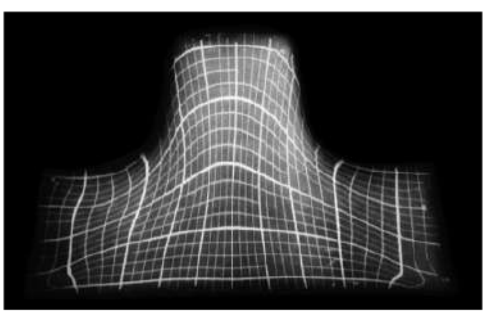
Licence Mécanique

Bases de la Mécanique des Milieux Continus

LU3ME004

Sujets de travaux dirigés et exercices préparatoires



Formage d'une pièce en aluminium (CEMEF) - Flow visualization, S.J. Kline, Stanford.

2019 - 2020

Pré-requis incontournables d'analyse vectorielle et matricielle

1. Soient deux champs de vecteurs $\underline{v}$ et $\underline{w}$ de composantes $v_i(x_1, x_2, x_3)$ et $w_i(x_1, x_2, x_3)$, avec $i = 1, 2, 3$ et deux matrices (3×3) $[\,A\,]$ et $[\,B\,]$ inversibles de composantes $A_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ et $B_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ avec $(i, j) = 1, 2, 3$ dans un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Savoir calculer et connaître les propriétés suivantes :
- *le produit scalaire $\underline{v} \,.\, \underline{w}$ et le produit vectoriel $\underline{v} \wedge \underline{w}$ des vecteurs $\underline{v}$ et $\underline{w}$, la norme $\|\underline{v}\|$ du vecteur $\underline{v}$.*
- *la transposée $[\,A\,]^T$ de la matrice $[\,A\,]$, son déterminant det $[\,A\,]$, sa trace Tr$[\,A\,]$, son inverse $[\,A\,]^{-1}$,*
- *le produit $[\,A\,]\,\underline{v}$ de la matrice $[\,A\,]$ par le vecteur $\underline{v}$, le produit $[\,A\,][\,B\,]$ des matrices $[\,A\,]$ et $[\,B\,]$,*
- *le produit $[\,A\,][\,A\,]^T$ pour une matrice $[\,A\,]$ symétrique et non symétrique, le produit $[\,A\,][\,A\,]^{-1}$,*
- *les développements de Tr$(\,[\,A\,]^T\,)$, Tr$(\,[\,A\,][\,B\,]\,)$, Tr$(\,[\,B\,][\,A\,]\,)$, Tr$(\,\lambda[\,A\,]\,)$ où λ est un scalaire réel,*
- *les développements de det $(\,[\,A\,]^T\,)$, det$(\,[\,A\,]^{-1}\,)$, det $(\,[\,A\,][\,B\,]\,)$, det $(\,\lambda[\,A\,])$.*

2. Soient le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$ et un champ de vecteurs $\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2, x_3)\,\underline{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\,\underline{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\,\underline{e}_3$.

Connaître les expressions générales dans le repère cartésien des opérateurs et grandeurs suivants :
- *le vecteur gradient de la fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\mathrm{grad}}f$,*
- *le laplacien de la fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$: Δf,*
- *la divergence du vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: div$\,\underline{v}$,*
- *le rotationnel du vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}$,*
- *le laplacien du vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$, $\underline{\Delta}\,\underline{v}$:*
- *la matrice gradient du vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}$,*
- *la différentielle d'une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$: $d\,f$.*

Etre à l'aise dans les calculs de dérivées partielles et le maniement des opérateurs en coordonnées cartésiennes.

Connaître les définitions intrinsèques (indépendantes du système de coordonnées) des opérateurs $\underline{\mathrm{grad}}f$, $\Delta\,f$, div$\,\underline{v}$.

3. Exercices d'auto-entrainement.
3.1. Soit $f(x_1, x_2, x_3)$ la fonction scalaire donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\,x_2 + x_3$ exprimée dans le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.
- *Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$.*
- *Donner l'expression de la différentielle totale $d\,f$ de la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$.*
- *Donner l'expression du vecteur gradient $\underline{\mathrm{grad}}f$.*
- *Donner l'expression du laplacien de la fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$.*
- *Calculer la norme du vecteur $\|\underline{v}\|$.*
- *Construire un vecteur $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$ unitaire (de norme 1) à partir du vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.*

3.2. Soit les champs de vecteurs $\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1\,x_2\,\underline{e}_1 + x_1^2\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$ et $\underline{w}(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1\,\underline{e}_2$ exprimés dans le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.
- *Calculer le produit scalaire des vecteurs $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$ et $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$.*
- *Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$ et $\underline{w}(x_1, x_2, x_3)$.*

- *Calculer la divergence du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer le rotationnel du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer le vecteur laplacien du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.
- *Calculer la matrice gradient du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.

3.3. Etablir pour une fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ *quelconque en développant les calculs en coordonnées cartésiennes les égalités suivantes :*

$$div\ (f\,\underline{v}) = f\,div\ \underline{v} + \underline{v}\,.\,\underline{grad}\,f, \qquad \underline{rot}\,(\,\underline{grad}\,f\,) = \underline{0}.$$

Calcul indiciel 1

1. Calculer :

$$\delta_{ii}, \qquad \delta_{ij}\,A_j, \qquad \delta_{ij}\,\delta_{jl},$$

δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker et $\underline{A}$ un champ de vecteurs.

2. $\underline{\underline{A}}$ étant un tenseur d'ordre 2 de composantes A_{ij}, ${}^T\underline{\underline{A}}$ sa transposée, écrire sous forme indicielle :

$$\text{trace}\,\underline{\underline{A}}, \quad (\text{trace}\,\underline{\underline{A}})^2, \quad \text{trace}\,(\underline{\underline{A}}\ {}^T\underline{\underline{A}}), \quad \text{trace}\,\underline{\underline{A}}^2, \quad \text{trace}\left[(\underline{\underline{A}}\ {}^T\underline{\underline{A}})^2\right].$$

3. Ecrire sous forme indicielle les opérateurs suivants en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\text{grad}}\,f, \quad \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{A}, \quad \text{div}\,\underline{A}, \quad \underline{A}\,.\,\underline{B}, \quad \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{A}\,.\,\underline{B}, \quad \underline{A}\wedge\underline{B}, \quad \underline{\text{rot}}\,\underline{A}, \quad \Delta\,f, \quad \underline{\Delta}\,\underline{A},$$

où f est une fonction scalaire, $\underline{A}$, $\underline{B}$ deux champs de vecteurs, où $\underline{\text{grad}}\,f$ désigne le vecteur gradient de la fonction scalaire f, $\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{A}$ le tenseur d'ordre 2 gradient du vecteur $\underline{A}$, $\text{div}\,\underline{A}$ la divergence du vecteur $\underline{A}$, $\underline{\text{rot}}\,\underline{A}$ le vecteur rotationnel du vecteur $\underline{A}$, $\Delta\,f$ le laplacien de la fonction f, $\underline{\Delta}\,\underline{A}$ le vecteur laplacien du vecteur $\underline{A}$ et $\wedge$ le produit vectoriel entre deux vecteurs.

