Examen 2A003 – 1er juin 2018

Eléments de correction

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On montre d'abord que C est une famille libre. Pour cela on vérifie que le déterminant

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

la famille libre C contient 3 vecteurs, donc $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Par conséquent (u_1, u_2, u_3) est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donc base pour $\mathbb{R}^3$.

2) La matrice de passage de B à C est formée avec les composantes de u_1, u_2, u_3 dans la base B :

$$P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array}$$

3) $f(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1.$

dans la base B

$f(u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2.$

dans la base B

$f(u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

ds la base B

$= u_3 + u_1.$

$= u_1 + u_3.$

En résumé,
$f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$
$f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$
$f(u_3) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$

La matrice de f dans la base C est donc

$$A' = \begin{array}{ccc} & & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array}$$

dans la base C.

! Observation : On peut aussi calculer A' avec la matrice de passage P_{BC}.

$A' = P^{-1}_{BC} \, A \, P_{BC}.$

$P^{-1}_{BC} = \frac{1}{\det P} (\mathrm{com} P)^t = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} +1 & +1 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

4) La matrice de f^n dans la base C est

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A')^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On démontre par récurrence que.

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a déjà vérifié pour $n = 2, 3$.

On suppose que c'est vrai pour n et on vérifie l'égalité pour $(n+1)$..

$$(A')^{n+1} = (A')^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.q.f.d.

5). La matrice de f^n dans la base B est A^n.

$$A^n = (P_{BC} A' P_{BC}^{-1})^n = (P_{BC} A' P_{BC}^{-1})(P_{BC} A' P_{BC}^{-1}) \cdots (P_{BC} A' P_{BC}^{-1}) = P_{BC} (A')^n P_{BC}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & n+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+2 & n+1 & -n-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ n+1 & n+1 & -n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ex 2}}$: $x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$.

2). On observe que $y_1(x) = x$ est solution car

$y_1' = 1$, $y_1'' = 0$.

$\Rightarrow \underbrace{0 \cdot x^2(x+1)}_{0} - x\cancel{(x^2+4x+2)} + \cancel{(x^2+4x+2)}\,x = 0$.

3). On cherche $y_2(x) = y_1(x) \cdot u(x) = x\,u(x)$.

$y_2' = xu' + u$.

$y_2'' = 2u' + xu''$

On remplace dans l'équation homogène :

$x^2(x+1)(2u' + xu'') \underbrace{- x(x^2+4x+2)(xu'+u)}_{} + \cancel{(x^2+4x+2)}\,xu = 0$

$$\text{"} \quad - x(x^2+4x+2)\,xu' - x\cancel{(x^2+4x+2)}\,u$$

$\Rightarrow x^3(x+1)u'' + \underbrace{2x^2(x+1)u' - x^2(x^2+4x+2)u'}_{} = 0$.

$$\text{"} \quad x^2u'\left[\underbrace{2(x+1) - x^2 - 4x - 2}_{2x+\cancel{2}-x^2-4x-\cancel{2}}\right]$$

$x^3(x+1)u'' + x^2u'(-x^2-2x) = 0$

$u''(x+1) - u'(x+2) = 0$.

On note $u' = v \Rightarrow v'(x+1) - v(x+2) = 0$.

On résout par séparation des variables :

$$\frac{dv}{v} = \frac{x+2}{x+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{x+2}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \int \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x + \ln(x+1) + K.$$

$\Rightarrow v = \pm e^x(x+1) \cdot e^K$; on prend $v(x) = e^x(x+1)$

$u(x) = \int e^x (x+1)\,dx = x e^x + C^{te}$.

On choisit $u(x) = xe^x \Rightarrow y_2(x) = xe^x \cdot x = x^2 e^x$.

On vérifie d'abord que (y_1, y_2) forme une famille libre. Pour cela, on calcule par exemple leur wronskien

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2e^x \\ 1 & (2x+x^2)e^x \end{vmatrix} = xe^x \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x(2+x) \end{vmatrix}$$

$$= xe^x(2\cancel{x}+x^{\cancel{2}}) = xe^x\, x(x+1) = x^2(x+1)e^x$$

$W(y_1, y_2) \neq 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ = famille libre de cardinal 2 = dimension de l'espace des solutions

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ = base pour l'espace des solutions de l'équ. homogène

4) - $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes réelles quelconques

$y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2 e^x$

5). On cherche une solution particulière avec la méthode de variation des constantes.

