**2A001 - Dynamique du Solide Rigide** **Année 2018-2019**

---

# Écrit du Jeudi 14 mars 2019
# Durée 2h

---

*Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.*
*Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (–2 points possibles).*
*Aucun point ne sera attribué à une réponse écrite au crayon papier.*

*Pour la partie graphique, tout tracé non justifié sur la copie ne sera pas comptabilisé ...*
*Inversement, un tracé erroné basé sur une bonne justification sera récompensé !*

## Questions de cours

1. Donner la définition d'un solide indéformable.
2. Soient un repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et deux points matériels A et B. On a $\vec{V}(\mathrm{A}/\mathcal{R}) = -\vec{x}$ et $\vec{V}(\mathrm{B}/\mathcal{R}) = \vec{x}$ à un instant donné. Est-il légitime de considérer que A et B appartiennent, à cet instant, à un même solide indéformable ?
3. Donner un exemple de mouvement pour lequel le centre instantané de rotation n'est pas défini.
4. Énoncer le Principe des Actions Réciproques (statique).
5. Le mouvement (hélicoïdal) d'un solide S de centre de masse C par rapport à $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ admet pour torseur cinématique $\{\mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathcal{R})\}_\mathrm{C} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega_z \\ 0 & 0 & V_z \end{Bmatrix}$. Quelle est la forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathcal{R}')\}_\mathrm{C}$ où $\mathcal{R}' = (\mathrm{C}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ?

## Problème de Cinématique : présentation du mécanisme

On considère un mécanisme constitué de 5 solides indéformables :

— **Le bâti** (0) **:** confine le mécanisme complet dans une cavité circulaire de centre O, de rayon $R$ et contenue dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On lui associe le repère $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

— **La tige $T_1$ :** de longueur $L_1$, d'extrémités O, B et en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0).

— **Le roue $D_1$ :** de rayon $R_1$, en liaison pivot d'axe $(\mathrm{A}, \vec{z}_0)$ avec la tige $T_1$.

— **Le roue $D_2$ :** de rayon $R_2$, en liaison pivot d'axe $(\mathrm{B}, \vec{z}_0)$ avec la tige $T_1$. $D_2$ est en contact avec $D_1$ au point C et en contact avec le bâti en D.

— **La tige $T_2$ :** de longueur $L_2$, d'extrémités E et F. $T_2$ est en liaison pivot d'axe $(\mathrm{E}, \vec{z}_0)$ avec la roue $D_1$ et en liaison glissière d'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_2)$ avec un solide auxiliaire lui-même en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0).

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Pour paramétriser la cinématique du mécanisme, on introduit les vecteurs unitaires et angles suivants (cf. FIGURE 2) :
- $\overrightarrow{OA} = \ell_1 \vec{u_1}$, $\vec{v_1} = \vec{z_0} \wedge \vec{u_1}$ et $\theta_1 = (\vec{x_0}, \vec{u_1})$ ;
- $\overrightarrow{AE} = d\vec{x_1}$, $\vec{y_1} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_1}$ et $\alpha_1 = (\vec{x_0}, \vec{x_1})$ ;
- $\vec{x_2}$ est attaché à $D_2$ et orthogonal à $\vec{z_0}$ ; $\vec{y_2} = \vec{z_0} \wedge \vec{x_2}$ et $\alpha_2 = (\vec{x_0}, \vec{x_2})$ ;
- $\overrightarrow{FE} = L_2 \vec{u_2}$, $\vec{v_2} = \vec{z_0} \wedge \vec{u_2}$ et $\theta_2 = (\vec{x_0}, \vec{u_2})$.

Les angles définis ci-dessus sont orientés dans le sens direct.

