UPMC-Licence Mécanique 2015-2016

3A003 : Equations aux dérivées partielles 2

Examen du 18 Mai 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Tout document interdit, travail strictement personnel.

La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

On s'intéresse au problème de dispersion d'un polluant en faible quantité à travers un milieu hétérogène saturé par un fluide qui s'écoule à une vitesse donnée. L'étude entière sera effectuée en régime stationnaire.

Equation de convection-diffusion dans un milieu non-homogène.

Le milieux non-homogène saturé de fluide occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ouvert borné régulier, de frontière $\partial\Omega$. On designe par $u(x)$ (fonction scalaire) la concentration du polluant en tout point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, et par $f(x)$ un terme source, $f \in L^2(\Omega)$. On note $\vec{V}(x)$ le champ de vitesse continûment dérivable dans $\bar{\Omega}$, supposé connu, $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$. L'inconnue u appartenant à l'espace

$$H^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \ \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \ \in L^2(\Omega) i, j = 1, 2, 3 \right\},$$

sera solution du problème suivant :

$$\textbf{(PC)} \quad \begin{cases} -\mathrm{div}(D(x)\nabla u) + \vec{V} \cdot \nabla u = f(x) & x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\mathrm{div}\ (D(x)\nabla u) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(D(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

et $D(x)$ représente le coefficient de diffusion du polluant dans le milieu non-homogène et est une fonction définie sur Ω à valeurs positives, bornée, telle que

$$0 < D_0 \le D(x) \le D_1, \forall x \in \Omega.$$

Cas 1 : $\vec{V}(x)$ vérifie une condition d'incompressibilité div $(\vec{V}) = 0$.

1) Montrer que pour un champ à divergence nulle, div $(\vec{V}) = 0$, et v une fonction régulière définie sur Ω, on a l'égalité suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{V}v) = \vec{V} \cdot \nabla v \tag{2}$$

2) Ecrire la formulation variationnelle **(PV1)** associée au problème **(PC)** : on montrera que si u est solution du **(PC)** alors u est solution de :

$$\textbf{(PV1)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution de :} \\ a_1(u,v) = L(v) \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3}$$

où $H_0^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$, muni de la norme usuelle de l'espace $H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega (\nabla u)^2 dx}$$

et $a_1(.,.)$, $L(.)$ sont des applications **à préciser**.
Justifier que $a_1(.,.)$, $L(.)$ sont des formes bilinéaire, respectivement linéaire.
En utilisant l'égalité (2), montrer que la forme bilinéaire a_1 s'écrit sous la forme :

$$a_1(u,v) = \int_\Omega D(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{V} \cdot (v\nabla u - u\nabla v)dx$$

3) On utilisera le résultat de cours $(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.
a) Rappeler le théorème de trace sur l'espace de Hilbert $(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$.
b) Justifier que $(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

4) Rappeler l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$.

5) Montrer que la forme bilinéaire $a_1(.,.)$ est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. On prendra soin de justifier tous les résultats intermédiaires.

6) La forme bilinéaire $a_1(.,.)$ est-elle symétrique ?

7) Montrer que la forme linéaire $L(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

8) Peut-on établir l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle **(PV1)** ? Justifier la réponse.

9) Montrer l'équivalence entre le problème continu **(PC)** et la formulation variationnelle **(PV1)**.

10) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que la solution u vérifie l'inégalité :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Cas 2 : Cas général div $\vec{V} \neq \vec{0}$.

Dans cette partie, la divergence du vecteur $\vec{V}$ peut être non nulle. On introduit la notation suivante :

$$c(u,v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div } \vec{V})\, u\, v\, dx$$

11) Etablir la nouvelle formulation variationnelle du problème **(PV2)**.
Indication : On reprendra la question 2 du cas 1, en exploitant cette fois l'identité suivante (que l'on vérifiera au préalable) :

$$\text{div } (u\vec{V}) = (\text{div } \vec{V})u + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u$$

On montrera que l'application bilinéaire associée au problème **(PV2)** est :

$$a_2(u,v) = a_1(u,v) + c(u,v).$$

12) **(Bonus)** On suppose qu'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que :

$$\frac{1}{2}(\text{div } \vec{V}(x)) \leq \frac{D_0 - \epsilon}{C_0}, \forall x \in \Omega$$

où C_0 est la constante intervenant dans l'inégalité

$$\int_\Omega v^2 dx \leq C_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \forall x \in H_0^1(\Omega)$$

Montrer que l'application bilinéaire $a_2(.,.)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

13) **(Bonus)** En déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème **(PV2)**.