

Filtrage Analogique

T.Ditchi

I. Introduction

I. Introduction

- Filtrage analogique → élimination d'une partie du spectre d'un signal
- Radiocommunication : sélection du canal
 - élimination d'un bruit
 - sélection de fréquence à la sortie d'un circuit non linéaire (mélangeur, oscillateur...)
 - analyse spectrale
 -
- Filtrage numérique → même application que le filtrage analogique
+ transformation de signaux
- apparition d'échos
 - modification d'une voix
 -

I. Introduction

les filtres passifs

- fréquences HF (qq 10 MHz \rightarrow 1GHz) ou μ Onde (1GHz \rightarrow 100GHz)

car inductances...

les filtres actifs (à Amplificateurs Opérationnels)

- fréquences BF (0 à qq MHz)

car gain AOP...

les filtres à résonateurs

- à quartz (piézo-électrique) (\rightarrow 100MHz)
- cavité métallique ou diélectrique (1GHz \rightarrow 100GHz)

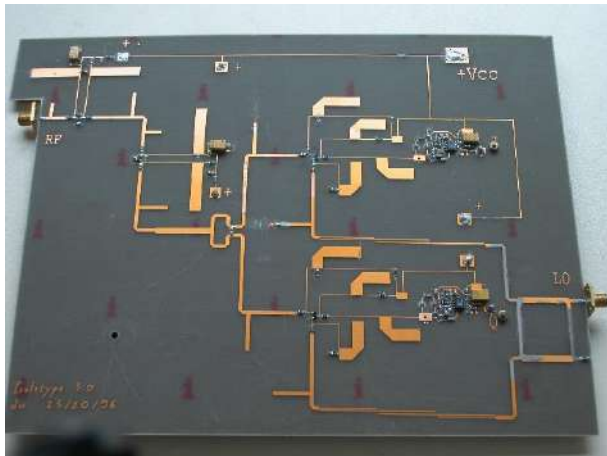
les filtres à ondes de surface

- qq 100 MHz

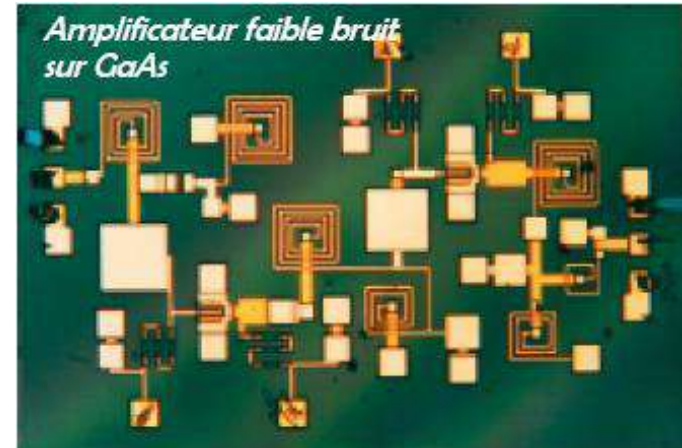
I. Introduction

les filtres passifs en μ Onde

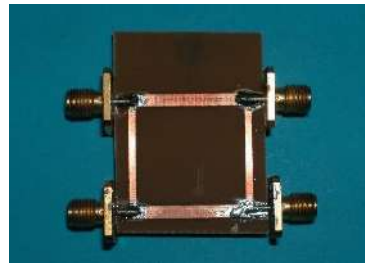
Optimisation de la puissance disponible \longrightarrow composants non dispersifs : C, L,...



Technologie hybride

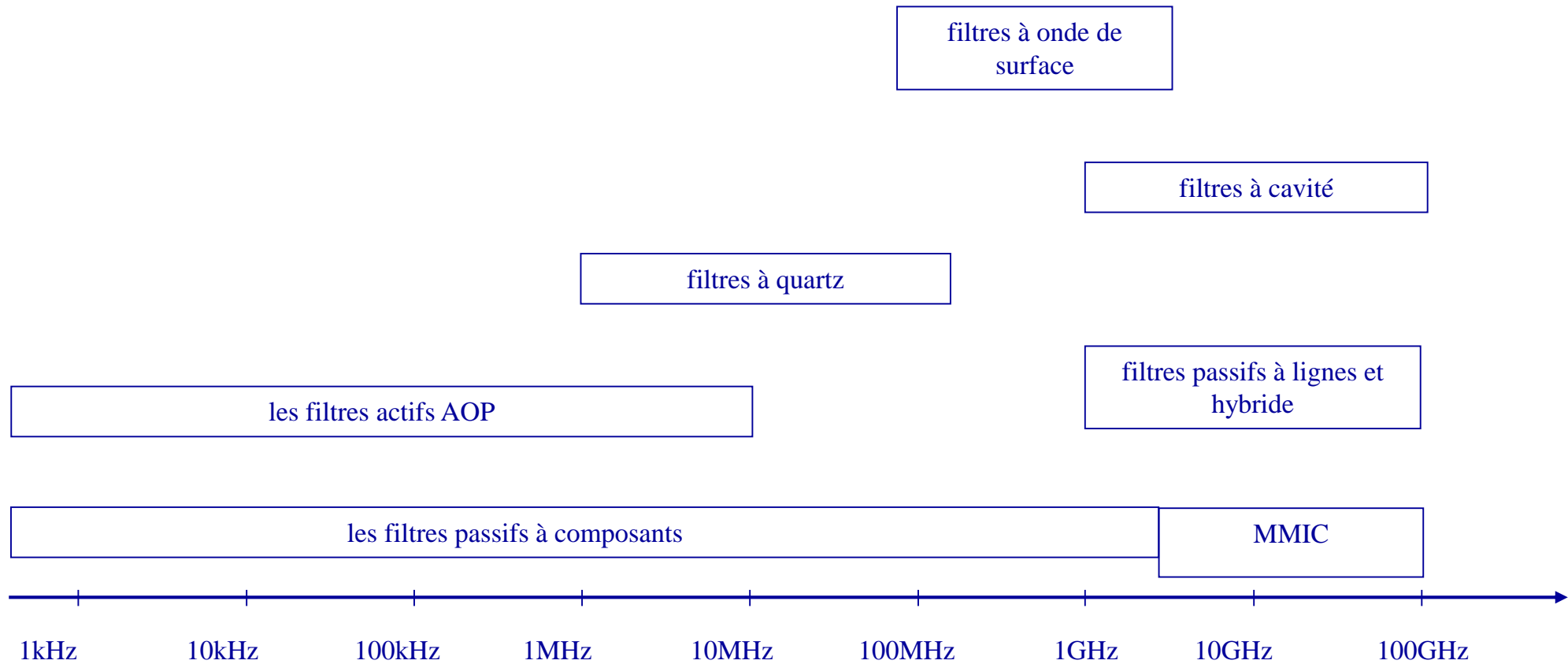


Technologie Intégrée (MMIC)



Technologie Lignes

I. Introduction



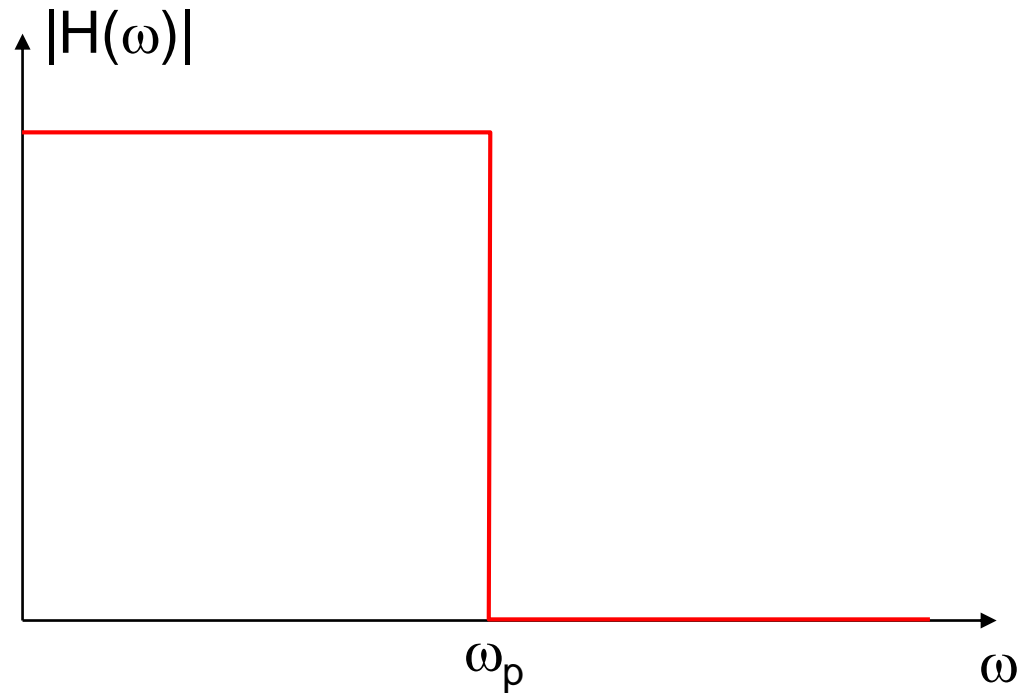
V. Gabarits - Normalisation - Transposition

Quasiment non traité dans cette présentation.

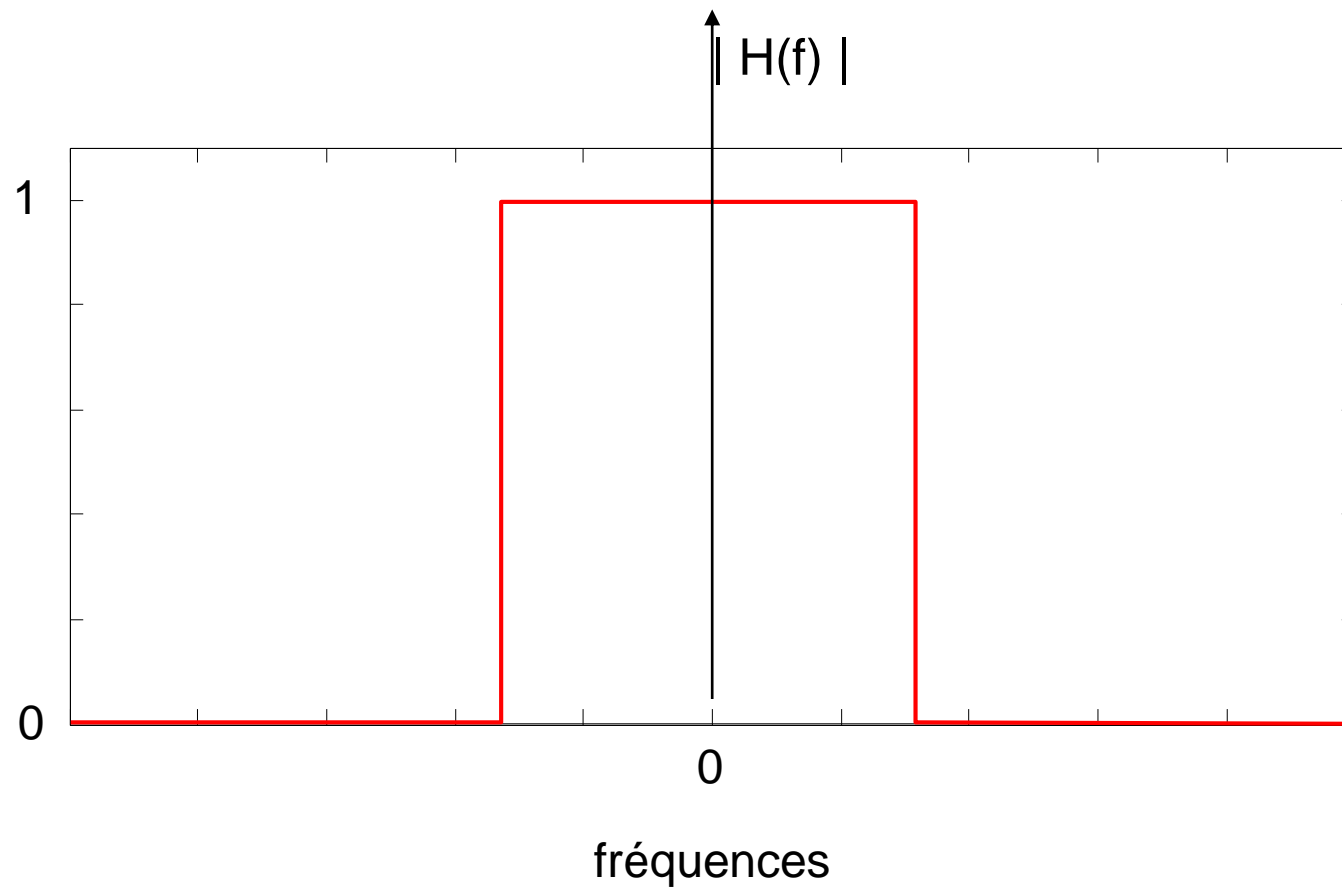
(voir polycopié de cours)

V. Gabarits - normalisation - transposition

Filtre Passe Bas parfait ... est il possible ?

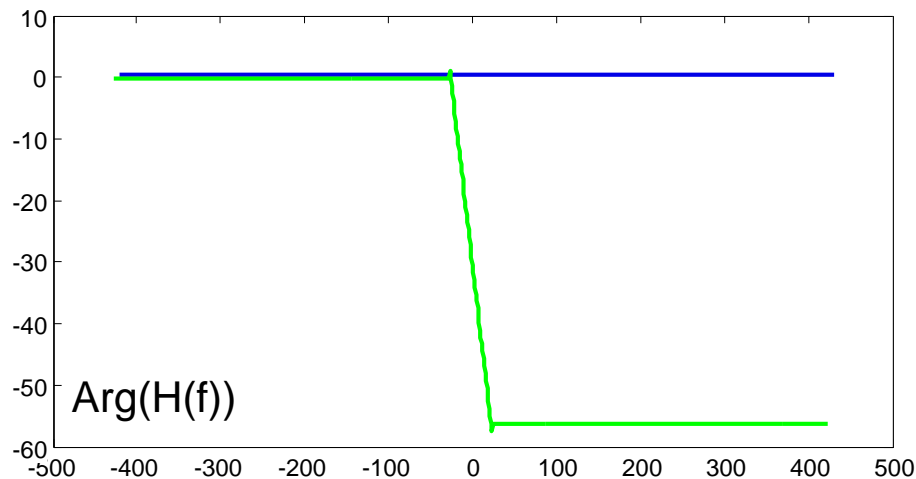
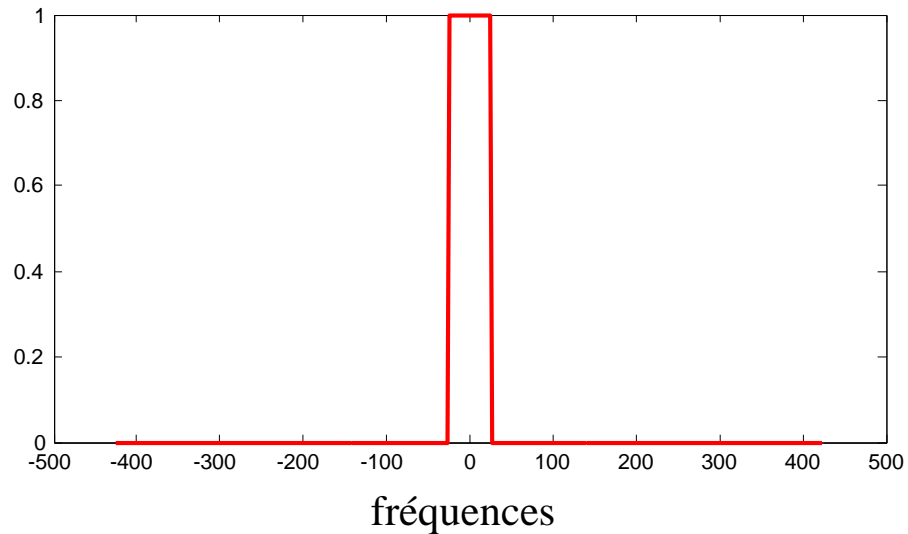


Filtre Passe Bas parfait ... est il possible ?

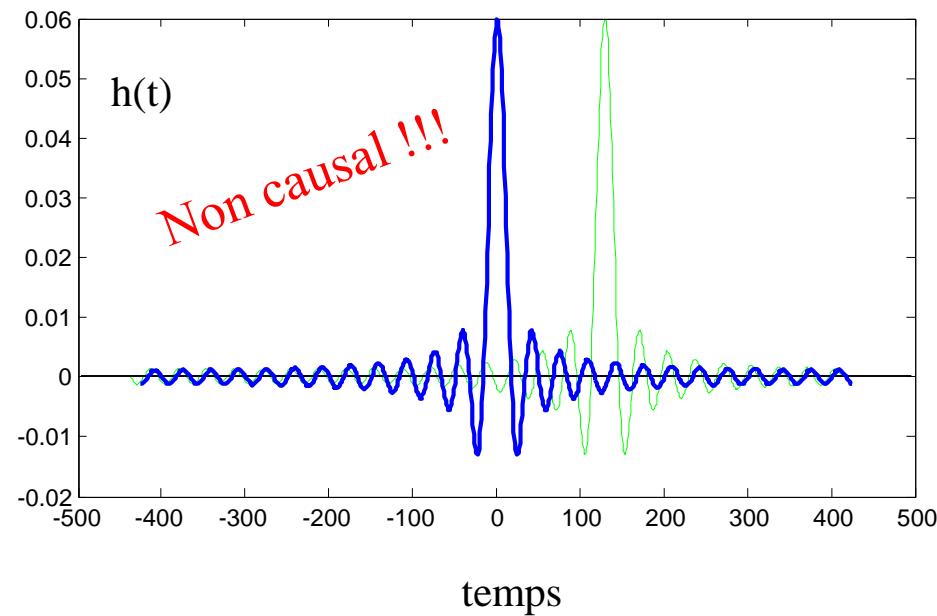


V. Gabarits - normalisation - transposition

Filtre Passe Bas parfait ... est il possible ?



TF^{-1}



VI. Recherche de $H(p)$ à partir de $|H(\omega)|$

VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

(poly chapitre 2 - page 10)

VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

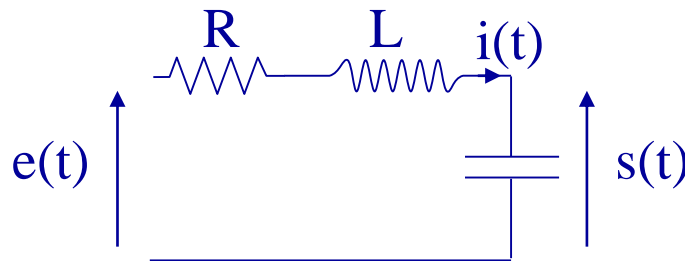


$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e(t)$$

de fonction de Transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

Par exemple, dans le cas d'un circuit RLC série, on a un système du 2^{eme} ordre



$$e(t) = R i + L \frac{di}{dt} + s(t)$$

$$i(t) = C \frac{ds}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Solutions de l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$

solution générale : solution de l'équation sans second membre

cad ($e(t)=0$ régime libre)

+ solution particulière : solution de l'équation avec second membre

cad (régime forcé = transitoire + régime permanent)

Stabilité

étude du régime libre, cad étude de la réponse du système avec $e(t)=0$

un système est dit **stable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$ quand $e(t > 0) = 0$

VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s(t) = 0$$

les fonction de la forme $s(t) = e^{pt}$ sont solutions de cette équation différentielle

$$\text{et on a : } \frac{de^{pt}}{dt} = p e^{pt} ; \frac{d^2 e^{pt}}{dt^2} = p^2 e^{pt} \dots\dots\dots ; \frac{d^n e^{pt}}{dt^n} = p^n e^{pt}$$

$$\text{d'où : } b_n p^n e^{pt} + b_{n-1} p^{n-1} e^{pt} + \dots + b_0 e^{pt} = 0$$

$$\text{or : } e^{pt} \neq 0 \quad \forall p, t$$

$$\text{donc : } b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \quad \text{appelée } \underline{\text{équation caractéristique}}$$

VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

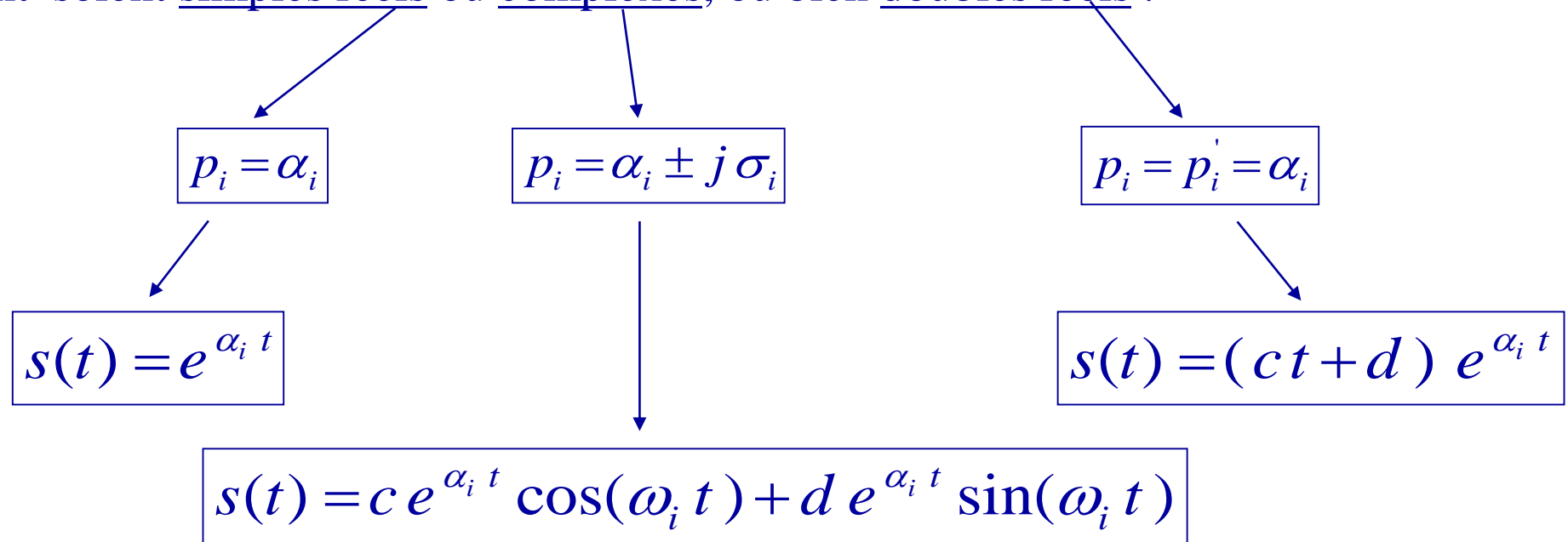
résoudre l'équation différentielle revient donc à trouver les solutions de

l'équation caractéristique : $b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0$

C'est-à-dire les pôles de la fonction de transfert.

Ces pôles sont notées : p_1, p_2, \dots, p_n

sont soient simples réels ou complexes, ou bien doubles réels.



VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

Les solutions possibles de l'équation différentielle sont donc :

$$\begin{array}{l} \rightarrow s(t) = e^{\alpha_i t} \\ \rightarrow s(t) = c e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) + d e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t) \\ \rightarrow s(t) = (c t + d) e^{\alpha_i t} \end{array}$$

dans tous les cas, réponse stable si : $\alpha_i < 0$

où $\alpha_i = \text{Re}(\text{pôles de } H(p))$

VI.1 Stabilité des systèmes linéaires

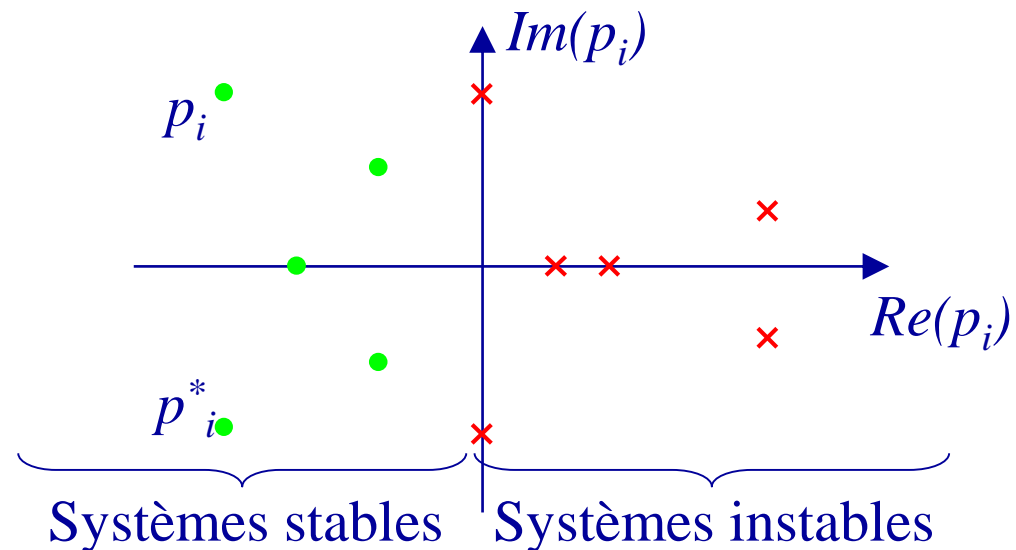
Conclusion

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e(t)$$

fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$

$s(t)$ stable si les pôles de la fonction de transfert sont à $Re < 0$

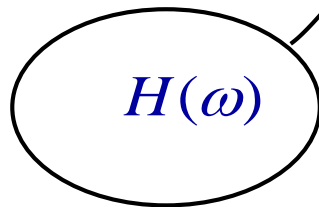
Dans le plan complexe



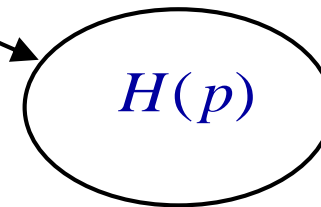
VI.2 Recherche de $H(p)$ stable

VI.2 Recherche de $H(p)$ stable

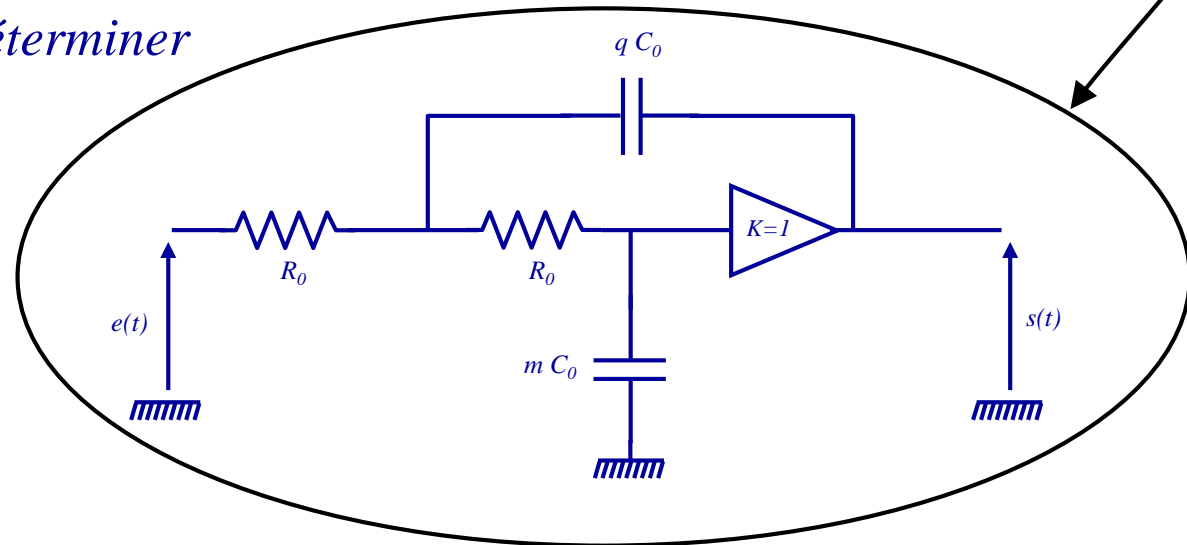
*On connaît ou
on choisit*



On cherche



Pour déterminer



VI.2 Recherche de $H(p)$ stable



$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e(t)$$

où a_i et b_i sont réels positifs constants dans le temps

La réponse fréquentielle $H(j\omega)$ s'écrit :

$$H(\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \in \mathbb{C}$$

propriété de $|H(\omega)|$

$$H(\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$D(\omega) = b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + b_3 (j\omega)^3 + b_4 (j\omega)^4 + \dots$$

$$D(\omega) = b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots + j\omega [b_1 - b_3 \omega^2 + b_5 \omega^4 - \dots]$$

$$D(\omega) = \underbrace{D_1(\omega^2)} + j\omega \underbrace{D_2(\omega^2)}$$

*fct Réelle
paire en ω*

*fct réelle
paire en ω*

impaire en ω

de même

$$N(\omega) = \underbrace{N_1(\omega^2)}_{\substack{\text{fct Réelle} \\ \text{paire en } \omega}} + j\omega \underbrace{N_2(\omega^2)}_{\substack{\text{fct réelle} \\ \text{paire en } \omega}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{impaire en } \omega}$

d'où

$$H(\omega) = \frac{N_1(\omega^2) + j\omega N_2(\omega^2)}{D_1(\omega^2) + j\omega D_2(\omega^2)}$$

donc

$$|H(\omega)|^2 = \frac{N_1^2(\omega^2) + \omega^2 N_2^2(\omega^2)}{D_1^2(\omega^2) + \omega^2 D_2^2(\omega^2)}$$

cad

$|H(\omega)|^2$ est une fonction de ω^2 uniquement

pôles et zéros de $H(p)H(-p)$

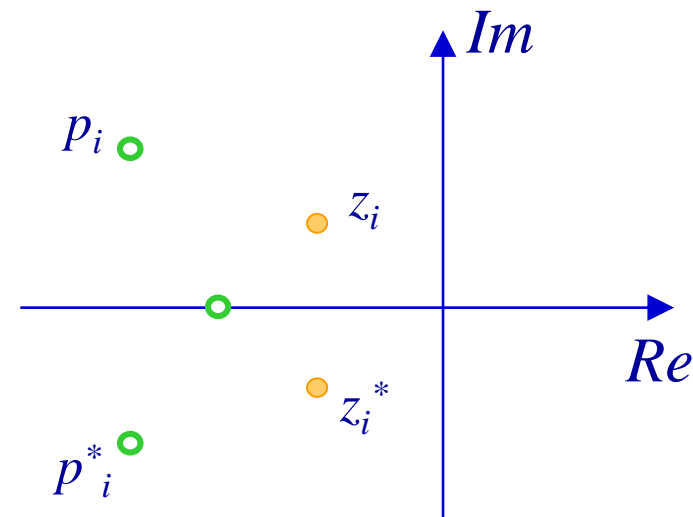
$$H(p) = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

où p_1, p_2, \dots, p_n sont les pôles de $H(p)$ et z_1, z_2, \dots, z_m sont les zéros de $H(p)$