4. Soient f une fonction scalaire, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux champs de vecteurs, établir :

$$\text{div}\ (f\,\underline{A}) = f\,\text{div}\ \underline{A} + \underline{A}\,.\,\underline{\text{grad}}\,f \qquad \underline{\text{rot}}\ (f\,\underline{A}) = f\,\underline{\text{rot}}\ \underline{A} + \underline{\text{grad}}\,f\ \wedge\underline{A},$$

$$\text{div}\ (\underline{A}\wedge\underline{B}) = \underline{B}\,.\,\underline{\text{rot}}\ \underline{A} - \underline{A}\,.\,\underline{\text{rot}}\ \underline{B}.$$

5. a) Vérifier que si A_{ij} est une quantité symétrique par rapport au couple d'indices (i, j) et B_{ij} une quantité antisymétrique, on a :

$$A_{ij}\,B_{ij} = 0.$$

b) Soient α, β deux fonctions scalaires et $\underline{A}$ un champ de vecteurs, calculer :

$$\text{div}\ (\underline{\text{rot}}\,\underline{A}) \qquad \underline{\text{rot}}\,(\underline{\text{grad}}\,\alpha), \qquad \text{div}\ (\underline{\text{grad}}\,\alpha\wedge\underline{\text{grad}}\,\beta).$$

Calcul indiciel suite

1. Etablir les relations suivantes : $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{iqr} = \delta_{jq}\,\delta_{kr} - \delta_{jr}\,\delta_{kq}, \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijp} = 2\,\delta_{kp}, \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6.$
On admettra la relation suivante où det désigne le déterminant de la matrice :

$$\det\begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr}.$$

2. Etablir les formules suivantes dans lesquelles $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont des champs de vecteurs :

$$\underline{u} \wedge (\,\underline{v} \wedge \underline{w}\,) = (\,\underline{u}\,.\,\underline{w}\,)\,\underline{v} - (\,\underline{u}\,.\,\underline{v}\,)\,\underline{w}, \quad \underline{\mathrm{rot}}\,(\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}\,) = \underline{\mathrm{grad}}\,(\,\mathrm{div}\,\underline{u}\,) - \underline{\Delta}\,\underline{u}\,, \; (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}\,)\,\underline{v} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{v}^2 + \underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v} \wedge \underline{v}$$

3. *Exercice extrait de l'examen intermédiaire de novembre 2012*

a. En adoptant la convention d'Einstein, a-t-on le droit d'écrire l'égalité suivante :

$$a_{ij}\,x_i\,x_j + b_{kl}\,x_k\,x_l = (\,a_{ij} + b_{ij}\,)x_i\,x_j.$$

b. Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 dont la matrice des composantes est à coefficients constants. On se place en cordonnées cartésiennes et on note $(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ le repère orthonormé direct.

Montrer que le gradient du champ $A_{jk}x_jx_k$ est $\underline{\underline{A}}\,.\,\underline{x} + \underline{x}\,.\,\underline{\underline{A}}$.

En déduire la relation intrinsèque donnant le gradient de $\underline{x}\,.\,\underline{\underline{A}}\,.\,\underline{x}$, le symbole "." désignant le produit contracté.

c. Après avoir rappelé la définition d'un tenseur $\underline{\underline{S}}$ d'ordre 2 symétrique, montrer que la matrice de ses composantes est symétrique dans tout repère orthonormé.

Pré-requis incontournables d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques (à travailler en autonomie)

1. Soit $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ le système de coordonnées cylindriques et (r, θ, z) les coordonnées d'un point M dans ce repère. Savoir décrire le système de coordonnées et en particulier les expressions suivantes:

- du vecteur position $\underline{OM}$, des vecteurs de base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ en fonction des vecteurs de base cartésiens $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, des vecteurs de base cartésiens $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ en fonction des vecteurs de base cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

- des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et des coordonnées cylindriques (r, θ, z) en fonction des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3).

- du vecteur infinitésimal $\underline{dM}$ issu du point M, de l'élément infinitésimal de volume $d\omega$ en coordonnées cylindriques.

- de la différentielle d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ et de la différentielle d'un vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.

2. Exercices d'auto-évaluation.

a. Calculer les dérivées partielles de $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ par rapport à chacune des variables x_1 et x_2.

b. Soit le cylindre d'axe $\underline{e}_z$ de hauteur H dans cette direction, de section circulaire de rayon R centrée en $O(0, 0, 0)$.

- Donner les équations en coordonnées cylindriques des sections terminales et les normales unitaires sortantes à ces sections terminales.

- Donner l'équation en coordonnées cylindriques de la surface latérale et la normale unitaire à la surface latérale sortante du domaine.

- Donner l'expression d'un élément infinitésimal de surface terminale et celle d'un élément infinitésimal de la surface latérale.

c. Retrouver, à partir de la définition intrinsèque des opérateurs, les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs suivants :

- le vecteur gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$: $\underline{\mathrm{grad}f}$,

- la matrice gradient d'un vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{v}$,

- la divergence d'un vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$: $\mathrm{div}\,\underline{v}$,

Cinématique - Descriptions lagrangienne et eulérienne

Pré-requis incontournables (à travailler en autonomie)
- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre cinématique et mis en fiche les éléments essentiels.
- Savoir intégrer des systèmes différentiels du premier ordre.
- Connaître les équations des courbes classiques : droite, cercle, ellipse, parabole, hyberbole.
- Exercice d'auto-évaluation.
a. Donner l'équation générale d'un cercle dans le plan $(0, x, y)$ centré au point $A : (x_A, x_B)$ et de rayon R et l'équation d'une ellipse dans le plan $(0, x, y)$ de demi grand axe a et de demi petit axe b centrée au point A.
b. Reconnaître la conique d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$.
c. Donner l'équation cartésienne d'une parabole au choix dans le plan $(0, x, y)$ tangente au point $0 : (0, 0)$ d'axe de symétrie $(0, y)$ et la représenter.
d. Donner l'équation cartésienne d'une hyperbole d'asymptotes $y = -(b/a)x$ et $y = +(b/a)x$ dans le plan $(0, x, y)$ et la représenter.
e. Reconnaître la conique d'équation $xy = C$, où C est une constante non nulle.
f. Résoudre le système différentiel suivant où a une constante réelle donnée :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a\,x_2(t), \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a\,x_1(t), \quad \textit{avec les conditions initiales } x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Exercice 1 : On considère le mouvement plan d'un milieu continu défini par la représentation du champ des vitesses en description eulérienne :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \alpha\,(x_1\underline{e}_1 - x_2\,\underline{e}_2)$$

exprimé dans la base cartésienne $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, α étant un scalaire constant supposé positif. On désigne par $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les composantes à l'instant t courant du vecteur position de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ à l'instant $t = 0$.
Le milieu occupe à l'instant t le domaine $\Omega(t)$ défini par $x_1 > 0$, $x_2 > 0, x_3$ quelconque.

1 Déterminer les lignes de courant de l'écoulement.
Calculer de deux façons différentes le champ des accélérations $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ en représentation eulérienne.

2 Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement. On désignera par $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ la position à l'instant $t = 0$ de la particule considérée.
Expliciter les expressions de la vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et de l'accélération lagrangienne $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$.

3 En déduire l'équation de la trajectoire de la particule qui occupe la position $\underline{X} = (1, 1, 0)$ à l'instant $t = 0$.

Exercice 2 : Le mouvement d'un milieu continu est défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
x_1(\underline{X}, t) &= X_1 \cos[\,\omega(R)\,t\,] - X_2 \sin[\,\omega(R)\,t\,],\\
x_2(\underline{X}, t) &= X_1 \sin[\,\omega(R)\,t\,] + X_2 \cos[\,\omega(R)\,t\,],\\
x_3(\underline{X}, t) &= X_3,
\end{aligned}$$

où $\underline{x}$ et $\underline{X}$ désignent respectivement les positions d'une même particule du milieu continu à des instants t et $t = 0$ et où $\omega(R)$ est une fonction régulière de la variable $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

1 Calculer la vitesse lagrangienne du mouvement $\underline{V}(\underline{X}, t)$.
Donner l'expression de l'accélération lagrangienne du mouvement $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$.

2 Expliciter la description eulérienne de la vitesse du mouvement $\underline{v}(\underline{x}, t)$.
Calculer l'accélération eulérienne du mouvement $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ de plusieurs façons différentes.

