•

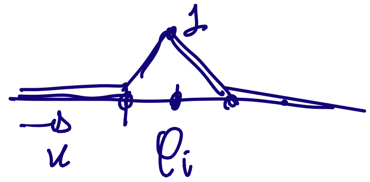
MU4MES01 Analyse des structures par la méthode des éléments

CHAPITRE 3

Approximation des champs solutions et dérivés

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

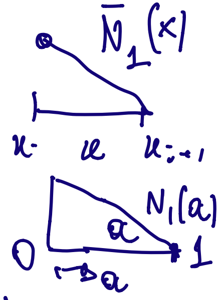
Approximation variationnelle: vision d'ensemble



Formulation variationnelle:

$$Trouver\ \underline{u}^h \in U^h_{ad}(\underline{u}^d)\ tel\ que$$

$$a(\underline{u}^h,\underline{v}^h) = l(\underline{v}^h)\quad \forall \underline{v}^h \in\ U_{ad}(\underline{u}^d)$$



Pour l'élasticité linéaire:

forme "matricielle" (voigt)

$$a(\underline{u}^h,\underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^h):\mathbb{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^h)dV = \int_{\Omega^h} {}^t\{\varepsilon(\underline{v}^h)\}\,[A]\,\{\varepsilon(\underline{u}^h)\}\,dV$$

Discret

$$l(\underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} \underline{f}_v.\underline{v}^h dV + \int_{\partial\Omega^h_F} \underline{F}^d.\underline{v}^h dS = \int_{\Omega^h} {}^t\{v^h\}.\{f_v\}\,dV + \int_{\partial\Omega^h_F} {}^t\{v^h\}.\{F^d\}\,dS$$

Avec l'approximation de Galërkin:

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \sum_{I=1} \varphi_I(\underline{x})\, \underline{U}_I \qquad \{U\} \qquad K_{ij} = a(\varphi_i,\varphi_j)$$

$$a(\underline{u}^h,\underline{v}^h) = {}^t\{V\}\int_{\Omega^h} {}^t\left[\tilde{B}(\underline{x})\right][A]\left[\tilde{B}(\underline{x})\right]dV\,\{U\} = {}^t\{V\}\,[K]\,\{U\}$$

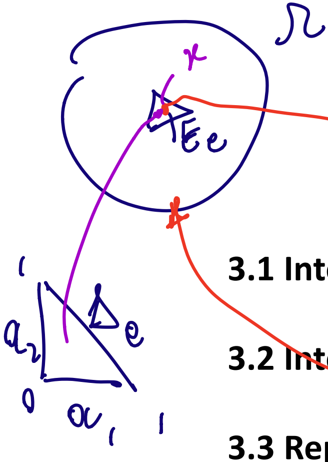
$$F_j = l(\varphi_j)$$

$$l(\underline{v}^h) = {}^t\{V\}\left\{\int_{\Omega^h} {}^t\left[\tilde{N}(\underline{x})\right]\{f_v\}\,dV + \int_{\partial\Omega^h_F} {}^t\left[\tilde{N}(\underline{x})\right]\{F^d\}\,ds\right\} = {}^t\{V\}\,\{F\}$$

Système linéaire à résoudre:

$$\boxed{[K]\,\{U\} = \{F\}}$$

+ BC



CHAPITRE 3

Approximation des champs solutions et dérivés

3.1 Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

3.2 Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

3.3 Représentation des gradients élémentaires

3.4 Représentation des flux et contraintes élémentaires

3.4 Densité d'énergie de déformation élastique

3.1 Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

3.2 Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

3.3 Représentation des gradients élémentaires

3.4 Représentation des flux et contraintes élémentaires

3.4 Densité d'énergie de déformation élastique

Interpolation locale du champ solution en température

Problème de thermique stationnaire

Interpolation nodale

Nb de noeuds

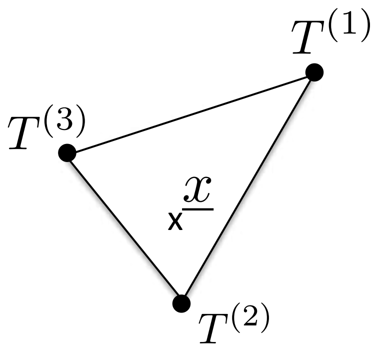
$$T(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} \overline{\overline{N}}_k(\underline{x})T^{(k)} \quad \forall \underline{x} \in E_e$$

Température locale en un point $\underline{x}$ quelconque à l'intérieur et sur les bords de l'élément E_e

Fonctions d'interpolation
Polynômes en $\underline{x}$ de bas degré

Températures aux noeuds

Pour un T3



$$T(\underline{x}) = \overline{\overline{N}}_1(\underline{x})T^{(1)} + \overline{\overline{N}}_2(\underline{x})T^{(2)} + \overline{\overline{N}}_3(\underline{x})T^{(3)}$$

