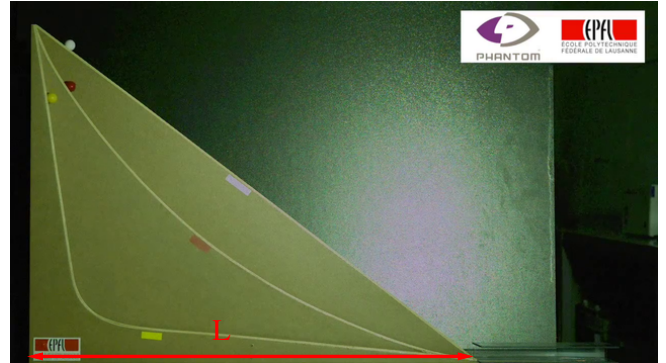


# 2A103 Pratiques numériques en mécanique : TP4

## Lecture et analyse d'images - Modélisation

Semaine du 25 au 29 mars 2019

**Le Brachistochrone** (temps le plus court en grec ancien) est le nom donné à une expérience qui permet de montrer que le chemin le plus rapide n'est pas toujours celui que l'on croit ! Nous avons repris les images d'une expérience réalisée à l'EPFL en Suisse. L'expérience a été filmée avec une caméra rapide avec 940 images par seconde.



Les boules partent au même moment avec une vitesse initiale nulle. Après avoir constaté l'ordre d'arrivée des boules, on souhaite analyser plus en détail cette expérience :

- Tout d'abord on va étudier le déplacement d'une boule roulant sur un plan incliné tout du long (boule blanche). On va approcher l'expérience par un modèle théorique.
- Ensuite, on étudiera chaque trajectoire et on calculera sa longueur. On estimera aussi la vitesse moyenne de chaque boule entre le point de départ et le point d'arrivée.

### Partie I. Mouvement d'une boule sur un plan incliné. Boule blanche

On ne s'intéresse, dans un premier temps, qu'à la boule blanche qui est placée sur le plan incliné. En négligeant la contribution des forces de frottement mais en tenant compte de l'inertie de la boule, il est possible de montrer que la distance horizontale parcourue  $x(t)$  évolue comme :

$$x = At^2, \quad A = Kg \cos(\alpha) \sin(\alpha),$$

où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  est l'accélération de la gravité,  $\alpha$  est l'angle entre le plan incliné et l'horizontale, et  $t$  est le temps compté depuis le lâcher de la boule (l'image initiale). Nous allons calculer la valeur de  $K$  qui permet d'approcher au mieux les mesures de l'expérience.

1. Lisez l'image `brachistochrone9.png` et affichez-la dans une fenêtre graphique. Cette image de 2160x3840 pixels est constituée de 9 sous images de 720x1280 pixels. Le temps défile en parcourant les images du haut en bas puis de gauche à droite.
2. En utilisant l'outil Data Cursor, calculez la taille d'un pixel de l'image en mètres, en prenant pour étalon la largeur de la plaque en bois  $L=0.80\text{m}$  (voir figure).
3. Le vecteur temps : Le film est pris à 940 prises de vue par seconde, mais pour construire l'image nous n'avons retenu que les images 1, 82, 163, 244, 325, 406, 487, 568 et 649. Construisez le tableau `tvec` qui contient les valeurs successives des temps de notre expérience (ce tableau a neuf éléments : le nombre de prises de vue sélectionnées).
4. On appelle  $x(t)$  la distance horizontale de la boule aux temps  $t$  successifs. A l'aide de data cursor, mesurez sur l'image les positions horizontales aux différents instants (en pixels) de la boule. La position horizontale à  $t = 0$  de la boule correspond au point  $x = 0$ ). Utiliser la taille d'un pixel calculée à la question 2, et si besoin la taille des sous-images pour en déduire les 9 valeurs successives de  $x(t)$  en mètres.

- Tracez le graphique de  $x$  (en mètres) en fonction de  $t$  (en secondes). Annotez votre graphique : labels, titre. Voici la courbe expérimentale.

**Nous allons maintenant comparer ce graphique expérimental avec le modèle théorique.**

- A l'aide de l'image `brachistochroneSolo.png`, trouvez l'angle en radians que fait le plan incliné avec l'horizontale.
- On choisit une première valeur test de  $K = K_{test} = 0.45$ . Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique (avec  $K_{test}$ ). Ajouter une légende. Etes-vous satisfait de ce résultat ?
- Pour quantifier l'erreur entre les courbes expérimentale et théorique pour  $K_{test}$ , on la calcule au sens des moindres carrés :

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^9 (x_i^{exp} - x_i^{test})^2}$$

Que vaut  $E$  pour  $K_{test}$  ?

- On veut maintenant voir quelle valeur de  $K$  permet d'approcher au mieux la courbe expérimentale au sens des moindres carrés. Faire varier  $K$  entre 0.25 et 0.50, avec un pas de 0.005. Tracer l'erreur  $E$  en fonction de  $K$ , et identifier la valeur optimale  $K_{opt}$  qui permet de minimiser l'erreur au sens des moindres carrés.
- Superposer la courbe expérimentale avec la formule théorique obtenue avec  $K_{opt}$ . Ajouter une légende. La théorie donne  $K_{theo} = 5/14$ . Quel est l'écart entre  $K_{opt}$  et  $K_{theo}$  ? Pensez-vous que cet écart entre dans les incertitudes de mesure ?

## Partie II. Calcul de la longueur de chaque trajectoire. Estimation de la vitesse moyenne de chaque boule

- Sur l'image `brachistochroneSolo.png` à l'aide de la fonction `ginput` récupérez les coordonnées des tracés blanc, rouge et jaune. Superposez-les sur l'image (cf page 38 des notes de cours)
- En plaçant le centre  $O$  d'un système cartésien  $(0, \vec{x}, \vec{y})$  au point de départ des trajectoires, effectuez le changement de repère nécessaire et tracer dans une nouvelle figure les courbes  $y(x)$  représentant chaque trajectoire avec  $x$  et  $y$  en mètres.
- A partir de vos relevés, calculez une valeur approchée de la longueur (en mètres) de chaque tracé.
- Le numéro de l'image de démarrage ( $t = 0s$ ) est 1. Les boules blanche, rouge et jaune arrivent respectivement aux numéros d'image 649, 521, 577. Calculez la vitesse moyenne de chaque boule. Concluez.

### 20 minutes avant la fin de la séance

Pour vous habituer à la procédure utilisée sur Moodle lors d'un examen en temps limité, vous devez faire un exercice court qui vous est proposé sur votre compte Moodle dans la page de l'UE 2A103. En binôme, il faut que chaque étudiant teste la procédure.