4AM03 : CC3 - 2017-2018

Durée : 1h30, sans document, ni téléphone

Les ondes gravito-capillaires

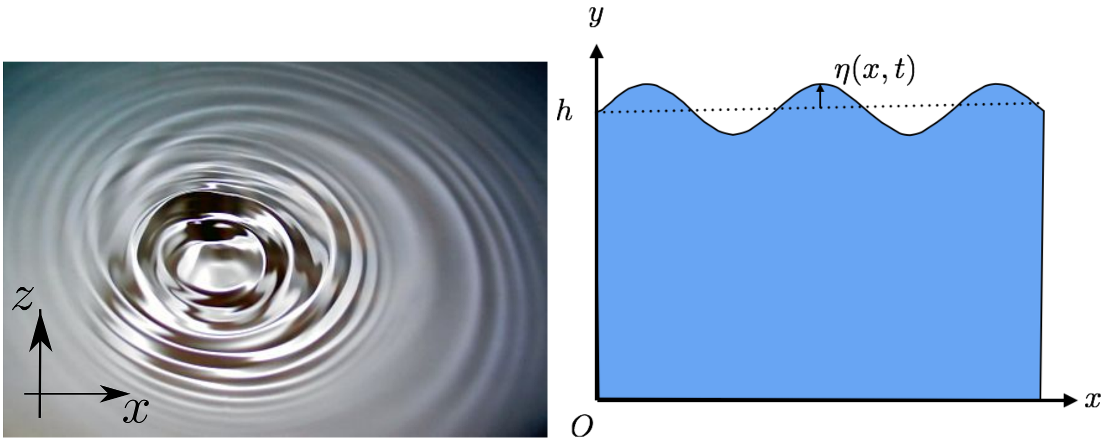


FIGURE 1 – (à gauche) Ondes gravito-capillaires (vue du dessus), à droite) schéma du problème (vue de côté)

Lors de l'étude des vagues (ou ondes de gravité) faites en cours, nous avons négligé l'effet de capillarté qui peut exister à la surface d'un liquide (à cause de la tension de surface, la surface du liquide peut ne pas être plane). Dans ce problème, on se propose de voir l'influence de la tension de surface sur une interface eau/air, on parle alors d'ondes gravito-capillaires (c'est à dire des ondes dues à la gravité et à la capillarité du liquide). Dans l'étape de modélisation, la tension de surface peut être prise en compte via une modification de la pression à la surface du liquide. Les équations du mouvement du fluide sont alors :

$$\underline{\nabla}.\underline{v} = 0, \tag{1}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{0}, \tag{2}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \, \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}.\underline{\nabla}) \, \underline{v} \right) = -\underline{\nabla}(p - \sigma) - \rho_0 \underline{g} \tag{3}$$

On note :

— $\underline{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ la vitesse du fluide avec respectivement (u, v) les composantes du vecteur vitesse suivant Ox et Oy,
— $p(x, y)$ la pression dans le fluide,
— ρ_0 la masse volumique dans le fluide (supposée constante),
— $\underline{g}$ l'accélération de la pesanteur,
— h est la hauteur d'eau au repos, le fond de l'eau est situé en $y = 0$,
— $y(x, t) = h + \eta(x, t)$ est la hauteur d'eau en présence d'une perturbation $\eta(x, t)$,
— $\sigma = T\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ est la force par unité de surface due à la prise en compte de la tension de surface notée T qui se mesure en N.m^{-1}. La tension de surface est un phénomène physico-chimique qui apparaît à l'interface entre deux milieux. Dans le cas où les milieux sont l'eau et l'air, la tension de surface vaut approximativement 7.10^{-2} N.m^{-1},
— $\phi(x, y, t)$ le potentiel des vitesses.

