Optimisation de structures stratifiées et séquences d'empilement

Partie 2 – Maximisation de la rigidité globale et de la charge de flambage d'un panneau composite

Dans les structures aéronautiques, on utilise les composites pour alléger le poids des composants, tout en profitant des bonnes performances en rigidité de ces matériaux. La norme de construction aéronautique requiert que les différentes parties de la structure soient vérifiées vis-à-vis du flambage, puisque des chargements de compression sont présents. On propose donc de modéliser un composant simple d'une structure de ce type, tel qu'un panneau carré en composite stratifié (par exemple, un panneau composant un caisson d'aile) : ce panneau peut être représenté comme une plaque carrée, qui sera modélisée selon la théorie de Love-Kirchhoff. On considère que le panneau soit appuyé simplement sur tous ses bords et qu'un chargement de compression biaxiale soit appliqué dans son plan, de telle manière que $N_x = 2\ N_y = -\ 100$ N/m.

La plaque, carrée de côté L = 1 m, est composée d'un stratifié d'épaisseur totale h = 4 mm, soit N = 32 couches d'épaisseur t = 0,125 mm chacune. Le matériau constitutif de la couche de base est un composite orthotrope UD carbone/époxyde T300/5208 de propriétés élastiques : E_1 = 181 GPa, E_2 = 10,3 GPa, G_{12} = 7,17 GPa et ν_{12} = 0,28.

1. Pour ce matériau de la couche de base, calculer les composantes polaires notées T_0^{CB}, T_1^{CB}, R_0^{CB} et R_1^{CB}. Montrer que $\Phi_0^{CB} = \Phi_1^{CB} = 0$ (soit que le paramètre de forme d'orthotropie pour la couche de base vaut $K^{CB} = 0$, et donc $R_K^{CB} = R_0^{CB}$.
2. En reprenant les équations de la CLPT en polaires, dire quelle est la valeur des paramètres polaires isotropes T_0^* et T_1^*des tenseurs normalisés $\mathbf{A}^*$ et $\mathbf{D}^*$.
3. En connaissant les valeurs des paramètres polaires de la couche de base, tracer le domaine de faisabilité des stratifiés orthotropes que l'on peut construire à partir de ce matériau : dans le plan $R_K^* - R_1^*$ (composantes des tenseurs de membrane ou de flexion normalisés), tracer les limites des valeurs admissibles pour les couples de points (R_K^*, R_1^*) pour les stratifiés orthotropes et rappeler les équations représentatives de ces courbes. Identifier sur le graphique : *i*) la ligne des stratifications *cross-ply*, *ii*) la ligne des stratifications *angle-ply*, *iii*) le point A représentatif de la stratification unidirectionnelle, *iv*) le point B représentatif de la stratification *cross-ply* équilibrée (autant de couches à 0° que à 90°), *v*) le point C représentatif de la stratification *angle-ply* avec α = 45°, *vi*) le point D représentatif des stratifications isotropes.
4. Selon la description de la géométrie et du chargement, tracer un schéma de la structure à l'étude, avec les conditions limites et les efforts de membrane $N_x = 2N_y$ de compression appliqués. On rappelle que N_x et N_y, avec $N_s = N_{xy}$ =0, sont les composantes d'un tenseur du second ordre de type contraintes (donc, de la même forme que $\boldsymbol{\sigma}$). En utilisant la représentation polaire des tenseurs d'ordre 2 (voir chapitre de rappels sur l'anisotropie, p. 15), déterminer les composantes T et R, ainsi que l'angle Φ (d'abord, donner les expressions littérales de T et R en fonction de N_y, puis calculer leurs valeurs numériques). Tracer enfin le cercle de Mohr relatif à l'état d'efforts considéré.
   Un paramètre particulièrement utile par la suite sera le rapport $X = \frac{R}{|T|}$ (rapport entre partie déviatorique et sphérique des contraintes). Montrer que ce rapport vaut ici : $X = 1/3$.

On veut maintenant passer à l'**optimisation de la structure par rapport à la rigidité et à la résistance au flambage :** pour cela, on adopte une **approche en 2 étapes**.

Dans un premier temps, on réalise l'**étape 1 « optimisation de structure » :** on considère le **stratifié** qui compose la plaque comme un **matériau homogène équivalent, orthotrope et découplé, et ayant A* = D***. Il sera donc représenté par seuls trois paramètres R_K^*, R_1^* et Φ_1.

5. Rappeler les domaines de variation admissibles pour les trois paramètres R_K^*, R_1^* et Φ_1.

Compte tenu du chargement, dans le but de maximiser la rigidité et la charge critique de flambage, on décide d'aligner la direction principale d'orthotropie Φ_1 avec la direction principale d'effort, soit l'axe *x* (direction de la plus grande sollicitation). Par la suite, nous travaillons donc en imposant $\Phi_1 = 0$ et on réduit les **variables du problème** aux **deux paramètres $\boldsymbol{R_K^*}$ et $\boldsymbol{R_1^*}$**.

