LU3ME002

Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 1 : Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 1

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau à vitesse constante c (en m/s). Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau. On note $u(t,x)$ la concentration (en gr/m) de polluant à l'instant t et l'abscisse x. Montrer que $u(t,x)$ est solution de l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exercice 2

Résoudre l'équation aux dérivées partielles d'ordre 1 :

$$2\,\frac{\partial u}{\partial t} + 3\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec la condition initiale $u(0,x) = \sin(x)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation :

$$(1+x^2)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

et représenter quelques courbes caractéristiques.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes, avec des conditions auxiliares, par la méthode des caractéristiques et préciser le domaine d'existence des solutions :

$$y^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ;\ u(x,1) = e^x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + xy\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ;\ u(x,1) = x^2$$

$$(1+x^2)\,\frac{\partial u}{\partial x} - xy^2\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ,\ y \neq 0\ ;\ u(2,y) = e^y$$

Exercice 5

Effectuez un changement de variables pour déterminer la solution de l'équation :

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u = 0$$

Exercice 6

Effectuez un changement de variables, en passant en coordonnées polaires, pour déterminer les solutions $f(x,y)$ de l'équation :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Même question pour l'équation :

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

LU3ME002

Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 2 : Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

Exercice 1

Pour l'équation linéaire d'ordre 2 :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{1}$$

avec a, b, c, d, e, f, g fonctions de x et y, nous effectuons une changement de variables $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. Suite à ce changement, l'équation devient :

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + Du_\xi + Eu_\eta + Fu = G \tag{2}$$

pour l'inconnue $u(\xi, \eta)$ et avec A, B, C, D, E et F des fonctions de ξ et η.

a) Supposons que l'équation (1) est hyperbolique (i.e. $\delta > 0$). Démontrer qu'il existe une famille de deux caractéristiques pour une EDP hyperbolique, d'équations :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

b) Supposons que l'équation (1) est parabolique (i.e. $\delta = 0$). Démontrer qu'il existe une unique famille de caractéristiques pour une EDP parabolique, d'équation :$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$.

Exercice 2

Déterminer le type, la forme standard et la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Exercice 3 (extrait examen octobre 2015)

(i) Montrer que l'équation :

$$3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 0$$

est hyperbolique. Trouver la solution générale en passant par une factorisation de l'équation. Tracer graphiquement quelques caractéristiques dans le repère (Oxt).
(ii) Soit la version non-homogène de l'équation précédente :

$$3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 4(u_x - u_t)$$

En effectuant un changement de variables : $\xi = x - 3t$, $\eta = x + t$, montrer que dans le nouveau système de coordonnées, l'équation a la forme suivante :

$$u_{\xi\eta} = u_\xi$$

Déterminer ensuite la solution générale de l'équation non-homogène.

LU3ME002

Equations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 3 : Equation des ondes 1D

Exercice 1

On considère une corde vibrante infinie dont la position initiale est

$$\phi(x) = b - \frac{b \mid x \mid}{a} \quad si \quad \mid x \mid < a$$
$$\phi(x) = 0 \quad si \quad \mid x \mid > a$$

(corde pincée é trois doigts) et la vitesse initiale est $\psi(x) = 0$. La vitesse de propagation est notée par c.
Déterminer la position de la corde à $t = \frac{a}{2c}$, $t = \frac{a}{c}$, $t = \frac{2a}{c}$ et $t = \frac{3a}{c}$ en utilisant la formule de d'Alembert.

Exercice 2

Une onde sphérique est une solution de l'équation des ondes 3D de la forme $u(r,t)$, qui ne dépend que de la distance à l'origine r (coordonnées sphériques). Dans ce cas, l'équation des ondes revient à :

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$$

a. Effectuez un changement de fonction inconnue $v = ru$ pour obtenir l'équation des ondes 1D classique en v et donner la solution générale de cette équation.

b. Déterminer la solution pour les conditions initiales : $u(r,0) = \phi(r)$, $u_t(r,0) = \psi(r)$, avec ϕ et ψ des fonctions définies sur l'axe réel et paires.