1. Montrer que dans le fluide, le potentiel des vitesses doit satisfaire l'équation suivante :

$$\Delta\phi = 0 \tag{4}$$

Solution:
L'écoulement est incompressible (et irrotationnel), on a donc :

$$\underline{\nabla}.\underline{v} = \underline{\nabla}.\underline{\nabla}\phi = \Delta\phi = 0$$

2. Montrer la loi de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gy - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = Cste$$

pour cela on pourra utiliser l'identité suivante :

$$\underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = -(\underline{v}.\underline{\nabla})\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{\nabla v^2}$$

Solution:
On part de l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
\rho_0 \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}.\underline{\nabla})\underline{v} \right) + \underline{\nabla} \left(p - T\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \rho_0 \underline{g} &= 0 \\
\rho_0 \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla v^2} \right) + \underline{\nabla} \left(p - T\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \rho_0 \underline{g} &= 0 \\
\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla v^2} + \frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla} \left(p - T\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \underline{g} &= 0 \\
\underline{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{1}{\rho_0}\left(p - T\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + gy \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la relation suivante est vraie le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{p}{\rho_0} + gy - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = Cste$$

3. Montrer que, à la surface libre du fluide, la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + g\eta - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

On notera p_0 la pression à la surface du fluide dans les calculs intermédiaires.

Solution: A la surface et sans perturbation, on a $y = h$ (donc $\eta = 0$) et $p = p_0$:

$$\frac{p_0}{\rho_0} + gh = Cste$$

Cela permet de réécrire la relation de Bernouilli sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{v}^2 + \frac{(p_0 - p_0)}{\rho_0} + g\eta - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

4. On rappelle que la condition de sol rigide au fond de l'eau implique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0 \tag{6}$$

et que la condition cinématique à la surface est :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\phi}{dy}(x, y = \mathrm{surf}, t) \tag{7}$$

Linéariser les équation 4, 5, 6, et 7 pour obtenir les équations des ondes gravito-capillaires.

Solution: La linéarisation consiste à ne retenir que le premier ordre (le terme linéaire) en perturbation autour d'une position d'équilibre. Dans ce problème la position d'équilibre correspond au cas ou le fluide est au repos. On peut donc assimiler directement $\underline{v}$ et ϕ à des perturbations. La perturbation en hauteur d'eau η est supposée petite devant h : $\eta(x, t) << h$. Sous ces hypothèses on peut linéariser les équations précédentes :

— l'équation régissant ϕ dans le volume est déjà linéaire en ϕ (rien à faire) :

$$\Delta\phi = 0$$

— la condition au fond de l'eau est déjà linéaire en ϕ (rien à faire) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

— l'équation de Bernouilli à la surface devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y = \text{surf}, t) + g\eta - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

— l'équation cinématique :

$$\frac{d\phi}{dy}(x, y = \text{surf}, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

5. En utilisant les équations linéarisées, montrer que la condition à la surface libre peut s'exprimer à partir de ϕ uniquement :

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=\text{surf}} + g\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\text{surf}} - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)|_{y=\text{surf}} = 0$$

Solution:
On remarque que les deux dernières conditions obtenues à la question précédente traduisent les conditions à la surface libre. Cependant elles font intervenir deux variables couplées ϕ et η. On peut donc combiner ces deux équations pour n'avoir qu'une condition à la surface (on dérive la première par rapport au temps et on injecte la seconde dedans) :

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=\text{surf}} + g\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\text{surf}} - \frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)|_{y=\text{surf}} = 0$$

6. Justifier qu'on cherche la solution du problème sous la forme :

$$\phi(x, y, t) = A(y)\exp(i(kx - \omega t))$$

Solution: On cherche la solution sous cette forme car on s'intéresse à la propagation d'une onde harmonique vers $+x$ dont l'amplitude peut varier avec la profondeur.

