

Partiel

Partie Mécanique des Fluides

Lundi 3 décembre avril 2018 – Durée : **2h**
sans document ni appareil électronique

1 Ascension capillaire **sur 15 points**

L'imbibition correspond au phénomène d'imprégnation d'un objet poreux par un liquide, comme par exemple celle d'un buvard par de l'encre ou d'un morceau de sucre par du café. Ce phénomène est d'essence **capillaire**, c'est-à-dire qu'il est piloté par les forces de tension de surface présentes aux interfaces. On cherche dans ce problème à caractériser par analyse dimensionnelle ce phénomène d'imbibition.

1. La tension de surface γ a la dimension d'une énergie par unité de surface. Exprimer la dimension de la tension de surface $[\gamma]$ dans le système **M**, **L**, **T**.

Solution: 1 point

Une énergie a pour dimension ML^2T^{-2} . On en déduit directement $[\gamma] = \text{MT}^{-2}$.



FIGURE 1 – **Imbibition**. Gauche : Imbibition d'un morceau de sucre par du café. Droite : Imbibition d'un papier filtre par de l'huile. Relevé expérimental de l'ascension capillaire de l'aniline au sein d'un échantillon de papier filtre (extra dur n°602 de Schleicher & Schüll) (adapté de Lucas, R. "Ueber das Zeitgesetz des kapillaren Aufstiegs von Flüssigkeiten." Kolloid-Zeitschrift **23.1**, 1918)

1.1 Dynamique de l'imbibition

On considère dans la suite du problème l'ascension d'un milieu poreux par un liquide de viscosité dynamique μ sous l'action capillaire (Figure 1, gauche). Dans la phase initiale d'imbibition, le liquide envahit le milieu poreux, dont la taille caractéristique de pore

est R . À mesure que le liquide progresse dans la matrice poreuse, il est de plus en plus ralenti par l'action de la viscosité μ du liquide. Dans cette partie, on modélise le milieu poreux par un ensemble de tubes de rayon R .

2. En supposant que dans ce régime les effets d'inertie (faisant intervenir la masse volumique ρ) et de pesanteur (faisant intervenir la masse volumique ρ et la gravité g) sont négligeables par rapport à ceux de la tension de surface et de la viscosité, écrire la dépendance fonctionnelle de h , la hauteur maximale instantanée du liquide, avec les paramètres pertinents du problème.

Solution: 1 point

On a $h = f(\gamma, \mu, R, t)$.

3. Appliquer le théorème π en utilisant γ , R et t comme grandeurs dimensionnellement indépendantes pour écrire une relation entre plusieurs grandeurs sans dimension dont vous donnerez l'expression.

Solution: 3 points

La relation précédente fait intervenir $n + 1 = 5$ paramètres + observables. Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 5 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème π , cette loi peut donc s'exprimer entre $n + 1 - k = 2$ grandeurs sans dimensions. On forme ces 2 GSD à l'aide des $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes proposées dans l'énoncé : γ , R et t . On a alors :

$$\pi = \mathcal{F}(\pi_1), \quad \text{avec } \pi = \frac{h}{R} \quad \text{et } \pi_1 = \frac{\mu R}{\gamma t}$$

L'expérience montre systématiquement que l'imbibition d'un milieu poreux ralentit au cours du temps en suivant une loi en racine carrée, comme montré sur la figure 1.

4. À l'aide de cette relation expérimentale, préciser la dépendance de h avec les paramètres de l'expérience (à une constante multiplicative près).

Solution: 2 points

La relation expérimentale indique $h \sim \sqrt{t}$, ce qui contraint la forme de la dépendance fonctionnelle : $\mathcal{F}(u) = \alpha u^{-1/2}$, soit $\pi = \alpha \pi_1^{-1/2}$. On en déduit :

$$\frac{h}{R} = \alpha \sqrt{\frac{\gamma t}{\mu R}},$$

α constante, et finalement

$$h = \alpha \sqrt{\frac{\gamma R t}{\mu}}.$$

1.2 Statique de l'ascension capillaire

Dans la phase ultime de l'ascension capillaire, le liquide finit par s'arrêter à une hauteur h_{\max} . Dans cette phase, on ne peut plus négliger le poids de liquide et il faut désormais prendre en compte ρ et g .