6. **Maximisation de la charge critique de flambage.** Pour le cas de la structure considérée (géométrie carrée et conditions limites d'appuis simples sur tous les bords) et dans le cas de chargement de compression bi-axiale décrit précédemment $N_x = 2N_y$, émettez une hypothèse sur le type de stratifié optimal pour la maximisation du flambage de la plaque et la forme de son comportement élastique (forme d'orthotropie ou autre symétrie élastique, isotropie, ...). Situer la solution proposée sur le domaine des stratifiés orthotropes dans le plan (R_K^*, R_1^*).
   Par la suite, nous allons résoudre ce même problème d'optimisation dans le domaine des stratifiés orthotropes et nous pourrons comparer le résultat obtenu avec la solution proposée intuitivement.
   Pour la plaque carré, appuyée sur ses bords et chargée en flexion bi-axiale, on obtient une expression analytique du multiplicateur de flambage λ (correspondant au mode 1-1) :
   $$\lambda = \frac{\pi^2 h^3}{36\, N_y L^2}\left[D_{11}^* + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) + D_{22}^*\right]$$
   En utilisant la représentation polaire des composantes cartésiennes D_{ij}^*, exprimer le multiplicateur de flambage λ en fonction des variables du problème R_K^* et R_1^*.
   Montrer donc que, pour ce problème, la **maximisation du multiplicateur de flambage $\boldsymbol{\lambda}$** est **équivalente à la minimisation du paramètre $\boldsymbol{R_K^*}$**.
   Exprimer donc le point solution dans le domaine admissible dans le plan R_K^* - R_1^* et dire à quel type de stratification ce point correspond. Comparer le résultat obtenu avec la solution proposée intuitivement : quel rapport entre les valeurs de λ dans les deux cas ?

7. **Maximisation de la rigidité globale de la structure :** afin de maximiser la rigidité globale de la structure, on peut minimiser son « inverse », soit la *compliance*. On mesure la *compliance* d'une structure, sous un chargement donné, comme le travail des actions externes : plus petit ce travail, plus la structure est rigide vis-à-vis du chargement. Via les théorèmes de l'énergie, on montre que la *compliance* est finalement égale à l'énergie élastique dans le cas de structures avec déplacements imposés nuls (ce qui est le cas considéré : appuis simples sur tous les bords). Donc, pour maximiser la rigidité, il faut **minimiser l'énergie élastique *W***.
   Pour un matériau orthotrope avec $\Phi_1 = 0$, comme c'est le cas ici, on écrit l'énergie élastique :
   $$W = T^2\,\frac{2X^2T_1 - 4XR_1 + T_0 + R_K}{4[T_1(T_0 + R_K) - 2R_1^2]}$$
   où *T* et *X* = *R*/|*T*| sont les paramètres polaires de l'état de contraintes (voir question 4), alors que T_0, T_1, R_K et R_1 sont les paramètres polaires du matériau (ici les paramètres polaires des tenseurs **A*** = **D*** du stratifié).

Calculer le gradient de la fonction W par rapport aux variables d'optimisation R_K et R_1 et l'imposer égal à zéro pour trouver les points de minimum : montrer que la valeur $R_1^{\mathrm{opt}} = XT_1$ annule le gradient. C'est pour cette valeur que le minimum est atteint, et cela pour toutes les valeurs admissibles de R_K. Pour un stratifié composé de la couche de base UD carbone/époxyde étudiée à la question 1 et chargé en compression bi-axiale comme étudié à la question 4, calculer la valeur de R_1^{opt} et dire quel est l'intervalle correspondant de valeurs admissibles pour R_K. Tracer la ligne correspondante sur le domaine de faisabilité des stratifiés orthotropes dans le plan R_K-R_1.

On voit donc que, à différence de la maximisation du flambage, qui donne un unique point solution, la maximisation de la rigidité donne une infinité de points solutions, parmi lesquels on pourra choisir. On va s'intéresser à trois de ces points :

i) Le point correspondant à $\left(R_K^{\mathrm{opt}}\right)_{\min}$: ce point se trouve sur le bord gauche du domaine admissible, qui correspond à la courbe des *angle-ply* : à quelle valeur de l'angle α_{opt} cette solution correspond ? Afin de construire une séquence de stratification solution, on pourra alors utiliser une solution quasi-triviale quasi-homogène, comme : [α/ -α_2/ α/ -α/ α_2/ α] en imposant $\alpha = \alpha_{\mathrm{opt}}$.

ii) Le point correspondant à $\left(R_K^{\mathrm{opt}}\right)_{\max}$: ce point se trouve sur le bord droit du domaine admissible, qui correspond à la courbe des *cross-ply* : à quelle valeur du paramètre de stratification ρ_{90}^{opt} cette solution correspond ? Combien de couches à 90° dans le stratifié avec N = 32 ?

iii) Un point intermédiaire sur le segment des solutions qui maximisent la rigidité : étant données les valeurs cibles des paramètres polaires R_1^{opt} et R_K^{opt}, dire comment formuler le problème de la recherche d'une stratification orthotrope et quasi-homogène (c.a.d. découplée et ayant $\mathbf{A}^* = \mathbf{D}^*$) correspondante aux valeurs cibles des paramètres polaires (formulation du problème de recherche de stratifié : étape 2 dans l'approche multi-échelle).

8. **Maximisation de la charge de flambage ET maximisation de la rigidité :** si on veut maximiser simultanément la charge de flambage et la rigidité pour la structure considérée, quelle solution doit-on retenir ? Pour trouver la réponse, on peut travailler graphiquement : sur le domaine admissible, ayant tracé la ligne des points qui maximisent la rigidité, tracer aussi les lignes de niveau de la fonction $\lambda(R_K)$ et déterminer donc quel point maximise cette dernière. Quel est donc le stratifié solution pour ce problème ?