En géneral avec la notation matricielle

$$T(\underline{x}) = {}^t\left\{\bar{\bar{N}}_e\right\}\{T_e\} = \left\{\bar{\bar{N}}_1 \; \bar{\bar{N}}_2 \ldots \bar{\bar{N}}_{n_e}\right\} \begin{Bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \\ \vdots \\ T^{(n_e)} \end{Bmatrix}$$

$$Dim\ {}^t\left\{\bar{\bar{N}}_e\right\} = 1 \times n_e$$

$$Dim\ \{T_e\} = n_e \times 1$$

Interpolation locale du champ solution en déplacement

Problème de élasticité linéaire

Interpolation nodale

Nb de variables nodales = nb noeuds

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} \bar{N}_k(\underline{x})\underline{u}^{(k)} \quad \forall \underline{x} \in E_e \qquad \underline{u}\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \underline{u}^{(k)}$$

$$\bar{N}_k\left(\underline{x}^{(j)}\right) = \delta_{kj}$$

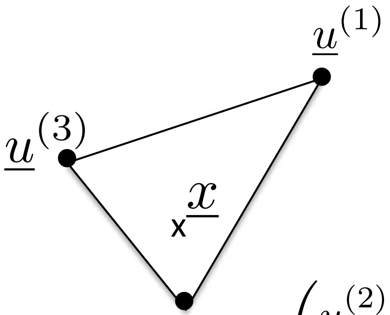
Déplacement local en un point x quelconque à l'intérieur et sur les bords de l'élément E_e

Fonctions d'interpolation élémentaires

Polynômes en x de bas degré

Déplacements nodaux

Pour un T3 en 2d



$$\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

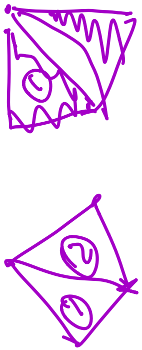
Fonction de forme de Lagrange linéaires

V_e pour T_3

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(\underline{x}) \\ u_2(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & \bar{N}_3 \end{bmatrix}}_{2\times 6} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{pmatrix}}_{6\times 1}$$

Interpolation locale du champ solution

Eléments isoparamétriques



Représentation paramétrique

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a})\underline{x}^{(k)}$$

fonction de forme "shape"

$\bar{n}_e = n_e$

Interpolation des champs

$\bar{n}_e$

$$T(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} \bar{\bar{N}}_k(\underline{x})T^{(k)}$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} \bar{N}_k(\underline{x})\underline{u}^{(k)}$$

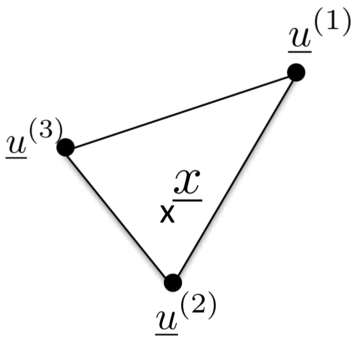
FONCTION INTERPOLATION

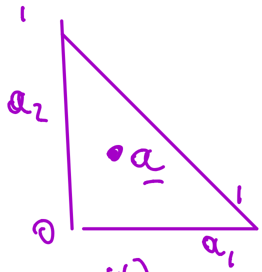
Isoparamétrique: Identification entre fonctions de forme et fonctions d'interpolation

$$\bar{N}_k(\underline{x}) = N_k(\underline{a}(\underline{x})) = \bar{\bar{N}}_k(\underline{x})$$

Image de $\underline{x}$ sur Δ_e

$$\bar{N}_k(\underline{x}^{(i)}) = \delta_{ki} = \bar{\bar{N}}_k(\underline{x}^{(i)})$$





$$u_1(\underline{x}) = (1 - a_1(\underline{x}) - a_2(\underline{x}))u_1^{(1)} + a_1(\underline{x})u_1^{(2)} + a_2(\underline{x})u_1^{(3)}$$

Rq : en anglais, utilisation souvent indifférente de « shape function » pour les fonctions de forme ou d'interpolation

Interpolation locale du champ solution en déplacement

Notation matricielle du champ solution élémentaire en élasticité linéaire (**isoparamétrique**)

Vecteur élémentaire des variables nodales

$$\{U_e\} = \left\{u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ \left(u_3^{(1)}\right),\ u_1^{(2)},\ u_2^{(2)},\ \ldots\ u_2^{(n_e)},\ \left(u_3^{(n_e)}\right)\right\}^t$$

Dim{Ue} = ((D x n_e) x 1)   D = dimension de l'espace

Interpolation des déplacement dans un élément:

$$\{\underline{u}(\underline{x})\} = [\ N_e(\underline{x})]\,\{U_e\} \quad \forall \underline{x} \in E_e$$

Notation matricielle:

$\underline{x}(\underline{a})$

$$\begin{Bmatrix} u_1(\underline{x}) \\ u_2(\underline{x}) \\ u_3(\underline{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & N_2(\underline{a}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & N_2(\underline{a}) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & \ldots & N_{n_e}(\underline{a}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ \ldots \\ u_3^{(n_e)} \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{matrix}\right\}\underline{u}^{(1)} \qquad \left.\begin{matrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{matrix}\right\}\underline{u}^{(2)}$$

