Vibrations et Ondes (4AM03)

Vibrations des systèmes discrets

Examen du 2 octobre 2017

Durée 1h30 - Sans document ni calculatrice

Modèle discret des oscillations d'une rame de TGV

Le voyageur circulant dans une rame de TGV, venant du wagon bar et retournant vers son siège, un café à la main, doit rester vigilant s'il veut éviter de rependre son breuvage sur le chemin, sous l'effet des secousses transversales du train. Pour mieux comprendre ce problème, on se propose de modéliser simplement les oscillations d'une rame de TGV sous l'effet de la courbure de la voie.

On considère un TGV constitué de 5 wagons : deux motrices aux extrémités et trois remorques. La figure 1 représente schématiquement un wagon de TGV et les éléments intervenant dans le problème (de haut en bas) :

- La nacelle d'un wagon héberge le mobilier et les voyageurs (masse $M = 35$ tonnes). Celle d'une motrice abrite les moteurs (masse $2M = 70$ tonnes)
- Les nacelles sont suspendues à leur châssis par un système de raideur k et de coefficient d'amortissement c.
- Les nacelles sont accrochées entre elles par une liaison de raideur $k' = 0.3k$ et de coefficient d'amortissement $c' = 0.1c$.
- Pour simplifier le problème, le châssis, les roues et les rails sont considérés comme un ensemble rigide
- L'ensemble est posé sur le ballast dont les irrégularités sont responsables de la courbure de la voie et des oscillations transversales du train.

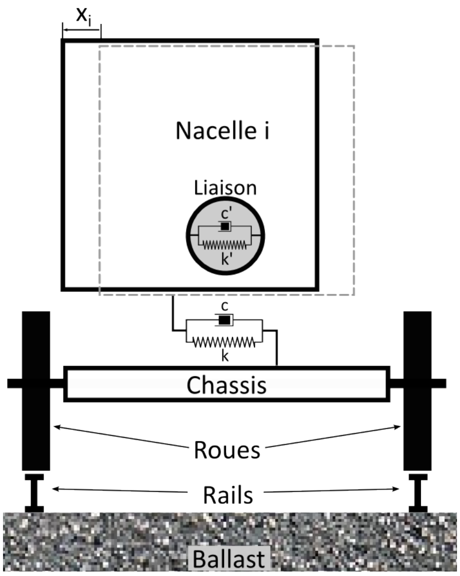


FIGURE 1 – Schéma d'un rame (vue dans l'axe de la voie)

On se place dans un repère lié au train et on suppose enfin que le mouvement des nacelles est exclusivement horizontal et transverse à la voie. La position transverse de la nacelle i est mesurée par rapport à la position d'équilibre statique et notée x_i.

Le schéma de la figure 2 présente le modèle équivalent de la rame vue de dessus. Les déplacements $x_i(t)$ figurent bien les mouvements transverses horizontaux des nacelles.

La longueur d'un wagon est $L = 20m$

On modélise les irrégularités du ballast communiquées aux châssis par les rails comme une fonction sinusoïdale de longueur d'onde λ.

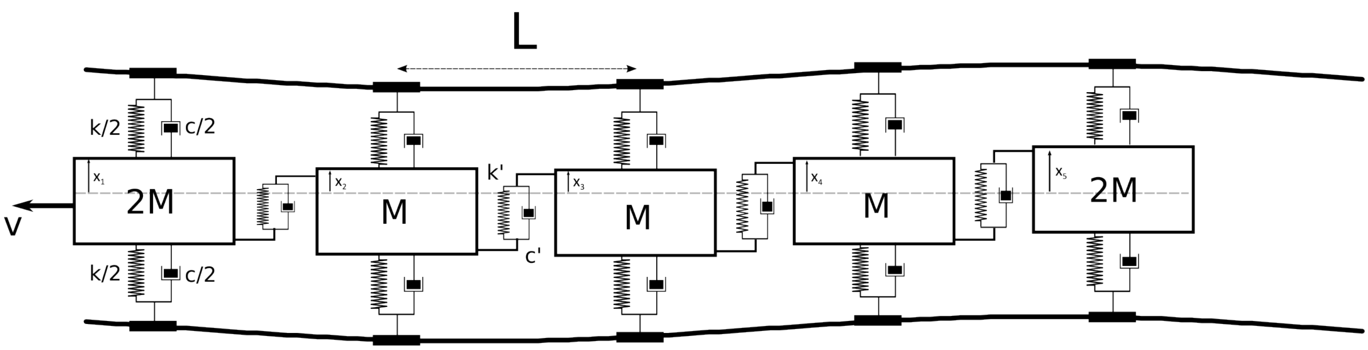


FIGURE 2 – Modèle du TGV à 5 degrés de liberté (vue de dessus)

1. Calculer l'énergie cinétique T de la rame

Solution:

$$T = \frac{1}{2}M\left(2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_5^2\right)$$

2. En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$ du système.

> **Solution:**
> $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{pmatrix}$$

3. Écrire l'énergie potentielle U des nacelles posées sur leur châssis de raideur k.

