

Mécanique des milieux continus

Tome III
Milieux curvilignes

Jean Salençon

NOUVELLE
ÉDITION





Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».

Cette pratique qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que la production et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites.

Les demandes d'autorisation de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie :

20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Du même auteur

Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols © Eyrolles - 1974 - 178 pages

Application of the theory of plasticity in soil mechanics

© John Wiley and Sons Ltd - 1977 - 158 pages - ISBN 0-47174984-2

Viscoélasticité - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées 1983 - 92 pages - ISBN 2-85978-051-3

Calcul à la rupture et analyse limite - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées
1983 - 366 pages - ISBN 2-85978-059-9

Élastoplasticité - (B. Halphen et J. Salençon)

© Presses de l'École nationale des ponts et chaussées - 1987 - 448 pages - ISBN 2-85978-094-7

Mécanique des milieux continus - © Ellipses - 1988

Tome 1 - Concepts généraux - 270 pages - ISBN 2-7298-8854-3

Tome 2 - Élasticité - Milieux curvilignes - 316 pages - ISBN 2-7298-8863-2

Mécanique du continu - © Ellipses - 1995

Tome 1 - Concepts généraux - 352 pages - ISBN 2-7298-4551-8

Tome 2 - Thermoélasticité - 286 pages - ISBN 2-7298-4565-8

Tome 3 - Milieux curvilignes - 192 pages - ISBN 2-7298-5527-0

Mécanique des milieux continus © Éditions de l'École polytechnique

Tome 1 - Concepts généraux - 2005 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8

Tome 2 - Thermoélasticité - 2007 - 314 pages - ISBN 978-2-7302-1419-3

Tome 3 - Milieux curvilignes - 2016 - 162 pages - ISBN 978-2-7302-1644-9

Handbook of Continuum Mechanics © Springer 2001 - 804 pages - ISBN 3-540-41443-6

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture © Éditions de l'École polytechnique

2002 - 262 pages - ISBN 978-2-7302-0915-1

Viscoélasticité pour le calcul des structures © Éditions de l'École polytechnique et Presses de l'École nationale des ponts et chaussées 2009 - 158 pages - ISBN 978-2-7302-1557-2

Yield Design © ISTE – Wiley (London, UK; Hoboken, NJ), 2013 - 240 pages - ISBN 978-1-84821-540-5

Mécanique des milieux continus

Tome I. Concepts généraux

Avant-propos

Chapitre I. *Le milieu continu : une modélisation*

Chapitre II. *Étude des déformations du milieu continu*

Chapitre III. *Cinématique du milieu continu*

Chapitre IV. *Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts*

Chapitre V. *Modélisation des efforts pour le milieu continu*

Chapitre VI. *Étude des contraintes*

Annexe I. *Éléments de calcul tensoriel*

Annexe II. *Opérateurs différentiels : formules essentielles*

Bibliographie

Index alphabétique

Tome II. Thermoélasticité

Chapitre VII. *Le comportement thermoélastique*

Chapitre VIII. *Évolutions et équilibres thermoélastiques*

Chapitre IX. *Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle*

Chapitre X. *Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée*

Annexe III. *Éléments d'élasticité plane*

Bibliographie

Index alphabétique

Tome III. Milieux curvilignes

Chapitre XI. *Statique des milieux curvilignes*

Chapitre XII. *Structures curvilignes thermoélastiques*

Glossaire

Bibliographie

Index alphabétique

Sommaire

XI	Statique des milieux curvilignes	7
1	Problématique d'une modélisation unidimensionnelle	15
2	Statique des fils	18
3	Statique des poutres	30
4	Structures formées d'éléments curvilignes	52
	Récapitulatif des formules essentielles	69
	Exercices	72
XII	Structures curvilignes thermoélastiques	85
1	Problématique	91
2	Comportement thermoélastique du milieu curviligne	92
3	Équilibre thermoélastique linéarisé des structures curvilignes	105
4	Exemples d'applications	111
5	Conclusion	116
	Récapitulatif des formules essentielles	117
	Exercices	119
	Glossaire	128
	Bibliographie	137
	Index alphabétique	147

Chapitre XI

Statique des milieux curvilignes

MOTS CLÉS

Solide élancé. Milieu curviligne. Courbe directrice.
Statique des fils. Tension.
Section transversale. Microstructure.
Statique des poutres.
Distributeurs des vitesses des particules.
Torseurs des efforts extérieurs.
Torseurs des efforts intérieurs.
Effort normal. Effort tranchant.
Moment de torsion. Moment fléchissant.
Condition de NAVIER-BERNOULLI.
Extrémités. Appuis. Assemblages.
Isostaticité. Hyperstaticité. Hypostaticité.

En bref...

De nombreuses structures utilisées dans la pratique industrielle sont constituées d'éléments élancés. Cette particularité géométrique suggère la mise en œuvre d'une modélisation unidimensionnelle rattachée à une *courbe directrice* pour l'analyse de ce type d'éléments (section 1).

Dans une première approche par la méthode des puissances virtuelles, le système est modélisé géométriquement comme un ensemble de particules définies uniquement par leur position (abscisse curviligne) sur la courbe directrice. Un mouvement réel du système est ainsi décrit par le champ des vitesses de ces particules dans la configuration actuelle. Les mouvements virtuels considérés sont définis de façon semblable et cohérente pour l'application de la méthode : pour chacun d'eux on se donne un champ de vecteurs continu et continûment différentiable sur la courbe directrice dans la configuration actuelle. La modélisation des efforts extérieurs est constituée de forces concentrées exercées aux extrémités et en un nombre discret de points sur le système, et de forces linéiques réparties sur la courbe directrice. La construction de la modélisation conduit à la représentation des efforts intérieurs par un *champ scalaire* que l'on identifie comme la *tension* du milieu curviligne. Les efforts intérieurs sont des efforts de contact entre deux particules adjacentes du système ; ils sont réductibles à une force tangente à la courbe directrice au point considéré et dont l'intensité est la tension en ce point. Ce modèle est pertinent, de façon générale, pour l'étude de la *statique des fils* et des câbles sans raideur. Il s'applique aussi aux poutres et aux arcs, lorsque la géométrie de la courbe directrice et le chargement imposé satisfont des conditions de compatibilité (section 2).

Pour rendre compte de la « raideur » des éléments tridimensionnels élancés, la modélisation unidimensionnelle doit être enrichie. Le système étudié est alors modélisé comme un ensemble de particules définies par leur position géométrique sur la courbe directrice et par l'*orientation* d'une *microstructure transversale* attachée à chacune d'elles : le mouvement réel est décrit par le champ de distributeurs défini en chaque point de la courbe directrice dans sa configuration actuelle par le mouvement rigidifiant de la particule orientée ainsi constituée. Les mouvements virtuels considérés sont définis de façon semblable : pour chacun d'eux on se donne un *champ de distributeurs*, continu et continûment différentiable, sur la courbe direc-

trice dans la configuration actuelle. Les efforts extérieurs sont modélisés par des torseurs appliqués aux extrémités et en un nombre discret de points du système et par une densité linéique de torseurs sur la courbe directrice. Les efforts intérieurs sont des efforts de contact, représentés par un *champ de torseurs* défini sur la courbe directrice.

Entre deux particules adjacentes du système, des efforts de contact sont réductibles au torseur d'efforts intérieurs. La terminologie classique utilisée pour les éléments de réduction de ce torseur au point courant de la courbe directrice se réfère à la microstructure transversale, *section droite*, dont elle reflète le rôle essentiel dans la transmission des efforts de contact, et à la courbe directrice elle-même qui rappelle que c'est l'*élancement* du solide tridimensionnel étudié qui motive la modélisation unidimensionnelle : *effort normal*, *effort tranchant*, *moment de torsion*, *moment fléchissant*. La confrontation de cette modélisation avec celle du milieu continu tridimensionnel classique permet d'explicitier le champ des efforts intérieurs dans le milieu curviligne en fonction du champ des contraintes dans le solide tridimensionnel élancé.

Une attention particulière est portée aux mouvements virtuels satisfaisant la condition de *Navier-Bernoulli* qui lie le mouvement de la microstructure transversale à celui de la courbe directrice, en raison de leur intervention fréquente dans les lois de comportement couramment utilisées pour les milieux curvilignes. On remarque que la *contribution de l'effort tranchant* dans la puissance virtuelle des efforts intérieurs est *nulle* pour de tels mouvements (section 3).

L'analyse des structures nécessite la définition des conditions d'extrémités, d'appuis, et d'assemblages pour les éléments constitutifs. *L'intégration explicite* des équations d'équilibre met en évidence qu'en l'absence d'appuis continus le *degré d'hyperstaticité* des structures ainsi modélisées est toujours fini. S'il est supérieur ou égal à 1, la structure est hyperstatique. Pour un problème donné, l'existence d'une solution d'équilibre nécessite que les données sur les efforts extérieurs soient compatibles avec l'équilibre global et avec les conditions d'assemblages. Du point de vue cinématique, l'intégration d'un champ de taux de déformation sur chaque élément constitutif est toujours possible; la compatibilité géométrique impose le respect des conditions d'assemblages. Pour être cinématiquement admissible, le mouvement virtuel de la structure doit, en outre, respecter les conditions d'appuis.

Principales notations

Notation	Signification	1 ^{ère} formule
AB	arc de courbe directrice : description géométrique de \mathcal{S}	(2.1)
s	abscisse curviligne du point courant P	(2.1)
$\underline{R}_A, \underline{R}_B$	forces extérieures appliquées aux extrémités de \mathcal{S}	(2.1)
$\underline{f}(s)$	densité linéique de forces extérieures	(2.1)
$A'B'$	description géométrique de \mathcal{S}'	(2.3)
$\underline{R}_{A'}^{S'}, \underline{R}_{B'}^{S'}$	forces extérieures appliquées aux extrémités de $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$	(2.3)
$\underline{t}(s)$	vecteur unitaire tangent à la courbe directrice	(2.9)
$X(s)$	tension du milieu curviligne en P	(2.12)
$\hat{D}(s)$	taux d'extension virtuel de la courbe directrice	(2.13)
\underline{F}_i	force extérieure concentrée	(2.25)
$\{\mathbb{U}\}$	champ de distributeurs d'un mouvement réel sur AB	(3.1)
$\underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)$	éléments de réduction en P du distributeur $\{\mathbb{U}(s)\}$	(3.1)
$\hat{\mathbb{U}}$	mouvement virtuel	(3.2)
$[\mathbf{f}(s)]$	densité linéique de torseurs d'efforts extérieurs	(3.4)
$\underline{m}(s)$	densité linéique de moments extérieurs	(3.4)
$\underline{H}_A, \underline{H}_B$	moments extérieurs appliqués aux extrémités de \mathcal{S}	(3.6)
$[\mathbb{R}_A], [\mathbb{R}_B]$	torseurs d'efforts extérieurs appliqués aux extrémités de \mathcal{S}	(3.7)

Principales notations

Notation	Signification	1 ^{ère} formule
$[\mathbb{R}_{A'}^{S'}], [\mathbb{R}_{B'}^{S'}]$	torseurs d'efforts extérieurs appliqués aux extrémités de $S' \subset \mathcal{S}$	(3.10)
$\underline{H}_{A'}^{S'}, \underline{H}_{B'}^{S'}$	moments extérieurs appliqués aux extrémités de $S' \subset \mathcal{S}$	(3.10)
$\{\hat{\mathbb{D}}(s)\}$	taux de déformation virtuel du milieu curviligne en P	(3.14)
$[\mathbb{X}(s)]$	torseur d'efforts intérieurs en P	(3.15)
$\underline{\mathcal{X}}(s), \underline{\Gamma}(s)$	éléments de réduction de $[\mathbb{X}(s)]$ en P	(3.19)
$[\mathbb{F}_i]$	torseur d'efforts extérieurs concentrés	(3.38)
$N(s)$	effort normal en P	(3.48)
$\underline{V}(s)$	effort tranchant en P	(3.48)
$\mathcal{C}(s)$	moment de torsion en P	(3.49)
$\underline{\mathcal{M}}(s)$	moment fléchissant en P	(3.49)
$\hat{\Omega}_t(s)$	composante de $\hat{\underline{\Omega}}(s)$ selon $\underline{t}(s)$	(3.70)
$V(s), M(s)$	effort tranchant, moment fléchissant pour un élément plan chargé dans son plan	(4.30)

1	Problématique d'une modélisation unidimensionnelle . .	15
2	Statique des fils	18
2.1	Modélisation géométrique. Mouvements réels	18
2.2	Espace vectoriel des mouvements virtuels	19
2.3	Puissance virtuelle des efforts extérieurs	19
2.4	Puissance virtuelle des efforts intérieurs	20
2.5	Équations d'équilibre	22
2.6	Cohérence du modèle. Interprétation physique	23
2.7	Discontinuités du champ d'efforts intérieurs	25
2.8	Intégration des équations d'équilibre	26
2.9	Discontinuités du champ de vitesse virtuel	27
2.10	Pertinence du modèle	28
3	Statique des poutres	30
3.1	Idées directrices de la modélisation	30
3.2	Modélisation géométrique. Mouvements réels	31
3.3	Espace vectoriel des mouvements virtuels	32
3.4	Puissance virtuelle des efforts extérieurs	33
3.5	Puissance virtuelle des efforts intérieurs	34
3.6	Équations d'équilibre	36
3.7	Cohérence du modèle ; interprétation physique	38
3.8	Discontinuités du champ d'efforts intérieurs	39
3.9	Intégration des équations d'équilibre	41
3.10	Discontinuités du mouvement virtuel	41
3.11	Pertinence du modèle	42
3.12	Confrontation de la modélisation curviligne et de la modélisation tridimensionnelle	45
3.13	Condition de Navier-Bernoulli	48
3.14	Poutres et arcs, fils et câbles	51
4	Structures formées d'éléments curvilignes	52
4.1	Présentation	52
4.2	Conditions d'extrémités, conditions d'appuis	53
4.3	Conditions aux nœuds d'assemblage	57
4.4	Assemblages et appuis	61
4.5	Analyse statique des structures	62
4.6	Analyse cinématique des structures	64
4.7	Structures planes chargées dans leur plan	65
	Récapitulatif des formules essentielles	69
	Exercices	72

Statique des milieux curvilignes

1 Problématique d'une modélisation unidimensionnelle

On se propose de présenter maintenant deux approches de la modélisation *unidimensionnelle* des milieux continus. Le point de départ de cette théorie des *milieux curvilignes* est évidemment géométrique, fondé sur la constatation que de nombreux solides utilisés comme éléments de structures dans la pratique des constructions (civiles, industrielles, navales, aéronautiques, etc.) ont une forme élancée (figure 1) : ceci conduit à imaginer d'en faire l'étude mécanique sur une géométrie unidimensionnelle définie par une *courbe directrice*.

Si l'on dit parfois qu'une telle description est « moins fine » que celle du même solide dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, cette affirmation géométriquement justifiée n'implique aucun jugement de valeur quant à la pertinence de la modélisation concernée. Celle-ci ne peut être estimée que sous l'angle de l'adéquation du modèle aux applications que l'on veut en faire.

La notion intuitive du milieu curviligne est ainsi initialement liée à celle de solide tridimensionnel *élancé*. On définira ici un tel solide par le fait que l'on peut y tracer une courbe (à tangente continue, ou continue par morceaux) telle que le diamètre maximal de la section du solide normalement à cette courbe soit petit devant la dimension longitudinale caractéristique. Toutefois, rien n'interdit d'imaginer de construire une modélisation unidimensionnelle pour un solide tridimensionnel sans caractéristique géométrique particulière, mais la validation d'une telle modélisation par les résultats auxquels elle permet d'aboutir montre que ce n'est que dans la mesure où l'hypothèse d'élancement est satisfaite, avec des conditions de chargement et d'appui (conditions aux limites) convenables, que l'on peut raisonnablement espérer obtenir ainsi des résultats acceptables.

Un problème essentiel quant à l'application de ce modèle à la réalité d'un solide tridimensionnel sera de situer de façon pertinente, la courbe directrice dans la géométrie tridimensionnelle du solide étudié. Même pour les solides élancés le problème se pose, encore qu'il soit parfois occulté par la façon dont ces éléments de structures sont décrits géométriquement. En effet la courbe introduite dans la définition donnée plus haut d'un solide élancé n'est évidemment pas unique : s'il paraît naturel que la modélisation « milieu curviligne » soit faite en se rapportant à une telle courbe, rien ne permet a priori d'en fixer le choix. La démarche adoptée dans la présentation de ce chapitre considère cette ligne comme une donnée dans la configuration actuelle, sur laquelle on procède à la construction de la modélisation. Le problème du positionnement de la courbe directrice dans le solide tridimensionnel sera abordé au chapitre

suivant, car il est notamment lié à l'écriture de la loi de comportement de l'élément de milieu curviligne.

Comme au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel, l'outil de base dans la construction d'une telle modélisation est la méthode des puissances virtuelles. On appliquera la méthode à deux reprises : une première approche, inspirée directement de la démarche suivie pour la modélisation du milieu continu tridimensionnel, aboutira à une modélisation des efforts intérieurs qui convient dans la pratique pour écrire la statique des fils et des câbles sans raideur. Une seconde approche, plus large, permettra de modéliser les solides élancés qui résistent à des sollicitations de flexion, torsion, etc., tels que les poutres et les arcs.

Le lien entre les modélisations ainsi construites pour le milieu curviligne et celle établie au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel, où les efforts intérieurs sont représentés par le champ de contrainte, sera fait au paragraphe 3.12.

Sur les bases posées on développera au chapitre suivant une première approche de la théorie des milieux curvilignes élastiques en introduisant la loi de comportement élastique pour ces milieux qui résulte

- soit d'expériences directes sur ce type d'éléments structuraux,
- soit de la loi de comportement du matériau constitutif dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, en utilisant les solutions connues des problèmes simples relatifs aux barres cylindriques étudiées dans les chapitres VIII et IX.

Cette présentation répond à un triple objectif :

- en raison de son importance pratique évidente, donner une introduction à la théorie des milieux curvilignes sans rentrer dans le détail des applications qui font l'objet de nombreux ouvrages plus spécialisés ;
- mettre en évidence, sur un exemple aisément perceptible et concret, la nécessité de construire une modélisation pour le milieu continu unidimensionnel qui se révèle être l'homologue des milieux continus tridimensionnels non classiques, de type micropolaire, présentés au chapitre V (§ 5.3), dont les éléments constitutifs ne peuvent plus être considérés comme de simples « points matériels » ;
- à cette occasion, illustrer à la fois l'efficacité et le caractère systématique de la méthode des puissances virtuelles pour la modélisation des efforts.

On se limitera au point de vue de la **statique**, c'est-à-dire que l'on ne se préoccupera pas de l'expression de la puissance virtuelle des quantités d'accélération puisque sa valeur sera supposée identiquement nulle.

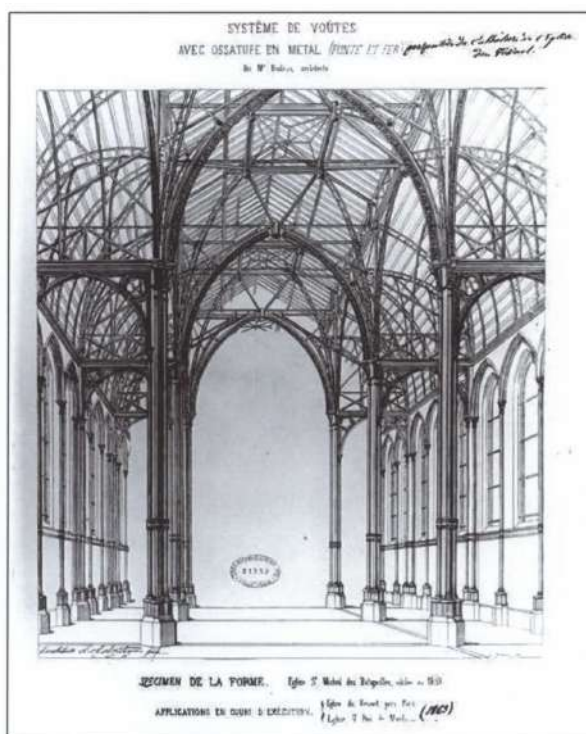


Figure 1 – <https://materiauxenarchitecturemoderne.wordpress.com>

- Viaduc du Viaur (1895-1902). Paul Bodin. En acier (3800 t), d'une portée de 460 m, culmine à 116 m au-dessus du Viaur (Tarn, France).
- Système de voutes avec ossature de métal – fer et fonte – (1862-1865). Louis-Auguste Boileau.

2 Statique des fils

2.1 Modélisation géométrique. Mouvements réels

On se propose d'abord de construire, sur la courbe directrice plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 , la modélisation unidimensionnelle d'un milieu continu homologue de celle établie au chapitre V (section 3) pour le milieu continu tridimensionnel « classique ».

La courbe directrice donnée dans sa configuration actuelle κ_t est munie d'une orientation (sens de parcours); une origine O étant choisie, s désigne l'abscisse curviligne du point courant.

Du point de vue physique, l'objectif de la modélisation en cours consiste en quelque sorte à « écraser » un élément tridimensionnel élané sur sa courbe directrice. Du point de vue géométrique, cela conduit à considérer que le système unidimensionnel est, à son tour, constitué de particules P , **points matériels** « *dilués* » (cf. chapitre I, § 2.1) de longueur ds , caractérisées par leur position sur la courbe directrice repérée par l'abscisse curviligne s .

Un système \mathcal{S} est défini comme l'ensemble des particules qui occupent un arc AB sur la courbe directrice. Par convention, A et B sont typiquement l'origine et l'extrémité du système : $s_A < s_B$.

Un sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S} est constitué des particules de \mathcal{S} qui occupent un segment $A'B'$ découpé par la pensée, dans l'arc AB : $s_A < s_{A'} < s_{B'} < s_B$ (Figure 2). L'extérieur de \mathcal{S}' dans \mathcal{S} , noté $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$, est donc défini sur la courbe directrice par $s_A \leq s < s_{A'}$ et $s_B \geq s > s_{B'}$.

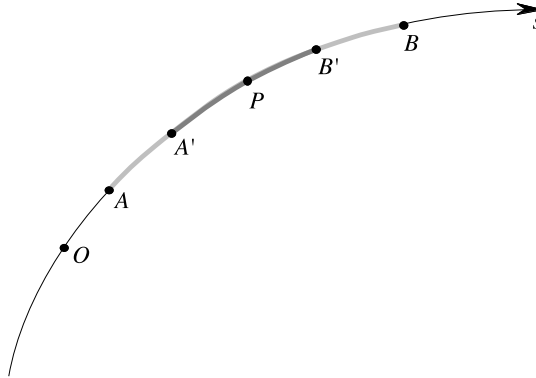


Figure 2 – Description géométrique d'un milieu curviligne

L'évolution géométrique à l'instant t du milieu unidimensionnel ainsi défini est caractérisée par l'évolution des positions géométriques des particules du système, c'est-à-dire par le champ des vitesses \underline{U} de \mathbb{R}^3 , fonction de s . La continuité du milieu exprime, ici encore, que des particules voisines à l'instant t demeurent voisines au cours de l'évolution. Le champ \underline{U} est supposé continu, continûment différentiable par morceaux, sur AB . (À noter que la continuité par morceaux a peu de sens physique ici).

2.2 Espace vectoriel des mouvements virtuels

L'espace vectoriel des mouvements virtuels de \mathcal{S} considérés pour la construction de la modélisation des efforts est défini par les champs de vecteurs $\hat{\underline{U}}$ de \mathbb{R}^3 , continus et continûment différentiables sur AB . Comme dans les constructions précédentes (chapitre V) on procédera ensuite, une fois la modélisation établie, à son extension au cas des mouvements virtuels définis par des champs $\hat{\underline{U}}$ continus et continûment différentiables par morceaux (§ 2.9).

Pour un sous-système \mathcal{S}' les mouvements virtuels sont définis de la même façon par des champs de virtuels $\hat{\underline{U}}$ continus et continûment différentiables par morceaux sur $A'B'$.

2.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Système \mathcal{S}

De la même façon qu'au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel, on suppose que la puissance virtuelle des efforts extérieurs à \mathcal{S} résulte de deux contributions :

- d'une part, un terme « de volume » qui correspond à des **forces réparties** définies sur AB par une **densité linéique** $\underline{f}(s)$; la force « élémentaire » répartie est donc, pour l'élément ds , égale à $\underline{f}(s) ds$;
- d'autre part, un terme « de contour », au bord du système \mathcal{S} sur la courbe directrice, qui correspond à des **forces concentrées** exercées aux extrémités A et B , notées \underline{R}_A et \underline{R}_B .

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit ainsi pour \mathcal{S} :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{AB} \underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds + \underline{R}_A \cdot \hat{\underline{U}}(s_A) + \underline{R}_B \cdot \hat{\underline{U}}(s_B). \end{array} \right.$$

Sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S}

Pour un sous-système quelconque \mathcal{S}' de \mathcal{S} on suppose que les efforts extérieurs, c'est-à-dire exercés sur \mathcal{S}' par l'extérieur de \mathcal{S}' , y compris $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$, sont de même nature.

- Les **forces réparties** sont définies, en chaque point P de $A'B'$, par la densité linéique $\underline{f}^{\mathcal{S}'}(s)$. On construit la modélisation en faisant l'**hypothèse** que

$$(2.2) \quad \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \underline{f}^{\mathcal{S}'}(s) \equiv \underline{f}(s),$$

c'est-à-dire que $\underline{f}^{\mathcal{S}'}(s)$ est indépendant du sous-système considéré : il n'y a **pas d'action à distance** entre les particules du système.

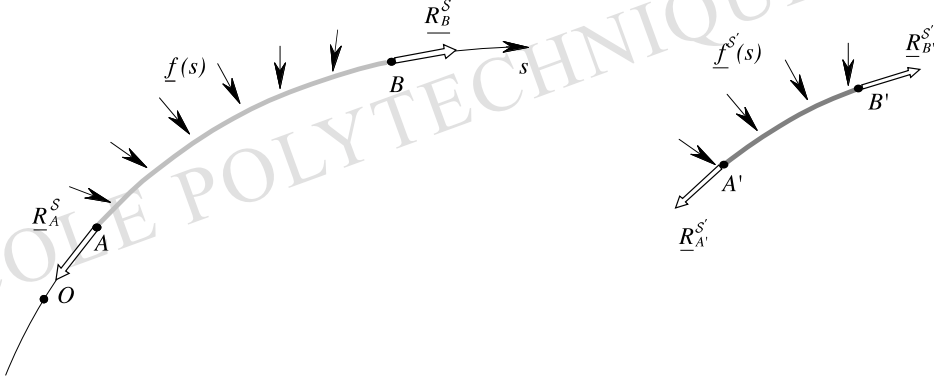


Figure 3 – Efforts extérieurs sur le système et sur un sous-système

- Aux extrémités A' et B' les **forces concentrées** exercées sont $\underline{R}_{A'}^{S'}$ et $\underline{R}_{B'}^{S'}$.
La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit ainsi pour S' :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S' \subset S, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{A'B'} \underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds + \underline{R}_{A'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{A'}) + \underline{R}_{B'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{B'}) . \end{array} \right.$$

Malgré la similitude des notations entre les formules (2.1) et (2.3), dont on profitera dans la suite, on rappelle la différence de points de vue entre \underline{R}_A et \underline{R}_B d'une part, $\underline{R}_{A'}^{S'}$ et $\underline{R}_{B'}^{S'}$ de l'autre (cf. chapitre V, § 2.2) : les premières sont des données au contour, les secondes seront déterminées par la modélisation achevée.

Torseur des efforts extérieurs au système ou à un sous-système

L'identification du torseur des efforts extérieurs à un sous-système S' est immédiate. On a ainsi, profitant de la similitude des notations, pour S' et S lui-même :

$$(2.4) \quad [\mathcal{F}'_e] = [O, \underline{F}'_e, \underline{C}'_0]$$

avec

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{F}'_e = \int_{A'B'} \underline{f}(s) ds + \underline{R}_{A'}^{S'} + \underline{R}_{B'}^{S'} \\ \underline{C}'_0 = \int_{A'B'} \underline{OP} \wedge \underline{f}(s) ds + \underline{OA'} \wedge \underline{R}_{A'}^{S'} + \underline{OB'} \wedge \underline{R}_{B'}^{S'} . \end{array} \right.$$

2.4 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

On fait l'hypothèse que, pour S ou pour un sous-système quelconque S' la forme linéaire continue, fonctionnelle du champ $\hat{\underline{U}}$, qui exprime la puissance virtuelle des

efforts intérieurs est l'intégrale sur AB ou sur $A'B'$ d'une **densité linéique** $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$. Cette densité est supposée **indépendante du sous-système considéré** et fonction linéaire des seules valeurs locales $\hat{\underline{U}}(s)$ et $\frac{d\hat{\underline{U}}}{ds}(s)$:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S}, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.} \\ \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{AB} p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) ds \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{A'B'} p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) ds \end{array} \right.$$

où

$$(2.7) \quad p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{a}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) - \underline{\mathcal{X}}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{U}}}{ds}(s).$$

La loi des actions mutuelles (chapitre IV, § 6.3) impose que :

$$(2.8) \quad \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \quad , \quad [\mathcal{F}'_i] = 0,$$

où le torseur $[\mathcal{F}'_i]$ est identifié par (chapitre IV, § 6.2) :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall A'B' \subseteq AB, \forall \{\hat{\mathcal{D}}\} = \{O, \hat{\underline{U}}_0, \hat{\underline{\omega}}_0\} \\ [\mathcal{F}'_i] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\} = -\hat{\underline{U}}_0 \cdot \int_{A'B'} \underline{a}(s) ds - \hat{\underline{\omega}}_0 \cdot \int_{A'B'} (\underline{OP} \wedge \underline{a}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{\mathcal{X}}(s)) ds. \end{array} \right.$$

Il résulte ainsi de (2.8) :

$$(2.10) \quad \underline{a}(s) \equiv 0 \quad \text{sur } AB \quad (\text{cf. chapitre V, § 3.2}),$$

$$(2.11) \quad \underline{t}(s) \wedge \underline{\mathcal{X}}(s) \equiv 0 \quad \text{sur } AB$$

c'est-à-dire que $\underline{\mathcal{X}}(s)$ doit, en tout point de AB être colinéaire à $\underline{t}(s)$. On pose :

$$(2.12) \quad \forall P \in AB, \underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s)$$

où $X(s)$ est une fonction scalaire, et

$$(2.13) \quad \hat{D}(s) = \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$$

qui représente le **taux d'extension virtuel de la courbe directrice** au point P . L'expression la plus générale de la densité linéique de puissance virtuelle des efforts intérieurs, de la forme (2.7), compatible avec la loi des actions mutuelles s'écrit donc :

$$(2.14) \quad \boxed{p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -X(s) \hat{D}(s)}$$

homologue de l'équation (3.8) au chapitre V.

2.5 Équations d'équilibre

À partir des expressions précédentes pour les puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs, la puissance virtuelle des quantités d'accélération étant posée nulle, on obtient les équations de la statique pour ce modèle en exploitant le principe des puissances virtuelles qui s'écrit, en profitant de la similitude des notations (2.1) et (2.3) :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S} \text{ et } \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} \underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds + \underline{R}_{A'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{A'}) + \underline{R}_{B'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{B'}) \\ - \int_{A'B'} X(s) \hat{D}(s) ds = 0. \end{array} \right.$$

On suppose la continuité et la continue différentiabilité sur AB du champ d'efforts intérieurs $\underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s)$; l'équation (2.15) se transforme en intégrant par parties et l'on obtient :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S} \text{ et } \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} \left(\frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) \right) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds + (\underline{\mathcal{X}}(s_{A'}) + \underline{R}_{A'}^{S'}) \cdot \hat{\underline{U}}(s_{A'}) \\ - (\underline{\mathcal{X}}(s_{B'}) - \underline{R}_{B'}^{S'}) \cdot \hat{\underline{U}}(s_{B'}) = 0 \end{array} \right.$$

homologue des équations (2.20) ou (3.12) du chapitre V.

On déduit de cette équation appliquée au système \mathcal{S} , compte-tenu du caractère arbitraire du champ $\hat{\underline{U}}$ continu et continûment différentiable sur AB ,

L'équation différentielle vectorielle pour le champ $\underline{\mathcal{X}} = X \underline{t}$ sur AB

$$(2.17) \quad \boxed{\begin{array}{l} \forall P \in AB \\ \frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = 0 \\ \underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s) \end{array}}$$

et les **conditions aux limites** pour $\underline{\mathcal{X}} = X \underline{t}$ aux extrémités A et B de \mathcal{S}

$$(2.18) \quad \boxed{\begin{array}{l} \underline{\mathcal{X}}(s_A) = X(s_A) \underline{t}(s_A) = -\underline{R}_A \\ \underline{\mathcal{X}}(s_B) = X(s_B) \underline{t}(s_B) = \underline{R}_B \end{array}}$$

Les équations d'équilibre (2.16) et (2.17) ne sont évidemment compatibles que si la condition d'équilibre global du système \mathcal{S} est satisfaite

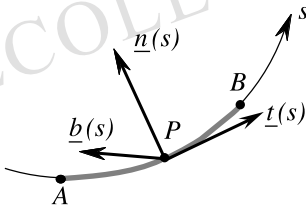
$$(2.19) \quad \begin{cases} [\mathcal{F}_e] = [O, \underline{F}_e, \underline{C}_0] = 0 \\ \underline{F}_e = \int_{AB} \underline{f}(s) ds + \underline{R}_A + \underline{R}_B \\ \underline{C}_0 = \int_{AB} \underline{OP} \wedge \underline{f}(s) ds + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A + \underline{OB} \wedge \underline{R}_B . \end{cases}$$

Appliquée à un sous-système \mathcal{S}' quelconque avec \hat{U} arbitraire continu et continûment différentiable sur $A'B'$, l'équation (2.16) donne les **conditions aux extrémités** A' et B' qui déterminent, à partir de la connaissance du champ des efforts intérieurs $\underline{\mathcal{X}}$, les efforts extérieurs $\underline{R}_{A'}^{S'}$ et $\underline{R}_{B'}^{S'}$ appliqués à \mathcal{S}' :

$$(2.20) \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{R}_{A'}^{S'} &= -\underline{\mathcal{X}}(s_{A'}) = -X(s_{A'}) \underline{t}(s_{A'}) \\ \underline{R}_{B'}^{S'} &= \underline{\mathcal{X}}(s_{B'}) = X(s_{B'}) \underline{t}(s_{B'}) . \end{aligned}}$$

2.6 Cohérence du modèle. Interprétation physique

Équations de champ



$$\begin{aligned} \frac{d\underline{t}(s)}{ds} &= \frac{\underline{n}(s)}{\rho(s)} \\ \frac{d\underline{n}(s)}{ds} &= -\frac{\underline{t}(s)}{\rho(s)} - \frac{\underline{b}(s)}{\tau(s)} \\ \frac{d\underline{b}(s)}{ds} &= \frac{\underline{n}(s)}{\tau(s)} \end{aligned}$$

Figure 4 – Formules de Frenet : $\rho(s)$ et $\tau(s)$ rayons de courbure et de torsion au point P

L'équation vectorielle (2.17) représente trois équations scalaires que l'on peut par exemple expliciter dans la base locale du trièdre orthonormé direct $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ défini au point courant P de AB par les formules de Frenet rappelées sur la figure 4. On obtient ainsi :

$$(2.21) \quad \begin{cases} \frac{dX(s)}{ds} + f_t(s) = 0 \\ \frac{X(s)}{\rho(s)} + f_n(s) = 0 \\ f_b(s) = 0 . \end{cases}$$

On remarque que ces équations ne sont compatibles, c'est-à-dire que le modèle n'est cohérent, que si la densité linéique de forces extérieures vérifie en plus de la condition d'équilibre global (2.19), sur la courbe directrice AB considérée dans la configuration actuelle, les équations :

$$(2.22) \quad \begin{cases} f_b(s) = 0 \\ f_t(s) = \frac{d(\rho(s) f_n(s))}{ds} \end{cases}.$$

Ces conditions de compatibilité expriment que la densité linéique de forces extérieures doit se trouver dans le plan défini au point P de la courbe directrice par la tangente $\underline{t}(s)$ et la normale $\underline{n}(s)$ (plan osculateur) et que sa variation en fonction de l'abscisse curviligne est liée au rayon de courbure de la courbe directrice.

Conditions aux limites

De même les conditions aux limites (2.18) montrent que les forces extérieures \underline{R}_A et \underline{R}_B appliquées à l'origine et à l'extrémité du système doivent être dirigées selon les tangentes à la courbe directrice aux points A et B .

Les *conditions de compatibilité* (2.18) et (2.22) sont à rapprocher des équations de compatibilité (2.24) à (2.27) écrites au chapitre V pour la cohérence de la modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire dans le cas du milieu continu tridimensionnel.

Pour des efforts extérieurs donnés satisfaisant (2.19), elles constituent les équations de la courbe directrice pour que l'équilibre soit possible.

Efforts extérieurs sur un sous-système

Les équations (2.20) déterminent les efforts extérieurs appliqués aux extrémités d'un sous-système quelconque \mathcal{S}' à partir du champ des efforts intérieurs dans \mathcal{S} : on constate que $\underline{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}$ et $\underline{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}$ sont respectivement tangents à la courbe directrice en A' et B' et ne dépendent que des positions de ces points. Cela signifie que $\underline{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}$ est indépendant du sous-système \mathcal{S}' dont il est l'origine et que $\underline{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}$ est indépendant du système \mathcal{S}' dont il est l'extrémité⁽¹⁾.

Ce résultat, évidemment homologue de celui établi au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel, justifie de simplifier les notations en faisant disparaître l'exposant \mathcal{S}' : $\underline{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}$ désormais remplacé par $\underline{R}_{A'}$, et $\underline{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}$ par $\underline{R}_{B'}$.

Il traduit la cohérence du modèle et fournit son interprétation physique. D'après l'hypothèse faite au § 2.3, les particules du système n'exercent aucune action à distance les unes sur les autres (cf. (2.2)) ; cela implique que la force extérieure exercée en B' sur \mathcal{S}' ne résulte que de l'action de la particule de \mathcal{S} située immédiatement en aval de B' , donc dans $\mathcal{S} - \mathcal{S}'$, sur la particule de \mathcal{S} située immédiatement en amont de

⁽¹⁾Noter que pour le milieu unidimensionnel les notions d'origine et d'extrémité sur la courbe directrice orientée et les signes $-$ et $+$ dans les équations (2.20) viennent en substitution du concept de normale extérieure.

B' , donc dans S' . Le champ des efforts intérieurs \mathcal{X} traduit les **actions de contact** exercées entre les particules de S .

Loi fondamentale de la statique

Pour le système S la loi fondamentale de la statique est l'équation (2.20) qui s'impose comme condition de compatibilité des données.

Pour un sous-système S' , la condition d'équilibre global

$$(2.23) \quad \forall S' \subseteq S, \quad [\mathcal{F}'_e] = 0,$$

résulte sans difficulté de (2.17) et (2.20).

2.7 Discontinuités du champ d'efforts intérieurs

On a supposé, dans l'établissement des équations d'équilibre au paragraphe 2.5, que le champ d'efforts intérieurs $\underline{\mathcal{X}} = X \underline{t}$ était continu et continûment différentiable sur AB . On examine maintenant la possibilité pour ce champ d'être continu et continûment différentiable **par morceaux**.

On désigne par P_i , ($i = 1, \dots, n$), les points de AB où $\underline{\mathcal{X}}$ est discontinu et l'on reprend le raisonnement du paragraphe 2.5 à partir de la formule (2.15) inchangée, écrite pour le système S . L'intégration par parties de la dernière intégrale de l'équation (2.15) donne maintenant :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{AB} \left(\frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) \right) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds \\ + (\underline{\mathcal{X}}(s_A) + \underline{R}_A) \cdot \hat{\underline{U}}(s_A) - (\underline{\mathcal{X}}(s_B) - \underline{R}_B) \cdot \hat{\underline{U}}(s_B) \\ + \sum_i (\underline{\mathcal{X}}(s_i^+) - \underline{\mathcal{X}}(s_i^-)) \cdot \hat{\underline{U}}(s_i) = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit encore les équations (2.17) et (2.18). De plus, cette équation établit la continuité du champ $\underline{\mathcal{X}}$ lorsque les efforts extérieurs sont uniquement constitués de la densité linéique \underline{f} et des forces concentrées \underline{R}_A et \underline{R}_B .

En revanche, si dans la représentation des efforts extérieurs au système on introduit des forces concentrées \underline{F}_i appliquées aux points P_i de AB , c'est-à-dire si

$$(2.25) \quad \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{AB} \underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) ds + \underline{R}_A \cdot \hat{\underline{U}}(s_A) + \underline{R}_B \cdot \hat{\underline{U}}(s_B) + \sum_i \underline{F}_i \cdot \hat{\underline{U}}(s_i),$$

le dernier terme de l'équation (2.24) prend la forme

$$(2.26) \quad \sum_i (\underline{\mathcal{X}}(s_i^+) - \underline{\mathcal{X}}(s_i^-) + \underline{F}_i) \cdot \hat{\underline{U}}(s_i).$$

Posant $[[\underline{\mathcal{X}}(s_i)]] = \underline{\mathcal{X}}(s_i^+) - \underline{\mathcal{X}}(s_i^-)$ on en déduit **l'équation aux discontinuités**⁽²⁾ pour le champ $\underline{\mathcal{X}}$ en chaque point P_i :

(2.27)

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{X}}(s) &= X(s) \underline{t}(s) \\ [[\underline{\mathcal{X}}(s_i)]] + \underline{F}_i &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on considère un sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S} , les équations (2.20) qui déterminent les forces extérieures appliquées aux extrémités de \mathcal{S}' ne sont pas modifiées, sauf si l'extrémité concernée est le point d'application P_i d'une force concentrée \underline{F}_i . Dans ce cas **il est essentiel** de préciser si la force \underline{F}_i est ou n'est pas appliquée au sous-système considéré, ce qui détermine la valeur de l'effort intérieur $\underline{\mathcal{X}}$ à prendre en compte pour l'application de l'équation (2.20).

2.8 Intégration des équations d'équilibre

Les équations différentielles de champ (2.17) et (2.27) sont évidemment intégrables sur AB avec (2.18) pour conditions aux limites. On détermine ainsi explicitement l'effort intérieur $\underline{\mathcal{X}}(s)$ au point P :

(2.28)

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = \underline{R}_B + \int_{PB} \underline{f}(\sigma) d\sigma + \sum_{s < s_i < s_B} \underline{F}_i$$

et aussi

(2.29)

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = -\underline{R}_A - \int_{AP} \underline{f}(\sigma) d\sigma - \sum_{s_A < s_i < s} \underline{F}_i$$

où σ désigne la variable d'intégration sur l'arc AB , abscisse curviligne du point courant.

Ces deux équations sont équivalentes en conséquence de la condition (2.19) d'équilibre global du système \mathcal{S} où il convient de compléter les expressions des éléments de réduction de $[\mathcal{F}_e]$ pour prendre en compte les forces concentrées \underline{F}_i :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{aligned} [\mathcal{F}_e] &= [O, \underline{F}_e, \underline{C}_0] = 0 \\ \underline{F}_e &= \int_{AB} \underline{f}(s) ds + \underline{R}_A + \underline{R}_B + \sum_{s_A < s_i < s_B} \underline{F}_i \\ \underline{C}_0 &= \int_{AB} \underline{OP} \wedge \underline{f}(s) ds + \underline{OA} \wedge \underline{R}_A + \underline{OB} \wedge \underline{R}_B + \sum_{s_A < s_i < s_B} \underline{OP}_i \wedge \underline{F}_i. \end{aligned} \right.$$

⁽²⁾ L'équation (2.27) est l'homologue de l'équation (3.39) du chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel. Elle peut être regroupée avec l'équation (2.17) en interprétant celle-ci dans le cadre de la théorie des distributions.

De la même façon, on peut procéder à l'intégration des équations (2.17) et (2.27) sur un arc $A'B'$ en prenant pour conditions aux limites les valeurs de $\underline{R}_{A'}^{S'}$ et $\underline{R}_{B'}^{S'}$ dans (2.21).

On peut aussi remarquer que la deuxième équation (2.21) fournit explicitement $X(s)$, d'où $\underline{\mathcal{X}}(s)$:

$$(2.31) \quad \begin{cases} \forall P \in AB, \\ \underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s) \\ X(s) = -\rho(s) f_n(s). \end{cases}$$

L'équivalence de cette expression avec (2.28) ou (2.29) est assurée par les conditions (2.22) de compatibilité des équations (2.21).

2.9 Discontinuités du champ de vitesse virtuel

La modélisation des efforts intérieurs pour ce type de milieux curvilignes étant acquise, construite sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels dans lesquels $\underline{\hat{U}}$ est continu et continûment différentiable sur AB , on se propose d'examiner l'écriture du principe des puissances virtuelles lorsque $\underline{\hat{U}}$ est continu et continûment différentiable *par morceaux* sur AB .

On suppose qu'aucun des points de discontinuité de $\underline{\hat{U}}$ sur AB notés P_j , ($j = 1, \dots, m$), ne coïncide avec un point d'application de force concentrée (§ 2.7).

Le raisonnement est analogue à celui du chapitre V (§ 3.8 par exemple). Pour un sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S} , il consiste à écrire l'équation (2.15) séparément pour chacun des sous-systèmes définis par les tronçons $A'P_k$, P_kP_{k+1} , \dots , P_mB' de l'arc $A'B'$ sur lesquels le champ $\underline{\hat{U}}$ est continu et continûment différentiable; on applique ensuite les équations (2.20) aux extrémités P_j , ($j = k, \dots, m$), de chacun de ces sous-systèmes en y tenant compte de la continuité de $\underline{\mathcal{X}}(s_j)$; par addition des équations obtenues on aboutit à l'écriture du principe des puissances virtuelles pour le sous-système \mathcal{S}' à substituer à (2.15) dans le cas d'un champ $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable par morceaux :

$$(2.32) \quad \begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} \underline{f}(s) \cdot \underline{\hat{U}}(s) ds + \underline{R}_{A'}^{S'} \cdot \underline{\hat{U}}(s_{A'}) + \underline{R}_{B'}^{S'} \cdot \underline{\hat{U}}(s_{B'}) \\ \quad - \int_{A'B'} X(s) \hat{D}(s) ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} X(s_j) [\underline{\hat{U}}(s_j)] \cdot \underline{t}(s_j) = 0 \\ [\underline{\hat{U}}(s_j)] = \underline{\hat{U}}(s_j^+) - \underline{\hat{U}}(s_j^-) \quad \text{saut de } \underline{\hat{U}} \text{ au point } P_j. \end{cases}$$

Ce résultat, analogue à celui du chapitre V (§ 3.8), montre que, dans ce cas, les énoncés du principe des puissances virtuelles sont conservés en adoptant pour expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un sous-système \mathcal{S}' quelconque :

$$(2.23) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{U}) = - \int_{A'B'} X(s) \hat{D}(s) ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} X(s_j) [\hat{U}(s_j)] \cdot \underline{t}(s_j)$$

où le champ $\underline{\mathcal{X}}$ est supposé continu aux points P_j ⁽³⁾.

2.10 Pertinence du modèle

Tension du milieu curviligne

L'interprétation physique donnée au paragraphe 2.6 est illustrée sur la figure 5. Les efforts intérieurs sont représentés par un champ vectoriel dirigé, en tout point du système, selon la tangente à la courbe directrice dans la configuration actuelle. Ce champ traduit les actions de contact entre les particules de \mathcal{S} : ainsi le sous-système aval PB' exerce en P sur le sous-système amont $A'P$ l'action de contact $\underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s)$ et inversement le sous-système « amont » exerce en P l'action de contact $-\underline{\mathcal{X}}(s)$ sur le sous-système « aval ».

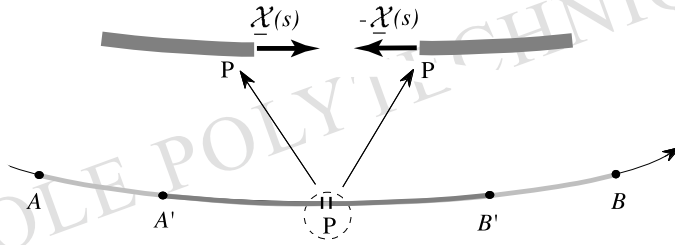


Figure 5 – Interprétation physique du modèle

Dans cette modélisation le champ scalaire X défini sur la courbe directrice est appelé champ de **tension** du milieu curviligne. Cette terminologie rappelle que $X(s)$ positif correspond en P à un effort de traction exercé par le sous-système aval sur le sous-système amont et vice versa.

