Eléments de Corrigé

Ecrit intermediaire 3A006 - Mars 2017

Exercice

1. Conditions aux limites associées aux chargements

Sur S_0 et S_ℓ : Chargement 1 Contact sans frottement avec un bâti

le bâti est fixe en S_0 ($x_3 = 0$) et mobile en S_ℓ ($x_3 = \ell$) avec un deplacement normal à la face donné U_3^d.

les déplacements transverses sont autorisés mais ne sont pas connus ici

écriture : $\begin{cases} \underline{u}\cdot\underline{n} = \underline{u}^{bati}\cdot\underline{n} & \text{avec } \underline{n} = \pm\underline{e}_3 \\ \underline{T}_T = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} - \sigma_N\,\underline{n} = \underline{0} & \text{et } \sigma_N = (\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n})\cdot\underline{n} \end{cases}$

soit sur S_0 : $\begin{cases} u_3(x_1,x_2,0) = 0 = u_3^{bati} \\ \sigma_{13}(x_1,x_2,0) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1,x_2,0) = 0 \end{cases}$ $\forall (x_1,x_2) / 0 \leq x_1^2+x_2^2 < R$

sur S_ℓ $\begin{cases} u_3(x_1,x_2,\ell) = U_3^d \\ \sigma_{13}(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1,x_2,\ell) = 0 \end{cases}$ ou en cylindrique $\begin{cases} u_z(r,\theta,\ell) = U_3^d \\ \sigma_{rz}(r,\theta,\ell) = 0 \\ \sigma_{\theta z}(r,\theta,\ell) = 0 \end{cases}$ $\forall\, 0 \leq r < R$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Chargement 2 : contact parfait avec un bâti fixe en $x_3 = 0$ et mobile en $x_3 = \ell$ (selon $\underline{e}_3$). les deplacements transverses selon $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont bloqués dans ce cas (d'où la déformée)

soit. $\underline{u} = \underline{u}^{bati}$

et donc sur S_0 $\begin{cases} u_1(x_1,x_2,0) = 0 \\ u_2(x_1,x_2,0) = 0 \\ u_3(x_1,x_2,0) = 0 \end{cases}$ $\forall (x_1,x_2)$ ou $\begin{cases} u_r(r,\theta,0) = 0 \\ u_\theta(r,\theta,0) = 0 \\ u_z(r,\theta,0) = 0 \end{cases}$ $\forall r\ \forall\theta$

et sur S_ℓ $\begin{cases} u_1(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ u_2(x_1,x_2,\ell) = 0 \\ u_3(x_1,x_2,\ell) = U_3^d \end{cases}$

Par ailleurs dans les deux chargements, la surface latérale S_e est libre d'effort soit

$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{0}$ avec $\underline{n} = \underline{e}_r$ soit $\begin{cases} \sigma_{rr}(r=R,\theta,z) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r=R,\theta,z) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=R,\theta,z) = 0 \end{cases}$ $\forall\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\forall z\ 0 < z < \ell$

Chargement 1

$\mathcal{U}ad = \{ \underline{v}$ régulier / $v_3(x_1,x_2,0)=0$; $v_3(x_1,x_2,\ell) = U_3^d \}$

$\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ régulier / $\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tau}} = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in \Omega$

$\underline{\underline{\tau}}.\underline{n} = \underline{0}$ sur S_e et $\underline{\tau}_t = \underline{0}$ sur S_0 et $S_\ell \}$

Chargement 2 Champs statiquement et cinématiquement admissibles

$\mathcal{U}ad = \{ \underline{v}$ régulier / $\underline{v} = \underline{0}$ sur S_0 $\underline{v} = U_3^d \underline{e}_3$ sur $S_\ell \}$

$\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ régulier / $\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tau}} = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in \Omega$; $\underline{\underline{\tau}}.\underline{n} = \underline{0}$ sur $S_e \}$
(*)

2. Type des problèmes et unicité de la solution

- Chargement 1 : problème de type 3.

