

Chapitre 1

Théorie linéaire des plaques

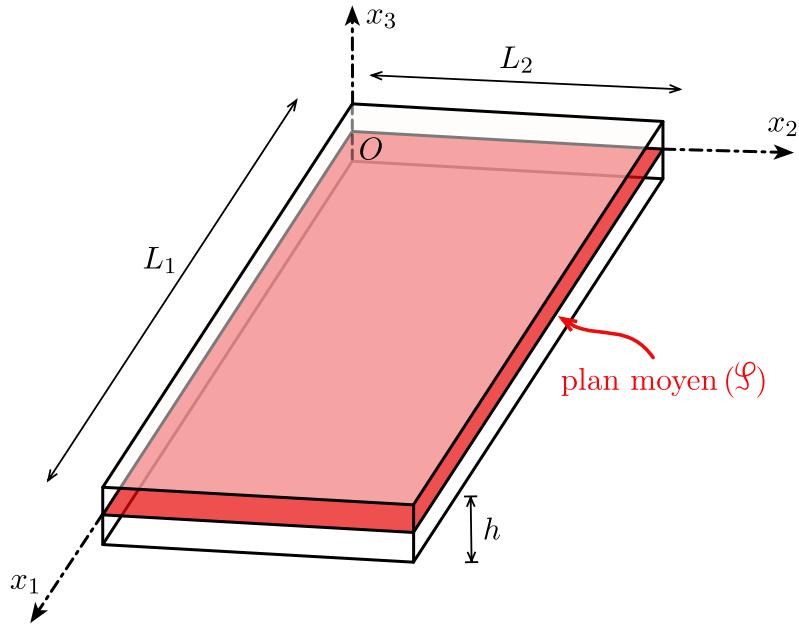
Sommaire

I	Théorie naturelle ou de Reissner-Mindlin	3
I.1	Hypothèses cinématiques	3
I.2	Équations d'équilibre et conditions aux limites	5
I.3	Lois de comportement de plaques élastiques (HPP)	13
I.4	Plaques en tension	15
I.5	Plaques en flexion	16
II	Théorie de Love-Kirchhoff	17
II.1	Hypothèses cinématiques	17
II.2	Équations d'équilibre et conditions aux limites	17
II.3	Lois de comportement de plaques élastiques (HPP)	21
II.4	Plaques en tension	22
II.5	Plaques en flexion	22
III	Etude statique de quelques problèmes de flexion	22
III.1	Plaques circulaires	22
III.2	Plaques rectangulaires	26
III.3	Méthodes énergétiques - solutions approchées	34
IV	Etude des vibrations de plaques minces rectangulaires élastiques	39
IV.1	Vibrations libres de plaques minces rectangulaires	39
IV.2	Méthode de Rayleigh-Ritz	46
IV.3	Vibrations forcées de plaques minces rectangulaires en flexion	50

I Théorie naturelle ou de Reissner-Mindlin

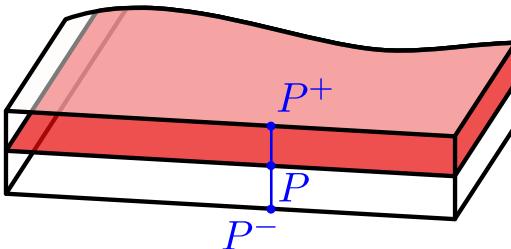
I.1 Hypothèses cinématiques

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit h l'épaisseur moyenne de la plaque et (\mathcal{S}) le plan moyen situé dans le plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.



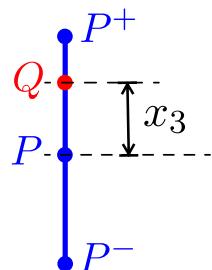
On peut modéliser une plaque par une **théorie micropolaire** qui consiste à schématiser tout volume élémentaire autour du point $P \in (\mathcal{S})$ par P lui-même. Les mouvements rigidifiants sont donc définis par un torseur (6 scalaires : 3 déplacements et 3 rotations).

Un cas particulier consiste à réduire le volume élémentaire au segment $\overrightarrow{P^-P^+}$ parallèle au vecteur \vec{e}_3 et contenant $P \in (\mathcal{S})$. Les points P^- et P^+ appartiennent respectivement aux surfaces inférieure et supérieure.



Le déplacement d'un point Q quelconque appartenant au vecteur $\overrightarrow{P^-P^+}$ mais n'appartenant pas au plan moyen (\mathcal{S}) s'écrit :

$$\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{PQ} = x_3 \vec{e}_3 \quad (1.1)$$



Remarque : Ici le vecteur rotation $\vec{\omega}(x_1, x_2)$ est un vecteur dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) car $\omega_3 = 0$. En effet, $\overrightarrow{P^-P^+}$ étant un vecteur suivant \vec{e}_3 , la rotation autour de cet axe est donc sans

influence.

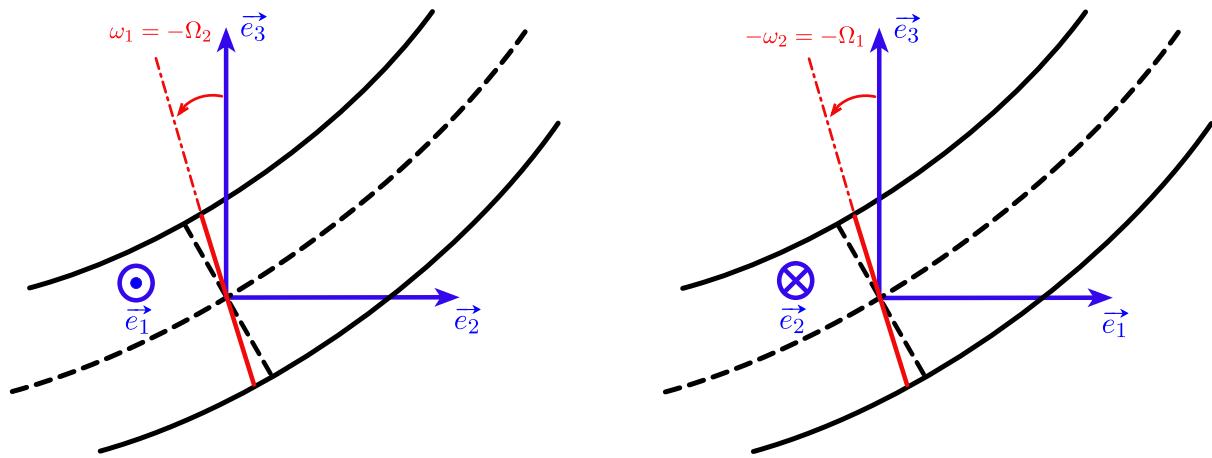
On introduit le vecteur $\vec{\Omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3$ qui se déduit de $\vec{\omega}$ par une rotation de $-\pi/2$ autour de \vec{e}_3 soit :

$$\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + x_3 \vec{\Omega} \quad (1.2)$$

d'où

$$\boxed{\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) + x_3 \Omega_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{cases}} \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.3)$$

Cette théorie micropolaire simplifiée est appelée **théorie naturelle** des plaques ou théorie de Reissner-Mindlin.



Remarque :

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_1 = -\Omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \Omega_1 \quad (1.4)$$

I.2 Équations d'équilibre et conditions aux limites

On considère une structure élastique homogène, qui occupe le domaine Ω borné, soumise à des forces volumiques extérieures \vec{f} .

On peut alors écrire la **loi fondamentale de la dynamique** :

$$\operatorname{div} \sigma(x, t) + \vec{f}(x, t) = \rho \vec{\Gamma}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad \forall t > 0 \quad (1.5)$$

avec σ le tenseur des contraintes de Cauchy (symétrique), $\vec{\Gamma}$ l'accélération et ρ la masse volumique.

A ces équations d'équilibre dynamique on doit rajouter les **conditions aux limites** sur la frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_F$ ($\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_F = \emptyset$) qui peuvent être :

- en déplacement imposé (vecteur déplacement connu sur le contour $\partial\Omega_u$)

$$\vec{u} = \vec{u}^d \quad \forall x \in \partial\Omega_u, \quad \forall t > 0$$
- en effort imposé (vecteur contrainte connu sur le contour $\partial\Omega_F$)

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \quad \forall x \in \partial\Omega_F, \quad \forall t > 0.$$

Formulation faible :

Pour introduire une formulation variationnelle en déplacements, les déplacements virtuels \vec{u}^* , fonctions continues et dérivables, sont choisis comme variation des déplacements réels \vec{u} $\Rightarrow \vec{u}^* = \vec{u} + \delta \vec{u}$.

L'opérateur δ vérifie : $\delta(\delta \vec{u}) = \vec{0}$, $\delta(\overline{\text{grad}} \vec{u}) = \overline{\text{grad}}(\delta \vec{u})$ et $\int_{\Omega} \delta \vec{u} dV = \delta \left(\int_{\Omega} \vec{u} dV \right)$.

Cette variation étant choisie au sein des champs cinématiquement admissibles (C.A.) donc $\delta \vec{u} = \vec{0}$ sur $\partial \Omega_u$.

On part de l'équation dynamique (1.5) écrite en indiciel, on obtient alors :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) \delta u_i dV = \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV \quad \text{avec} \quad \Gamma_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

On rappelle la formule de Green et d'intégration par partie :

$$\iiint_{\Omega} f_{,i} dV = \iint_{\partial \Omega} f n_i dA \quad \text{où } n_i \text{ sont les composantes du vecteur normal}$$

$$\iiint_{\Omega} (fg)_{,i} dV = \iiint_{\Omega} f_{,i} g dV + \iiint_{\Omega} f g_{,i} dV = \iint_{\partial \Omega} f g n_i dA$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV \\ &= \iint_{\partial \Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA - \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} dV + \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV = \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV \end{aligned}$$

Comme le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique alors $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ donc :

$$\sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right)$$

On a alors :

$$-\iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV + \iint_{\partial \Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA = \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV \quad (1.6)$$

avec les déformations virtuelles qui sont la première variation des déformations réelles :

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) = \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.7)$$

On introduit les quantités suivantes :

- $\delta W_i = - \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$: le travail virtuel des efforts intérieurs
- $\delta W_e = \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV + \iint_{\partial \Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA$: le travail virtuel des efforts extérieurs.

Remarque : $\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA = \iint_{\partial\Omega_F} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA + \iint_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij} n_j \cdot 0 dA = \iint_{\partial\Omega_F} T_i^d \delta u_i dA$

- $\delta W_a = \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV$: le travail virtuel des efforts d'accélération

D'où le principe des travaux virtuels (PTV) [formulation faible] :

$$\boxed{\delta W_i + \delta W_e = \delta W_a} \quad (1.8)$$

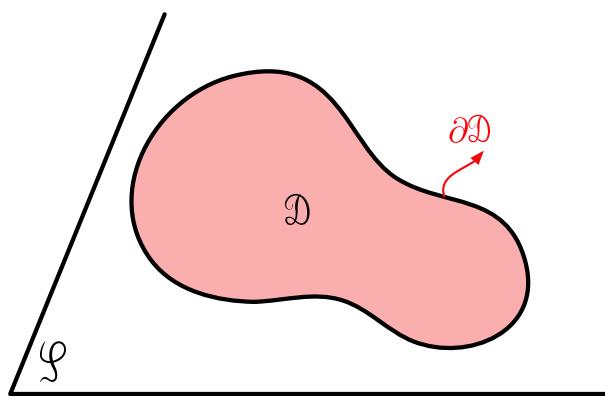
avec

$$\begin{aligned} \delta W_i &= - \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \\ \delta W_e &= \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV + \iint_{\partial\Omega_F} T_i^d \delta u_i dA \\ \delta W_a &= \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV \end{aligned} \quad (1.9)$$

une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'équilibre du solide (exprimé sous forme intégral)

Remarque : les lois physiques (lois de comportement) n'interviennent pas. On n'a pas de bilan d'énergie ici.

On va expliciter δW_i , δW_e et δW_a pour le cas d'une plaque d'épaisseur h qui occupe le domaine \mathcal{D} de frontière $\partial\mathcal{D}$.



I.2.a Calcul du travail virtuel des efforts extérieurs

$$\delta W_e = \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV + \iint_{\partial\Omega_F} T_i^d \delta u_i dA$$

1. Théorie linéaire des plaques

avec les efforts volumiques :

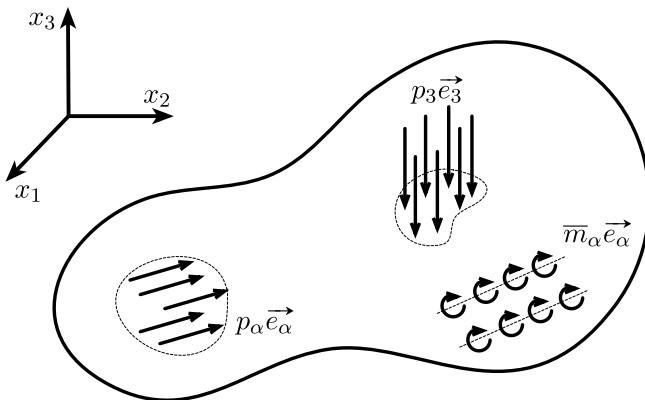
$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} f_i \delta u_i dV &= \iiint_{\Omega} (f_\alpha \delta u_\alpha + f_3 \delta u_3) dV \stackrel{(1.3)}{=} \iiint_{\Omega} [f_\alpha \delta(u_\alpha^0 + x_3 \Omega_\alpha) + f_3 \delta w] dV \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\left[\int_{-h/2}^{+h/2} f_\alpha dx_3 \right] \delta u_\alpha^0 + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} x_3 f_\alpha dx_3 \right] \delta \Omega_\alpha + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} f_3 dx_3 \right] \delta w \right) dA \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + \bar{m}_\alpha \delta \Omega_\alpha + p_3 \delta w) dA
 \end{aligned}$$

avec :

$p_\alpha \vec{e}_\alpha$ les efforts surfaciques dans le plan

$p_3 \vec{e}_3$ les efforts surfaciques normaux

$\bar{m}_\alpha \vec{e}_\alpha$ les moments surfaciques dans le plan (exceptionnels donc pas pris en compte par la suite)



Par analogie on peut écrire :

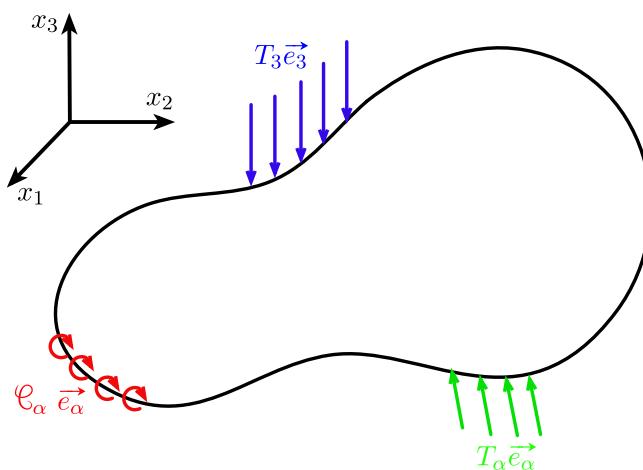
$$\iint_{\partial\Omega_F} T_i^d \delta u_i dA = \oint_{\partial\mathcal{D}} (T_\alpha \delta u_\alpha^0 + \mathcal{C}_\alpha \delta \Omega_\alpha + T_3 \delta w) d\ell$$

avec :

$T_\alpha \vec{e}_\alpha$ les efforts linéaires dans le plan

$T_3 \vec{e}_3$ les efforts linéaires normaux

$\mathcal{C}_\alpha \vec{e}_\alpha$ les moments linéaires dans le plan



On obtient alors :

$$\delta W_e = \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + p_3 \delta w) dA + \oint_{\partial \mathcal{D}} (T_\alpha \delta u_\alpha^0 + T_3 \delta w + \mathcal{C}_\alpha \delta \Omega_\alpha) d\ell \quad (1.10)$$

I.2.b Calcul du travail virtuel des efforts intérieurs

$$-\delta W_i = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$$

avec d'après (1.7) : $\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]$

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\delta u_\alpha)_{,\beta} + (\delta u_\beta)_{,\alpha}] \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{2} [(\delta u_\alpha^0)_{,\beta} + (\delta u_\beta^0)_{,\alpha}] + x_3 \frac{1}{2} [(\delta \Omega_\alpha)_{,\beta} + (\delta \Omega_\beta)_{,\alpha}]$$

On obtient alors : $\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 \delta K_{\alpha\beta}$ où

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} [(\delta u_\alpha^0)_{,\beta} + (\delta u_\beta^0)_{,\alpha}] \quad (1.11)$$

et

$$\delta K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\delta \Omega_\alpha)_{,\beta} + (\delta \Omega_\beta)_{,\alpha}] \quad (1.12)$$

$$\delta \epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} [(\delta u_\alpha)_{,3} + (\delta u_3)_{,\alpha}] \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{2} [\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha}]$$

$$\delta \epsilon_{33} = \delta u_{3,3} = \delta w_{,3} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } -\delta W_i &= \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \iiint_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha 3} \delta \epsilon_{\alpha 3} + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33}] dV \\ &= \iiint_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta} (\delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 \delta K_{\alpha\beta}) + \sigma_{\alpha 3} (\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha}) + \sigma_{33} \cdot 0] dV \end{aligned}$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \left(\left[\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right] \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right] \delta K_{\alpha\beta} + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \right] (\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha}) \right) dA$$

On pose :

$$\boxed{\begin{aligned} (N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} (1, x_3) \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ Q_\alpha &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \end{aligned}} \quad (1.13)$$

avec

$N_{\alpha\beta}$: tension ou résultante membranaire

$M_{\alpha\beta}$: moments de flexion-torsion

Q_α : effort tranchant ou résultante de cisaillement

1. Théorie linéaire des plaques

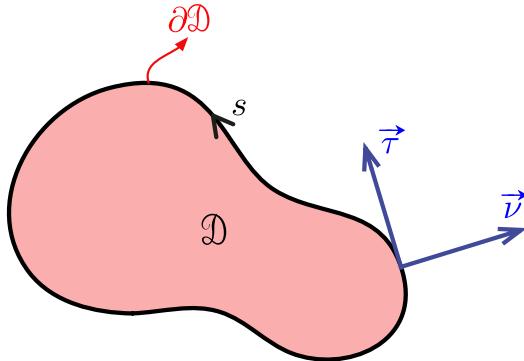
d'où

$$-\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} + Q_\alpha (\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha})] dA$$

Comme le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique alors $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ donc $N_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ sont symétriques. On a alors d'après (1.11) et (1.12) :

$$-\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} (\delta u_\alpha^0)_{,\beta} + M_{\alpha\beta} (\delta \Omega_\alpha)_{,\beta} + Q_\alpha (\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha})] dA \quad (1.14)$$

On introduit le trièdre direct $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{e}_3)$ lié au bord de la plaque repéré par l'abscisse curviligne s . Les vecteurs $\vec{\nu}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement les vecteurs normal et tangent.



En utilisant le théorème de la divergence on obtient :

$$\begin{aligned} -\delta W_i &= \oint_{\partial\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \nu_\beta \delta u_\alpha^0 d\ell - \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_\alpha^0 dA + \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \delta \Omega_\alpha d\ell - \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\beta} \delta \Omega_\alpha dA \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} Q_\alpha \delta \Omega_\alpha dA + \oint_{\partial\mathcal{D}} Q_\alpha \nu_\alpha \delta w d\ell - \iint_{\mathcal{D}} Q_{\alpha,\alpha} \delta w dA \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_\alpha^0 + (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha) \delta \Omega_\alpha + Q_{\alpha,\alpha} \delta w] dA \\ &\quad - \oint_{\partial\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \nu_\beta \delta u_\alpha^0 + M_{\alpha\beta} \nu_\beta \delta \Omega_\alpha + Q_\alpha \nu_\alpha \delta w] d\ell \end{aligned} \quad (1.15)$$

I.2.c Calcul du travail virtuel des efforts d'accélération

$$\delta W_a = \iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i \delta u_i dV = \iiint_{\Omega} [\rho \Gamma_\alpha \delta u_\alpha + \rho \Gamma_3 \delta u_3] dV \quad (1.16)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Gamma_\alpha & = & \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_\alpha^0 + x_3 \Omega_\alpha) = \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} + x_3 \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2} = \Gamma_\alpha^0 + x_3 \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2} \\ \Gamma_3 & = & \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

$$\text{donc } \delta W_a = \iiint_{\Omega} \left[\rho \left(\Gamma_{\alpha}^0 + x_3 \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha}}{\partial t^2} \right) \delta (u_{\alpha}^0 + x_3 \Omega_{\alpha}) + \rho \Gamma_3 \delta w \right] dV \quad (1.18)$$

On supposera que la plaque est symétrique suivant l'axe \vec{z} alors $\int_{-h/2}^{+h/2} x_3 dx_3 = 0$.

On obtient donc :

$$\delta W_a = \iint_{\mathcal{D}} [\rho h \Gamma_{\alpha}^0 \delta u_{\alpha}^0 + \Delta_{\alpha} \delta \Omega_{\alpha} + \rho h \Gamma_3 \delta w] dA \quad \text{avec} \quad \Delta_{\alpha} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha}}{\partial t^2}. \quad (1.19)$$

Remarque : Les termes dynamiques issus de l'inertie de rotation (en vert) seront la plupart du temps négligés.

I.2.d Principe des travaux virtuels

On applique le principe des travaux virtuels $\delta W_i + \delta W_e = \delta W_a$ pour déterminer les équations d'équilibre dynamiques des plaques dans la théorie naturelle ainsi que les conditions de bord associées.

◊ Les équations d'équilibre (les termes sur \mathcal{D})

$$\begin{aligned} (\delta u_{\alpha}^0) : N_{\alpha\beta,\beta} + p_{\alpha} &= \rho h \Gamma_{\alpha}^0 = \rho h \frac{\partial^2 u_{\alpha}^0}{\partial t^2} \iff \overrightarrow{\text{div}} \mathbb{N} + \vec{p} = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}^0}{\partial t^2} \\ (\delta w) : Q_{\alpha,\alpha} + p_3 &= \rho h \Gamma_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \iff \text{div} \vec{Q} + p_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ (\delta \Omega_{\alpha}) : M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} &= \Delta_{\alpha} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha}}{\partial t^2} \iff \overrightarrow{\text{div}} \mathbb{M} - \vec{Q} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec $\mathbb{N} = \begin{pmatrix} N_{\nu\nu} & N_{\nu\tau} \\ N_{\tau\nu} & N_{\tau\tau} \end{pmatrix}_{(\vec{\nu}, \vec{\tau})}$ la matrice des contraintes membranaires (sur le plan de la plaque) ;

$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} M_{\nu\nu} & M_{\nu\tau} \\ M_{\tau\nu} & M_{\tau\tau} \end{pmatrix}_{(\vec{\nu}, \vec{\tau})}$ la matrice des moments de flexion et de torsion

et $\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{\nu} \\ Q_{\tau} \end{pmatrix}_{(\vec{\nu}, \vec{\tau})}$ le vecteur des efforts tranchants (en dehors du plan de la plaque)

Dans le cadre de la théorie naturelle, on a 5 équations à 5 inconnues ($u_{\nu}^0, u_{\tau}^0, w, \Omega_{\nu}, \Omega_{\tau}$).

◊ Les conditions de bord (les termes sur $\partial\mathcal{D}$)

$$\begin{aligned} (\delta u_{\alpha}^0) : T_{\alpha} &= N_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \iff \vec{T} = \mathbb{N} \cdot \vec{\nu} \\ (\delta w) : T_3 &= Q_{\alpha} \nu_{\alpha} \iff T_3 = \vec{Q} \cdot \vec{\nu} \\ (\delta \Omega_{\alpha}) : \mathcal{C}_{\alpha} &= M_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \iff \vec{\mathcal{C}} = \mathbb{M} \cdot \vec{\nu} \end{aligned} \quad (1.21)$$

1. Théorie linéaire des plaques

Remarque : $\vec{\mathcal{C}}$ est associé à $\vec{\Omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3$ donc $\vec{\mathcal{C}} = \vec{\mu} \wedge \vec{e}_3$ avec $\vec{\mu}$ associé à $\vec{\omega}$ aura le vrai sens physique. Le vecteur $\vec{\mu}$ est le moment linéique exercé sur le bord dans la base $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{e}_3)$.

$$\vec{\mathcal{C}} = (\mu_\nu \vec{\nu} + \mu_\tau \vec{\tau}) \wedge \vec{e}_3 = -\mu_\nu \vec{\tau} + \mu_\tau \vec{\nu} = \mathcal{C}_\nu \vec{\nu} + \mathcal{C}_\tau \vec{\tau}.$$

D'après (1.21) on sait que $\mathcal{C}_\nu = M_{\nu\nu}$ et $\mathcal{C}_\tau = M_{\tau\nu}$; on a alors :

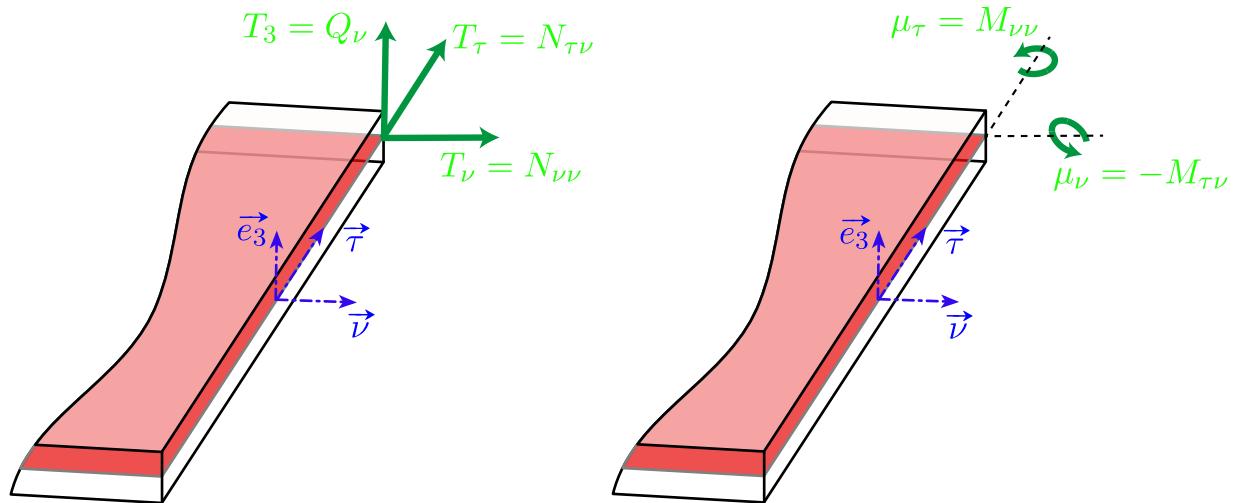
$$\begin{aligned} \mu_\nu &= -\mathcal{C}_\tau &= -M_{\tau\nu} \\ \mu_\tau &= +\mathcal{C}_\nu &= M_{\nu\nu} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les 5 conditions de bord (1.21) peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} T_\nu = N_{\nu\nu} \quad \text{et} \quad T_\tau = N_{\tau\nu} &\iff \vec{T} = \mathbb{N} \cdot \vec{\nu} \\ T_3 = Q_\nu &\iff T_3 = \vec{Q} \cdot \vec{\nu} \\ \mu_\nu = -M_{\tau\nu} &\iff \mu_\nu = -\vec{\tau} \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nu} \\ \mu_\tau = M_{\nu\nu} &\iff \mu_\tau = \vec{\nu} \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nu} \end{aligned} \quad (1.23)$$

μ_ν et μ_τ sont respectivement les moments linéiques de torsion et de flexion.

Interprétation des efforts (forces et moments au bord) pour la théorie naturelle :



Exemples de conditions de bord :

- Bord libre : $N_{\nu\nu} = N_{\tau\nu} = Q_\nu = M_{\tau\nu} = M_{\nu\nu} = 0$
- Bord encastré : $N_{\nu\nu}, N_{\tau\nu}, Q_\nu, M_{\tau\nu}, M_{\nu\nu}$ quelconques
- Bord simplement appuyé : $N_{\nu\nu} = N_{\tau\nu} = M_{\nu\nu} = 0$ et $Q_\nu, M_{\tau\nu}$ quelconques.

I.3 Lois de comportement de plaques élastiques (HPP)

On passe au champ de déplacement "réel" et rotations des sections droites "réelles".

Les composantes du tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP) s'écrivent :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}] \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0] + x_3 \frac{1}{2} [\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_{\beta,\alpha}] = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 K_{\alpha\beta} \quad (1.24)$$

avec $\epsilon^0 = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{u}^0 + {}^T \overline{\text{grad}} \vec{u}^0)$ le tenseur des déformations longitudinales lié à \mathbb{N}

et $\mathbb{K} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{\Omega} + {}^T \overline{\text{grad}} \vec{\Omega})$ le tenseur des rotations différentielles des segments lié à \mathbb{M} .

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} [u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}] \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{2} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] \quad (1.25)$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} = w_{,3} = 0 \quad (1.26)$$

La relation (1.26) est fausse du point de vue physique car elle ne prend pas en compte l'effet Poisson. En effet si on tire sur la plaque, celle-ci se rétrécit suivant la direction de son épaisseur. Afin de remédier à cette anomalie on va par la suite considérer que la plaque est plus proche d'un état de **contraintes planes** (ici $\sigma_{33} = 0$) et la déformation ϵ_{33} sera finalement autorisée de façon à permettre l'effet Poisson.

On va vérifier pour le cas d'une plaque soumise à une densité surfacique de force $p_3 \vec{e}_3$ que cette hypothèse est valable en faisant une analyse dimensionnelle.

Les équations d'équilibre en statique sont alors :

$$\begin{cases} Q_{\alpha,\alpha} + p_3 &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= 0 \end{cases}$$

La plaque a pour dimension L suivant les directions x_1 et x_2 et h suivant la direction x_3 avec $\eta = \frac{h}{L} \ll 1$

- $Q_{\alpha,\alpha} + p_3 = 0 \quad \leadsto \quad |\frac{Q_\alpha}{L} + p_3| = 0 \quad \leadsto \quad |Q_\alpha| \sim |p_3|L \sim |\sigma_{33}|L$

or d'après (1.13) : $Q_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3$ soit $|Q_\alpha| \sim |\sigma_{\alpha 3}|h$

donc $|\sigma_{33}| \sim \frac{h}{L} |\sigma_{\alpha 3}| \ll |\sigma_{\alpha 3}|$

- $M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad \leadsto \quad |\frac{M_{\alpha\beta}}{L} - Q_\alpha| = 0 \quad \leadsto \quad |M_{\alpha\beta}| \sim |Q_\alpha|L \sim |\sigma_{\alpha 3}|hL$

or d'après (1.13) : $M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3$ soit $|M_{\alpha\beta}| \sim |\sigma_{\alpha\beta}|h^2$

1. Théorie linéaire des plaques

$$\text{donc } |\sigma_{\alpha 3}| \sim \frac{h}{L} |\sigma_{\alpha \beta}| \ll |\sigma_{\alpha \beta}|$$

On en déduit alors que : $|\sigma_{33}| \ll |\sigma_{\alpha 3}| \ll |\sigma_{\alpha \beta}|$. On peut donc bien supposer que $\sigma_{33} \sim 0$ et utiliser l'hypothèse des contraintes planes pour établir les lois de comportement.

La loi de comportement 3D pour un matériau élastique linéaire isotrope est :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda(\text{Tr}\epsilon)\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{donc } \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Tr}\epsilon) \delta_{ij} \right]$$

$$\text{Par conséquent, } \sigma_{33} = 0 = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\alpha\alpha} + \epsilon_{33}) \right] \implies \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\alpha\alpha} \neq 0$$

On prend alors bien en compte de l'effet Poisson.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\alpha\alpha} + \epsilon_{33}) \delta_{\alpha\beta} \right] = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\alpha\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

donc on obtient :

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta} + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]} \quad (1.27)$$

avec d'après (1.11) et (1.12) : $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 K_{\alpha\beta}$ et $\epsilon_{\gamma\gamma} = \epsilon_{\gamma\gamma}^0 + x_3 K_{\gamma\gamma}$.

On peut alors obtenir pour la théorie naturelle des plaques d'après les équations (1.13) les lois de comportement :

$$\begin{aligned} \bullet N_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(1-\nu)(\epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 K_{\alpha\beta}) + \nu(\epsilon_{\gamma\gamma}^0 + x_3 K_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta}] dx_3 \\ &\implies \boxed{N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}^0\delta_{\alpha\beta}]} \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\text{soit sous forme matricielle : } \mathbb{N} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\mathbb{E}^0 + \nu(\text{Tr}\mathbb{E}^0)\mathbb{1}]$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(1-\nu)(x_3\epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3^2 K_{\alpha\beta}) + \nu(x_3\epsilon_{\gamma\gamma}^0 + x_3^2 K_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta}] dx_3 \\ &\implies \boxed{M_{\alpha\beta} = D [(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]} \end{aligned} \quad (1.29)$$

avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la **rigidité à la flexion des plaques**

soit sous forme matricielle : $\mathbb{M} = D [(1-\nu)\mathbb{K} + \nu(\text{Tr}\mathbb{K})\mathbb{1}]$.

$$\bullet Q_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = \int_{-h/2}^{+h/2} 2\mu \epsilon_{\alpha 3} dx_3 \stackrel{(1.25)}{=} \int_{-h/2}^{+h/2} \mu [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] dx_3 = \mu h [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}]$$

$$\Rightarrow Q_\alpha = \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] \quad (1.30)$$

soit sous forme matricielle : $\vec{Q} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\vec{\Omega} + \overrightarrow{\text{grad}}_2 w)$.