Domaines pratiques d'application du modèle

Les commentaires du paragraphe 2.6 ont notamment énoncé les conditions de compatibilité imposées aux forces extérieures en plus de la condition d'équilibre global (2.19), pour que la modélisation construite soit cohérente relativement à une courbe directrice donnée :

- Orientation de \underline{R}_A et \underline{R}_B selon les tangentes en A et B à la courbe directrice,
- Équation (2.22) reliant \underline{f} à la géométrie de la courbe directrice ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ L'interprétation de cette formule dans le cadre de la théorie mathématique des distributions est évidente.

⁽⁴⁾ Des conditions homologues sont évidemment imposées aux forces concentrées \underline{F}_i : chaque point P_i doit être un point singulier de la courbe directrice et la force \underline{F}_i doit y être coplanaire aux vecteurs tangents (cf. figure 7). On vérifie sans difficulté que toutes ces conditions sont compatibles avec la condition d'équilibre global (2.20).

Ces conditions mathématiques permettent de définir le domaine de pertinence pratique de la modélisation. Il s'agit essentiellement des solides élancés, dits « sans raideur », n'offrant aucune résistance à la flexion ou à la torsion. Physiquement ces solides présentent une section transversale dont le diamètre est très petit devant la dimension caractéristique longitudinale définie par les caractéristiques géométriques de la structure étudiée et de son chargement. Typiquement ces solides sont des *fils* ou des faisceaux de fils très peu solidarisés entre eux transversalement (câbles sans raideur) qui pour des raisons d'instabilité structurelle ne peuvent supporter que des efforts intérieurs de traction tangentiels à la courbe directrice comme représenté sur la Figure 5 avec la condition

$$(2.34) \quad \forall P \in AB \quad , \quad X(s) \geq 0 \quad .$$

La résolution d'un problème de statique pour un tel milieu curviligne détermine à la fois la forme de la courbe directrice dans la configuration actuelle et le champ des efforts intérieurs.

Hors du cas général précédent, la modélisation se révèle également pertinente lorsque, par construction, la courbe directrice est telle que les conditions de compatibilité soient satisfaites ; il s'agit par exemple de structures en arcs dits *funiculaires* ou constituées de barres articulées chargées en leurs nœuds d'assemblage et de certaines voûtes. Dans ces exemples le champ scalaire X est le plus souvent appelé champ *d'effort normal* (cf. § 3.11) en référence non plus à la courbe directrice mais à la section transversale de l'élément élancé.

Présentation classique

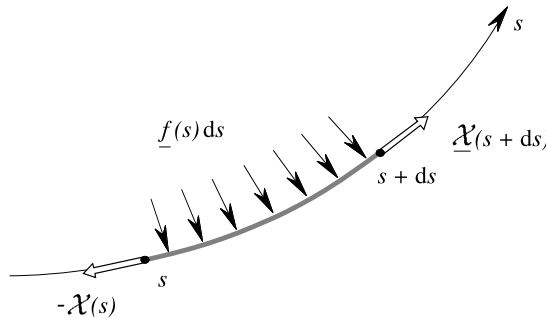


Figure 6 – Statique des fils : établissement de l'équation différentielle d'équilibre

Comme dans l'étude de la représentation des efforts pour le milieu continu tridimensionnel (chapitre V), la méthode des puissances virtuelles a permis de procéder à une construction systématique de la statique des fils en posant a priori les formules (2.1), (2.3) et (2.7). On a vu ci-dessus l'ancrage de cette modélisation dans la réalité des objets mécaniques. Il est intéressant d'en rappeler l'approche classique dans laquelle la notion de tension tangente à la courbe directrice est prise comme concept intuitif de départ, issu de l'expérience sur les fils, selon le schéma de la figure 5.

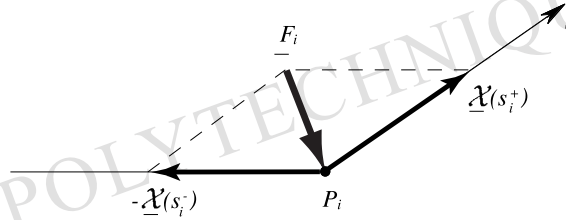


Figure 7 – Statique des fils : discontinuité de la tension

Les figures 6 et 7 décrivent les démonstrations des équations (2.17) et (2.27) fondées sur l'écriture de l'équilibre global du sous-système défini par l'élément d'arc ds ou par le « point » P_i , sous l'action des forces extérieures qui lui sont appliquées.

Le même raisonnement appliqué au sous-système défini par l'arc PB (resp. AP) permet d'établir les équations intégrées (2.28) et (2.29).

3 Statique des poutres

3.1 Idées directrices de la modélisation

La construction effectuée dans la section précédente a mis en place, sur la géométrie de la courbe directrice, un modèle de milieu continu unidimensionnel en suivant la démarche de celle qui a conduit, au chapitre V (section 3), au milieu continu tridimensionnel classique où, les particules étant caractérisées géométriquement par leur position, la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs est une forme linéaire du gradient de la vitesse virtuelle.

Les commentaires et l'analyse de la pertinence (§ 2.6 & 2.10) ont défini le domaine de pertinence de cette modélisation, hors certains cas particuliers de géométries et de chargements, comme concernant la statique des solides élancés « sans raideur » (ou de faible raideur). Du point de vue des applications pratiques, ce résultat est évidemment insuffisant. La modélisation unidimensionnelle nécessaire doit être apte à représenter des solides élancés « raides », c'est-à-dire auxquels on peut appliquer, dans leur configuration actuelle prescrite, des efforts extérieurs généraux : forces non tangentielles et moments aux extrémités, densités linéiques de forces réparties et de moments sans conditions restrictives.

Pour parvenir à ce résultat on va devoir mettre en œuvre la méthode des puissances virtuelles à partir d'une description géométrique *plus riche* du milieu continu unidimensionnel, rejoignant les remarques faites au chapitre I (section 5), au chapitre IV (§ 2.5), et au chapitre V (§ 5.3).

Cet enrichissement procède de considérations physiques simples relatives au concept de modélisation.

Modéliser sur une représentation unidimensionnelle un solide qui, bien qu'élancé,

est par nature tridimensionnel, signifie que l'on entend ramener aux points de la courbe directrice, de manière pertinente quoique concentrée, l'information relative au solide concerné. Les paramètres géométriques attachés aux points matériels du modèle unidimensionnel, c'est-à-dire aux points de la courbe directrice, doivent donc traduire de façon significative la constitution du solide tridimensionnel original.

Constater, comme au § 2.10, que la modélisation scalaire par le champ de tension est pertinente pour les solides élancés sans raideur est cohérent avec l'évidence physique que ces solides ont une section transversale très petite vis-à-vis de la dimension caractéristique longitudinale et que, en conséquence, l'information « transversale » à associer à la particule sur la courbe directrice peut être négligée. En revanche, la pratique quotidienne confirme que la raideur des solides élancés est directement liée à l'importance de leur *section transversale*. Cela conduit à penser qu'une modélisation unidimensionnelle pertinente pour ces solides doit introduire des paramètres supplémentaires pour caractériser géométriquement la particule, paramètres qui manifestent, au niveau du milieu curviligne, la *microstructure* sous-jacente, c'est-à-dire, en fait, le rôle de la section transversale du solide tridimensionnel original.

C'est en ce sens que l'on va construire une autre modélisation du milieu curviligne en commençant par une nouvelle description géométrique de ce milieu.

3.2 Modélisation géométrique. Mouvements réels

Le système \mathcal{S} représenté par un arc AB sur la courbe directrice est, comme au paragraphe 2.2, constitué des particules P de longueur ds dont la position est repérée sur la courbe directrice par l'abscisse curviligne $s : s_A \leq s \leq s_B$. Un sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S} est constitué des particules de \mathcal{S} qui occupent un segment $A'B'$ inclus dans AB .

Les paramètres géométriques qui décrivent l'état de la particule P sont désormais sa position sur la courbe directrice dans l'espace \mathbb{R}^3 et l'*orientation de la microstructure associée*. Pour fixer les idées et tenter de matérialiser cette notion de microstructure, en rappelant qu'elle est liée à la « transversalité » du solide élancé original, on peut introduire le concept de *section droite*, élément de surface plan orthogonal en P à la courbe directrice à l'instant t (figure 8). *Les particules ne sont plus de simples points matériels dilués : une orientation dans l'espace \mathbb{R}^3 leur est associée.*

L'évolution géométrique du système à l'instant t est alors définie

- par l'évolution des positions géométriques des particules, c'est-à-dire par le champ de vitesse \underline{U} défini sur AB ,
- et par l'évolution des orientations des microstructures, c'est-à-dire par le champ des vitesses de rotation $\underline{\Omega}$ défini sur AB .

En désignant par $\{\mathbb{U}\}$ le champ de distributeurs (chapitre IV, § 5.1) défini sur AB , à partir des champs \underline{U} et $\underline{\Omega}$ par :

$$(3.1) \quad \forall P \in AB, \{ \mathbb{U}(s) \} = \{ P, \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \},$$

on peut décrire les mouvements réels du système de la façon suivante.

Les mouvements réels du système sont définis par les deux champs de vecteurs \underline{U} et $\underline{\Omega}$ constituant le champ de distributeurs $\{\underline{U}\}$. Le champ \underline{U} décrit le mouvement réel de la courbe directrice, le champ $\{\underline{U}\}$ décrit le mouvement réel des particules (points P et sections droites associées). Dans cette modélisation *les particules ne sont plus des points matériels*.

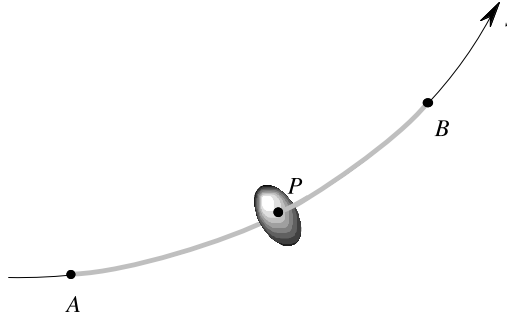


Figure 8 – Particule : point P et section droite associée à l'instant t

Il est important de rappeler, pour éviter toute confusion, qu'il s'agit là de la définition des mouvements réels du **modèle** unidimensionnel. Ceci ne signifie en aucune façon que les mouvements réels du solide tridimensionnel élané original soient de la forme indiquée ci-dessus. En revanche, la mise en œuvre pratique du modèle sur des solides tridimensionnels réels supposera évidemment que l'on sache non seulement y identifier la courbe directrice et son mouvement, comme indiqué dans la section 1, mais aussi le mouvement de la microstructure, notamment pour la détermination de la loi de comportement à prendre en compte.

3.3 Espace vectoriel des mouvements virtuels

Pour la construction de la modélisation on considère les mouvements virtuels définis, de la même façon que les mouvements réels, par deux champs de vecteurs $\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\Omega}}$ supposés continus et continûment différentiables sur AB . L'extension de la modélisation au cas des mouvements virtuels définis par des champs $\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\Omega}}$ continus et continûment différentiables par morceaux sera présentée au paragraphe 3.10.

Il est commode, et cohérent avec la formule (3.1), d'introduire le champ de distributeurs $\{\hat{\underline{U}}\}$ défini à partir des champs $\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\Omega}}$ par :

$$(3.2) \quad \forall P \in AB, \{ \hat{\underline{U}}(s) \} = \{ P, \hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s) \}.$$

On adoptera aussi la notation $\hat{\underline{U}}$ pour désigner le mouvement virtuel défini par les champs $\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\Omega}}$.

3.4 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Système \mathcal{S}

La démarche est identique à celle du paragraphe 2.3 : on suppose que la puissance virtuelle des efforts extérieurs à \mathcal{S} est la somme d'une contribution intégrée sur AB due à une densité linéique d'efforts extérieurs et des contributions des efforts exercés aux extrémités.

- La première contribution fait intervenir deux champs vectoriels \underline{f} et \underline{m} qui sont respectivement les cofacteurs des champs \hat{U} et \hat{Q} et s'écrit

$$(3.3) \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \int_{AB} (\underline{f}(s) \cdot \hat{U}(s) + \underline{m}(s) \cdot \hat{Q}(s)) ds ;$$

en introduisant le champ de torseurs $[\mathbb{f}(s)]$ défini à partir de \underline{f} et \underline{m} par

$$(3.4) \quad \forall P \in AB, [\mathbb{f}(s)] = [P, \underline{f}(s), \underline{m}(s)]$$

l'intégrale (3.3) se met sous la forme compacte

$$(3.5) \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \int_{AB} [\mathbb{f}(s)] \cdot \{\hat{U}(s)\} ds.$$

Le champ de torseur $[\mathbb{f}]$ représente une densité linéique de torseurs d'efforts extérieurs dans laquelle le champ vectoriel \underline{f} est la densité linéique de forces extérieures appliquées au système \mathcal{S} (aussi appelées forces réparties) et le champ \underline{m} est la densité linéique de moments extérieurs qui, dans la pratique, est le plus souvent nulle.

- La deuxième contribution introduit les vecteurs \underline{R}_A et \underline{R}_B , cofacteurs respectifs de \hat{U}_A et \hat{U}_B , qui représentent les forces extérieures appliquées à \mathcal{S} à ses extrémités, et les vecteurs \underline{H}_A et \underline{H}_B cofacteurs de \hat{Q}_A et \hat{Q}_B : ce sont les moments extérieurs appliqués à \mathcal{S} en A et B . Elle s'écrit

$$(3.6) \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \underline{R}_A \cdot \hat{U}(s_A) + \underline{H}_A \cdot \hat{Q}(s_A) + \underline{R}_B \cdot \hat{U}(s_B) + \underline{H}_B \cdot \hat{Q}(s_B).$$

Il est naturel de définir les torseurs d'efforts extérieurs aux extrémités $[\mathbb{R}_A]$ et $[\mathbb{R}_B]$

$$(3.7) \quad \begin{cases} [\mathbb{R}_A] = [A, \underline{R}_A, \underline{H}_A] \\ [\mathbb{R}_B] = [B, \underline{R}_B, \underline{H}_B] \end{cases}$$

et en regroupant (3.4), (3.6) et (3.7), on obtient pour $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{U})$:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}_{(e)}(\hat{U}) = \int_{AB} [\mathbb{f}(s)] \cdot \{\hat{U}(s)\} ds + [\mathbb{R}_A] \cdot \{\hat{U}(s_A)\} + [\mathbb{R}_B] \cdot \{\hat{U}(s_B)\}. \end{cases}$$

On remarque que, sans préjuger de la bonne fin de la modélisation en cours d'élaboration, cette représentation des efforts extérieurs remplit l'objectif énoncé au paragraphe 3.1.

Sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S}

On suppose que l'expression de $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{U})$ pour tous les efforts exercés sur un sous-système \mathcal{S}' par l'extérieur de ce sous-système, y compris $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$, est semblable à (3.8). On fait de plus l'*hypothèse* que la densité linéique $[\mathbb{f}^{\mathcal{S}'}(s)]$ d'efforts extérieurs appliqués à \mathcal{S}' est identique à $[\mathbb{f}(s)]$, ce qui implique qu'il n'y a pas d'action à distance entre les particules du système \mathcal{S} :

$$(3.9) \quad \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, [\mathbb{f}^{\mathcal{S}'}(s)] \equiv [\mathbb{f}(s)] .$$

Les torseurs

$$(3.10) \quad \begin{cases} [\mathbb{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}] = [A', \underline{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}, \underline{H}_{A'}^{\mathcal{S}'}] \\ [\mathbb{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}] = [B', \underline{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}, \underline{H}_{B'}^{\mathcal{S}'}] \end{cases}$$

sont les torseurs d'efforts extérieurs appliqués aux extrémités A' et B' de \mathcal{S}' , qui seront déterminés par la modélisation achevée.

$$(3.11) \quad \begin{cases} \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{U}) \text{ s'écrit ainsi :} \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{U}) = \int_{A'B'} [\mathbb{f}(s)] \cdot \{\hat{U}(s)\} ds + [\mathbb{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}] \cdot \{\hat{U}(s_{A'})\} + [\mathbb{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}] \cdot \{\hat{U}(s_{B'})\} . \end{cases}$$

Torseurs des efforts extérieurs au système ou à un sous-système

L'identification du torseur des efforts extérieurs à un sous-système \mathcal{S}' est immédiate ; profitant de la similitude des notations on a, pour \mathcal{S}' et \mathcal{S} lui-même :

$$(3.12) \quad [\mathcal{F}'_e] = \int_{A'B'} [\mathbb{f}(s)] ds + [\mathbb{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}] + [\mathbb{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}] .$$

3.5 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

On postule de nouveau l'existence d'une densité linéique de puissance virtuelle des efforts intérieurs $p_{(i)}(\hat{U})$, indépendante du sous-système considéré, définie sur AB , telle que

$$(3.13) \quad \begin{cases} \text{pour } \mathcal{S}, \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}_{(i)}(\hat{U}) = \int_{AB} p_{(i)}(\hat{U}) ds, \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \forall \hat{U} \text{ m.v.}, \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{U}) = \int_{A'B'} p_{(i)}(\hat{U}) ds, \end{cases}$$

où $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$, au point courant P , est une forme linéaire de $\hat{\underline{U}}(s)$, $\hat{\underline{Q}}(s)$, $\frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds}$ et $\frac{d\hat{\underline{Q}}(s)}{ds}$.

On peut, de façon équivalente, dire que $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ en P est une forme linéaire des valeurs de $\{\hat{\mathbb{U}}(s)\}$ et $\frac{d\{\hat{\mathbb{U}}(s)\}}{ds}$. En effet, en appliquant au champ $\{\hat{\mathbb{U}}\}$ la formule établie au chapitre IV (§ 5.5) pour la dérivation d'un champ de distributeurs, il vient

$$(3.14) \quad \frac{d\{\hat{\mathbb{U}}(s)\}}{ds} = \{P, \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \hat{\underline{Q}}(s), \frac{d\hat{\underline{Q}}(s)}{ds}\} = \{\hat{\mathbb{D}}(s)\}$$

où $\underline{t}(s)$ est le vecteur unitaire tangent en P à la courbe directrice.

On écrira donc la densité $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ sous la forme :

$$(3.15) \quad p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -[\mathfrak{a}(s)] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}(s)\} - [\mathbb{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathbb{D}}(s)\}$$

où $[\mathfrak{a}(s)]$ et $[\mathbb{X}(s)]$ sont deux torseurs, fonctions de s .

La loi des actions mutuelles impose encore

$$(3.16) \quad \begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. rigidifiant } \mathcal{S}', \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = 0 \end{cases}$$

où l'on rappelle que si $\hat{\mathbb{U}}$ est un mouvement virtuel rigidifiant \mathcal{S}' , le champ $\{\hat{\mathbb{U}}\}$ est constant sur $A'B'$ et le champ $\{\hat{\mathbb{D}}\}$ y est nul.

En regroupant (3.13), (3.15) et (3.16) il vient alors, par la loi des actions mutuelles,

$$(3.17) \quad \begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \forall \{\hat{\mathbb{U}}\} \text{ constant sur } A'B', \\ [\mathcal{F}'_i] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}\} = \{\hat{\mathbb{U}}\} \cdot \int_{A'B'} [\mathfrak{a}(s)] ds = 0 \end{cases}$$

dont il résulte, compte tenu du caractère arbitraire de \mathcal{S}' , la nullité du champ $[\mathfrak{a}]$ sur AB .

L'expression (3.15) de $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ se réduit donc nécessairement à :

$$(3.18) \quad \boxed{p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -[\mathbb{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathbb{D}}(s)\}}$$

Cette formule met en évidence que :

les efforts intérieurs au point courant P sont représentés par le torseur $[\mathbb{X}(s)]$ associé au taux de déformation virtuel du milieu curviligne qui est la dérivée $\{\hat{\mathbb{D}}(s)\}$ du distributeur $\{\hat{\mathbb{U}}(s)\}$.

On explicite le torseur d'efforts intérieurs au point P par la formule

$$(3.19) \quad [\mathbb{X}(s)] = [P, \underline{\mathcal{X}}(s), \underline{\Gamma}(s)] ,$$

et $p_{(i)} \{ \hat{\mathbb{U}} \}$ s'écrit sous forme développée :

$$(3.20) \quad p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -\underline{\mathcal{X}}(s) \cdot \left(\frac{d\hat{\mathbb{U}}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \hat{\underline{\mathbb{U}}}(s) \right) - \underline{\Gamma}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{\mathbb{U}}}(s)}{ds} .$$

On peut remarquer la similitude de la formule (3.18) avec la formule homologue (2.14) établie dans le cas de la statique des fils. L'écriture compacte (3.18) obtenue pour $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ favorise la réflexion et facilite les calculs. On remarquera aussi que, bien que les efforts intérieurs soient représentés par un champ de torseurs $[\mathbb{X}]$, le torseur (résultant) des efforts intérieurs pour \mathcal{S} ou pour \mathcal{S}' est nul en application de la loi des actions mutuelles (3.16). Il n'y a là évidemment aucun paradoxe.

3.6 Équations d'équilibre

La puissance virtuelle des quantités d'accélération étant prise nulle par hypothèse puisque l'on se place dans le cadre de la statique, on obtient par le principe des puissances virtuelles avec les expressions établies ci-dessus pour $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbb{U}})$, $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}})$, $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$, $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$:

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S} \text{ et } \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} [\mathbb{f}(s)] \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s) \} ds + [\mathbb{R}_{A'}^{S'}] \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s_{A'}) \} + [\mathbb{R}_{B'}^{S'}] \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s_{B'}) \} \\ - \int_{A'B'} [\mathbb{X}(s)] \cdot \{ \hat{\mathbb{D}}(s) \} ds = 0 . \end{array} \right.$$

On suppose la continuité et la continue différentiabilité du champ de torseurs $[\mathbb{X}]$ sur AB . L'équation (3.21) se transforme par intégration par parties en appliquant la formule de dérivation du produit de dualité (chapitre V, § 5.5) à $[\mathbb{X}(s)] \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s) \}$:

$$(3.22) \quad \frac{d}{ds} ([\mathbb{X}(s)] \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s) \}) = \left(\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} \right) \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s) \} + [\mathbb{X}(s)] \cdot \{ \hat{\mathbb{D}}(s) \}$$

où le torseur $\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds}$ s'explicite à partir de (3.19)

$$(3.23) \quad \frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} = [P, \frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds}, \frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\mathcal{X}}(s)] .$$

Il vient ainsi :

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S} \text{ et } \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} \left(\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} + [\mathbb{f}(s)] \right) \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s) \} ds \\ + ([\mathbb{X}(s_{A'})] + [\mathbb{R}_{A'}^{S'}]) \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s_{A'}) \} - ([\mathbb{X}(s_{B'})] + [\mathbb{R}_{B'}^{S'}]) \cdot \{ \hat{\mathbb{U}}(s_{B'}) \} = 0 \end{array} \right.$$

homologue de l'équation (2.16).

Appliquée d'abord au système \mathcal{S} , compte tenu du caractère arbitraire du champ $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ continu et continûment différentiable sur AB , cette équation fournit :

l'équation différentielle pour le champ de torseurs $[\mathbb{X}]$ sur AB

$$(3.25) \quad \begin{aligned} &\forall P \in AB, \\ &\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} + [\mathbb{f}(s)] = 0 \end{aligned}$$

et les *conditions aux limites* aux extrémités de \mathcal{S}

$$(3.26) \quad \begin{aligned} &[\mathbb{X}(s_A)] = -[\mathbb{R}_A] \\ &[\mathbb{X}(s_B)] = [\mathbb{R}_B] \end{aligned}$$

homologues de (2.17) et (2.18).

Les équations d'équilibre (3.25) et (3.26) ne sont évidemment compatibles que si la condition d'équilibre global du système \mathcal{S} est satisfaite

$$(3.27) \quad [\mathcal{F}_e] = \int_{AB} [\mathbb{f}(s)] ds + [\mathbb{R}_A] + [\mathbb{R}_B] + 0.$$

En appliquant l'équation (3.24) à un sous-système \mathcal{S}' quelconque avec $\hat{\mathbf{U}}$ arbitraire continu et continûment différentiable sur $A'B'$, on obtient les *conditions aux extrémités* A' et B' qui déterminent les efforts extérieurs $[\mathbb{R}_{A'}^{S'}]$ et $[\mathbb{R}_{B'}^{S'}]$ appliqués à \mathcal{S}' , à partir de la connaissance du champ des efforts intérieurs $[\mathbb{X}]$:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} &[\mathbb{R}_{A'}^{S'}] = -[\mathbb{X}(s_{A'})] \\ &[\mathbb{R}_{B'}^{S'}] = [\mathbb{X}(s_{B'})] \end{aligned}$$

homologue de (2.20).

Les équations précédentes écrites sous forme compacte en termes de torseurs peuvent être explicitées sous forme d'équations vectorielles pour les champs de vecteurs $\underline{\mathcal{X}}$ et $\underline{\Gamma}$ sur AB :

équations différentielles pour les champs de vecteurs $\underline{\mathcal{X}}$ et $\underline{\Gamma}$ sur AB

(3.29)

$$\forall P \in AB, \quad \frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = 0$$

(3.30)

$$\frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\mathcal{X}}(s) + \underline{m}(s) = 0$$

équations aux extrémités de \mathcal{S} pour $\underline{\mathcal{X}}$ et $\underline{\Gamma}$

$$(3.31) \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{X}}(s_A) = -\underline{R}_A & \underline{\Gamma}(s_A) = -\underline{H}_A \\ \underline{\mathcal{X}}(s_B) = \underline{R}_B & \underline{\Gamma}(s_B) = \underline{H}_B \end{cases}$$

et *aux extrémités* de \mathcal{S}'

$$(3.32) \quad \begin{cases} \underline{R}_{A'}^{S'} = -\underline{\mathcal{X}}(s_{A'}) & \underline{H}_{A'}^{S'} = -\underline{\Gamma}(s_{A'}) \\ \underline{R}_{B'}^{S'} = \underline{\mathcal{X}}(s_{B'}) & \underline{H}_{B'}^{S'} = \underline{\Gamma}(s_{B'}) \end{cases}.$$

3.7 Cohérence du modèle ; interprétation physique

Équations de champs

L'équation différentielle (3.25) pour le champ de torseurs $[\mathbb{X}]$ a exactement la même structure simple que l'équation (2.17) établie pour la statique des fils, ce qui illustre la commodité de l'utilisation des torseurs pour cette modélisation (cf. aussi les équations (3.43, 3.44)). Elle représente les deux équations vectorielles (3.28, 3.29) pour les deux champs $\underline{\mathcal{X}}$ et $\underline{\Gamma}$ qui sont couplés⁽⁵⁾. On remarque que, à la différence des équations (2.17), les équations (3.28, 3.29) sont compatibles quelle que soit la forme du champ $[\mathbb{f}]$ donné sur AB .

D'une façon générale la structure de ces équations, rencontrée au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel classique (2.21, 3.13) et pour les milieux micropolaires (5.13), et ici en statique des fils et en statique des poutres, est celle de l'expression locale de la loi de *conservation de la quantité du mouvement*; voir à ce propos la remarque faite au chapitre V (§ 3.10).

Conditions aux limites

Les conditions aux limites (3.26) pour le champ de torseurs $[\mathbb{X}]$ en A et B sont semblables aux équations (2.18) obtenues en statique des fils, mais elles n'imposent aucune condition de compatibilité aux torseurs $[\mathbb{R}_A]$ et $[\mathbb{R}_B]$ donnés appliqués aux extrémités.

⁽⁵⁾ Cf. les équations (5.13), (5.16) et (5.17) au chapitre V pour les milieux micropolaires.

Efforts extérieurs sur un sous-système

En reprenant le raisonnement du paragraphe 2.6 à partir des équations (3.28) on établit les résultats suivants.

L'effort extérieur $[\mathbb{R}_{A'}^{S'}]$ exercé à l'extrémité A' d'un sous-système S' de S est déterminé par le champ $[\mathbb{X}]$ et est donc indépendant du sous-système S' considéré, dès lors que A' en est l'extrémité amont. De même pour l'effort extérieur $[\mathbb{R}_{B'}^{S'}]$ en B' , extrémité aval. On notera ainsi :

$$(3.33) \quad [\mathbb{R}_{A'}^{S'}] = [\mathbb{R}_{A'}], \text{ indépendant de } B' \text{ tel que } s_{A'} < s_{B'} \leq s_B$$

$$(3.34) \quad [\mathbb{R}_{B'}^{S'}] = [\mathbb{R}_{B'}], \text{ indépendant de } A' \text{ tel que } s_A \leq s_{A'} < s_{B'}$$

La modélisation construite est mécaniquement cohérente. L'hypothèse (3.9) implique que les particules de S n'exercent entre elles aucune action à distance (cf. chapitre V, § 2.2), et il apparaît bien, par (3.33) et (3.34), que $[\mathbb{R}_{A'}^{S'}]$ et $[\mathbb{R}_{B'}^{S'}]$ ne résultent que d'actions de contact : par exemple, en B' , $[\mathbb{R}_{B'}]$ traduit l'action de la particule de S située en aval immédiat de B' sur la particule de S' située en amont immédiat de B' .

De cette signification physique locale du champ $[\mathbb{X}]$, il résulte que si le concept de torseur se révèle simplificateur pour le développement et la formulation mathématique de la modélisation (cf. notamment les équations (3.25, 3.43 et 3.44)), ce sont bien, au point P de AB , les **éléments de réduction** $\underline{\mathcal{X}}(s)$ et $\underline{\Gamma}(s)$ de $[\mathbb{X}(s)]$ qui ont une **signification physique** naturelle du point de vue du milieu continu. En particulier ce sont eux qui interviennent dans l'écriture de la loi de comportement.

Loi fondamentale de la statique

Pour le système S la loi fondamentale de la statique est l'équation (3.27) qui s'impose comme condition de compatibilité des données.

Pour un sous-système S' , la condition d'équilibre global

$$(3.35) \quad \forall S' \subset S, \quad [\mathcal{F}'_e] = 0$$

résulte sans difficulté de (3.25) et (3.28).

3.8 Discontinuités du champ d'efforts intérieurs

On reprend le raisonnement du paragraphe 2.7 en supposant que le champ $[\mathbb{X}]$ continu et continûment différentiable, par morceaux. On désigne par P_i , ($i = 1, \dots, n$), les points de AB où $[\mathbb{X}]$ est discontinu. L'intégration par parties de l'équation (3.21) écrite pour S fait maintenant apparaître des termes supplémentaires où interviennent les sauts du champ $[\mathbb{X}]$ aux points P_i

$$(3.36) \quad [[[\mathbb{X}(s_i)]]] = [\mathbb{X}(s_i^+)] - [\mathbb{X}(s_i^-)],$$

sous la forme

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{AB} \left(\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} + [\mathbb{F}(s)] \right) \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s)\} ds \\ + ([\mathbb{X}(s_A)] + [\mathbb{R}_A]) \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_A)\} - ([\mathbb{X}(s_B)] + [\mathbb{R}_B]) \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_B)\} \\ + \sum_i [[\mathbb{X}(s_i)]] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_i)\} = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit encore les équations (3.25) et (3.26), et on établit de plus la continuité du champ $[\mathbb{X}]$ tant que les efforts extérieurs à \mathcal{S} ne sont constitués que de la densité linéique $[\mathbb{F}]$ et des torseurs aux extrémités $[\mathbb{R}_A]$ et $[\mathbb{R}_B]$.

En revanche, si la représentation des efforts extérieurs introduit des efforts concentrés sous la forme des torseurs $[\mathbb{F}_i]$ appliqués aux points P_i de AB

$$(3.38) \quad [\mathbb{F}_i] = [P_i, \underline{F}_i, \underline{C}_i],$$

en sorte que

$$(3.39) \quad \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{AB} [\mathbb{F}(s)] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_A)\} ds + [\mathbb{R}_A] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_A)\} + [\mathbb{R}_B] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_B)\} + \sum_i [\mathbb{F}_i] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_i)\},$$

le dernier terme de l'équation (3.37) est alors modifié en

$$(3.40) \quad \sum_i ([[\mathbb{X}(s_i)]]) + [\mathbb{F}_i] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_i)\}.$$

On en déduit l'*équation aux discontinuités* pour le champ $[\mathbb{X}]$:

$$(3.41) \quad \boxed{[[\mathbb{X}(s_i)]] + [\mathbb{F}_i] = 0} \quad (6)$$

explicitée en

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} [[\underline{X}(s_i)]] + \underline{F}_i = 0 \\ [[\underline{L}(s_i)]] + \underline{C}_i = 0. \end{array} \right.$$

On remarque en particulier que si l'effort concentré appliqué au point P_i se réduit à une force, il y a discontinuité de $\underline{X}(s_i)$ et continuité de $\underline{L}(s_i)$.

Pour un sous-système \mathcal{S}' les équations (3.28), qui déterminent les torseurs $[\mathbb{R}_{A'}]$ et $[\mathbb{R}_{B'}]$, sont inchangées. Lorsqu'une telle extrémité est le point d'application d'un torseur $[\mathbb{F}_i]$, **on doit préciser** dans la définition du sous-système considéré si le torseur $[\mathbb{F}_i]$ lui est ou non appliqué : ceci détermine la valeur du torseur $[\mathbb{X}(s_i)]$ à prendre en compte pour l'application de (3.28).

⁽⁶⁾ L'équation (3.41) est l'homologue de l'équation (2.27) en statique des fils. Elle peut être regroupée avec l'équation (3.25) en interprétant celle-ci dans le cadre de la théorie des distributions.

3.9 Intégration des équations d'équilibre

L'intégration des équations (3.25) et (3.41) est immédiate avec les conditions aux limites (3.26). Elle détermine explicitement le torseur $[\mathbb{X}(s)]$ au point P d'abscisse s sur AB :

$$(3.43) \quad [\mathbb{X}(s)] = [\mathbb{R}_B] + \int_{PB} [\mathbb{f}(\sigma)] d\sigma + \sum_{s < s_i < s_b} [\mathbb{F}_i]$$

et aussi

$$(3.44) \quad [\mathbb{X}(s)] = -[\mathbb{R}_A] - \int_{AP} [\mathbb{f}(\sigma)] d\sigma - \sum_{s_A < s_i < s} [\mathbb{F}_i]$$

où σ désigne l'abscisse du point courant sur AB .

L'équivalence de ces deux équations est assurée par la condition d'équilibre global (3.27) pour \mathcal{S} , dans laquelle l'expression de $[\mathcal{F}_e]$ doit être modifiée pour tenir compte des efforts concentrés :

$$(3.45) \quad [\mathcal{F}_e] = \int_{AB} [\mathbb{f}(s)] ds + [\mathbb{R}_A] + [\mathbb{R}_B] + \sum_i [\mathbb{F}_i].$$

Les équations (3.43) et (3.44) doivent évidemment leur simplicité d'écriture à l'utilisation des torseurs. Elles sont d'une grande importance pratique et très fréquemment employées.

On retiendra les énoncés correspondants :

- le torseur d'efforts intérieurs au point P est *égal au torseur de tous les efforts extérieurs au système \mathcal{S} appliqués en aval de P* ;
- il est aussi l'*opposé du torseur de tous les efforts extérieurs au système \mathcal{S} appliqués en amont de P* .

3.10 Discontinuités du mouvement virtuel

La modélisation des efforts étant ainsi construite par dualité sur les mouvements virtuels (3.2) continus et continûment différentiables, on s'intéresse maintenant à l'expression du principe des puissances virtuelles pour les mouvements virtuels continus et continûment différentiables *par morceaux* sur AB . On suppose qu'aucun des points P_j de discontinuité de $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ sur AB ne coïncide avec un point d'application d'effort concentré (§3.8). Le raisonnement est semblable à celui mis en œuvre au paragraphe 2.9.

On obtient l'expression du principe des puissances virtuelles pour ces mouvements virtuels :

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mathcal{S} \text{ et } \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.}, \\ \int_{A'B'} [\mathbf{f}(s)] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s)\} ds + [\mathbf{R}_{A'}^{\mathcal{S}'}] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_{A'})\} + [\mathbf{R}_{B'}^{\mathcal{S}'}] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}(s_{B'})\} \\ - \int_{A'B'} [\mathbf{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathbf{D}}(s)\} ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} [\mathbf{X}(s_j)] \cdot \llbracket \{\hat{\mathbf{U}}(s_j)\} \rrbracket = 0, \\ \llbracket \hat{\mathbf{U}}(s_j) \rrbracket = \hat{\mathbf{U}}(s_j^+) - \hat{\mathbf{U}}(s_j^-) \quad \text{saut de } \hat{\mathbf{U}} \text{ au point } P_j \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit maintenant, pour un sous-système quelconque ⁽⁷⁾ :

$$(3.47) \quad \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = - \int_{A'B'} [\mathbf{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathbf{D}}(s)\} ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} [\mathbf{X}(s_j)] \cdot \llbracket \{\hat{\mathbf{U}}(s_j)\} \rrbracket$$

où le champ $[\mathbf{X}]$ est supposé continu aux points P_j .

3.11 Pertinence du modèle

Torseur des efforts intérieurs au point P

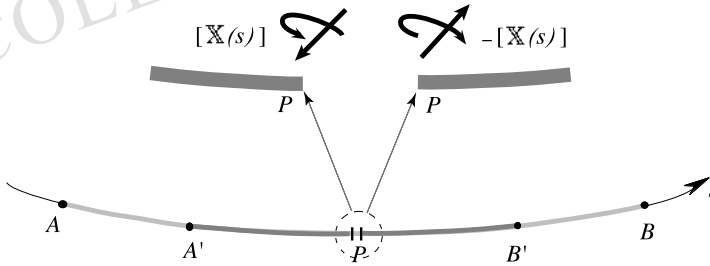


Figure 9 – Interprétation physique du modèle

La figure 9 illustre l'interprétation physique donnée au paragraphe 3.7 : le sous-système « aval » PB' exerce en P sur le sous-système « amont » $A'P$ des actions de contact représentées par le torseur $[\mathbf{X}(s)] = [P, \underline{\mathbf{X}}(s), \underline{\mathbf{T}}(s)]$ et inversement le sous-système amont exerce en P sur le sous-système aval des actions de contact représentées par le torseur $-[\mathbf{X}(s)]$.

$[\mathbf{X}(s)]$ est le torseur d'efforts intérieurs pour le milieu curviligne au point P (cf. § 3.5 pour la remarque sur la terminologie).

⁽⁷⁾L'interprétation de cette formule dans le cadre de la théorie mathématique des distributions est évidente.

Domaines pratiques d'application du modèle

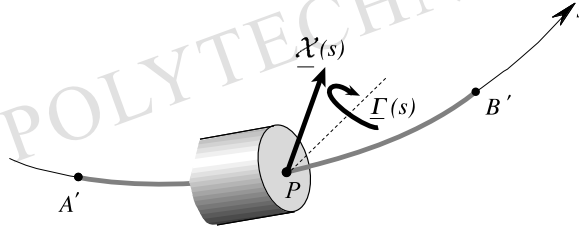


Figure 10 – Torseur des efforts appliqués par PB' sur $A'P$ « à travers la section droite » en P

La modélisation obtenue, plus élaborée que celle de la section 2, remplit les objectifs fixés au paragraphe 3.1 en ce sens qu'elle n'impose pas de conditions de compatibilité aux efforts extérieurs à la différence du paragraphe 2.10. Ainsi, notamment, des efforts d'orientation quelconque et des moments peuvent être appliqués aux extrémités du système, et la densité linéique d'efforts extérieurs de même que les efforts concentrés peuvent être quelconques. Cette modélisation permet la représentation curviligne des solides élancés du type **poutres** et **arcs**, auxquels leur constitution (section plus importante que pour les fils, fibres constitutives bien solidarisées) confère une raideur qui permet l'application d'efforts extérieurs plus généraux que dans la section 2 et représentables par des torseurs quelconques.

Ce domaine de pertinence justifie le titre de **Statique des poutres**⁽⁸⁾ donné à cette section.

Terminologie

Il est d'usage de décomposer les éléments de réduction $\underline{X}(s)$ et $\underline{L}(s)$ du torseur d'efforts intérieurs en P en leurs composantes suivant $\underline{t}(s)$, vecteur unitaire tangent en P à la courbe directrice, et dans le plan de **section droite** (plan normal à $\underline{t}(s)$). On pose :

$$(3.48) \quad \underline{X}(s) = N(s)\underline{t}(s) + \underline{V}(s)$$

$$(3.49) \quad \underline{L}(s) = C(s)\underline{t}(s) + \underline{M}(s)$$

où $\underline{V}(s)$ et $\underline{M}(s)$ sont situés dans le plan de section droite (figure 11).

La terminologie est la suivante.

- $N(s)$ est l'**effort normal** en P : il est, en effet, normal à la section droite.
- $\underline{V}(s)$ est l'**effort tranchant** en P : situé dans le plan de la section droite, il est orthogonal à la courbe directrice.

⁽⁸⁾ Poutres droites ou courbes, planes ou gauches.

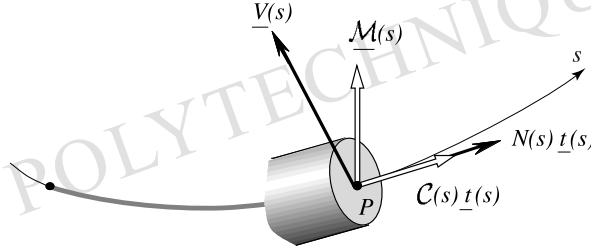


Figure 11 – Effort normal, effort tranchant, moment de torsion, moment fléchissant en P

- $\underline{C}(s)$ est le **moment de torsion** en P : tangent en P à la courbe directrice du solide élané, il est l'homologue du couple de torsion d'une barre cylindrique (chapitre VIII, § 7.1 ; chapitre XII, § 2.5).
- $\underline{M}(s)$ est le **moment fléchissant** en P : situé dans le plan de la section droite, il est l'homologue du moment de flexion d'une barre cylindrique (chapitre IX, § 4.2 ; chapitre XII, § 2.5)⁽⁹⁾.

On remarque que cette terminologie se réfère à la fois à la section droite et à la courbe directrice. L'élanement du solide, qui motive sa modélisation unidimensionnelle sur la courbe directrice, rappelle les sollicitations classiques sur une barre cylindrique. Le rôle essentiel de la section transversale dans la transmission des efforts intérieurs (figure 10), qui induit notamment la raideur du solide, explique la référence à la section droite.

En ce qui concerne le signe de ces grandeurs on retiendra essentiellement que $N(s)$ est **positif** quand la partie aval de la poutre exerce au point P sur la partie amont un **effort de traction** (cf. chapitre VI, § 2.3).

Avec ces notations, on peut expliciter la densité linéique de puissance virtuelle des efforts intérieurs. Il vient :

$$(3.50) \quad p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -N(s)\hat{D}(s) - \underline{V}(s) \cdot \left(\frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \hat{\underline{U}}(s) \right) - \underline{C}(s) \underline{t}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} - \underline{M}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds}$$

où $\hat{D}(s)$ a la même signification qu'en statique des fils

$$(3.51) \quad \hat{D}(s) = \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$$

On voit que si le milieu curviligne considéré a des résistances nulles vis-à-vis de l'effort tranchant, du moment fléchissant et du moment de torsion, qui imposent donc que $\underline{V}(s) =$

⁽⁹⁾ Ces notations sont en accord (au graphisme près) avec celles retenues dans les normes internationales ; à l'exception du moment de torsion pour lequel la notation standard T a dû être écartée pour des raisons évidentes d'harmonie avec le reste de l'ouvrage.

$0, \underline{M}(s) = 0, \underline{C}(s) = 0$, (3.50) se réduit, avec le changement de notation $N(s)$ pour $X(s)$, à l'expression obtenue en statique des fils : $p_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = p_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = -N(s) \hat{D}(s)$. De même les équations de la statique des poutres se ramènent alors à celle de la statique des fils avec les conditions correspondantes de compatibilité imposées aux efforts extérieurs.

Présentation classique

L'interprétation physique illustrée sur les figures 9 et 10 est la base de la présentation classique de la statique des poutres : par hypothèse les efforts intérieurs sont des actions de contact, transmises à travers la section droite qui se réduisent, au point courant P , au torseur $[\mathbb{X}(s)] = [P, \underline{\mathcal{X}}(s), \underline{\Gamma}(s)]$ exercé par l'aval sur l'amont. Les équations (3.25), (3.41), (3.43) ou (3.44), s'établissent en écrivant l'équilibre global d'un sous-système défini par un élément d'arc infinitésimal, par le « point » P_i , ou par un arc fini de AB , comme cela est schématisé sur la figure 12.

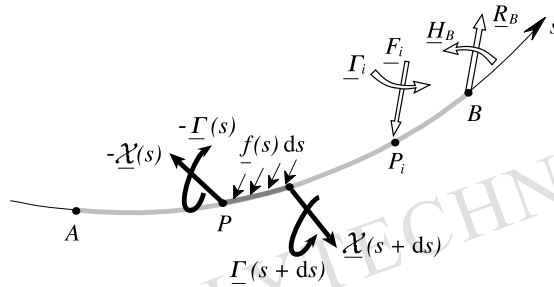


Figure 12 – Statique des poutres : établissement des équations d'équilibre

3.12 Confrontation de la modélisation curviligne et de la modélisation tridimensionnelle

Il est naturel, après la construction qui a ainsi été faite pour la modélisation des efforts intérieurs dans un milieu curviligne, de tenter d'établir un lien avec la modélisation présentée au chapitre V pour les efforts intérieurs dans un milieu continu tridimensionnel.

En effet la modélisation « milieux curvilignes » construite ici, de façon systématique sur des systèmes unidimensionnels sera notamment utilisée dans la pratique pour représenter des solides, élancés certes, mais tridimensionnels. On va donc chercher, pour un même solide élancé (poutre ou arc), comment rattacher le champ de torseurs $[\mathbb{X}]$ représentant les efforts intérieurs dans la modélisation curviligne, au champ de contrainte $\underline{\sigma}$ de la description des efforts intérieurs dans le formalisme des milieux continus tridimensionnels.

Pour cela il est d'abord nécessaire de confronter les descriptions géométriques utilisées dans les deux approches. On considère un solide élancé \mathcal{S} de volume Ω (figure 13), et l'on suppose connue la position de la courbe directrice choisie pour la représentation curviligne (dans la direction de l'élancement du solide!).

On remarque que tout mouvement virtuel $\hat{\mathbf{U}}$, continu et différentiable, défini au paragraphe 3.3 pour le milieu curviligne par la donnée d'un champ de distributeurs $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ sur la courbe

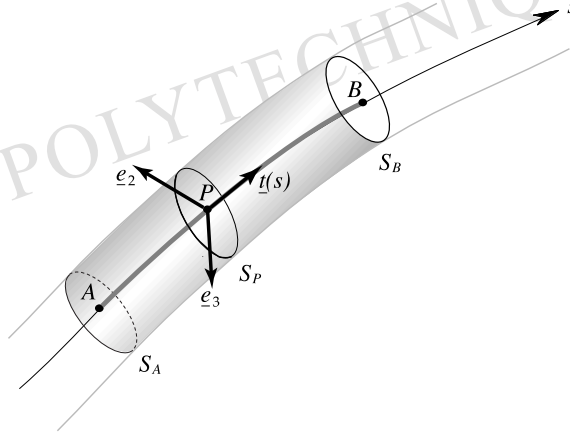
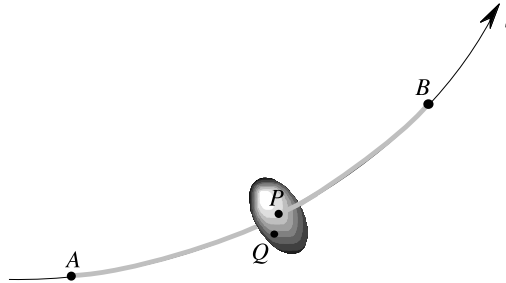


Figure 13 – Modélisation curviligne d'un solide élancé

directrice, permet de construire, **au voisinage de celle-ci**, un mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$ pour le milieu continu tridimensionnel.

Ce mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$ peut être choisi par référence à l'interprétation de $\{\underline{U}\}$ pour les mouvements réels du milieu curviligne (cf. figure 8). Il est défini, **au voisinage de la courbe directrice supposée régulière**, en donnant à chaque section plane orthogonale à celle-ci le mouvement rigidifiant défini par le distributeur $\{\hat{\underline{U}}(s)\}$. Autrement dit, P désignant le point courant sur la courbe directrice et Q le point courant dans la section plane orthogonale en P (figures 13 et 14), le mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$ est défini par :

$$(3.52) \quad \hat{\underline{U}}(Q) = \hat{\underline{U}}(s) + \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{PQ} = \hat{\underline{U}}(s) + \hat{\underline{\Omega}}(s) \cdot \underline{PQ} .^{(10)}$$

Figure 14 – Courbe directrice et élément de surface plane orthogonal à la courbe directrice; définition du mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$

La démarche suivie pour confronter les deux modélisations est alors la suivante.

