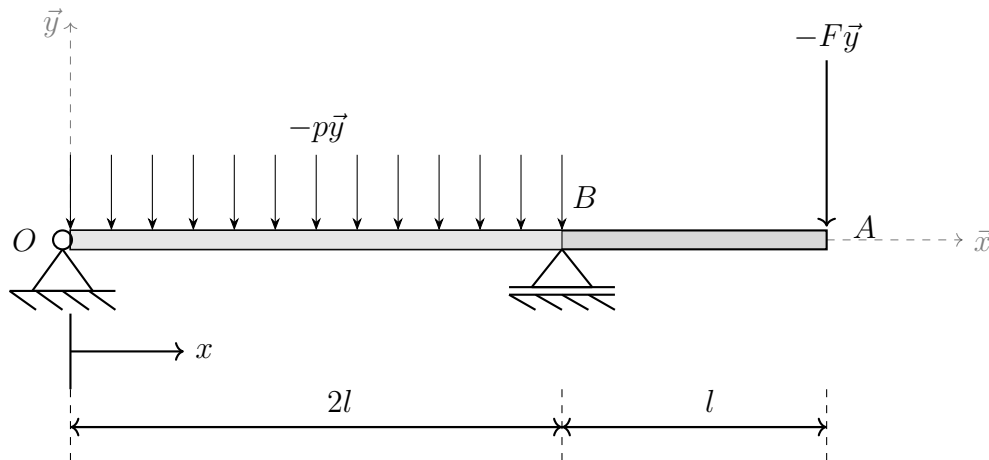
Nous étudions une poutre de section carrée, de côté  $a$ . Il en revient que le moment d'inertie est donné par :

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy dz \quad (15)$$

Ce qui donne après intégration :  $I = \frac{a^4}{12}$

## 3 Exo 2

Le schéma de la poutre étudiée dans cette partie est le suivant :



On suppose de nouveau que l'hypothèse d'Euler-Bernoulli est vérifiée ainsi que celle d'une section de la poutre qui présente une symétrie. Nous avons ainsi de nouveau :

$$\begin{aligned}
N(x) &= E \times S \times \frac{du_x(x)}{dx} \\
\epsilon_y = 0 &\Rightarrow \frac{du_y(x)}{dx} = \omega_z(x) \\
\epsilon_y = 0 &\Rightarrow M_z(x) = E \times I \times \frac{d^2u_y(x)}{dx^2}
\end{aligned}$$

### 3.1 Q 1 - Réactions des supports

Par application du PFD :

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{ext} &= \vec{R}_0 + -p2l\vec{y} + \vec{R}_B - F\vec{y} = \vec{0} \\
\sum \vec{M}_0(\vec{F}_{ext}) &= \vec{M}_0(\vec{R}_0) + \vec{M}_0(-p\vec{y}) + \vec{M}_0(\vec{R}_B) - \vec{M}_0(F\vec{y}) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de la résultante des forces pour le système, on sait que les liaisons en 0 et B sont telles que :

$$\{C_0\} = \begin{Bmatrix} N_0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{C_B\} = \begin{Bmatrix} 0 & T_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Nous avons donc par projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  pour la résultante des forces :

$$N_0 = 0 \quad (16)$$

$$T_0 + T_B = F + 2pl \quad (17)$$

De même, pour ce qui est du théorème du moment appliqué en 0 et par projection sur z :

$$T_B = pl + \frac{3F}{2}$$

On en déduit donc que  $T_0 = F + 2pl - pl + \frac{3F}{2} = pl - \frac{F}{2}$

Par application du PFS sur le système nous avons pu déterminer les réactions aux appuis en O et B lorsque la structure est en équilibre.

### 3.2 Q 2 - Torseur de cohésion

Afin de déterminer les composantes du torseur de cohésion, nous allons appliquer la méthode d'intégration sur la partie gauche de la poutre ( $0 \leq x \leq 2l$ ) puis sur la partie droite ( $2l \leq x \leq 3l$ ) :



### 3.2.1 Partie de gauche

Nous avons de nouveau  $t(\vec{s}) = \vec{x}$  et  $n(\vec{s}) = \vec{y}$ , ce qui nous amène à :

$$\frac{dR^1(\vec{x})}{dx} - p\vec{y} = \vec{0}$$

Par intégration :

$$R^1(\vec{x}) = px\vec{y} + \vec{C}_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or, } R^1(0) = -\vec{R}_0 = -T_0\vec{y} = \left(\frac{F}{2} - pl\right)\vec{y} = \vec{C}_1$$

