

## Cas physique : écoulement 1D à vitesse constante

La variable scalaire  $\Phi$  est transportée par convection et diffusion dans un écoulement à vitesse constante et connue ( $u$ ) traversant un domaine mono-dimensionnel représenté sur la figure 2, où figurent les conditions limites du problème.

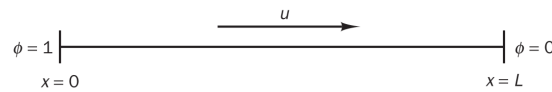


Figure 1: Problème physique.

Soit à résoudre le problème de transport 1D par convection-diffusion

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad \text{pour } 0 < x < L, \quad (1)$$

avec les conditions limites :  $\Phi(0) = \Phi_0 = 1$ ,  $\Phi(L) = \Phi_L = 0$

La solution analytique du problème s'écrit

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{\exp(Re x/L) - 1}{\exp(Re) - 1} \quad \text{avec } Re = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

Si on considère un maillage régulier de la forme ( $x_i = i \delta x$  pour  $i \in [0 : N]$ ), la solution exacte s'écrit sur ce maillage de la façon suivante :

$$\tilde{\Phi}(x_i) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{\exp(Re i \delta x/L) - 1}{\exp(Re) - 1} \quad (2)$$

## Analyse de stabilité : cas d'un schéma centré d'ordre 2

La discrétisation de l'équation (1) par un schéma centré d'ordre 2 de type différences-finies sur le maillage ( $x_i = i \delta x$ ) donne

$$\rho u \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\delta x} = \Gamma \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\delta x^2} \quad \text{où } \Phi_i \simeq \Phi(x_i) \quad (3)$$

Si on introduit le nombre de Reynolds de maille ( $\mathcal{R}$ ) appelé aussi nombre de Péclet, dans l'équation précédente (éq. 3), on obtient

$$(\mathcal{R} - 2)\Phi_{i+1} + 4\Phi_i - (\mathcal{R} + 2)\Phi_{i-1} = 0 \quad \text{où } \mathcal{R} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} \quad (4)$$

On cherche une solution discrète du champ  $\Phi$  sous la forme  $\Phi_i = \hat{\Phi} \varphi^i$  ( $\varphi$  à la puissance  $i$ ), qui respecte l'équation 4, ce qui impose la condition suivante sur  $\varphi$  :

$$(2 - \mathcal{R})\varphi^2 - 4\varphi + (2 + \mathcal{R}) = 0$$

A partir des deux solutions ( $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = \frac{2+\mathcal{R}}{2-\mathcal{R}}$ ) de cette équation, on peut écrire la solution générale de l'équation 4 sous la forme ( $\Phi_i = A\varphi_1^i + B\varphi_2^i$ ), soit :

$$\Phi_i = A + B \left( \frac{2 + \mathcal{R}}{2 - \mathcal{R}} \right)^i$$

$A$  et  $B$  étant des constantes à déterminer à partir des conditions limites :

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) = \Phi_0 &= A + B \\ \Phi(x_N) = \Phi_L &= A + B \varphi_2^N \end{aligned}$$

La solution complète s'écrit alors:

$$\Phi_i = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \left( \frac{\varphi_2^i - 1}{\varphi_2^N - 1} \right) \quad \text{avec} \quad \varphi_2 = \frac{2 + \mathcal{R}}{2 - \mathcal{R}} \quad (5)$$

## Conclusions

- A partir du développement limité de  $\frac{\exp(\mathcal{R}/2)}{\exp(-\mathcal{R}/2)}$  pour  $(\mathcal{R}/2)$  petit, on peut montrer que

$$\varphi_2^i = \exp(Re x_i/L) \left[ 1 + x_i \left( \frac{\rho u}{\Gamma} \right)^3 \frac{(\delta x)^2}{12} + O((\delta x)^4) \right]$$

démontrant ainsi que  $\Phi_i$  est une approximation à l'ordre 2 de  $\tilde{\Phi}$ . Mais ceci n'est valide que pour  $(\mathcal{R}/2)$  petit, c'est-à-dire  $\mathcal{R}/2 \lesssim 1$ .

- Si  $\mathcal{R} > 2$ , alors  $\varphi_2^i$  change de signe alternativement entre deux points consécutifs ( $x_i$ ) et ( $x_{i+1}$ ). C'est donc le schéma numérique qui entraîne une instabilité numérique, comme illustré sur la figure ci-dessous à partir de l'erreur locale  $\epsilon_i = \Phi_i - \tilde{\Phi}(x_i)$ , qui va se comporter de manière similaire à  $\Phi_i$ , car on peut écrire :  $\epsilon_i = \hat{\epsilon} \varphi^i$  à partir de l'équation 5. Ce phénomène est appelé '*oscillations paires-impaires*'.

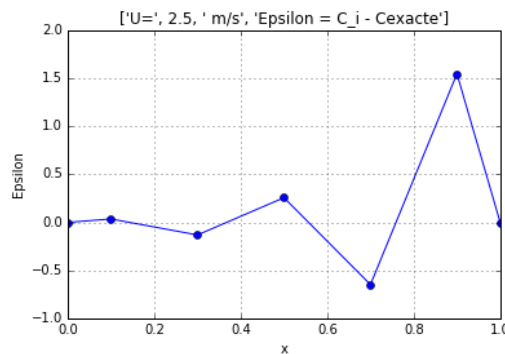


Figure 2: Erreur d'approximation ( $\epsilon$ ) pour un schéma centré d'ordre 2.

## Schémas convectifs

Pour réduire les effets d'instabilité numérique des schémas, d'autres schémas convectifs ont été proposés avec des propriétés différentes de conservation des flux, conservation des propriétés de transport, stabilité et précision.