Pour le milieu continu tridimensionnel, on considère le système \mathcal{S}_3 limité par les deux sections S_A et S_B orthogonales à la courbe directrice en A et B (figure 13), et tout sous-système \mathcal{S}'_3

⁽¹⁰⁾ $\hat{\underline{\Omega}}(s)$ est le tenseur antisymétrique associé au vecteur $\hat{\underline{\Omega}}(s)$ (cf. chapitre III, § 3.5).

limité par les sections $S_{A'}$ et $S_{B'}$ orthogonales en A' et B' . En désignant par S_P la section orthogonale à la courbe directrice en son point courant P , la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit :

$$(3.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S'_3 \subseteq S_3, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. continu et continûment différentiable,} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \int_{A'B'} ds \int_{S_P} \underline{\underline{\sigma}}(Q) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}(Q) da. \end{array} \right.$$

Pour les mouvements virtuels définis par (3.52), l'expression de $\underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}(Q)$ est :

$$(3.54) \quad \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}(Q) = \underline{\underline{\hat{Q}}}(s) + \left(\frac{d\underline{\underline{\hat{U}}}(s)}{ds} - \underline{\underline{\hat{Q}}}(s) \cdot \underline{\underline{t}}(s) + \frac{d\underline{\underline{\hat{Q}}}(s)}{ds} \wedge \underline{\underline{PQ}} \right) \otimes \underline{\underline{t}}(s).$$

Puisque $\underline{\underline{\hat{Q}}}(s)$ est antisymétrique, l'expression de $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ se réduit à :

$$(3.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S'_3 \subseteq S_3, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. continu et continûment différentiable,} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \int_{A'B'} ds \int_{S_P} \left(\frac{d\underline{\underline{\hat{U}}}(s)}{ds} - \underline{\underline{\hat{Q}}}(s) \cdot \underline{\underline{t}}(s) + \frac{d\underline{\underline{\hat{Q}}}(s)}{ds} \wedge \underline{\underline{PQ}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s) da \end{array} \right.$$

où l'on reconnaît, dans la parenthèse sous l'intégrale, le champ de vitesse induit sur la section S_P par le distributeur $\{\hat{\underline{D}}(s)\}$ défini par (3.14).

En introduisant le torseur résultant des efforts surfaciques $\underline{\underline{T}}(Q, \underline{\underline{t}}(s)) = \underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s)$ exercés sur S_P , soit

$$(3.56) \quad \left[P, \int_{S_P} \underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s) da, \int_{S_P} \underline{\underline{PQ}} \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s)) da \right],$$

on transforme l'expression (3.55) de $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ en :

$$(3.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S'_3 \subseteq S_3, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. continu et continûment différentiable,} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \int_{A'B'} [P, \int_{S_P} \underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s) da, \int_{S_P} \underline{\underline{PQ}} \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s)) da] \cdot \{\hat{\underline{D}}(s)\} ds. \end{array} \right.$$

Par ailleurs pour le milieu curviligne, considérant le système S ou le sous-système S' correspondant respectivement à S_3 ou S'_3 , on a :

$$(3.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall S' \subseteq S, \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. continu et continûment différentiable,} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \int_{A'B'} [\mathbb{X}(s)] \cdot \{\hat{\underline{D}}(s)\} ds. \end{array} \right.$$

En identifiant les deux expressions (3.57) et (3.58) pour les systèmes S_3 et S , compte tenu du caractère arbitraire de $\hat{\underline{U}}$, on obtient la relation :

$$(3.59) \quad \forall P \in AB, [\mathbb{X}(s)] = [P, \int_{S_P} \underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s) da, \int_{S_P} \underline{\underline{PQ}} \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(Q) \cdot \underline{\underline{t}}(s)) da].$$

Le torseur d'efforts intérieurs dans la modélisation des milieux curvilignes est identifié au torseur des actions de contact sur la section droite S_P du solide tridimensionnel, de normale sortante dirigée selon la tangente **orientée** en P à la courbe directrice.

Ceci est cohérent avec l'interprétation de la section droite, dans la présentation classique, comme section à travers laquelle sont transmis les efforts intérieurs en P .

En explicitant (3.59) il vient :

$$(3.60) \quad \underline{\mathcal{X}}(s) = \int_{S_P} \underline{\sigma}(Q) \cdot \underline{t}(s) da, \quad \underline{\Gamma}(s) = \int_{S_P} \underline{PQ} \wedge (\underline{\sigma}(Q) \cdot \underline{t}(s)) da,$$

et, de façon plus détaillée en introduisant un repère orthonormé $\underline{t}(s)$, \underline{e}_2 , \underline{e}_3 au point P (figure 13) :

$$(3.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} N(s) = \int_{S_P} \sigma_{11} da, \\ \underline{V}(s) = \int_{S_P} (\underline{e}_2 \sigma_{12}(Q) + \underline{e}_3 \sigma_{13}(Q)) da, \\ \underline{C}(s) = \int_{S_P} (x_2 \sigma_{13}(Q) - x_3 \sigma_{12}(Q)) da, \\ \underline{\mathcal{M}}(s) = \int_{S_P} (x_3 \underline{e}_2 - x_2 \underline{e}_3) \sigma_{11}(Q) da. \end{array} \right.$$

On peut remarquer que la référence classique à l'orthogonalité de la section S_P n'est pas nécessaire. En désignant par $\underline{n}(s)$ la normale unitaire à la section S_P sur laquelle le mouvement virtuel $\underline{\hat{U}}$ est défini par (3.52), la formule (3.54) donnant $\underline{\text{grad}} \underline{\hat{U}}(Q)$ est modifiée en

$$(3.62) \quad \underline{\text{grad}} \underline{\hat{U}}(Q) = \underline{\hat{\Omega}}(s) + \left(\frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} - \underline{\hat{\Omega}}(s) \cdot \underline{t}(s) + \frac{d\underline{\hat{\Omega}}(s)}{ds} \wedge \underline{PQ} \right) \otimes \frac{\underline{n}(s)}{\underline{t}(s) \cdot \underline{n}(s)}$$

tandis que l'élément d'intégration dans (3.55) devient $\underline{t}(s) \cdot \underline{n}(s) da ds$. Ceci conduit à la formule

$$(3.63) \quad \forall P \in AB, [\mathbb{X}(s)] = \int_{S_P} [Q, \underline{\sigma}(Q) \cdot \underline{n}(s), \underline{Q}] da$$

qui précise l'écriture de l'équation (3.59) pour une section transversale quelconque.

On vérifie que les formules (3.59) et (3.63) sont équivalentes en considérant l'équilibre global d'un tronçon infinitésimal du solide tridimensionnel à l'abscisse s .

3.13 Condition de Navier-Bernoulli

Définition

Les lois de comportement classiques utilisées pour les milieux curvilignes, telles que la loi thermoélastique explicitée au chapitre XII, font apparaître que les mouvements réels du milieu curviligne concerné, évidemment de la forme définie au paragraphe (3.2), appartiennent à un sous-ensemble caractérisé par la **condition de Navier-Bernoulli**.

D'une manière générale on énonce cette condition pour les mouvements virtuels du milieu curviligne comme pour ses mouvements réels de la façon suivante : le champ $\{\underline{\hat{U}}\}$ est tel que si l'on donne à la microstructure transversale, matérialisée par **l'élément de surface plane orthogonale** à la courbe directrice au point courant P , le mouvement virtuel rigidifiant défini par le distributeur $\{\underline{\hat{U}}(s)\}$, cet élément **demeure orthogonal** à la courbe directrice dont le mouvement est défini par le champ $\underline{\hat{U}}$.

Cela implique donc que le mouvement virtuel de la microstructure en P est défini par celui de la courbe directrice, à une rotation virtuelle arbitraire près autour de son vecteur tangent $\underline{t}(s)$. Les champs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\Omega}}$ sont donc liés par une relation que l'on se propose d'expliciter.

Relation entre les champs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\Omega}}$

Pour établir cette relation on calcule au point P les taux de rotation de la microstructure et de la courbe directrice dans leurs mouvements virtuels respectifs :

- Pour la microstructure, dans le mouvement virtuel rigidifiant défini par le distributeur $\{\hat{U}(s)\}$ le taux de rotation virtuel est évidemment égal à $\underline{\hat{\Omega}}(s)$.
- Pour évaluer le taux de rotation virtuel de la courbe directrice au point P dans le mouvement virtuel défini par le champ $\underline{\hat{U}}$, on considère en ce point un vecteur $d\underline{M} = \underline{t}(s) ds$: sa dérivée dans le mouvement virtuel est

$$(3.64) \quad \underline{\hat{dM}} = \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} ds ;$$

en remarquant que

$$(3.65) \quad \begin{cases} \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} = \left(\frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s) \right) \underline{t}(s) + (\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds}) \wedge \underline{t}(s) \text{ soit} \\ \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} = \hat{D}(s) \underline{t}(s) + (\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds}) \wedge \underline{t}(s) \end{cases}$$

l'équation (3.64) s'écrit

$$(3.66) \quad \underline{\hat{dM}} = \hat{D}(s) d\underline{M} + (\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds}) \wedge d\underline{M}$$

qui met en évidence le taux d'extension virtuel $\underline{\hat{D}}(s)$ déjà défini en (3.50) et le taux de rotation virtuel au point P égal à

$$(3.67) \quad (\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds}) .$$

La condition de Navier-Bernoulli impose l'égalité de $\underline{\hat{\Omega}}(s)$ et de $(\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds})$ à une rotation virtuelle arbitraire près autour de $\underline{t}(s)$, ce qui s'exprime par

$$(3.68) \quad \forall P \in AB, \quad \underline{\hat{\Omega}}(s) \wedge \underline{t}(s) = (\underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds}) \wedge \underline{t}(s)$$

c'est-à-dire

$$(3.69) \quad \forall P \in AB, \quad \underline{\hat{\Omega}}(s) \wedge \underline{t}(s) = \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} - \hat{D}(s) \underline{t}(s)$$

ou encore, de façon équivalente, en désignant par $\hat{\Omega}_t(s)$ la composante de $\underline{\hat{\Omega}}(s)$ selon $\underline{t}(s)$

$$(3.70) \quad \forall P \in AB, \quad \underline{\hat{\Omega}}(s) = \underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} + \hat{\Omega}_t(s) \underline{t}(s) .$$

Ces relations linéaires entre les fonctions $\hat{\underline{U}}(s)$ et $\hat{\underline{\Omega}}(s)$ montrent que l'ensemble des mouvements virtuels ci-dessus qui respectent la condition de Navier-Bernoulli est un sous-espace vectoriel de celui considéré au paragraphe 3.3. En particulier il résulte de (3.70) qu'un mouvement virtuel de Navier-Bernoulli est défini sur AB par les seules données du champ vectoriel $\hat{\underline{U}}$ et du champ scalaire $\hat{\underline{\Omega}}_t$.

Ceci rejoint l'interprétation donnée plus haut de la condition de Navier-Bernoulli ; mais on voit aussi à partir de (3.69) que, de façon équivalente, un mouvement virtuel de Navier-Bernoulli est défini par les données sur AB du champ scalaire \hat{D} et du champ vectoriel $\hat{\underline{\Omega}}$.

On peut remarquer que, même si la référence classique à la matérialisation de la microstructure par un élément de section plane orthogonale à la courbe directrice a été faite initialement, cette orthogonalité n'a joué aucun rôle dans la démonstration ci-dessus.

Équations aux discontinuités

Dans le cas de mouvements virtuels continus et continûment différentiables par morceaux, la condition de Navier-Bernoulli impose des conditions sur les discontinuités permises aux champs $\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\Omega}}$. On les obtient par exemple en interprétant (3.69) et (3.70) dans le cadre de la théorie des distributions. Il vient ainsi, en chaque point P_j ⁽¹¹⁾ de discontinuité de $\{\hat{\underline{U}}\}$:

$$(3.71) \quad \llbracket \hat{\underline{U}}(s_j) \rrbracket - \llbracket \hat{\underline{U}}_t(s_j) \rrbracket \underline{t}(s_j) = 0 ,$$

autrement dit la **discontinuité** permise pour $\hat{\underline{U}}$ **ne porte que sur la composante tangente** à la courbe directrice. On a aussi :

$$(3.72) \quad \llbracket \hat{\underline{\Omega}}(s_j) \rrbracket = \underline{t}(s_j) \wedge \llbracket \frac{d\hat{\underline{U}}}{ds}(s_j) \rrbracket + \llbracket \hat{\underline{\Omega}}_t(s_j) \rrbracket \underline{t}(s_j) .$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Les formules (3.20) et (3.47) donnent l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un mouvement virtuel quelconque. En tenant compte des relations (3.69) et (3.71, 3.72) caractéristiques des mouvements virtuels de Navier-Bernoulli on obtient l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un tel mouvement :

$$(3.73) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = & - \int_{A'B'} (N(s)\hat{D}(s) + \underline{L}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{\Omega}}(s)}{ds}) ds \\ & - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} (N(s_j) \llbracket \hat{\underline{U}}_t(s_j) \rrbracket + \underline{L}(s_j) \cdot \llbracket \hat{\underline{\Omega}}(s_j) \rrbracket) . \end{aligned}$$

Comparée à la formule (3.50), cette expression met en évidence que l'**effort tranchant** $\underline{V}(s)$ **a une contribution nulle** dans la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans les mouvements virtuels qui satisfont la **condition de Navier-Bernoulli**.

⁽¹¹⁾La courbe directrice est supposée régulière en P_j .

La formule (3.73) exprime $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ en fonction des champs $\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}$ (y compris leurs discontinuités) qui suffisent à définir les mouvements virtuels de Navier-Bernoulli. On peut aussi expliciter $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ en fonction des champs $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}$ (y compris leurs discontinuités). Il vient, avec les notations du trièdre de Frenet (figure 4) :

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = & - \int_{A'B'} \left(N(s) \frac{d\hat{\mathbf{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{\mathbf{t}}(s) + C(s) \left(\frac{d\hat{\mathbf{\Omega}}_t(s)}{ds} + \frac{b(s)}{\rho(s)} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{U}}(s)}{ds} \right) \right) ds \\ & - \int_{A'B'} \underline{\mathcal{M}}(s) \cdot \left(\hat{\mathbf{\Omega}}_t(s) \frac{\underline{\mathbf{n}}(s)}{\rho(s)} + \frac{\underline{\mathbf{n}}(s)}{\rho(s)} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{U}}(s)}{ds} + \underline{\mathbf{t}}(s) \wedge \frac{d^2\hat{\mathbf{U}}(s)}{ds^2} \right) ds \\ & - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} \left(N(s_j) [\hat{\mathbf{U}}_t(s_j)] + C(s_j) [\hat{\mathbf{\Omega}}_t(s_j)] + \underline{\mathcal{M}}(s_j) \cdot \left(\underline{\mathbf{t}}(s_j) \wedge \left[\frac{d\hat{\mathbf{U}}(s_j)}{ds} \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Cette expression met en évidence que la puissance virtuelle des efforts intérieurs, pour les mouvements virtuels de Navier-Bernoulli ainsi définis, fait intervenir la **dérivée seconde** du champ $\hat{\mathbf{U}}$ et les sauts de sa dérivée première.

3.14 Poutres et arcs, fils et câbles

À l'issue de cette section nous disposons de deux modélisations pour les milieux unidimensionnels curvilignes, dont on a évalué les domaines de pertinence :

- modèle applicable aux fils et câbles sans raideur d'une part, développé dans la section 2, où les efforts intérieurs sont modélisés au moyen du champ de tension, champ scalaire défini sur la courbe directrice ;
- modèle applicable aux poutres et arcs, où les efforts intérieurs sont modélisés par un champ de torseur défini sur cette même courbe.

Ceci rappelle évidemment la situation similaire rencontrée au chapitre V pour le milieu continu tridimensionnel avec la modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire, la pression, puis par un champ tensoriel, les contraintes.

Le parallèle vaut d'être commenté.

Pour le milieu unidimensionnel curviligne on a souhaité, dans la présentation, mettre en évidence la nécessité physique, pour rendre compte de la « raideur » des objets tridimensionnels élancés, d'introduire dans la modélisation géométrique des paramètres supplémentaires qui traduisent l'intervention de la microstructure sous-jacente (§3.1). Ainsi les deux modélisations mécaniques ont été construites sur des modélisations géométriques distinctes, la seconde pouvant être qualifiée de « plus riche » que la première.

Néanmoins il est clair qu'une démarche semblable à celle suivie au chapitre V aurait pu être adoptée en choisissant la modélisation géométrique enrichie pour construire les deux modélisations mécaniques. Le modèle « tension » s'obtient alors en restreignant l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs à une forme linéaire de $\frac{d\hat{\mathbf{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{\mathbf{t}}(s)$, taux d'extension virtuel, qui est l'homologue unidimensionnel du taux de dilatation virtuel $\text{div } \hat{\mathbf{U}}(\underline{x})$ du milieu continu tridimensionnel.

Mais le rapprochement peut aussi évidemment être fait, déjà amorcé au paragraphe 3.1, avec le passage du modèle continu tridimensionnel classique au modèle micropolaire (chapitre V, § 5.3), qui a la vertu pédagogique de faire appréhender la notion de microstructure sous-jacente à partir de l'expérience d'objets mécaniques quotidiens.

Au-delà des méthodes de construction on peut aborder la comparaison des modélisations sous un angle physique relié aux capacités de résistance des éléments constitutifs tridimensionnels ou unidimensionnels. Ainsi qu'on l'a remarqué au chapitre V (§ 3.5), le modèle « contrainte » pour le milieu continu tridimensionnel s'identifie au modèle « pression » lorsque le milieu concerné est constitué d'un matériau qui n'offre aucune résistance à la cission, c'est-à-dire est régi en tout point par la condition de résistance nulle

$$(3.75) \quad \forall \underline{n}, \underline{\tau}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \underline{n}(\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) = 0$$

qui s'écrit sous forme dualisée

$$(3.76) \quad \forall \hat{\underline{U}} \text{ t.q. } \operatorname{div} \hat{\underline{U}} = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{d}}(\hat{\underline{U}}) = 0 ;$$

de même, pour le milieu curviligne le modèle « torseur » s'identifie au modèle « tension » pour un milieu régi tel que, en tout point,

$$(3.77) \quad \forall \hat{\underline{U}} \text{ t.q. } \hat{\underline{D}} = \frac{d\hat{\underline{U}}}{ds} \cdot \underline{\underline{t}} = 0 \quad , \quad [\mathbb{X}] \cdot \{\hat{\underline{D}}\} = 0$$

c'est-à-dire soumis à la condition de résistance nulle

$$(3.78) \quad \begin{cases} \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{t}}(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{t}}) = 0 \\ \underline{\underline{\Gamma}} = 0 \end{cases}$$

qui porte sur l'effort tranchant $\underline{V} = \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{t}}(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{t}})$, sur le couple de torsion \mathcal{C} et sur le moment fléchissant \underline{M} . On précise ainsi le concept de raideur nulle.

4 Structures formées d'éléments curvilignes

4.1 Présentation

On rencontre fréquemment dans la pratique des systèmes constitués d'éléments élancés assemblés entre eux, que l'on peut modéliser comme des **structures** bi- ou tridimensionnelles formées d'**éléments de milieux curvilignes** (poutres droites ou courbes) réunis par des **nœuds** d'assemblage.

Dans une évolution quasi-statique, la structure ainsi modélisée est soumise à une histoire de sollicitation (cf. chapitre VIII, § 1.2) définie en fonction du temps par des **efforts donnés**, répartis sur chaque élément $A_i B_i$, ou concentrés exercés en des points P_i sur les éléments et à leurs extrémités A_i et B_i , et par des déplacements donnés, imposés en règle générale aux extrémités A_i et B_i de certains éléments. Ces

données doivent évidemment, en ce qui concerne les efforts, satisfaire la condition d'équilibre global pour que l'analyse quasi-statique ait un sens.

D'une manière générale cette analyse a pour objet la détermination, dans tous les éléments de la structure, de l'histoire de la distribution des efforts intérieurs et de l'histoire des déplacements en fonction de l'histoire des données. La résolution complète de ce problème nécessite la connaissance d'une loi de comportement du milieu curviligne, telle que la loi de comportement thermoélastique présentée au chapitre XII, fonctionnelle qui relie les valeurs locales des efforts intérieurs et de la déformation ; on peut d'ailleurs noter que le plus souvent les lois de comportement adoptées imposent aux mouvements réels de satisfaire la condition de Navier-Bernoulli (§ 3.13).

La simplification considérable apportée par le caractère unidimensionnel du milieu curviligne se manifeste par l'intégration explicite des équations d'équilibre (§ 3.9). Elle permet une analyse statique fructueuse qui fera l'objet du paragraphe 4.5 après que l'on aura, aux paragraphes 4.2 à 4.4, présenté la modélisation des principales conditions d'extrémités, d'appuis et d'assemblages rencontrées dans la pratique.

Il est important de noter que ces conditions écrites sur la configuration actuelle concernent du point de vue cinématique la *vitesse* du milieu curviligne au point considéré, c'est-à-dire qu'elles portent sur les valeurs de tout ou partie des composantes du distributeur $\{\mathbb{U}(s)\}$ en ce point. Dans l'hypothèse des petites perturbations, dont la validité devra être soigneusement contrôlée, le déplacement du milieu curviligne à partir de la configuration de référence est, lui-aussi, décrit par un distributeur (cf. chapitre XII, § 2.2) et les conditions ci-dessus lui sont aussi applicables⁽¹²⁾.

4.2 Conditions d'extrémités, conditions d'appuis

Forme générale de ces conditions

On considère typiquement un élément AB (figure 15) et l'on s'intéresse, à titre d'exemple, à l'extrémité B de cet élément qui est supposée ne pas être liée à un nœud d'assemblage. Les conditions aux limites qui peuvent être imposées à cette extrémité concernent les valeurs des éléments de réduction en B

- du torseur $[\mathbb{R}_B]$, soient \underline{R}_B et \underline{H}_B
- du distributeur $\{\mathbb{U}(s_B)\}$, noté $\{\mathbb{U}_B\}$, soient \underline{U}_B et $\underline{\Omega}_B$.

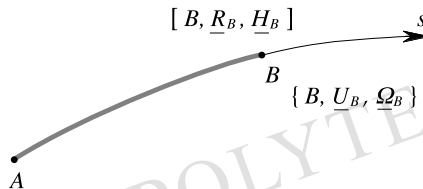


Figure 15 – Conditions d'extrémités : notations

⁽¹²⁾ Cf. la discussion du chapitre VIII (§ 1.3).

De manière analogue à ce qui a été dit dans le cas du milieu continu tridimensionnel, elles correspondent à la donnée de **six** composantes, orthogonales entre elles, pour l'ensemble du torseur $[\mathbb{R}_B]$ et du distributeur $\{\mathbb{U}_B\}$, c'est-à-dire : trois composantes orthogonales pour les deux vecteurs \underline{R}_B et \underline{U}_B , et trois pour les vecteurs \underline{H}_B et \underline{Q}_B .

Extrémité chargée, extrémité libre

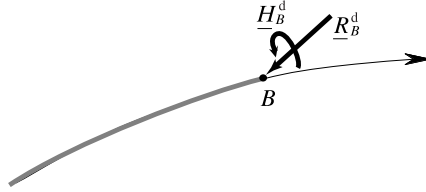


Figure 16 – Extrémité chargée

L'extrémité B est dite **chargée** lorsque les conditions aux limites qui y sont imposées portent exclusivement sur le torseur $[\mathbb{R}_B]$ sous la forme

si les valeurs de \underline{R}_B et \underline{H}_B y sont imposées nulles. Ainsi :

$$(4.1) \quad \begin{cases} [\mathbb{R}_B] = [\mathbb{R}_B^d] \\ [B, \underline{R}_B, \underline{H}_B] = [B, \underline{R}_B^d, \underline{H}_B^d] \end{cases}$$

où l'indice supérieur « d », comme au chapitre VIII, indique les valeurs données.

Physiquement, une telle condition est imposée par un chargement extérieur attaché à la structure tel que le poids d'un objet suspendu à l'extrémité du bras d'une grue.

Un cas particulier de la condition (4.1) est celui où les valeurs imposées sont données nulles :

$$(4.2) \quad \begin{cases} [\mathbb{R}_B] = [\mathbb{R}_B^d] = 0 \\ [B, \underline{R}_B, \underline{H}_B] = [B, 0, 0] \end{cases}$$

On dit alors que l'extrémité est **libre** en donnant à cet adjectif la même signification que dans la terminologie « surface libre » pour un milieu continu tridimensionnel.

Bien remarquer que, tant pour l'extrémité chargée que pour l'extrémité libre, aucune condition n'est imposée ni à \underline{U}_B ni à \underline{Q}_B : la détermination de $\{\mathbb{U}_B\}$ sera un résultat de l'étude complète de la structure.

Mouvement imposé à l'extrémité

L'autre type de condition d'extrémité « homogène » correspond à la donnée du distributeur $\{\mathbb{U}_B\}$:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \{\mathbb{U}_B\} = \{\mathbb{U}_B^d\} \\ \{B, \underline{U}_B, \underline{Q}_B\} = \{B, \underline{U}_B^d, \underline{Q}_B^d\} \end{cases}$$

Physiquement, une telle condition est imposée par un appui asservi à suivre le mouvement défini par $\{\mathbb{U}_B^d\}$. Pour ce type de condition, c'est la détermination de $[\mathbb{R}_B]$ qui sera un résultat de l'étude complète de la structure.

Un cas particulier de cette condition est celui où le déplacement et la rotation à l'extrémité sont imposés nuls

$$(4.4) \quad \begin{cases} \{\mathbb{U}_B\} = \{\mathbb{U}_B^d\} = 0 \\ \{B, \underline{U}_B, \underline{\Omega}_B\} = \{B, 0, 0\}, \end{cases}$$

L'appui correspondant est un *encastrement fixe et rigide* (Figure 17).

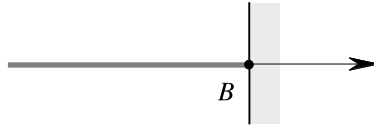


Figure 17 – Extrémité fixe dans un encastrement rigide

Conditions mixtes à l'extrémité

Il s'agit de conditions où à la fois le torseur $[\mathbb{R}_B]$ et le distributeur $\{\mathbb{U}_B\}$ sont concernés par la donnée de trois de leurs composantes orthogonales entre elles. Sans souci d'exhaustivité on présentera les plus fréquentes.

Extrémité fixe avec rotule

Les conditions mixtes suivantes sont imposées :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \underline{H}_B = \underline{H}_B^d = 0 \\ \underline{U}_B = \underline{U}_B^d = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire physiquement que le point B est fixe et qu'une articulation rotoïde ou rotule (Figure 18) impose un moment \underline{H}_B nul permettant une rotation arbitraire $\underline{\Omega}_B$ (en pratique, il est évidemment impossible et, de fait inutile, de réaliser une articulation rotoïde permettant une rotation complètement arbitraire). L'étude de la structure déterminera \underline{R}_B et $\underline{\Omega}_B$.



Figure 18 – Extrémité fixe avec rotule. Articulation rotoïde

Une extension évidente de la condition (4.5) concerne le cas où la valeur \underline{U}_B^d imposée n'est pas nulle :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \underline{H}_B = \underline{H}_B^d = 0 \\ \underline{U}_B = \underline{U}_B^d . \end{cases}$$

Extrémité fixe avec articulation axiale

Plus couramment, dans les applications aux structures du génie civil notamment, on rencontre la condition mixte suivante :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \underline{H}_B \cdot \underline{e}_y = 0 , \quad \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_x = 0 , \quad \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_z = 0 \\ \underline{U}_B = 0 , \end{cases}$$

où le point B est fixe, tandis qu'une articulation autour d'un goujon parallèle à \underline{e}_y impose la nullité de la composante de \underline{H}_B selon \underline{e}_y et empêche toute rotation autour de \underline{e}_x ou de \underline{e}_z (figure 19).



Figure 19 – Extrémité fixe avec articulation axiale

Extrémité mobile avec articulation axiale

Pour les mêmes applications, on trouve aussi la condition :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \underline{H}_B \cdot \underline{e}_y = 0 , \quad \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_x = 0 , \quad \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_z = 0 \\ \underline{R}_B \cdot \underline{e}_x = 0 , \quad \underline{U}_B \cdot \underline{e}_y = 0 , \quad \underline{U}_B \cdot \underline{e}_z = 0 , \end{cases}$$

qui correspond en B à un « appareil d'appui » mobile dans la direction \underline{e}_x (sur des rouleaux par exemple) avec une articulation parallèle à \underline{e}_y (figure 20)⁽¹³⁾.

Extrémité fixe en appui unilatéral avec articulation

Cette condition est fréquente dans la pratique (Figure 22) et souvent appelée « appui simple unilatéral » ; la référence habituelle pour les structures soumises à des charges verticales est évidemment la direction selon \underline{e}_z . Elle inclut, de fait, une « condition de résistance » de l'appui sous la forme d'une condition de signe (positivité) sur la composante verticale de la réaction \underline{R}_B appliquée à l'élément curviligne, à laquelle est adjointe une « règle de comportement » lorsque la condition de positivité pour que la liaison soit persistante n'est pas satisfaite : il y a alors décollement

⁽¹³⁾Ce type d'appui est notamment utilisé pour atténuer les effets des variations thermiques.

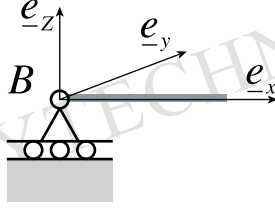


Figure 20 – Extrémité mobile avec articulation axiale

de l'élément par rapport à l'appui. Pour une articulation axiale parallèle à \underline{e}_y , par exemple, elle s'écrit :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{H}_B \cdot \underline{e}_y = 0, \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_x = 0, \underline{Q}_B \cdot \underline{e}_z = 0 \\ \underline{U}_B \cdot \underline{e}_y = 0, \underline{U}_B \cdot \underline{e}_x = 0 \\ \underline{R}_B \cdot \underline{e}_x \geq 0 \\ \underline{R}_B \cdot \underline{e}_x > 0 \Rightarrow \underline{U}_B \cdot \underline{e}_z = 0 \\ \underline{R}_B \cdot \underline{e}_x = 0 \Rightarrow \underline{U}_B \cdot \underline{e}_z \geq 0 \end{array} \right.$$

que l'on peut rapprocher de la définition de la liaison unilatérale donnée au chapitre VIII (§ 1.4).



Figure 21 – Articulation fixe et articulation mobile en appuis unilatéraux

À noter que pour le traitement de ce type d'appuis en analyse des structures dans le cadre de la théorie du **Calcul à la rupture** seules les trois premières équations de (4.9) doivent être prises en compte.

4.3 Conditions aux nœuds d'assemblage

Équilibre du nœud

Considérant un nœud d'assemblage entre plusieurs éléments d'une structure on convient ici, pour la formulation de la condition d'assemblage, d'orienter chacun de ces éléments **à partir du nœud**, c'est-à-dire que ce nœud, noté A , est l'extrémité amont (origine) de chacun des éléments AB_i (figure 22).

Pour l'élément AB_i , en appliquant l'équation (3.26), on a, au point A

$$(4.10) \quad [\mathbb{X}_A^i] = -[\mathbb{R}_A^i]$$

où $[\mathbb{X}_A^i]$ désigne le torseur d'efforts intérieurs en A dans cet élément, tandis que $[\mathbb{R}_A^i]$ est le torseur d'efforts extérieurs dû à l'action du nœud A sur lui.

Par la loi des actions mutuelles, $[\mathbb{X}_A^i] = -[\mathbb{R}_A^i]$ représente donc l'action de l'élément AB_i sur le nœud A . Soit $[\mathbb{F}_A]$ le torseur d'efforts extérieurs à la structure exercé au nœud A . En appliquant au sous-système constitué du nœud A la condition d'équilibre global on obtient l'équation d'équilibre du nœud, valable quel que soit le type d'assemblage au nœud :

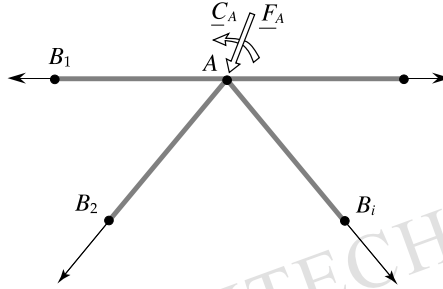


Figure 22 – Condition aux nœuds d'assemblage : notations

$$(4.11) \quad \boxed{\sum_i [\mathbb{X}_A^i] + [\mathbb{F}_A] = 0}$$

Cette équation s'explicite de façon évidente en fonction des éléments de réduction en A des torseurs concernés :

$$(4.12) \quad \sum_i \underline{X}_A^i + \underline{F}_A = 0,$$

$$(4.13) \quad \sum_i \underline{L}_A^i + \underline{C}_A = 0.$$

Assemblage rigide

La figure 23 présente un assemblage rigide de plusieurs éléments AB_i au nœud A . Dans un assemblage rigide, dit aussi « par encastrement », les éléments concernés sont parfaitement solidarisés, c'est-à-dire que leurs mouvements en A sont identiques⁽¹⁴⁾. C'est ce qu'exprime la condition d'assemblage ; la valeur commune des distributeurs $\{\mathbb{U}_A^i\}$ est par définition le mouvement du nœud A :

$$(4.14) \quad \forall i, \forall j, \{\mathbb{U}_A^i\} = \{\mathbb{U}_A^j\} = \{\mathbb{U}_A\}$$

⁽¹⁴⁾En pratique le nœud est alors réalisé par une platine d'assemblage ou un gousset.

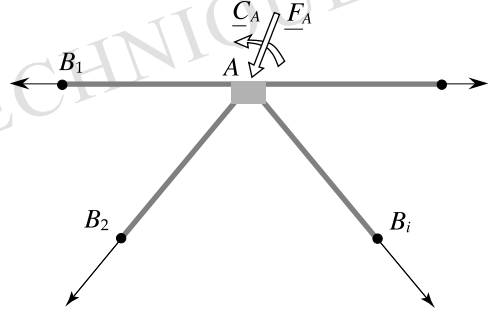


Figure 23 – Assemblage rigide

qui s'explique évidemment en

$$(4.15) \quad \forall i, \forall j, \underline{U}_A^i = \underline{U}_A^j = \underline{U}_A$$

$$(4.16) \quad \forall i, \forall j, \underline{\Omega}_A^i = \underline{\Omega}_A^j = \underline{\Omega}_A.$$

Aucune condition n'est imposée aux efforts intérieurs $[\mathbb{X}_A^i]$ en plus de l'équation (4.11).

Assemblage par articulation

Certains nœuds d'assemblage peuvent être modélisés comme des articulations rotoïdes, d'autres, plus couramment, comme des articulations axiales (cf. § 4.2).

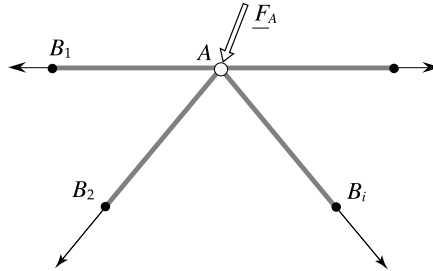


Figure 24 – Assemblage par articulation rotoïde

Comparée à l'assemblage rigide, l'articulation rotoïde ou rotule (figure 24), désolidarise les éléments du point de vue de la rotation en A, en même temps qu'elle impose la nullité du moment $\underline{\Gamma}_A^i$ pour chacun des éléments. Les conditions d'assemblage s'écrivent alors :

$$(4.17) \quad \forall i, \forall j, \underline{U}_A^i = \underline{U}_A^j = \underline{U}_A$$

qui signifie que les éléments sont solidaires en A du point de vue de la vitesse, définissant ainsi la vitesse \underline{U}_A du nœud lui-même, et

$$(4.18) \quad \forall i, \underline{\Gamma}_A^i = 0.$$

Reprenant l'équation (4.11) explicitée, on remarque sur (4.13) que les équations (4.18) impliquent :

$$(4.19) \quad \underline{C}_A = 0$$

condition imposée dans ce cas aux efforts extérieurs appliqués en A par l'équilibre du nœud.

L'équation (4.11) se réduit alors, en fait, à l'équation (4.12) relative aux $\underline{\mathcal{X}}_A^i$.

Pour une articulation axiale (figure 25), parallèle à \underline{e}_y , de façon analogue à (4.7), les conditions d'assemblage s'écrivent :

$$(4.20) \quad \forall i, \forall j, \quad \underline{U}_A^i = \underline{U}_A^j = \underline{U}_A$$

$$(4.21) \quad \forall i, \quad \underline{\Gamma}_A^i \cdot \underline{e}_y = 0$$

$$(4.22) \quad \begin{cases} \forall i, \forall j, & \underline{\Omega}_A^i \cdot \underline{e}_x = \underline{\Omega}_A^j \cdot \underline{e}_x = \underline{\Omega}_A \cdot \underline{e}_x \\ \forall i, \forall j, & \underline{\Omega}_A^i \cdot \underline{e}_z = \underline{\Omega}_A^j \cdot \underline{e}_z = \underline{\Omega}_A \cdot \underline{e}_z \end{cases}$$

Elles expriment que les éléments AB_i sont solidaires en A du point de vue de la vitesse et du point de vue des composantes de la vitesse de rotation selon \underline{e}_x et \underline{e}_z , ce qui définit les grandeurs correspondantes pour le nœud A .

Les équations (4.21) impliquent, par (4.13), que :

$$(4.23) \quad \underline{C}_A \cdot \underline{e}_y = 0,$$

condition imposée dans ce cas aux efforts extérieurs appliqués en A par l'équilibre du nœud.

L'équation (4.11) se réduit à (4.12) et aux deux composantes de (4.13) selon \underline{e}_x et \underline{e}_z .

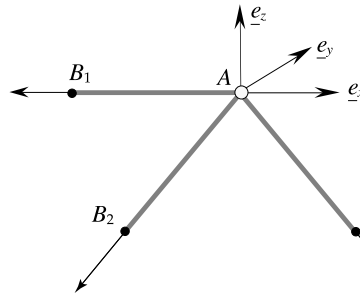


Figure 25 – Assemblage par articulation axiale

Assemblages mixtes

La figure 26 met en évidence que, dans la pratique, en un même nœud on peut avoir recours à plusieurs types d'assemblages. On y voit une poutre horizontale solidarisée

avec un poteau vertical au moyen d'une platine d'assemblage tandis que d'autres éléments horizontaux destinés au contreventement de la structure sont assemblés au même nœud par des articulations axiales (verticales et horizontales). L'analyse de tels nœuds ne présente pas de difficulté particulière en procédant de façon méthodique.

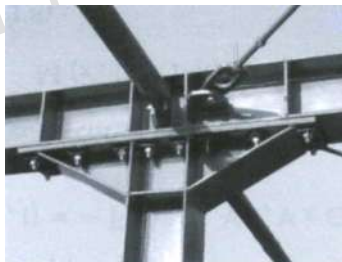


Figure 26 – Combinaison d'assemblages

4.4 Assemblages et appuis

Plusieurs des conditions d'extrémités présentées au paragraphe 4.2 sont essentiellement des conditions d'appuis : encastrement fixe rigide ou avec rotule, extrémité fixe ou mobile avec articulation axiale, extrémité fixe en appui unilatéral avec articulation... et il arrive fréquemment, comme représenté sur la figure 27, qu'un appui coïncide géométriquement, dans la modélisation, avec un nœud d'assemblage. L'écriture des conditions d'extrémité pour chaque élément concerné, l'écriture de l'équilibre du nœud et l'écriture de la condition d'appui, comme dans le cas évoqué plus haut des assemblages mixtes, nécessite avant tout de bien percevoir, en ce nœud-appui le **fonctionnement mécanique** de la structure étudiée en dissociant par la pensée les deux fonctions nœud et appui ainsi que cela est schématisé sur la figure.

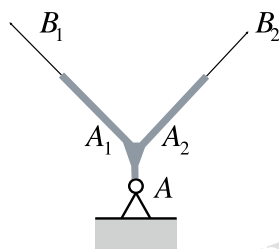


Figure 27 – Assemblage rigide sur appui fixe articulé

Cette même démarche de compréhension du fonctionnement mécanique permet de revisiter certaines des conditions d'appuis et d'assemblages présentées plus haut à partir de la remarque faite que la condition (4.9) d'appui unilatéral d'une extrémité fixe avec articulation inclut, de fait, une condition de résistance portant sur la composante selon \underline{e}_x de la réaction \underline{R}_B . Ce point de vue peut être précisé et adopté d'une

façon plus générale, qui se révèle féconde pour l'analyse des structures dans le cadre de la théorie du Calcul à la rupture.

Ainsi, les conditions (4.5) et (4.7) relatives à l'articulation rotoïde et à l'articulation axiale comportent elles-aussi des conditions de résistance (nulle) qui portent respectivement sur le moment \underline{H}_B ou sur sa composante selon \underline{e}_y . Il en va de même pour la condition (4.8) de l'extrémité mobile avec articulation axiale où la condition de résistance concerne en outre la composante selon \underline{e}_x de \underline{R}_B .

À propos des assemblages on voit que les assemblages par articulations rotoïdes ou axiales apparaissent eux-aussi comme des assemblages rigides sur lesquels sont « greffées » des conditions de résistance nulle portant sur les moments \underline{L}_A^i (4.18), ou sur leur composante selon \underline{e}_y (4.21). Les assemblages mixtes correspondent alors simplement à des assemblages rigides avec des conditions de résistance nulle qui n'affectent que certains des éléments connectés.

4.5 Analyse statique des structures

Le problème d'équilibre pour une structure constitué d'éléments curvilignes assemblés est défini par la donnée

- des champs d'efforts extérieurs répartis $[\underline{f}]$ et concentrés $[\underline{F}_i]$ appliqués aux éléments
- des charges appliquées aux extrémités chargées $[\underline{R}_B^d]$ (notation générique)
- et des conditions aux extrémités, hors extrémités chargées, telles que présentées au paragraphe précédent qui comportent éventuellement, comme on l'a vu, des conditions de résistance nulle sur tout ou partie des composantes du torseur de réaction $[\underline{R}_B]$.

La définition de la structure elle-même inclut les conditions d'assemblages des éléments dont certaines concernent les efforts intérieurs sous la forme de condition de résistance nulle.

L'analyse statique de la structure est considérablement simplifiée par la modélisation unidimensionnelle qui permet l'intégration des équations différentielle d'équilibre. Elle a pour but d'examiner, à partir de l'ensemble des **données concernant les efforts**, y compris celles issues des conditions d'assemblages, les résultats qui peuvent être établis concernant la distribution des efforts intérieurs au moyen des équations de la statique.

Champs d'efforts intérieurs autoéquilibrés

On reprend ici, dans le contexte unidimensionnel, l'analyse du chapitre X (§ 6.1).

Les champs d'efforts intérieurs autoéquilibrés pour un problème d'équilibre donné, ou **champs d'autocontrainte pour le problème**, sont les champs de torseur $[\underline{X}]$ définis sur l'ensemble des éléments de la structure qui sont en équilibre avec des **valeurs nulles des données concernant les efforts extérieurs** :

- densité linéique nulle : $[\mathbb{f}] = 0$
- efforts extérieurs concentrés nuls : $[\mathbb{F}_i] = 0$
- charges nulles appliquées aux extrémités chargées : $[\mathbb{R}_B^d] = 0$
- en remarquant en outre que les conditions sur les efforts éventuellement imposées par les autres conditions aux extrémités sont nulles.

Les champs $[\mathbb{X}]$ ainsi définis engendrent évidemment un espace vectoriel, homologue de $\mathbb{A}(S_{T_i})$ au chapitre X, dont on désigne la dimension par $k \geq 0$.

Il résulte de l'intégration explicite des équations différentielles d'équilibre rendue possible par la modélisation unidimensionnelle que :

Pour une structure constituée d'un nombre fini d'éléments curvilignes assemblés, avec les conditions d'appui spécifiées au paragraphe 4.3, sans appuis continus, la dimension de l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le problème est finie.

En effet, sur chaque élément constitutif $A_i B_i$ les équations (3.43) et (3.44) déterminent le champ $[\mathbb{X}]$ constant égal à sa valeur à l'une ou l'autre des extrémités prise comme paramètre.

Aux extrémités des éléments, ces valeurs, typiquement $[\mathbb{X}_{A_i}]$ doivent satisfaire les équations d'équilibre des nœuds (4.11), les conditions d'assemblages telles que (4.18) ou (4.21), les conditions d'extrémités avec des efforts extérieurs donnés nuls et les éventuelles conditions sur les efforts imposées par les conditions d'appuis avec des valeurs nulles. Il en résulte que les champs d'autocontrainte pour le problème dépendent d'un nombre fini $k \geq 0$ de paramètres.

Ces paramètres sont les *inconnues hyperstatiques* et k est le *degré d'hyperstaticité de la structure*.

Pour le problème d'équilibre de la structure avec les données prescrites les champs d'efforts intérieurs en équilibre avec ces données engendrent un espace affine dont l'espace des champs d'autocontrainte pour le problème est l'espace vectoriel associé : cet espace affine est de dimension k .

Pour que l'équilibre de la structure dans les conditions posées soit possible il faut que toutes les données sur les efforts extérieurs soient compatibles avec la condition d'équilibre global. Cette condition est suffisante si les éléments de la structure sont tous assemblés rigidement : l'espace affine des champs d'efforts intérieurs en équilibre avec les données *n'est pas vide* et de dimension k . **Le problème est hyperstatique de degré k .**

En revanche, lorsque certains assemblages ne sont pas rigides, la condition de compatibilité avec l'équilibre global n'est pas suffisante. L'espace affine des champs d'efforts intérieurs en équilibre avec les données peut être vide pour certains chargements satisfaisant cette condition ; l'équilibre de la structure dans les conditions posées n'est pas possible. **Le problème est hypostatique.** Ainsi, la figure 28 repré-

sente une structure dont le degré d'hyperstaticité est 4 soumise à un chargement qui définit un problème hypostatique !

On remarque ici une différence importante avec les conclusions de l'analyse homologue effectuée au chapitre X (§ 6.1). Elle est due à l'introduction dans les données du problème, par l'intermédiaire des conditions d'assemblages, de conditions de résistance nulle sur certaines composantes des efforts intérieurs en certains nœuds de la structure. Ces conditions locales se traduisent au niveau global de la structure par des limitations sur la forme des chargements susceptibles d'être supportés. Une telle analyse ressortit en fait à la théorie du Calcul à la rupture.

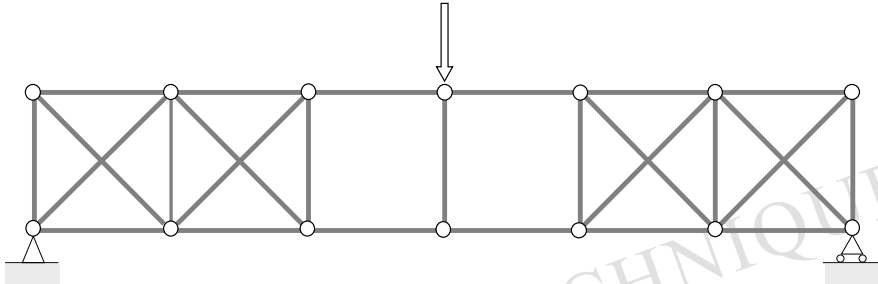


Figure 28 – Structure hyperstatique, problème hypostatique

4.6 Analyse cinématique des structures

Le caractère unidimensionnel de la modélisation apporte aussi des simplifications dans l'analyse cinématique des structures.

En effet, pour chaque élément $A_i B_i$ l'intégration d'un champ de taux de déformation $\{\mathbb{D}\}$ donné sur la courbe directrice ne suppose aucune condition : il n'y a donc pas de condition de compatibilité à ce niveau ; typiquement

$$(4.24) \quad \{\mathbb{U}(s)\} = \{\mathbb{U}(s_{A_i})\} + \int_{A_i P} \{\mathbb{D}(\sigma)\} d\sigma ,$$

qui est déterminé à partir de la valeur du champ $\{\mathbb{U}_{A_i}\}$ à l'origine choisie pour l'élément.

De même, pour un champ virtuel avec des discontinuités $[\hat{\mathbb{U}}(s_j)]$ en des points P_j

$$(4.25) \quad \{\hat{\mathbb{U}}(s)\} = \{\hat{\mathbb{U}}(s_{A_i})\} + \int_{A_i P} \{\hat{\mathbb{D}}(\sigma)\} d\sigma + \sum_{P_j \in A_i P} [\hat{\mathbb{U}}(s_j)] .$$

C'est donc aux nœuds de la structure que l'on doit exprimer la compatibilité géométrique. On écrit qu'en chaque nœud A_i les torseurs $\{\mathbb{U}(s_{A_i})\}$ ou $\{\hat{\mathbb{U}}(s_{A_i})\}$ pour tous les éléments assemblés en ce point respectent la condition d'assemblage correspondante telle que (4.14) ou (4.17)-(4.18), en remarquant que la continuité

spatiale est toujours assurée par la condition d'égalité des vitesses $\underline{U}(s_{A_i})$ présente dans toutes les conditions d'assemblage.