Exemples de conditions aux limites en déplacements :

- Bord libre : $u_\nu^0, u_\tau^0, w, \omega_\nu, \omega_\tau$ quelconques
- Bord encastré : $u_\nu^0 = u_\tau^0 = w = \omega_\nu = \omega_\tau = 0$
- Bord simplement appuyé : $w = \omega_\nu = 0$ et $u_\nu^0, u_\tau^0, \omega_\tau$ quelconques.

I.4 Plaques en tension

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}] \\ \Rightarrow \frac{Eh}{1-\nu^2} &[(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}]_{,\beta} + p_\alpha = \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{Eh}{1-\nu^2} &\left[(1-\nu) \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) + \nu u_{\gamma,\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta} \right]_{,\beta} + p_\alpha = \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} &[(1-\nu) (u_{\alpha,\beta\beta}^0 + u_{\beta,\alpha\beta}^0) + 2\nu u_{\gamma,\gamma\beta}^0 \delta_{\alpha\beta}] + p_\alpha = \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} &[(1-\nu) (u_{\alpha,\beta\beta}^0 + u_{\beta,\alpha\beta}^0) + 2\nu u_{\gamma,\gamma\alpha}^0] + p_\alpha = \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} &[(1-\nu) u_{\alpha,\beta\beta}^0 + (1+\nu) u_{\beta,\beta\alpha}^0] + p_\alpha = \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de Navier :

$$(1-\nu) u_{\alpha,\beta\beta}^0 + (1+\nu) u_{\beta,\beta\alpha}^0 + \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} p_\alpha = \frac{2\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial t^2} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.31)$$

soit sous forme vectorielle :

$$(1-\nu) \Delta \vec{u}^0 + (1+\nu) \overrightarrow{\text{grad}}_2 (\text{div } \vec{u}^0) + \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} \vec{p} = \frac{2\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 \vec{u}^0}{\partial t^2} \quad (1.32)$$

u_ν^0 et u_τ^0 sont solutions de (1.31) + conditions de bord + conditions initiales

I.5 Plaques en flexion

$$\begin{cases} Q_{\alpha,\alpha} + p_3 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= \Delta_\alpha = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2} \end{cases}$$

avec $M_{\alpha\beta} = D [(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]$ et $Q_\alpha = \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}]$

- $Q_{\alpha,\alpha} + p_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}]_{,\alpha} + p_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_{,\alpha\alpha} + \Omega_{\alpha,\alpha} + \frac{2(1+\nu)}{Eh} p_3 = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}} \quad (1.33)$$

soit sous forme vectorielle :

$$\Delta w + \operatorname{div} \vec{\Omega} + \frac{2(1+\nu)}{Eh} p_3 = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

- $M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow D [(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]_{,\beta} - \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow D \left[(1-\nu) \frac{1}{2} (\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_{\beta,\alpha}) + \nu \Omega_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]_{,\beta} - \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{2} [(1-\nu)\Omega_{\alpha,\beta\beta} + (1+\nu)\Omega_{\beta,\beta\alpha}] - \frac{Eh}{2(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow (1-\nu)\Omega_{\alpha,\beta\beta} + (1+\nu)\Omega_{\beta,\beta\alpha} - \frac{Eh}{D(1+\nu)} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = \frac{\rho h^3}{6D} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2} \text{ avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-\nu)\Omega_{\alpha,\beta\beta} + (1+\nu)\Omega_{\beta,\beta\alpha} - \frac{12(1-\nu)}{h^2} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = \frac{2\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial t^2}} \quad (1.35)$$

soit sous forme vectorielle :

$$(1-\nu)\Delta \vec{\Omega} + (1+\nu) \overrightarrow{\operatorname{grad}_2} (\operatorname{div} \vec{\Omega}) - \frac{12(1-\nu)}{h^2} [\overrightarrow{\operatorname{grad}_2} w + \vec{\Omega}] = \frac{2\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} \quad (1.36)$$

Ω_ν^0 , Ω_τ^0 et w sont solutions du système couplé de 3 équations (1.33) et (1.35) + conditions de bord + conditions initiales

II Théorie de Love-Kirchhoff

II.1 Hypothèses cinématiques

Pour des **plaques suffisamment minces** le cisaillement transverse $\epsilon_{\alpha 3}$ peut être négligé (théorie de Love-Kirchhoff).

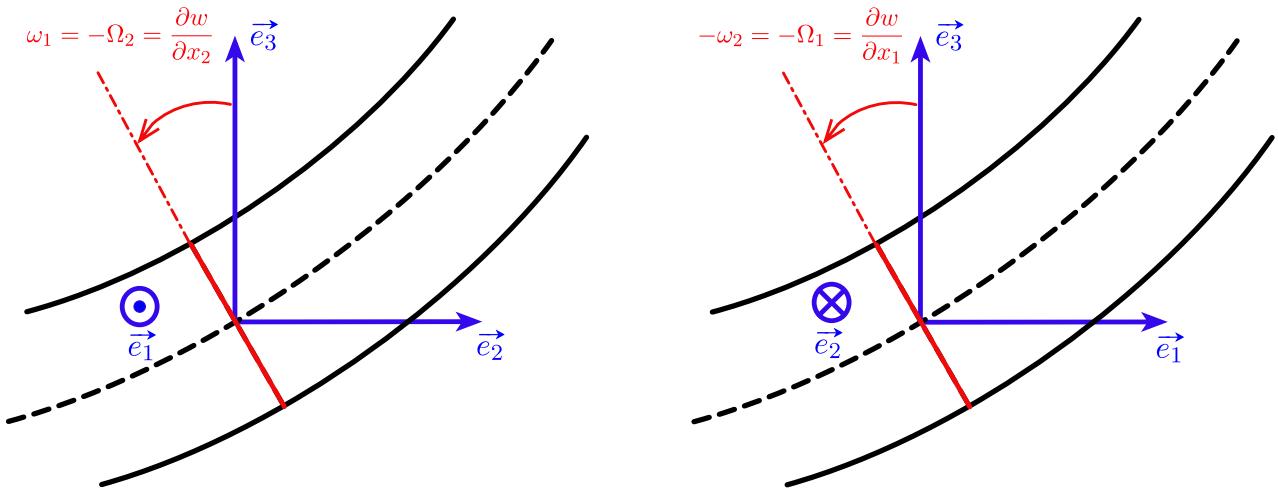
On a alors d'après (1.25) :

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} [\Omega_\alpha + w_{,\alpha}] = 0 \implies \Omega_\alpha = -w_{,\alpha} \quad (\vec{\Omega} = -\overrightarrow{\text{grad}}_2 w) \quad (1.37)$$

Remarque : Les segments $\overrightarrow{P^- P^+}$ restent perpendiculaires au plan moyen (\mathcal{S}).

d'où d'après (1.3) :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.38)$$



II.2 Équations d'équilibre et conditions aux limites

II.2.a Calcul du travail virtuel des efforts extérieurs

D'après (1.10) :

$$\delta W_e = \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + p_3 \delta w) dA + \oint_{\partial \mathcal{D}} (T_\alpha \delta u_\alpha^0 + T_3 \delta w - C_\alpha \delta w_{,\alpha}) d\ell \quad (1.39)$$

Dans la base orthonormée directe $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{e}_3)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_2 \delta w = \frac{\partial(\delta w)}{\partial \nu} \vec{\nu} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial \tau} \vec{\tau}$$

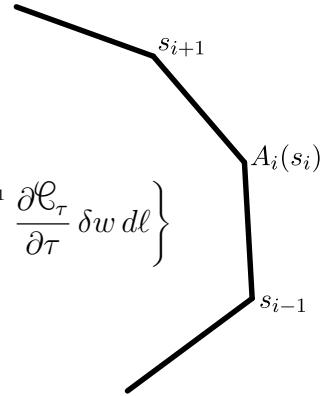
$$\text{donc } \delta w_{,\alpha} = \overrightarrow{\text{grad}}_2 \delta w \cdot \vec{e}_\alpha = \frac{\partial(\delta w)}{\partial \nu} \nu_\alpha + \frac{\partial(\delta w)}{\partial \tau} \tau_\alpha$$

1. Théorie linéaire des plaques

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{C}_\alpha \delta w_{,\alpha} d\ell = \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[\mathcal{C}_\alpha \nu_\alpha \frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu} + \mathcal{C}_\alpha \tau_\alpha \frac{\partial(\delta w)}{\partial\tau} \right] d\ell = \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[\mathcal{C}_\nu \frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu} + \mathcal{C}_\tau \frac{\partial(\delta w)}{\partial\tau} \right] d\ell$$

Le premier terme ne pose pas de problème ; par contre pour le second si \mathcal{C}_τ est dérivable le long de $\partial\mathcal{D}$ sauf en un certain nombre de points de discontinuité A_i (points anguleux d'abscisse curviligne s_i), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{C}_\tau \frac{\partial(\delta w)}{\partial\tau} d\ell &= \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathcal{C}_\tau \frac{\partial(\delta w)}{\partial\tau} d\ell = \sum_{i=1}^N \left\{ [\mathcal{C}_\tau \delta w]_{s_i}^{s_{i+1}} - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial\tau} \delta w d\ell \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [\![\mathcal{C}_\tau]\!] (s = s_i) \delta w (s = s_i) - \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial\tau} \delta w d\ell \\ &= \sum_{i=1}^N [\![\mathcal{C}_\tau]\!] (s = s_i) \delta w_i - \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial\tau} \delta w d\ell \end{aligned}$$



On obtient alors :

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + p_3 \delta w) dA + \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[T_\alpha \delta u_\alpha^0 + \left(T_3 + \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial\tau} \right) \delta w - \mathcal{C}_\nu \frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu} \right] d\ell \\ &\quad - \sum_{i=1}^N [\![\mathcal{C}_\tau]\!] (s = s_i) \delta w_i \end{aligned}$$

(1.40)

II.2.b Calcul du travail virtuel des efforts intérieurs

D'après (1.14) : $-\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} (\delta u_\alpha^0)_{,\beta} + M_{\alpha\beta} (\delta \Omega_\alpha)_{,\beta} + Q_\alpha (\delta \Omega_\alpha + (\delta w)_{,\alpha})] dA$

or dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff d'après (1.37) $\delta \Omega_\alpha = -\delta w_{,\alpha}$, on trouve alors :

$$\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [-N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta}] dA \quad (1.41)$$

En utilisant le théorème de la divergence :

- $-\iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 dA = -\oint_{\partial\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \nu_\beta \delta u_\alpha^0 d\ell + \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_\alpha^0 dA$
- $\iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} dA = \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \nu_\beta (\delta w)_{,\alpha} d\ell - \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\beta} (\delta w)_{,\alpha} dA$
 $= \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \left[\frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu} \nu_\alpha + \frac{\partial(\delta w)}{\partial\tau} \tau_\alpha \right] d\ell - \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\beta} \nu_\alpha \delta w d\ell + \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta w dA$
 $= \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\nu\nu} \frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu} d\ell + \sum_{i=1}^N [\![M_{\tau\nu}]\!] (s = s_i) \delta w_i - \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial\tau} \delta w d\ell$
 $- \oint_{\partial\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\beta} \nu_\alpha \delta w d\ell + \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta w dA$

d'où :

$$\begin{aligned}\delta W_i &= \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_{\alpha}^0 + M_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta w] dA \\ &\quad + \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[-N_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \delta u_{\alpha}^0 - \left(M_{\alpha\beta,\beta} \nu_{\alpha} + \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial \tau} \right) \delta w + M_{\nu\nu} \frac{\partial(\delta w)}{\partial \nu} \right] d\ell \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \llbracket M_{\tau\nu} \rrbracket (s = s_i) \delta w_i\end{aligned}\quad (1.42)$$

II.2.c Calcul du travail virtuel des efforts d'accélération

D'après (1.19) :

$$\delta W_a = \iint_{\mathcal{D}} [\rho h \Gamma_{\alpha}^0 \delta u_{\alpha}^0 + \Delta_{\alpha} \delta \Omega_{\alpha} + \rho h \Gamma_3 \delta w] dA \quad (1.43)$$

$$\text{or ici } \iint_{\mathcal{D}} \Delta_{\alpha} \delta \Omega_{\alpha} dA = - \iint_{\mathcal{D}} \Delta_{\alpha} \delta w_{,\alpha} dA = - \oint_{\partial\mathcal{D}} \Delta_{\alpha} \nu_{\alpha} \delta w d\ell + \iint_{\mathcal{D}} \Delta_{\alpha,\alpha} \delta w dA$$

On obtient alors :

$$\delta W_a = \iint_{\mathcal{D}} [\rho h \Gamma_{\alpha}^0 \delta u_{\alpha}^0 + (\rho h \Gamma_3 + \Delta_{\alpha,\alpha}) \delta w] dA - \oint_{\partial\mathcal{D}} \Delta_{\alpha} \nu_{\alpha} \delta w d\ell \quad (1.44)$$

$$\text{avec } \Delta_{\alpha} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha}}{\partial t^2} = - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_{,\alpha}}{\partial t^2}$$

II.2.d Principe des travaux virtuels

On applique le principe des travaux virtuels $\delta W_i + \delta W_e = \delta W_a$ pour déterminer les équations d'équilibre dynamiques des plaques dans la théorie de Love-Kirchhoff ainsi que les conditions de bord associées.

◊ Les équations d'équilibre (les termes sur \mathcal{D})

$$\begin{aligned}(\delta u_{\alpha}^0) : N_{\alpha\beta,\beta} + p_{\alpha} &= \rho h \Gamma_{\alpha}^0 = \rho h \frac{\partial^2 u_{\alpha}^0}{\partial t^2} \\ \iff \quad \vec{\text{div}} \, \mathbb{N} + \vec{p} &= \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}^0}{\partial t^2} \\ (\delta w) : M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + p_3 &= \rho h \Gamma_3 + \Delta_{\alpha,\alpha} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_{,\alpha\alpha}}{\partial t^2} \\ \iff \quad \text{div} [\vec{\text{div}} \, \mathbb{M}] + p_3 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.45)$$

Dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff, on a 3 équations à 3 inconnues (u_{ν}^0, u_{τ}^0, w).

1. Théorie linéaire des plaques

◊ Les conditions de bord (les termes sur $\partial\mathcal{D}$)

$$(\delta u_\alpha^0) : \quad T_\alpha = N_{\alpha\beta}\nu_\beta$$

$$(\delta w) : \quad T_3 + \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial \tau} = M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha + \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial \tau} - \Delta_\alpha \nu_\alpha \quad (1.46)$$

$$(\delta \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)) : \quad \mathcal{C}_\nu = M_{\nu\nu}$$

Remarque : Dans la théorie de Love-Kirchhoff, on ne peut imposer séparément sur le bord, l'effort tranchant ($T_3 = Q_\nu$) et le moment de torsion ($\mu_\nu = -M_{\tau\nu}$). On ne peut imposer que la combinaison $T_{\text{eff}} = T_3 + \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial \tau}$ qui représentent les **efforts linéiques tranchants effectifs**.

Les 4 conditions de bord (1.46) peuvent donc s'écrire en utilisant (1.22) :

$$T_\nu = N_{\nu\nu} \quad \text{et} \quad T_\tau = N_{\tau\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T} = \mathbb{N} \cdot \vec{\nu}$$

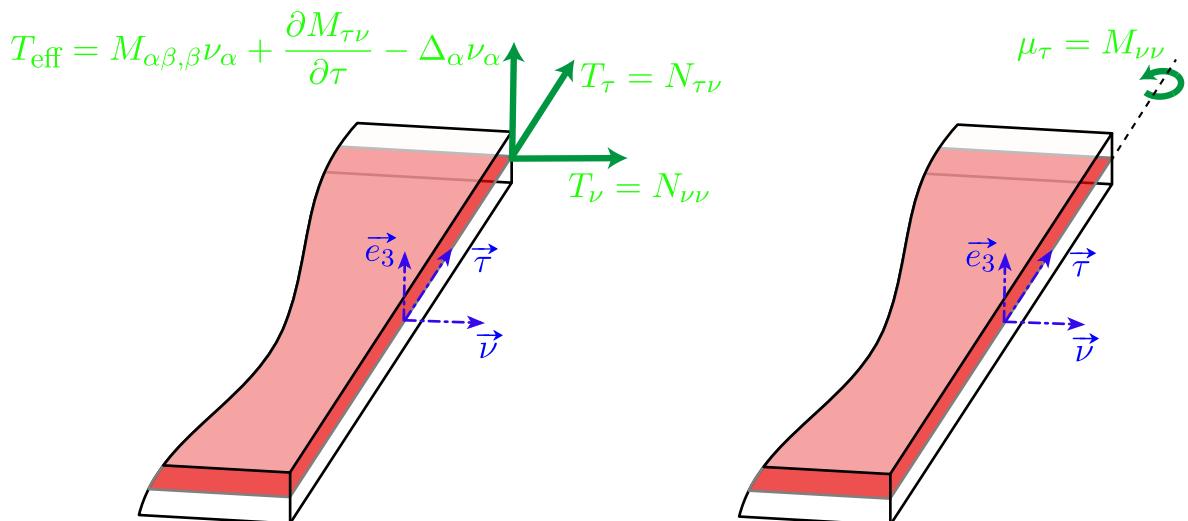
$$T_{\text{eff}} = M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha + \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial \tau} - \Delta_\alpha \nu_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad T_{\text{eff}} = \vec{\nu} \cdot \overrightarrow{\text{div}} \mathbb{M} + \frac{\partial}{\partial \tau} [\vec{\tau} \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nu}] + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\overrightarrow{\text{grad}}_2 w \cdot \vec{\nu}] \quad (1.47)$$

$$\mu_\tau = M_{\nu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_\tau = \vec{\nu} \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\nu}$$

◊ Si existence de points anguleux en $A_i(s_i)$:

$$(\delta w_i) : \quad [\![\mathcal{C}_\tau]\!] (s = s_i) = -[\![\mu_\nu]\!] (s = s_i) = [\![M_{\tau\nu}]\!] (s = s_i) \quad (1.48)$$

Interprétation des efforts (forces et moments au bord) pour la théorie de Love-Kirchhoff :



Exemples de conditions de bord :

- Bord libre : $N_{\nu\nu} = N_{\tau\nu} = T_{\text{eff}} = M_{\nu\nu} = 0$
- Bord encastré : $N_{\nu\nu}, N_{\tau\nu}, T_{\text{eff}}, M_{\nu\nu}$ quelconques
- Bord simplement appuyé : $N_{\nu\nu} = N_{\tau\nu} = M_{\nu\nu} = 0$ et T_{eff} quelconque.

II.3 Lois de comportement de plaques élastiques (HPP)

D'après l'hypothèse de Love-Kirchhoff, il n'y a pas de cisaillement transverse par conséquent $\epsilon_{\alpha 3} = 0$ soit d'après (1.37) : $\Omega_\alpha = -w_{,\alpha}$.

La loi de comportement associée aux efforts membranaires est identique à celle de la théorie naturelle :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}^0\delta_{\alpha\beta}] \Leftrightarrow \mathbb{N} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\epsilon^0 + \nu(\text{Tr}\epsilon^0)\mathbf{1}] \quad (1.49)$$

Par contre pour les efforts hors plan membranaire, la loi de comportement est modifiée. En effet :

$$M_{\alpha\beta} = D[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (1.50)$$

avec

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_{\beta,\alpha}] = -w_{,\alpha\beta} \Leftrightarrow \mathbb{K} = -\overline{\overline{\text{grad}}} (\overrightarrow{\text{grad}} w) \quad (1.51)$$

Remarque : Le tenseur \mathbb{K} est l'opposé du tenseur des courbures.

On obtient alors pour la seconde loi de comportement :

$$M_{\alpha\beta} = -D[(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \Leftrightarrow \mathbb{M} = -D[(1-\nu)\overline{\overline{\text{grad}}} (\overrightarrow{\text{grad}} w) + \nu \Delta w \mathbf{1}] \quad (1.52)$$

Exemples de conditions aux limites en déplacements :

- Bord libre : $u_\nu^0, u_\tau^0, w, \frac{\partial w}{\partial \nu}$ quelconques
- Bord encastré : $u_\nu^0 = u_\tau^0 = w = 0$ pour les déplacements.

D'autre part, $\vec{\Omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 = -\overrightarrow{\text{grad}}_2 w$ soit dans la base $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{e}_3)$:

$$\begin{pmatrix} \omega_\nu \\ \omega_\tau \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_\tau \\ -\omega_\nu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_{,\nu} \\ w_{,\tau} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme les rotations des sections doivent également être nulles dans le cas de l'encastrement, on a alors $w_{,\nu} = w_{,\tau} = 0$ sur le bord de la plaque. Toutefois si $w = 0$ sur le bord, la condition $w_{,\tau} = 0$ est toujours vérifiée. Les 4 conditions de bord à vérifier pour le bord encastré sont donc : $u_\nu^0 = u_\tau^0 = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$.

- Bord simplement appuyé : $w = 0$ et $u_\nu^0, u_\tau^0, \frac{\partial w}{\partial \nu}$ quelconques.

II.4 Plaques en tension

On obtient les mêmes équations (1.31) que pour la théorie naturelle.

II.5 Plaques en flexion

On utilise l'équation d'équilibre liée au déplacement w : $M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + p_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_{,\alpha\alpha}}{\partial t^2}$ ainsi que la loi de comportement associée : $M_{\alpha\beta} = -D [(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}]$.

En combinant les deux on obtient :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -D [(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}]_{,\alpha\beta} = -D [(1-\nu)w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}]$$

$$\text{donc } M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -D [(1-\nu)w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\alpha\alpha}] = -D w_{,\alpha\alpha\beta\beta} = -D \Delta \Delta w$$

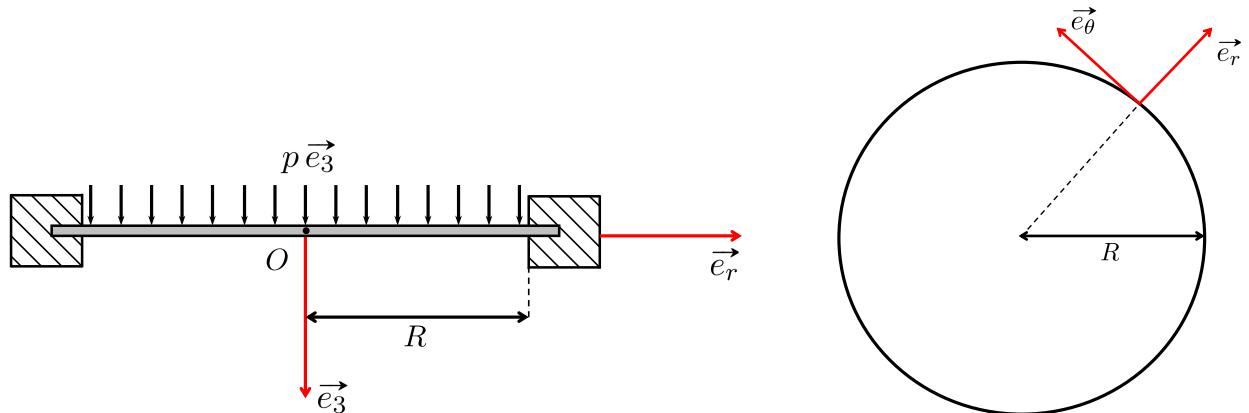
$$\text{On a donc : } -D \Delta \Delta w + p_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w_{,\alpha\alpha}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \Delta w = \frac{p_3}{D} - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12D} \frac{\partial^2 w_{,\alpha\alpha}}{\partial t^2}} \quad (1.53)$$

III Etude statique de quelques problèmes de flexion

III.1 Plaques circulaires

On considère une plaque circulaire de rayon R soumise à un effort normal surfacique uniformément réparti $p \vec{e}_3$ encastrée sur son pourtour.



Pour que le trièdre $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{e}_3)$ soit direct ici $\vec{\nu} = \vec{e}_r$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$

a) Théorie de Love-Kirchhoff

- Pour un problème de flexion en statique dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff d'après (1.53) on sait que :

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

On a à faire ici à un problème axisymétrique (symétrie géométrique et de chargement) donc w ne dépend que de la variable r .

$$\begin{aligned}
 \Delta\Delta w &= \frac{1}{r} [r(\Delta w)_{,r}]_{,r} = \frac{p}{D} \\
 \implies [r(\Delta w)_{,r}]_{,r} &= \frac{pr}{D} \\
 \implies r(\Delta w)_{,r} &= \frac{pr^2}{2D} + \alpha_1 \\
 \implies (\Delta w)_{,r} &= \frac{pr}{2D} + \frac{\alpha_1}{r} \\
 \implies \Delta w &= \frac{pr^2}{4D} + \alpha_1 \ln r + \alpha_2 \text{ ici } \alpha_1 = 0 \text{ afin d'éviter la singularité de la solution en } r = 0 \\
 \implies \Delta w &= \frac{1}{r} [rw_{,r}]_{,r} = \frac{pr^2}{4D} + \alpha_2 \\
 \implies [rw_{,r}]_{,r} &= \frac{pr^3}{4D} + \alpha_2 r \\
 \implies rw_{,r} &= \frac{pr^4}{16D} + \alpha_2 \frac{r^2}{2} + \alpha_3 \\
 \implies w_{,r} &= \frac{pr^3}{16D} + \alpha_2 \frac{r}{2} + \frac{\alpha_3}{r} \\
 \implies w(r) &= \frac{pr^4}{64D} + \alpha_2 \frac{r^2}{4} + \alpha_3 \ln r + \alpha_4 \text{ ici } \alpha_3 = 0 \text{ sinon singularité en } r = 0
 \end{aligned}$$

Finalement la solution du problème est de la forme :

$$w(r) = \frac{pr^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2$$

○ Conditions aux limites (encastrement en $r = R$) :

En $r = R$ la plaque est encastrée donc $\underline{w(R) = 0}$ et $\frac{\partial w}{\partial \nu}(R) = \frac{dw}{dr}(R) = \underline{w_{,r}(R) = 0}$.

$$w_{,r} = \frac{pr^3}{16D} + 2C_1 r \text{ donc } w_{,r}(R) = 0 \implies C_1 = -\frac{pR^2}{32D}$$

$$w(R) = \frac{pR^4}{64D} - \frac{pR^2}{32D} R^2 + C_2 = 0 \implies C_2 = \frac{pR^4}{64D}$$

on a alors $w(r) = \frac{p}{64D} (r^4 - 2R^2r^2 + R^4)$ soit $w(r) = \frac{p}{64D} (r^2 - R^2)^2$

b) Théorie naturelle

- Pour un problème de flexion en statique dans le cadre de la théorie naturelle d'après (1.20) on sait que :

$$\begin{cases} Q_{\alpha,\alpha} + p = 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \end{cases}$$

En combinant les deux équations, on obtient $M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + p = 0$

avec $M_{\alpha\beta} = D[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]$ où d'après (1.24) : $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_{\beta,\alpha}]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} &= D[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]_{,\alpha\beta} = D\left[(1-\nu)\frac{1}{2}(\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_{\beta,\alpha}) + \nu\Omega_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]_{,\alpha\beta} \\ \implies M_{\alpha\beta,\alpha\beta} &= D\left[(1-\nu)\frac{1}{2}(\Omega_{\alpha,\alpha\beta\beta} + \Omega_{\beta,\alpha\alpha\beta}) + \nu\Omega_{\gamma,\gamma\alpha\alpha}\right] \\ \implies M_{\alpha\beta,\alpha\beta} &= D\left[(1-\nu)\frac{1}{2}(\Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega}) + \Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega})) + \nu\Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega})\right] = D\Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega}) \end{aligned}$$

donc le vecteur $\vec{\Omega}$ doit vérifier l'équation différentielle : $\Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega}) = -\frac{p}{D}$.

On va calculer dans un premier temps $\vec{\Omega}$. Par symétrie on sait que $\vec{\Omega}$ ne dépend que de r et comme les segments restent dans des plans radiaux alors le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est parallèle à \vec{e}_θ donc $\vec{\Omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3$ est parallèle à \vec{e}_r d'où $\vec{\Omega} = \Omega(r)\vec{e}_r$.

$$\begin{aligned} \Delta(\operatorname{div} \vec{\Omega}) &= \frac{1}{r}\left[r(\operatorname{div} \vec{\Omega})_{,r}\right]_r = -\frac{p}{D} \implies \left[r(\operatorname{div} \vec{\Omega})_{,r}\right]_r = -\frac{pr}{D} \\ \implies r(\operatorname{div} \vec{\Omega})_{,r} &= -\frac{pr^2}{2D} + \beta_1 \\ \implies (\operatorname{div} \vec{\Omega})_{,r} &= -\frac{pr}{2D} + \frac{\beta_1}{r} \\ \implies \operatorname{div} \vec{\Omega} &= -\frac{pr^2}{4D} + \beta_1 \ln r + \beta_2 \text{ ici } \beta_1 = 0 \text{ sinon singularité en } r = 0 \\ \implies \operatorname{div} \vec{\Omega} &= \frac{1}{r}[r\Omega]_{,r} = -\frac{pr^2}{4D} + \beta_2 \\ \implies [r\Omega]_{,r} &= -\frac{pr^3}{4D} + \beta_2 r \\ \implies r\Omega &= -\frac{pr^4}{16D} + \beta_2 \frac{r^2}{2} + \beta_3 \\ \implies \Omega(r) &= -\frac{pr^3}{16D} + \beta_2 \frac{r}{2} + \frac{\beta_3}{r} \text{ ici } \beta_3 = 0 \text{ sinon singularité en } r = 0 \end{aligned}$$

o Conditions aux limites (encastrement en $r = R$) :

$$\text{En } r = R \text{ la plaque est encastrée donc } \underline{\Omega(R)} = 0 \text{ alors } -\frac{pR^3}{16D} + \beta_2 \frac{R}{2} = 0 \implies \frac{\beta_2}{2} = \frac{pR^2}{16D}$$

on a alors $\Omega(r) = -\frac{p}{16D}r(r^2 - R^2)$

- Pour calculer $w(r)$ on doit calculer l'effort tranchant \vec{Q} en utilisant la première équation d'équilibre :

$$Q_{\alpha,\alpha} + p = 0 \text{ soit } \underline{\text{div } \vec{Q}} = -p.$$

Par symétrie on sait également que $\vec{Q} = Q(r)\vec{e}_r$ donc en projetant suivant \vec{e}_r on obtient :

$$\underline{\frac{1}{r}[rQ]_{,r} = -p} \Rightarrow [rQ]_{,r} = -pr \Rightarrow Q = -\frac{pr}{2} + \frac{\gamma_1}{r} \text{ ici } \gamma_1 = 0 \text{ sinon singularité en } r = 0$$

$$\text{D'après (1.30)} : \vec{Q} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\vec{\Omega} + \overrightarrow{\text{grad}}_2 w) \text{ soit } Q = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\Omega + w_{,r}) = -\frac{pr}{2}$$

$$\Rightarrow (\Omega + w_{,r}) = -\frac{(1+\nu)p}{Eh}r$$

$$\Rightarrow w_{,r} = -\frac{(1+\nu)p}{Eh}r + \frac{p}{16D}(r^3 - R^2r)$$

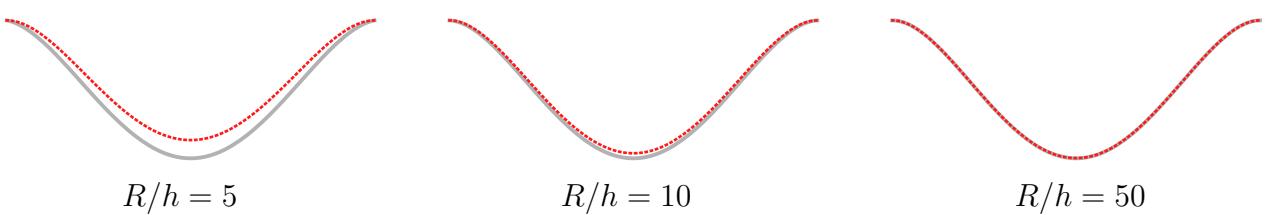
$$\Rightarrow w = -\frac{(1+\nu)p}{Eh}\frac{r^2}{2} + \frac{p}{16D}\left(\frac{r^4}{4} - R^2\frac{r^2}{2}\right) + \delta_1$$

$$\circ \text{ Le bord } r = R \text{ est encastré donc } \underline{w(R) = 0} \text{ soit } -\frac{(1+\nu)p}{Eh}\frac{R^2}{2} + \frac{p}{16D}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right) + \delta_1 = 0$$

$$\text{On a alors : } \delta_1 = \frac{(1+\nu)p}{Eh}\frac{R^2}{2} + \frac{p}{64D}R^4$$

On a finalement $w(r) = \frac{p}{64D}(r^2 - R^2)^2 - \frac{(1+\nu)p}{2Eh}(r^2 - R^2)$

On constate que déplacement $w(r)$ obtenu pour la Théorie Naturelle (en gris sur les courbes ci-dessous) est le déplacement obtenu avec la théorie de Love-Kirchoff (en pointillés rouge sur les courbes ci-dessous) plus un terme correctif.



