

Examen de première session du Jeudi 30 novembre 2017.

Durée de l'épreuve : 3h00.

Les documents de cours et calculatrices ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.

Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.

Déformation thermoélastique d'une structure cylindrique confinée.

On considère une structure qui occupe dans la configuration de référence supposée libre de contraintes un domaine Ω_s cylindrique de rayon R , d'épaisseur h selon la direction \underline{e}_3 . Cette structure est à la température T_0 uniforme dans cette configuration de référence. On désigne par S_0 , S_h les deux surfaces terminales du cylindre d'équations respectives $x_3 = 0$ et $x_3 = h$ et par S_R la surface latérale d'équation $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R$.

La structure est confinée dans une gaine latérale déformable Ω_g d'épaisseur e très petite devant R ($e \ll R$), et de rigidité supérieure à celle de la structure. L'adhésion entre la structure et la gaine est supposée parfaite sur la frontière S_R (frottement infini). La gaine est également supposée être à la température T_0 dans sa configuration de référence Ω_g , sa surface extérieure S_e est libre d'efforts. Les forces de gravité sont supposées négligeables et les déformations et déplacements sont supposés petits autour des configurations de référence Ω_s et Ω_g .

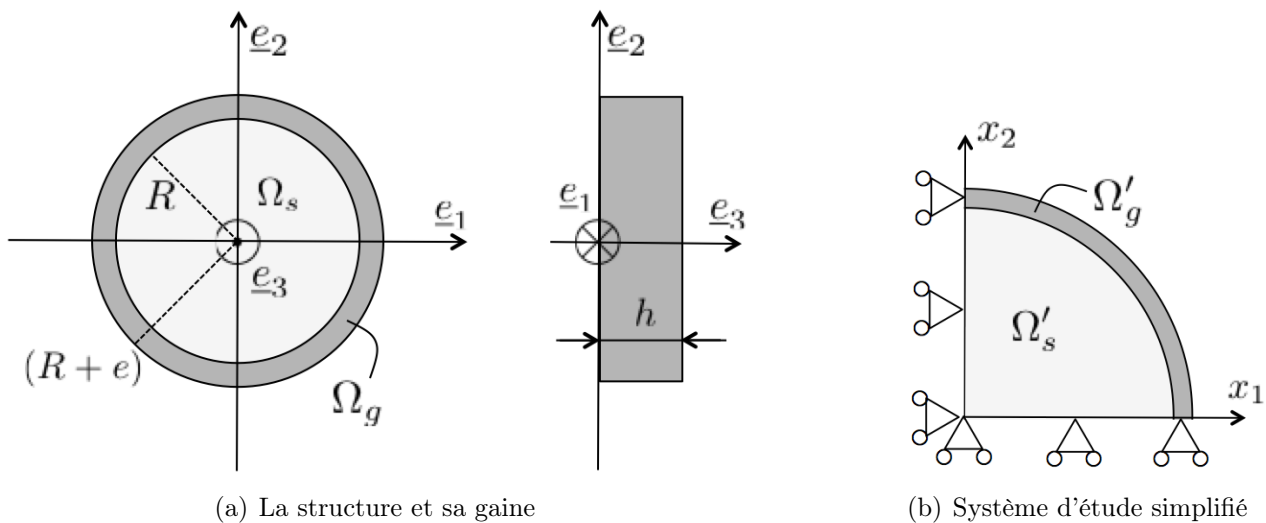


FIGURE 1 – Schématisation de la structure et de sa gaine.

La structure à partir de cet état de référence est portée à une température : $T(\underline{x})$ donnée par

$$T(\underline{x}) = T_0 - A_2 (x_1^2 + x_2^2)$$

où A_2 est une constante positive.