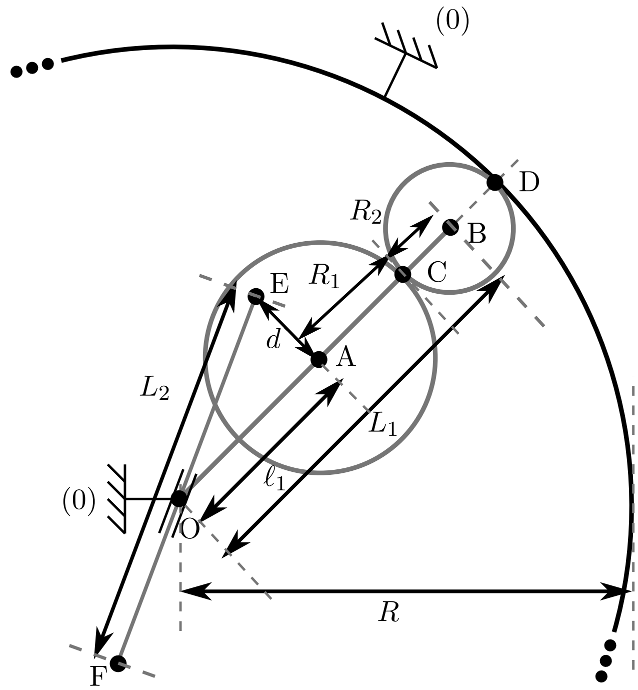


FIGURE 1 – Schéma du mécanisme et données géométriques. On note que $\ell_1 + R_1 + R_2 = L_1$ et que $R = L_1 + R_2$.

L'objectif de cette étude est de caractériser, dans le repère de travail $\mathcal{R}_0$, le mouvement de la tige $T_2$ (*"sortie"*) en supposant connu celui de $T_1$ (*"entrée"*). L'analyse du système complet sera décomposée en quatre parties : le sous-système $\{0, T_1, D_1, D_2\}$ sera étudié dans un premier temps (parties 1 et 2) et la tige $T_2$ sera considérée seule par la suite (parties 3 et 4).

# 1 Cinématique Analytique

1. Dessiner le diagramme de changement de base faisant intervenir l'angle $\theta_1$.
2. Exprimer les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}(T_1/0)$, $\vec{\Omega}(D_1/0)$, $\vec{\Omega}(D_2/0)$ et $\vec{\Omega}(T_2/0)$.

**Solution :**

$\vec{\Omega}(T_1/0) = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(D_1/0) = \dot{\alpha}_1 \vec{z}_0$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(D_2/0) = \dot{\alpha}_2 \vec{z}_0$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(T_2/0) = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$

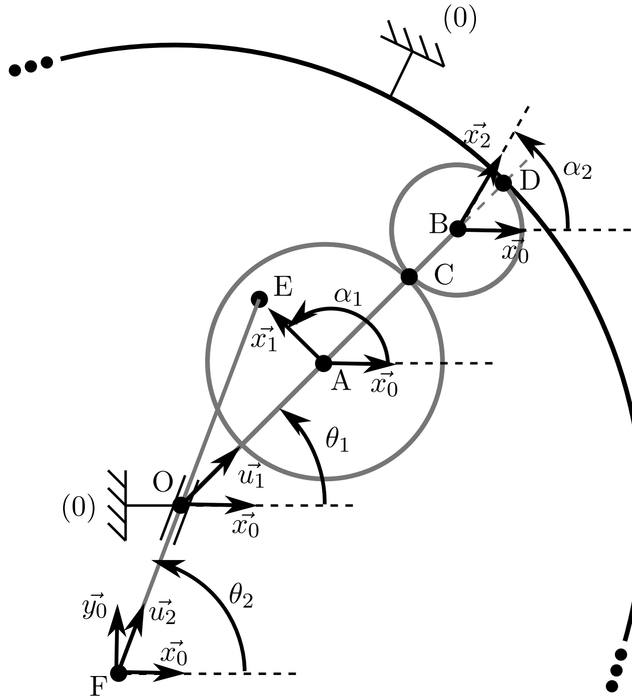


Figure 2 – Angles et vecteurs unitaires permettant de paramétriser la cinématique.

3. Exprimer les vitesses $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$, $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$, $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1)$ puis $\vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0)$.

