

## Ecoulements turbulents librement cisailés

Ce travail dirigé se consacre à la recherche de solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes moyennées pour un jet plan libre. Seule une petite catégorie d'écoulements, comme les couches de mélange, les sillages ou les jets, admet ce type de solution.

Le développement naturel d'un sillage et d'un jet libre est illustré sur les figures 1,1. Après une région de transition au voisinage du corps ou de la tuyère, d'une longueur de l'ordre de quelques diamètres/hauteurs du jet, on trouve une zone dite pleinement développée présentant un caractère autosimilaire, qui implique par exemple que les profils des vitesses moyennes dans la direction transversale ont une allure identique, indépendante de la position axiale à laquelle on observe le champ de vitesse.

On se propose ici de déterminer de façon analytique les propriétés de la zone pleinement développée d'un sillage et d'un jet plan. On suppose que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé pour que l'écoulement soit turbulent, mais que le nombre de Mach est suffisamment petit pour que l'écoulement reste incompressible.

### Équations de Navier-Stokes moyennées

1. *Rappeler les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement pour le champ moyen pour des écoulements 2D (noter  $x_1$  et  $y_2$  les coordonnées axiale et transverse, respectivement).*
2. *Rappeler la loi de comportement de Boussinesq pour le tenseur de Reynolds.*

### Simplification des équations moyennées

On se propose de simplifier les équations du champ moyen en négligeant les termes de faible amplitude. On introduit les échelles suivantes pour caractériser l'écoulement :

- $U$  : échelle de vitesse moyenne axiale ;
- $L$  : échelle de longueur axiale ;
- $V$  : échelle de vitesse transversale ;
- $l$  : échelle de longueur transversale ;
- $q$  : échelle des fluctuations de vitesse.

On suppose également que l'élargissement du jet est lent dans la direction axiale ( $x_1$ ) et que le nombre de Reynolds du jet est élevé. Par ailleurs on rappelle que le jet possède une extension infinie dans la direction latérale ( $x_3$ ).

3. *Estimer le rapport entre les échelles  $l$  et  $L$ , et définir le nombre  $Ul/\nu$ .*
4. *À l'aide des hypothèses précédentes et de l'équation de continuité montrer que l'échelle de vitesse moyenne transversale est petite devant l'échelle de vitesse moyenne axiale et que l'on a*

$$V \sim \frac{l}{L} U \quad (1)$$

5. Montrer que l'équation de quantité de mouvement peut être réécrite sous la forme approchée suivante

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2') \quad (2)$$

En déduire que l'échelle des fluctuations de vitesse est telle que

$$q \sim \sqrt{\frac{l}{L}} U \quad (3)$$

6. En partant de l'équation de quantité de mouvement suivant  $x_2$ , montrer que la pression est donnée par

$$\bar{p} + \rho \bar{u}_2'^2 = p_\infty \quad (4)$$

où  $p_\infty$  est la pression loin du sillage ou du jet ( $x_2 \rightarrow \infty$ ). En déduire que le gradient de pression longitudinal est de l'ordre de

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \sim \frac{U^2}{L} \frac{l}{L} \quad (5)$$

7. Simplifier à nouveau l'équation de quantité de mouvement suivant  $x_1$  et montrer que le champ moyen est régi par le système d'équations :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1 \bar{u}_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1' \bar{u}_2') \quad (7)$$

8. Montrer que, pour un jet, la quantité de mouvement selon  $x_1$  :

$$I = \int_0^\infty \rho \bar{u}_1^2 dx_2 \quad (8)$$

se conserve dans toute section transverse.

9. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement montrer que :

$$\int_0^\infty \rho \bar{u}_1 (U_\infty - \bar{u}_1) dx_2 = \frac{D}{2} \quad (9)$$

avec  $D$  la force de traînée s'exerçant sur le corps.

## Solution autosimilaire pour un jet plan

Afin de résoudre le système d'équations (6-7), on cherche des solutions autosimilaires de la forme :

$$\bar{U}_1 = U_m(x_1) f(\eta) \quad (10)$$

$$\bar{U}_2 = U_m(x_1) g(\eta) \quad (11)$$

$$-\bar{u}_1' \bar{u}_2' = U_m^2(x_1) h(\eta) \quad (12)$$

où  $U_m(x_1)$  est la vitesse moyenne sur l'axe du jet. La quantité  $\eta = x_2/\delta(x_1)$  est la distance transversale normalisée par la demi-largeur du jet. La demi-largeur est telle que  $\bar{U}_1(\eta) = U_m(x_1)/2$ .