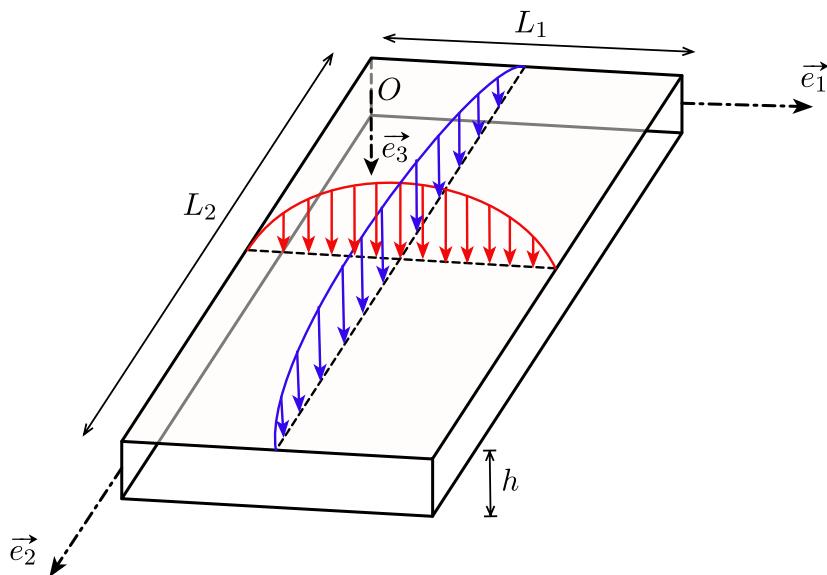
La différence entre les deux théories se fait essentiellement au voisinage de $r = 0$ pour des rapports d'élancement R/h importants qui nécessitent alors la prise en compte du cisaillement transverse. Pour des plaques suffisamment épaisse il faudra par conséquent utiliser la théorie naturelle.

III.2 Plaques rectangulaires

III.2.a Solution de Navier (1820)

Dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff, si une plaque rectangulaire est **simplement appuyée sur tout son pourtour** alors on peut utiliser la **solution de Navier** basée sur l'utilisation des doubles séries de Fourier.

- On considère une plaque rectangulaire de dimension $L_1 \times L_2$ en appuis simples sur son pourtour et soumise à une **charge surfacique sinusoïdale** $p_3(x_1, x_2) = P \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$.



- Conditions aux limites (appui simple en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$) :

En $x_1 = 0$; $\vec{\nu} = -\vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = -\vec{e}_2$ (même raisonnement pour $x_1 = L_1$; $\vec{\nu} = \vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_2$)

$$w = 0 \text{ et } M_{\nu\nu} = M_{11} = -D [(1 - \nu)w_{,11} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D [w_{,11} + \nu w_{,22}] = 0.$$

Remarque : si $w = 0$ alors $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ sera toujours nul donc ici $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = w_{,2} = 0$ toujours vérifié

Pour $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$ on doit donc vérifier : $w = 0$ et $w_{,11} = 0$

- Conditions aux limites (appui simple en $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$) :

En $x_2 = 0$; $\vec{\nu} = -\vec{e}_2$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_1$ (même raisonnement pour $x_2 = L_2$: $\vec{\nu} = \vec{e}_2$ et $\vec{\tau} = -\vec{e}_1$)

$$w = 0 \text{ et } M_{\nu\nu} = M_{22} = -D [(1 - \nu)w_{,22} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D [w_{,22} + \nu w_{,11}] = 0.$$

Comme $w = 0$ donc ici $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial x_1} = w_{,1} = 0$ toujours vérifié

Pour $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$ on doit donc vérifier : $w = 0$ et $w_{,22} = 0$

On constate qu'en prenant $w(x_1, x_2) = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$ toutes les conditions aux limites d'appuis simples sont vérifiées.

En utilisant la théorie de Love-Kirchhoff, $w(x_1, x_2)$ doit vérifier l'équation différentielle :

$$D\Delta\Delta w(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) = P \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$\implies D\Delta\Delta w = D(w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222}) = P \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$\text{or } w_{,1111} = A \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$w_{,2222} = A \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$w_{,1122} = A \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$\text{donc } AD\pi^4 \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}\right]^2 = P \quad \forall x_1, x_2$$

soit :

$$w(x_1, x_2) = \frac{P}{\pi^4 D \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}\right]^2} \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$$

► Pour une **charge surfacique quelconque**, on remarque que $p_3(x_1, x_2)$ peut toujours s'écrire sous la forme :

$$p_3(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_1 n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \quad (1.54)$$

Par analogie avec le cas de la charge surfacique sinusoïdale et en utilisant les propriétés de linéarité des équations de Love-Kirchhoff on sait que $w(x_1, x_2)$ est de la forme :

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{p_{n_1 n_2}}{\left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2\right]^2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \quad (1.55)$$

- Recherche des coefficients $p_{n_1 n_2}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} p_3(x_1, x_2) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_1 dx_2 \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_1 n_2} \left[\int_0^{L_1} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{L_1}\right) dx_1 \right]}_{J_1} \underbrace{\left[\int_0^{L_2} \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_2 \right]}_{J_2} \end{aligned}$$

1. Théorie linéaire des plaques

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \left\{ \cos\left(\frac{(k_1 - n_1)\pi x_1}{L_1}\right) - \cos\left(\frac{(k_1 + n_1)\pi x_1}{L_1}\right) \right\} dx_1 \\ \mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L_1}{(k_1 - n_1)\pi} \left[\sin\left(\frac{(k_1 - n_1)\pi x_1}{L_1}\right) \right]_0^{L_1} - \frac{L_1}{(k_1 + n_1)\pi} \left[\sin\left(\frac{(k_1 + n_1)\pi x_1}{L_1}\right) \right]_0^{L_1} \right\} \\ \mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L_1}{(k_1 - n_1)\pi} \sin[(k_1 - n_1)\pi] - \frac{L_1}{(k_1 + n_1)\pi} \sin[(k_1 + n_1)\pi] \right\}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 \neq n_1 \\ \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \left[1 - \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{L_1}\right) \right] dx_1 = \frac{L_1}{2} & \text{si } k_1 = n_1 \end{cases}$$

$$\text{de même } \mathfrak{J}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k_2 \neq n_2 \\ \frac{L_2}{2} & \text{si } k_2 = n_2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} p_3(x_1, x_2) \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) dx_1 dx_2 = \frac{L_1 L_2}{4} p_{n_1 n_2}$$

Soit

$$p_{n_1 n_2} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} p_3(x_1, x_2) \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) dx_1 dx_2 \quad (1.56)$$

► Pour une **charge uniformément répartie** $p_3(x_1, x_2) = p = \text{cste}$

D'après (1.56) :

$$p_{n_1 n_2} = \frac{4p}{L_1 L_2} \underbrace{\int_0^{L_1} \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) dx_1}_{\mathfrak{J}_1} \underbrace{\int_0^{L_2} \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) dx_2}_{\mathfrak{J}_2}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \left[-\frac{\cos\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right)}{\frac{n_1\pi}{L_1}} \right]_0^{L_1} = \frac{1 - \cos(n_1\pi)}{\frac{n_1\pi}{L_1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 \text{ pair} \\ \frac{2L_1}{n_1\pi} & \text{si } n_1 \text{ impair} \end{cases}$$

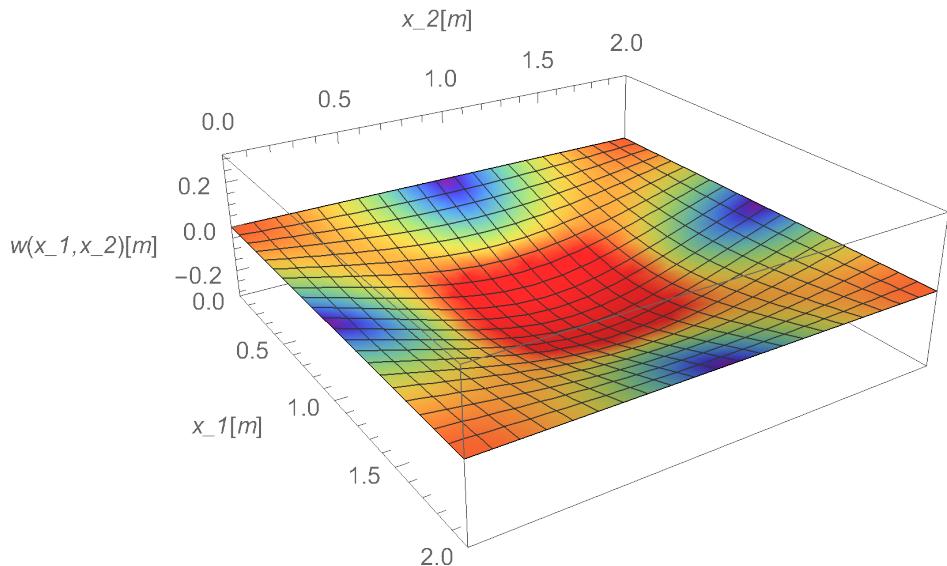
$$\text{de même } \mathfrak{J}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n_2 \text{ pair} \\ \frac{2L_2}{n_2\pi} & \text{si } n_2 \text{ impair} \end{cases}$$

par conséquent : $p_{n_1 n_2} = \frac{16p}{n_1 n_2 \pi^2}$ avec n_1, n_2 impairs.

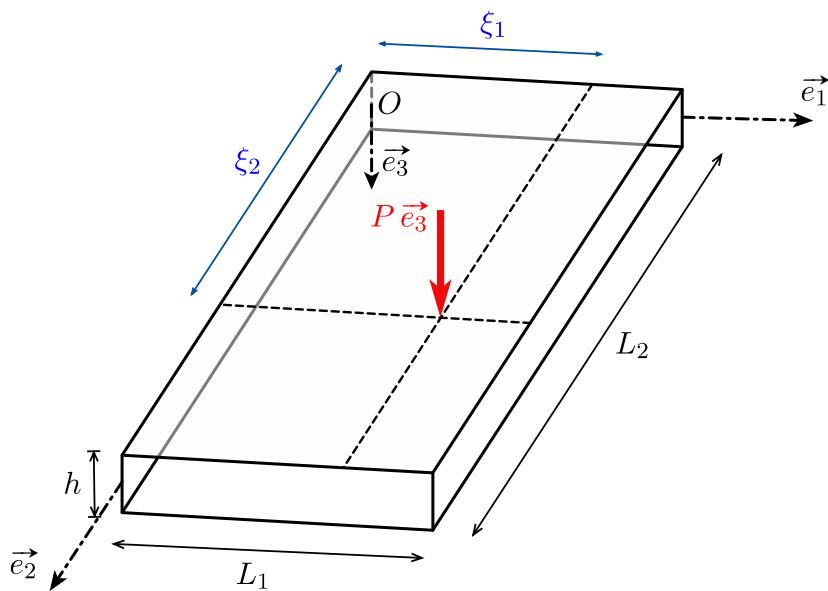
D'après (1.55) :

$$w(x_1, x_2) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{n_1 \text{ impair}} \sum_{n_2 \text{ impair}} \frac{1}{n_1 n_2 \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]} \sin \left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1} \right) \sin \left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2} \right) \quad (1.57)$$

◊ **Résolution numérique** ($n_1 = n_2 = 3$) pour une plaque d'acier ($E = 200GPa$, $\nu = 0.3$) de dimensions $L_1 = L_2 = 2m$ et $h = 0.001m$ soumise à une densité surfacique $p = 25N/m^2$.



► Pour une **charge ponctuelle** $P \vec{e}_3$ appliquée au point (ξ_1, ξ_2) :
 $p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)$ avec δ représentant la distribution de Dirac



1. Théorie linéaire des plaques

D'après (1.56) :

$$p_{n_1 n_2} = \frac{4P}{L_1 L_2} \left(\int_0^{L_1} \delta(x_1 - \xi_1) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) dx_1 \right) \left(\int_0^{L_2} \delta(x_2 - \xi_2) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_2 \right)$$

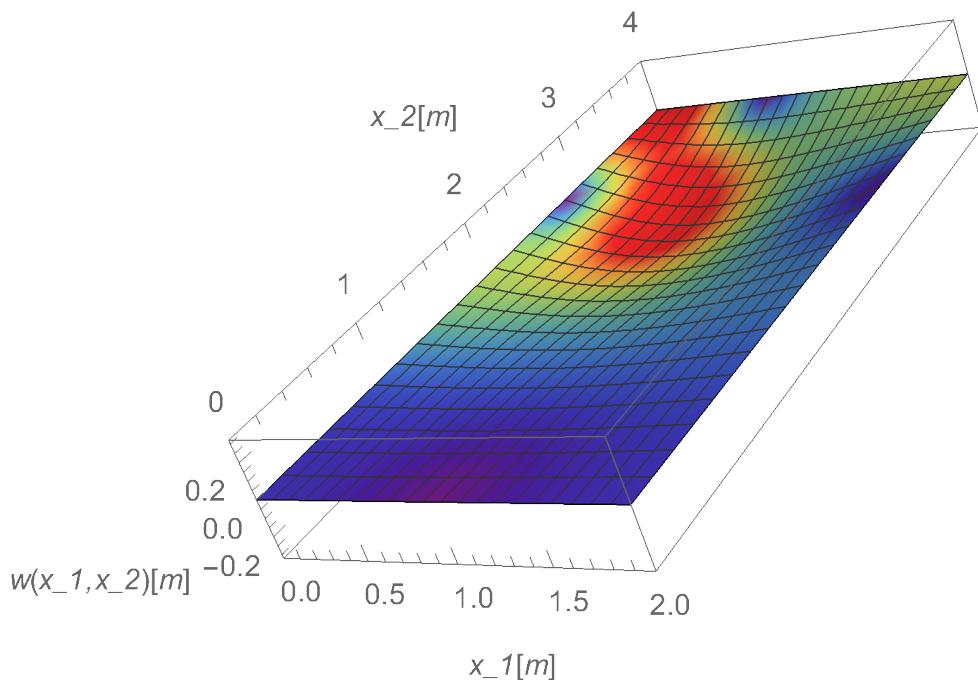
$$\text{donc } p_{n_1 n_2} = \frac{4P}{L_1 L_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi \xi_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi \xi_2}{L_2}\right)$$

D'après (1.55) :

$$w(x_1, x_2) = \frac{4P}{\pi^4 D L_1 L_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n_1 \pi \xi_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi \xi_2}{L_2}\right)}{\left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2\right]^2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right)$$

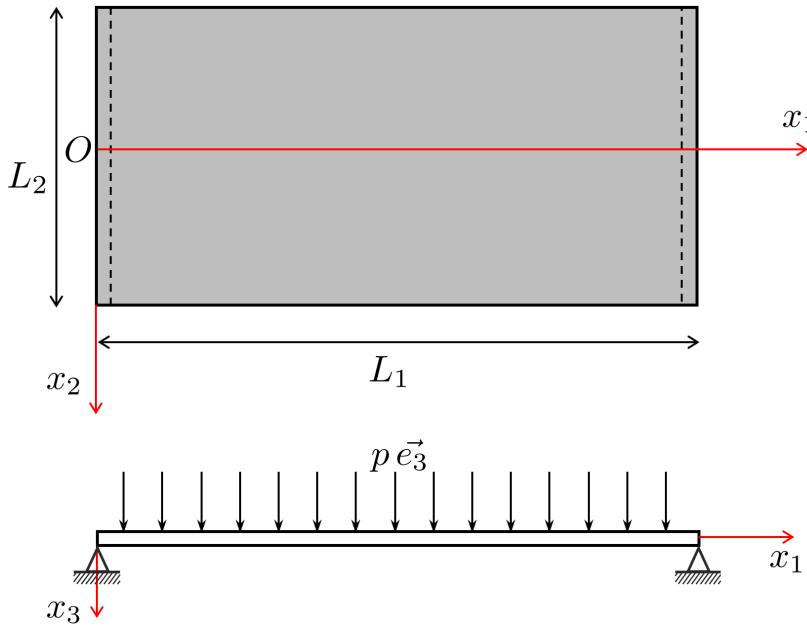
(1.58)

◊ **Résolution numérique** ($n_1 = n_2 = 3$) pour une plaque d'acier ($E = 200 GPa$, $\nu = 0.3$) de dimensions $L_1 = 4m$, $L_2 = 2m$ et $h = 0.001m$ soumise à une force ponctuelle $P = 100N$ en $(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right)$.



III.2.b Méthode de Lévy (1900)

Dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff, on étudie une plaque rectangulaire **simplement appuyée sur deux côtés opposés** (ici en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$) et libre en $x_2 = \pm \frac{L_2}{2}$ soumise à une charge surfacique uniforme $p \vec{e}_3$.



○ Conditions aux limites (appui simple en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$) :

En $x_1 = 0$; $\vec{\nu} = -\vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = -\vec{e}_2$ (même raisonnement pour $x_1 = L_1$; $\vec{\nu} = \vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_2$)

$$w = 0 \text{ et } M_{\nu\nu} = M_{11} = -D [(1 - \nu)w_{,11} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D [w_{,11} + \nu w_{,22}] = 0.$$

ici $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = w_{,2} = 0$ toujours vérifié donc pour $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$

on doit donc vérifier : (i) : $w = 0$ et (ii) : $w_{,11} = 0$

○ Conditions aux limites (bord libre en $x_2 = \pm \frac{L_2}{2}$) :

En $x_2 = \pm \frac{L_2}{2}$; $\vec{\nu} = \pm \vec{e}_2$ et $\vec{\tau} = \mp \vec{e}_1$

$$M_{\nu\nu} = M_{22} = -D [(1 - \nu)w_{,22} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D [w_{,22} + \nu w_{,11}] = 0$$

$$\Rightarrow (iii) : \underline{w_{,22} + \nu w_{,11} = 0}$$

$$T_{\text{eff}} = M_{\nu\beta,\beta} + M_{\tau\nu,\tau} = M_{\nu 1,1} + M_{\nu 2,2} + M_{\tau\nu,\tau} = M_{21,1} + M_{22,2} + M_{12,1} = 0$$

$$\text{or } M_{12} = M_{21} = -D(1 - \nu)w_{,12}$$

$$\Rightarrow T_{\text{eff}} = -D [2(1 - \nu)w_{,121} + w_{,222} + \nu w_{,112}] = -D [w_{,222} + (2 - \nu)w_{,112}] = 0$$

$$\text{on doit donc vérifier (iv) : } \underline{w_{,222} + (2 - \nu)w_{,112} = 0}.$$

Si on cherche la solution sous la forme :

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_2) \sin \left(\frac{n\pi x_1}{L_1} \right)$$

(1.59)

1. Théorie linéaire des plaques

les conditions aux limites (i) et (ii) en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$ sont vérifiées.

On doit déterminer $X_n(x_2)$ qui vérifiera les conditions aux limites (iii) et (iv) en $x_2 \pm \frac{L_2}{2}$.

En utilisant la théorie de Love-Kirchhoff, $w(x_1, x_2)$ doit vérifier l'équation différentielle :

$$D\Delta\Delta w(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) = p$$

$$\Rightarrow \Delta\Delta w = (w_{,2222} + 2w_{,1122} + w_{,1111}) = \frac{p}{D}$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n'''(x_2) - 2\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 X_n''(x_2) + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^4 X_n(x_2) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L_1}\right) = \frac{p}{D}$$

On utilise la propriété d'orthogonalité pour supprimer la sommation.

Pour cela on multiple par $\sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_1}\right)$ et on intègre suivant x_1 entre 0 et L_1 .

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n'''(x_2) - 2\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 X_n''(x_2) + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^4 X_n(x_2) \right\} \int_0^{L_1} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_1}\right) dx_1 \\ = \frac{p}{D} \int_0^{L_1} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_1}\right) dx_1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n'''(x_2) - 2\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 X_n''(x_2) + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^4 X_n(x_2) \right\} \mathfrak{J}_1 = \frac{p}{D} \mathfrak{J}_1$$

$$\text{avec } \mathfrak{J}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{L_1}{2} & \text{si } n = m \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ \frac{2L_1}{m\pi} & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

On obtient alors l'équation différentielle du second ordre :

$$X_n'''(x_2) - 2\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 X_n''(x_2) + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^4 X_n(x_2) = a_n \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4p}{n\pi D} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

► Recherche de la solution générale de l'équation sans second membre :

Soit $X_n(x_2) = K e^{rx_2}$ on obtient alors le polynôme caractéristique :

$$r^4 - 2\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 r^2 + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^4 = \left[r^2 - \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2\right]^2 = 0 \text{ soit } r = \pm\left(\frac{n\pi}{L_1}\right) \text{ racines doubles}$$

La solution générale peut donc s'écrire sous la forme :

$$X_n(x_2) = (A_n + x_2 C_n) \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{L_1}\right) + (B_n + x_2 D_n) \cosh\left(\frac{n\pi x_2}{L_1}\right)$$

► Recherche de la solution particulière :

La solution particulière est ici évidente : $X_n(x_2) = \left(\frac{L_1}{n\pi}\right)^4 a_n$

Par conséquent :

$$X_n(x_2) = (A_n + x_2 C_n) \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{L_1}\right) + (B_n + x_2 D_n) \cosh\left(\frac{n\pi x_2}{L_1}\right) + \left(\frac{L_1}{n\pi}\right)^4 a_n$$

On exploite la symétrie du problème ; ici $w(x_1, -x_2) = w(x_1, x_2)$ soit $X_n(-x_2) = X_n(x_2)$ donc $A_n = D_n = 0$

d'où $X_n(x_2) = B_n \cosh(\lambda_n x_2) + x_2 C_n \sinh(\lambda_n x_2) + \frac{a_n}{\lambda_n^4}$ avec $\lambda_n = \frac{n\pi}{L_1}$

et $w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_2) \sin(\lambda_n x_1)$

o Conditions aux limites (bord libre en $x_2 = \pm \frac{L_2}{2}$) :

(iii) : $w_{,22} + \nu w_{,11} = 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n''\left(\frac{L_2}{2}\right) - \nu \lambda_n^2 X_n\left(\frac{L_2}{2}\right) \right\} \sin(\lambda_n x_1) = 0 \quad \forall x_1$

soit en utilisant la propriété d'orthogonalité : $X_n''\left(\frac{L_2}{2}\right) - \nu \lambda_n^2 X_n\left(\frac{L_2}{2}\right) = 0$

(iv) : $w_{,222} + (2 - \nu)w_{,121} = 0$

soit en utilisant la propriété d'orthogonalité : $X_n'''\left(\frac{L_2}{2}\right) - (2 - \nu)\lambda_n^2 X_n'\left(\frac{L_2}{2}\right) = 0$

$X'_n(x_2) = [C_n + \lambda_n B_n] \sinh(\lambda_n x_2) + x_2 \lambda_n C_n \cosh(\lambda_n x_2)$

$X''_n(x_2) = \lambda_n [2C_n + \lambda_n B_n] \cosh(\lambda_n x_2) + x_2 \lambda_n^2 C_n \sinh(\lambda_n x_2)$

$X'''_n(x_2) = \lambda_n^2 [3C_n + \lambda_n B_n] \sinh(\lambda_n x_2) + x_2 \lambda_n^3 C_n \cosh(\lambda_n x_2)$

d'où (iii) : $\lambda_n [2C_n + \lambda_n B_n] \cosh(\beta_n) + \lambda_n \beta_n C_n \sinh(\beta_n) - \nu \left\{ \lambda_n^2 B_n \cosh(\beta_n) + \lambda_n \beta_n C_n \sinh(\beta_n) + \frac{a_n}{\lambda_n^2} \right\} = 0$ avec $\beta_n = \lambda_n \frac{L_2}{2}$

et (iv) : $\lambda_n^2 [3C_n + \lambda_n B_n] \sinh(\beta_n) + \lambda_n^2 \beta_n C_n \cosh(\beta_n) - (2 - \nu) \lambda_n^2 \{[C_n + \lambda_n B_n] \sinh(\beta_n) + \beta_n C_n \cosh(\beta_n)\} = 0$

On obtient alors un système de 2 équations à 2 inconnues (B_n, C_n) :

$$\begin{cases} (1 - \nu) \lambda_n \cosh(\beta_n) \textcolor{blue}{B_n} + [2 \cosh(\beta_n) + (1 - \nu) \beta_n \sinh(\beta_n)] \textcolor{blue}{C_n} = \nu \frac{a_n}{\lambda_n^3} \\ -(1 - \nu) \lambda_n \sinh(\beta_n) \textcolor{blue}{B_n} + [(1 + \nu) \sinh(\beta_n) - (1 - \nu) \beta_n \cosh(\beta_n)] \textcolor{blue}{C_n} = 0 \end{cases}$$

1. Théorie linéaire des plaques

La résolution de ce système d'équations nous donne B_n et C_n , on peut donc déterminer complètement $X_n(x_2)$. On a alors en tout point de la plaque le déplacement $w(x_1, x_2)$:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cosh(\lambda_n x_2) + x_2 C_n \sinh(\lambda_n x_2) + \frac{a_n}{\lambda_n^4} \right] \sin(\lambda_n x_1)$$

avec $\lambda_n = \frac{n\pi}{L_1}$ et $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4p}{n\pi D} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

III.3 Méthodes énergétiques - solutions approchées

L'importance des principes variationnels est de pouvoir obtenir des solutions à des problèmes complexes en évitant les difficultés mathématiques associées à l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.

III.3.a Principe du minimum de l'énergie potentielle totale

En partant du principe des travaux virtuels (1.8) pour le cas statique, on sait que :

$$\delta W_i + \delta W_e = 0 \Rightarrow \delta(W_i + W_e) = \delta(-U - V_e) = 0 \quad (1.60)$$

On en déduit alors le principe du minimum de l'énergie potentielle totale proposé par Lagrange :

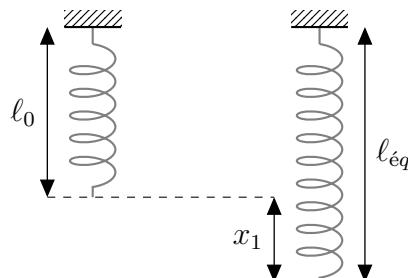
$$\delta\Pi = 0 \quad \text{avec} \quad \Pi = U + V_e \quad (1.61)$$

- ◊ Π représente l'énergie potentielle totale
- ◊ $U = -W_i$ est l'énergie de déformation élastique (opposé du travail des efforts intérieurs)
- ◊ V_e est le potentiel des forces extérieures défini comme l'opposé du travail des forces extérieures **restant inchangées en magnitude entre sa position finale et initiale**

- Distinction entre travail "réel" et travail "virtuel" :

On va l'illustrer avec l'exemple simple du ressort élastique à un degré de liberté.

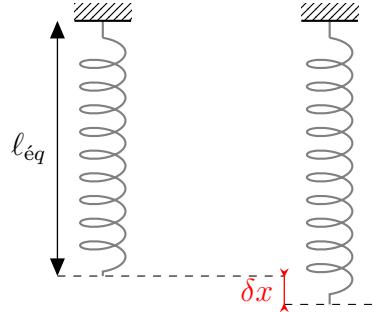
On considère un ressort linéaire, de raideur k , ayant pour longueur au repos ℓ_0 . Il atteint sa position équilibre pour une longueur $\ell_{eq} = \ell_0 + x_1$.



On sait alors que le travail des efforts intérieurs est :

$$W_i = - \int_0^{x_1} kx \, dx = -\frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{1}{2}P_{imax} x_{max} \quad \text{avec } P_{imax} = kx_1 \text{ et } x_{max} = x_1.$$

Dans le cas d'un travail virtuel, le solide élastique est **déjà à l'équilibre**. Par conséquent, le solide soumis au maximum des forces statiques extérieures (appliquées de façon quasistatique) a déjà atteint son état final de déformation. On perturbe dans une seconde étape les conditions d'équilibre en introduisant un déplacement infinitésimal arbitraire mais compatible avec les conditions aux limites.



Pendant ces déplacements virtuels, **toutes les forces sont maintenues constantes**. Le travail virtuel des efforts intérieurs est alors $\delta W_i = -(kx_{max})\delta x = -P_{imax}\delta x$.

Remarque : δW_i ne contient pas le facteur $\frac{1}{2}$.

Par analogie, on trouve que le travail des efforts extérieurs est $W_e = \frac{1}{2}P_e x_{max}$ et le travail virtuel des efforts extérieurs est $\delta W_i = P_e \delta x$.

Le potentiel des forces extérieures $V_e = -P_e x_{max}$ car comme pour les champs virtuels les forces sont maintenues constantes.

III.3.b Calcul de l'énergie potentielle totale

On revient au cas des plaques minces sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff. On cherche à calculer l'énergie potentielle totale : $\Pi = U + V_e$ où $U = -W_i$ et $V_e = -W_e$.

D'après (1.41) et (1.51) dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff, le travail virtuel des efforts intérieurs est :

$$-\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha,\beta}^0 - M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta}] dA = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta}] dA = \delta U$$

On a donc :

$$\delta U = \delta U_m + \delta U_f$$

$$\text{avec } \delta U_m = \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 dA \text{ et } \delta U_f = \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} dA.$$

On en déduit alors que l'énergie de déformation stockée dans la plaque pendant la déformation est $U = U_m + U_f$

avec l'énergie de déformation élastique membranaire :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}^0 dA \quad (1.62)$$

et avec l'énergie de déformation élastique de flexion

$$U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} dA \quad (1.63)$$

1. Théorie linéaire des plaques

- Calcul de U_m pour une plaque rectangulaire :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}^0 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} (N_{11}\epsilon_{11}^0 + N_{22}\epsilon_{22}^0 + 2N_{12}\epsilon_{12}^0) dx_1 dx_2.$$

D'après la loi de comportement associée aux efforts membranaires (1.49) :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\epsilon_{11}^0 + \nu\epsilon_{22}^0)\epsilon_{11}^0 + (\epsilon_{22}^0 + \nu\epsilon_{11}^0)\epsilon_{22}^0 + 2(1-\nu)(\epsilon_{12}^0)^2] dx_1 dx_2$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\epsilon_{11}^0)^2 + (\epsilon_{22}^0)^2 + 2\nu\epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0 + 2(1-\nu)(\epsilon_{12}^0)^2] dx_1 dx_2$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\epsilon_{11}^0)^2 + (\epsilon_{22}^0)^2 + (2(\nu-1)+2)\epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0 + 2(1-\nu)(\epsilon_{12}^0)^2] dx_1 dx_2$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\epsilon_{11}^0)^2 + (\epsilon_{22}^0)^2 + 2\epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0 + 2(1-\nu)((\epsilon_{12}^0)^2 - \epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0)] dx_1 dx_2$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0)^2 + 2(1-\nu)((\epsilon_{12}^0)^2 - \epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0)] dx_1 dx_2$$

Dans le repère cartésien $\epsilon^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 & \epsilon_{12}^0 \\ \epsilon_{12}^0 & \epsilon_{22}^0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$ donc $\text{Tr } \epsilon^0 = \epsilon_{11}^0 + \epsilon_{22}^0$ et $\det \epsilon^0 = \epsilon_{11}^0\epsilon_{22}^0 - (\epsilon_{12}^0)^2$

On obtient alors :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\text{Tr } \epsilon^0)^2 - 2(1-\nu)\det \epsilon^0] dx_1 dx_2} \quad (1.64)$$

avec $\epsilon_{11}^0 = u_{1,1}^0$; $\epsilon_{22}^0 = u_{2,2}^0$ et $2\epsilon_{12}^0 = u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0$.

- Calcul de U_f pour une plaque rectangulaire sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff :

D'après la loi de comportement associée aux efforts hors plan (1.50) et par analogie avec le calcul de U_m , on obtient :

$$\boxed{U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\text{Tr } \mathbb{K})^2 - 2(1-\nu)\det \mathbb{K}] dx_1 dx_2} \quad (1.65)$$

avec $\mathbb{K} = -\overline{\overline{\text{grad}}}(\overrightarrow{\text{grad}} w) = \begin{pmatrix} -w_{,11} & -w_{,12} \\ -w_{,12} & -w_{,22} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$

donc $\text{Tr } \mathbb{K} = -w_{,11} - w_{,22} = -\Delta w$

et $\det \mathbb{K} = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2$ correspondant à la courbure gaussienne.