3 Etablir l'équation des trajectoires, ainsi que celles des lignes de courant. Commenter.

Déformations

Pré-requis incontournables (à travailler en autonomie)
- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.
- Savoir manipuler le calcul vectoriel et matriciel en dimension 3 : gradient de vecteur, produit de matrices, transposée et inverse de matrice, calcul de valeurs propres et vecteurs propres.
- Exercice d'auto-évaluation : Soit la matrice $[A] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a. Former la transposée $^T[A]$ *de la matrice* $[A]$*, les produits matriciels* $[A]\,(^T[A])$ *et* $(^T[A])\,[A]$.
b. Calculer l'inverse de la matrice $[A]$.
c. Calculer les valeurs propres de la matrice $[A]$ *et les vecteurs propres associés..*
d. Calculer les composantes du tenseur $\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}$ *gradient du vecteur* $\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = k\,x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 + (x_3 + kx_1^2)\,\underline{e}_3$.

Exercice Le mouvement d'un milieu continu est défini en tout point de coordonnées $\underline{x}$ par le champ de vitesses en description eulérienne suivant :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \alpha\,x_2\,\underline{e}_1,$$

où α est une constante positive donnée et $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ le repère orthonormé associé au système de coordonnées cartésiennes.

1 Déterminer la représentation lagrangienne du mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$, la particule occupe la position $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Donner l'équation de la trajectoire de la particule $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

2 Déterminer les composantes du tenseur gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$.

La transformation est-elle homogène ?

Déterminer les composantes du tenseur de dilatation $\underline{\underline{C}}$, du tenseur de déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ et du tenseur $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$.

Que deviennent les tenseurs gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ et de déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ lorsque $\alpha\,t$ est petit? Interpréter ce résultat.

3 On considère à l'instant $t = 0$ le carré $OA_0B_0C_0$ de coté η tel que $\underline{OA_0} = \eta\,\underline{e}_1$ et $\underline{OC_0} = \eta\,\underline{e}_2$.

Déterminer le transformé de ce carré à l'instant $t = T$.

Calculer l'accroissement de la longueur de la diagonale OB_0 en exploitant l'expression et les propriétés du tenseur de Green-Lagrange. Vérifier le résultat géométriquement.

En suivant une démarche analogue, calculer l'angle entre les vecteurs $\underline{OA}$ et $\underline{OC}$ transformés à l'instant $t = T$ de $\underline{OA_0}$ et $\underline{OC_0}$. Vérifier le résultat géométriquement.

4 On considère à l'instant $t = 0$ le cube dont une face est le carré $OA_0B_0C_0$.

Quel est le transformé de ce cube à l'instant $t = T$? Déterminer la variation de volume de ce cube entre l'état déformé et non déformé en exploitant la formule de transport d'un élément de volume.

5 *A traiter à la maison* Etablir la formule suivante de transport d'un élément de surface orienté dS_0 de normale $\underline{n}_0$ de la configuration initiale en un élément dS de normale $\underline{n}$ de la configuration courante :

$$\underline{n}\,dS = det(\underline{\underline{F}})\ \ ^T\underline{\underline{G}}\,\underline{n}_0\,dS_0.$$

On formera le produit vectoriel $\underline{dx} \wedge \underline{\delta x}$ où $\underline{dx}$ et $\underline{\delta x}$ sont des éléments matériels infinitésimaux issus du point M et on exploitera l'expression indicielle suivante du déterminant d'un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 :

$$\epsilon_{ijk}\,det(\underline{\underline{A}}) = \epsilon_{pqr}\,A_{ip}\,A_{jq}\,A_{kr} = \epsilon_{pqr}\,A_{pi}\,A_{qj}\,A_{rk}.$$

En déduire l'aire du carré $OABC$ déformé de $OA_0B_0C_0$. Vérifier le résultat géométriquement.

6 *A traiter à la maison* On considère le mouvement caractérisé par le champ de vitesse suivant obtenu par combinaison linéaire du mouvement précédent :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \alpha\,x_2\,\underline{e}_1 - \alpha\,x_1\,\underline{e}_2.$$

Calculer le tenseur $\underline{\underline{d}}$ des taux de déformations. Interpréter ce mouvement.

Déformations

Pré-requis incontournables (à travailler en autonomie)

- *Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.*
- *Avoir travaillé et rédigé sur feuille le sujet de TD 4 Transformation non homogène de la semaine dernière.*
- *Avoir cherché la présente feuille en travaillant en amont les pré-requis.*

- *Exercice d'auto-évaluation :*

Soit la transformation $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) = X_1\,\underline{e}_1 + (X_2 + a\,X_3)\,\underline{e}_2 + (X_3 + a\,X_2)\,\underline{e}_3$ *où* a *est une constante donnée,* $\underline{X}$ *la position d'un point dans sa configuration initiale et* $\underline{x}$ *sa position après transformation.*

a. Calculer les composantes du tenseur gradient de transformation $\underline{\underline{F}}$ *et son déterminant.*
b. Rappeler la condition pour qu'une transformation soit définie. En déduire la condition que la constante a *doit satisfaire pour que la transformation* $\underline{\Phi}$ *soit définie ? La transformation est-elle homogène ?*
c. Soient les points A_0 *et* B_0 *de coordonnées avant transformation* $A_0 : (0,1,0)$ *et* $B_0 : (0,1,1)$*. Calculer les coordonnées de ces deux points après transformation. Que devient le segment droit* $[\,A_0\,B_0\,]$ *après transformation ?*
d. Donner le volume du domaine Ω_0 *après transformation.*
e. Calculer les composantes du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ *et du tenseur de Green-Lagrange* $\underline{\underline{e}}$*.*
f. Donner les dilatations subies par des segments matériels initialement portés par chacune des trois directions $\underline{e}_1$*,* $\underline{e}_2$ *et* $\underline{e}_3$*.*
g. Donner les variations angulaires subies par deux segments matériels initialement portés par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$*, puis* $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$*.*
h. Calculer le vecteur déplacement $\underline{\xi}$*. A quelle condition sur* a *la transformation peut-elle être considérée petite ?*
i. Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$*. Comparer avec l'expression du tenseur de Green-Lagrange.*

Transformation non homogène

On étudie la transformation d'un milieu continu qui transporte tout point $M_0(X,Y,Z)$ du milieu dans sa configuration de référence en $M(x,y,z)$ dans la configuration actuelle, définie par :

$$x = X + \alpha Y^2, \;\; y = Y + \beta X^2 \;\; z = Z$$

OÙ α et β sont des constantes réelles strictement positives. Les coordonnées sont rapportées à un repère orthonormé direct $(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

1. Etude générale de cette transformation : domaine de validité

1.1 Déterminer le tableau des composantes du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$.

1.2 La transformation est-elle homogène? Déterminer l'ensemble des points invariants.

1.3 Déterminer le domaine des points $M_0(X,Y,Z)$ pour lequel la transformation est définie.
Dans le plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$, les axes $O\underline{i}$ et $O\underline{j}$, et le carré $OACB$, avec $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$, sont-ils toujours inclus dans ce domaine?

1.4 Déterminer dans la base orthonormée donnée, le tableau des composantes du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$, puis celui du tenseur des déformations de Green - Lagrange $\underline{\underline{e}}$.

2. Etude de la transformation dans le plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$

2.1 On restreint à partir de maintenant l'étude au plan $(O; \underline{i}, \underline{j})$. Le milieu continu considéré est le carré $OACB$. Déterminer les points O', A', B' et C', transformés respectifs des points O, A, B et C.

2.2 Etablir les équations des courbes transformées des côtés OA, OB, BC et AC du carré.
Tracer le transformé $OA'B'C'$ du carré $OACB$. On prendra $\alpha = 1/4$ et $\beta = 3/4$.

3. Etude des déformations au point $C(1,1,0)$

3.1 Donner au point C les dilatations, λ_x, λ_y et λ_z dans les directions des axes.

3.2 $\gamma(\underline{i}, \underline{j})$ désigne le glissement de l'angle droit formé par les axes $C\underline{i}$ et $C\underline{j}$.
Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\gamma(\underline{i}, \underline{j})$.
Mettre en évidence graphiquement cet angle.

Déformations

Pré-requis incontournables. Les éléments demandés sont susceptibles d'être ramassés.

