

Contrôle continu : Jeudi 25 février 2016

Durée 2h

Calculatrice et documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table.

Aurtôgraffe et présentation soignées ; prises en compte dans la notation (-2 points possibles).

Les réponses et les constructions non justifiées ne seront pas prises en compte dans la notation.

La figure 1 représente schématiquement un mécanisme de transformation de mouvement de type *rotation* \rightarrow *translation*. Il est composé des quatre solides suivants :

- **Bâti (0)**, lié au repère de référence $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- **Arbre d'entrée (1)**, lié au repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, il est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0).
- **Roue (2)**, liée au repère $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, elle est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec l'arbre d'entrée (1) et engrène au point K avec une couronne solidaire (et donc immobile par rapport) au bâti (0).
- **Bielle (3)**, liée au repère $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, elle est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) avec la roue (2).
- **Coulisseau (4)**, il est en liaison glissière d'axe (O, \vec{x}_0) avec le bâti (0) et en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) avec la bielle (3).

On donne : $\vec{OA} = a\vec{x}_1$, $\vec{AK} = R\vec{x}_1$, K étant le point de contact entre la roue (2) et la couronne (0), $\vec{AB} = R\vec{x}_2$, $\vec{BC} = L\vec{x}_3$ et $\vec{OC} = \lambda\vec{x}_0$ (on a $L > a + R$) et on introduit les angles $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$. Les variables cinématiques du mécanisme sont les fonctions du temps : $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\theta(t)$ et $\lambda(t)$.

Dans tout l'exercice, on pourra identifier la couronne et le bâti (0).

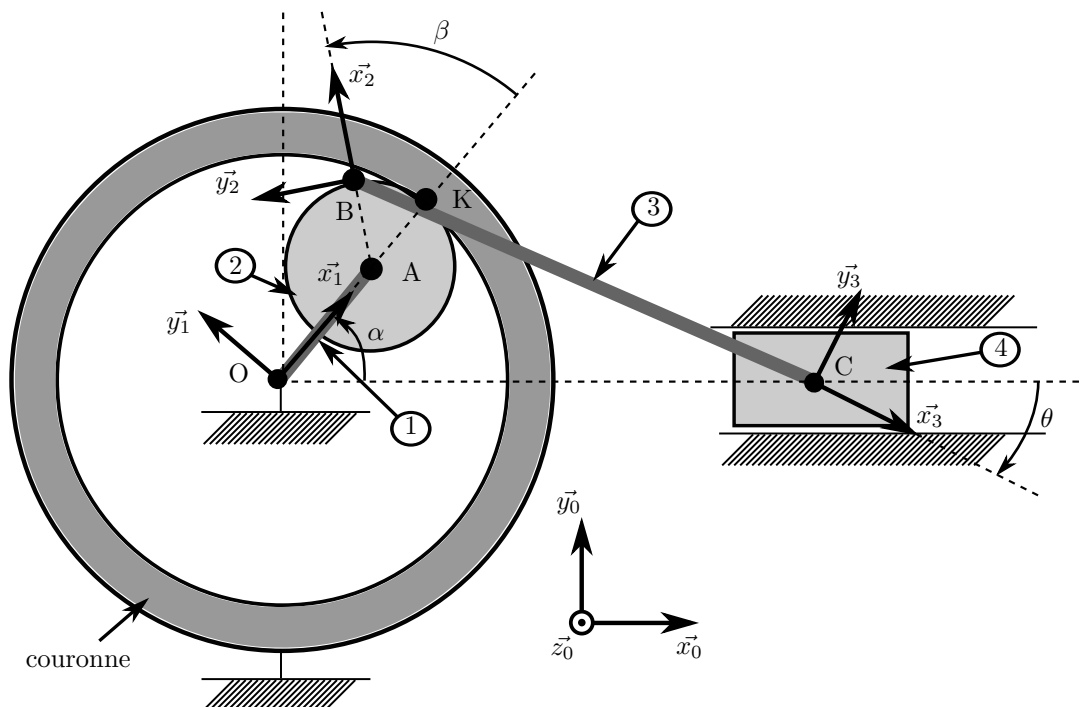


FIGURE 1 – Schéma du mécanisme étudié. On rappelle ici les données géométriques du problème $\vec{OA} = a\vec{x}_1$, $\vec{AK} = R\vec{x}_1$, $\vec{AB} = R\vec{x}_2$, $\vec{BC} = L\vec{x}_3$ et $\vec{OC} = \lambda\vec{x}_0$.