16. À l'aide des résultats expérimentaux fournis sur la figure 2, montrer que l'hypothèse d'autosimilarité de l'écoulement est valide.

17. Montrer dans un premier temps que la vitesse transversale est donnée par l'expression :

$$\bar{U}_2 = - \int_0^{x_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} dx'_2 \quad (13)$$

18. Montrer ensuite que

$$\bar{U}_1 \bar{U}_2 + \int_0^{x_2} \frac{\partial \bar{U}_1^2}{\partial x_1} dx'_2 = -\overline{u'_1 u'_2} \quad (14)$$

19. Montrer que la demi-largeur  $\delta$  du jet varie linéairement avec la position axiale. On écrira :

$$\frac{\delta}{h} = a \frac{x_1 - x_0}{h} \quad (15)$$

où  $h$  est la hauteur du jet à la sortie de la tuyère.

20. En invoquant la conservation de la quantité de mouvement dans une section du jet, montrer que la vitesse moyenne sur l'axe peut se mettre sous la forme

$$\frac{U_m}{U_j} = b \sqrt{\frac{h}{x_1 - x_0}} \quad (16)$$

## Profil transversal des vitesses moyennes

Afin de fermer le système d'équations (6-7) on introduit un modèle de viscosité turbulente pour le tenseur des contraintes de Reynolds :

$$-\overline{u'_1 u'_2} = \nu_t \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \quad (17)$$

où  $\nu_t$  est la viscosité turbulente.

21. Montrer que la fonction  $f(\eta)$  est solution de l'équation :

$$\frac{1}{c} f' + \frac{a}{2} f \int_0^\eta f d\eta' = 0 \quad (18)$$

où  $c$  et  $a$  sont des constantes. On admettra que la solution de cette équation est de la forme

$$f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(d\eta)} \quad (19)$$

avec  $d = \sqrt{ac}/2$ . À l'aide de la définition de la demi-largeur du jet, montrer que

$$d = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0.88 \quad (20)$$

On admettra que le profil de la vitesse moyenne transversale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\bar{U}_2}{U_m} = g(\eta) = \frac{a}{2d} \left[ \frac{2d\eta}{\cosh^2(d\eta)} - \tanh(d\eta) \right] \quad (21)$$

Les fonctions  $f(\eta)$  et  $g(\eta)$  sont tracées sur la figure 3.

22. Tracer l'allure des lignes de courant associées au champ moyen à l'intérieur et au voisinage du jet.

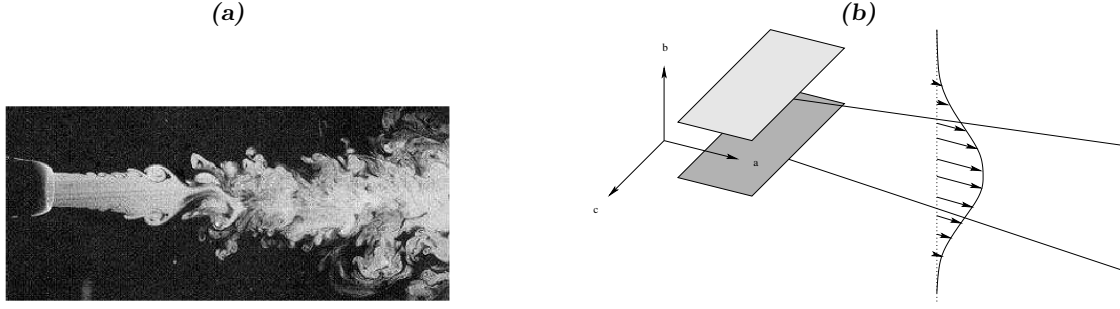


FIGURE 1 – (a) Visualisation d'un jet rond turbulent pour un nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la buse  $D$  de  $Re_D \approx 10^4$ . (b) Vue schématique du jet plan et du système de coordonnées. Directions :  $x_1$  = "axiale",  $x_2$  = "transversale",  $x_3$  = "latérale".