Exercice 3

Résoudre l'équation :

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = x^2$ et $u_t(x,0) = e^x$.

Exercice 4

Résoudre la problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène :

$$u_{tt} - 9u_{xx} = e^x - e^{-x} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$
$$u(x,0) = x \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$
$$u_t(x,0) = \sin(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

LU3ME002

Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 4 : Equation de diffusion 1D

Exercice 1

On considère le problème initial et aux limites pour l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \; t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 4x(1-x) \end{aligned}$$

a) Montrer que, pour tout $0 < x < 1$, $t > 0$, nous avons les inégalités :

$$0 \leq u(x,t) \leq 1$$

b) Montrer que $u(x,t) = u(1-x,t)$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$.
c) Utilisez une méthode de type énergie pour démontrer que l'intégrale $\int_0^1 u^2 dx$ est strictement décroissante par rapport à la variable t.

Exercice 2

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t = k u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0 \\ u(x,0) = 1 \quad | x |< 1 \;\; ; \;\; u(x,0) = 0 \quad | x |\geq 1 \end{aligned}$$

avec $k > 0$.
a) Obtenir une représentation de la solution du problème en fonction de la fonction d'erreur $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ en utilisant la solution fondamentale pour l'équation de diffusion.
b) Montrer que, pour tout $t > 0$ arbitrairement petit, la solution du problème est non nulle partout sur l'axe réel, malgré la donnée initiale concentrée sur $(-1, 1)$. Comparaison avec l'équation des ondes.
c) Montrer que, en chaque point x, la solution $u(x,t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Exercice 3

Résoudre la problème de Cauchy pour l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} u_t = k u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \quad x \geq 0 \;\; ; \;\; u(x,0) = 0 \quad x < 0 \end{aligned}$$

avec $k > 0$. La solution sera exprimée avec la fonction d'erreur $Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$.

Exercice 4

Soit l'équation de diffusion sur l'axe réel, avec la condition initiale

$$u(x,0) = \phi(x)$$

Montrer que si $\phi(x)$ est une fonction paire (impaire), alors la solution $u(x,t)$ est aussi une fonction paire (impaire) de x.

LU3ME002

Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 5 : Méthode de séparation des variables

Exercice 1 : Equation des ondes avec conditions initiales et condtions aux limites de Dirichlet
Résoudre le problème

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{1}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t > 0 \tag{2}$$
$$u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0, \ 0 < x < l \tag{3}$$

Exercice 2 : Conditions aux limites non-homogènes
Soit a, b, α, β, u_0 et l des réels strictement positifs tels que :

$$a\pi^2 > bl^2 \tag{4}$$

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \forall (x,t) \in]0,l[\times]0,+\infty[\tag{5}$$

avec les conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t} & \forall t > 0 \\ u(l,t) = u_0 e^{-\beta t} & \forall t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

et la condition

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in]0,l[\tag{7}$$

Exercice 3 : Vibrations libres d'une poutre simplement appuyée
Résoudre par séparation de variables le problème suivant qui correspond aux vibrations libres d'une poutre sur deux appuis :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 && \forall t > 0, \ \forall\, 0 < x < 1 \\ &\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0 \end{cases} && \forall t > 0 \\ &\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} && \forall\, 0 < x < 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Exercice 4 (Extrait du partiel novembre 2014)
Soit l'équation de la chaleur 2D définie sur une bande d'épaisseur 1 et de longuer infinie :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < y < 1, \ t > 0, \tag{9}$$

associée aux conditions limite homogènes en $y = 0$ et respectivement $y = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1,t), \ -\infty < x < \infty, \ t > 0. \tag{10}$$

Supposons de plus une distribution initiale de la température à variables séparées tel que :

$$u(x, y, 0) = f(x)g(y). \tag{11}$$

i) On cherche une solution à variables séparées $u(x, y, t) = v(x, t)Y(y)$. Montrez qu'on aura deux équations à résoudre : une équation aux dérivées partielles pour l'équation en $v(x, t)$ et une équation aux dérivées ordinaire pour l'équation en $Y(y)$, qu'on spécifiera.
Donnez également les conditions limite associées à l'équation en $Y(y)$ et la condition initiale associée à l'équation en $v(x, t)$.

