



# Dynamique et modélisation de la turbulence

## 3. Description statistique de la turbulence

Paola CINNELLA

[paola.cinnella@sorbonne-universite.fr](mailto:paola.cinnella@sorbonne-universite.fr)

# QCM Wooclap – Dynamique de la vorticité

<https://www.wooclap.com/YIUDZC>



**WEB**

- 1 Connectez-vous sur [www.wooclap.com/YIUDZC](https://www.wooclap.com/YIUDZC)
- 2 Vous pouvez participer



**SMS**

- 1 Pas encore connecté ? Envoyez **@YIUDZC** au **06 44 60 96 62**
- 2 Vous pouvez participer

# 1. Les équations de Navier-Stokes moyennées

# Description statistique de la turbulence

- Etant donné la grande complexité des écoulements turbulents, pour de nombreuses applications on se limite à caractériser leur **comportement statistique**
- L'objectif est de décrire certaines **propriétés moyennes** de l'écoulement, voire globales (intégrées)
  - Champs de vitesse ou de pression moyens
  - Distributions pariétales moyennes
  - Coefficients de performance aérodynamique
  - ...
- Pour cela on cherche à établir un système d'équations décrivant la dynamique du champ moyen

## Un peu d'histoire

- Les équations de Navier-Stokes moyennées sont attribuées à Osborne Reynolds “On the dynamical theory of incompressible viscous fluids”, Philosophical Transaction of the Royal Society A 186, 123–164, 1895
- Toutefois une approche similaire est proposée par Joseph Boussinesq, « Essai sur la théorie des eaux courantes », Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXIII, No 1. Imprimerie Nationale, Paris, 1877.

# Un peu d'histoire

## ■ Que dit Boussinesq?

- Résoudre “une désespérante énigme”
- Utiliser les “moyennes” (de Reynolds!)
- Résoudre “les équations de l'équilibre dynamique moyen”

II. Il faut donc, si l'on veut que l'hydraulique cesse d'être, suivant l'expression de M. de Saint-Venant, *une désespérante énigme*<sup>(1)</sup> : 1<sup>o</sup> regarder les vitesses vraies, à l'intérieur d'un fluide

qui s'écoule, comme rapidement ou même brusquement variables d'un point à l'autre, capables, en un mot, de produire des frottements d'un tout autre ordre de grandeur que dans le cas de mouvements continus ; 2<sup>o</sup> faire dépendre les actions moyennes exercées à travers un élément plan fixe, non-seulement *des vitesses moyennes locales*, ou plutôt de leurs dérivées du premier ordre qui mesurent les glissements relatifs moyens des couches fluides, mais encore de l'intensité en chaque point de l'agitation tourbillonnaire qui y règne ; 3<sup>o</sup> rechercher, par conséquent, les causes dont peut dépendre, aux divers points d'une section, l'agitation tourbillonnaire, et faire varier avec ces causes le coefficient des frottements

intérieurs<sup>(1)</sup> ; 4<sup>o</sup> choisir, enfin, pour équations du mouvement, non pas les relations qui expriment à un moment donné l'équilibre dynamique des divers volumes élémentaires du fluide, mais les *moyennes de ces relations pendant un temps assez court, ou ce que l'on peut appeler les équations de l'équilibre dynamique moyen des particules fluides qui passent successivement par un même point.*

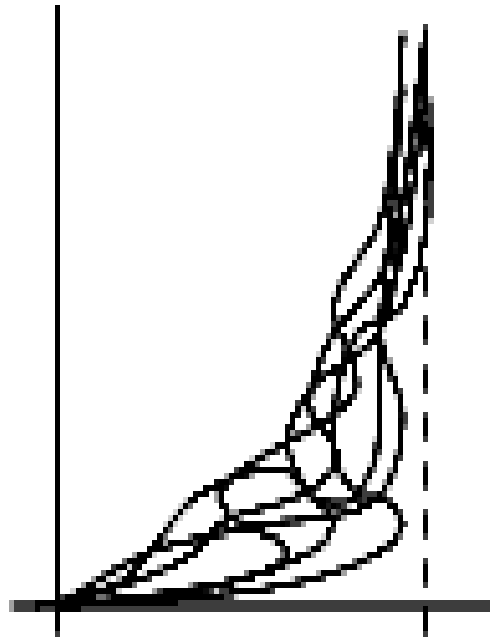
## Retour sur les systèmes dynamiques

« ... we put our faith in the tendency for dynamical systems with a large number of degrees of freedom, and with coupling between these degrees of freedom, to approach a statistical state which is independent (partially, if not wholly) of the initial conditions. With this general property of dynamical systems in mind, rather than investigate the motion consequent upon a particular set of initial conditions, we explore the existence of solutions which are asymptotic in the sense that further passage of time changes them in some simple way only. »