**Solution :** O correspond au lieu de la liaison pivot entre $T_1$ et (0), on a donc $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_1/0) = \vec{0}$. Par la loi de torseur, on obtient

$$\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) = \vec{\Omega}(T_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{v_1} \qquad \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) = \vec{\Omega}(T_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{v_1}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) &= \vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0) + \vec{\Omega}(D_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_1 \vec{z_0} \wedge (R_1 \vec{u_1}) \\ &= (\ell_1 \dot{\theta}_1 + R_1 \dot{\alpha}_1) \vec{v_1}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0) &= \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_2 \vec{z_0} \wedge (-R_2 \vec{u_1}) \\ &= (L_1 \dot{\theta}_1 - R_2 \dot{\alpha}_2) \vec{v_1}.\end{aligned}$$

D'après la loi de composition des vitesses

$$\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1) = \vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0) - \vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) = \big((L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1 \dot{\alpha}_1 - R_2 \dot{\alpha}_2\big) \vec{v_1}.$$

Enfin

$$\vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0) + \dot{\alpha}_2 \vec{z_0} \wedge (R_2 \vec{u_1}) = (L_1 \dot{\theta}_1 + R_2 \dot{\alpha}_2) \vec{v_1}.$$

4. Exprimez les conditions de roulement sans glissement entre $D_1$ et $D_2$, puis entre $D_2$ et (0). En déduire deux relations scalaires faisant intervenir $\dot{\theta}_1$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et les données géométriques du problème.

**Solution :** Les conditions de roulement sans glissement sont

$$\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/D_1) = \vec{0} \qquad \vec{V}(\mathrm{D} \in D_2/0) = \vec{0}$$

d'où

$$\begin{cases} (L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1\dot{\alpha}_1 - R_2\dot{\alpha}_2 = 0 \\ L_1\dot{\theta}_1 + R_2\dot{\alpha}_2 = 0 \end{cases} .$$

5. Déterminez $\dot{\alpha}_1$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ (et des grandeurs géométriques).

**Solution :** D'après la question précédente

$$(L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1 - R_1\dot{\alpha}_1 + L_1\dot{\theta}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_1\dot{\alpha}_1 = (2L_1 - \ell_1)\dot{\theta}_1.$$

D'après la FIGURE 1, on a $2L_1 - \ell_1 = L_1 + R_1 + R_2 = R + R_2$ et on peut donc écrire $\dot{\alpha}_1 = \frac{R+R_2}{R_1}\dot{\theta}_1$.

## 2 Cinématique Graphique

On suppose $\dot{\theta}_1 > 0$ et $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)\| = 1.5$ cm. Vous réaliserez les constructions sur la FIGURE 3.

1. Identifier les centres instantanés de rotation (CIR) des mouvements $T_1/0$, $D_2/D_1$ et $D_2/0$.

**Solution :** $T_1$ et (0) sont en liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{z}_0)$. Ainsi, le CIR du mouvement $T_1/0$ est le point O.

$D_2$ roule sans glisser sur $D_1$ (resp. (0)) en C (resp. en D). Par conséquent, le CIR $D_2/D_1$ (resp. $D_2/0$), se trouve en C (resp. D).

2. Construire le vecteur $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$.

**Solution :** O étant le CIR de $T_1/0$, la vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ a pour support la droite perpendiculaire à (OA) passant par A. Le sens et la norme de $\vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ sont tirés de l'énoncé.

3. Déterminer graphiquement $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{C} \in T_1/0)$.

**Solution :** $\vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{C} \in T_1/0)$ ont leur support perpendiculaire à (OA). Leur construction s'obtient aisément à l'aide du triangle des vitesses (de sommet O).

4. Déterminer graphiquement $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0)$.

**Solution :** Notons d'abord que $\vec{V}(\mathrm{B} \in D_2/0) = \vec{V}(\mathrm{B} \in T_1/0)$ puisque B est le lieu de la liaison pivot $D_2$-$T_1$. Le vecteur $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$ se déduit de $\vec{V}(\mathrm{B} \in D_2/0)$ par le triangle des vitesses de sommet D (CIR de $D_2/0$).

5. Déterminer graphiquement la position du CIR du mouvement $D_1/0$.

**Solution :** Il est clair que le CIR de $D_1/0$ est un point de la droite (OA).

D'une part, d'après la loi de composition des vitesses $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{C} \in D_2/0)$. D'autre part, $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0)$ car A est le lieu de la liaison pivot $D_1$-$T_1$. Ainsi, le mouvement $D_1/0$ est parfaitement connu en A et en C.

En utilisant le triangle des vitesses, on obtient le CIR de $D_1/0$ à l'intersection de (OA) et de la droite passant par les extrémités de $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$ et $\vec{V}(\mathrm{C} \in D_1/0)$.