Sur aucune surface les 3 composantes du déplacement sont connues (pas type 1) et les 3 composantes des efforts ne sont pas connues sur tout le bord (pas de type 2)

- Chargement 2 - problème de type 1

les 3 composantes du déplacement sont connues sur S_0 et S_ℓ

(*) Ces deux problèmes sont réguliers. Sur chaque surface sont données localement 3 composantes soit des déplacements, soit des efforts, soit mixtes.

- Chargement 1 : la solution existe en déplacement et en contraintes.

Elle est unique en contrainte, mais pas en déplacement. La solution en déplacement est défini à un déplacement de corps rigide près compatible avec les conditions aux limites cinématiques. Soit donc :

$\underline{u}$ et $\underline{u}^*$ deux solutions $\Rightarrow$ $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\rho}$ déplacement de corps rigide

tel que $\underline{\rho}_3 = 0$ sur S_0 et sur S_ℓ $\left(\rho_3(x_1,x_2,0) = \rho_3(x_1,x_2,\ell) = 0 \right)$

d'où $\underline{\rho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x} = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases} + \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} a_1 + b_2x_3 - b_3x_2 \\ a_2 + b_3x_1 - b_1x_3 \\ a_3 + b_1x_2 - b_2x_1 \end{cases}$

avec $\rho_3(x_1,x_2,0) = 0 \Rightarrow$ $\forall x_1\ \forall x_2$

$\rho_3(x_1,x_2,\ell) = 0 \Rightarrow$ $\quad a_3 + b_1x_2 - b_2x_1 = 0$ $\quad a_3 = 0 \quad b_1 = b_2 = 0$

de sorte que $\underline{u}-\underline{u}^* = \begin{cases} a_1 - b_3 x_2 \\ a_2 + b_3 x_1 \\ 0 \end{cases}$ avec a_1, a_2, b_3 quelconque

la translation selon $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ n'est pas bloquée, ni la rotation autour de $\underline{e}_3$

Chargement 2 : le problème étant de type 1, le déplacement et les contraintes sont uniques :

$\underline{u}-\underline{u}^* = \underline{\rho}$ avec $\underline{\rho} = \underline{0}$ sur S_0 et sur S_e

d'ou par exemple sur S_0

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 - b_3 x_2 = 0 & \Rightarrow & a_1 = b_3 = 0 \\ a_2 + b_3 x_1 = 0 & & a_2 = 0 \\ a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_2 = 0 & \Rightarrow & a_3 = 0 \quad b_1 = b_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a} = \underline{0} \\ \underline{b} = 0 \end{array}$$

d'où $\underline{u}-\underline{u}^* = \underline{0}$ unicité en déplacement

et d'où $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^*$ par la loi de comportement

Problème : Barreau sous sollicitations diverses

1. Equations de compatibilité

- les équations de compatibilité traduisent l'existence d'un champ de déplacement associé à un champ de déformation donné, soit il existe $\underline{u}$ tel que $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$ avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donné

(ce sont des conditions d'intégrabilité)

- En 3D elles s'écrivent

$$\sum \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqr} \frac{\partial^2 \varepsilon_{jq}(\underline{x})}{\partial x_k \partial x_r} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0 \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ p = 1,2,3 \end{array}$$

6 équations locales scalaires

- Champ de contraintes planes parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

avec $\varepsilon_{33}(x_1,x_2) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})(x_1,x_2)$

d'apres la loi de Hooke

- Equations de compatibilité en contraintes planes

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,22} - 2\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = 0 \\ \varepsilon_{33,11} = 0 \ (*) \qquad \forall (x_1,x_2) \\ \varepsilon_{33,22} = 0 \ (**) \\ \varepsilon_{33,12} = 0 \ (***) \end{cases}$$

les deux autres sont automatiquement satisfaites

$(*)$ provient de $\underbrace{\varepsilon_{11,33}}_{=0} - 2\underbrace{\varepsilon_{13,13}}_{=0} + \varepsilon_{33,11} = 0 \rightarrow \varepsilon_{33,11} = 0$

car $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x_1,x_2)$ car $\varepsilon_{13} = 0$

$(**)$ provient de $\varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{22,33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33,22} = 0$

car $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x_1,x_2) \Rightarrow \varepsilon_{22,33} = 0$