Enfin, pour être *cinématiquement admissible pour le problème*, le champ $\{\underline{U}\}$ ou $\{\hat{\underline{U}}\}$ ainsi déterminé doit satisfaire les conditions sur les vitesses imposées par les conditions d'appuis de la structure.

Les champs $\{\hat{\underline{U}}\}$ cinématiquement admissibles pour le problème avec des valeurs nulles des données sur les vitesses engendrent un espace vectoriel qui est orthogonal à celui des champs d'autocontrainte pour le problème définis au paragraphe précédent :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \{\hat{\underline{U}}\} \quad \text{cinématiquement admissible pour le problème,} \\ \quad \text{avec des valeurs nulles des données sur les vitesses} \\ \forall [\underline{X}] \quad \text{champ d'autocontrainte pour le problème,} \\ \sum_i \int_{A_i B_i} [\underline{X}(s)] \cdot \{\hat{\underline{D}}(s)\} ds + \sum_{P_j \in A_i B_i} [\underline{X}(s_j)] \cdot [\hat{\underline{U}}(s_j)] = 0, \end{array} \right.$$

résultat homologue de l'équation (6.3) du chapitre X.

4.7 Structures planes chargées dans leur plan

Maints systèmes rencontrés dans la pratique peuvent être modélisés comme des structures planes soumises à des chargements contenus dans leur plan. On se propose ici d'examiner les simplifications apportées dans ce cas aux diverses formules établies plus haut, notamment en ce qui concerne les équations de la statique, tout en attirant l'attention sur les hypothèses nécessaires.

Élément plan chargé dans son plan

On considère un élément AB de milieu curviligne contenu dans le plan Oxy . Au point courant P de la courbe directrice, on introduit le trièdre orthonormé direct $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{e}_z)$ qui définit l'orientation du vecteur normal unitaire $\underline{n}(s)$ (figure 28).

On suppose que l'élément AB est chargé dans son plan : tous les torseurs qui définissent les efforts extérieurs qui lui sont appliqués, soit $[\underline{R}_A]$, $[\underline{R}_B]$, $[\underline{f}(s)]$ et $[\underline{F}_i]$, ont leurs éléments de réduction qui satisfont les conditions suivantes

$$(4.27) \quad \underline{R}_A, \underline{R}_B, \underline{f}(s), \underline{F}_i, \text{ parallèles à } Oxy,$$

$$(4.28) \quad \underline{H}_A, \underline{H}_B, \underline{m}(s), \underline{C}_i, \text{ parallèles à } \underline{e}_z.$$

En appliquant l'une ou l'autre des équations (3.43) ou (3.44) on voit que le torseur d'efforts intérieurs $[\underline{X}(s)]$ au point courant P satisfait lui aussi les conditions (4.27) et (4.28) ; on a ainsi :

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{X}(s) = N(s) \underline{t}(s) + V_n(s) \underline{n}(s) \\ \underline{\Gamma}(s) = \mathcal{M}_z(s) \underline{e}_z. \end{array} \right.$$

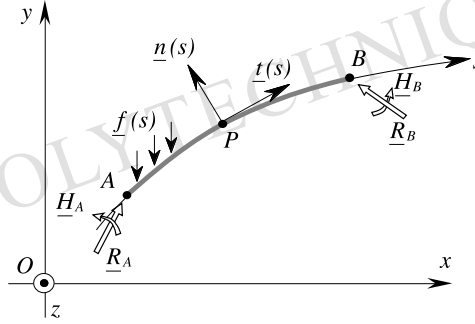


Figure 29 – Élément plan chargé dans son plan

On pose, pour simplifier les notations :

$$(4.30) \quad \begin{cases} V_n(s) = V(s) \\ \mathcal{M}_z(s) = M(s) \end{cases}^{(15)}$$

où $V(s)$ et $M(s)$ conservent respectivement les appellations d'**effort tranchant** et de **moment fléchissant** au point P sur l'élément plan chargé dans son plan. Il est commode de décomposer $\underline{f}(s)$ selon :

$$(4.31) \quad \underline{f}(s) = f_t(s) \underline{t}(s) + f_n(s) \underline{n}(s)$$

avec

$$(4.32) \quad \underline{m}(s) = m(s) \underline{e}_z .$$

On obtient alors les expressions simplifiées de (3.29) et (3.30) dans ce cas, où $\rho(s)$ désigne le rayon de courbure de la courbe directrice au point courant :

$$(4.33) \quad \frac{dN(s)}{ds} - \frac{V(s)}{\rho(s)} + f_t(s) = 0$$

$$(4.34) \quad \frac{dV(s)}{ds} + \frac{N(s)}{\rho(s)} + f_n(s) = 0$$

$$(4.35) \quad \frac{dM(s)}{ds} + V(s) + m(s) = 0$$

où $m(s)$ est souvent nul dans la pratique.

⁽¹⁵⁾ La convention de signe sur l'effort tranchant $V(s)$ varie selon les auteurs. La formule $V_n(s) = V(s)$ adoptée ici paraît naturelle. Dans la pratique, on préfère souvent poser $V_n(s) = -V(s)$ qui, par (4.35) où $m(s) = 0$ fait apparaître l'effort tranchant $V(s)$ comme la dérivée du moment fléchissant $M(s)$.

Poutre droite sous chargement plan

L'élément étudié est une poutre rectiligne (ou poutre droite). Le chargement est contenu dans le plan Oxy . On introduit dans ce plan les coordonnées cartésiennes x et y dirigées selon \underline{t} et \underline{n} , respectivement direction de la poutre et normale à celle-ci (figure 30). Les équations (4.33) à (4.35) s'écrivent alors :

$$(4.36) \quad \begin{cases} \frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0 \\ \frac{dV(x)}{dx} + f_y(x) = 0 \\ \frac{dM(x)}{dx} + V(x) + m(x) = 0 \end{cases}$$

qui peuvent être interprétées au sens des distributions pour inclure le cas d'efforts extérieurs concentrés appliqués à AB .

Les deux dernières équations de (4.36) peuvent être regroupées en :

$$(4.37) \quad \boxed{\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - f_y(x) = 0}$$

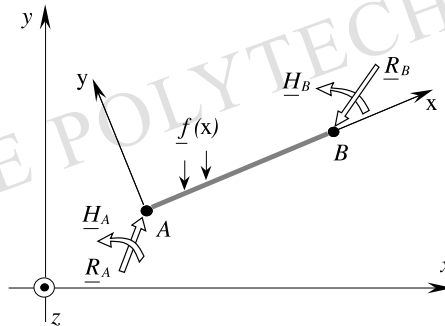


Figure 30 – Poutre droite sous chargement plan

Structure plane chargée dans son plan

Valables pour un élément plan dont le chargement est contenu dans son plan Oxy , les résultats ci-dessus seront donc valables pour chacun des éléments constituant une structure plane dans le plan Oxy sous réserve que le chargement de chacun d'eux soit effectivement contenu dans le plan Oxy . Cette condition est évidemment remplie, par hypothèse, pour ceux de ces efforts extérieurs qui sont des efforts extérieurs donnés appliqués à la structure; mais elle pose la question pour les efforts appliqués aux extrémités de chaque élément par les nœuds d'assemblage dans la structure, ou par des appuis. On sait que la détermination de ces efforts résulte de la résolution du problème d'équilibre étudié.

Pour les problèmes **isostatiques**, cette détermination est obtenue sans information complémentaire à partir des seules équations d'équilibre. Il en résulte que, dès

que les efforts extérieurs donnés sont plans, parallèles à Oxy , le champ des efforts intérieurs $[\mathbb{X}]$, dans la structure, est de la forme (4.29), déterminé par les équations (4.33) à (4.35).

En revanche, pour les problèmes *hyperstatiques*, la résolution de la structure fait intervenir la loi de comportement du milieu curviligne. Aussi, dans une structure plane sous un chargement extérieur contenu dans son plan, le champ de torseurs d'efforts intérieurs ne sera alors pas nécessairement de la forme (4.29). On peut toutefois énoncer le résultat suivant : si la structure admet en tout point le plan Oxy comme plan de symétrie pour le comportement du milieu curviligne, les conditions d'extrémités, d'appuis, et d'assemblages, etc. alors on peut affirmer que le champ des torseurs $[\mathbb{X}(s)]$ dans la solution sera effectivement de la forme (4.29) pour laquelle les équations d'équilibre se réduisent à (4.33) à (4.35).

Récapitulatif des formules essentielles

• Statique des fils

puissances virtuelles

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{A'B'} \underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) \, ds + \sum_{s_{A'} < s_i < s_{B'}} \underline{F}_i \cdot \hat{\underline{U}}(s_i) \\ + \underline{R}_{A'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{A'}) + \underline{R}_{B'}^{S'} \cdot \hat{\underline{U}}(s_{B'})$$

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{A'B'} -X(s) \hat{D}(s) \, ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} X(s_j) [\hat{\underline{U}}(s_j)] \cdot \underline{t}(s_j)$$

$$\hat{D}(s) = \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$$

équations d'équilibre

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = X(s) \underline{t}(s)$$

$$\frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = 0$$

$$[\underline{\mathcal{X}}(s_i)] + \underline{F}_i = 0$$

$$\underline{\mathcal{X}}(s_A) = -\underline{R}_A$$

$$\underline{\mathcal{X}}(s_B) = \underline{R}_B$$

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = \underline{R}_B + \int_{PB} \underline{f}(\sigma) \, d\sigma + \sum_{s < s_i < s_B} \underline{F}_i$$

$$\underline{R}_{A'} = -\underline{\mathcal{X}}(s'_A)$$

$$\underline{R}_{B'} = \underline{\mathcal{X}}(s'_B)$$

• Statique des poutres

distributeur des vitesses virtuelles

$$\{ \hat{\underline{U}}(s) \} = \{ P, \hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s) \}$$

taux de déformation virtuel

$$\{ \hat{\underline{D}}(s) \} = \frac{d\{ \hat{\underline{U}}(s) \}}{ds} = \left\{ P, \frac{d\hat{\underline{U}}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \hat{\underline{\Omega}}(s), \frac{d\hat{\underline{\Omega}}}{ds} \right\}$$

efforts extérieurs

$$[\mathbb{F}(s)] = [P, \underline{f}(s), \underline{m}(s)]$$

$$[\mathbb{R}_{A'}^{S'}] = [A', \underline{R}_{A'}^{S'}, \underline{H}_{A'}^{S'}] \quad , \quad [\mathbb{R}_{B'}^{S'}] = [B', \underline{R}_{B'}^{S'}, \underline{H}_{B'}^{S'}]$$

$$[\mathbb{F}_i] = [P_i, \underline{F}_i, \underline{C}_i]$$

efforts intérieurs

$$[\mathbb{X}(s)] = [P, \underline{\mathcal{X}}(s), \underline{\Gamma}(s)]$$

$$\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} = [P, \frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds}, \frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\mathcal{X}}(s)]$$

puissances virtuelles

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = & \int_{A'B'} [\mathbb{F}(s)] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}(s)\} ds + \sum_{s_{A'} < s_i < s_{B'}} [\mathbb{F}_i] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}(s_i)\} \\ & + [\mathbb{R}_{A'}^{S'}] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}_{A'}\} + [\mathbb{R}_{B'}^{S'}] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}_{B'}\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = - \int_{A'B'} [\mathbb{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathbb{U}}(s)\} ds - \sum_{s_{A'} < s_j < s_{B'}} [\mathbb{X}(s_j)] \cdot \{[\hat{\mathbb{U}}(s_j)]\} .$$

équations d'équilibre

$$\frac{d[\mathbb{X}(s)]}{ds} + [\mathbb{F}(s)] = 0$$

$$[[\mathbb{X}(s_i)]] + [\mathbb{F}_i] = 0$$

$$[\mathbb{X}(s_A)] = -[\mathbb{R}_A]$$

$$[\mathbb{X}(s_B)] = [\mathbb{R}_B]$$

$$[\mathbb{X}(s)] = [\mathbb{R}_B] + \int_{PB} [\mathbb{F}(\sigma)] d\sigma + \sum_{s < s_i < s_B} [\mathbb{F}_i]$$

$$[\mathbb{R}_{A'}] = -[\mathbb{X}(s_{A'})]$$

$$[\mathbb{R}_{B'}] = [\mathbb{X}(s_{B'})]$$

effort normal, effort tranchant

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = N(s) \underline{t}(s) + \underline{V}(s)$$

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = \int_{s_P} \underline{\sigma}(Q) \cdot \underline{t}(s) \, da$$

moment de torsion, moment fléchissant

$$\underline{\Gamma}(s) = \mathcal{C}(s) \underline{t}(s) + \underline{\mathcal{M}}(s)$$

$$\underline{\Gamma}(s) = \int_{s_P} \underline{PQ} \wedge (\underline{\sigma}(Q) \cdot \underline{t}(s)) \, da$$

condition de Navier-Bernoulli

$$\underline{\hat{\Omega}}(s) \wedge \underline{t}(s) = \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} - \hat{D}(s) \underline{t}(s)$$

$$\underline{\hat{\Omega}}(s) = \underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\hat{U}}(s)}{ds} + \hat{\Omega}_t(s) \underline{t}(s)$$

$$\llbracket \underline{\hat{U}}(s_j) \rrbracket = \llbracket \hat{U}_t(s_j) \rrbracket \underline{t}(s_j)$$

$$\llbracket \underline{\hat{\Omega}}(s_j) \rrbracket = \underline{t}(s_j) \wedge \llbracket \frac{d\underline{\hat{U}}}{ds}(s_j) \rrbracket + \llbracket \hat{\Omega}_t(s_j) \rrbracket \underline{t}(s_j)$$

élément plan chargé dans son plan

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = N(s) \underline{t}(s) + V(s) \underline{n}(s)$$

$$\underline{\Gamma}(s) = M(s) \underline{e}_z$$

$$\frac{dN(s)}{ds} - \frac{V(s)}{\rho(s)} + f_t(s) = 0$$

$$\frac{dV(s)}{ds} + \frac{N(s)}{\rho(s)} + f_n(s) = 0$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + V(s) + m(s) = 0$$

Exercices

XI.1 - Équilibre d'un arc de fil parfaitement flexible AB , de masse linéique constante, sous son propre poids.

Éléments de réponse :

L'équation d'équilibre (2.17) s'écrit avec $\underline{f} = -p\underline{e}_y$:

$$\underline{X}(s) = X_x(s)\underline{e}_x + X_y(s)\underline{e}_y = X(s)\underline{t}(s)$$

$$\frac{dX_x(s)}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{dX_y(s)}{ds} = p \quad (\text{poids volumique du fil}) .$$

L'intégration introduit deux constantes arbitraires a et b et donne : $X_x(s) = a$, $X_y(s) = ps + b$ sur AB , l'origine des abscisses curvilignes est prise en A .

$\alpha(s)$ désignant l'angle de $\underline{t}(s)$ avec l'horizontale \underline{e}_x , il vient :

$$X_x(s) = X(s) \cos \alpha(s) = a$$

$$X_y(s) = X(s) \sin \alpha(s) = ps + b .$$

- $a = 0$ correspond à la position d'équilibre verticale pour le fil :

$$\alpha(s) = 0 \text{ sur } AB , x = x_A = x_B .$$

En supposant $y_B > y_A$, la tension du fil avec $\underline{X}(y) = X(y)\underline{e}_y$ est : $X(y) = X_y(y) = p(y - y_A) + X_A$.

- $a \neq 0$. On a $\tan \alpha(s) = (ps + b)/a$ d'où, en désignant par $\rho(s)$ le rayon de courbure de la courbe d'équilibre :

$$\rho(s) = a/(p \cos^2 \alpha(s)) .$$

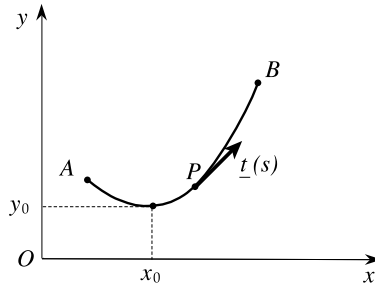
L'intégration montre que la courbe d'équilibre est un arc de la chaînette d'équation :

$$\frac{y - y_0}{\ell} = \cosh\left(\frac{x - x_0}{\ell}\right) - 1$$

où l'on a posé $\ell = a/p$ et dont (x_0, y_0) sont les coordonnées du sommet.

La tension du fil est $X(s) = p(y - y_0) + a$, où a représente donc la tension au point le plus bas de la chaînette. D'où pour l'arc AB :

$$X(s) = p(y - y_A) + X_A = p(s - s_0)/\sin \alpha(s) .$$



XI.2 - On considère un arc AB de fil, non pesant, parfaitement flexible. Ce fil est tendu sur un tambour convexe à tangente continue en sorte que les segments AA' et BB' sont rectilignes tandis que $A'B'$ est l'arc de contact du fil avec le tambour. On suppose que ce contact se fait avec frottement sec « de Coulomb » maximal, c'est-à-dire qu'en exerçant en B une force de traction \underline{R}_B d'intensité suffisante, supérieure à la traction \underline{R}_A exercée en A , on mobilise tout le frottement au long de l'arc de contact $A'B'$ sur lequel on a :

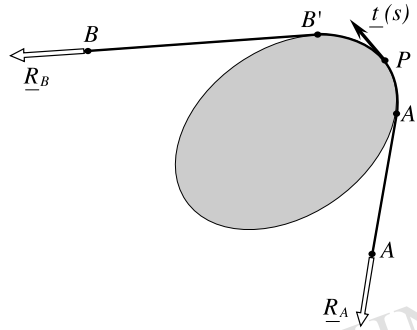
$$\forall P \in A'B' , \quad f_n(s) < 0 \quad \text{et} \quad f_t(s) = f_n(s) \tan \varphi$$

où $\tan \varphi$, constant, est le coefficient de frottement. Déterminer \underline{R}_B .

Éléments de réponse :

$R_B = X_B \underline{t}_B$, $R_A = -X_A \underline{t}_A$; $X_B = X_{B'}$, $X_A = X_{A'}$ (segments rectilignes non chargés).

En combinant les deux premières équations de (2.21), et en posant $\alpha(s) = (\underline{e}_x, \underline{t}(s))$, on obtient $\frac{dX}{d\alpha} = X \tan \varphi$ d'où : $X(s) = X_{A'} \exp((\alpha(s) - \alpha_{A'}) \tan \varphi)$ et $|\underline{R}_B| = |R_A| \exp((\alpha_{B'} - \alpha_{A'}) \tan \varphi)$.



Commentaire.

On note l'effet multiplicateur exponentiel dû au frottement qui peut atteindre des valeurs très élevées si le fil fait plusieurs tours autour du tambour (applications variées dans la pratique courante!). Le résultat ne dépend pas de la forme géométrique de la section du tambour ; si cette section est non convexe, on en considère l'enveloppe convexe et la formule finale est maintenue. Si la section est circulaire, de rayon ρ , on a :

$\forall P \in AB$, $f_n(s) = -\frac{X_{A'}}{\rho} \exp((\alpha(s) - \alpha_{A'}) \tan \varphi)$ qui montre que la force linéique de compression sur le tambour, $|f_n(s)|$ croît exponentiellement avec l'angle polaire. Si le problème est modélisé en supposant le coefficient de frottement nul (poulie par exemple), on trouve que la tension $X(s)$ est constante et $|R_B| = |R_A|$.

XI.3 - Treillis. On considère une structure composée de poutres rectilignes assemblées entre elles par des articulations rotoïdes. Les poutres sont supposées non pesantes et le chargement de la structure est exclusivement constitué par des forces concentrées appliquées aux nœuds. De plus, tous les appuis comportent des rotules. Étudier la forme des champs de torseurs d'efforts intérieurs à l'équilibre dans cette structure.

Éléments de réponse :

Aux extrémités A_i et B_i de tout élément rectiligne constitutif de la structure, la rotule du nœud d'assemblage ou de l'appui concerné impose : $\underline{t}_{A_i} = 0$, $\underline{t}_{B_i} = 0$. Par ailleurs, il résulte de (3.25) que $[\mathbb{X}(s)]$ est constante sur $A_i B_i$:

$$\forall P \in A_i B_i , [\mathbb{X}(s)] = [A_i , \underline{x}_{A_i} , 0] = [B_i , \underline{x}_{B_i} , 0].$$

On en déduit : $\underline{x}_{A_i} = \underline{x}_{B_i}$ et $\underline{x}_{A_i} \wedge \underline{x}_{B_i} = 0$.

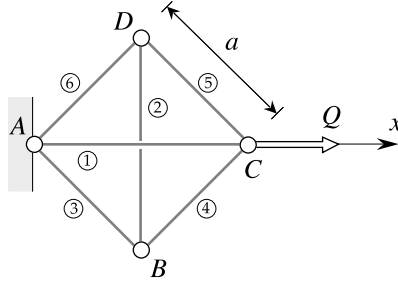
L'élément $A_i B_i$ étant rectiligne on obtient pour $[\mathbb{X}(s)]$:

$$[\mathbb{X}(s)] = [P , N(s) \underline{t}(s) , 0] \text{ où } N(s) = \underline{x}_{A_i} \cdot \underline{t}(s).$$

Commentaire.

Dans un treillis articulé chargé et appuyé exclusivement aux nœuds (tous articulés), les éléments de poutres rectilignes ne sont soumis qu'à des efforts normaux (cf. la discussion du paragraphe 2.10 sur la pertinence de la statique des fils).

XI.4 - On considère le treillis plan (cf. Ex. XI.3) représenté sur la figure (les diagonales AC et BD du carré ne sont pas assemblées en leur point de croisement). L'appui A est fixe avec articulation. Une force parallèle à AC , d'intensité Q positive en traction, est appliquée en C . Déterminer les efforts dans les poutres de la structure, à l'équilibre. On pose $\hat{D}_i(s) = \frac{d\hat{U}_i(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$ en chaque point de la poutre i . Exprimer la compatibilité géométrique du champ des $\hat{D}_i(s)$ pour la structure.



Éléments de réponse :

- Les efforts intérieurs dans les poutres, à l'équilibre sont des efforts normaux constants N_i , $i = 1, \dots, 6$ (cf. Ex. XI.3). On écrit l'équilibre des quatre nœuds :

$$(1) \quad \begin{cases} N_1 + (N_4 + N_5)\sqrt{2}/2 = Q, \\ N_2 + (N_5 + N_6)\sqrt{2}/2 = 0, \\ N_3 = N_4 = N_5 = N_6, \text{ et } \underline{R}_A = -Q \underline{e}_x. \end{cases}$$

Cinq équations pour les six inconnues N_i : le problème est hyperstatique de degré 1 :

$$(2) \quad \begin{cases} N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = X \\ N_1 = Q - X\sqrt{2} \\ N_2 = -X\sqrt{2}. \end{cases}$$

- On écrit la relation d'orthogonalité (4.26) entre les champs d'autocontrainte pour le problème définis par (2) et les champs de vitesse cinématiquement admissibles pour le problème avec des données nulles en vitesse (aucune donnée en vitesse dans le cas présent).

Avec $\hat{\delta}_i = \int \hat{D}_i(\sigma) d\sigma$ ($i = 1, \dots, 6$), taux virtuel d'allongement de la barre concernée, il vient

$$\forall X, \sum_{i=1}^6 \int N_i \hat{D}_i(\sigma) d\sigma = \sum_{i=1}^6 N_i \hat{\delta}_i = 0$$

d'où la condition de compatibilité géométrique des taux virtuels d'allongement :

$$a(\hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_4 + \hat{\delta}_5 + \hat{\delta}_6) - a\sqrt{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2) = 0 \text{ (cf. chapitre IV, § 3.5).}$$

XI.5 - Formules de Bresse-Navier. L'étude des structures constituées d'éléments curvilignes s'effectue en supposant que les mouvements réels satisfont la condition de Navier-Bernoulli. La loi de comportement fournit alors les valeurs du distributeur taux de déformation $\{\mathbb{D}(s)\} = \frac{d\{\mathbb{U}(s)\}}{ds}$ pour le milieu curviligne en chaque point P par la donnée de $D(s) = \frac{dU(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$ et $\frac{dQ(s)}{ds}$. Démontrer les formules géométriques

de Bresse-Navier, pour un arc AB :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall P \in AB, \\ \underline{\Omega}_P = \underline{\Omega}_A + \int_{AP} \frac{d\underline{\Omega}(\sigma)}{d\sigma} d\sigma \\ \underline{U}_P = \underline{U}_A + \underline{\Omega}_A \wedge \underline{AP} + \int_{AP} D(\sigma) \underline{t}(\sigma) d\sigma + \int_{AP} \frac{d\underline{\Omega}(\sigma)}{d\sigma} \wedge \underline{\Sigma P} d\sigma. \end{array} \right.$$

où Σ est le point courant d'abscisse curviligne σ sur AP .

Éléments de réponse :

- Première formule évidente.
- En conséquence de la condition de Navier-Bernoulli, par (3.69) : $\frac{d\underline{U}(\sigma)}{d\sigma} = D(\sigma) \underline{t}(\sigma) + \underline{\Omega}(\sigma) \wedge \underline{t}(\sigma)$

$$\text{d'où } \underline{U}_P = \underline{U}_A + \int_{AP} D(\sigma) \underline{t}(\sigma) d\sigma + \int_{AP} \underline{\Omega}(\sigma) \wedge \underline{t}(\sigma) d\sigma$$

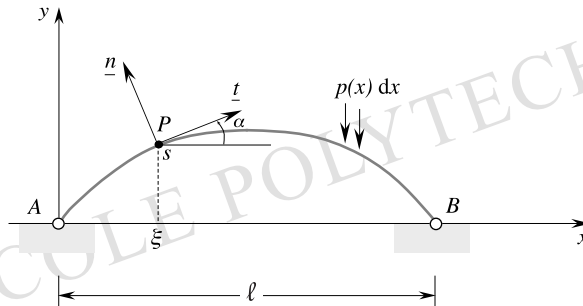
qui, après intégration par parties, fournit la formule cherchée.

Commentaire.

Les formules de Bresse sont utilisées notamment pour écrire les conditions de compatibilité géométrique aux nœuds des structures, ou pour vérifier les conditions d'appui. Elles se complètent sans difficulté pour introduire explicitement des éventuels termes de discontinuité $[[\underline{U}_i]]$ et $[[\underline{\Omega}_i]]$ en des points P_i de AB :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall P \in AB, \\ \underline{\Omega}_P = \underline{\Omega}_A + \sum_{P_i \in AP} [[\underline{\Omega}_i]] + \int_{AP} \frac{d\underline{\Omega}(\sigma)}{d\sigma} d\sigma \\ \underline{U}_P = \underline{U}_A + \underline{\Omega}_A \wedge \underline{AP} + \sum_{P_i \in AP} ([[\underline{U}_i]] + [[\underline{\Omega}_i]] \wedge \underline{P_i P}) + \int_{AP} D(\sigma) \underline{t}(\sigma) d\sigma \\ \quad + \int_{AP} \frac{d\underline{\Omega}(\sigma)}{d\sigma} \wedge \underline{\Sigma P} d\sigma. \end{array} \right.$$

XI.6 - On considère une poutre courbe plane ou arc AB , de portée ℓ , dont les appuis en A et B sont fixes avec articulations. Cette courbe est soumise à un chargement appliqué dans son plan défini par la densité linéique $\underline{f}(s) ds = -p \underline{e}_y dx$. Déterminer la distribution des efforts intérieurs à l'équilibre en supposant satisfaites les hypothèses pour qu'elle soit en chaque point de la forme (4.29). Examiner le cas particulier où AB est une poutre droite.



Éléments de réponse :

- On applique la formule (3.43) compte tenu des conditions aux extrémités qui s'écrivent : $\underline{R}_A = X_A \underline{e}_x + Y_A \underline{e}_y$, $\underline{H}_A = 0$, $\underline{R}_B = X_B \underline{e}_x + Y_B \underline{e}_y$, $\underline{H}_B = 0$; il vient :

$$N(s) = X_B \cos \alpha + \sin \alpha (Y_B - \int_x^\ell p(\xi) d\xi) ; V(s) = -X_B \sin \alpha + \cos \alpha (Y_B - \int_x^\ell p(\xi) d\xi) ;$$

$$M(s) = X_B y + Y_B(\ell - x) - \int_x^\ell (\xi - x) p(\xi) d\xi .$$

En écrivant que $[\mathbb{R}_A] = -[\mathbb{X}_A]$ on obtient :

$$Y_B = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} p(x) dx , Y_A = \int_0^\ell p(x) dx - Y_B ,$$

$X_A = -X_B = X$ est la « poussée de l'arc ».

La structure est hyperstatique de degré 1. On peut choisir la poussée comme inconnue hyperstatique.

- Pour la poutre droite :

$$N(x) = -X ; V(x) = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} p(x) dx - \int_x^\ell p(\xi) d\xi$$

$$M(x) = (\ell - x) \int_0^\ell \frac{x}{\ell} p(x) dx - \int_0^\ell (\xi - x) p(\xi) dx .$$

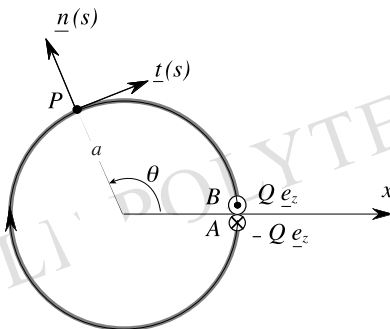
L'inconnue hyperstatique est l'effort normal dans la poutre.

Commentaire.

Les résultats ci-dessus permettent de traiter le cas de l'arc à 3 articulations, où une articulation placée en un point C de AB assemble, en respectant la continuité de la tangente, les deux poutres courbes AC et CB constituant la structure. On écrit que $M(s_C) = 0$ ce qui détermine la valeur de la poussée X : le problème est isostatique.

En revanche si l'on considère une poutre droite à 3 articulations, l'équilibre ne peut être assuré que sous certains chargements : pour $p(x) \geq 0$ le problème est hypostatique sauf si $p(x) \equiv 0$ sur AB .

XI.7 - On considère une poutre courbe en forme d'anneau circulaire de rayon a . L'anneau étant sectionné, on applique aux deux extrémités adjacentes A et B deux forces opposées, d'intensité Q , normales au plan de la fibre moyenne de la poutre : $\underline{R}_A = -Q \underline{e}_z$, $\underline{R}_B = Q \underline{e}_z$. Déterminer la distribution des efforts intérieurs dans cette poutre à l'équilibre.



Éléments de réponse :

On applique la formule (3.43) ; A est l'origine des abscisses curvilignes :

$$s = (2\pi - \theta)a$$

$$N(s) = 0, \quad \underline{V}(s) = Q \underline{e}_z, \quad \underline{T}(s) = -Q a (\underline{i}(1 - \cos \theta) + \underline{n} \sin \theta) ;$$

$$\text{moment fléchissant : } M_n(s) = -Q a \sin \theta ; \text{ couple de torsion : } \mathcal{C}(s) = -Q a (1 - \cos \theta).$$

XI.8 - Étude statique de la poutre courbe définie dans Ex. XI.7, soumise en A et B aux efforts extérieurs : $\underline{R}_A = -Q \underline{e}_y$, $\underline{R}_B = Q \underline{e}_y$.

Éléments de réponse :

On applique (3.43) :

$$s = (2\pi - \theta)a$$

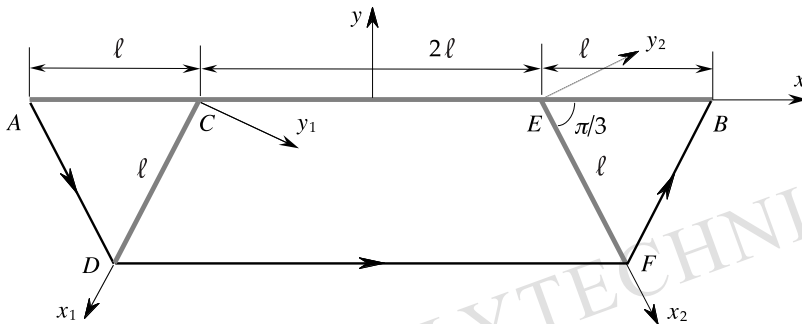
$$N(s) = -Q \cos \theta ; \quad \underline{V}(s) = Q \underline{n} \sin \theta ; \quad \underline{M}(s) = Q a (1 - \cos \theta) \underline{e}_z ;$$

$$\text{moment fléchissant : } M(s) = Q a (1 - \cos \theta) .$$

Commentaire.

Ces résultats, comme ceux de Ex. XI.7, permettent le calcul de la réponse élastique de cette structure (cf. Ex. XII.4 et Ex. XII.5).

XI.9 - Analyse statique d'une structure complexe. On considère la structure plane représentée sur la figure qui est constituée d'une poutre droite continue AB de longueur 4ℓ , sur laquelle sont assemblés, en C et E situés respectivement à la distance ℓ des extrémités A et B , deux montants CD et EF de longueur ℓ , inclinés symétriquement à $\pi/3$ sur AB . Les assemblages en C et E sont rigides (encastements). Un câble continu $ADFB$ est fixé en A et B à la poutre et s'appuie sans frottement sur les extrémités D et F des montants ; la longueur totale de ce câble est 5ℓ . Le câble $ADFB$ est parfaitement flexible ; on y désigne la tension par $X(s)$. La poutre AB et les montants CD et EF sont des poutres droites. Les chargements appliqués à la structure dans la suite étant contenus dans son plan, on suppose que le torseur d'efforts intérieurs en tout point, à l'équilibre, y est de la forme (4.29). Le sens de parcours adopté sur chaque élément est indiqué par l'axe correspondant, auquel est associé dans chaque cas l'axe y formant avec \underline{e}_z un trièdre direct.



1°/ La structure n'est soumise à aucun chargement extérieur. On désigne par X_0 la tension du câble au point A . Déterminer en fonction du paramètre X_0 les distributions d'efforts intérieurs dans les divers éléments de la structure (câble, montants, poutre) telles que l'équilibre soit assuré en tout point.

2°/ On considère les mouvements virtuels de la structure dans son plan définis (à un mouvement rigidifiant près) comme des mouvements satisfaisant la condition de Navier-Bernoulli où l'on se donne les valeurs de $\hat{D}(s) = \frac{d\hat{U}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s)$ et $\frac{d\hat{Q}(s)}{ds}$ (cf. Ex. XI.5) :

câble $ADFB$: $\hat{D}_c(s)$ (seul significatif) ;

montant CD : $\hat{D}_1(x_1) = \hat{D}_1$ constant, $\frac{d\hat{Q}_1(x_1)}{dx_1} = 0$;

montant EF : $\hat{D}_2(x_2) = \hat{D}_2$ constant, $\frac{d\hat{Q}_2(x_2)}{dx_2} = 0$;

poutre AB : $\hat{D}(x)$, $\frac{d\hat{Q}(x)}{dx} = \frac{d\hat{Q}(x)}{dx} \underline{e}_z$.

Établir la condition nécessaire pour que ces mouvements virtuels respectent la continuité de la structure, c'est-à-dire la compatibilité géométrique des taux de déformation virtuels de ses éléments.

3°/ On suppose maintenant que la structure est soumise au chargement extérieur représenté par les efforts suivants :

en A : $\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y$, $\underline{H}_A = H_A \underline{e}_z$, en B : $\underline{R}_B = R_B \underline{e}_y$, $\underline{H}_B = H_B \underline{e}_z$.

On pose $M_0 = (H_B - H_A)/2$, $\mu = (H_B + H_A)/2$.

Donner, en fonction de M_0 , μ et de la tension X_0 du câble en A , l'expression de toute distribution d'efforts intérieurs en équilibre avec ce chargement extérieur.

Éléments de réponse :

1°/

- Le câble n'est chargé qu'aux nœuds A, D, F, B et il n'y a pas de frottement en D et F . En appliquant (2.21) et les résultats de Ex. XI.2 :

$$X(s) = X_0 \quad \text{sur} \quad ADFB.$$

- L'équilibre du nœud D et (4.33 à 4.35) montrent que

$$N_1(x_1) = -X_0, \quad V_1(x_1) = 0, \quad M_1(x_1) = 0;$$

de même

$$N_2(x_2) = -X_0, \quad V_2(x_2) = 0, \quad M_2(x_2) = 0.$$

- Sur AB on écrit (4.33 à 4.35) sur chaque tronçon AC, CE et EB , et l'équilibre des nœuds rigides en C et E par (4.11). D'où

$[\mathbb{X}(x)]$ est constant sur chaque tronçon AC, CE et EB

$$-2\ell < x < -\ell : \quad N(x) = -\frac{X_0}{2}, \quad V(x) = X_0 \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M(x) = -(x + 2\ell)X_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\ell < x < \ell : \quad N(x) = -X_0, \quad V(x) = 0, \quad M(x) = -\ell X_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ell < x < 2\ell : \quad N(x) = -\frac{X_0}{2}, \quad V(x) = -X_0 \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M(x) = (x - 2\ell)X_0 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La structure est donc hyperstatique de degré 1; X_0 peut être choisie comme inconnue hyperstatique.

2°/

En application de (4.25 et 4.26), dans les mouvements virtuels respectant la continuité de la structure l'intégrale des puissances virtuelles des efforts intérieurs, pour un **champ d'autocontrainte pour le problème quelconque**, est nulle sur la structure. C'est-à-dire que, pour les efforts intérieurs calculés au 1°, on a : $\forall X_0, \mathcal{P}_{(i)}(\hat{U}) = 0$ sur la structure. On obtient la condition de compatibilité géométrique en explicitant $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{U})$ pour les champs de vitesse virtuels de la forme proposée :

$$\int_{ADFB} \hat{D}_C(s) ds - \ell(\hat{D}_1 + \hat{D}_2) - \frac{1}{2} \left(\int_{-2\ell}^{2\ell} \hat{D}(x) dx + \int_{-\ell}^{\ell} \hat{D}(x) dx \right) + \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\int_{-2\ell}^{-\ell} (x+2\ell) \frac{d\hat{\Omega}(x)}{dx} dx + \int_{-\ell}^{\ell} \ell \frac{d\hat{\Omega}(x)}{dx} dx + \int_{\ell}^{2\ell} (2\ell-x) \frac{d\hat{\Omega}(x)}{dx} dx \right) = 0.$$

3°/

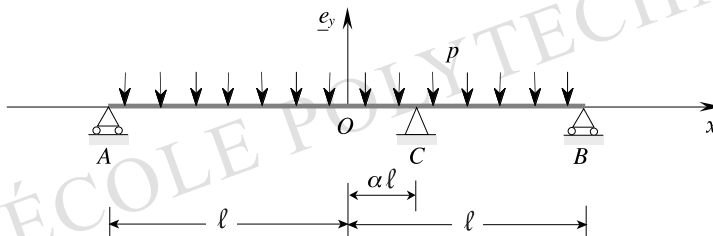
- On étudie l'équilibre de la structure sous le chargement indiqué en supposant $X_0 = 0$. L'équilibre global impose : $[\mathbb{R}_A] + [\mathbb{R}_B] = 0$ d'où $R_A = \mu/2\ell$, $R_B = -\mu/2\ell$. Pour $X_0 = 0$ les efforts intérieurs dans la structure sont déterminés comme au 1° ; on trouve
 $[\mathbb{X}] = 0$ sur $ADFB$, sur CD et sur EF ;
 sur AB : $-2\ell \leq x \leq 2\ell$: $N(x) = 0$, $V(x) = -\mu/2\ell$, $M(x) = M_0 + \mu x/2\ell$.
- Toute distribution d'efforts intérieurs en équilibre avec le chargement $[\mathbb{R}_A]$, $[\mathbb{R}_B]$, indiqué est la somme de la distribution déterminée pour $X_0 = 0$ fonction de M_0 et μ , et d'un champ d'autocontrainte pour le problème quelconque, fonction linéaire de X_0 , déterminée au 1°.

Commentaire.

On remarque que, par l'application du principe des puissances virtuelles, on exploite complètement les résultats de l'analyse statique en en déduisant la condition de compatibilité géométrique beaucoup plus aisément que par un raisonnement géométrique direct.

Tous les résultats obtenus permettent, dès que l'on connaît la loi de comportement des milieux curvilignes constitutifs de la structure, de résoudre complètement celle-ci : on détermine la valeur de l'inconnue hyperstatique X_0 par la condition de compatibilité géométrique.

XI.10 - Poutre continue sur trois appuis. La poutre droite étudiée, AB , a pour longueur 2ℓ . Elle est placée selon l'axe Ox d'un repère cartésien orthonormé : les extrémités A et B ont respectivement pour abscisse : $x_A = -\ell$, $x_B = \ell$. L'appui intermédiaire C a pour abscisse $x_C = \alpha\ell$, $0 \leq \alpha < 1$. La section de cette poutre est constante et admet le plan Oxy comme plan de symétrie. Le chargement actif est représenté par une densité linéique uniforme de force : $\underline{f}(x) = -p \underline{e}_y$, $p > 0$ constante. Les appuis en A, B et C sont simples, **unilatéraux**, n'exerçant donc en ces points sur la poutre AB que des réactions que l'on notera : $\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y$, $\underline{R}_B = R_B \underline{e}_y$, $R_C = Y \underline{e}_y$ avec les conditions de liaison $R_A \geq 0$, $R_B \geq 0$, $Y \geq 0$.



Sans prendre en compte le caractère unilatéral des liaisons en A , B et C , déterminer, en fonction de p et de Y , les valeurs des réactions des appuis lorsque la structure est en équilibre sous le chargement défini par p .

Préciser et expliquer le domaine de variation permis pour l'inconnue hyperstatique Y par les conditions de liaison réelles du problème et donner alors, en fonction de p et de Y , l'expression de toutes les distributions de torseurs d'efforts intérieurs statiquement admissibles pour le problème pour le chargement défini par p .

Éléments de réponse :

Compte tenu de la forme des données on se place dans le cadre de la théorie des poutres droites chargées dans leur plan.

- $[\mathcal{F}_e] = 0$ à l'équilibre, d'où : $R_A = p\ell - Y(1 - \alpha)/2$, $R_B = p\ell - Y(1 + \alpha)/2$.
- Ces formules ne sont à conserver que si elles sont compatibles avec les conditions réelles de liaison aux appuis. D'où, en écrivant que $R_A \geq 0$, $R_B \geq 0$ et $Y \geq 0$:
 $0 \leq Y \leq 2p\ell/(1 + \alpha)$,
 $R_A = p\ell - Y(1 - \alpha)/2$, $R_B = p\ell - Y(1 + \alpha)/2$.

La valeur de l'inconnue hyperstatique Y ne peut sortir du domaine $0 \leq Y \leq 2p\ell/(1 + \alpha)$; en effet la borne $Y = 0$ est imposée par l'appui unilatéral en C , et la borne $Y = 2p\ell/(1 + \alpha)$ ne peut être franchie car, dès que la liaison unilatérale en B est rompue, le problème est isostatique et Y est déterminée égale à $2p\ell/(1 + \alpha)$.

À partir des équations (3.43) et (3.44) on obtient

$$\begin{aligned} -\ell \leq x \leq \alpha\ell : & \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px + Y(1 - \alpha)/2 \quad (x \neq \alpha\ell) \\ M(x) = p \frac{\ell^2 - x^2}{2} - Y(\ell + x) \frac{1 - \alpha}{2} \end{cases} \\ \alpha\ell \leq x \leq \ell : & \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = px - Y(1 + \alpha)/2 \quad (x \neq \alpha\ell) \\ M(x) = p \frac{\ell^2 - x^2}{2} - Y(\ell - x) \frac{1 + \alpha}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

où $0 \leq Y \leq 2p\ell/(1 + \alpha)$.

XI.11 - On considère le treillis articulé étudié dans Ex. XI.4. On suppose que l'intensité de l'effort normal dans chaque poutre est limitée, tant en traction qu'en compression, par une valeur L identique, pour toutes les poutres : $\forall i = 1, 2, \dots, 6$, $|N_i| \leq L$. Montrer que l'équilibre de la structure sous le chargement défini dans Ex. XI.4, dépendant du paramètre scalaire Q , n'est compatible avec la condition de résistance indiquée, que si $|Q|$ demeure inférieure à une valeur que l'on déterminera. Retrouver le même résultat au moyen du principe des puissances virtuelles.

Éléments de réponse :

- Pour Q donné, on doit écrire la compatibilité en N_1, \dots, N_6 , des équations d'équilibre
 $N_1 + (N_4 + N_5)\sqrt{2}/2 = Q$
 $N_2 + (N_5 + N_6)\sqrt{2}/2 = 0$
 $N_3 = N_4 = N_5 = N_6$.
 et des conditions de résistance
 $\forall i = 1, 2, \dots, 6$, $|N_i| \leq L$,
 On trouve la condition nécessaire et suffisante : $|Q| \leq 2L$.

- Considérant les champs $\hat{D}_i(s)$ qui respectent la compatibilité géométrique pour la structure, avec les notations de Ex. XI.4, l'équilibre de la structure sous le chargement défini par Q s'exprime par :

$\exists N_1, \dots, N_6$ tels que

$$\forall \hat{\delta}_i, (i = 1, 2, \dots, 6), \text{ respectant } \hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_4 + \hat{\delta}_5 + \hat{\delta}_6 - \sqrt{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2) = 0$$

$$\text{on a } \sum_{i=1}^6 N_i \hat{\delta}_i = Q (\hat{U}_C - \hat{U}_A) \cdot \underline{e}_x = Q \hat{\delta}_1.$$

$$\text{Or } |N_i| \leq L \Rightarrow \forall \hat{\delta}_i, N_i \hat{\delta}_i \leq L |\hat{\delta}_i|.$$

D'où la condition **nécessaire** pour que l'équilibre de la structure sous le chargement défini par Q soit compatible avec la condition de résistance :

$$\forall \hat{\delta}_i, (i = 1, 2, \dots, 6), \text{ tels que } \hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_4 + \hat{\delta}_5 + \hat{\delta}_6 - \sqrt{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2) = 0,$$

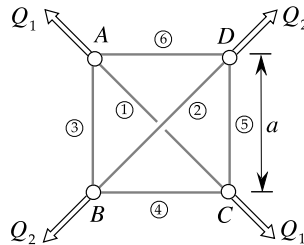
$$\text{on a } \sum_{i=1}^6 L |\hat{\delta}_i| \geq Q \hat{\delta}_1.$$

Selon le signe $\hat{\delta}_1$ cette inégalité fournit une borne supérieure ou une borne inférieure pour Q . En optimisant l'une et l'autre on obtient la condition nécessaire : $|Q| \leq 2L$.

Commentaire.

Les raisonnements développés ici, à rapprocher de ceux mis en œuvre dans Ex. VI.2, ressortissent à la théorie du Calcul à la rupture fréquemment utilisée en génie civil. On remarque que l'approche cinématique par le principe des puissances virtuelles ne fournit a priori qu'une condition nécessaire mais on pourrait démontrer ici, par la théorie de la dualité en programmation linéaire, qu'il y a identité entre la condition optimale trouvée et celle obtenue, nécessaire et suffisante, directement par l'approche statique.

XI.12 - Reprendre et transposer le problème traité dans Ex. XI.11, en supposant que la structure étudiée est soumise au chargement représenté sur la figure, dépendant des deux paramètres scalaires Q_1 et Q_2 .



Éléments de réponse :

- Les équations d'équilibre s'écrivent maintenant

$$N_1 + (N_4 + N_5)\sqrt{2}/2 = Q_1$$

$$N_2 + (N_5 + N_6)\sqrt{2}/2 = Q_2$$

$$N_3 = N_4 = N_5 = N_6.$$

La compatibilité en N_1, N_2, \dots, N_6 , à Q_1, Q_2 donnés, avec la condition de résistance, donne les conditions nécessaires et suffisantes sur Q_1 et Q_2

$$|Q_1| \leq L(1 + \sqrt{2}), |Q_2| \leq L(1 + \sqrt{2}), |Q_1 - Q_2| \leq 2L$$

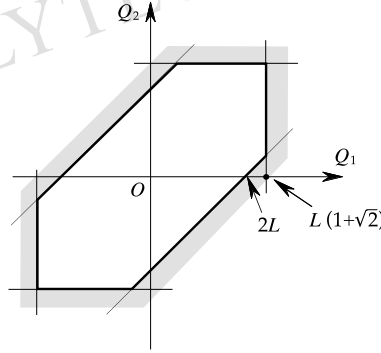
qui définissent le domaine représenté sur la figure dans le plan (Q_1, Q_2) .