1 Cinématique analytique

- 1- Dessiner les diagrammes de changement de base $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 2$ et $0 \leftrightarrow 3$.
 - 2- Donner les expressions des vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$, $\vec{\Omega}(3/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$.
 - 3- Exprimer la vitesse $\vec{V}(A \in 1/0)$ du point A dans le mouvement de l'arbre d'entrée (1) par rapport à \mathcal{R}_0 .
 - 4- Faire de même pour $\vec{V}(K \in 1/0)$.
 - 5- Exprimer la vitesse $\vec{V}(B \in 2/1)$ du point B dans le mouvement de la roue (2) par rapport à \mathcal{R}_1 .
 - 6- Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 2/0)$.
 - 7- Exprimer la vitesse de glissement $\vec{V}(K \in 2/0)$. En appliquant la condition de roulement sans glissement entre les solides (2) et (0) établir une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$. Préciser alors le sens de rotation de (2) par rapport à (1).
 - 8- Quelle relation y a-t-il entre les vecteurs $\vec{V}(K \in 1/0)$ et $\vec{V}(K \in 2/1)$?
- Indication :** utiliser la condition de roulement sans glissement.
- 9- Déterminer en fonction de $\dot{\lambda}$, la vitesse $\vec{V}(C \in 3/0)$ de C par rapport à \mathcal{R}_0 . En déduire l'expression au point C du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ du mouvement de la bielle (3) par rapport au bâti (0).
 - 10- Exprimer au point C le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ du mouvement du coulisseau (4) par rapport au bâti (0).
 - 11- Exprimer $\vec{V}(B \in 3/0)$. En utilisant la question 6 et en tenant compte du rôle joué par B vis-à-vis des solides (2) et (3), obtenir une relation vectorielle faisant intervenir $\dot{\lambda}$, les vitesses angulaires $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ et les données géométriques du problème (a , R et L).
 - 12- Écrire le vecteur \vec{OC} comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{x}_1 , \vec{x}_2 et \vec{x}_3 .
- Pour répondre à la question bonus suivante, vous pouvez librement choisir de partir de la relation vectorielle obtenue à la question 11 ou 12.*
- 13- (Bonus) Écrire deux relations scalaires faisant intervenir λ , α , β , θ et les données géométriques du problème (a , R et L).

2 Cinématique graphique

- 1- Identifier les centres instantanés de rotation (CIR) suivants :
 - I_{10} : CIR du mouvement de l'arbre (1) par rapport au bâti (0).
 - I_{21} : CIR du mouvement de la roue (2) par rapport à l'arbre (1).
 - I_{20} : CIR du mouvement de la roue (2) par rapport à la couronne (0).
 - I_{32} : CIR du mouvement de la bielle (3) par rapport à la roue (2).
 - 2- On suppose que l'arbre d'entrée tourne à une vitesse angulaire constante $|\dot{\alpha}| = 10 \text{ tours.min}^{-1}$ et que la longueur $a = OA = 30 \text{ cm}$. Donner la valeur numérique de la norme $\|\vec{V}(A \in 1/0)\|$ (en m.s^{-1}).
- Indication :** on prendra $\pi \simeq 3$.
- Pour la tracé du vecteur $\vec{V}(A \in 1/0)$, on prendra une norme de 3 cm et on supposera $\dot{\alpha} < 0$.
- 3- Préciser, d'après la question précédente, l'échelle utilisée.
 - 4- Représenter le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in 1/0)$ sur la figure 2.
 - 5- Faire de même pour le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 1/0)$.
 - 6- Construire, en justifiant, le vecteur $\vec{V}(K \in 1/0)$. En déduire la construction de $\vec{V}(K \in 2/1)$.
- Indication :** utiliser la *condition de roulement sans glissement*.
- 7- Construire le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 2/1)$ puis utiliser la *loi de composition des vitesses* pour construire $\vec{V}(B \in 2/0)$.
 - 8- Construire le vecteur vitesse $\vec{V}(C \in 3/0)$.

