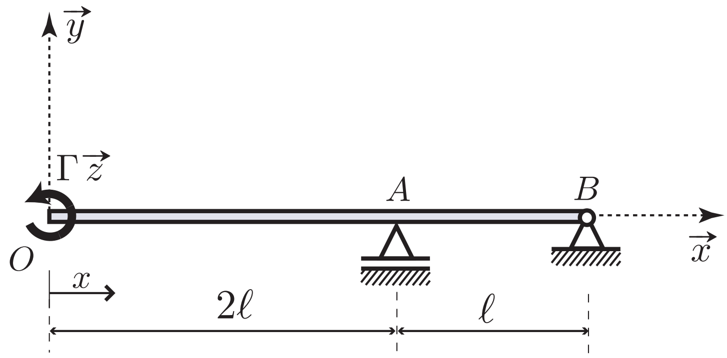
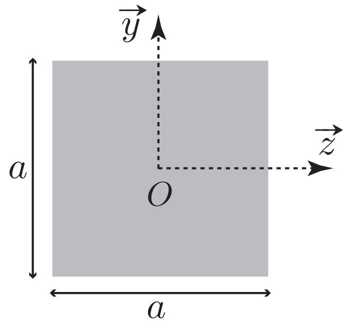
Structures élastiques - LU3ME006
Problème 2

Exo 1 (∼ `10 points`)

On considère une poutre droite $[OB]$ dirigée suivant l'axe $O\vec{x}$, de longueur 3ℓ. La poutre repose en A ($x = 2\ell$) sur un appui simple mobile et en B ($x = 3\ell$) sur un appui simple fixe. On applique un couple ponctuel autour de $\vec{z}$ d'intensité $\Gamma > 0$ en son extrémité O ($x = 0$). Sa section carrée de côté a suivant le plan Oyz est constante le long de la poutre.





On désigne par I le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module d'élasticité E. Enfin, on fait l'***hypothèse d'Euler-Bernoulli***.

1) En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminer en fonction de Γ les valeurs des réactions aux appuis lorsque la structure est en équilibre sous le chargement appliqué.

2) Etablir, en fonction de Γ, les expressions des composantes du torseur de cohésion (effort normal $N(x)$, effort tranchant $T_y(x)$ et moment fléchissant $M_z(x)$) dans la poutre.

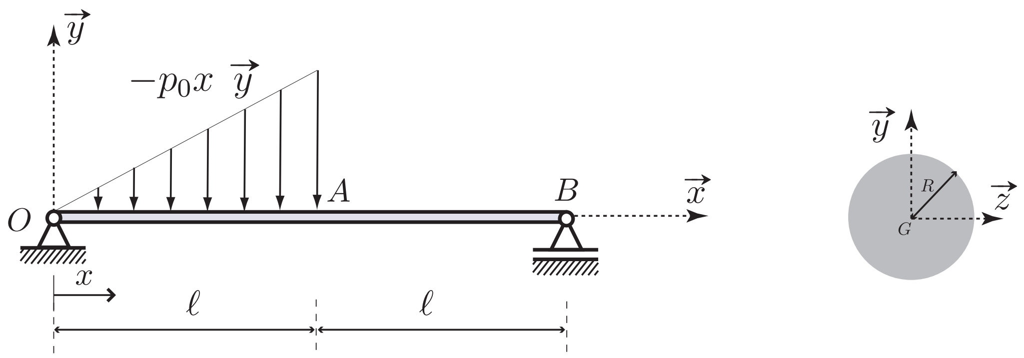
3) Tracer les diagrammes des efforts de cohésion.

4) **a)** Calculer le moment d'inertie I de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Déterminer la contrainte normale σ_{xx} puis en déduire l'expression de la contrainte normale maximale.

b) On considère que la contrainte limite élastique du matériau notée σ_ℓ est identique en traction et compression. Pour les dimensions ℓ et a et le chargement Γ donnés, quelle est la grandeur minimale a_{min} de la section droite pour rester dans le domaine élastique ?

Exo 2 (∼ `10 points`)

On considère une poutre droite $[OB]$ dirigée suivant l'axe $O\vec{x}$, de longueur 2ℓ. La poutre repose en O $(x = 0)$ sur un appui simple fixe et en B $(x = 2\ell)$ sur un appui simple mobile. On applique une densité linéique de force $-p_0 x \vec{y}$ sur le segment $[OA]$. Sa section circulaire pleine de rayon R suivant le plan Oyz est constante le long de la poutre.



On désigne par I le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Le matériau constitutif est homogène, isotrope, linéairement élastique, de module d'élasticité E. Enfin, on fait l'**hypothèse d'Euler-Bernoulli**.

1) En appliquant le principe fondamental de la statique, montrer que les valeurs des réactions aux appuis lorsque la structure est en équilibre sous le chargement appliqué sont :

$$\vec{R_O} = Y_O \vec{y} = \frac{p_0 \ell^2}{3} \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{R_B} = Y_B \vec{y} = \frac{p_0 \ell^2}{6} \vec{y}.$$

2) Etablir les expressions des composantes du torseur de cohésion (effort normal $N(x)$, effort tranchant $T_y(x)$ et moment fléchissant $M_z(x)$) dans la poutre.

3) Tracer les diagrammes des efforts de cohésion. (<u>Indication</u> : $\frac{1}{6} < \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$)

4) a) Calculer le moment d'inertie I de la section de la poutre par rapport à son axe principal d'inertie dirigé suivant l'axe $\vec{z}$. Déterminer la contrainte normale σ_{xx} puis en déduire l'expression de la contrainte normale maximale.

b) On considère que la contrainte limite élastique du matériau notée σ_ℓ est identique en traction et compression. Pour la longueur ℓ, le rayon R et le chargement p_0 donnés, quel est le rayon minimal R_{min} de la section droite pour rester dans le domaine élastique ?