Sorbonne Université **Année universitaire 2017/2018**

Licence de Mécanique
UE 3A005 : Méthodes Numériques pour la Mécanique
Examen du 20 juin 2018 (2nde session, durée 2h)

Sans documents ni équipement électronique.

Les Exercices 1, 2 et 3 sont indépendants. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction, de la clarté et de la justesse du raisonnement. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1. Résolution d'E.D.O. (Barème : 7 points / 20).
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = f\left(t, u(t)\right), \text{ pour t > 0}$$
$$u(t=0) = u_0$$

où f est une fonction à valeurs réelles de t et de $u(t)$, et u_0 est un nombre réel donné et non nul.
Soit Δt un pas de temps donné, on subdivise l'intervalle $I = [0; T]$ en sous-intervalles de longueur Δt, et on recherche en chaque noeud $t_i = i\Delta t$ $(i = 1, 2, ..., N)$ la valeur inconnue u_i qui approche $u(t_i)$. Partant de la donnée initiale u_0 à $t_0 = 0$, l'ensemble des valeurs $(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_N)$ représente ainsi la solution numérique approchée aux instants $(t_1, t_2, ..., t_N)$ avec $t_N = N\Delta t = T$. On considère trois schémas de résolution :
- Schéma a : Euler Explicite

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t f\left(t_i, u_i\right)$$

- Schéma b : Euler Implicite

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t f\left(t_{i+1}, u_{i+1}\right)$$

- Schéma c : Point Milieu

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_i + \frac{\Delta t}{2} f\left(t_i, u_i\right)$$
$$\widetilde{u}_{i+1} = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{i}{2}}\right)$$
$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \widetilde{u}_{i+1}$$

a. (1 point) Donner une interprétation géométrique de ces trois schémas de résolution.
b. (3 points) On étudie le problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = u(t), \text{ pour t > 0}$$
$$u(t=0) = 1$$

Calculer la solution analytique du problème.
Appliquer les trois schémas (Euler Explicite, Euler Implicite, Point Milieu) au problème et déduire par récurrence l'expression de la solution approchée u_i en fonction de i et Δt pour chaque schéma.

c. (3 points) On utilise à présent les résultats de la Question b. pour déterminer l'ordre de la méthode. On rappelle les développements limités suivants au voisinage de $x=0$ à l'ordre p :

$$\begin{array}{c}\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^p}{p!} + O(x^{p+1}) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ +\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)\frac{x^p}{p!} + O(x^{p+1})\end{array}$$

Par ailleurs, on peut montrer par récurrence les relations suivantes pour le développement limité de l'exponentielle au voisinage de $x=0$ mis à la puissance m :

$$\begin{array}{c}(exp(x))^m = (1+x)^m + O(x^2) \\ (exp(x))^m = (1 + x + \frac{x^2}{2!})^m + O(x^3)\end{array}$$

Pour chacun des trois schémas, utiliser les développements précédents pour exprimer l'erreur de consistance e_{i+1} :

$$e_{i+1} = u(t_{i+1}) - u_{i+1}$$

qui donne l'écart entre la solution exacte $u(t_{i+1})$ et la solution approchée u_{i+1} du problème de Cauchy au temps t_{i+1}.
En déduire l'ordre de chacun des trois schémas d'Euler Explicite, d'Euleur Implicite et du Point Milieu.

Exercice 2. Résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient (6 points / 20).
On cherche à résoudre le système $Ax = b$ par la méthode du gradient à pas optimal, avec la matrice A, le vecteur x et le vecteur second membre b définis respectivement par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a. (1 point) Peut-on appliquer l'algorithme du gradient à la résolution du système $Ax = b$? Justifier votre réponse.

b. (4 points) On rappelle l'algorithme du gradient à pas optimal :
Initialisation avec un vecteur $x^{(0)}$, calcul du vecteur direction de descente $d^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ et du pas de descente $\rho^{(0)} = \frac{{}^T d^{(0)} \cdot d^{(0)}}{{}^T d^{(0)} \cdot A d^{(0)}}$.
A l'itération k ($k = 0, 1, 2, ...$), on calcule successivement :
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}$
$d^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$
$\rho^{(k+1)} = \frac{{}^T d^{(k)} \cdot d^{(k)}}{{}^T d^{(k)} \cdot A d^{(k)}}$
et on itère tant que $\|d^{(k+1)}\| \geq \varepsilon$ (ici on considère $\varepsilon = 0,01$).
En prenant pour vecteur initial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

effectuer les trois premières itérations de l'algorithme du gradient (soit l'initialisation, puis k = 0, 1). Vérifier les propriétés d'orthogonalité des directions de descente successives.

c. (1 point) La solution exacte est donnée par :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On atteint le critère de convergence sur la norme 2 de $d^{(k)}$ avec une précision de 10^{-2} au bout de k = 12 itérations. Pour une précision meilleure, inférieure à 10^{-8}, il faut poursuivre jusqu'à k = 43 itérations. Expliquez brièvement comment on peut améliorer la vitesse de convergence ?

Exercice 3. Méthodes directes : méthode d'élimination de Gauss (7 points / 20).
On considère le système linéaire $Cx = d$, dans lequel la matrice C, le vecteur solution x et le vecteur second membre d sont respectivement définis par :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a. (2 points) Résoudre le système de manière exacte par la méthode de Gauss sans pivotage. Exprimer le vecteur solution x en fonction de ε. Quelle solution x obtient-on lorsque $\varepsilon \to 0$?

b. (2 points) Résoudre le système $Cx = d$ de manière exacte, en utilisant la méthode de Gauss après permutation des deux premières lignes du système. Vérifier que la solution obtenue est identique à la solution calculée à la Question a.

c. (1 point) On reprend à présent le système triangulaire obtenu à la Question a. à l'issue de la procédure d'élimination de Gauss, système qui s'écrit sous la forme $U_a x_a = b_a$, avec U_a matrice triangulaire supérieure et b_a le vecteur second membre associé. Introduire la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$ dans ce système.
Résoudre ensuite ce système de manière "approchée", en considérant une précision de trois chiffres significatifs (c'est-à-dire telle que $2 - \varepsilon = 2 - 10^{-4} \simeq 2$, et $1 - \varepsilon = 1 - 10^{-4} \simeq 1$). On note x_a la solution approchée obtenue.

d. (1 point) On reprend le système triangulaire obtenu à la Question b., qui s'écrit sous la forme $U_b x_b = b_b$, U_b matrice triangulaire supérieure et b_b le vecteur second membre correspondant. Introduire la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$ dans ce système.
Résoudre ce système de manière "approchée", en considérant une précision de trois chiffres significatifs (telle que $1 - \varepsilon = 1 - 10^{-4} \simeq 1$). On note x_b la solution approchée obtenue.

e. (1 point) Comparer les deux solutions x_a et x_b obtenues respectivement aux Questions c. et d. Justifier les résultats obtenus.