On a vu que :

- les pôles et les zéros de $H(p)$ sont soit réels soit complexes conjugués
- $Re(\text{pôles})$ et $Re(\text{zéros})$ sont négatives (pour stabilité et déphasage minimum)

d'où la répartition suivante :



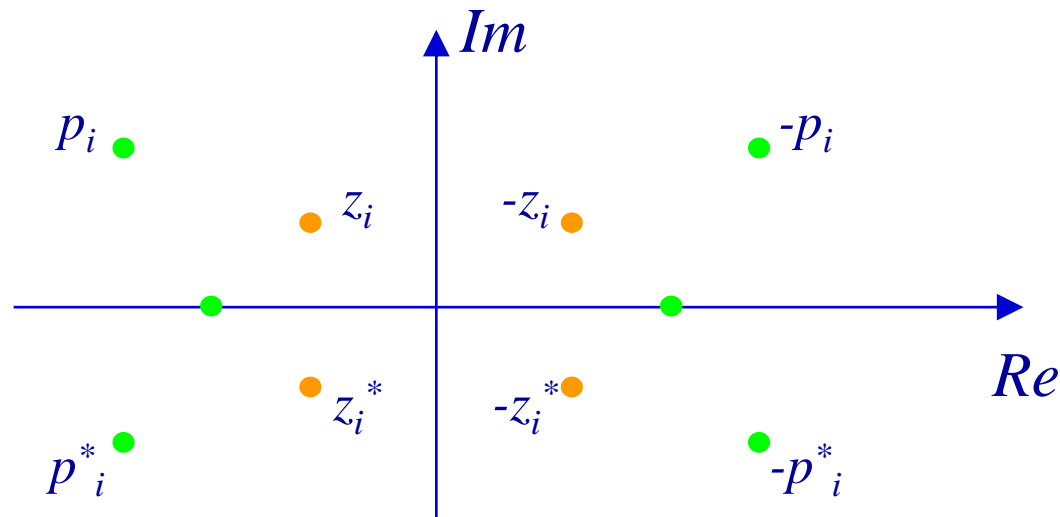
de plus

$$H(-p) = K \frac{(-p - z_1)(-p - z_2) \dots (-p - z_m)}{(-p - p_1)(-p - p_2) \dots (-p - p_n)}$$

cad

$$H(-p) = K (-1)^{n+m} \frac{(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_m)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}$$

donc les pôles et les zéros de $H(p)H(-p)$ sont répartis comme ci dessous



3°) Calcul de $H(p)$

On sait que : $\boxed{H(\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega}}$

de plus : $H^*(\omega) = H(p) \Big|_{p=-j\omega}$ donc $\boxed{H^*(\omega) = H(-p) \Big|_{p=j\omega}}$

donc $|H(\omega)|^2 = H(\omega) H^*(\omega) = [H(p) H(-p)] \Big|_{p=j\omega}$

donc $H(p) H(-p) = \left[|H(\omega)|^2 \right] \Big|_{\omega=p/j} = \left[|H(\omega)|^2 \right] \Big|_{\omega^2=-p^2}$

$|H(\omega)|^2$ est fct de ω^2 uniquement

donc

$$H(p)H(-p) = \left[|H(\omega)|^2 \right]_{\omega^2 = -p^2}$$

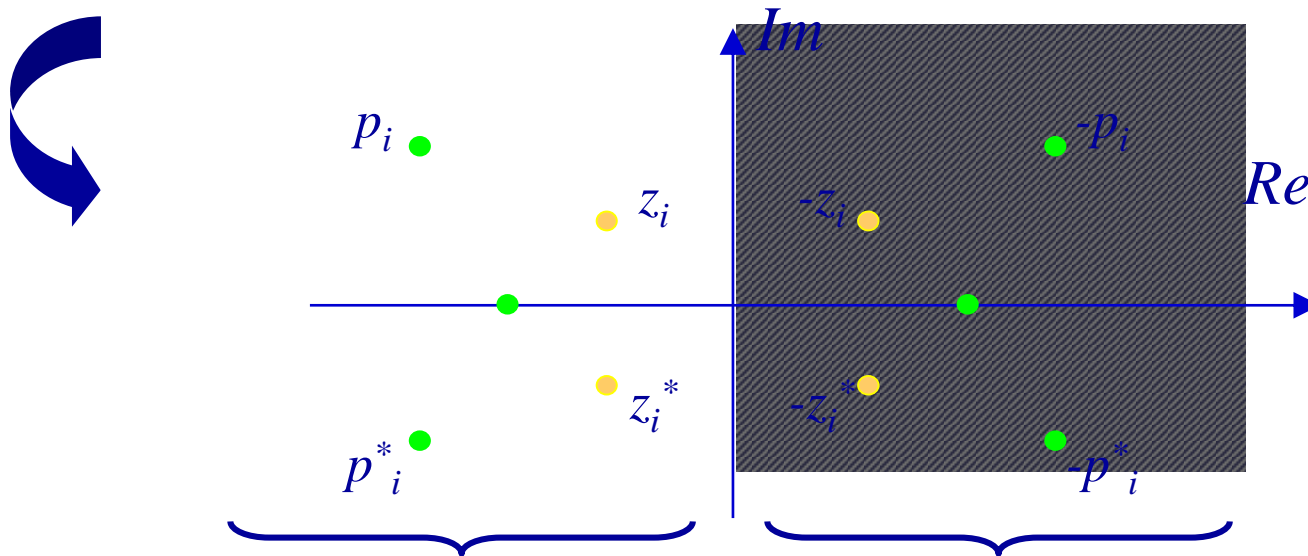
\uparrow

inconnu

\uparrow

connu

On cherche $H(p)$ stable et à déphasage minimum



On ne garde que ces pôles et zéros que l'on associe à $H(p)$

On élimine ces pôles et zéros que l'on associe à $H(-p)$

par ex : $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+2\omega^4}$

d'où $H(p)H(-p) = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -p^2} = \frac{1}{1+2(-p^2)^2}$

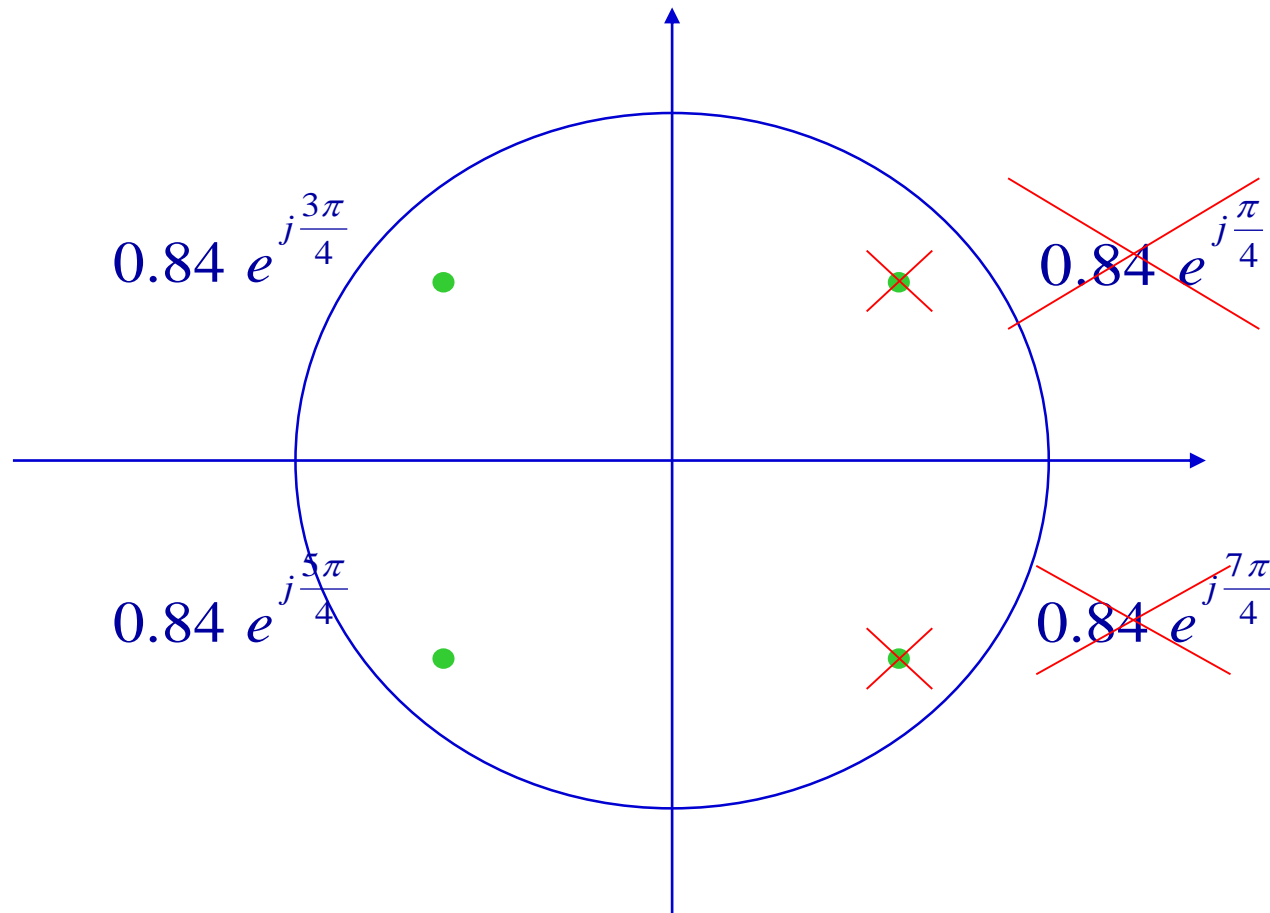
cad $H(p)H(-p) = \frac{1}{1+2p^4}$

recherche des pôles et des zéros :

- *pas de zéro*

- *pôles :* $1+2p^4 = 0 \quad \text{cad} \quad p^4 = -0.5 = -0.5 e^{j2k\pi} = 0.5 e^{j(2k+1)\pi}$

cad $p = 0.84 e^{j(2k+1)\frac{\pi}{4}}$



cad
$$H(p) = \frac{K}{(p - 0.84e^{j\frac{3\pi}{4}})(p - 0.84e^{j\frac{5\pi}{4}})}$$

$$H(p) = \frac{K}{(p - 0.84e^{j\frac{3\pi}{4}})(p - 0.84e^{j\frac{5\pi}{4}})}$$

cad

$$H(p) = \frac{K}{p^2 + 0.84\sqrt{2}p + \sqrt{0.5}}$$

Et on peut choisir

$$K = \sqrt{0.5}$$

*Pour obtenir une fct normalisée
(gain max = 1)*

donc

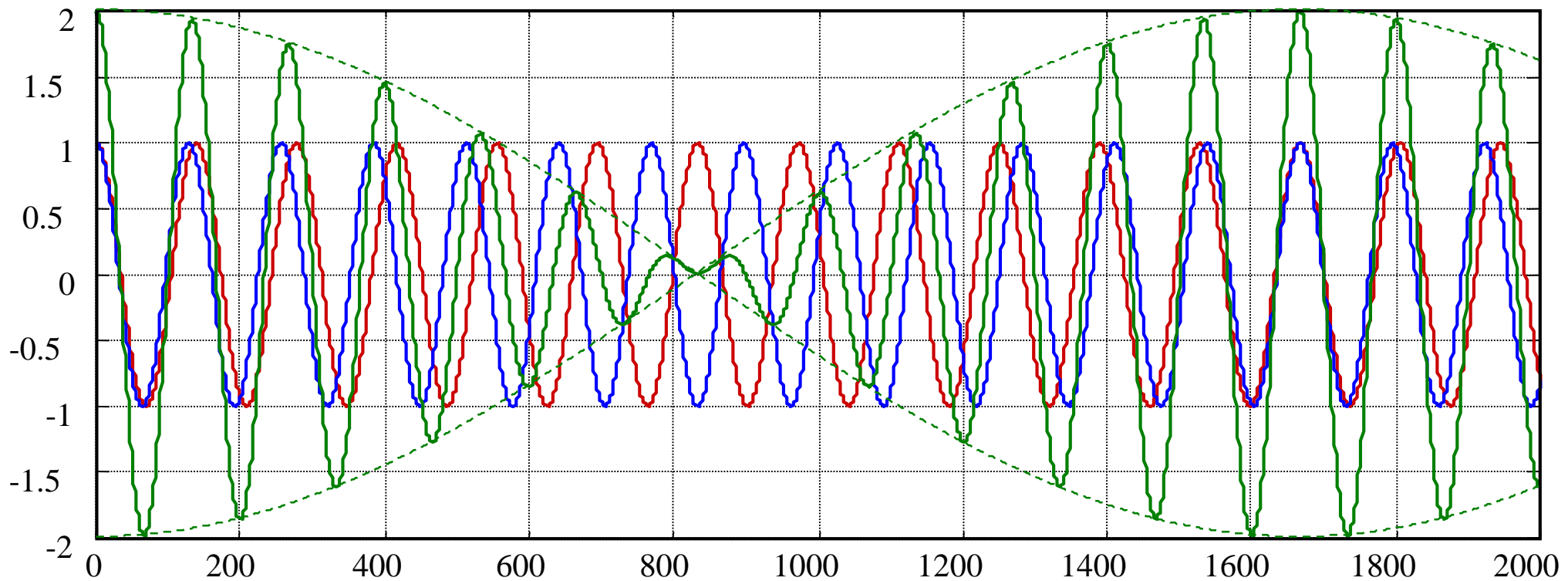
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + 2\omega^4}$$

$$H(p) = \frac{K}{p^2 + 0.84\sqrt{2}p + \sqrt{0.5}}$$

VII. Prototypes de Filtres

VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

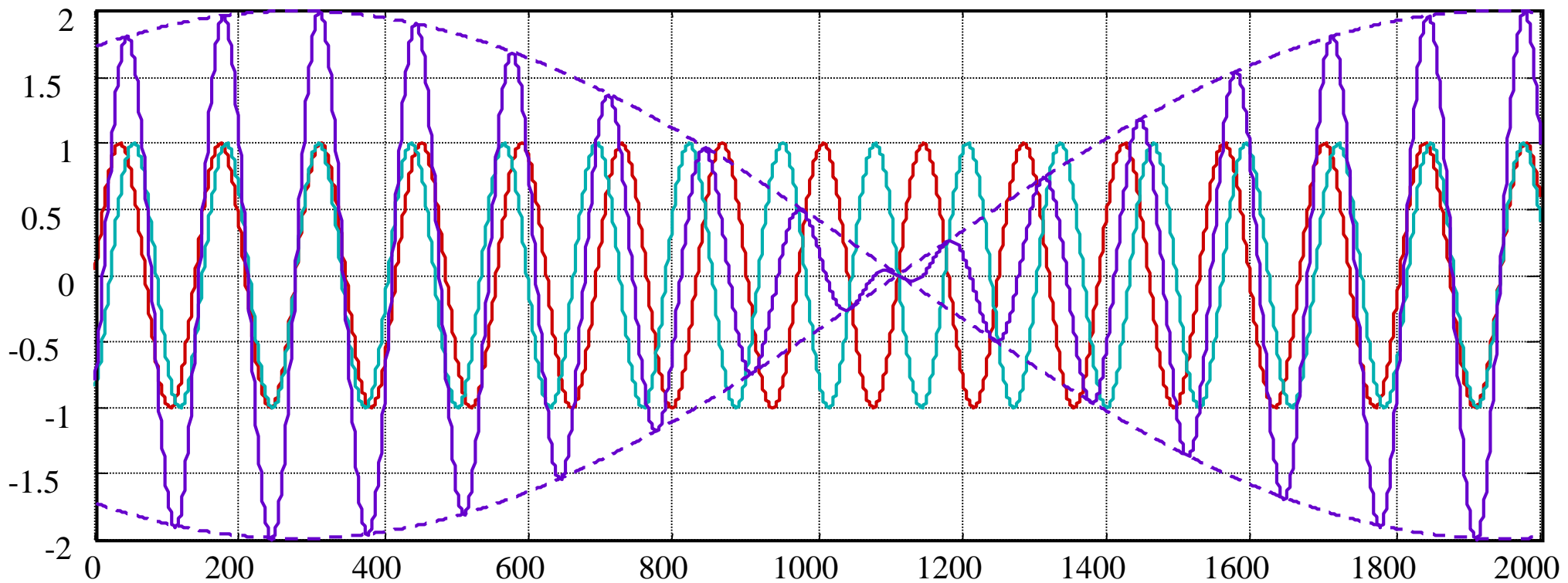


$$e(t) = \cos(\omega_0 - d\omega)t + \cos(\omega_0 + d\omega)t$$

$$e(t) = 2 \cos \left[\frac{(\omega_0 - d\omega) + (\omega_0 + d\omega)}{2} t \right] \cos \left[\frac{(\omega_0 - d\omega) - (\omega_0 + d\omega)}{2} t \right]$$

$$e(t) = 2 \cos \left[\omega_0 t \right] \cos \left[d\omega t \right]$$

VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

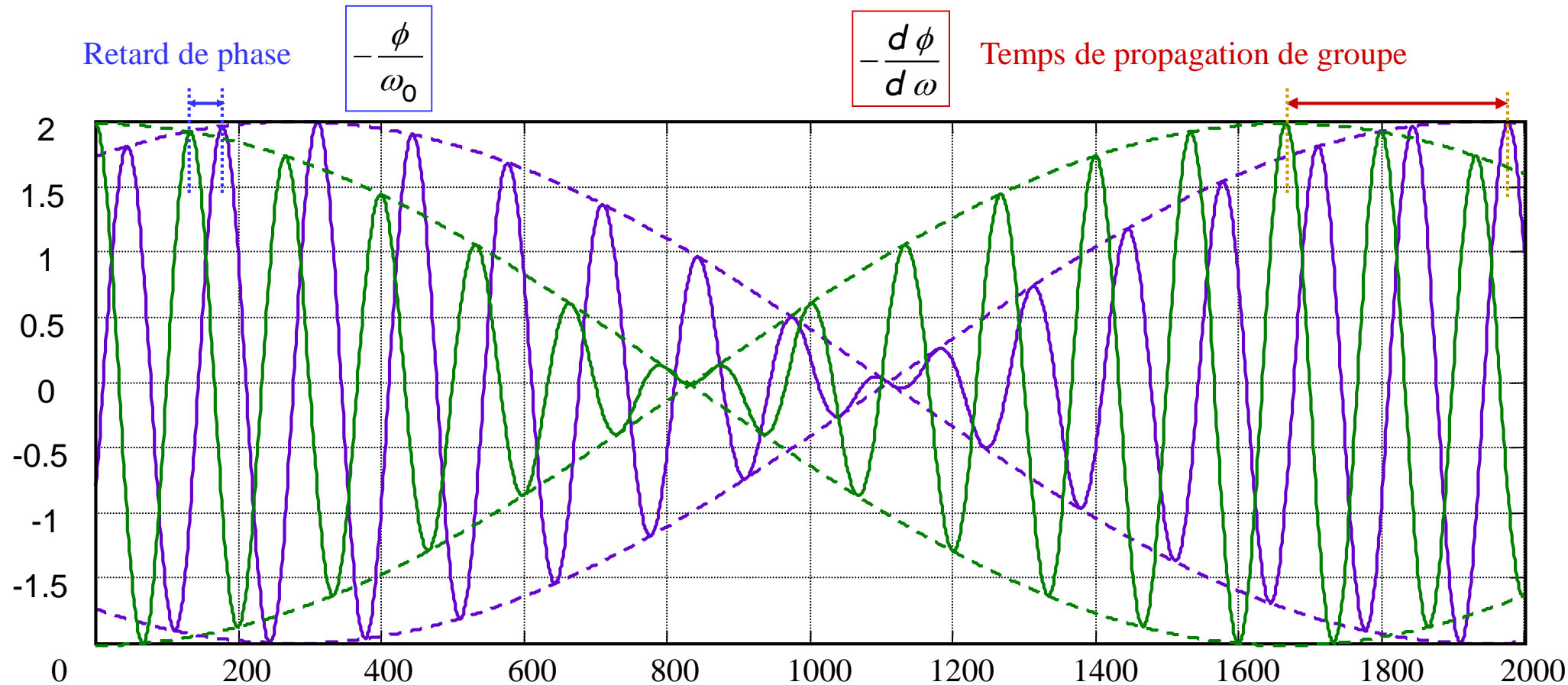


$$s(t) = \cos\left[(\omega_0 - d\omega)t + \varphi_{(\omega_0 - d\omega)}\right] + \cos\left[(\omega_0 + d\omega)t + \varphi_{(\omega_0 + d\omega)}\right]$$

$$s(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{(\omega_0)}) \cos[d\omega t + d\varphi]$$

$$s(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{(\omega_0)}) \cos\left[d\omega\left(t + \frac{d\varphi}{d\omega}\right)\right]$$

VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase



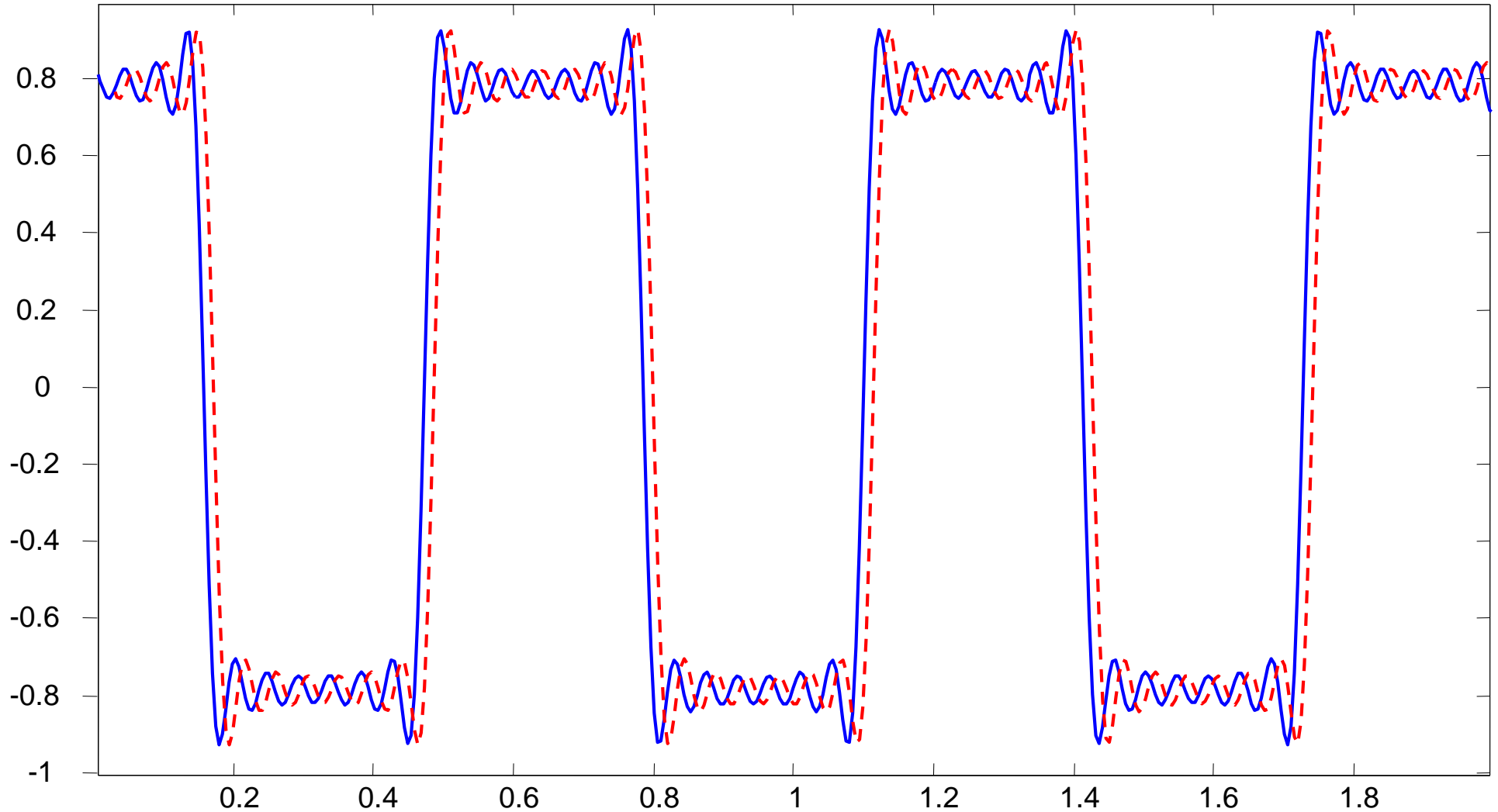
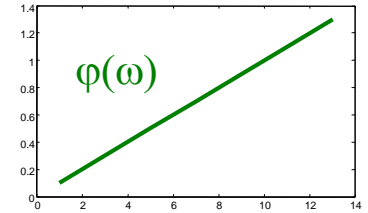
$$e(t) = 2 \cos(\omega_0 t) \cos[d\omega t]$$

$$s(t) = 2 \cos \left[\omega_0 \left(t + \frac{\phi}{\omega_0} \right) \right] \cos \left[d\omega \left(t + \frac{d\phi}{d\omega} \right) \right]$$

VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

Carré initial

Carré filtré avec déphasage linéaire en fct fréq

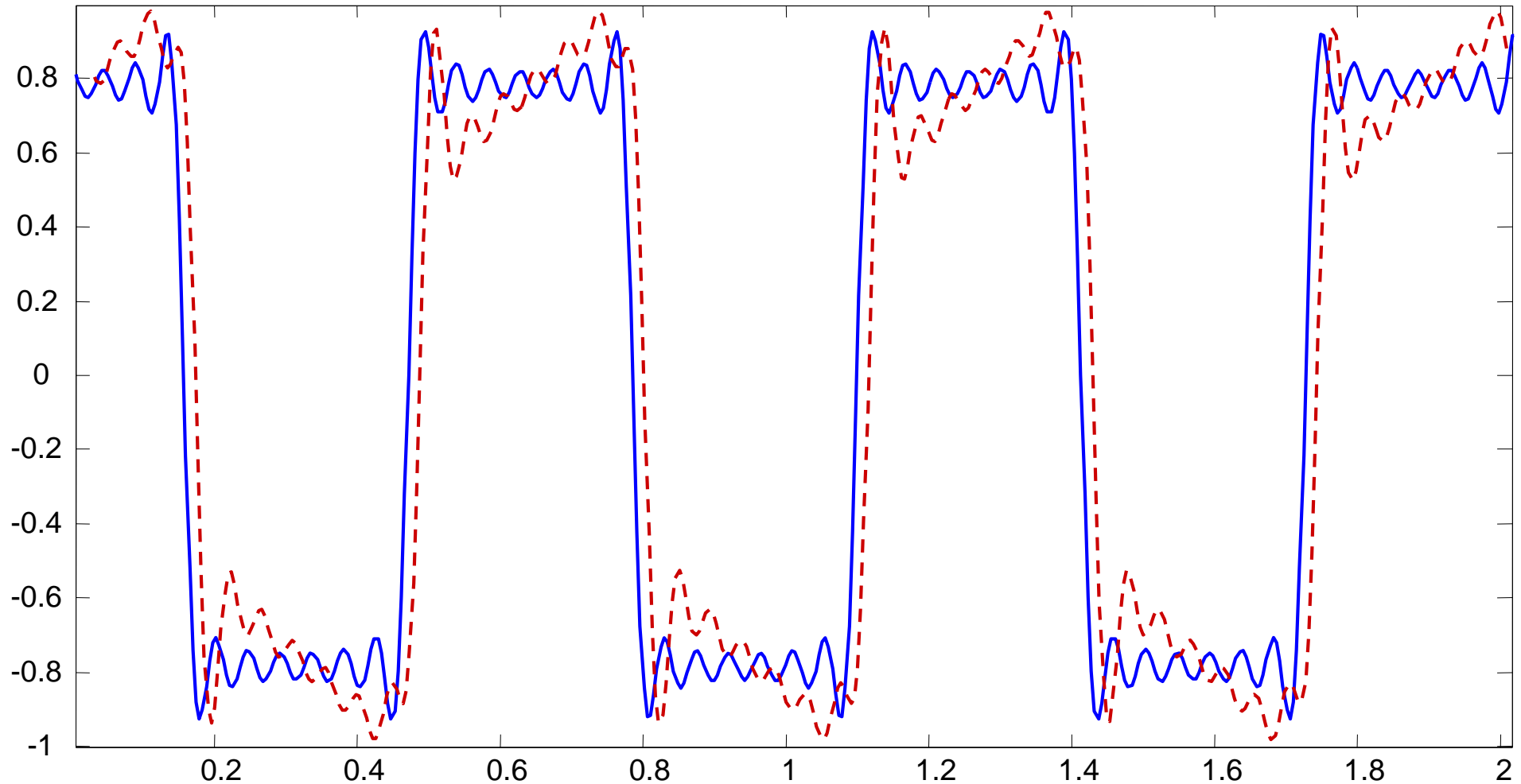
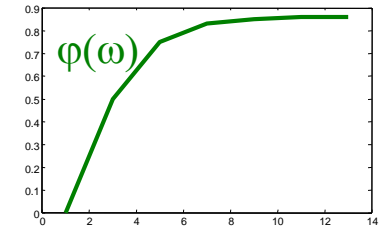


VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

Carré initial

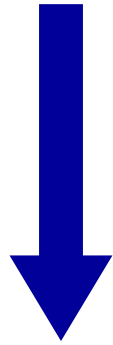
Carré filtré avec déphasage NON linéaire en fct fréq

→ Déformation



VII.1 Temps de propagation de groupe - retard de phase

phase = fonction linéaire de la fréquence



Pas de déformation des signaux dans la bande passante

VII.2 Prototypes

VII.2 Prototypes

1°) Filtres de Butterworth

1°) Filtres de Butterworth

↳ calcul de $H(\omega)$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + 1} = \frac{1}{A^2(\omega^2)}$$

Réponse la plus plate possible

$$\left. \frac{\partial(A^2)}{\partial(\omega^2)} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial^2(A^2)}{\partial(\omega^2)^2} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \dots \quad ; \quad \left. \frac{\partial^{n-1}(A^2)}{\partial(\omega^2)^{n-1}} \right|_{\omega=0} = 0$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$$a_1 = 0 \quad ; \quad a_2 = 0 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad a_{n-1} = 0$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{a_n \omega^{2n} + 1}$$

On désire normaliser à -3dB

Donc on veut $G(\omega = \omega_p) = -3dB$ cad $|H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{a_n \omega_p^{2n} + 1} = \frac{1}{2}$



$$a_n = 1 / \omega_p^{2n}$$

d'où

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\frac{\omega^{2n}}{\omega_p^{2n}} + 1}$$

La fréquence normalisée vaut : $\omega_n = \omega / \omega_p$



$$\boxed{|H(\omega_n)|^2 = \frac{1}{\omega_n^{2n} + 1}}$$

↳ Calcul de la fonction de Transfert

$$H(p_n) H(-p_n) = \frac{1}{\omega_n^{2n} + 1} \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2}$$

$$H(p_n) H(-p_n) = |H(\omega_n)|^2 \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^n + 1} = \frac{1}{(-1)^n p_n^{2n} + 1}$$

On cherche les pôles de $H(p_n) H(-p_n)$

$$(-1)^n p_n^{2n} + 1 = 0$$

Prenons par exemple une fonction d'ordre 2

$$H(p_n)H(-p_n) = \frac{1}{(-1)^2 p_n^4 + 1}$$

pôles $p_n^4 + 1 = 0$

cad $p_n^4 = -1$

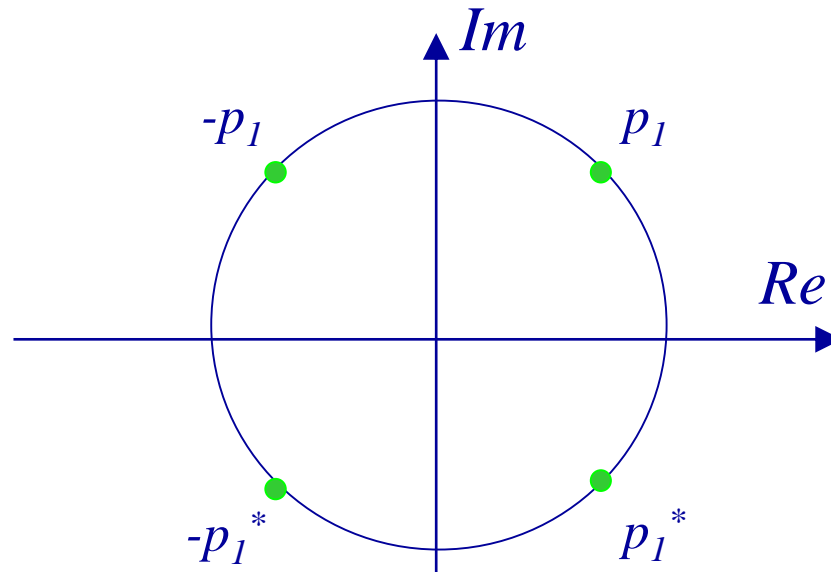
donc $p_n^4 = e^{j(\pi+2k\pi)} = e^{j(2k+1)\pi}$

donc $p_n = e^{j(2k+1)\pi/4}$

donc $p_n = e^{j\pi/4} ; e^{j3\pi/4} ; e^{j5\pi/4} ; e^{j7\pi/4}$

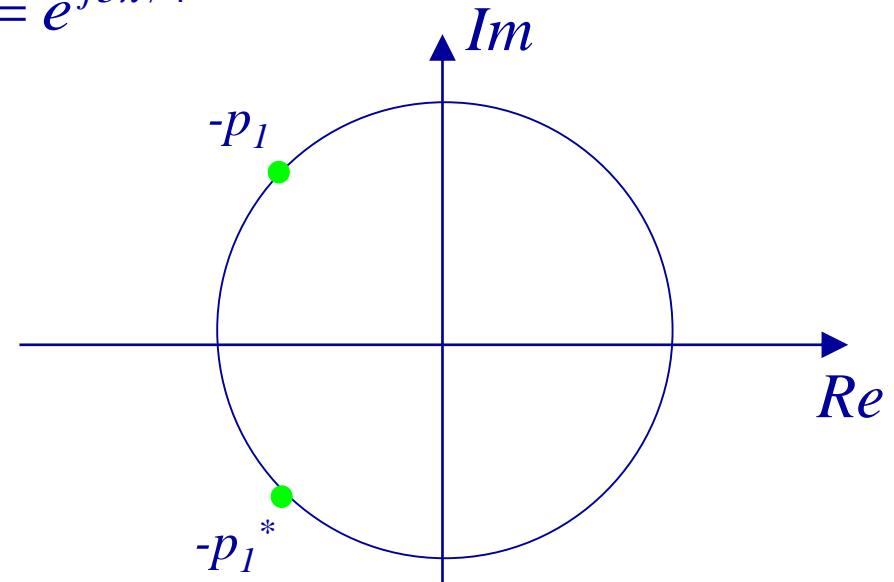
qui se répartissent comme suit :

$$p_1 = e^{j\pi/4} ; \quad -p_1 = e^{j3\pi/4} ; \quad -p_1^* = e^{j5\pi/4} ; \quad p_1^* = e^{j7\pi/4}$$



Pour calculer $H(p)$ on ne doit garder que
les pôles à partie réelle négative

cad $-p_1 = e^{j3\pi/4} ; -p_1^* = e^{j5\pi/4}$



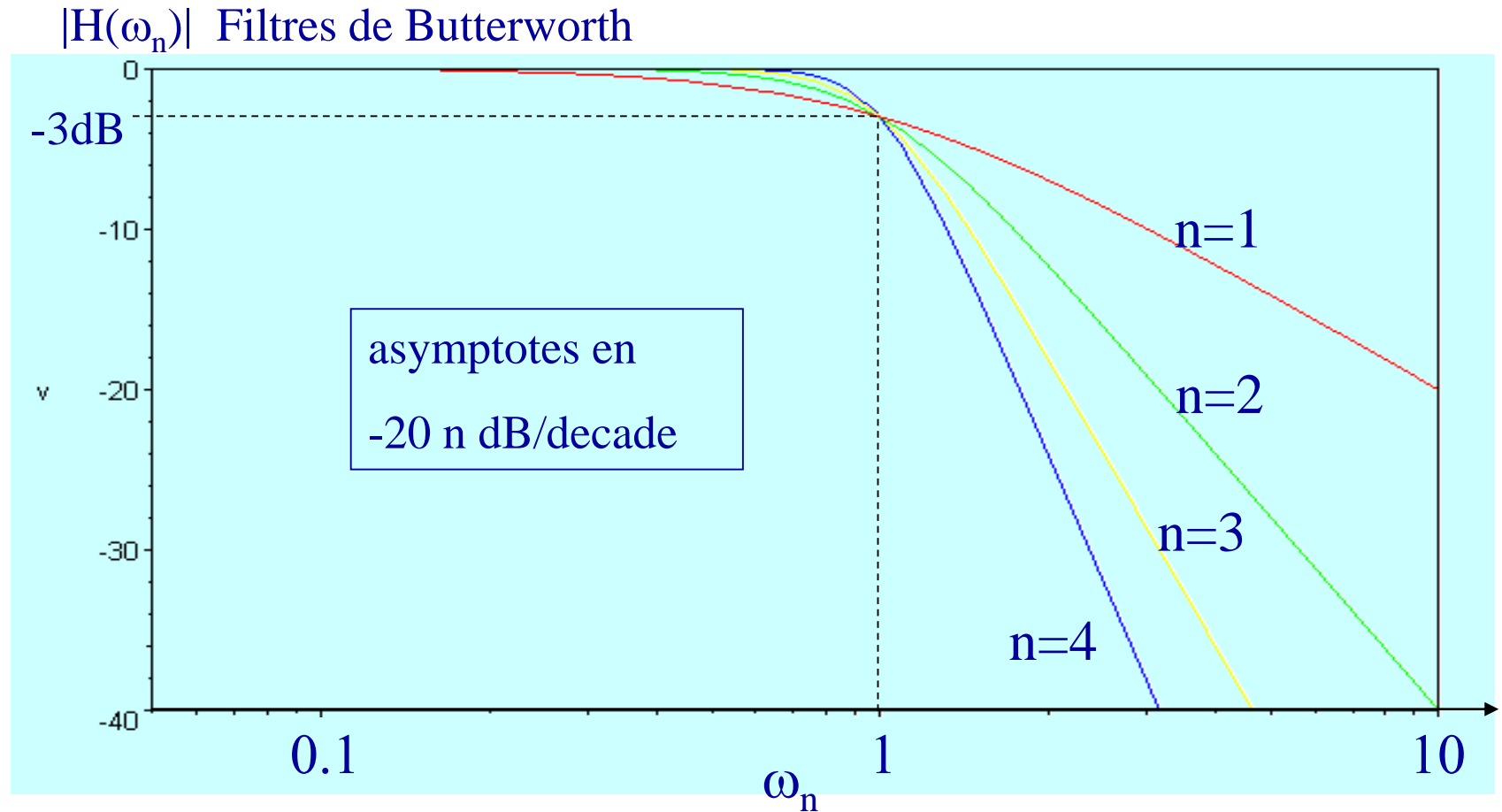
et $H(p_n)$ vaut :

$$H(p_n) = \frac{K}{(p_n - e^{j3\pi/4})(p_n - e^{j5\pi/4})}$$

cad

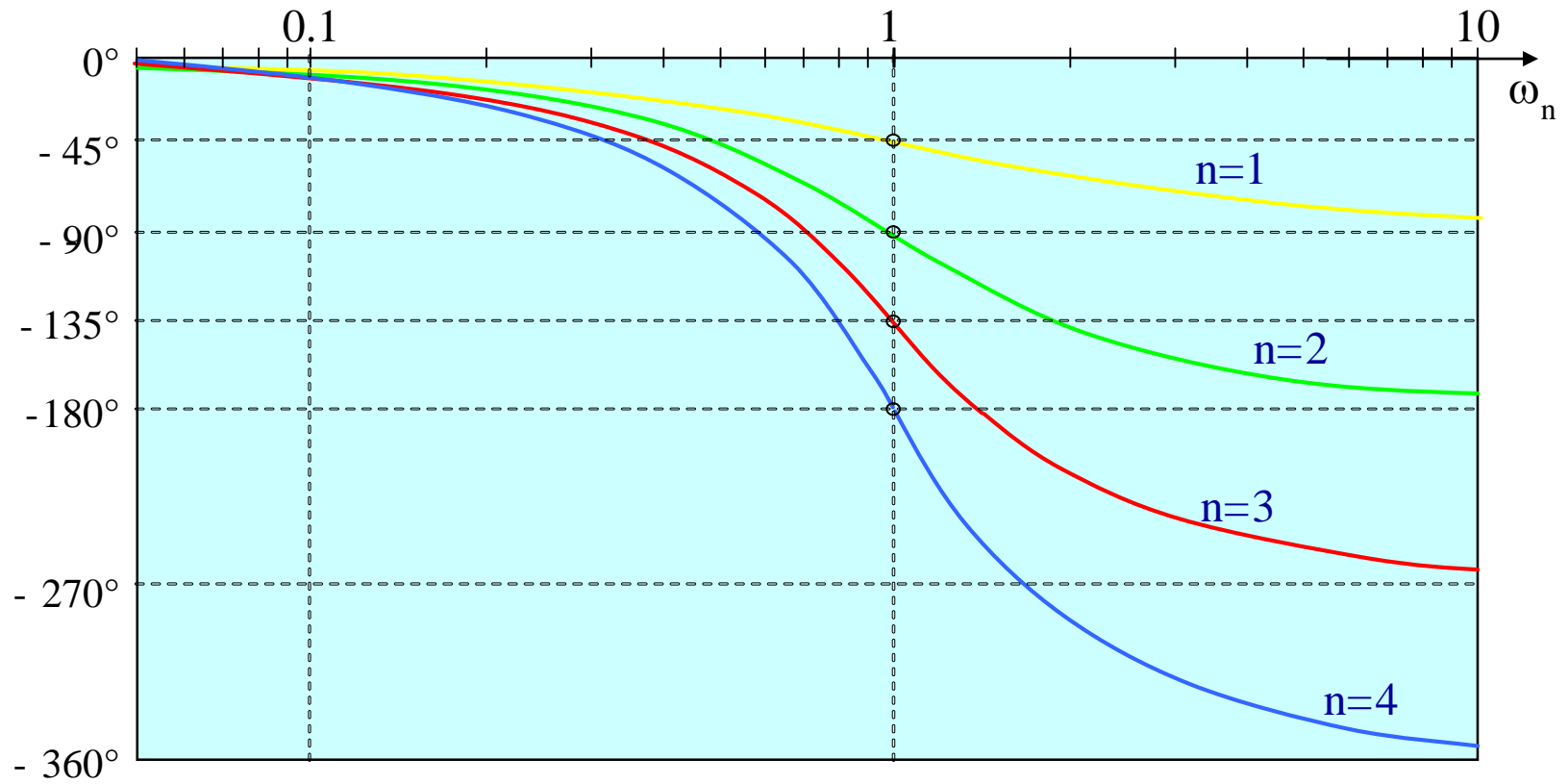
$$H(p_n) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} p_n + p_n^2}$$

n	$1/H(p_n)$
1	p_n+1
2	$p_n^2+1,414p_n+1$
3	$(p_n+1)(p_n^2+p_n+1)$
4	$(p_n^2+0,7654p_n+1)(p_n^2+1,8478p_n+1)$
5	$(p_n+1)(p_n^2+0,6180p_n+1)(p_n^2+1,6180p_n+1)$
6	$(p_n^2+0,5176p_n+1)(p_n^2+1,414p_n+1)(p_n^2+1,9318p_n+1)$
7	$(p_n+1)(p_n^2+0,4450p_n+1)(p_n^2+1,247p_n+1)(p_n^2+1,8022p_n+1)$
8	$(p_n^2+0,3986p_n+1)(p_n^2+1,111p_n+1)(p_n^2+1,6630p_n+1)(p_n^2+1,9622p_n+1)$



- pulsation de référence ($\omega_n=1$) = pulsation de coupure à -3dB
- pas d'ondulation dans la bande

Phase de $H(\omega_n)$ Filtres de Butterworth



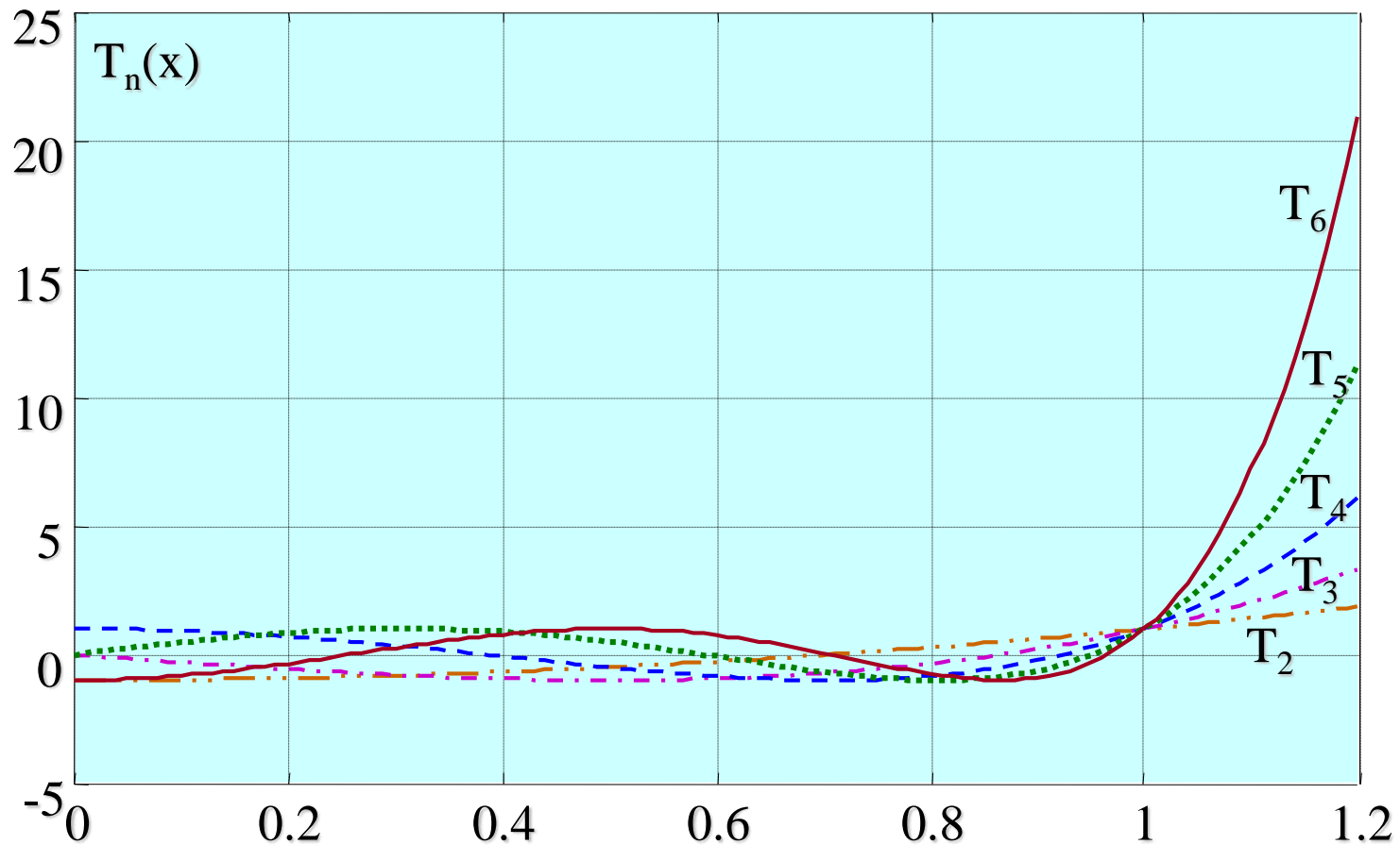
VII.2 Prototypes

2°) Filtres de Chebychev

2°) Filtres de Chebychev

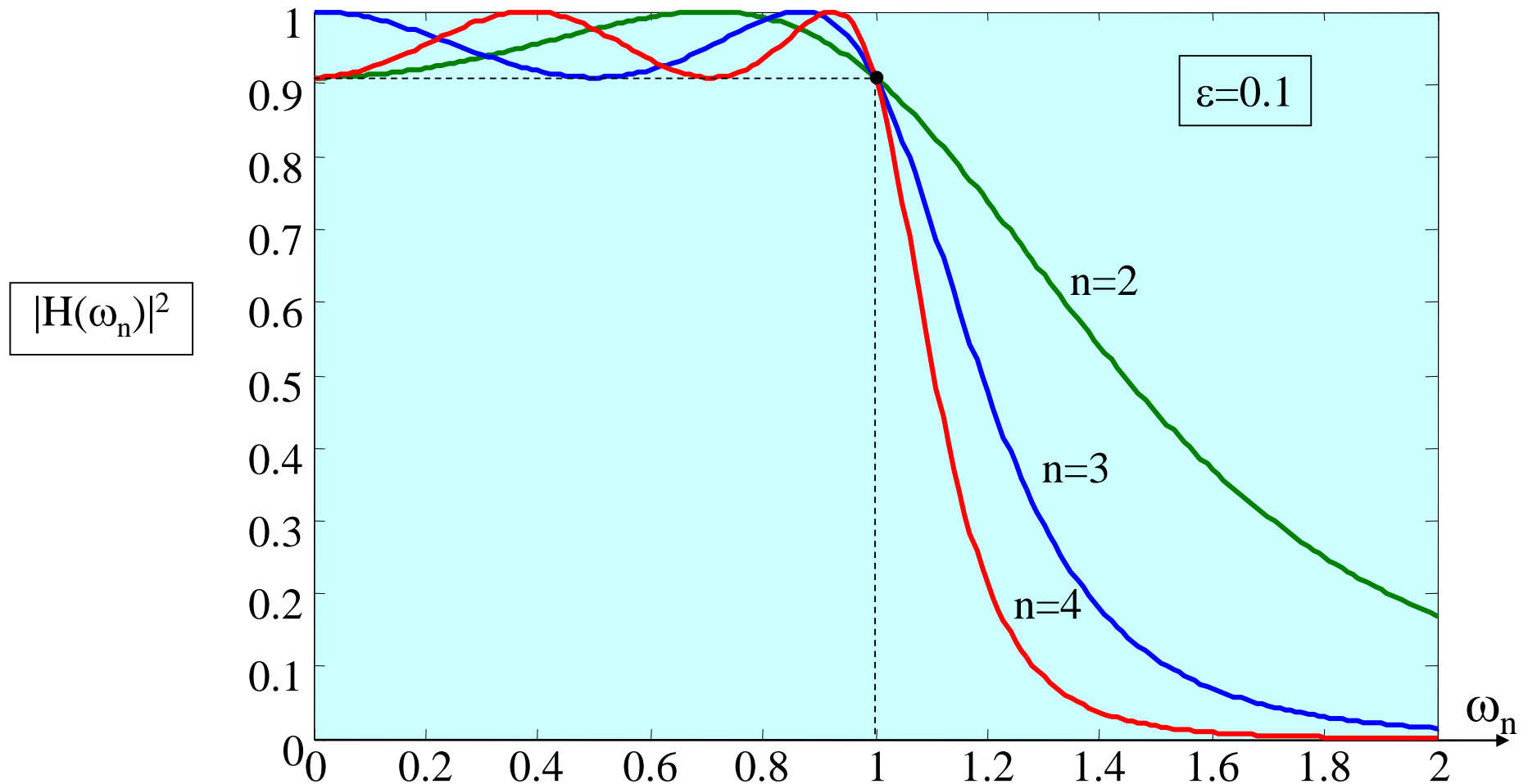
A) Polynomes de Chebychev

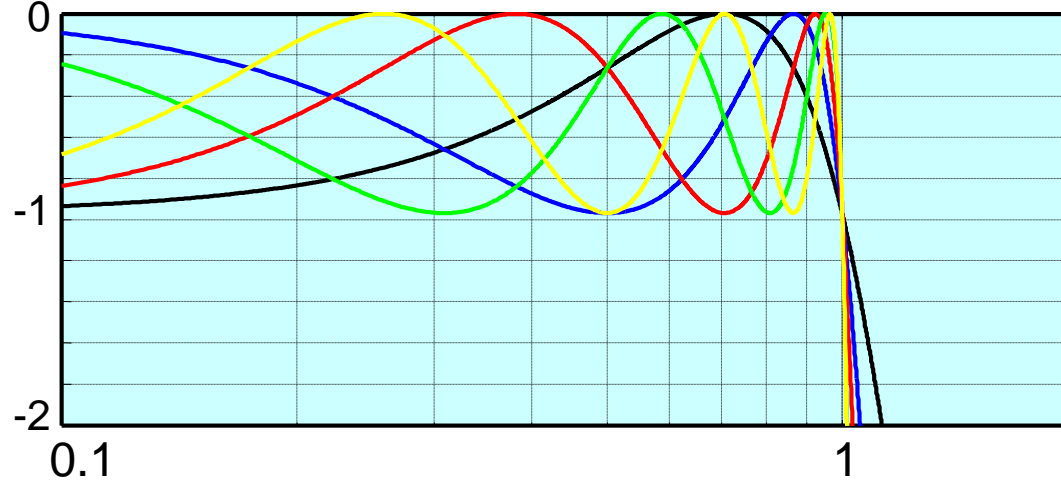
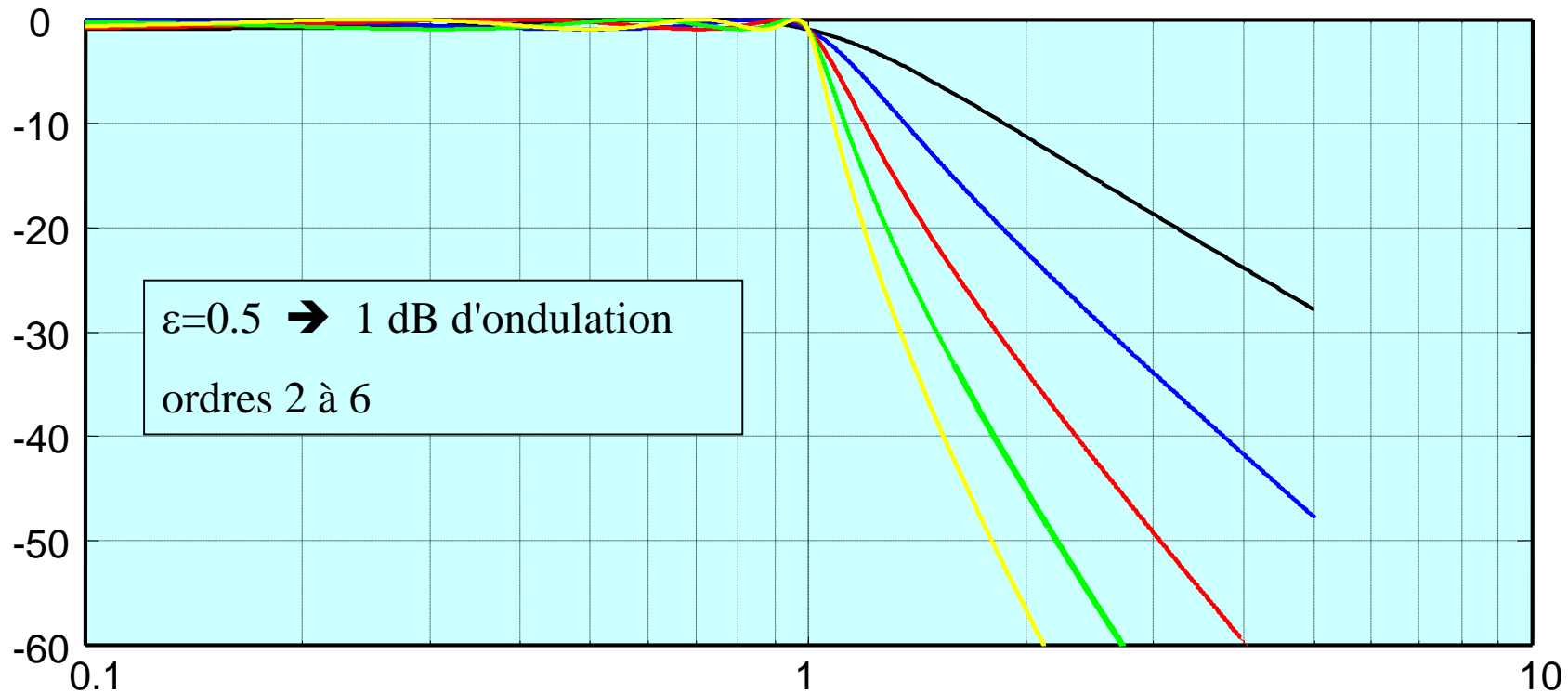
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x$$



