

Méthodes énergétiques

Energie de déformation

Définitions :

On distingue pour un système isolé, les **énergies propres** (énergies "possédées" par le système) et les **énergies échangées avec l'extérieur**.

Energies propres

Les **énergies externes** liées à la position du système comme :

- l'énergie cinétique E_c
- l'énergie potentielle E_p **par exemple le poids** $E_p = \int_{\Omega} \rho g z dV$

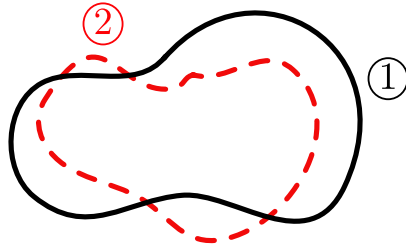
L'**énergie interne** U liée aux mouvements et aux interactions entre les particules constitutives du système.

La somme des énergies propres constitue l'**énergie totale** $E = E_c + E_p + U$

Energies échangées avec l'extérieur

- le travail mécanique des efforts extérieurs appliqués au système W_e
- la quantité de chaleur fournie par l'extérieur Q

Soit un corps Ω ; on peut ramener ce système d'un état ① (**état initial**) à un état ② (**état final**) par l'application d'un ensemble de forces extérieures.



D'après le **principe de conservation de l'énergie**, la variation de l'énergie totale du système est égale à la somme des travaux et chaleurs reçus par le système pendant son évolution entre ces deux états :

$$\Delta E = Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) + W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$$

$Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$: quantité de chaleur fournie par l'extérieur entre les états ① et ②

$W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$: travail des forces extérieures entre les états ① et ②

2

Hypothèses employées :

- matériau élastique linéaire
- aucune variation de température
- poids propre de la poutre négligé (pour satisfaire au repos initial)
- déplacements sont petits (donc n'affectent pas la direction d'application des forces)
- sollicitations extérieures sont appliquées **progressivement** (transformation réversible)

\Rightarrow les effets d'inertie négligés : $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_p = 0$

- pas d'échange de chaleur, toute dissipation calorifique négligée (frottements, effets visqueux, ...)

$\Rightarrow Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = 0$

on a donc : $\Delta U = U^{\textcircled{2}} - U^{\textcircled{1}} = W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$

3

D'après le **théorème de l'énergie cinétique** à un corps déformable :

$$\Delta E_c = W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) + W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$$

avec $W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ le travail des forces intérieures entre les états ① et ②

Comme $\Delta E_c = 0 \Rightarrow W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = -W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) = \Delta U = U^{(2)} - U^{(1)}$

Passage de l'état initial à l'état final de **manière réversible**

$\Rightarrow W_e(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ et $W_i(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$ ne dépendent que de l'état final et initial

\Rightarrow l'énergie interne de déformation U ne dépend pas de l'ordre de l'application des charges

pour un état ① au repos ($U^{(1)} = 0$ donc $U = U^{(2)}$)

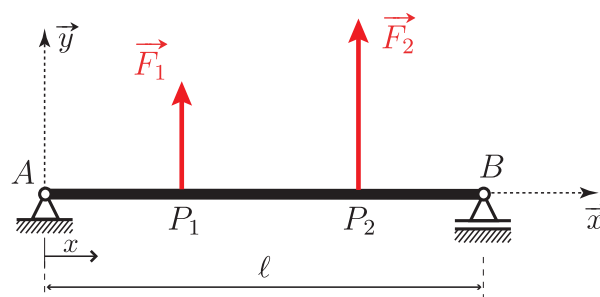
$$\Rightarrow W_e = -W_i = U$$

4

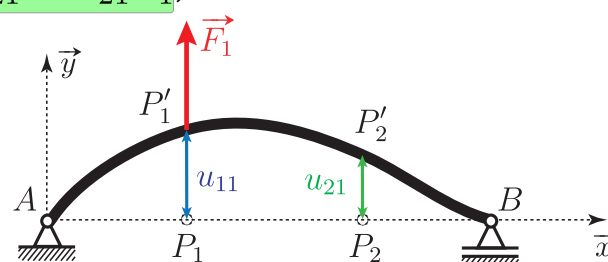
Théorème de Clapeyron :

Coefficients d'influence

On considère une poutre $[AB]$ en équilibre sous l'action de deux forces concentrées \vec{F}_1 et \vec{F}_2 appliquées respectivement en P_1 et P_2



L'application de \vec{F}_1 en P_1 va causer un déplacement du point P_1 ($u_{11} = a_{11}F_1$) mais aussi du point P_2 ($u_{21} = a_{21}F_1$).