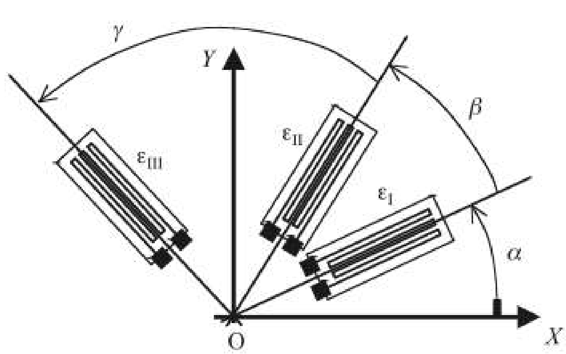
- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre déformations et mis en fiche les éléments essentiels.
- Avoir travaillé et rédigé sur feuille le sujet de TD transformation non homogène de la semaine dernière.
- Avoir cherché la présente feuille de TD mesure des déformations et l'exercice d'autoévaluation.
- Exercice d'auto-évaluation :

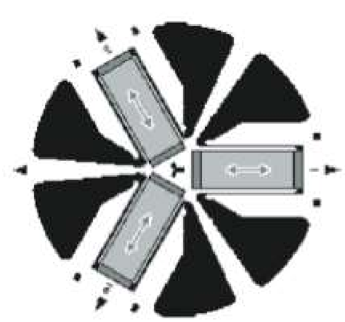
Soit un solide qui occupe dans sa configuration non déformée le cylindre de rayon R de hauteur H dans la direction $\underline{e}_3$. A l'instant $t = T$, les points $\underline{X}$ du solide ont subi le déplacement suivant : $\underline{\xi}(\underline{X}) = k\,X_1\,X_2\,\underline{e}_1 + k\,(\,X_1^2 - X_2^2\,)\,\underline{e}_2 + 0\,\underline{e}_3$ où k est une constante donnée.
a. Calculer les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}(\underline{X})$.
b. Vérifier que la condition de petites transformations est bien satisfaite si $k\,R \ll 1$.
c. Calculer les composantes du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en un point $\underline{X}$ et celles du tenseur tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ en grandes transformations.
d. Interpréter les composantes diagonales du tenseur des déformations linéarisées. Comparer avec la situation des grandes transformations.
e. Interpréter les composantes hors diagonale du tenseur des déformations linéarisées. Comparer avec la situation des grandes transformations.
f. Calculer la dilatation relative dans la direction $\underline{n}_0 = 1/\sqrt{2}(\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2\,)$. Comparer avec la situation des grandes transformations.

Mesures des déformations

On cherche à mesurer l'état de déformations en un point d'une structure. Les déformations dans la pièce sont supposées petites et planes, parallèlelement au plan $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$, $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ étant des vecteurs unitaires orthonormés donnés. Sous ces hypothèses, les déformations sont caractérisées au point M_0 par le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(X_1,X_2,X_3)$ dont les composantes dans le repère $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ sont telles que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(X_1,X_2)$ et $\epsilon_{i3} = 0$, pour $(i,j) = 1,2$, le vecteur $\underline{e}_3$ étant le vecteur unitaire orthogonal au plan $(0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$.

1. Calculer l'allongement unitaire ϵ_θ au point M_0 dans la direction faisant l'angle θ avec l'axe $(M_0,\underline{e}_1)$ dans le plan $(M_0;\underline{e}_1,\underline{e}_2)$.
2. Expliquer comment déterminer expérimentalement le tenseur des déformations linéarisées au point M_0.
3. Quelles sont les directions pour lesquelles l'allongement ϵ_θ présente un extrêmum?
4. Application à la mesure des déformations à l'aide de jauges disposées en rosette
   Trois jauges de déformations (I,II,III) disposées en rosette autour d'un point O de la surface plane d'une éprouvette mesurent les trois allongements unitaires suivant trois directions : $\alpha = 0^0$, $\beta = 120^0$ et $\gamma = 120^0$, (cf Figure). Les mesures obtenues sont :
   $$\epsilon_I = 0.5\,10^{-4},\ \epsilon_{II} = 2\,10^{-4},\ \epsilon_{III} = 2\,10^{-4}.$$
   Déterminer les composantes du tenseur des déformations au point O.
   Déterminer la direction du plan pour laquelle l'allongement unitaire est maximum et donner sa valeur.





Déformations

Pré-requis incontournables. Les éléments demandés sont susceptibles d'être ramassés.

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre taux de déformations, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.
- Savoir décrire le système de coordonnées cylindriques $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ et en particulier connaître les expressions :

- du vecteur position $\underline{OM}$, des vecteurs de base $(\underline{e}_r,\ \underline{e}_\theta,\ \underline{e}_z)$ en fonction des vecteurs de base cartésiens $(\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \underline{e}_3)$, des vecteurs de base cartésiens $(\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \underline{e}_3)$ en fonction des vecteurs de base cylindriques $(\underline{e}_r,\ \underline{e}_\theta,\ \underline{e}_z)$.

- des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et des coordonnées cylindriques (r, θ, z) en fonction des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3).

- du vecteur infinitésimal $\underline{dM}$ issu du point M, de l'élément infinitésimal de volume $d\omega$ en coordonnées cylindriques.

- de la différentielle d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ et de la différentielle d'un vecteur $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$.

Exercice d'auto-évaluation.

Retrouver, à partir de la définition intrinsèque des opérateurs, les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs suivants :

- le vecteur gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$: $\underline{\mathrm{grad}} f$,
- la matrice gradient d'un vecteur $\underline{v}(r, \theta, z)$: $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{v}$,
- la divergence d'un vecteur $\underline{v}(r, \theta, z)$: $\mathrm{div}\, \underline{v}$.

Vitesse de déformations

Dans un référentiel matérialisé par un repère orthonormé direct $(O; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ de coordonnées (x, y, z), on étudie le mouvement d'un fluide visqueux entre deux cylindres $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, d'axe $(0, \underline{e}_z)$ de rayons respectifs a et b avec $0 < a < b$ et de longueurs grandes devant les rayons.

On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées et les bases locales physiques $(O; \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. Soit ω une constante donnée positive, le champ de vitesse $\underline{v}(r, \theta, z)$ de l'écoulement est donné par :

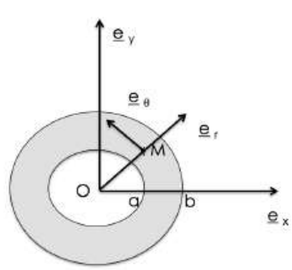
$$\underline{v}(r, \theta, z) = K\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b^2}\right)\underline{e}_\theta, \qquad \text{avec } K = \frac{\omega\, a^2\, b^2}{b^2 - a^2}.$$

Etude de l'écoulement entre les deux cylindres

1. Etudier les trajectoires et lignes de courant de ce mouvement loin des extrémités des cylindres.
2. Tracer le profil des vitesses sur un rayon r situé entre a et b. Donner une interprétation physique.
3. Calculer le tableau des composantes physiques des tenseurs suivants : $\underline{\underline{\nabla v}}$ tenseur gradient de vitesse, $\underline{\underline{D}}$ tenseur des taux de déformation, $\underline{\underline{\Omega}}$ tenseur des taux de rotation.
4. Déterminer les vitesses et les directions de déformations principales du mouvement.
5. Déterminer de deux façons différentes le vecteur taux de rotation $\underline{\Omega}$.
6. Le mouvement est-il isochore ? Existe-t-il un potentiel de vitesse ?

Cas limite d'un cylindre extérieur de rayon très grand ($b \to \infty$)

1. Vérifier qu'il existe un potentiel de vitesse, et le calculer.
2. Tracer le profil des vitesses sur un rayon extérieur à $\mathcal{C}_a$ et interpréter.
3. Calculer la circulation Γ du champ de vitesse le long d'un cercle d'axe $(0, \underline{e}_z)$ et de rayon $R > a$.