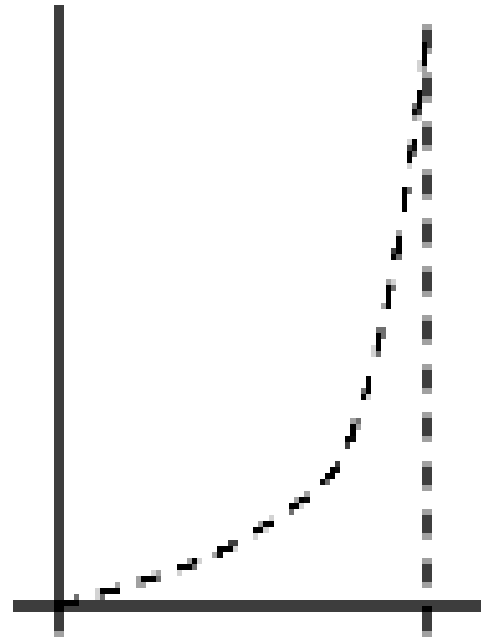
G.K. BATCHELOR (1953, pp:6-7)

# Description statistique d'un écoulement turbulent

Profils de vitesse instantanés



Profil de Vitesse moyen





# Rappel sur les opérateurs de moyenne

- Plusieurs définitions de moyenne possibles

- **Moyenne d'ensemble** : la plus générale

$$\bar{f}_E(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{E,n}(\mathbf{x}, t)$$

Moyenne statistique sur N réalisations de l'écoulement → difficile à mettre en œuvre en pratique

- **Moyenne spatiale** : utilisée pour les écoulements homogènes (constants en espace)

$$\bar{f}_V(\mathbf{x}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V f(\mathbf{x}, t) dx^3$$

En pratique l'intégrale se fait sur un volume de taille finie, tel que  $\sqrt[3]{V} \gg l$  ( $l$  taille des structures turbulentes)

- **Moyenne temporelle** : la plus utilisée pour les simulations numériques RANS → Bien adaptée à des écoulements statistiquement stationnaires

$$\bar{f}_T(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, t) dt$$

En pratique l'intégrale se fait sur un intervalle temporel fini, tel que  $T \gg t$  (temps de vie des structures turbulentes)

# Décomposition de Reynolds

- On décompose les grandeurs instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

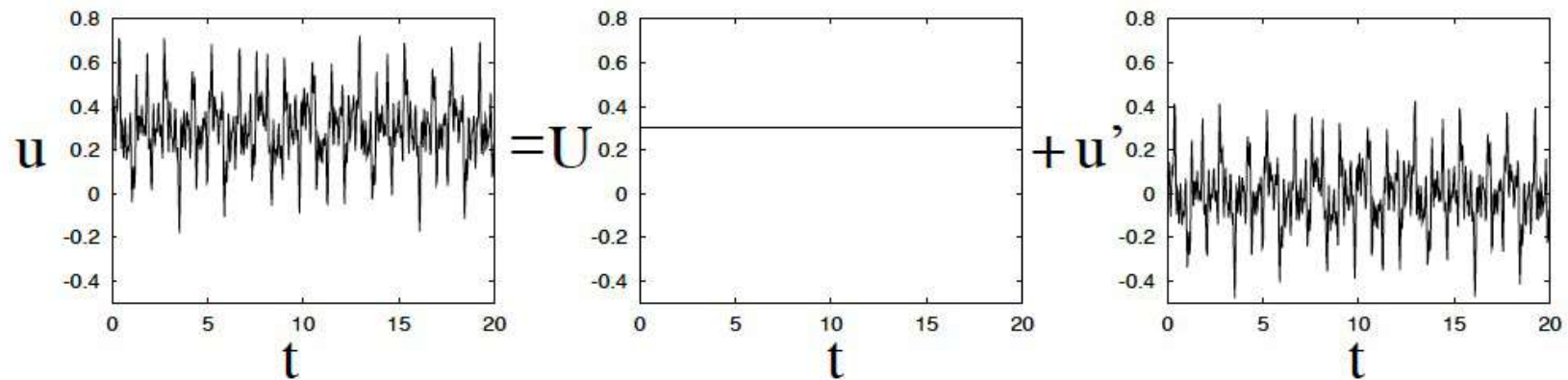
$$p = \bar{p} + p'$$

- Propriétés de la décomposition :  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$

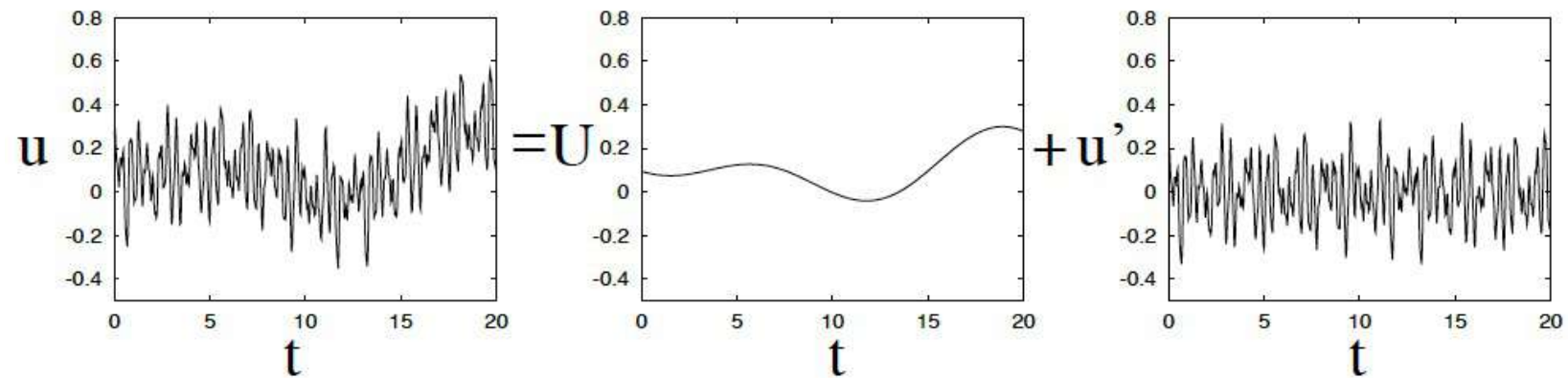
$$\overline{\varphi'} = 0; \quad \overline{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi} + \overline{\varphi'\psi'}; \quad \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_i}$$