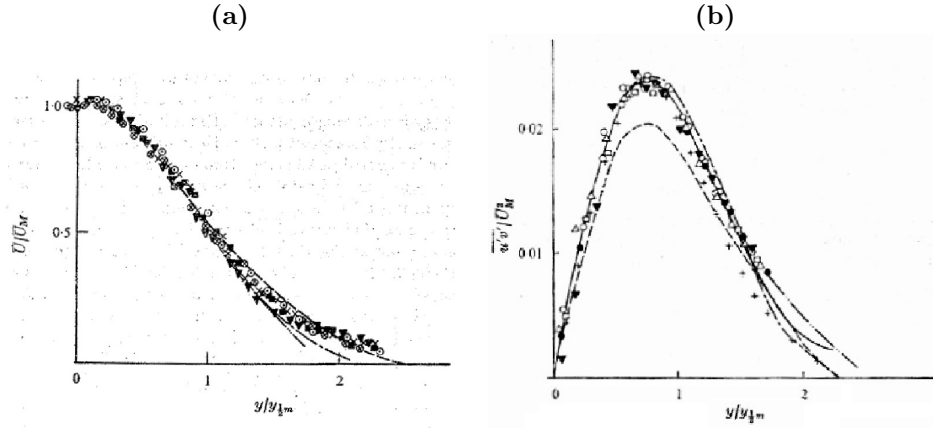


FIGURE 2 – Données expérimentales de Gutmark & Wygnanski (*Journal of Fluid Mechanics*, **73**, 1976) obtenues pour un jet plan. (a) Profil de la vitesse moyenne axiale normalisée par la vitesse sur l'axe  $\bar{U}_1/\bar{U}_m$  ( $\bar{U}/\bar{U}_M$  avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet  $\eta$  ( $y/y_{1/2m}$  sur la figure), pour différentes positions axiales :  $\blacktriangledown$ ,  $x_1/h = 118$ ;  $\times$ ,  $x_1/h = 103$ ;  $\blacksquare$ ,  $x_1/h = 88$ ;  $\otimes$ ,  $x_1/h = 76$ ;  $\odot$ ,  $x_1/h = 65$ . ( $h$  : hauteur initiale du jet). (b) Profil de la contrainte de Reynolds  $\bar{u}_1'\bar{u}_2'/\bar{U}_m^2$  ( $\bar{u}'v'/\bar{U}_M^2$  avec les notations de la figure) en fonction de la distance normalisée à l'axe du jet  $\eta$  ( $y/y_{1/2m}$  sur la figure), pour différentes positions axiales :  $\circ$ ,  $x_1/h = 143$ ;  $\triangle$ ,  $x_1/h = 129$ ;  $\blacktriangledown$ ,  $x_1/h = 118$ ;  $\square$ ,  $x_1/h = 106$ ;  $\bullet$ ,  $x_1/h = 95$ ;

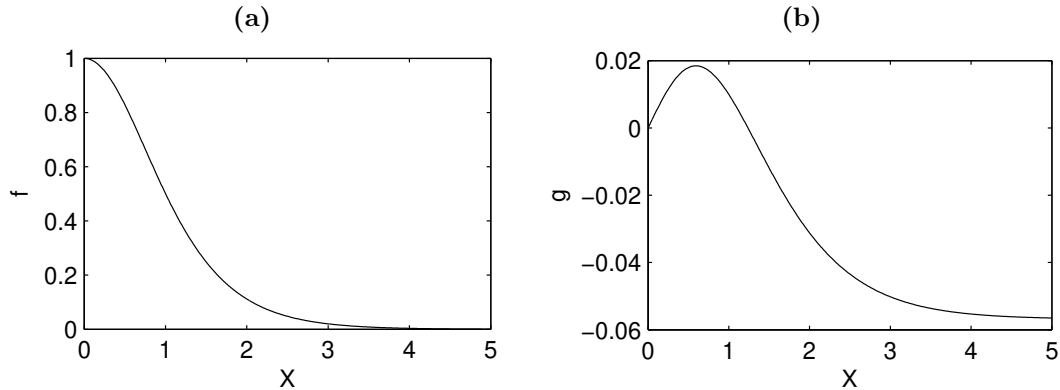


FIGURE 3 – Tracés des fonctions  $f(\eta)$  et  $g(\eta)$  (pour  $a = 0.1$ ).