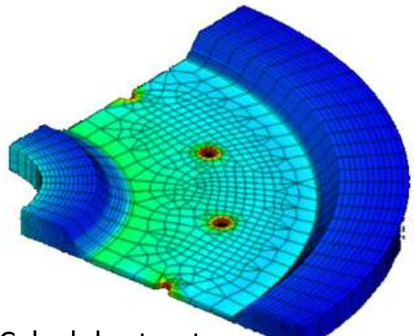
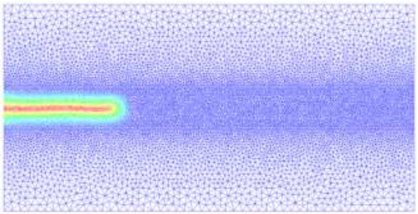
Support de cours

MU4MES01 – Analyse des structures par la méthode des éléments finis en thermique stationnaire et élasticité linéaire

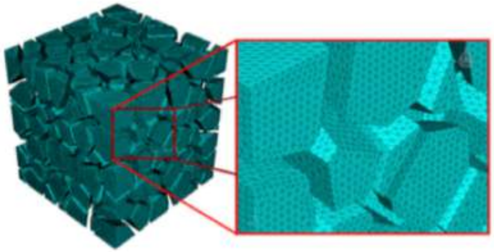
(S. Dartois)



Calcul de structure



Mécanique de la rupture*



Mécanique des milieux hétérogènes**

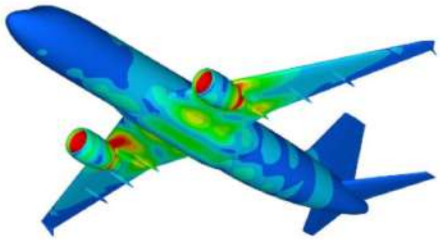
*(image C. Maurini)
** (image G. Contesse)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Qu'est-ce qu'on problème de mécanique ?

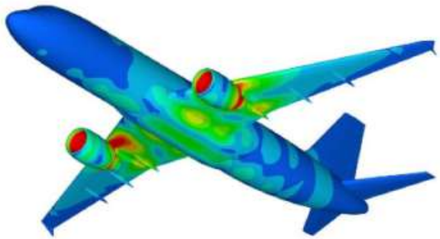
- *« Trouver un champ défini en tout point M d'un domaine géométrique Ω et à tout instant t d'un intervalle d'étude [0,T] satisfaisant un ensemble d'équations au dérivées partielles constituées par :*

  - *Les équations de **conservation** ou d'**équilibre***
  - *La loi de **comportement** caractéristique du milieu constitutif*
  - *Des **conditions aux limites** (CL) du problème*
  - *Des **conditions initiales** à t=0 »*



Qu'est-ce qu'on problème de mécanique ?

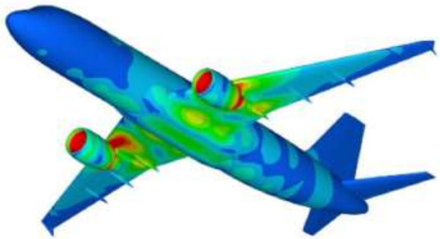
- *« Trouver un champ défini en tout point M d'un domaine géométrique Ω et à tout instant t d'un intervalle d'étude [0,T] satisfaisant un ensemble d'équations au dérivées partielles constituées par :*
  - *Les équations de **conservation** ou d'**équilibre***
  - *La loi de **comportement** caractéristique du milieu constitutif*
  - *Des **conditions aux limites** (CL) du problème*
  - *Des **conditions initiales** à t=0 »*



- Les champs peuvent être :
  - **Scalaires** : température (thermique), concentration (diffusion), pression (fluides), énergie
  - **Vectoriels** : déplacement (solides), vitesse (fluides et solides), flux (thermique)
  - **Tensoriels** : déformations, contraintes (solides)

Qu’est-ce qu’on problème de mécanique ?

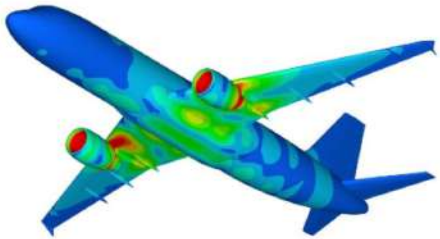
- *« Trouver un champ défini en tout point M d’un domaine géométrique Ω et à tout instant t d’un intervalle d’étude [0,T] satisfaisant un ensemble d’équations au dérivées partielles constituées par :*
  - *Les équations de **conservation** ou d’**équilibre***
  - *La loi de **comportement** caractéristique du milieu constitutif*
  - *Des **conditions aux limites** (CL) du problème*
  - *Des **conditions initiales** à t=0 »*



- Les champs peuvent être :
  - **Scalaires** : température (thermique), concentration (diffusion), pression (fluides), énergie
  - **Vectoriels** : déplacement (solides), vitesse (fluides et solides), flux (thermique)
  - **Tensoriels** : déformations, contraintes (solides)
- Si le temps n’intervient pas : **pb stationnaire**
  Sinon : **pb d’évolution** du 1er ordre (transitoire en thermique, dérivées 1eres en temps), ou 2eme ordre (dynamique, dérivées 2ndes en temps)

Qu'est-ce qu'on problème de mécanique ?

- *« Trouver un champ défini en tout point M d'un domaine géométrique Ω et à tout instant t d'un intervalle d'étude [0,T] satisfaisant un ensemble d'équations au dérivées partielles constituées par :*
  - *Les équations de **conservation** ou d'**équilibre***
  - *La loi de **comportement** caractéristique du milieu constitutif*
  - *Des **conditions aux limites** (CL) du problème*
  - *Des **conditions initiales** à t=0 »*



- Les champs peuvent être :
  - **Scalaires** : température (thermique), concentration (diffusion), pression (fluides), énergie
  - **Vectoriels** : déplacement (solides), vitesse (fluides et solides), flux (thermique)
  - **Tensoriels** : déformations, contraintes (solides)

- Si le temps n'intervient pas : **pb stationnaire**
  Sinon : **pb d'évolution** du 1er ordre (transitoire en thermique, dérivées 1eres en temps), ou 2eme ordre (dynamique, dérivées 2ndes en temps)

En général on connaît la **formulation différentielle** du pb, et on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution mais rarement **l'expression analytique exacte** de cette dernière.

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}}$$

$$\Delta T = 0$$

Formes différentielles

(formulation forte)

Méthodes variationnelles
(formulation mathématique du problème,
principe des puissances/travaux virtuel.le.s

Champ test +

$$\int_{\Omega} ...dV$$

Formes intégrales

(formulations faible et variationnelle)

Système physique continu

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = 0$$
$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}}$$
$$\Delta T = 0$$

Formes différentielles
(formulation forte)

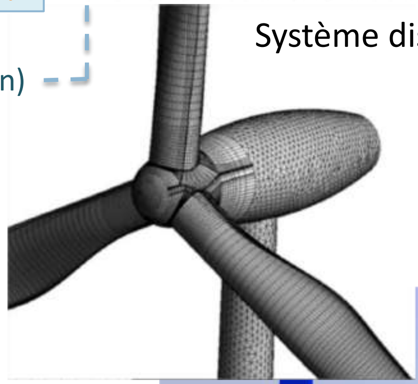
Méthodes variationnelles
(formulation mathématique du problème,
principe des puissances/travaux virtuel.le.s

Système physique continu

Champ test +
$$\int_{\Omega} ...dV$$

Formes intégrales
(formulations faible et variationnelle)

Système discrétisé



Méthodes d'approximation (discrétisation)

$$\int_{\Omega} ...dV \simeq \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} ...dV_e$$