# Exemples

- Décomposition en partie moyenne et fluctuante d'un signal statistiquement stationnaire

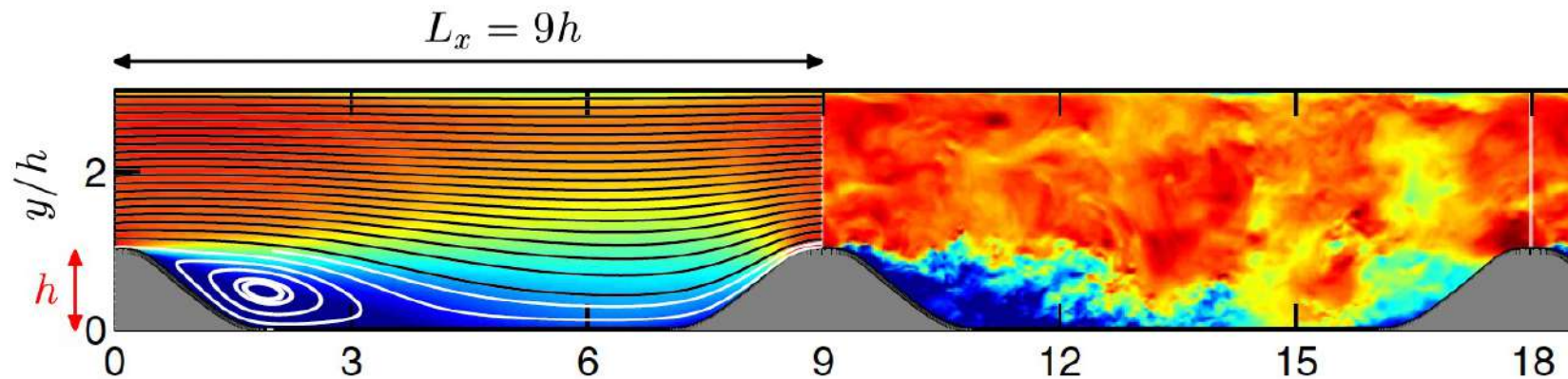


- Décomposition en partie moyenne et fluctuante d'un signal instationnaire

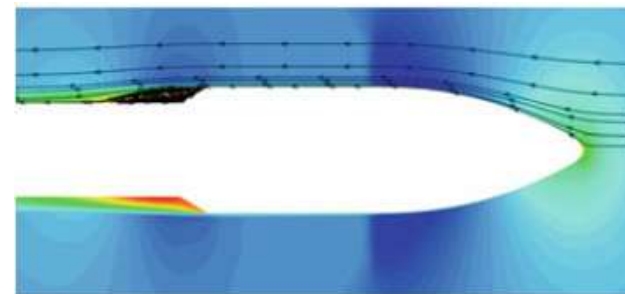
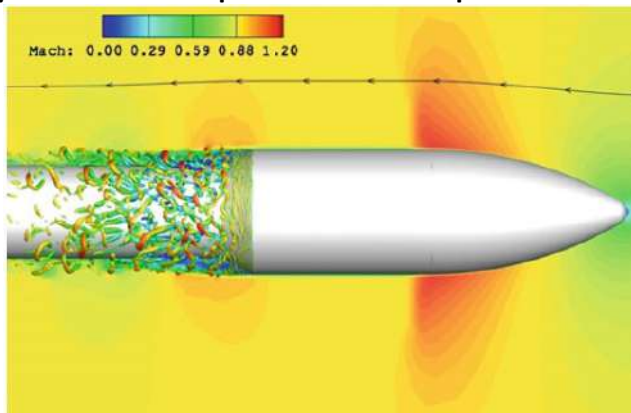


# Exemples

- Champ moyen et champ instantané pour l'écoulement dans un canal avec restrictions périodiques



- Champ moyen et champ instantané pour l'écoulement transsonique autour de Ariane 6



# Equations moyennées à la Reynolds (RANS)

- Equations de NS incompressibles
- On injecte dans les équations de NS la décomposition de la vitesse et pression en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'; \quad p = \bar{p} + p'$$

- Après moyenne, on aboutit aux équations de Reynolds

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \boxed{\overline{\rho u'_i u'_j}} \right) \end{cases} \quad \begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \text{contraintes visqueuses} \\ \tau_{ij}^R &= -\overline{\rho u'_i u'_j} = \text{contraintes turbulentes} \end{aligned}$$

(tenseur de Reynolds)

