Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 26 Octobre 2015

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner un exemple d'équation aux dérivées partielles non-linéaire. Justifier la non-linéarité.
2. Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 : $yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$. S'agit-t-il d'une équation hyperbolique, elliptique, parabolique ? Justifier votre réponse.
3. Donner (sans démonstration) la solution générale pour l'équation des ondes 1D définie sur l'axe réel. Donner l'intérpretation physique de cette solution.
4. Définissez le domaine de dépendance pour l'équation des ondes non-homogène 1D. Tracer graphiquement ce domaine associé à la solution de l'équation au point $(3, 2)$ sachant que la vitesse de déplacement des ondes est $c = 1$.
5. Donner la définition de la fonction de Green pour l'équation de la chaleur $1D$. Préciser son comportement pour différents temps t.
6. Énoncer (sans démonstration) le principe de maximum pour l'équation de la chaleur 1D.

Exercice 1
Déterminer la solution générale de l'équation :

$$u_x + 2xy^2 u_y = 0, \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^{+,*}$$

sachant qu'elle vérifie la condition auxiliaire : $u(0, y) = \ln(y)$.

Exercice 2
(i) Montrer que l'équation :

$$3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 0$$

est hyperbolique. Trouver la solution générale en passant par une factorisation de l'équation. Tracer graphiquement quelques caracatéristiques dans le répère (Oxt).
(ii) Soit la version non-homogène de l'équation précédente :

$$3u_{xx} - 2u_{xt} - u_{tt} = 4(u_x - u_t)$$

En effectuant un changement de variables : $\xi = x - 3t$, $\eta = x + t$, montrer que dans le nouveau système de coordonnées, l'équation a la forme suivante :

$$u_{\xi\eta} = u_\xi$$

Déterminer ensuite la solution générale de l'équation non-homogène.

Exercice 3
Trouver la solution générale du problème :

$$u_{ttx} - u_{xxx} = 0, \quad u_x(x, 0) = 0, \quad u_{xt}(x, 0) = \sin x$$

dans le domaine $\{(x,t), -\infty < x < \infty,\ t > 0\}$

Exercice 4
Une puce est assise sur un morceau de ficelle (chaîne) à une distance M de l'origine. Un marteau de largeur a frappe la corde sur l'intervalle $[0,a]$. En modélisant les perturbations causées dans la chaîne comme une solution de l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, déterminer à quel moment la puce sentira l'effet de la frappe de marteau.

Exercice 5
Soit u solution de l'équation :

$$u_t = u_{xx} - au, \quad 0 < x < l,\ t > 0$$

munie des conditions auxiliaires : $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad \forall t > 0$ et avec a un paramètre réel.

(i) Montrer que la fonction $V(t)$ définie par :

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x$$

satisfait l'égalité :

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^l (u_x^2 + au^2)\mathrm{d}x.$$

(ii) En déduire que :

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2aV(t), \quad \forall t > 0$$

(iii) Soit $a > 0$. Montrer que si $\frac{dV}{dt}(t_0) = 0$ alors $V(t_0) = 0$, et en déduire que $V(t) = 0$, $\forall t \geqslant t_0$.
(iv) En intégrant l'inégalité de la question (ii), montrer que $V(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.