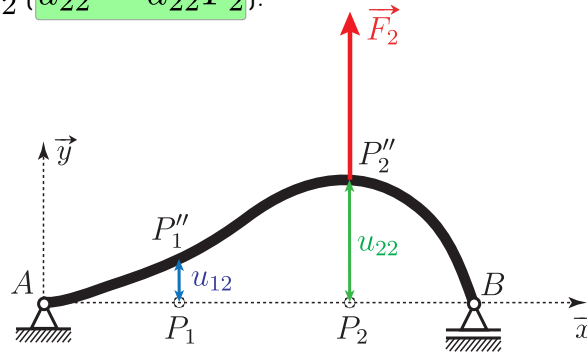


Rq: Les déplacements sont dans la direction de l'effort imposé.

5

La proportionnalité entre les forces et les déplacements nous permet d'introduire les **coefficients d'influence** (a_{11} et a_{21}) qui représentent les déplacements de P_1 et P_2 lorsqu'on applique une force unitaire en P_1

De même l'application d'une force \vec{F}_2 en P_2 cause des déplacements des points P_1 ($u_{12} = a_{12}F_2$) et P_2 ($u_{22} = a_{22}F_2$).



$\delta_1 = u_{11} + u_{12} = a_{11}F_1 + a_{12}F_2$: **dplct projeté** du point P_1 dans la direction de \vec{F}_1

$\delta_2 = u_{21} + u_{22} = a_{21}F_1 + a_{22}F_2$: **dplct projeté** du point P_2 dans la direction de \vec{F}_2

6

Pour une poutre en équilibre sous l'action de forces concentrées $\vec{F}_i = F_i \vec{n}_i$ ($1 \leq i \leq n$) alors le déplacement projeté de \vec{F}_i sur sa direction est :

$$\delta_i = \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j$$

où u_{ij} est la contribution du déplacement provoqué au point P_i par la force \vec{F}_j appliquée en P_j

Rq : Le **1er indice** indique l'**effet** (ici le déplacement en P_i)

Le **2nd indice** indique la **cause** (ici la force \vec{F}_j appliquée en P_j)

7

Formule de Clapeyron

Le travail des forces extérieures est **indépendant de l'ordre d'application des forces**.

On peut faire varier les forces de 0 à leur maximum F_i .

D'après la loi de Hooke, si l'on applique kF_i ($0 < k < 1$), le déplacement de la force kF_i est $k\delta_i$.

Le **travail élémentaire** de l'ensemble des forces s'écrit :

$$dW_e = \sum_{i=1}^n (kF_i) d(k\delta_i) = \sum_{i=1}^n kF_i \delta_i dk$$

donc
$$W_e = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (kF_i) d(k\delta_i) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 k dk \right) F_i \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i \delta_i$$

Rq : Idem pour des couples C_ℓ (autour de \vec{n}_ℓ)

$$\Rightarrow U = W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^r C_\ell \omega_\ell \quad \text{formule de Clapeyron}$$

L'énergie de déformation U ne dépend que du travail des forces extérieures données.

