

Ondes

Thème 5 : d'autres types d'ondes

Exercice 1 : Propagation d'ondes de torsion dans des arbres cylindriques

Les arbres qui transmettent les rotations dans les pompes des installations pétrolières (entre autres) ont besoin d'être inspectés régulièrement pour détecter des usures anormales et dangereuses. Une méthode d'inspection consiste à utiliser la propagation d'ondes de torsion dans les arbres (cylindres de section droite circulaire) : une onde est générée à une extrémité et les échos (signaux dus aux ondes réfléchies le long du cylindre) sont enregistrés. La présence d'un défaut (fissure, soudure endommagée, etc. ; voir figure 1) correspond à une diminution locale de rigidité de torsion, de sorte que l'onde « voit » le défaut comme une interface avec un cylindre d'impédance différente du reste de la barre. Nous proposons en conséquence

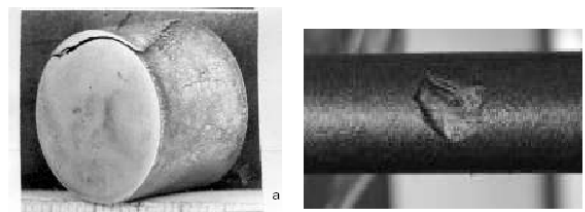


Figure 1 – Photographie de défauts d'usure sur des arbres cylindriques. Tiré de Budenkov & Korobeynikova, « NDT for safety », 2007.

pour l'étude du problème de détection de défaut le modèle suivant. Soit un cylindre d'axe x de diamètre extérieur $2a$ constitué d'un matériau de densité ρ et de coefficients de Lamé λ et μ . Le défaut est modélisé par une interface avec un « matériau équivalent de densité ρ_0 et de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 (voir figure 2). On considérera que la cohésion entre les deux milieux au niveau de l'interface est parfaite (pas de mouvement relatif possible).

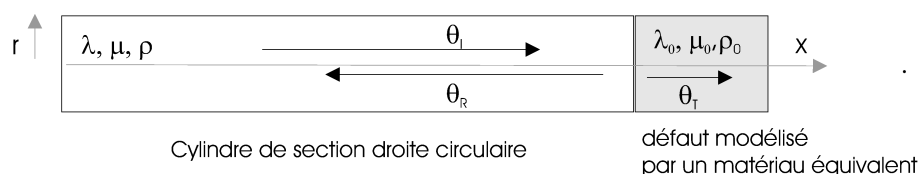


Figure 2 – Schéma de l'expérience.

Équation des ondes de torsion dans un cylindre

Dans cette première partie, on considère un cylindre infini d'axe x de diamètre extérieur $2a$ constitué d'un matériau de densité ρ et de coefficients de Lamé λ et μ . A une coordonnée x quelconque, on considère que la section droite subit un mouvement de rotation de corps rigide ; le mouvement est donc entièrement caractérisé par cette rotation notée $\theta(x)$. Le couple résultant (du à l'ensemble de la section) est noté $C(x)$. On rappelle que la relation de comportement est

$$C(x, t) = \mu I \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad \text{avec} \quad I = \frac{\pi a^4}{2}.$$

1. Rappeler l'équation des ondes de torsion pour la rotation de section $\theta(x, t)$.

Réflexion des ondes de torsion

Dans un premier temps, on considère la réflexion à une surface libre (extrémité libre de l'arbre).

2. Donner les expressions de l'angle de rotation θ_i et du couple C_i associés à une onde plane incidente se propageant dans la direction x .

L'angle de rotation associé à l'onde incidente a pour expression

$$\theta_i(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Le couple C_i a alors pour expression

$$C_i(x, t) = \mu I \frac{\partial \theta_i(x, t)}{\partial x} = -ik\mu I A e^{i(\omega t - kx)}.$$

3. Donner les expressions de l'angle de rotation θ_r et du couple C_r associés à l'onde réfléchie. On notera r_θ le coefficient de réflexion en amplitude de rotation.

4. Écrire formellement les conditions limites en $x = 0$ dans le cas d'une surface libre et en déduire la valeur du coefficient de réflexion.

5. Quelle est l'amplitude de la rotation sur la surface libre ?

6. On considère maintenant la réflexion et la transmission à l'interface avec un milieu caractérisé par les coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 . Donner les expressions de l'angle de rotation θ_t et du couple C_t associés à l'onde transmise. On notera t_θ le coefficient de transmission en amplitude de rotation.

7. Donner les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux et en déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission.

8. Montrer que le coefficient de réflexion dans le cas de l'extrémité libre est un cas particulier du cas étudié ici.

9. On considère finalement le système représenté sur la figure 3. A la différence du cas étudié plus haut, le deuxième cylindre a une section droite de diamètre inférieur au premier. On rappelle que l'on s'intéresse à la propagation d'ondes pour lesquelles la section droite est sollicitée dans son ensemble. Déterminer le coefficient de réflexion.

Application

La figure 4 décrit une configuration de mesure type et un exemple de signal du à des ondes de torsion se propageant dans arbre cylindrique.