Les matériaux constitutifs de la structure et de la gaine sont supposés élastiques, homogènes et isotropes de module de Young E_s et E_g respectivement, et de même coefficient de Poisson ν . La structure et la gaine ont de plus des coefficients de dilatation thermique identiques notés α . La loi de Hooke en thermoélasticité s'écrit donc dans chacun des matériaux :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_\beta \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{Id}} + 2\mu_\beta \underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda_\beta + 2\mu_\beta) \alpha \Delta T \underline{\underline{Id}} \quad \beta \in \{s, g\}$$

où $\Delta T = T(\underline{x}) - T_0$ et λ_β et μ_β sont les coefficients de Lamé tels que :

$$\lambda_\beta = \frac{\nu E_\beta}{(1-\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu_\beta = \frac{E_\beta}{2(1+\nu)} \quad \beta \in \{s, g\}$$

Formulations du problème

1. Montrer que l'étude du système $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_g$ peut se limiter à l'étude d'un quart de la structure et de sa gaine comme indiqué Figure 1(b). On se placera à partir de maintenant dans le domaine $(x_1 > 0)$ et $(x_2 > 0)$ du plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

On s'intéresse au cas particulier où $h \ll R$ de sorte que l'on pourra faire l'hypothèse d'un état de contraintes planes dans la structure, le tenseur des contraintes prenant de fait la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On se limite alors à une étude dans le plan $x_3 = 0$ engendré par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ du système Ω , où l'on définit les tenseurs de contraintes, de déformations, d'identité et de précontrainte suivants :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{2D} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{2D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{I}}^{2D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Montrer que sous l'hypothèse des contraintes planes, la loi de comportement thermoélastique peut être réduite à :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{2D} = c_1 [\underline{\underline{\varepsilon}}^{2D} + c_2 (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^{2D}) \underline{\underline{I}}^{2D}] - c_3 \alpha \Delta T \underline{\underline{I}}^{2D}$$

avec c_1, c_2, c_3 des constantes matérielles :

$$c_1^\beta = 2\mu_\beta = \frac{E_\beta}{1+\nu} \quad c_2 = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta + 2\mu_\beta} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad c_3^\beta = \frac{2\mu_\beta(3\lambda_\beta + 2\mu_\beta)}{(\lambda_\beta + 2\mu_\beta)} = \frac{E_\beta}{1-\nu} \quad \beta \in \{s, g\}$$

Indications :

- Obtenir l'expression de ε_{33} en utilisant la condition $\sigma_{33} = 0$.
- Pour alléger les expressions on pourra s'affranchir des indices β pour la démonstration.

Les lois de comportement de la structure et de la gaine peuvent alors être représentées grâce à la notation matricielle suivante :

$$\{\sigma\} = [A^{CP}] \{\varepsilon\} + \{\sigma^{th}\}$$

où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont construits en suivant la notation de Voigt classique :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}\}^t \quad et \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12}\}^t \quad \{\sigma^{th}\} = -c_3\alpha\Delta T \{1 \ 1 \ 0\}^t$$

et $[A^{CP}]$ est la représentation matricielle du tenseur de rigidité matérielle sous l'hypothèse des contraintes planes.

3. Donner l'expression de la matrice $[A^{CP}]$ en fonction de c_1^β, c_2 .
4. Détailler les équations d'équilibre, les conditions aux limites venant compléter la loi de comportement énoncée ci-dessus pour constituer la formulation forte du problème exprimée dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ après limitation au domaine $(x_1 > 0)$ et $(x_2 > 0)$.
5. Établir la formulation faible du problème.
6. Donner la formulation variationnelle du problème correspondante.
7. Démontrer que le problème étudié possède une solution unique en déplacement.

Résolution par la méthode des éléments finis

Pour résoudre le problème posé sur la portion d'éprouvette, on s'appuie sur un maillage simple constitué de deux mailles représenté sur la Figure 2(a).