[N_e] Matrice d'interpolation élémentaire

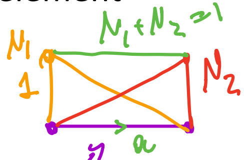
Dim[N_e] = (D x (D x n_e))

Interpolation locale du champ solution

Représentation des champs de déformation constants et affines (cas **isoparamétrique**)

Si maillage de + en + fin
$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ constants

Si champ de déplacement affine imposé aux nœuds
-> déplacement affine dans l'élément



Soit un champ de déplacement affine appliqué aux nœuds :

$$\underline{u}(\underline{x}^{(k)}) = \mathbf{A}.\underline{x}^{(k)} + \underline{b} = \underline{u}^{(k)}$$

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} \boxed{N_k(\underline{a})}\,\underline{u}^{(k)}$$

Car isoparamétrique

$$= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \left[\mathbf{A}.\underline{x}^{(k)} + \underline{b}\right]$$

$$= \mathbf{A} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a})\underline{x}^{(k)}}_{\underline{x}} + \underline{b} \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a})$$

Nécessairement il faut que :

$$\sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) = 1 \quad \forall \underline{a} \in \Delta_e$$

On retrouve la **partition de l'unité**

Condition nécessaire Pour représenter les champs à déformation constante (en particulier nulle = mouvement de corps rigide)

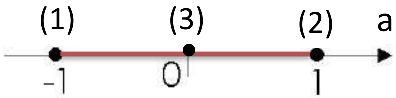
-> sert pour la réalisation de tests de rapiéçage ***(patch-tests)*****.**

Interpolation locale du champ solution

Autres types d'interpolation :

- Interpolation **superparamétrique** $n_e \geq \bar{n}_e$
    - Plus de fonctions de forme que d'interpolation
    - N_k d'ordre supérieur

Ex sur une maille B3 :



n_e = 3 fonctions de forme

Possibilité d'interpoler le déplacement à l'aide de ceux de 2 nœuds seulement (1) et (2) par exemple.

$$u(x) = \bar{N}_1 u^{(1)} + \bar{N}_2 u^{(2)}$$

- Interpolation **subparamétrique** $n_e \leq \bar{n}_e$
    - Moins de fonctions de forme que d'interpolation.
    - N_k d'ordre inférieur

Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

Quelques exemples :

Élément	Nombre de noeuds	Degré de liberté	Représentation
Linéaire	2	○ (u_1)	
Sub-paramétrique	2	○ (u_1) + $(u_{1,1})$	
Super-paramétrique	3	○ (u_1)	
Infini	2	○ (u_1)	

Poutre NEB (sans CT)

Eléments unidirectionnels

Élément	Nombre de noeuds	Degré de liberté	Représentation
T3	3	○ (u_1, u_2)	
T6 Isoparamétrique	6	○ (u_1, u_2)	
T9	9	○ (u_1, u_2)	
T18 Sub-paramétrique	3	○ (u_1, u_2) + $\begin{cases} u_{1,1}, u_{1,2} \\ u_{2,1}, u_{2,2} \end{cases}$	
Tθ	3	○ (u_1, u_2) ◖ (θ)	

Élasticité plane

Plaque Kirchhoff (sans CT)

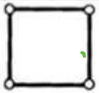
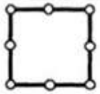
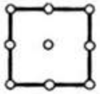
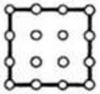
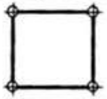
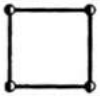
Élément axisymétrique

Eléments triangulaires

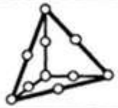
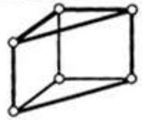
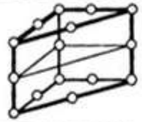
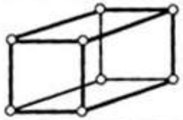
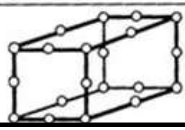
Attention, **l'absence de ddl de rotation ne veut pas dire que le mouvement global de la structure n'est pas une rotation**, mais que la rotation (dérivée première du déplacement) n'intervient pas dans l'interpolation locale du déplacement (ni plus tard dans le calcul de l'énergie).

Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

Eléments quadrangulaires

Élément	Nombre de noeuds	Degré de liberté	Représentation
Q 4 (Lagrange complet)	4 Élasticité plane	○ (u_1, u_2)	
Q 8 (Lagrange incomplet)	8	○ (u_1, u_2)	
Q 9 (Lagrange complet)	9	○ (u_1, u_2)	
Q 16	16	○ (u_1, u_2)	
Q 24 Plaque Kirchhoff (sans CT)	4	○ (u_1, u_2) + $\begin{cases} u_{1,1}, u_{1,2} \\ u_{2,1}, u_{2,2} \end{cases}$	
Q θ	4	○ (u_1, u_2) ◖ (θ)	
Infini	4	○ (u_1, u_2)	

Eléments massifs

Élément	Nombre de noeuds	Degré de liberté	Représentation
Tétraèdre linéaire T4	4	○ (u_1, u_2, u_3)	
Tétraèdre quadratique T10	10	○ (u_1, u_2, u_3)	
Pentaèdre linéaire P6	6	○ (u_1, u_2, u_3)	
Pentaèdre quadratique P15	15	○ (u_1, u_2, u_3)	
Hexaèdre linéaire H8	8	○ (u_1, u_2, u_3)	
Hexaèdre quadratique H20	20	○ (u_1, u_2, u_3)	

Rq : Lagrange incomplet = famille de polynôme de Serendip

3.1 Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

3.2 Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

3.3 Représentation des gradients élémentaires

3.4 Représentation des flux et contraintes élémentaires

3.4 Densité d'énergie de déformation élastique

Interpolation globale du champ solution

➔ Représentation du champ solution ?