- Calcul du potentiel des forces extérieures V_e sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff :

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de points anguleux, d'après (1.40) et (1.46) :

$$\delta W_e = \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + p_3 \delta w) dA + \oint_{\partial \mathcal{D}} \left[T_\alpha \delta u_\alpha^0 + T_{\text{eff}} \delta w - M_{\nu\nu} \frac{\partial (\delta w)}{\partial \nu} \right] d\ell$$

On obtient alors :

$$\boxed{V_e = - \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha u_\alpha^0 + p_3 w) dA - \oint_{\partial \mathcal{D}} \left[T_\alpha u_\alpha^0 + T_{\text{eff}} w - M_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] d\ell} \quad (1.66)$$

III.3.c Méthode de Ritz

En se basant sur le théorème de l'énergie potentielle totale, on choisit des déplacements satisfaisant les conditions aux limites cinématiques de la forme :

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N C_i f_i(x_1, x_2)$$

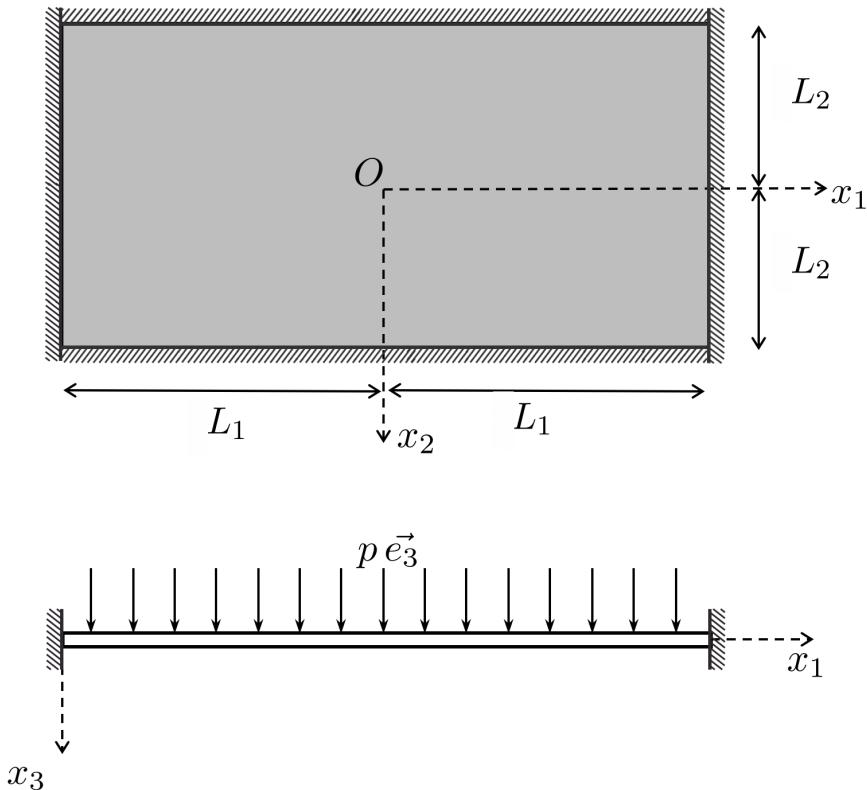
où les $f_i(x_1, x_2)$ sont des fonctions continues qui satisfont individuellement au moins les conditions aux limites géométriques et sont capables de représenter l'état déformé de la plaque.

En appliquant le principe du minimum de l'énergie potentielle totale, les N constantes inconnues C_i ($1 \leq i \leq N$) sont déterminées par les N équations algébriques :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial C_N} = 0.$$

◊ Exemple :

On cherche à déterminer le déplacement maximum pour une plaque rectangulaire de dimensions $2L_1 \times 2L_2$ encastrée sur son pourtour et soumise à une densité surfacique de force $p_3 = p = \text{cste}$ suivant l'axe \vec{e}_3 .



On choisit comme solution approchée le déplacement transverse sous la forme :

$$w(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \right] \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) \right]$$

1. Théorie linéaire des plaques

► Vérification des conditions aux limites cinématiques :

$$w(x_1 = \pm L_1, x_2) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1 = \pm L_1, x_2) = 0 \text{ et } w(x_1, x_2 = \pm L_2) = \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2 = \pm L_2) = 0.$$

► Calcul de l'énergie de déformation élastique :

$$U = U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\text{Tr } \mathbb{K})^2 - 2(1 - \nu) \det \mathbb{K}] dx_1 dx_2$$

avec $\mathbb{K} = -\overline{\text{grad}} (\overrightarrow{\text{grad}} w) = \begin{pmatrix} -w_{,11} & -w_{,12} \\ -w_{,12} & -w_{,22} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$

donc $(\text{Tr } \mathbb{K})^2 = (w_{,11} + w_{,22})^2$ et $\det \mathbb{K} = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2$.

Par souci de simplification, on note $c_i = \cos\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right)$ et $s_i = \sin\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right) \quad i = 1, 2$.

On a alors $w = \frac{\alpha}{4}(1 + c_1)(1 + c_2)$

donc $w_{,1} = -\frac{\alpha \pi}{4 L_1} s_1(1 + c_2); \quad w_{,11} = -\frac{\alpha}{4} \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 c_1(1 + c_2); \quad w_{,12} = \frac{\alpha \pi}{4 L_1 L_2} s_1 s_2$

par analogie $w_{,22} = -\frac{\alpha}{4} \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 c_2(1 + c_1)$

- $(\text{Tr } \mathbb{K})^2 = (w_{,11} + w_{,22})^2 = \left(\frac{\alpha \pi^2}{4}\right)^2 \left[\frac{1}{L_1^2} c_1(1 + c_2) + \frac{1}{L_2^2} c_2(1 + c_1) \right]^2$

$$\Rightarrow (\text{Tr } \mathbb{K})^2 = \frac{\alpha^2 \pi^4}{16} \left[\frac{1}{L_1^4} (c_1^2 + c_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 c_2) + \frac{1}{L_2^4} (c_2^2 + c_2^2 c_1^2 + 2c_2^2 c_1) + \frac{2}{L_1^2 L_2^2} (c_1 c_2 + c_1^2 c_2 + c_1 c_2^2 + c_1^2 c_2^2) \right]$$

On sait que $\int_{-L_i}^{L_i} c_i dx_i = 0$ et $\int_{-L_i}^{L_i} c_i^2 dx_i = \int_{-L_i}^{L_i} s_i^2 dx_i = L_i \quad i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (\text{Tr } \mathbb{K})^2 dx_1 dx_2 &= \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} (\text{Tr } \mathbb{K})^2 dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\alpha^2 \pi^4}{16} \left[\frac{1}{L_1^4} (3L_1 L_2) + \frac{1}{L_2^4} (3L_1 L_2) + \frac{2}{L_1^2 L_2^2} (L_1 L_2) \right] \\ &= \frac{\alpha^2 \pi^4}{16} \left[\frac{3L_2}{L_1^3} + \frac{3L_1}{L_2^3} + \frac{2}{L_1 L_2} \right] \end{aligned}$$

- $\det \mathbb{K} = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2 = \frac{\alpha^2 \pi^4}{16 L_1^2 L_2^2} [c_1(1 + c_2)c_2(1 + c_1) - s_1^2 s_2^2]$

$$\iint_{\mathcal{D}} \det \mathbb{K} dx_1 dx_2 = \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \det \mathbb{K} dx_1 dx_2 = \frac{\alpha^2 \pi^4}{16 L_1^2 L_2^2} [L_1 L_2 - L_1 L_2] = 0$$

par conséquent $U = \frac{\alpha^2 \pi^4 D}{32} \left[\frac{3L_2}{L_1^3} + \frac{3L_1}{L_2^3} + \frac{2}{L_1 L_2} \right]$

Pour un problème de flexion d'après (1.66) :

$$V_e = - \iint_{\mathcal{D}} p_3 w \, dA - \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[T_{\text{eff}} w - M_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \, d\ell$$

L'intégrale sur $\partial\mathcal{D}$ est nulle car nous avons un encastrement sur tout le pourtour donc $w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} V_e &= - \iint_{\mathcal{D}} p_3 w \, dA = -p \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{\alpha}{4} (1 + c_1)(1 + c_2) \, dx_1 dx_2 \\ &= -p \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{\alpha}{4} (1 + c_1 + c_2 + c_1 c_2) \, dx_1 dx_2 = -p\alpha L_1 L_2 \\ \Rightarrow \quad \Pi &= U + V_e = \frac{\alpha^2 \pi^4 D}{32} \left[\frac{3L_2}{L_1^3} + \frac{3L_1}{L_2^3} + \frac{2}{L_1 L_2} \right] - p\alpha L_1 L_2 \end{aligned}$$

On doit minimiser l'énergie potentielle totale :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha \pi^4 D}{16} \left[\frac{3L_2}{L_1^3} + \frac{3L_1}{L_2^3} + \frac{2}{L_1 L_2} \right] - pL_1 L_2 = 0 \text{ soit } \alpha = \frac{16pL_1^4}{\pi^4 D} \frac{1}{3 + 2 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 + 3 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^4}$$

- Pour une plaque carrée ($L_1 = L_2 = L$) on trouve que $\alpha = \frac{2pL^4}{\pi^4 D}$.

$$\begin{aligned} \text{Comme } w(x_1, x_2) &= \frac{\alpha}{4} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi x_1}{L_1} \right) \right] \left[1 + \cos \left(\frac{\pi x_2}{L_2} \right) \right] \\ \Rightarrow w_{max} &= w(0, 0) = \alpha = \frac{2pL^4}{\pi^4 D} \simeq 0.02053 \frac{pL^4}{D} \end{aligned}$$

IV Etude des vibrations de plaques minces rectangulaires élastiques

IV.1 Vibrations libres de plaques minces rectangulaires

En absence de chargement extérieur ($p_3 = 0$) dans le cadre de la théorie des plaques de Love-Kirchhoff d'après (1.53) les équations des mouvements de flexion libre s'écrivent à $t > 0$:

$$\Delta \Delta w = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12D} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} \quad (1.67)$$

En négligeant les termes d'inertie de rotation on doit donc résoudre le problème :

$$\Delta \Delta w(x_1, x_2, t) = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_1, x_2, t) \quad (1.68)$$

+ conditions aux limites + conditions initiales

La solution étant stationnaire on utilise la méthode de séparation des variables :

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) G(t) \quad (1.69)$$

où $W(x_1, x_2)$ représentent les modes propres et $G(t)$ une fonction inconnue de t.

1. Théorie linéaire des plaques

D'après (1.69) on obtient alors :

$$\Delta\Delta W(x_1, x_2) G(t) = -\frac{\rho h}{D} W(x_1, x_2) \ddot{G}(t)$$

$$\text{donc } \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = -\frac{D}{\rho h} \frac{\Delta\Delta W(x_1, x_2)}{W(x_1, x_2)} = \text{cste}$$

Afin d'avoir une solution stable en temps la constante est forcément négative et est notée $-\omega^2$ avec ω représentant la pulsation propre de la plaque.

On obtient alors deux équations :

$$(i) \quad \ddot{G}(t) + \omega^2 G(t) = 0 \quad \text{soit} \quad G(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$(ii) \quad \underline{\Delta\Delta W(x_1, x_2) - \beta^4 W(x_1, x_2) = 0} \quad \text{avec } \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad \forall x_1, x_2 \in \text{plan moyen de la plaque.}$$

$$(\Delta\Delta - \beta^4) W(x_1, x_2) = (\Delta + \beta^2) (\Delta - \beta^2) W(x_1, x_2) = 0 \quad (1.70)$$

On définit W_1 et W_2 tels que $(\Delta - \beta^2) W_1(x_1, x_2) = 0$ et $(\Delta + \beta^2) W_2(x_1, x_2) = 0$.

On peut vérifier que $W = W_1 + W_2$ est la solution générale de l'équation (1.70)

$$\begin{aligned} \text{Démonstration : } & (\Delta + \beta^2) (\Delta - \beta^2) (W_1 + W_2) = (\Delta + \beta^2) [\underbrace{(\Delta - \beta^2) W_1}_{0} + \underbrace{(\Delta - \beta^2) W_2}_{0}] \\ & = (\Delta - \beta^2) \underbrace{(\Delta + \beta^2) W_2}_{0} = 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

On cherche W_1 sous la forme $e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$:

$$\text{or } \Delta W_1 - \beta^2 W_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \beta^2] e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (i) \quad \underline{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta^2}$$

On cherche W_2 sous la forme $e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2}$:

$$\text{or } \Delta W_2 + \beta^2 W_2 = \Delta W_2 - (i\beta)^2 W_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (ii) \quad \underline{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \beta^2}$$

$\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2$ vérifient (i) et $\gamma_1, -\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_2$ vérifient (ii) donc :

$$W(x_1, x_2) = A e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} + B e^{-\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} + C e^{\alpha_1 x_1} e^{-\alpha_2 x_2} + D e^{-\alpha_1 x_1} e^{-\alpha_2 x_2} + E e^{i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2} + F e^{-i\gamma_1 x_1} e^{i\gamma_2 x_2} + G e^{i\gamma_1 x_1} e^{-i\gamma_2 x_2} + H e^{-i\gamma_1 x_1} e^{-i\gamma_2 x_2}$$

soit en prenant la partie réelle :

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) = & A_1 \cosh(\alpha_1 x_1) \cosh(\alpha_2 x_2) + A_2 \cosh(\alpha_1 x_1) \sinh(\alpha_2 x_2) + A_3 \sinh(\alpha_1 x_1) \cosh(\alpha_2 x_2) \\ & + A_4 \sinh(\alpha_1 x_1) \sinh(\alpha_2 x_2) + A_5 \cos(\gamma_1 x_1) \cos(\gamma_2 x_2) + A_6 \cos(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2) \\ & + A_7 \sin(\gamma_1 x_1) \cos(\gamma_2 x_2) + A_8 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2) \end{aligned} \quad (1.71)$$

On considère une plaque de dimension $L_1 \times L_2$ simplement appuyée sur son pourtour, on doit alors vérifier les conditions aux limites suivantes :

- pour l'appui simple en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$:

$$w = 0 \text{ et } M_{11} = -D[(1-\nu)w_{,11} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D[w_{,11} + \nu w_{,22}] = 0 \text{ soit } \underline{w_{,11} = 0}.$$

- pour l'appui simple en $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$:

$$w = 0 \text{ et } M_{22} = -D[(1-\nu)w_{,22} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D[w_{,22} + \nu w_{,11}] = 0 \text{ soit } \underline{w_{,22} = 0}.$$

On doit alors vérifier les huit conditions aux limites :

$$\begin{aligned} (\text{CL1}) &: W(L_1, x_2) = 0; & (\text{CL2}) &: W_{,11}(L_1, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \\ (\text{CL3}) &: W(0, x_2) = 0; & (\text{CL4}) &: W_{,11}(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \\ (\text{CL5}) &: W(x_1, L_2) = 0; & (\text{CL6}) &: W_{,22}(x_1, L_2) = 0 \quad \forall x_1 \\ (\text{CL7}) &: W(x_1, 0) = 0; & (\text{CL8}) &: W_{,22}(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'après (CL3)}: A_1 \cosh(\alpha_2 x_2) + A_2 \sinh(\alpha_2 x_2) + A_5 \cos(\gamma_2 x_2) + A_6 \sin(\gamma_2 x_2) &= 0 \quad \forall x_2 \\ \implies A_1 = A_2 = A_5 = A_6 &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= A_3 \sinh(\alpha_1 x_1) \cosh(\alpha_2 x_2) + A_4 \sinh(\alpha_1 x_1) \sinh(\alpha_2 x_2) \\ &\quad + A_7 \sin(\gamma_1 x_1) \cos(\gamma_2 x_2) + A_8 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'après (CL7)}: A_3 \sinh(\alpha_1 x_1) + A_7 \sin(\gamma_1 x_1) &= 0 \quad \forall x_1 \\ \implies A_3 = A_7 &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$W(x_1, x_2) = A_4 \sinh(\alpha_1 x_1) \sinh(\alpha_2 x_2) + A_8 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2)$$

$$\text{par conséquent : } W_{,11}(x_1, x_2) = A_4 \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1 x_1) \sinh(\alpha_2 x_2) - A_8 \gamma_1^2 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2).$$

Les conditions aux limites (CL4) et (CL8) sont automatiquement vérifiées.

$$\text{d'après (CL1)}: A_4 \sinh(\alpha_1 L_1) \sinh(\alpha_2 x_2) + A_8 \sin(\gamma_1 L_1) \sin(\gamma_2 x_2) = 0$$

$$\text{d'après (CL2)}: A_4 \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1 L_1) \sinh(\alpha_2 x_2) - A_8 \gamma_1^2 \sin(\gamma_1 L_1) \sin(\gamma_2 x_2) = 0$$

$$\text{d'où } \gamma_1^2 (\text{CL1}) + (\text{CL2}) : A_4(\gamma_1^2 + \alpha_1^2) \sinh(\alpha_1 L_1) \sinh(\gamma_1 x_2) = 0 \quad \forall x_2$$

$$\text{alors } A_4 \sinh(\alpha_1 L_1) = 0 \text{ impose que } A_4 = 0 \text{ ou } \sinh(\alpha_1 L_1) = 0$$

La seconde solution $\sinh(\alpha_1 L_1) = 0$ implique que $\alpha_1 = 0$ (solution sans intérêt) par conséquent $A_4 = 0$ donc

$$W(x_1, x_2) = A_8 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2)$$

$$\text{par conséquent : } W_{,22}(x_1, x_2) = -A_8 \gamma_2^2 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 x_2)$$

$$\text{d'après (CL5)}: A_8 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 L_2) = 0$$

$$\text{d'après (CL6)}: -A_8 \gamma_2^2 \sin(\gamma_1 x_1) \sin(\gamma_2 L_2) = 0$$

Pour $\gamma_2 \neq 0$ alors $A_8 \sin(\gamma_2 L_2) = 0$ impose que $A_8 = 0$ ou $\sin(\gamma_2 L_2) = 0$

1. Théorie linéaire des plaques

$A_8 = 0$ est une solution triviale.

On doit donc vérifier $\sin(\gamma_2 L_2) = 0$ soit $\boxed{\gamma_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2}}$ avec $n_2 \geq 1$.

En revenant à (CL1) on doit vérifier que $A_8 \sin(\gamma_1 L_1) = 0$ donc pour obtenir une solution non triviale $\sin(\gamma_1 L_1) = 0$ soit $\boxed{\gamma_1 = \frac{n_1 \pi}{L_1}}$ avec $n_1 \geq 1$.

D'après (ii) : $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \beta^2$ donc $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 = \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$.

On obtient alors :

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2$$

par conséquent les pulsations propres de la plaque simplement appuyée obéissant à la théorie de Love-Kirchhoff sont :

$$\boxed{\omega_{n_1 n_2} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]} \quad \text{avec } n_1, n_2 \geq 1 \quad (1.72)$$

Le fréquences propres de cette plaque sont alors :

$$\boxed{f_{n_1 n_2} = \frac{\omega_{n_1 n_2}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]} \quad \text{avec } n_1, n_2 \geq 1 \quad (1.73)$$

Les modes propres associés sont :

$$\boxed{W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_2} x_2\right)} \quad \text{avec } n_1, n_2 \geq 1 \quad (1.74)$$

D'après (1.69) on peut écrire le déplacement transverse :

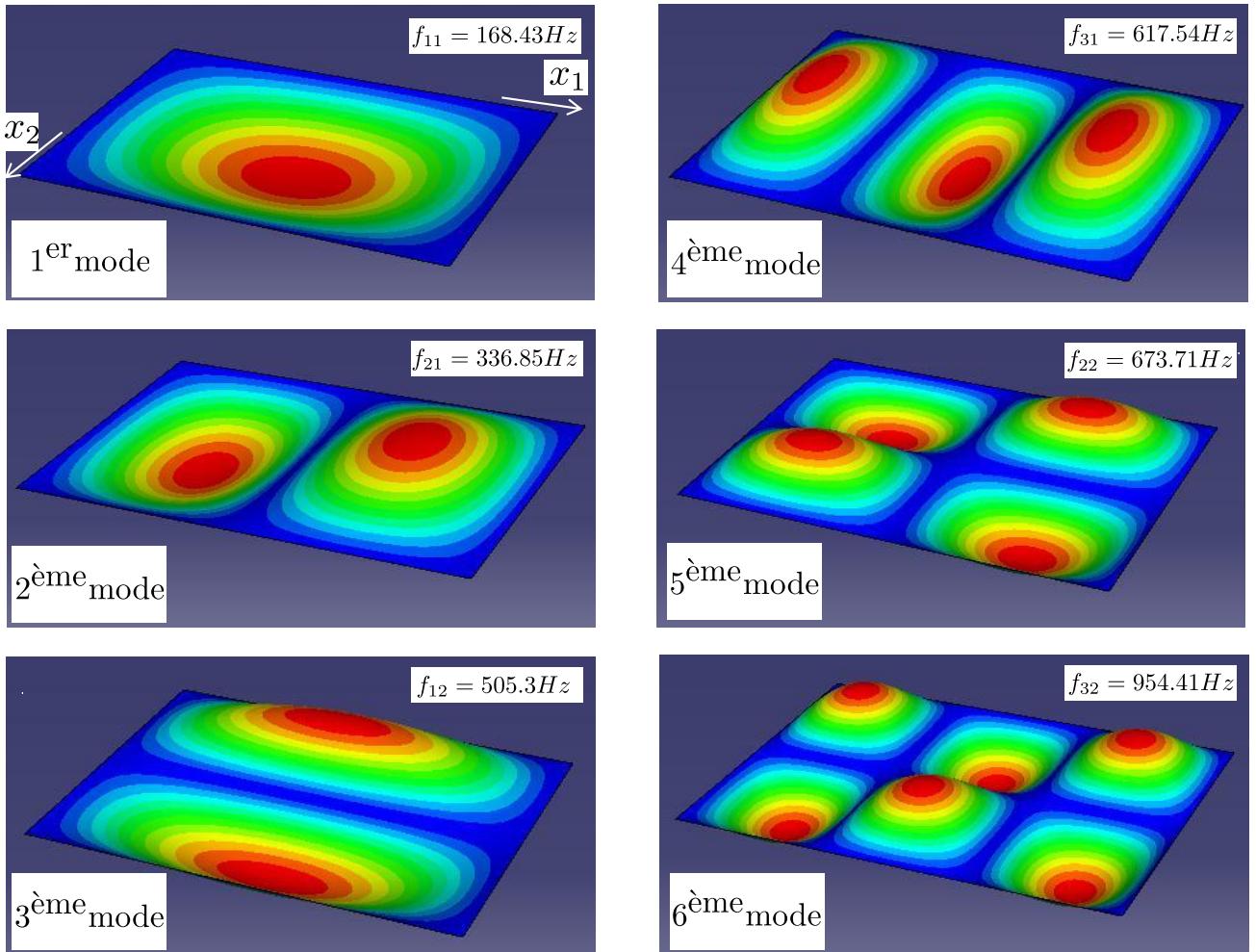
$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} G_{n_1 n_2}(t) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$$

donc

$$\boxed{w(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} [A_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t) + B_{n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t)] \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_2} x_2\right)} \quad (1.75)$$

Les coefficients $A_{n_1 n_2}$ et $B_{n_1 n_2}$ pourront être déterminés en utilisant les conditions initiales.

On représente ci-dessous les six premiers modes propres et ses fréquences propres associées pour une plaque d'aluminium ($E = 70GPa, \nu = 0.3, \rho = 2580kg/m^3$) de dimension $L_1 = 297mm, L_2 = 210mm$ et d'épaisseur $h = 2mm$.



□ Propriété d'orthogonalité des modes propres (méthode énergétique)

D'après (1.70) $\Delta\Delta W(x_1, x_2) - \beta^4 W(x_1, x_2) = 0$ avec $\beta^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$ donc les modes propres satisfont les équations suivantes :

$$\Delta\Delta W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) - \beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta_{n_1 n_2}^4 = \frac{\rho h}{D} \omega_{n_1 n_2}^2 \quad (1.76)$$

$$\Delta\Delta W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) - \beta_{k_1 k_2}^4 W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta_{k_1 k_2}^4 = \frac{\rho h}{D} \omega_{k_1 k_2}^2 \quad (1.77)$$

Les équations (1.76) peuvent être interprétées comme étant celles régissant l'équilibre statique de la plaque sous un effort extérieur $p_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = D\beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$.

En effet, d'après (1.53) si l'on néglige les termes d'inertie de rotation :

$$\Delta\Delta w = \frac{p_3}{D} - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{donc pour le cas statique} \quad \Delta\Delta w = \frac{p_3}{D}$$

1. Théorie linéaire des plaques

D'après (1.76) on a alors $\Delta\Delta W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \frac{p_{n_1 n_2}(x_1, x_2)}{D}$

$$\implies p_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = D\beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)(x_1, x_2)$$

On peut faire de même avec (1.77) et on déduit que $p_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = D\beta_{k_1 k_2}^4 W_{k_1 k_2}(x_1, x_2)(x_1, x_2)$.

D'après le théorème de Maxwell-Betti :

Le travail effectué par un système d'effort (\mathcal{F}_1) sur un état de déformation (\mathcal{D}_2) provoqué par le système d'effort (\mathcal{F}_2) est égal au travail effectué par un système d'effort (\mathcal{F}_2) sur un état de déformation (\mathcal{D}_1) provoqué par le système d'effort (\mathcal{F}_1) :

$$(\mathcal{F}_1).(\mathcal{D}_2) = (\mathcal{F}_2).(\mathcal{D}_2)$$

donc ici : $\iint_{\mathcal{D}} \underline{p_{n_1 n_2}(x_1, x_2)} W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} \underline{p_{k_1 k_2}(x_1, x_2)} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \underline{D\beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)} W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} \underline{D\beta_{k_1 k_2}^4 W_{k_1 k_2}(x_1, x_2)} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\Rightarrow D(\beta_{n_1 n_2}^4 - \beta_{k_1 k_2}^4) \iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0$$

On en déduit que pour $\beta_{n_1 n_2} \neq \beta_{k_1 k_2}$ donc si $(n_1, n_2) \neq (k_1, k_2)$ alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad (1.78)$$

Remarque :

Les modes propres sont orthogonaux dans les conditions de validité du théorème de Maxwell-Betti. Pour le cas où le système admet un potentiel (potentialité des efforts extérieurs y compris les conditions aux limites) cela est valable; par contre ce ne sera pas le cas pour certaines liaisons avec dissipation.

□ Conditions initiales

D'après (1.75) :

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} G_{n_1 n_2}(t) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$$

avec $G_{n_1 n_2}(t) = A_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t) + B_{n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t)$.

Les modes propres de la plaque $W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ ainsi que ses pulsations propres $\omega_{n_1 n_2}$ sont supposés connus.

On peut alors écrire les conditions initiales en $t = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_1, x_2, t = 0) = w_0(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} A_{n_1 n_2} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \\ \dot{w}(x_1, x_2, t = 0) = w_1(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \omega_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.79) \\ (1.80) \end{array}$$

L'orthogonalité des modes propres donne :

- $\iint_{\mathcal{D}} (1.79) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} A_{n_1 n_2} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} w_0(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\Rightarrow A_{n_1 n_2} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} w_0(x_1, x_2) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.81)$$

- $\iint_{\mathcal{D}} (1.80) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \omega_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} w_1(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\Rightarrow B_{n_1 n_2} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} w_1(x_1, x_2) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\omega_{n_1 n_2} \iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.82)$$

Remarque :

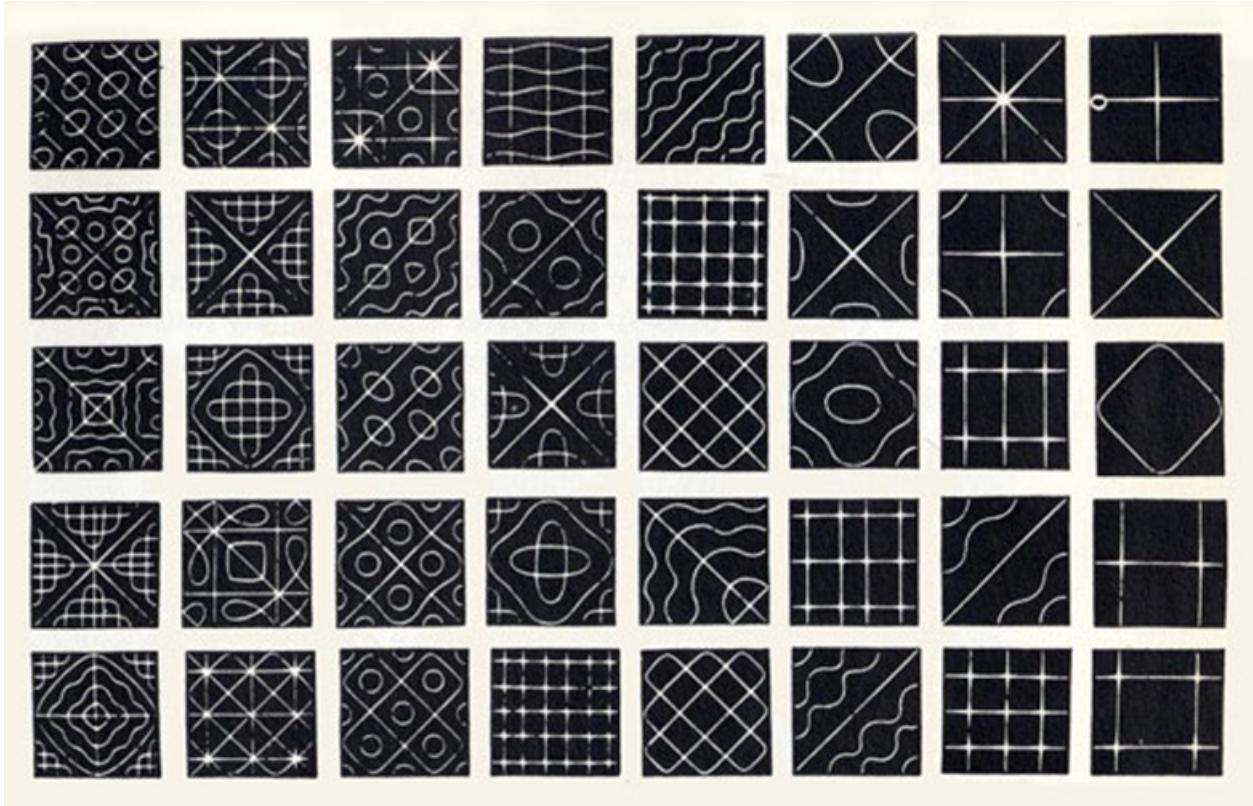
Si la base modale n'est pas orthogonale, on doit résoudre les systèmes linéaires (1.79) et (1.80). Ceci peut être le cas pour une base approchée de fonctions $\tilde{W}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$.

□ Figures de Chladni :

Du point de vue historique, le premier travail significatif examinant les motifs nodaux sur des plaques rectangulaires de toute sorte a été réalisé expérimentalement par Ernst Chladni, physicien allemand, sur des plaques carrées libres et publié en 1787.

Pour ses expériences, il utilisa des plaques rigides métalliques horizontales de taille, forme et épaisseur différentes complètement libres qui sont plus faciles à traiter, car elles ne nécessitent pas de fixations sur les bords. Il suffit alors de soutenir la plaque par des fils ou des points en dessous, en les positionnant aux lignes de noeuds prévues afin de ne pas affecter le mode désiré. Seule la partie centrale du dispositif est fixe, le bord est lui libre de vibrer. Chladni a alors répandu du sable très fin sur la plaque qu'il a mis en vibration grâce à un archet qu'il frotta verticalement sur le bord de la plaque. Sous l'excitation de l'archet, la

plaqué vibre, le sable se déplace depuis les zones de forte vibration (ventres où l'amplitude est maximale) vers les zones où la vibration est minimale voire nulle (noeuds de vibration de l'onde stationnaire). Ces noeuds forment des lignes dites nodales. Les figures ainsi dessinées, appelées figures de Chladni, correspondent à des fréquences de résonance spécifique à la plaque.



IV.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

IV.2.a Rappels sur les énergies

D'après (1.8), le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\delta W_i + \delta W_e = \delta W_a$$

or pour le cas de l'étude des vibrations libres $\delta W_e = 0$ (pas de chargement extérieur).

Comme $W_a = T$ où T représente l'énergie cinétique et $W_i = -U$ où U est l'énergie de déformation élastique, le principe des travaux virtuels s'écrit alors :

$$\delta(T + U) = \delta(T + U_m + U_f) = 0 \quad (1.83)$$

avec l'énergie de déformation élastique membranaire :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\text{Tr } \epsilon^0)^2 - 2(1-\nu) \det \epsilon^0] dx_1 dx_2$$

où $\epsilon_{11}^0 = u_{1,1}^0$; $\epsilon_{22}^0 = u_{2,2}^0$ et $2\epsilon_{12}^0 = u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0$

et l'énergie de déformation élastique de flexion :

$$U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\text{Tr } \mathbb{K})^2 - 2(1-\nu) \det \mathbb{K}] dx_1 dx_2$$

où $\mathbb{K} = -\overline{\overline{\text{grad}}}(\overrightarrow{\text{grad}} w) = \begin{pmatrix} -w_{,11} & -w_{,12} \\ -w_{,12} & -w_{,22} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$

donc $\text{Tr } \mathbb{K} = -w_{,11} - w_{,22} = -\Delta w$ et $\det \mathbb{K} = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2$

et finalement l'énergie cinétique (si l'inertie de rotation et les effets membranaires sont négligés) :

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx_1 dx_2$$

Remarque :

A partir de l'expression (1.83), on peut introduire une nouvelle fonction appelée Hamiltonien H avec $H = T + U$. Le Hamiltonien se confond avec l'énergie du système dans le cas de forces conservatives (et si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, L représentant le Lagrangien).