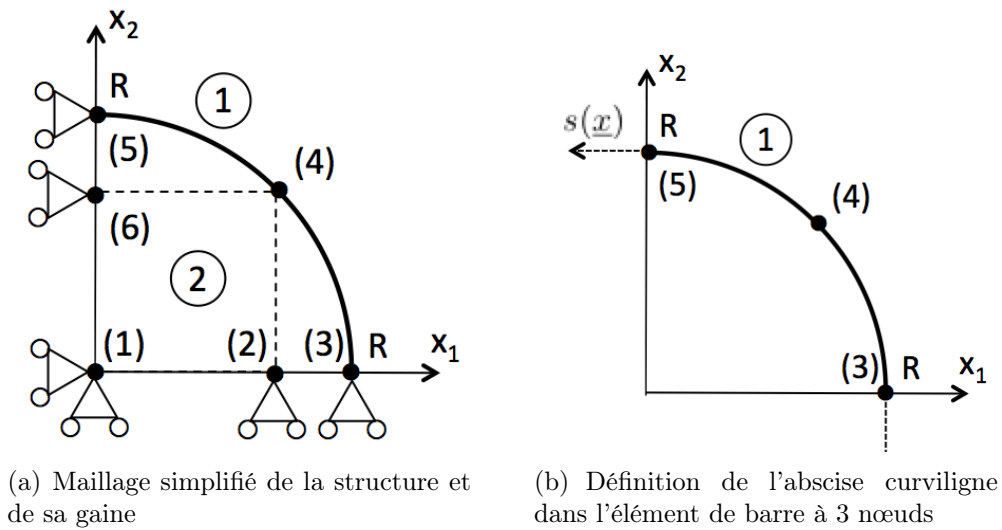


FIGURE 2 – Schématisation et modélisation du problème par la méthode des éléments finis.

Les mailles sont une barre à trois noeuds B3 (1) représentant la gaine et un triangle à six noeuds T6 (2) représentant la structure. Le maillage est caractérisé par les matrices de coordonnées $[T]$ et de connectivité $[convec]$ suivantes :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R\sqrt{2}/2 & 0 \\ R & 0 \\ R\sqrt{2}/2 & R\sqrt{2}/2 \\ 0 & R \\ 0 & R\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad [convec] = \begin{bmatrix} (3) & (4) & (5) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{bmatrix}$$

Les mailles du maillage réel représentées en Figure 2(a) sont associées aux mailles de référence Δ_1 possédant deux côtés de longueur unitaire. Les mailles Δ_1 sont représentées en Figure 3 dans le repère (O, a_1, a_2) où $\underline{a}(a_1, a_2)$ sont les coordonnées de l'image d'un point $\underline{x}(x_1, x_2)$ sur les éléments de référence Δ_1 .

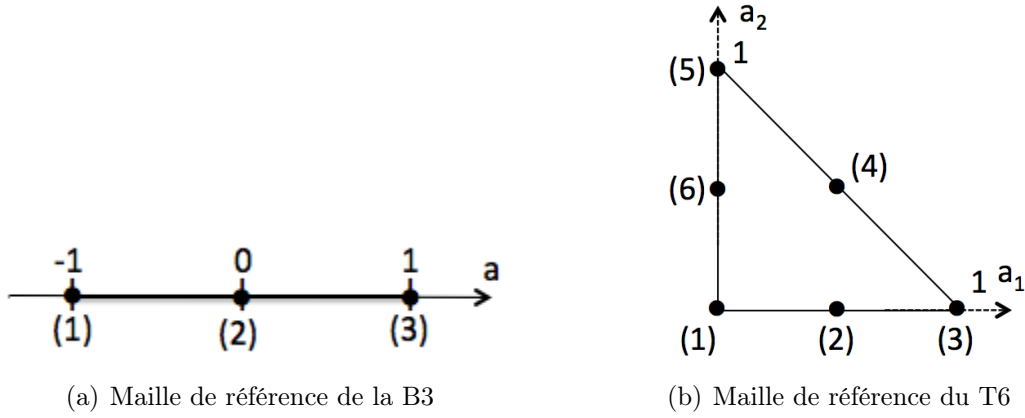


FIGURE 3 – Mailles de référence pour les maillages de la structure et de sa gaine.