Hyp : solution ~ **juxtaposition** de solutions locales dans les mailles

Choix : champ **interpolé** à partir de valeurs nodales

1ère partie d'un élément E_e à n_e noeuds = **maille**

Maille caractérisée par :

- un élément de référence Δ_e comportant n_e nœuds.
- des fonctions de forme $N_k(\underline{a})$ k=1…n_e polynômiales en a et de degré le plus bas possible.

2ème partie d'un élément E_e à n_e noeuds = **interpolation**

= outil de représentation du champ solution en tout point de l'élément à partir de ses valeurs connues aux nœuds.

Attention : **Deux éléments partageant la même maille peuvent avoir des interpolations différentes**.

Ex 1D : élt de barre / élt de poutre   Ex 2D : Q4 élast. plane/élt de plaque

Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

- Partie précédente = représentation locale sur chaque E_e de Ω^h par interpolation des températures / déplacements aux nœuds de l'élément.

- On donne maintenant la représentation **globale** des champs solution (cas **isoparamétrique**, on interpole à partir des températures / déplacements aux nœuds) :

Notation "~" ≡ global

Déplacement discrétisé en un point $\underline{x}$ quelconque de Ω^h

Nb de nœuds dans tout le maillage

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x})\underline{u}^{(k)} \quad \forall \underline{x} \in \boxed{\Omega^h}$$

Fonctions d'interpolation globales

Déplacements de tous les nœuds du maillage

$\tilde{N} : x \in \Omega^h \to \tilde{N}(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$\tilde{N} : x \in E_e \to \tilde{N}(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

Vecteur des degrés de liberté (ddls) totaux

$$Dim\,\{U\} = ((D \times N_N) \times 1)$$

$$\{\underline{u}^h(\underline{x})\} = \left[\tilde{N}(\underline{x})\right]\{U\}$$

Matrice d'interpolation globale

$$Dim\left[\tilde{N}(\underline{x})\right] = D \times (D \times N_N)$$

$x(\underline{a})$

$N : a \in \Delta_e \to N(\underline{a}) \in \mathbb{R}$

En thermique

$$T^h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x})T^{(k)} \quad \forall \underline{x} \in \Omega^h$$

Température à tous les nœuds du maillage

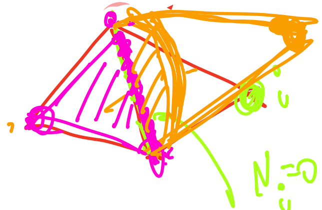
Température en un point $\underline{x}$ quelconque de Ω^h

$$T^h(\underline{x}) = {}^t\left\{\tilde{N}(\underline{x})\right\}.\{T\}$$

$$Dim\,\{T\} = N_N \times 1$$

$$Dim\;{}^t\left\{\tilde{N}(\underline{x})\right\} = 1 \times N_N$$

Interpolation globale du champ solution en température / déplacement



Les $\tilde{N}_k$ sont telles que :

- $\tilde{N}_n\left(\underline{x}^{(k)}\right) = \delta_{kn} \quad \tilde{N}_n \ vaut\ 1\ en\ \underline{x}^{(n)}$
- $\tilde{N}_n(\underline{x})$ sont polynômiales telles que :
  - $\tilde{N}_n(\underline{x}) = 0\ si\ x \notin \Omega_n$

    Ω_n = support de $x^{(n)}$ = réunion de tous les éléments qui contiennent le nœud $x^{(n)}$

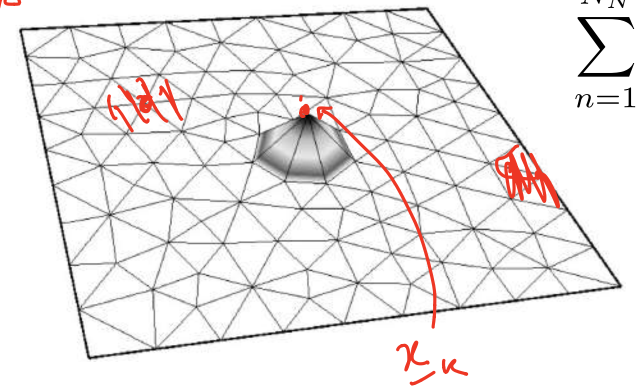
  - si $E_e \subset \Omega_n$ alors $\tilde{N}_n(\underline{x}) = N_k(\underline{a})$ (fonction de forme)