Contraintes

Travail préparatoire

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre contraintes, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.
- Revoir la définition d'un torseur équivalent à une densité volumique d'efforts et à une densité surfacique d'efforts.
- Exercice d'auto-évaluation : En un point $\underline{x}$ d'un milieu continu, les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur une surface élémentaire de normale $\underline{n}$ sont telles que :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_1) = \sigma_0 \, (-\underline{e}_1 + \gamma \, \underline{e}_3), \quad \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 = -\sigma_0, \quad \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_3) \wedge \underline{e}_1 = -\sigma_0 \, \underline{e}_2,$$

où σ_0 est une constante donnée et $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un repère orthonormé.
- Quelles sont les dimensions de $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ et de σ_0 ?
- Donner les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au point $\underline{x}$.
- Déterminer la force de contact exercée sur une surface élémentaire de normale $\underline{n} = 1/\sqrt{2}\,(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$. Décomposer cette force en composante normale et effort tangentiel.
- Calculer les contraintes principales (valeurs propres) du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
- Calculer les directions principales associées (vecteurs propres).

Etat de contraintes dans une éprouvette en torsion

Un arbre cylindrique, de génératrices parallèles à l'axe $\underline{e}_3$, de hauteur h, de section circulaire de rayon R, est limité par la base Σ_0 située dans le plan $x_3 = 0$ et la base Σ_h située dans le plan $x_3 = h$. On désigne par Σ_l la surface latérale de la pièce.
L'arbre, supposé en équilibre, est soumis en tout point (x_1, x_2, x_3) au champ de contraintes suivant exprimé dans le repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_3)$, l'origine O du repère étant prise au centre de la base Σ_0 :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A\,x_2 \\ 0 & 0 & -A\,x_1 \\ A\,x_2 & -A\,x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

où A est un scalaire constant positif.

1. Que peut-on dire des forces volumiques extérieures appliquées à la pièce ?

2. Calculer la densité surfacique d'efforts exercée sur la surface latérale Σ_l.

3. Quelles sont les densités surfaciques d'efforts s'exerçant sur les bases Σ_0 et Σ_h ?

4. Calculer les éléments de réduction en O (résultante et moment) du torseur des efforts surfaciques s'exerçant sur la base Σ_0. Interpréter la nature des efforts extérieurs agissant sur cet arbre.

5. Déterminer les contraintes principales en tout point de la pièce.
Sachant que les matériaux fragiles rompent généralement lorsque la contrainte normale atteint une valeur critique σ_c, en quel(s) point(s) de l'arbre constitué d'un matériau métallique, cette valeur critique est-elle atteinte ?
Quelle est la valeur maximale du couple de torsion à ne pas dépasser ?

6. Déterminer la direction principale associée à la contrainte principale maximale.
Sachant qu'en rupture fragile, la surface de rupture est souvent perpendiculaire à la direction principale associée à la contrainte principale maximale, expliquer le faciès de rupture présenté à la figure ci-dessous.

Rupture hélicoïdale d'une éprouvette en fonte sollicitée en torsion
(Centre des Matériaux, Ecole des Mines, Evry)

Contraintes

Travail préparatoire

- *Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre contraintes, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.*
- *Avoir refait et rédigé le TD de torsion d'un arbre cylindrique.*
- *Exercice d'entrainement :*

Soit un cylindre d'axe $\underline{e}_3$, de hauteur H selon cet axe et de section circulaire de rayon R dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Ce cylindre est soumis sur sa surface latérale à la densité surfacique d'effort $\underline{F}(\underline{x}) = F\,x_1\,/\,R\,\underline{e}_1$, où F est une constante donnée non nulle. Il est libre d'efforts sur les faces terminales $x_3 = 0$ et $x_3 = H$.

On suppose que le tenseur des contraintes en tout point du cylindre est diagonal dans le repère cartésien orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de la forme suivante: $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma_1\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ des constantes.

- Représenter l'allure du chargement imposé sur une section du cylindre.

- Donner les équations cartésiennes de la surface latérale, des sections terminales du cylindre et des normales unitaires extérieures à ces surfaces.

- Déterminer les constantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en fonction de F et de R.

- Donner l'expression du tenseur des contraintes dans le repère cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

- Tracer les cercles de Mohr en un point du cylindre. Donner les expressions de la contrainte tangentielle maximale et de la contrainte normale maximale.

Tenue d'une gouttière

Un massif constitué d'un matériau élastique occupe la région Ω :$(x_1 \geq 0,\ -h \leq x_3 \leq h)$ de l'espace et est entaillé d'une gouttière semi-cylindrique de frontière $\partial\,\Omega_G$, dont la section droite dans le plan $(x_3 = 0)$ est le demi-cercle BCD de centre O et de rayon R (Figure). L'intérieur de la gouttière est remplie par un fluide parfait pesant. On suppose que le massif est en équilibre et que le tenseur des contraintes est donné en chacun de ses points dans le repère des coordonnées cylindriques $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_3)$ par :

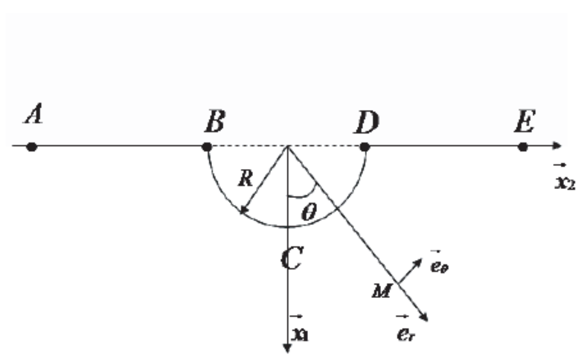
$$\sigma_{rr} = K\,\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \sigma_{zz} = \nu\,\sigma_{rr},$$

les autres composantes étant nulles et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, K et ν étant des constantes données, avec $K < 0$ et $0 < \nu < 0.5$.

1. Montrer que le tenseur des contraintes est donné en tout point $\underline{x}$ dans la base des coordonnées cartésiennes par:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = K\,\frac{x_1^3}{r^4}\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + K\,\frac{x_1\,x_2^2}{r^4}\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + K\,\frac{x_1^2\,x_2}{r^4}\,(\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1\,) + K\,\nu\,\frac{x_1}{r^2}\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

2. Quelle est la densité d'efforts volumiques dans le massif ?
3. Quels sont les efforts extérieurs surfaciques agissant sur le contour cylindrique $ABCDE$ et sur les faces $x_3 = \pm h$? Interpréter physiquement la constante K.
4. Calculer les éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs agissant respectivement sur la frontière $\partial\Omega_G$ de la gouttière et sur les régions des faces $x_3 = \pm h$ définies par $R < r < \alpha R$, avec $\alpha > 1$.
5. Tracer les cercles de Mohr en un point du massif. En quels points la contrainte tangentielle atteint-elle son maximum et quelles sont les directions normales correspondantes ?
6. Sachant que le matériau reste élastique tant que le critère de Tresca est satisfait, c'est à dire tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point, où σ_S désigne la limite en traction simple du matériau, quelle est la valeur limite de K supportable par le matériau ? Interpréter physiquement le sens de ce critère.



Elasticité

Travail préparatoire

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre élasticité, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.
- Avoir refait et rédigé le TD contraintes sur la gouttière.
- Exercice d'entrainement :

Soit un milieu qui occupe dans sa configuration non déformée le domaine parallélépipèdique $0 \leq X_1 \leq L_1$, $0 \leq X_2 \leq L_2$, $0 \leq X_3 \leq L_3$ rapporté au repère orthonomé $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Le matériau constitutif est élastique linéaire,homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ. Le milieu est soumis à la transformation suivante : $x_1 = X_1 + \alpha X_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ où α est une constante donnée positive.

- Calculer le vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{X})$ et les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.

- Sous quelle condition sur α l'hypothèse des petites transformations est-elle valable ?

- Sous cette condition, que l'on adoptera dans toute la suite de l'exercice, calculer les composantes du tenseur de déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.