Nous avons donc :

$$R^1(\vec{x}) = \left(p(x - l) + \frac{F}{2}\right)\vec{y} \quad (18)$$

Par ailleurs, pour ce qui est du moment :

$$\frac{dM^1(\vec{x})}{dx} = -\vec{x} \wedge \left(p(x - l) + \frac{F}{2}\right)\vec{y}$$

Par intégration :

$$M^1(\vec{x}) = -\left(p\left(\frac{x^2}{2} - xl\right) + \frac{F}{2}x\right)\vec{z} + \vec{C}_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

On sait qu'en  $x = 0$ , le moment est nul, ce qui nous permet de définir  $C_2$  :

$$M^1(0) = \vec{C}_2 = \vec{0}$$

On a donc au final :

$$M^1(\vec{x}) = -\left(p\left(\frac{x^2}{2} - xl\right) + \frac{F}{2}x\right)\vec{z} \quad (19)$$

### 3.2.2 Partie de droite

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dR^2(\vec{x})}{dx} &= \vec{0} \\ \frac{dM^2(\vec{x})}{dx} &= -\vec{x} \wedge R^2(\vec{x})\end{aligned}$$

Pour ce qui est de la résultante, par intégration :

$$\begin{aligned}R^2(\vec{x}) &= \vec{C}_3, & C_3 &\in \mathbb{R} \\ Or, R^2(3l) &= -F\vec{y} = \vec{C}_3 \\ -> R^2(\vec{x}) &= -F\vec{y}\end{aligned}\tag{20}$$

Ce résultat nous permet de définir le moment pour la partie de droite :

$$M^2(\vec{x}) = Fx\vec{z} + \vec{C}_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}$$

Etant donné que nous n'avons pas de condition aux limites directe pour le moment, nous allons utiliser la condition de saut en moment pour déterminer la composante  $C_4$  :

$$\begin{aligned}\left[\vec{M}\right](2l) &= 0 \\ -> M^2(2l) - M^1(2l) &= 2Fl + C_4 + p\left(\frac{4l^2}{2} - 2l^2\right) + Fl = 0 \\ -> C_4 &= -3Fl\end{aligned}$$

On peut ainsi réécrire les composantes du torseur de cohésion :

$$R^1(\vec{x}) = \left(p(x-l) + \frac{F}{2}\right)\vec{y}\tag{21}$$

$$M^1(\vec{x}) = -\left(p\left(\frac{x^2}{2} - xl\right) + \frac{F}{2}x\right)\vec{z}\tag{22}$$

$$R^2(\vec{x}) = -F\vec{y}\tag{23}$$

$$M^2(\vec{x}) = F(x-3l)\vec{z}\tag{24}$$

NOTE : on remarque que la composante  $N(x)$  du torseur est nul.

### 3.3 Q 3 - Rotation $\omega_z(x)$ et déplacement $u_y(x)$

En s'appuyant sur les lois de comportement et les relations cinématiques, nous allons déterminer le long de la poutre les composantes de déplacement  $u_y(x)$  et de rotation  $\omega_z(x)$ .

D'après les conditions vérifiées en début de cette partie (poutre plane, hypothèse d'Euler-Bernoulli, etc) :

$$\begin{aligned}\frac{du_y(x)}{dx} &= \omega_z(x) \\ - > M_z^1(x) &= E \times I \times \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} = - \left( p \left( \frac{x^2}{2} - xl \right) + \frac{F}{2} x \right) \\ - > M_z^2(x) &= E \times I \times \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} = F(x - 3l)\end{aligned}$$

On remarque que comme précédemment, une des deux parties fournies directement des conditions tel qu'on peut déterminer les constantes d'intégration.

On s'intéresse donc dans un premier temps à la partie de gauche.

#### 3.3.1 Partie de gauche

Par intégration de la formule précédente on obtient :

$$\begin{aligned}- > \frac{du_y^1(x)}{dx} &= \omega_z^1(x) = - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 l}{2} \right) + \frac{F}{4} x^2 \right) + C_1 \\ - > u_y^1(x) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{6} \right) + \frac{F}{12} x^3 \right) + C_1 \times x + C_2\end{aligned}$$

Ce qui nous amène, d'après les conditions aux limites  $u_y(0) = 0$  et  $u_y(2l) = 0$  (dûes aux liaisons en 0 et B) à :

$$u_y^1(0) = C_2 = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}u_y^1(2l) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{16l^4}{24} - \frac{8l^4}{6} \right) + \frac{F}{12} 8l^3 \right) + C_1 \times 2l = 0 \\ - > C_1 &= \frac{l^2}{3 \times E \times I} (F - pl)\end{aligned} \quad (26)$$