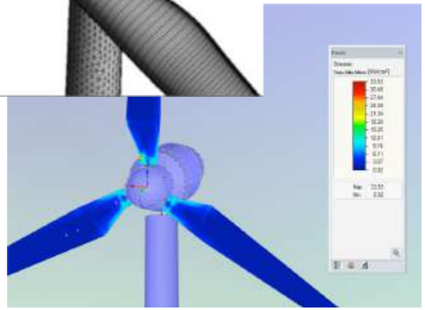
$$[K]\{U\} = \{F\}$$

Formes matricielles
(système matriciel à résoudre)

Résolution

Champs solutions approximés

$$T(\underline{x},t),\ \underline{u}(\underline{x},t),\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)...$$



Inspiré de : H. Oudin (2008)

Plan du cours

CHAPITRE 0 : Introduction en 1d

CHAPITRE 1 : Principe de la résolution approchée

Formulations forte, faible et variationnelle des problèmes d'élasticité et de thermique, Approximations variationnelles (Ritz – Galerkin), …

Plan du cours

CHAPITRE 0 : Introduction en 1d

CHAPITRE 1 : Principe de la résolution approchée

Formulations forte, faible et variationnelle des problèmes d'élasticité et de thermique, Approximations variationnelles (Ritz – Galerkin), …

CHAPITRE 2 : Représentation paramétrique et maillage

Fonctions de formes, Matrice jacobienne, …

Plan du cours

CHAPITRE 0 : Introduction en 1d

CHAPITRE 1 : Principe de la résolution approchée

Formulations forte, faible et variationnelle des problèmes d'élasticité et de thermique, Approximations variationnelles (Ritz – Galerkin), …

CHAPITRE 2 : Représentation paramétrique et maillage

Fonctions de formes, Matrice jacobienne, …

CHAPITRE 3 : Approximation des champs solutions et dérivés

Fonctions d'interpolation, Interpolations locales et globales,…

Flux de température, déformations, contraintes,…

Plan du cours

CHAPITRE 0 : Introduction en 1d

CHAPITRE 1 : Principe de la résolution approchée

Formulations forte, faible et variationnelle des problèmes d'élasticité et de thermique, Approximations variationnelles (Ritz – Galerkin), …

CHAPITRE 2 : Représentation paramétrique et maillage

Fonctions de formes, Matrice jacobienne, …

CHAPITRE 3 : Approximation des champs solutions et dérivés

Fonctions d'interpolation, Interpolations locales et globales,…

Flux de température, déformations, contraintes,…

CHAPITRE 4 : Système linéaire équivalent

Assemblage, prise en compte des CL, stockage, méthode numérique de résolution

Plan du cours

CHAPITRE 0 : Introduction en 1d

CHAPITRE 1 : Principe de la résolution approchée

Formulations forte, faible et variationnelle des problèmes d'élasticité et de thermique, Approximations variationnelles (Ritz – Galerkin), …

CHAPITRE 2 : Représentation paramétrique et maillage

Fonctions de formes, Matrice jacobienne, …

CHAPITRE 3 : Approximation des champs solutions et dérivés

Fonctions d'interpolation, Interpolations locales et globales,…
Flux de température, déformations, contraintes,…

CHAPITRE 4 : Système linéaire équivalent

Assemblage, prise en compte des CL, stockage, méthode numérique de résolution

CHAPITRE 5 : Intégration numérique

Points d'intégration, Intégration réduite, verrouillage volumétrique.

BILAN ET OUVERTURE

CHAPITRE 1
Principe de la résolution approchée

Formulations du problème de conduction thermique

- Formulations forte (Équations locales de la chaleur en régime stationnaire)
- Formulations faibles et variationnelles
- Équivalence formulations faible et variationnelle
- Formulations faible et variationnelle duales
- Formulations mixtes (à deux champs)

Formulations du problème d'élasticité linéaire

- Formulations forte (Équations locales en élasticité linéaire statique)
- Formulations faibles et variationnelles
- Équivalence formulations faible et variationnelle
- Formulations mixtes (à deux champs)

Approximations variationnelles

Formulation forte du problème de conduction thermique

M : $\underline{x}(x_1, x_2, x_3)$ point quelconque de Ω

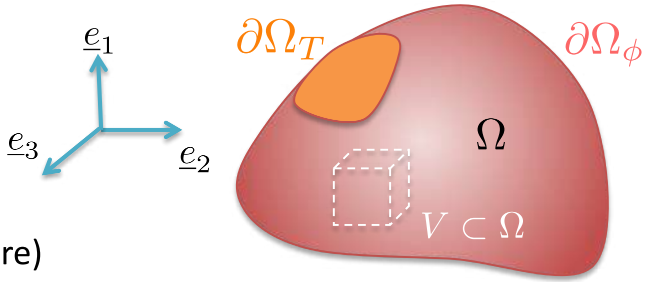
t : temps, t>0

$T(\underline{x}, t)$: température (champ scalaire)

$\underline{q}(\underline{x}, t)$: vecteur flux de chaleur

$f(\underline{x}, t)$: source interne de chaleur (champ scalaire)

c : capacité thermique volumique



Quantité de chaleur contenue dans un volume V inclus dans Ω (indépendant du temps) :

$$Q(t) = \int_V cT(\underline{x}, t)dV$$

Conservation de la quantité de chaleur :

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{\int_V f(\underline{x}, t)dV}_{\text{Produite par la source interne}} - \underbrace{\int_{\partial V} \underline{q}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x})dS}_{\text{Gagnée ou perdue à travers les parois du volume}}$$

Formulation forte du problème de conduction thermique

Théorème de flux-divergence :
(de Green-Ostrogradski)

$$\int_V div\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right] dV = \int_{\partial V} \underline{q}(\underline{x},t).\underline{n}(\underline{x})dS$$

Le bilan de chaleur devient :

$$\int_V c\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial t}dV + \int_V div\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right] dV = \int_V f(\underline{x},t)dV$$

Équation locale de la chaleur :

$$\boxed{c\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial t} + div\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right] = f(\underline{x},t)}$$

Capacité thermique volumique
$c = \rho c_p$

Variation temporelle de température

Divergence du flux thermique entrant ou sortant de V

Source de chaleur

Formulation forte du problème de conduction thermique

Loi constitutive

Loi de Fourier : $\boxed{\underline{q}\left(\underline{x},t\right) = -\underline{\underline{k}}\ \underline{grad}\left[T\left(\underline{x},t\right)\right] \quad \forall\, \underline{x} \in \Omega \quad \forall t > 0}$

Si matériau homogène isotrope :
k = conductivité thermique
k>0 (W.m^{-1}.K^{-1})

$$\underline{\underline{k}} = k\underline{\underline{Id}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites et initiales :

- **Conditions d'échange** (paroi perméable), CL « naturelles » :

CL de Fourier ou Robin $\quad \underline{q}\left(\underline{x},t\right).\underline{n}(\underline{x}) = h\left[T\left(\underline{x},t\right) - T_d\right] \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad \forall t > 0$

h : coefficient d'échange par convection et/ou rayonnement (W.m^{-2}.K^{-1})

- **Température imposée** (thermostat) : $T\left(\underline{x},t\right) = T_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T \quad \forall t > 0$

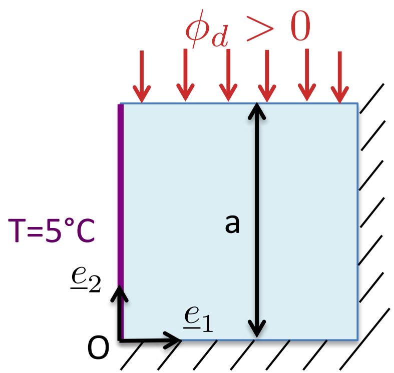
CL de Dirichlet

- **Flux imposé** (adiabatique si flux nul) : $\underline{q}\left(\underline{x},t\right).\underline{n}(\underline{x}) = -\phi_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_\phi \quad \forall t > 0$

CL de Neumann

- **Condition initiale :** $T\left(\underline{x},0\right) = T_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

Formulation forte du problème de conduction thermique



Quiz :

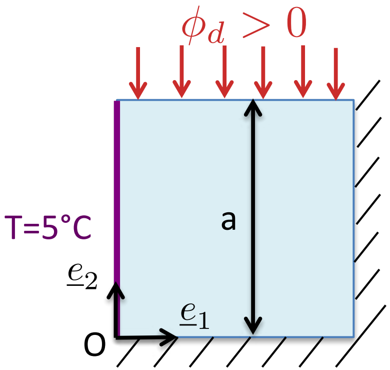
Comment les CL ci-contre se traduisent-elles mathématiquement ?