B) Filtres de Chebychev de type I

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)$$





$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)$$

C) Propriétés des Filtres de Chebychev

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)$$

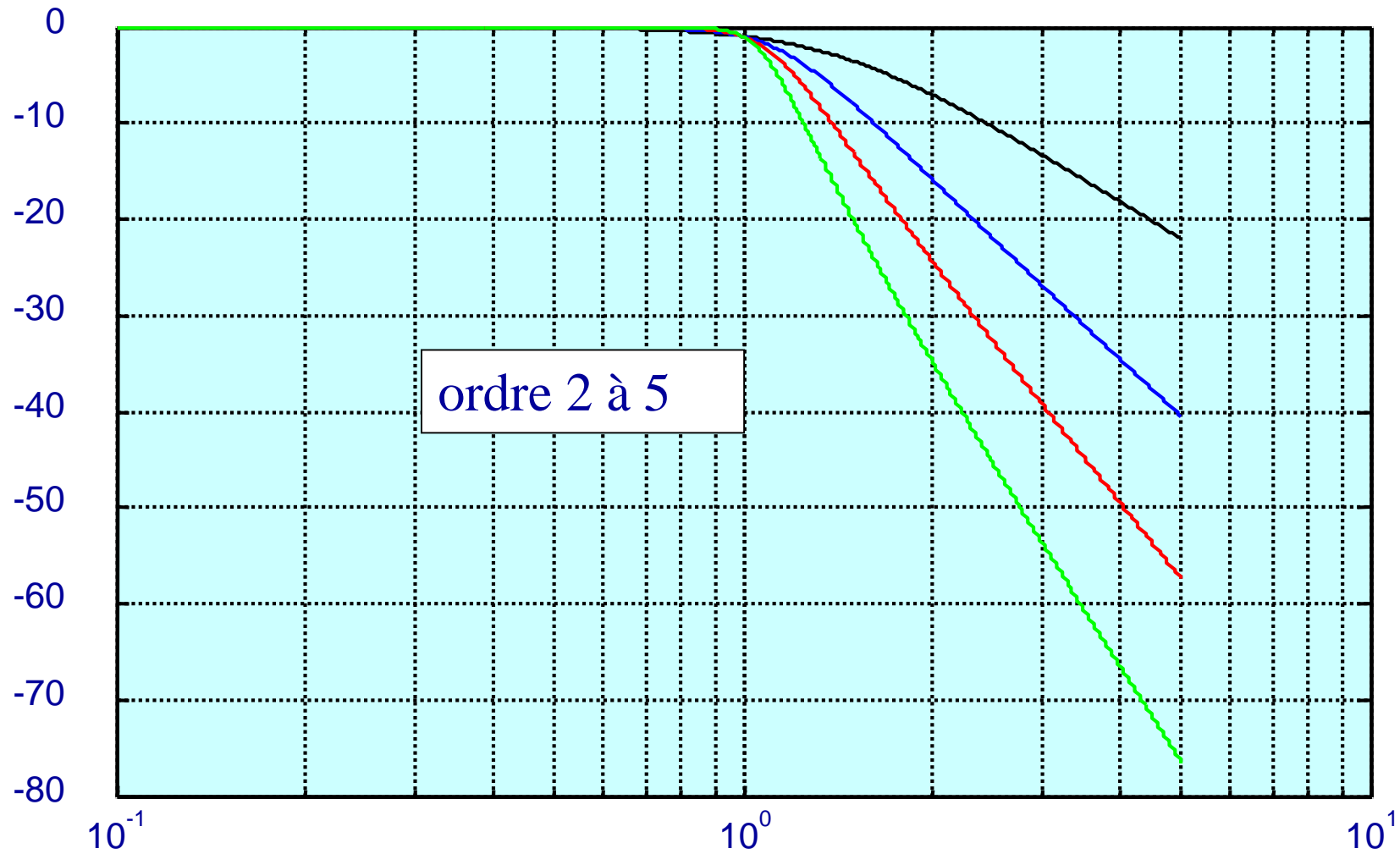
- n oscillations dans la bande passante
- "equal ripple"
- ondulation fonction de ε
- ondulation $\varepsilon=1 \rightarrow$ ondulation=3 dB
 $\varepsilon=0.5 \rightarrow$ ondulation=1 dB
- $|H(\omega_n=1)| = -$ ondulation $\rightarrow \neq -3$ dB en général
- asymptotes en -20n dB/decade
- Coupure + raide que Butterworth
- phase – linéaire que Butterworth

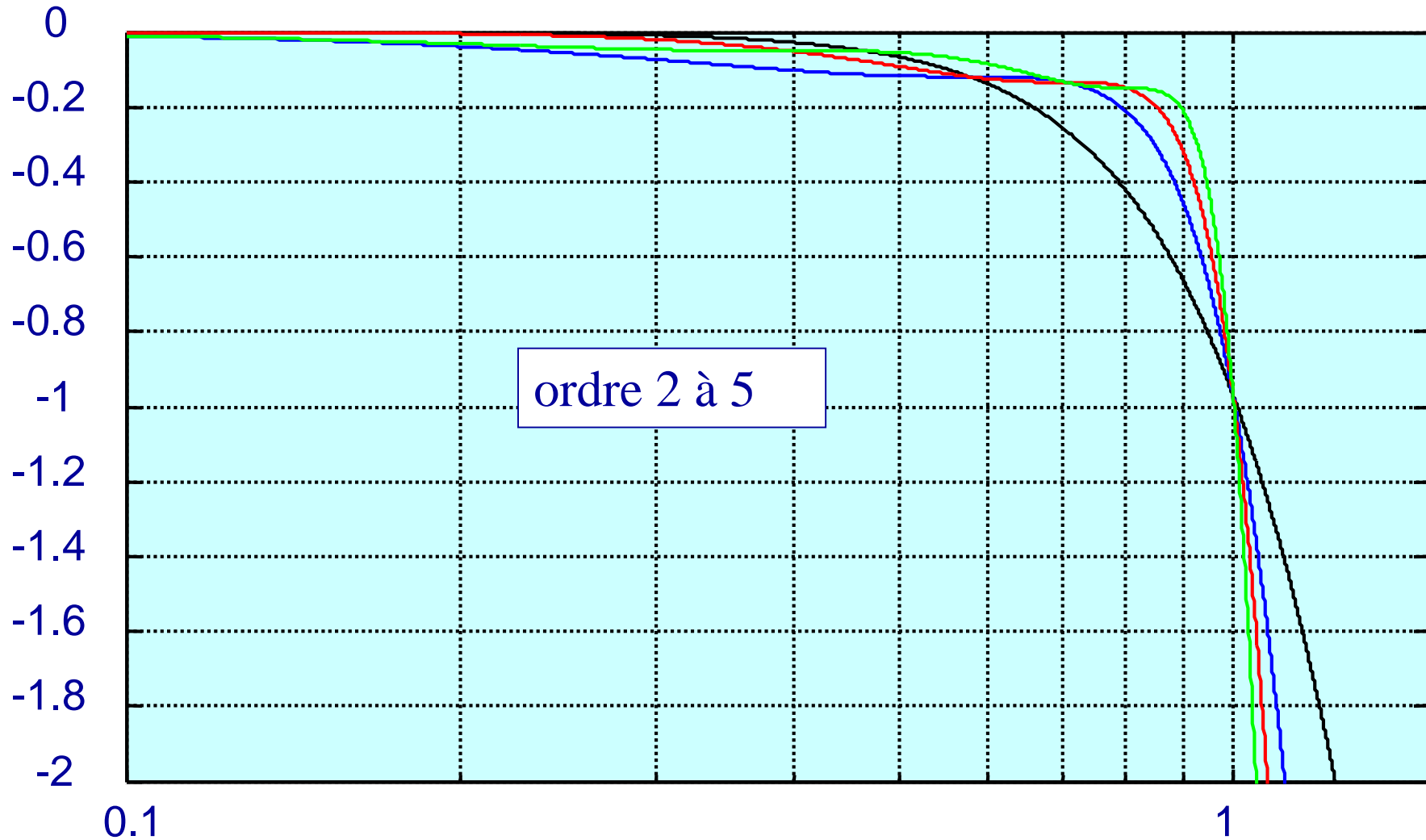
3°) Filtres de Legendre (Papoulis)

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 L_n(\omega_n^2)$$

où $L_n(x)$

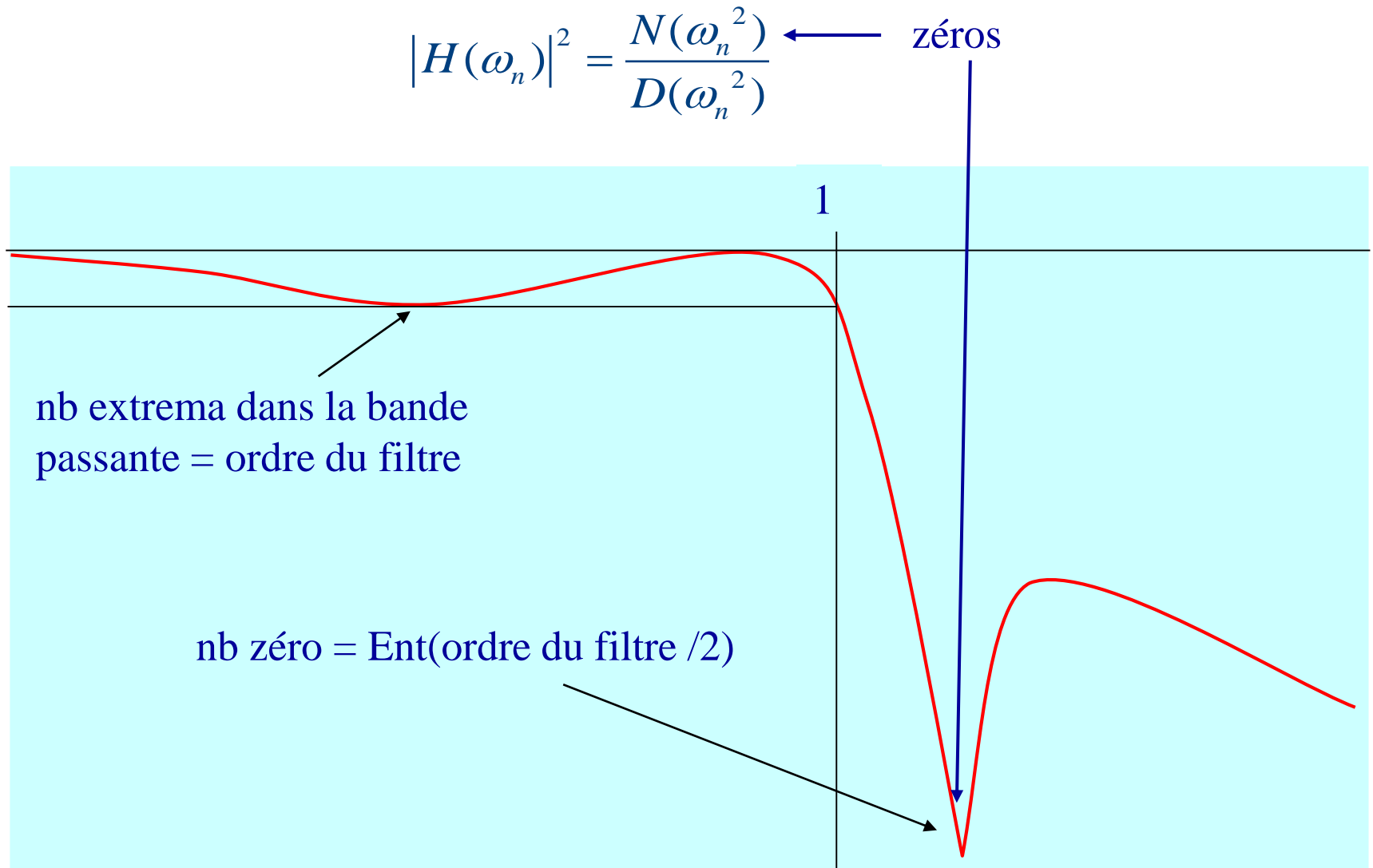
n	$L_n(x)$
1	x
2	x^2
3	$3x^3 - 3x^2 + x$
4	$6x^4 - 8x^3 + 3x^2$
5	$20x^5 - 40x^4 + 28x^3 - 8x^2 + x$
6	$50x^6 - 120x^5 + 105x^4 - 40x^3 + 6x^2$





$\varepsilon=1 \rightarrow$ gain de -3 dB et donc une ondulation= 3 dB dans la bande passante
 $\varepsilon=0.5 \rightarrow$ gain de -1 dB et donc une ondulation= 1 dB dans la bande passante

4°) Filtres de Cauer



C) Propriétés des Filtres de Cauer

$$|H(\omega_n)|^2 = \frac{N(\omega_n^2)}{D(\omega_n^2)}$$

- n oscillations dans la bande passante
- $|H(\omega_n=1)| = -$ ondulation $\rightarrow \neq -3$ dB en général
- asymptotes ordres impairs : -20 dB/decade

ordres pairs : asymptote horizontale



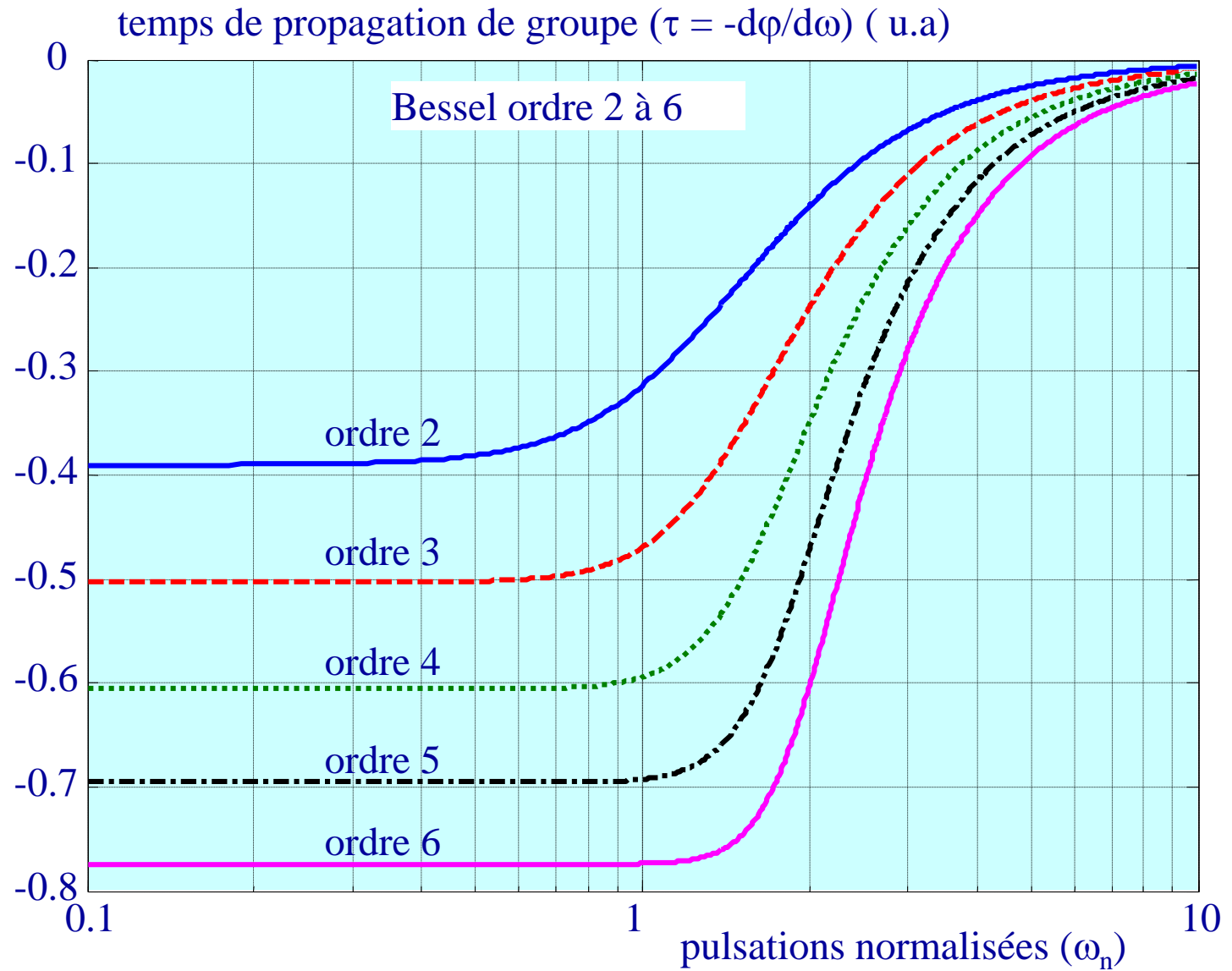
- Coupure + raide que Chebychev
- phase – linéaire que Chebychev

5°) Filtres de Bessel

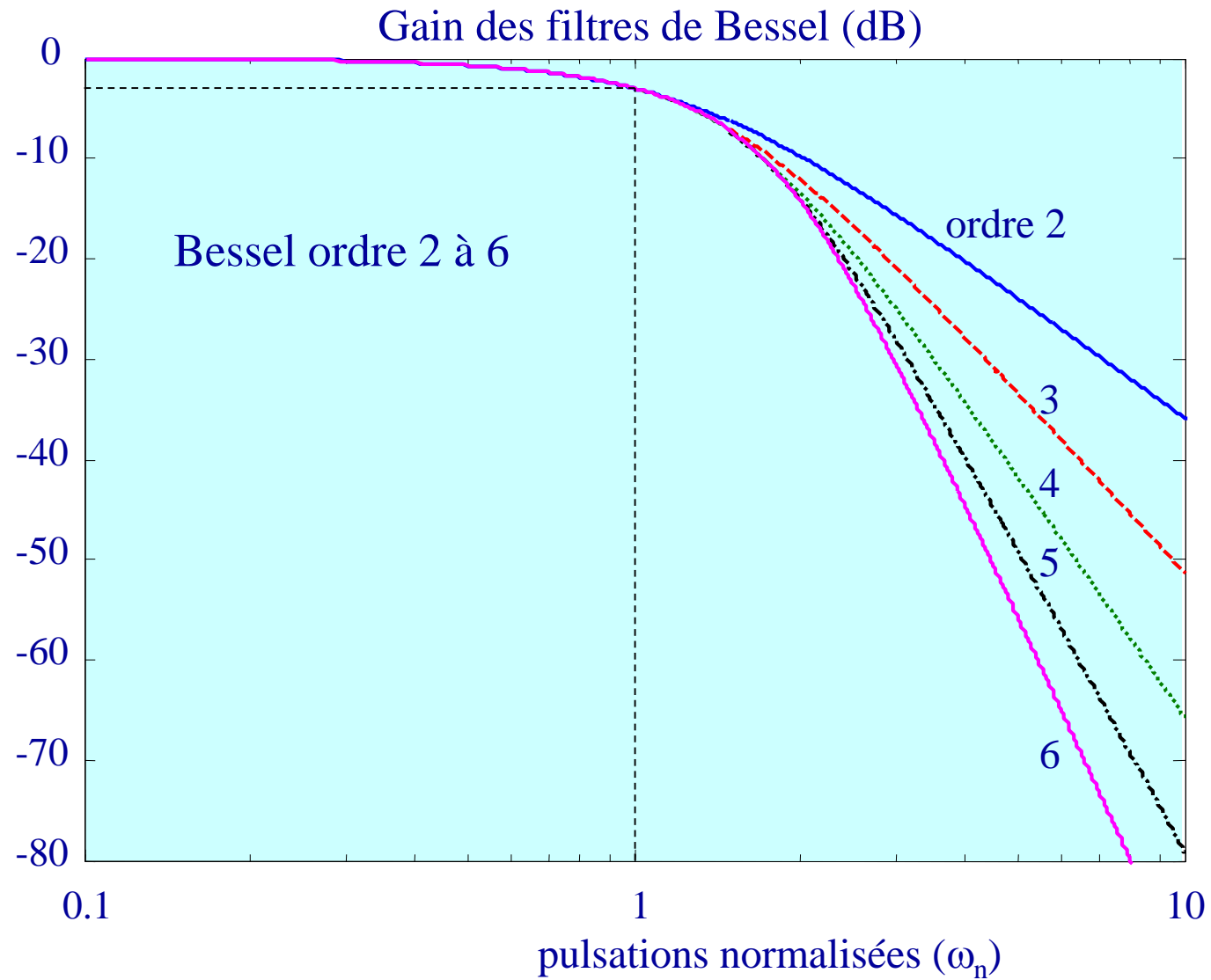
Recherche de la phase la + linéaire possible



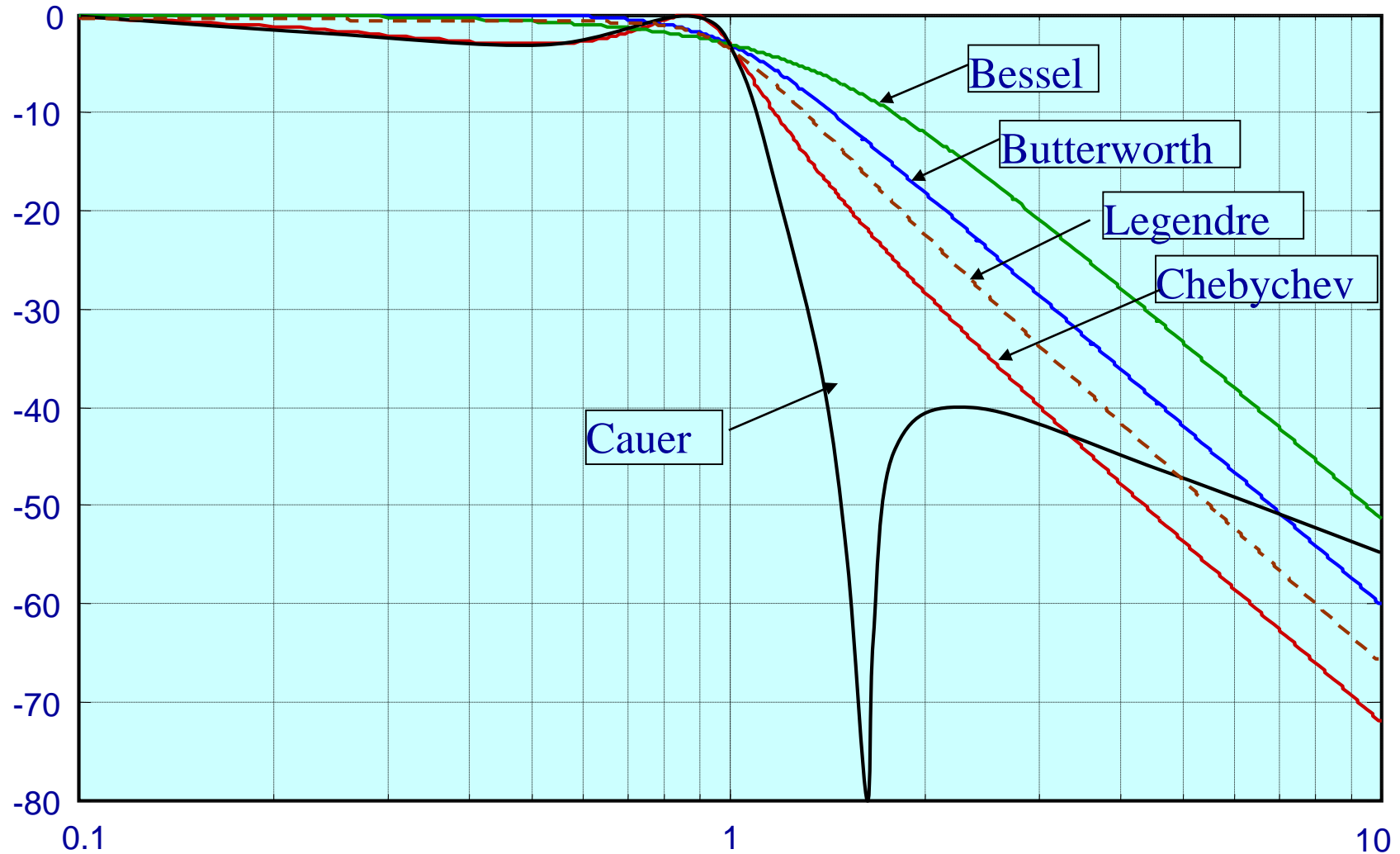
Distorsion du signal la + faible possible



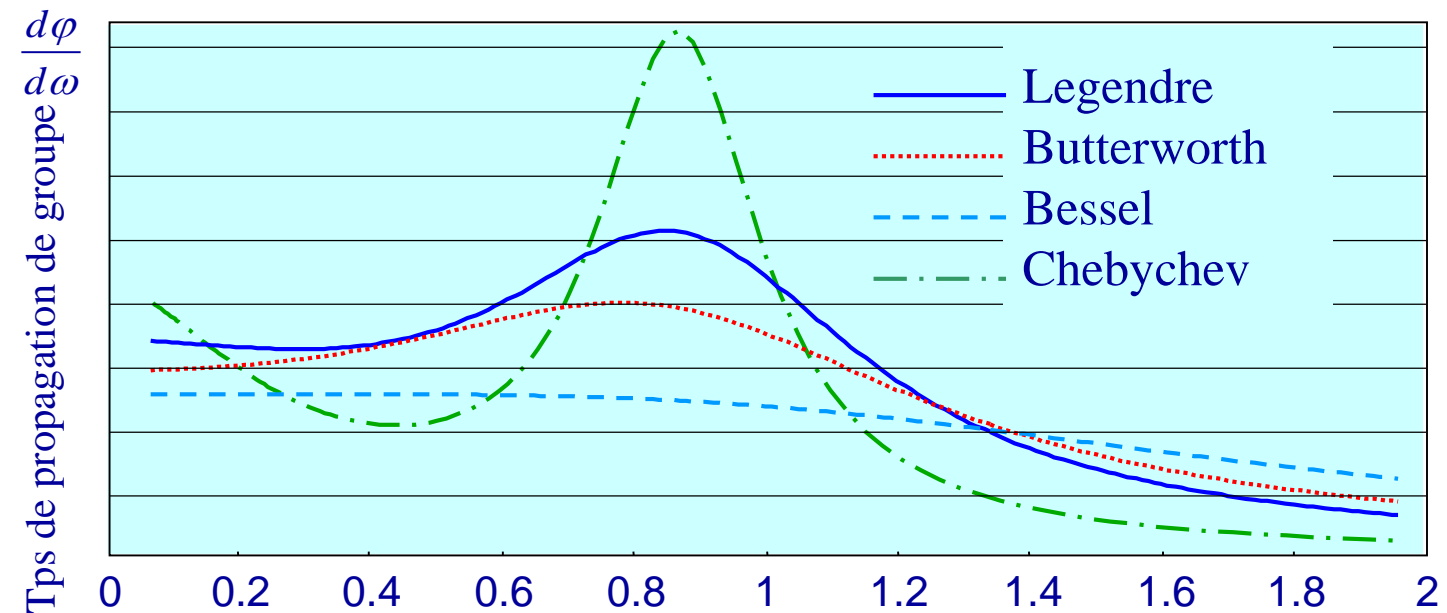
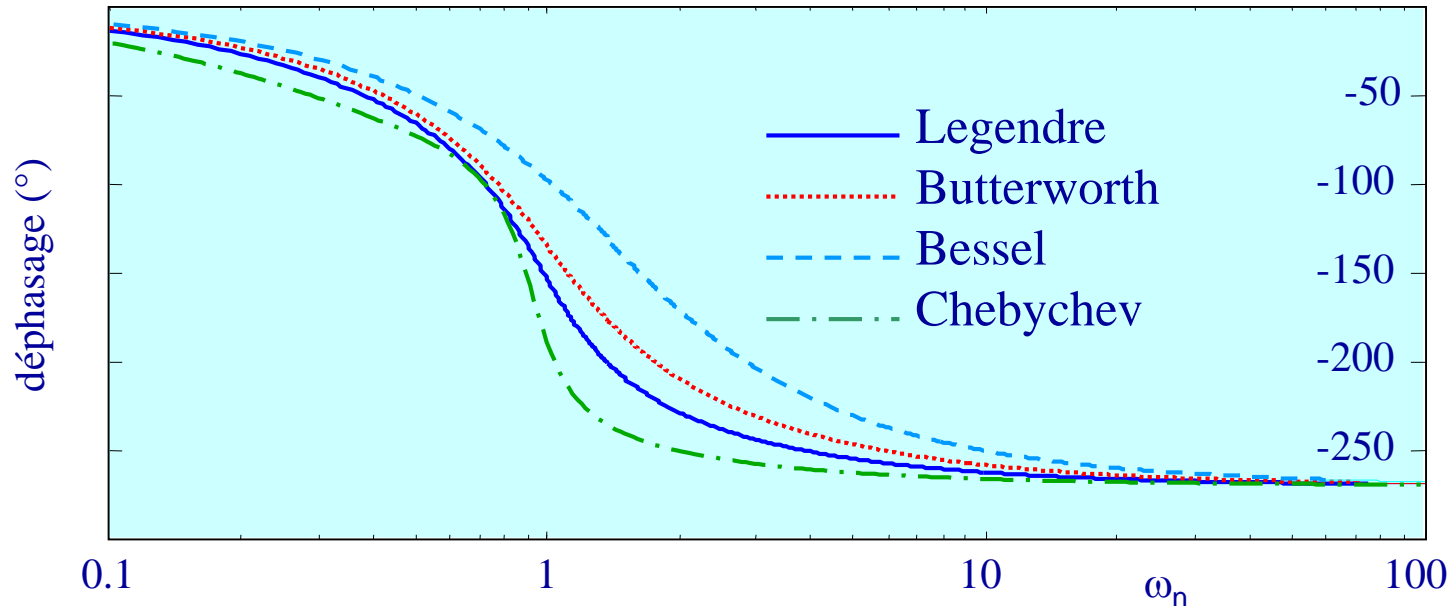
5°) Filtres de Bessel



Comparaison des Gains des prototypes normalisés à -3 dB



Phases comparées
et linéarité



VIII. Synthèse des Filtrés Passifs

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e(t)$$

↓

T.L.