On peut donc réécrire le déplacement et la rotation pour la partie de gauche :

$$\begin{aligned}- > u_y^1(x) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{6} \right) + \frac{F}{12} x^3 - \frac{l^2}{3} (F - pl) \times x \right) \\ - > \omega_z^1(x) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 l}{2} \right) + \frac{F}{4} x^2 - \frac{l^2}{3} (F - pl) \right)\end{aligned}$$

NOTE : comme cela nous sera nécessaire dans la suite, on note que  $w_z^1(2l) = \frac{l^2}{3EI}(pl - 2F)$

### 3.3.2 Partie de roite

En suivant le même procédé d'intégration on aboutit à :

$$\begin{aligned} - > \frac{du_y^2(x)}{dx} = \omega_z^2(x) &= \frac{F}{E \times I} \left( \frac{x^2}{2} - 3xl \right) + C_3 \\ - > u_y^2(x) &= \frac{F}{E \times I} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2l}{2} \right) + C_3 \times x + C_4 \end{aligned}$$

D'après la continuité en  $x = 2l$ , on déduit  $C_3$  :

$$\begin{aligned} \omega_z^1(2l) &= \omega_z^2(2l) \\ - > \frac{l^2}{3EI}(pl - 2F) &= \frac{F}{E \times I}(2l^2 - 6l^2) + C_3 \\ - > C_3 &= \frac{l^2}{3EI}(10F + pl) \end{aligned} \quad (27)$$

Par ailleurs, en  $x = 2l$  nous avons de plus  $u_y(2l) = 0$ , ce qui va nous permettre de définir la variable  $C_4$  :

$$\begin{aligned} u_y^2(2l) &= \frac{F}{E \times I} \left( \frac{8l^3}{6} - \frac{3 \times 4l^3}{2} \right) + \frac{l^2}{3EI}(10F + pl) \times 2l + C_4 = 0 \\ - > C_4 &= - \frac{2l^3}{EI} \left( F + \frac{pl}{3} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Pour finir, nous pouvons réécrire les composantes  $u_y(x)$  et  $\omega_z(x)$  pour chacune des parties :

$$\begin{aligned} u_y^1(x) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3l}{6} \right) + \frac{F}{12}x^3 - \frac{l^2}{3}(F - pl) \times x \right) \\ \omega_z^1(x) &= - \frac{1}{E \times I} \left( p \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2l}{2} \right) + \frac{F}{4}x^2 - \frac{l^2}{3}(F - pl) \right) \\ u_y^2(x) &= \frac{1}{E \times I} \left( F \left( \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2l}{2} \right) + \frac{l^2}{3}(10F + pl) \times x - 2 \times l^3 \left( F + \frac{pl}{3} \right) \right) \\ \omega_z^2(x) &= \frac{1}{E \times I} \left( F \left( \frac{x^2}{2} - 3xl \right) + \frac{l^2}{3}(10F + pl) \right) \end{aligned}$$

Ces équations peuvent par ailleurs se simplifier comme suit :

$$u_y^1(x) = \frac{1}{E \times I} \left( \frac{px}{24} (4x^2l - x^3 - 8l^3) + \frac{Fx}{12} (4l^2 - x^2) \right) \quad (29)$$

$$\omega_z^1(x) = \frac{1}{E \times I} \left( \frac{p}{6} (3x^2l - x^3 - 2l^3) + \frac{F}{12} (4l^2 - 3x^2) \right) \quad (30)$$

$$u_y^2(x) = \frac{1}{E \times I} \left( \frac{F}{6} (x^3 - 9x^2l + 20l^2 \times x) + \frac{pl^3}{3} (x - 2l) \right) \quad (31)$$

$$\omega_z^2(x) = \frac{1}{E \times I} \left( \frac{F}{6} (3x^2 - 18x \times l + 20l^2) + \frac{pl^3}{3} \right) \quad (32)$$

### 3.4 Q 4 - Calcul en A et B

On cherche à appliquer les formules ci-dessus aux cas des points A et B. On a *A pour*  $x = 3l$  donc la partie droite et *B pour*  $x = 2l$ , soit la partie gauche.

On a au final :

$$\omega_B = \omega_z^1(2l) = \omega_z^2(x) = \frac{l^2}{3E \times I} (pl - 2F) \quad (33)$$

$$v_A = u_y^2(3l) = \frac{l^3}{E \times I} \left( F + \frac{pl}{3} \right) \quad (34)$$