Système d'équations formellement similaire à celui de NS mais **ouvert**

- Forme lagrangienne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\bar{D} \bar{u}_i}{\bar{D} t}$$

- $\frac{\bar{D}}{\bar{D} t}$  = dérivée matérielle par rapport au champ moyen (notation vectorielle  $\frac{\bar{D} \bar{\mathbf{u}}}{\bar{D} t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}$ )

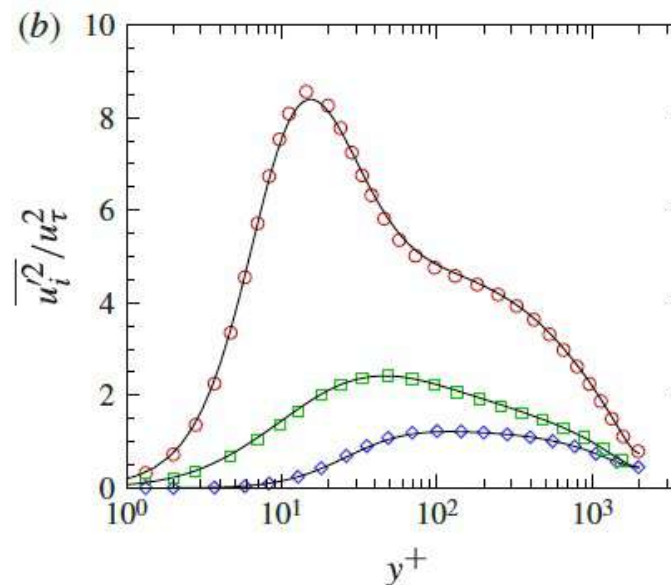
# Dérivation des équations RANS (tableau blanc)

# Propriétés du tenseur de Reynolds

- La quantité  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  a les dimensions d'une contrainte  $\rightarrow$  **contrainte de Reynolds**
- $\overline{u'_i u'_j}$  est un tenseur symétrique et semi-défini positif (**tenseur de corrélation**):

$$\det(\tau_{ij}^R) \geq 0, \lambda_i^R \geq 0$$

- La quantité  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = -\frac{1}{2\rho} \text{tr}(\tau_{ij}^R) \geq 0$  est appelée **énergie cinétique turbulente**
- Les composantes normales de  $\tau_{ij}^R$  ne sont pas isotropes :
  - Une estimation grossière montre que  $\overline{u'_1 u'_1} : \overline{u'_2 u'_2} : \overline{u'_3 u'_3} \approx 4 : 2 : 3$



Profils des tensions de Reynolds à travers un canal plan.

En rouge :  $\overline{u'_1 u'_1}$

En bleu :  $\overline{u'_2 u'_2}$

En vert :  $\overline{u'_3 u'_3}$

(From Bernardini et al., 2014)

# Interprétation du tenseur de Reynolds

- Considérons la variation de quantité de mouvement pour un volume fixe de fluide  $V_0$  sans forces extérieures appliquées :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho \mathbf{u} dV = - \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

le membre de droite étant le flux de  $\mathbf{q}$  mvt à travers la frontière de ce volume

- La composante  $i$ -ème est :

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho u_i dV = - \oint_{\partial V_0} \rho u_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \oint_{\partial V_0} \rho u_i (u_j n_j) dS$$

- Sa valeur moyenne est donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q_i \rangle}{dt} &= - \oint_{\partial V_0} \rho \langle (\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j) \rangle n_j dS \\ &= - \oint_{\partial V_0} \rho (\bar{u}_i \bar{u}_j + \langle u'_i u'_j \rangle) n_j dS = - \iiint_{V_0} \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{u}_j + \langle u'_i u'_j \rangle) \end{aligned}$$

- La divergence du tenseur de Reynolds dans les équations moyennées représente donc le flux de quantité de mouvement à travers la surface due aux fluctuations turbulentes, donc une contrainte.



# Bilan d'énergie cinétique du champ moyen

- On procède comme pour le bilan d'énergie cinétique instantanée, en multipliant l'équation de q mvt moyennée par la vitesse moyenne

$$\bar{u}_i \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \right) = \bar{u}_i \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \right) \right)$$

- Ce qui donne (en utilisant la condition de divergence nulle  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$ ) :

$$\frac{\partial \left( \frac{\bar{u}_i^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{\bar{u}_i^2}{2} \bar{u}_j \right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{p})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \frac{\bar{u}_i^2}{2}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \langle u'_i u'_j \rangle) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle$$

- Forme lagrangienne :

$$\frac{\bar{D} \left( \frac{\bar{u}_i^2}{2} \right)}{\bar{D}t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{p})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \frac{\bar{u}_i^2}{2}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \langle u'_i u'_j \rangle) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle$$

- Les termes en vert sont des termes de transport : ils redistribuent l'énergie cinétique via les fluctuations de pression et vitesse ou la diffusion moléculaire
- Le terme en bleu (<0) est la dissipation de l'énergie cinétique moyenne par effet de la viscosité
- Terme en rouge : transfert d'énergie cinétique moyenne vers le champ fluctuant. Preuve?