A
$$\begin{cases} T(0,x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0,a] \\ q_2(x_1,0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_2(x_1,a) = -\phi_d \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_1(a,x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0,a] \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} T(0,x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0,a] \\ q_2(x_1,0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_2(x_1,a) = -\phi_d \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_1(a,x_2) = \phi_d \quad \forall x_2 \in [0,a] \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} T(0,x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0,a] \\ q_2(x_1,0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_2(x_1,a) = \phi_d \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_1(a,x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0,a] \end{cases}$$

Formulation forte du problème de conduction thermique



Quiz :

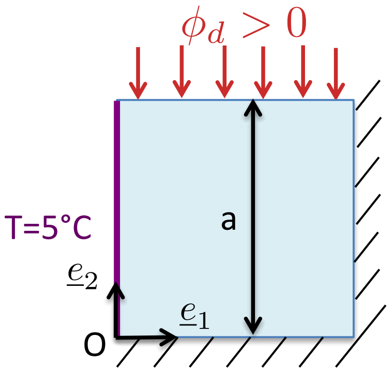
Comment les CL ci-contre se traduisent-elles mathématiquement ?

A
$$\begin{cases} T(0, x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0, a] \\ q_2(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_2(x_1, a) = -\phi_d \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_1(a, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0, a] \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} T(0, x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0, a] \\ q_2(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_2(x_1, a) = -\phi_d \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_1(a, x_2) = \phi_d \quad \forall x_2 \in [0, a] \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} T(0, x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0, a] \\ q_2(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_2(x_1, a) = \phi_d \quad \forall x_1 \in [0, a] \\ q_1(a, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0, a] \end{cases}$$

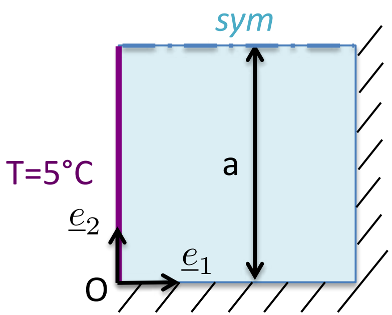
Formulation forte du problème de conduction thermique



Quiz :

Comment les CL ci-contre se traduisent-elles mathématiquement ?

$$\begin{cases} T(0,x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0,a] \\ q_2(x_1,0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_2(x_1,a) = \phi_d \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_1(a,x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0,a] \end{cases}$$



$$\begin{cases} T(0,x_2) = 5 \quad \forall x_2 \in [0,a] \\ q_2(x_1,0) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_2(x_1,a) = 0 \quad \forall x_1 \in [0,a] \\ q_1(a,x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0,a] \end{cases}$$

Formulation forte du problème de conduction thermique

$$c\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial t} - div\left[\underline{\underline{k}}\ \underline{grad}T(\underline{x},t)\right] = f(\underline{x},t) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \forall t > 0$$

$$T\left(\underline{x},t\right) = T_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T \quad \forall t > 0$$

$$\underline{q}\left(\underline{x},t\right).\underline{n}(\underline{x}) = -\phi_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_\phi \quad \forall t > 0$$

$$T\left(\underline{x},0\right) = T_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega$$

Problème aux **dérivées partielles** :

- du 1er ordre en temps
- du 2nd ordre en espace
- muni de CL
- et muni de CI

Inconnue = Température = champ scalaire

Si la source de chaleur interne indépendante du temps la température atteint un **régime stationnaire** après un temps suffisamment grand.

Si en plus le milieu est isotrope alors le système devient :

$$-k\Delta T(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$T\left(\underline{x},0\right) = T_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T$$

$$\underline{q}\left(\underline{x},t\right).\underline{n}(\underline{x}) = -\phi_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_\phi$$

Remarque :

Si $f(\underline{x},t) = 0$ l'équation de la chaleur se réduit à : $\boxed{\Delta T(\underline{x},t) = 0}$

Formulation faible du problème de conduction thermique

- Espace des champs admissibles **qui vérifient les CL en température** du problème :

$$\mathcal{T}_{ad} = \{\theta(\underline{x}) \text{ fonctions régulières définies dans } \Omega \text{ en particulier continues telles que } \theta(\underline{x}) = T_d \;\; \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T\}$$

Espace affine

$$\mathcal{T}_{ad}^{0} = \{\theta(\underline{x}) \text{ fonctions régulières définies dans } \Omega \text{ en particulier continues telles que } \theta(\underline{x}) = 0 \;\; \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T\}$$

Espace vectoriel

- Espace des champs admissibles **en l'absence de CL en température** du problème :

$$\mathcal{T}_{ad} = \{\theta(\underline{x}) \text{ fonctions régulières définies dans } \Omega \}$$

Espace vectoriel

Formulation faible du problème de conduction thermique

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}^{0}$ tel que :

$$\underbrace{\int_{\Omega} k\, \underline{grad}\left[T(\underline{x})\right] . \underline{grad}\left[\theta(\underline{x})\right] dV}_{a(T,\theta)} = \underbrace{\int_{V} f(\underline{x})\theta(\underline{x})dV + \int_{\partial\Omega_{\phi}} \phi_d \theta(\underline{x})dS}_{l(\theta)} \quad \forall\theta \in \mathcal{T}_{ad}$$

Forme **bilinéaire** symétrique

$$a\left(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \theta\right) = \lambda_1 a\left(T_1, \theta\right) + \lambda_2 a\left(T_2, \theta\right)$$

$$a\left(T, \theta\right) = a\left(\theta, T\right)$$

Forme **linéaire** indépendante de la solution

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}^{0}$ tel que :

$$\boxed{a\left(T, \theta\right) = l\left(\theta\right) \quad \forall\theta \in \mathcal{T}_{ad}^{0}}$$

Avec : $a(T,\theta) = \int_{\Omega} k\, \underline{grad}\left[T(\underline{x})\right] . \underline{grad}\left[\theta(\underline{x})\right] dV$

$$l(\theta) = \int_{V} f(\underline{x})\theta(\underline{x})dV + \int_{\partial\Omega_{\phi}} \phi_d \theta(\underline{x})dS$$

On admet que **le problème faible** est bien posé au sens où il **admet bien une solution** (sous réserve de régularité de f, du domaine Ω et de h_d). Le résultat d'existence s'établit mathématiquement.

On peut vérifier que la **solution est unique** en raisonnant par l'absurde.

Formulation faible du problème de conduction thermique

Si $T \in \mathcal{T}_{ad} = \{\theta(\underline{x})$ fonctions régulières définies dans Ω en particulier continues telles que $\theta(\underline{x}) = T_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_T\}$

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}$ tel que :

$$a\left(T, \theta - T\right) = l(\theta - T) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}$$

(avec les mêmes applications bilinéaires et linéaires)

Si la condition aux limites est $\underline{q}.\underline{n} = \phi_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_\phi$

(condition en flux –ou de Neumann- sur toute la frontière de Ω)

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad} = \{\theta(\underline{x})$ fonctions régulières définies dans Ω }

$$a\left(T, \theta\right) = l\left(\theta\right) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}$$

avec : $l(\theta) = \int_V f(\underline{x})\theta(\underline{x})dV + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d \theta(\underline{x})dS$

Attention !