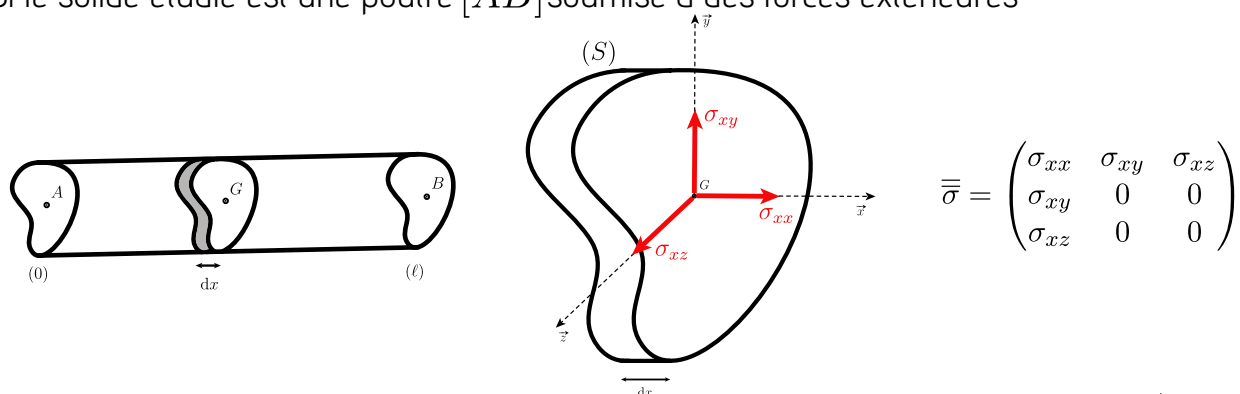
8

Expression de l'énergie de déformation dans le cadre de la RDM

Pour un solide élastique linéaire occupant un volume V , l'énergie interne de déformation emmagasinée par le solide est :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\varepsilon}} dV \quad \text{ou en indiciel} \quad U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

Si le solide étudié est une poutre $[AB]$ soumise à des forces extérieures



Pour une section droite (S) donnée dans le cas des poutres orientées suivant la direction \vec{x} seules interviennent les composantes σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{xz} :

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}] dV$$

9

d'après la loi de Hooke : $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$, $2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\mu}$ et $2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\mu}$

avec $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de rigidité au cisaillement

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{\sigma_{xx}^2}{E} + \frac{1}{\mu} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \right] dV$$

pour un matériau homogène :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \iiint_V \sigma_{xx}^2 dV + \frac{1}{\mu} \iiint_V (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dV \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{1}{E} \iint_S \sigma_{xx}^2 dS + \frac{1}{\mu} \iint_S (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dS \right] dx \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \\ \sigma_{xy} &= \frac{T_y(x)}{S} - z \frac{M_t(x)}{I_G}; \quad \sigma_{xz} = \frac{T_z(x)}{S} + y \frac{M_t(x)}{I_G} \end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^2 &= \left(\frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right)^2 + y^2 \left(\frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \right)^2 - 2y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \left(\frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right) \\ \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 &= \left(\frac{T_y(x)}{S} \right)^2 + z^2 \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 - 2z \frac{T_y(x)}{S} \frac{M_t(x)}{I_G} + \left(\frac{T_z(x)}{S} \right)^2 + y^2 \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 \\ &\quad + 2y \frac{T_z(x)}{S} \frac{M_t(x)}{I_G} \end{aligned}$$

Rq : On va supposer que $(G\vec{y})$ et $(G\vec{z})$ sont **axes principaux d'inertie**

$$\iint_S y dS = m_{Gz} = 0; \quad \iint_S z dS = m_{Gy} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_S yz dS = I_{Gyz} = 0$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \iint_S (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dS &= \left(\frac{T_y(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 I_{Gy} + \left(\frac{T_z(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_t(x)}{I_G} \right)^2 I_{Gz} \\ &= \frac{(T_y(x))^2}{S} + \frac{(T_z(x))^2}{S} + \frac{(M_t(x))^2}{I_G} \quad \text{car} \quad I_G = I_{Gy} + I_{Gz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \sigma_{xx}^2 dS &= \left(\frac{N(x)}{S} \right)^2 S + \left(\frac{M_y(x)}{I_{Gy}} \right)^2 I_{Gy} + \left(\frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \right)^2 I_{Gz} \\ &= \frac{(N(x))^2}{S} + \frac{(M_y(x))^2}{I_{Gy}} + \frac{(M_z(x))^2}{I_{Gz}} \end{aligned}$$

11

L'énergie interne de déformation pour une poutre droite de longueur ℓ à section droite symétrique est donc :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{(N(x))^2}{ES} + \frac{(M_y(x))^2}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} + \frac{(T_y(x))^2}{\mu S} + \frac{(T_z(x))^2}{\mu S} + \frac{(M_t(x))^2}{\mu I_G} \right\} dx$$

Pour une poutre droite plane dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) :



$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{(N(x))^2}{ES} + \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} + \frac{(T_y(x))^2}{\mu S} \right\} dx$$