ii) Déterminez la solution de l'équation en y (fonctions propres $Y_n(y)$) ainsi que l'expression des valeurs propres λ_n, pour $n = 0, 1, 2...$

iii) Montrez qu'à partir de l'équation en $v(x, t)$ et en passant par la transformation $v(x, t) = e^{-\lambda_n t}V(x, t)$ l'on obtient le problème de Cauchy pour l'équation de la diffusion 1D :

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &V(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

En déduire la solution fondamentale $V(x, t)$ de ce problème de Cauchy.

iv) Sachant que la solution générale de l'équation (9) avec les conditions limite (10), par superposition, est :

$$u(x, y, t) = V(x, t) \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\pi y) e^{-\lambda_n t} \right)$$

Déterminez les coefficients A_0, A_n pour obtenir la solution $u(x, y, t)$ qui vérifie la condition initiale (11).
v) Quelle propriété doit vérifier la fonction $f(x)$ pour que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0$$

Exercice 5 (Extrait de l'examen janvier 2015)
Cet exercice a pour but d'étudier par séparation de variables les vibrations longitudinales d'une poutre élastique (sous l'hypothèse des petites perturbations). Soit donc une poutre de longueur L, module d'Young E et masse volumique ρ. Soit u le champ de déplacement dans la poutre, fonction du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de l'abscisse $x \in [0, L]$. u satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{E}$$

Dans la suite on posera $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ célérité des ondes longitudinales.

Cette poutre est soumise à une déformation initiale $u_0(x)$ connue :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \qquad \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \qquad \forall x \in [0, L] \end{aligned} \tag{CI}$$

On considère dans un premier temps une poutre bi-encastrée (voir Figure 1) :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{CL1}$$

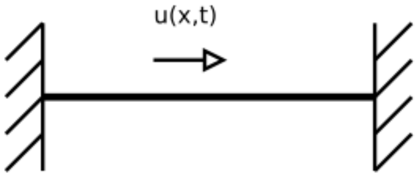

FIGURE 1 – Poutre bi-encastrée (CL1)

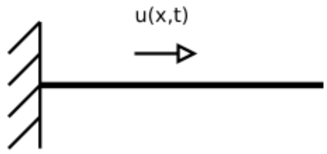

FIGURE 2 – Poutre encastrée-libre (CL2)

1. Montrer que pour satisfaire (E,CL1) la partie spatiale X d'une forme séparée $u(x,t) = X(x)T(t)$ doit vérifier une équation différentielle et des conditions aux limites spécifiques.
2. On cherche u sous la forme $u(x,t) = \sum_n X_n(x)T_n(t)$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par les (T_n).
3. Déterminer complètement les (T_n) afin qu'ils permettent de satisfaire (CI).

On considère maintenant une poutre encastrée-libre (voir Figure 2) :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{CL2}$$

4. Quelles sont les conséquences d'un tel changement de conditions aux limites ?

LU3ME002

Équations aux dérivées partielles de la mécanique

Feuille d'exercices n° 6 : Equation de Laplace

Exercice 1 :
Déterminer la fonction harmonique $u(x, y)$ définie dans le carré $D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ et vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_y = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = \pi \\ u = 0 \text{ pour } x = 0 \\ u = \cos^2(y) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2y)) \text{ pour } x = \pi \end{aligned}$$

Exercice 2 :
Résoudre le problème aux limites pour l'équation de Laplace non-homogène :

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 1, \quad (x, y) \in D \\ u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D. \end{aligned}$$

pour
a) $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$, $b > 0$.
b) $D = \{(x, y) \mid a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$, $a, b > 0$.

Exercice 3 :
Déterminer la solution du problème aux limites pour l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \quad r < a \\ u = h(\theta), \quad r = a \end{aligned}$$

où r et θ sont les coordonnées polaires, $h(\theta)$ une fonction donnée et a une constante positive.
Application : $h(\theta) = \sin^3(\theta)$.