→

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

$$H(p) = \prod \left[\begin{array}{ccc} \text{Pbas_1} & \text{Phaut_1} & \text{Pbas_2} \\ \frac{1}{1 + \tau p} \times \frac{\tau p}{1 + \tau p} \times \frac{1}{1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2} \times \\ \frac{\tau p}{1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2} \times \frac{\tau^2 p^2}{1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2} \times \frac{1 + \tau'^2 p^2}{1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2} \end{array} \right]$$

Pbande_2

Phaut_2

Cbande_2

Synthèse par variable d'état

ou

Filtres à intégrateurs

Comment réaliser ces différentes fonctions ?

Prenons par exemple un filtre
passe haut du second ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K p^2}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

$$S(p) \left(\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1 \right) = E(p) K p^2$$

en divisant par $\frac{p^2}{\omega_N^2}$

$$S(p) \left(1 + 2\zeta \frac{\omega_N}{p} + \frac{\omega_N^2}{p^2} \right) = E(p) K \omega_N^2$$

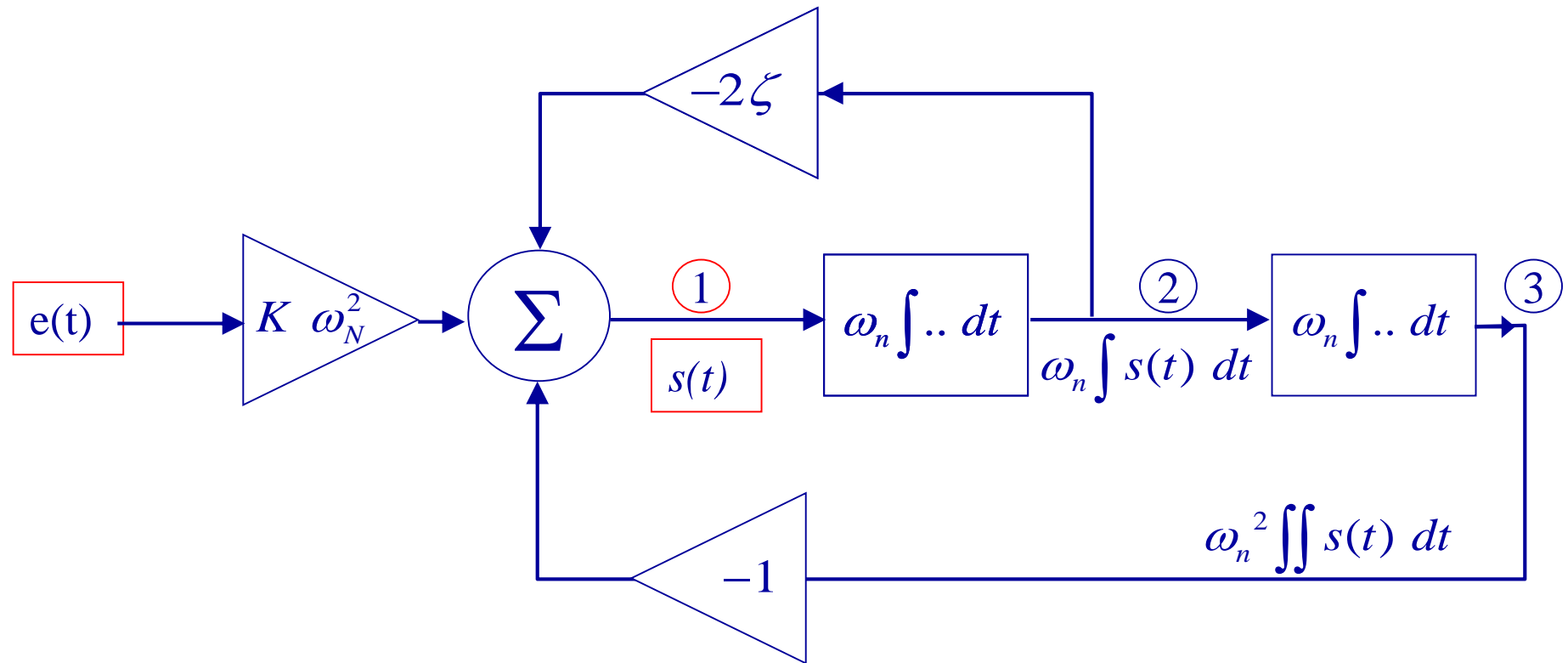
$$S(p) = K \omega_N^2 E(p) - 2\zeta \omega_N \frac{S(p)}{p} - \omega_N^2 \frac{S(p)}{p^2}$$

$$s(t) = K \omega_N^2 e(t) - 2\zeta \omega_N \int s(t) dt - \omega_N^2 \iint s(t) dt$$

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

1°) Synthèse par variable d'état

$$s(t) = K \omega_N^2 e(t) - 2\zeta\omega_N \int s(t) dt - \omega_N^2 \iint s(t) dt$$

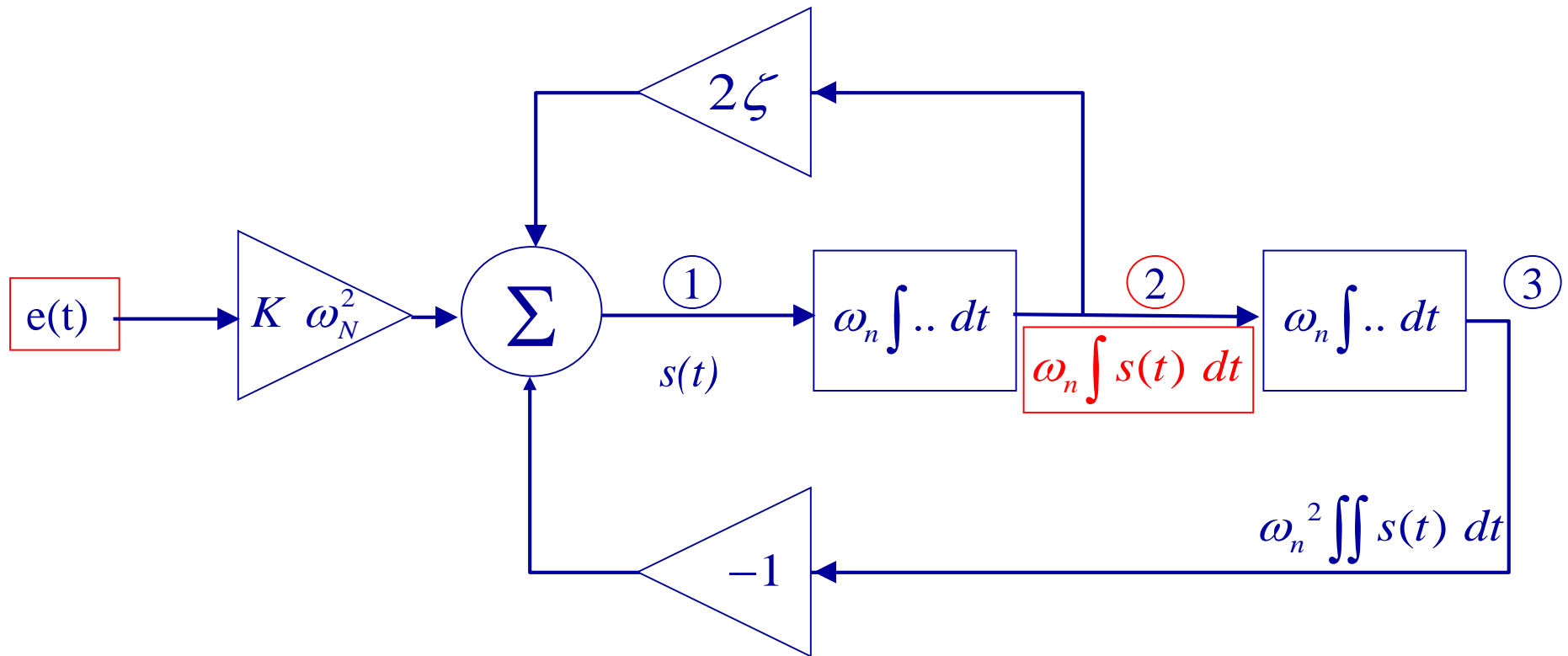


en sortie ① on obtient $s(t)$

réponse du filtre passe haut du second ordre

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

1°) Synthèse par variable d'état

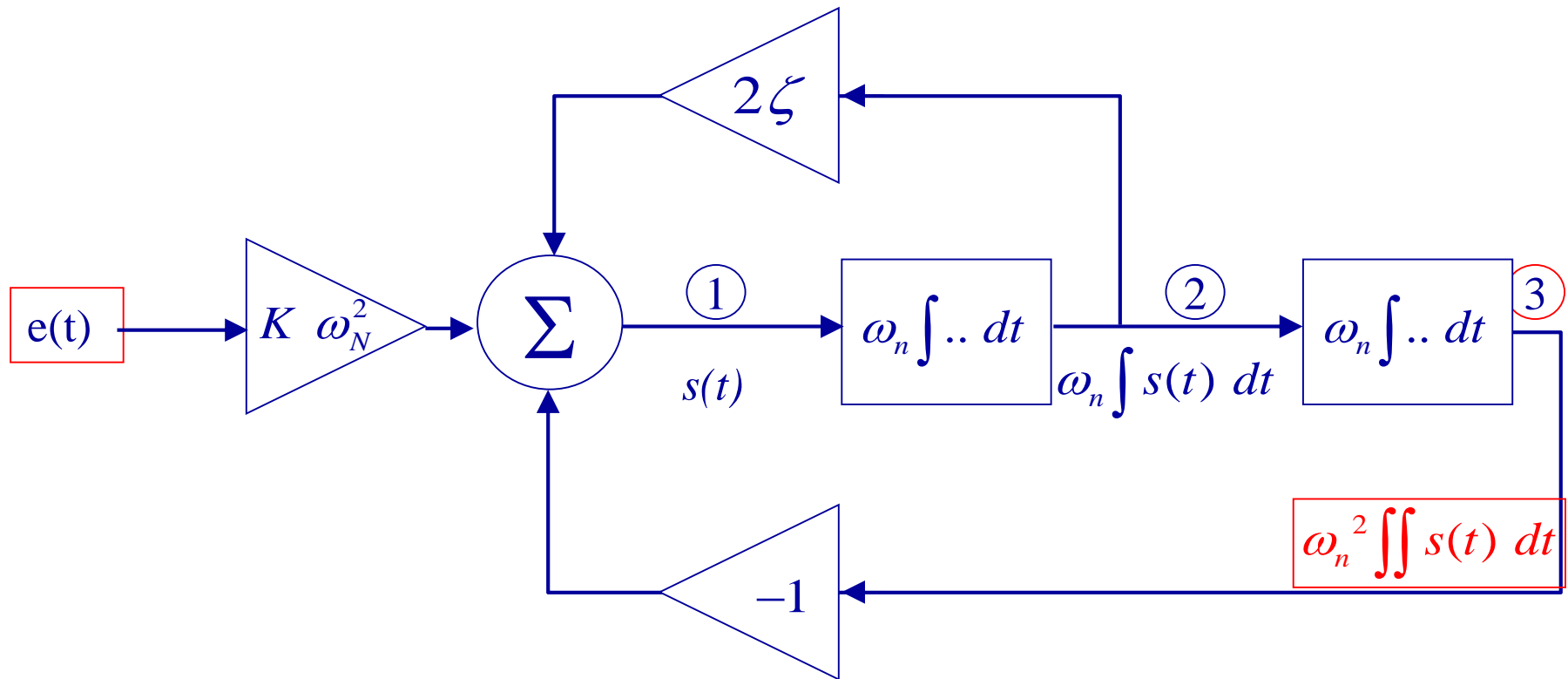


et en sortie (2) on obtient $\int s(t) dt$

cad
$$S_2(p) = \frac{S}{p} = \frac{K p}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1} E(p)$$
 qui est un passe bande du second ordre

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

1°) Synthèse par variable d'état



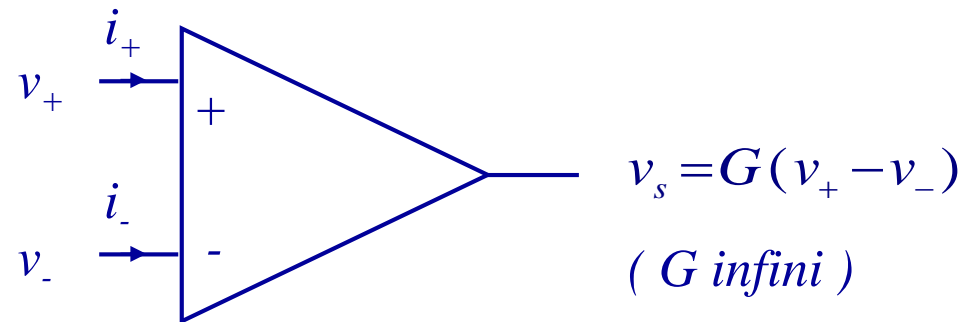
et en sortie (3) on obtient $\iint s(t) dt$

cad
$$S_3(p) = \frac{S}{p^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1} E(p)$$
 qui est un passe bas du second ordre

Synthèse à 1 AOP

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Rappel sur les Amplificateurs Opérationnels Parfaits



donc pour avoir $v_s \neq \infty$ (ou $\pm V_{alim}$) il faut

$$v_+ = v_-$$

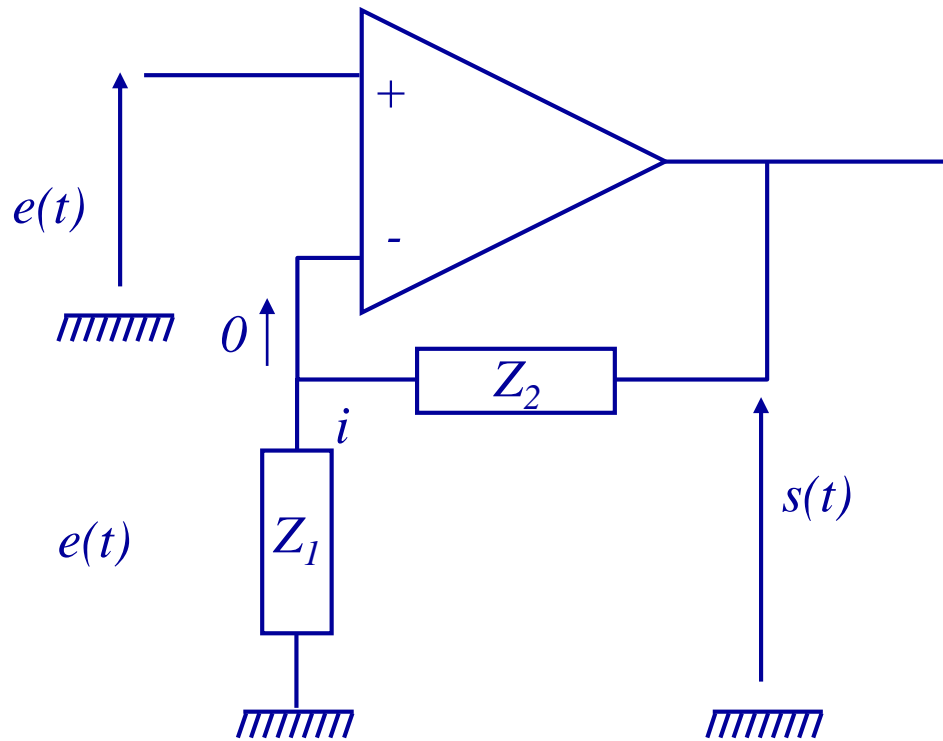
de plus les impédances d'entrée sont infinies

donc i_+ et i_- sont nul

$$i_+ = i_- = 0$$

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Rappel sur les Amplificateurs Opérationnels Parfaits



$$v_+ = v_-$$

$$\Rightarrow v_- = e$$

$$e = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} s$$

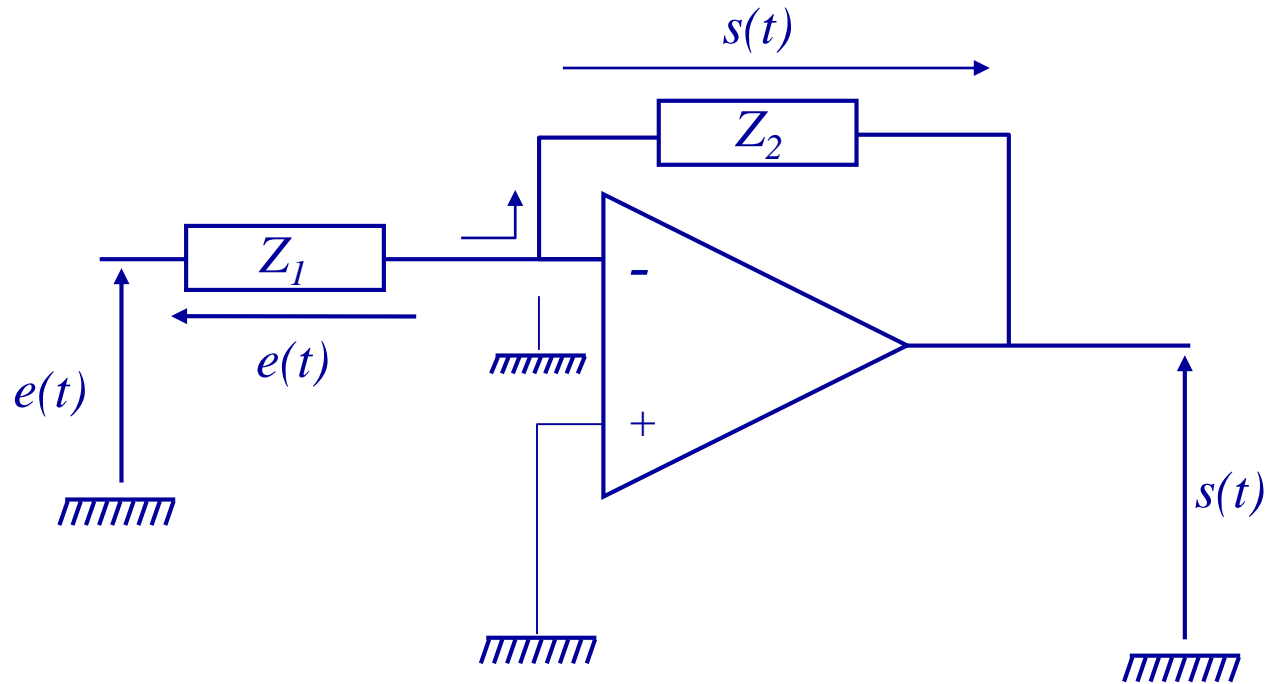
$$\Rightarrow s = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) e$$

$si\ Z_1 = R_1\ et\ Z_2 = R_2\ \text{alors}$

$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e$

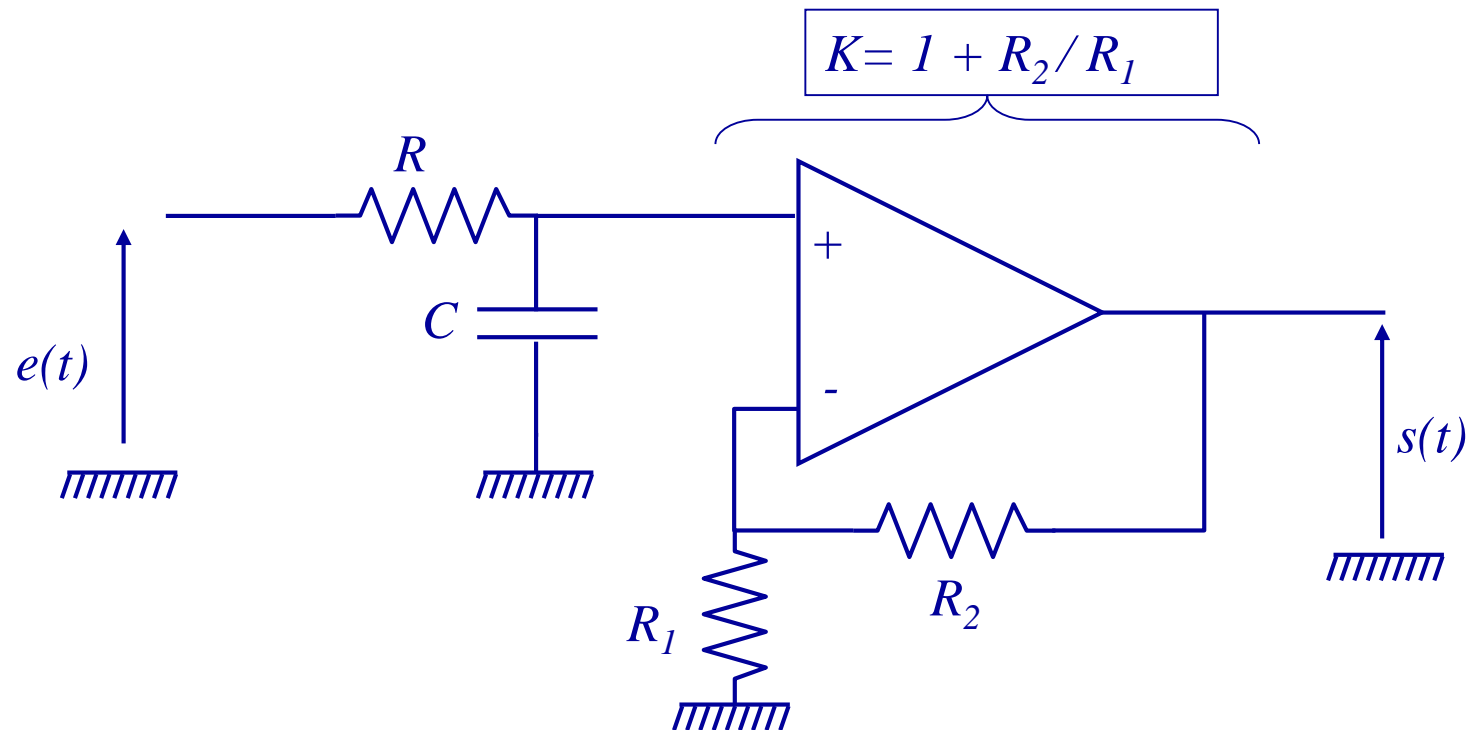
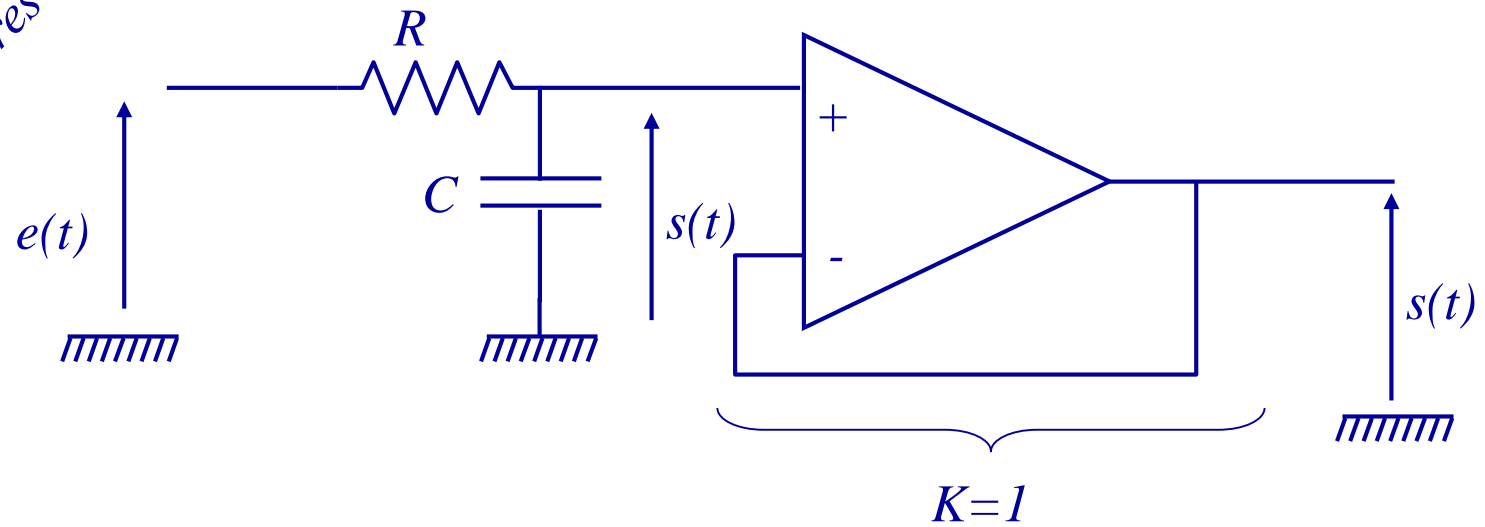
IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Rappel sur les Amplificateurs Opérationnels Parfaits

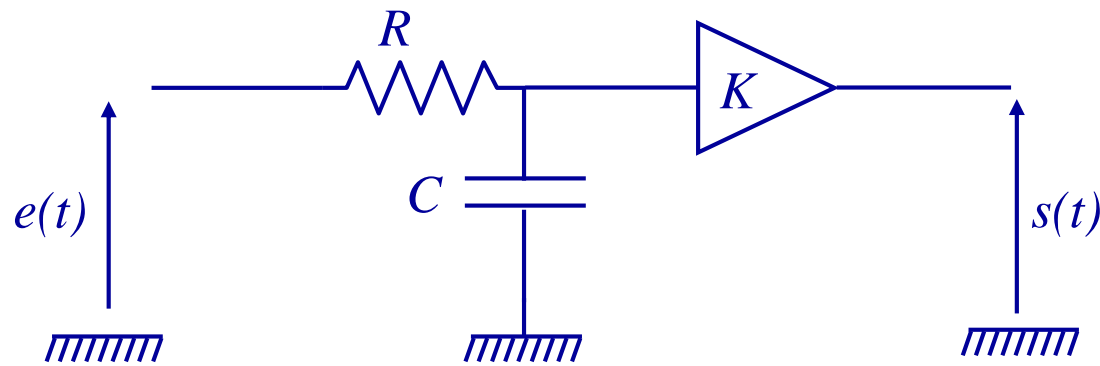


$$v_+ = v_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{Z_1} = \frac{-s}{Z_2}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{s}{e} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

