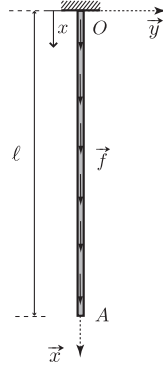


### TD 3 : Cinématique des poutres

#### Exercice 1 : Poutre encastrée soumise à son poids propre

On s'intéresse à la cinématique d'une poutre en traction, de longueur  $\ell$  et de section  $S$ , encastrée sur sa face supérieure et soumise à son poids propre (voir figure). On note  $E$  le module de Young et  $\rho$  la masse volumique du matériau constituant la poutre. L'axe  $O\vec{x}$  est dirigé suivant la verticale descendante.



- 1) En considérant une modélisation «poutre», déterminer l'expression de l'effort linéique  $f_x(x)$  en fonction des données du problème.
- 2) Déterminer alors les efforts de cohésion dans la poutre.
- 3) En déduire l'expression du déplacement longitudinal  $u_x(x)$  de la poutre.

On a représenté sur la figure 1 les composantes  $u_x$  et  $u_y$  de déplacement issues d'une modélisation 3D (axisymétrique) de la poutre, pour un encastrement sur la face supérieure (solutions possibles de Saint-Venant associées au modèle poutre ci-dessus).

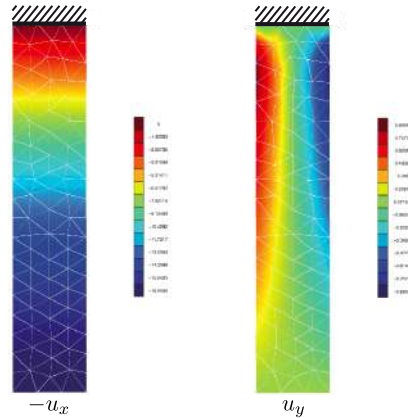


FIGURE 1: Composantes  $u_x$  et  $u_y$  pour une modélisation 3D avec un encastrement sur la face supérieure.

- 4) Comparer la cinématique poutre et la cinématique 3D. Discuter en particulier de la pertinence du modèle poutre (domaine de validité, approximations faites, ...).

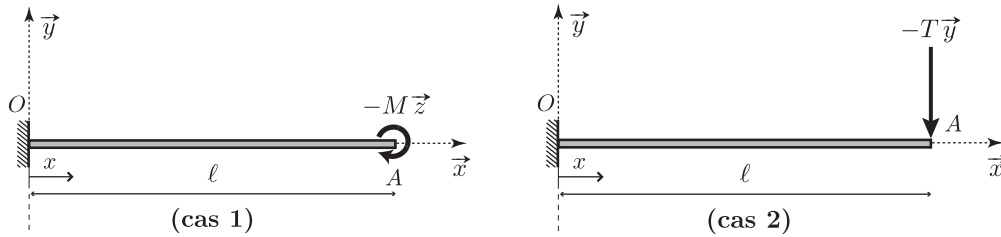
## Exercice 2 : Comparaison Timoshenko/Euler-Bernoulli pour la flexion

On considère une poutre, de longueur  $\ell$  et de section carrée (côté  $a$ ), soumise à deux cas de chargement de flexion distincts :

(cas 1) flexion pure générée par un moment  $-M\vec{z}$  appliqué en  $x = \ell$

(cas 2) flexion simple générée par un effort vertical  $-T\vec{y}$  appliqué en  $x = \ell$ .