# Equations du champ fluctuant

- En soustrayant les équations du champ moyen des équations instantanées on obtient :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \right)$$

- Ces équations instantanées ne peuvent être résolues facilement
- En multipliant par la vitesse fluctuante, en prenant en compte l'équation de continuité et en moyennant, on peut toutefois obtenir une équation pour l'énergie cinétique des fluctuations, ou énergie cinétique turbulente :

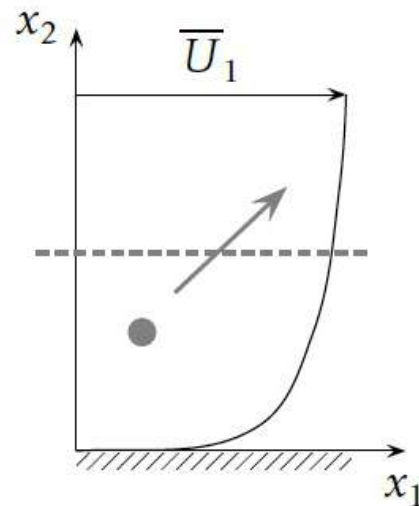
$$\frac{\partial \langle \frac{u'_i u'_i}{2} \rangle}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \langle \frac{u'_i u'_i}{2} \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle - \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left\langle u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \langle \frac{u'_i u'_i}{2} \rangle}{\partial x_j} - \left\langle \frac{1}{2} u'_i u'_i u'_j \right\rangle \right)$$

- $\frac{u'_i u'_i}{2} = k \rightarrow$  énergie cinétique turbulente
- Production  $\mathcal{P} \geq 0$** : énergie injectée par le champ moyen par le travail de déformation au grandes échelles
- Dissipation  $\epsilon \leq 0$** : énergie fluctuante dissipée par le travail de déformation aux petites échelles
- Termes de transport (redistribution) : travail de pression ; diffusion moléculaire ; transport turbulent

# Interprétation du terme de Production

- **Ecoulement cisailé pur stationnaire** (taux de déformation constant, turbulence homogène → dérivées spatiales des statistiques turbulentes nulles)

$$-\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle - \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle = 0 \text{ (production=dissipation)}$$



$$\begin{cases} u'_2 > 0 \\ u'_1 < 0 \end{cases} \quad \overline{u'_1 u'_2} < 0$$

$$\begin{cases} u'_2 < 0 \\ u'_1 > 0 \end{cases} \quad \overline{u'_1 u'_2} < 0$$

- Dans les deux cas,  $\mathcal{P} \geq 0$  contribue à augmenter l'énergie cinétique turbulente  $k$

# Equation de la température moyenne

- Dans un écoulement incompressible avec propriétés constantes, la température se comporte comme un scalaire passif, qui est simplement transporté par le champ de vitesse :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\nu}{c_p} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

avec  $\alpha$  la diffusivité thermique.

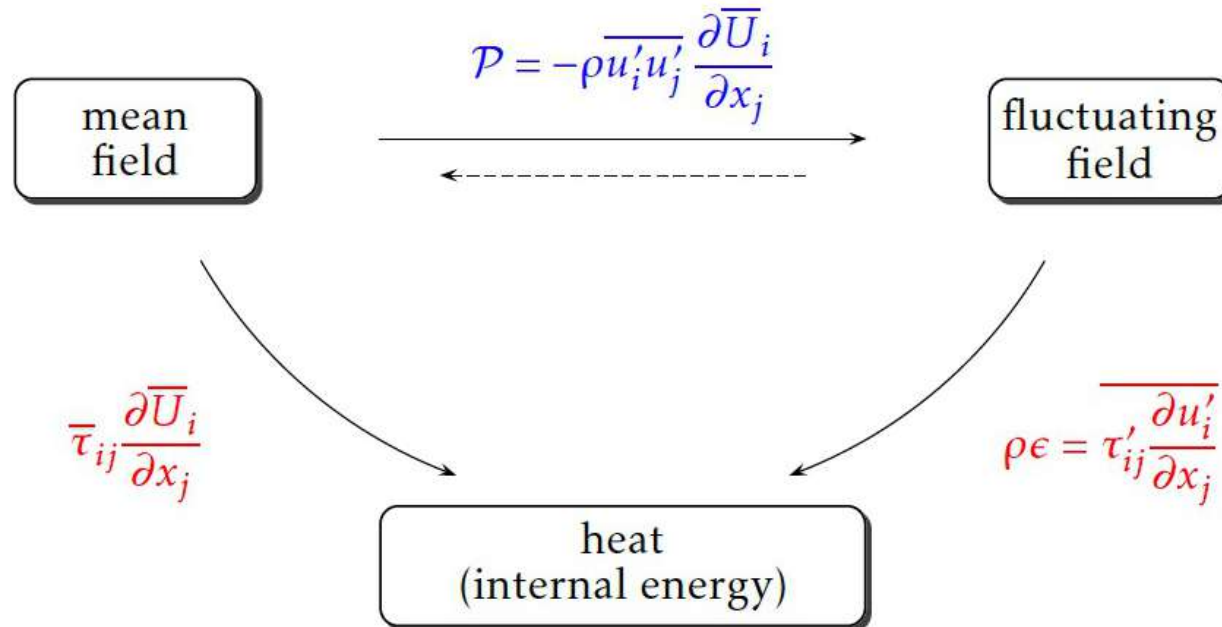
- En introduisant une décomposition de Reynolds pour la température :  $T = \bar{T} + T'$  et en moyennant l'équation précédente on obtient une équation similaire pour la température moyenne :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \overline{u'_i T'} \right) + \frac{\nu}{c_p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{c_p} \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

où l'on remarque un nouveau terme non fermé, analogue du tenseur de Reynolds.