- Déterminer la variation de volume subie par le milieu. Interpréter mécaniquement les déformations subies par le milieu.

- Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X})$ en tout point $\underline{X}$ du milieu.

- On suppose le milieu en équilibre. Déterminer les efforts volumiques auquel il est soumis, ainsi que les densités surfaciques d'efforts appliquées sur chacune des faces du parallélépipède.

- Interpréter le chargement et le représenter.

- En déduire une interprétation physique du coefficient de Lamé μ.

- Tracer les cercles de Mohr en un point quelconque du milieu.

- Donner les expressions de la contrainte tangentielle maximale et de la contrainte normale maximale.

Tenue d'un réservoir cylindrique en pression

On considère un tube cylindrique de génératrices parallèles à l'axe $\underline{e}_3$, de longueur L, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e, avec $r_i < r_e$.

Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope. On désigne par (λ, μ) les coefficients de Lamé et (E, ν) les modules de Young et coefficient de Poisson.

On cherche à étudier la tenue du tube en équilibre sous les sollicitations suivantes :
- la paroi intérieure $r = r_i$ est soumise à un effort surfacique de pression p_i,
- la paroi latérale extérieure $r = r_e$ est libre d'effort,
- les sections droites terminales $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ sont également libres d'efforts,
- les efforts volumiques sont négligeables.
- le cadre de l'hypothèse des petites perturbations est justifié.

1. Ecrire les équations et conditions aux limites du problème.

2. Déterminer les éléments de réduction au point O des torseurs associés aux efforts extérieurs appliqués. Commenter.

3. En utilisant l'égalité suivante : $\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}\,\underline{\xi}) = \underline{\text{grad}}\,(\text{div}\ \underline{\xi}) - \underline{\Delta}\,\underline{\xi}$, où $\underline{\text{rot}}$, div , $\underline{\text{grad}}$ et $\underline{\Delta}$ désignent respectivement les opérateurs rotationnel, divergence, gradient et laplacien d'un vecteur, montrer que le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ doit nécessairement vérifier l'équation suivante en tout point du tube :

$$(\lambda + 2\mu)\,\underline{\text{grad}}\,(\text{div}\ \underline{\xi}) - \mu\,\underline{\text{rot}}\,(\underline{\text{rot}}\,\underline{\xi}) = \underline{0}.$$

4. Les symétries géométriques et mécaniques du problème incitent à rechercher le champ de déplacements dans le tube sous la forme :

$$\underline{\xi}(r,z) = r\,f(r)\,\underline{e}_r + g(z)\underline{e}_z$$

dans le système des coordonnées cylindriques $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Montrer que sous cette hypothèse le champ de déplacement vérifie nécessairement en tout point du tube :

$$\text{div}\ \underline{\xi}(r,\theta,z) = \text{constante}.$$

En déduire les formes de $f(r)$ et $g(z)$.

5. Déterminer les composantes du tenseur des déformations et des contraintes dans la base des coordonnées cylindriques. On s'assurera que le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}, \qquad \sigma_{zz} = C,$$

où A, B, C sont des constantes, les autres composantes étant nulles.

6. Traduire les conditions aux limites et achever la résolution du problème.

On explicitera les champ de déplacement, de déformations et de contraintes solutions.

7. Quelles sont les valeurs des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en un point quelconque du tube?

On suppose que le tube reste élastique tant que la contrainte tangentielle maximale reste inférieure à $\sigma_S/2$ en tout point, où σ_S désigne la limite d'élasticité du matériau

En quels points, le critère est-il atteint en premier lieu ?

En déduire la valeur limite de la pression à partir de laquelle le tube sort du domaine élastique.

Tracer l'évolution de cette pression limite en fonction du rapport r_e/r_i.

Mettre en évidence sur ce tracé que le fait d'accroître l'épaisseur du tube permet d'augmenter la pression supportable par le tube. Montrer également l'existence d'une pression limite au delà de laquelle aucun tube, si épais soit-il, ne peut rester élastique.

8. On suppose maintenant le tube mince, c'est à dire :

$$e = r_e - r_i \ll R = \frac{(r_e + r_i)}{2},$$

montrer que la contrainte circonférentielle est donnée par la formule suivante, appelée formule des tonneliers :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R}{e} p_i.$$

Formulaire en coordonnées cylindriques

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire $f(r,\theta,z)$:

$$\underline{grad} f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z \qquad \Delta f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence, rotationnel et Laplacien d'un vecteur $\underline{v} = v_r\,\underline{e}_r + v_\theta\,\underline{e}_\theta + v_z\,\underline{e}_z$:

$$\mathrm{div}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\underline{rot}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_z,$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\underline{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z.$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)}.$$

Divergence d'un tenseur $\underline{\underline{\tau}}(r,\theta,z)$ *symétrique :*

$$\underline{div}\,\underline{\underline{\tau}} = \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\,\tau_{r\,\theta}}{r}\right)\underline{e}_\theta$$

$$+\left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\,z}}{r}\right)\underline{e}_z.$$

Elasticité

Travail préparatoire

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre élasticité, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.
- Avoir terminé et rédigé le TD du réservoir en pression.
- Exercice d'entrainement :

Soit un milieu qui occupe dans sa configuration non déformée le domaine parallélépipèdique $0 \leq X_1 \leq L_1$, $0 \leq X_2 \leq L_2$, $0 \leq X_3 \leq L_3$ *rapporté au repère orthonomé* $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. *Le matériau constitutif est élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé* λ *et* μ. *Le solide est encastré dans un bâti rigide fixe (vecteur déplacement nul) sur toutes ses faces excepté la face* $X_3 = L_3$. *Cette surface est soumise à un effort de pression réparti* $-p\,\underline{e}_3$. *Les efforts volumiques sont négligés. Sous ce chargement, la pièce est en équilibre et l'hypothèse des petites transformations est supposée satisfaite.*
On recherche le champ de déplacement sous la forme $\underline{\xi}(\underline{X}) = \xi(X_3)\,\underline{e}_3$.

- Justifier la forme du champ de déplacement proposée pour ce problème.

- Montrer que la fonction $\xi(X_3)$ *vérifie nécessairement la condition aux limites* $\xi(X_3 = 0) = 0$ *pour conduire à une solution du problème.*

- Etablir l'équation différentielle que doit nécessairement satisfaire la fonction $\xi(X_3)$ *pour que le champ de déplacement proposé puisse être solution du problème.*

- En déduire que la fonction $\xi(X_3)$ *est nécessairement une fonction linéaire de* X_3.

- Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X})$ *en tout point* $\underline{X}$ *du milieu associé à ce champ de déplacement.*

- Traduire les conditions aux limites en efforts sur la face $X_3 = L_3$.

- En déduire l'expression du champ de déplacement solution $\underline{\xi}(\underline{X}) = -p/(\lambda + 2\mu)\,X_3\,\underline{e}_3$.

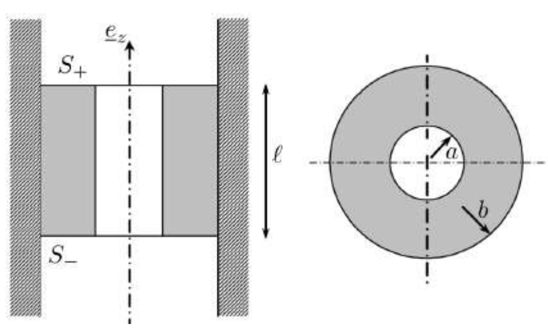
- Calculer les densités d'efforts surfaciques exercées sur les faces $X_1 = 0$, $X_1 = L_1$ *et* $X_2 = 0$, $X_2 = L_2$. *Interpréter la nature de ces efforts et les représenter*

Extraction d'un bouchon

Un bouchon $(\mathcal{D})$ cylindrique de révolution, d'axe $O\vec{e}_z$, de rayon intérieur a, de rayon extérieur b $(b > a)$, de longueur ℓ, limité par deux sections droites S_- et S_+ d'équations respectives $z = -\ell/2$ et $z = +\ell/2$, est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ.