Perte d'unicité

θ constante ➔ $\int_\Omega f\left(\underline{x}\right)dV + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d dS = 0$ Condition nécessaire d'existence (équilibre thermique)

Formulation variationnelle du problème de conduction thermique

Qu'est-ce que c'est ?

*« Une formulation **variationnelle** est une formulation faible qui s'exprime sous la forme de la **minimisation d'une fonctionnelle.** »*
(ou encore qui s'écrit comme la condition de stabilité d'une fonctionnelle).

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que :

$$\boxed{I\left(T\right) \leq I\left(\theta\right) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\underset{\theta \in (\theta)}{Min}\, I\left(\theta\right) = I\left(T\right)}$$

$$I\left(T\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} k\, \underline{grad}\left[T(\underline{x})\right] \,.\, \underline{grad}\left[T(\underline{x})\right] dV - \int_{\Omega} f(\underline{x}) T(\underline{x}) dV - \int_{\Omega_{\phi}} \phi_d T(\underline{x}) dS$$

$$I\left(T\right) = \frac{1}{2} a(T,T) - l(T)$$

Le champ solution T réalise le minimum sur l'espace $\mathcal{T}_{ad}^0$ de la fonctionnelle $I\left(T\right)$

Formulation variationnelle du problème de conduction thermique

On peut également écrire la formulation variationnelle sous la forme :

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que : $\boxed{< I'(T), \theta >= 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}^0}$

$$< I'(T), \theta >= \lim_{\eta \to 0} \left[\frac{I(T + \eta\theta) - I(T)}{\eta} \right]$$ ou encore $$\frac{\partial I(T)}{\partial \theta} = 0$$

I' est l'application linéaire tangente associée à I

En effet :

Équivalence formulations faible et variationnelle

Soient T une solution du problème faible et $\theta \in \mathcal{T}_{ad}$

$$\begin{aligned}
I(\theta) - I(T) &= \frac{1}{2}a(\theta,\theta) - \frac{1}{2}a(T,T) - l(\theta) + l(T) \\
&= \frac{1}{2}a(\theta - T, \theta - T) - a(T,T) + a(T,\theta) - l(\theta - T) \\
&= \frac{1}{2}a(\theta - T, \theta - T) + \underbrace{a(T, \theta - T) - l(\theta - T)}_{=0}
\end{aligned}$$

car T solution de P_{faible}

Or a est définie positive :

$$a(\theta - T, \theta - T) = \int_\Omega k \left|\underline{grad}(\theta - T)\right|^2 dV \geq 0 \quad k > 0$$

D'où $I(\theta) - I(T) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}$

et donc $I(T) \leq I(\theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{ad}$

On retrouve bien T solution du problème variationnel

Équivalence formulations faible et variationnelle

Soient T une solution du problème variationnel, $\theta \in \mathcal{T}_{ad}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On prend : $\omega = (1-\lambda)T + \lambda\theta$

On a : $\omega_{|\partial\Omega_T} = (1-\lambda)T_d + \lambda T_d = T_d$ donc : $\omega \in \mathcal{T}_{ad}$

De sorte que $I(\omega) \geq I(T) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$ et donc en développant :

$$I(\omega) = I\left[(1-\lambda)T + \lambda\theta\right] = \frac{1}{2}a\left[(1-\lambda)T + \lambda\theta, (1-\lambda)T + \lambda\theta\right]$$

$$I(\omega) = \frac{1}{2}(1-\lambda)^2 a(T,T) + \frac{\lambda^2}{2}a(\theta,\theta) + \frac{2}{2}(1-\lambda)\lambda a(T,\theta) - (1-\lambda)l(T) - \lambda l(\theta)$$

$$I(\omega) - I(T) = \frac{\lambda^2}{2}a(T,T) - \lambda a(T,T) + \frac{\lambda^2}{2}a(\theta,\theta) + \lambda a(T,\theta) - \lambda^2 a(T,\theta) + \lambda l(T) - \lambda l(\theta) \geq 0$$

$$\frac{\lambda^2}{2}a(T-\theta, T-\theta) + \lambda\left[a(T,\theta-T) - l(\theta-T)\right] \geq 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

trinôme en λ qui est ≥ 0

Donc $\Delta \leq 0$ avec : $\Delta = \left[a(T,\theta-T) - l(\theta-T)\right]^2 \leq 0$

D'où : $a(T,\theta-T) = l(\theta-T) \quad \forall\theta \in \mathcal{T}_{ad}$

$T \in \mathcal{T}_{ad}$

On retrouve la solution du problème faible

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

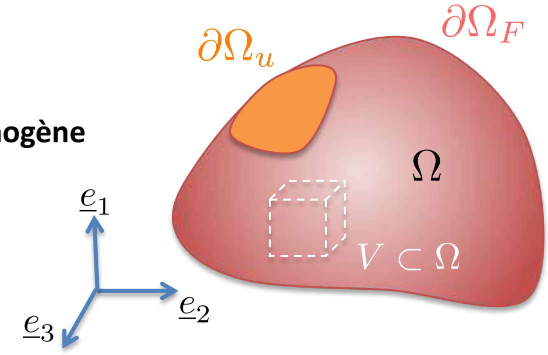
$M : \underline{x}(x_1, x_2, x_3)$ point quelconque de Ω

ρ : masse volumique du **matériau élastique linéaire homogène**

$f(\underline{x})$: efforts volumiques (en général de pesanteur)

$\underline{T}_d(\underline{x})$: efforts surfaciques qui s'appliquent sur $\partial\Omega_F$ (par exemple une pression)

$\underline{u}_d(\underline{x})$: déplacements imposés qui s'appliquent sur $\partial\Omega_u$



On se place dans le cadre de **l'Hypothèse des Petites Perturbations** (HPP).
Le champ de déplacement est noté : $\underline{u}(\underline{x})$
La position d'un point M après déformation s'obtient avec : $x'(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x})$

Le champ de déformation est un tenseur du second ordre **symétrique,** représenté par la matrice (3,3) symétrique, défini positif (admet des valeurs propres réelles) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}(\underline{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \varepsilon_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad i,j = 1,2,3$$

Notation de Kelvin-Voigt :

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}(\underline{x})]\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Notation de Mandel :

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}(\underline{x})]\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Le tenseur des contraintes de Cauchy, **symétrique** du second ordre.

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad i,j = 1,2,3$$

Notation de Kelvin-Voigt :

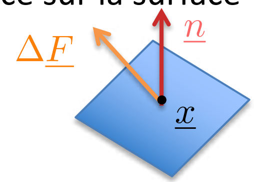
$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Notation de Mandel :

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}$ vecteur contrainte défini sur une surface élémentaire ΔS de normale $\underline{n}$
Représente l'effort, la force de cohésion au point $\underline{x}$ qui s'exerce sur la surface élémentaire :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \underline{F}(\underline{x})}{\Delta S}$$

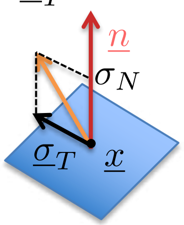


On note le vecteur contrainte :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) = \sigma_N \underline{n} + \underline{\sigma}_T$$

$$\sigma_N \underline{n} = (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).\underline{n}$$

$$\underline{\sigma}_T = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} - \sigma_N \underline{n}$$



Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

- Équation d'**équilibre** : $\boxed{\underline{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\right] + \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\underline{x})}{\partial x_j}\underline{e}_i + f_i(\underline{x})\underline{e}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- Les équations de **compatibilité** (traduisent le fait que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x}) + {}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega \qquad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- **Loi de comportement** :

