Méthodes énergétiques - flambement de plaques minces

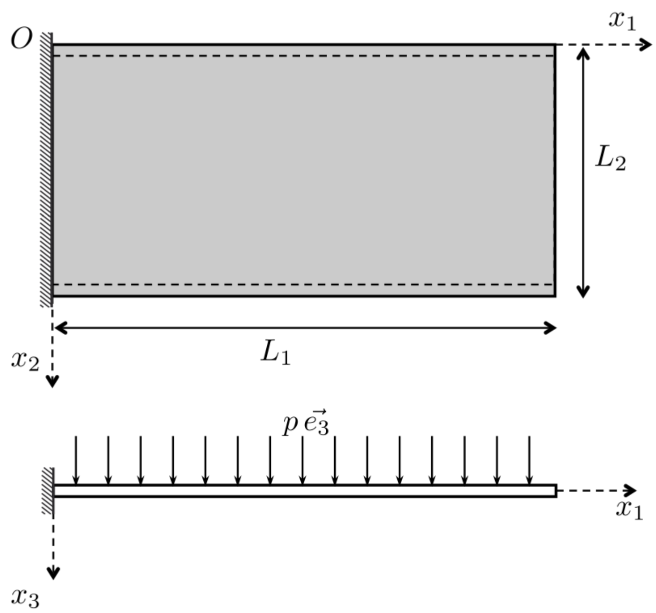
Exercice 1 :

On considère une plaque rectangulaire de dimension $L_1 \times L_2$, encastrée en $x_1 = 0$; libre en $x_1 = L_1$ et simplement appuyée en $x_2 = 0$ et L_2, obéissant à la ***théorie de Love-Kirchhoff***, soumise à une densité surfacique de force $p_3 = p =$ cste suivant $\vec{e_3}$.

On choisit le déplacement vertical $w(x_1, x_2)$ satisfaisant les conditions aux limites de la forme :

$$w(x_1,x_2) = C_1\ f_1(x_1,x_2) \quad \text{avec} \quad f_1(x_1,x_2) = \left(\frac{x_1}{L_1}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right).$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{L_1^2} \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$



• Vérification des C.L. cinématiques :

en $x_1 = 0$ encastrement

$$\left\| \begin{array}{l} w(x_1=0, x_2) = 0 \quad \text{ok} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_1=0,x_2) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1=0,x_2) = 0 \quad \text{ok} \end{array} \right.$$

en $x_2 = 0$ et L_2 appui simple

$w(x_1, x_2 = 0 \text{ ou } L_2) = 0$ ok

1) Calculer l'énergie potentielle totale E_p Π de la structure en fonction de l'inconnue C_1.

$\Pi = U + V_e$

U : énergie de déformation élastique ; $U = \cancel{U_m} + U_f$

membranaire 0

flexion

V_e : potentiel des forces ext.

$$\boxed{U = U_f = \frac{1}{2}\iint_\Omega D\left\{(\mathrm{Tr}\,\mathbb{K})^2 - 2(1-\nu)(\det \mathbb{K})\right\} dx_1\,dx_2}$$

hyp L.K : $\mathbb{K} = -\overline{\overline{\mathrm{grad}}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, w) = \begin{pmatrix} -w_{,11} & -w_{,12} \\ -w_{,12} & -w_{,22} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}\,\mathbb{K} = -(w_{,11} + w_{,22}) = -\Delta w$ et $\det \mathbb{K} = w_{,11} w_{,22} - (w_{,12})^2$

$$\boxed{V_e = -\iint_{\mathcal{D}} \left(p_\alpha \cancel{u_\alpha}^{\,0} + \underbrace{p_3}_{p}\, w \right) dA - \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(T_\alpha \cancel{u_\alpha}^{\,0} + T_{eff}\, w - M_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dl}$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} = \underbrace{\cancel{\int_{x_1=0}}^{\,0}}_{\substack{\text{encastrement} \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0}} + \underbrace{\cancel{\int_{x_1=L_1}}^{\,0}}_{\substack{\text{bord libre} \\ T_{eff} = M_{\nu\nu} = 0}} + \underbrace{\cancel{\int_{x_2=0} + \int_{x_2=L_2}}^{\,0}}_{\substack{\text{appui simple} \\ w=0 \text{ et } M_{\nu\nu}=0}}$$