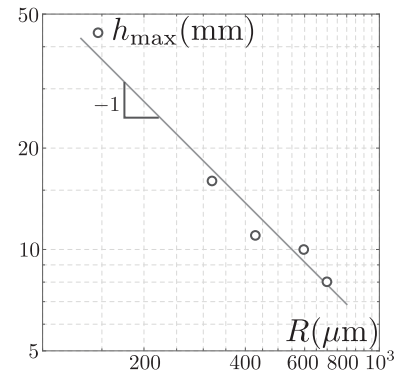
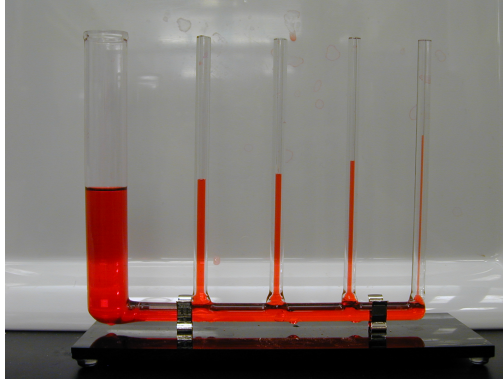


FIGURE 2 – **Ascension maximale.** Gauche : la hauteur d’ascension capillaire maximale dépend du rayon R du tube. Droite : sur ce graphique ont été reportées les hauteurs maximales h_{max} observées lors de l’ascension capillaire d’éthanol dans des tubes de différents rayons R , mettant en évidence une dépendance en $h_{\text{max}} \sim 1/R$.

5. Expliquer pourquoi h_{max} ne dépend pas de la viscosité dynamique μ .

Solution: 1 point

La viscosité dynamique n’apparaît dans les contraintes qu’en présence de cisaillement, et donc d’écoulement. À l’arrêt, l’équilibre des forces (des contraintes) ne fait donc pas intervenir μ ; la hauteur h_{max} ne peut donc pas en dépendre.

6. Expliciter la dépendance de h_{max} avec les paramètres pertinents du problème.

Solution: 1 point

On considère désormais un problème statique, où ni le temps t ni la viscosité μ n’interviennent. Contrairement au cas précédent par contre, ρ et g interviennent cette fois dans la détermination de la solution. On a donc :

$$h_{\text{max}} = g(\gamma, \rho, g, R)$$

7. Appliquer le théorème π afin de réécrire cette relation à l’aide de grandeurs sans dimension que l’on explicitera. On prendra ρ , g et R comme grandeurs dimensionnellement indépendantes.

Solution: 3 points

La relation précédente fait à nouveau intervenir $n + 1 = 5$ paramètres + observables. Au sein de la classe de systèmes d’unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps (bien que le problème soit statique) sont suffisantes pour exprimer les 5 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D’après le théorème π , cette loi peut donc s’exprimer entre $n + 1 - k = 2$ grandeurs sans dimensions. On forme ces 2 GSD à l’aide des $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes proposées dans l’énoncé : ρ , g et R . On a alors :

$$\pi = \mathcal{G}(\pi_1), \quad \text{avec } \pi = \frac{h}{R} \quad \text{et } \pi_1 = \frac{\gamma}{\rho g R^2}$$

8. Comme précédemment, on se propose de préciser la dépendance fonctionnelle en se basant sur l’expérience. Sur la figure 2, on a reporté les hauteurs maximales

observées à l'issue de l'ascension capillaire pour des tubes de différents rayons R . À partir de ce résultat expérimental, proposer (à un préfacteur près) une relation liant h_{\max} aux paramètres du problème.

Solution: 3 points

L'expérience fait apparaître une relation du type $h_{\max} \sim R^{-1}$. Contrairement au cas précédent, R apparaît à la fois dans l'expression de π et de π_1 ; il faut donc prendre garde à ne pas conclure hâtivement sur la forme de \mathcal{G} . Réécrivons la relation fonctionnelle liant π à π_1 :

$$\pi = \mathcal{G}(\pi_1)$$

soit :

$$h = \underbrace{R \mathcal{G}(\pi_1)}_{\sim R^{-1}}$$

de sorte que :

$$\mathcal{G}(\pi_1) = \mathcal{G}\left(\frac{\gamma}{\rho g R^2}\right) \sim R^{-2}$$

d'où $\mathcal{G}(u) \sim u$.

On en déduit finalement :

$$h = \beta \frac{\gamma}{\rho g R}$$

2 Ecoulement induit par un disque tournant sur 20 points

L'objectif de ce problème est de décrire l'écoulement d'un fluide mis en mouvement par un disque tournant à vitesse angulaire Ω constante, et plus précisément de déterminer la structure de la solution invariante d'échelle du problème.