(pour un matériau élastique linéaire) $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = A_{ijkl}(\underline{x})\varepsilon_{kl}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Le tenseur d'élasticité $\mathbb{A}$

A : ne possède aucune symétrie

B : possède les deux symétries mineures et la majeure

C : ne possède que la symétrie mineure droite : $A_{ijkl} = A_{ijlk}$

D : ne possède que les symétries mineures : $A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl} = A_{jilk}$

E : ne possède que la symétrie majeure : $A_{ijkl} = A_{klij}$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

- Équation d'**équilibre** : $\boxed{\underline{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\right] + \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\underline{x})}{\partial x_j}\underline{e}_i + f_i(\underline{x})\underline{e}_i = 0 \quad i = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- Les équations de **compatibilité** (traduisent le fait que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x}) + {}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega \qquad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- **Loi de comportement** :

(pour un matériau élastique linéaire) $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = A_{ijkl}(\underline{x})\varepsilon_{kl}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Le tenseur d'élasticité $\mathbb{A}$

A : ne possède aucune symétrie

B : possède les deux symétries mineures et la majeure

C : ne possède que la symétrie mineure droite : $A_{ijkl} = A_{ijlk}$

D : ne possède que les symétries mineures : $A_{ijkl} = A_{ijlk} = A_{jikl} = A_{jilk}$

E : ne possède que la symétrie majeure : $A_{ijkl} = A_{klij}$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

- Équation d'**équilibre** : $\boxed{\underline{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\right] + \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\underline{x})}{\partial x_j}\underline{e}_i + f_i(\underline{x})\underline{e}_i = 0 \quad i = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- Les équations de **compatibilité** (traduisent le fait que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x}) + ^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega \qquad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- **Loi de comportement** :

(pour un matériau élastique linéaire) $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = A_{ijkl}(\underline{x})\varepsilon_{kl}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Le tenseur d'élasticité $\mathbb{A}$ possède les deux symétries mineures et la majeure

➔ Symétries de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

- Équation d'**équilibre** : $\boxed{\underline{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\right] + \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\underline{x})}{\partial x_j}\underline{e}_i + f_i(\underline{x})\underline{e}_i = 0 \quad i = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- Les équations de **compatibilité** (traduisent le fait que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x}) + {}^t\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega \qquad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- **Loi de comportement** :
(pour un matériau élastique linéaire) $\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad \forall \underline{x} \in \Omega}$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = A_{ijkl}(\underline{x})\varepsilon_{kl}\left[\underline{u}(\underline{x})\right] \quad i,j = 1,2,3 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Le tenseur d'élasticité $\mathbb{A}$ possède les deux symétries mineures et la majeure

➔ Symétries de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$
➔ Existence d'une énergie interne (ou énergie de déformation)

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, dV = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\sigma\}\{\varepsilon\}\, dV = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2}\int_\Omega \boxed{A_{ijkl}}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} dV$$

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega {}^t\{\varepsilon\}\{\sigma\}\, dV = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{kl}\varepsilon_{kl} dV = \frac{1}{2}\int_\Omega \boxed{A_{klij}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} dV$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

$\mathbb{A}$ est défini positif

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \geq 0 \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \text{ symétrique} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \implies \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}} \end{cases}$$

provient de l'existence de U également

Avec la notation de Voigt : $\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1113} & A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2213} & A_{2212} \\ & & A_{3333} & A_{3323} & A_{3313} & A_{3312} \\ & & & A_{2323} & A_{2313} & A_{2312} \\ & \text{symétrique} & & & A_{1313} & A_{1312} \\ & & & & & A_{1212} \end{bmatrix}$$

21 coefficients scalaires indépendants

Selon les symétries matérielles des matériaux le nombre de coefficients indépendants diminue

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Pour un matériau orthotrope (deux plans de symétrie matérielle) le nombre de coefficients indépendants est :

A : 2

B : 9

C : 16

D : 18

Si le matériau est isotrope, le nombre de coefficients indépendants est :

A : 2

B : 9

C : 16

D : 18

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Pour un matériau orthotrope (deux plans de symétrie matérielle) le nombre de coefficients indépendants est :

A : 2

$\boxed{\textbf{B} : 9}$

C : 16

D : 18

$$(E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23})$$

Si le matériau est isotrope, le nombre de coefficients indépendants est :

$\boxed{\textbf{A} : 2}$

B : 9

C : 16

D : 18

$$(E, \nu) \text{ ou } (\lambda, \mu)$$

E module de Young $E > 0$

ν coefficient de Poisson $0 < \nu \leq \dfrac{1}{2}$

(sauf matériaux auxétiques)

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Pour un matériau **élastique linéaire homogène** isotrope (loi de Hooke)

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{Id}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

λ et μ coefficients de Lamé $\quad Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_{ii}$

$\underline{\underline{Id}}$ tenseurs d'ordre 2 identité

Expression de [A] en notation de Voigt ?

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

(A)

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix}$$

(B)

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}\mu & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}\mu & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}\mu \end{bmatrix}$$

(C)

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Pour un matériau **élastique linéaire homogène** isotrope (loi de Hooke)

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{Id}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

λ et μ coefficients de Lamé $\quad Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_{ii}$

$\underline{\underline{Id}}$ tenseurs d'ordre 2 identité

Expression de [A] en notation de Voigt ?

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \qquad \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{A} = 3\lambda\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{I}} \qquad A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= J_{ijkl}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \\ &= \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \\ &= \tfrac{1}{3}\underline{\underline{Id}} \otimes \underline{\underline{Id}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{I} = I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Module de **compressibilité**

Ou encore :

$$\boxed{\mathbb{A} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}} \qquad \mathbb{K} = 3\lambda\mathbb{I} - \mu\mathbb{J} \qquad 3k = 3\lambda + 2\mu$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

Pour un matériau élastique linéaire :

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\mathbb{S} \text{ tel que } \mathbb{S} : \mathbb{A} = \mathbb{A} : \mathbb{S} = \mathbb{I}$$

$\mathbb{S}$ Tenseur de souplesse du 4ème ordre, symétrique, défini positif

Pour un matériau élastique linéaire homogène **isotrope** (loi de Hooke inversée) :

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{Id}}}$$

Avec la notation de Voigt :

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}}$$

$$[S] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Pour un matériau élastique linéaire **orthotrope** :

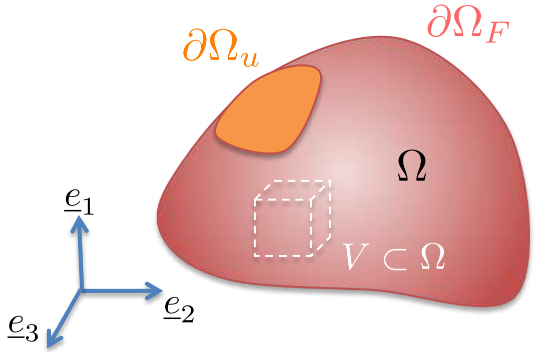
$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}$$

Avec les relations suivantes entre les coefficients de Poisson :

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0 \qquad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0 \qquad 1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{13}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{31}\nu_{32} > 0$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique



- Conditions aux limites **cinématiques** :
  (CL de Dirichlet)

$$\boxed{\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u}$$

$$u_i(\underline{x}) = (u_d)_i(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$$

- Conditions aux limites **statiques** :
  (CL de Neumann)

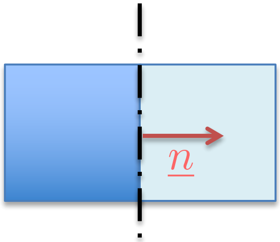
$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_d(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \partial\Omega_F}$$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}).n_j(\underline{x}) = (T_d)_i(\underline{x}) \quad i,j = 1,2,3 \quad \underline{x} \in \partial\Omega_F$$

- Conditions **mixtes :**
  (CL de Fourier ou Robin)