# 3 Cinématique Analytique (suite)

1. Expliquer pourquoi la liaison équivalente $T_2$-0 ne peut être traitée comme une liaison pivot glissière et justifier que le torseur cinématique du mouvement de $T_2$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ soit de la forme :

$$\{\mathcal{V}(T_2/\mathcal{R}_0)\}_{\mathrm{O}} = \begin{Bmatrix} 0\vec{u_2} + 0\vec{v_2} + \Omega_z \vec{z_0} \\ U\vec{u_2} + 0\vec{v_2} + 0\vec{z_0} \end{Bmatrix}.$$

**Solution :** Pour une pivot-glissière l'axe du glissement est aligné avec l'axe de rotation ce qui n'est pas le cas ici.

D'après l'énoncé, le solide auxiliaire peut translater selon $(\mathrm{O}, \vec{u_2})$ par rapport à $T_2$ et tourner autour de $\vec{z_0}$ par rapport à (0). Le torseur cinématique de la liaison équivalente $T_2$-0 (sans prendre en compte le solide auxiliaire) est bien de la forme proposée.

2. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$.

**Solution :**

$$\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) = \vec{V}(\mathrm{A} \in T_1/0) + \vec{\Omega}(D_1/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \ell_1\dot{\theta}_1\vec{v}_1 + d\dot{\alpha}_1\vec{y}_1.$$

3. Exprimer $\vec{V}(\mathrm{F} \in T_2/0)$.

**Solution :**

$$\vec{V}(\mathrm{F} \in T_2/0) = \vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) + \vec{\Omega}(T_2/0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \ell_1\dot{\theta}_1\vec{v}_1 + d\dot{\alpha}\vec{y}_1 - L_2\dot{\theta}_2\vec{v}_2.$$

4. **(Bonus)** Expliquer comment trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ à partir des résultats précédents. Vous ne chercherez pas à mener à bien les calculs.

**Solution :** D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0) &= \vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0) + \vec{\Omega}(T_2/0) \wedge (\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}) \\ &= \ell_1\dot{\theta}_1\vec{v}_1 + d\dot{\alpha}_1\vec{y}_1 + \dot{\theta}_2\vec{z}_0 \wedge (-d\vec{x}_1 - \ell_1\vec{u}_1) \end{aligned}$$

La liaison $T_2$-0 impose que $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0) \cdot \vec{v}_2 = 0$ et la relation recherchée entre $\dot{\theta}_2$ (vitesse de sortie) et $\dot{\theta}_1$ (vitesse d'entrée) s'obtient en projetant l'expression obtenue ci-dessus selon $\vec{v}_2$.

Une autre approche consisterait à partir d'une relation de la fermeture $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EO}} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, on obtiendrait, toujours en projetant selon $\vec{v}_2$, une relation entre $\theta_2$, $\theta_1$ et $\alpha_2$.

## 4 Cinématique Graphique (suite)

On considère toujours $\dot{\theta}_1 > 0$ et $\|\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)\| = 1.5$ cm. Vous utiliserez la FIGURE 4 pour les constructions.

1. Construire le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$ sur la FIGURE 4. Reporter de plus le centre instantané de rotation du mouvement de $D_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ construit sur la FIGURE 3.
2. Construire $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$ puis $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$.

**Solution :** On connaît le CIR du mouvement de $D_1$ par rapport à (0) et $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$. L'équi-projectivité entre A et E permet de trouver $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$.
Une autre technique consiste à tracer le cercle de centre O et de rayon OE. Désignons par E′ l'intersection de ce cercle et de la droite (OA). En utilisant le triangle des vitesses de sommet O, on construit $\vec{V}(\mathrm{E}' \in D_1/0)$ à partir de $\vec{V}(\mathrm{A} \in D_1/0)$. L'obtention de $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$ se déduit du CIR de $D_1/0$ et de l'égalité $\|\vec{V}(\mathrm{E}' \in D_1/0)\| = \|\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)\|$.

Le support de $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$ est la droite (EF). Du fait de l'existence d'une liaison pivot en E entre $D_1$ et $T_2$, on a $\vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0) = \vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0)$. On en déduit $\vec{V}(\mathrm{O} \in T_2/0)$ par équiprojectivité entre E et O.