On se propose d'examiner ces propriétés pour les 3 schémas convectifs ci-dessous.

**Schéma décentré amont ou schéma Upwind** Ce schéma tient compte du sens local de l'écoulement (i.e. signe de la vitesse locale) pour calculer la variable  $\Phi_{(e,w)}$  aux interfaces. La valeur de  $\Phi_{(e,w)}$  est prise égale à celle du nœud amont ( $W, P$ , ou  $E$ ) vis-à-vis de l'écoulement, soit

- Si  $u_e > 0$ ,  $\Phi_e = \Phi_P$ . Sinon,  $\Phi_e = \Phi_E$ .
- Si  $u_w > 0$ ,  $\Phi_w = \Phi_W$ . Sinon,  $\Phi_w = \Phi_P$ .

La formulation générale de l'équation 1D s'écrit :  $a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + b_P$ , avec

	$a_W$	$a_E$	$a_P = a_E + a_W$
$F_e > 0$ et $F_w > 0$	$D_w + F_w$	$D_e$	$D_e + D_w + F_e = a_E + a_W + F_e - F_w$
$F_e < 0$ et $F_w < 0$	$D_w$	$D_e - F_e$	$D_e + D_w + F_w = a_E + a_W + F_e - F_w$

ou en remarquant :  $a_W = D_w + \max(F_w, 0)$  et  $a_E = D_e + \max(-F_e, 0)$ .

**Schéma hybride** Ce schéma (Spalding 1972) consiste en une combinaison entre le schéma centré (2nd ordre, mais instable à grand  $\mathcal{R}$ ) et le schéma Upwind (toujours stable, mais précis au 1er ordre) suivant la valeur de  $\mathcal{R}$ .

- A faible  $\mathcal{R}$ , ( $|\mathcal{R}| < 2$ ), on utilise le schéma centré.
- A grand  $\mathcal{R}$  ( $|\mathcal{R}| \geq 2$ ), on utilise un schéma upwind pour la convection et la diffusion est mise à zéro.

On peut synthétiser cette méthode en :

$$a_W = \max(F_w, 0, D_w + \frac{F_w}{2})$$

$$a_E = \max(-F_e, 0, D_e - \frac{F_e}{2})$$

**QUICK - Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics** Ce schéma (Léonard 1979) est basé sur des développements de Taylor à l'ordre 3 de  $\Phi_{e,w}$ . Il s'agit d'un schéma à trois points : 2 points vers l'amont et 1 point aval. Ceci est équivalent à effectuer une interpolation au point  $w$  à partir de la parabole définie par les 3 points  $WW$ ,  $W$  et  $P$ . On en déduit le schéma suivant:

$$u_e > 0 \Rightarrow \Phi_e = \frac{3\Phi_E + 6\Phi_P - \Phi_W}{8}, \quad \text{Sinon} \quad \Phi_e = \frac{3\Phi_P + 6\Phi_E - \Phi_{EE}}{8}$$

$$u_w > 0 \Rightarrow \Phi_w = \frac{3\Phi_P + 6\Phi_W - \Phi_{WW}}{8}, \quad \text{Sinon} \quad \Phi_w = \frac{3\Phi_W + 6\Phi_P - \Phi_E}{8}$$

La prise en compte des conditions limites s'effectue également à partir d'interpolation sur des paraboles.

## Travail à faire

On prendra  $\Gamma = 0.1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  et  $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$  constants,  $L = 1 \text{ m}$ .

On étudiera les schémas convectifs proposés les uns après les autres. On pourra s'aider de la partie Résultats ci-dessous.

**Codage** 1. Reprendre le code du TP2. Appliquer le schéma convectif 'Upwind'. Il faudra modifier la matrice pour les nœuds courants, mais aussi les conditions aux limites.

2. Même question avec le schéma hybride.
3. Idem pour le schéma QUICK.

**Analyse des résultats** Il s'agit de décrire les propriétés du schéma. Vous illustrerez vos commentaires de figures et de tableaux.

1. Démontrer l'ordre de précision des schémas étudiés.
2. Illustrer les propriétés de stabilité des schémas.
3. Comparer les erreurs commises par les 3 schémas en fonction de  $\mathcal{R}$ .

**Pour aller plus loin ...** Passer le code en 2D.

## Résultats

Le problème se met sous la forme  $a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + S_u$ , avec  $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$ . Ici, du fait de l'incompressibilité, on a  $F_e = F_w$ . Les coefficients sont donnés ci-dessous pour 5 volumes de contrôle en tenant compte des conditions limites. On note  $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$  et  $F = \rho u$ .

**cas n° 1 : schéma Upwind,  $u=0.1$  m/s** On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent :  $F = \rho u = 0.1 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , et  $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . On obtient :

$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.10 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1.10 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1.10 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9337 \\ 0.7879 \\ 0.6130 \\ 0.4031 \\ 0.1512 \end{bmatrix}$$

**cas n° 2 : schéma hybride,  $u = 2.5$  m/s** On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent :  $F = \rho u = 2.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , et  $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . On obtient :

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0. & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 2.5 & 0. & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 0. & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.7143 \end{bmatrix}$$

**cas n° 3 : schéma QUICK,  $u = 0.2$  m/s** On a 5 volumes de contrôle. Les données du problème imposent :  $F = \rho u_2 = 0.2 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , et  $D = \Gamma/\Delta x = 0.5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . On obtient :

$$\begin{bmatrix} 2.175 & -0.592 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 1.075 & -0.425 & 0 & 0 \\ 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 \\ 0 & 0 & 0.025 & -0.817 & 1.925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.583 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9648 \\ 0.8707 \\ 0.7309 \\ 0.5226 \\ 0.2123 \end{bmatrix}$$