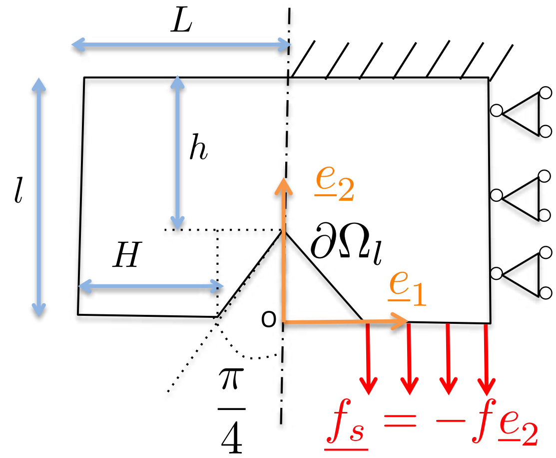
Ressort : $\underline{T}.\underline{n} = k_{res}\underline{u}.\underline{n}$

Symétrie : $\begin{cases} \underline{u}.\underline{n} = 0 \\ \sigma_T = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} - \sigma_N \underline{n} = \underline{0} \end{cases}$

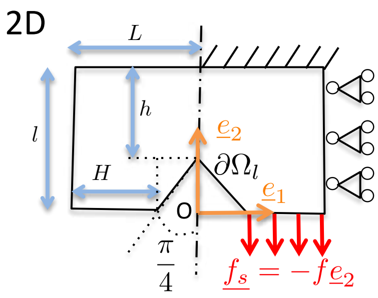


Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

2D



Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

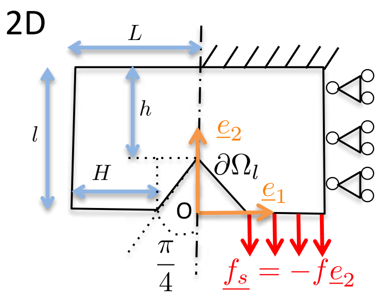


A
$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{u}(x_1,l)=\underline{0} \quad \forall x_1\in[0,L]\\
u_1(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
u_1(L,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[0,l]\\
\sigma_{21}(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
\sigma_{11}+\sigma_{12}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{22}+\sigma_{21}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{12}(x_1,0)=0 \quad \forall x_1\in[(L-H),L]\\
\sigma_{22}(x_1,0)=-f \quad \forall x_1\in[(L-H),L]
\end{array}\right.$$

B
$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{u}(x_1,l)=\underline{0} \quad \forall x_1\in[0,L]\\
u_1(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
u_1(L,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[0,l]\\
\sigma_{21}(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
\sigma_{11}+\sigma_{12}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{22}+\sigma_{21}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{12}(x_1,0)=0 \quad \forall x_1\in[(L-H),L]\\
\sigma_{22}(x_1,0)=f \quad \forall x_1\in[(L-H),L]
\end{array}\right.$$

C
$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{u}(x_1,l)=\underline{0} \quad \forall x_1\in[0,L]\\
u_1(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
u_2(L,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[0,l]\\
\sigma_{21}(0,x_2)=0 \quad \forall x_2\in[(l-h),l]\\
\sigma_{11}+\sigma_{12}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{22}+\sigma_{21}=0 \quad \forall \underline{x}\in\partial\Omega_l\\
\sigma_{12}(x_1,0)=0 \quad \forall x_1\in[(L-H),L]\\
\sigma_{22}(x_1,0)=-f \quad \forall x_1\in[(L-H),L]
\end{array}\right.$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique



$$
\begin{cases}
\underline{u}(x_1, l) = \underline{0} \quad \forall x_1 \in [0, L] \\
u_1(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [(l-h), l] \\
u_1(L, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0, l] \\
\sigma_{21}(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [(l-h), l] \\
\sigma_{11} + \sigma_{12} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_l \\
\sigma_{22} + \sigma_{21} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_l \\
\sigma_{12}(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in [(L-H), L] \\
\sigma_{22}(x_1, 0) = f \quad \forall x_1 \in [(L-H), L]
\end{cases}
$$

- Si $mes(\partial\Omega_u) \neq 0$: problème de **type 1** admettant une solution unique en déplacement et contrainte (les déplacements imposés bloquent les déplacements de corps rigide.)

- Si $mes(\partial\Omega_u) = 0$: problème de **type 2** (efforts imposés sur toute la frontière) n'admettant pas toujours de solution (équilibre requis). Si elle existe elle n'est pas unique mais définie à mouvement de corps rigide près.

- Problèmes de **type 3** = les autres

Précontraintes et déformations inélastiques

Sources de précontraintes:

- contraintes initiales résiduelles (ex : fabrication) :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^0}$$

- chargement thermique ou hydrique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{hy}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^e & \text{déformation élastique } \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} & \text{déformation inélastique thermique } \underline{\underline{\alpha}}\Delta T \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{hy} & \text{déformation inélastique hydrique } \underline{\underline{\beta}}\Delta m \end{cases}$$

$\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}$: tenseurs de dilatation thermique et hydrique (sphériques pour des milieux isotropes)

En utilisant la loi de comportement :

$$\mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} + \mathbb{A} : \underline{\underline{\alpha}}\Delta T + \mathbb{A} : \underline{\underline{\beta}}\Delta m$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}}\Delta T - \underline{\underline{\beta}}\Delta m\right)$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^{th} + \underline{\underline{\sigma}}^{hy}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{th} = -\mathbb{A} : \underline{\underline{\alpha}}\Delta T$$

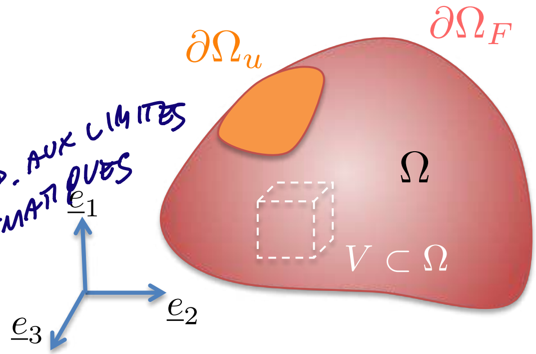
$$\underline{\underline{\sigma}}^{hy} = -\mathbb{A} : \underline{\underline{\beta}}\Delta m$$

Formulation forte du problème d'élasticité linéaire statique

- Espace des champs **cinématiquement** admissibles **qui vérifient les CL en déplacement** du problème :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{v}(\underline{x}) \text{ fonctions régulières définies dans } \Omega \text{ en particulier continues telles que } \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$$

COND. AUX LIMITES CINEMATIQUES



- Espace des champs **statiquement** admissibles du problème :

$$\Sigma_{ad} = \{\underline{\underline{\tau}} \text{ symétriques définis sur } \Omega \text{ et réguliers vérifiant :}$$
$$\underline{div}(\underline{\underline{\tau}}) + \underline{f} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \rightarrow \text{EQUILIBRE}$$
$$\underline{\underline{\tau}}.\underline{n} = \underline{T}_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_F\}$$

$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_F$

$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_F = \emptyset$

$\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}):\underline{\underline{\varepsilon}}$ densité d'énergie de déformation élastique

- Formulation forte :

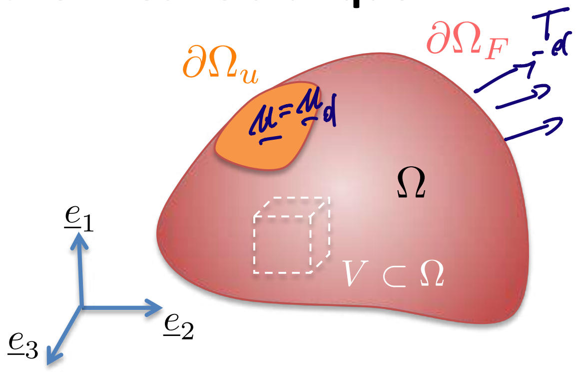
Trouver $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) \in \mathcal{U}_{ad} \times \Sigma_{ad}$ tel que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{x})) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) + {}^t\underline{\underline{grad}}(\underline{u})\right) \rightarrow \text{compatibilité}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \forall \underline{x} \in \Omega \rightarrow \text{Loi de cpt}$$

