Signaux et Systèmes
Cours n°4

Mohamed CHETOUANI
Professeur des Universités
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
Sorbonne Université

mohamed.chetouani@sorbonne-universite.fr

Résumé cours 3

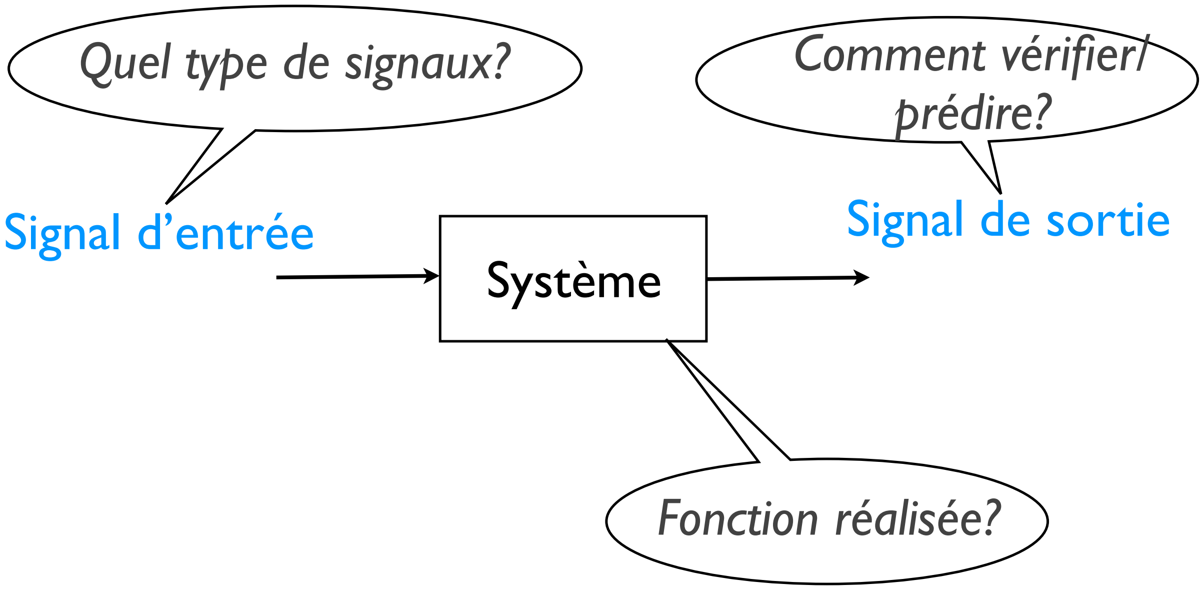
- Modélisation de la réponse d'un système par un produit de convolution
- Propriétés du produit de convolution
- Théorème de Plancherel
- Relation TF - Série de Fourier

Plan

- Corrélation de signaux
- Modulation

Introduction

- Quelles sont les questions liées à l'UE 3E100



Corrélation

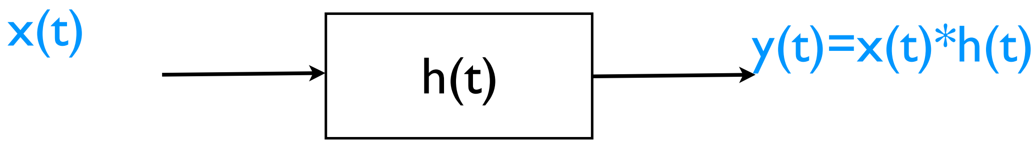
- Définition:
- «Comparaison» de deux signaux
- Soient x(t) et y(t) deux signaux à énergie finie, la fonction d'intercorrélation Cxy(τ) est définie par:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Corrélation