    avec n = connec(e , k) k=n° local du nœud

    n=n° global du nœud

$\tilde{N}_k(\underline{x})$

En particulier on a donc :



$$\sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) = 1$$

Condition de représentabilité exacte des champs de déformation constants

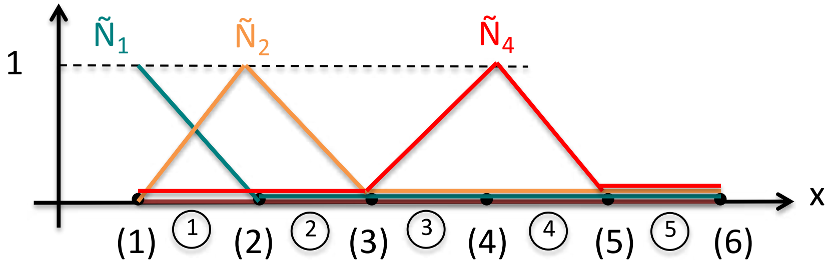
$$\tilde{N}_n(\underline{x}) = 0$$

Pour $\underline{x}$ sur une arête ou face ne contenant pas $\underline{x}^{(n)}$

condition nécessaire pour avoir un maillage conforme

Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

Représentation schématique de quelques fonctions d'interpolation globales :



Assemblage de barres pour un problème de <u>traction 1-D</u>

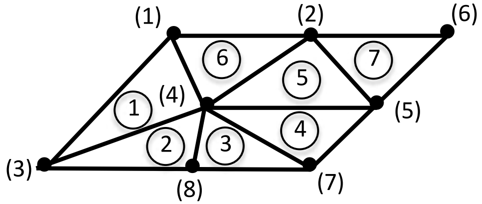
$$\begin{cases} \tilde{N}_1 \ nulle \ sur \ ② \bigcup ③ \bigcup ④ \bigcup ⑤ \\ \Omega_{(1)} = ① \end{cases}$$

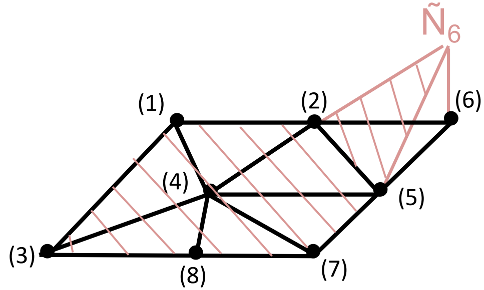
$$\begin{cases} \tilde{N}_4 \ nulle \ sur \ ① \bigcup ② \bigcup ⑤ \\ \Omega_{(4)} = ③ \bigcup ④ \end{cases}$$

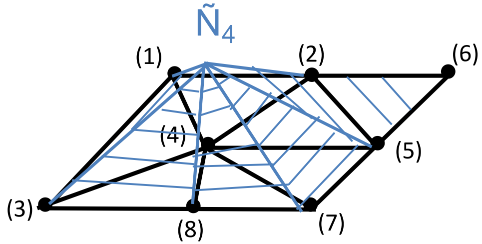
$$\begin{cases} \tilde{N}_2 \ nulle \ sur \ ③ \bigcup ④ \bigcup ⑤ \\ \Omega_{(2)} = ① \bigcup ② \end{cases}$$

Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

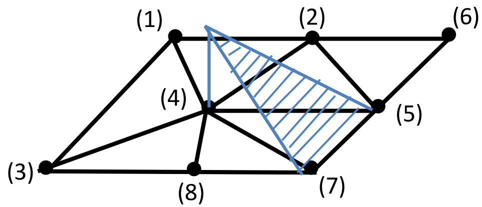
Assemblage d'éléments
2D type T3







Sur (7)-(5)-(4)
par exemple on
retrouve les
fonctions de
forme du T3



Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

- Réécriture globale du champ de déplacement en tout point de Ω^h dans le cas **isoparamétrique** :

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{D} \left(\sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x}) u_j{}^{(k)} \right) \underline{e}_j$$

j-ème vecteur de la base de l'espace (j=1…D)

$$\begin{Bmatrix} u_1^h(\underline{x}) \\ u_2^h(\underline{x}) \\ u_3^h(\underline{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x}) u_1{}^{(k)} \\ " \\ " \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} " \\ \sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x}) u_2{}^{(k)} \\ " \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} " \\ " \\ \sum_{k=1}^{N_N} \tilde{N}_k(\underline{x}) u_3{}^{(k)} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Soit encore :

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{N_N} \left(\sum_{j=1}^{D} \tilde{N}_k(\underline{x}) \underline{e}_j u_j{}^{(k)} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^h(\underline{x}) \\ u_2^h(\underline{x}) \\ u_3^h(\underline{x}) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{N}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{\varphi}_1} \underbrace{u_1^{(1)}}_{\alpha_1} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{N}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{\varphi}_2} \underbrace{u_2^{(1)}}_{\alpha_2} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_1 \end{Bmatrix}}_{\underline{\varphi}_3} \underbrace{u_3^{(1)}}_{\alpha_3} + \ldots + \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{N_N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u_1^{(N_N)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{N}_{N_N} \\ 0 \end{Bmatrix} u_2^{(N_N)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_{N_N} \end{Bmatrix}}_{\underline{\varphi}_{K_T}} \underbrace{u_3^{(N_N)}}_{\alpha_{K_T}}$$