Par souci de simplicité, on considère que le disque est de diamètre infini et que le fluide, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν , occupe le demi-espace au-dessus du disque.

Pour décrire l'écoulement, on emploie les coordonnées cylindriques centrées sur l'axe (Oz) du disque, comme indiqué sur la figure 3. Dans ce système de coordonnées, le domaine d'étude de l'écoulement est le demi-espace complet défini par $z \geq 0$. Le champ de vitesse \underline{u} est défini comme :

$$\underline{u} = u(r, \theta, z, t) \underline{e}_r + v(r, \theta, z, t) \underline{e}_\theta + w(r, \theta, z, t) \underline{e}_z$$

où $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ est la base mobile des coordonnées cylindriques, représentée sur la figure 3. Le champ de pression s'écrit : $p(r, \theta, z, t)$. On note $q = \frac{p}{\rho}$.

De manière générale, l'écoulement isovolume du fluide obéit donc aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

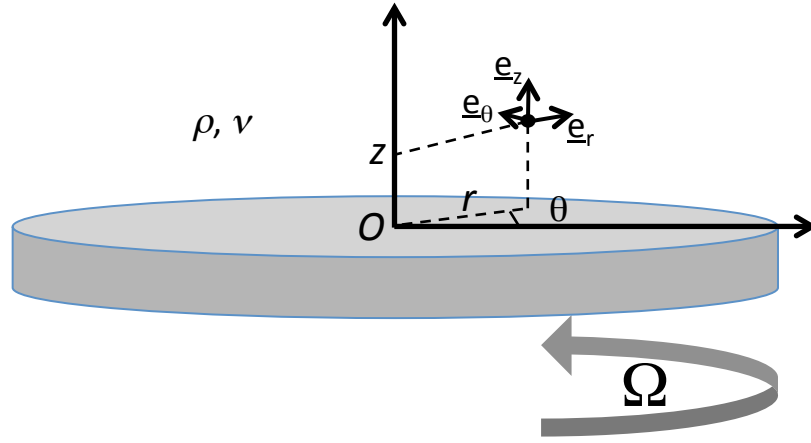


FIGURE 3 – Géométrie de l'écoulement induit par un disque tournant.

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial q}{\partial r} + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \end{array} \right. \quad (2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{array} \right. \quad (2c)$$

où Δ représente l'opérateur laplacien scalaire : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

1. On recherche une solution stationnaire et axisymétrique (indépendante de θ). Simplifiez ces 4 équations.

Solution: 2 points

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial q}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right), \end{array} \right. \quad (4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (4c)$$

2. Donnez les domaines de définition de r , θ et z correspondant au domaine d'étude.

Solution: 1 point

demi-espace : $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, z \geq 0$.

3. Le disque est un solide indéformable en rotation à vitesse angulaire constante Ω . Exprimez la vitesse du disque \underline{U} en un point $(r, \theta, 0)$ quelconque de sa surface.

Solution: 1 point

Un point du disque de rayon r a la vitesse orthoradiale :

$$\underline{U} = (0, \Omega r, 0)$$

4. Ecrivez la condition aux limites imposée au fluide visqueux au contact du disque imperméable¹ en termes de valeurs imposées à u , v et w .

Solution: 1 point

A cause de l'imperméabilité et de l'adhérence, on a

$$\underline{u}(r, \theta, 0) = \underline{U}(r) \quad \forall r, \forall \theta$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta, 0) = 0 \quad \forall r, \forall \theta \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r, \theta, 0) = \Omega r \quad \forall r, \forall \theta \end{array} \right. \quad (5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r, \theta, 0) = 0 \quad \forall r, \forall \theta \end{array} \right. \quad (5c)$$

5. **Recherche d'une solution invariante d'échelle** - On impose un changement d'échelle à toutes les grandeurs impliquées dans la description de l'écoulement de la forme $a = a^* a'$, où a peut être $r, z, u, v, w, q, \nu, \Omega$. a est la grandeur de départ, a' la notation pour la grandeur dilatée par changement d'échelle, a^* le facteur de changement d'échelle. Montrez que, pour que le problème soit invariant par changement d'échelles, les facteurs de changement d'échelles doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u^* &= v^* = w^* \\ q^* &= u^{*2} \\ u^* &= \frac{\nu^*}{r^*} \\ r^* &= z^* \\ v^* &= r^* \Omega^* \end{aligned}$$

Solution: 3 points

1. Aucune condition aux limites ne peut être imposée *a priori* à l'écoulement infiniment loin du disque, en raison de son rayon infini qui invalide l'hypothèse courante d'extension finie de l'écoulement.