Ce bouchon est collé sur la surface S_b d'équation $r = b$ à un tube rigide fixe. Les sections droites S_- et S_+ sont soumises à des densités d'efforts surfaciques telles que le torseur des efforts sur chacune des deux couronnes soit nul.

On cherche à extraire le bouchon en exerçant sur la surface latérale intérieure S_a d'équation $r = a$ une densité surfacique d'effort $\dfrac{\mathcal{F}}{2\pi a\ell}\,\vec{e}_z$ où $\mathcal{F}$ est une constante positive donnée. Les forces volumiques sont négligées.



1. Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'équilibre du bouchon.
2. On recherche un champ de déplacements solution de ce problème de la forme $\underline{\xi}(r, \theta, z) = \xi(r)\underline{e}_z$.
   Expliciter l'équation différentielle que doit satisfaire la fonction $\xi(r)$.
   Intégrer cette équation.
3. Déterminer un couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ solution du problème.
4. En quels points du bouchon la contrainte tangentielle maximale τ_{max} atteint-elle sa plus grande valeur?
5. On suppose que la condition d'adhésion le long de S_b est vérifiée tant que :

$$\tau_{max} < \tau^* \quad \text{en} \quad r = b \quad \text{avec } \tau^* \text{ constante positive donnée,}$$

   (Le bouchon glisse le long de cette paroi dès que l'égalité est atteinte).
   Calculer alors l'effort minimum $\mathcal{F}_{min}$ que l'on doit exercer pour pouvoir extraire le bouchon.

Travail préparatoire

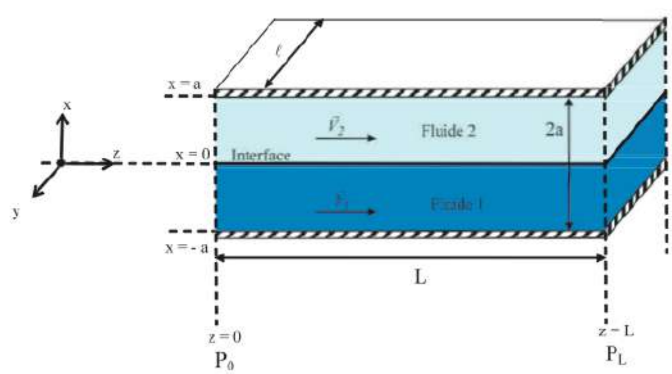
- *Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre fluide, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.*
- *Avoir terminé et rédigé le TD extraction du bouchon.*
- *Exercice d'entrainement : On étudie l'écoulement d'un fluide homogène, newtonien, visqueux dans la direction $\underline{e}_z$ entre deux parois planes fixes, parallèles d'équation $x = \pm a$. L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, les lignes de courant étant des droites parallèles à la direction $\underline{e}_z$. L'écoulement est crée par une différence de pression imposée entre la section située en $z = 0$ et la section située en $z = L$. On désigne par P_0 la pression uniforme imposée sur la section $z = 0$ et par P_L la pression uniforme imposée sur la section $z = L$ et on suppose ces pressions telles que $P_0 > P_L$. On désigne par ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité.*

 - *Enoncer les deux expressions de l'équation locale de la conservation de la masse. Que deviennent-elles dans le cas d'un fluide homogène ? En déduire que la vitesse du fluide dans l'écoulement étudié est nécessairement de la forme $\underline{v} = v(x)\underline{e}_z$*
 - *Donner l'expression générale de la loi de comportement d'un fluide newtonien. Que devient-elle dans le cas d'un fluide incompressible ?*
 - *Rappeler l'expression générale des composantes du tenseur des taux de déformations. Calculer ses composantes dans le cas de l'écoulement étudié.*
 - *Rappeler la forme générale de l'équation de Navier-Stokes. Donner le système d'équations satisfait par la vitesse et la pression.*
 - *En déduire que la pression est une fonction affine de la variable z et la vitesse une fonction quadratique en x. On exprimera les résultats en fonction des pressions P_0, P_L, de la viscosité μ et de constantes d'intégration.*
 - *Ecrire les conditions aux limites en $x = \pm a$. Achever la détermination de la vitesse et de la pression en tout point de l'écoulement.*
 - *Représenter le profil de vitesse dans la conduite.*
 - *Calculer la densité d'efforts surfaciques exercée par le fluide sur les parois $x = \pm a$.*

Ecoulement de deux fluides non miscibles

Deux fluides homogènes, newtoniens, visqueux, non miscibles, s'écoulent dans la direction $\underline{e}_z$ entre deux parois planes fixes, parallèles d'équation $x = \pm a$. Le fluide 1, de masse volumique ρ_1, de viscosité μ_1 s'écoule entre les plans $x = -a$ et $x = 0$ et le fluide 2 de masse volumique ρ_2, de viscosité μ_2 entre les plans $x = 0$ et $x = a$. Cette configuration est supposée stable, l'interface entre les fluides reste le plan $x = 0$.

L'écoulement est crée par une différence de pression imposée entre la section située en $z = 0$ et la section située en $z = L$. On désigne par P_0 la pression uniforme imposée sur la section $z = 0$ et par P_L la pression uniforme imposée sur la section $z = L$ et on suppose ces pressions telles que $P_0 > P_L$. L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, les lignes de courant étant des droites parallèles à la direction $\underline{e}_z$. Les longueurs des parois L selon $\underline{e}_z$ et l selon $\underline{e}_y$ sont supposées grandes devant leur écartement $2a$, de sorte que les effets de bords sont négligeables et le champ de vitesse pourra être supposé indépendant de la variable y. Enfin, les forces de gravité sont supposées négligeables.



1. Après avoir explicité toutes les hypothèses, écrire les équations de conservation et les conditions aux limites de l'écoulement. *On convient de noter $\underline{v}^i$ et p^i les vecteurs vitesse et champ de pression dans le fluide i, i prenant les valeurs* 1 *ou* 2.
2. Calculer les champs des vitesses et de pression en tout point de l'écoulement dans chacun des deux fluides.
3. Vérifier les résultats obtenus en traitant le cas de deux fluides identiques. Quel est alors le profil de vitesse ?
4. Tracer le profil des pressions et vitesses dans les deux cas $\mu^1 < \mu^2$ et $\mu^2 < \mu^1$.
5. Calculer la densité d'effort surfacique exercée par chacun des fluides sur les parois $x = \pm a$.

Travail préparatoire

- Avoir travaillé, appris le cours de 3A004 - chapitre fluide, réalisé la fiche de cours avec les éléments essentiels.
- Avoir terminé et rédigé le TD fluides non miscibles.
- Exercice d'entrainement :

On considère un plan incliné fixe faisant un angle α avec l'horizontal. On désigne par $\underline{e}_1$ le vecteur unitaire parallèle à ce plan, par $\underline{e}_2$ le vecteur unitaire orthogonal au plan incliné et $\underline{e}_3$ le vecteur tel que $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ constitue un repère orthonormé direct. On note $\underline{g} = -g\,(\cos\alpha\,\underline{e}_2 + \sin\alpha\,\underline{e}_1)$ le vecteur gravité.

On étudie l'écoulement d'un fluide homogène, newtonien, visqueux, le long du plan incliné entre les plans $x_2 = 0$ et $x_2 = h$. On suppose que le fluide est en contact au niveau de la surface libre $x_2 = h$ avec un gaz parfait au repos de pression p_a. On désigne par ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité.

L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, les lignes de courant sont parallèles à la direction $\underline{e}_1$. Les dimensions du plan incliné dans la direction $\underline{e}_3$ sont telles que la vitesse de l'écoulement peut être supposée loin des extrémités indépendante de la variable x_3.