- En appliquant la relation d'orthogonalité (4.26) on obtient sur (Q_1, Q_2) la condition nécessaire :

$$\forall \hat{\delta}_i, (i = 1, 2, \dots, 6), \text{ tels que } \hat{\delta}_3 + \hat{\delta}_4 + \hat{\delta}_5 + \hat{\delta}_6 - \sqrt{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^6 L |\hat{\delta}_i| \geq Q_1 \hat{\delta}_1 + Q_2 \hat{\delta}_2$$

qui définit, par dualité géométrique, le domaine trouvé plus haut dans le plan (Q_1, Q_2) .



XI.13 - On considère une structure constituée d'éléments curvilignes, tous solidarisés aux nœuds par des assemblages avec encastrement. Toutes les conditions *d'appui* de la structure sont du type « extrémité fixée dans un encastrement rigide ». On envisage les mouvements virtuels dans lesquels $\{\hat{\mathbb{D}}(s)\} = 0$ et où seuls des termes de discontinuité $[\hat{\underline{U}}_i] = 0$ et $[\hat{\underline{\Omega}}_i] \neq 0$ sont permis en des points P_i , $(i = 1, \dots, n)$, précisés à l'avance. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel constitué par ceux de ces mouvements virtuels qui sont cinématiquement admissibles c'est-à-dire qui respectent, outre la continuité de la structure, ses conditions d'appui. Application au cas des structures planes pour lesquelles on se limite à $[\hat{\underline{\Omega}}_i] = [\hat{\Omega}_i] \underline{e}_z$.

Éléments de réponse :

- On considère les champs d'autocontrainte pour le problème. On désigne par k le degré d'hyperstaticité. k_F est le degré d'hyperstaticité du point de vue de $\underline{\Gamma}$, c'est-à-dire le nombre d'inconnues hyperstatiques dont dépendent les distributions de $\underline{\Gamma}(s)$ dans ces champs d'autocontrainte : $k_F \leq k$.

- On applique le principe des puissances virtuelles à tout mouvement virtuel du type considéré, pour toute distribution d'efforts intérieurs autoéquilibrée ; il vient par (4.25) et (4.26) :

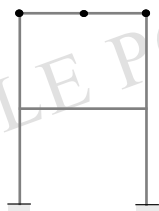
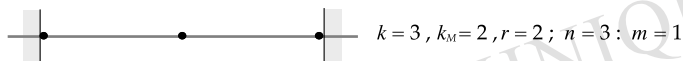
$$\sum_{i=1}^n [\hat{\underline{\Omega}}_i] \cdot \underline{\Gamma}(s_i) = 0.$$

Le nombre de composantes des $\underline{\Gamma}(s_i)$ qui sont linéairement indépendantes est $r \leq k_F$.
D'où la dimension cherchée : $m = 3n - r \geq 3n - k_F \geq 3n - k$.

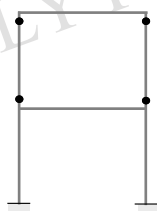
- Pour les structures planes avec $[\hat{\underline{\Omega}}_i] = [\hat{\Omega}_i] \underline{e}_z$, on introduit k_M , degré d'hyperstaticité relatif au moment fléchissant selon \underline{e}_z , et r est le nombre de $M(s_i)$ linéairement indépendants ; d'où :
 $m = n - r \geq n - k_M \geq n - k$.

Commentaire.

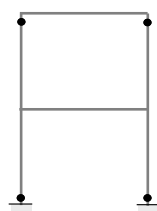
Le dénombrement effectué ci-dessus trouve notamment une application pratique dans la recherche et la construction des « mécanismes de ruine » en calcul à la rupture des structures à barres fléchies. Des exemples de poutre et de portiques sont représentés ci-dessous.



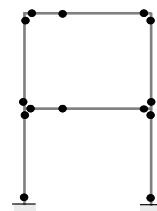
$$\begin{aligned} r &= 2 \\ n &= 3 \\ m &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &= 3 \\ n &= 4 \\ m &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &= 4 \\ n &= 4 \\ m &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &= 6 \\ n &= 14 \\ m &= 8 \end{aligned}$$

$$k = 6$$

$$k_M = 6$$

Chapitre XII

Structures curvilignes thermoélastiques

MOTS CLÉS

Condition de NAVIER-BERNOULLI.
Transformation infinitésimale.
Distributeur du déplacement.
Distributeur de la déformation.
Comportement thermoélastique.
Petits déplacements. Petites perturbations.
Équilibre thermoélastique linéarisé.
Théorème des travaux virtuels.
Théorème de Castigliano.
Théorème du potentiel minimum.

En bref...

Après la mise en place de la modélisation géométrique et de la modélisation des efforts pour le milieu curviligne, l'analyse des structures nécessite que soit écrite la loi de comportement (section 1).

L'hypothèse de la transformation infinitésimale pour le milieu curviligne permet d'introduire les distributeurs du déplacement et de la déformation. La loi de comportement thermoélastique linéaire est une relation linéaire entre le distributeur de la déformation, le tenseur d'efforts intérieurs et la variation de température au point courant. Cette relation est orientée dans l'espace par l'orientation du milieu curviligne définie par la courbe directrice et la microstructure transversale au point courant. Ainsi, ce sont les *composantes* des éléments de réduction du distributeur de la déformation et du tenseur d'efforts intérieurs sur la tangente à la courbe directrice et sur les axes définissant l'orientation de la microstructure transversale qui interviennent explicitement dans la loi de comportement.

La loi de comportement thermoélastique linéarisée couramment utilisée dans la pratique pour les milieux curvilignes qui modélisent des barres ou, plus généralement, des arcs de faible courbure élancés et à section lentement variable, fait l'hypothèse que les mouvements réels du milieu curviligne satisfont la *condition de Navier-Bernoulli*. Elle est obtenue par identification à partir de la solution du *problème de Saint Venant* pour une barre cylindrique homogène, constituée d'un matériau thermoélastique linéaire isotrope, soumise à une flexion composée et à une torsion. Elle conduit à placer la *courbe directrice* de la poutre selon la *ligne des centres d'inertie des sections droites* de l'arc original et à orienter sa microstructure transversale (section droite de la poutre) par les axes principaux d'inertie de la section droite de l'arc tridimensionnel original. Il est commode d'exprimer cette loi de comportement en faisant intervenir l'énergie élastique du milieu curviligne écrite comme fonction des composantes du tenseur d'efforts intérieurs au point courant (section 2).

L'hypothèse des *petites perturbations* permet la linéarisation du problème d'équilibre thermoélastique. Elle doit être validée avec soin pour vérifier que les déplacements restent petits. Dans cette hypothèse les résultats d'*unicité* établis pour le milieu continu tridimensionnel sont recon-

duits. Hors de cette hypothèse, en revanche, on est en particulier confronté aux problèmes de *stabilité* dans lesquels des solutions différentes peuvent être mises en évidence pour un même problème (section 3).

La résolution des *problèmes isostatiques* fait appel à la loi de comportement du milieu curviligne pour déterminer les déformations et les déplacements dans la structure. On y utilise couramment le *théorème de Castigliano* pour les calculs de déplacements (sections 3 et 4).

Pour les *problèmes hyperstatiques* l'intervention de la loi de comportement est nécessaire pour la détermination des efforts intérieurs, des déformations et des déplacements. On peut procéder directement en écrivant la *compatibilité des déformations* des éléments de la structure avec la *continuité* de celle-ci et avec les *conditions d'appuis*. On peut aussi utiliser le *théorème du potentiel minimum* qui exprime ces conditions de compatibilité sous forme dualisée (sections 3 et 4).

Principales notations

Notation	Signification	1 ^{ère} formule
$\{\xi\}$	champ de distributeur des déplacements réels	(2.3)
$\underline{\xi}(s), \underline{\omega}(s)$	éléments de réduction en P de $\{\xi(s)\}$	(2.3)
$\omega_t(s)$	composante de $\underline{\omega}(s)$ selon $\underline{t}(s)$	(2.5)
$\underline{\omega}_\perp(s)$	composante de $\underline{\omega}(s)$ dans le plan normal à $\underline{t}(s)$	(2.5)
$\{\mathcal{E}(s)\}$	déformation du milieu curviligne en P	(2.7)
$\varepsilon(s)$	extension linéique de la courbe directrice	(2.8)
$\{\hat{\xi}\}$	champ de déplacement virtuel	(2.12)
$w_{AB}^*([\mathbb{X}(x)], \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$	densité linéique d'énergie élastique de contrainte pour l'élément de poutre droite	(2.27)
$N^P, \underline{V}^P, \underline{M}^P, C^P$	éléments de réduction de l'état de précontrainte initial	(2.33) à (2.36)
$\tau(s)$	variation de température	(2.39)
$w_{AB}^*([\mathbb{X}(s)], \underline{t}(s), \underline{e}_y(s), \underline{e}_z(s))$	densité linéique d'énergie élastique de contrainte pour le milieu curviligne	(2.45)

1	Problématique	91
2	Comportement thermoélastique du milieu curviligne	92
2.1	Transformation infinitésimale. Distributeurs du déplacement et de la déformation	92
2.2	Formulation d'une loi de comportement pour le milieu curviligne	93
2.3	Théorème des travaux virtuels	94
2.4	Description de la démarche	94
2.5	Comportement élastique isotherme d'un élément de poutre droite à partir de l'état initial naturel	95
2.6	Comportement thermoélastique d'un élément de poutre droite à partir d'un état initial précontraint	101
2.7	Comportement thermoélastique du milieu curviligne en calcul des structures	103
2.8	Extensions diverses	104
3	Équilibre thermoélastique linéarisé des structures curvilignes	105
3.1	Hypothèse des petites perturbations	105
3.2	Problèmes isostatiques	106
3.3	Problèmes hyperstatiques	106
3.4	Formules principales	107
3.5	Structures planes chargées dans leur plan	108
3.6	Poutres droites chargées dans leur plan	110
4	Exemples d'applications	111
4.1	Problèmes isostatiques	111
4.2	Problème hyperstatique	113
5	Conclusion	116
	Récapitulatif des formules essentielles	117
	Exercices	119

Structures curvilignes thermoélastiques

1 Problématique

On a vu que, malgré la simplification apportée par la modélisation unidimensionnelle des éléments constitutifs, l'analyse statique d'une structure conduit le plus souvent à un problème hyperstatique. Quelques exercices du chapitre précédent ont donné un aperçu de la démarche du Calcul à la rupture qui permet d'apporter une réponse partielle à ce type de problème : à partir d'une information sur le comportement du « matériau curviligne » réduite à la donnée de ses capacités de résistance, on détermine le domaine de résistance potentielle de la structure dans la géométrie donnée. La théorie correspondante est développée dans d'autres ouvrages.

Pour procéder à la résolution complète des problèmes d'équilibre de la structure il est nécessaire, comme dans le cas du milieu continu tridimensionnel, de disposer de la loi de comportement du matériau curviligne : homologue unidimensionnelle des lois de comportement évoquées au chapitre VII, elle obéit aux mêmes principes généraux, parmi lesquels le principe d'action locale.

Ce chapitre est consacré aux structures constituées d'éléments curvilignes dont le comportement est thermoélastique linéaire. D'autres lois de comportement sont également utilisées dans la pratique pour les milieux curvilignes (élasto-plasticité, viscoélasticité...) qui ne seront pas abordées ici mais les considérations développées dans le cadre thermoélastique linéaire ont une portée générale.

Le modèle de comportement thermoélastique du matériau curviligne sera directement construit dans le cadre de la modélisation « enrichie » du chapitre XI (section 3) adaptée aux poutres et arcs de faible courbure mais, puisque comme on l'a vu les fils et câbles sans raideur en sont des cas particuliers, il leur sera donc applicable à condition d'y adjoindre les conditions de tension positive et de résistance nulles à l'effort tranchant, à la flexion et à la torsion. On rappelle aussi que la résolution des problèmes d'équilibre se présente différemment dans l'un et l'autre cas puisque, pour un élément sans raideur la géométrie de la courbe directrice dans la configuration actuelle fait partie des inconnues du problème.

La méthode des puissances virtuelles a permis la construction de la modélisation curviligne sur une courbe directrice donnée. L'écriture de la loi de comportement pour ce milieu curviligne nécessite que le raccord soit fait entre les mouvements réels définis dans la modélisation géométrique unidimensionnelle et la réalité de l'observation expérimentale tridimensionnelle. Des difficultés peuvent apparaître à ce niveau et la validation de la démarche adoptée pour le surmonter sera évaluée par la pertinence pratique des résultats obtenus.

2 Comportement thermoélastique du milieu curviligne

2.1 Transformation infinitésimale. Distributeurs du déplacement et de la déformation

Dans la modélisation géométrique préalable à la représentation des efforts, les mouvements réels du milieu curviligne sont décrits sur la configuration actuelle κ_t par un champ de distributeur $\{\mathbb{U}\}$ défini sur la courbe directrice :

$$(2.1) \quad \forall P \in AB, \{\mathbb{U}(s)\} = \{P, \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)\}$$

où $\underline{U}(s)$ est la vitesse du point géométrique P de la courbe directrice et $\underline{\Omega}(s)$ la vitesse de rotation de la microstructure transversale associée à la particule en P .

On fait, pour toute l'analyse à venir, *l'hypothèse que les mouvements réels du milieu curviligne satisfont la condition de Navier-Bernoulli* présentée au chapitre XI (§ 3.13). À chaque instant le champ de distributeurs (2.1) est tel que les champs \underline{U} et $\underline{\Omega}$ satisfont la condition (3.70) du chapitre XI. Le champ $\{\mathbb{U}\}$ est ainsi défini par le champ vectoriel \underline{U} et le champ scalaire Ω_t par (2.1) et :

$$(2.2) \quad \forall P \in AB, \underline{\Omega}(s) = \Omega_t(s) \underline{t}(s) + \underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{U}(s)}{ds}.$$

On rappelle que la condition de Navier-Bernoulli a géométriquement l'expression suivante. Si l'on donne à l'élément de surface plan orthogonal à la courbe directrice au point courant P le mouvement rigidifiant défini par le distributeur $\{\mathbb{U}(s)\}$, cet élément demeure orthogonal à la courbe directrice dont le mouvement est défini par le champ \underline{U} . Ainsi, partant d'une configuration de référence κ_0 on suit avec $\underline{U}(s)$ à chaque instant la position d'un point de la courbe directrice et avec $\underline{\Omega}(s)$ on suit l'orientation de la microstructure qui *demeure* orthogonale à la courbe directrice.

Dans l'hypothèse où le mouvement réel induit, entre la configuration de référence κ_0 et la configuration actuelle κ_t , une *rotation infinitésimale* en des points homologues de la courbe directrice, ce mouvement peut être décrit du point de vue des déplacements entre κ_0 et κ_t par un champ de distributeur $\{\xi\}$ de la même façon que pour les vitesses. Ce champ peut être défini sur la courbe directrice dans la configuration initiale κ_0 , ou dans la configuration actuelle κ_t . Sur la configuration actuelle :

$$(2.3) \quad \{\xi(s)\} = \{P, \underline{\xi}(s), \underline{\omega}(s)\},$$

avec la condition (de rotation infinitésimale) :

$$(2.4) \quad \forall P \in AB, |\underline{\omega}(s)| \ll 1.$$

Le respect de la condition de Navier-Bernoulli dans le mouvement réel impose alors au champ $\{\xi\}$ se satisfaire la condition homologue de (2.2). En posant :

$$(2.5) \quad \underline{\omega}(s) = \omega_t(s) \underline{t}(s) + \underline{\omega}_\perp(s),$$

$\{\xi\}$ est déterminé par les champs $\underline{\xi}$ et ω_t sur AB à travers la relation :

$$(2.6) \quad \underline{\omega}_\perp(s) = \underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds}.$$

On introduit, pour les champs $\{\xi\}$ et $\underline{\xi}$ dans κ_t :

$$(2.7) \quad \{\mathcal{E}(s)\} = \frac{d\{\xi(s)\}}{ds}$$

$$(2.8) \quad \varepsilon(s) = \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s),$$

homologues de $\hat{\mathbb{D}}(s)$ et $\hat{D}(s)$ pour $\{\hat{\mathbb{U}}\}$ et $\underline{\hat{U}}$ introduits au chapitre XI. Il vient, compte tenu de (2.6) :

$$(2.9) \quad \{\mathcal{E}(s)\} = \{P, \varepsilon(s)\underline{t}(s), \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds}\}$$

$$(2.10) \quad \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} = \frac{d\omega_t(s)}{ds} \underline{t}(s) + \frac{d\underline{\omega}_\perp(s)}{ds} + \frac{1}{\rho(s)} \omega_t(s) \underline{n}(s),$$

où $\rho(s)$ est le rayon de courbure de la courbe directrice en P .

L'hypothèse de la **transformation infinitésimale du milieu curviligne** entre la configuration de référence κ_0 et la configuration actuelle κ_t s'écrit :

$$(2.11) \quad \forall P \in AB, \quad \left| \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} \right| \ll 1, \quad |\omega_t(s)| \ll 1.$$

Compte tenu de (2.6), elle implique évidemment la condition initiale de rotation infinitésimale (2.4). Elle permet de confondre les dérivations selon la courbe directrice dans κ_0 et κ_t en des points homologues.

Le distributeur $\{\mathcal{E}(s)\}$ défini sur κ_t par (2.7) représente alors **la déformation du milieu curviligne en P** .

2.2 Formulation d'une loi de comportement pour le milieu curviligne

D'une manière générale une loi de comportement pour le milieu curviligne est la formulation d'une relation fonctionnelle entre l'histoire de la sollicitation de l'élément matériel curviligne et son évolution dans les mouvements réels. Dans le cas de la thermoélasticité, la relation recherchée ne se réfère qu'aux **valeurs actuelles locales** de la sollicitation – efforts intérieurs $[\mathbb{X}(s)]$ et écart thermique $\tau(s)$ – et de la déformation $\{\varepsilon(s)\}$ à partir de la configuration de référence.

Cette relation est **orientée** par l'orientation du milieu curviligne au point considéré : elle prendra la forme d'une relation entre les composantes des éléments de

réduction de $[\mathbb{X}(s)]$ et $\{\varepsilon(s)\}$ en P sur $\underline{t}(s)$ et sur les axes qui définissent la micro-structure transversale.

Tout ce qui traite du comportement se réfère aux mouvements et aux déformations **réels** du milieu curviligne. C'est l'occasion d'évoquer à nouveau une éventuelle ambiguïté quant à la signification de ce terme. Le mot « réel » est introduit par opposition à « virtuel » pour signifier qu'il s'agit des déformations associées, par la loi de comportement du milieu curviligne, au torseur d'efforts intérieurs, **dans le cadre de cette modélisation**. On ne doit donc pas entendre, puisque le milieu curviligne est lui-même une modélisation d'un solide tridimensionnel élastique, que les déformations « réelles » dont il est question et qui sont définies dans la description géométrique caractérisée par (2.1), sont celles de ce solide tridimensionnel (cf. § 2.5).

2.3 Théorème des travaux virtuels

On fait désormais l'hypothèse des petits déplacements. On peut alors, comme au chapitre X (§ 1.4), énoncer le théorème des travaux virtuels.

Pour un arc AB de milieu curviligne, soumis au chargement extérieur décrit au chapitre XI (§ 3.2), pour tout champ d'efforts intérieurs $[\mathbb{X}]$, continu et continûment différentiable par morceaux, en équilibre avec ce chargement, pour tout champ de déplacement virtuel $\{\hat{\xi}\}$ de la forme (2.1), satisfaisant la condition de Navier-Bernoulli, continu, continûment différentiable par morceaux, on a :

$$(2.12) \quad \int_{AB} [\mathbb{X}(s)] \cdot \{\hat{\mathcal{E}}(s)\} ds - \int_{AB} [\mathbb{F}(s)] \cdot \{\hat{\xi}(s)\} ds - [\mathbb{R}_A] \cdot \{\hat{\xi}(s_A)\} - [\mathbb{R}_B] \cdot \{\hat{\xi}(s_B)\} = 0$$

soit, compte tenu de la condition de Navier-Bernoulli,

$$(2.13) \quad \int_{AB} (N(s) \hat{\varepsilon}(s) + \underline{T}(s) \frac{d\hat{\omega}(s)}{ds}) ds - \int_{AB} (\underline{f}(s) \cdot \hat{\xi}(s) + \underline{m}(s) \cdot \hat{\omega}(s)) ds - \underline{R}_A \cdot \hat{\xi}_A - \underline{R}_B \cdot \hat{\xi}_B - \underline{H}_A \cdot \hat{\omega}_A - \underline{H}_B \cdot \hat{\omega}_B = 0$$

où $\frac{d\hat{\omega}(s)}{ds}$ doit être développé selon (2.10).

On remarque que dans cette égalité, vraie notamment pour les mouvements réels, le travail virtuel des efforts intérieurs ne fait pas intervenir l'effort tranchant (cf. chapitre XI, § 3.13).

2.4 Description de la démarche

La recherche de la loi de comportement élastique du milieu curviligne doit déterminer la relation « contrainte - déformation » entre $[\mathbb{X}(s)]$ et $\{\mathcal{E}(s)\}$. Elle se référera évidemment à des résultats expérimentaux, obtenus nécessairement par des

essais à caractère tridimensionnel. Deux approches sont alors possibles, déjà évoquées au chapitre XI :

- a) interpréter directement, du point de vue du milieu curviligne, des expériences réalisées sur un solide élastique dont celui-ci est une modélisation ;
- b) procéder à une construction de la loi de comportement du milieu curviligne à partir de celle supposée connue du milieu tridimensionnel constituant le solide élastique qu'il modélise.

Dans les deux cas, puisqu'un raccord entre les modélisations curviligne d'une part et tridimensionnelle d'autre part est à effectuer, on devra situer la courbe directrice du modèle curviligne et identifier la section droite modélisant la microstructure transversale dans la géométrie du solide tridimensionnel.

Suivant la deuxième démarche indiquée ci-dessus, on va s'attacher à construire la loi de comportement élastique pour des milieux curvilignes modélisant des solides tridimensionnels constitués d'un matériau homogène, linéairement élastique isotrope. Pour cette démarche d'identification analytique de la loi de comportement du milieu curviligne par confrontation de deux modélisations on prend comme référence le problème simple de la barre cylindrique modélisée comme une poutre droite.

2.5 Comportement élastique isotherme d'un élément de poutre droite à partir de l'état initial naturel

Principe de la méthode

On considère une barre cylindrique de longueur ℓ , de section droite S , dont on désigne par Ω le volume, par S_0 et S_ℓ les sections d'extrémités ($x = 0$ et $x = \ell$) et qui est constituée d'un *matériau homogène, linéairement élastique, isotrope*. Comme au chapitre IX (§ 3.1), l'axe Ox est le lieu des centres d'inertie des sections droites⁽¹⁾ Oy et Oz sont dirigés suivant les axes principaux d'inertie de S_0 (figure 1).

Cette barre, non chargée sur sa surface latérale ($\partial\Omega - S_0 - S_\ell$), est soumise au chargement défini comme au chapitre IX (§ 5.3) par :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{un effort de traction-compression } N, \\ \text{un couple de torsion } \mathcal{C}, \\ \text{un moment de flexion } \underline{M}, \end{array} \right.$$

appliqués au centre de la section S_ℓ , et les grandeurs opposées et appliquées au centre de la section S_0 .

La modélisation naturelle de la barre de la figure 1 comme un milieu curviligne est une poutre homogène rectiligne (poutre droite) AB , parallèle à Ox , de longueur ℓ (figure 2).

⁽¹⁾ Comme au chapitre IX (§ 2.3), aucune considération de masse n'intervient ici : il s'agit des centres d'inertie géométrique des sections droites

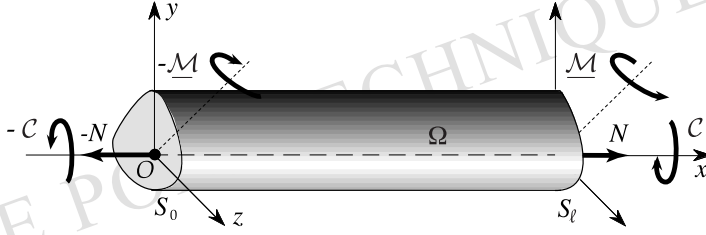


Figure 1 – Barre cylindrique et problème de Saint Venant

On convient, et ce choix est justifié par la suite de l'analyse, de placer la courbe directrice de cette poutre droite selon l'axe Ox lieu des centres d'inertie des sections droites de la barre et de caractériser l'orientation de la microstructure transversale par les axes Oy et Oz . Le chargement extérieur de la poutre AB ainsi substituée à la barre est :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \underline{f}(s) = \underline{m}(s) = 0 \\ \underline{R}_A = -N \underline{e}_x, \underline{H}_A = -C \underline{e}_x - \underline{M} \\ \underline{R}_B = N \underline{e}_x, \underline{H}_B = C \underline{e}_x + \underline{M}. \end{cases}$$

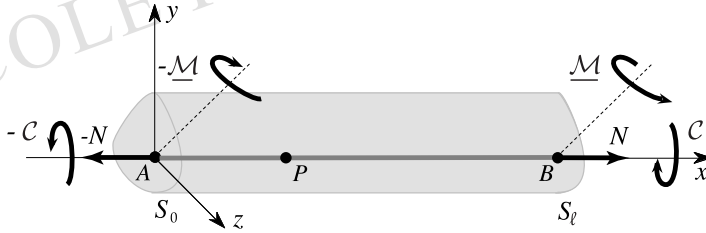


Figure 2 – Poutre droite modélisant la barre cylindrique

Le champ de torseur des efforts intérieurs sur AB est alors déterminé par intégration des équations d'équilibre du milieu curviligne : c'est le champ constant

$$(2.16) \quad \forall P \in AB, [\mathbb{X}(s)] = [P, N \underline{e}_x, C \underline{e}_x + \underline{M}].$$

On a ainsi sur AB une distribution homogène pour l'effort normal $N(x) = N$, le moment de torsion $C(x) = C$ et le moment fléchissant $\underline{M}(x) = M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z$, tandis que l'effort tranchant $\underline{V}(x)$ est identiquement nul. On réalise ainsi par la pensée une expérience de **sollicitation homogène** adaptée à l'identification de la loi de comportement du matériau curviligne. Néanmoins, on ne saurait perdre de vue qu'en raison même du couplage entre le moment fléchissant et l'effort tranchant imposé par les équations d'équilibre la loi de comportement ainsi identifiée exclut la participation de l'effort tranchant ; on y reviendra dans la suite.

L'idée directrice de la méthode utilisée consiste à calculer le travail des efforts extérieurs appliqués à la barre cylindrique tridimensionnelle entre son état initial et l'état d'équilibre actuel. Le résultat obtenu fournit la valeur du travail des efforts extérieurs du chargement homologué appliqué à la poutre droite. On obtient alors, par le théorème des travaux virtuels, une équation à partir de laquelle on peut proposer la loi de comportement élastique linéarisée de l'élément de poutre droite⁽²⁾.

Loi de comportement élastique d'un élément de poutre droite sous sollicitation homogène

La solution du problème d'équilibre élastique de la barre cylindrique de la figure 1 sous le chargement défini plus haut par N , \mathcal{C} , \underline{M} , à partir de l'état initial naturel, s'obtient en superposant les solutions données et commentées aux chapitres VIII (section 7) et IX (sections 2 à 5). Il est commode, pour calculer le travail des efforts extérieurs, d'appliquer le théorème des travaux virtuels.

On a pour $\underline{\sigma}$ les composantes :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{N}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}z \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xy} = \frac{\mathcal{C}}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right), \quad \sigma_{xz} = \frac{\mathcal{C}}{J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) \end{array} \right.$$

avec $\Delta_2 \varphi = 0$ sur S , $n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = n_y z - n_z y$ sur ∂S (contour de S), et

$$(2.18) \quad J = \int_S \left(y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) - z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \right) da = \int_S \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)^2 \right) da.$$

Pour le champ de déformation $\underline{\varepsilon}$ on a :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{N}{ES} - \frac{\mathcal{M}_z}{EI_z}y + \frac{\mathcal{M}_y}{EI_y}z \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\mathcal{C}}{2\mu J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\mathcal{C}}{2\mu J} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right). \end{array} \right.$$

Il en résulte, tous calculs faits :

$$(2.20) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) d\Omega = \ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{\mathcal{M}_y^2}{EI_y} + \frac{\mathcal{M}_z^2}{EI_z} + \frac{\mathcal{C}^2}{\mu J} \right),$$

dont le deuxième membre représente le travail des efforts extérieurs appliqués à la barre de la figure 1.

Suivant la démarche annoncée plus haut, c'est ce résultat qui est conservé pour la valeur du travail des efforts extérieurs du chargement homologué appliqué à la poutre

⁽²⁾En appliquant le théorème des travaux virtuels, on voit que la méthode implique l'égalité du travail des efforts intérieurs dans chacun des modèles.

droite de la figure 2, soit, en explicitant :

$$(2.21) \quad \begin{aligned} N(\xi_x(\ell) - \xi_x(0)) + \mathcal{M}_y(\omega_y(\ell) - \omega_y(0)) + \mathcal{M}_z(\omega_z(\ell) - \omega_z(0)) + \mathcal{C}(\omega_x(\ell) - \omega_x(0)) \\ = \ell \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{\mathcal{M}_y^2}{EI_y} + \frac{\mathcal{M}_z^2}{EI_z} + \frac{\mathcal{C}^2}{\mu J} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'homogénéité des distributions de l'effort normal, du couple de torsion et du moment fléchissant sur AB et de l'homogénéité de la poutre, le champ de déformation $\{\mathcal{E}\}$ associé à $[\mathbb{X}]$ en chaque point de AB par la loi de comportement élastique du milieu curviligne est lui aussi homogène ; c'est-à-dire que l'on a :

$$(2.22) \quad \frac{d\xi_x(x)}{dx}, \frac{d\omega_y(x)}{dx}, \frac{d\omega_z(x)}{dx}, \frac{d\omega_x(x)}{dx} \quad \text{constants sur } AB,$$

avec la condition de Navier-Bernoulli :

$$(2.23) \quad \omega_y(x) = -\frac{d\xi_z(x)}{dx}, \quad \omega_z(x) = \frac{d\xi_y(x)}{dx}.$$

On aboutit ainsi, à partir de (2.21), à l'équation :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall P \in AB, \forall N, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z, \mathcal{C}, \\ N \frac{d\xi_x(x)}{dx} + \mathcal{M}_y \frac{d\omega_y(x)}{dx} + \mathcal{M}_z \frac{d\omega_z(x)}{dx} + \mathcal{C} \frac{d\omega_x(x)}{dx} = \frac{N^2}{ES} + \frac{\mathcal{M}_y^2}{EI_y} + \frac{\mathcal{M}_z^2}{EI_z} + \frac{\mathcal{C}^2}{\mu J} \end{array} \right.$$

d'où

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_x(x)}{dx} = \varepsilon(x) = N/ES \\ \frac{d\omega_y(x)}{dx} = \mathcal{M}_y/EI_y, \quad \frac{d\omega_z(x)}{dx} = \mathcal{M}_z/EI_z \\ \frac{d\omega_x(x)}{dx} = \mathcal{C}/\mu J \end{array} \right.$$

ou encore

$$(2.26) \quad \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\mathcal{M}_y}{EI_y} \underline{e}_y + \frac{\mathcal{M}_z}{EI_z} \underline{e}_z + \frac{\mathcal{C}}{\mu J} \underline{e}_x.$$

L'interprétation physique de cette solution se réfère aux propriétés du champ de déplacement solution du problème tridimensionnel pour la barre cylindrique, apparentes sur (2.19) :

- $\frac{N}{ES}$ est l'extension ε_{xx} de la fibre moyenne de la barre ;
- $\frac{\mathcal{M}_y}{EI_y} \underline{e}_y + \frac{\mathcal{M}_z}{EI_z} \underline{e}_z$ est, perpendiculairement à Ox , le vecteur rotation différentielle du plan de la section droite de la barre (chapitre IX, § 4.4 : dans le problème de la flexion déviée la section droite de la barre reste plane mais se déforme dans son plan) ;

- $\frac{C}{\mu J} \underline{e}_x$ est, sur Ox , le vecteur rotation différentielle de la section droite de la barre (chapitre VIII, § 7.2 : dans le problème de la torsion la section droite de la barre ne se déforme pas dans son plan mais subit en général un gauchissement).

Ainsi, la courbe directrice de la poutre droite, positionnée dans la configuration initiale selon la fibre moyenne de la barre cylindrique, subit dans le milieu curviligne la même déformation que la fibre moyenne dans la barre tridimensionnelle. La micro-structure transversale du milieu curviligne, orientée par les axes principaux d'inertie de la section droite de la barre dans la configuration initiale, demeure orthogonale à la courbe directrice dans le milieu curviligne : elle suit ainsi exactement le mouvement des plans de section droite de la barre tridimensionnelle en traction-compression et en flexion. Elle subit en outre une rotation autour de Ox qui suit le mouvement de la section droite de la barre tridimensionnelle en torsion, abstraction faite de son gauchissement.

Ceci précise l'identification de la poutre élastique unidimensionnelle sur la barre élastique tridimensionnelle.

Commentaires

- La solution du problème de référence posé sur la barre cylindrique dans le cadre de la thermoélasticité linéarisée repose sur l'hypothèse des petites perturbations dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel. On en a alors discuté la pertinence pour chacun des problèmes élémentaires dont la superposition fournit la solution du problème complet. En reprenant ces discussions dans le contexte actuel motivé par l'identification de la loi de comportement du milieu curviligne on voit que les conditions liées à la longueur de la barre cylindrique ne sont plus à prendre en compte et qu'en conséquence les hypothèses associées pour le milieu curviligne se réduisent à celles de la transformation infinitésimale comme cela est attendu.
- On peut aussi rappeler que la solution du problème de référence a été obtenue (cf. chapitre IX) par la méthode « semi-inverse » de Saint Venant qui précise a posteriori la définition des efforts extérieurs appliqués à cette barre sur ses sections d'extrémités S_0 et S_ℓ , dont les torseurs sont caractérisés par (2.14), pour laquelle elle est valable. En se plaçant du point de vue de la **poutre** droite pour laquelle les efforts extérieurs ne sont appréhendés que par des torseurs, et en adoptant la loi de comportement représentée par (2.23) et (2.25) on rejoint l'esprit du principe de Saint Venant (chapitre VIII, section 8) par lequel, dans la partie courante de la poutre élançée, la solution du problème d'équilibre élastique, à partir de l'état initial naturel, ne dépend que des éléments de réduction des torseurs des efforts extérieurs appliqués aux sections d'extrémité. Le principe de Saint Venant apparaît ainsi, en quelque sorte, comme une justification physique de la modélisation et de la démarche adoptée.
- Il est maintenant possible d'illustrer la remarque faite au paragraphe 2.2 à propos de la signification du mot « réel ». Ainsi, du point de vue du solide tridimensionnel, le champ de déplacement « réel » dans la barre cylindrique dans l'état d'équilibre élastique ne conserve en général pas la planéité des sections

droites (cf. le gauchissement dû à la torsion) ni leur indéformabilité dans leur plan (effet « Poisson »). La relation entre ce champ de déplacement et le champ « réel » pour le milieu curviligne ne s'interprète qu'à travers la construction présentée ci-dessus.

- C'est aussi l'occasion d'éclairer la terminologie utilisée à propos de « l'hypothèse » et de « la condition » de Navier-Bernoulli.

L'hypothèse de Navier-Bernoulli, rencontrée au chapitre IX (§ 3.3), concerne l'étude des problèmes de la déformation des barres cylindriques (notamment le problème de Saint Venant en élasticité) dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel : elle porte sur la construction des champs de déplacements réels, solutions de ces problèmes, pour lesquels elle postule que la planéité des sections droites et leur normalité aux fibres sont conservées dans la déformation de la barre considérée.

La condition de Navier-Bernoulli, introduite au chapitre XI (§3.13), concerne la modélisation « milieu curviligne » : elle porte sur les mouvements virtuels définis alors au paragraphe 3.3. La condition de Navier-Bernoulli leur impose de maintenir la normalité des éléments de surface plane orthogonaux à la courbe directrice. Dans le présent chapitre les hypothèses du paragraphe 2.1 posent la condition de Navier-Bernoulli au niveau des déplacements, notamment pour les champs de déplacement réels du milieu curviligne.

Ainsi on peut dire que la loi de comportement adoptée pour l'élément de poutre droite considère que les champs de déplacements réels de ce milieu curviligne satisfont les conditions de Navier-Bernoulli alors même que l'hypothèse de Navier-Bernoulli n'est en règle générale pas satisfaite au niveau continu tridimensionnel.

L'hypothèse de Navier-Bernoulli et l'effort tranchant

Ainsi qu'on l'a remarqué plus haut le mode d'identification adopté ne peut faire apparaître aucun effet de l'effort tranchant dans la loi de comportement élastique du matériau curviligne. Mais on a également pu noter que, grâce à l'hypothèse de Navier-Bernoulli, l'équation (2.24) avait fort opportunément la forme qui permettait d'identifier les éléments de réduction de $\{\mathcal{E}(x)\}$ en (2.25). Ces deux observations ne sont pas indépendantes : l'hypothèse de Navier-Bernoulli et l'absence de l'effort tranchant dans la loi de comportement élastique de l'élément curviligne sont conséquences l'une de l'autre. On peut, pour s'en convaincre, introduire pour l'élément de poutre la densité d'énergie élastique de contrainte

$$(2.27) \quad w_{AB}^*([\mathbb{X}(x)], \underline{\varepsilon}_x, \underline{\varepsilon}_y, \underline{\varepsilon}_z) = w_{AB}^*(N(x), \underline{V}(x), \mathcal{M}_y(x), \mathcal{M}_z(x), \mathcal{C}(x))$$

dont la déformation $\{\mathcal{E}(x)\}$ dérive de la même manière que $\underline{\varepsilon}$ dérive de $\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}})$ dans le cas du milieu continu tridimensionnel en transformation infinitésimale (chapitre X, § 1.6) :

$$(2.28) \quad \{\mathcal{E}(x)\} = \frac{\partial w_{AB}^*([\mathbb{X}(x)], \underline{\varepsilon}_x, \underline{\varepsilon}_y, \underline{\varepsilon}_z)}{\partial [\mathbb{X}(x)]}$$

soit, avec l'hypothèse de Navier-Bernoulli

$$(2.29) \quad \left\{ P, \varepsilon(x) \underline{e}(x), \frac{d\omega(x)}{dx} \right\} = \frac{\partial w_{AB}^* (N(x), \underline{V}(x), \mathcal{M}_y(x), \mathcal{M}_z(x), \mathcal{C}(x))}{\partial [P, N(x) \underline{e}_x + \underline{V}(x), \mathcal{C}(x) \underline{e}_x + \underline{M}(x)]}.$$

Il en résulte

$$(2.30) \quad \frac{\partial w_{AB}^* (N(x), \underline{V}(x), \mathcal{M}_y(x), \mathcal{M}_z(x), \mathcal{C}(x))}{\partial \underline{V}(x)} = 0$$

c'est-à-dire que w_{AB}^* ne dépend pas de $\underline{V}(x)$.

L'hypothèse de Navier-Bernoulli implique que la loi de comportement élastique du matériau curviligne ne fasse pas intervenir l'effort tranchant.

Le potentiel w_{AB}^* , énergie élastique de contrainte de l'élément de poutre, peut donc être évalué en faisant $\underline{V}(x) = 0$ d'où, à partir de (2.25) :

$$(2.31) \quad w_{AB}^* (N(x), \underline{V}(x), \mathcal{M}_y(x), \mathcal{M}_z(x), \mathcal{C}(x)) = \frac{N^2(x)}{2ES} + \frac{\mathcal{M}_y^2(x)}{2EI_y} + \frac{\mathcal{M}_z^2(x)}{2EI_z} + \frac{\mathcal{C}^2(x)}{2\mu J}.$$

La courbe directrice étant positionnée selon la fibre moyenne de la barre cylindrique modélisée et la section droite du milieu curviligne étant orientée par les axes principaux d'inertie de la barre, ce potentiel s'exprime par la formule (2.31) dans le cas de l'état initial naturel. La loi de comportement de l'élément de poutre droite est donnée par (2.23) et (2.25) en y faisant intervenir les valeurs, au point considéré, des éléments de réduction du torseur d'efforts intérieurs; elle est indépendante de l'effort tranchant.

2.6 Comportement thermoélastique d'un élément de poutre droite à partir d'un état initial précontraint

Reprenant la barre cylindrique de la figure 1 on suppose maintenant qu'elle est soumise, outre la sollicitation décrite au paragraphe précédent caractérisée par (2.14), à une **variation de température** homogène τ à partir de l'état initial de référence.

De plus, l'état initial de référence de la barre est supposé précontraint et préchargé (cf. chapitre VIII, § 3.6 et chapitre X, § 3.7). Le champ de contrainte initial est $\underline{\underline{\sigma}}^i = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\sigma}}^p$ où $\underline{\underline{\sigma}}^0$ désigne l'état d'autocontrainte de la barre⁽³⁾ à partir duquel a été effectué le préchargement engendrant $\underline{\underline{\sigma}}^p$. Ce champ de contrainte initial est supposé

- indépendant de x ,
- de la forme

$$(2.32) \quad \underline{\underline{\sigma}}^i = \sigma_{xx}^i \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{yy}^i \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_{zz}^i \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_{xy}^i \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \sigma_{xz}^i \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z,$$

- en équilibre avec des forces de masse nulles et des efforts au contour nuls sur la **surface latérale** de la barre.

⁽³⁾ en équilibre avec des forces de masse nulles et des efforts nuls **sur le contour** de la barre

On pose :

$$(2.33) \quad N^P = \int_{S_0} \sigma_{xx}^i(y, z) da ,$$

$$(2.34) \quad \underline{V}^P = \int_{S_0} (\sigma_{yx}^i(y, z) \underline{e}_y + \sigma_{zx}^i(y, z) \underline{e}_z) da$$

$$(2.35) \quad \underline{M}^P = \int_{S_0} \sigma_{xx}^i(y, z) (z \underline{e}_y - y \underline{e}_z) da$$

$$(2.36) \quad \mathcal{C}^P = \int_{S_0} (y \sigma_{zx}^i(y, z) - z \sigma_{yx}^i(y, z)) da .$$

Les torseurs des efforts extérieurs appliqués aux sections d'extrémités dans l'état initial sont respectivement égaux à

$$(2.37) \quad \begin{cases} - [O, N^P \underline{e}_x + \underline{V}^P, \mathcal{C}^P \underline{e}_x + \underline{M}^P] & \text{sur } S_0 , \\ [P, N^P \underline{e}_x + \underline{V}^P, \mathcal{C}^P \underline{e}_x + \underline{M}^P] & \text{sur } S_\ell . \end{cases}$$

L'équilibre global de la barre dans l'état initial impose :

$$(2.38) \quad \underline{V}^P = 0 .$$

On reprend alors le raisonnement du paragraphe précédent. La solution du problème d'équilibre élastique de la barre s'obtient par les formules (2.17) à (2.19) appliquées au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^i$ avec les efforts extérieurs caractérisés par $(N - N^P)$, $(\mathcal{C} - \mathcal{C}^P)$, $(\underline{M} - \underline{M}^P)$ au lieu de (2.14) pour tenir compte de la précontrainte dans l'état initial (cf. chapitre VIII, § 3.4). On superpose au champ de déformation obtenu le champ homogène $\underline{\underline{\varepsilon}}^\tau = \alpha \tau \underline{\underline{1}}$ pour tenir compte de la variation de température. On obtient ainsi, tous calculs faits, au lieu de (2.20) :

$$(2.39) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) d\Omega = \ell \left(N \left(\frac{N - N^P}{ES} + \alpha \tau \right) + \mathcal{M}_y \frac{\mathcal{M}_y - \mathcal{M}_y^P}{EI_y} + \mathcal{M}_z \frac{\mathcal{M}_z - \mathcal{M}_z^P}{EI_z} + \mathcal{C} \frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}^P}{\mu J} \right) .$$

On en déduit, au lieu de (2.25), la condition de Navier-Bernoulli étant conservée,

$$(2.40) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_x(x)}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{N - N^P}{ES} + \alpha \tau \\ \frac{d\omega_y(x)}{dx} = (\mathcal{M}_y - \mathcal{M}_y^P) / EI_y , \quad \frac{d\omega_z(x)}{dx} = (\mathcal{M}_z - \mathcal{M}_z^P) / EI_z \\ \frac{d\omega_x(x)}{dx} = (\mathcal{C} - \mathcal{C}^P) / \mu J \end{cases}$$

dont l'interprétation physique est identique.

Les relations (2.23) et (2.40) constituent la loi de comportement thermoélastique de l'élément de poutre droite préchargée par N^P , \mathcal{C}^P et \underline{M}^P , soumise à une sollicitation homogène avec variation de température homogène. On remarque que pour l'élément de poutre droite, N^P , \mathcal{C}^P et \underline{M}^P représentent l'état de précontrainte initial : ils définissent la valeur du torseur d'efforts intérieurs dans l'état initial de référence pour cet

élément. L'état naturel pour l'**élément de poutre droite** correspond évidemment à :

$$(2.41) \quad N^P = 0, \mathcal{C}^P = 0, \underline{\mathcal{M}}^P = 0.$$

La loi de comportement thermoélastique dérive par (2.28) du potentiel $w_{AB}^*([\mathbb{X}(x)], \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ qui est indépendant de l'effort tranchant et s'écrit :

$$(2.42) \quad \begin{aligned} w_{AB}^*([\mathbb{X}(x)], \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = & \frac{(N(x) - N^P(x))^2}{2 E S} + \frac{(\mathcal{M}_y(x) - \mathcal{M}_y^P(x))^2}{2 E I_y} \\ & + \frac{(\mathcal{M}_z(x) - \mathcal{M}_z^P(x))^2}{2 E I_z} + \frac{(\mathcal{C}(x) - \mathcal{C}^P(x))^2}{2 \mu J} \\ & + (N(x) - N^P(x)) \alpha \tau(x). \end{aligned}$$

Explicitée, cette loi de comportement s'exprime par les relations (2.40) en y faisant intervenir les valeurs de la sollicitation mécanique $N(x)$, $\mathcal{C}(x)$, $\underline{\mathcal{M}}(x)$ et thermique $\tau(x)$, avec l'état de précontrainte $N^P(x)$, $\mathcal{C}^P(x)$, $\underline{\mathcal{M}}^P(x)$, de l'élément.

2.7 Comportement thermoélastique du milieu curviligne en calcul des structures

À partir de l'identification qui vient d'être effectuée de la loi de comportement thermoélastique de l'élément de poutre droite, modélisation unidimensionnelle d'une barre cylindrique homogène en matériau linéaire élastique isotrope, l'approche classique du calcul des structures thermoélastiques, connue sous le nom de **Résistance des Matériaux**, repose sur les conventions suivantes.

Elle s'intéresse à la modélisation unidimensionnelle des barres rectilignes et des arcs élancés de **faible courbure**, dont la section est constante ou **lentement variable**. Ces hypothèses, intuitivement accessibles, permettent le maintien, pour une telle barre ou un tel arc, du concept de section droite dont le diamètre sert alors de référence pour leur évaluation quantitative⁽⁴⁾.

Elle adopte alors pour la modélisation curviligne de ces éléments tridimensionnels les propositions suivantes :

- la **courbe directrice** du milieu curviligne (poutre droite ou courbe), est positionnée le long de la ligne des centres d'inertie des sections droites de la barre ou de l'arc ;
- le **chargement** du milieu curviligne à l'abscisse s est constitué par le torseur des efforts extérieurs appliqués, à la même abscisse, à la barre ou à l'arc ;
- la loi de comportement thermoélastique de l'élément de poutre droite ou courbe, à l'abscisse s sur la courbe directrice, est celle établie pour l'élément de poutre droite au paragraphe précédent (2.23, 2.40, 2.42) en y faisant intervenir, outre

⁽⁴⁾ On peut rappeler ici, à propos de l'évaluation de la pertinence de ces hypothèses, l'évocation du principe de Saint Venant dans le raisonnement du paragraphe 2.5.

les valeurs locales du torseur d'efforts intérieurs et de l'état de précontrainte, les caractéristiques géométriques de la section droite de la barre ou de l'arc à l'abscisse considérée. Cette démarche est explicitée dans les formules suivantes :

$$(2.43) \quad \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} = \mathcal{E}(s) \underline{t}(s) + \underline{\omega}(s) \wedge \underline{t}(s) \quad (\text{Navier-Bernoulli})$$

$$(2.44) \quad \{ \mathcal{E}(s) \} = \left\{ P, \varepsilon(s) \underline{t}(s), \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} \right\}$$

$$(2.45) \quad w^*([\mathbb{X}(s)], \underline{t}(s), \underline{e}_y(s), \underline{e}_z(s)) = \frac{(N(s) - N^p(s))^2}{2 E S(s)} + \frac{(\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s))^2}{2 E I_y(s)} + \frac{(\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s))^2}{2 E I_z(s)} + \frac{(\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s))^2}{2 \mu J(s)} + (N(s) - N^p(s)) \alpha \tau(s)$$

$$(2.46) \quad \{ \mathcal{E}(s) \} = \frac{\partial w_{AB}^*([\mathbb{X}(s)], \underline{t}(s), \underline{e}_y(s), \underline{e}_z(s))}{\partial([\mathbb{X}(s)])}$$

$$(2.47) \quad \varepsilon(s) = \frac{N(s) - N^p(s)}{E S(s)} + \alpha \tau(s)$$

$$(2.48) \quad \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} = \frac{\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s)}{E I_y(s)} \underline{e}_y(s) + \frac{\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s)}{E I_z(s)} \underline{e}_z(s) + \frac{\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s)}{\mu J(s)} \underline{t}(s)$$

où $\underline{e}_y(s)$ et $\underline{e}_z(s)$ sont les directions principales d'inertie de la section droite de la barre ou de l'arc à l'abscisse s qui apparaissent ainsi naturellement pour orienter la microstructure de la poutre.