- L'invariance d'échelle de (3) implique $\frac{u^*}{r^*} = \frac{v^*}{z^*}$,
- celle de (4a) $\frac{u^{*2}}{r^*} = \frac{u^*w^*}{z^*} = \frac{v^{*2}}{r^*} = \frac{q^*}{r^*} = \nu^* \frac{u^*}{r^{*2}} = \nu^* \frac{u^*}{z^{*2}}$
- celle de (4b) $\frac{u^*v^*}{r^*} = \frac{w^*v^*}{z^*} = \nu^* \frac{v^*}{r^{*2}} = \nu^* \frac{v^*}{z^{*2}}$
- celle de (4c) $\frac{u^*w^*}{r^*} = \frac{w^{*2}}{z^*} = \frac{q^*}{z^*} = \nu^* \frac{w^*}{r^{*2}} = \nu^* \frac{w^*}{z^{*2}}$
- celle de (5b) $v^* = r^*\Omega^*$

6. Justifiez que le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à 2 paramètres indépendants.

Solution: 1 point

Le groupe de changement d'échelles opère sur 8 grandeurs, donc est à 8 paramètres : les 8 facteurs de changements d'échelles correspondants. Ces paramètres sont liés par 6 relations. Donc le groupe de changements d'échelles est à $8 - 6 = 2$ facteurs de changements d'échelles indépendants, les 6 autres s'en déduisant grâce à ces 6 relations.

7. On choisit comme facteurs de changements d'échelles indépendants Ω^* et r^* . En :

- listant les grandeurs dont dépend u sous la forme $u = f(...)$, f fonction inconnue,
- opérant les changements d'échelle sur toutes les grandeurs impliquées dans cette relation,
- exprimant tous les changements d'échelle en fonction de Ω^* et r^* ,
- choisissant une valeur particulière pour Ω^* ,

montrez que :

$$\frac{u'}{\Omega' r'} = g\left(r^* r', \frac{z'}{r'}, \frac{\nu'}{\Omega' r'^2}\right), \quad g \text{ fonction inconnue}$$

Solution: 4 points

$u = f(r, z, \Omega, \nu)$ (**1 point**) se transforme par changement d'échelles en

$$u^* u' = f(r^* r', z^* z', \Omega^* \Omega', \nu^* \nu')$$

or $u^* = r^* \Omega^*$, $r^* = z^*$ et $\nu^* = r^{*2} \Omega^*$ donc :

$$r^* \Omega^* u' = f(r^* r', r^* z', \Omega^* \Omega', r^{*2} \Omega^* \nu') \quad (\mathbf{1 \text{ point}})$$

Fixons $\Omega^* = \frac{1}{\Omega'}$ (**1 point**) :

$$r^* r' \frac{u'}{\Omega' r'} = f\left(r^* r', r^* r' \frac{z'}{r'}, 1, (r^* r')^2 \frac{\nu'}{\Omega' r'^2}\right)$$

soit :

$$\frac{u'}{\Omega' r'} = g\left(r^* r', \frac{z'}{r'}, \frac{\nu'}{\Omega' r'^2}\right) \quad (\mathbf{1 \text{ point}})$$

8. Justifiez alors que :

$$u = \Omega r g\left(\frac{z}{r}, \frac{\nu}{\Omega r^2}\right) \quad (6)$$

Solution: 1 point

$\frac{u'}{\Omega' r'}$ doit être invariante par changement d'échelle, donc ne doit pas dépendre de r^* . Or r^* apparaît dans g sous forme du produit $r^* r'$, donc g ne dépend pas de $r^* r'$:

$$\frac{u'}{\Omega' r'} = g\left(\frac{z'}{r'}, \frac{\nu'}{\Omega' r'^2}\right)$$

donc :

$$\frac{u}{\Omega} = g\left(\frac{z}{r}, \frac{\nu}{\Omega r^2}\right)$$

9. On peut montrer que la composante radiale de la vitesse d'une solution particulière de ce problème invariant d'échelle s'écrit :

$$u = \Omega r F\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (7)$$

où F est une fonction inconnue à ce stade et $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$.

- Dites en quoi cette solution est auto-similaire. Quelle est la variable d'auto-similarité η ?
- En établissant la relation entre η , $\frac{z}{\delta}$ et $\frac{\nu}{\Omega r^2}$, montrez que cette solution auto-similaire est une solution invariante d'échelle particulière.