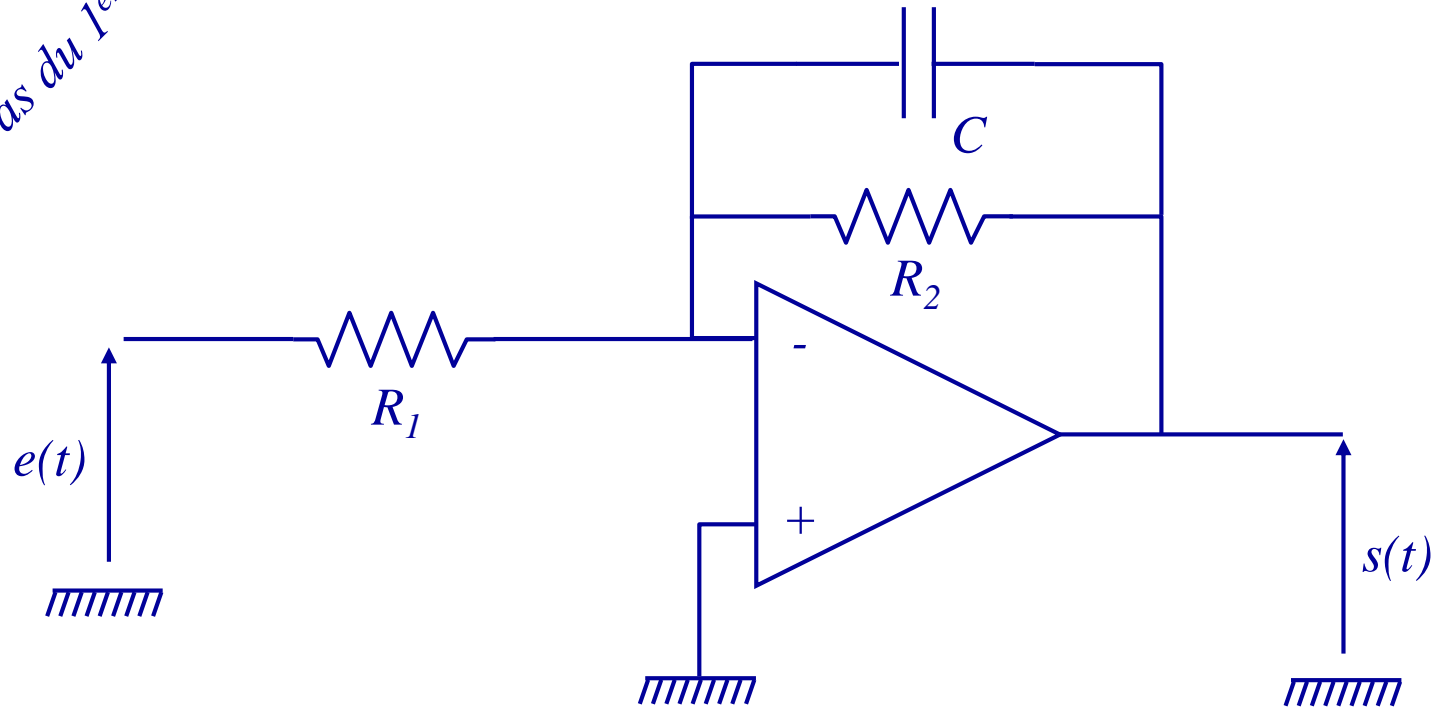
Passe Bas du 1^{er} ordres



Passe Bas du 1^{er} ordres



Passe Bas du 1^{er} ordres

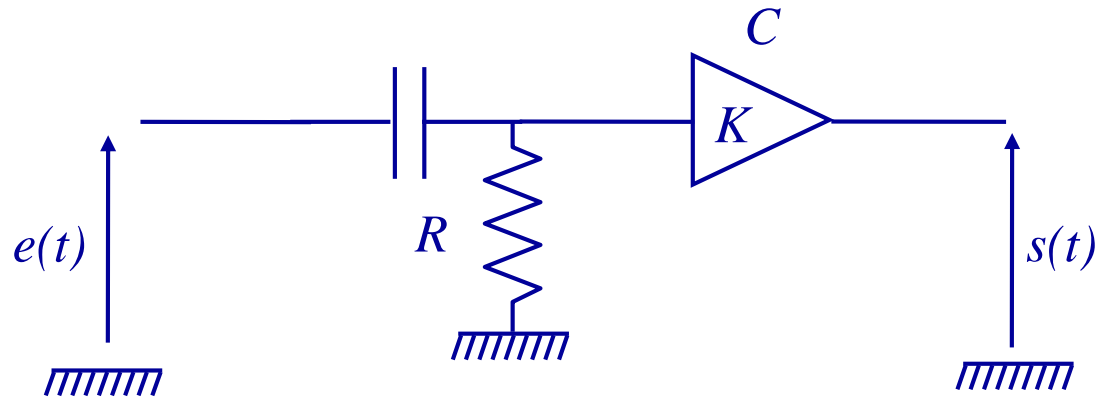


$$H = -\frac{R_2 // C}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \frac{R_2 / Cp}{\frac{1}{Cp} + R_2} = \frac{-R_2 / R_1}{1 + R_2 Cp}$$

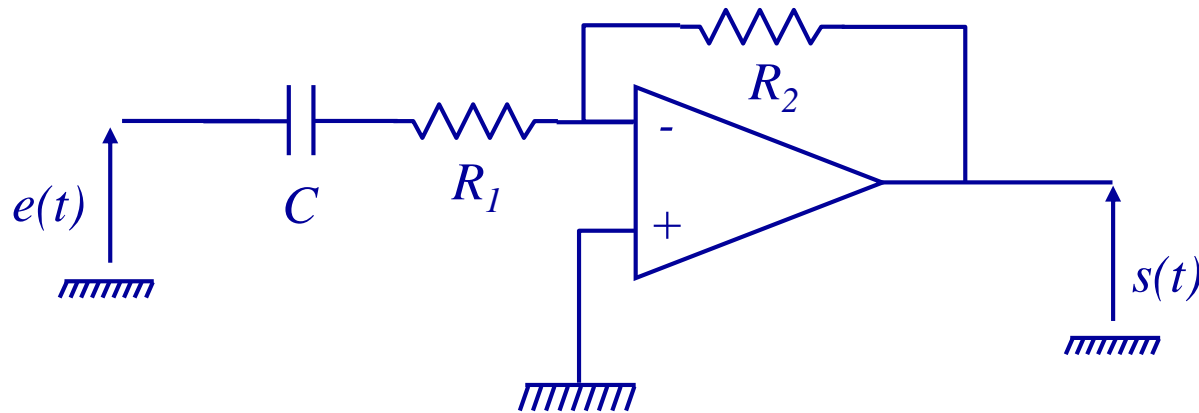
IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Premiers Ordres

Passe Haut du 1^{er} ordres

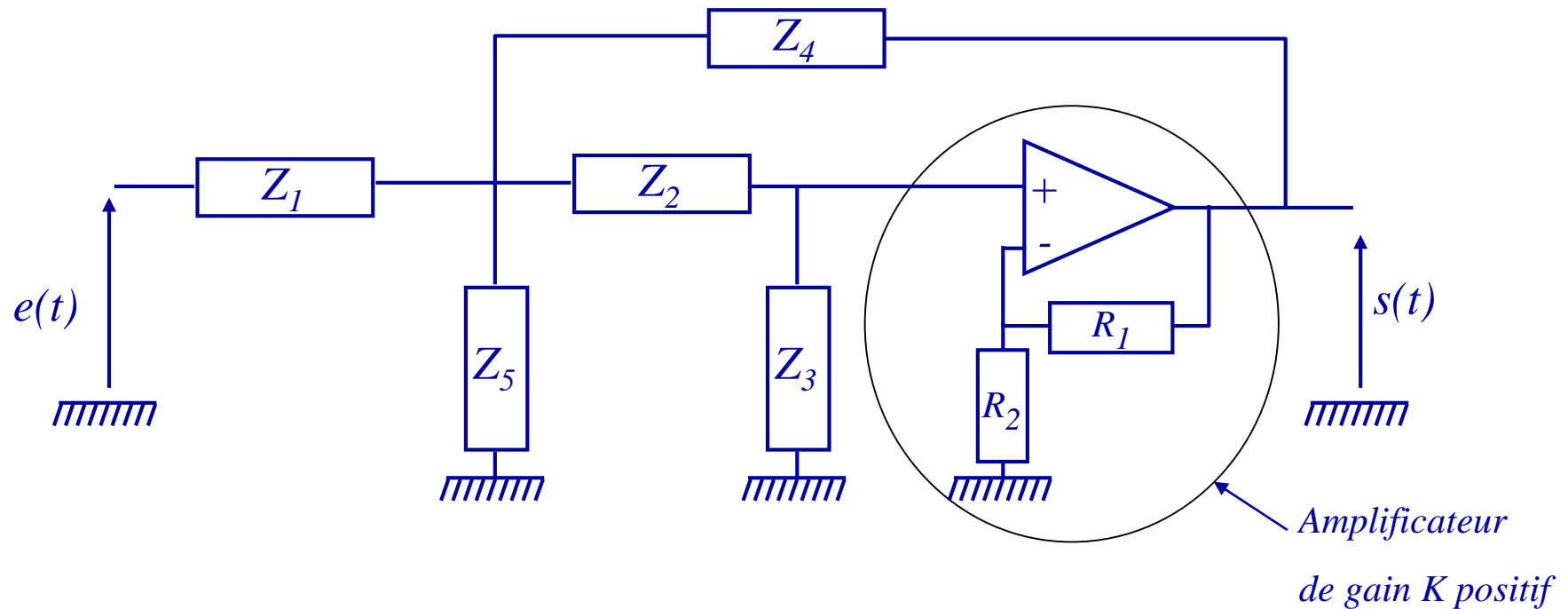


$$H = K \frac{RC p}{1 + RC p}$$



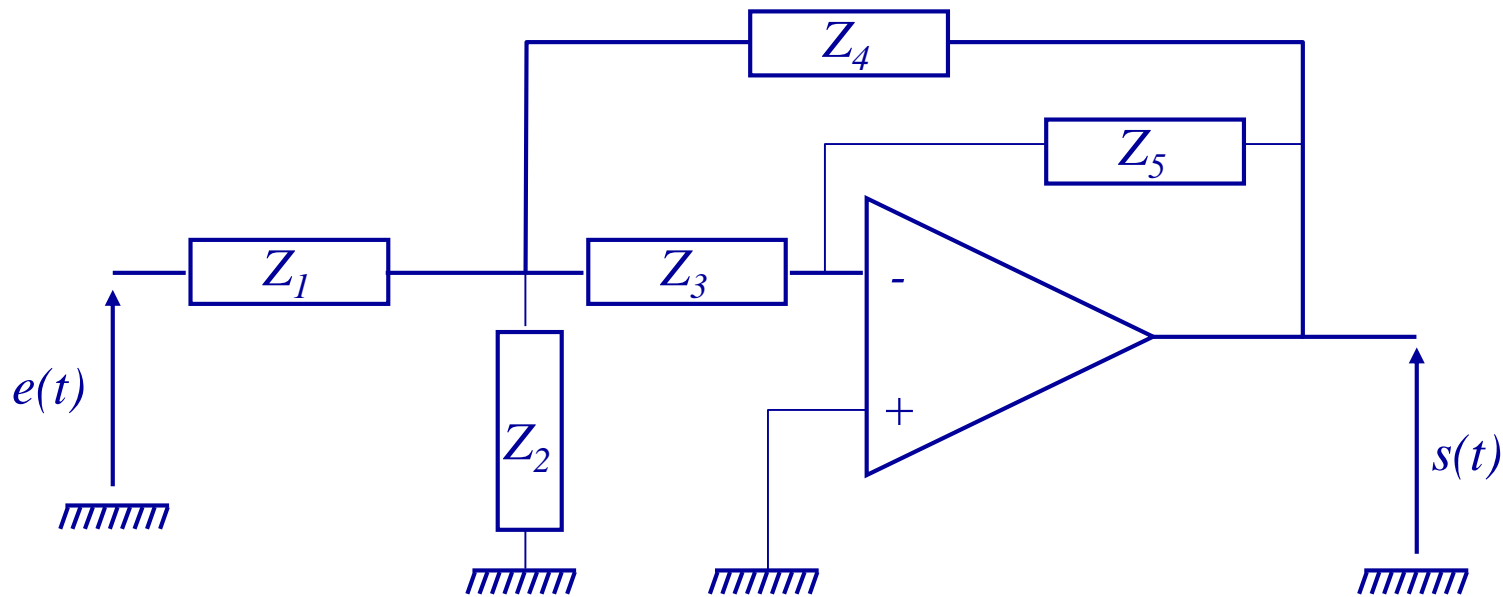
$$H = \frac{-R_2}{R_1 + 1/Cp} = \frac{-R_2 Cp}{1 + R_1 Cp}$$

Structure Générale de Sallen-Key du 2^{ème} ordre



(développés dans le chapitre suivant)

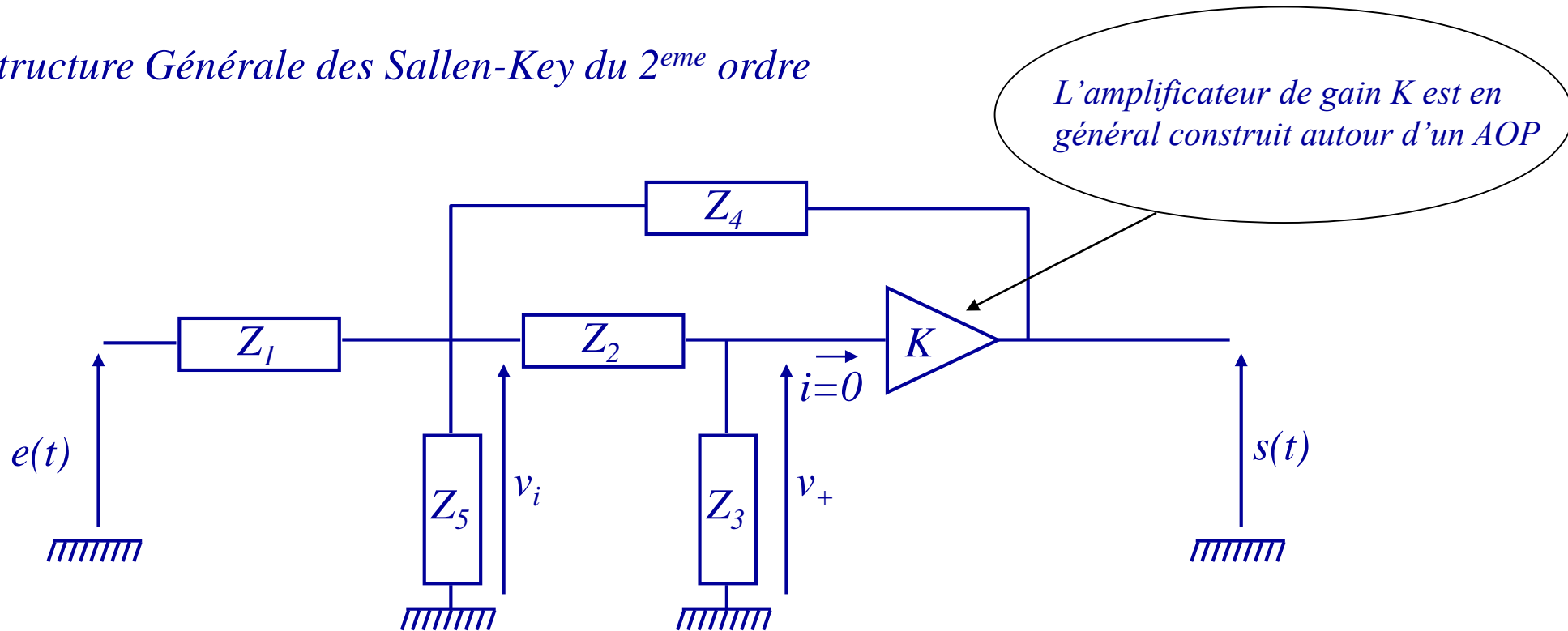
Structure Générale de Rauch du 2^{ème} ordre



mais les structure à 1 AOP de type Salen-Key ou Rauch ont une sensibilité croissante avec le coefficient de qualité $Q=1/2\zeta$

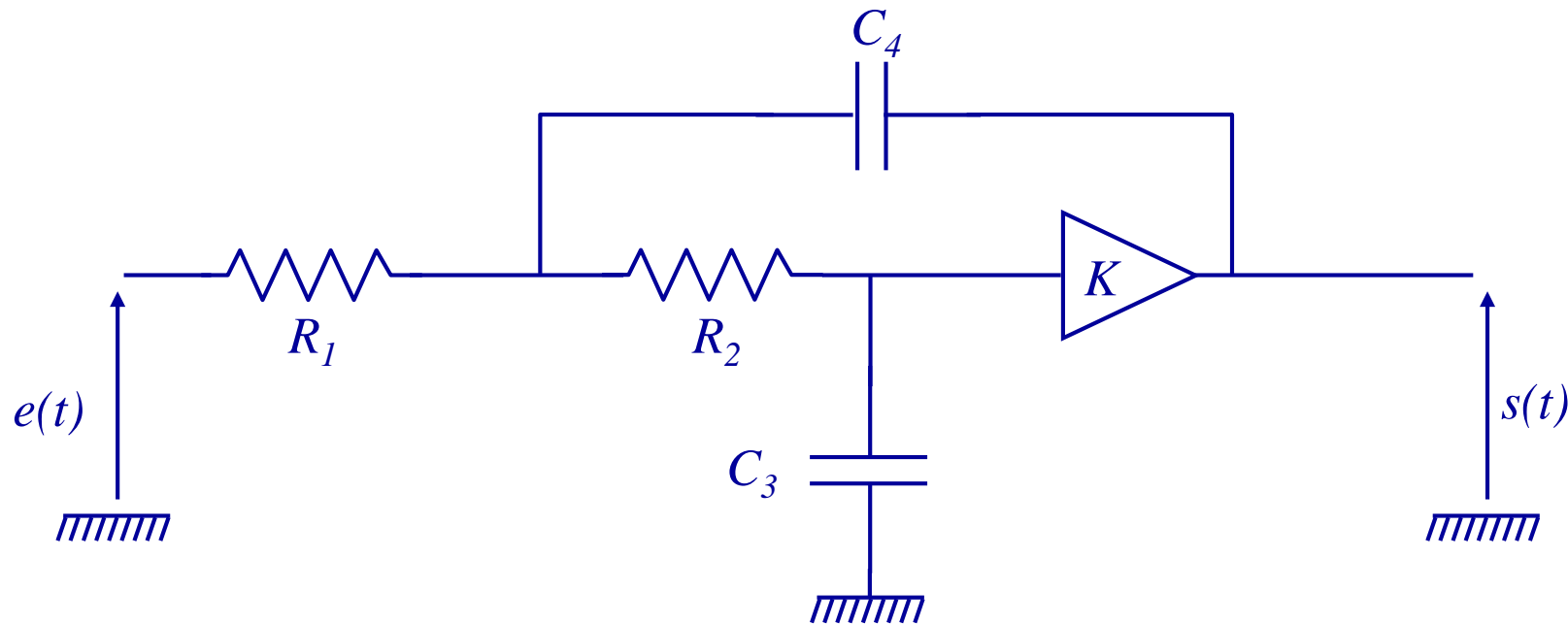
➔ utilisable pour $Q < 8$ cad $\zeta > 0.06$

Structure Générale des Sallen-Key du 2^{ème} ordre



$$H = \frac{K Y_1 Y_2}{\left(Y_1 + Y_4 + Y_5 + \frac{1}{Z_2 + Z_3} \right) (Y_2 + Y_3) - K Y_2 Y_4}$$

Passe Bas de Salen-Key



$$Z_1 = R_1$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Y_3 = C_3 p$$

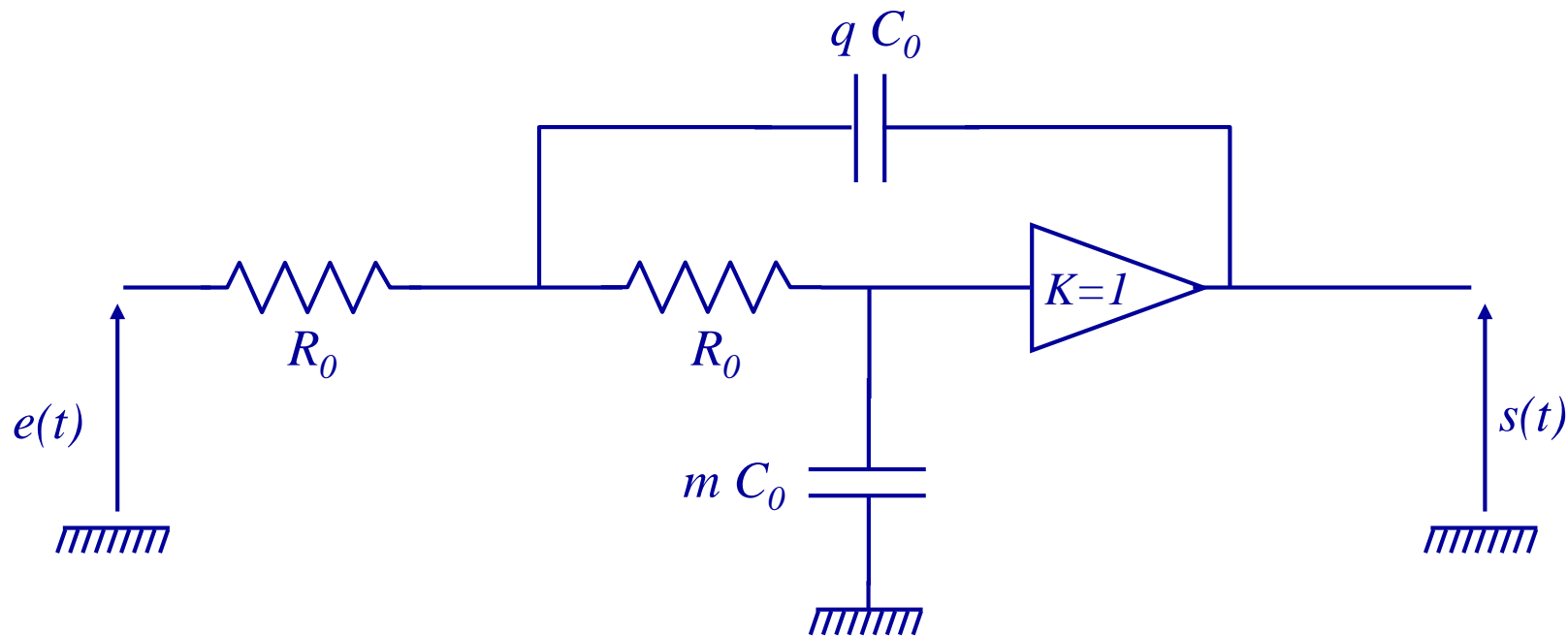
$$Y_4 = C_4 p$$

$$Z_5 = \infty$$

$$H = \frac{K}{R_1 R_2 C_3 C_4 p^2 + \left[(R_1 + R_2) C_3 + R_1 C_4 (1 - K) \right] p + 1}$$

Passe Bas de Sallen-Key

$$H = \frac{K}{R_1 R_2 C_3 C_4 p^2 + \left[(R_1 + R_2) C_3 + R_1 C_4 (1 - K) \right] p + 1}$$



$$R_1 = R_2 = R_0$$

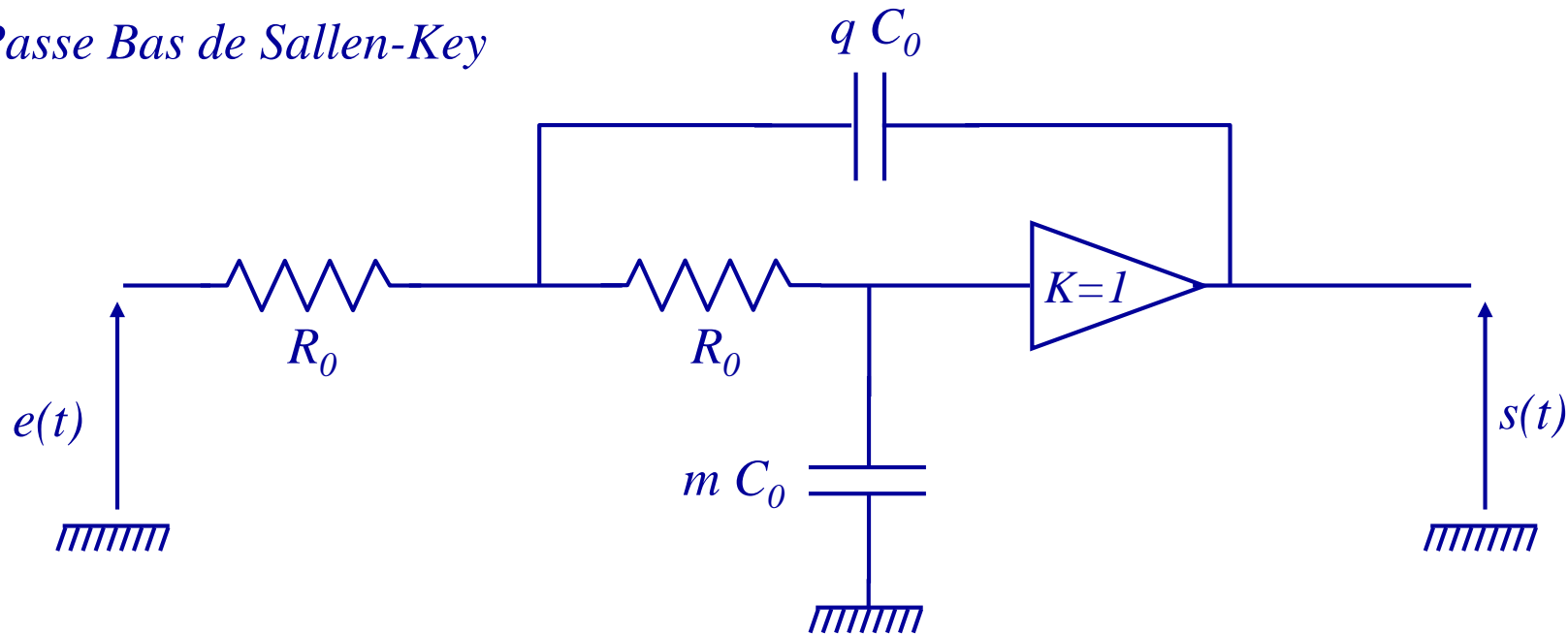
$$C_4 = m C_0$$

$$C_3 = q C_0$$

$$K=1$$

$$H = \frac{1}{mq(R_0 C_0)^2 p^2 + 2mR_0 C_0 p + 1}$$

Passe Bas de Sallen-Key



$$H = \frac{1}{mq(R_0 C_0)^2 p^2 + 2m R_0 C_0 p + 1}$$

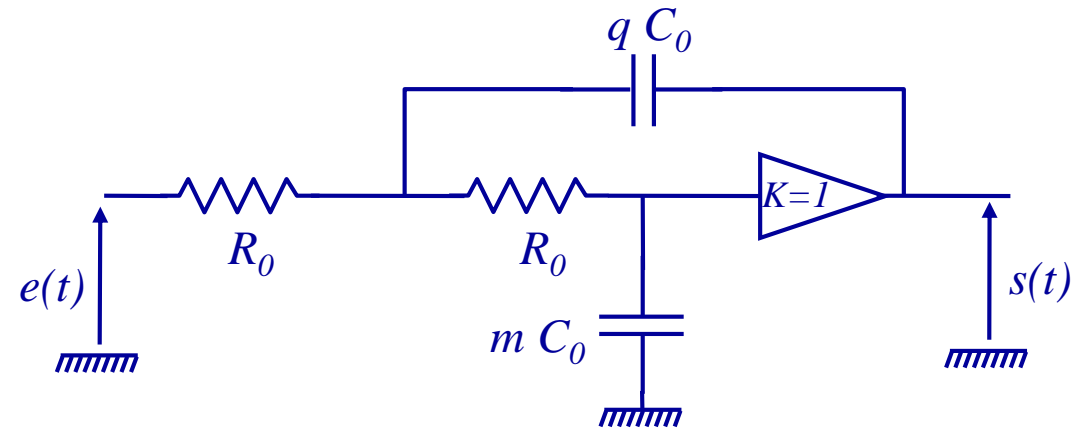
$$H = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

$$\omega_N = \frac{1}{R_0 C_0 \sqrt{mq}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{q}}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{m}}$$

Passe Bas de Sallen-Key : Normalisation



Impédance de référence : R_0

la pulsation de référence : $\omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$

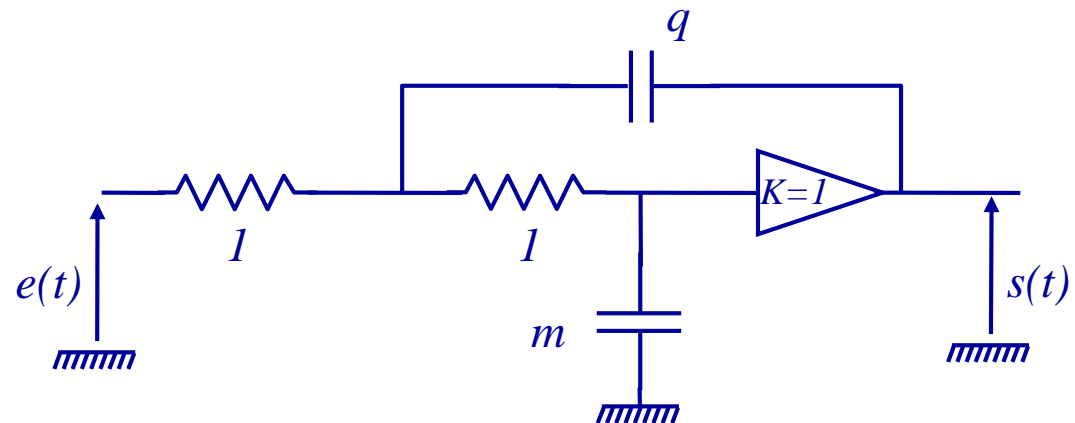
$$z_{C_0} = \frac{Z_{C_0}}{R_0} = \frac{1}{R_0 C_0 p} = \frac{1}{p_n} \Rightarrow c_0 = 1$$

$$R_0 \longrightarrow 1$$

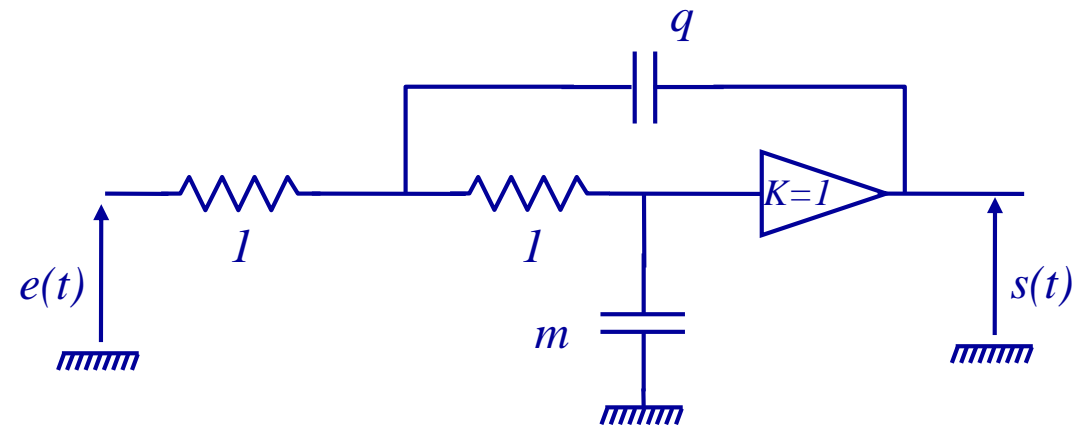
$$C_0 \longrightarrow 1$$

$$mC_0 \longrightarrow m$$

$$qC_0 \longrightarrow q$$

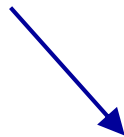


Passe Bas de Sallen-Key : Normalisation



Impédance de référence : R_0

la pulsation de référence : $\omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$



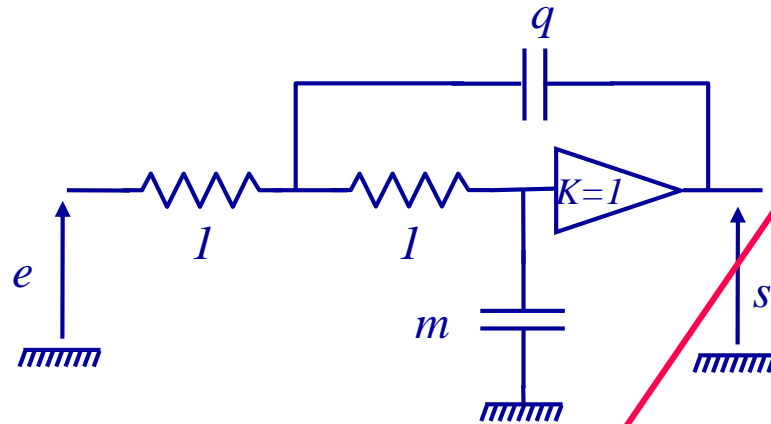
$$H = \frac{1}{mq p_n^2 + 2m p_n + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_N = \frac{1}{R_0 C_0 \sqrt{mq}} \\ \zeta = \sqrt{\frac{m}{q}} \end{array} \right.$$

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Passé Bas de Salen-Key : exemple

Butterworth



N	CIRCUIT	m	q	V _m	F _m	FONCTION DE TRANSMISSION
2	1	0.7071	1.4142	-	-	$(P^2 + 1.4142P + 1)$
3	1 2	0.5000 1.0000	1.9999	1.15	0.707	$(P^2 + 1.0000P + 1)$
4	1 2	0.9238 0.3826	1.0823 2.6131	-	-	$(P^2 + 1.8477P + 1)$ $(P^2 + 0.7653P + 1)$
5	1 2 3	0.8090 0.3090 1.0000	1.2360 3.2360	-	-	$(P^2 + 1.6180P + 1)$ $(P^2 + 0.6180P + 1)$ $(P + 1)$
6	1 2 3	0.9659 0.7071 0.2588	1.0352 1.4142 3.8636	-	-	$(P^2 + 1.9318P + 1)$ $(P^2 + 1.4142P + 1)$ $(P^2 + 0.5176P + 1)$
7	1 2 3 4	0.9009 0.6234 0.2225 1.0000	1.1099 1.6038 4.4939	-	-	$(P^2 + 1.8019P + 1)$ $(P^2 + 1.2469P + 1)$ $(P^2 + 0.4450P + 1)$ $(P + 1)$
8	1 2 3 4	0.9807 0.8314 0.5155 0.1950	1.0195 1.2026 1.7999 5.1258	-	-	$(P^2 + 1.9615P + 1)$ $(P^2 + 1.6629P + 1)$ $(P^2 + 1.1111P + 1)$ $(P^2 + 0.3901P + 1)$
9	1 2 3 4 5	0.9396 0.7660 0.5000 0.1736 1.0000	1.0641 1.3054 1.9999 5.7587	-	-	$(P^2 + 1.8793P + 1)$ $(P^2 + 1.5320P + 1)$ $(P^2 + 1.0000P + 1)$ $(P^2 + 0.3472P + 1)$ $(P + 1)$

Tableau Bu 5. — Filtrés passé-bas et passé-haut de Butterworth. Valeur des éléments et des grandeurs de réglage.