Elle est représentée schématiquement sur la figure 3 comme un processus de changement d'échelle et permet d'en percevoir les limites de pertinence tant du point de vue de la géométrie de la structure (« faible » courbure, section « lentement » variable...) que de celui du chargement.

2.8 Extensions diverses

La démarche suivie aux paragraphes 2.5 et 2.6 se place dans l'esprit de la rubrique b) du paragraphe 2.4. À partir de celle-ci on a vu, au paragraphe 2.7, la mise en place d'hypothèses simplificatrices classiques pour le calcul des structures thermoélastiques.

Suivant la démarche proposée dans la rubrique a) du paragraphe 2.4, on se borne

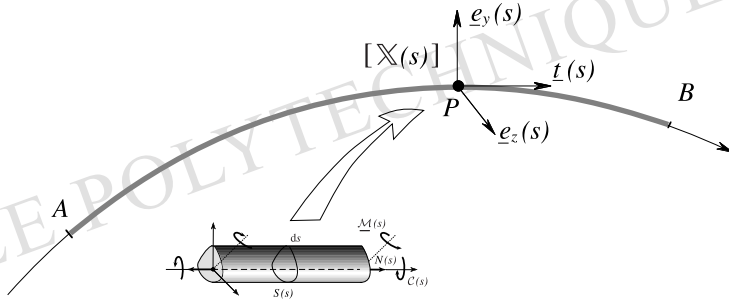


Figure 3 – Comportement thermoélastique du milieu curviligne

souvent à estimer, à partir de l'interprétation des résultats expérimentaux, la position géométrique de la courbe directrice à adopter et les caractéristiques géométriques et mécaniques à introduire pour que la densité d'énergie élastique de contrainte pour le milieu curviligne considéré puisse se mettre sous une forme semblable à (2.44) tout en admettant que les déplacements réels du milieu curviligne satisfont la condition de Navier-Bernoulli.

Il convient toutefois à ce propos d'être conscient que ces hypothèses, qui ne sont souvent pas annoncées explicitement et sous-tendent pourtant la construction faite, ne sont pas nécessairement adaptées à la formulation du comportement examiné.

3 Équilibre thermoélastique linéarisé des structures curvilignes

3.1 Hypothèse des petites perturbations

Établies dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, les relations (2.43) à (2.48) définissent le comportement thermoélastique linéaire du milieu curviligne. L'étude des problèmes d'équilibre thermoélastique linéarisé pour les structures constituées de milieux curvilignes, introduit de plus l'hypothèse des **petits déplacements** à partir de la géométrie initiale donnée, énoncée comme au chapitre VIII pour permettre notamment l'écriture de toutes les équations du problème sur une configuration unique, *connue*, la configuration initiale.

Afin de simplifier la terminologie (comme au chapitre VIII) on regroupe sous le terme d'**hypothèse des petites perturbations** (ou même des petits déplacements) l'ensemble des hypothèses permettant la linéarisation totale du problème d'équilibre thermoélastique de la structure : petits déplacements, transformation infinitésimale, et déformation infinitésimale (qui a permis la linéarisation physique de la loi de comportement du matériau). L'hypothèse des petites perturbations assure la validité du théorème des travaux virtuels (cf. § 2.3) et des principes de minimum et théorèmes de l'énergie établis au chapitre X.

On doit signaler que les cas de problèmes où, les hypothèses de transformation et de déformation infinitésimales étant satisfaites, les déplacements ne peuvent être considérés comme petits sont ici plus fréquents que pour les systèmes en milieu continu tridimensionnel. On doit alors écrire les équations sur la configuration déformée, inconnue. Il en résulte évidemment que les théorèmes d'unicité établis au chapitre X pour la solution du problème d'équilibre linéarisé pour le milieu continu tridimensionnel, qui sont transposables au cas des structures, ne peuvent être utilisés hors de l'hypothèse des petits déplacements. Plusieurs solutions peuvent ainsi parfois être mises en évidence pour un même problème, qui correspondent à des configurations différentes, par exemple dans l'étude des problèmes de *stabilité*.

3.2 Problèmes isostatiques

Pour les problèmes isostatiques le champ des efforts intérieurs dans la structure est complètement déterminé par les équations d'équilibre. On ne fait appel à la loi de comportement du milieu curviligne constitutif que pour le calcul des déplacements et des déformations. Deux méthodes peuvent alors être employées.

a) On calcule directement les déformations par la loi de comportement, puis on procède à leur intégration pour obtenir les déplacements du milieu curviligne (formules de Bresse-Navier).

b) On utilise le théorème de Castigliano présenté au chapitre X (§ 8.1). On calcule sous le chargement donné, avec éventuellement introduction d'un chargement « évanouissant » bien choisi, l'énergie élastique de contrainte de la structure, dont la densité linéique est donnée par (2.45), en fonction des paramètres de chargement. Par dérivation on obtient les composantes de déplacement souhaitées.

On peut remarquer en effet que, dans la pratique, on se trouve toujours, par la forme des chargements extérieurs auxquels sont soumises les structures, dans le formalisme simple des chargements dépendant d'un nombre fini de paramètres. Le théorème de Castigliano trouve, dans ce type de systèmes, son domaine d'application par excellence.

Une simplification est couramment apportée dans l'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes, justifiée par la considération de l'ordre de grandeur des effets correspondants : on a coutume de *négliger les effets de l'effort normal devant les effets de flexion* dans les éléments où ceux-ci ne sont pas identiquement nuls.

3.3 Problèmes hyperstatiques

On a vu au chapitre XI (§ 4.5) que pour une structure constituée d'un nombre fini d'éléments curvilignes, en l'absence d'appuis continus, le degré d'hyperstaticité est toujours fini.

La détermination des valeurs des inconnues hyperstatiques dans la structure dans son état d'équilibre élastique sous un chargement donné, à partir d'un état initial défini, peut se faire de deux façons :

a) On exprime le champ des efforts intérieurs dans la structure au moyen des équations d'équilibre en fonction du chargement extérieur (paramètres de chargement) et des inconnues hyperstatiques (qui sont en nombre fini). À partir de ce champ, au moyen de la loi de comportement thermoélastique, on calcule les déformations associées que l'on intègre pour obtenir les déplacements (formules de Bresse-Navier). On exprime alors directement que ces déplacements doivent respecter la continuité de la structure aux nœuds d'assemblage (compatibilité géométrique) et être cinématiquement admissibles, c'est-à-dire respecter les conditions d'appuis. L'ensemble de ces équations détermine les valeurs des inconnues hyperstatiques dans l'état d'équilibre.

b) Le champ des efforts intérieurs dans la structure est exprimé par les mêmes moyens et de la même manière que ci-dessus. On calcule alors l'énergie élastique de contrainte de la structure qui est donc une fonction des paramètres de chargement et des inconnues hyperstatiques. En application du théorème du potentiel minimum (chapitre X, § 8.2) les valeurs des inconnues hyperstatiques dans l'état d'équilibre minimisent cette fonction, ce qui permet de les déterminer.

Ces deux méthodes sont strictement équivalentes comme on l'a signalé au chapitre X (§ 8.2) en interprétant le théorème du potentiel minimum à travers le théorème de Castigliano. Cela est également apparent si l'on se rappelle que les conditions exprimant la compatibilité géométrique d'un champ de déformation et le caractère cinématiquement admissible du champ de déplacement correspondant peuvent être obtenues, souvent de la façon la plus commode, au moyen du principe des puissances virtuelles, qui est lui-même le fondement des théorèmes de Castigliano et du potentiel minimum.

Le théorème du potentiel minimum est d'un emploi facile pour ce type d'analyses. En effet, à partir de l'expression (2.45) de w^* , il permet d'exprimer la compatibilité géométrique et le caractère cinématiquement admissible du champ des déformations élastiques sans qu'il soit nécessaire de procéder au calcul explicite préalable de celles-ci. Il est toutefois important de retenir le fil conducteur de la démarche suivie, exprimé ci-dessus en a), car il est transposable à la résolution des problèmes hyperstatiques en général, quelle que soit la loi de comportement introduite pour le milieu curviligne.

3.4 Formules principales

Afin de faciliter la résolution des problèmes de calcul des structures constituées de milieux curvilignes élastiques, on a regroupé dans le tableau suivant les formules.

♦ **Équilibre :** (3.1)

$$\underline{\mathcal{X}}(s) = N(s) \underline{t}(s) + \underline{V}(s), \quad \underline{\Gamma}(s) = \mathcal{C}(s) \underline{t}(s) + \underline{\mathcal{M}}(s)$$

$$\frac{d\underline{\mathcal{X}}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = 0$$

$$\frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{V}(s) + \underline{m}(s) = 0$$

(+ équations homologues pour les chargements concentrés).

♦ **Comportement thermoélastique :** (3.2)

$$w^*(s) = \frac{(N(s) - N^p(s))^2}{2ES(s)} + \frac{(\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s))^2}{2EI_y(s)} + \frac{(\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s))^2}{2EI_z(s)} \\ + \frac{(\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s))^2}{2\mu J(s)} + (N(s) - N^p(s))\alpha\tau(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s) - N^p(s)}{ES(s)} + \alpha\tau(s)$$

$$\frac{d\omega(s)}{ds} = \frac{\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s)}{EI_y(s)} \underline{e}_y(s) + \frac{\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s)}{EI_z(s)} \underline{e}_z(s) + \frac{\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s)}{\mu J(s)} \underline{t}(s)$$

$$\frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} = \varepsilon(s) \underline{t}(s) + \underline{\omega}(s) \wedge \underline{t}(s).$$

♦ **Relations géométriques pour une poutre du plan Oxy :** (3.3)

$$\underline{\xi}(s) = \xi_t(s) \underline{t}(s) + \xi_n(s) \underline{n}(s) + \xi_z(s) \underline{e}_z$$

$$\varepsilon(s) = \frac{d\xi_t(s)}{ds} - \frac{\xi_n(s)}{\rho(s)}$$

$$\underline{\omega}(s) = \omega_t(s) \underline{t}(s) - \frac{d\xi_z(s)}{ds} \underline{n}(s) + \left(\frac{d\xi_n(s)}{ds} + \frac{\xi_t(s)}{\rho(s)} \right) \underline{e}_z$$

$$\frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} = \left(\frac{d\omega_t(s)}{ds} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{d\xi_z(s)}{ds} \right) \underline{t}(s) - \left(\frac{d^2\xi_z(s)}{ds^2} - \frac{\omega_t(s)}{\rho(s)} \right) \underline{n}(s) \\ + \left(\frac{d^2\xi_n(s)}{ds^2} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{d\xi_t(s)}{ds} - \frac{\xi_t(s)}{\rho^2(s)} \frac{d\rho(s)}{ds} \right) \underline{e}_z.$$

3.5 Structures planes chargées dans leur plan

On a évoqué au chapitre XI (§4.7) le cas de la structure plane chargée dans son plan (Oxy) pour laquelle, par hypothèse, le chargement est de la forme :

$$\begin{cases} \text{forces extérieures parallèles à Oxy,} \\ \text{moments extérieurs dirigés selon } \underline{e}_z. \end{cases}$$

On a vu que pour un élément AB de structure (figure 4) soumis à un tel chargement l'intégration explicite des équations d'équilibre montre que le torseur d'efforts

intérieurs est de la forme :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall P \in AB, \\ [\mathbb{X}(s)] = [P, \underline{\mathcal{X}}(s), \underline{\Gamma}(s)] \\ \underline{\mathcal{X}}(s) = N(s) \underline{t}(s) + V(s) \underline{n}(s) \\ \underline{\Gamma}(s) = M(s) \underline{e}_z . \end{array} \right.$$

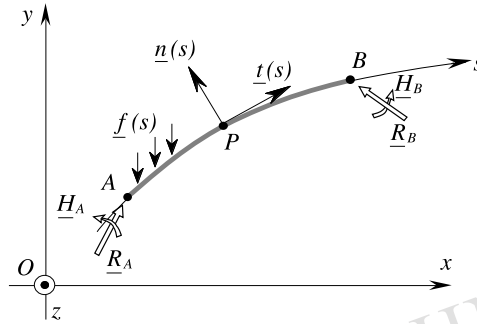


Figure 4 – Structure plane chargée dans son plan

Ce résultat s'étend évidemment à la structure elle-même si elle est isostatique.

Pour la structure hyperstatique, la forme (3.4) posée comme une hypothèse en tout point de la structure est validée a posteriori en montrant qu'elle permet la construction de la solution unique du problème compte tenu de l'hypothèse géométrique supplémentaire relative au comportement thermoélastique des éléments de la structure : la direction \underline{e}_z est supposée **direction principale d'inertie pour toutes les sections droites** de tous les éléments de la structure.

On a alors les équations suivantes.

◆ **Équilibre :** (3.5)

$$\frac{dN(s)}{ds} - \frac{V(s)}{\rho(s)} + f_t(s) = 0$$

$$\frac{dV(s)}{ds} + \frac{N(s)}{\rho(s)} + f_n(s) = 0$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + V(s) + m(s) = 0$$

(+ équations homologues pour les chargements concentrés).

◆ **Comportement thermoélastique :** (3.6)

Rappel : la direction \underline{e}_z est supposée **principale d'inertie** pour toutes les sections droites. On pose : $I_z(s) = I(s)$, $\omega_z(s) = \omega(s)$.

$$w^*(s) = \frac{(N(s) - N^p(s))^2}{2 E S(s)} + \frac{(M(s) - M^p(s))^2}{2 E I(s)} + (N(s) - N^p(s)) \alpha \tau(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s) - N^p(s)}{E S(s)} + \alpha \tau(s)$$

$$\frac{d\omega(s)}{ds} = \frac{M(s) - M^p(s)}{E I(s)}$$

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = \varepsilon(s) \underline{t}(s) + \omega(s) \underline{n}(s).$$

♦ **Relations géométriques :** (3.7)

$$\underline{\xi}(s) = \xi_t(s) \underline{t}(s) + \xi_n(s) \underline{n}(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{d\xi_t(s)}{ds} - \frac{\xi_n(s)}{\rho(s)}$$

$$\frac{d\omega(s)}{ds} = \frac{d^2\xi_n(s)}{ds^2} + \frac{1}{\rho(s)} \frac{d\xi_t(s)}{ds} - \frac{\xi_t(s)}{\rho^2(s)} \frac{d\rho(s)}{ds}.$$

3.6 Poutres droites chargées dans leur plan

Au chapitre XI (§ 4.7) a été aussi examiné le cas particulier de la poutre rectiligne (poutre droite) chargée dans son plan. Avec l'hypothèse géométrique précédente, le chargement étant désormais orthogonal à la direction principale d'inertie \underline{e}_z , on dit que la poutre est « chargée dans son plan » (figure 5).

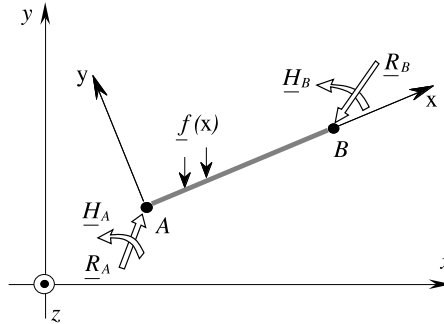


Figure 5 – Poutre droite chargée dans son plan

Avec les coordonnées cartésiennes x et y selon \underline{t} et \underline{n} , on a les formules suivantes.

♦ **Équilibre :** (3.8)

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} + f_y(x) = 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + V(x) + m(x) = 0$$

(+ équations homologues pour les chargements concentrés).

♦ **Comportement thermoélastique :** (3.9)

$$w^*(x) = \frac{(N(x) - N^p(x))^2}{2ES(x)} + \frac{(M(x) - M^p(x))^2}{2EI(x)} + (N(x) - N^p(x))\alpha\tau(x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x) - N^p(x)}{ES(x)} + \alpha\tau(x)$$

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{d^2\xi_y(x)}{dx^2} = \frac{M(x) - M^p(x)}{EI(x)},$$

où $\frac{d^2\xi_y(x)}{dx^2}$ représente, dans le cadre des hypothèses faites, la courbure de la déformée de la poutre au point courant P .

Dans le cas fréquent où $m(x) \equiv 0$ on obtient à partir de (3.8)

$$(3.10) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} - f_y(x) = 0.$$

Si de plus $M^p(x) \equiv 0$ et si I est constant le long de la poutre, en combinant (3.10) avec la dernière équation de (3.9) on obtient

$$(3.11) \quad EI \frac{d^4\xi_y(x)}{dx^4} - f_y(x) = 0$$

Ces formules sont fréquemment utilisées pour l'étude des poutres droites.

4 Exemples d'applications

4.1 Problèmes isostatiques

Poutre console

On étudie la structure plane chargée dans son plan représentée sur la figure 6. La poutre AB est de section constante (moment d'inertie I). Le module de Young est constant, égal à E . L'appui A est fixe avec encastrement. L'extrémité B est libre. Le chargement actif est constitué de la charge verticale descendante de densité linéique p . On se propose, par exemple, de déterminer le déplacement vertical en B .

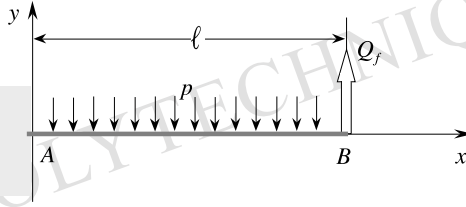


Figure 6 – Poutre console

◆ Calcul direct.

Par (3.8) on détermine $N(x) = \text{Constante} = N(\ell) = 0$ (extrémité B libre).

On obtient directement la déformée de la poutre en intégrant (3.11) avec les conditions aux limites suivantes.

Pour $x = 0$, encastrement fixe : $\xi_y(0) = 0$, $\frac{d\xi_y}{dx}(0) = 0$;

pour $x = \ell$, extrémité libre, $M(\ell) = 0$ et $V(\ell) = 0$ d'où, par (3.9) et (3.8) :

$$\frac{d^2\xi_y}{dx^2}(\ell) = 0, \quad \frac{d^3\xi_y}{dx^3}(\ell) = 0.$$

La formule (3.11) s'explicitant ici en $\frac{d^4\xi_y}{dx^4} = -\frac{p}{EI}$, on obtient :

$$(4.1) \quad \xi_y(x) = -\frac{p x^4}{24 EI} + \frac{p \ell x^3}{6 EI} - \frac{p \ell^2 x^2}{4 EI}$$

et le déplacement cherché est :

$$(4.2) \quad \xi_y(\ell) = -\frac{p \ell^4}{8 EI}.$$

◆ Utilisation du théorème de Castigliano.

On introduit la charge fictive « évanouissante » Q_f verticale ascendante appliquée en B . On a, par intégration de (3.8) compte tenu des conditions en B :

$$(4.3) \quad N(x) = 0$$

$$(4.4) \quad M(x) = Q_f(\ell - x) - p \frac{(\ell - x)^2}{2}$$

d'où :

$$(4.5) \quad \mathcal{W}^*(p, Q_f) = \int_0^\ell \frac{1}{2 EI} \left(Q_f(\ell - x) - p \frac{(\ell - x)^2}{2} \right)^2 dx.$$

Le déplacement vertical en B , $\xi_y(\ell)$ est donné par :

$$(4.6) \quad \xi_y(\ell) = q_f = \frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial Q_f}(p, 0)$$

$$\text{et on retrouve : } \xi_y(\ell) = -\frac{p \ell^4}{8 EI}.$$

Treillis isostatique

On considère la structure plane, chargée dans son plan, représentée sur la figure 7. Elle est formée de deux poutres droites de même section S de même module de Young E , assemblées en A par une articulation. Les appuis B_1 et B_2 sont des articulations fixes. le chargement actif est constitué de la seule force concentrée verticale descendante, d'intensité Q , appliquée au nœud A . On se propose de calculer le déplacement vertical descendant (« flèche ») du point A .

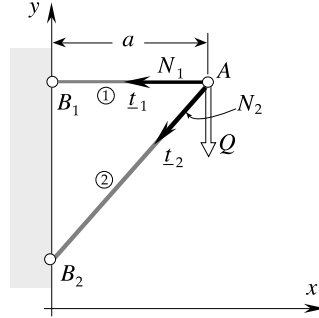


Figure 7 – Treillis isostatique

En intégrant (3.8) compte tenu de la nullité de $M(s)$ aux extrémités de chaque poutre on trouve que :

$M(s) \equiv 0$ et $V(s) \equiv 0$ sur chaque poutre, $N(s) = \text{constante}$ sur chaque barre.

L'équilibre du nœud A donne, en orientant les poutres à partir de A : $N_1 \underline{t}_1 + N_2 \underline{t}_2 - Q \underline{e}_y = 0$;

d'où : $N_1 = Q$, $N_2 = -Q\sqrt{2}$.

On calcule la flèche en A par le théorème de Castigliano :

$$(4.7) \quad \mathcal{W}^*(Q) = \int_{AB_1} \frac{Q^2}{2ES} ds + \int_{AB_2} \frac{Q^2}{ES} ds$$

$$(4.8) \quad q = -\xi_y(A) = \frac{d\mathcal{W}^*}{dQ} = \frac{Qa}{ES}(1 + 2\sqrt{2}) .$$

Il aurait été possible d'obtenir q géométriquement en combinant l'allongement élastique de B_1A dû à la traction Q et le raccourcissement élastique de B_2A dû à la compression $-Q\sqrt{2}$.

Le théorème de Castigliano remplace ce raisonnement vectoriel par une addition scalaire.

4.2 Problème hyperstatique

Reprenant la poutre-console de la figure 6, on suppose maintenant qu'elle a, en B , un appui articulé mobile horizontalement (figure 8). Le chargement est identique à celui imposé au paragraphe (4.1), de même que les caractéristiques géométriques et mécaniques.

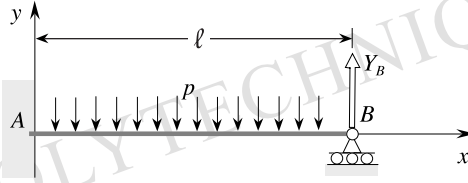


Figure 8 – Poutre-console appuyée sur rouleau à son extrémité

Les équations d'équilibre (3.8), compte tenu des conditions en B fournissent :

$$(4.9) \quad N(x) = 0 \text{ sur } AB$$

$$(4.10) \quad V(x) = Y_B - p(\ell - x)$$

$$(4.11) \quad M(x) = Y_B(\ell - x) - p \frac{(\ell - x)^2}{2} ;$$

Les composantes X_A et X_B des réactions d'appuis en A et B sont nulles. Y_B demeure indéterminée comme le montre l'écriture de l'équilibre global du système :

$$[\mathcal{F}_e] = [\mathbb{R}_A] + [\mathbb{R}_B] + [A, -p\ell \underline{e}_y, -\frac{p\ell^2}{2} \underline{e}_z] = 0$$

qui détermine $X_A = 0$ après $X_B = 0$ et $H_B = 0$ imposées par l'appui en B, et fournit deux équations pour les trois inconnues Y_A, H_A, Y_B . **Le problème est hyperstatique de degré 1.**

On choisit, par exemple, Y_B comme inconnue hyperstatique.

Résolution par la méthode directe

Considérant la poutre-console (dite isostatique associée au choix de Y_B comme inconnue hyperstatique) de la figure 6, on calcule sa déformée sous l'action de la charge imposée et de la réaction d'appui verticale Y_B considérée comme une force active. On exprime que le déplacement vertical du point B est nul pour respecter la liaison entre la poutre de la figure 8 et son appui (Y_B est la force de liaison), ce qui détermine Y_B .

Compte tenu de (4.2) on procède par superposition en calculant la déformée de la poutre sous l'action de Y_B seule. En intégrant (3.9), à partir de $\frac{d^2 \xi_y(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} Y_B (\ell - x)$, avec les conditions aux limites $\xi_y(0) = 0$ et $\frac{d\xi_y}{dx}(0) = 0$ il vient :

$$(4.12) \quad \xi_y(x) = \frac{Y_B}{2EI} \left(\ell x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

d'où :

$$(4.13) \quad \xi_y(\ell) = Y_B \frac{\ell^3}{3EI} .$$

Le déplacement vertical total dû à p et Y_B est donc :

$$(4.14) \quad \xi_y(\ell) = -\frac{p\ell^4}{8EI} + Y_B \frac{\ell^3}{3EI} .$$

La condition de liaison, $\xi_y(\ell) = 0$, détermine Y_B :

$$(4.15) \quad Y_B = \frac{3p\ell}{8} .$$

Application du théorème du potentiel minimum

On calcule l'énergie élastique de contrainte de la console hyperstatique en fonction de p (paramètre de chargement) et Y_B inconnue hyperstatique à partir de l'expression (4.11) de $M(x)$:

$$(4.16) \quad \mathbf{W}^*(p, Y_B) = \int_0^\ell \frac{1}{2EI} \left(Y_B (\ell - x) - p \frac{(\ell - x)^2}{2} \right)^2 dx ;$$

on détermine Y_B en écrivant que $\frac{\partial \mathbf{W}^*(p, Y_B)}{\partial Y_B} = 0$

$$(4.17) \quad \frac{\partial \mathbf{W}^*(p, Y_B)}{\partial Y_B} = Y_B \frac{\ell^3}{3EI} - \frac{p \ell^4}{8EI} = 0$$

et l'on retrouve : $Y_B = \frac{3p\ell}{8}$.

Commentaires

La comparaison des deux approches ci-dessus met bien en évidence, notamment par (4.17), leur équivalence.

Il est intéressant de rapprocher les résultats obtenus pour la console « isostatique » de la figure 6 et pour la console « hyperstatique » de la figure 8 pour juger de l'effet de l'appui introduit en B ; on constate que dans le premier cas on a, pour le torseur $[\mathbb{R}_A]$:

$$(4.18) \quad Y_A = p\ell, \quad H_A = \frac{p\ell^2}{2},$$

valeurs qui sont ramenées à

$$(4.19) \quad Y_A = \frac{5p\ell}{8} \text{ et } H_A = \frac{p\ell^2}{8}$$

par l'introduction de l'appui en B .

On peut aussi considérer le problème de la console dans le cas où l'appui articulé en B est fixe (figure 9). Le problème est alors hyperstatique de degré deux, X_B n'étant plus déterminée par la condition d'appui en B .

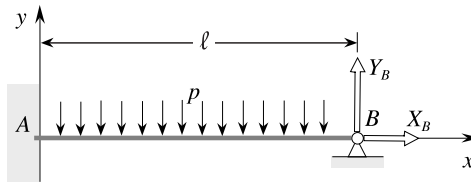


Figure 9 – Poutre-console articulée à son extrémité

L'écriture simplifiée de w^* qui ne retient que les termes de moment fléchissant (§ 3.3) ne permet évidemment pas de déterminer X_B qui n'intervient alors nulle part. On obtient Y_B qui a encore la valeur (4.15).

Le calcul complet en tenant compte du terme d'effort normal permet de déterminer X_B et Y_B : on trouve à nouveau pour Y_B la valeur (4.15) et X_B est nul.

Il est courant, et logique, de considérer le problème de la figure 9 comme hyperstatique de degré un lorsque l'on ne prend pas en compte l'effet de l'effort normal.

5 Conclusion

Il n'est pas souhaitable d'entrer dans plus de détails dans ce chapitre qui se veut essentiellement une introduction à l'étude des structures constituées de milieux curvilignes élastiques et une initiation à la Résistance des Matériaux. Celle-ci fait l'objet de maints traités et ouvrages dans lesquels on trouvera les présentations classiques et les développements récents de cette discipline.

Le but recherché dans les deux chapitres consacrés aux milieux curvilignes était multiple.

- Montrer comment, guidé par l'intuition des ingénieurs, on peut construire, à côté de la modélisation du milieu continu tridimensionnel, une modélisation unidimensionnelle adaptée à la résolution de nombreux problèmes pratiques. La même démarche peut être reprise pour la mise en place, par le principe des puissances virtuelles, des modélisations bidimensionnelles « plaques » et « coques »
- Adjoindre à cette modélisation l'aspect « comportement » dans le cas de la thermoélasticité, et mettre en évidence les problèmes qui doivent être reconnus et résolus quand on souhaite raccorder les modélisations.
- Montrer, dans ce cadre, la transposition des résultats et méthodes développés à propos du milieu continu tridimensionnel, et notamment l'utilisation des « théorèmes de l'énergie » en élasticité, sans prétendre exposer toutes les méthodes du calcul des structures.
- Profiter de ce que l'on peut, dans le cadre de cette modélisation, résoudre manuellement des problèmes significatifs pour dégager les interprétations mécaniques des méthodes employées que l'on a parfois peine à déceler sous les présentations mathématiques générales.

C'est dans cet esprit que l'on s'est limité, du point de vue du comportement thermoélastique, à une théorie simplifiée qui, de façon cohérente, laisse de côté tout effet de l'effort tranchant.

Pour prendre en compte l'effort tranchant dans le comportement du milieu curviligne on ne retiendra plus la condition de Navier-Bernoulli pour les mouvements réels. Dans une évaluation approchée de la densité d'énergie élastique de contrainte au point courant du milieu curviligne, on introduira dans w^* un terme quadratique en $\underline{V}(s)$ et un terme de couplage entre l'effort tranchant et le couple de torsion à partir de la solution générale du problème de Saint Venant. On trouvera ce type d'approche dans les ouvrages plus spécialisés.

Récapitulatif des formules essentielles

- *Champ de déplacement de Navier-Bernoulli*

$$\{ \underline{\xi}(s) \} = \{ P, \underline{\xi}(s), \underline{\omega}(s) \} = \{ P, \underline{\xi}(s), \omega_t(s) \underline{t}(s) + \underline{\omega}_\perp(s) \}$$

$$\underline{\omega}_\perp(s) = \underline{t}(s) \wedge \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds}$$

$$\{ \mathcal{E}(s) \} = \frac{d\{ \underline{\xi}(s) \}}{ds} = \{ P, \varepsilon(s) \underline{t}(s), \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} \}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s), \quad \frac{d\underline{\xi}(s)}{ds} = \varepsilon(s) \underline{t}(s) + \underline{\omega}(s) \wedge \underline{t}(s)$$

- *Théorème des travaux virtuels*

$$\int_{AB} \left(N(s) \hat{\varepsilon}(s) + \underline{L}(s) \cdot \frac{d\hat{\underline{\omega}}(s)}{ds} \right) ds - \int_{AB} \left(\underline{f}(s) \cdot \hat{\underline{\xi}}(s) + \underline{m}(s) \cdot \hat{\underline{\omega}}(s) \right) ds - \underline{R}_A \cdot \hat{\underline{\xi}}_A - \underline{R}_B \cdot \hat{\underline{\xi}}_B - \underline{H}_A \cdot \hat{\underline{\omega}}_A - \underline{H}_B \cdot \hat{\underline{\omega}}_B = 0$$

- *Loi de comportement thermoélastique*

$$\begin{aligned} w^*(s) &= \frac{(N(s) - N^p(s))^2}{2ES(s)} + \frac{(\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s))^2}{2EI_y(s)} \\ &\quad + \frac{(\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s))^2}{2EI_z(s)} + \frac{(\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s))^2}{2\mu J(s)} \\ &\quad + (N(s) - N^p(s)) \alpha \tau(s) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s) - N^p(s)}{ES(s)} + \alpha \tau(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds} &= \frac{\mathcal{M}_y(s) - \mathcal{M}_y^p(s)}{EI_y(s)} \underline{e}_y(s) + \frac{\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s)}{EI_z(s)} \underline{e}_z(s) \\ &\quad + \frac{\mathcal{C}(s) - \mathcal{C}^p(s)}{\mu J(s)} \underline{t}(s) \end{aligned}$$

• *Poutres droites chargées dans leur plan*

$$w^*(x) = \frac{(N(x) - N^p(x))^2}{2ES(x)} + \frac{(M(x) - M^p(x))^2}{2EI(x)} + (N(x) - N^p(x))\alpha\tau(x)$$

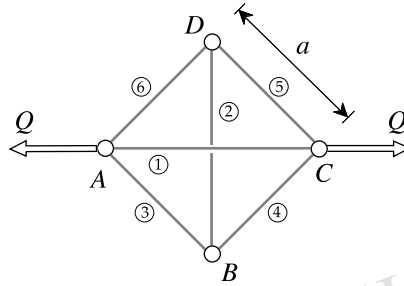
$$\varepsilon(x) = \frac{N(x) - N^p(x)}{ES(x)} + \alpha\tau(x)$$

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{d^2\xi_y(x)}{dx^2} = \frac{M(x) - M^p(x)}{EI(x)}$$

$$EI \frac{d^4\xi_y(x)}{dx^4} - f_y(x) = 0$$

Exercices

XII.1 - On considère le treillis plan représenté sur la figure (cf. Ex. XI.4) soumis au chargement constitué de deux forces opposées, dirigées selon AC , d'intensité Q en traction, appliquées en A et C . Le comportement des poutres est linéairement élastique, défini par la section S constante et le module E , identiques pour toutes les poutres. L'état initial étant naturel et la température de la structure étant maintenue constante, déterminer les efforts intérieurs dans la structure dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement défini par Q .

**Éléments de réponse :**

- On utilise l'analyse statique faite dans Ex. XI.4. Posant $N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = T$, inconnue hyperstatique, les allongements élastiques des poutres engendrés par un système d'efforts intérieurs en équilibre avec le chargement Q sont :

$$\delta_1 = a\sqrt{2}\varepsilon_1 = a\sqrt{2}(Q - T\sqrt{2})/ES$$

$$\delta_2 = a\sqrt{2}\varepsilon_2 = -2aT/ES$$

$$\delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = aT/ES.$$

- On écrit la compatibilité géométrique des allongements δ_i ($1, \dots, 6$) par la formule établie pour les $\hat{\delta}_i$ (cf. Ex. XI.4) :

$$4aT/ES - 2a(Q - T\sqrt{2})/ES + 2a\sqrt{2}T/ES = 0$$

d'où :

$$N_1 = Q\sqrt{2}/2, \quad N_2 = -Q(1 - \sqrt{2}/2), \quad N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = T = Q(\sqrt{2} - 1)/2.$$

- On peut utiliser le théorème du potentiel minimum ; pour la structure :

$$W^*(Q, T) = 4a\frac{T^2}{2ES} + a\sqrt{2}\frac{(Q - T\sqrt{2})^2}{2ES} + a\sqrt{2}\frac{(-T\sqrt{2})^2}{2ES}.$$

$$\frac{\partial W^*(Q, T)}{\partial T} = 4aT/ES - 2a(Q - T\sqrt{2})/ES + 2a\sqrt{2}T/ES = 0$$

donne $T = Q(\sqrt{2} - 1)/2$ d'où N_1 et N_2 .

Commentaire.

La comparaison des deux raisonnements ci-dessus met bien en évidence l'interprétation du théorème du potentiel minimum à travers la compatibilité géométrique des déformations élastiques.

XII.2 - En assemblant par des noeuds articulés six poutres, dont les longueurs dans l'état naturel sont respectivement :

$$\ell_1 = a\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon}_1) = a\sqrt{2} + \bar{\delta}_1,$$

$$\ell_2 = a\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon}_2) = a\sqrt{2} + \bar{\delta}_2,$$

$$\ell_i = a(1 + \bar{\varepsilon}_i) = a + \bar{\delta}_i \quad i = 3, \dots, 6,$$

avec $|\bar{\varepsilon}_1| \ll 1$ pour $i = 1, \dots, 6$, on constitue un treillis plan selon le modèle de celui étudié dans Ex. XII.1. Le comportement des poutres est linéairement élastique, défini par la section S constante et le module E , identiques pour toutes les barres. Déterminer le champ d'efforts intérieurs induits dans cette structure par l'assemblage de ses éléments, hors de tout chargement extérieur et de toute variation de température. Étudier aussi le cas où la structure de Ex. XII.1 étant assemblée dans l'état initial naturel, la barre AC seule, de coefficient de dilatation linéique α , subit une variation de température uniforme égale à τ .

Éléments de réponse :

- Le champ des efforts intérieurs cherché est auto-équilibré. D'après Ex. XI.4 il est de la forme :

$$N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = T; \quad N_1 = N_2 = -T\sqrt{2}$$

T étant choisie comme inconnue hyperstatique.

On désigne par $\varepsilon_i^e = N_i / ES$ ($i = 1, \dots, 6$) la déformation élastique de la barre i sous l'effet de l'effort N_i , soit

$$\varepsilon_i^e = T / ES \quad (i = 3, \dots, 6), \quad \varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e = -T\sqrt{2} / ES$$

qui produit les allongements $\delta_i^e = aT / ES$ ($i = 3, \dots, 6$) et $\delta_i^e = -a\sqrt{2}T / ES$ ($i = 1, 2$).

Les longueurs des poutres dans cet état d'autocontrainte sont donc :

$$AC : a\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1^e) = a\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon}_1 - T\sqrt{2}/ES)$$

$$BD : a\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon}_2 - T\sqrt{2}/ES)$$

$$AB, BC, CD, DA : a(1 + \bar{\varepsilon}_i + T/ES), \quad i = 3, \dots, 6.$$

- On détermine T en écrivant la condition de compatibilité géométrique pour assurer l'assemblage des poutres (cf. Ex. XI.4) :

$$a(\bar{\delta}_3 + \bar{\delta}_3^e + \dots + \bar{\delta}_6 + \bar{\delta}_6^e) - a\sqrt{2}(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_1^e + \bar{\delta}_2 + \bar{\delta}_2^e) = 0$$

d'où

$$a(\bar{\varepsilon}_3 + \dots + \bar{\varepsilon}_6) - 2a(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2) + 4aT/ES + 4aT\sqrt{2}/ES = 0$$

qui donne

$$T = -ES((\bar{\varepsilon}_3 + \dots + \bar{\varepsilon}_6) - 2(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)) \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \text{ et détermine ainsi le champ d'efforts intérieurs auto-équilibré dans la structure assemblée.}$$

- On peut aussi utiliser le théorème du potentiel minimum. Pour chaque poutre constituant la structure, la densité d'énergie élastique de contrainte w^* est donnée par (2.45). On doit faire intervenir l'effort normal de précontrainte N_i^p engendré dans chaque poutre par le préchargement initial qui lui a été imposé pour la ramener à la longueur du projet au moment de l'assemblage, soit :

$$N_i^p = -ES\bar{\varepsilon}_1 \quad i = 1, \dots, 6.$$

L'assemblage effectué, le treillis étant non chargé on a (avec les notations du chapitre X, § 8.2)

$$W^*(0, T) = a \left(\frac{2(\sqrt{2} + 1)T^2}{ES} + T(\bar{\varepsilon}_3 + \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_5 + \bar{\varepsilon}_6) - 2T(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2) \right)$$

d'où, en écrivant que $\frac{\partial W^*(0, T)}{\partial T} = 0$:

$$T = -ES \frac{\sqrt{2} - 1}{4} (\bar{\varepsilon}_3 + \bar{\varepsilon}_4 + \bar{\varepsilon}_5 + \bar{\varepsilon}_6 - 2(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)).$$

- Pour la structure avec état initial naturel et variation de température dans la poutre AC le raisonnement est identique, en posant : $\bar{\varepsilon}_1 = \alpha\tau$, $\bar{\varepsilon}_i = 0$ ($i = 2, \dots, 6$). D'où la distribution d'efforts intérieurs auto-équilibrée :

$$N_1 = N_2 = -ES\alpha\tau(1 - \sqrt{2}/2), \quad N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = ES\alpha\tau(\sqrt{2} - 1)/2.$$

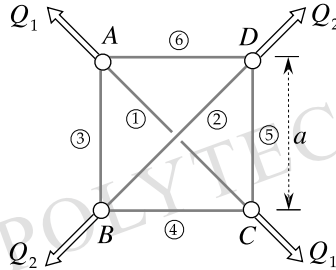
Commentaire.

- Le rôle du champ d'efforts intérieurs auto-équilibré qui se met en place dans la structure à l'assemblage est d'assurer, par les allongements élastiques qu'il engendre, la compatibilité géométrique. Ces conditions « champ auto-équilibré » et « compatibilité géométrique » le déterminent de manière unique (cf. chapitre XI, § 4.5).
- Si l'on considère $\bar{\varepsilon}_1 = Q/ES$, $\bar{\varepsilon}_i = 0$, ($i = 2, \dots, 6$), on trouve par les formules précédentes :

$$T = Q(\sqrt{2} - 1)/2, \quad N_1 = N_2 = -Q(1 - \sqrt{2}/2).$$

On remarque, par comparaison avec les résultats de Ex. XII.1, que la distribution d'efforts intérieurs dans le treillis sous le chargement Q à partir de l'état initial naturel, s'obtient en additionnant la distribution $N_1 = Q$, $N_2 = \dots = N_6 = 0$, correspondant à la structure non assemblée dans laquelle la poutre ① a la longueur $\ell_1 = a\sqrt{2}(1 + Q/ES)$, et la distribution auto-équilibrée qui assure la compatibilité géométrique dans la structure assemblée.

XII.3 - Le treillis plan représenté sur la figure est soumis au chargement dépendant de deux paramètres Q_1 et Q_2 indiqué. L'état initial est naturel. Le comportement des poutres est élastique linéaire (même section S , même module E). On désigne par L la valeur de la limite d'élasticité en traction ou en compression pour toutes les poutres. Déterminer, dans le plan (Q_1, Q_2) , le domaine d'élasticité initial de la structure défini par les chargements pour lesquels toutes les poutres de la structure sont, dans l'état d'équilibre élastique, soumises à des efforts intérieurs tels que $|N_i| \leq L$. Examiner la même question lorsque l'état initial est caractérisé par une distribution d'efforts intérieurs auto-équilibrée définie par la valeur T_0 de $N_3 = N_4 = N_5 = N_6$.



Éléments de réponse.

- La solution sous le chargement complexe (Q_1, Q_2) à partir de l'état initial naturel s'obtient par superposition :

$$N_1 = (Q_1 + Q_2)\sqrt{2}/2 - Q_2, \quad N_2 = (Q_1 + Q_2)\sqrt{2}/2 - Q_1,$$

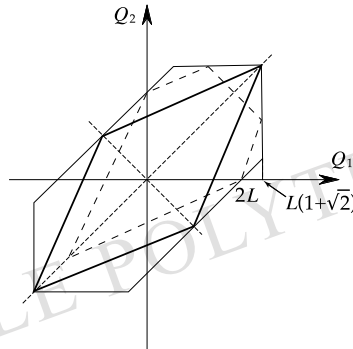
$$N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = (Q_1 + Q_2)(\sqrt{2} - 1)/2.$$

- $|N_i| \leq L \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6$, définit le domaine cherché, en traits pleins sur la figure.
- À partir de l'état initial auto-équilibré défini par T_0 , les efforts intérieurs dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement (Q_1, Q_2) sont :

$$N_1 = (Q_1 + Q_2)\sqrt{2}/2 - Q_2 - T_0\sqrt{2}, \quad N_2 = (Q_1 + Q_2)\sqrt{2}/2 - Q_1 - T_0\sqrt{2},$$

$$N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = (Q_1 + Q_2)(\sqrt{2} - 1)/2 + T_0.$$

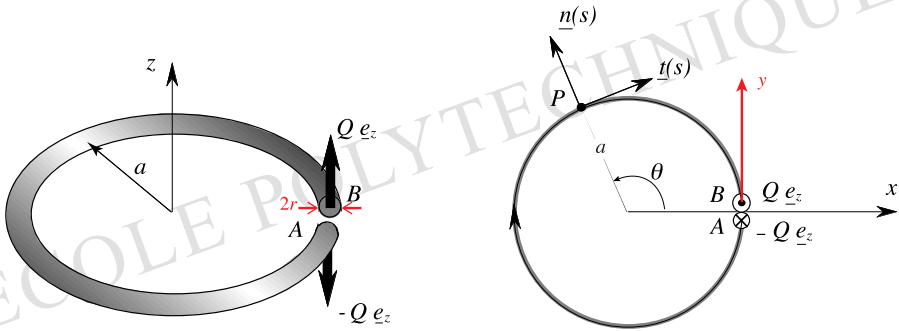
Un domaine d'élasticité initial typique correspondant est représenté en tireté sur la figure.



Commentaire.

Le problème est à rapprocher de celui étudié dans Ex. XI.12. Les domaines trouvés ici, qui dépendent de l'état « d'autocontrainte » initial, sont évidemment toujours intérieurs à celui délimité dans Ex. XI. 12 (rappelé en traits fins sur la figure). Les problèmes traités sont de natures différentes : l'analyse de Ex. XI.12 détermine la frontière des chargements au-delà de laquelle, quelles que soient les conditions initiales et de comportement, il n'est pas possible d'assurer l'équilibre en respectant la condition $|N_i| \leq L, \forall i = 1, 2, \dots, 6$; ici, le comportement (élastique) et les conditions initiales sont précisées et la frontière est recherchée pour la solution d'équilibre élastique correspondante.

XII.4 - On considère un anneau circulaire de rayon a , sectionné comme indiqué sur la figure, auquel sont appliquées, sur les extrémités adjacentes A et B , deux forces opposées \underline{R}_A et \underline{R}_B : $\underline{R}_A = -Q \underline{e}_z$, $\underline{R}_B = Q \underline{e}_z$. L'anneau est de section droite circulaire de rayon constant $r \ll a$. Il est constitué d'un matériau homogène linéairement élastique isotrope, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Déterminer le déplacement relatif selon \underline{e}_z de B par rapport à A dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement Q .

**Éléments de réponses.**

On utilise l'analyse statique faite dans Ex. XI.7. Pour la section circulaire on a : $I = \pi r^4/4$, $J = \pi r^4/2$. D'où le calcul de $\mathcal{W}^*(Q)$ pour l'anneau :

$$\mathcal{W}^*(Q) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{M_n^2(s)}{EI} + \frac{C^2(s)}{\mu J} \right) a d\theta \quad \text{où } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

et, après intégration avec les expressions données dans Ex. XI.7 :

$$\mathcal{W}^*(Q) = \frac{Q^2 a^3}{r^4} \left(\frac{2}{E} + \frac{6(1+\nu)}{E} \right).$$

Le déplacement relatif cherché dans la direction \underline{e}_z est :

$$q = \frac{d\mathcal{W}^*(Q)}{dQ} = Q \frac{a^3}{E r^4} (16 + 12\nu).$$

Commentaire.

Ce résultat permet d'évaluer la complaisance élastique d'une spire de ressort hélicoïdal.

XII.5 - L'anneau circulaire défini dans Ex. XII.4 est soumis au chargement constitué des forces $\underline{R}_A = -Q \underline{e}_y$, $\underline{R}_B = Q \underline{e}_y$ appliquées normalement aux sections d'extrémités adjacentes A et B . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont : rayon de la fibre moyenne égal à a , section droite circulaire constante de rayon $r \ll a$, matériau constitutif homogène, isotrope, linéairement élastique de module de Young E . Déterminer le déplacement relatif selon \underline{e}_y de B par rapport à A dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement Q .

Éléments de réponse.

On utilise l'analyse statique faite dans Ex. XI.8. Avec, pour la section circulaire, $S = \pi r^2$ et $I = \pi r^4/4$, on calcule $\mathcal{W}^*(Q)$ pour l'anneau :

$$\mathcal{W}^*(Q) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{N^2(s)}{E S} + \frac{M^2(s)}{E I} \right) a \, d\theta$$

et, après intégration avec les expressions données dans Ex. XI.8 : $\mathcal{W}^*(Q) = \frac{Q^2 a}{E \tau^2} \left(\frac{1}{2} + 6 \frac{a^2}{r^2} \right)$.

Le déplacement relatif cherché dans la direction \underline{e}_y est :

$$q = \frac{d\mathcal{W}^*(Q)}{dQ} = Q \frac{a^3}{E r^4} \left(12 + \frac{r^2}{a^2} \right) \simeq Q \frac{12 a^3}{E r^4}.$$

XII.6 - Calcul élastique d'une structure complexe. On considère la structure étudiée dans Ex. XI.9 en supposant que les éléments constitutifs de la structure ont un comportement linéairement élastique avec les caractéristiques suivantes.