Numéro d'anonymat :

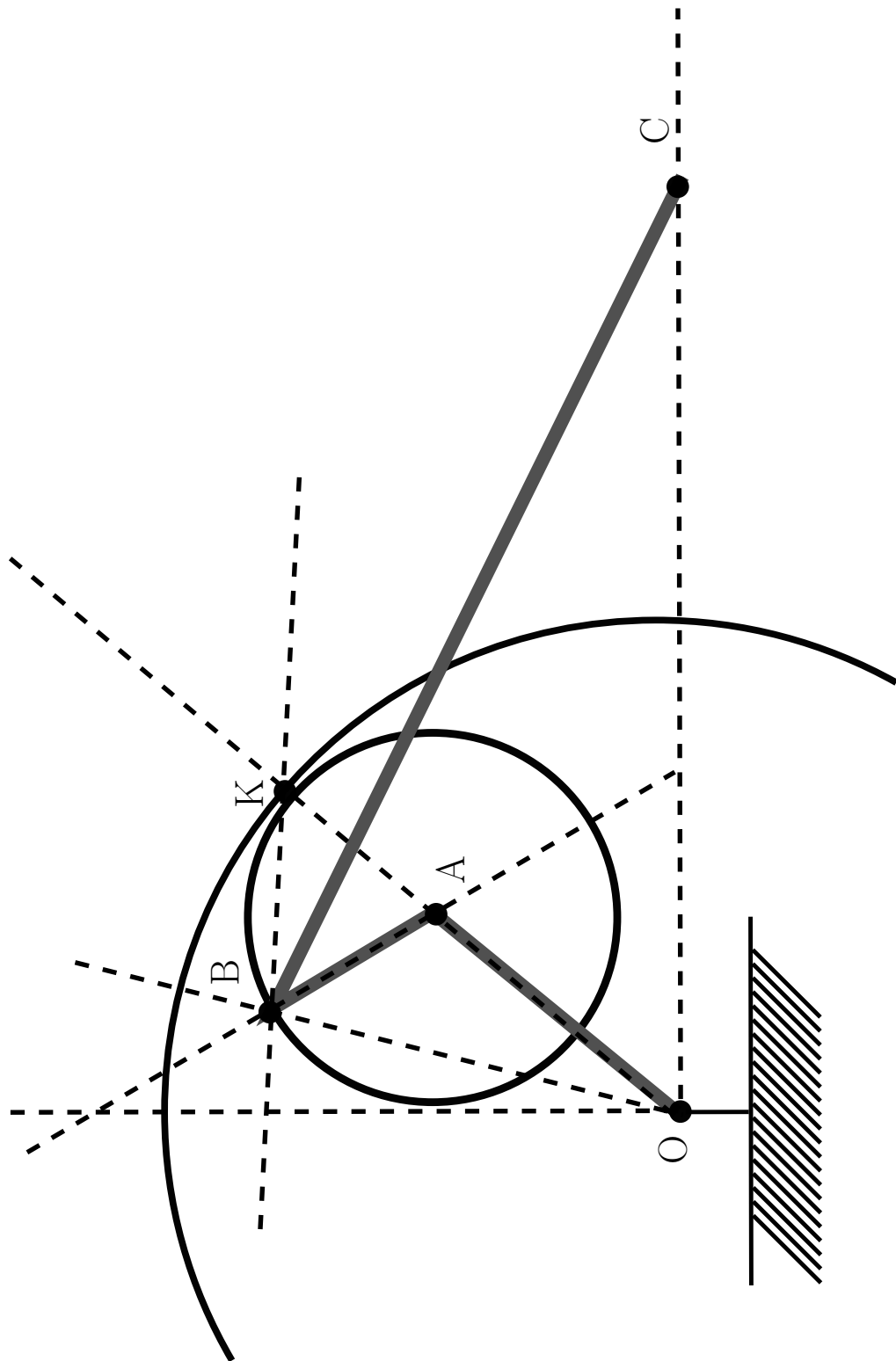


FIGURE 2 – Schéma pour la partie graphique. À compléter et à remettre avec le cahier de composition.
Indiquer le numéro d'anonymat sur cette page.