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

- *Attention à ne pas confondre avec le produit de convolution*



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

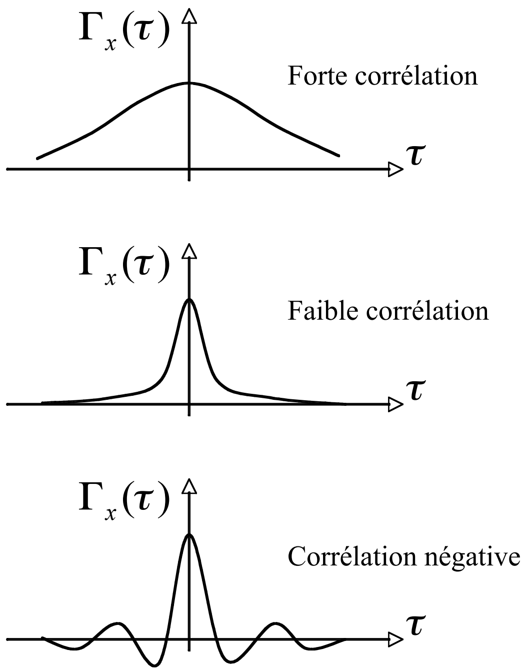
Corrélation

- L'intercorrélation mesure les similitudes en forme et en position des signaux.
- Ces similitudes peuvent évoluer au cours du temps τ
- Cxy(τ) restitue l'énergie d'interaction entre les signaux x(t) et y(t-τ).
- Si Cxy(τ)=0 on dit que les signaux x(t) et y(t) sont décorrélés

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Corrélation

- Interprétation graphique

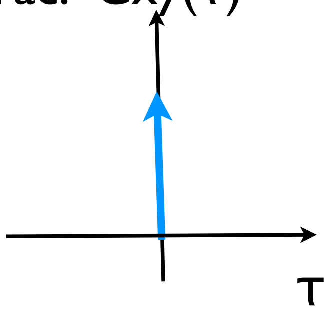


Corrélation

- Quel est le cas limite?

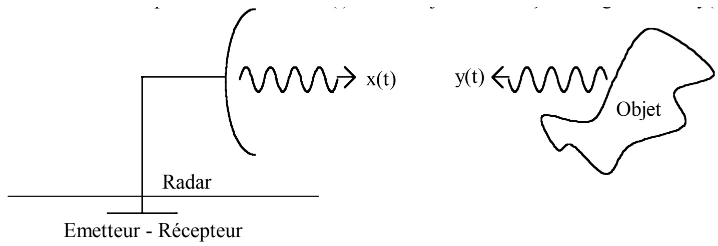
$$C_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$$

Dirac: Cxy(τ)



Corrélation

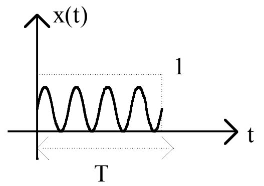
- Exemple 1:
- Un radar émet une onde sinusoïdale x(t) sur un objet fixe et reçoit le signal bruité y(t)

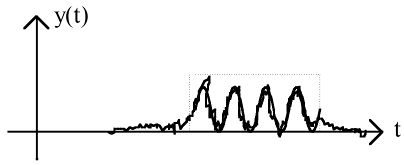


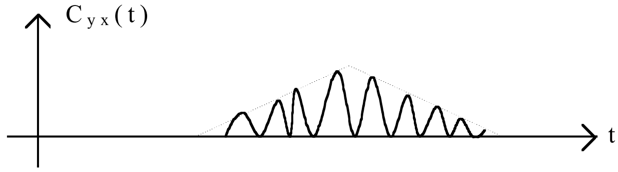
Calcul de la distance de l'objet

Corrélation

- Exemple 1:
- Estimation de la distance





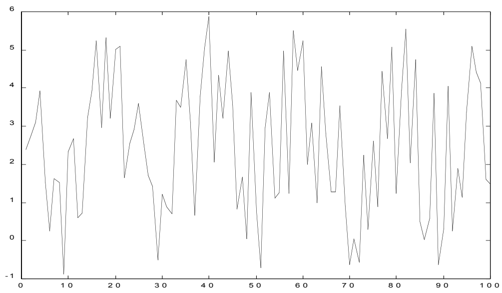


Le maximum τ_0 donne la distance à l'objet (v_0 vitesse de propagation de l'onde)

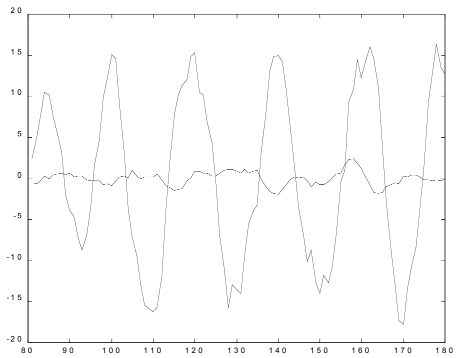
$$d = \frac{v_0 \tau_0}{2} \leftarrow \text{trajet Aller et Retour}$$