Soit en 3D :

$$\underline{\varphi}_{3i-2}(\underline{x}) = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_i(\underline{x}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{\varphi}_{3i-1}(\underline{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{N}_i(\underline{x}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{\varphi}_{3i}(\underline{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_i(\underline{x}) \end{Bmatrix}$$

Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

- Réécriture globale du champ de déplacement en tout point de Ω^h dans le cas **isoparamétrique** :

fonction de base

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{K=1}^{K_T} \underline{\varphi}_K(\underline{x})\alpha_K \qquad \left.\begin{array}{l}\underline{\varphi}_K(\underline{x}) = \tilde{N}_k(\underline{x})\underline{e}_j \\ \alpha_K = u_j^{(k)}\end{array}\right\} K = k \times j$$

$\underline{\varphi}_K : \underline{x} \in \Omega_h \to \underline{\varphi}_K(\underline{x}) \in \mathbb{R}^D$

$K_T = D \times N_N$ = nb total de ddl en isoparamétrique (= Dim V^h)

Forme particulière de représentation de Galerkin

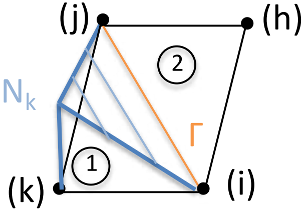
- Les fonctions $\underline{\varphi}_K(\underline{x})$ constituent une **base de l'espace V^h**

$V^h = \{ u^h(\underline{x})$ réguliers sur Ω^h, continus, polynomiaux sur chaque élément E_e de $\Omega^h \}$

- Les fonctions sont polynômiales par morceaux et continues d'un élément à l'autre grâce à la propriété de conformité (= ni trous ni recouvrements)

$N_k(\underline{x}) = 0 \; sur \; \Gamma \; pour$ ①

$N_k(\underline{x}) = 0 \; sur \; \Gamma \; et \; partout \; pour$ ②



$$\left\{\begin{array}{l}N_i(\underline{x}) = 1 \; en \; x^{(i)} \; par \text{ ①} \\ N_i(\underline{x}) = 1 \; en \; x^{(i)} \; par \text{ ②} \\ N_i(\underline{x}) = 0 \; en \; x^{(j)} \; par \text{ ①} \\ N_i(\underline{x}) = 0 \; en \; x^{(j)} \; par \text{ ②} \\ N_i(\underline{x}) = \; lineaire \; par \text{ ① } et \text{ ②}\end{array}\right.$$

Mêmes valeurs aux extrémités d'un segment -> même valeur partout sur frontière

3.1 Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

3.2 Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

3.3 Représentation des gradients élémentaires

3.4 Représentation des flux et contraintes élémentaires

3.4 Densité d'énergie de déformation élastique

$\underline{x}(\underline{a}) = \sum_e N_e(\underline{a}) \, \underline{x}^{(e)}$

Représentation des gradients élémentaires

$\bar{\bar{N}}_e(\underline{x}(\underline{a})) = N_e(\underline{a})$

$\bar{\bar{N}}_e(\underline{x}) = N_e(\underline{a}(\underline{x}))$

Gradient de température élémentaire

$\underline{x} \in E_e$

$$T(\underline{x}) = {}^t\left\{\bar{\bar{N}}_e(\underline{x})\right\} . \underbrace{\{T_e\}}_{\text{Températures aux nœuds de l'élément}}$$

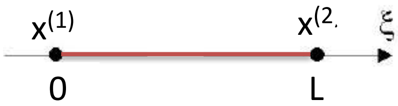
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}_1}{\partial x_1} T^{(1)} + \ldots + \frac{\partial \bar{\bar{N}}_{n_e}}{\partial x_1} T^{(n_e)}$$

$\dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_e(x)}{\partial x_i}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial N_e(a)}{\partial a_j}$

$${}^t[G_N]_{ij} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}_j(\underline{x})}{\partial x_i}$$

$$\underline{grad}_e\,(T(\underline{x})) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_2}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_{n_e}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_{n_e}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_2}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial \bar{\bar{N}}_{n_e}}{\partial x_3} \end{bmatrix}}^{{}^t[G_N]} \underbrace{\begin{Bmatrix} T^{(1)} \\ \ldots \\ T^{(n_e)} \end{Bmatrix}}_{\{T_e\}}$$

Exemple en 1D :



Variation de la température
Gradient constant.

