Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 9 Mai 2016 - Session1

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique (e_1, e_2, e_3), avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

On définit les vecteurs $u = e_1 + e_2 + 2e_3$, $v = 3e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que les vecteurs u, v et e_3 forment une base de E. Donner la matrice de passage, notée P, de la base (e_1, e_2, e_3) vers la base (u, v, e_3) .
2. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(e_3)$.
3. Déterminer la matrice T de f dans la base (u, v, e_3). Quelle est la relation entre T et A ?
4. Soit $N = T - I$.
   a) Calculer N^2, N^3. Montrer que $N^n = (T - I)^n = 0$, $\forall n \geqslant 3$.
   b) En déduire que $(A - I)^n = 0$, $\forall n \geqslant 3$.
5. **Bonus :** Exprimer A^n à l'aide de n, I, A et A^2.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $x(t)$ réelle, $t \in]0, \infty[$:

$$x'' - 2x' + x = (t + 1)e^t \tag{1}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (1).
2. Trouver une solution particulière de l'équation non homogène (1).
3. Trouver la solution pour (1) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$.

Exercice 3

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire de second degré non-homogène :

$$y'' + y = t^2 \cos t \tag{2}$$

1. Ecrire la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène
$$y'' + y = 0. \tag{3}$$
2. En introduisant une nouvelle variable $z(t) = y'(t)$ montrer que l'équation (3) est équivalente à un système de deux équations différentielles de premier ordre, dont les inconnues sont $y(t)$ et $z(t)$.
   a) On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Montrer que le système différentiel peut s'écrire sous la forme $Y'(t) = AY(t)$, avec A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
   b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A sur $\mathbb{C}$. En déduire la **solution réelle** générale du système différentiel, comme combinaison linéaire des parties réelle et imaginaires de la solution complexe générale. Montrer que l'on retrouve la solution $y(t)$ de l'équation (3).
3. Trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (2).
4. Donner la solution générale de l'équation non-homogène (2).

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante, où $y = y(x)$ est la fonction inconnue :
$$4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{4}$$
1. Précisez le type d'équation différentielle (linéaire, non linéaire) et son ordre.
2. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ? Sans résoudre l'équation, donner la forme de la solution générale en fonction d'une base de l'espace de solutions.
3. On cherche maintenant une solution de l'équation (4), développable en série entière, du type $y_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   a) Etablir une relation de récurrence entre les coefficients a_n et a_{n-1}.
   b) En prenant $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$, constante arbitraire, donner l'expression du coefficient général a_n en fonction de λ et n.
   c) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Justifier votre réponse.
   d) En utilisant le développement de la fonction $\cosh x$,
   $$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   déduire une expression explicite de $y_1(x)$. Vérifiez que $y_1(x)$ est une fonction de classe C^∞ sur le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
4. **Bonus :** Trouver une deuxième solution de l'équation (4) de la forme $y_2(x) = y_1(x)u(x)$ de sorte que $y_1(x), y_2(x)$ soient linéairement indépendante. y_2 ainsi obtenue est-elle de classe C^∞ sur le domaine de convergence du développement de y_1 ?
5. **Bonus :** Trouver la solution générale de l'équation (4). Est-elle développable en série entière ? Justifier votre réponse.