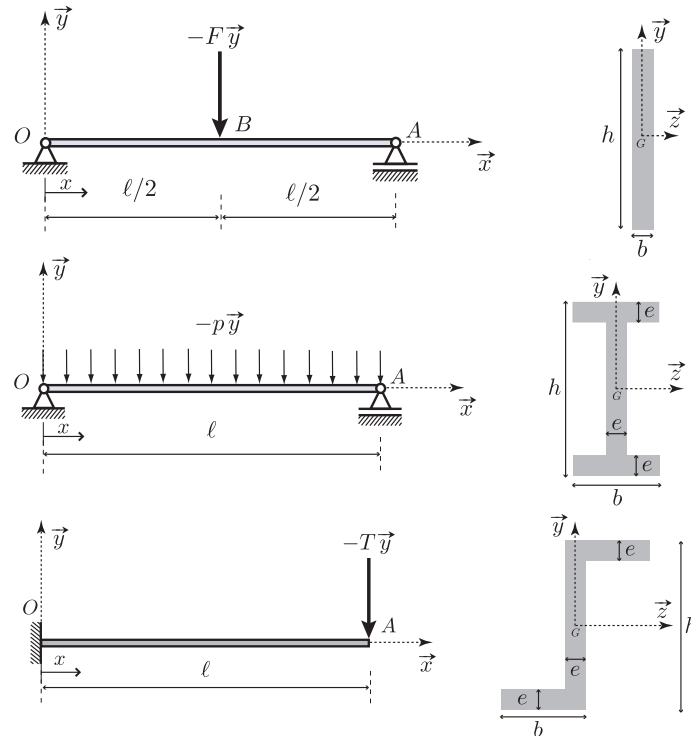
On note  $E$  et  $\mu$  le module de Young et le coefficient de cisaillement du matériau.



- 1) Pour chacun des deux cas de chargement proposés, calculer les efforts de cohésion dans la poutre.
- 2) A partir de la théorie de Timoshenko (théorie naturelle pour la flexion), en déduire les expressions du déplacement vertical  $u_y(x)$  et de la rotation  $\omega_z(x)$  de la poutre.
- 3) En utilisant à présent la théorie d'Euler-Bernoulli pour la flexion, déterminer la nouvelle cinématique de la poutre pour les cas 1 et 2 de chargement.
- 4) Conclure sur la validité et les approximations de cette dernière théorie.

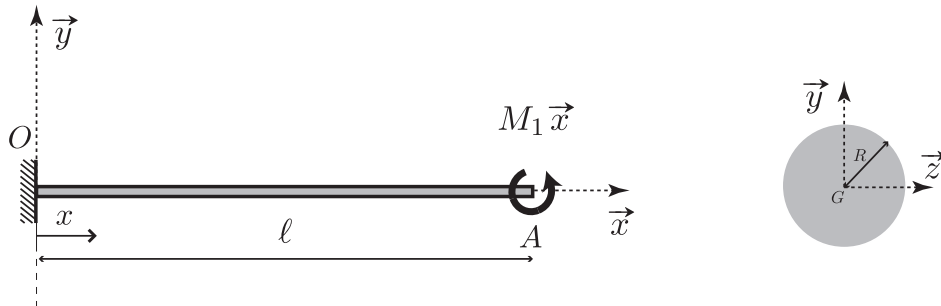
## Exercice 3 : Calcul de flèches maximales en flexion

Pour chacun des cas de flexion de poutre ci-dessous, déterminer la flèche maximale. On utilisera une cinématique de type Euler-Bernoulli.



### Exercice 4 : Poutre en torsion

On considère une poutre droite de longueur  $\ell$  et de section circulaire (rayon  $R$ ). Elle est encastree sur son extremité gauche et soumise à un moment de torsion  $M_1 \vec{x}$  sur son extremité droite. On note  $\mu$  le module de cisaillement du matériau constituant la poutre.