donc $\underline{V_e = -p \iint_{\mathcal{D}} w \, dx_1 dx_2}$

et $\underline{U = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[w_{,11} w_{,22} - (w_{,12})^2 \right] \right\} dx_1 dx_2}$

$$w = C_1 \left(\frac{x_1}{L_1} \right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right)$$

$$w_{,1} = C_1 \frac{2x_1}{L_1^2} \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \; ; \; w_{,11} = \frac{2C_1}{L_1^2} \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right)$$

$$w_{,12} = C_1 \frac{2}{L_1^2} x_1 \left(\frac{\pi}{L_2} \right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right)$$

$$w_{,2} = C_1 \left(\frac{x_1}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \; ; \; w_{,22} = -C_1 \left(\frac{x_1}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right)$$

- $$(\Delta w)^2 = (w_{,11} + w_{,22})^2 = \left(C_1 \frac{1}{L_1^2} \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \left[2 - x_1^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right] \right)^2$$
$$= \frac{C_1^2}{L_1^4} \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \left[2 - \frac{\pi^2 x_1^2}{L_2^2} \right]^2$$

- $$w_{,11} w_{,22} - (w_{,12})^2 = -\frac{2C_1^2}{L_1^2} \left(\frac{x_1}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) - C_1^2 \frac{4x_1^2}{L_1^4} \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right)$$
$$= -\frac{2C_1^2}{L_1^4} x_1^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) + 2 \cos^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \right]$$

$$= -\frac{2C_1^2}{L_1^4} x_1^2 \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 \left[1 + \cos^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)\right]$$

Rq : $\displaystyle\int_0^{L_2} \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) dx_2 = \int_0^{L_2} \cos^2\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) dx_2 = \frac{L_2}{2}$

- $$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} \left\{ \frac{C_1^2}{L_1^4}\frac{L_2}{2} \overbrace{\left[2 - \frac{\pi^2 x_1^2}{L_2^2}\right]^2}^{4 + \frac{\pi^4 x_1^4}{L_2^4} - 4\frac{\pi^2 x_1^2}{L_2^2}} + \frac{4C_1^2}{L_1^4}(1-\nu)\left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 x_1^2 \overbrace{\left[L_2 + \frac{L_2}{2}\right]}^{\frac{3L_2}{2}} \right\} dx_1$$

$$= \frac{DC_1^2 L_2}{4L_1^4} \left\{ \left(4L_1 + \frac{\pi^4}{L_2^4}\frac{L_1^5}{5} - \frac{4\pi^2 L_1^3}{3L_2^2}\right) + 4(1-\nu)\left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 \cancel{3} \times \frac{L_1^3}{\cancel{3}} \right\}$$

$$U = \frac{DC_1^2 L_2}{4L_1^3}\left\{4 + \frac{1}{5}\pi^4\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^4 - \frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + 4(1-\nu)\pi^2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{U = \frac{DC_1^2 L_2}{4L_1^3}\left\{4 + \frac{\pi^4}{5}\eta^4 - \frac{4\pi^2}{3}\eta^2 + 4(1-\nu)\pi^2\eta^2\right\}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{L_1}{L_2}}$$

- $$V_e = -p\iint_D w \, dx \, dx_2$$

$$= -pC_1\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left(\frac{x_1}{L_1}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) dx_1 \, dx_2$$

$$= -\frac{pC_1}{L_1^2}\underbrace{\int_0^{L_1} x_1^2 \, dx_1}_{\frac{L_1^3}{3}} \underbrace{\int_0^{L_2}\sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) dx_2}_{\frac{2L_2}{\pi}} \Rightarrow \boxed{V_e = -\frac{2}{3}pC_1\frac{L_1 L_2}{\pi}}$$

donc $$\boxed{\Pi = \frac{DC_1^2 L_2}{4L_1^3}\left\{4 + \frac{\pi^4}{5}\eta^4 - \frac{4\pi^2}{3}\eta^2 + 4(1-\nu)\pi^2\eta^2\right\} - \frac{2}{3}pC_1\frac{L_1 L_2}{\pi}}$$

2) Déterminer C_1.