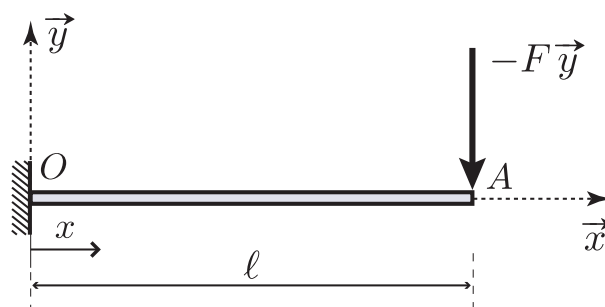
Si l'**élancement** de la poutre est **suffisamment grand**

⇒ on peut **négliger les efforts tranchants** (voire ceux de l'effet normal)

12

Exple d'application du théorème de Clapeyron :

On considère une poutre $[OA]$ de longueur ℓ , constituée d'un matériau homogène, encastrée en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F \vec{y}$ constante en $x = \ell$.



Calculer la flèche en A .

13

En utilisant la méthode des coupures :

$$N(x) = 0, \quad T_y(x) = -F \quad \text{et} \quad M_z(x) = F(x - \ell)$$

En négligeant les effets de l'effort tranchant, l'expression de l'énergie de déformation pour la poutre $[OA]$ est :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} dx = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI_{Gz}} \int_0^\ell (x - \ell)^2 dx \stackrel{X=x-\ell}{=} \frac{F^2}{2EI_{Gz}} \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-\ell}^0 = \boxed{\frac{F^2 \ell^3}{6EI_{Gz}}}$$

D'autre part, le théorème de Clapeyron nous permet d'écrire que :

$$U = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{u}_A = \frac{1}{2} (-F \vec{y}) \cdot (u_A \vec{x} + v_A \vec{y}) = \boxed{-\frac{F v_A}{2}}$$

donc $-\frac{F v_A}{2} = \frac{F^2 \ell^3}{6EI_{Gz}}$ soit $\boxed{v_A = -\frac{F \ell^3}{3EI_{Gz}}}$

Rq : Le théorème de Clapeyron ne peut calculer le déplacement (ou la rotation) qu'au point où est appliquée la charge ponctuelle (ou le couple).

On ne peut pas calculer la flèche pour une charge répartie.

⇒ **nécessité d'utiliser d'autres méthodes énergétiques**

14

Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

On considère une poutre en équilibre sous l'action de deux systèmes de forces :

(a) : le système de forces \vec{F}_i appliquées aux points P_i

(b) : le système de forces \vec{F}_j appliquées aux points P_j

Sous l'action de \vec{F}_i , les déplacements projetés sur la direction \vec{F}_j sont :

u_{ii} pour le point P_i et u_{ji} pour le point P_j

1er indice = effet (dplct)
2nd indice = cause (force)

Sous l'action de \vec{F}_j , les déplacements projetés sur la direction \vec{F}_i sont :

u_{jj} pour le point P_j et u_{ij} pour le point P_i

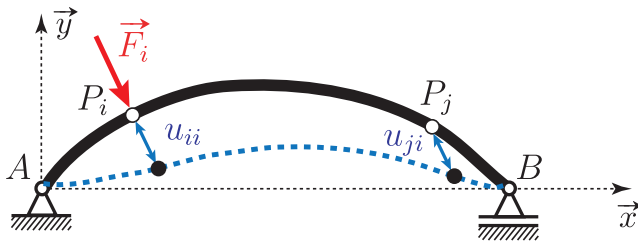
L'énergie interne de déformation ne dépend pas de l'ordre de l'application des charges.

On évalue cette énergie d'ue à l'action simultanée de \vec{F}_i et de \vec{F}_j de deux manières.