$\varepsilon_{23} = 0$

$(***)$ provient de $\varepsilon_{33,12} - \varepsilon_{31,32} - \varepsilon_{32,31} + \varepsilon_{12,33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33,12} = 0.$

car $\varepsilon_{31} = 0 = \varepsilon_{32}$ et $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(x_1,x_2) \Rightarrow \varepsilon_{12,33} = 0$

Par ailleurs $\varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{13,12} - \varepsilon_{12,13} + \varepsilon_{32,11} = 0$ est automatiquement satisfaite

car $\varepsilon_{11,3} = 0$ $(\varepsilon_{11}(x_1,x_2))$ $\varepsilon_{13} = 0$

et $\varepsilon_{12,3} = 0$ $(\varepsilon_{12}(x_1,x_2))$. $\varepsilon_{23} = 0$

et $\varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{23,21} - \varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{13,22} = 0$ automatiquement satisfaite

car $\varepsilon_{22,3} = 0$ $(\varepsilon_{22}(x_1,x_2))$ $\varepsilon_{12,3} = 0$ $(\varepsilon_{12}(x_1,x_2))$

et $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

2. Fonction d'Airy

- Les equations d'equilibre (en absence de forces volumiques ici) et sous l'hypothèse des contraintes planes se réduisent à :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega_0 \quad \text{car } \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 & \qquad\qquad \text{et } \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

la 3^e equation est automatiquement satisfaite
car $\sigma_{13} = 0 = \sigma_{23} = \sigma_{33}$

les equations sont automatiquement satisfaites si $\exists\, \varphi(x_1,x_2)$ telle que $\sigma_{11} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ $\quad \sigma_{12} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$

et $\exists\, \psi(x_1,x_2)$ telle que

$$\sigma_{21} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

or $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ car $\underline{\underline{\sigma}}$ est symetrique d'où les fonctions φ et ψ doivent satisfaire la relation $\quad -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}$ $\quad$ soit $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_0$

cette relation est satisfaite, s'il existe une fonction $\chi(x_1,x_2)$ |

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \qquad \psi(x_1,x_2) = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

de sorte que les equations d'equilibre sont satisfaites si il existe $\chi(x_1,x_2)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_1} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_1}$$

- le tenseur des contraintes doit conduire à un tenseur des déformations compatible et donc en injectant les expressions de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de χ et en exploitant la loi de comportement) dans les equations de compatibilité, on obtient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\chi_{,22} - \frac{\nu}{E}\chi_{,11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\chi_{,11} - \frac{\nu}{E}\chi_{,22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$\varepsilon_{12} = -\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\chi_{,12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = -\frac{\nu}{E}(\Delta\chi)$$

d'où en substituant dans les equations de compatibilité en contraintes planes

- $\dfrac{1}{E}\chi_{,2222} - \dfrac{\nu}{E}\chi_{,1122} + 2\dfrac{(1+\nu)}{E}\chi_{,1212} + \dfrac{1}{E}\chi_{,1111} - \dfrac{\nu}{E}\chi_{,2211} = 0$
- $-\dfrac{\nu}{E}(\Delta\chi)_{,11} = 0$ $\quad$ • $-\dfrac{\nu}{E}(\Delta\chi)_{,12} = 0$
- $-\nu/E\,(\Delta\chi)_{,22} = 0$

Soit $\cdot \frac{1}{E}\left[\mathcal{X}_{,2222} + \mathcal{X}_{,1111} + 2\,\mathcal{X}_{,1122} \right] = 0$

$$\Rightarrow \left\{ \Delta(\Delta \mathcal{X})(x_1,x_2) = 0 \quad \forall (x_1,x_2) \right.$$

et
$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta\mathcal{X})_{,11} = 0 \\ (\Delta\mathcal{X})_{,22} = 0 \qquad \forall (x_1,x_2) \\ (\Delta\mathcal{X})_{,12} = 0 \end{array} \right.$$