- $-\overline{u'_i T'}$  est appelé **flux de chaleur turbulent** et il représente la diffusion de température due aux fluctuations turbulentes
  - Il doit être modélisé

# Echanges champ moyen/champ fluctuant



$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \overline{u'_i T'} \right) + \frac{\nu}{c_p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{c_p} \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle$$

# Tenseur d'anisotropie

- $\tau_{ij}^R$  peut être décomposé en une partie isotrope et une partie déviatrice :

$$\tau_{ij}^R = -\rho \left( \frac{2}{3}k\delta_{ij} + a_{ij} \right)$$

avec  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  tenseur d'anisotropie

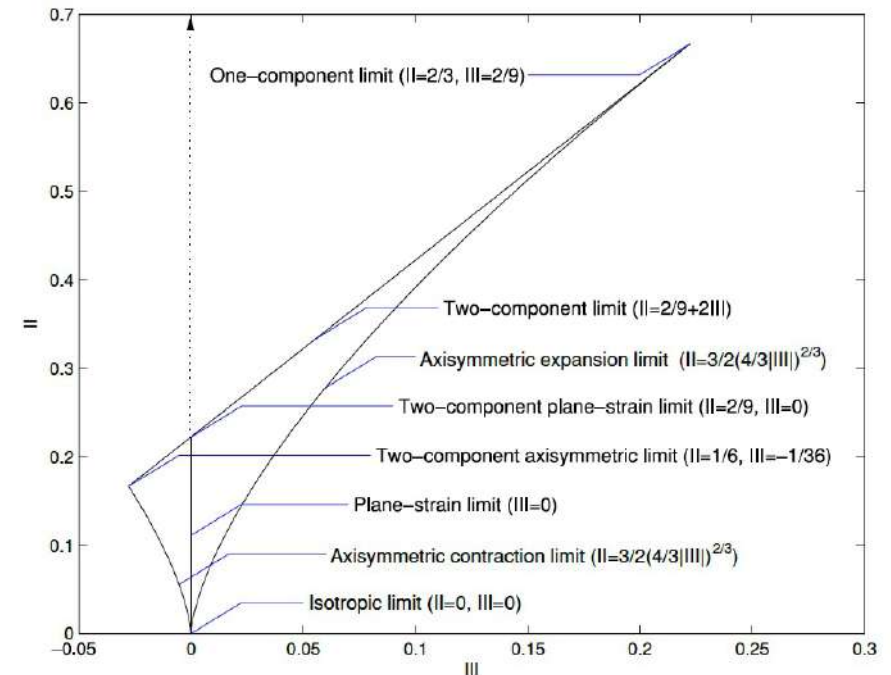
- Le plus souvent, on préfère utiliser le tenseur d'anisotropie normalisé :  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ,  $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k}$
- Ces tenseurs sont diagonalisables :  $\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T$ , avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A)$  et  $\mathbf{E}$  la matrice des vecteur propres
  - On peut utiliser les invariants de  $\mathbf{B}$  pour décrire le caractère multi-dimensionnel des fluctuations turbulentes (1D, 2D ou 3D) :  $I_B = \text{tr}(\mathbf{B}) = 0$ ;  $II_B = \text{tr}(\mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)$ ;  $III_B = \det(\mathbf{B})$
- Les invariants sont liés entre eux par le **théorème de Cayley-Hamilton**:

$$b_{ij}^3 + II_B b_{ij} - III_B \delta_{ij} = 0$$

## Tenseur d'anisotropie (cont.)

- Comme  $\overline{u'_i u'_j}$  est symétrique et semi-défini positif, il respecte les conditions
 
$$\overline{u'_i u'_i} \geq 0; \quad \overline{u'_i u'_i} + \overline{u'_j u'_j} \geq 2|\overline{u'_i u'_j}|;$$

$$\det(\overline{u'_i u'_j}) \geq 0; \quad \forall i = 1,2,3, j = 1,2,3$$
- Il en est donc de même pour  $b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ 
  - Les composantes diagonales de  $\overline{u'_i u'_j}$  sont comprises entre 0 et  $2k \rightarrow -\frac{1}{3} \leq b_{ii} \leq \frac{2}{3}$
  - Les composantes hors diagonale de  $\overline{u'_i u'_j}$  sont entre  $-k$  et  $k \rightarrow -\frac{5}{6} \leq b_{ii} \leq \frac{1}{6}$
- Cela donne des conditions sur les invariants de  $b_{ij}$
- Triangle de Lumley** (1978) : à l'intérieur de ce triangle généralisé,  $\det(\overline{u'_i u'_j}) \geq 0$ 
  - $\overline{u'_i u'_j}$  satisfait les conditions de « réalisabilité »



## Tenseur d'anisotropie (cont.)

- On peut vérifier que seul le tenseur d'anisotropie contribue au transport de quantité de mouvement moyen :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left( \bar{p} + \frac{2}{3} k \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - a_{ij} \right)$$

