**Sorbonne Université, Licence Mécanique** **2019-2020**

# *LU3ME003 : Equations aux dérivées partielles 2*

## *Examen du 17 Mars 2020*

**Durée de l'épreuve : 2 heures.**

**Travail personnel.**

**La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.**

### Exercice

Soit $L^2(]0,1[)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $]0,1[$, $L^2(]0,1[) = \{f : ]0,1[ \to \mathbb{R}, \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty\}$, muni de sa norme naturelle $\|.\|_{L^2}$ définie par :

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Soit $\mathcal{L}$ l'application définie de $L^2(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad \forall f \in L^2(]0,1[).$$

1. Vérifier que pour toute fonction $f$ continue sur $[0,1]$, $f \in L^2(]0,1[)$ et $\mathcal{L}(f)$ est aussi une fonction de $L^2(]0,1[)$.
   *Indication : On montrera d'abord que* $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \|f\|_{L^2}$, $\forall x \in ]0,1[$.
2. Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire .
3. Montrer que $\mathcal{L}$ est continue par rapport à la norme $L^2(]0,1[)$.
4. Si $f$ est une fonction continue, $\mathcal{L}(f)$ est-elle une fonction de $H^1(]0,1[)$ ? Pour vérifier cela on rappelera la définition de $H^1(]0,1[)$.
5. Donnez un exemple de fonction de $L^2(]0,1[)$ qui n'est pas dans $H^1(]0,1[)$.

### Problème :

On considère le problème de transport de la chaleur dans une barre homogène, sur une distance finie. La température $u(x)$ peut vérifier une équation sans dimension du type :

$$\textbf{(PC)}_\varepsilon \quad \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x), \quad x \in ]0,1[ \\ \dfrac{du}{dx}(0) - ku(0) = \varepsilon \dfrac{du}{dx}(1) \\ u(1) = \varepsilon u(0) \end{cases} \tag{1}$$

où $f$ est une fonction donnée telle que $f \in L^2(]0,1[)$, $k > 0$ et $0 < \varepsilon \ll 1$ sont des constantes réelle, données aussi.

1. On rappelle que l'espace $H^1(]0,1[)$ est muni de la norme définie par :

$$\|v\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 v(x)^2 dx + \int_0^1 v'(x)^2 dx} = \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2}. \tag{2}$$

   Montrer que $\exists C > 0$ tel que $|v(0)| \leq C\|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1$.
   Pour cela on utilisera la caractérisation des fonctions de $H^1(]0,1[)$ :

$$\forall v \in H^1(]0,1[), \forall x, y \in [0,1], \quad v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)dt \tag{3}$$

2. On désigne par $V_\varepsilon$, le sous espace de $H^1(]0,1[)$, défini par :

$$V_\varepsilon = \{v \in H^1(]0,1[)/v(1) = \varepsilon v(0)\}$$

   i) Montrer que $V_\varepsilon$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $H^1(]0,1[)$.
   ii) L'espace $V_\varepsilon$ est muni de la norme usuelle de $H^1(]0,1[)$. En utilisant les propriétés précédentes, montrer que $(V_\varepsilon, < \cdot, \cdot >_{H^1}, \| \cdot \|_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

3. Ecrire la formulation variationnelle $\mathbf{(PV)}_\varepsilon$ associée au problème $\mathbf{(PC)}_\varepsilon$ : on montrera que si $u$ est solution du $\mathbf{(PC)}_\varepsilon$ alors $u$ est solution de :

$$\mathbf{(PV)}_\varepsilon \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ appartenant à } V_\varepsilon, \text{ solution de :} \\ a(u,v) \;=\; L(v)\;,\; \forall v \in V_\varepsilon \end{cases} \tag{4}$$

$$a(u,v) \;=\int_0^1 \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx \quad + \int_0^1 u(x)v(x)dx \quad + ku(0)v(0), \tag{5}$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{6}$$

4. Montrer que $a(.\,,.)$ est une application bilinéaire et symétrique sur $V_\varepsilon$.
5. Montrer que $a(.\,,.)$ est continue sur $V_\varepsilon$ par rapport à la norme $\| \cdot \|_{H^1}$.
6. Montrer que $a(.\,,.)$ est coercive sur $V_\varepsilon$ , $\forall k > 0$.
7. Montrer que $L(.)$ est une application linéaire et continue sur $V_\varepsilon$.
8. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel $\mathbf{(PV)}_\varepsilon$. Précisez le résultat mathématique (théorème) que vous appliquez.
9. On notera $u_\varepsilon$ la solution du problème variationnel $\mathbf{(PV)}_\varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$ indépendante de $\varepsilon$, telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^2} \tag{7}$$

10. **Bonus :** On suppose que $u_\varepsilon$ converge dans $H^1(]0,1[)$ quand $\varepsilon \to 0$ . On note $u$ cette limite.
    (a) En utilisant la convergence de $u_\varepsilon$ vers $u$ et l'inégalité (7) montrer que $u(1) = 0$.

    Par conséquent, l'espace dans lequel on cherchera à écrire le problème variationnel pour $u$ sera l'espace $V = \{v \in H^1(]0,1[)/v(1) = 0\}$.

    (b) En partant de l'équation différentielle vérifiée par $u_\varepsilon$ et en multipliant par $v \in V$, montrer que

    $$\int_0^1 \frac{du_\varepsilon}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)dx + \int_0^1 u_\varepsilon(x)v(x)dx + k\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

    (c) Lorsque $\varepsilon \to 0$, trouver les limites sur $\mathbb{R}$ de chaque terme de l'égalité précédente (en s'appuyant sur la convergence de $u_\varepsilon$ vers $u$). En déduire la formulation variationnelle pour $u$.
    (d) Quel est le problème continu dont $u$ est solution ?