> **Solution:**
> $$U = \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right)$$

4. Quelle est la matrice de raideur $\mathbf{K}$ associée ?

> **Solution:**
> $$\mathbf{K} = k\mathbf{I}$$

5. Écrire l'énergie potentielle U' associée aux ressorts de liaison k'.

> **Solution:**
> $$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{2}k'((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_5)^2) \\ &= \frac{1}{2}k'(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2z_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_5) \end{aligned}$$

6. Quelle est la matrice de raideur de liaison $\mathbf{K}'$?

> **Solution:**
> $$\mathbf{K}' = k'\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. En l'absence d'amortissement, quelle équation matricielle décrit le mouvement libre du système ?

> **Solution:**
> $$\mathbf{M\ddot{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}')\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

8. Comment procède-t-on pour identifier les fréquences propres f_j et les modes propres associés $\mathbf{v_j}$?

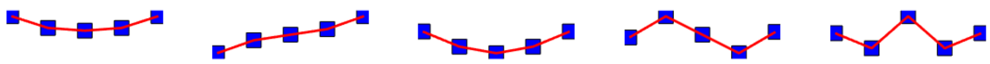
> **Solution:** On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques : $x_i(t) = \mathbf{x}_i e^{\jmath\omega t}$. Cela donne le système linéaire :
> $$((\mathbf{K} + \mathbf{K}') - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{v} = 0$$
> Il faut s'assurer que les solutions $\mathbf{x}$ sont non nulles en résolvant l'équation aux valeurs propres en ω^4 :
> $$\left|(\mathbf{K} + \mathbf{K}') - \mathbf{M}\omega^2\right| = 0$$
> On obtient 4 valeurs propres,les pulsations propres $\omega_j(j = 1, ..., 4)$
> Les fréquence propres sont les $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$

> Pour chacune des racines obtenues ω_j on obtient le vecteur propre associé $\mathbf{x_j}$ en résolvant l'équation :
>
> $$((\mathbf{K}+\mathbf{K}') - \mathbf{M}\omega_j^2)\mathbf{v_j} = 0$$

Si on considère les valeurs approchées données plus haut de raideur et de masse, la résolution numérique du système précédent donne les résultats suivants :

Mode	1	2	3	4	5
Fréquence propre (Hz)	2.46	2.48	3.51	4.08	4.55
	$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{v_2}$	$\mathbf{v_3}$	$\mathbf{v_4}$	$\mathbf{v_5}$
Modes propres	1	-1	0.17	-0.15	0.08
	0.36	-0.3	-0.64	1	-0.73
	0.21	0	-1	0	1
	0.36	0.3	-0.64	-1	-0.73
	1	1	0.17	0.15	0.08

9. Représenter et commenter les 5 modes propres.

> **Solution:**
>
> 
>
> — Le mode 1
>
> — Le mode 2
>
> — .....
>
> —
>
> —

Dans la suite on note $\mathbf{X}$ la matrice modale.

10. Comment peut on déterminer la contribution des modes à un mouvement libre donné ?

> **Solution:** Il faut mesurer l'état du système en position et en vitesse à un instant donné : $(\mathbf{x_0}, \dot{x}_0)$. On écrit ensuite : $\mathbf{Xp} = \mathbf{x_0}$ et $\mathbf{X\dot{p}} = \mathbf{\dot{x}_0}$ Et on cherche les amplitudes des modes sous la forme $p_i(t) = P_i e^{j(\omega_i t + \Phi_i)}$ Les 6 équations précédente permettent de calculer l'amplitude P_i et la phase Φ_i de chaque mode dans le mouvement observé.

Au passage d'une irrégularité de la voie , les 5 wagons subissent chacun un effort transversal F_i.

11. Calculer la puissance des efforts extérieurs.

> **Solution:**
>
> $$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{5} F_i \dot{x}_i$$

12. En déduire le vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$ en fonction des F_i.

> **Solution:**
>
> $$\mathbf{Q}^t = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \end{pmatrix}$$

13. Écrire l'équation matricielle du mouvement forcé.

Solution:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}')\mathbf{x} = \mathbf{Q}$$

14. Montrer comment on peut découpler le système dans la base des coordonnées modales notées $\mathbf{p}$.

Solution: On substitue aux coordonnées généralisées $\mathbf{x}$ les coordonnées modales $\mathbf{p}$ telles que $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{p}$. L'équation du mouvement forcé devient :

$$\begin{array}{rcl} & \mathbf{M}\mathbf{x}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{x}\mathbf{p} & = \mathbf{Q} \\ \times\mathbf{X^t} \Leftrightarrow & \mathbf{X^t}\mathbf{M}\mathbf{X}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{X^t}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{p} & = \mathbf{X^t}\mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M_p}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K_p}\mathbf{p} & = \mathbf{X^t}\mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow & \ddot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{p} & = \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{X^t}\mathbf{Q} \end{array}$$

La matrice $\boldsymbol{\Delta}$ est la matrice diagonale des valeurs propres.
Les matrices $\mathbf{M_p}$ et $\mathbf{K_p}$ sont elles aussi diagonales.
Les deux dernières équations matricielles sont découplées.