Représentation paramétrique

- Les fonctions de forme de l'élément B3 sont quadratiques. On les cherche donc sous la forme $N_k = \xi_k a^2 + \eta_k a + \gamma_k$. En utilisant les propriétés des fonctions de forme (que l'on rappellera) établir leurs expressions rappelées ci-dessous et les représenter sur l'élément de référence.

$$N_1 = \frac{1}{2}a(a-1) \quad N_2 = (1-a^2) \quad N_3 = \frac{1}{2}a(a+1)$$

On s'intéresse maintenant à la représentation paramétrique des deux éléments. Il est à noter une différence importante entre l'élément T6 décrit directement dans la base réelle $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, et l'élément B3 pour lequel la représentation paramétrique est exprimée dans une base locale attachée à l'élément c'est à dire en fonction de l'abscisse curviligne sur l'élément (1) qui sera notée s et orientée comme précisé sur la Figure 2(b). Ainsi la position de tout point de l'élément (1) pourra être décrite comme suit :

$$s = \left\{ N_e(a)^{\textcircled{1}} \right\}^t \left\{ S_e^{\textcircled{1}} \right\} \quad \forall s \in \textcircled{1},$$

où $\left\{ S_e^{\textcircled{1}} \right\}$ est le vecteur des positions des nœuds dans la base locale.

Pour l'élément T6 on introduira plus classiquement la matrice d'interpolation $\left[N_e^{\textcircled{2}} \right]$ telle que :

$$\left\{ \underline{x}^{\textcircled{2}} \right\} = \left[N_e^{\textcircled{2}} \right] \left\{ X_e^{\textcircled{2}} \right\},$$

où $\left\{ X_e^{\textcircled{2}} \right\}$ est le vecteur des positions des nœuds de l'élément $\textcircled{2}$ exprimés dans le repère $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

9. Préciser les formes et dimensions des objets $\left\{ N_e(a)^{\textcircled{1}} \right\}$, $\left\{ S_e^{\textcircled{1}} \right\}$, $\left[N_e^{\textcircled{2}} \right]$ et $\left\{ X_e^{\textcircled{2}} \right\}$.
10. Montrer que le jacobien de la représentation paramétrique de l'élément $\textcircled{1}$ vaut $J_e = \frac{ds}{da} = \frac{L_e}{2}$, où L_e est la longueur de l'arc formé par l'élément.
11. Montrer que la représentation paramétrique de l'élément $\textcircled{2}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{x} = \begin{cases} a_1 R(p + qa_1) \\ a_2 R(p + qa_2) \end{cases}$$

avec p et q deux constantes à déterminer.

Fonctions de forme du T6 proposé :

$$\begin{cases} N_1 = (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2) \\ N_2 = 4a_1(1 - a_1 - a_2) \\ N_3 = a_1(2a_1 - 1) \\ N_4 = 4a_1a_2 \\ N_5 = a_2(2a_2 - 1) \\ N_6 = 4a_2(1 - a_1 - a_2) \end{cases}$$

12. Déterminer la matrice jacobienne $\left[J^{\textcircled{2}}(a_1, a_2) \right]$ de la transformation définie pour l'élément $\textcircled{2}$ par :

$$\{d\underline{x}\} = \left[J^{\textcircled{2}}(a_1, a_2) \right] \{d\underline{a}\}$$

13. Dédurre de ce résultat le Jacobien de l'élément $\textcircled{2}$, puis montrer que l'aire de $\textcircled{2}$ est inférieure à un quart de disque. Pour ce faire on rappelle que le triangle à 6 nœuds possède 3 points de Gauss dont les coordonnées (a_1^g, a_2^g) et les poids w_g sont données ci-dessous et qu'on utilise la méthode d'approximation de Gauss-Hammer pour intégrer sur les triangles.

a_1^g	a_2^g	w_g
1/6	1/6	1/6
2/3	1/6	1/6
1/6	2/3	1/6

On précise que $\frac{(4\sqrt{2}-1)}{6} \simeq 0,78 \leq \frac{\pi}{4}$

Représentation des champs locaux de déplacement, déformation et contrainte dans l'élément de barre

On choisit de travailler avec des éléments isoparamétriques de sorte que le déplacement en tout point des éléments réels $\textcircled{1}$ pourra être interpolé à l'aide des fonctions de formes et des déplacements des noeuds uniquement.