IV.2.b Méthode de Rayleigh-Quotient de Rayleigh pour un problème de flexion

D'après le principe de Hamilton, on sait que la vibration d'un système conservatif est un échange d'énergie permanent entre énergie cinétique et énergie de déformation élastique, on a donc la propriété suivante :

$$(U_f)_{max} = T_{max} \quad (1.84)$$

où $(U_f)_{max}$ et T_{max} sont respectivement les maxima de l'énergie de déformation élastique de flexion et de l'énergie cinétique atteints au cours du temps.

Pour des oscillations harmoniques, le déplacement transverse $w(x_1, x_2, t)$ peut s'écrire :

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \sin(\omega t + \phi)$$

où $W(x_1, x_2)$ sont des fonctions de base cinématiquement admissibles

donc $\frac{\partial w}{\partial t} = \omega W(x_1, x_2) \cos(\omega t + \phi)$

soit $T = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \iint_{\mathcal{D}} \rho h W^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

Comme $(\cos^2(\omega t + \phi))_{max} = 1$, on obtient :

$$T_{max} = \omega^2 \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \rho h W^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.85)$$

De même comme $U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2)] dx_1 dx_2$

soit $U_f = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \phi) \iint_{\mathcal{D}} D [(\Delta W)^2 - 2(1-\nu)(W_{,11}W_{,22} - (W_{,12})^2)] dx_1 dx_2$

or $(\cos^2(\omega t + \phi))_{max} = 1$, on obtient alors :

$$(U_f)_{max} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\Delta W)^2 - 2(1-\nu)(W_{,11}W_{,22} - (W_{,12})^2)] dx_1 dx_2 \quad (1.86)$$

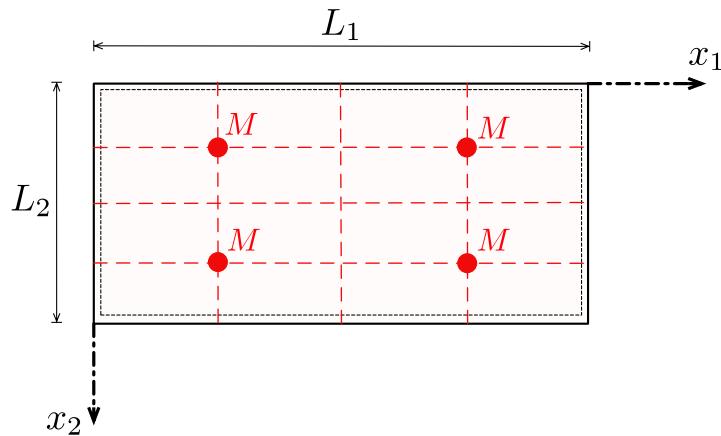
1. Théorie linéaire des plaques

D'après le principe de Hamilton (1.84), on établit le quotient de Rayleigh :

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\Delta W)^2 - 2(1-\nu) (W_{,11}W_{,22} - (W_{,12})^2)] dx_1 dx_2}{\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \rho h W^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.87)$$

Exemple :

On reprend l'exercice de la plaque rectangulaire simplement appuyée sur tout son pourtour du IV.1 en ajoutant 4 masses concentrées M en $\left(\frac{L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right)$, $\left(\frac{L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right)$, $\left(\frac{3L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right)$ et $\left(\frac{3L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right)$. On cherche alors à calculer une valeur approchée de la pulsation fondamentale en utilisant la méthode de Rayleigh.



On va utiliser comme fonction de base le premier mode propre de la plaque sans masses concentrées [$n_1 = n_2 = 1$ dans (1.74)] :

$$W(x_1, x_2) = p_{11}W_{11}(x_1, x_2) \quad \text{avec} \quad W_{11}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right)$$

En utilisant le quotient de Rayleigh (1.87), on peut trouver une approximation de la pulsation fondamentale ($\tilde{\omega}_{11}$) de notre problème :

$$\tilde{\omega}_{11}^2 = \frac{\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(\Delta W_{11})^2 - 2(1-\nu) (W_{11,11}W_{11,22} - (W_{11,12})^2)] dx_1 dx_2}{\frac{1}{2} \left\{ \iint_{\mathcal{D}} \rho h W_{11}^2 dx_1 dx_2 + MW_{11}^2 \left(\frac{L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right) + MW_{11}^2 \left(\frac{L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right) + MW_{11}^2 \left(\frac{3L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right) + MW_{11}^2 \left(\frac{3L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right) \right\}}$$

$$\bullet \iint_{\mathcal{D}} (W_{11})^2 dx_1 dx_2 = \int_0^{L_1} \sin^2\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) dx_1 \int_0^{L_2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right) dx_2 = \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{2} = \frac{L_1 L_2}{4}$$

$$\bullet W_{11}^2 \left(\frac{L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right) = W_{11}^2 \left(\frac{L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right) = W_{11}^2 \left(\frac{3L_1}{4}, \frac{L_2}{4}\right) = W_{11}^2 \left(\frac{3L_1}{4}, \frac{3L_2}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet W_{11,11} = -\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 W_{11}; W_{11,22} = -\left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 W_{11}; W_{11,12} = \frac{\pi}{L_1} \frac{\pi}{L_2} \cos\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right)$$

$$\text{donc } \iint_{\mathcal{D}} [W_{11,11}W_{11,22} - (W_{11,12})^2] dx_1 dx_2 \\ = \frac{\pi^4}{L_1^2 L_2^2} \iint_{\mathcal{D}} \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right) \right] dx_1 dx_2 = 0$$

$$\text{de plus } \iint_{\mathcal{D}} (\Delta W_{11})^2 dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} \pi^4 \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^2 \iint_{\mathcal{D}} \sin^2\left(\frac{\pi}{L_1}x_1\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L_2}x_2\right) dx_1 dx_2 \\ = \pi^4 \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^2 \frac{L_1 L_2}{4}$$

On obtient alors :

$$\tilde{\omega}_{11}^2 = \frac{\pi^4 D \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^2 \frac{L_1 L_2}{4}}{\rho h \frac{L_1 L_2}{4} + M} \implies \tilde{\omega}_{11}^2 = \frac{\pi^4 D \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^2}{\rho h + \frac{4M}{L_1 L_2}}$$

$$\text{Si } M = 0 \text{ alors } \tilde{\omega}_{11} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]$$

On retrouve la valeur de la pulsation fondamentale ($n_1 = n_2 = 1$) pour le cas sans masses ajoutées obtenue en (1.72).

Remarque :

Si l'on veut approcher d'autres pulsations propres, on cherche alors $W(x_1, x_2)$ sous la forme $W(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} p_{n_1 n_2} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ avec $p_{n_1 n_2}$ les coordonnées sur la base et les modes propres $W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_2} x_2\right)$ issus de (1.74).

Soit par exemple :

$$W(x_1, x_2) = p_{11} W_{11}(x_1, x_2) + p_{12} W_{12}(x_1, x_2) + p_{21} W_{21}(x_1, x_2) + p_{22} W_{22}(x_1, x_2) .$$

Les coefficients p_{11} , p_{12} , p_{21} et p_{22} sont obtenus via le principe du minimum de l'énergie totale $\hat{\Pi} = (U_f)_{max} + T_{max}$.

On doit donc résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial p_{11}} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial p_{12}} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial p_{21}} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial p_{22}} = 0 \end{cases}$$

IV.3 Vibrations forcées de plaques minces rectangulaires en flexion

□ Méthode de la base modale :

D'après (1.53) si l'on néglige les termes d'inertie de rotation l'équation d'équilibre dynamique est :

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_3$$

On cherche la solution par décomposition sur base modale :

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} G_{n_1 n_2}(t) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \quad (1.88)$$

avec $W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ représentant les modes propres de la structure et $G_{n_1 n_2}(t)$ une fonction inconnue du temps donc :

$$\sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \left[G_{n_1 n_2}(t) D\Delta\Delta W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) + \rho h \ddot{G}_{n_1 n_2}(t) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right] = p_3(x_1, x_2, t)$$

$$\text{or } \Delta\Delta W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \beta_{n_1 n_2}^4 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \frac{\rho h}{D} \omega_{n_1 n_2}^2 W_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \rho h \left[\ddot{G}_{n_1 n_2}(t) + \omega_{n_1 n_2}^2 G_{n_1 n_2}(t) \right] W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2, t) \quad (1.89)$$

• $\iint_{\mathcal{D}} (1.89) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \left[M_{n_1 n_2 k_1 k_2} \ddot{G}_{n_1 n_2}(t) + K_{n_1 n_2 k_1 k_2} G_{n_1 n_2}(t) \right] = F_{k_1 k_2}(t) \quad (1.90)$$

avec :

$$\text{les masses modales généralisées : } M_{n_1 n_2 k_1 k_2} = \iint_{\mathcal{D}} \rho h W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{les raideurs modales généralisées : } K_{n_1 n_2 k_1 k_2} = \omega_{n_1 n_2}^2 \iint_{\mathcal{D}} \rho h W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{les forces modales généralisées : } F_{k_1 k_2}(t) = \iint_{\mathcal{D}} p_3(x_1, x_2, t) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

En utilisant l'orthogonalité des modes propres alors (1.90) devient :

$$\ddot{G}_{n_1 n_2}(t) + \omega_{n_1 n_2}^2 G_{n_1 n_2}(t) = f_{n_1 n_2}(t) \text{ avec } f_{n_1 n_2}(t) = \frac{\iint_{\mathcal{D}} p_3(x_1, x_2, t) W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\iint_{\mathcal{D}} \rho h W_{n_1 n_2}^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2}$$

(1.91)

□ On considère à nouveau une plaque rectangulaire de dimension $L_1 \times L_2$ en appuis simples sur son pourtour soumise à une charge surfacique $p_3(x_1, x_2, t) = p_0(x_1, x_2) \cos(\Omega t)$ avec Ω la

pulsation des vibrations forcées du chargement.

D'après (1.74) on sait que les modes propres associés sont :

$$W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_2} x_2\right) \quad \text{avec } n_1, n_2 \geq 1$$

or d'après les calculs statiques pour les séries de Fourier de (1.57) on a vu que :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \underbrace{\left[\int_0^{L_1} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{L_1}\right) dx_1 \right]}_{\mathfrak{J}_1} \underbrace{\left[\int_0^{L_2} \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_2 \right]}_{\mathfrak{J}_2} \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathfrak{J}_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } k_\alpha \neq n_\alpha \\ \frac{L_\alpha}{2} & \text{si } k_\alpha = n_\alpha \end{cases} \quad \text{avec } \alpha = 1, 2$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} W_{n_1 n_2}(x_1, x_2) W_{k_1 k_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } (n_1, n_2) \neq (k_1, k_2) \\ \frac{L_1 L_2}{4} & \text{si } (n_1, n_2) = (k_1, k_2) \end{cases}$$

On vérifie bien l'orthogonalité des modes propres.

Pour notre exemple le second membre de l'équation (1.91) s'écrit alors :

$$f_{n_1 n_2}(t) = \hat{F}_{n_1 n_2} \cos(\Omega t)$$

$$\text{avec } \hat{F}_{n_1 n_2} = \frac{4}{\rho h L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} p_0(x_1, x_2) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_1 dx_2 \quad (1.92)$$

D'après (1.91) :

$$\ddot{G}_{n_1 n_2}(t) + \omega_{n_1 n_2}^2 G_{n_1 n_2}(t) = \hat{F}_{n_1 n_2} \cos(\Omega t) \quad (1.93)$$

La solution de (1.93) peut donc s'écrire sous la forme :

$$G_{n_1 n_2}(t) = A_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t) + B_{n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t) + \hat{G}_{n_1 n_2}(t) \quad (1.94)$$

avec $\omega_{n_1 n_2} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]$ et $\hat{G}_{n_1 n_2}(t)$ une solution particulière à déterminer.

$\hat{G}_{n_1 n_2}(t)$ est de la forme $\hat{G}_{n_1 n_2}(t) = C_{n_1 n_2} \cos(\Omega t)$ que l'on injecte dans (1.94), on obtient alors :

1. Théorie linéaire des plaques

$$C_{n_1 n_2}(t) = \frac{\hat{F}_{n_1 n_2}}{\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2}$$

soit

$$G_{n_1 n_2}(t) = A_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t) + B_{n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t) + \frac{\hat{F}_{n_1 n_2}}{\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (1.95)$$

□ Conditions initiales

On suppose que :

$$\begin{cases} w(x_1, x_2, t=0) = 0 \\ \dot{w}(x_1, x_2, t=0) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} G_{n_1 n_2}(0) = 0 = A_{n_1 n_2} + \frac{\hat{F}_{n_1 n_2}}{\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2} \\ \dot{G}_{n_1 n_2}(0) = 0 = \omega_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2} \end{cases}$$

d'où

$$G_{n_1 n_2}(t) = \frac{\hat{F}_{n_1 n_2}}{\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega_{n_1 n_2} t)) \quad (1.96)$$

Pour Ω très proche de $\omega_{n_1 n_2}$ on se trouvera dans un état de résonance.

- Pour une **charge uniformément répartie** $p_0(x_1, x_2) = p_0 = \text{cste}$
soit $p_3(x_1, x_2, t) = p_0 \cos(\Omega t)$

On a alors d'après (1.92) :

$$\hat{F}_{n_1 n_2} = \frac{4p_0}{\rho h L_1 L_2} \int_0^{L_1} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) dx_1 \int_0^{L_2} \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) dx_2$$

or $\int_0^{L_\alpha} \sin\left(\frac{n_\alpha \pi x_\alpha}{L_\alpha}\right) dx_\alpha = \left[-\frac{\cos\left(\frac{n_\alpha \pi x_\alpha}{L_\alpha}\right)}{\frac{n_\alpha \pi}{L_\alpha}} \right]_0^{L_\alpha} = \frac{1 - \cos(n_\alpha \pi)}{\frac{n_\alpha \pi}{L_\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n_\alpha \text{ pair} \\ \frac{2L_\alpha}{n_\alpha \pi} & \text{si } n_\alpha \text{ impair} \end{cases}$

par conséquent :

$$\hat{F}_{n_1 n_2} = \frac{16p_0}{\rho h \pi^2 n_1 n_2} \quad \text{avec } n_1, n_2 \text{ impairs}$$

D'après (1.88) et (1.96) on peut donc écrire le déplacement transverse :

$$w(x_1, x_2, t) = \frac{16p_0}{\rho h \pi^2} \sum_{\substack{n_1 \\ \text{impair}}} \sum_{\substack{n_2 \\ \text{impair}}} \frac{(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_{n_1 n_2} t))}{(\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2) n_1 n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \quad (1.97)$$

avec $\omega_{n_1 n_2} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]$

► Pour une **force ponctuelle** P_0 suivant la direction \vec{e}_3 appliquée au point (ξ_1, ξ_2) soit $p_3(x_1, x_2, t) = P_0 \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \cos(\Omega t)$ avec δ représentant la distribution de Dirac.

On a alors d'après (1.92) :

$$\hat{F}_{n_1 n_2} = \frac{4P_0}{\rho h L_1 L_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi \xi_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi \xi_2}{L_2}\right)$$

D'après (1.88) et (1.96) on peut donc écrire le déplacement transverse :

$$w(x_1, x_2, t) = \frac{4P_0}{\rho h L_1 L_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_{n_1 n_2} t))}{(\omega_{n_1 n_2}^2 - \Omega^2)} \sin\left(\frac{n_1 \pi \xi_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi \xi_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right)$$

(1.98)

avec $\omega_{n_1 n_2} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]$

Chapitre 2

Théorie non-linéaire des plaques - Flambement¹

Sommaire

I	Théorie non-linéaire des plaques de Von-Karman	55
I.1	Hypothèses cinématiques	55
I.2	Équations d'équilibre et conditions aux limites	56
I.3	Cas d'une plaque rectangulaire ($p_\alpha = 0$)	58
II	Etude du flambement de plaques minces rectangulaires	63
II.1	Introduction	63
II.2	Théorie linéaire du flambement élastique - charges critiques	65
II.3	Comportement post-critique	72
III	Etude du flambement de coques minces cylindriques	76
III.1	Introduction	76
III.2	Équations d'équilibre linéarisées du flambement de coques cylindriques	77
III.3	Flambement sous compression axiale	81
III.4	Flambement sous pression latérale	88
III.5	Flambement sous torsion	91

I Théorie non-linéaire des plaques de Von-Karman

I.1 Hypothèses cinématiques

Pour le cas des plaques avec des **déflexions modérément grandes** $\left(\frac{h}{L_1}, \frac{h}{L_2} < \frac{1}{50}\right)$, on doit utiliser le tenseur de Green-Lagrange pour introduire les termes non-linéaires (en rouge dans les équations) dans le tenseur des déformations.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + \textcolor{red}{u_{k,i}u_{k,j}}) = \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \textcolor{red}{u_{k,i}u_{k,j}} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

où ϵ_{ij} sont les composantes du tenseur des déformations infinitésimales.

1. Les effets dynamiques ne seront pas pris en compte pour ce chapitre.

On reste dans l'hypothèse de Love-Kirchhoff (1.37) : $\Omega_\alpha = -w_{,\alpha}$.

On part des équations (1.38) pour les composantes des déplacements :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \alpha = 1, 2$$

$$E_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} u_{k,\alpha} u_{k,\beta} \stackrel{(1.24)}{=} (\epsilon_{\alpha\beta}^0 + x_3 K_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} u_{k,\alpha} u_{k,\beta}$$

D'après (1.51) : $K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}$ donc $E_{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta}^0 - x_3 w_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{2} u_{k,\alpha} u_{k,\beta}$

On sait que $u_{k,\alpha} u_{k,\beta} = u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}$, le premier terme correspond au gradient des déplacements membranaires qui sont très petits donc négligés par la suite :

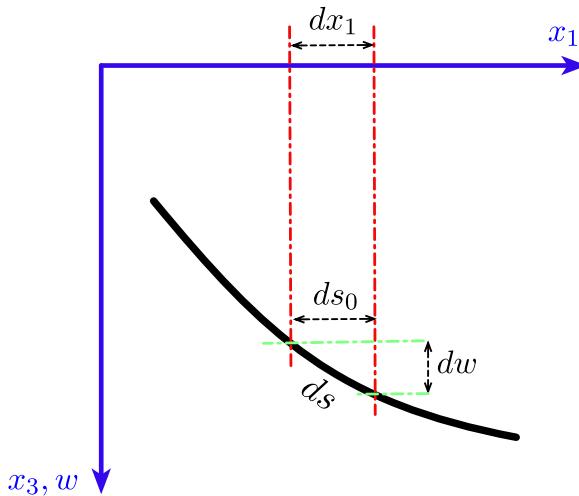
$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^0 - x_3 w_{,\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad E_{\alpha\beta}^0 = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} \quad (2.2)$$

- **Interprétation physique du terme $\frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta}$:**

On prend $\alpha = \beta = 1$, par définition :

$$E_{11} = \frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2(ds_0)^2} \simeq \frac{[(ds_0)^2 + (dw)^2 + 2d\vec{s}_0 \cdot d\vec{w}] - (ds_0)^2}{2(ds_0)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_1} \right)^2$$

avec ds_0 et ds respectivement les incrémentes des longueurs initiale et courante.



Par conséquent le terme $\frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta}$ représente le changement de longueur d'un élément de plaque dû aux rotations finies.

I.2 Equations d'équilibre et conditions aux limites

I.2.a Calcul du travail virtuel des efforts extérieurs

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de points anguleux, d'après (1.40) :

$$\delta W_e = \iint_{\mathcal{D}} (p_\alpha \delta u_\alpha^0 + p_3 \delta w) dA + \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[T_\alpha \delta u_\alpha^0 + \left(T_3 + \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial \tau} \right) \delta w - \mathcal{C}_\nu \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] d\ell$$

I.2.b Calcul du travail virtuel des efforts intérieurs

Afin de prendre en compte les non-linéarités géométriques :

$$-W_i = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} E_{ij} dV = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} [\sigma_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha 3} E_{\alpha 3} + \sigma_{33} E_{33}] dV$$

On sait que $|\sigma_{33}| \ll |\sigma_{\alpha 3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}|$, par conséquent on peut supposer que :

$$-W_i = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} dV$$

d'où :

$$\begin{aligned} -\delta W_i &= \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} dV \stackrel{(2.2)}{=} \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} (\delta E_{\alpha\beta}^0 - x_3 \delta w_{,\alpha\beta}) dV \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \left[\delta \left(\epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} \right) - x_3 \delta w_{,\alpha\beta} \right] dV \\ &= \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \left[\delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} \delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} \delta w_{,\beta} - x_3 \delta w_{,\alpha\beta} \right] dV \\ &= \iiint_{\Omega} [\sigma_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 - x_3 \sigma_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta}] dV + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} [\delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} \delta w_{,\beta}] dV \\ -\delta W_i &\stackrel{(1.13)}{=} \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta}] dA + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} [\delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} \delta w_{,\beta}] dA \quad (2.3) \end{aligned}$$

La première intégrale a déjà été calculée précédemment (voir le passage de (1.41) à (1.42)). On va se concentrer sur la seconde intégrale. $N_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ étant symétriques on sait que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} [\delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} \delta w_{,\beta}] dA &= \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} w_{,\beta} \delta w_{,\alpha} dA \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} w_{,\beta} \nu_{\alpha} \delta w d\ell - \iint_{\mathcal{D}} (N_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha} \delta w dA \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_{\alpha}^0 + (M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha}) \delta w] dA \\ &\quad + \oint_{\partial\mathcal{D}} \left[-N_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \delta u_{\alpha}^0 - \left((M_{\alpha\beta,\beta} + N_{\alpha\beta} w_{,\beta}) \nu_{\alpha} + \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial \tau} \right) \delta w + M_{\nu\nu} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] d\ell \end{aligned} \quad (2.4)$$

I.2.c Principe des travaux virtuels

On applique le principe des travaux virtuels $\delta W_i + \delta W_e = 0$ pour déterminer les équations d'équilibre non-linéaires des plaques dans la théorie de Love-Kirchhoff ainsi que les conditions de bord associées.

2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

◊ Les équations d'équilibre non-linéaires (les termes sur \mathcal{D})

$$\begin{aligned} (\delta u_\alpha^0) : \quad N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= 0 \\ (\delta w) : \quad M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (\textcolor{red}{N}_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha} + p_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

◊ Les conditions de bord (les termes sur $\partial\mathcal{D}$)

$$\begin{aligned} (\delta u_\alpha^0) : \quad T_\alpha &= N_{\alpha\beta} \nu_\beta \\ (\delta w) : \quad T_{\text{eff}} &= T_3 + \frac{\partial \mathcal{C}_\tau}{\partial \tau} = (M_{\alpha\beta,\beta} + \textcolor{red}{N}_{\alpha\beta} w_{,\beta}) \nu_\alpha + \frac{\partial M_{\tau\nu}}{\partial \tau} \\ (\delta \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)) : \quad \mu_\tau &= \mathcal{C}_\nu = M_{\nu\nu} \end{aligned} \tag{2.6}$$

◊ Lois de comportement

La loi de comportement associée aux efforts membranaires est :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)E_{\alpha\beta}^0 + \nu E_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}] \quad \text{avec} \quad E_{\alpha\beta}^0 = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} \textcolor{red}{w}_{,\alpha} w_{,\beta} \tag{2.7}$$

Pour les efforts hors plan membranaire, la loi de comportement n'est pas modifiée :

$$M_{\alpha\beta} = -D [(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \tag{2.8}$$

Si l'on combine les deux équations (2.5) on obtient :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \textcolor{red}{N}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - p_\alpha w_{,\beta} + p_3 = 0$$

Pour un problème de flexion ($p_\alpha = 0$), on obtient l'**équation des plaques de Von-Karman** :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \textcolor{red}{N}_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} + p_3 = 0 \tag{2.9}$$

Le terme non-linéaire (en rouge) va imposer un couplage membrane/flexion.

I.3 Cas d'une plaque rectangulaire ($p_\alpha = 0$)

D'après (2.9) :

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + N_{11}w_{,11} + 2N_{12}w_{,12} + N_{22}w_{,22} + p_3 = 0 \tag{2.10}$$

De plus d'après la loi de comportement (2.8) :

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22})$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11})$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)w_{,12}$$

par conséquent : $M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = -D\Delta\Delta w$.

D'autre part, on doit vérifier l'équation d'équilibre $N_{\alpha\beta,\alpha} + p_\alpha = 0$ (ici $p_\alpha = 0$) :

$$N_{11,1} + N_{12,2} = 0$$

$$N_{12,1} + N_{22,2} = 0$$

Les deux équations précédentes sont satisfaites en utilisant le théorème de Poincaré par l'introduction d'une fonction $\Phi(x_1, x_2)$ qui vérifie :

$$N_{11} = \Phi_{,22}; \quad N_{22} = \Phi_{,11} \quad \text{et} \quad N_{12} = -\Phi_{,12} \quad (2.11)$$

L'équation (2.10) peut donc s'écrire :

$$D\Delta\Delta w = p_3 + \Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12} \quad (2.12)$$

ou sous une autre forme :

$$\boxed{\Delta\Delta w = \frac{1}{D} [p_3 + \mathcal{L}(w, \Phi)] \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(w, \Phi) = \Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}} \quad (2.13)$$

◊ Equations de compatibilité des déformations

$$\begin{aligned} E_{11,22}^0 + E_{22,11}^0 - 2E_{12,12}^0 &\stackrel{(2.7)}{=} \left[\epsilon_{11}^0 + \frac{1}{2}w_{,1}w_{,1} \right]_{,22} + \left[\epsilon_{22}^0 + \frac{1}{2}w_{,2}w_{,2} \right]_{,11} - 2 \left[\epsilon_{12}^0 + \frac{1}{2}w_{,1}w_{,2} \right]_{,12} \\ &= \epsilon_{11,22}^0 + \epsilon_{22,11}^0 - 2\epsilon_{12,12}^0 + (w_{,12}w_{,1})_{,2} + (w_{,12}w_{,2})_{,1} - (w_{,11}w_{,2} + w_{,1}w_{,12})_{,2} \\ &= \epsilon_{11,22}^0 + \epsilon_{22,11}^0 - 2\epsilon_{12,12}^0 + (w_{,12})^2 - w_{,11}w_{,22} \end{aligned}$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations on sait que $\epsilon_{11,22}^0 + \epsilon_{22,11}^0 - 2\epsilon_{12,12}^0 = 0$ donc :

$$\boxed{E_{11,22}^0 + E_{22,11}^0 - 2E_{12,12}^0 = (w_{,12})^2 - w_{,11}w_{,22} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}(w, w)} \quad (2.14)$$

De plus, d'après la loi de comportement associée aux efforts membranaires (2.7) :

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [E_{11}^0 + \nu E_{22}^0]$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [E_{22}^0 + \nu E_{11}^0]$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1+\nu} E_{12}^0$$

On obtient alors : $E_{11}^0 = \frac{N_{11} - \nu N_{22}}{Eh}$; $E_{22}^0 = \frac{N_{22} - \nu N_{11}}{Eh}$ et $E_{12}^0 = (1+\nu) \frac{N_{12}}{Eh}$.

$$\begin{aligned} \text{donc } E_{11,22}^0 + E_{22,11}^0 - 2E_{12,12}^0 &= \frac{1}{Eh} \left\{ [N_{11} - \nu N_{22}]_{,22} + [N_{22} - \nu N_{11}]_{,11} - 2(1+\nu)N_{12,12} \right\} \\ &= \frac{1}{Eh} \left\{ [\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}]_{,22} + [\Phi_{,11} - \nu\Phi_{,22}]_{,11} + 2(1+\nu)\Phi_{,1122} \right\} \\ &= \frac{1}{Eh} \{ \Phi_{,1111} + \Phi_{,2222} + 2\Phi_{,1122} \} \end{aligned}$$

2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

donc

$$E_{11,22}^0 + E_{22,11}^0 - 2E_{12,12}^0 = \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi \quad (2.15)$$

En tenant compte de (2.14) et (2.15) on obtient :

$$\Delta\Delta\Phi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(w, w) \quad (2.16)$$

Pour résoudre le problème de flexion d'une plaque rectangulaire de Von-Karman, on doit donc résoudre les deux équations différentielles non-linéaires à deux inconnues w et Φ suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\Delta w = \frac{1}{D} [p_3 + \mathcal{L}(w, \Phi)] \\ \Delta\Delta\Phi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(w, w) \end{cases} \quad (2.17)$$

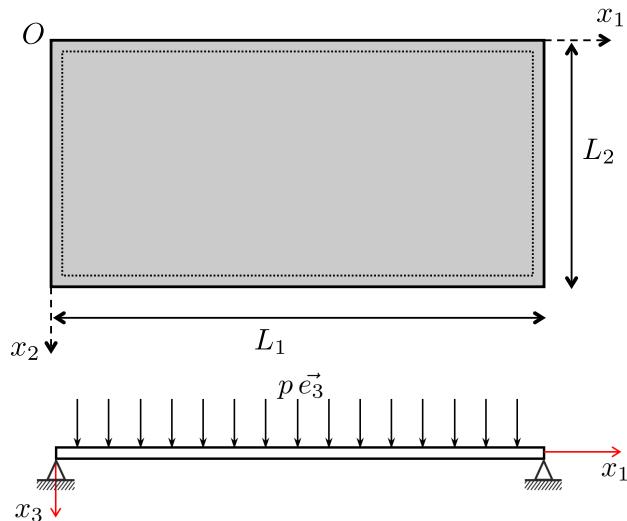
avec $\mathcal{L}(w, \Phi) = \Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}$

Les solutions exactes de (2.17) sont très rares. Il faudra donc passer par des méthodes indirectes telles que :

- les doubles séries de Fourier
- les méthodes de Ritz ou Galerkin
- les techniques d'itération pas à pas

Exemple :

On considère une plaque rectangulaire $L_1 \times L_2$ soumise à une densité surfacique de force $p \vec{e}_3$. La plaque est sous appuis simples sur tout son pourtour.



- Conditions aux limites (appui simple en $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$) :

En $x_1 = 0$; $\vec{\nu} = -\vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = -\vec{e}_2$ (même raisonnement pour $x_1 = L_1$; $\vec{\nu} = \vec{e}_1$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_2$)

$$w = 0 \text{ et } M_{\nu\nu} = M_{11} = -D [(1 - \nu)w_{,11} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D [w_{,11} + \nu w_{,22}] = 0.$$

ici $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = w_{,2} = 0$ toujours vérifié donc pour $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$

on doit donc vérifier : (i) : $w = 0$ et (ii) : $w_{,11} = 0$

Afin de prendre en compte les effets non-linéaires, les supports sont considérés rigides dans leur propre plan et flexibles en dehors du plan.

On doit donc vérifier en plus que : (iii) : $T_1 = N_{11} = 0$ et (iv) : $u_2^0 = 0$.

o Conditions aux limites (appui simple en $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$) :

En $x_2 = 0$; $\vec{\nu} = -\vec{e}_2$ et $\vec{\tau} = \vec{e}_1$ (même raisonnement pour $x_2 = L_2$; $\vec{\nu} = \vec{e}_2$ et $\vec{\tau} = -\vec{e}_1$)

$$w = 0 \text{ et } M_{\nu\nu} = M_{22} = -D[(1-\nu)w_{,22} + \nu(w_{,11} + w_{,22})] = -D[w_{,22} + \nu w_{,11}] = 0.$$

ici $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial x_1} = w_{,1} = 0$ toujours vérifié donc pour $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2$

on doit donc vérifier : (v) : $w = 0$ et (vi) : $w_{,22} = 0$

On doit également vérifier en plus que : (vii) : $T_2 = N_{22} = 0$ et (viii) : $u_1^0 = 0$.

Une solution de (2.17), vérifiant les conditions aux limites, peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} w(x_1, x_2) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} W_{n_1 n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \\ \Phi(x_1, x_2) &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \Phi_{k_1 k_2} \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{L_2}\right) \end{cases} \quad (2.18)$$

où $W_{n_1 n_2}$ et $\Phi_{k_1 k_2}$ sont des constantes inconnues.

On va regarder le cas où l'on ne garde qu'un seul terme dans (2.18) :

$$\begin{cases} w(x_1, x_2) &= W_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) \\ \Phi(x_1, x_2) &= \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right) \end{cases} \quad (2.19)$$

or d'après (2.13) : $\Delta \Delta w = \frac{1}{D} [p_3 + \mathcal{L}(w, \Phi)]$ avec $\mathcal{L}(w, \Phi) = \Phi_{,22} w_{,11} + \Phi_{,11} w_{,22} - 2\Phi_{,12} w_{,12}$

Par souci de simplification, on note $c_i = \cos\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right)$ et $s_i = \sin\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right)$ $i = 1, 2$.