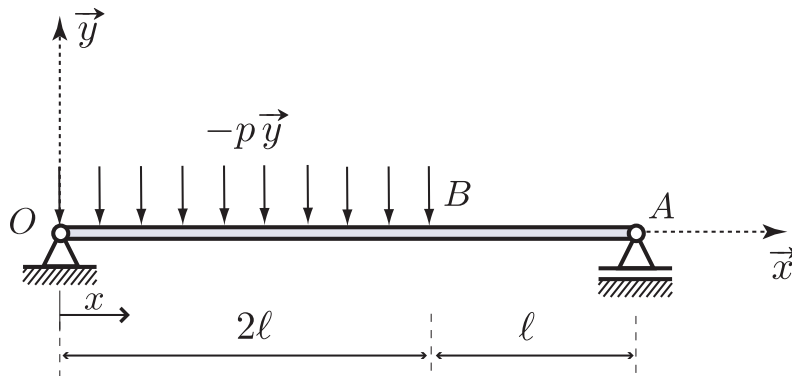


- 1) Après avoir déterminé les efforts de cohésion dans la poutre, donner l'expression de la rotation  $\omega_x(x)$  de la poutre autour de l'axe  $G\vec{x}$ .
- 2) Comparer cette cinématique poutre à la cinématique 3D du problème de torsion (problème de Saint-Venant).

On suppose pour les exercices suivants que les axes  $G\vec{y}$  et  $G\vec{z}$  sont axes principaux d'inertie.

### Exercice 5 :

On considère une poutre de longueur  $3\ell$  sur appui simple fixe en  $O$  ( $x = 0$ ) et sur appui simple glissant en  $A$  ( $x = 3\ell$ ) soumise à une force répartie  $-p\vec{y}$  constante sur la portion  $[OB]$  ( $B$  situé en  $x = 2\ell$ ).

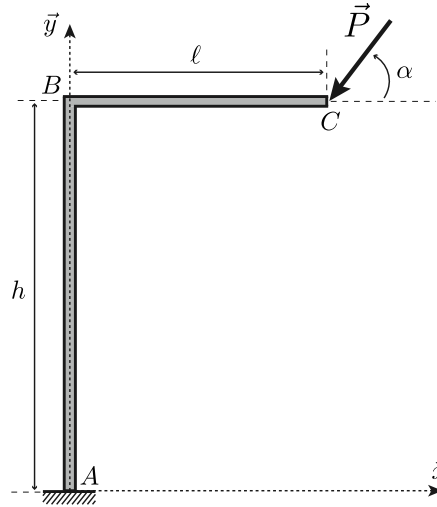


Sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, déterminer  $\omega_z(x)$  et  $u_y(x)$  sur toute la poutre.

En déduire la rotation de la section droite en  $O$  ( $\omega_O = \omega_z(0)$ ) et le déplacement vertical en  $B$  ( $v_B = u_y(2\ell)$ ).

## Exercice 6 : Portique

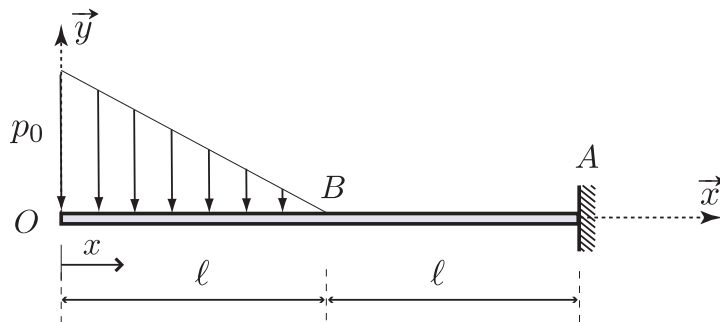
On considère une poutre [ABC] (voir figure-ci dessous), élastique (module de Young  $E$ , section  $S$ , moment quadratique  $I$ ). La poutre est encastrée en A ( $s = 0$ ) origine de l'abscisse curviligne et est soumise au point C ( $s = h + \ell$ ) à une force ponctuelle  $\vec{P} = -P(\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y})$ .