15

Phase I

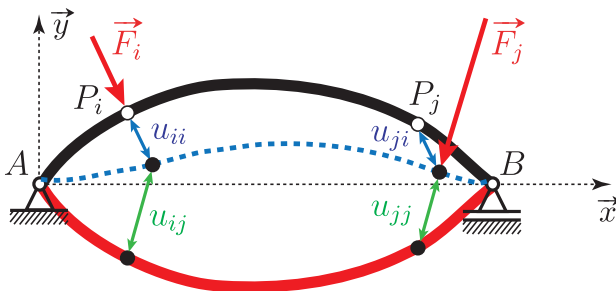
(a) On applique d'abord la force \vec{F}_i au point P_i



d'après théorème de Clapeyron :

$$U_I^{(a)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii}$$

(b) Lors d'une seconde étape on applique la force \vec{F}_j au point P_j



$$U_I^{(b)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj} + \boxed{F_i u_{ij}}$$

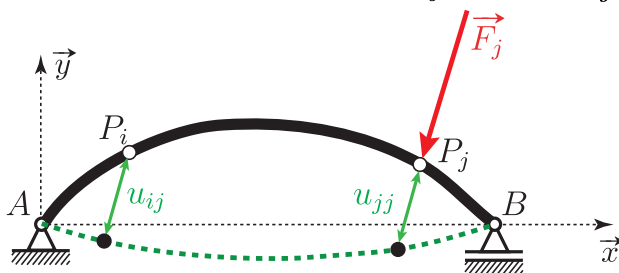
⚠ \vec{F}_i reste constante, se déplace et effectue le travail $F_i u_{ij}$

$$\Rightarrow U_I^{tot} = U_I^{(a)} + U_I^{(b)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii} + \frac{1}{2} F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$$

16

Phase II

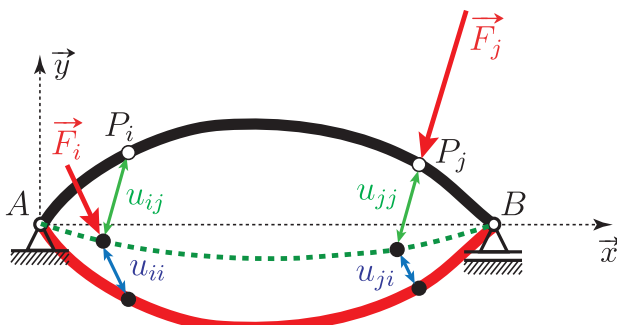
(a) On applique d'abord la force \vec{F}_j au point P_j



d'après théorème de Clapeyron :

$$U_{II}^{(a)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj}$$

(b) Lors d'une seconde étape on applique la force \vec{F}_i au point P_i



$$U_{II}^{(b)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$

$$\Rightarrow U_{II}^{tot} = U_{II}^{(a)} + U_{II}^{(b)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj} + \frac{1}{2} F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$

17

comme $U_I^{tot} = U_{II}^{tot}$ avec

$$U_I^{tot} = \frac{1}{2}F_i u_{ii} + \frac{1}{2}F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$$

$$U_{II}^{tot} = \frac{1}{2}F_j u_{jj} + \frac{1}{2}F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$

$$\Rightarrow F_i u_{ij} = F_j u_{ji}$$

d'où le **théorème de Maxwell-Betti** :

Le travail du système de forces \vec{F}_i pour les déplacements provoqués par le système de forces \vec{F}_j est égal au travail du système de forces \vec{F}_j pour les déplacements provoqués par \vec{F}_i .

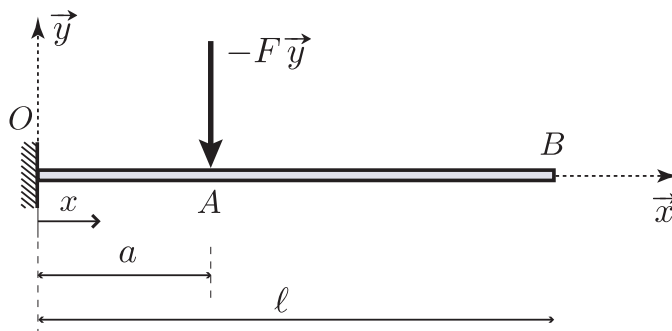
Rq : En introduisant les coefficients d'influence a_{ij} on obtient la relation $u_{ij} = a_{ij}F_j$ de même $u_{ji} = a_{ji}F_i$.

soit $F_i u_{ij} = F_i a_{ij} F_j = F_j u_{ji} = F_j a_{ji} F_i \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

Le théorème de Maxwell-Betti revient donc à écrire l'égalité des coefficients d'influence réciproques.