On a alors : $w = W_0 s_1 s_2$ et $\Phi = \Phi_0 s_1 s_2$.

$$\Rightarrow w_{,1} = W_0 \frac{\pi}{L_1} c_1 s_2; w_{,11} = -W_0 \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 s_1 s_2; w_{,12} = W_0 \frac{\pi}{L_1} \frac{\pi}{L_2} c_1 c_2 \text{ et } w_{,22} = -W_0 \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 s_1 s_2$$

2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

Les calculs des dérivées de Φ s'obtiennent par analogie avec les calculs sur w en remplaçant W_0 par Φ_0 .

On trouve alors :

$$W_0 \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 s_1 s_2 = \frac{1}{D} \left[p + 2W_0 \Phi_0 \left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 (s_1^2 s_2^2 - c_1^2 c_2^2) \right] \quad (2.20)$$

de plus d'après (2.16) : $\Delta \Delta \Phi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(w, w)$ avec $\mathcal{L}(w, w) = 2(w_{,11} w_{,22} - (w_{,12})^2)$ soit :

$$\Phi_0 \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 s_1 s_2 = -Eh W_0^2 \left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 (s_1^2 s_2^2 - c_1^2 c_2^2) \quad (2.21)$$

On fait le choix d'utiliser la méthode de Galerkin. On va multiplier (2.20) et (2.21) par w donc par $s_1 s_2$ et on intègre sur l'aire de la plaque.

◇ $\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (2.20) s_1 s_2 dx_1 dx_2$ devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} W_0 \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 s_1^2 s_2^2 dx_1 dx_2 \\ = \frac{1}{D} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left[p s_1 s_2 + 2W_0 \Phi_0 \left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 (s_1^3 s_2^3 - c_1^2 s_1 c_2^2 s_2) \right] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\text{or } \int_0^{L_i} s_i dx_i = \frac{2L_i}{\pi}; \quad \int_0^{L_i} s_i^2 dx_i = \frac{L_i}{2}; \quad \int_0^{L_i} s_i^3 dx_i = \frac{4L_i}{3\pi} \text{ et } \int_0^{L_i} c_i^2 s_i dx_i = \frac{2L_i}{3\pi} \quad i = 1, 2$$

donc :

$$W_0 \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{2} = \frac{1}{D} \left[\frac{2L_1}{\pi} \frac{2L_2}{\pi} p + 2W_0 \Phi_0 \left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \left(\frac{4L_1}{3\pi} \frac{4L_2}{3\pi} - \frac{2L_1}{3\pi} \frac{2L_2}{3\pi} \right) \right]$$

d'où :

$$D \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 W_0 - \frac{32\pi^2}{3L_1^2 L_2^2} W_0 \Phi_0 = \frac{16p}{\pi^2} \quad (2.22)$$

◇ $\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (2.21) s_1 s_2 dx_1 dx_2$ devient :

$$\begin{aligned} \Phi_0 \left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} s_1^2 s_2^2 dx_1 dx_2 \\ = -Eh W_0^2 \left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (s_1^3 s_2^3 - c_1^2 s_1 c_2^2 s_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\left[\left(\frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2} \right)^2 \right]^2 \Phi_0 + \frac{16\pi^2}{3L_1^2 L_2^2} Eh W_0^2 = 0 \quad (2.23)$$

- Cas d'une plaque carrée ($L_1 = L_2 = L$)

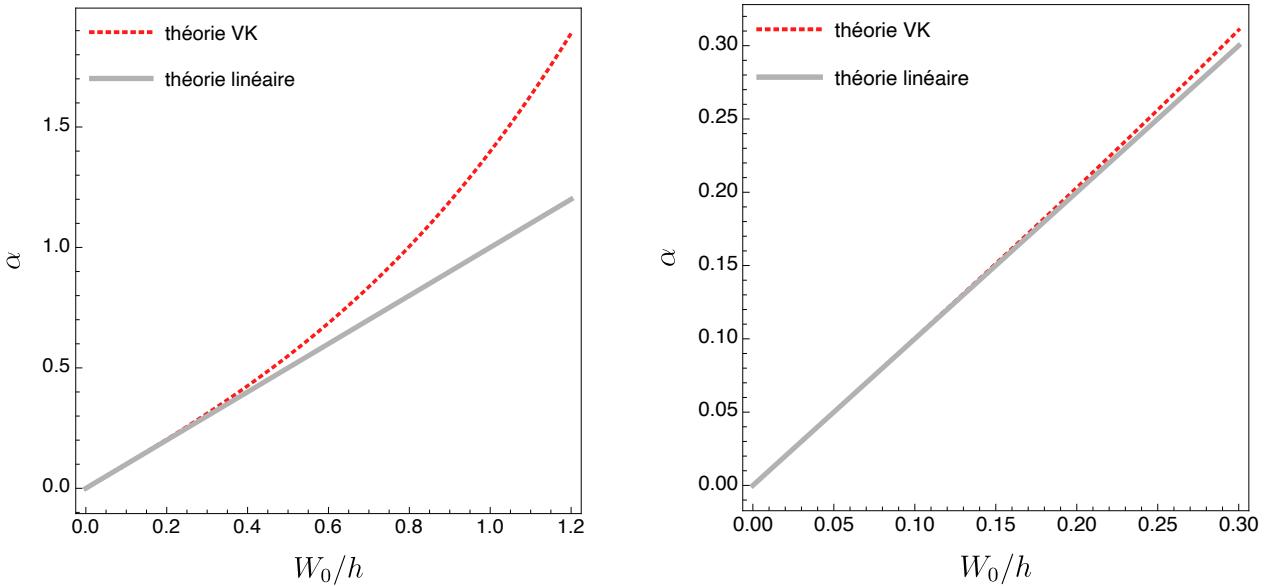
D'après (2.23) : $\Phi_0 = -\frac{4}{3\pi^2} EhW_0^2$ que l'on injecte dans (2.22) pour trouver :

$$W_0 + \frac{32}{9\pi^4} \frac{Eh}{D} W_0^3 = \frac{4pL^4}{\pi^6 D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

soit finalement

$$\frac{W_0}{h} + \frac{128(1-\nu^2)}{3\pi^4} \left(\frac{W_0}{h}\right)^3 = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{48(1-\nu^2)}{\pi^6} \frac{pL^4}{Eh^4} \quad (2.24)$$

On peut tracer α en fonction de $\frac{W_0}{h}$ pour $\nu = 0.3$:



Pour $W_0/h = 0.5$, on constate qu'il y a déjà 9% d'écart entre la théorie linéaire (en gris) et la théorie non-linéaire de Von-Karman (en pointillé rouge).

Pour $W_0/h \geq 0.2$, la relation entre le chargement extérieur et la déflexion n'est plus linéaire. Il faudra alors tenir compte des couplages membrane-flexion en introduisant la théorie non-linéaire.

Remarque : pour obtenir un résultat plus précis, il faudrait retenir plus de termes pour w et Φ dans (2.18).

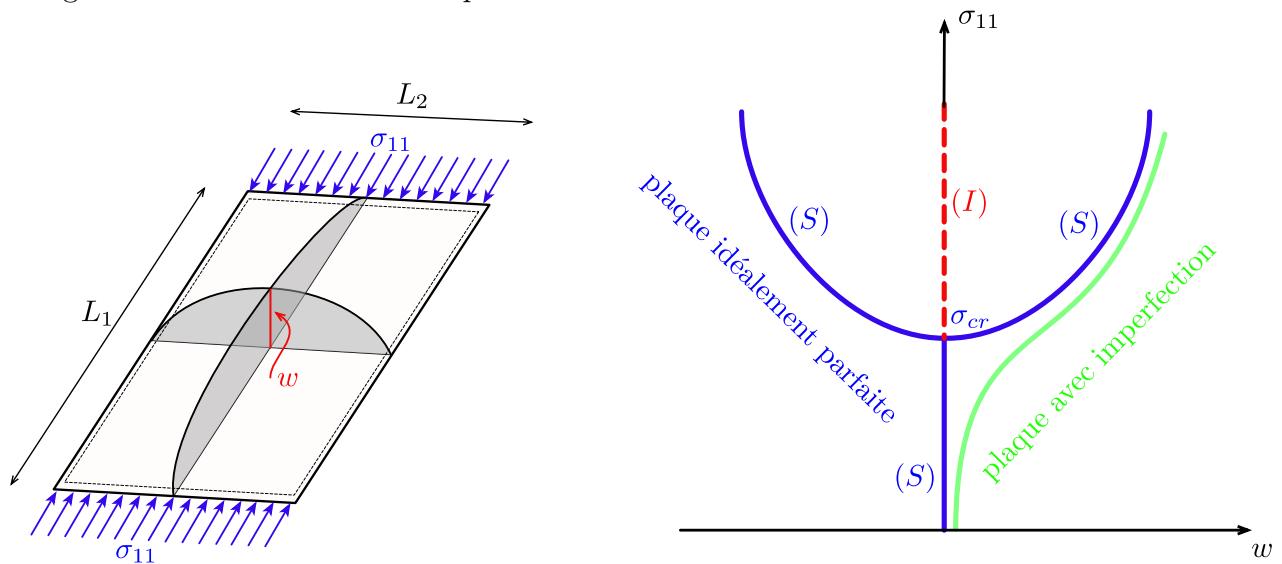
II Etude du flambement de plaques minces rectangulaires

II.1 Introduction

Pour une poutre ou colonne, l'étude du flambement est relativement simple, le flambement se passe uniquement dans un plan. Pour une plaque l'étude du flambement est un peu plus complexe.

On considère une plaque de dimension $L_1 \times L_2$ et d'épaisseur h constante simplement appuyée sur son pourtour, soumise à une compression uniforme suivant l'axe \vec{e}_1 . On obtient alors le

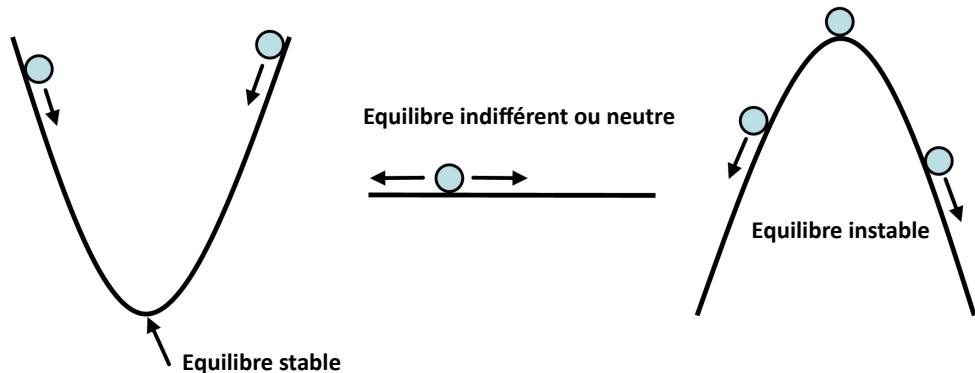
diagramme de bifurcation classique :



(i) pour $\sigma_{11} < \sigma_{cr}$ avec σ_{cr} correspondant à la contrainte critique de flambement, en supprimant le chargement σ_{11} , la plaque reprend son état d'équilibre initial qui est la configuration plane (stable).

(ii) pour $\sigma_{11} = \sigma_{cr}$ la plaque est dans un état d'équilibre indifférent ou neutre

(iii) pour $\sigma_{11} > \sigma_{cr}$ la plaque va alors flamber vers une des branches ayant un état d'équilibre stable



Pour le cas de la plaque avec des imperfections (ce qui est le cas en réalité) la plaque suivra le parcours vert.

Dans un premier temps on s'intéresse à déterminer le chargement critique, donc le chargement à partir duquel la plaque va flamber. On va alors linéariser notre problème afin de déterminer la charge critique de flambement ainsi que son mode de flambement associé. Deux méthodes sont possibles, la première consiste à partir de l'équation d'équilibre (2.9) que l'on va linéariser ; la seconde méthode consiste à passer par les méthodes énergétiques.

A ce stade, les équations linéarisées ne donnent aucune information sur ce qui se passe après le chargement critique. On devra alors s'intéresser dans un second temps au comportement post-critique.

II.2 Théorie linéaire du flambement élastique - charges critiques

II.2.a Equations d'équilibre linéarisées du flambement de plaques rectangulaires

Dans la méthode de l'équilibre, on suppose que la plaque a **légèrement flambé**. Il est d'une importance fondamentale que l'équation différentielle de l'équilibre soit écrite pour cette forme déformée. L'équation d'équilibre est obtenue en considérant la flexion et l'étirement simultanés de la plaque. Lorsque les charges membranaires extérieures sont légèrement supérieures à la charge critique, le déplacement latéral w croît fortement et ce même pour une faible augmentation des charges de bord. La plus petite charge correspondant à cette condition est la charge critique.

On considère un état d'équilibre initial d'une plaque rectangulaire soumise sur sa surface moyenne à des forces linéaires extérieures. Les résultantes membranaires correspondant à cet état initial sont : N_{11}^0 , N_{22}^0 et N_{12}^0 . On va limiter notre étude au cas où ces résultantes membranaires peuvent être exprimées sans difficulté en fonction des forces membranaires extérieures connues.

Pour ce type de chargement extérieur la plaque est supposée légèrement flambé, les équations d'équilibre sont alors écrites pour un état d'équilibre très proche de cette configuration d'équilibre légèrement flambée. Les forces membranaires extérieures sont alors indépendantes des chargements latéraux.

L'équation d'équilibre linéarisée du flambement des plaques est d'après (2.9) :

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} = 0 \quad (\text{ici } p_3 = 0) \quad \text{avec} \quad M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -D\Delta\Delta w$$

On obtient alors $\Delta\Delta w = \frac{1}{D} N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta}$ soit dans le repère cartésien :

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D} (N_{11}^0 w_{,11} + 2N_{12}^0 w_{,12} + N_{22}^0 w_{,22}) \quad (2.25)$$

En général, cette équation a seulement une solution triviale ($w = 0$) qui correspond à la configuration plane. Pour trouver les solutions non triviales on pose :

$N_{11}^0 = -\lambda \bar{N}_{11}^0$, $N_{22}^0 = -\lambda \bar{N}_{22}^0$ et $N_{12}^0 = -\lambda \bar{N}_{12}^0$ avec λ le paramètre de chargement.

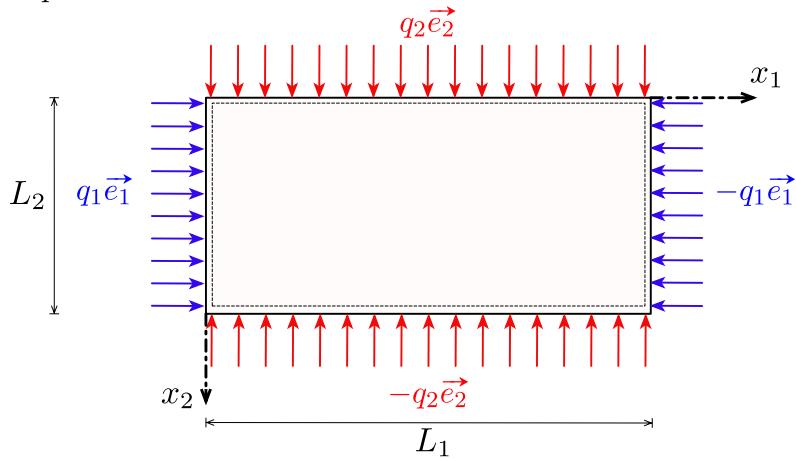
D'après (2.25) on obtient alors l'équation homogène et linéaire :

$$\Delta\Delta w + \frac{\lambda}{D} (\bar{N}_{11}^0 w_{,11} + 2\bar{N}_{12}^0 w_{,12} + \bar{N}_{22}^0 w_{,22}) = 0 \quad (2.26)$$

Les solutions de (2.26) sont des solutions aux valeurs propres. Si w est solution alors un multiple de w est aussi solution. Le chargement critique λ_{cr} est la plus petite valeur de λ .

Exemple :

On considère une plaque simplement appuyée sur son pourtour uniformément comprimée par des forces linéaires dans les deux directions.



On veut alors déterminer les charges critiques.

Pour ce cas particulier : $N_{11}^0 = -q_1$, $N_{22}^0 = -q_2$ et $N_{12}^0 = 0$ donc (2.25) devient :

$$\Delta\Delta w = w_{,1111} + w_{,2222} + 2w_{,1122} = -\frac{1}{D} (q_1 w_{,11} + q_2 w_{,22})$$

On prend $w(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} W_{n_1 n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right)$ qui satisfait les conditions aux limites.

D'après les relations d'orthogonalité, on obtient alors :

$$W_{n_1 n_2} \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]^2 \pi^4 = \frac{1}{D} W_{n_1 n_2} \pi^2 \left[q_1 \left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + q_2 \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]$$

ayant pour solutions :

i) $W_{n_1 n_2} = 0$ solution triviale

ii) la solution non triviale pour

$$q_1 \left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + q_2 \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 = \pi^2 D \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]^2 \quad (2.27)$$

Cas particuliers :

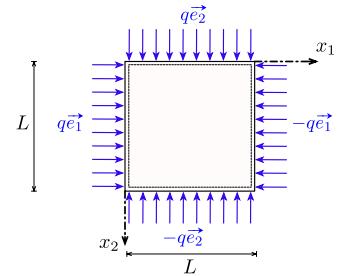
$q_1 = q_2 = q = \text{cste}$

D'après (2.27) : $q = \pi^2 D \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right] = \frac{\pi^2 D}{L_2^2} \left[n_2^2 + n_1^2 \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \right]$.

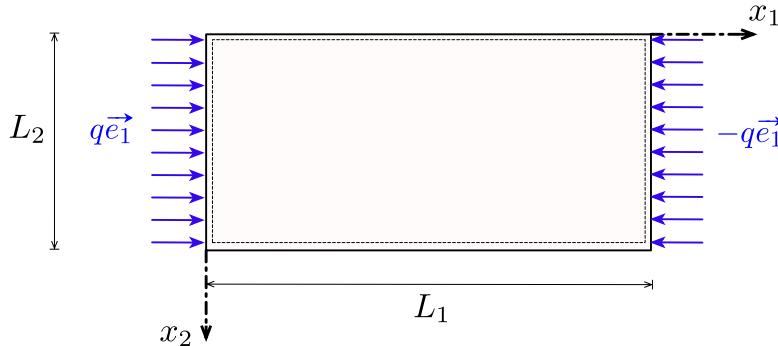
Le chargement q est minimum pour $n_1 = n_2 = 1$ soit $\underline{q_{cr} = \frac{\pi^2 D}{L_2^2} \left[1 + \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \right]}$.

Pour une plaque carrée ($L_2 = L_1 = L$) :

$$\underline{q_{cr}^{carrée} = \frac{2\pi^2 D}{L^2}}$$



$\square q_1 = q = \text{cste}$ et $q_2 = 0$



D'après (2.27) : $q \left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 = \pi^2 D \left[\left(\frac{n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2} \right)^2 \right]^2$ d'où $q = \pi^2 D \left[\frac{n_1}{L_1} + \frac{n_2^2 L_1}{n_1 L_2^2} \right]^2$.

Finalement $q = \frac{\pi^2 D}{L_2^2} K$ avec $K = \left[\frac{n_1 L_2}{L_1} + \frac{n_2^2 L_1}{n_1 L_2} \right]^2$ le paramètre de chargement de flambement.

Le chargement q est minimum pour $n_2 = 1$ soit $q^* = \frac{\pi^2 D}{L_2^2} K^*$ avec $K^* = \left[\frac{n_1 L_2}{L_1} + \frac{L_1}{n_1 L_2} \right]^2$.

Pour n_1 donné, K^* dépend du rapport $\frac{L_1}{L_2}$ et q^* est minimum pour :

$$\frac{dK^*}{dn_1} = 2 \left(\frac{n_1 L_2}{L_1} + \frac{L_1}{n_1 L_2} \right) \left(\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{n_1^2 L_2} \right) = 0.$$

Le premier terme étant positif, on doit vérifier $\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_1}{n_1^2 L_2} = 0 \Rightarrow n_1 = \frac{L_1}{L_2}$ soit $K_{min}^* = 4$.

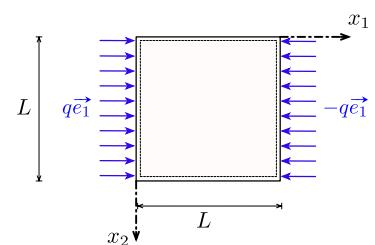
On obtient alors la charge critique $q_{cr} = q_{min}^* = \frac{4\pi^2 D}{L_2^2}$.

D'après (1.13) on sait que la résultante membranaire $N_{11} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11} dx_3$.

La contrainte critique est alors $\sigma_{11}^{cr} = \frac{N_{11}^{cr}}{h} = \frac{q_{cr}}{h} = \frac{4\pi^2 D}{L_2^2 h} \Rightarrow \sigma_{11}^{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{L_2} \right)^2$.

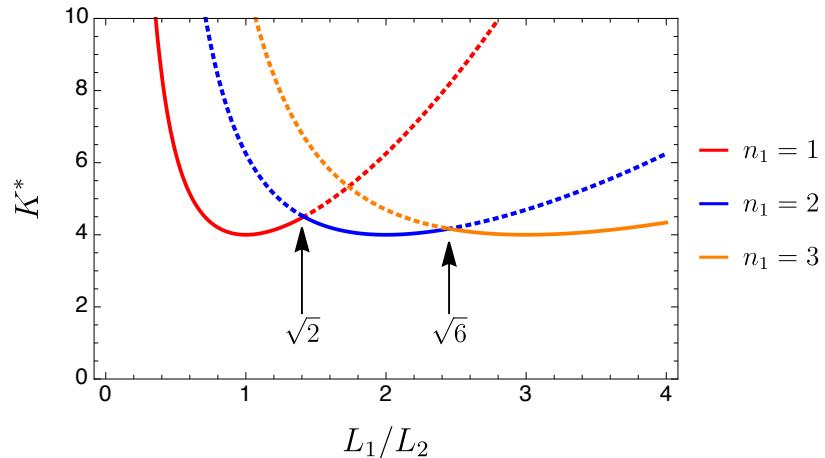
Pour une plaque carrée ($L_2 = L_1 = L$) :

$$\underline{q_{cr}^{carrée} = \frac{4\pi^2 D}{L^2}}$$

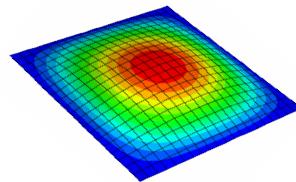


2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

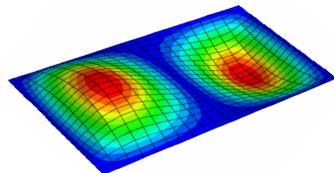
On trace $K^* = \left[\frac{n_1 L_2}{L_1} + \frac{L_1}{n_1 L_2} \right]^2$:



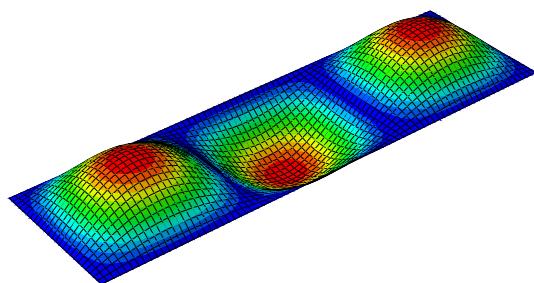
- Si $\frac{L_1}{L_2} = 1$ alors $n_1 = 1$ soit $K^* = 4$ donc $q_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{L_2^2}$ et le mode de flambement associé :



- Si $\frac{L_1}{L_2} = 2$ alors $n_1 = 2$ soit $K^* = 4$ donc $q_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{L_2^2}$ et le mode de flambement associé :

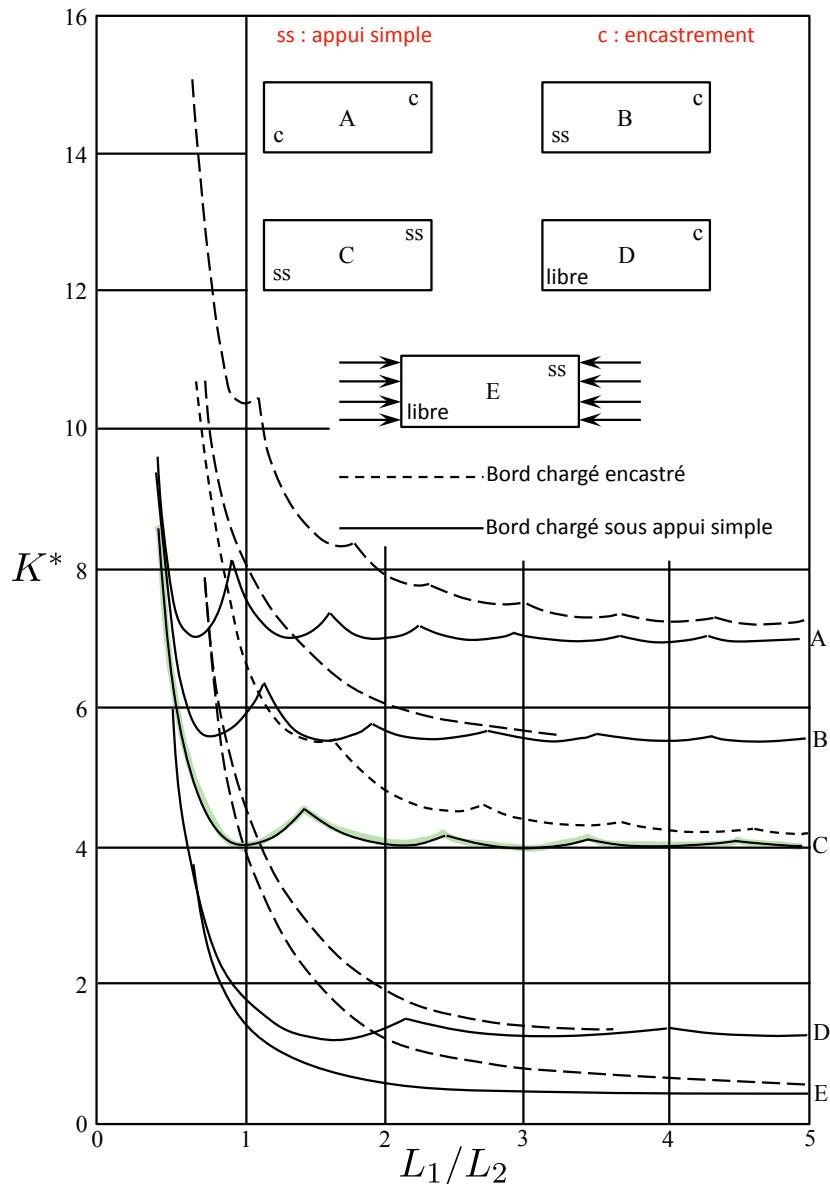


- Si $\frac{L_1}{L_2} = 3.2$ alors $n_1 = 3$ soit $K^* = 4.0167$ donc $q_{cr} = \frac{4.0167\pi^2 D}{L_2^2}$ et le mode de flambement associé :



- Si $\frac{L_1}{L_2} \ll 1$ alors $K^* = \left[\frac{n_1 L_2}{L_1} + \frac{L_1}{n_1 L_2} \right]^2 \simeq \frac{n_1^2 L_2^2}{L_1^2}$ donc $q^* \simeq \frac{\pi^2 D}{L_2^2} \frac{n_1^2 L_2^2}{L_1^2}$
alors $q_{cr} \stackrel{n_1=1}{\simeq} \frac{\pi^2 D}{L_1^2}$

On peut étendre le diagramme $K^* = f(L_1/L_2)$ à d'autres types de conditions aux limites (le cas étudié précédemment est souligné en vert) :



II.2.b Méthodes énergétiques

Pour des structures avec des conditions aux limites ou des chargements plus complexes, la détermination de la charge critique devient alors quasi-impossible. Une solution est alors d'obtenir des expressions analytiques approchées de la critique en ayant recours aux méthodes énergétiques.

On va regarder le signe de l'énergie potentielle Π pour un état proche de l'état d'équilibre. L'équilibre est :

- stable si Π est minimale
- instable si Π est maximale
- indéterminé ou neutre si Π n'est ni minimale ni maximale, la plaque change sa forme plane d'origine en une forme courbe sans gagner ou perdre d'énergie.

Le plus souvent, on formule le problème de flambement en utilisant le principe de variation.

2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

C'est-à-dire que la plaque est considérée comme étant dans un état d'équilibre auquel une perturbation infinitésimale est appliquée.

$\Delta\Pi = \Pi - \Pi^0$ avec Π^0 et Π respectivement les énergies potentielles pour la configuration plane initiale et la configuration proche de l'état d'équilibre. On peut écrire :

$$\Delta\Pi = \Delta U_0 + U_f + \Delta V_e$$

U_0 : énergie de déformation de la surface moyenne **en flambage**

U_f : énergie de déformation de la flexion ou torsion

V_e : potentiel des forces membranaires extérieures appliquées à la plaque

La bifurcation d'une configuration initiale d'équilibre intervient pour $\Delta\Pi = \Pi - \Pi^0 = 0$.

- Calcul pour les plaques rectangulaires (résultat valable quelque soit la forme de la plaque)

$$\Delta U_0 = \iint_{\mathcal{D}} [N_{11}^0 E_{11}^0 + N_{22}^0 E_{22}^0 + N_{12}^0 2E_{12}^0] dx_1 dx_2$$

Remarque : on ne met le facteur 1/2 car $N_{\alpha\beta}^0$ agissent déjà quand $E_{\alpha\beta}^0 = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}$ issues du flambage apparaissent.

$$\text{donc } \Delta U_0 = \iint_{\mathcal{D}} [N_{11}^0 \epsilon_{11}^0 + N_{22}^0 \epsilon_{22}^0 + N_{12}^0 2\epsilon_{12}^0] dx_1 dx_2 \\ + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} [N_{11}^0 (w_{,1})^2 + N_{22}^0 (w_{,2})^2 + 2N_{12}^0 w_{,1}w_{,2}] dx_1 dx_2$$

On sait qu'ici : $\iint_{\mathcal{D}} [N_{11}^0 \epsilon_{11}^0 + N_{22}^0 \epsilon_{22}^0 + N_{12}^0 2\epsilon_{12}^0] dx_1 dx_2 = W_e = -\Delta V_e$ par conséquent :

$$\boxed{\Delta\Pi = \Delta U_0^{NL} + U_f} \quad (2.28)$$

avec $\boxed{\Delta U_0^{NL} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} [N_{11}^0 (w_{,1})^2 + N_{22}^0 (w_{,2})^2 + 2N_{12}^0 w_{,1}w_{,2}] dx_1 dx_2}$

et d'après (1.65) $\boxed{U_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} D [(Tr \mathbb{K})^2 - 2(1-\nu) \det \mathbb{K}] dx_1 dx_2}$

où $Tr \mathbb{K} = -w_{,11} - w_{,22} = -\Delta w$ et $\det \mathbb{K} = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2$

On suppose que les déplacements de la plaque dans le plan sont dus à la petite flexion créée par le flambage et non au raccourcissement dans le plan. La raison de cette hypothèse est claire si l'on considère que la configuration de référence est la condition d'équilibre stable de la plaque immédiatement avant le flambage. Ainsi, jusqu'à ce point, l'énergie de déformation due à la compression de la surface centrale est égale au travail effectué par les forces externes dans le plan.

Pour une solution exacte w , $\Delta\Pi = 0$ nous donne directement la charge critique.

Pour une solution approchée donnée par exemple par la méthode de Rayleigh-Ritz de la forme :

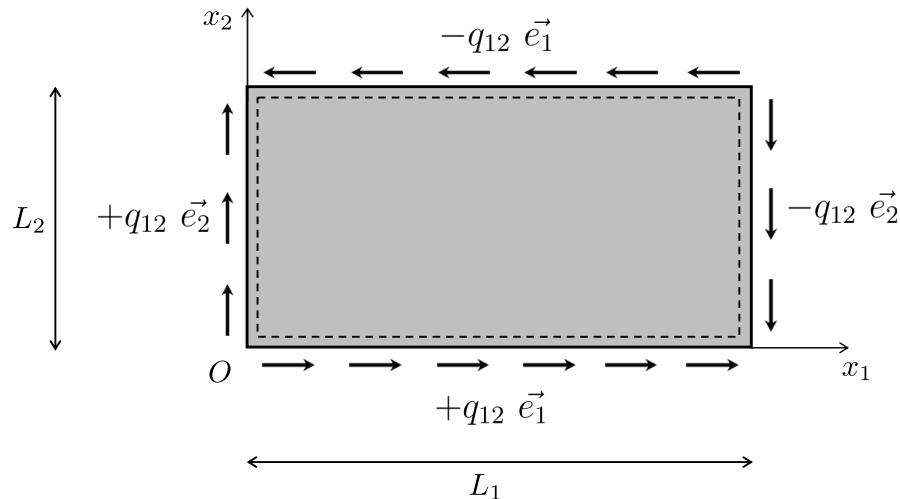
$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N C_i f_i(x_1, x_2)$$

alors $\Delta\Pi = 0$ nous donnera une charge critique supérieure à la vraie valeur. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta\Pi = 0$ est que :

$$\frac{\partial\Delta\Pi}{\partial C_1} = 0, \dots, \frac{\partial\Delta\Pi}{\partial C_N} = 0$$

Exemple :

On considère une plaque simplement appuyée sur son pourtour soumise à des forces linéiques de cisaillement q_{12} .



