Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné régulier.
Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire
$\forall f \in H^1(\Omega)$, $\exists (f_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $f_n \to f$ dans
$H^1(\Omega) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Obs. : L'espace H^1 est constitué des fonctions régulières, complété par les limites des suites des fonctions régulières.

Remarques : i) $C_c^\infty(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ si Ω = borné
ii) les fonctions de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ ne s'annulent pas forcement sur le bord de Ω ($\partial\Omega$).

Proposition : Théorème de Rellich (de compacité)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, borné, régulier. De toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente de $L^2(\Omega)$. On dit que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

. Théorème de trace :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, borné, régulier (de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux).
L'application Trace
$$\begin{cases} \gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \\ v \longmapsto \gamma_0 v \overset{\text{notation}}{=} v_{|\partial\Omega} \end{cases}$$
est bien définie et est une application linéaire, continue et surjective.

- linéaire : $\gamma_0(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \gamma_0(v_1) + \gamma_0(v_2)$
- continue : $\exists C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

- surjective : $\forall \bar{v} \in L^2(\partial\Omega)$, $\exists v \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\gamma_0 v = \bar{v}$$

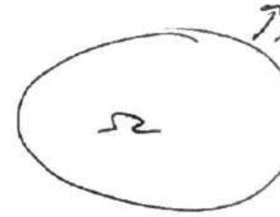
v est appelé le relèvement de $\bar{v}$
et il n'est pas unique !

Le théorème de trace permet de généraliser la formule de Green, comme pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$.

▶ **Proposition** : Formule de Green dans $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$. Soit $f, g \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx + \int_{\partial\Omega} f g\, n_i\, ds$$



$\vec{n} = (n_i)_{i=1,N}$ étant la normale extérieure au domaine

Preuve : C'est un résultat classique pour les fonctions $\mathcal{C}^1(\bar\Omega)$ et comme $\mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega) \subset \mathcal{C}^1(\bar\Omega)$ ce résultat s'applique aux fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega)$

On va utiliser ensuite la densité de $\mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$\forall f, g \in H^1(\Omega)$, $\exists (f_n)_n, (g_n)_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega)$ t.q.

$f_n \to f$ ds $H^1(\Omega)$

$g_n \to g$ ds $H^1(\Omega)$

On écrit la formule de Green pour la paire $f_n, g_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega)$:

$$\int_\Omega f_n \frac{\partial g_n}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i} g_n\, dx + \int_{\partial\Omega} f_n g_n n_i\, ds.$$

On a $\begin{cases} f_n \to f, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ds } L^2(\Omega) \\ g_n \to g, & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \text{ ds } L^2(\Omega) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f_n \frac{\partial g_n}{\partial x_i}\, dx \to \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx. \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i} g_n\, dx \to \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} g\, dx \end{cases}$$

Il reste à passer à la limite dans l'intégrale sur $\partial\Omega$.

On utilise la continuité de l'application trace $\gamma_0 f_n \to \gamma_0 f$ ds $L^2(\partial\Omega)$

$$\Rightarrow \|\gamma_0(f_n - f)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|f_n - f\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\int_{\partial\Omega} f_n g_n n_i\, ds = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 f_n\, \gamma_0 g_n\, n_i\, ds = \int_{\partial\Omega} \overbrace{(\gamma_0 f_n - \gamma_0 f)}^{\to 0} \gamma_0 g_n n_i\, ds + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 f \underbrace{(\gamma_0 g_n - \gamma_0 g)}_{\to 0} n_i\, ds + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 f\, \gamma_0 g\, n_i\, ds \to \int_{\partial\Omega} f g\, n_i\, ds$$

2.3 L'espace $H^1_0(\Omega)$

Définition : Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$

$H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0 v = v_{|\partial\Omega} = 0 \}$

= espace des fonctions $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord

Propriété : L'espace $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme associée de $H^1(\Omega)$

Preuve : Soit (v_n) une suite de Cauchy de $H^1_0(\Omega)$ $\Rightarrow$ elle est suite de Cauchy ds $H^1(\Omega)$, donc $\exists v \in H^1(\Omega)$ tq $v_n \to v$ ds $H^1(\Omega)$

Il reste à démontrer que $v \in H^1_0(\Omega)$, i.e $\gamma_0 v = 0$.