On minimise l'énergie potentielle totale :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = 0 \rightsquigarrow \frac{D C_1 \cancel{L_2}}{2L_1^3}\{\dots\} - \frac{2}{3}p\frac{L_1\cancel{L_2}}{\pi} = 0$$

$$\text{donc} \quad C_1 = \frac{4}{3\pi}p\frac{L_1^4}{D\{\dots\}}$$

3) En déduire que le déplacement au centre de la plaque est :

$$w_{\text{centre}} = \frac{5pL_1^4}{\pi D}\frac{1}{[60 + 20\pi^2(2-3\nu)\eta^2 + 3\pi^4\eta^4]} \qquad \text{avec} \qquad \eta = \frac{L_1}{L_2}.$$

$$w_{centre} = w\left(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}\right) = C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = \frac{C_1}{4}$$

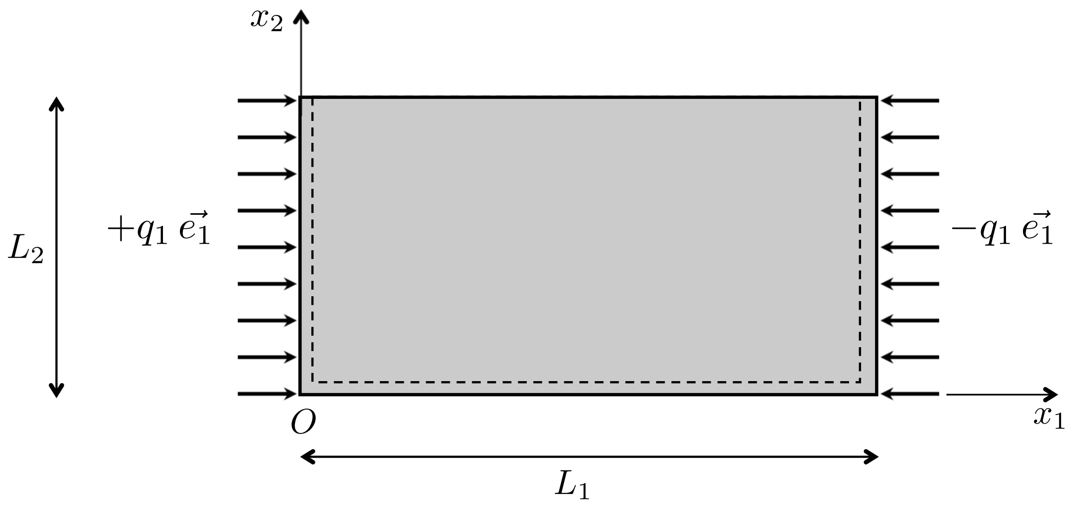
$$w_{centre} = \frac{pL_1^4}{3\pi D} \times \frac{1}{\left\{4 + \frac{\pi^4}{5}\eta^4 + (\underbrace{4 - 4\nu - \frac{4}{3}}_{})\pi^2\eta^2\right\}}$$

$$\left(\frac{8}{3} - 4\nu\right) = \frac{4}{3}(2 - 3\nu)$$

$$\boxed{w_{centre} = \frac{5pL_1^4}{\pi D} \times \frac{1}{60 + 3\pi^4\eta^4 + 20(2-3\nu)\pi^2\eta^2}}$$

Exercice 2 :

On considère une plaque rectangulaire de dimension $L_1 \times L_2$ simplement appuyée en $x_1 = 0$, $x_1 = L_1$ et $x_2 = 0$ et libre en $x_2 = L_2$, mise en compression par une densité linéique de force $+q_1\ \vec{e_1}$ en $x_1 = 0$ et $-q_1\ \vec{e_1}$ en $x_1 = L_1$.



Le déplacement vertical $w(x_1, x_2)$ peut être approché en utilisant la méthode de Ritz par la forme :

$$w(x_1, x_2) = C_1\ f_1(x_1, x_2) \quad \text{avec} \quad f_1(x_1, x_2) = x_2\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right).$$

satisfaisant les conditions aux limites cinématiques.

1) Déterminer la charge critique de flambement de ce problème[1].

1. On rappelle que l'incrément de l'énergie potentielle totale sous flambement s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta\Pi \quad = \quad & \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{D}} D\{(w_{,11} + w_{,22})^2 + 2(1-\nu)\left[(w_{,12})^2 - w_{,11}w_{,22}\right]\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
& + \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{D}} \left[N_{11}\,(w_{,1})^2 + 2N_{12}w_{,1}w_{,2} + N_{22}\,(w_{,2})^2\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$