Câble : module de Young E , section constante a ; la tension $X(s)$ doit être non négative.

Montants : module de Young E' , sections constantes, égales, Σ .

Poutre : module de Young E' , section constante S , directions principales d'inertie \underline{e}_y et \underline{e}_z , moment principal d'inertie autour de la direction \underline{e}_z constant, égal à I .

Déterminer la distribution des efforts intérieurs dans cette structure dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement $\underline{R}_A = R_A \underline{e}_y$, $\underline{H}_A = H_A \underline{e}_z$, $\underline{R}_B = R_B \underline{e}_y$, $\underline{H}_B = H_B \underline{e}_z$ (où l'on pose $M_0 = (H_B - H_A)/2$, $\mu = (H_B + H_A)/2$) appliqué à partir de l'état initial naturel de la structure, sans variation de température. En l'absence de tout chargement de la structure, la poutre AB subit seule une variation de température $\tau > 0$ uniforme. On désigne par α le coefficient de dilatation linéique de la poutre. Déterminer l'état d'efforts intérieurs auto-équilibré induit dans cette structure élastique par cette variation de température.

Éléments de réponse.

- On utilise les résultats de Ex. XI.9. Choissant X_0 comme inconnue hyperstatique, les distributions d'efforts intérieurs en équilibre avec le chargement indiqué ont été décrites.
- Résolution directe.

Les déformations des éléments de la structure sont données par les lois de comportement.

Montants : $\varepsilon_1(x_1) = \varepsilon_2(x_2) = -X_0/E' \Sigma$.

Poutre :

$$-2\ell < x < -\ell: \quad \varepsilon(x) = -X_0/2 E' S, \quad \frac{d\omega}{dx}(x) = \frac{1}{E' I} \left(-(x+2\ell) X_0 \frac{\sqrt{3}}{2} + M_0 + \mu \frac{x}{2\ell} \right)$$

$$-\ell < x < \ell: \quad \varepsilon(x) = -X_0/E' S, \quad \frac{d\omega}{dx}(x) = \frac{1}{E' I} \left(-\ell X_0 \frac{\sqrt{3}}{2} + M_0 + \mu \frac{x}{2\ell} \right)$$

$$\ell < x < 2\ell: \quad \varepsilon(x) = -X_0/2 E' S, \quad \frac{d\omega}{dx}(x) = \frac{1}{E' I} \left((x-2\ell) X_0 \frac{\sqrt{3}}{2} + M_0 + \mu \frac{x}{2\ell} \right).$$

Câble : $\varepsilon_c(s) = X_0/E a$ si $X_0 > 0$, $\varepsilon_c(s) \leq 0$ si $X_0 = 0$.

On écrit la compatibilité géométrique de ces déformations par l'équation établie dans Ex. XI.9, en testant chacune des hypothèses sur le signe de X_0 pour le comportement du câble. D'où :

$$X_0 = \frac{3\sqrt{3}\ell M_0}{E' I} / \left(\frac{5}{E a} + \frac{2}{E' \Sigma} + \frac{5}{2 E' S} + \frac{2\ell^2}{E' I} \right) \quad \text{si } M_0 \geq 0$$

$$X_0 = 0 \quad \text{si } M_0 \leq 0.$$

- Utilisation du théorème du potentiel minimum.

On fait a priori l'hypothèse $X_0 > 0$ et on calcule $\mathbf{W}^*(M_0, \mu, X_0)$ à partir de (2.45) :

$$\mathbf{W}^*(M_0, \mu, X_0) = \frac{5\ell X_0^2}{2 E a} + \frac{\ell X_0^2}{E' \Sigma} + \frac{5\ell X_0^2}{4 E' S} + \frac{\ell^3 X_0^2}{E' I} - \frac{3\sqrt{3}\ell^2 M_0 X_0}{2 E' I}$$

d'où X_0 par $\frac{\partial \mathbf{W}^*(M_0, \mu, X_0)}{\partial X_0} = 0$ si $X_0 > 0$, et $X_0 = 0$ sinon.

- Méthodes analogues pour la détermination de la réponse à la variation de température dans la poutre AB .

Résolution directe.

Seules les déformations de la poutre sont modifiées par rapport aux expressions précédentes :

$$\begin{aligned} -2\ell < x < -\ell: \quad \varepsilon(x) &= -X_0/2 E' S + \alpha \tau \\ -\ell < x < \ell: \quad \varepsilon(x) &= -X_0/E' S + \alpha \tau \\ \ell < x < 2\ell: \quad \varepsilon(x) &= -X_0/2 E' S + \alpha \tau. \end{aligned}$$

On écrit la compatibilité géométrique, d'où :

$$X_0 = 3\alpha \tau / \left(\frac{5}{E a} + \frac{2}{E' \Sigma} + \frac{5}{2 E' S} + \frac{2\ell^2}{E' I} \right) \text{ qui est bien valable car } \tau > 0.$$

Utilisation du théorème du potentiel minimum.

À partir de w^* donné par (2.45), et en faisant a priori l'hypothèse $X_0 > 0$:

$$\mathbf{W}^*(\tau, X_0) = \frac{5\ell X_0^2}{2 E a} + \frac{\ell X_0^2}{E' \Sigma} + \frac{5\ell X_0^2}{4 E' S} + \frac{\ell^3 X_0^2}{E' I} - 3\ell X_0 \alpha \tau = 0$$

d'où X_0 par $\frac{\partial \mathbf{W}^*(\tau, X_0)}{\partial X_0} = 0$ qui conduit bien à $X_0 > 0$.

Commentaire.

Cet exemple illustre bien l'équivalence des deux méthodes de résolution. L'utilisation directe des équations de compatibilité géométrique est ici relativement plus « parlante » dans la mesure où la loi de comportement du câble distingue deux expressions suivant que la tension est positive ou nulle.

XII.7 - Poutre continue élastique sur 3 appuis. On considère la poutre continue sur 3 appuis étudiée dans Ex. XI.10, et l'on suppose l'appui intermédiaire C situé en O milieu de la portée ($\alpha = 0$). On désigne par I le moment d'inertie de la section constante de cette poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé selon \underline{e}_z . Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module de Young E . L'état initial du système en l'absence de chargement ($p = 0$) est naturel : distribution de torseurs d'efforts intérieurs nulle.

- 1° On suppose que les 3 appuis en A , B et C , sont au même niveau, à la cote $y = 0$, au contact de la poutre dans son état initial non chargé. Déterminer, dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement défini par p , la valeur des réactions d'appuis et la distribution de torseurs d'efforts intérieurs dans la structure.
- 2° On suppose l'appui en C légèrement dénivélé vers le bas : sa cote est $v < 0$, ($|v| \ll \ell$) ; cet appui n'est donc pas au contact de la poutre dans son état initial non chargé. Déterminer, en fonction de v , la valeur des réactions d'appuis et la distribution de torseurs d'efforts intérieurs dans la structure dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement défini par p .

Éléments de réponse.

1° Avec les notations et les résultats de Ex. XI.10, on utilise le théorème du potentiel minimum en prenant Y comme inconnue hyperstatique.

$$W^*(p, Y) = \frac{1}{2EI} \int_{-\ell}^0 \left(\frac{p}{2}(\ell^2 - x^2) - \frac{Y}{2}(\ell + x) \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^{\ell} \left(\frac{p}{2}(\ell^2 - x^2) - \frac{Y}{2}(\ell - x) \right)^2 dx.$$

$$\frac{\partial W^*(p, Y)}{\partial Y} = -\frac{5p\ell^4}{24EI} + \frac{Y\ell^3}{6EI},$$

$$\text{d'où, par } \frac{\partial W^*}{\partial Y}(p, Y) = 0 : Y = 5p\ell/4.$$

On vérifie que cette valeur est compatible avec le caractère unilatéral des liaisons (cf. Ex. XI.10) : $0 \leq Y \leq 2p\ell$

- Les autres réactions d'appuis et la distribution du torseur d'efforts intérieurs sont obtenues par les formules données dans Ex. XI.10.

2° Pour déterminer l'état d'équilibre élastique de la structure dans ces nouvelles conditions on écrit que, si dans cet état, la liaison est établie en C entre la poutre et l'appui intermédiaire dénivelé, la valeur de Y de la réaction d'appui est telle qu'en considérant la poutre AB appuyée en A et B seulement, soumise au chargement constitué de la densité linéique uniforme $-p\mathbf{e}_y$ et d'une force $Y\mathbf{e}_y$ appliquée en O le déplacement $\xi_y(0)$ du point O est égal à la cote v de l'appui : $\xi_y(0) = v$.

- Par le théorème de Castigliano, $W^*(p, Y)$ étant relative à cette poutre AB :

$$\xi_y(0) = \frac{\partial W^*(p, Y)}{\partial Y} \text{ où l'on remarque que } W^*(p, Y) = W^*(p, Y);$$

$$\text{d'où par } \xi_y(0) = v : Y = 5p\ell/4 + 6EIv/\ell^3.$$

Le résultat n'est valable que si le contact est effectivement établi en C : $0 \leq Y \leq 2p\ell$.

D'où la condition :

$$v \geq -5p\ell^4/24EI.$$

- Réaction d'appuis et distribution du torseur d'efforts intérieurs à partir de Ex. XI.10.
- Pour $v < -5p\ell^4/24EI$ la liaison ne s'établit pas. Les réactions d'appuis et la distribution du torseur d'efforts intérieurs sont déterminées dans la poutre isostatique AB (formules de Ex. XI.10 avec $Y = 0$).

Commentaire.

La démarche suivie dans 2° fondée sur le théorème de Castigliano, revient à la minimisation de la fonction $W^* - \Phi^*$ (cf. chapitre X, formule (6.10)). Le problème permet d'évaluer les incidences pratiques d'une dénivellation accidentelle de l'appui C sur le projet de l'ouvrage. Avec des valeurs numériques significatives pour un tablier de pont : $E = 4 \times 10^4$ MPa, $I = 6 \text{ m}^4$, $\ell = 30 \text{ m}$, $p = 2 \times 10^5$ N/m, on trouve qu'il suffit d'un tassement de 2,8 cm (0,5 ‰ de la portée $AB = 60 \text{ m}$) pour annuler le moment fléchissant au droit de l'appui C .

XII.8 - Effet d'un gradient thermique transversal. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations en thermoélasticité tridimensionnelle, on considère une barre cylindrique élancée de section S ; \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont dirigés suivant les axes principaux de la section droite. Cette barre est soumise à un gradient thermique constant de la forme : $\text{grad } T = g\mathbf{e}_y$. On désigne par α le coefficient de dilatation linéique du matériau constitutif homogène, isotrope, linéairement élastique. Déterminer la déformation de cette barre en supposant que sa fibre moyenne demeure à la température initiale uniforme dans le solide.

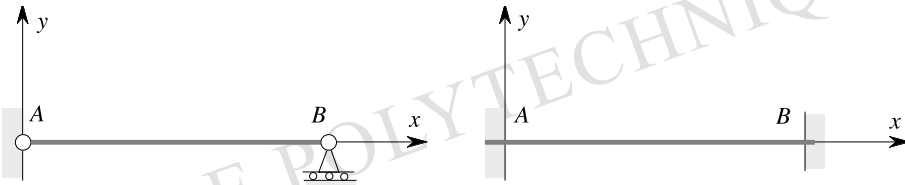
En déduire le terme à introduire dans l'expression de la densité d'énergie élastique des contraintes pour un milieu curviligne pour tenir compte d'un tel gradient thermique, ainsi que la modification correspondante dans la loi de comportement.

- On s'appuie sur les résultats de Ex. II.10. La fibre moyenne de la barre se transforme en arc de cercle d'axe parallèle à \underline{e}_z ; sa courbure est égale à $-\alpha g$. Les sections droites restent planes, normales à la fibre moyenne, mais sont déformées dans leur plan.
- Modification à apporter à la loi de comportement du milieu curviligne thermoélastique :
$$\frac{d\omega_z(s)}{ds} = \frac{\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s)}{EI_z(s)} - \alpha g(s).$$
- Terme complémentaire dans l'expression (2.45) de w^* : $-(\mathcal{M}_z(s) - \mathcal{M}_z^p(s)) \alpha g(s).$

Commentaire.

Ces résultats permettent le calcul des effets de ce type sollicitation thermique dans les structures (cf. par exemple Ex. XII.9).

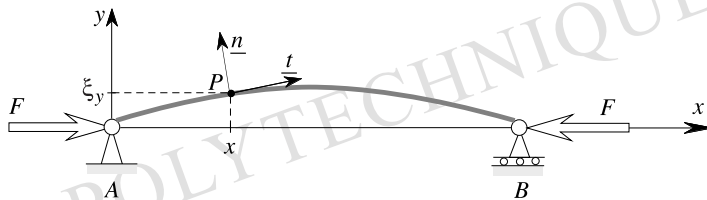
XII.9 - Effet d'un gradient thermique transversal. Déterminer la déformée et la distribution des efforts intérieurs dans une poutre droite de section constante (\underline{e}_y et \underline{e}_z : directions principales d'inertie), homogène, de longueur ℓ , soumise à partir de l'état initial naturel à un gradient transversal de température constante de la forme $g \underline{e}_y$ dans les deux cas suivants représentés sur la figure : les appuis en A et B sont articulés, les appuis en A et B sont des encastremets fixes.



Éléments de réponse.

- À partir des résultats de Ex. XII.8, il vient :
$$N(x) = 0, \quad V(x) = 0, \quad M(x) = 0, \quad \frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\alpha g \quad \text{sur } AB.$$
 La déformée est un arc de cercle de rayon $-\frac{1}{\alpha g}$ (concavité tournée vers les y négatifs si $g > 0$).
- À partir du résultat de Ex. XII.8 pour l'expression de w^* , compte tenu des conditions aux limites, on applique le théorème du potentiel minimum.
Inconnues hyperstatiques : X_B, Y_B, H_B composantes de $[\mathbb{R}_B]$.
 $N(x) = X_B, \quad M(x) = Y_B(\ell - x) + H_B.$
On trouve : $X_B = 0, \quad Y_B = 0, \quad H_B = EI \alpha g$; $M(x) = EI \alpha g$ sur AB .
$$\frac{d\omega(x)}{dx} = 0 \text{ sur } AB : \text{ la poutre demeure rectiligne.}$$

XII.10 - Instabilité élastique ; force critique d'Euler. On considère une poutre droite de section constante, homogène, de moment d'inertie I autour de la direction principale de plus faible inertie \underline{e}_z . Cette poutre est articulée en A à un support fixe. En B elle est articulée sur un rouleau. On désigne par F , **positive en compression**, l'intensité des efforts qui sont appliqués en A et B . En conservant l'hypothèse de la transformation infinitésimale, mais sans considérer les déplacements transversaux (selon y) comme petits, examiner la possibilité d'existence dans le plan Oxy d'une solution d'équilibre élastique de la poutre autre que la solution banale de compression simple.



Éléments de réponse.

- On écrit les équations d'équilibre dans la configuration déformée :

$$N(x) = -F, \quad V(x) = F \frac{d\xi_y(x)}{dx}.$$

- Par la loi de comportement élastique :

$$\frac{d^2 \xi_y(x)}{dx^2} + \frac{F}{EI} \xi_y(x) = 0,$$

équation différentielle dont on doit rechercher si elle admet une autre solution que la solution banale pour les conditions aux limites : $\xi_y(0) = 0$, $\xi_y(\ell) = 0$.

- La plus faible valeur de F pour laquelle une solution non banale peut exister est : $F = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$. C'est la **force critique d'Euler** pour la poutre de longueur ℓ articulée à ses deux extrémités.

Commentaire.

L'existence d'une autre solution que la solution banale de compression simple manifeste l'instabilité élastique de la poutre lorsque la force F approche de cette valeur critique. Le risque de « flambement » en compression des poutres est pris en compte dans les règlements de calcul des constructions. Il existe d'autres types d'instabilités élastiques vis-à-vis desquels l'ingénieur doit se prémunir : flambement avec déversement, voilement, etc.

Glossaire

Français	English	Deutsch
Accélération	acceleration	Beschleunigung
anisotrope	anisotropic	anisotrop
appui	support	Lager (n.), Lagerung
arc	arch	Bogen (m.)
articulation	hinge	Gelenk (n.)
	pin-connected joint	
assemblage	joint	Verbindung
axe neutre	neutral axis, zero line	Nullinie (f.)
 Barre de treillis	 truss member	 Fachwerkstab (m.)
 Câble	 cable	 Seil (n.)
cercle de Mohr	Mohr circle	Mohrsche Kreis (m.)
champ de contrainte, de déformation, de vitesse,...	stress-, strain-, velocity-field	Spannungsfeld, Verzerrungsfeld, Geschwindigkeitsfeld (n.)
cinématique (la)	kinematics	Kinematik
cinématique	kinematic, kinematical	kinematisch
cisaillement	shear	Schub (m.)
cission	shear stress	Schubspannung
cission octaédrale	octahedral shear stress	Oktaederspannung
coefficient de Poisson	Poisson's ratio	Poissonzahl (f.)
composante	component	Komponente (f.)
contrainte	stress	Spannung
contrainte de compression	compressive stress	Druckspannung
contrainte de traction	tensile stress	Zugspannung
contrainte normale	normal stress	Normalspannung
contrainte plane	plane stress	ebene Spannung
contrainte tangentielle	shear stress	Schubspannung
contraintes principales	principal stresses	Hauptspannungen

courbure
critère

curvature
criterion (plur. criteria)

Krümmung
Kriterium (n.)

Déformation
déformation plane
déplacement
dynamique (la)

strain, deformation
plane strain
displacement
dynamics

Verzerrung
ebene Verzerrung
Verschiebung
Dynamik (f.)

Effort normal
effort tranchant
effort extérieur
effort intérieur
encastrement
équilibre
essai de
compression, de
traction

normal force
shearing force
external force
internal force
fixed support
equilibrium
compression test,
traction test

Normalkraft
Querkraft (f.)
äußere Kraft
innere Kraft
Einspannung
Gleichgewicht (n.)
Druckversuch,
Zugversuch (m.)

Fibre
fil
flexion
fonction de charge
force de masse

fibre, fiber
wire
bending
loading function
body force per unit mass

Faser (f.)
Fiber (f.)
Biegung
Grenzzustandsfunktion
Volumenkraft pro
Masseneinheit
Volumendraft pro
Volumeneinheit

force de volume

body force per unit
volump

Gauchissement
glissement
(déformation)

warping
distortion

Verwölbung
Gestaltsänderung

Hyperstatique

statically indeterminate,
hyperstatic
geometrically unstable

statisch unbestimmt

hypostatique

verschieblich

Inconnue
hyperstatique
invariant
isostatique
isotrope

redundant unknown

invariant
statically determinate
isotropic

statisch Unbestimmte (f.)

Invariant
statisch bestimmt
isotrop

Jauge de de déformation	straingauge, strainingage	Dehnmessstreifen (m.)
Ligne de courant ligne d'émission	flow-line, streamline streakline	Stromlinie (f.) Streichlinie (f.)
Matériau mécanique (la) méthode des éléments finis milieu continu module de cisaillement module de déformation volumique module de Young moment moment de flexion, moment fléchissant moment de torsion mouvement mouvement rigidifiant	material mechanics finite element method continuum shear modulus bulk modulus Young's modulus moment bending moment torque, torsional couple motion rigid body motion	Material (n.) Mechanik (f.) Finite-Elemente-Methode (FEM) (f.) Kontinuum (n.) Schubmodul (m.) Steifemodul (m.) Elastizitätsmodul (m.) Moment (n.) Biegemoment (m.) Torsionsmoment (n.) Bewegung Starrkörperbewegung
Nœud	joint	Knoten (m.)
Objectivité orthotrope	material indifference orthotropic	Objektivität orthotrop
Paramètre de chargement poutre poutre console principe de minimum principe des puissances virtuelles produit contracté produit tensoriel	loading parameter beam cantilever beam minimum principle principle of virtual work contracted product tensorial product	Belastungsparameter (m.) Balken (m.) eingespannter Balken Minimalprinzip (n.) Prinzip der virtuellen Leistungen, Arbeiten (n.) verjüngendes Produkt tensorielles Produkt

Réciprocité	reciprocity	Reziprozität
résistance	strength of materials	Materialfestigkeit
des matériaux		
résultante	resultant	Resultierende (f.)
Section droite	cross-section	Querschnitt (m.)
stabilité	stability	Stabilität
stationnaire	steady (flow)	stationäre Strömung
(écoulement)		
statique (la)	statics	Statik (f.)
statique	static	statisch
superposition	superposition	Superposition (f.)
système réticulé	truss	Fachwerk (n.)
Taux	rate	Zuwachsrate (f.), Geschwindigkeit
taux de contrainte	stress rate	Rate des Spannungszuwachses (f.)
taux de	strain rate	Verzerrungs-
déformation		geschwindigkeit
tenseur	tensor	Tensor (m.)
tétraèdre	tetrahedron	Thetraeder (m.)
torsion	torsion, twisting	Torsion (f.)
torseur	wrench	
tourbillon	vortex	Wirbel (m.)
trace	trace	Spur (f.)
trajectoire	trajectory, pathline	Trajektorie (f.)
treillis	truss	Fachwerk (n.)
Vitesse	velocity	Geschwindigkeit
vitesse de	strain rate	Dehnungs-
déformation		geschwindigkeit

Français	Español	Italiano	Português
Accélération anisotrope	aceleración anisotrópico (a), anisótropo (a)	accelerazione anisotropo (a)	aceleração anisótropo (a)
appui	apoyo, soporte	appoggio	apoio
arc	arco	arco	arco
articulation	articulación, charnela	cerniera	articulação
assemblage	ensamble, ensamblado	insieme, unione	assemblagem
axe neutre	eje neutro	asse neutro	eixo neutro
Barre de treillis	barra	asta, barra	barra de treliça
Câble	cable	fune, cavo	cabo
cercle de Mohr	círculo de Mohr	cerchio di Mohr	círculo de Mohr
champ de contrainte, de déformation, de vitesse,...	campo de esfuerzo, de deformación, de velocidad,...	campo di sforzo, di deformazione, di velocità...	campo de tensão, de deformação, de velocidade,...
cinématique (la)	cinemática	cinematica	cinemática
cinématique	cinemático (a)	cinematico (a)	cinemático (a)
cisaillement	cortante por deformación	deformazione angolare	cisalhamento
cission	esfuerzo tangencial, esfuerzo cortante	sforzo tangenziale, sforzo di taglio	tensão tangencial
cission	esfuerzo cortante	sforzo (di taglio)	tensão tangencial
octaédrale	octaédrico	ottaedrale	octaédrica
coefficient de Poisson	relación de Poisson	coefficiente di Poisson	coeficiente de Poisson
composante	componente	componente	componente
contrainte	esfuerzo (o tensión)	sforzo	tensão
contrainte de compression	esfuerzo de compresión, esfuerzo compresivo	sforzo di compressione	tensão de compressão
contrainte de traction	esfuerzo de tensión, esfuerzo de tracción	sforzo di trazione	tensão de tração
contrainte normale	esfuerzo normal	sforzo normale	tensão normal
contrainte plane	esfuerzo plano	sforzo piano	tensão plana

contrainte tangentielle	esfuerzo tangencial	sforzo tangenziale	tensão tangencial
contraintes principales	esfuerzos principales	sforzi principali	tensões principais
courbure	curvatura	curvatura	curvatura
critère	(criterio), teoría de resistencia, teoría del esfuerzo de...	criterio	critério
Déformation	deformación, unitaria	deformazione	deformação
déformation plane	deformación plana	deformazione piana	deformação plana
déplacement	desplazamiento	spostamento	deslocamento
dynamique (la)	dinámica	dinamica	dinâmica
Effort normal	fuerza normal	azione assiale	esforço normal
effort tranchant	fuerza cortante	azione tagliante, taglio	esforço cortante
effort extérieur	fuerza interna	azione esterne	esforço externo
effort intérieur	fuerza externa	azione interne	esforço interno
encastrement	empotramiento	incastro	engastamento
équilibre	equilibrio	equilibrio	equilíbrio
essai de compression,	prueba o ensayo de compresión, de	prova di compressione,	ensaio de compressão,
de traction	tensión (o tracción)	di trazione	de tração
Fibre	fibra	fibra	fibra
fil	alambra, hilo	filo	fio
flexion	flexión	flessione	flexão
fonction de charge	teoría de carga, función de carga	funzione di plasticità	função de carga
force de masse	fuerza de masa, fuerza másica	forza di massa	força de massa
force de volume	fuerza de volumen, fuerza volumétrica	forza di volume	força de volume
Gauchissement	alabeo, torcedura	ingobbamento	empenamento
glissement (déformation)	distorción	scorrimento angolare	distorção

Hyperstatique	hiperestático (a), státicamente indeterminado (a)	iperstatico (a)	hiperestático (a)
hypostatique	hipostático	ipostatico	hipostático
Inconnue hyperstatique	incognita hiper- estática oe redundant	incognita iperstatica	incógnita hiper- estática
invariant isostatique	invariante isostático (a)	invariante isostatico (a)	invariante isostático (a)
isotrope	isotrópico (a), isótropo	isotropo	isótropo (a)
Jauge de déformation	galga, extensométrica strain-gauge	estensimetro, strain gauge	extensômetro
Ligne de courant	linea de curiente	linea di corrente, linea di flusso	linha de corrente, linha de fluxo
ligne d'émission	linea de emisión	linea d'emissione, linea di fumo	linha de emissão
Matériau mécanique (la)	material mecánica	materiale meccanica (la)	material mecânica
méthodes des éléments finis	método del elemento finito	metodo degli elementi finiti	método dos elementos finitos
milieu continu	medio continuo	mezzo continuo, continuo	meio contínuo
module de cisaillement	módulo de (rigidez al) cortante	modulo di taglio, modulo di elasticità tangenziale	módulo de cisalhamento
module de déformation volumique	módulo de deformación volumétrica, módulo volumétrico	modulo volumetrico	módulo de deformação volumétrica
module de Young	módulo de, elasticidad, módulo de Young	modulo elastico, modulo di Young	módulo de Young, módulo de elasticidade

moment	momento	momenti	momento
moment de flexion, moment fléchissant	momento, flexionante momento flector	momento flettente	momento de flexão, momento fletor
moment de torsion	momento torsionante momento de torsión	momento torcente	momento torção, momento torsor
mouvement	movimiento	moto, movimento	movimento
mouvement rigidifiant	movimiento de cuerpo rígido	moto rígido	movimento de corpo rígido
Nœud	nudo, punto nodal, junta	nodo	nó, junta
Objectivité	indiferencia material	oggettività	objectividade, indiferença material
orthotrope	ortotrópico (a)	ortotropo (a)	ortótropo (a), ortotrópico (a)
Paramètre de chargement	parámetro de carga	parametro di carico	parâmetro de carga
poutre	viga	trave	viga
poutre console	viga en voladizo, viga en cantiliver	mensola, trave a mensola	viga console
principe de minimum	principio de mínimo	principio di minimo	princípio do mínimo
principes des puissances virtuelles	principio del trabajo virtual	principio dei lavori virtuali	princípio dos trabalhos virtuais
produit contracté	producto contraído	composizione (di due tensori)	produto contraído
produit tensoriel	producto tensorial	prodotto tensoriale	produto tensorial
Réciprocité	reciprocidad, acción reciproca	reciprocità	reciprocidade
résistance des matériaux	resistencia de materiales	resistenza dei materiali, scienza delle costruzioni	resistência dos materiais
résultante	resultante	risultante	resultante

Section droite	sección recta, sección transversal	sezione retta	seção transversal
stabilité	estabilidad	stabilità	estabilidade
stationnaire (écoulement)	establecido	moto permanente	estacionário (a)
statique (la)	estática	statica (la)	estática
statique	estático (a)	statico (a)	estático (a)
superposition	superposición	sovrapposizione	superposição
système	sistema de	travatura	sistema
réticulé	barras	reticolare	reticulado, sistema de barras
Taux	tasa, tasa de, cambio razón de cambio	velocità	taxa
taux de contrainte	tasa de esfuerzo	velocità di sforzo	taxa de tensão
taux de déformation	tasa de deformación	velocità di deformazione	taxa de deformação
tenseur	tensor	tensore	tensor
tétraèdre	tetraedro	tetraedro	tetraedro
torsion	torsión	torsione	torção
tourbillon	vórtice	vortice	vórtice
trace	traza	traccia	traço
trajectoire	trayectoria	traiettoria	trajetória
treillis	sistema de barras	telaio	treliça
Vitesse	velocidad	velocità	velocidade
vitesse de déformation	taza de deformación	velocità di deformazione	velocidade de deformação

Bibliographie

- ACHENBACH, J.D. (1973) – *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam.
- ATTEIA, M. & DEDIEU, J.P. (1981) – Minimization of energy in nonlinear elasticity. *Nonlinear problems of Analysis in Geometry and Mechanics*, (M. ATTEIA, D. BANCEL, I. GUMONSKI ed.). Pitman, Boston, pp. 73-79.
- BALL, J.M. (1977) – Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63**, 337-403.
- BALL, J.M., KNOPS, R.J. & MARSDEN, J.E. (1978) – Two examples in nonlinear elasticity. *Proc. Conf. on Nonlinear analysis, Besançon, 1977*. Springer Verlag, Berlin, pp. 41-49.
- BAMBERGER, Y. (1981, 1997) – *Mécanique de l'ingénieur*. Hermann, Paris, 1981 (vol. 1 & 2), 1997 (vol. 3 & 4).
- BELLET, D. & BARRAU, J.J. (1990) – *Cours d'élasticité*. Cépaduès éditions, Toulouse.
- BELTRAMI, E. (1886) – Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série IV, **VII**.
- BELTRAMI, E. (1892) – Osservazioni sulla Nota precedente. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 141-142.
- BEREST, P. (1997) *Calcul des variations*. Ellipses, Paris.
- BOEHLER, J.P. (1978) – Loi de comportement anisotrope des milieux continus. *J. Mécanique*, **17**, 2, 153-190.
- BOEHLER, J.P. & SAWCZUCK, A. (1977) – On yielding of oriented solids. *Acta mechanica*, **27**, 185-206.
- BONNET, M. (1999) – *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley, Chichester.
- BONVALET, M. (1992) – *Les principes de la mécanique*. Masson, Paris.

- BOUSSINESQ, J. (1885) – *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent dans ces solides des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur*. Gauthier-Villars, Paris.
- BROUSSE, P. (1981) – *Mécanique analytique : puissances virtuelles, équations de Lagrange, applications*. Vuibert, Paris.
- BRUN, E.A., MARTINOT-LAGARDE, A. & MATHIEU, J. (1968) – *Mécanique des fluides*. Dunod, Paris.
- de BUHAN P., DORMIEUX L., & SALENÇON J. (1998) – Modélisation multipolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions. *C.R. Ac. Sc. Paris*, **326**, IIb, 163-170.
- BUI, H.D. (1970) – Évolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques. *Mémoires de l'artillerie française, Sciences et techniques de l'armement*, **1**, 141-165.
- BUI, H.D. (1978) – *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris.
- CHADWICK, P. (1999) – *Continuum Mechanics : Concise Theory and Problems*. Dover, New York.
- CHUNG, T.J. (1996) – *Applied Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge UK.
- CIARLET, P.G. (1986) – *Élasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris.
- CIARLET, P.G. (1988) – *Mathematical Elasticity*, vol. I. North-Holland, Amsterdam.
- CIARLET, P.G. & GEYMONAT, G. (1982) – Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible. *C.R. Ac. Sc. Paris, Série A*, **295**, 423-426.
- COIRIER, J. (1997) – *Mécanique des milieux continus. Concepts de base*. Dunod, Paris.
- COLEMAN, B.D. (1964) – On thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**, 230-254.
- COLEMAN, B.D. (1964) – Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**, 1-46.
- COLEMAN, B.D. & NOLL, W. (1959) – On the thermostatics of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **4**, 97-128.
- COLEMAN, B.D. & OWEN, D.R. (1974) – A mathematical foundation for thermodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **54**, 1-104.
- COLONNETTI, G. (1960) – *L'équilibre des corps déformables*. Dunod, Paris.

- COSSERAT, E. & COSSERAT, F. (1909) – *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris.
- COURBON, J. (1971) – *Résistance des matériaux*. Dunod, Paris.
- COURBON, J. (1972) – *Calcul des structures*. Dunod, Paris.
- COUSSY, O. (1995) – *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley, Chichester.
- DAUTRAY, R. & LIONS, J.L. (2000) – *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- DAVET, J.L. (1985) – Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire : confrontation de modèles et de travaux expérimentaux. *Ann. Ponts et Chaussées*, **35**, 2-33.
- DUVAUT, G. (1990) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- EIRICH, F.R. (1956, 1967) – *Rheology : Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1956 (vol. 1), 1958 (vol. 2), 1960 (vol. 3), 1967 (vol. 4).
- ERINGEN, A.C. (1962) – *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, New York.
- ERINGEN, A.C. (1967) – *Mechanics of continua*. John Wiley, New York.
- FILONENKO-BORODICH, M. (1965) – *Theory of Elasticity*. Dover, New York.
- FRANÇOIS, D., PINEAU, A. & ZAOUÏ, A. (1991, 1993) – *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991 (vol. 1), 1993 (vol. 2).
- FREUDENTHAL, A.M. (1966) – *Introduction to the Mechanics of Solids*. John Wiley, New York.
- FREY, F. (1990) – *Analyse des structures et milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- FROCHT, M.M. (1941, 1948) – *Photoelasticity*. John Wiley, New York, 1941 (vol. 1), 1948 (vol. 2).
- FUNG, Y.C. (1994) – *A First Course in Continuum Mechanics*. 3rd ed. Prentice Hall.
- GEIRINGER, H. (1937) – Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. *Mem. Sc. Math.*, **86**, Gauthier-Villars, Paris.
- GERMAIN, P. (1962) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- GERMAIN, P. (1973) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- GERMAIN, P. (1973) – La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *J. Mécanique*, **12**, 2, 236-274.
- GERMAIN, P. (1986) – *Mécanique*. Ellipses, Paris.

- GERMAIN, P. & MULLER, P. (1980) – *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris ; 2^{ème} éd. 1995.
- GORDON, J.E. (1988) – *The New Science of Strong Materials*. Princeton Univ. Press, Princeton.
- GREEN, A.E. & ADKINS, J.E. (1970) – *Large elastic deformations*. 2nd ed. Clarendon Press, Oxford.
- GREEN, A.E. & ZERNA, W. (1954) – *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, Oxford.
- GURTIN, M.E. (1972) – The linear theory of elasticity. *Handbuch der Physik*. IV a/2, Springer.
- GURTIN, M.E. (1981) – *Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York.
- HALPHEN, B. & SALENÇON, J. (1987) – *Élasto-plasticité*. Presses de l'ENPC, Paris.
- HASHIN, Z. & SHTRICKMAN, S. (1963) – A variational approach to the theory of the elastic behavior of mutiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 2, 127-140.
- HEYMAN, J. (1998) – *Structural analysis. A historical approach*. Cambridge Univ. Press, Cambridge U.K.
- HIBBELER, R.C. (1997) – *Structural Analysis*. 3rd edn., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- HIBBELER, R.C. & FAN S.C. (1997) – *Engineering Mechanics, Statics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- HJELMSTAD, K.D. (1997) – *Fundamentals of Structural Mechanics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- JOHN, F. (1972) – Uniqueness of non-linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains. *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**, 1972, 617-634.
- KÖTTER, F. (1903) – Die Bestimmung des Druckes an gekrümmeten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. *Berl. Akad. Bericht*, 229.
- LAMÉ, G & CLAPEYRON, E. (1828) – Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, sc. math. & phys., **4**, 463-562, Bachelier, Paris, 1834.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1967) – *Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, Moscou.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1994) – *Mécanique des fluides*. Ellipses, Paris.
- LEKHNITSKII, S.G. (1963) – *Theory of Elasticity of a Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day, San Francisco.

- LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J.L. (1985) – *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- LE TALLEC, P. (1981) – *Les problèmes d'équilibre d'un corps hyperélastique incompressible en grandes déformations*. Th. D. Sc. Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.
- LE TALLEC, P. & ODEN, J.J. (1981) – Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies. *J. Elasticity*, **11**, 341-358.
- LIN, T.H. (1968) – *Theory of Inelastic Structures*. John Wiley, New York.
- LOVE, A.E.H. (1944) – *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.
- LUBLINER, J. (1990) – *Plasticity Theory*. Macmillan, New York.
- MAISONNEUVE, O. (1973) – *Sur le Principe de Saint Venant*. Th. D. Sc., Univ. Poitiers.
- MALVERN, L.E. (1969) – *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall.
- MANDEL, J. (1966) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris.
- MANDEL, J. (1973) – Équations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids and Structures*, **9**, 6, 725-740.
- MANDEL, J. (1974) – *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*. Éditions scientifiques de Pologne, Varsovie.
- MANDEL, J. (1978) – *Propriétés mécaniques des matériaux*. Eyrolles, Paris.
- MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1978) – Topics in the mathematical foundations of elasticity. *Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium vol.2*. Pitman, London, pp. 30-285.
- MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1983) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1994) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, New York.
- MASE, G.E. (1970) – *Theory and problems of Continuum Mechanics*, Schaum's outline series. McGraw-Hill, New York.
- MIKHLIN, S.G. (1964) – *Variational Methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press, Oxford.
- MOREAU, J.-J. (1966) – *Fonctionnelles convexes*. Séminaire Jean Leray, n° 2 (1966-1967), 1-108.

- VON MISES R. (1945) – On Saint Venant's Principle. *Bull. Amer. Soc.*, **51**, 555-562.
- MONTÁNS, F. J. (2002) – Graphical Relationship among Lamé Ellipsoid and Mohr's Circles. A Graphical View of Mohr's Circles. *J. Eng. Mech.*, **128**, 3, 371-375.
- MORERA, G. (1892) – Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 137-141.
- MULLER, P. (1990) – *Résistance des structures*. Hermès, Paris.
- MURNAGHAN, F.D. (1951) – *Finite Deformation of an Elastic Solid*. John Wiley, New York.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1953) – *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.
- NECAS, J. & HLAVÁČEK, I. (1981) – *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies, an Introduction*. Elsevier, Amsterdam.
- ODEN, J.T. (1972) – *Finite Elements of Nonlinear Continuum*. McGraw-Hill, New York.
- ODEN, J.T. (1979) – Existence theorems for a class of problems in non-linear elasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, **69**, 51-83.
- OGDEN, R.W. (1972) – Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. Roy. Soc. London, A*, **328**, 567-583.
- OGDEN, R.W. (1997) – *Non-linear elastic deformations*. Dover, New York.
- ONSAGER, L. (1968) – *The motions of ions : principles and concepts*. Nobel Lecture.
- PALAMÁ, A. (1976) – On Saint Venant's Principle in Three-dimensional Elasticity. *Meccanica*, **11**, 2, 98-101.
- PERSOZ, B. (1969) – *La rhéologie*. Masson, Paris.
- PRAGER, W. (1961) – *Introduction to Mechanics of Continua*. Gin & Co, New York.
- PRIGOGINE, I. (1968) – *Introduction à la thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Dunod, Paris.
- QUÉRÉ, Y. (1988) – *Physique des matériaux*. Ellipses, Paris.
- QUÉRÉ, Y. (1998) – *Physics of Materials*. Gordon & Breach.
- SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1853) – Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, etc. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, sc. math & phys., **14**, 233-560, Paris, 1856.

- SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1863) – Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope. *J. Math. Pures et Appliquées*, 2^e série, VIII, 257-295 et 353-430.
- SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1864) – *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées par NAVIER*, 3^{ème} édition avec notes et appendices, Dunod, Paris, 1864.
- SALENÇON, J. (1977) – *Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics*. John Wiley, Chichester.
- SALENÇON, J. (1983) – *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris.
- SALENÇON, J. (1983) – *Viscoélasticité appliquée au calcul des structures*. Presses de l'ENPC, Paris.
- SALENÇON, J. (1990) – An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **9**, 5, 477-500.
- SALENÇON, J. (2002) – *de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture*. Les éditions de l'École polytechnique & Ellipses diffusion, Paris.
- SALENÇON, J. (2013) – *Yield Design*. ISTE Ltd, London UK & John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ.
- SEGEL, L.E. (1987) – *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover, New York.
- SMITH, J.O. & CHANG K.L. (1953) – Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **75**, 157-166.
- SOKOLOVSKI, V.V. (1960) – *Statics of soil media*. Butterworths Sci. Publ., London.
- SOLOMON, L. (1968) – *Élasticité linéaire*. Masson, Paris.
- SOUTHWELL, R.V. (1941) – *An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. Oxford Univ. Press, Oxford.
- STERNBERG, E. (1954) – On Saint Venant's Principle. *Quart. Appl. Math.*, **11**, 393-402.
- STERNBERG, E. & ROSENTHAL, F. (1952) – The elastic sphere under concentrated loads. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **74**, 413-421.
- STOKER, J.J. (1968) – *Nonlinear Elasticity*. Gordon and Breach, New York.
- SUQUET, P. (1981) – Approach by homogenization of some linear problems in solid mechanics, *Proc. CNRS Int. Symp. 319 "Plastic Behavior of anisotropic solids"*. CNRS éd., Paris, pp. 77-117.

- SUQUET, P. (1982) – Une méthode duale en homogénéisation : application aux milieux élastiques. *J. Mec. Th. & Appl.*, numéro spécial, 79-98.
- SZABO, I. (1974) – Die Geschichte der Materialkonstanten der linearen Elastizitätstheorie homogener isotroper Stoffe. *Die Bautechnik*, **51**, 1-8.
- THUAL, O. (1997) – *Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables*. Cépaduès éditions, Toulouse.
- TIMOSHENKO, S. (1947) – *Théorie de la stabilité élastique*. Béranger, Paris.
- TIMOSHENKO, S. (1983) – *History of Strength of Materials*. Dover, New York.
- TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1951) – *Theory of Elasticity*. Mac Graw-Hill, New York.
- TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1961) – *Théorie de l'élasticité*. Béranger, Paris.
- TOUPIN, R.A. (1965) – Saint Venant's Principle. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **18**, 83-96.
- TRUESDELL, C. (1966) – *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- TRUESDELL, C. (1968) – *Essays in the History of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- TRUESDELL, C. (1977) – *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Academic Press, New York.
- TRUESDELL, C. & NOLL, W. (1965) – The non-linear field theories of Mechanics. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.
- TRUESDELL, C. & TOUPIN, R.A. (1960) – The classical field theories. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.
- UGURAL, A.C. & FENSTER, S.K. (1995) – *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- VALENT, T. (1979) – Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **60**, 165-181.
- VALID, R. (1977) – *La Mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. Eyrolles, Paris.
- VILLAGIO, P. (1997) – *Mathematical models for elastic structures*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- WAGONER, R.H. & CHENOT, J.L. (1997) – *Fundamentals of Metal Forming*. John Wiley, New York.
- WANG, C.C. (1971) – A new representation theorem for isotropic functions. Parts I & II. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **36**, 1970, 162-223 ; corrigendum, **43**, 392-395.

- WANG, C.C & TRUESDELL, C. (1973) – *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Groningen.
- WASHIZU, K. (1975) – *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 2nd edn. Pergamon Press, Oxford.
- WINEMAN, A.S. & PIPKIN, A.C. (1964) – Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **17**, 184-214.
- YANG, W.H. (1980) – A Useful Theorem for Constructing Convex Yield Functions. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **47**, 2, 301-303.
- YOUNG, T. (1807) – A Course of lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Londres.
- ZANABONI, O. (1937) – Dimostrazione generale del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 117-121.
- ZANABONI, O. (1937) – Valutazione dell'errore máximo cui dá luogo l'applicazione del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 595-601.
- ZANABONI, O. (1937) – Sull'approssimazione dovuta al principio del de Saint Venant nei solidi prismatici isotropi. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **26**, 340-345.
- ZIEGLER, F. (1991) – *Mechanics of Solids and Fluids*. Springer Verlag, Vienne.
- ZIEGLER, H. (1977) – *Introduction to Thermodynamics*. Elsevier, Amsterdam.
- ZIENKIEWICZ, Z.O. (1973) – *La méthode des éléments finis*. Ediscience, Paris.

Index alphabétique

Les numéros indiqués renvoient aux chapitres, annexes et paragraphes correspondants.

A

Abstraite

Configuration –, I.3.7.

Accélération –, I.3.6 ; III.4.3.

Action

Loi des – s mutuelles, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.

Principe d'– locale, VII.1.1.

Principe de l'– et de la réaction, IV.1.1 ; IV.6.4.

AIRY

Fonction d'–, An III.2.8 ; An III.3.4.

Allongement unitaire, II.3.2 ; II.5.2.

Taux d'–, III.3.4.

Anisotrope

Matériau –, VII.2.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 à Ex.VII.8 ; Ex.IX.6.

Anneau, Ex.XI.7 ; Ex.XI.8 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5.

Appuis, XI.4.2 ; XI.4.4 ; XI.4.6 ; Ex.XI.6 ;

Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4 ; Ex.XII.7 ; Ex.XII.9.

ARCHIMÈDE

Théorème d'–, Ex.V.4.

Arcs, XI.2.1 ; XI.3.2 ; XI.3.11 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.6 ; XII.2.7.

Articulation, XI.4 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.6 ; Ex.XI.11 ; Ex.XI.12 ; XII.4 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.9 ; Ex.XII.10.

Assemblages, XI.4.3 à XI.4.6 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.6.

Autocontrainte

Champ d'–, V.3.13 ; V.4.2 ; Ex.VI.12.

Champ d'– pour le problème, X.6.1 ; X.7.3 ; X.7.4 ; XI.4.5.

Champ d'– pour le système, VIII.2.2 ; VIII.3.5 ; VIII.3.6 ; VIII.7.7 ; X.1.1 ; X.6.1 ; X.7.3 ; XII.2.6.

Autoéquilibrée

Distribution d'efforts intérieurs –, IV.3.4 ; XI.4.5 ; XI.4.6 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.

Axe neutre, IX.3.3 ; IX.4.4 ; IX.5.2.

B

Base, An I.2.3.

Changement de –, An I.3.2 ; An I.5.9. – *duale*, An I.2.3 ; An I.5.3.

BELTRAMI

Équations de –, VIII.6.2 ; IX.2.2 ; IX.3.2. *Équation de* – MICHELL *bidimensionnelle*, An III.2.7.

BERNOULLI

Jakob ; Johann ; Daniel –, II.6. *Théorème de* –, Ex.V.9.

BETTI

Théorème de –, X.5.4 ; X.8.3 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

Bilan

Formules de –, III.4.4. *Méthode du* –, III.4.4.

Bilatérale

Liaison –, VIII.1.4.

BOUSSINESQ

Tenseurs des contraintes de –, V.4.2 ; Ex.VII.9.

BRESSE

Formules de – NAVIER, Ex.XI.5 ; XII.3.2 ; XII.3.3.

C

Câbles, XI.2.10 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.6.

CASTIGLIANO

Théorème de \neg , X.8.1; X.9; XII.3.2; XII.3.3;
XII.4.1; Ex.XII.4; Ex.XII.5; Ex.XII.7.

CAUCHY

Tenseur de \neg , II.3.1.
Tenseur des contraintes de \neg , V.3.5; VI.

Célérité, III.4.4.

Cercles

– *de MOHR*, VI.3.
– *de MOHR des déformations*, Ex.II.7.
– *principaux*, VI.3.

Chargement

– *évanouissant*, X.8.1.
Paramètres de \neg , X.7; X.8; Ex.X.1 à Ex.X.7.

Choc

– *thermique*, VIII.4.2; VIII.4.3; VIII.5.3;
VIII.6.3.
Onde de \neg , III.4.4; III.5.1; IV.7.7; V.3.9;
V.3.10.

Cinématiquement admissible

Champ de déplacement \neg , VIII.4.2; VIII.5;
X; XI.4.6; Ex.XI.5; Ex.XI.9; Ex.XI.11 à
Ex.XI.13; XII.3.3; XII.4.2; Ex.XII.1;
Ex.XII.2; Ex.XII.9.

Cisaillement

Contrainte de \neg , VI.2.2.
Ligne de \neg , VIII.7.7.
Module de \neg , VII.5.3.

Cission, VI.2.2.

– *maximale*, VI.3.4; VI.4.3.
– *octaédrale*, VI.2.8; VI.4.4.
– *simple*, VI.3.5; VIII.7.5; VIII.7.7.

CLAUPEYRON

Formule de \neg , X.5.2; X.5.3; X.8.3; Ex.X.1 à
Ex.X.3; Ex.X.5 à Ex.X.9.

