Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique

Examen du 29 Février 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) trois vecteurs de E formant une base. On note φ l'application linéaire définie par $\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\varphi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de φ dans la base (e_1, e_2, e_3).
   - Déterminer le rang de A et déduire ensuite la dimension du noyau de A.
   - L'application φ est-elle un automorphisme ? Justifier votre réponse.
   - Déterminer $Ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$ et donner une interprétation géométrique.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   - Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
   - Calculer $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$, $\varphi(f_3)$ en fonction de (f_1, f_2, f_3).
   - Écrire la matrice B de φ dans la base (f_1, f_2, f_3). Calculer B^2 et en déduire la nature de l'application φ.
   - Montrer que $E = Ker(\varphi) \bigoplus Im(\varphi)$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Que représente P ?
   - Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 2

Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A.
2. Déterminer si A est diagonalisable. Si oui, trouver une base de vecteurs propres.
3. Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = AB$. Montrer que si u est un vecteur propre de A, alors u est aussi un vecteur propre de B.
4. Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Monter que $BA = AB$ et en déduire, à l'aide des questions précédentes, toutes les valeurs propres possibles de la matrice B.
5. Déterminer l'ensemble I des matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ et calculer $\sum_{B \in I} B$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante, où $y = y(x)$ est la fonction inconnue :

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 4xy + 4x\sqrt{y} \tag{1}$$

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ? Préciser le degré et s'il s'agit d'une équation linéaire ou non-linéaire.
2. On veut résoudre l'équation précédente à l'aide d'un changement de variable approprié, du type $z(x) = (y(x))^\alpha$.
   – Préciser la valeur de la constante α que l'on doit choisir pour ne plus avoir de terme non linéaire et montrer que la nouvelle variable inconnue $z(x)$ est solution de l'équation différentielle :

   $$(x^2+1)\frac{dz}{dx} - 2xz = 2x \tag{2}$$

   – Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (2). Trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (2). En déduire la solution générale de (2).
   – Résoudre (2) par une méthode différente que l'on précisera.
   – Préciser la condition que $z(x)$ doit vérifier et déterminer ensuite les valeurs possibles de la constante dont z dépend pour que la solution soit définie.
   – Déduire ensuite la solution générale $y(x)$ de l'équation (1).
3. Donner la solution du problème de Cauchy formé par l'équation (1) et la condition initiale $y(0) = 0$. Représenter graphiquement cette solution.