**Remarque :** Si vous n'avez pas obtenu le CIR de $D_1/0$ lors de la partie 2, prendre $\vec{V}(\mathrm{E} \in D_1/0) = \overrightarrow{\mathrm{EE}'}$ pour le tracé sur FIGURE 4.

3. Déterminer graphiquement la position du CIR du mouvement $T_2/0$.

**Solution :** Le CIR de $T_2/0$ est à l'intersection de la perpendiculaire à $\vec{V}(\mathrm{E} \in T_2/0)$ passant par E et de la perpendiculaire à (EF) passant par O.

Numéro d'anonymat :

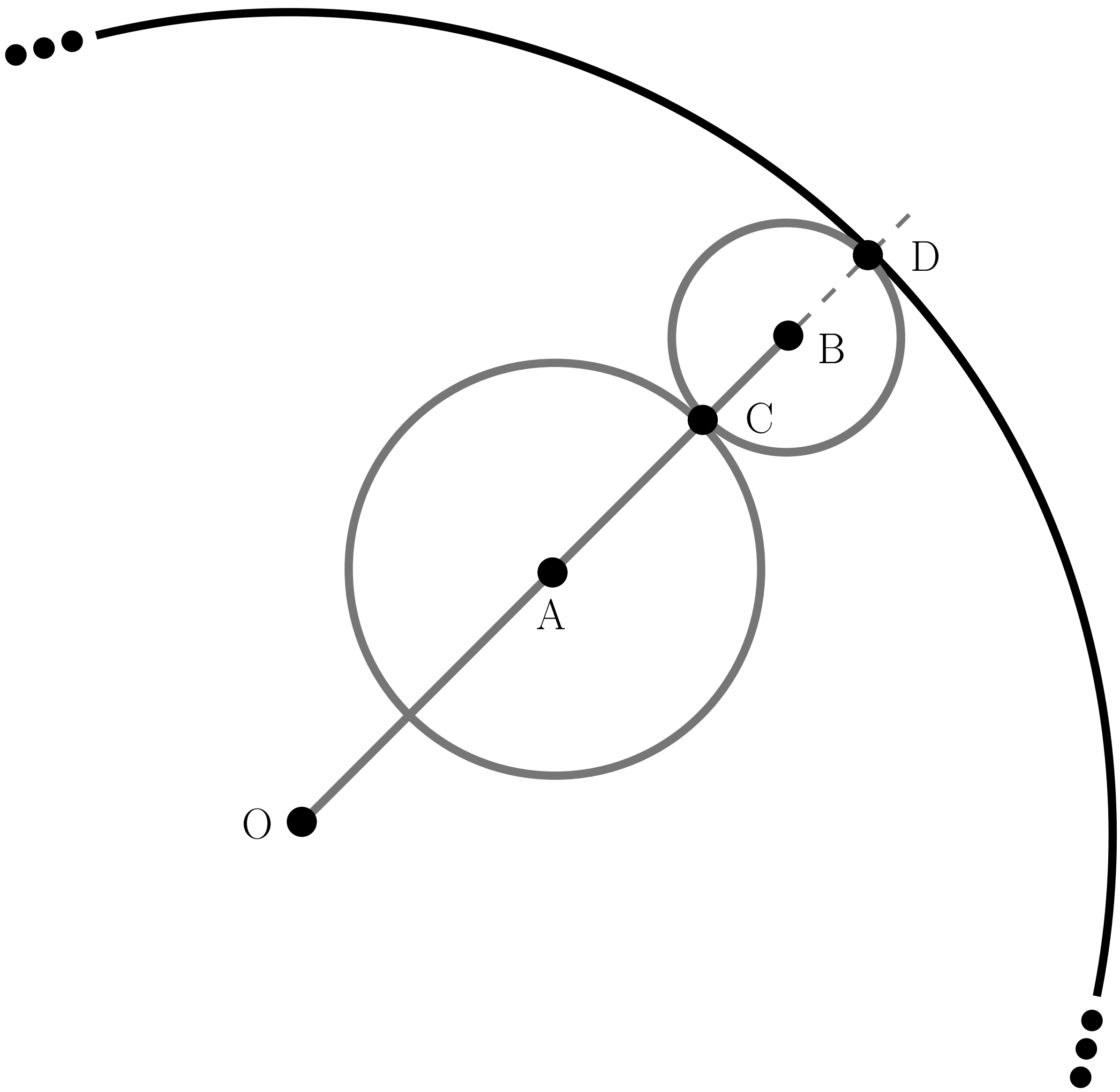


Figure 3 – À Rendre Avec Votre Copie.