Pour l'élément T6 on fera donc intervenir la matrice $\left[N_e^{\textcircled{2}} \right]$ précédemment définie :

$$\{ \underline{u}(\underline{x}) \} = \left[N_e(a_1, a_2)^{\textcircled{2}} \right] \left\{ U_e^{\textcircled{2}} \right\} \quad \forall \underline{x} \in \textcircled{2},$$

où le vecteur $\left\{ U_e^{\textcircled{2}} \right\}$ est le vecteur des déplacements des noeuds dans l'espace réel.

Pour l'élément B3 on n'exprimera le déplacement $u(s)$ dans le repère local en fonction du vecteur d'interpolation $\left\{ N_e^{\textcircled{1}} \right\}$ précédemment définir et des déplacements des noeuds exprimés dans la base locale $\left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}_{loc}$ de sorte que :

$$u(s) = \left\{ N_e(a)^{\textcircled{1}} \right\}^t \left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}_{loc} \quad \forall s \in \textcircled{1},$$

où $\left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}_{loc}$ est le vecteur du déplacement des noeuds de la barre dans le repère local (une seule composante de déplacement par noeud) tel que dans la numérotation locale :

$$\left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}_{loc} = \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{Bmatrix}$$

On introduit également les vecteur et matrice élémentaires $\left\{ B_e^{\textcircled{1}} \right\}$ et $\left[B_e^{\textcircled{2}} \right]$ qui permettent de calculer les déformations dans les éléments à partir des déplacements en leurs noeuds de la manière suivante :

$$\varepsilon(s) = \left\{ B_e^{\textcircled{1}}(a) \right\}^t \left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}_{loc} \quad \forall s \in \textcircled{1} ; \quad \left\{ \varepsilon^{\textcircled{2}}(\underline{x}) \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \left[B_e^{\textcircled{2}}(a_1, a_2) \right] \left\{ U_e^{\textcircled{2}} \right\} \quad \forall \underline{x} \in \textcircled{2}$$

14. Construire le vecteur $\left\{ B_e^{\textcircled{1}}(a) \right\}^t$. En déduire l'expression de la contrainte $\sigma(s)$ associée en fonction de E_g , J_e , a , $\left\{ U_e^{\textcircled{1}} \right\}$. On rappelle que E_g est le module de Young de la gaine.

Contributions élémentaires à l'énergie de déformation et calcul du second membre élémentaire

15. Établir l'expression matricielle de $\mathcal{E}^{(1)}$, la contribution de l'élément (1) au calcul de l'énergie de la structure définie par :

$$\mathcal{E} = \int_{(1)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV$$

On l'exprimera en fonction de $\left\{ B_e^{(1)}(a) \right\}^t$, E_g , h , e , et des vecteurs de déplacement élémentaires test et solution soit $\left\{ U_e^{(1)} \right\}_{loc}$ et $\left\{ V_e^{(1)} \right\}_{loc}$ respectivement.

16. En déduire la dimension et l'expression de la matrice de rigidité de l'élément (1) $\left[K_e^{(1)} \right]_{loc}$ dans la base locale :

On pourra introduire la matrice $[M(a)]$:

$$[M(a)] = \begin{bmatrix} (a - 1/2)^2 & -2a(a - 1/2) & (a - 1/2)(a + 1/2) \\ & 4a^2 & -2a(a + 1/2) \\ sym & & (a + 1/2)^2 \end{bmatrix}$$

17. Combien de point de Gauss seraient nécessaires pour intégrer de manière exacte chacun des termes de $[M(a)]$ entre -1 et 1 ?