Solution: 3 points

- Cette solution est auto-similaire car la vitesse adimensionnée $\frac{u}{\Omega r}$ s'exprime en fonction d'une seule variable adimensionnée $\eta = \frac{z}{\delta}$, appelée variable d'auto-similarité. Connaissant u à une certaine position (r_1, z_1) , de la connaissance de h on peut en déduire u à une autre position (r_2, z_2) par homothéties/dilatations. **(1 point)**

(b)

$$\frac{z}{\delta} = \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{\nu}{\Omega r^2}}} \quad \textbf{(1 point)}$$

Donc :

$$F\left(\frac{z}{\delta}\right) = F\left(\frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{\frac{\nu}{\Omega r^2}}}\right) = g\left(\frac{z}{r}, \frac{\nu}{\Omega r^2}\right)$$

donc :

$$u = \Omega r F\left(\frac{z}{\delta}\right) = \Omega r g\left(\frac{z}{r}, \frac{\nu}{\Omega r^2}\right) \quad \textbf{(1 point)}$$

10. **Recherche d'une solution auto-similaire** - Les composantes orthoradiale et

verticale de la vitesse et la pression de la solution auto-similaire ont pour expression :

$$v = \Omega r G \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (8)$$

$$w = \sqrt{\nu \Omega} H \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (9)$$

$$q = \nu Q \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (10)$$

où G , H et Q sont des fonctions inconnues à ce stade. En injectant les expressions (7) de u et (9) de w dans l'équation (1), montrez que :

$$2F + H' = 0$$

L'injection des expressions (7, 8, 9, 10) dans (2) permet d'établir 3 autres équations différentielles non-linéaires couplant F , G , H et Q et leurs dérivées que l'on peut résoudre numériquement². Ceci permet de déterminer une des rares solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes³.

Solution: 2 points

Compte tenu de (7), $\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} = 2\Omega F \left(\frac{z}{\delta} \right)$.

Compte tenu de (9), $\frac{\partial w}{\partial z} = \Omega H' \left(\frac{z}{\delta} \right)$.

11. Les variations des fonctions F , G et $-H$ en fonction de $\frac{z}{\delta}$ obtenues par résolution numérique pour les conditions aux limites $u(r, z \rightarrow \infty) = 0$, $v(r, z \rightarrow \infty) = 0$ sont tracées sur la figure 4. Expliquez pourquoi cet entraînement par disque tournant peut être exploité comme principe de pompe hydraulique.

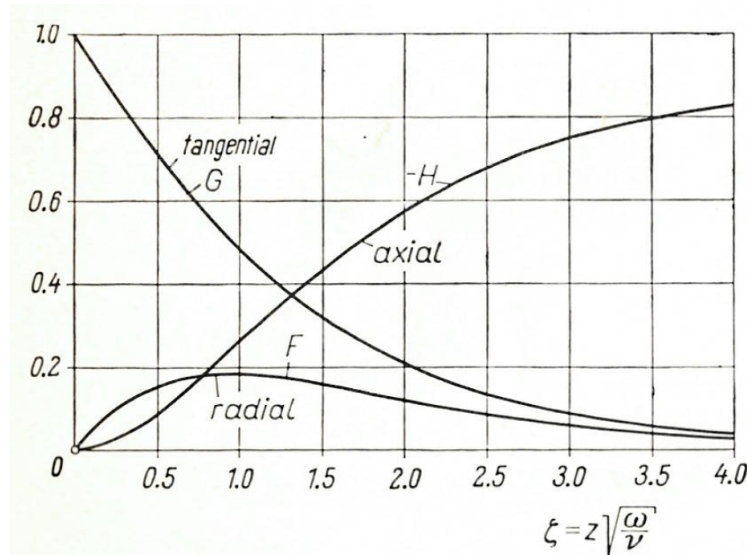


FIGURE 4 – Variations des fonctions F , G et $-H$ en fonction de $\frac{z}{\delta}$ obtenues par résolution numérique du système d'équations différentielles décrivant les solutions auto-similaires pour les conditions aux limites $\{u(r, z \rightarrow \infty) = 0, v(r, z \rightarrow \infty) = 0\}$.

2. H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, 7th ed., McGraw-Hill (1979), p. 102-105

3. Une solution exacte est entendue ici comme une solution valable sans approximation quel que soit les valeurs des paramètres de contrôle Ω et ν .

Solution: 1 point

Il existe un écoulement vertical toujours orienté vers le disque ($H < 0$), donc le disque “pompe” le fluide vers lui et l’éjecte radialement.