CLAUSIUS-DUHEM

Inégalité de \neg , VII.3.2; VII.3.3; VII.4.2;
VII.4.3.

COLONNETTI

Théorème de \neg , X.8.3.

Compatibilité

– *des déformations thermiques*, II.6.4;
Ex.II.9; Ex.II.10; Ex.IX.7; Ex.XII.2;
Ex.XII.6; Ex.XII.9.
– *des données statiques*, VIII.1.2; VIII.4.2;
X.3.1; X.4.1; XI.2.6; XI.2.8; XI.3.7;
XI.4.5.

Conditions de \neg , II.6; III.3.7; III.3.9; IV.3.4;
V.3.13; V.4.2; VIII.6.1; X.4.1; XI.4.6;
Ex.XI.4; Ex.XI.5; Ex.XI.9; Ex.XI.11 à
Ex.XI.13; XII.3.3; XII.4.2; Ex.XII.1;
Ex.XII.2; Ex.XII.6 à Ex.XII.8. An III.2.5;
An III.3.4.

Complaisances élastiques

Tenseur des \neg , X.1.6; Ex.X.6.

Comportement

Loi de \neg , VII.1; VII.2.1.
– *thermoélastique*, VII; VIII; IX; X; XII.

Composantes

– *d'un produit tensoriel*, An I.3.5.
– *d'un tenseur*, An I.3.1.

Compression

– *avec frottement*, Ex.X.7.
– *simple*, VI.3.5; IX.2; Ex.IX.3; Ex.IX.5 à
Ex.IX.8; X.5.3.
– *triple*, VI.3.5.

Conditions aux limites, VIII.1.2 à VIII.1.4;

VIII.2.2; VIII.4.2; VIII.5.1; VIII.6.1;
VIII.7.3; VIII.8; Ex.VIII; IX; Ex.IX;
X.1.1; X.2.2; X.3.1; X.4.2; X.7.2;
Ex.X.5 à Ex.X.7.

Conduction

Inégalité de la \neg , VII.4.2; VIII.1.2.
Loi de FOURIER de la \neg , VII.4.2; VIII.1.2.

Configuration, I.2.3; I.3.7.

Conservation

– *de l'énergie*, VII.3.1.
– *de la masse*, III.5.
– *de la quantité de mouvement*, IV.7.3;
V.3.10.

Console

Poutre \neg , XII.4.

Continuité

– *du milieu*, I.1.
Équation de \neg , III.5.1.
Hypothèse de \neg , I.3.2; I.3.3.

Contraction

– *d'un tenseur*, An I.4; An I.5.

Contrainte, V.3; V.4

– *équivalente*, VI.4.4.
– *normale*, VI.2.2.
– *plane*, An III.3.
– *tangentielle*, VI.2.2.

- *s initiales*, VII.5.2; VII.5.4; Ex.VII.7.4; VIII.2.2; VIII.3.4 à VIII.3.6; VIII.7.7; X.1.1; X.3.7; X.5; X.8.3.
- *s principales*, VI.2.6.
- *s résiduelles*, VIII.2.2.
- Couple* –, V.5.3.
- Fonction de* –, VIII.7.3; An III.2.8; An III.3.4.
- Méthode des* –, VIII.6; VIII.7.6; Ex.VIII.1; Ex.VIII.2; Ex.VIII.4; Ex.VIII.5; Ex.VIII.7; IX.2; à IX.5; Ex.IX.3; Ex.IX.4; Ex.IX.6; X.1.2; X.4.1; An III.2.5; An III.3.
- Vecteur* –, V.3.5; V.5.3; VI.2.
- Contravariance, An I.1.1; An I.3.2; An I.5.
- Convention de signe
 - *sur les contraintes*, VI.2.3.
- Convexité, VII.4.2; VII.5.5; X.1.5; X.2 à X.9.
- Corotationnelle
 - Dérivée* –, VI.5.3; Ex.VII.12.
- Cosinus directeurs, VI.2.5.
- COSSERAT
 - Continus de* –, V.5.
- COULOMB
 - Critère de* –, Ex.VI.9; Ex.VI.10.
 - Frottement de* –, Ex.XI.2.
- Couple
 - *de contrainte*, V.5.3.
 - *de torsion*, VIII.7; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7; Ex.IX.10; Ex.X.1; Ex.X.8; Ex.X.9; XI.3.11; XII.2.5 à XII.2.7; XII.3.4; Ex.XII.4.
- Courbure, Ex.II.10; IX.3.3; IX.4.4.
- Covariance, An I.1.1; An I.3.2; An I.5.
- Critères
 - *de limite d'élasticité*, VI.4; Ex.VI.3 à Ex.VI.6; Ex.VI.8 à Ex.VI.11; Ex.VI.13; VIII.7.7; Ex.VIII.5; Ex.VIII.6; IX.2.4; IX.2.5; IX.3.4; IX.6.4.
- Critique
 - Force* – d'EULER, Ex.XII.10.
- Curvilignes
 - Milieux* –, XI; XII.
- D**
- Décomposition
 - *d'un tenseur*, An I.3.
- Décomposition polaire, II.3.4; II.4.5.
- Déformation
 - *du milieu curviligne*, XII.2.2; XII.2.7.
 - *plane*, An III.2.
 - *pure*, II.3.4.
 - Taux de* –, III.2.2; III.3.3 à III.3.9; Ex.III.3.1 à Ex.III.3.3; V.3.13; VII.3.1; VII.4.6.
- Déformations
 - Tenseur des* – de GREEN-LAGRANGE, II.3.3; II.4.3; VII.3.3; VII.4.
 - Tenseur des* – linéarisé, II.5.2; III.3.6; VII.5; VIII; IX; X.
 - *thermiques*, Ex.II.9; Ex.II.10; Ex.VI.12; Ex.IX.3; Ex.IX.7.
- Déformée
 - *de la fibre moyenne*, IX.3.3.
 - *de la poutre*, XII.3.6.
- Déplacement, II.4.4; XII.2.2.
 - Fonction de* –, VIII.5.4; IX.6.3; IX.7.3.
 - Méthode des* – s, VIII.1.3; VIII.5; VIII.7.2; Ex.VIII.3; Ex.VIII.6; IX.6; IX.7; Ex.IX.1; Ex.IX.2; Ex.IX.5; Ex.IX.7 à Ex.IX.10; X.1.2; X.4.1; An III.2.4.
 - Distributeur du* –, XII.2.2.
- Dérivée particulière, III.2.1; III.3.2; III.4.
 - *d'un flux*, III.4.6.
 - *d'un vecteur matériel*, III.2.1; III.3.2.
 - *d'un volume matériel*, III.2.1; III.3.5.
 - *d'une circulation*, III.4.5.
 - *d'une fonction de point*, III.4.1; III.4.3.
 - *d'une intégrale de volume*, III.4.4; III.5.3.
 - *du tenseur des contraintes*, VI.5.1.
- Déterminant
 - *d'un tenseur*, An I.3.3; An I.5.7.
- Déviateur
 - *des contraintes*, VI.2.8; VI.4.3; VI.4.4; Ex.VI.1; VII.5.4; X.5.1.
 - *des déformations*, VII.5.4; X.5.1.
- Dilatation, II.3.2.
 - *s principales*, II.3.2.
 - *volumique*, I.3.2; II.2.3; II.4.2.
- Coefficient de – thermique, VII.5.3; VII.5.6; XII.2.6; XII.3.5; Ex.XII.2; Ex.XII.8; Ex.XII.9.
- Taux de* – volumique, III.3.5.
- Tenseur des* – s, II.3.1; An I.5.2; An I.5.7.
- Directions principales, An I.5.10.
 - *de la déformation*, II.3.
 - *des contraintes*, VI.2.6.
 - *du taux de déformation*, III.3.4; III.3.5.

Directrice

Courbe –, XI; XII.

Discontinuité

- *de la tension*, XI.2.7.
- *des efforts intérieurs*, XI.3.8.
- *du champ de contrainte*, V.3.9; VIII.1.1; VIII.4.2; VIII.4.3; VIII.5.3; VIII.6.3; X.1.1.
- *du champ de déformation*, VIII.4.2; VIII.4.3; VIII.5.3; VIII.6.3; X.4.2.
- *du champ de vitesse réel*, III.4.4; III.5.1; IV.7.6; V.3.9; V.3.11.
- *du champ de vitesse virtuel*, V.2.7; V.3.8; XI.2.9; XI.3.10.

Dislocation-vis, Ex.X.9.

Dissipation, VII.3.2; VII.4.2; VII.4.3.

Distributeur, IV.5; V.5.3; XI.3; XI.4; XII.

– *tensoriel*, IV.5; V.5.3.

Dérivée d'un –, IV.5.5; XI.3.5.

Gradient d'un –, IV.5.5; V.5.3.

Divergence

– *d'un champ de tenseurs*, An I.6.3.

Formule de la –, III.4.4; V.2.4; V.3.3; V.4.2; V.5.3; An I.6.3.

Domaine initial d'élasticité, VI.4.1; Ex.VI.3 à

Ex.VI.5; VII.2.2; VIII.2.3; VIII.7.7; Ex.VIII.5; Ex.VIII.6; IX.2.4; IX.2.5; IX.3.4; IX.6.4; Ex.XII.3.

Dynamique

Équations de la –, V.2.4; V.3.3; V.3.7; V.3.9; V.3.14; V.4.2; VIII.1.1; VIII.2.2.

Loi fondamentale de la –, IV.1.1; IV.2.2; IV.6.3; V.1; V.2.6; V.3.4.

E

Effort

- *normal*, IX.5.1; XI.2.10; XI.3.11 à XI.3.13; XI.4.7; XII.2.5; XII.3.2.
- *tranchant*, IX.5.3; XI.3.11 à XI.3.13; XI.4.7; XII.2.5.

Efforts

- *extérieurs*, IV; V.2.2; V.3.1; V.5.3; XI.2.3; XI.3.4.
- *intérieurs*, IV; V.2.3; V.3.2; V.3.6; V.5; XI.2.4; XI.2.6; XI.3.5; XI.3.7.

Élancement, VIII.8; IX.2.3; IX.3.3; Ex.IX.2;

XI.1; XI.3.11; XI.3.12; XII.2.5; Ex.XII.10.

Élasticité, VII; VIII; IX; X; XII.

– *plane*, An III.

Limite d'–, VIII.7.7; Ex.VIII.5; Ex.VIII.6; IX.2.4; IX.2.5; IX.3.4; IX.6.4.

Éléments finis

Méthode des –, VIII.4.4; X.4.2.

Encadrement, X.3.5; X.5.2; X.5.3; Ex.X.5 à Ex.X.8.

Encastrement, XI.4.2 à XI.4.4; Ex.XI.9; XII.4; Ex.XII.6; Ex.XII.9.

Énergie

- *complémentaire*, X.3.2.
 - *élastique de contrainte*, X.3.2; X.3.3; X.5.1; X.5.2; X.8.1; XII.2.5 à XII.2.7; Ex.XII.8.
 - *élastique de déformation*, X.2.2; X.2.3; X.5.1; X.5.2.
 - *élastique*, X.5.2.
 - *interne*, VII.3.1; VII.3.3.
 - *libre*, VII.3.2; VII.3.3; VII.4.2 à VII.4.5; VII.5.2 à VII.5.5.
 - *potentielle*, X.2.2; X.3.2; X.3.5.
- Équation de l'*–, VII.3.1; VII.3.2.
- Théorème de l'*–, X.8; XII.3.2; XII.3.3; XII.4; Ex.XII.1; Ex.XII.2; Ex.XII.4 à Ex.XII.7.
- Théorème de l'– cinétique*, IV.7.5; V.3.11; VII.3.1.

Entropie, VII.3.2.

Équilibre

Équation d'–, IV.3.4; V.5.3; XI.2.5; XI.2.8; XI.3.6; XI.3.9; XII.3.4; XII.3.5; XII.3.6;

Euclidien

Espace –, An I.5.

EULER

Force critique d'–, Ex.XII.10.

Théorème d'–, IV.7.4; IV.7.6; V.3.10.

Eulérienne

Description –, I.4; III.3 à III.5.

Évolution

– *thermoélastique*, VIII.1; VIII.2; VIII.3.1.

Extension

– *simple*, Ex.II.1.

Taux d'–, III.3.4.

Extensométrie, II.7.3; Ex.II.8.

F

Facette, V.3.5; V.5.3; VI.

Facettes conjuguées, VI.2.4.

Fermeture

Conditions de $-$, II.6.3; VIII.6.1; Ex.VIII.6.

Fibre, VIII.7.2; IX.3.3; IX.3.4; IX.4; IX.5.2.

– moyenne, IX.3.3; XII.2.5.

Fils, XI.2; Ex.XI.1; Ex.XI.2; Ex.XI.9; XII.1;

Ex.XII.6.

Flambement, Ex.XII.10.

Flèche, XII.4.1.

Flexion

– circulaire, IX.3; IX.4; X.7.4.

– composée, IX.5; Ex.X.2.

– déviée, IX.4.

– normale, IX.3.

Moment de $-$, IX.3 à IX.5; Ex.X.2; XI.3.11; XII.2.5.

Fluides, V.2.5.

Fonction

– de charge, VI.4.1.

– de contrainte, VIII.7.3; An III.2.8; An III.3.4.

– de déplacement, VIII.5.4; IX.6.3; IX.7.3.

– de gauchissement, VIII.7.2 à VIII.7.6; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7; IX.2.5; Ex.IX.10; Ex.X.8.

Force critique

– d'EULER, Ex.XII.10.

Forces

– de masse, V.2.2; V.3.1.

– surfaciques, V.2.2; V.3.1.

– de volume, V.2.2; V.3.1.

Méthode des $-$, X.6.3; X.8.2.

Formulation faible

– des conditions de compatibilité, III.3.9; IV.3.4; V.3.13; V.4.2; X.4.1.

– des équations de la dynamique, V.3.14; X.4.1.

FOURIER

Loi de $-$, VII.4.2; VIII.1.2.

FRÉNET

Formules de $-$, XI.2.6; XI.4.7; XII.3.4.

Trièdre de $-$, XI.2.6.

Frottement, Ex.X.7; Ex.XI.2.

G

Galiléen

Référentiel $-$, IV.1.1; IV.2.3; IV.4.4; V.1; VIII.1.1.

Gauchissement, VII.7.2 à VIII.7.6; Ex.VIII.5 à VIII.7; Ex.IX.10; Ex.X.8; XII.2.5.

GEIRINGER

Équations de $-$, Ex.III.5.

Glissement

– de deux directions orthogonales, II.3.2; II.5.2.

– double, Ex.II.3.

– simple, Ex.II.2; Ex.II.6.

Taux $-$, III.3.4.

Gradient

– d'un champ de distributeurs, IV.5.5; V.5.3.

– d'un champ de tenseurs, II.4.1; II.5.3; An I.6.2.

– d'un champ de torseurs, IV.5.5.

– du champ de vitesse, III.2.1; III.3.2.

– de température, Ex.II.9; Ex.II.10; VII.4.2; VIII.1.2; VIII.4.3; VIII.5.2; VIII.6.2; Ex.IX.7; Ex.XII.8; Ex.XII.9.

– d'une transformation, II.4.1.

GREEN, VII.6.

Tenseur des déformations de $-$ LAGRANGE $-$, II.3.3; II.4.3; VII.3.3; VII.4; VIII.1.2; VIII.1.3.

H

HADAMARD

Relations de $-$, III.4.4; VIII.4.2.

HELMOLTZ

Énergie libre de $-$, VII.3.2.

Théorème de $-$, Ex.III.7.

HENCKY

Équation de $-$, Ex.VI.8.

HERTZ

Problème de $-$, VIII.2.2.

Hessien, X.1.5.

Homogène

Transformation $-$, II.2; II.3.

HOOKE

Loi de $-$, VII.2.4.

Houle

– trochoïdale, Ex.I.4.

Hyperstatité

Degré d' $-$, IV.3.4; X.6.1; X.8.2; XI.4.5; XI.4.6; Ex.XI.13; XII.3.3.

Hyperstatique

Inconnue $-$, X.6.1; XI.4.5; XII.4.2;

Ex.XII.1; Ex.XII.2; Ex.XII.6; Ex.XII.7.

Hypostatique

Problème –, X.6.1; XI.4.5; XI.4.7;
Ex.XI.6.

I

Incompressible

Matériau –, II.4.2; Ex.II.2; Ex.II.6; III.3.5;
Ex.III.1 à Ex.III.5; VII.4.3; VII.4.6;
Ex.VII.3; Ex.VII.4; Ex.VII.9 à Ex.VII.11;
Ex.IX.8 à Ex.IX.10; Ex.X.7.

Inégalité

– *de* CLAUSIUS-DUHEM, VII.3.2; VII.3.3;
VII.4.2; VII.4.3.
– *fondamentale*, VII.3.2.

Inertie de torsion, VIII.7.3; Ex.VIII.5 à

Ex.VIII.7; Ex.X.8; XII.2.5 à XII.2.7;
XII.3.4; Ex.XII.4.

Inextensible

Matériau –, VII.4.3; Ex.VII.5.

Inopérant

Tenseur –, VII.4.3; VII.4.6; Ex.VII.3;
Ex.VII.5.

Instabilité

– *élastique*, Ex.XII.10.

Intrinsèque

Dérivée –, VI.5.2; Ex.VII.12.

Invariants

– *d'un tenseur du 2^{ème} ordre*, An I.3.3;
An I.4.6; An I.5.7; An I.5.10.
– *du tenseur des contraintes*, VI.2.7; VI.4.2;
VI.4.4.
– *du tenseur des déformations*, VII.4.5;
VII.5.3; Ex.VII.1 à Ex.VII.4.

Isostatique

Problème –, X.6.1; XI.4.5; Ex.XI.7;
Ex.XI.8; XII.3.3; XII.4.1; Ex.XII.4;
Ex.XII.5.

Isotrope

Matériau –, VI.4.2 à VI.4.4; VII.4.5;
VII.5.3; Ex.VII.1 à Ex.VII.4; Ex.VII.10;
VIII.5.2; VIII.6.2; VIII.7; Ex.VIII.1 à
Ex.VIII.3; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7; IX;
Ex.IX.1 à Ex.IX.5; Ex.IX.7 à Ex.IX.10;
X.2.3; X.3.3; X.5.1; Ex.X.1 à Ex.X.5;
Ex.X.7 à Ex.X.9; An III.
Matériau transversalement –, VII.5.7;
Ex.VII.6; Ex.VIII.4; Ex.IX.6.

Isotropie de l'espace, VI.4.2; VI.5.2; VII.4.1.

J

Jacobien, I.3.2.

JAUMANN

Dérivée de –, VI.5.3; Ex.VII.12.

K

KELVIN

Théorème de Lord –, Ex.III.7.

KIRCHHOFF

Tenseur des contraintes de PIOLA –,
V.4.1; VII.3.3; VII.4; VII.5; Ex.VII;
VIII.1.2; VIII.1.3; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

KÖTTER

Equations de –, Ex.VI.11.

KRONECKER

Symbole de –, An I.2.3.

L

LAGRANGE

Multiplicateurs de –, VII.4.3; VII.4.5;
VII.4.6; Ex.VII.3 à Ex.VII.5; VIII.1.2;
VIII.1.3; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
Tenseur des contraintes de PIOLA –, V.4.2.
Tenseur des déformations de GREEN –,
II.3.3; II.4.3; VII.3.3; VII.4; VIII.1.2;
VIII.1.3.

Lagrangienne

Description –, I.3; II; III.2.

LAMÉ

Coefficients d'élasticité de –, VII.5.3;
VII.5.5.
Constante de –, VII.5.3.

LEGENDRE-FENCHEL

Transformée de –, VII.4.2; X.1.6; X.3;
X.4.1; X.5.

Lemme du tétraèdre, VII.3.1.

Liaison, VIII.1.4; X.6.

– *interne*, VII.4.2; VII.4.3; VII.4.5; VII.4.6;
Ex.VII.3 à Ex.VII.5; VIII.1.2; VIII.1.3;
Ex.IX.8 à Ex.IX.10; X.2.5; X.3.6.
– *parfaite*, VII.4.3.

Ligne

– *d'émission*, I.3.5.
– *de courant*, I.4.3.

Linéarisation, VII.5 ; VIII.2 ; XII.2 ; XII.3.1.

Loi

- des *actions mutuelles*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.
- *fondamentale de la dynamique*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1 ; V.2.6 ; V.3.4.

M

Maillages, X.4.2.

Masse

- *volumique*, III.5.1.
- Conservation de la* –, III.5 ; VIII.1.1 ; VIII.2.3.

Matériel

- Domaine* –, I.3.2.
- Vecteur* –, II.2.2 ; II.4.2 ; III.2.1 ; III.3.2.

MAXWELL-BETTI

- Théorème de réciprocité de* –, X.5.4 ; X.8.4 ; X.10 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

MENABREA

- Théorème de* –, X.8.2.

Méthode

- des *contraintes*, VIII.6 ; VIII.7.6 ; Ex.VIII.1 ; Ex.VIII.2 ; Ex.VIII.4 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.7 ; IX.2 à IX.5 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.4 ; Ex.IX.6 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.5 ; An III.3.
- des *déplacements*, VIII.1.3 ; VIII.5 ; VIII.7.2 ; Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.6 ; IX.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10.
- *énergétiques*, X ; Ex.X.
- *s variationnelles*, VIII.4.4 ; X.1.3 ; X.4.2.

MICHELL

- Équations de* –, VIII.6.2.

Microstructure, I.5 ; V.5.

Milieu continu, I.

Minimum

- de *l'énergie complémentaire*, X.3.2 ; X.4.1 ; X.5.2 ; X.5.3 ; X.6.2 ; X.8.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.
- de *l'énergie potentielle*, X.2.2 ; X.4.1 ; X.4.2 ; X.5.2 ; X.5.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

VON MISES

- Critère de* –, VI.4.4 ; Ex.VI.4 ; Ex.VI.6 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Module

- de *cisaillement*, VII.5.3.
- *s d'élasticité*, VII.5.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 ; Ex.VII.8 ; Ex.X.6.
- *élastique de compression*, VII.5.4 ; VII.5.5 ; Ex.X.5 ; Ex.X.6.
- de *YOUNG*, VII.5.3.

MOHR

- Cercles de* –, Ex.II.6 ; VI.3.
- Plan de* –, VI.3.1.
- Représentation de* –, VI.3 ; VI.4.3.

Moiré

- Méthodes de* –, II.7.3.

Moment, IV.1.1 ; IV.5.4 ; V.3.6.

- de *flexion*, IX.3 à IX.5 ; Ex.X.2 ; XI.3.11 ; XII.2.5.
- de *torsion*, XI.3.11 à XI.3.13.
- *fléchissant*, XI.3.11 à XI.3.13 ; Ex.XI.6 à Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.2.5 à XII.2.8 ; XII.3 ; XII.4 ; Ex.XII.4 à Ex.XII.10.

Mouvement

- *rigidifiant*, III.3.7 ; III.3.8.
- *virtuel*, IV ; V.
- *virtuel rigidifiant*, IV.4 ; IV.5 ; IV.6 ; V.2.4 ; V.3.2 ; V.5.3.
- Représentation du* –, I.

N

Naturel

- État initial* –, VII.5.4 ; VIII.2.2 ; VIII.3.4 ; VIII.3.6 ; VIII.4 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX ; X.5 ; X.8.3 ; Ex.X ; XII.2.5 ; XII.2.6.

NAVIER

- Équation de* –, VIII.5.2 ; VIII.6.3 ; VIII.7.3 ; An III.2.4.
- Formules de BRESSE* –, Ex.XI.5 ; XII.3.2.

NAVIER-BERNOULLI

- Condition de* –, IX.3.13 ; XI.4.1 ; Ex.XI.5 ; XII.2 ; XII.4.
- Hypothèse de* –, IX.3.3.

Nœud, X.4.2.

Numériques

- Méthodes* –, VIII.3.1 ; X.4.2.

O

Objectivité, I.2.4 ; II.4.6 ; III.3.11 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.3.15 ; VI.5.

Octaédrale

Cission –, VI.2.8.*Contrainte* –, VI.2.8.

Œdométrique

Essai –, Ex.VIII.3; Ex.X.6.Onde de choc, III.4.4; III.5.1; IV.7.7; V.3.9;
V.3.10.

Ordre

– *d'un tenseur*, An I.1.1.

Orthonormée

Base –, An I.5.3; An I.5.9.

Orthotrope

Matériau –, VII.5.7; Ex.VIII.4.

P

Parallélépipède

Raisonnement du –, V.2.5; V.3.6.

Paramètres

– *cinématiques*, X.7; X.8; Ex.X.1 à Ex.X.7.– *de chargement*, X.7; X.8; Ex.X.1 à Ex.X.7;

XII.4.1; Ex.XII.1; Ex.XII.3 à Ex.XII.5.

Permanent

Mouvement –, I.4.4; III.5.2.

Petites perturbations

Hypothèse des –, VIII.2 à VIII.8; Ex.VIII;

IX; Ex.IX.1 à Ex.IX.7; X; Ex.X; XII.2.3;

XII.2.5; XII.3.1; An III.

Petits déplacements

Hypothèse des –, VIII.2 à VIII.8; Ex.VIII;

IX; Ex.IX.1 à Ex.IX.7; X; Ex.X; XII.2.3;

XII.2.5; XII.3.1; An III.

Photoélasticité, Ex.VI.8; VIII.8.

PIOLA-KIRCHHOFF

Tenseur des contraintes de –, V.4.1;

Ex.V.14; VII.3.3; VII.4; VII.5; Ex.VII;

VIII.1.2; VIII.1.3; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

PIOLA-LAGRANGE

Tenseur des contraintes de –, V.4.2;

Ex.VII.9.

POISSON

Coefficient de –, VII.5.3; VII.5.5.

Potentiel minimum

Théorème du –, X.6.2; X.8.2; XII.3.3;

XII.4.2; Ex.XII.1; Ex.XII.2; Ex.XII.6;

Ex.XII.7; Ex.XII.9.

Potentiel thermodynamique, VII.4.2; X.1.6.

POYNTING

Effet –, Ex.IX.10.

Préchargé

État de référence –, VIII.3.6; X.3.7; XII.2.6.

Précontraint

État de référence –, VII.5.4; VIII.3.5; X.1 à
X.3; XII.2.6.

Pression, V.2.5.

Principes de minimum, X.2.2; X.3.2; X.4.1;

X.5.3; X.6.2; X.8.2; Ex.X.5 à Ex.X.9.

Principe de la thermodynamique

Premier –, VII.3.1.*Deuxième* –, VII.3.2.

Problème bien posé, VIII.1.3; VIII.3.3.

Produit

– *contracté*, An I.4.2; An I.5.– *tensoriel*, An I.2.

Propagation

Vitesse de –, III.4.4; III.5.1.

Puissance de déformation, V.3.12.

Puissances virtuelles

– *des efforts extérieurs*, IV; V.2.2; V.3.1;

V.5.3; XI.2.3; XI.3.4.

– *des efforts intérieurs*, IV; V.2.1; V.3.2;

V.5.3; XI.2.4; XI.3.5.

– *des quantités d'accélération*, - IV; V.2.1.– *des quantités de mouvement*, - IV.7.7.*Méthode des* –, IV; V; XI.2; XI.3.*Principe des* –, IV; V; X.1.4; XI.

Q

Quasi-naturel

État initial –, VII.5.4; VIII.2.2; X.1.1.

R

Réciprocité

– *des contraintes*, - VI.2.4.*Théorème de* –, X.5.4; X.8.3; X.10; Ex.X.3;

Ex.X.6.

Référentiel, I.2.2; VI.5.4.

– *galiléen*, IV.1.1; IV.2.3; IV.4.4; V.1;

VIII.1.1.

REISSNER

Principe de –, X.9.

Repère, I.2.2.

Représentation

- *s d'un tenseur*, An I.5.5; An I.5.7.
- Théorème de* –, VI.2.7; VI.4.2; VII.4.5; An I.5.7.

Résistance des matériaux, X.8.1; XII.2.7; XII.5.

Résultante, IV.1.1; IV.5.4; V.3.6.

Réversibilité, VII.3.2; VII.4.2; VII.4.3.

Rigidifiant

- Champ de déplacement* –, II.6.3; VIII.3.3; VIII.7.4; X.2.4; X.4.3.
- Mouvement* –, III.3.7; III.3.8.
- Mouvement virtuel* –, IV.4; IV.5; IV.6; V.2.4; V.3.2; V.5.3.

Rupture

- Calcul à la* –, Ex.VI.2; Ex.VI.13; XI.4.2; XI.4.4; XI.4.5; Ex.XI.11 à Ex.XI.13; Ex.XII.3.

S

SAINT-VENANT

- Principe de* –, VIII.8; IX.2.3; IX.3.3; Ex.IX.2; Ex.X.9.
- Problème de* –, IX.5.3.

Section

- *droite*, VIII.7.2; VIII.7.4; VIII.7.5; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7; IX.3 à IX.5; Ex.X.8; XI.3.2; XI.3.11; XI.3.12; XII.2.1; XII.2.2; XII.2.7.
- *transversale*, XI.3.1; XI.3.12; XI.3.13.

Semi-permanent

- Mouvement* –, I.4.5.

Sous-structuration, X.6.3; X.8.2.

Sphère

- *creuse sous pression*, Ex.VI.2; IX.6; X.7.4.

Stabilité, VII.5.5; VIII.3.3; X.1.6.

Stationnaire

- Fonctionnelle* –, X.4.1.
- Mouvement* –, I.4.4; III.5.2.

Statique

- *des fils*, XI.2; Ex.XI.1; Ex.XI.2.
- *des fluides*, V.2.5.
- *des poutres*, XI.3; Ex.XI.3; Ex.XI.4; Ex.XI.6 à Ex.XI.13.
- Loi fondamentale de la* –, IV.6.4.

Statiquement admissible

- Champ de contrainte* –, VIII.4.2; VIII.6; X.

Structures, XI.

- Calcul des* –, VIII.4.4; X.8.1; X.8.2; Ex.X.4; XII.2.7; XII.5.
- *planes*, XI.4.7; XII.3.5.

Superposition

- Principe de* –, VIII.3.4; IX.2.5; IX.4; IX.5; Ex.X.2; Ex.X.3; Ex.X.9; XII.2.5.

Surface libre, VI.3.5.

Symétries de la matière

- Respect des* –, VI.4.2; VII.1; VII.4.4; VII.4.5; VII.5.3; VII.5.7; Ex.VII.6 à Ex.VII.8.

Systèmes, IV.1.1; IV.2 à IV.4; IV.6; IV.7; V.2.2;

V.2.3; V.3.2; VII.3.1; VII.3.2; XI.2; XI.3.

Sous –, IV.1.1; IV.2 à IV.4; IV.6; IV.7;

V.2.2; V.2.3; V.3.2; VII.3.1; VII.3.2; XI.2; XI.3.

T

Taux

- *d'allongement unitaire*, III.3.4.
- *de déformation*, III.3.3.
- *de déformation lagrangien*, III.2.
- *de déformation virtuel*, V.3.2; XI.3.5.
- *de dilatation volumique*, III.3.5.
- *d'extension*, III.3.4.
- *d'extension virtuel*, XI.2.4.
- *de glissement de deux directions orthogonales*, III.3.4.
- *de rotation*, III.3.5.
- *de rotation virtuel*, V.3.2.

Température, VII.3.2; VII.4; VIII.

Gradient de –, Ex.XII.8; Ex.XII.9.

Variation de –, II.6.4; Ex.II.9; Ex.II.10; VII.5; VIII.4.3; Ex.IX.7; X; XII.2.6; XII.3.5; Ex.XII.2; Ex.XII.8; Ex.XII.9.

Tenseur

- *antisymétrique*, An I.3.4; An I.5.7.
- *décomposé*, An I.2.3; An I.5.6.
- *métrique*, An I.5.1.
- *sur un espace euclidien*, An I.5; An I.6.
- *sur un espace vectoriel*, An I.
- *symétrique*, An I.3.4; An I.5.7.
- *transposé*, An I.3.3; An I.5.7.
- Champ de* –, s, An I.6.

Tension, XI.2.10.

Tétraèdre

- Lemme du* –, VII.3.1.
- Raisonnement du* –, V.3.6.

Thermique

- Équation* –, VIII.1.2.
- Découplage du problème* –, VIII.3.1.

Thermodynamique, VII.3.

Thermoélasticité, VII; VIII; IX; X; XII.

Torseur, IV.5.

- *d'efforts extérieurs*, XI.3 à XI.5.
- *des efforts extérieurs*, IV.6.3; IV.7.3; IV.7.4; V.2.6; V.3.4; V.3.10; VIII.1.2; VIII.4.2; X.3.1; X.4.1.
- *d'efforts intérieurs*, XI.3 à XI.5.
- *des efforts intérieurs*, IV.6.3; V.3.2.
- *des quantités d'accélération*, IV.6.3; V.2.6; V.3.4.
- *des quantités de mouvement*, IV.7.2; V.3.
- *tensoriel*, IV.5; V.5.3.
- Dérivée d'un* –, IV.5.5; XI.3.6.
- Gradient d'un* –, IV.5.5.

Torsion

- *élastique*, VIII.7; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7; Ex.IX.10; Ex.X.1; Ex.X.8; Ex.X.9; XII.2.5 à XII.2.7.
- Poutre en* –, XII.3.4; Ex.XII.4.

Tourbillon

- vecteur* –, III.3.5; Ex.III.7.
- *ponctuel*, Ex.II.6; Ex.III.3.

Trace, An I.3.3; An I.5.7.

Traction, VII.2.2; VII.5.3; VII.5.5; IX.2; IX.5; Ex.IX.8; X.5.3; X.7.4; Ex.X.2.

- Câble en* –, XI.2.10; Ex.XI.1; Ex.XI.2; Ex.XI.9; Ex.XII.6.

- Poutre en – compression*, Ex.XI.3; Ex.XI.4; Ex.XI.11; Ex.XI.12; XII.4.1; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

Trajectoire, I.3.4; I.4.2.

Transformation

- *finie*, II.1 à II.4; Ex.II.1 à Ex.II.6; VII.1 à VII.4; Ex.VII.2 à Ex.VII.12; VIII.1; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
- *homogène*, II.2; II.3.
- *homogène tangente*, II.4.1.
- *infinitésimale*, II.5.1; Ex.II.1 à Ex.II.3; Ex.II.6 à Ex.II.10; III.3.6; III.3.10; VII.5.4; Ex.VII.1; Ex.VII.12; VIII.2.1; VIII.7.2; IX.3.3; Ex.IX.10.
- *rigidifiante*, II.3.3; II.4.5; II.6.3; II.7.1.

Transport convectif, II.2; II.4.2.

Transposition, An I.3.3; An I.5.7.

Travaux virtuels

- Théorème des* –, X.1.4; X.2 à X.9; Ex.X.6; XII.2.3; XII.2.5.

Treillis, XI.4.5; Ex.XI.3; Ex.XI.4; Ex.XI.11; XII.4.1; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

TRESCA

- Critère de* –, VI.4.3; Ex.VI.2; Ex.VI.3; Ex.VI.5; Ex.VI.8; Ex.VI.13; VIII.7.7; Ex.VIII.5; Ex.VIII.6; IX.2.4; IX.2.5; IX.3.4; IX.6.4.

TRUEDELLE

- Dérivée de* –, V.5.2; Ex.VII.12.

Triaxial

- État de contrainte* –, VI.3.5.

Tube cylindrique, VIII.7.5; Ex.VIII.6; IX.7; Ex.IX.1; Ex.IX.2; Ex.IX.5; An III.2.9; An III.3.5.

U

Unicité

- *en élasticité*, VIII.1.3; VIII.3.3; X.2.4; X.3.4; XII.3.1; Ex.XII.10; An III.2.6.

Unilatérale

- Liaison* –, VIII.1.4; XI.4.2; Ex.XII.7.

V

Valeurs principales, An I.5.10.

Variance, An I.1.1.

Vecteur-contrainte, V.3.5; V.5.3; VI.2; VI.3.

Vecteur-position, I.3.1.

Virtuel

- Champ de déplacement* –, X.1.4; XII.2.3.
- Champ de vitesse* –, IV.2.3; IV.2.5; IV.5.1; V.2.1; V.5.3.
- Mouvement* –, IV; V.2.1; V.5.3; XI.2.2; XI.3.3; XI.3.12.
- Puissances* – les, IV; V; X.1.4; XI.2; XI.3.
- Travaux* – s, X.1.4; X.7.2; Ex.X.6; XII.2.3.

Vitesse, I.3.6.

- *d'extension*, III.3.4.
- *de déformation*, III.3.3.

Volume

- Invariance du* –, II.4.2; Ex.II.2; Ex.II.6; III.3.5; Ex.III.1 à Ex.III.5; VII.4.3; VII.4.6; Ex.VII.3; Ex.VII.4; Ex.VII.9 à Ex.VII.11; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
- Variation de* –, I.3.2; II.2.3; II.4.2; III.3.5; VII.5.4; VII.5.5; Ex.X.5; Ex.X.6.

Y

YOUNG

- Module de* –, VII.5.3; VII.5.5; IX.2; X.5.3.

Dans la même collection

BIOLOGIE

Introduction à la génétique moderne. P. Monget et R. A. Veitia. 324 pages - ISBN 978-2-7302-1620-3.

Bioinformatique. Génomique et post-génomique - F. Dardel et F. Képès - 250 pages - ISBN 2-7302-0927-1

CHIMIE

Chimie moléculaire des éléments de transition - F. Mathey et A. Sevin - 300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

Les orbitales moléculaires dans les complexes - avec Exercices et Corrigés - Y. Jean
350 pages - ISBN 2-7302-1024-5

Chimie moléculaire, sol-gel et nanomatériaux - R. Corriu et Nguyen T.-A.
208 pages - ISBN 978-2-7302-1413-1

Introduction à la chimie quantique - P. Hiberty et Nguyen T.-A. - 320 pages - ISBN 978-2-7302-1485-8

INFORMATIQUE

Introduction à la théorie des langages de programmation - G. Dowek, J.-J. Lévy
112 pages - ISBN 978-2-7302-1333-2

Les principes des langages de programmation - G. Dowek - 176 pages - ISBN 978-2-7302-1526-8

Les démonstrations et les algorithmes : introduction à la logique et la calculabilité - G. Dowek - 200 pages -
ISBN 978-2-7302-1569-5

ÉCONOMIE

Introduction à la microéconomie - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8 - ISBN 978-2-7302-0722-5

Introduction à l'analyse macroéconomique - P.-A. Muet - 208 pages - ISBN 2-7302-1140-3

Économie de l'entreprise - J.-P. Ponssard, D. Sevy, H. Tanguy (2^e édition)
316 pages - ISBN 978-2-7302-1244-1

Corporate Social Responsibility? From Compliance to Opportunity - P. Crifo, J.-P. Ponssard - 298 pages -
ISBN 978-2-7302-1568-8

Économie du climat. Pistes pour l'après-Kyoto - J.-P. Ponssard et O. Godard - 314 pages
ISBN 978-2-7302-1576-3

MATHÉMATIQUES

Le problème de Kepler. Histoire et théorie - A. Guichardet - 102 pages - ISBN 978-2-7302-1596-1

Autour des inégalités isopérimétriques - Sous la direction de Alessio Figalli - 130 pages - ISBN 978-2-7302-1573-2

Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) - Nouvelle édition - P. Colmez - 678 pages -
ISBN 978-2-7302-1587-9

Transversalité, Courants et Théorie de Morse. Un cours de topologie différentielle (exercices proposés par François Labourie) - F. Laudenbach - 200 pages - ISBN 978-2-7302-1585-5

Groupes et représentations - D. Renard - 223 pages - ISBN 978-2-7302-1571-8

Milieux continus en transformations finies. Hyperélasticité, Rupture, Élastoplasticité - C. Stolz - 278 pages - ISBN 978-2-7302-1562-6

Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) - P. Colmez - 488 pages - ISBN 978-2-7302-1563-3

Cours d'analyse - J.-M. Bony - 272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

Calcul différentiel et intégral - F. Laudenbach - 220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - J.-M. Bony - 217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

Siméon-Denis Poisson. Les mathématiques au service de la science - Y. Kosmann-Schwarzbach, 550 pages - ISBN 978-2-7302-1584-8

Les théorèmes de Noether - Y. Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de L. Meersseman
180 pages - ISBN 2-7302-1138-1 (2^e édition)

Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations - Y. Kosmann-Schwarzbach
222 pages - ISBN 978-2-7302-1257-1 (2^e édition)

Algèbre corporelle - A. Chambert-Loir - 200 pages - ISBN 2-7302-1217-5

Calcul variationnel - J.-P. Bourguignon - 348 pages - ISBN 978-2-7302-1415-5

Introduction à la théorie de Galois - D. Hernandez et Y. Laszlo - 226 pages - ISBN 978-2-7302-1593-0

Aspects des systèmes dynamiques - XUPS1994-1996 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
238 pages - ISBN 978-2-7302-1560-2

Aspects de la théorie du contrôle - XUPS1999 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
208 pages - ISBN 978-2-7302-1530-5

Groupes finis - XUPS 2000 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

Pavages - XUPS 2001 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

La fonction zêta - XUPS 2002 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
206 pages - ISBN 2-7302-1011-3

Distributions - XUPS 2003 - Dans le sillage de Laurent Schwartz - N. Berline et C. Sabbah
(Comité éditorial) - 106 pages - ISBN 2-7302-1095-4

Graphes - XUPS 2004 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 84 pages - ISBN 2-7302-1182-9

Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes - XUPS2005 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 200 pages - ISBN 2-7302-1293-0

Théorie des jeux. Introduction à la théorie des jeux répétés - XUPS 2006 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1366-0

Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques - XUPS2007 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1418-6

Géométrie tropicale - XUPS2008 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 128 pages - ISBN 978-2-7302-1529-9

Les représentations linéaires et le grand théorème de Fermat - XUPS2009 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 140 pages - ISBN 978-2-7302-1566-4

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides - XUPS2010 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 118 pages - ISBN 978-2-7302-1578-7

Histoire de mathématiques - XUPS2011 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 118 pages - ISBN 978-2-7302-1595-4

Henri Cartan & André Weil mathématiciens du xx^e siècle - XUPS2012 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 190 pages - ISBN 978-2-7302-1610-4

Aléatoire - XUPS2013 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 130 pages - ISBN 978-2-7302-1622-7

Chaos en mécanique quantique - XUPS2014 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 156 pages - ISBN 978-2-7302-1631-9

Des problèmes à N corps aux Tokamaks - XUPS2015 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 88 pages - ISBN 978-2-7302-1643-2

Journal de l'École polytechnique. Mathématiques - Tome 1 - Année 2014 - 412 pages - ISBN 978-2-7302-1640-1

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1971 à 1992

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1993 à 2001

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2000-2001 - 400 pages - ISBN 2-7302-0834-8

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2001-2002 - 364 pages - ISBN 2-7302-0930-1

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2002-2003 - 390 pages - ISBN 2-7302-1041-5

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2003-2004 - 404 pages - ISBN 2-7302-1183-7

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2004-2005 - 404 pages - ISBN 2-7302-1221-3

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2005-2006 - 366 pages - ISBN 2-7302-1335-X

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2006-2007 - 444 pages - ISBN 978-2-7302-1414-8

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2008-2009 - 308 pages - ISBN 978-2-7302-1567-1

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2009-2010 - 342 pages - ISBN 978-2-7302-1613-5

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2011-2012 - 491 pages - ISBN 978-2-7302-1617-3

Séminaires Laurent Schwartz, EDP et applications - Année 2012-2013 - 356 pages - ISBN 978-2-7302-1626-5

Séminaires Laurent Schwartz, EDP et applications - Année 2013-2014 - 262 pages - ISBN 978-2-7302-1633-3

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Une exploration des signaux en ondelettes - S. Mallat - 654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

Promenade aléatoire - M. Benaïm et N. El Karoui - 316 pages - ISBN 2-7302-1168-3

Analyse numérique et optimisation - G. Allaire - 480 pages - ISBN 978-2-7302-1255-7

Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz - F. Dubois, B. Després - 208 pages - ISBN 2-7302-1253-1

Commande et optimisation de systèmes dynamiques - F. Bonnans et P. Rouchon - 286 pages - ISBN 2-7302-1251-5

Les outils stochastiques des marchés financiers. Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes - N. El Karoui et E. Gobet - 238 pages - ISBN 978-2-7302-1579-4

Simulation stochastique et méthodes de Monte-Carlo - C. Graham et D. Talay - 210 pages - ISBN 978-2-7302-1582-4

Aléatoire. Introduction à la théorie et au calcul des probabilités - S. Méléard - 280 pages - ISBN 978-2-7302-1575-6

Bases mathématiques de la théorie des jeux - R. Laraki, J. Renault, S. Sorin - 186 pages - ISBN 978-2-7302-1611-1

Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques : du linéaire au non-linéaire - E. Gobet - 258 pages - ISBN 978-2-7302-1616-6

Recherche opérationnelle : aspects mathématiques et applications - J.-F. Bonnans et S. Gaubert - 398 pages - ISBN 978-2-7302-1641-8

MÉCANIQUE

Dynamique de l'atmosphère et de l'océan - P. Bougeault et R. Sadourny - 312 pages - ISBN 2-7302-0825-9

Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes - A. Sellier - 175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

Mécanique des milieux continus - J. Salençon

Tome 1 - *Concepts généraux* - 376 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8 (avec CD-Rom)

Tome 2 - *Thermoélasticité* - 344 pages - ISBN 978-2-7302-1419-3 (avec CD-Rom)

Tome 3 - *Milieux curvilignes* - 154 pages - ISBN 978-2-7302-0962-5

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture - J. Salençon

(accompagné d'un CD-Rom réalisé par J. Salençon) - 266 pages - ISBN 978-2-7302-0915-1

Viscoélasticité pour le calcul des structures - J. Salençon - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1557-2

Fluides et Solides - E. de Langre - 130 pages - ISBN 978-2-7302-0833-8

Ondes acoustiques - A. Chaigne - 224 pages - ISBN 2-7302-0840-2

Stabilité des matériaux et des structures - C. Stolz - 206 pages - ISBN 2-7302-1076-8

Instabilités, Chaos et Turbulence - P. Manneville - 360 pages - ISBN 2-7302-0913-1

Vibrations des structures couplées avec le vent - P. Hémon - 144 pages - ISBN 2-7302-1332-5

Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis - M. Bonnet et A. Frangi

316 pages - 2-7302-1349-X

Dynamique et vibrations - E. de Langre et A. Chaigne - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1521-3

Modélisation et calcul des milieux continus - P. Le Tallec - 560 pages - ISBN 978-2-7302-1494-0

Poutres et arcs élastiques. P. Ballard et A. Millard - 312 pages - ISBN 978-2-7302-1561-9

Hydrodynamique de l'environnement. O. Thual - 328 pages - ISBN 978-2-7302-1564-0

Microhydrodynamique et fluides complexes. D. Barthès-Biesel - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1572-5

Sport Physics - Paris MMXII - Sous la direction de C. Clanet - 640 pages - ISBN 978-2-7302-1615-9

PHYSIQUE

Physique des Tokamaks - J.-M. Rax - 436 pages - ISBN 978-2-7302-1580-0

Semi-conducteurs : les bases de la théorie k.p - G. Fishman - 742 pages - ISBN 978-2-7302-1497-1

Énergie nucléaire - J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro - 340 pages - ISBN 2-7302-0901-8

Mécanique quantique - J.-L. Basdevant et J. Dalibard

(accompagné d'un CD-Rom de M. Joffre) 520 pages - ISBN 978-2-7302-0914-4

Problèmes quantiques - J.-L. Basdevant et J. Dalibard - 214 pages - ISBN 2-7302-1117-9

Principes de la cosmologie - J. Rich, adaptation française J.-L. Basdevant - 400 pages - ISBN 2-7302-0925-5

Introduction à la relativité - A. Rougé - 188 pages - ISBN 978-2-7302-0940-3

Relativité restreinte. La contribution d'Henri Poincaré - A. Rougé - 288 pages - ISBN 978-2-7302-1525-1

Introduction à la physique subatomique - A. Rougé - 448 pages - ISBN 2-7302-1231-0

Physique statistique et illustrations en physique du solide. - C. Hermann - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1022-5

Bases physiques de la plasticité des solides - J.-C. Tolédano - 264 pages - ISBN 978-2-7302-1378-3

Physique des électrons dans les solides. Structure de bandes, Supraconductivité et Magnétisme. H. Alloul - Tome 1 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1411-7

Physique des électrons dans les solides. Recueil d'exercices et de problèmes. H. Alloul

Tome 2 - 272 pages - ISBN 978-2-7302-1412-4

Achevé d'imprimer en mai 2016 sur les presses
du Centre Poly-Média de l'École polytechnique
Dépôt légal : 2^e trimestre 2016
N° ISBN 978 – 2 – 7302 – 1644 – 9. *Imprimé en France*