On s'intéresse désormais au calcul des seconds membres élémentaires $\left\{ F_e^{(1)} \right\}$.

18. Montrer que pour l'élément (2) celui-ci prend la forme suivante :

$$\left\{ F_e^{(2)} \right\} = c_3 \alpha \int_{(2)} \left[B_e^{(2)} \right]^t \Delta T(\underline{x}(\underline{a})) J_e da_1 da_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

19. Donner l'expression matricielle de ΔT dans l'élément (2) en fonction de A_2 , $\left[N_e^{(2)} \right]$ et $\left\{ X_e^{(2)} \right\}$.

On rappelle que ΔT vaut : $\Delta T = -A_2 (x_1^2 + x_2^2)$ avec A_2 une constante positive.

20. En déduire l'expression matricielle complète de $\left\{ F_e^{(2)} \right\}$ en fonction de :

$$c_3, \alpha, A_2, \left[B_e^{(2)} \right], \left[N_e^{(2)} \right], \left\{ X_e^{(2)} \right\} \text{ et } J_e^{(2)}$$

.

Assemblage et résolution

Après la phase d'assemblage, on obtient classiquement le système suivant à résoudre :

$$[K] \{U\} = \{F\},$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité globale issue de l'assemblage des matrices élémentaires, et $\{F\}$ le second membre global issu de l'assemblage des seconds membres élémentaires. A noter qu'avant la phase d'assemblage il faudra avoir pris soin d'exprimer la matrice de rigidité de $\textcircled{1}$ dans la base réelle $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Pour cela on définit la matrice de passage $[P_e]$ telle que :

$$\{U_e\}_{loc} = [P] \{U_e\}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} \quad \text{soit} \quad \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité de l'élément de barre à trois nœuds exprimée dans la base réelle devient donc :

$$\left[K_e^{\textcircled{1}} \right]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = [P_e]^t \left[K_e^{\textcircled{1}} \right]_{loc} [P_e]$$

21. Donner la dimension de la matrice de rigidité dans la base réelle : $\left[K_e^{\textcircled{1}} \right]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)}$.

Pour ne pas alourdir les notations on conservera dans la suite du problème la notation $\left[K_e^{\textcircled{1}} \right]$ pour les matrices de rigidité, exprimée dans la base réelle à partir de ce point.

22. Quelle est la taille de $[K]$ et $\{F\}$ avant prise en compte des conditions aux limites en déplacement ?
23. Expliquer pourquoi la matrice $[K]$ ne possède aucun terme nul a priori.
24. Exprimer la 7ème composante de $\{U\}$ sous la forme de la composante de déplacement $u_i^{(j)}$ correspondante. En déduire quelles composantes des matrices élémentaires $\left[K_e^{\textcircled{1}} \right]$ et $\left[K_e^{\textcircled{2}} \right]$ du terme $[K]_{77}$ de la matrice de rigidité globale avant prise en compte des conditions aux limites.

On souhaite prendre en compte les conditions aux limites par la méthode du lagrangien et ainsi construire le système augmenté tel que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K] & -[C]^t \\ -[C] & [0] \end{bmatrix}}_{[K_{aug}]} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ -\{U^D\} \end{Bmatrix}$$

où $[C]$ est la matrice de localisation des déplacements connus, $\{R\}$ est le vecteur des réactions apparaissant aux nœuds là où des déplacements sont bloqués et $\{U^D\}$ est le vecteur des valeurs des déplacements connus.

25. Après avoir identifié les composantes de $\{U\}$ correspondant à des ddl connus et les avoir explicité sous la forme : $U_k = u_i^{(j)}$, donner la taille de la matrice de localisation $[C]$.
26. Expliquer le principe de résolution de ce système et représenter sur le maillage la forme des réactions obtenues après le calcul de $\{R\}$.