- 1) Calculer *sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli* les composantes du torseur de cohésion ( $N(s)$  l'effort normal,  $T_n(s)$  l'effort tranchant et  $M_z(s)$  le moment fléchissant autour  $\vec{z}$ ) sur les tronçons [AB] et [BC] en utilisant la méthode des coupures puis via la résolution des équations d'équilibre local de la structure.
- 2) A partir de l'effort normal  $N(s)$  et du moment fléchissant  $M(s)$  du tronçon [AB] et en utilisant les lois de comportement ainsi que les conditions aux limites en A, déterminer  $\vec{u}_B$  le déplacement du point B (on pose  $\vec{u}_B = u_B \vec{t} + v_B \vec{n}$  où  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  sont respectivement la tangente et la normale à la poutre).

## Exercice supplémentaire 1 :

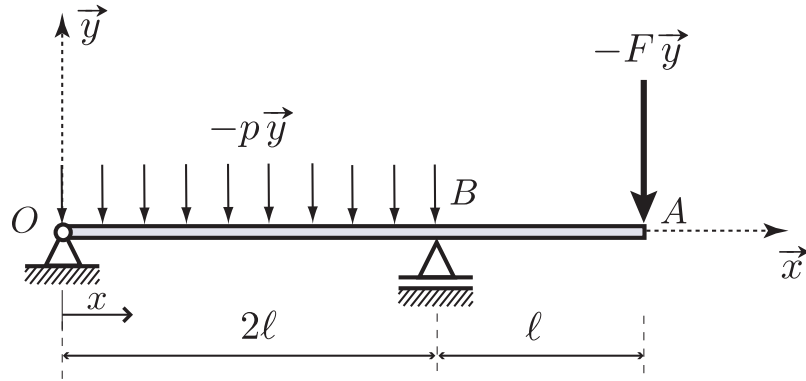
On considère une poutre de longueur  $2\ell$  encastrée en A ( $x = 2\ell$ ) et libre en O ( $x = 0$ ) soumise à une force répartie  $\frac{p_0}{\ell}(x - \ell)\vec{y}$  sur la portion [OB] (B situé en  $x = \ell$ ).



Sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, déterminer  $\omega_z(x)$  et  $u_y(x)$  sur toute la poutre.

En déduire la rotation de la section droite en B ( $\omega_B = \omega_z(\ell)$ ) et le déplacement vertical en O ( $v_O = u_y(0)$ ).

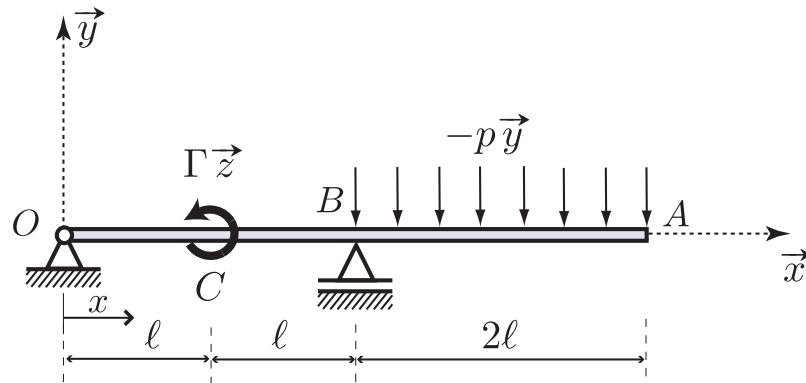
**Exercice supplémentaire 2 :**



Sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, déterminer  $\omega_z(x)$  et  $u_y(x)$  sur toute la poutre.

En déduire le déplacement vertical en A ( $v_A = u_y(3\ell)$ ) et la rotation de la section droite en B ( $\omega_B = \omega_z(2\ell)$ ).

**Exercice supplémentaire 3 :**



Sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, déterminer  $\omega_z(x)$  et  $u_y(x)$  sur toute la poutre.

En déduire le déplacement vertical en A ( $v_A = u_y(4\ell)$ ) et la rotation de la section droite en C ( $\omega_C = \omega_z(\ell)$ ).