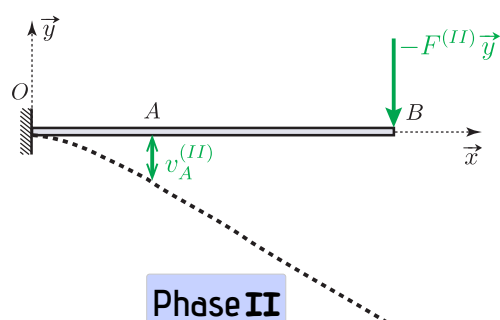
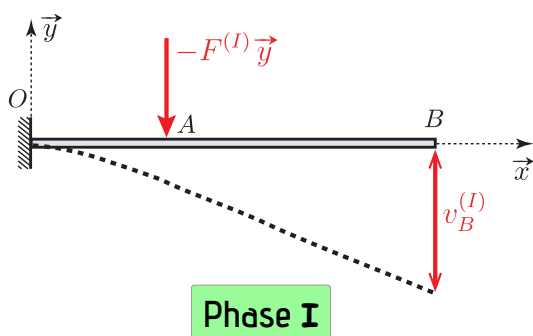
18

Exple d'application du théorème de Maxwell-Betti :



Calculer la flèche en B ($x = \ell$) provoquée par la force $-F \vec{y}$ appliquée en A ($x = a$).

On fait appel au théorème de Maxwell-Betti en considérant les deux phases suivantes :

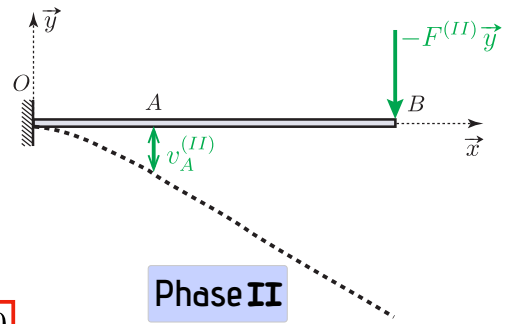


19

$$M_z^{(II)} = EI_{Gz} \frac{d\omega_z^{(II)}(x)}{dx} = F^{(II)}(x - \ell)$$

$$\Rightarrow EI_{Gz} \omega_z^{(II)}(x) = F^{(II)} \left(\frac{x^2}{2} - \ell x \right) + C_1$$

encastrement en O $\omega_z^{(II)}(0) = 0$ soit $C_1 = 0$



Phase II

d'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$EI_{Gz} \omega_z^{(II)}(x) = EI_{Gz} \frac{du_y^{(II)}(x)}{dx} = F^{(II)} \left(\frac{x^2}{2} - \ell x \right)$$

$$\Rightarrow EI_{Gz} u_y^{(II)}(x) = F^{(II)} \left(\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} \right) + C_2$$

encastrement en O $u_y^{(II)}(0) = 0$ soit $C_2 = 0$

par conséquent : $v_A^{(II)} = u_y^{(II)}(a) = \frac{F^{(II)}}{6EI_{Gz}} a^2(a - 3\ell)$

20

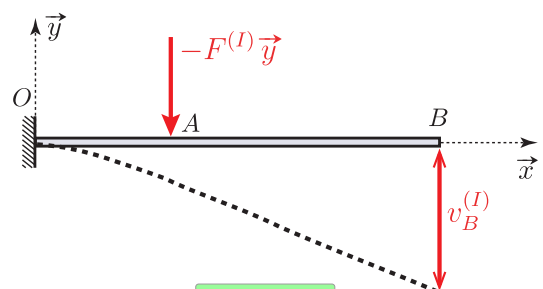
d'après le théorème de Maxwell-Betti :

$$(-F^{(I)} \vec{y}) \cdot (v_A^{(II)} \vec{y}) = (-F^{(II)} \vec{y}) \cdot (v_B^{(I)} \vec{y}) \Rightarrow F^{(I)} v_A^{(II)} = F^{(II)} v_B^{(I)}$$

On obtient donc la relation :

$$v_B^{(I)} = \frac{F^{(I)}}{F^{(II)}} v_A^{(II)} = \frac{F^{(I)}}{6EI_{Gz}} a^2(a - 3\ell)$$

comme $v_B^{(I)} = v_B$ et $F^{(I)} = F$



Phase I

on a donc la valeur de la flèche en B :

$$v_B = -\frac{F}{6EI_{Gz}} a^2(3\ell - a)$$

21