Numéro d'anonymat :

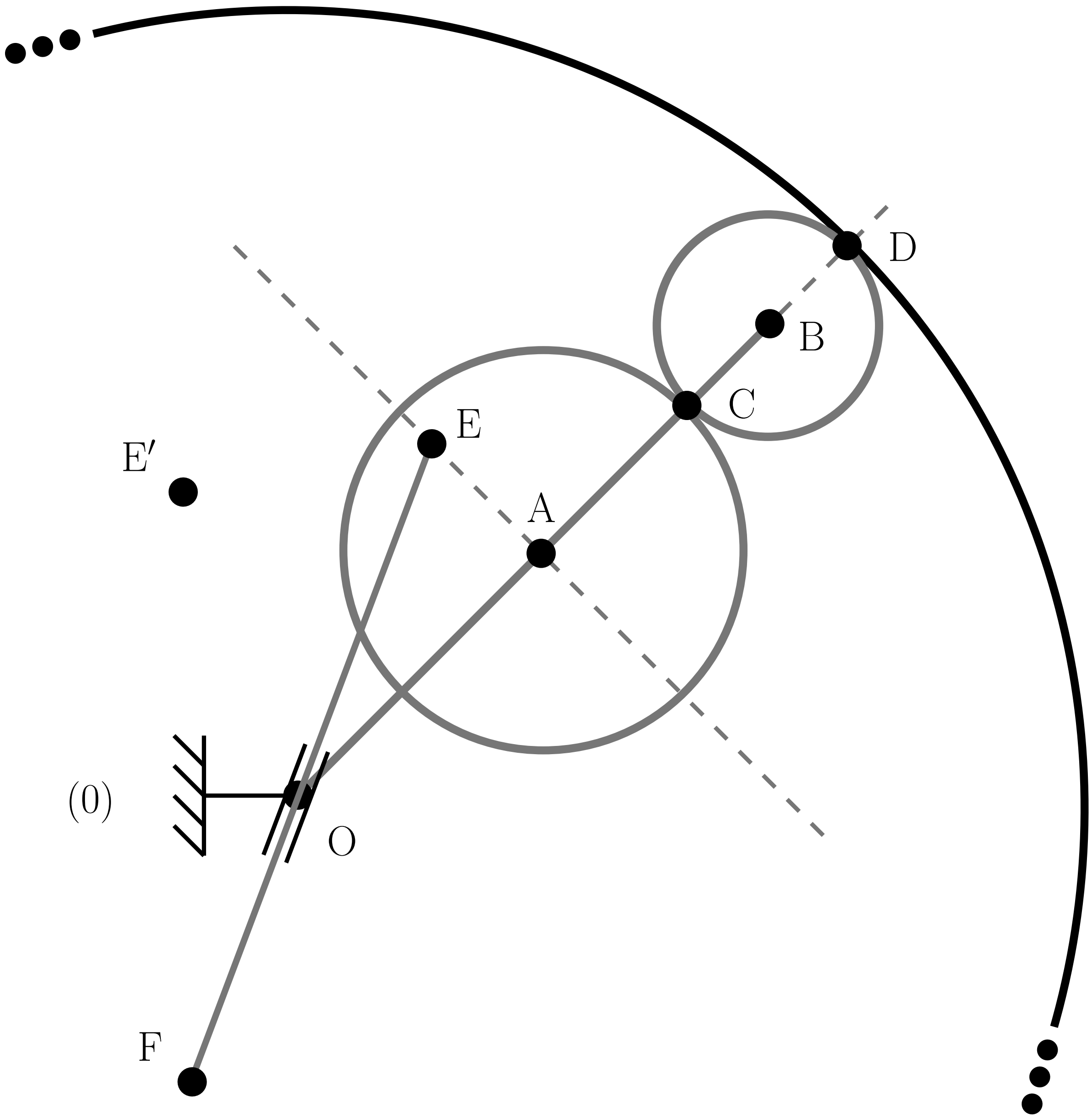


FIGURE 4 – À RENDRE AVEC VOTRE COPIE.