Le déplacement vertical $w(x_1, x_2)$ peut être approché en utilisant la méthode de Ritz par la forme :

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 C_i f_i(x_1, x_2) \quad \text{avec} \quad f_i(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{i\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{i\pi x_2}{L_2}\right).$$

satisfaisant les conditions aux limites cinématiques.

Calculs de $\Delta\Pi$ (obtenus avec Mathematica) de la structure en fonction des inconnues C_1 , C_2 et q_{12} :

2. Théorie non-linéaire des plaques - Flambement

```
w = C1 * Sin[Pi / L1 * x1] * Sin[Pi / L2 * x2] + C2 * Sin[2 * Pi / L1 * x1] * Sin[2 * Pi / L2 * x2];
K = -Grad[Grad[w, {x1, x2}], {x1, x2}] // Simplify;
I1det = Integrate[Det[K], {x1, 0, L1}, {x2, 0, L2}] // Simplify;
I1tr = Integrate[Tr[K]^2, {x1, 0, L1}, {x2, 0, L2}] // Simplify;
Uelas = D/2 (I1tr - 2 (1 - v) I1det) // Simplify

$$\frac{(C_1^2 + 16 C_2^2) D (L_1^2 + L_2^2)^2 \pi^4}{8 L_1^3 L_2^3}$$


N110 = 0;
N220 = 0;
N120 = -q12;
EN0 = 1/2 * Integrate[N110 * (D[w, x1])^2 + N220 * (D[w, x2])^2 + 2 * N120 * (D[w, x1]) * (D[w, x2]), {x1, 0, L1}, {x2, 0, L2}] // Simplify

$$\frac{32 C_1 C_2 q_{12}}{9}$$


ΔΠ = Uelas + EN0

$$\frac{(C_1^2 + 16 C_2^2) D (L_1^2 + L_2^2)^2 \pi^4}{8 L_1^3 L_2^3} + \frac{32 C_1 C_2 q_{12}}{9}$$

```

$$\text{donc } \Delta\Pi = \frac{\pi^4}{8} D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 (C_1^2 + 16 C_2^2) + \frac{32}{9} q_{12} C_1 C_2.$$

□ En minimisant l'incrément de l'énergie potentielle totale sous flambement $\Delta\Pi$ on peut en déduire la charge critique de flambement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta\Pi}{\partial C_1} = \frac{\pi^4}{4} D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 C_1 + \frac{32}{9} q_{12} C_2 = 0 \\ \frac{\partial \Delta\Pi}{\partial C_2} = \frac{32}{9} q_{12} C_1 + 4\pi^4 D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 C_2 = 0 \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle : $\mathbb{A} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^4}{4} D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 & \frac{32}{9} q_{12} \\ \frac{32}{9} q_{12} & 4\pi^4 D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

on trouve une solution non triviale si $\det \mathbb{A} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{4} (D L_1 L_2)^2 4\pi^4 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^4 - \left(\frac{32}{9} q_{12} \right)^2 = 0 \text{ d'où } q_{12}^{cr} = \pm \frac{9}{32} \pi^4 D L_1 L_2 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2.$$

II.3 Comportement post-critique

Les charges critiques déterminées en II.2.b sont des chargements pour lesquels le flambement commence. Cette notion est essentielle pour les designers, les architectes, ...

Pour les poutres, le chargement critique correspond généralement à la charge ultime donc la ruine de la structure. Ce n'est pas toujours vrai pour les plaques. En effet, une plaque qui atteint sa charge critique de flambement a fait flamber les fibres comprimées dans la

direction \vec{e}_1 tout en ayant allonger les fibres dans la direction \vec{e}_2 .

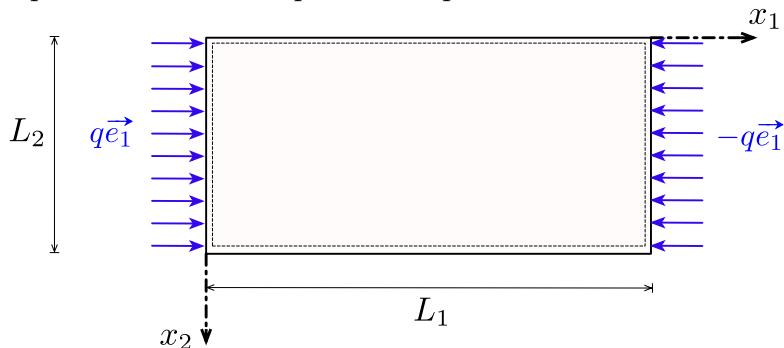
Les fibres tendues dans la direction \vec{e}_2 sont le siège de contraintes membranaires. Ces contraintes membranaires vont donc "stabiliser" la plaque après flambement. La plaque pourra alors supporter une charge supérieure à la charge critique de flambement avant d'atteindre sa ruine propre. Cela peut donner lieu à un gain considérable de poids pour les designers (l'un des exemples sont les structures aérospatiales). De telles structures peuvent flambées au centre et l'essentiel du chargement est encaissé par les supports qui eux restent droits.

Le comportement post-critique, ne peut être bien évidemment pas représenté par la théorie linéaire du flambement élastique qui ne rend compte que du flambement par bifurcation d'équilibre d'une plaque plane. L'analyse du comportement post-flambement sera abordé par l'intermédiaire des équations non-linéaires des plaques de Von-Karman (2.17) :

$$\begin{cases} \Delta\Delta w = \frac{1}{D} [p_3 + \mathcal{L}(w, \Phi)] \\ \Delta\Delta\Phi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(w, w) \end{cases}$$

avec $\mathcal{L}(w, \Phi) = \Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}$.

On considère une plaque rectangulaire $L_1 \times L_2$ simplement appuyée sur son pourtour soumise à une densité linéique de force de compression $\pm q\vec{e}_1$.



On prend comme solution approchée pour la surface moyenne flambée :

$$w(x_1, x_2) = W_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right).$$

Les équations d'équilibre pour le comportement post-critique des plaques minces d'épaisseur h constante sont donc les équations non-linéaires de Von-Karman (ici $p_3 = 0$) :

$$\begin{cases} \Delta\Delta w = \frac{1}{D} [\Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}] \\ \Delta\Delta\Phi = Eh [(w_{,12})^2 - w_{,11}w_{,22}] \end{cases} \quad (2.29)$$

Par souci de simplification, on note $c_i = \cos\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right)$ et $s_i = \sin\left(\frac{\pi x_i}{L_i}\right)$ $i = 1, 2$.

$$w_{,1} = W_0 \frac{\pi}{L_1} c_1 s_2; \quad w_{,11} = -W_0 \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 s_1 s_2; \quad w_{,12} = W_0 \frac{\pi}{L_1} \frac{\pi}{L_2} c_1 c_2 \text{ et } w_{,22} = -W_0 \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 s_1 s_2$$

On trouve alors :

$$\Delta\Delta\Phi = Eh \frac{\pi^4}{L_1^2 L_2^2} W_0^2 (c_1^2 c_2^2 - s_1^2 s_2^2)$$

$$\text{Or } c_1^2 c_2^2 = (1 - s_1^2)(1 - s_2^2) = 1 - (s_1^2 + s_2^2) + s_1^2 s_2^2$$

$$\Rightarrow c_1^2 c_2^2 - s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{2}(1 - 2s_1^2) + \frac{1}{2}(1 - 2s_2^2) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right) \right] \text{ donc :}$$

$$\boxed{\Delta\Delta\Phi = \frac{Eh}{2} \frac{\pi^4}{L_1^2 L_2^2} W_0^2 \left[\cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right) \right]} \quad (2.30)$$

- Recherche d'une solution particulière de (2.30) de la forme :

$$\Phi_p(x_1, x_2) = \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right)$$

$$\Delta\Delta\Phi_p = \Phi_{p,1111} + \Phi_{p,2222} + 2\Phi_{p,1122} = \left(\frac{2\pi}{L_1}\right)^4 \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \left(\frac{2\pi}{L_2}\right)^4 \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right)$$

En identifiant avec (2.30) on obtient alors que $\alpha_1 = \frac{Eh}{32} \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 W_0^2$ et $\alpha_2 = \frac{Eh}{32} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 W_0^2$ soit :

$$\boxed{\Phi_p(x_1, x_2) = \frac{Eh}{32} W_0^2 \left[\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right) \right]} \quad (2.31)$$

- Recherche de la solution homogène de (2.30) qui vérifie $\Delta\Delta\Phi_h = 0$

$\Rightarrow \Phi_h(x_1, x_2)$ est un polynôme de degré 3 en x_1, x_2 .

D'après (2.11) et les conditions de bord on sait que :

$$\begin{cases} \Phi_{h,22} = N_{11}^h = -q \\ \Phi_{h,11} = N_{22}^h = 0 \\ \Phi_{h,12} = -N_{12}^h = 0 \end{cases}$$

On peut prendre comme solution homogène $\Phi_h(x_2) = -\frac{q}{2}x_2^2$ donc finalement :

$$\boxed{\Phi(x_1, x_2) = \frac{Eh}{32} W_0^2 \left[\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) + \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right) \right] - \frac{q}{2}x_2^2} \quad (2.32)$$

D'après (1.13) on sait que la résultante membranaire $N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3$ donc les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} = \frac{\Phi_{,22}}{h} = -\frac{\pi^2 E}{8L_1^2} W_0^2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{L_2}\right) - \frac{q}{h} \\ \sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} = \frac{\Phi_{,11}}{h} = -\frac{\pi^2 E}{8L_2^2} W_0^2 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L_1}\right) \\ \sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h} = -\frac{\Phi_{,12}}{h} = 0 \end{cases}$$

On doit résoudre la première équation de (2.29) : $\Delta\Delta w = \frac{1}{D} [\Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}]$.
On utilise la méthode de Galerkin :

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\{ \Delta\Delta w - \frac{1}{D} [\Phi_{,22}w_{,11} + \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12}] \right\} .w \, dx_1 dx_2$$

avec $w(x_1, x_2) = W_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L_2}\right)$ et $\Phi(x_1, x_2)$ trouvée en (2.32).

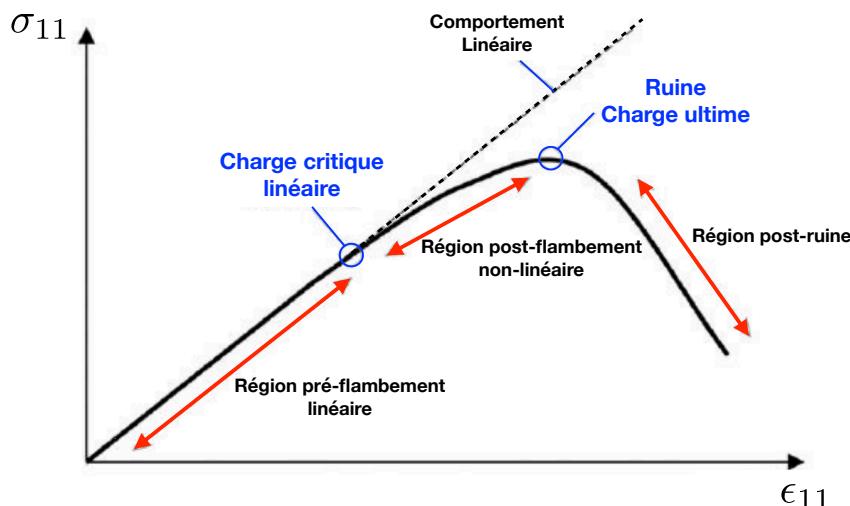
Après quelques calculs on trouve :

$$\frac{\pi^4 D L_1 L_2}{4} W_0 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^2 - q W_0 \frac{\pi^2 L_1 L_2}{4 L_1^2} + \frac{\pi^4 E h}{64} W_0^3 \left(\frac{1}{L_1^4} + \frac{1}{L_2^4} \right) L_1 L_2 = 0$$

d'où pour $W_0 \neq 0$:

$$q_{cr}^{NL} = -N_{11} = -h\sigma_{11} = \underbrace{\frac{\pi^2 D}{L_2^2} \left(\frac{L_2}{L_1} + \frac{L_1}{L_2} \right)^2}_{q_{cr}^L} + \frac{\pi^2 E h}{16 L_2^2} W_0^2 \left[\left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \right]$$

q_{cr}^L représente la charge critique obtenue pour le flambement linéaire.



La plaque peut donc supporter un chargement en compression plus grand que la charge critique du flambement linéaire.

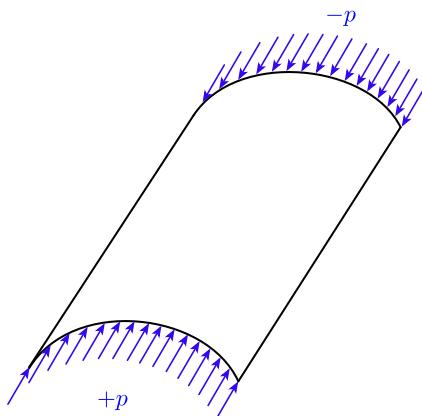
III Etude du flambement de coques minces cylindriques

III.1 Introduction

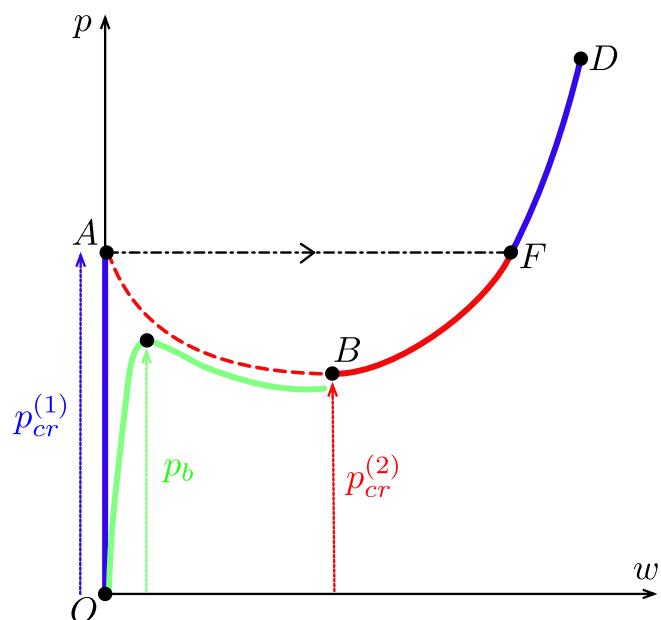
L'étude du flambement d'une plaque mince non raidie conduit habituellement à une faible valeur de la contrainte critique. Pour le cas des coques (plaques avec courbure permanente) il y a une nette amélioration de la stabilité (propriété fondamentale pour la construction de tôles minces à galbes prononcés dans l'industrie automobile ou en construction aéronautique). Il faut toutefois faire attention à ne pas employer d'épaisseur trop faible ou les renforcer avec des raidisseurs. Le flambement des coques est presque toujours désastreux contrairement aux poutres ou plaques. L'étude du flambement bien que délicat de par sa complexité mathématique est alors vital.

Contrairement au cas des plaques ou des poutres où il existe deux configurations d'équilibre stables possibles au delà du point de bifurcation (pour $\sigma_{11} = \sigma_{cr} = p_{cr}$), les coques beaucoup plus sensibles aux imperfections donnent des résultats différents pour l'étude du flambement.

On considère une coque mince ayant une configuration initiale supposée parfaite mise en compression.



Le diagramme de bifurcation pour cette coque mince est alors :



Pour obtenir une transition entre la configuration initiale (OA) et la nouvelle configuration (BD) toutes les deux stables, comme la partie (AB) est instable, après avoir suivi le chemin (OA) au voisinage du point de bifurcation A on "saute" au point F sur la branche stable puis on suit le chemin (FD). Entre les points A et F on utilise le terme de claquage (snap-through en anglais).

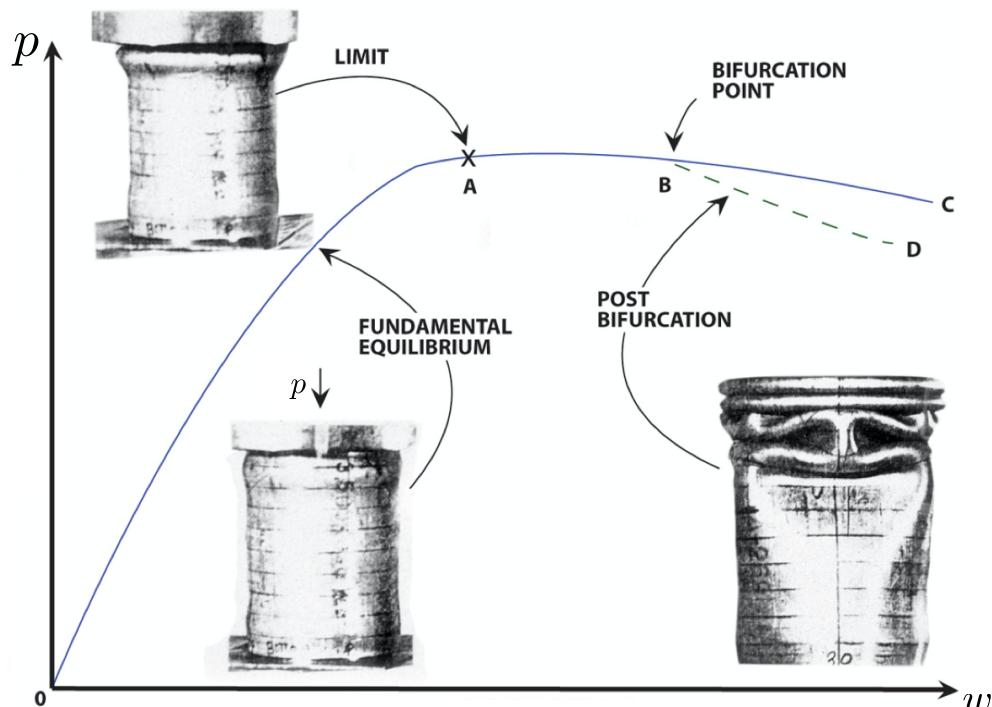
Dans le cas "réel" on a des imperfections, le chemin suivi par la coque sera alors le parcours vert. Pour obtenir une estimation de la charge critique p_b on peut l'encadrer par :

$$p_{cr}^{(1)} < p_b < p_{cr}^{(2)}$$

$p_{cr}^{(1)}$ est calculé avec la théorie linéarisée des équations des coques

$p_{cr}^{(2)}$ nécessite un calcul plus complexe en utilisant la théorie non-linéaire des coques (valeur numérique).

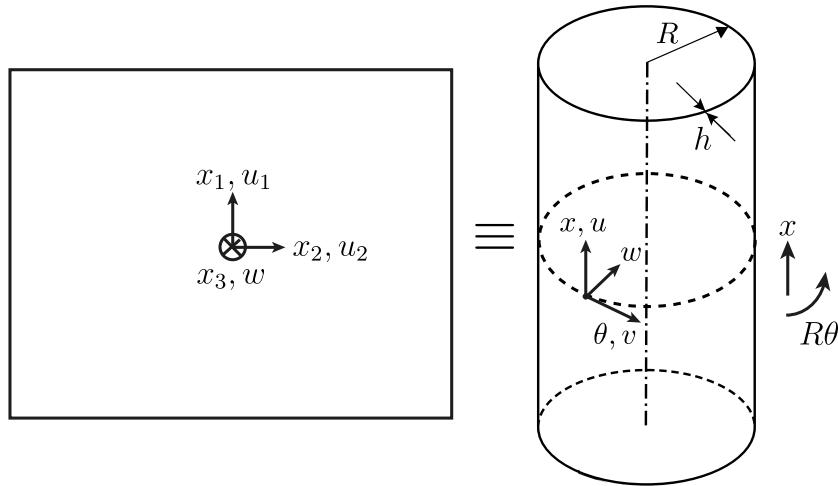
On peut donner comme exemple le diagramme de bifurcation d'une coque cylindrique assez épaisse soumise à une compression.



III.2 Equations d'équilibre linéarisées du flambement de coques cylindriques

III.2.a Passage plaque rectangulaire à coque cylindrique

La première étape va constituer à établir les équations non linéaires pour les coques cylindriques minces. Sans avoir à refaire toute la théorie on fait un changement de variable adéquat pour passer de la plaque rectangulaire à la coque cylindrique. On pourra alors calculer les termes des déformations et des courbures que l'on remplacera dans les équations obtenues pour les plaques rectangulaires.



En comparant la plaque rectangulaire (x_1, x_2) à gauche et un segment de la coque cylindrique ($x, R\theta$) à droite on peut suggérer le changement de variables suivant :

$$x_1 \rightsquigarrow x \Rightarrow dx_1 \rightsquigarrow dx$$

$$x_2 \rightsquigarrow R\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} \rightsquigarrow \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$u_1^0 \rightsquigarrow u$$

$$u_2^0 \rightsquigarrow u_\theta \equiv v$$

$$u_3 \rightsquigarrow u_r \equiv w$$

Pour les plaques modérément grandes, on utilise le tenseur des déformations de Green-Lagrange $E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^0 + x_3 K_{\alpha\beta}$ avec d'après (1.51) et (2.2) :

$$E_{\alpha\beta}^0 = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} \quad (2.33)$$

$$K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (\text{hypothèse Love-Kirchhoff}) \quad (2.34)$$

On peut en déduire alors les termes $E_{xx}^0, E_{\theta\theta}^0, E_{x\theta}^0$ et $K_{xx}, K_{\theta\theta}, K_{x\theta}$ dans les coordonnées cylindriques en effectuant le changement de variable précédent :

$$\bullet E_{11}^0 = \epsilon_{11}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \rightsquigarrow E_{xx}^0 = \epsilon_{xx}^0 + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 = u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2$$

$$\bullet E_{22}^0 = \epsilon_{22}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \rightsquigarrow E_{\theta\theta}^0 = \epsilon_{\theta\theta}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{,\theta}}{R} \right)^2$$

Dans les coordonnées cylindriques $\epsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right)$ or ici $r = R$, $u_\theta \equiv v$ et $u_r \equiv w$ donc :

$$\Rightarrow E_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{,\theta}}{R} \right)^2$$

Remarque : le terme en bleu est un "nouveau" terme linéaire qu'il faudra rajouter dans les équations

- $E_{12}^0 = \epsilon_{12}^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \rightsquigarrow E_{x\theta}^0 = \epsilon_{x\theta}^0 + \frac{1}{2} w_{,x} \frac{w_{,\theta}}{R}$

Comme $\epsilon_{12}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \right) \rightsquigarrow \epsilon_{x\theta}^0 = \frac{1}{2} \left(v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} \right)$ donc :

$$\implies E_{x\theta}^0 = \frac{1}{2} \left(v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} \right) + \frac{1}{2} w_{,x} \frac{w_{,\theta}}{R}$$

- Par le même procédé on obtient : $K_{xx} = -w_{,xx}$; $K_{\theta\theta} = -\frac{w_{,\theta\theta}}{R^2}$ et $K_{x\theta} = -\frac{w_{,x\theta}}{R}$

Remarque : On aurait pu obtenir "aisément" toutes ces expressions via des calculs tensoriels en faisant le passage de la base cartésienne à la base cylindrique.

III.2.b Equations d'équilibre non-linéaires

On utilise le principe des travaux virtuels, pour cela on reprend les résultats obtenus en (2.3) :

$$-\delta W_i = \iint_{\mathcal{D}} [N_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^0 + M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta}] dA + \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} N_{\alpha\beta} [\delta w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} \delta w_{,\beta}] dA$$

En s'inspirant de ce qui a été fait pour les plaques rectangulaires, on peut remarquer que le seul terme réellement nouveau sera le terme $\iint_{\mathcal{D}} N_{\theta\theta} \frac{\delta w}{R} dA$.

On part des équations non-linéaires des plaques minces rectangulaires (2.5) :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha} + p_3 &= 0 \end{aligned}$$

Pour $p_\alpha = 0$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0 \\ N_{12,1} + N_{22,2} &= 0 \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + N_{11} w_{,11} + 2N_{12} w_{,12} + N_{22} w_{,22} + p_3 &= 0 \end{aligned}$$

cette dernière peut s'écrire :

$$-D\Delta\Delta w + N_{11} w_{,11} + 2N_{12} w_{,12} + N_{22} w_{,22} + p_3 = 0 \text{ avec } \Delta\Delta w = \nabla^4 w = w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222}.$$

En faisant un minimum de calculs et en utilisant le changement de variables précédent, on peut alors obtenir les équations non linéaires pour les coques cylindriques minces :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta\theta,\theta} &= 0 \\ D\Delta\Delta w + \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \left(N_{xx} w_{,xx} + 2N_{x\theta} \frac{w_{,x\theta}}{R} + N_{\theta\theta} \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \right) &= p_3 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\text{avec } \Delta\Delta w = \nabla^4 w = w_{xxxx} + \frac{2}{R^2} w_{xx\theta\theta} + \frac{w_{\theta\theta\theta\theta}}{R^4}$$

où les termes non linéaires sont entre parenthèses dans l'équation (2.35).

Ces équations sont connues comme les **équations de coques Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV)** et sont utilisées dans la littérature pour l'analyse de coques cylindriques.

III.2.c Equations d'équilibre linéarisées

Comme pour les plaques, on se base sur le fait qu'à la charge critique, l'état déformé proche de l'état initial est une configuration d'équilibre préflambée. L'apparition d'une possible bifurcation dans la solution correspond à la charge critique.

Pour les **coques peu profondes** alors $w = w_0 + w_1$ (idem pour u et v) avec w_0 correspondant au déplacement avant flambement et w_1 étant un incrément infinitésimal ; w correspond alors à la position déformée pour laquelle il y a flambement.

En remplaçant $w = w_0 + w_1$ (idem pour u et v) dans (2.35), on obtient alors des équations non-linéaires modifiées qui seront simplifiées en utilisant les équations de la théorie linéaire pour la position d'équilibre initiale w_0 .

On suppose que la théorie linéaire des coques minces est applicable à l'état avant flambement et que tous les termes contenant les rotations avant flambement sont négligés.

Solution avant flambement :

On est dans le cadre d'une théorie linéaire donc tous les termes non-linéaires de (2.35) sont supprimés, on obtient alors :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta\theta,\theta} &= 0 \\ D\Delta\Delta w + \frac{N_{\theta\theta}}{R} &= p_3 \end{aligned} \tag{2.36}$$

avec les lois de comportement :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= C [\epsilon_{xx}^0 + \nu \epsilon_{\theta\theta}^0] = C \left[u_{,x} + \nu \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) \right] \\ N_{\theta\theta} &= C [\epsilon_{\theta\theta}^0 + \nu \epsilon_{xx}^0] = C \left[\frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \nu u_{,x} \right] \quad \text{où } C = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \\ N_{x\theta} &= C(1 - \nu) \epsilon_{x\theta}^0 = C(1 - \nu) \frac{1}{2} \left(v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} \right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Les solutions avant flambement qui satisfont (2.36) sont notées $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0$.

□ Obtention des équations de flambement linéarisées pour les coques minces cylindriques :

On suppose que l'état des forces membranaires ne change pas du point de vue du flambement pour $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0$. Les incrément comportent des termes du deuxième ordre qui ne sont pas gardés lors de la linéarisation. On introduit ces nouvelles configurations dans les équations d'équilibre et on élimine les termes correspondant à la configuration d'équilibre avant flambement (termes en u_0 , v_0 et w_0). Finalement, en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient alors les équations de flambement linéarisées pour les coques cylindriques minces :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + \frac{1}{R}N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R}N_{\theta\theta,\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

et

$$D\nabla^4 w + \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \left(N_{xx}^0 w_{,xx} + 2N_{x\theta}^0 \frac{w_{,x\theta}}{R} + N_{\theta\theta}^0 \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \right) = p_3 \quad (2.39)$$

Après quelques manipulations judicieuses des équations (2.38) et des lois de comportements (2.36), Donnell en 1933 montra que :

$$\frac{\nabla^4 N_{\theta\theta}}{R} = \frac{1-\nu^2}{R^2} C w_{,xxxx} \quad (2.40)$$

On obtient alors un découplage entre les déplacements membranaires (u, v) et le déplacement latéral $w(x, \theta)$:

$$D\nabla^8 w + \frac{(1-\nu^2)}{R^2} C w_{,xxxx} - \nabla^4 \left(N_{xx}^0 w_{,xx} + 2N_{x\theta}^0 \frac{w_{,x\theta}}{R} + N_{\theta\theta}^0 \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \right) = 0 \quad (2.41)$$

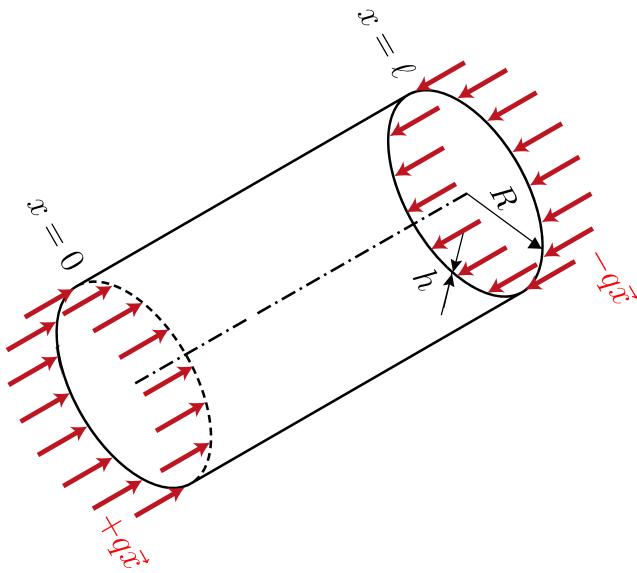
Cette équation est appelée équation découpée de stabilité de Donnell. On supposera que la pression p_3 est constante donc ici $\nabla^4 p_3 = 0$.

Remarque :

Le déplacement w de l'équation (2.41) est en fait l'incrément infinitésimal w_1 . L'indice 1 n'a pas été rajouté pour ne pas trop alourdir les notations. On doit garder en tête que le déplacement latéral total sera la somme de la solution de l'équation (2.41) et du déplacement avant flambement w_0 .

III.3 Flambement sous compression axiale

On considère une coque cylindrique mince d'épaisseur h , de longueur ℓ et rayon R , sous appuis simples aux deux extrémités $x = 0$ et $x = \ell$ soumise à une compression dans la direction \vec{x} .



Ici $N_{xx}^0 = -q = \text{cste}$ et $N_{x\theta}^0 = N_{\theta\theta}^0 = 0$ donc (2.41) devient :

$$D\nabla^8 w + \frac{(1-\nu^2)}{R^2} C w_{xxxx} + q \nabla^4 (w_{,xx}) = 0 \quad (2.42)$$

avec la force linéique $q = \frac{P}{2\pi R}$.

Afin de satisfaire les conditions d'appuis simples en $x = 0$ et $x = \ell$ on doit vérifier que :

$$w(x = 0, \theta) = w(x = \ell, \theta) = w_{,xx}(x = 0, \theta) = w_{,xx}(x = \ell, \theta) = 0$$

III.3.a Modes de flambement axisymétriques

On va faire l'hypothèse qu'après flambement la surface déformée du cylindre est **axisymétrique**. Pour le cas axisymétrique $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ et $v = 0$ on peut donc prendre le déplacement latéral $w(x)$ qui satisfait les conditions aux limites sous la forme :

$$w(x) = w_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$$

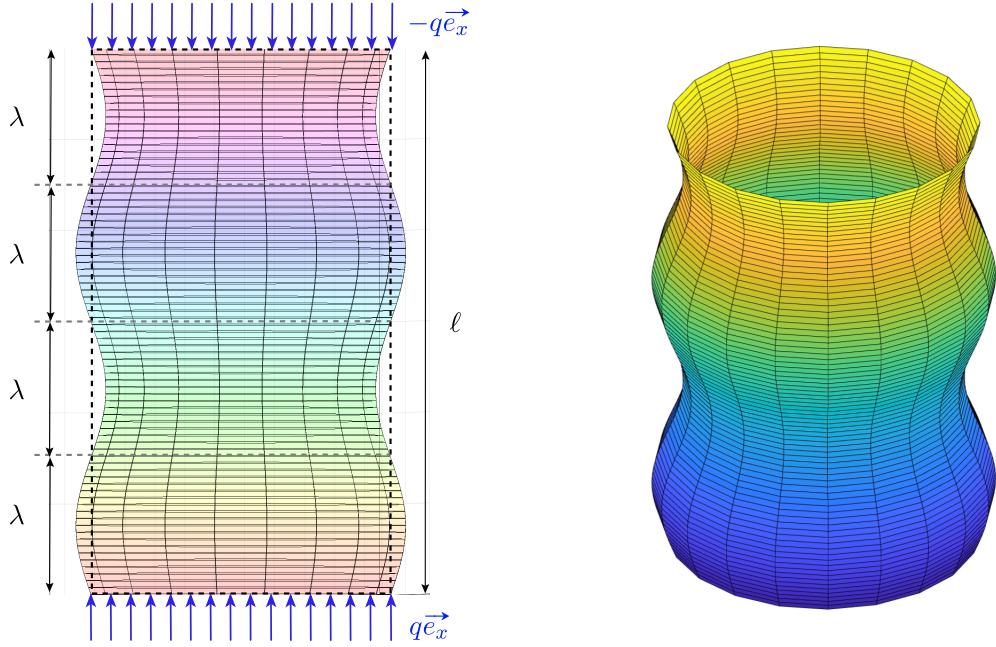
où m désigne le nombre de demi-ondes dans la direction axiale.