Passé Bas d'ordre 2 de Salen-Key :

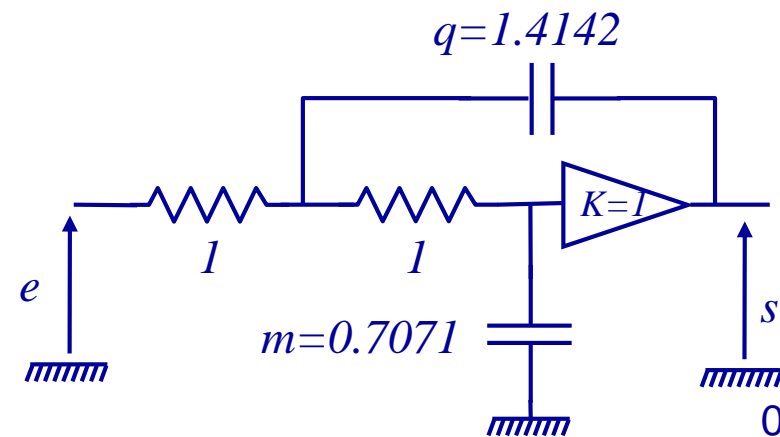
$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{q}} = 0.707$$

$$m=0.7071 ; q=1.4142$$

$$H = \frac{1}{p_n^2 + 1.4142 p_n + 1}$$

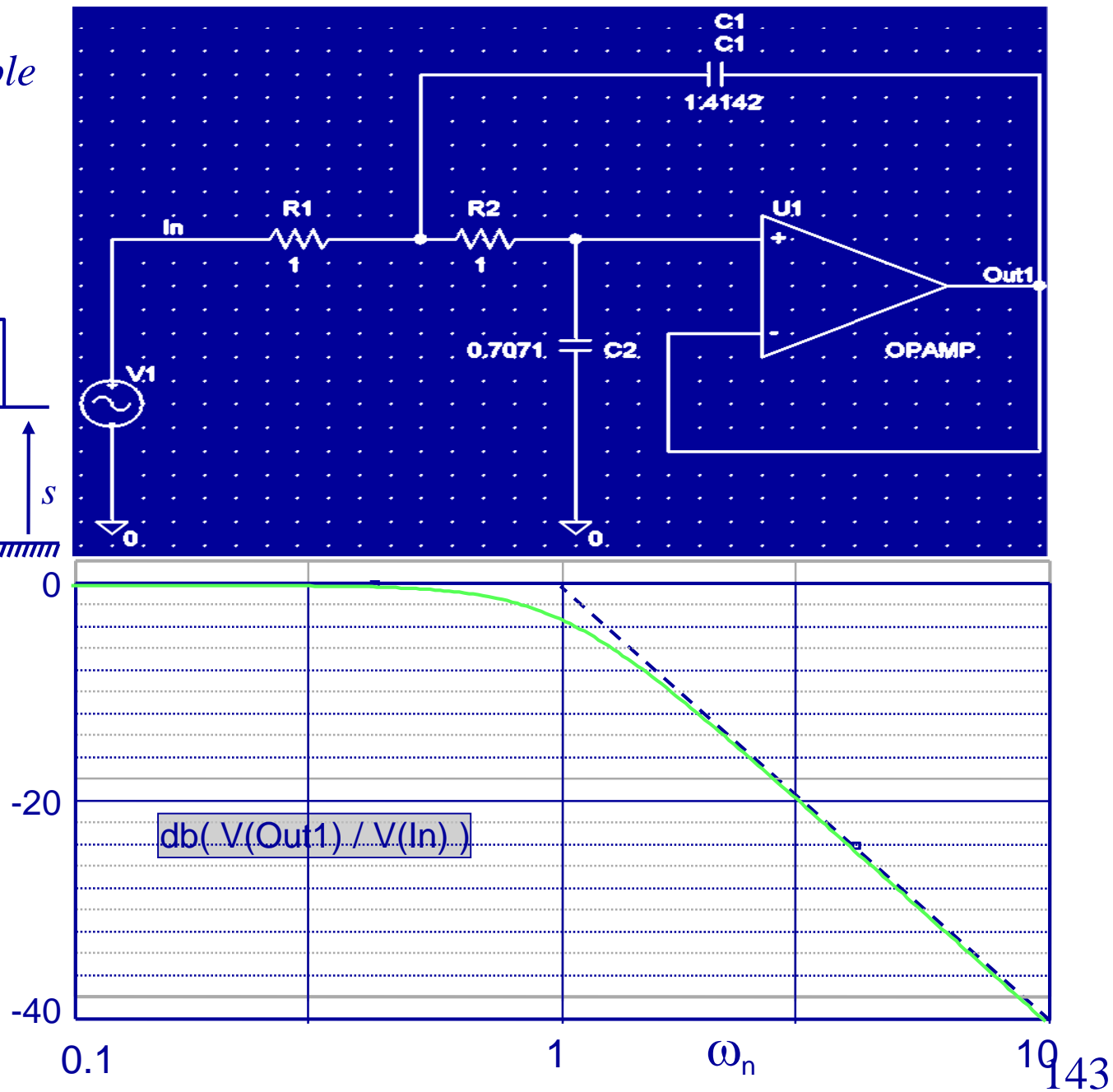
IX. Synthèse des Filtrés Actifs

*Passe Bas de Sallen-Key : exemple
filtre normalisé*



$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{q}} = 0.707$$

[PasseBasOrdre2_Normalise_Parfait.sch](#)

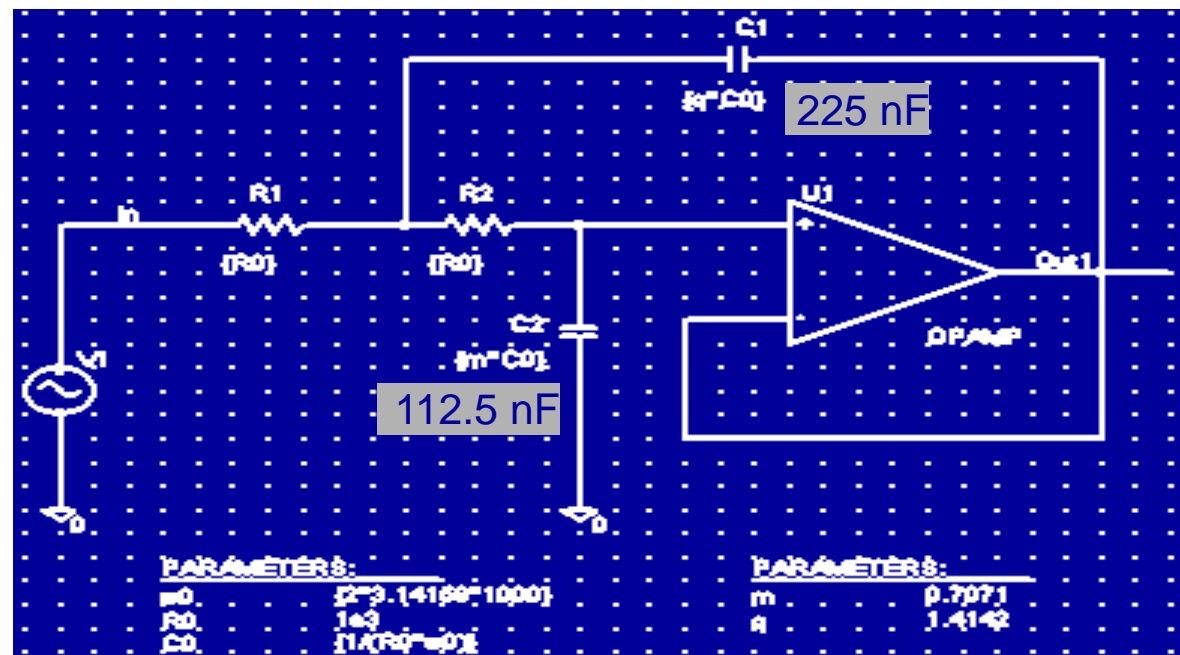


IX. Synthèse des Filtrés Actifs

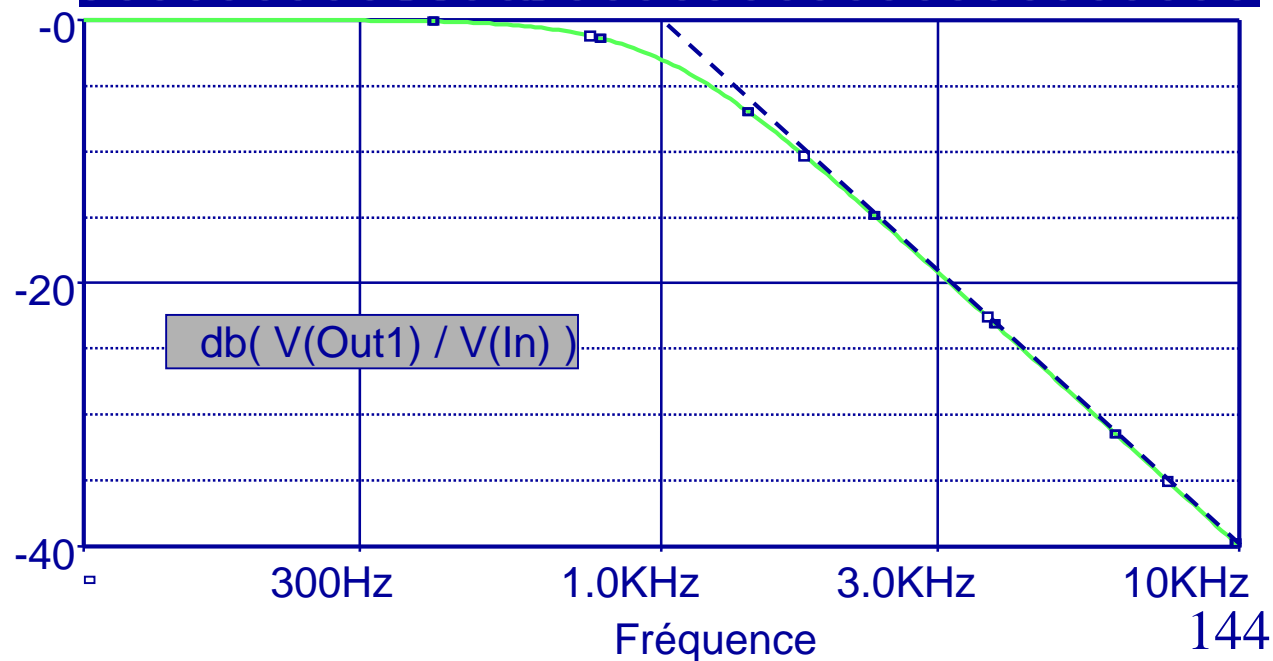
*Passe Bas de Salen-Key : exemple
filtre dénormalisé à $f_0 = 1$ kHz*

$$R_0 = 1k\Omega \quad \omega_0 = 2\pi 10^3$$

$$C_0 = \frac{1}{R_0 \omega_0} = 159nF$$



PasseBasOrdre2_Parfait.sch



Passe Bas de Sallen-Key : exemple

Passe Bas de Butterworth d'ordre 4

$$m_1 = 0.9238 ; q_1 = 1.0823$$

$$m_2 = 0.3826 ; q_2 = 2.6131$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{m_1}{q_1}} = 0.924$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{m_2}{q_2}} = 0.383$$

résonance

N	CIRCUIT	m	q	V _m	F _m	FONCTION DE TRANSMISSION
2	1	0.7071	1.4142	—	—	(P ² + 1.4142P + 1)
3	1 2	0.5000 1.0000	1.9999	1.15	0.707	(P ² + 1.0000P + 1) (P + 1)
4	1 2	0.9238 0.3826	1.0823 2.6131	— 1.41	— 0.840	(P ² + 1.8477P + 1) (P ² + 0.7653P + 1)
5	1 2 3	0.8090 0.3090 1.0000	1.2360 3.2360	— 1.70 —	— 0.899	(P ² + 1.6180P + 1) (P ² + 0.6180P + 1) (P + 1)
6	1 2 3	0.9659 0.7071 0.2588	1.0352 1.4142 3.8636	— — 1.99	— — 0.930	(P ² + 1.9318P + 1) (P ² + 1.4142P + 1) (P ² + 0.5176P + 1)
7	1 2	0.9009 0.6234	1.1099 1.6038	— 1.02	— 0.471	(P ² + 1.8019P + 1) (P ² + 1.2469P + 1)

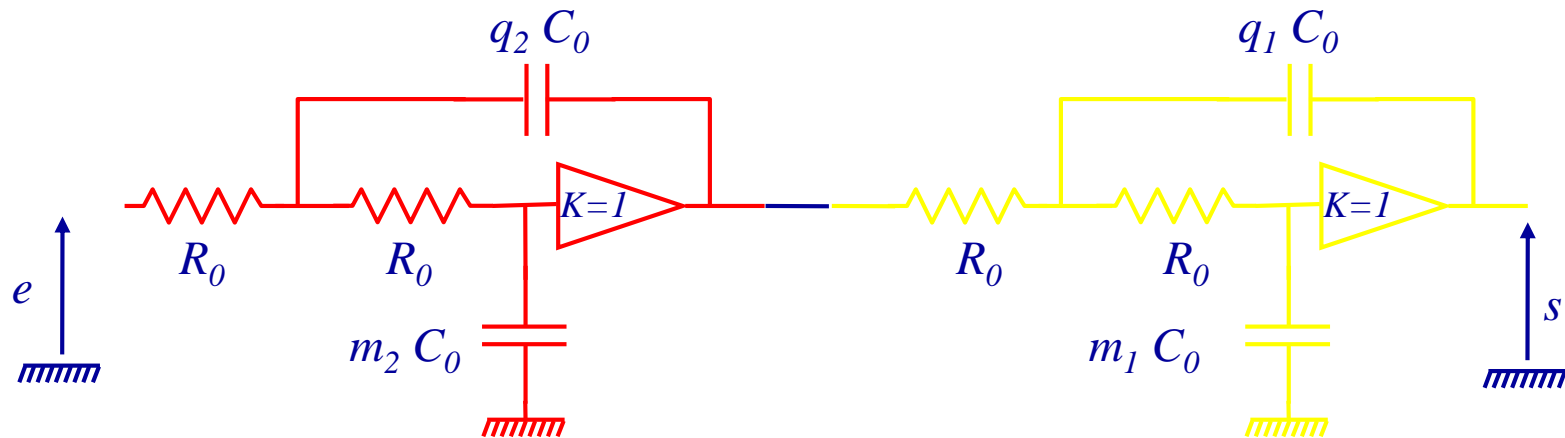
Tableau Bu 5. — Filtrés passe-bas et passe-haut de Butterworth. Valeur des éléments et des grandeurs de réglage.

$$G(\omega_r = 0.840 \omega_0) = V_m = 1.41$$

$$H = \frac{1}{p_n^2 + 1.8477 p_n + 1} \quad \frac{1}{p_n^2 + 0.7653 p_n + 1}$$

Passé Bas de Sallen-Key : exemple Passé Bas de Butterworth d'ordre 4

$$H = \frac{1}{p_n^2 + 0.7653 p_n + 1} \quad \frac{1}{p_n^2 + 1.8477 p_n + 1}$$



$$m_2 = 0.3826 ; q_2 = 2.6131$$

$$G(\omega_r = 0.840 \omega_0) = V_m = 1.41$$

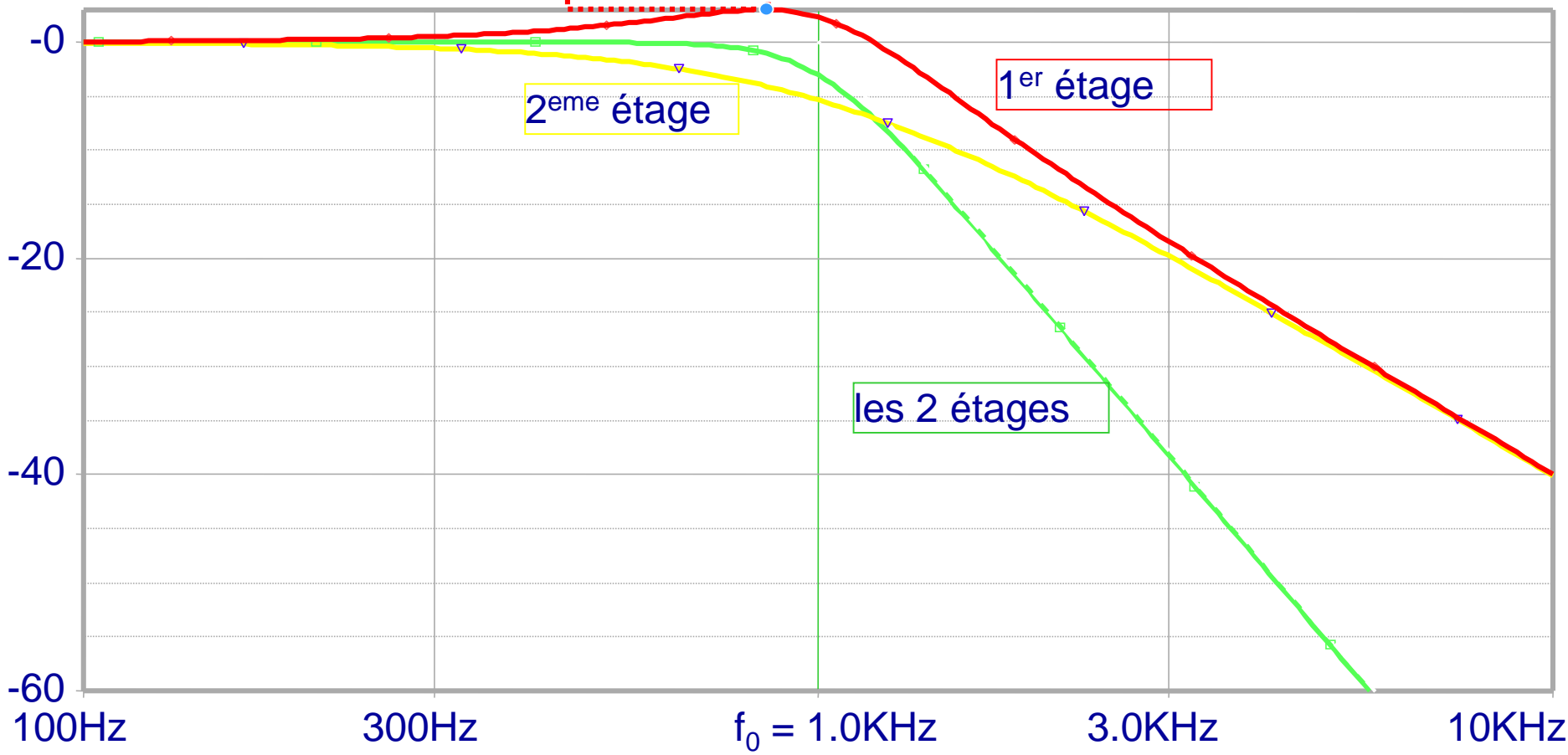
$$m_1 = 0.9238 ; q_1 = 1.0823$$

Passé Bas de Sallen-Key : exemple Passé Bas de Butterworth d'ordre 4

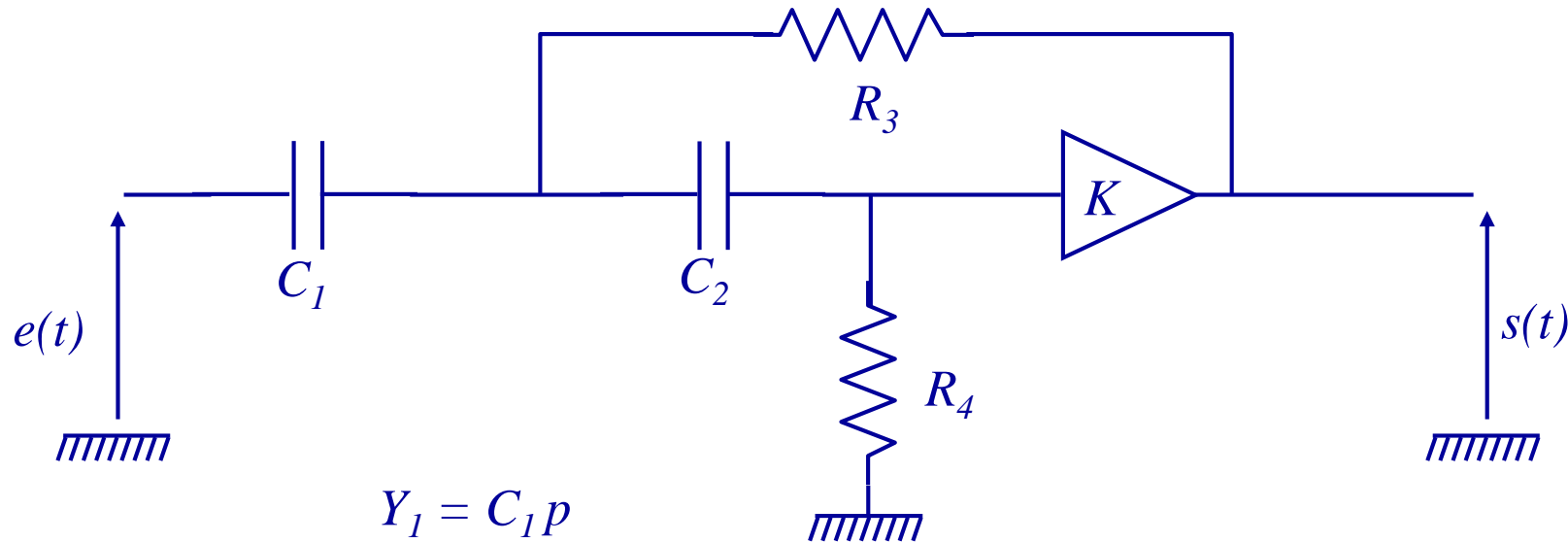
4	1	0.9238	1.0823	-	-	(P ² +1.8477P+1)
	2	0.3826	2.6131	1.41	0.840	(P ² +0.7653P+1)

$V_m = 1.41 = 3\text{dB}$

$f_r = 0.840 f_0$



Passe Haut de Sallen-Key



$$Y_1 = C_1 p$$

$$Y_2 = C_2 p$$

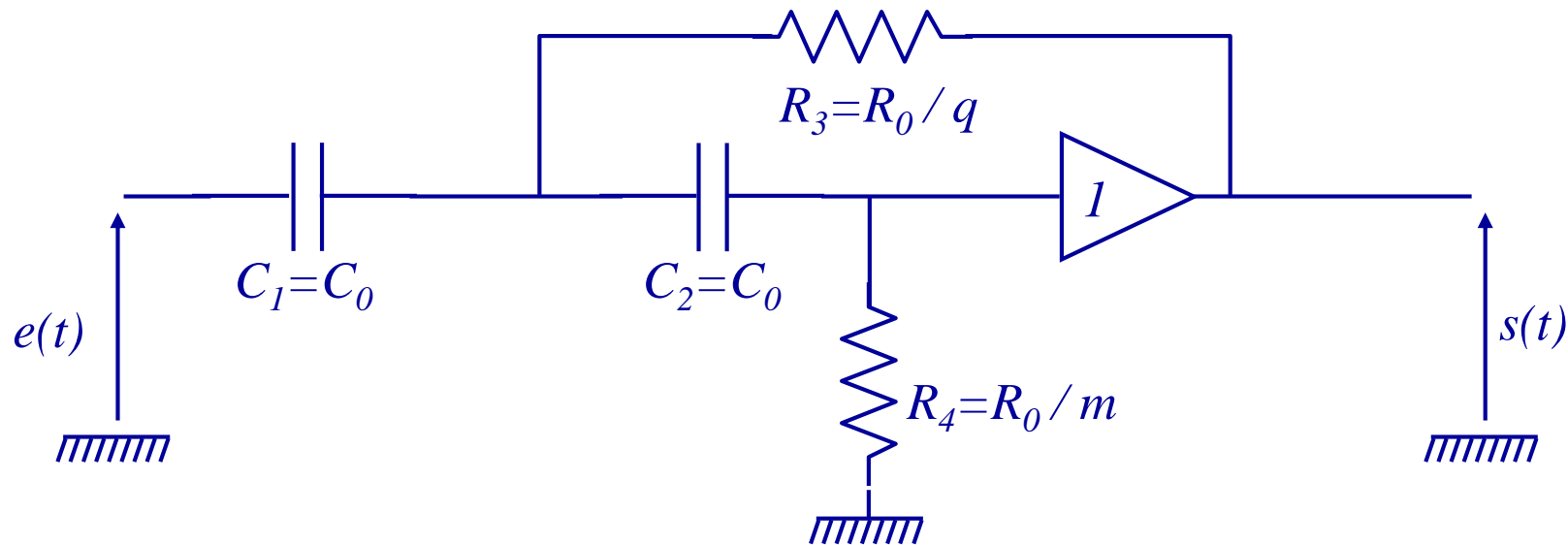
$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4$$

$$Z_5 = \infty$$

$$H = \frac{K R_3 R_4 C_1 C_2 p^2}{R_3 R_4 C_1 C_2 p^2 + [R_3 (C_1 + C_2) + C_2 (1 - K) R_4] p + 1}$$

