Examen du 22 Mars 2016 — Corrigé

Exercice 1

$$E = \{ f \in \mathcal{C}^1([-1,1]) \; ; \; f(-1) = f(1) = 0 \}$$

1) Il faut vérifier $\begin{cases} E \neq \emptyset \\ \forall f, g \in E \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \; (\lambda f + g) \in E$

On observe que $0 \in E$ (la fonction nulle) $\Rightarrow E \neq \emptyset$

$$f, g \in E \Rightarrow \begin{cases} f, g \in \mathcal{C}^1([-1,1]) \Rightarrow (\lambda f + g) \in \mathcal{C}^1([-1,1]) \\ \left.\begin{array}{l} f(-1) = f(1) = 0 \\ g(-1) = g(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda f + g)(-1) = (\lambda f + g)(1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda f + g) \in E$.

2) On vérifie que N_1 est une norme avec la définition.

i) $N_1(f) = \sup_{x \in [-1,1]} |f'(x)| \geq 0$.

$N_1(f) = 0 \Rightarrow \sup_x |f'(x)| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = c^{te} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$$

ii) $N_1(\lambda f) = \sup_x |\lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_x |f'(x)| = |\lambda| N_1(f)$

iii) $N_1(f+g) = \sup_x |f'(x) + g'(x)|$

$\forall x \quad |f'(x) + g'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)| \leq \sup_x |f'(x)| + \sup_x |g'(x)|$

$\Rightarrow \forall x, \quad |f'(x) + g'(x)| \leq N_1(f) + N_1(g) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_x |f(x) - g(x)|}_{N_1(f-g)} = N_1 f - N_1 g$$

3) $\mathcal{L}(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ = application linéaire.

$$|\mathcal{L}(f)| = |f'(0)| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = N_1(f) \quad \forall f.$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ - continue par rapport à la norme N_1

Exercice 2

1) $L^2(]0,1[) = \left\{ f :]0,1[\to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable telle que } \int_{]0,1[} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

2) $$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in]0, 1/2[\\ 1, & x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1\, dx = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow \varphi \in L^2(]0,1[)$$

3) Si g = dérivée faible de f alors

$$\int_0^1 g \phi\, dx = -\int_0^1 f \phi'\, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(]0,1[)$$

On calcule la dérivée usuelle de φ sur $]0, 1/2[$ et

$\varphi'(x) = 0 \quad , \quad x \in]0, \tfrac12[$

$\varphi'(x) = 0 \quad , \quad x \in]\tfrac12, 1[$

Si g existe alors $g = \varphi'$ p.p. $\Rightarrow$ $g = 0$ p.p. sur $]0,$

et elle doit vérifier.

$$\underbrace{\int_0^1 g\,\phi\,dx}_{0} = -\int_0^1 \varphi\,\phi'\,dx$$

$$= -\int_{1/2}^{1} \phi'(x)\,dx = \underbrace{-\phi(1)}_{0} + \phi(\tfrac12) = \phi(\tfrac12)$$

Donc. $\boxed{\phi(\tfrac12) = 0 \ , \ \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)}$ Faux!

Ça veut dire que g n'est dérivée au sens faible de φ, donc φ ~~n'est pas~~ n'a pas de dérivée faible

Problème

1). Cours.

2). V n'est pas un espace vectoriel car. si

$v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in H^1(]0,1[)$

mais $v_1(1) + v_2(1) = 2 \neq 1$

3). $v_1, v_2 \in V \Rightarrow (t v_1 + (1-t) v_2) \in H^1(]0,1[)$

car H^1 = espace vect

$(t v_1 + (1-t) v_2)(0) = t v_1(0) + (1-t) v_2(0) = 0.$

$(t v_1 + (1-t) v_2)(1) = t v_1(1) + (1-t) v_2(1) = t + 1 - t = 1.$

Donc $(t v_1 + (1-t) v_2) \in V \Rightarrow V$ = convexe

ii) Soit $v_n \in V$, (v_n) converge dans la norme $\|\cdot\|_{H^1}$

$$\Rightarrow \exists\, v \in H^1 \text{ t.q. } \|v_n - v\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il reste à démontrer que $v \in V$, c'est-à-dire $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$.