Si $\mathcal{X}$ est une fonction du 3° degré par rapport à chacune de ses 2 variables (x_1,x_2) alors :

$$\mathcal{X}_{,1} = 3Ax_1^2 + 2Cx_1x_2 + Dx_2^2 + 2Fx_1 + Gx_2 + I$$

$$\mathcal{X}_{,11} = 6Ax_1 + 2Cx_2 + 2F = \sigma_{22}$$

$$\mathcal{X}_{,2} = 3Bx_2^2 + Cx_1^2 + 2Dx_1x_2 + Gx_1 + 2Hx_2 + J$$

$$\mathcal{X}_{,22} = 6Bx_2 + 2Dx_1 + 2H = \sigma_{11}$$

$$\mathcal{X}_{,12} = 2Cx_1 + 2Dx_2 + G = -\sigma_{12}$$

de sorte que $\Delta\mathcal{X} = 6Ax_1 + 6Bx_2 + 2Cx_2 + 2Dx_1 + 2F + 2H$

et donc $(\Delta\mathcal{X})_{,1} = 6A + 2D \Rightarrow \left\{ (\Delta\mathcal{X})_{,11} = 0 \right.$

$(\Delta\mathcal{X})_{,2} = 6B + 2C \Rightarrow \left\{ (\Delta\mathcal{X})_{,22} = 0 \right.$

$\left\{ (\Delta\mathcal{X})_{,12} = 0 \right.$

et donc $\left\{ \Delta(\Delta\mathcal{X}) = 0 \right.$ les 4 equations sont bien satisfaites

3 Premier choix $\mathcal{X}^1 = Hx_2^2 + Ix_1 + Jx_2 + H.$

(soit $A = 0 = B = C = D = F = G$)

3.1 Calcul du tenseur des contraintes

$\sigma_{11} = \mathcal{X}_{,22} = 2H$

$\sigma_{22} = \mathcal{X}_{,11} = 0$

$\sigma_{12} = \mathcal{X}_{,12} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{e_1}\,\underline{e_2}\,\underline{e_3}} = 2H\,(\underline{e_1} \otimes \underline{e_1}) = \sigma_1\,(\underline{e_1} \otimes \underline{e_1})$$

il s'agit d'un chargement de traction uniaxiale selon $\underline{e_1}$ d'intensité $\pm\sigma_1$ exercée sur les faces $x_1 = L$ et $x_1 = 0$, les autres faces étant libres d'efforts.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0 \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0 \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0$$

soit
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + f_1(x_2,x_3) \\ u_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + f_2(x_1,x_3) \\ u_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + f_3(x_1,x_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=0 \end{array}$$

une solution particulière s'obtient avec $f_1=f_2=f_3=0$

De sorte que la forme générale d'un champ de déplacement solution est

$\underline{u}^1 = \underline{u}^{1\,part} + \underline{e}$ $\quad$ $\underline{e}$ déplacement de corps rigide

et $\underline{u}^{1\,part} = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 \underline{e}_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 \underline{e}_3$

$\underline{e} = \underline{a} + \underline{b}\wedge\underline{x}$ avec $\underline{a}$, $\underline{b}$ quelconques constants

le champ est solution du pb initial de traction uniaxial, il n'est pas unique ($\underline{a}$, $\underline{b}$ sont quelconques). On retrouve le résultat annoncé au type 2 du problème

- Condition d'encastrement en S_0 ne peut pas être satisfaite en effet

$$\underline{u}^1 = \begin{cases} \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 \\ -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3 \\ -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases}$$

sur S_0 $x_1=0 \Rightarrow u_1^1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2$

$u_2^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 - b_1 x_3$

$u_3^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$

pour que la condition soit satisfaite, il faudrait que

$u_1^1(x_1=0,x_2,x_3)=0 \Rightarrow a_1=b_2=b_3=0$ permet de vérifier $u_1^1=0$

$u_2^1(x_1=0,x_2,x_3)=0$ impossible à vérifier car $u_2^1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + a_2 - b_1 x_3 \neq 0 \quad \forall x_1, \forall x_2, \forall x_3$

(le terme $-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2$ ne peut être éliminé quel que soit le choix fait pour a_2, b_1.)