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \left\{\frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L}\right\} \begin{Bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{T^{(2)} - T^{(1)}}{L} \qquad \begin{cases} \bar{\bar{N}}_1(x) = \frac{L-x}{L} \\ \bar{\bar{N}}_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$

Représentation des gradients élémentaires

Calcul avec la représentation paramétrique

On cherche à écrire le gradient sur la forme

$$\underline{grad}_e(T(\underline{x})) = \underline{\underline{B}}_e(\underline{a}).\underline{T}_e$$

$$\boxed{\{grad_e(T(\underline{x}))\} = [B_e(\underline{a})]\,\{T_e\}}$$

On définie le $\underline{\text{H}}$, gradient par rapport à $\underline{\text{a}}$: dérivée comme une fonction composée ($\underline{\text{x}}$($\underline{\text{a}}$))

$$H_j := \boxed{\frac{\partial T}{\partial a_j}} = \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \qquad {}^t\underline{H} = {}^t\underline{grad}_e(T).\underline{\underline{J}}$$

On ré-exprime alors le gradient par rapport à $\underline{\text{x}}$ en fonction de $\underline{\text{H}}$:

$det(\underline{\underline{J}}) \neq 0$

$${}^t\{grad_e(T)\} = {}^t\{H\}\,.\,[J]^{-1} \qquad \{grad_e(T)\} = {}^t\left([J]^{-1}\right).\{H\}$$

Dans le **cas isoparamétrique** :

$$H_j = \frac{\partial T}{\partial a_j} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial a_j} T^{(k)} \qquad \{H\} = {}^t[D_N] \;.\; \{T_e\}$$

Donc on trouve l'expression qu'on utilisera dans les codes:

$$\{grad_e(T(\underline{x}))\} = \underbrace{{}^t\left([J]^{-1}\right).{}^t[D_N]}_{[B_e(\underline{a})] = {}^t\left([D_N]\,.\,[J]^{-1}\right)}\{T_e\}$$

Représentation des gradients élémentaires

Gradient de déplacement élémentaire : (cas isoparamétrique)

$$\left[\underline{\underline{grad}}_e(\underline{u})\right]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial x_j} u_i^{(k)}$$

Ce qui correspond au produit matriciel :

$${}^t[G_N] \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix}$$

$$[G_N] = [D_N]\,[J]^{-1}$$

Matrice non introduite précédemment

$$[U_e] \neq \{U_e\}$$

$$[G_N]_{ki} = {}^t[G_N]_{ik} = \frac{\partial N_k}{\partial x_i} = \frac{\partial N_k}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

On peut introduire le tenseur H tel que : $d\underline{u} = \underline{\underline{H}}\,d\underline{a}$

Soit : $H_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial a_j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial x_k}{\partial a_j}$

De sorte que :

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{grad}}(\underline{u}).\underline{\underline{J}}$$

$$\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) = \underline{\underline{H}}.\underline{\underline{J}}^{-1}$$

Représentation des gradients élémentaires

Dans le cas isoparamétrique :

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j} u_i^{(k)}$$

Ce qui correspond au produit matriciel :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial a_1} & \frac{\partial N_2}{\partial a_1} & \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix}}_{{}^t\left[D_N\right]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix}}_{\left[U_e\right] \neq \left\{U_e\right\}}$$

Donc on pourrait écrire : $\left[grad_e(\underline{u})\right] = {}^t\left[D_N\right]\left[U_e\right]\left[J^{-1}\right]$

Et calculer le tenseur des déformations comme suit :

$$\left[\varepsilon\right] = \frac{1}{2}\left\{{}^t\left[D_N\right]\left[U_e\right]\left[J^{-1}\right] + {}^t\left({}^t\left[D_N\right]\left[U_e\right]\left[J^{-1}\right]\right)\right\}$$

Mais en pratique on ne fait pas comme ça…

Représentation des gradients élémentaires

On préfère exploiter la symétrie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le vecteur déplacements aux nœuds :

$$\boxed{\{\varepsilon_e(\underline{x})\} = [B_e(\underline{a})]\,\{U_e\} \quad \forall \underline{x} \in E_e}$$

$$\{\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ 2\varepsilon_{23}\ 2\varepsilon_{13}\ 2\varepsilon_{12}\}^t$$

Déformations en notation de Voigt (3D)

Matrice de dimension (6 x (n_e x D))
construite par identification
~ opérateur gradient discrétisé

Vecteurs des déplacements aux nœuds de l'élément

Rq : on définit une matrice similaire à partir de la représentation globale du déplacement :

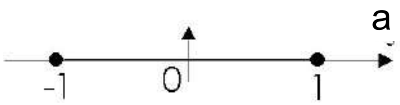
$$\{\varepsilon(\underline{x})\} = \left[\tilde{B}(\underline{x})\right]\{U\} \quad \forall \underline{x} \in \Omega^h$$

Matrice de dimension (6 x (N_N x D))

Attention les matrices [Be] en thermique et en élasticité n'ont ni les mêmes dimensions ni les mêmes coefficients.