On sait que $v_n(0) = 0$ et $v_n(1) = 1$.

$$v_n(x) = \int_0^x v_n'(t)\,dt$$

$$v(x) - v(0) = \int_0^x v'(t)\,dt.$$

$$\Rightarrow v(0) + v_n(x) - v(x) = \int_0^x (v_n' - v')(t)\,dt.$$

$$v(0) = v(x) - v_n(x) + \int_0^x (v_n' - v')(t)\,dt.$$

$$|v(0)| \leq |v(x) - v_n(x)| + \underbrace{\int_0^1 |v_n' - v'|\,dt}_{\leq \left[\int_0^1 (v_n' - v')^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^1 |v(0)|\,dx \leq \underbrace{\int_0^1 |v(x) - v_n(x)|\,dx}_{\leq \|v - v_n\|_{L^2}} + \|v_n' - v'\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow |v(0)| \leq \|v - v_n\|_{L^2} + \|v' - v_n'\|_{L^2} \leq \sqrt{2} \cdot \underbrace{\|v - v_n\|_{H^1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow v(0) = 0$$

De la même manière, on montre que $v(1) = 1$ car $v_n(1) = 1$.

4). On multiplie l'équation $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$ par $(v-u)$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2}(v-u)\,dx}_{\downarrow \text{ IPP}} = \int_0^1 f(v-u)\,dx .$$

$$\underbrace{\left[-\frac{du}{dx}(v-u)\right]_0^1}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \int \frac{du}{dx}\frac{d}{dx}(v-u)\,dx = \int_0^1 f(v-u)\,dx$$

car $v(1) = u(1) = 1$.
$v(0) = u(0) = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{d}{dx}(v-u)\,dx}_{a(u,\,v-u)} = \underbrace{\int_0^1 f(v-u)\,dx}_{L(v-u)} .$$

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}, \qquad L(v) = \int_0^1 f v\,dx .$$

5). a = linéaire par rapport à chaque variable car

$$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda\, a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

et a = symétrique $(a(u,v) = a(v,u))$

$$|a(u,v)| = \left|\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx\right| \leq \underbrace{\|u'\|_{L^2}}_{\leq \|u\|_{H^1}} \underbrace{\|v'\|_{L^2}}_{\leq \|v\|_{H^1}}$$

$$\leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \Rightarrow a = \text{continue}$$

L = linéaire car $L(\lambda v_1 + v_2) = \lambda L(v_1) + L(v_2)$

$|L(v)| = \left| \int f v \, dx \right| \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$

$\Rightarrow$ L = continue.

6) Poincaré - voir TD 3-4

7) $a(v,v) = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \|v'\|^2_{L^2} \ge \underbrace{\frac{1}{C^2}}_{=\alpha} \|v\|^2_{H^1}$.

$\Rightarrow$ a = coercive.

8) Non car V ≠ espace vectoriel.

9) PV $\Rightarrow$ P(M).

Soit u t.q. $a(u, v-u) = L(v-u)$, $\forall v \in V$.
$\forall u \in V$.

Montrons que $I(u) \le I(v)$, $\forall v \in V$.

$\left.\begin{array}{l} u \in V \\ v \in V \end{array}\right\} \Rightarrow$ ~~w = u - v~~ $\in V_0$.

$v - u = w \in V_0$

$v = u + w$.

$I(v) = I(u+w) = \frac{1}{2} a(u,u) + a(u,w) + \frac{1}{2} a(w,w) - L(u)$
$- L(w) = I(u) + \underbrace{\frac{1}{2} a(w,w)}_{\ge 0} + \underbrace{\underbrace{a(u,w) - L(w)}_{= a(u, u-v) - L(u-v)}}_{=0} \ge$

$\ge I(u)$

$\Rightarrow$ $I(u) \le I(v)$, $\forall v \in V$ donc u est sol du (PM).

(PM) $\Rightarrow$ (PV)

Soit u solution de $I(u) \leq I(v)$, $\forall v \in V$, $u \in V$.

Alors $I(v) - I(u) = \frac{1}{2} a(w,w) + a(u,w) - L(w) \geq 0$.

$v = u + \underbrace{v-u}_{w}$, $w \in V^0$

On pose $z = \frac{w}{\|w\|} \in V^0$ ($V^0 =$ e.v)

$\Rightarrow I(v) - I(u) = \|w\|^2 \frac{1}{2} a(z,z) + \|w\| \left[a(u,z) - L(z) \right] \geq 0$

$\forall w \in V^0$ et donc $\|w\| > 0$

En faisant $\|w\| \longrightarrow 0$ on trouve que

$a(u,z) - L(z) \geq 0 \rightarrow a(u,w) - L(w) \geq 0$ $\forall w \in V^0$

On écrit la même inégalité pour $-w$

$\Rightarrow a(u,-w) - L(-w) \geq 0 \Rightarrow a(u,w) - L(w) \leq 0$.

Des deux inégalités on déduit :

$a(u,w) - L(w) = 0$, $\forall w \in V^0$

$\Downarrow$

$\boxed{a(u, v-u) = L(v-u), \ \forall v \in V}$ (PV)

1°) (1) Les hypothèses du théorème de Stampacchia sont vérifiées (voir cours) $\Rightarrow \exists!$ de la solution du (PM) $\Rightarrow \exists!$ de la solution du (PV)