Formulation faible du problème d'élasticité linéaire statique

- Espace des champs **cinématiquement** admissibles **qui vérifient les CL en déplacement** du problème :



$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{v}(\underline{x})$ fonctions régulières définies dans Ω en particulier continues telles que

$\mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ $\quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_d \;\forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$

$\mathcal{U}^0_{ad} = \{\underline{v}(\underline{x})$ fonctions régulières définies dans Ω en particulier continues telles que $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{0} \;\; \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$

ou

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{(0)}$$

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$\boxed{a\left(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}\right) = \ell\left(\underline{v} - \underline{u}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)}$$

Avec

$$\underline{v} - \underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}^{(0)}$$

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV \qquad \ell(\underline{v}) = \int_V \underline{f}(\underline{x})\underline{v} dV + \int_{\partial\Omega_F} \underline{T}_d \underline{v} dS$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) := \mathrm{sym}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}) = \underline{\underline{\nabla}}^s \underline{u}$$

Formulation variationnelle du problème d'élasticité linéaire statique

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$\boxed{I(\underline{u}) \leq I(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}}$$

ou

$$\boxed{I(\underline{u}) = \underset{\underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}}{Min}\, I(\underline{v})}$$

Énergie potentielle (Ep)

$$I(\underline{v}) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV}_{\text{énergie de déformation}} \underbrace{- \int_\Omega \underline{f}.\underline{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \underline{T}_d.\underline{v} dS}_{-\text{travail des efforts extérieurs}}$$

$\int_\Omega \varphi(\underline{u})\, dV$

supposés conservatifs

Condition nécessaire de optimalité d'ordre 1 (condition de stationnarité):

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$I'(\underline{u})(\underline{v}) = \boxed{< I'(\underline{u}), \underline{v} >= 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}^0_{ad}}$$

Avec :

$$< I'(\underline{u}), \underline{v} >= \lim_{\eta \to 0} \frac{I(\underline{u} + \eta \underline{v}) - I(\underline{u})}{\eta}$$

$\rightarrow$ DERIVEE DIRECTIONELLE

Approximation variationnelle

$\mathcal{U}_{ad}$ et $\mathcal{T}_{ad}$ = espaces affines de **dimension infinie**.

➔ Recherche de minimum en énergie potentielle en pratique impossible pour des géométries complexes

Recherche de solutions approchées

= recherche du minimum sur un **sous-espace de dimension finie**

➔méthode de **Galerkin**

Cas de la thermique

$\theta : \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \theta(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

La formulation faible est :

Trouver $T \in \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que :

$$\boxed{a\left(T,\theta\right) = l\left(\theta\right) \quad \forall\theta \in \mathcal{T}_{ad}^0}$$

Avec : $a(T,\theta) = \int_\Omega k\, \underline{grad}\left[T(\underline{x})\right] . \underline{grad}\left[\theta(\underline{x})\right] dV$

$$l(\theta) = \int_V f(\underline{x})\theta(\underline{x})dV + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d\theta(\underline{x})dS$$

Avec $\mathcal{T}_{ad}^0 = \{\theta(\underline{x})$ réguliers dans Ω tels que : $\theta(\underline{x}) = 0 \quad \forall\underline{x} \in \partial\Omega_T\}$

Approximation variationnelle

Le problème est remplacé par le problème approché suivant :

Trouver $T^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \subset \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que : $a\left(T^h, \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$

avec : $\mathcal{T}_{ad}^h$ de dimension finie N.

$\mathcal{T}_{ad}^h$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et on peut y définir une base constituée de N fonctions scalaires définies sur Ω et régulières.

Approximation variationnelle

Le problème est remplacé par le problème approché suivant :

Trouver $T^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \subset \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que : $a\left(T^h, \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$

avec : $\mathcal{T}_{ad}^h$ de dimension finie N.

$\mathcal{T}_{ad}^h$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et on peut y définir une base constituée de N fonctions scalaires définies sur Ω et régulières.

$$\theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \to \theta^h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(\underline{x})$$

Éléments de la base $(\varphi_i(\underline{x}))_{1 \leq i \leq N}$

Constantes = composantes de θ^h sur la base

Approximation variationnelle

Le problème est remplacé par le problème approché suivant :

Trouver $T^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \subset \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que : $a\left(T^h, \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$

avec : $\mathcal{T}_{ad}^h$ de dimension finie N.

$\mathcal{T}_{ad}^h$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et on peut y définir une base constituée de N fonctions scalaires définies sur Ω et régulières.

$$\theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \rightarrow \theta^h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(\underline{x})$$

Éléments de la base $\left(\varphi_i(\underline{x})\right)_{1 \leq i \leq N}$

Constantes = composantes de θ^h sur la base

Si l'on sait construire la base, la recherche de T^h revient à trouver N constantes $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions de :

$$a\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(\underline{x}), \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$$

Approximation variationnelle

Le problème est remplacé par le problème approché suivant :

Trouver $T^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \subset \mathcal{T}_{ad}^0$ tel que : $a\left(T^h, \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$

avec : $\mathcal{T}_{ad}^h$ de dimension finie N.

$\mathcal{T}_{ad}^h$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et on peut y définir une base constituée de N fonctions scalaires définies sur Ω et régulières.

$$\theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h \rightarrow \theta^h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(\underline{x})$$

Éléments de la base $(\varphi_i(\underline{x}))_{1 \leq i \leq N}$

Constantes = composantes de θ^h sur la base

Si l'on sait construire la base, la recherche de T^h revient à trouver N constantes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ solutions de :

$$a\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(\underline{x}), \theta^h\right) = l\left(\theta^h\right) \quad \forall \theta^h \in \mathcal{T}_{ad}^h$$

On exploite ensuite la linéarité de a et on prend successivement $\theta^h = \varphi_1, \ldots, \theta^h = \varphi_N$

Pour obtenir :

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\alpha} = \underline{F} \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a\left(\varphi_i(\underline{x}), \varphi_j(\underline{x})\right) = l\left(\varphi_j(\underline{x})\right) \quad j = 1, \ldots, N$$

$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \qquad F_j = l(\varphi_j)$

Approximation variationnelle

Cas de l'élasticité linéaire

Une des formulations faibles est :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$\boxed{a\left(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}\right) = \ell\left(\underline{v} - \underline{u}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)}$$

Avec :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV$$

$$\ell(\underline{v}) = \int_V \underline{f}(\underline{x})\underline{v} dV + \int_{\partial\Omega_F} \underline{T}_d \underline{v} dS$$

Avec $\mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d) = \{\underline{v}$ réguliers dans Ω tels que : $\underline{v} = \underline{u}_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$

Approximation variationnelle

Cas de l'élasticité linéaire

Une des formulations faibles est :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$\boxed{a\left(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}\right) = \ell\left(\underline{v} - \underline{u}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)}$$

Avec :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV$$

$$\ell(\underline{v}) = \int_V \underline{f}(\underline{x}) \underline{v} dV + \int_{\partial\Omega_F} \underline{T}_d \underline{v} dS$$

Avec $\mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d) = \{\underline{v}$ réguliers dans Ω tels que : $\underline{v} = \underline{u}_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$

On introduit : $\bar{\underline{u}} = \underline{u} - \hat{\underline{u}}_d \quad \bar{\underline{u}} \in \mathcal{U}^0_{ad}$

Le problème approché est défini par :

Trouver $\bar{\underline{u}}^h \in \mathcal{U}^{h0}_{ad} \subset \mathcal{U}^0_{ad}$ tel que : $a(\bar{\underline{u}}^h, \bar{\underline{v}}^h) = l(\bar{\underline{v}}^h) \quad \forall \bar{\underline{v}}^h \in \mathcal{U}^{h0}_{ad}$

$$l(\bar{\underline{v}}^h) = \ell(\underline{v}) - a(\hat{\underline{u}}_d, \underline{v})$$

$\mathcal{U}^{h0}_{ad}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}^0_{ad}$ de dimension finie N.