$y_p(x) = c_1'(x)\, x + c_2'(x)\, x^2 e^x = c_1' y_1 + c_2' y_2$

avec c_1', c_2' solutions du système de Cramer:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \dfrac{x^3(1+x)^2}{x^2(x+1)} = r(x) \end{cases}$$

$= x(1+x)$

(obtenu ~~de~~ l'équation (1) ~~écrite sous forme~~ normalisée)

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2e^x \\ x(x+1) & x(2+x)e^x \end{vmatrix}}{x^2(x+1)e^x} =$$

$$= -\frac{x^3(x+1)e^x}{x^2(x+1)e^x} = -x \Rightarrow c_1(x) = -\frac{x^2}{2} + cte.$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x(x+1) \end{vmatrix}}{x^2(x+1)e^x} = \frac{x^2\cancel{(x+1)}}{x^2\cancel{(x+1)}e^x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -e^{-x} + cte.$$

En conclusion,

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cdot x + (-e^{-x}) \cdot x^2e^x = -\frac{x^3}{2} - x^2.$$

6) La solution générale est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1x + c_2x^2e^x - \frac{x^3}{2} - x^2.$$

On impose les C.I :

$y(0) = 0 \Rightarrow$ vérifié $\forall c_1, c_2$.

$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 + (2c_2x + c_2x^2)e^x - \frac{3x^2}{2} - 2x \Big|_{x=0} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_2x^2e^x - \frac{x^3}{2} - x^2.$$

$\boxed{\text{Ex 3}}$: 1). $f(0) = e^0 \cdot 0 = 0$.

2). $\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$ où F est ~~une~~ la primitive de e^{-x^2} qui s'annule en 0 $(F(0)=0)$.

$F'(x) = e^{-x^2}$.

Donc $f(x) = e^{x^2} \cdot F(x)$;

e^{x^2} = fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$F(x)$: continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive de e^{-x^2}, $F'(x) = e^{-x^2}$ donc F' contin

(la continuité est assurée en 0 aussi car $\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$.)

$\Rightarrow f(x) = e^{x^2} F(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3) $f'(x) = (e^{x^2})' F(x) + e^{x^2} F'(x) = 2x e^{x^2} F(x) +$

$+ \underbrace{e^{x^2} \cdot e^{-x^2}}_{=1} = 2x \underbrace{e^{x^2} F(x)}_{f(x)} + 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 2x f(x) + 1$

4). De la relation précédente on déduit que si $f \in \mathcal{C}^1$ alors $f' \in \mathcal{C}^1$ donc $f \in \mathcal{C}^2$.

$f^{(2)}(x) = 2 \underbrace{f(x)}_{\in \mathcal{C}^1} + \underbrace{2x f'(x)}_{\in \mathcal{C}^1} \Rightarrow f^{(2)} \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}$

Par récurrence, on peut justifier que $f^{(n)}$ existe et est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, $\forall n \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$

5). a). $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$.

$y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{0}^{\infty} a_n x^n + 1.$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + 1.$$

On réindexe les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n - 1 = 0.$$

$$1 \cdot a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n - 1 = 0.$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} - 2 a_{n-1} \right] x^n - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - 1 = 0. \\ (n+1) a_{n+1} - 2 a_{n-1} = 0, \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

b). $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0.}$

$a_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

c) . $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$.

Si n = pair , $n = 2k$ alors

$$a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1}$$

$$a_{2k-1} = \frac{2}{2k-1} a_{2k-3}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{2}{2k-1} \cdots \frac{2}{1} a_1.$$

$$= \frac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 1} \cdot 1$$

Si n = impair , $n = 2k-1$ alors

$$a_{n+1} = a_{2k-1+1} = a_{2k} = \frac{2}{2k} a_{2k-2} =$$

$$= \frac{2}{2k} \cdot \frac{2}{2(k-1)} \cdots \underbrace{a_0}_{=0} = 0.$$

Donc
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 1}, & n = 2k+1 \\ a_n = 0, & n = 2k \end{cases}$$
(*)

d) Il s'agit d'une série lacunaire. 10.

On calcule le rayon de convergence à l'aide des a_{2k+1} avec le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{R = \infty}$

6). Le problème de Cauchy (3) + C.T : $f(0) = 0$ (th. de Cauchy Lipschitz) a une solution unique. Alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad a_n \text{ donnés par } (*)$$

est le dév. en série entière de f.

f