- Faire un schéma de l'écoulement étudié.
- Traduire les hypothèses du problème et en déduire que la vitesse du fluide est nécessairement de la forme $\underline{v}(\underline{x}, t) = v(x_2)\,\underline{e}_1$.
- Expliciter le système d'équations satisfait par la vitesse et la pression.
- En déduire que les formes générale de la pression $p(x_1, x_2)$ et de la vitesse $v(x_2)$.
- Donner l'expression de la force exercée par le gaz à la surface $x_2 = h$ sur le fluide. En déduire la valeur de la pression du fluide en $x_2 = h$ et de la dérivée de la vitesse $v'(h)$ en $x_2 = h$.
- Achever la détermination la pression et de la vitesse.
- Représenter le profil de vitesse.
- Calculer la densité d'efforts surfaciques exercée par le plan incliné sur le fluide. Représenter cet effort.

Pompage d'une nappe de pétrole

Une barge de récupération permettant d'enlever une couche de pétrole se trouvant en surface de la mer est composée d'un tapis roulant et d'une cuve de stockage, (Figure **??**).

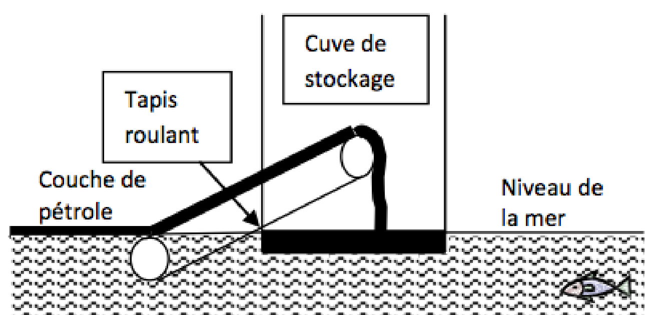


Figure 1: Dispositif de pompage

Son fonctionnement peut être schématisé de la façon suivante (Figure **??**) : le dispositif composé d'un plan (π) formant un angle α avec l'horizontale est animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\underline{U} = U\,\underline{e}_1$, U étant constante. L'extrémité inférieure du dispositif est immergée dans la couche de pétrole. Une nappe d'épaisseur h de pétrole, supposée constante, est convectée dans la barge.

Le pétrole est considéré comme un fluide homogène de masse volumique ρ, newtonien, de viscosité μ et de masse volumique constante ρ. L'air est de masse volumique et de viscosité tellement plus faibles que celles du pétrole qu'on admet que tout se passe comme si l'air, avec lequel la surface libre du pétrole en $x_2 = h$ est en contact, est de pression homogène P_a. On note g l'accélération de la pesanteur.

L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire. Le tapis est supposé suffisamment large (selon la direction $\underline{e}_3$) et long (selon la direction $\underline{e}_1$) pour que loin des bords latéraux et des extrémités inférieure et supérieure du tapis, l'écoulement soit dirigé selon la direction de plus grande pente, de sorte que la vitesse $\underline{v}$ est supposée de la forme suivante : $\underline{v} = v(x_1, x_2)\underline{e}_1$.

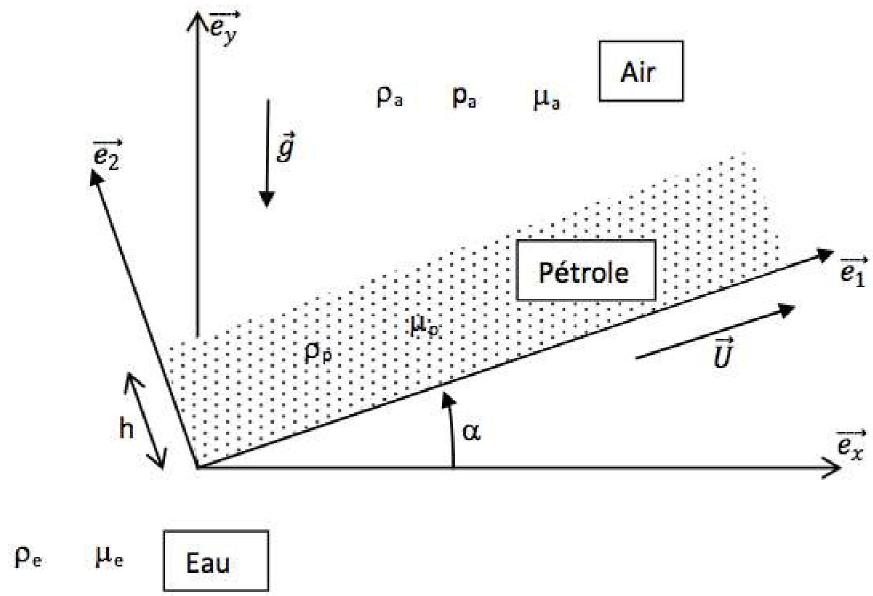


Figure 2: Schématisation du dispositif de pompage

1. Montrer que les lignes de courant sont parallèles à $\underline{e}_1$.

   En déduire la trajectoire d'une particule fluide initialement à la surface du pétrole en bas du tapis et advectée vers le haut du tapis.

2. Montrer que la vitesse $\underline{v}$ ne dépend que de la variable x_2.

3. Montrer qu'à la surface libre du pétrole, on a :

$$\frac{dv}{dx_2}(x_2 = h) = 0, \qquad p(x_1, h) = P_a \quad \forall x_1,$$

   où $p(x_1, x_2)$ est le champ de pression du pétrole.

4. En écrivant l'équation de Navier-Stokes, exprimer finalement la pression p, puis la vitesse v.

5. En considérant U comme une donnée et h comme un paramètre variable, tracer le profil des vitesses du pétrole en fonction de h.

   Vous distinguerez 3 cas : écoulement descendant, écoulement nul et écoulement montant le long de la surface libre, et vous donnerez les valeurs de h correspondantes en fonction de μ, U, ρ, g et α.

6. Calculer la force de frottement exercée par le fluide sur le tapis pour une surface de longueur l et de largeur b.

7. Calculer la puissance nécessaire pour motoriser le tapis.

8. *En exercice à la maison* Montrer que le débit D_m de fluide, pour une largeur b donnée du tapis roulant, s'écrit :

$$D_m = \rho\, b\, U\, h_0 \left(\tilde{h} - \frac{\tilde{h}^3}{3}\right),$$

   où h_0 est l'épaisseur du film pour laquelle le débit est maximal à la vitesse de tapis donnée, dont vous donnerez l'expression, et où $\tilde{h}$ est le rapport $\tilde{h} = h/h_0$.

   Tracer D_m en fonction de $\tilde{h}$.

   A quel cas (écoulement descendant ou écoulement nul) correspond la situation de débit maximal?

Formulaire en coordonnées cylindriques

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire $f(r,\theta,z)$:

$$\underline{grad} f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z \qquad \Delta f(r,\theta,z) \;=\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence, rotationnel et Laplacien d'un vecteur $\underline{v} \;=\; v_r\,\underline{e}_r \;+\; v_\theta\,\underline{e}_\theta \;+\; v_z\,\underline{e}_z$:

$$\mathrm{div}\,\underline{v}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(\,r\,v_r\,) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{v}(r,\theta,z) \;=\; \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_z,$$

$$\underline{\Delta}\,\underline{v}(r,\theta,z) \;=\; \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\underline{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z.$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,z) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)} .$$

Divergence d'un tenseur $\underline{\underline{\tau}}(r,\theta,z)$ *symétrique :*

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}} \;=\; \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\,\tau_{r\,\theta}}{r}\right)\underline{e}_\theta$$

$$+\left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\,z}}{r}\right)\underline{e}_z.$$

Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\underline{grad} f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\,\tan\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Divergence et rotationnel d'un vecteur :

$$\mathrm{div}\,\underline{u}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(\,r^2\,u_r\,) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r\,\tan\theta}$$

$$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{u}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r\,\tan\theta}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta$$

$$+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_\varphi$$

Tenseur gradient d'un vecteur $\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\varphi)$:

$$\underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})(r,\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r\,\tan\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_\theta}{r\,\tan\theta} + \dfrac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$