- Responsable de la diffusivité accrue dans les écoulements turbulents
- La partie isotrope des contraintes de Reynolds s'ajoute à la pression : elle est parfois appelée **pression turbulente**



# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

- La plupart des modèles de fermeture pour  $a_{ij}$  utilisés dans les applications en sciences de l'ingénieur utilisent une approximation de type gradient de la forme:

$$\tau_{ij}^R - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = 2\rho k b_{ij} = 2\rho \nu_t \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \text{tenseur du taux de déformation moyen}$$

où le coefficient  $\nu_t$  est appelé **viscosité tourbillonnaire** ou **viscosité turbulente** (eddy viscosity)

- Le problème de modélisation se réduit alors à déterminer  $\nu_t$
- La contribution de la pression turbulente est négligée
- Analogie avec la loi de comportement des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien isochore :

$$\tau_{ij} = 2\rho \nu S_{ij}$$

- Cette approximation est connue sous le nom d'**hypothèse de Boussinesq**
- Attention** :  $\nu_t$  est une propriété de l'écoulement turbulent et non du fluide comme  $\nu$
- Nous discuterons par la suite d'autre choix de modélisation pour  $\tau_{ij}^R$

# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

$$(12) \quad \begin{cases} N_1 = -p + 2\varepsilon \frac{du}{dx}, & N_2 = -p + 2\varepsilon \frac{dv}{dy}, & N_3 = -p + 2\varepsilon \frac{dw}{dz}, \\ T_1 = \varepsilon \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), & T_2 = \varepsilon \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), & T_3 = \varepsilon \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right). \end{cases}$$

## § III. EXPRESSION APPROCHÉE DU COEFFICIENT $\varepsilon$ DES FROTTEMENTS INTÉRIEURS.

10. Ces expressions (12) sont isotropes et ne diffèrent de celles que Navier a données pour représenter les frottements développés dans les mouvements bien continus des fluides, qu'en ce que le coefficient  $\varepsilon$  doit dépendre en chaque point, non-seulement de la température et peut-être de la pression  $p$ , mais encore et surtout de l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite.

Causes  
at dépendent  
coefficient  $\varepsilon$   
frottements  
intérieurs  
l'intensité  
l'agitation  
arbillonnaire.

# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

## ■ Implications :

- Les équations du champ moyen deviennent de la forme :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

- Approximation « pseudo-laminaire »

- On en déduit par ailleurs que  $\mathcal{P} = - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \geq 0$  ;

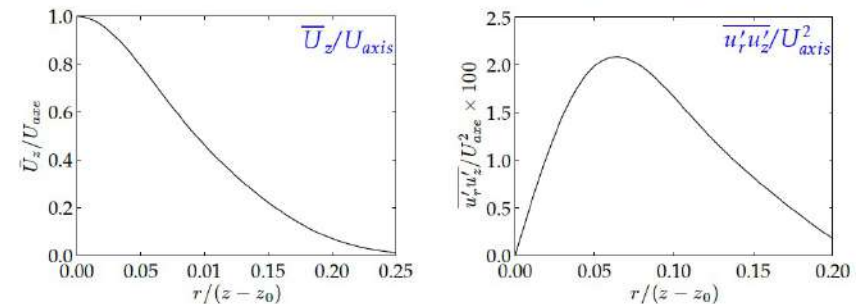
- la viscosité tourbillonnaire produit toujours un transfert d'énergie de signe positif vers les petites échelles

# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

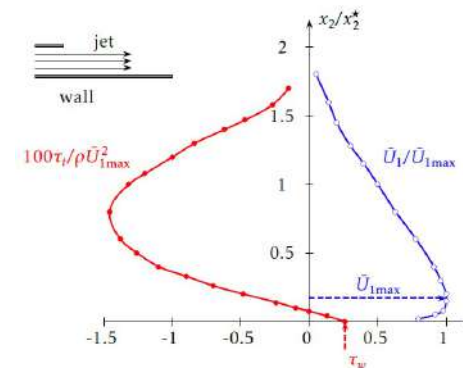
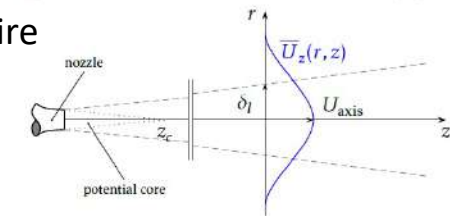
## ■ Implications (suite) :

- Tenseur d'anisotropie modélisé parallèle au taux de déformation moyen.
  - Etant symétriques et déviateurs, ces tenseurs n'ont que 5 composantes indépendantes, liées entre elles via le coefficient  $\nu_t$ .
  - Comme nous le verrons par la suite, cette hypothèse est rarement vérifiée, même pour des écoulements simples.
- Pour des écoulements 2D avec une direction prédominante (ex. couches limites), la seule composante non négligeable de  $\tau_{ij}^R$  est la contrainte de cisaillement  $\overline{\rho u'_1 u'_2}$ .
  - Cela donne  $\overline{u'_1 u'_2} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2}$ , ce qui peut être pris comme une définition de  $\nu_t$
  - la contrainte totale s'annule lorsque le profil de vitesse atteint un maximum!