Passe Haut de Salen-Key



$$C_1 = C_2 = C_0$$

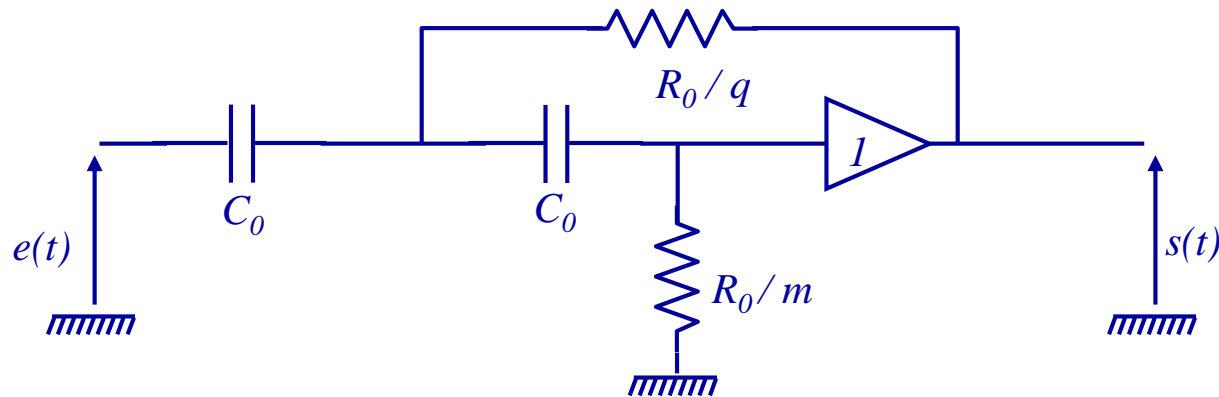
$$R_4 = R_0/m$$

$$R_3 = R_0/q$$

$$K=1$$

$$H = \frac{R_0^2 C_0^2 p^2 / (mq)}{R_0^2 C_0^2 p^2 / (mq) + 2 R_0 C_0 p / q + 1}$$

Passe Haut de Sallen-Key

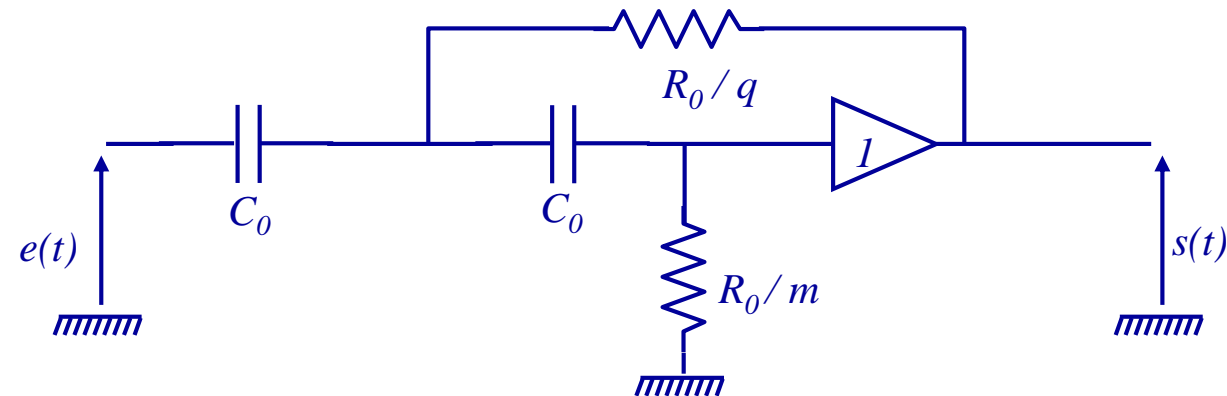


$$H = \frac{R_0^2 C_0^2 p^2 / (mq)}{R_0^2 C_0^2 p^2 / (mq) + 2 R_0 C_0 p / q + 1}$$

$$H = \frac{\frac{p^2}{\omega_N^2}}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

$$\omega_N = \frac{\sqrt{mq}}{R_0 C_0} \quad \zeta = \sqrt{\frac{m}{q}}$$

Passé Haut de Sallen-Key



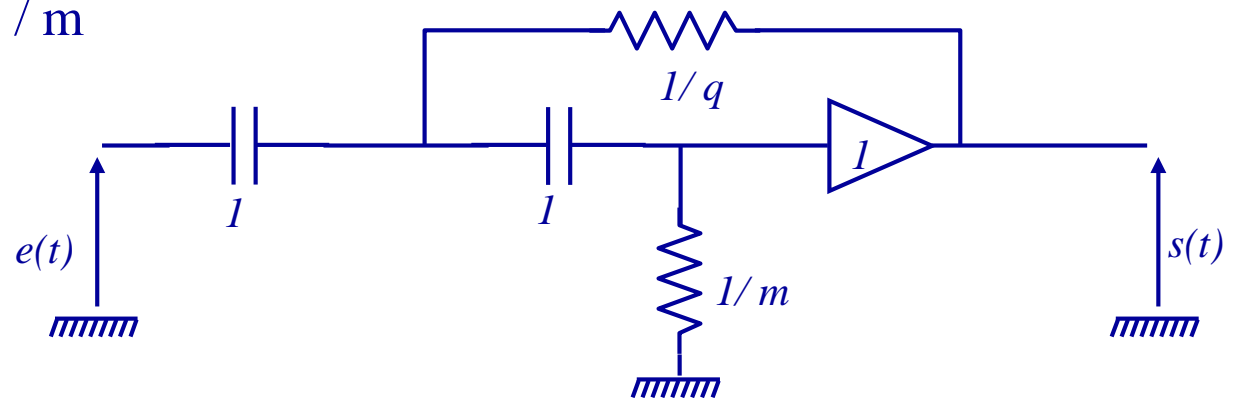
avec R_0 et $\omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$

$R_0 \longrightarrow 1$

$C_0 \longrightarrow 1$

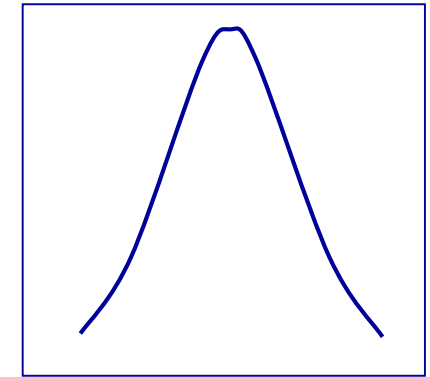
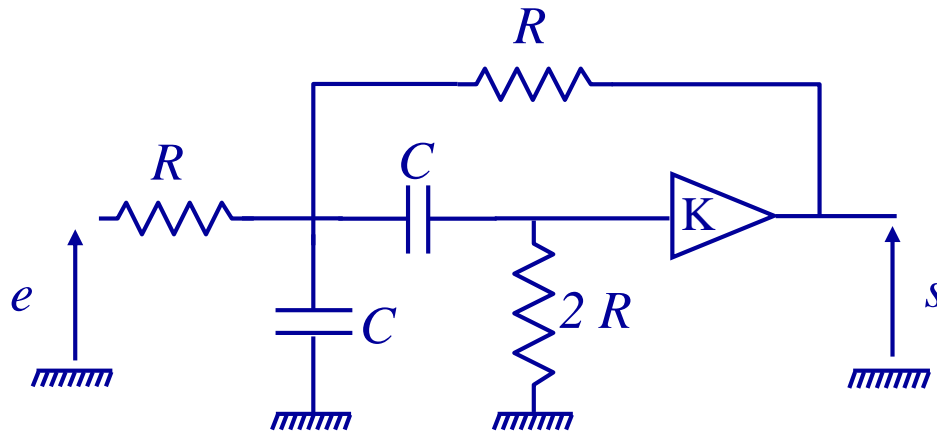
$R_0/q \longrightarrow 1/q$

$R_0/m \longrightarrow 1/m$



Passe Bande de Sallen-Key

2^{eme} ordre (mais pentes en $\pm 20\text{dB/dec}$)



$$H = \frac{K p / \omega_0}{p^2 / \omega_0^2 + 2\zeta p / \omega_0 + 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\zeta = \frac{3-K}{2}$$

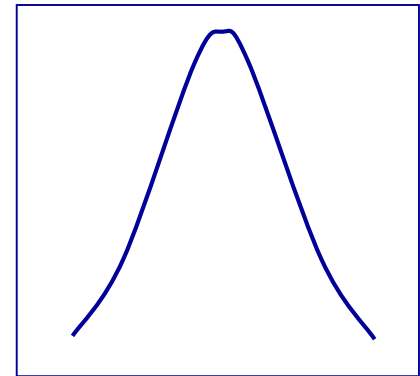
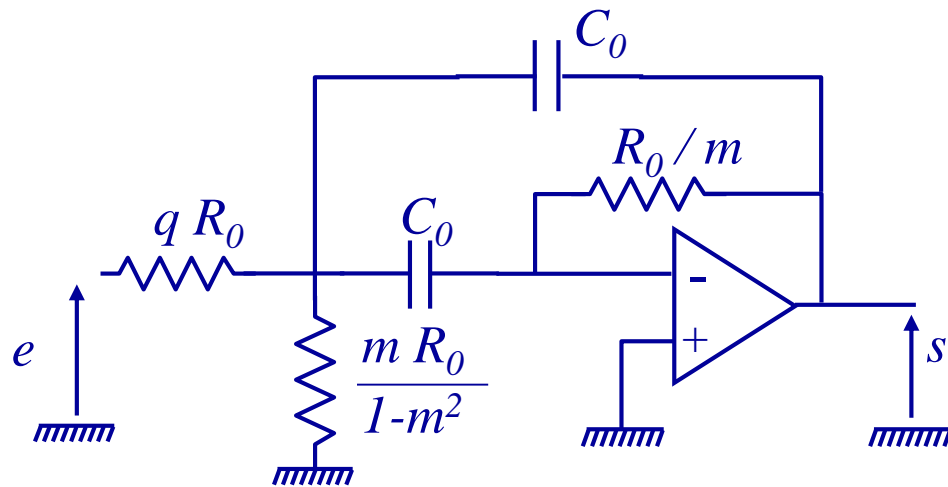
$$\text{Gain à } \omega_0 : G_0 = \frac{K}{3-K}$$

mais structure trop sensible aux écarts de valeur

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Passe Bande de Rauch

2^{eme} ordre (mais pentes en $\pm 20\text{dB/dec}$)



$$G_0 = \frac{1}{4}$$

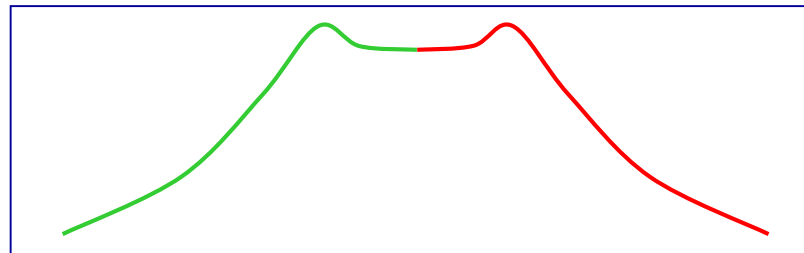
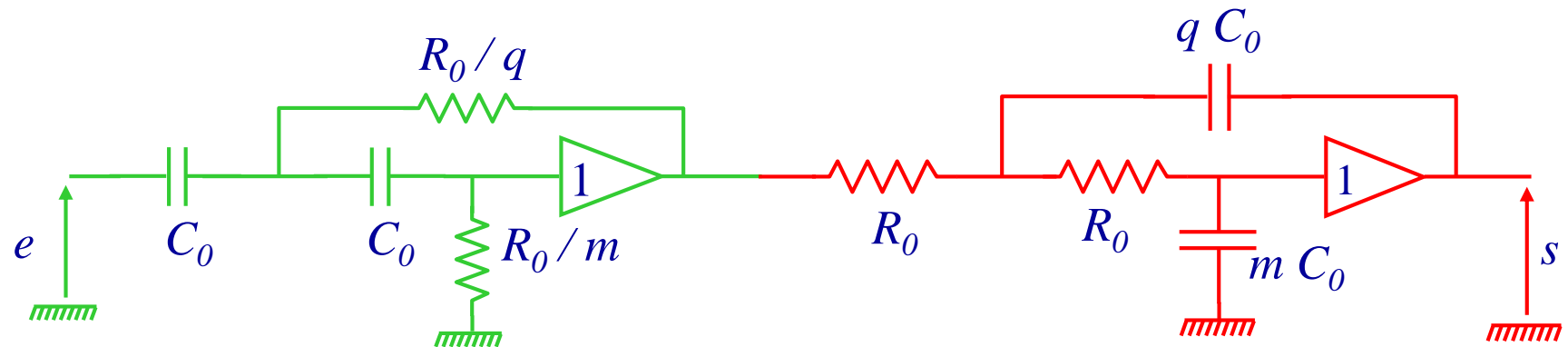
$$H = \frac{m p_n}{p_n^2 + 2m p_n + 1}$$

$$\zeta = m \quad \omega_N = 1$$

Passe Bande de Sallen-Key

4^{eme} ordre

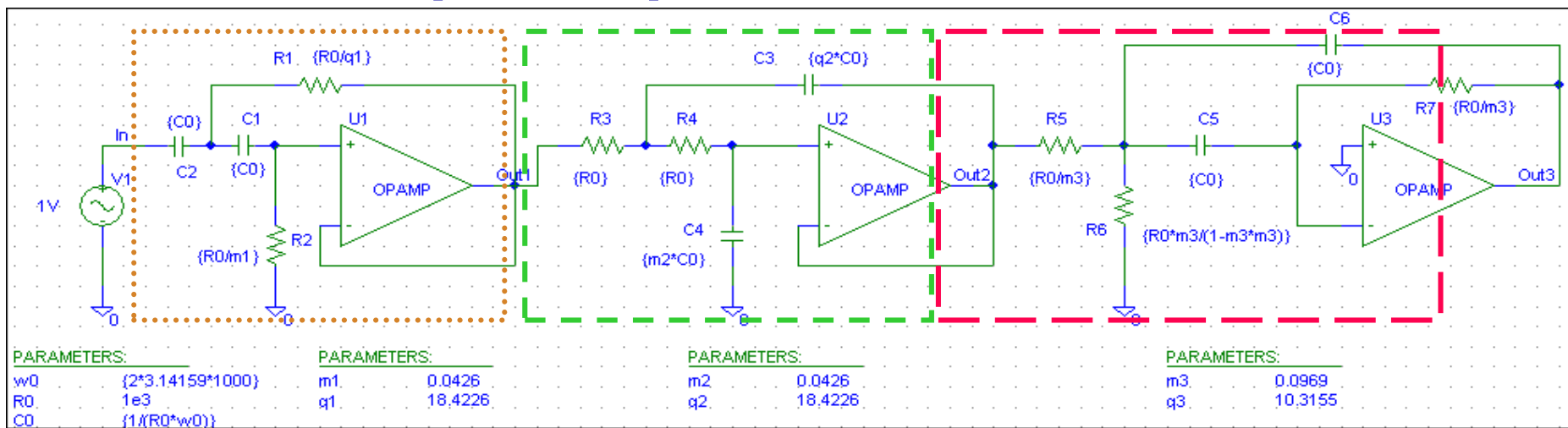
(pentes en $\pm 40\text{dB/dec}$)



IX. Synthèse des Filtrés Actifs

Exemple de Passe Bande : Chebychev Ordre 6 de bande relative de 20%
(pentes en $1/p^3$ 60dB/dec)

PasseBandeOrdre3 Chebychev 0.20 Parfait.sch

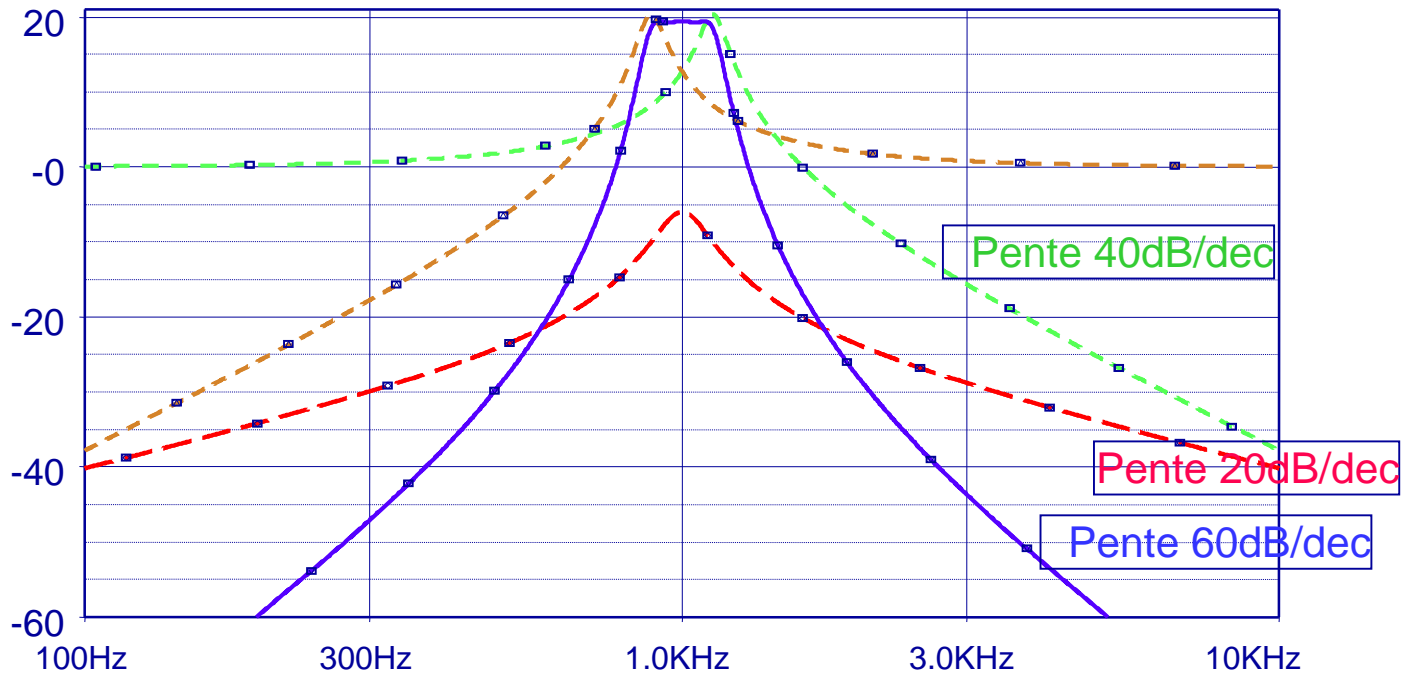


db(V(Out1)/V(In))

db(V(Out2)/V(Out1))

db(V(Out3)/V(Out2))

db(V(Out3)/V(In))



Rappel sur la sensibilité

Soit une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

la sensibilité notée $S_{x_i}^f$ vaut :

$$S_{x_i}^f = \frac{\partial f / f}{\partial x_i / x_i} = x_i \frac{\partial f / \partial x_i}{f} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(f)]$$

Elle représente la variation relative de la fonction f par rapport à la variation relative du paramètre x_i

exemple : $f(x,y) = x^2 + 3y$

$$S_x^f = \frac{\partial f / f}{\partial x / x} = x \frac{\partial f / \partial x}{f} = x \frac{2x}{x^2 + 3y}$$

$$S_y^f = \frac{\partial f / f}{\partial y / y} = y \frac{\partial f / \partial y}{f} = y \frac{3}{x^2 + 3y}$$

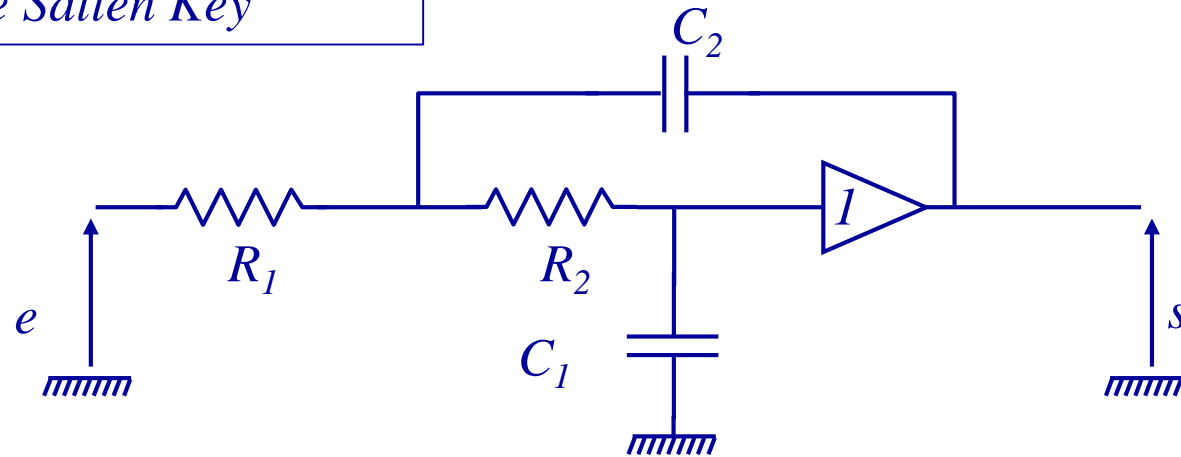
A.N : en $x=1$ et $y=1$

$$S_x^f = 0.5 \quad (50\%) \quad S_y^f = 0.75 \quad (75\%)$$

*si x varie 20% ($dx/x = 0.2$) alors f varie de $[dx/x] * [S_x]$ soit $0.2 * 0.5 = 0.1 = (10\%)$*

*si y varie 20% ($dy/y = 0.2$) alors f varie de $[dy/y] * [S_y]$ soit $0.2 * 0.75 = 0.15 = (15\%)$*

Sensibilité d'un filtre de Sallen Key

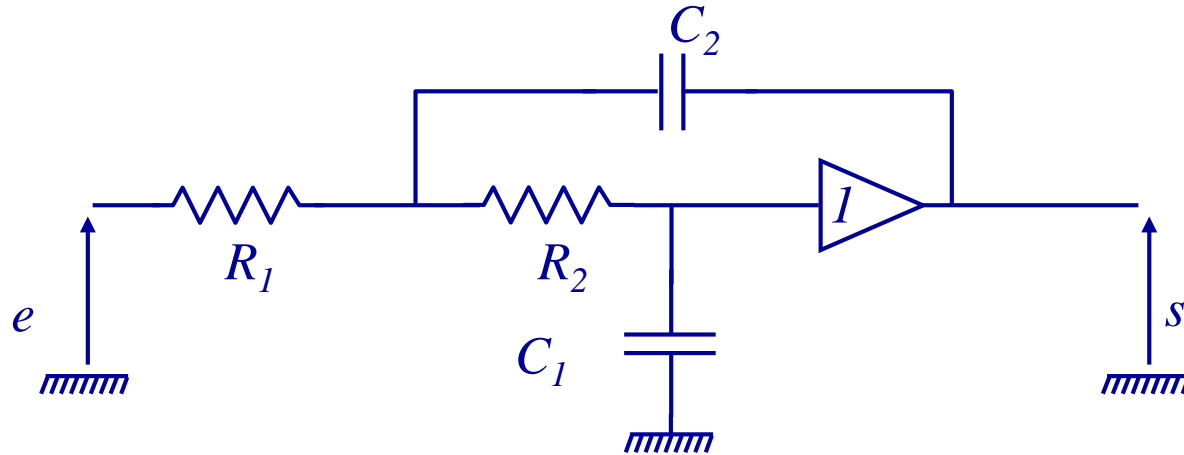


$$H = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 + [(R_1 + R_2) C_1] p + 1}$$

$$\omega_N = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\zeta = \frac{C_1 [R_1 + R_2]}{2 \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Sensibilité d'un filtre de Sallen Key



$$\omega_N = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\zeta = \frac{C_1 [R_1 + R_2]}{2 \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$S_{R_i}^{\omega_N} = \frac{\partial \omega_N / \omega_N}{\partial R_i / R_i} = R_i \frac{\partial}{\partial R_i} [\ln(\omega_N)]$$

$$S_{R_1}^{\omega_N} = R_1 \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right) \right] = -\frac{1}{2} R_1 \frac{\partial}{\partial R_1} [\ln(R_1 R_2 C_1 C_2)] = -\frac{1}{2} R_1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial R_1} [\ln(R_1)]}_{1/R_1} = -\frac{1}{2}$$

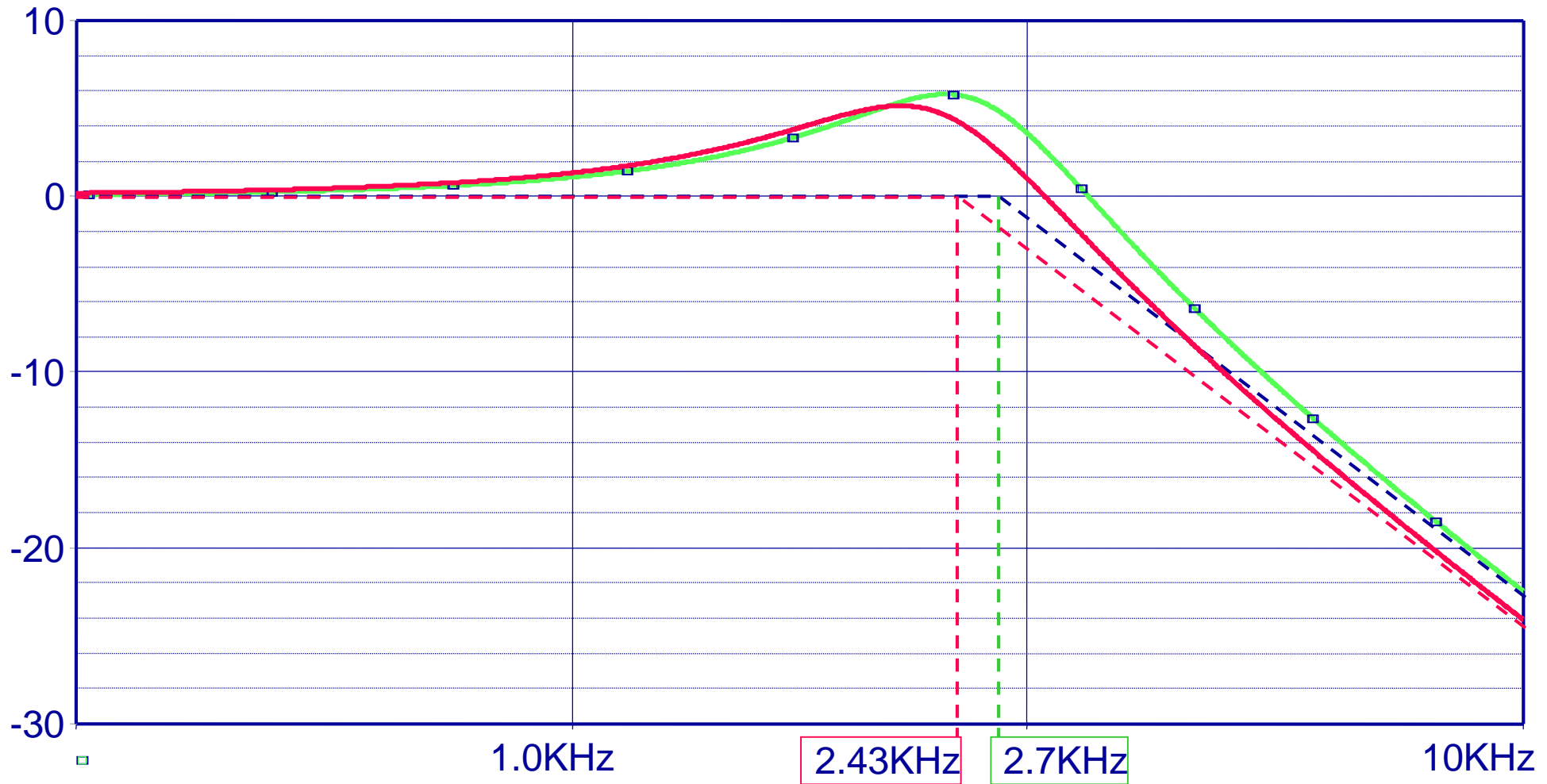
$$S_{R_2}^{\omega_N} = S_{C_1}^{\omega_N} = S_{C_2}^{\omega_N} = -\frac{1}{2}$$

IX. Synthèse des Filtrés Actifs

3°) Sensibilité

Sensibilité d'un filtre de Sallen Key

$$S_{C_1}^{\omega_N} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\delta C_1}{C_1} = 20\% \rightarrow \frac{\delta \omega_N}{\omega_N} = -10\%$$



Fréquence

Bibliographie

Analyse et synthèse des filtres actifs analogiques, Gérard Mangiante,
Ed. Lavoisier

(Bibliothèque Physique Enseignement 612.382 MAN)

Filtres actifs, P. Bildstein, Ed. de la radio

Mathématiques Générales, Jacques Velu, Ed. Dunod (équations différentielles)

(Bibliothèque Maths-Info Enseignement 03.5 VEL 03E)

Les Mathématiques en Licence, 1^{ère} année Tome 2, E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, Ed.
EdiScience (équations différentielles)

(Bibliothèque Maths-Info Enseignement 03.5 AZO 2(1).03Q)