- condition de déplacement nul au centre de la face S_0 soit au point $(0,0,0)$

$\underline{u}^1(0,0,0) = \underline{0}$ vérifié avec $a_1 = 0 = a_2 = a_3$, dans ce cas

$$\underline{u}^1 = \left(\frac{1}{E}\sigma_1 x_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2\right)\underline{e}_1 + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3\right)\underline{e}_2 + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1\right)\underline{e}_3$$

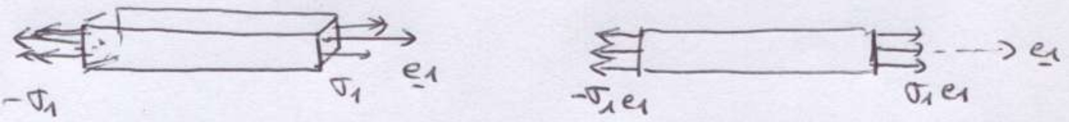
est solution avec $\underline{b}$ quelconque

Sur $x_1 = L$ $\quad \underline{n} = \underline{e}_1 \quad \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e}_1 = 2H \underline{e}_1$

$x_1 = 0 \quad \underline{n} = -\underline{e}_1 \quad \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_1) = -2H\, \underline{e}_1$

$x_2 = \pm h \quad \underline{n} = \pm \underline{e}_2 \quad \underline{\underline{\sigma}}(\pm \underline{e}_2) = \underline{0}$ libre d'effort

$x_3 = \pm e \quad \underline{n} = \pm \underline{e}_3 \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e}_3) = \underline{0}$ libre d'effort



- le problème ainsi posé est un pb régulier de type 2, les densités d'effort sont connues sur toutes les faces
- Il admet une solution sous la condition nécessaire d'existence

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \underline{0} \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS = \underline{0}$$

qui est bien satisfaite ici car $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, ds = \int_{S_L} \sigma_1 \underline{e}_1\, ds + \int_{S_0} -\sigma_1 e_1\, dS = \underline{0}$

et $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, ds = \int_{S_L} (\cancel{x_1} e_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dS + \int_{S_0} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge -\sigma_1 \underline{e}_1\, ds$

$= \underline{0}$ car $\displaystyle\underbrace{\int_{S_L}}_{=S} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dx_2 dx_3 - \underbrace{\int_{S_0}}_{=S} (x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \wedge \sigma_1 \underline{e}_1\, dx_2 dx_3 = \underline{0}$

- Cette condition étant satisfaite, la solution existe et est unique en contrainte, définie à un corps rigide près en déplacement

si $\underline{u}$ est solution $\underline{u} + \underline{c}$ avec $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{x}$ est solution

3.2 Champ de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \end{bmatrix}_{e_1, e_2, e_3}$$

en appliquant la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\mathrm{trace}\, \sigma) \underline{\underline{1}}$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) - \frac{\nu}{E} \sigma_1 [\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3]$$

On sait qu'il existe un champ de déplacement associé

car les équations de Beltrami sont satisfaites par l'intermédiaire de la fonction X qui vérifie $\Delta(\Delta X) = 0 \quad (\Delta X)_{,11} + (\Delta X)_{,22} = (\Delta X)_{,12} = 0.$

4. Champ de déplacement est solution de :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}\sigma_1 \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\nu}{E}\sigma_1$$

$\underline{u}^1$ n'est pas unique, il est défini à une rotation près autour de $\underline{e_1}$ de $\underline{e_2}$ et $\underline{e_3}$

- Condition de déplacement nul au centre et $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(0,0,0)=0$; $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0,0,0)=0$ et $\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(0,0,0)=0$

dans ce cas $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0,0,0) = b_3 = 0$

$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(0,0,0) = -b_2 = 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{0}$ on a bien unicité

$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(0,0,0) = b_1 = 0$

le corps rigide est bloqué par ces conditions supplémentaires

- Condition $\underline{u}(0,0,0)=0$ et $u_2(L,0,0) = 0 = u_3(L,0,0)$

dans ce cas $u_2(L,0,0) = b_3 L = 0 \Rightarrow b_3 = 0$

$u_3(L,0,0) = -b_2 L = 0 \Rightarrow b_2 = 0$

donc $\underline{u} = \frac{1}{E}\sigma_1 x_1 \underline{e_1} + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_2 - b_1 x_3\right)\underline{e_2} + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_1 x_3 + b_1 x_2\right)\underline{e_3}$

est solution b_1 reste indéterminé, on a donc pas unicité de la solution pour ce problème qui autorise les rotation autour de $\underline{e_1}$