$M = 0.16$  and  $Re_D = 9.5 \times 10^4$  (from Hussein, Capp & George, 1994)



Jet circulaire  
→ OK



Plane wall jet (nozzle exit)  
 $Re \approx 2 \times 10^4$

$$\tau_t = \mu \frac{d\overline{U_1}}{dx_2} - \overline{\rho u'_1 u'_2}$$

Contre-exemple : jet confiné

# Equation de transport pour les tensions de Reynolds

- Alternative à l'hypothèse de Boussinesq : équation de transport pour les tensions de Reynolds
- Dérivée en manipulant les équations NS

- On pose d'abord :  $NS(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0$

- On construit l'opérateur suivant :  $\overline{u'_i NS(u_j) + u'_j NS(u_i)} = 0$

- Cela donne 6 equations scalaires de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = & -\tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} + \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} \right] \end{aligned}$$

# Equation de transport pour les tensions de Reynolds

- Bonne nouvelle : nous avons trouvé des équations de transport pour  $\tau_{ij}^R$
- Mauvaise nouvelle : nous avons créé 22 nouvelles inconnues !

$$\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} \rightarrow 10 \text{ unknowns}$$

$$2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \rightarrow 6 \text{ unknowns}$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \rightarrow 6 \text{ unknowns}$$

- Le caractère non linéaire des équations NS fait qu'à chaque fois que l'on construit des équations de transport pour les corrélations turbulentes d'ordre  $m$ , elle fait apparaître des corrélations  $m+1$
- C'est ce qu'on appelle le **problème de fermeture** des équations RANS : l'opération de moyenne implique une perte d'information, qui se traduit en l'apparition de **nouveau termes non fermés**

# Le cas compressible : équations moyennées à la Favre

- Les considérations précédentes s'appliquent aux écoulements incompressibles.
- Comment traiter les équations de NS compressibles?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho u_j \left( h + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] = \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij}; \quad q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

- Masse volumique **fluctuante**  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$
- L'application de la décomposition de Reynolds aux équations NS compressible conduit à un système d'équations pour le champ moyen qui n'est pas formellement identique aux équations du départ

# Equations moyennées à la Favre

- C'est pourquoi on adopte la décomposition de Favre, basée sur des moyennes **pondérées** par rapport à la masse volumique, e.g. :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \tilde{u}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i dt$$

- Le champ de vitesse est décomposé de la façon suivante

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad \text{avec} \quad u_i'' = u_i' - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}}$$

Relation entre fluctuations de Favre et fluctuations de Reynolds:

$$\tilde{u}_i'' = u_i' - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho (u_i - \tilde{u}_i) dt = \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i dt \right) - \tilde{u}_i = \tilde{u}_i - \tilde{u}_i = 0$$



# Equations moyennées à la Favre

- En introduisant des décompositions semblables pour toutes les variables, on aboutit aux équations de NS compressibles moyennées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right] = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\bar{q}_j - \overline{\rho u_j'' h''} + \overline{\tau_{ij} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{u}_i \left( \bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) \right] \end{array} \right.$$

Système d'équations formellement similaire aux équations NS compressibles mais **ouvert**

# Fermeture des équations RANS compressibles

## ■ Analysons les nouveaux termes

- Tenseur des contraintes de Reynolds  $\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$
- Energie cinétique turbulente  $\overline{\rho k} = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$
- Flux de chaleur turbulent  $q_{Tj} = \overline{\rho u_j'' h''}$
- Diffusion moléculaire et transport turbulent d'énergie

$$\overline{\tau_{ji} u_i''} \quad \text{et} \quad \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''}$$

→ Ces deux termes sont souvent négligés

# Récapitulatif

- Pour de nombreuses applications, la connaissance du comportement « moyen » d'un écoulement est suffisante pour extraire certaines quantités d'intérêt (forces, débits, ...)
  - La notion de « moyenne » nécessite d'être précisée (d'ensemble, volumique, temporelle,...)
  - La plus utilisée est la **moyenne temporelle**
- Les propriétés de l'écoulement sont décomposées en une **partie moyenne** et une **partie fluctuante**
- Les équations RANS décrivent le comportement du champ moyen mais font apparaître des **termes supplémentaires non fermés**
  - Ces termes représentent la contribution des fluctuations turbulentes aux transferts du champ moyen
- Pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, le terme additionnel fait apparaître un tenseur d'ordre 2, appelé **tenseur de Reynolds**
  - Les composantes du tenseur de Reynolds ont les dimensions d'une contrainte et elles sont appelées **les tensions de Reynolds**
- Dans le cas compressible, de nombreux termes non fermés apparaissent dans l'équation de l'énergie, dont le **flux de chaleur turbulent**
- Tous ces termes nécessitent d'être **modélisés** afin de les relier au champ moyen
- La loi de comportement la plus répandue pour le tenseur de Reynolds s'appuie sur une analogie entre les contraintes de Reynolds et les contraintes visqueuses d'un fluide Newtonien : c'est **l'approximation de Boussinesq**

## Next time...

- QCM de 10 minutes
- Dans le prochain cours on s'intéressera à une situation simplifiée qui permet d'obtenir quelques relations analytiques : la turbulence homogène et isotrope (THI)
- TD sur la THI