7. Trouver la forme générale de $A(y)$.

Solution:
On injecte $\phi(x, y, t) = A(y)\exp(i(kx - \omega t))$ dans $\Delta\phi = 0$. On trouve alors une équation différentielle à coefficient constant :

$$\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} - k^2 A(y) = 0$$

La solution de cette équation homogène est :

$$A(y) = C\exp(ky) + D\exp(-ky)$$

8. En utilisant la condition en $y = 0$, montrer que :

$$\phi(x, y, t) = C \cosh(ky) \exp(i(kx - \omega t))$$

où C est une constante et cosh est la fonction cosinus hyperbolique.

Solution: La condition au fond est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0$$

ainsi :

$$C = D$$

donc :

$$A(y) = C \cosh(ky)$$

9. Montrer que la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires est :

$$\omega^2 = \left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right) k \tanh(kh) \tag{8}$$

Solution: Pour obtenir la relation de dispersion, on injecte la solution précédente dans la condition à la surface libre

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=\text{surf}} + g \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\text{surf}} - \frac{T}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) |_{y=\text{surf}} &= 0 \qquad (9) \\
-\omega^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh) + \frac{T}{\rho_0} k^3 \sinh(kh) &= 0 \qquad (10) \\
\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right) k \tanh(kh) &= \omega^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$

10. Montrer que si la longueur d'onde est bien plus grande que la longueur capillaire ($l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$), alors les effets capillaires deviennent négligeables.

Solution: Dans la relation de dispersion, on voit qu'il y a la somme de deux termes : $\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right)$ le premier est dû à la gravité, le second à la tension de surface. Les effets de tension de surface sont négligeables si :

$$g >> \frac{Tk^2}{\rho_0}$$

ou encore :

$$k^2 << \frac{g\rho_0}{T}$$

on exprime cette relation à partir de la longueur d'onde :

$$\lambda >> 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$$

11. On donne $T = 7.10^{-2}\text{N.m}^{-1}$, estimer la longueur capillaire l_c au-dessus de laquelle les effets capillaires sont négligeables.

Solution:

$$l_c \approx 1.7cm$$

12. On suppose que la hauteur d'eau sans pertubration h est de l'ordre du mètre. Si on souhaite observer des effets capillaires importants, dans quel régime faut il se placer : $kh \ll 1$ ou $kh \gg 1$?

> **Solution:** Si $\lambda > l_c$ les effets sont négligeables. Donc on veut $\lambda < l_c < 1cm$ donc :
>
> $$kh = \frac{2\pi h}{\lambda} > \frac{2\pi 1}{1e-2} > 600 >> 1$$
>
> C'est le régime dit d'eau profonde.

13. On suppose qu'on est dans ce régime jusqu'à la fin du problème. Montrer que la relation de dispersion se simplifie :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

> **Solution:** si $kh >> 1$, alors $tanh(kh) \approx 1$, donc :
>
> $$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

14. Calculer la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires.

> **Solution:** Par définition, la vitesse de phase est
>
> $$c_\phi = \frac{\omega}{k}$$
>
> Donc pour les ondes gravito-capillaires on a donc :
>
> $$c_\phi = \sqrt{\frac{1}{k}\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right)}$$

15. Montrer que la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires à un minimum en $k = \frac{2\pi}{l_c}$.

> **Solution:** On a
>
> $$c_\phi = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0}\right)}$$
>
> Le minimum de c_ϕ correspond à $\frac{dc_\phi}{dk} = 0$:
>
> $$\frac{dc_\phi}{dk} = \frac{1}{2}\left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0}\right)\left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0}\right)^{-1/2} = 0$$
>
> par conséquent :
>
> $$\left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0}\right) = 0$$
>
> ou encore
>
> $$k = \sqrt{\frac{g\rho_0}{T}} = \frac{2\pi}{l_c}$$

16. Donner alors la formule $c_{\phi min}$ et estimer sa valeur numérique (on donne $\sqrt[4]{28} = 2.3$).

Solution: Le minimum de c_ϕ vaut alors :

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{g}{\frac{2\pi}{l_c}} + \frac{T\frac{2\pi}{l_c}}{\rho_0}\right)}$$