4 Choix de la fonction $\chi^2 = F x_1^2 + H x_2^2 + I x_1 + J x_2 + K$

$A = B = C = D = G = 0$

Calcul du champ de contraintes

$\sigma_{11} = 2F = \sigma_1$; $\sigma_{22} = 2H = \sigma_2$; $\sigma_{12} = 0$ et $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^2 = \sigma_1\, \underline{e_1} \otimes \underline{e_1} + \sigma_2\, \underline{e_2} \otimes \underline{e_2}$

} il s'agit d'un champ de contrainte bi axiale selon $\underline{e_1}$ et $\underline{e_2}$ (de traction) (d'intensité σ_1) (d'intensité σ_2)

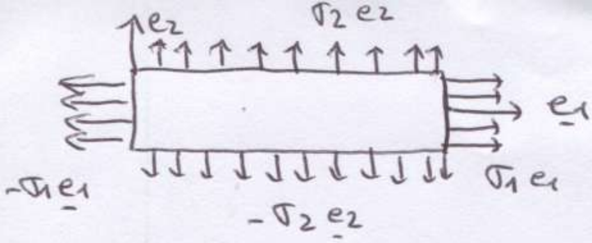
sur S_0 $x_1=0$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e_1}) = -\sigma_1 \underline{e_1}$

S_L $x_1=L$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e_1} = \sigma_1 \underline{e_1}$

S_h $x_2 = h$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e_2} = \sigma_2 \underline{e_2}$

S_{-h} $x_2 = -h$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e_2}) = -\sigma_2 \underline{e_2}$

$S_{\pm e}$ $x_3 = \pm e$ $\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}(\pm \underline{e_3}) = \underline{0}$ (libre d'effort)



$$\underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 \\ & & -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

$$\underline{u}^2 = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2\right) x_1 \\ \left(\frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_1\right) x_2 \\ -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\, x_3 \end{array} \right. + \underline{c} \text{ (corps rigide)}$$

5. Choix de la fonction $\chi^3 = G x_1 x_2 + I x_1 + J x_2 + K$.

$(\; A = B = C = D = F = H = 0 \;)$

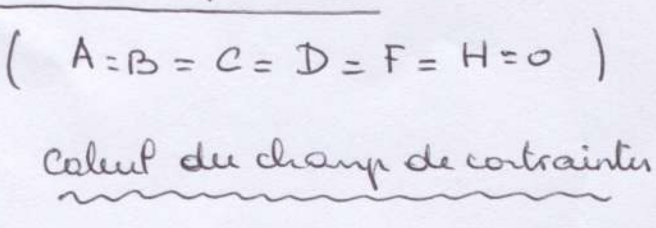
Calcul du champ de contraintes

$\sigma_{11} = 0 \qquad \sigma_{22} = 0 \qquad \sigma_{12} = -G = \tau \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

d'où $\quad \underline{\underline{\sigma}}^3 = \tau\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$

Effort

$$\begin{cases} \text{sur } S_0 \; x_1 = 0 \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (-\underline{e}_1) = -\tau\,\underline{e}_2 \; ; \; \text{sur } S_L \; x_1 = L \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot \underline{e}_1 = \tau\,\underline{e}_2 \text{ libre d'effort} \\ \text{Sur } S_{\pm h} \; x_2 = \pm h \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (\pm \underline{e}_2) = \pm \tau\,\underline{e}_1 \\ \text{Sur } S_{\pm e} \; x_3 = \pm e \quad \underline{\underline{\sigma}}^3 \cdot (\pm \underline{e}_3) = \underline{0} \text{ (libre d'effort)} \end{cases}$$



il s'agit d'un chargement de cisaillement exercé sur les faces $\pm h$ selon $\underline{e}_1$ d'intensité τ.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}^3 = \frac{1+\nu}{E}\tau\,(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1^3}{\partial x_1} = 0 \; , \; \frac{\partial u_2^3}{\partial x_2} = 0 \; ; \; \frac{\partial u_3^3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1^3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^3}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau \; , \; \frac{\partial u_1^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial u_2^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1^3 = f_1(x_2, x_3) \; ; \; u_2^3 = f_2(x_1, x_3) \; ; \; u_3^3 = f_3(x_2, x_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau \; , \; \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