Corrélation

- Exemple 2:
- Détection de signaux périodiques dans un contexte bruité



Auto-corrélation



Corrélation

- Auto-corrélation: indicateur de la déformation d'un signal au cours du temps

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- L'auto-corrélation possède la dimension d'une puissance et

$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

est l'énergie totale

Propriétés

- La fonction d'intercorrélation vérifie la relation:

$$C_{xy}(\tau) = C^*_{yx}(-\tau)$$

Dem:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)\,dt \underset{t-\tau=t'}{\overset{\uparrow}{=}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t'+\tau)y(t')\,dt'\right]^* = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t')x^*(t'-(-\tau))\,dt'\right]^*$$

D'où:

$$C_{xy}(\tau) = C^*_{yx}(-\tau)$$

Si x(t) est réel, sa fonction d'autocorrélation est paire

Propriétés

- L'énergie totale E_x d'un signal x(t) est donné par:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = C_{xx}(0) > 0$$

- Le théorème de Cauchy-Schwartz conduit aux relations suivantes:

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0) \qquad \forall \tau$$

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) \qquad \forall \tau$$

Théorème de Wiener-Kintchine

- Soient x(t) et y(t) deux signaux à énergie finie. La TF de la fonction d'intercorrélation est égale à la densité interspectrale d'énergie (densité spectrale mutuelle)

$$TF[C_{xy}(\tau)] = S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

Théorème de Wiener-Kintchine

- Démonstration

$$TF[C_{xy}(\tau)] = S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

$$TF\left\{C_{xy}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \; = S_{xy}(f)$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau)\, dt\right] e^{-2\pi jf\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*\underset{\overset{\uparrow}{t'=t-\tau}}{(t-\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t')\, e^{+j2\pi ft'} dt'$$

$$= X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t')\, e^{-j2\pi ft'} dt'\right]^* = X(f)Y^*(f)$$

Théorème de Wiener-Kintchine

- TF de l'autocorrélation

$$TF[C_{xx}(\tau)] = S_{xx}(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Densité spectrale d'énergie

Relation convolution - corrélation

- Si Cxy(τ) est l'intercorrélation des signaux x(t) et y(t) alors :

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

$$TF\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f) = X(f)\ Y^*(f)$$

$$\text{d'où : } C_{xy}(\tau) = TF^{-1}\{S_{xy}(f)\} = x(t) * TF^{-1}\{Y^*(f)\}$$

$$TF^{-1}\{Y^*(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f)e^{j2\pi f\tau}df = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{j2\pi f(-\tau)}df\right]^*$$

$$= y^*(-\tau)$$

Cas des signaux à puissance moyenne finie

- Dans le cas de signaux réels à puissance moyenne finie, nous avons:

$$x(t) * y(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(u)y(t-u)du$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y(t-\tau)dt$$

- Et pour les signaux périodiques:

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(u)y(t-u)du$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y(t-\tau)dt$$

Exemple

- Autocorrélation d'un cosinus

$$x(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{(T)} cos(2\pi f_0 t) cos(2\pi f_0 (t-\tau))dt$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{(T)} cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)dt$$

Exemple

- Autocorrélation d'un cosinus

$$x(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{(T)} cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{(T)} cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) dt + \frac{1}{2T}\int_{(T)} cos(2\pi f_0 \tau) dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{(T)} cos(2\pi f_0 \tau) dt$$

$$= cos(2\pi f_0 \tau)\frac{1}{2T}\int_{(T)} dt = \frac{1}{2} cos(2\pi f_0 \tau)$$