$\gamma_0 v = \gamma_0(v - v_n + v_n) = \gamma_0(v - v_n) + \gamma_0 v_n$ (linéarité de γ_0)

$\downarrow$ continuité $\quad$ 0 car $v_n \in H^1_0(\Omega)$

$\gamma_0 0 = 0$.

q.e.d.

Propriété : L'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense ds $H^1_0(\Omega)$

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$$

Proposition : Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$. Il existe $C > 0$ telle que

$\forall v \in H^1_0(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx$

⚠ Cette inégalité ne reste plus valable sur $H^1(\Omega)$

Preuve : On raisonne par absurde. S'il n'existe pas de constante qui vérifie l'inégalité de Poincaré alors

$\forall n \geq 1$, $\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1_0(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx \geq n \int_\Omega |\vec{\nabla} v_n(x)|^2 dx.$$

Soit $w_n(x) = \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{L^2(\Omega)}} \in H^1_0(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega |w_n(x)|^2 dx = 1 \geq n \int_\Omega |\vec{\nabla} w_n|^2 dx \Rightarrow \int_\Omega |\vec{\nabla} w_n|^2 dx \leq \frac{1}{n}$$

Donc $\|w_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \|w_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} w_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$

On obtient ainsi une suite $(w_n)_n$ bornée ds $H^1_0(\Omega)$.

D'après le théorème de Rellich de compacité sur $H^1(\Omega)$ et donc sur $H^1_0(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $(w_{n'})$ convergente ds $L^2(\Omega)$

Par ailleurs, $\|\vec{\nabla} w_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{n'}} \to 0$ donc $\nabla w'_n \to 0$ ds $L^2(\Omega)$

Donc $(w_{n'})$ est une sous-suite convergente ds $H^1(\Omega)$.

$w_{n'} \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow (w_{n'})_{n'}$ = convergente ds $H^1_0(\Omega)$.

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} w(x)|^2 dx = \lim_{n' \to \infty} \int_\Omega |\vec{\nabla} w_{n'}(x)|^2 dx = \lim_{n' \to \infty} \frac{1}{n'} = 0.$$

$\Rightarrow w(x) =$ constante C pp ds Ω.

Mais $w \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow \gamma_0 w = 0 = w|_{\partial\Omega}$.

$\Rightarrow w = 0$ pp ds Ω

contradiction avec

$$\int_\Omega w^2 dx = 1$$

q.e.d.

Corollaire : Équivalence des normes sur $H^1_0(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$ — Alors

$\exists \alpha, \beta > 0$ t.q $\forall v \in H^1_0(\Omega)$: $\beta \|v\|_{H^1} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{|v|_1} \leq \alpha \|v\|_{H^1}$

Remarque : Le résultat précédent (Inég de Poincaré) se généralise à :

1) $V = \{v \in H^1(\Omega),\ \gamma_0 v = v|_{\Gamma_0} = 0,\ \Gamma_0 \subset \partial\Omega,\ \text{mes}\, \Gamma_0 \neq 0\}$

$\Rightarrow \exists C > 0$ tq $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$

2) $\exists C > 0$ t.q $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|^2_{H^1} \leq C \left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

2.4 L'espace $H^2(\Omega)$

▷ Déf : $H^2(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = \overline{1,N},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ i,j = \overline{1,N} \}$

▷ Propriété : $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u,v \rangle_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$$

et la norme associée $\|u\|_{H^2} = \sqrt{\langle u,u \rangle_{H^2}}$

▷ Proposition : Th. de trace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné, régulier. L'application

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \quad \text{est linéaire, continue}$$
$$u \longmapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$$

i.e $\exists c > 0$ t.q $\forall v \in H^2(\Omega)$, $\|\gamma_1 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{H^2(\Omega)}$

Preuve : C'est une conséquence du théorème de trace pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. En effet, si $u \in H^2(\Omega) \Rightarrow \vec{\nabla} u \in (H^1(\Omega))^N$ et on peut définir la trace $\gamma_0(\nabla u)$ sur $\partial\Omega$ comme une fonction de $L^2(\partial\Omega)$. Comme la normale est une fonction bornée continue sur $\partial\Omega$, on a $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \in L^2(\partial\Omega)$

▷ Proposition : Généralisation de la formule de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, borné, régulier ; soit $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v\, ds$$

Preuve : Comme pour la formule de Green, l'égalité est vraie pour $v_n, u_n \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$, dense dans H^2. On fait un passage à la limite en utilisant la continuité de γ_1.