solution particulière avec

$$f_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\tau x_2 \quad ; \quad f_2 = \frac{1+\nu}{E}\tau x_1 \quad ; \quad f_3 = 0$$

d'où $\underline{u}^3 = \left(\frac{1+\nu}{E}\tau x_2\right)\underline{e_1} + \left(\frac{1+\nu}{E}\tau x_1\right)\underline{e_2} + \underline{a} + \underline{b}\wedge\underline{x}$.

déplacement solution du pb. ($\underline{a}$, $\underline{b}$ quelconque)

= 6 Choix $X^4 = Bx_2^3 + Ix_1 + Jx_2 + K$

$\Rightarrow (A = C = D = F = G = H = 0)$

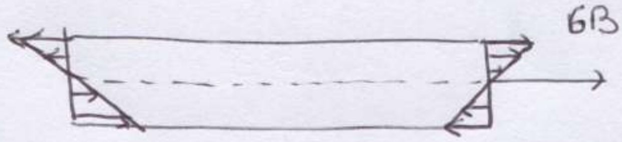
$\sigma_{11} = 6Bx_2$

$\sigma_{22} = 0 \qquad \sigma_{13} = 0 \qquad \Rightarrow \; \underline{\underline{\sigma}}^4 = 6Bx_2\, \underline{e_1}\otimes\underline{e_1}$

$\sigma_{12} = 0 \qquad \sigma_{23} = 0$

Effort ext
- sur S_0 $\underline{\underline{\sigma}}^4(-\underline{e_1}) = -6Bx_2\,\underline{e_1}$ · sur S_L $\underline{\underline{\sigma}}^4\underline{e_1} = 6Bx_2\,\underline{e_1}$
- sur $S_{\pm e_2}$ $\sigma^4(\pm e_2) = \underline{0}$ sur $S_{\pm e}$ $\underline{\underline{\sigma}}^4(\pm\underline{e_3}) = \underline{0}$

Supposons $B > 0$



Le chargement est un chargement de flexion pure. (voir solution du cours.)

= 7. Choix fonction $\hat{X}(x_1,x_2) = Gx_1x_2 + Mx_1x_2^3 + Ix_1 + Jx_2 + K$

$\hat{X}_{,1} = Gx_2 + Mx_2^3 + I \qquad \hat{X}_{,11} = 0 = \sigma_{22}$

$\hat{X}_{,2} = Gx_1 + 3Mx_1x_2^2 + J \qquad \hat{X}_{,22} = 6Mx_1x_2 = \sigma_{11}$

$\hat{X}_{,12} = G + 3Mx_2 = -\sigma_{12}$

$\Delta\hat{X} = 6Mx_1x_2$ ne vérifie pas $(\Delta\hat{X})_{,12} = 0$ une des 4 équations qui assure la compatibilité

$(\Delta\hat{X})_{,1} = 6Mx_2 \qquad (\Delta\hat{X})_{,11} = 0 \qquad$ mais $(\Delta\hat{X})_{,12} = 6M \neq 0$

$(\Delta\hat{X})_{,2} = 6Mx_1 \qquad (\Delta\hat{X})_{,22} = 0$

En revanche $(\Delta\hat{X})_{,22} = 0 \quad (\Delta\hat{X})_{,11} = 0 \quad$ et $\Delta(\Delta\hat{X}) = 0$

On est dans le cas où $(\varepsilon_{33})_{,12} = 0$ n'est pas satisfaite la compatibilité des déformation selon $\underline{e_3}$ n'est pas assurée la solution obtenue en exploitant $\hat{x}$ vérifie l'hypothèse dite des tranches minces. La structure est considérée comme constituée de tranches selon $\underline{e}_3$ indépendantes les unes des autres, la compatibilité des déformations entre chaque couche n'est pas assurée