Approximation variationnelle

Cas de l'élasticité linéaire

Une des formulations faibles est :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)$ tel que :

$$\boxed{a\left(\underline{u}, \underline{v}-\underline{u}\right) = \ell\left(\underline{v}-\underline{u}\right) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d)}$$

Avec :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV$$

$$\ell(\underline{v}) = \int_V \underline{f}(\underline{x}) \underline{v} dV + \int_{\partial\Omega_F} \underline{T}_d \underline{v} dS$$

Avec $\mathcal{U}_{ad}(\underline{u}_d) = \{\underline{v}$ réguliers dans Ω tels que : $\underline{v} = \underline{u}_d \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$

On introduit : $\underline{\bar{u}} = \underline{u} - \underline{\hat{u}}_d \quad \underline{\bar{u}} \in \mathcal{U}^0_{ad}$

Le problème approché est défini par :

Trouver $\underline{\bar{u}}^h \in \mathcal{U}^{h0}_{ad} \subset \mathcal{U}^0_{ad}$ tel que : $a(\underline{\bar{u}}^h, \underline{\bar{v}}^h) = l(\underline{\bar{v}}^h) \quad \forall \underline{\bar{v}}^h \in \mathcal{U}^{h0}_{ad}$

$$l(\underline{\bar{v}}^h) = \ell(\underline{v}) - a(\underline{\hat{u}}_d, \underline{v})$$

$\mathcal{U}^{h0}_{ad}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}^0_{ad}$ de dimension finie N.

Comme précédemment résoudre le problème revient à rechercher les N constantes $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i a\left(\underline{\varphi}_i(\underline{x}), \underline{\varphi}_j(\underline{x})\right) = l\left(\underline{\varphi}_j(\underline{x})\right) \quad j = 1, ..., N$$

Éléments de la base

Approximation variationnelle

- On doit donc trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions du système linéaire suivant : $\boxed{[K]\left\{\alpha\right\} = \left\{F\right\}}$

  avec $[K]$ matrice NxN de terme générique :

Approximation variationnelle

- On doit donc trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions du système linéaire suivant : $\boxed{[K]\{\alpha\} = \{F\}}$

avec $[K]$ matrice NxN de terme générique :

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega k\, \underline{grad}\varphi_i(\underline{x}) \,.\, \underline{grad}\varphi_j(\underline{x}) dV$$

$$K_{ij} = a\left(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j\right)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_j) dV$$

Approximation variationnelle

- On doit donc trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions du système linéaire suivant : $\boxed{[K]\,\{\alpha\} = \{F\}}$

avec $[K]$ matrice NxN de terme générique :

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega k\, \underline{grad}\varphi_i(\underline{x}) \,.\, \underline{grad}\varphi_j(\underline{x}) dV$$

$$K_{ij} = a\left(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j\right)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_j) dV$$

$\{\alpha\}$ Vecteur colonne de longueur N constitué des constantes inconnues

$\{F\}$ Vecteur colonne de longueur N avec :

$$F_i = \int_\Omega f(\underline{x})\varphi_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d \varphi_i(\underline{x}) dS$$

$$F_i = \int_\Omega \underline{f}(\underline{x}).\underline{\varphi}_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d.\underline{\varphi}_i(\underline{x}) dS$$

Approximation variationnelle

- On doit donc trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions du système linéaire suivant : $\boxed{[K]\,\{\alpha\} = \{F\}}$

avec $[K]$ matrice NxN de terme générique :

$$K_{ij} = a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega k\,\underline{grad}\varphi_i(\underline{x})\,.\,\underline{grad}\varphi_j(\underline{x})dV$$

$$K_{ij} = a\left(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j\right)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_j)dV$$

$\{\alpha\}$ Vecteur colonne de longueur N constitué des constantes inconnues

$\{F\}$ Vecteur colonne de longueur N avec :

$$F_i = \int_\Omega f(\underline{x})\varphi_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d\varphi_i(\underline{x})dS$$

$$F_i = \int_\Omega \underline{f}(\underline{x}).\underline{\varphi}_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d.\underline{\varphi}_i(\underline{x})dS$$

- Une fois résolu ce système on obtient :

  - une approximation de la solution T en formant : $$T^h = \sum_{i=1}^{N} = \alpha_i\varphi_i(\underline{x})$$

  - Une approximation du flux associé en formant :

$$\underline{q}^h(\underline{x}) = -k\,\underline{grad}\,T^h(\underline{x}) = -k\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\,\underline{grad}\,\varphi_i(\underline{x})$$

Approximation variationnelle

- On doit donc trouver $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ solutions du système linéaire suivant : $\boxed{[K]\{\alpha\} = \{F\}}$

avec $[K]$ matrice NxN de terme générique :

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega k\, \underline{grad}\varphi_i(\underline{x}) \,.\, \underline{grad}\varphi_j(\underline{x}) dV$$

$$K_{ij} = a\left(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j\right)$$

$$K_{ij} = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_j) dV$$

$\{\alpha\}$ Vecteur colonne de longueur N constitué des constantes inconnues

$\{F\}$ Vecteur colonne de longueur N avec :

$$F_i = \int_\Omega f(\underline{x})\varphi_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_\phi} \phi_d \varphi_i(\underline{x}) dS$$

$$F_i = \int_\Omega \underline{f}(\underline{x}) . \underline{\varphi}_i(\underline{x}) + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d . \underline{\varphi}_i(\underline{x}) dS$$

- Une fois résolu ce système on obtient :

- une approximation de la solution T en formant :

$$T^h = \sum_{i=1}^N = \alpha_i \varphi_i(\underline{x})$$

- Une approximation du flux associé en formant :

$$\underline{q}^h(\underline{x}) = -k\, \underline{grad}\, T^h(\underline{x}) = -k \sum_{i=1}^N \alpha_i\, \underline{grad}\, \varphi_i(\underline{x})$$

- une approximation de la solution <u>u</u> en formant :

$$\underline{u}^h = \sum_{i=1}^N = \alpha_i \underline{\varphi}_i(\underline{x})$$

- une approximation des contraintes associées :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^h) = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}_d) + \sum_{i=1}^N \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i)\alpha_i$$

Approximation variationnelle

Propriétés de [K] :

- [K] est **symétrique** car $a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i)$

- La matrice est **définie positive** (démo cas thermique) :

$$\begin{cases} {}^t\{\alpha\}\,.\,[K]\,.\,\{\alpha\} & = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} K_{ij}\alpha_i\xi_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i\alpha_j \\ & = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a(\xi_i\varphi_i, \alpha_j\varphi_j) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a(T^h, T^h) \geq 0 \end{cases}$$

$${}^t\{\alpha\}\,.\,[K]\,.\,\{\alpha\} = 0 \;\Leftrightarrow\; a\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_j\right) = 0$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ d'après les propriétés de a. De plus comme $\left(\varphi_i(\underline{x})\right)_{1\leq i\leq N}$ est une base $\alpha_1 = ... = \alpha_N = 0$ et $\{\alpha\} = \{0\}$

- [K] est donc **inversible** et le système linéaire admet une solution unique (si le problème variationnel est bien posé, i.e. les déplacements de corps rigides sont éliminés par ex.)