15. Dans le cas particulier d'excitations harmoniques de pulsation Ω, écrire sous forme matricielle le système découplé qui donne les coordonnées modales $\mathbf{p}$ en fonction du vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$.

Solution: Dans le cas d'une excitation harmonique, la réponse est harmonique de même pulsation. On note Ω cette pulsation. L'équation du mouvement dans la base modale devient :

$$(\boldsymbol{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{X^t}\mathbf{Q}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p} = (\boldsymbol{\Delta} - \Omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{M_p^{-1}}\mathbf{X^t}\mathbf{Q}$$

ou encore

$$\mathbf{p} = (\mathbf{K_p} - \Omega^2\mathbf{M_p})^{-1}\mathbf{X^t}\mathbf{Q}$$

16. Quelle opération permet d'obtenir les mouvements réels $\mathbf{x}$ de la rame en fonction de la pulsation Ω ?

Solution:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$$

17. Lorsqu'on prend en compte l'amortissement des suspensions et des liaisons, à quelle condition la base modale identifiée précédemment est elle conservée ? Citer un cas simple vérifiant cette condition.

Solution: Il faut que la matrice de dissipation vérifie la relation de Caughey :

$$\mathbf{C}\mathbf{M^{-1}}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M^{-1}}\mathbf{C}$$

C'est le cas par exemple de l'amortissement proportionnel, lorsque $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ On conserve alors des équations découplées dans la base modale.

18. Pour ce type d'amortissement et pour les excitations harmoniques, écrire l'expression matricielle qui donne les coordonnées modales $\mathbf{p}$ en fonction du vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$. Préciser aussi l'opération qui permet de calculer la réponse du système en termes de coordonnées généralisées.

Solution: Un matrice de ce type donne une matrice principale de dissipation diagonale $\mathbf{C_p}$. Dans le cas de l'excitation harmonique, les coordonnées modales sont alors obtenues par l'opération :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{K_p} + \jmath\Omega\mathbf{C_p} - \Omega^2\mathbf{M_p})^{-1}\mathbf{X^t}\mathbf{Q}$$

On obtient les coordonnées généralisées en opérant le changement de variable : $\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p}$

Les irrégularités sinusoïdales du ballast ont une longueur d'onde estimée à $\lambda = 20m$.

19. Exprimer la fréquence apparente Ω des excitations du système en fonction de la vitesse v du train.

Solution: La fonction spatiale représentant les irrégularités de la voie est de la forme : $x_v(z) \propto sin2\pi z/\lambda$, où z est la position longitudinale telle que $z = vt$.
On a donc $x_v(t) \propto sin2\pi vt/\lambda$.
Et la fréquence apparente est $f = v/\lambda$

La figure 3 présente les amplitudes des oscillations des wagons calculées à l'aide du modèle en fonction de la fréquence apparente de la voie.

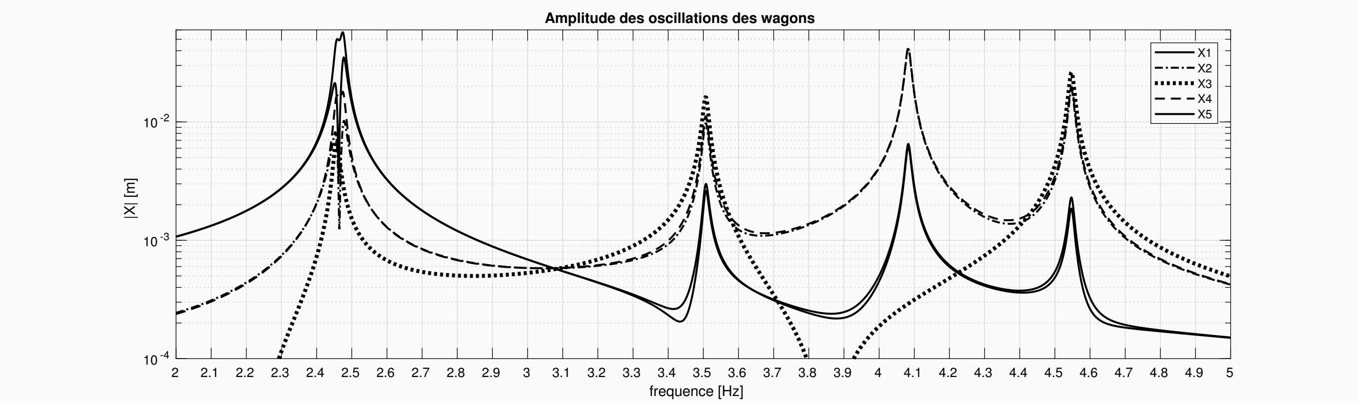


FIGURE 3 – Réponses en fréquence des 5 wagons

20. Commentez ces courbes. Déterminer en particulier les vitesses caractéristiques (critiques ou optimales) pour les différents wagons.