8. Flexion composée

sur S_L $\quad \underline{R}_L = R\,\underline{e}_1 \quad \underline{M}_L(0) = \mathcal{M}\,\underline{e}_3$ $\qquad$ les autres faces sont libres.

sur S_0 $\quad \underline{R}_0 = -R\,\underline{e}_1 \quad \underline{M}_0(0) = -\mathcal{M}\,\underline{e}_3$

unités de R, M

$$\underline{R}_L = \iint_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\,dS \Rightarrow [R] = \text{Newton} \quad \left(= \frac{N}{m^2}\times m^2\right)$$

$$\underline{M}_L(0) = \iint_{S_L} OM \wedge \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\,dS \Rightarrow [M_L] = m\times\frac{N}{m^2}\,m^2 = N\times m$$

Le problème posé avec des efforts globaux sur S_0 et S_L n'est pas régulier (On ne connaît pas la densité surfacique d'effort en tout point des faces S_0 et S_L.)

- la solution 1 $\underline{\underline{\sigma}}^1 = \sigma_1\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1$ conduit à sur S_L une résultante $\underline{R}^1_L = \sigma^1 S\,\underline{e}_1$ et sur S_0 $\underline{R}^1_0 = -\sigma^1 S\,\underline{e}_1$

donc en prenant $R = \sigma^1 S$ on peut obtenir avec cette solution le chargement $\underline{R}_L = R\,\underline{e}_1$, $\underline{R}_0 = -R\,\underline{e}_1$ et on a bien $\underline{M}_L(0) = \iint_{S_L} OM\wedge\sigma^1\underline{e}_1\,dS = \underline{0}$

car $\iint_{S_L}(L\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + x_3\,\underline{e}_3)\wedge\sigma^1\underline{e}_1\,dx_2dx_3 = \underline{0}$ $\quad \left(\iint_{S_L} x_2\,dS = \iint_{S_L} x_3\,dS = 0\right)$

$$\int_{-h}^{+h} x_2\,dS = \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_{-h}^{+h} = 0$$

de même $\underline{M}_0(0) = \underline{0}$

- La solution 4 $\underline{\underline{\sigma}}^4 = 6B\,x_2\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1$ conduit elle à

$$\underline{R}_L = \iint_{S_L} 6B\,x_2\,\underline{e}_1\,dS = \underline{0} \quad \text{car} \quad \iint_{S_L} x_2\,dS = 0$$

$\underline{R}_0 = \underline{0}$ de même

et
$$\underline{M}_L(0) = \iint_{S_L}\left(L\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + x_3\,\underline{e}_3 \wedge 6B\,x_2\,\underline{e}_1\right)dx_2dx_3$$

$$= 6B\left[\iint_S x_2^2\,dx_2dx_3\right](-\underline{e}_3) + 6B\underbrace{\iint_{S_L} x_2x_3\,dS}_{=0}\,\underline{e}_2$$

$$= -6B\,I_3\,\underline{e}_3$$

avec $I_3 = \iint_S x_2^2\,dx_2dx_3 = 2e\times\frac{2h^3}{3} = \frac{4eh^3}{3}$

de même $\underline{M}_0(0) = 6B\, I_3\, \underline{e}_3$

en prenant $-6B I_3 = M$. on peut donc obtenir avec la solution 4 le chargement en moment

- En exploitant le théorème de superposition, la solution obtenue avec

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^1 + \underline{\underline{\sigma}}^4 \quad , \quad \underline{u} = \underline{u}^1 + \underline{u}^4$

en prenant $2HS = \sigma_1 S = R \qquad -6B\, x_2 = \mathcal{M}$

vérifiera les conditions aux limites du problème de flexion composée considérée dans cette question.

Cette superposition est possible si l'on reste dans le domaine des petites perturbations au final

- Il s'agit d'une solution du problème en efforts globaux considéré. Il y a d'autres façons de poser des problèmes réguliers qui conduiraient à ces efforts globaux et donc d'autres solutions.
- Le principe de Saint-Venant dit que loin des extrémités (S_0 et S_L ici), toutes ces solutions conduisent à des solutions voisines. Elles ne diffèrent que localement dans le voisinage des extrémités (S_0 et S_L).