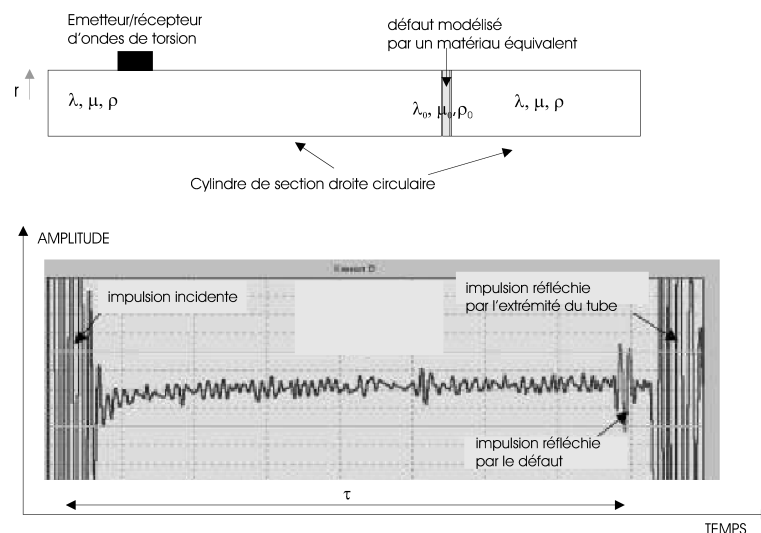


Figure 3 – Exemple de signal expérimental pour la caractérisation d'arbre par ondes de torsion

10. Donner la méthode et les expressions mathématiques simples permettant de localiser le défaut.

11. Comment peut-on avoir une information sur la nature de l'élément réflecteur (fissure, inclusion d'un autre matériau, présence d'une soudure) à partir d'un signal comme représenté sur la figure 4.

12. Si un défaut est localisé très proche de la surface, quel autre type d'onde peut-on utiliser à la place des ondes de torsion ?

Exercice 2 : Ondes de pression dans une conduite déformable

Une conduite linéaire d'axe z , de rayon R_0 et d'épaisseur e petite devant R_0 fait d'un matériau de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν contient un fluide de masse volumique ρ_0 , de célérité c_0 et de pression statique p_0 . On souhaite déterminer la vitesse de l'onde résultant du couplage entre le fluide et le matériau de la conduite. Pour cela, on considérera que le fluide est homogène, imposant que toutes les grandeurs sont indépendantes des coordonnées transverses de la conduite (r et θ) et qu'il est au repos. Au passage de l'onde, la pression dans le fluide modifie la section du tube notée S et donc le rayon R .

1. Effectuer un bilan des échanges de masse et un bilan des efforts sur une tranche infinitésimale de fluide d'épaisseur dz afin d'obtenir les équations de conservation.

2. La pression, la vitesse particulaire et la densité sont recherchées sous la forme de développements limités au premier ordre. Après avoir linéarisé les équations de conservation, déterminer une équation de propagation liant la pression acoustique et la variation de section. Pour cela, la loi d'état liant la variation de densité et la pression acoustique devra être utilisée.

3. Au passage de l'onde, la pression dans le fluide déplace le rayon intérieur R_0 du tube d'une longueur U . Donner l'expression de la variation de section en fonction du déplacement U .

4. La pression statique p_0 et la pression acoustique p_a engendrent respectivement des champs de contrainte statique et dynamique dans le matériau constituant la conduite. Sachant que la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ dans le matériau correspond à la variation relative de périmètre, déterminer l'expression de la partie dynamique de la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$.

5. Dans le cas d'un tube infini sous pression, les composantes non nulles du tenseur des contraintes sont données par les approximations

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{e}, \quad \sigma_{zz} = \nu \frac{pR}{e} \quad \text{et} \quad \sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}.$$

En utilisant la loi de Hooke,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{pp}]$$

déterminer l'expression de la partie dynamique de la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$.

6. Après avoir posé $\eta = e/R_0$, exprimer le déplacement U , puis la variation de section S_a en fonction de la pression acoustique p_a . On remarquera également que la pression p_0 est très faible devant le produit ηE .

7. En déduire l'équation de propagation dont satisfait le champ de pression.

8. Exprimer cette vitesse en fonction de la vitesse de l'onde de plaque définie par la relation

$$c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}.$$

9. Calculer la vitesse de l'onde dans la conduite dans le cas d'une canalisation en acier d'épaisseur $e = 5$ mm et de rayon $R_0 = 10$ cm remplie d'eau. L'acier est caractérisé par la masse volumique $\rho = 7500$ kg.m⁻³, le module d'Young $E = 220$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ et l'eau par la masse volumique $\rho_0 = 1000$ kg.m⁻³ et la vitesse du son $c_0 = 1500$ m.s⁻¹.

10. On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde de pouls dans une artère de diamètre 2,5 cm et d'épaisseur 2 mm contenant du sang. L'artère est caractérisée par la masse volumique $\rho = 1200$ kg.m⁻³, le module d'Young $E = 5$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,5$ et le sang par la masse volumique $\rho_0 = 1060$ kg.m⁻³ et la vitesse du son $c_0 = 1570$ m.s⁻¹.