Exemple

- Autocorrélation d'un cosinus

$$x(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

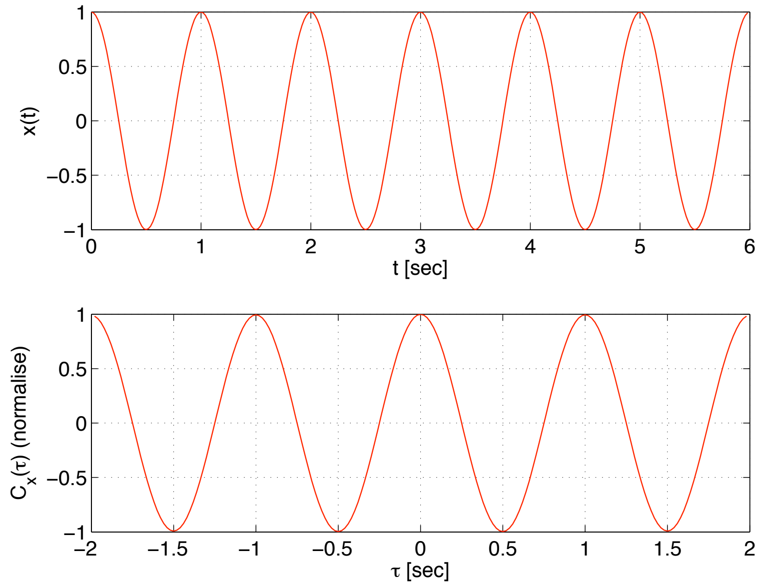
$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Puissance moyenne du signal:

$$C_{xx}(0) = \frac{1}{2}$$

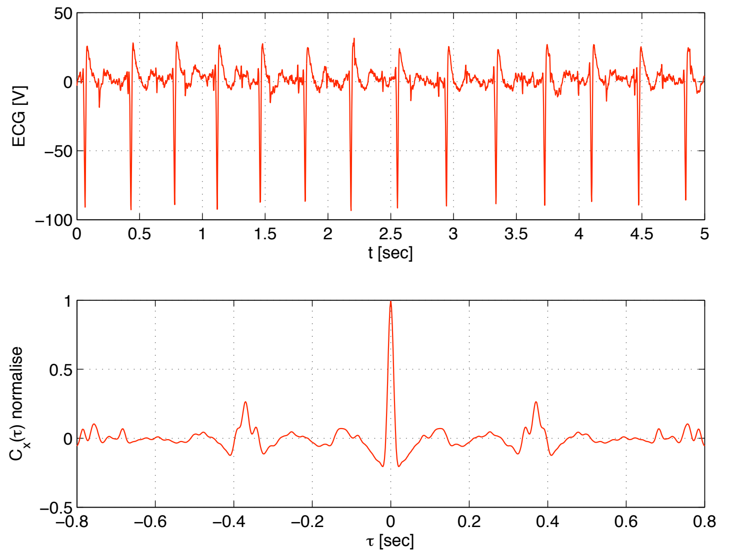
Exemple

- Autocorrélation d'un cosinus



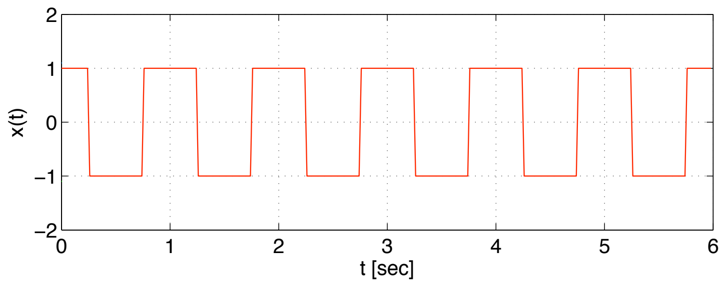
Exemple

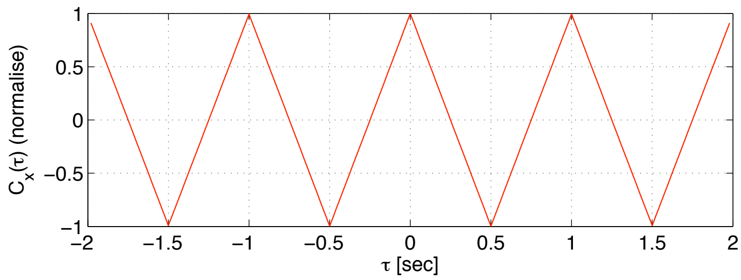
- Autocorrélation d'un signal ECG:
- Caractérisation de la période