Représentation des gradients élémentaires

Exemple élasticité 1D :



$$J(a) = \frac{dx}{da} = \frac{d}{da}\left[\frac{1-a}{2}x^{(1)} + \frac{1+a}{2}x^{(2)}\right]$$

$$J(a) = \frac{1}{2}\left[x^{(2)} - x^{(1)}\right] = \frac{L_e}{2}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left[u^{(2)} - u^{(1)}\right] \times \frac{1}{J(a)}$$

$$\varepsilon_e(x) = \underbrace{\frac{1}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}}_{\{B_e(a)\}}\begin{Bmatrix}u^{(1)} \\ u^{(2)}\end{Bmatrix}$$

Dim [Be(a)] = 1 x 2

Attention ici le vecteur {Be(a)} ne contient que des termes constants (i.e. qui ne dépendent pas de a), mais ce n'est pas le cas en règle générale.
On retrouve le vecteur trouvé en thermique (1ddl par nœud pour cet élément).

-> Un exemple avec le T3 en EP (fait en TD)

Représentation des flux et contraintes élémentaires

Pour un matériau thermiquement isotrope : $\underline{q} = -k\underline{grad}(T)$ dans chaque élément

Ce qui en notation matricielle devient : $\{q_e\} = -k[B_e(\underline{a})]\,\{T_e\}$

Si le matériau n'est pas isotrope : $\underline{q} = -\underline{\underline{K}}.\underline{grad}(T)$ $\boxed{\{q_e\} = -\,[K]\,[B_e(\underline{a})]\,\{T_e\}}$

Pour un matériau élastique linéaire homogène isotrope,
notation matricielle :

$$\{\sigma_e\} = [A]\,\{\varepsilon_e\}$$

Matrice représentative du tenseur de Hooke en élasticité linéaire homogène isotrope
Dim [A]=6 x 6 en 3D

En utilisant l'expression de ε_e on obtient σ_e en fonction des valeurs nodales (déplacements aux nœuds dans le cas isoparamétrique) :

$$\boxed{\{\sigma_e(\underline{x})\} = [A]\,[B_e(\underline{a})]\,\{U_e\}}$$

Matrice pré-implantée pour efficacité de calcul maximale

3.1 Interpolation locale du champ solution en température / déplacement

3.2 Interpolation globale du champ solution en température / déplacement

3.3 Représentation des gradients élémentaires

3.4 Représentation des flux et contraintes élémentaires

3.4 Densité d'énergie de déformation élastique

Densité d'énergie de déformation élastique

Définition : $\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_e(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}_e(\underline{u}) = \frac{1}{2}\,{}^t\{\sigma_e\}\,.\,\{\varepsilon_e\} = \frac{1}{2}\,{}^t\{\varepsilon_e\}\,.{}^t[A].\,\{\varepsilon_e\}$

Notation matricielle réduite

En élasticité le tenseur $\mathbb{A}$ possède la symétrie majeure donc : ${}^t[A] = [A]$

On utilise de plus la relation matricielle
(cas isoparamétrique) : $\{\varepsilon_e(\underline{x})\} = [B_e(\underline{a})]\,\{U_e\} \quad \forall \underline{x} \in E_e$

Et on obtient : $\frac{1}{2}\,{}^t\{\sigma_e\}\,\{\varepsilon_e\} = \frac{1}{2}\,{}^t\{U_e\}\,\underbrace{{}^t[B_e(\underline{a})]\,[A]\,[B_e(\underline{a})]}\,\{U_e\}$

Matrice de forme pré-implantée, à évaluer

Inconnues nodales (ddls)

Remarques complémentaires

- Les **déplacements** interpolés $\underline{u}(\underline{x})$ sont **continus** au passage d'un élément à l'autre (conformité du maillage)

- $\underline{\underline{grad}}_e(\underline{u})$ Les **gradients** de déplacement sont **discontinus** d'un élément à l'autre car les dérivées des fonctions d'interpolation (de forme) peuvent être différentes d'un élément à l'autre.

- $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ et $\underline{\underline{\sigma}}_e$ sont a priori **non continus** dans la structure.

Mais il existe des moyens de post-traitement permettant d'en obtenir une représentation continue

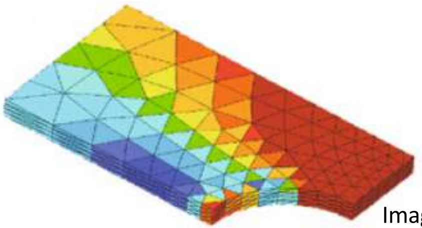
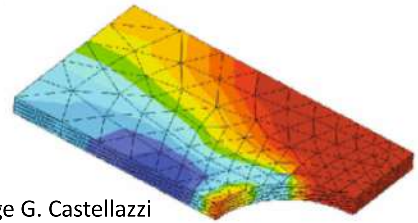


Image G. Castellazzi



www.wooclap.com/**M1FEM**

Laquelle de ces propositions est vraie ?

A : La somme des fonctions de forme d'un élément vaut 1

B : Le terme courant de la matrice Jacobienne est : $J_{ij} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$

C : Le Jacobien d'une maille Q4 est toujours constant

D : Aucune des propositions ci-dessus n'est juste

Laquelle de ces affirmations sur les fonctions de forme est toujours vraie ?

A : Ce sont des polynômes de degré 1

B : N_k vaut 1 au nœud k et zéro partout ailleurs

C : Elles sont définies sur l'élément réel

D : Elles sont positives en tout point de l'élément.

E : Il y en a autant que de nœuds par élément