Le déplacement latéral $w(x)$ peut aussi s'écrire :

$$w(x) = w_0 \sin\left(\frac{\bar{m}x}{R}\right) \quad (2.43)$$

avec $\bar{m} = \frac{m\pi R}{\ell} = \frac{\pi R}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\ell}{m}$ est la demie longueur de flambement dans la direction axiale.

Soit l'exemple ci-dessous où $m = 4$:



◊ Recherche de la valeur du chargement critique q_{cr}

On déduit de (2.42) que :

$$D \frac{d^8 w}{dx^8}(x) + C \frac{(1 - \nu^2)}{R^2} \frac{d^4 w}{dx^4}(x) + q \frac{d^6 w}{dx^6}(x) = 0$$

avec $w(x) = w_0 \sin\left(\frac{\bar{m}x}{R}\right)$ on obtient alors :

$$\left\{ D \frac{\bar{m}^8}{R^8} + C \frac{(1 - \nu^2)}{R^2} \frac{\bar{m}^4}{R^4} - q \frac{\bar{m}^6}{R^6} \right\} w = 0$$

Une solution non-triviale est :

$$D \frac{\bar{m}^2}{R^2} + C \frac{(1 - \nu^2)}{R^2} \frac{R^2}{\bar{m}^2} - q = 0 \quad \text{soit} \quad q = \frac{D}{R^2} k + C(1 - \nu^2) \frac{1}{k} \quad \text{avec} \quad k = \bar{m}^2 \quad (2.44)$$

On cherche la valeur minimale pour q :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dk} &= \frac{D}{R^2} - C(1 - \nu^2) \frac{1}{k^2} = 0 \\ \implies k_{min} &= \sqrt{\frac{C(1 - \nu^2)R^2}{D}} = \sqrt{\frac{Eh}{1 - \nu^2} \times \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} \times (1 - \nu^2)R^2} = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{R}{h} \end{aligned}$$

On obtient alors d'après (2.44) la valeur du chargement critique :

$$q_{cr} = q(k_{min}) = \frac{D}{R^2} \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{R}{h} + C(1 - \nu^2) \frac{1}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \frac{h}{R}$$

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{Rh} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (1-\nu^2) \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow q_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R} \quad (2.45)$$

III.3.b Modes de flambement non-axisymétriques

On fait maintenant l'hypothèse qu'après flambement la surface déformée du cylindre est non-axisymétrique. On prend alors $w(x, \theta)$ qui satisfait les conditions aux limites sous la forme :

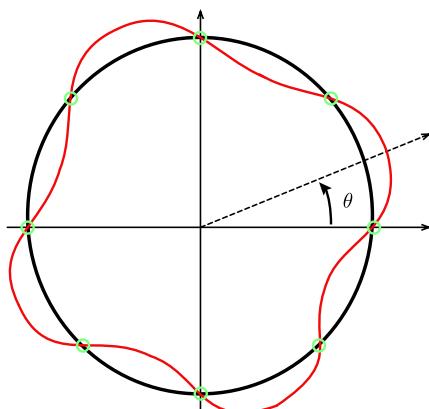
$$w(x, \theta) = w_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \sin(n\theta)$$

où m et n désignent le nombre de demi-ondes respectivement dans la direction axiale et circonférentielle.

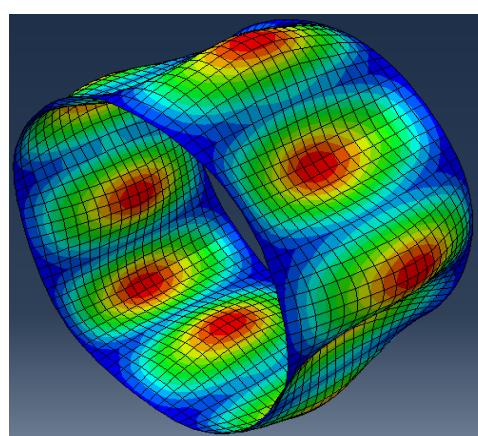
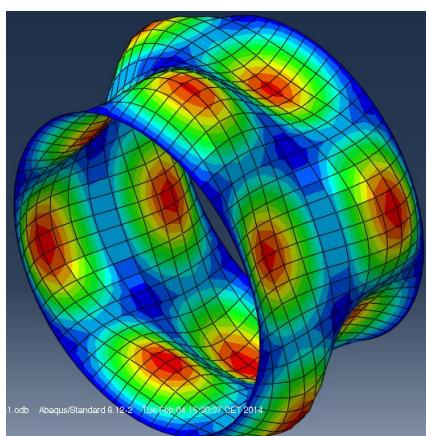
De même, $w(x, \theta)$ peut s'écrire :

$$w(x, \theta) = w_0 \sin\left(\frac{\bar{m}x}{R}\right) \sin(n\theta) \quad \text{avec} \quad \bar{m} = \frac{m\pi R}{\ell} = \frac{\pi R}{\lambda} \quad (2.46)$$

On représente ci-dessous le mode de flambement d'un cylindre où $n = 8$:



où pour différents n (résultats obtenus avec le logiciel Abaqus) :



◊ Recherche de la valeur du chargement critique q_{cr}

Ici $w_{,xxxx} = \left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^4 w$; $w_{,xx\theta\theta} = n^2 \left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^2 w$ et $w_{,\theta\theta\theta\theta} = n^4 w$ alors :

$$\nabla^4 w = w_{,xxxx} + \frac{2}{R^2} w_{,xx\theta\theta} + \frac{w_{,\theta\theta\theta\theta}}{R^4} = \left[\left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^4 + \frac{2}{R^2} \left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^2 n^2 + n^4 \right] w = \frac{[\bar{m}^2 + n^2]^2}{R^4} w$$

$$\text{donc } \nabla^8 w = \frac{[\bar{m}^2 + n^2]^4}{R^8} w$$

$$\text{De plus : } \nabla^4(w_{,xx}) = \nabla^4 \left(- \left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^2 w \right) = - \left(\frac{\bar{m}}{R}\right)^2 \nabla^4 w = - \left(\frac{\bar{m}^2}{R^6}\right) [\bar{m}^2 + n^2]^2 w$$

On en déduit alors d'après (2.42) :

$$\left\{ \frac{D}{R^8} [\bar{m}^2 + n^2]^4 + C \frac{(1 - \nu^2)}{R^2} \frac{\bar{m}^4}{R^4} - q \frac{\bar{m}^2}{R^6} [\bar{m}^2 + n^2]^2 \right\} w = 0$$

soit

$$\frac{D}{R^2} [\bar{m}^2 + n^2]^4 + C(1 - \nu^2) \bar{m}^4 - q \bar{m}^2 [\bar{m}^2 + n^2]^2 = 0 \quad (2.47)$$

On obtient alors :

$$q = \frac{D}{R^2} K + C(1 - \nu^2) \frac{1}{K} \quad \text{avec} \quad K = \frac{(\bar{m}^2 + n^2)^2}{\bar{m}^2} \quad (2.48)$$

Il est alors évident que la charge critique sera la même que pour le cas des modes de flambement axisymétriques traité juste avant.

$$\implies q_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{Eh^2}{R} \quad (2.49)$$

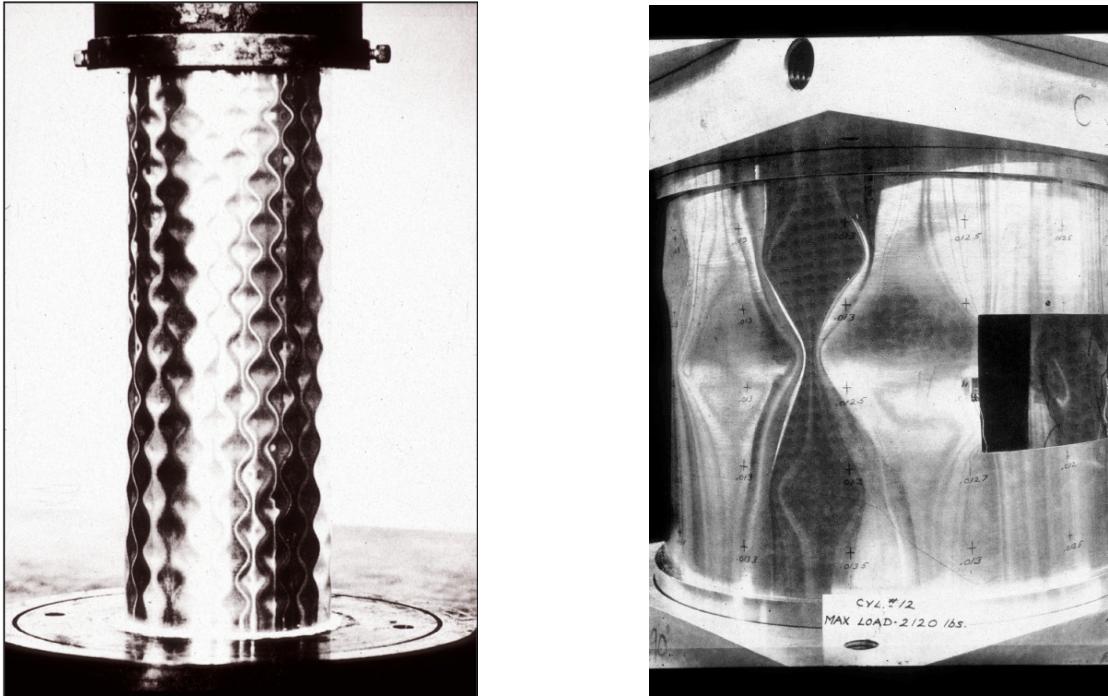
La contrainte critique est alors :

$$\sigma_{xx}^{cr} = \sigma_{cr} = \frac{q_{cr}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{Eh}{R} \quad (2.50)$$

Cette contrainte critique correspond à de nombreux modes de flambement (pour des n et m différents) et est indépendante de la longueur ℓ du cylindre.

En effet, pour $\nu = 0.3$ alors $K_{min} = k_{min} = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{R}{h} = 3.3 \frac{R}{h} = \frac{(\bar{m}^2 + n^2)^2}{\bar{m}^2}$ qui peut être atteint pour une infinité de combinaisons possibles de n et \bar{m} et la contrainte critique est $\sigma_{cr} = 0.605 \frac{Eh}{R}$.

Le flambement d'une coque mince est très sensible aux défauts géométriques. On représente les modes de flambement pour deux coques cylindriques sous compression axiale. La coque cylindrique à gauche est très mince.



- Quel est le domaine de validité des équations (2.49) et (2.50) ?

On introduit le **paramètre de Batdorf** (sans dimension) :

$$Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{\ell^2}{Rh} \quad (2.51)$$

qui dépend des paramètres géométriques du cylindre ainsi que du coefficient de Poisson. Ce paramètre est très utile pour distinguer les cylindres courts ou longs.

$$\text{Comme } K_{min} = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{R}{h} \stackrel{(2.51)}{=} \sqrt{12} \frac{R^2}{\ell^2} Z = \frac{(\bar{m}^2 + n^2)^2}{\bar{m}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{m} = \frac{\pi R}{\ell} m$$

$$\Rightarrow \frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{m^2} = \sqrt{12} \frac{R^2}{\ell^2} Z \left(\frac{\ell}{\pi R} \right)^2 = \frac{\sqrt{12} Z}{\pi^2} \quad \text{avec} \quad \bar{n} = \frac{\ell}{\pi R} n$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\bar{n}}{m} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{12} Z}{\pi^2} \right)^{1/2} \quad \text{soit} \quad \frac{\bar{n}}{m} = \left[\left(\frac{\sqrt{12} Z}{\pi^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$$

Le minimum est obtenu pour $m = 1$ et pour que \bar{n} soit réel il faut que $\left(\frac{\sqrt{12} Z}{\pi^2} \right)^{1/2} \geq 1$

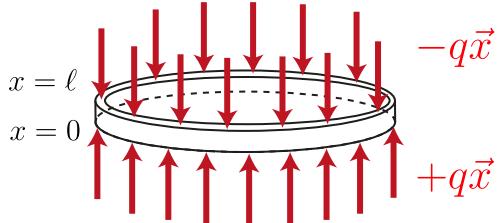
donc pour $Z \geq \frac{\pi^2}{\sqrt{12}} \sim 2.85$.

$$\text{Comme } Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{\ell^2}{Rh} \geq \frac{\pi^2}{\sqrt{12}} \quad \Rightarrow \quad \ell \geq \frac{\pi}{12^{1/4}} \frac{\sqrt{Rh}}{(1 - \nu^2)^{1/4}} \sim 1.69 \frac{\sqrt{Rh}}{(1 - \nu^2)^{1/4}}$$

Ces cylindres sont considérés de longueur modérée.

- Que peut-on dire pour les cas limites $R \gg \ell$ et $R \ll \ell$?

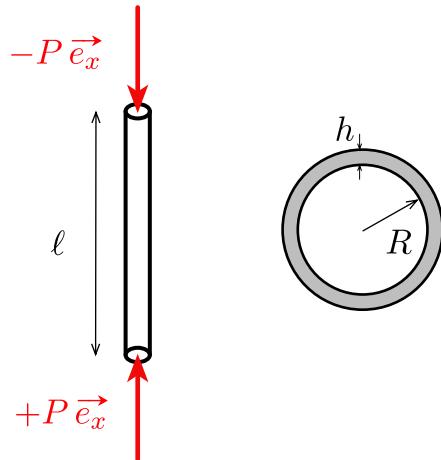
□ Cas des cylindres courts ($R \gg \ell$)



Dans ce cas on sait que $m = 1$ soit $\bar{m} = \frac{\pi R}{\ell} \rightarrow +\infty$ soit d'après (2.48) :

$K \sim \bar{m}^2$ et $q \sim \frac{D\bar{m}^2}{R^2} = \frac{D}{R^2} \frac{\pi^2 R^2}{\ell^2}$ donc $q_{cr} \sim \frac{\pi^2 D}{\ell^2}$ qui correspond à un **flambement local**.

□ Cas des cylindres très longs ($R \ll \ell$)



On retrouve ici le cas de la colonne d'Euler avec $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ avec $I = \iint y^2 dA$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_R^{R+h} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{4} [(R+h)^4 - R^4] = \frac{\pi}{4} [(R+h)^2 - R^2] [(R+h)^2 + R^2]$$

$$\text{donc } I \sim \frac{\pi}{4} (2hR) (2R^2) = \pi h R^3$$

On obtient alors $P_{cr} \sim \frac{\pi^3 Eh R^3}{\ell^2}$ qui correspond à un **flambement global**.

La transition entre le flambement local des coques et le flambement global de la colonne se passe quand :

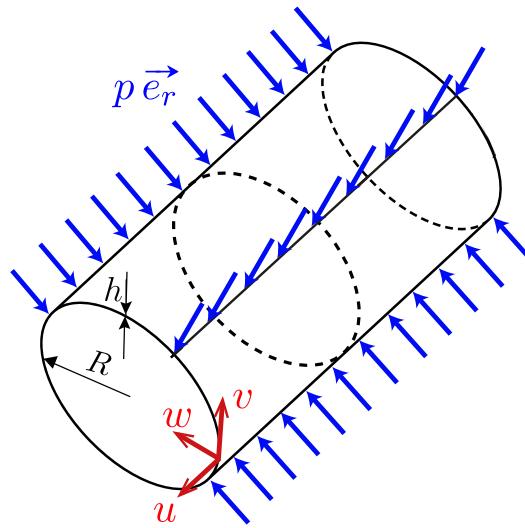
$$(\sigma_{cr})_{colonne} = \frac{(P_{cr})_{colonne}}{2\pi Rh} = \frac{\pi^2 ER^2}{2\ell^2} = (\sigma_{cr})_{cylindre} \stackrel{(2.50)}{=} \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh}{R}$$

$$\text{soit } \frac{h\ell^2}{R^3} = \frac{\pi^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \text{ (pour } \nu = 0.3 \text{ on obtient } \frac{h\ell^2}{R^3} \sim 8.15).$$

Dans ce cas on n'aura pas de distorsion de la section droite.

III.4 Flambement sous pression latérale

On considère un cylindre mince de longueur ℓ , de rayon R et d'épaisseur h , simplement appuyé aux extrémités ($x = 0$ et $x = \ell$) soumis à une pression latérale en $r = R$ constante ($p \vec{e}_r$). On suppose qu'il n'y a pas flexion du cylindre.



D'après la formule des chaudronniers vue en MMC on sait que :

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{pR}{h} = \frac{N_{\theta\theta}^0}{h} \text{ alors } N_{\theta\theta}^0 = -pR = \text{cste} \text{ et } N_{xx}^0 = N_{x\theta}^0 = 0 \text{ donc (2.41) devient :}$$

$$D\nabla^8 w + \frac{(1-\nu^2)}{R^2} C w_{xxxx} + \frac{p}{R} \nabla^4 (w_{,\theta\theta}) = 0 \quad (2.52)$$

On fait l'hypothèse qu'**après flambement la surface déformée du cylindre est non-axisymétrique**. On prend de nouveau $w(x, \theta)$ qui satisfait les conditions aux limites sous la forme :

$$w(x, \theta) = w_0 \sin\left(\frac{\bar{m}x}{R}\right) \sin(n\theta) \quad \text{avec} \quad \bar{m} = \frac{m\pi R}{\ell} = \frac{\pi R}{\lambda}$$

On en déduit alors d'après (2.52) :

$$\frac{D}{R^2} [\bar{m}^2 + n^2]^4 + C(1-\nu^2)\bar{m}^4 - pR n^2 [\bar{m}^2 + n^2]^2 = 0$$

soit

$$pR = \frac{D}{R^2} \frac{[\bar{m}^2 + n^2]^2}{n^2} + C(1-\nu^2) \frac{\bar{m}^4}{n^2 [\bar{m}^2 + n^2]^2} \quad (2.53)$$

On sait par ailleurs que p est minimale pour $m = 1$ soit pour $\bar{m} = \frac{\pi R}{\ell}$.

On note $\hat{p} = p(m=1)$ donc :

$$\begin{aligned}\hat{p}R &= \frac{D}{R^2} \left[\left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 + n^2 \right]^2 + C(1 - \nu^2) \frac{\left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^4}{n^2 \left[\left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 + n^2 \right]^2} \\ \Rightarrow \hat{p}R &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^2 \frac{[1 + \bar{n}^2]^2}{\bar{n}^2} + C(1 - \nu^2) \left(\frac{\ell}{\pi R} \right)^2 \frac{1}{\bar{n}^2 [1 + \bar{n}^2]^2} \quad \text{avec } \bar{n} = \frac{\ell n}{\pi R} \\ \Rightarrow \bar{p} &= \frac{\ell^2 R}{\pi^2 D} \hat{p} = \frac{[1 + \bar{n}^2]^2}{\bar{n}^2} + C(1 - \nu^2) \left(\frac{\ell}{\pi R} \right)^4 \frac{R^2}{D} \frac{1}{\bar{n}^2 [1 + \bar{n}^2]^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

où \bar{p} est la pression de flambage adimensionnée.

D'autre part :

$$C(1 - \nu^2) \left(\frac{\ell}{\pi R} \right)^4 \frac{R^2}{D} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (1 - \nu^2) \left(\frac{\ell}{\pi R} \right)^4 R^2 \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} = \frac{12}{\pi^4} (1 - \nu^2) \frac{\ell^4}{R^2 h^2} = \frac{12}{\pi^4} Z^2$$

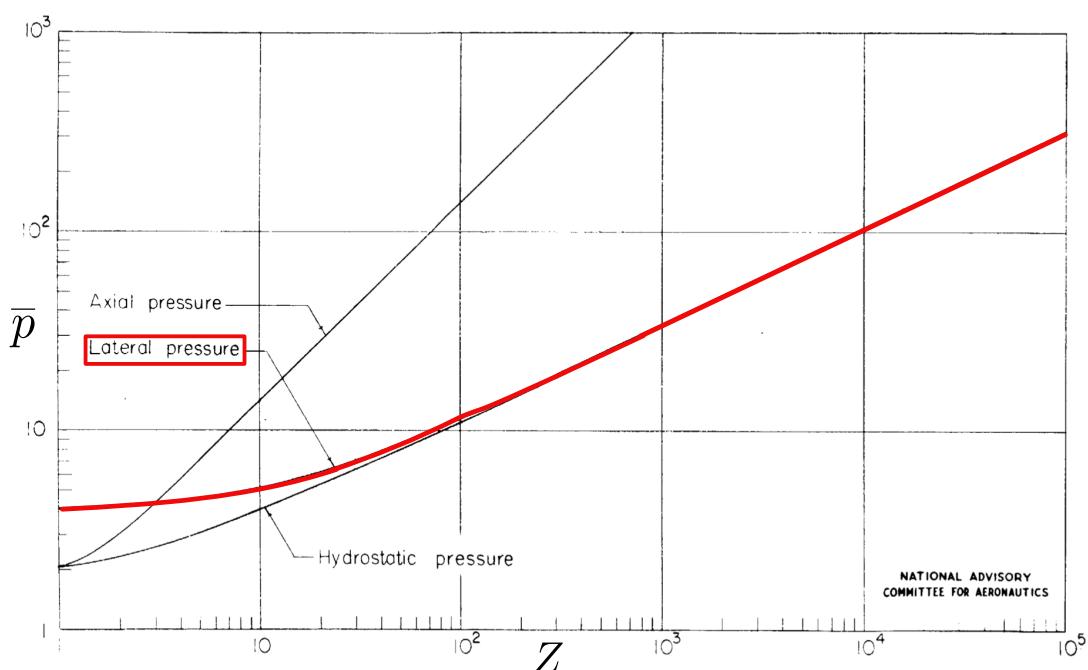
avec $Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{\ell^2}{Rh}$ le paramètre de Batdorf.

On obtient finalement :

$$\bar{p} = \frac{(1 + \bar{n}^2)^2}{\bar{n}^2} + \frac{12Z^2}{\pi^4} \frac{1}{\bar{n}^2 (1 + \bar{n}^2)^2} \quad (2.55)$$

Il faut trouver \bar{n} qui minimise \bar{p} soit $\frac{d\bar{p}}{d\bar{n}} = 0$.

Cette équation peut-être résolue numériquement, on peut alors remplacer les solutions \bar{n} dans (2.55) pour obtenir une relation entre \bar{p} et le paramètre de Batdorf Z . La courbe correspondante apparaît en rouge ci-dessous :



On représente un mode de flambement pour une coque mince cylindrique sous compression latérale :



□ Cas des cylindres courts ($R \gg \ell$)

Dans ce cas on sait que $m = 1$ soit $\bar{m} = \frac{\pi R}{\ell} \rightarrow +\infty$ donc d'après (2.54) :

$$\bar{p} = \frac{\ell^2 R}{\pi^2 D} \hat{p} \sim \frac{[1 + \bar{n}^2]^2}{\bar{n}^2}$$

Il faut trouver \bar{n} qui minimise \bar{p} soit $\frac{d\bar{p}}{d\bar{n}} = 2\bar{n} - \frac{2}{\bar{n}^3} = 0 \Rightarrow \bar{n} = 1$.

$$\bar{p}(\bar{n} = 1) = \bar{p}_{cr} = \frac{\ell^2 R}{\pi^2 D} p_{cr} = 4$$

$$\text{donc } p_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{\ell^2 R}$$

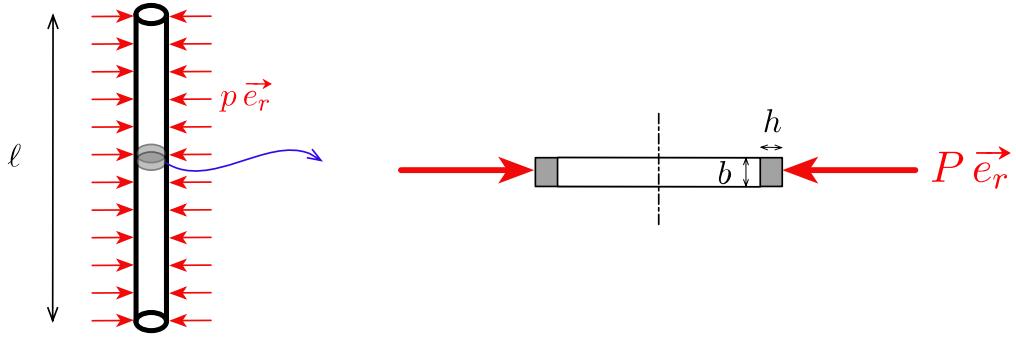
□ Cas des cylindres très longs ($R \ll \ell$)

On a alors $\bar{m} = \frac{\pi R m}{\ell} \rightarrow 0$

D'après (2.53), on obtient alors :

$$pR = \frac{Dn^2}{R^2} = \frac{n^2}{R^2} \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

On peut alors isoler une portion du cylindre de hauteur b qui sera soumise à une force ponctuelle $P\vec{e}_r$:



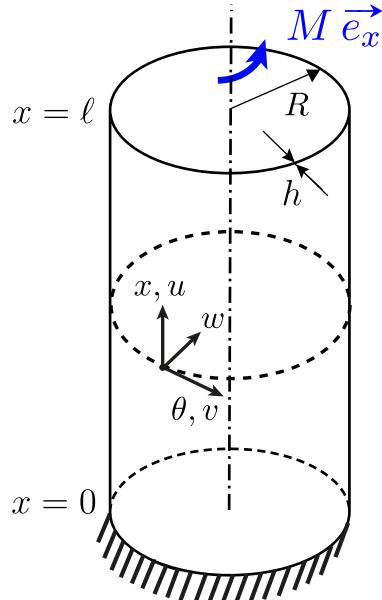
On obtient alors :

$$P = pb = \frac{n^2}{R^3} \frac{Ebh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI n^2}{R^3(1-\nu^2)} \text{ avec } I = \frac{bh^3}{12} \text{ le moment d'inertie de l'anneau suivant } \vec{e}_x.$$

$$P \text{ a un minimum pour } n = 1 \text{ donc } P_{cr} = \underline{\frac{EI}{R^3(1-\nu^2)}}$$

III.5 Flambement sous torsion

On considère un cylindre mince de longueur ℓ , de rayon R et d'épaisseur h , encastré en $x = 0$ et soumis à un couple $M \vec{e}_x$ en $x = \ell$.



On suppose que l'on a une torsion pure, on sait alors que :

$$N_{x\theta}^0 = \frac{M}{2\pi R} = \Upsilon = \text{cste} \quad \text{et} \quad N_{xx}^0 = N_{\theta\theta}^0 = 0$$

donc (2.41) devient :

$$D\nabla^8 w + \frac{(1-\nu^2)}{R^2} C w_{,xxxx} - \frac{2}{R} \Upsilon \nabla^4 (w_{,x\theta}) = 0 \quad \text{avec} \quad \Upsilon = \frac{M}{2\pi R} \quad (2.56)$$

Pour un problème de torsion pure, le déplacement latéral $w(x, \theta)$ est maintenant pris sous

la forme :

$$w(x, \theta) = w_0 \sin \left(\frac{\bar{m}x}{R} - n\theta \right) \quad \text{avec} \quad \bar{m} = \frac{\pi R m}{\ell}$$

On peut remarquer que la condition d'encastrement en $x = 0$ n'est pas vérifiée par conséquent ce modèle sera valable uniquement pour des cylindres suffisamment longs.

Comme précédemment : $w_{xxxx} = \left(\frac{\bar{m}}{R} \right)^4 w$ et $\nabla^8 w = \frac{[\bar{m}^2 + n^2]^4}{R^8} w$

$$\text{De plus } w_{,x\theta} = \frac{\bar{m}n}{R} w \text{ donc } \nabla^4(w_{,x\theta}) = \frac{\bar{m}n}{R} \nabla^4 w = \frac{\bar{m}n}{R^5} [\bar{m}^2 + n^2]^2 w$$

On en déduit alors d'après (2.56) :

$$\left\{ \frac{D}{R^8} [\bar{m}^2 + n^2]^4 + C \frac{(1 - \nu^2)}{R^6} \bar{m}^4 - \Upsilon \frac{2}{R^6} \bar{m}n [\bar{m}^2 + n^2]^2 \right\} w = 0$$

soit :

$$\Upsilon = \frac{D}{R^2} \frac{[\bar{m}^2 + n^2]^2}{2\bar{m}n} + C(1 - \nu^2) \frac{\bar{m}^3}{2n [\bar{m}^2 + n^2]^2}$$

Donnell a montré que les cylindres suffisamment longs flambent en torsion pour $n = 2$, on obtient alors :

$$\hat{\Upsilon} = \Upsilon(n = 2) = \frac{D}{R^2} \frac{[\bar{m}^2 + 4]^2}{4\bar{m}} + C(1 - \nu^2) \frac{\bar{m}^3}{4 [\bar{m}^2 + 4]^2} \quad (2.57)$$

or pour des cylindres suffisamment longs $\bar{m}^2 \ll 4$:

$$\hat{\Upsilon} \sim \frac{4D}{R^2 \bar{m}} + \frac{C}{64} (1 - \nu^2) \bar{m}^3$$

On cherche la valeur de \bar{m} rendant $\hat{\Upsilon}$ minimal :

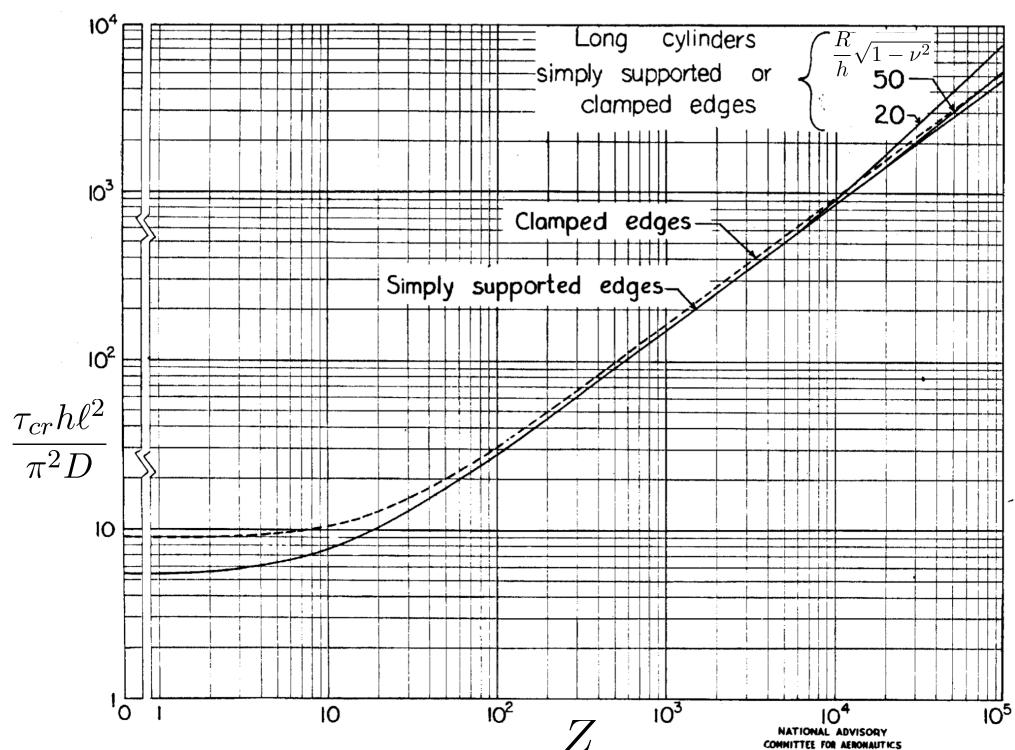
$$\frac{d\hat{\Upsilon}}{d\bar{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4D}{R^2 \bar{m}^2} + \frac{3}{64} C(1 - \nu^2) \bar{m}^2 = 0$$

$$\text{On trouve finalement que } \bar{m}^4 = \frac{64}{9(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^2.$$

En remplaçant la valeur de \bar{m} rendant $\hat{\Upsilon}$ minimale dans (2.57) on détermine sa valeur critique Υ_{cr} . Par conséquent la contrainte de cisaillement critique $\tau_{cr} = \sigma_{x\theta}^{cr}$, après simplification, est :

$$\tau_{cr} = \frac{\Upsilon_{cr}}{h} = \frac{2}{3\sqrt{6}} \frac{E}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \sim 0.272 \frac{E}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \quad (2.58)$$

La contrainte de cisaillement critique τ_{cr} obtenue en (2.58) n'est valable que pour des cylindres très longs à cause de la difficulté à satisfaire les conditions aux limites. Il faudrait alors une autre solution numérique plus rigoureuse qui fait intervenir le paramètre de Batdorf Z pour les cylindres plus courts illustrée sur la figure suivante :



On représente les modes de flambement pour deux coques minces cylindriques en torsion. Le cylindre à gauche est non-pressurisé alors que celui à droite est pressurisé.