Comme $l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$, on a :

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{g\sqrt{T}}{\sqrt{g\rho_0}} + \frac{T\frac{\sqrt{\rho_0 g}}{\sqrt{T}}}{\rho_0}\right)}$$

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{gT}}{\sqrt{\rho_0}} + \frac{\sqrt{Tg}}{\sqrt{\rho_0}}\right)}$$

$$c_{\phi min} = \sqrt{2\frac{\sqrt{gT}}{\sqrt{\rho_0}}} = \sqrt[4]{\frac{4gT}{\rho_0}}$$

Application numérique : $c_{\phi min} = \sqrt[4]{\frac{4\times10\times7.10^{-2}}{1000}} = \sqrt[4]{28}.10^{-1} = 0.23\text{m.s}^{-1}$.

17. Exprimer la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires en fonction de λ. Dans le cas où $\lambda < l_c$, est ce que la vitesse de phase augmente ou diminue quand λ diminue ? Etait ce le cas pour les ondes de gravité seules (lorsqu'on néglige la tension de surface) ?

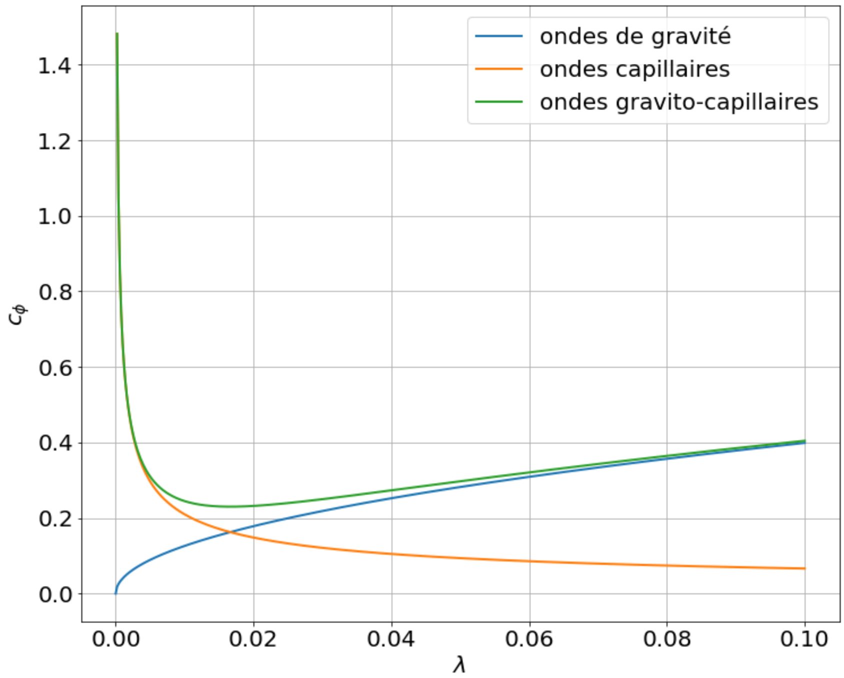
Solution: Comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on a

$$c_\phi = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho_0\lambda}\right)^{1/2}$$

$\lambda = l_c$ correspond à $k = \frac{2\pi}{l_c}$ c'est à dire à l'endroit du minimum de vitesse. Avant et après ce point, la vitesse augmente. Donc la vitesse de phase augmente quand λ diminue. Ce n'était pas le cas pour les ondes de gravités. En effet, si $T = 0$ (tension de surface non prise en compte), alors on voit que c_ϕ varie comme $\sqrt{\lambda}$ donc si λ diminue, c_ϕ aussi.

18. Sur un même graphique, tracer qualitativement la vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde (λ) pour les cas suivants :
— les ondes de gravité seules,
— les ondes capillaires seules,
— les ondes gravito-capillaires.

Solution:


ondes de gravité
ondes capillaires
ondes gravito-capillaires
c_ϕ
λ
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10