V

- Forme de l'autocorrélation





Normalisation

- Exploitation du théorème de Cauchy-Schwartz

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0) \qquad \forall \tau$$

- Auto-corrélation normalisée:

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} \qquad 0 \leq \Gamma_{xx}(\tau) \leq 1$$

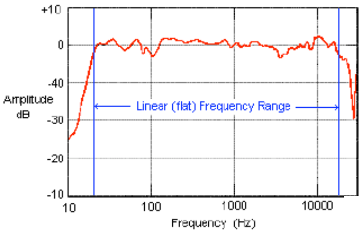
- Même opération pour l'intercorrélation:

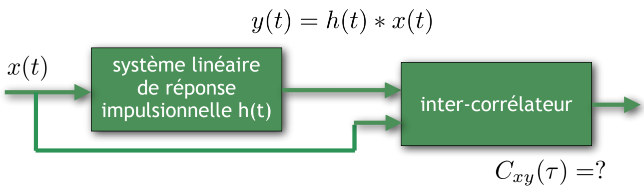
$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) \qquad \forall \tau$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}}$$

Application à la caractérisation de la réponse d'un système

- Considérons le système suivant:





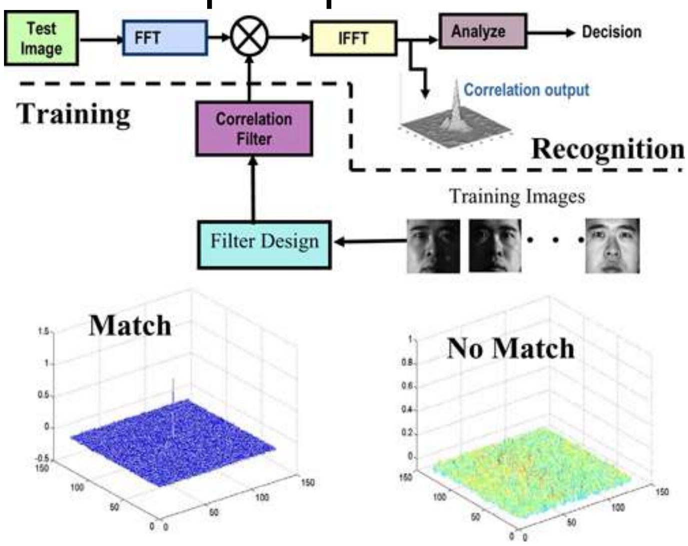
Application à la caractérisation de la réponse d'un système

- Effet du système sur la corrélation:

$$
\begin{aligned}
C_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\ x(t-\tau)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t) * x(t)](t)\ x(t-\tau)\ dt \\
&= h(\tau) * \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x(t-\tau)\ dt \\
&= h(\tau) * C_x(\tau)
\end{aligned}
$$

Application à la biométrie

- Schéma de principe

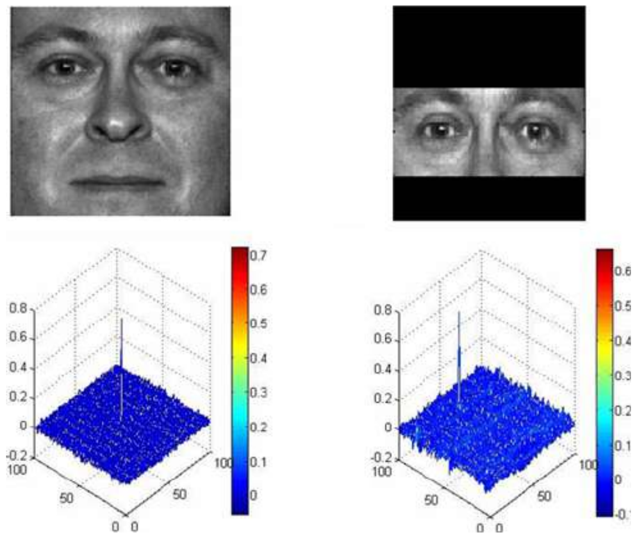


Correlation pattern recognition for biometrics

Vijayakumar Bhagavatula, Marios Savvides, DOI: 10.1117/2.1200604.0143

Application à la biométrie

- Exemples de corrélation



Correlation pattern recognition for biometrics

Vijayakumar Bhagavatula, Marios Savvides, DOI: 10.1117/2.1200604.0143

Modulation d'Amplitude

- Cas d'un signal sinusoïdal (message)
  - Principe: un signal V modulé en amplitude est un signal constitué par une porteuse sinusoïdale de fréquence fp dont l'amplitude est modifiée suivant une loi linéaire par le signal informatif s(t).
  - Exemple:

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Modulation d'Amplitude

- Cas d'un signal sinusoïdal (message)
  - La modulation d'amplitude consiste, dans le cas général, à calculer:

$$V = A[1 + m\cos(2\pi f_0 t)]\cos(2\pi f_p t + \phi)$$

- Et par développement:

$$V = A\cos(2\pi f_p t + \phi) + A\frac{m}{2}[\cos(2\pi(f_p - f_0)t + \phi) + \cos(2\pi(f_p + f_0)t + \phi)]$$

Modulation d'Amplitude

$$V = A\cos(2\pi f_p t + \phi) + A\frac{m}{2}[\cos(2\pi(f_p - f_0)t + \phi) + \cos(2\pi(f_p + f_0)t + \phi)]$$

- Le spectre se compose donc de 3 raies:
  - fp = onde de la porteuse
  - fp - f0 = raie de la bande latérale inférieure
  - fp + f0 = raie de la bande latérale supérieure
- La largeur spectrale occupée est de 2f0

Modulation d'Amplitude

$$V = A\cos(2\pi f_p t + \phi) + A\frac{m}{2}[\cos(2\pi(f_p - f_0)t + \phi) + \cos(2\pi(f_p + f_0)t + \phi)]$$

- m est un paramètre important de la modulation d'amplitude (souvent exprimé en %): Taux de modulation
- Forme de l'onde: Dans le cas où l'amplitude maximale du signal est égale à 1, l'amplitude positive du signal modulé varie de A[1+m] à 1[1-m], et l'amplitude négative de -A[1+m] à -A[1-m].

$$V = A[1 + m\cos(2\pi f_0 t)]\cos(2\pi f_p t + \phi)$$

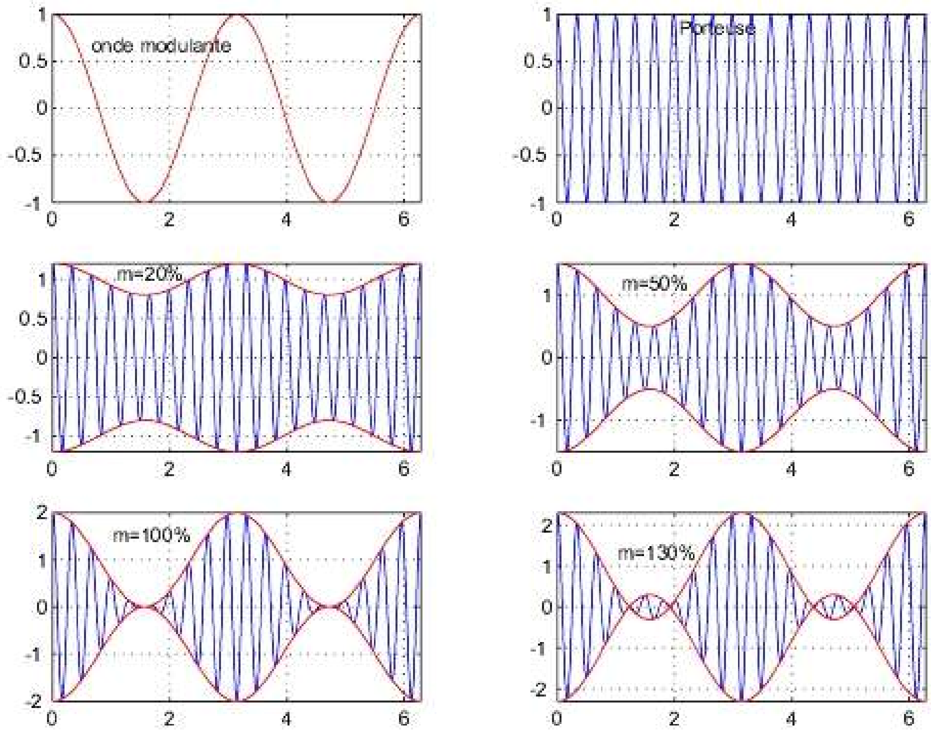
Modulation d'Amplitude

$$V = A[1 + m\cos(2\pi f_0 t)]\cos(2\pi f_p t + \phi)$$

- m est un paramètre important de la modulation d'amplitude (souvent exprimé en %): Taux de modulation
- m est défini par le rapport suivant:

$$m = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}}$$

Modulation d'Amplitude



Modulation d'Amplitude

- Cas général s(t) (périodique)
  - Dans ce cas, le signal s(t) peut s'exprimer suivant sa décomposition en série de Fourier:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cos(2\pi f_i t)$$

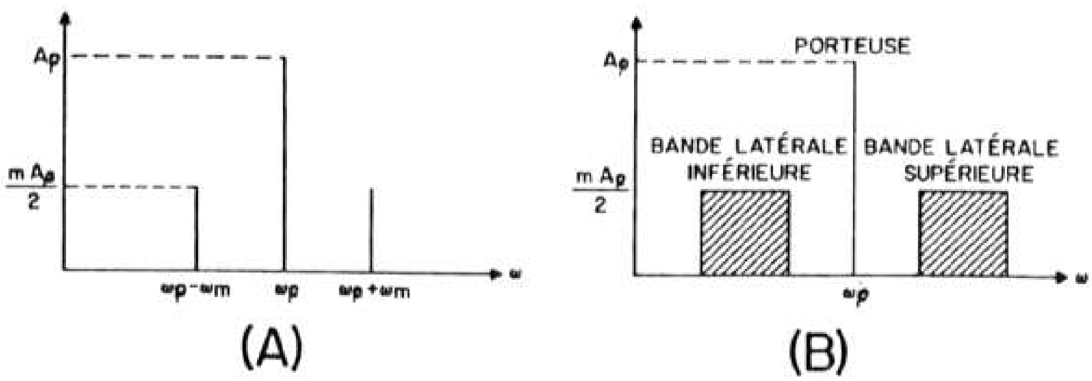
- La modulation s'écrit avec le même principe:

$$V = A[1 + \sum_{i=0}^{N} m_i \cos(2\pi f_i t)] \cos(2\pi f_p t + \phi)$$

Modulation d'Amplitude

- Bande de fréquence nécessaire:
  - Si l'on désire transmettre par un même canal plusieurs informations, l'écart minimal entre les porteuses doit être de 2 f0 ou 2fmax

$$V = A\cos(2\pi f_p t + \phi) + A\frac{m}{2}[\cos(2\pi(f_p - f_0)t + \phi) + \cos(2\pi(f_p + f_0)t + \phi)]$$



Exploitation du théorème de Plancherel

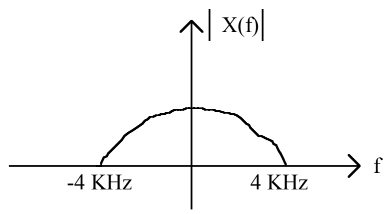
- Et dans le domaine de Fourier
  - Considérons le signal x(t) dont la bande passante est [-4kHz,4kHz]
  - On réalise la modulation suivante:
    $$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t)$$
- Dont la TF est:

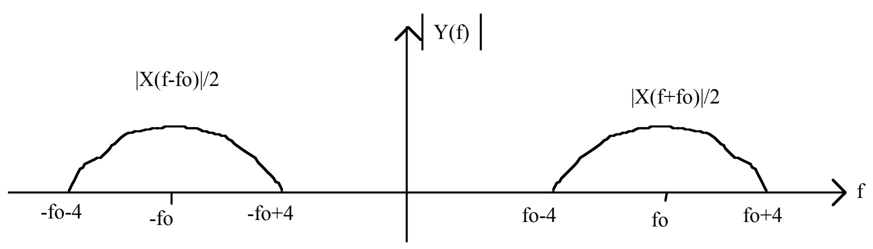
$$Y(f) = X(f) * \frac{[\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)]}{2}$$

$$Y(f) = \frac{[X(f - f_p) + X(f + f_p)]}{2}$$

Exploitation du théorème de Plancherel

- Illustration graphique:

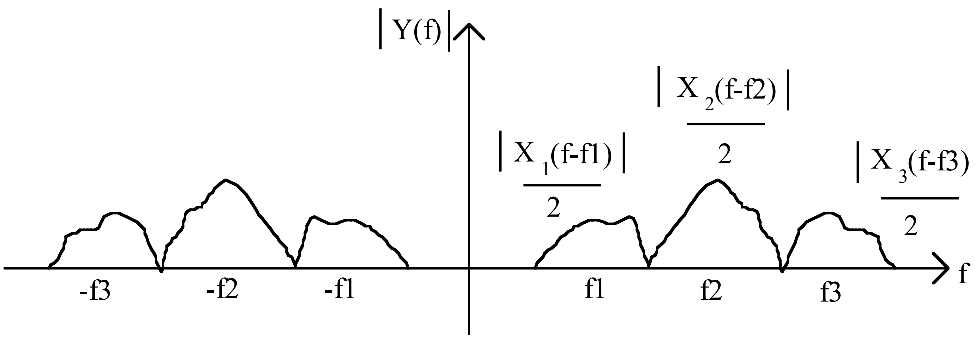




Exploitation du théorème de Plancherel

- Illustration graphique du multiplexage fréquentiel

$$y(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_1 t) + \,..\, + x_n(t)\cos(2\pi f_n t)$$



Puissance en modulation d'amplitude

- Puissance moyenne de l'onde porteuse:

$$P_p = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} V^2 dt$$

- Et pour une porteuse sinusoïdale: $P_p = \frac{A^2}{2}$

- Puissance crête de l'onde modulée en amplitude:
  - Puissance moyenne obtenue lorsque le signal modulant est maximum:

$$P_c = P_p[1+m]^2$$

- Puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude:
  - On montre que la puissance pour un signal modulant sinusoïdal est:

$$P_{mod} = P_p\left[1+\frac{m}{2}\right]^2$$

Puissance en modulation d’amplitude

- Réduction du bilan énergétique
  - Modulation sans porteuse

$$V = A\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_p t + \phi)$$

- Inconvénient: Perte de la fréquence de la porteuse. Le démodulateur ne dispose pas de cette fréquence.

Démodulation

- Processus identique à la modulation
  - Multiplication par la porteuse (démodulation synchrone)

$$V = [A\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_p t + \phi)]\cos(2\pi f_p t + \phi)$$

Démodulation

- Théorème de Plancherel
  - Multiplication par la porteuse (démodulation synchrone)

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t)$$

$$Y(f) = \frac{[X(f-f_p) + X(f+f_p)]}{2}$$

$$z(t) = y(t) cos(2\pi f_p t)$$

$$Z(f) = Y(f) * \frac{\delta(f-f_p) + \delta(f+f_p)]}{2}$$

Démodulation

- Théorème de Plancherel
  - Multiplication par la porteuse (démodulation synchrone)

$$Y(f) = \frac{[X(f-f_p) + X(f+f_p)]}{2}$$

$$Z(f) = Y(f) * \frac{\delta(f-f_p) + \delta(f+f_p)]}{2}$$

$$Z(f) = \frac{[Y(f-f_p) + Y(f+f_p)]}{2}$$

$$Z(f) = \frac{[X(f-f_p-f_p) + X(f+f_p-f_p) + X(f-f_p+f_p) + X(f+f_p+f_p)]}{4}$$

Démodulation

- Théorème de Plancherel
  - Multiplication par la porteuse (démodulation synchrone)

$$Z(f) = \frac{[X(f - f_p - f_p) + X(f + f_p - f_p) + X(f - f_p + f_p) + X(f + f_p + f_p)]}{4}$$

$$Z(f) = \frac{[2X(f) + X(f + 2f_p) + X(f - 2f_p)]}{4}$$

Comment retrouver X(f)??

Démodulation

- Théorème de Plancherel
  - Multiplication par la porteuse (démodulation synchrone)

$$Z(f) = \frac{[2X(f) + X(f + 2f_p) + X(f - 2f_p)]}{4}$$

Filtrage passe-bas: X(f)/2

Amplification x2=> X(f)

Résumé

- Corrélation de signaux:
  - Mesures de similitudes entre des signaux
  - Lien avec la convolution
- Introduction à la modulation