C

CORRIGE TD 2

Exo 1

a. Kolmogorov - Pour $Re \to \infty$

1 – les petites échelles turbulentes sont isotropes (1a) (domaine d'équilibre) et la dynamique des plus petites échelles de l'écoulement ne dépend que du taux de dissipation ε et de la viscosité ν (1b)

2 – Il existe une gamme d'échelles (gamme inertielle) caractérisée par un comportement universel, régi uniquement par le taux de transfert de l'énergie.

b. Hypothèse 1 + analyse dimensionnelle :

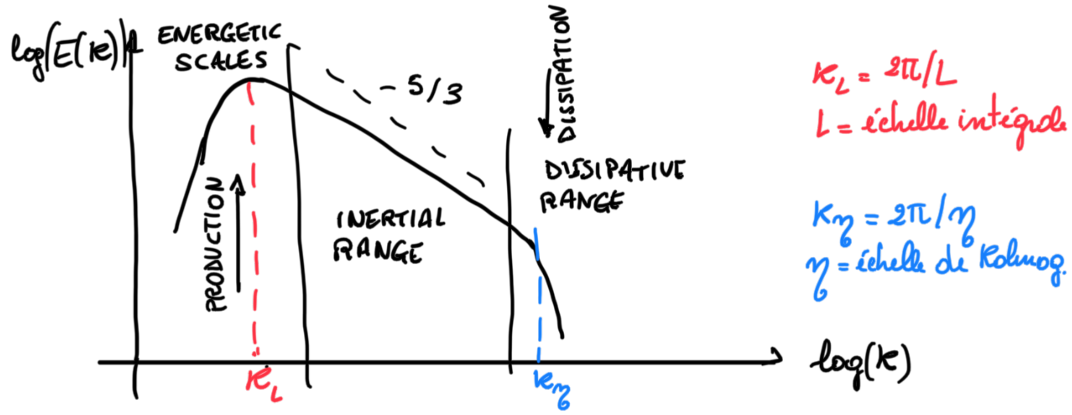
$$[\eta] = L \qquad [\tau_\eta] = T \qquad [v_\eta] = LT^{-1}$$

Grandeurs caractéristiques : ε et ν

$$[\varepsilon] = L^2T^{-3} \qquad [\nu] = L^2T^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \sim L \qquad \tau_\eta \sim \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \sim T \qquad v_\eta \sim (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

c.



d. Dans la zone inertielle, la dynamique dépend de $k = \frac{2\pi}{\ell}$ et de $T = \varepsilon$

$\Rightarrow$

$$[E(k)] = [k_t] / [k] = (L^2T^{-2}) / L^{-1} = L^3T^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l}[k] = L^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$[T] = L^2 T^{-3}$ J

$\Rightarrow$ pente $\boxed{-5/3}$ par rapport à k.

e. Voir figure précédente.

f. Voir figure précédente.

$\boxed{\text{EXO 2}}$ $P = 100\ W$ – Toute la puissance est dissipée en chaleur

Hypothèse d'équilibre $P = M\varepsilon = \rho V \varepsilon$ (M = masse d'eau)

$$\Rightarrow \varepsilon = P/M = 100\ J/kg/s$$

$\nu = 10^{-6}\ m^2/s$ pour l'eau

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \left(\frac{10^{-18}}{10^2}\right)^{1/4} = 10^{-5}\ m$$

Echelle intégrale L (ou l_0) : hypothèse d'équilibre (production = dissipation)

Echelle de vitesse intégrale : $u' \sim \sqrt{K}$ (K = én. cin. turb.)

Echelle de longueur : L

Echelle de temps : L/u'

Transfert: $T \sim \dfrac{K}{L/u'} \sim \dfrac{u'^3}{L}$

Equilibre: $\varepsilon \simeq T \Rightarrow \varepsilon \sim \dfrac{u'^3}{L} \Rightarrow L \sim \dfrac{u'^3}{\varepsilon}$

$$\frac{\eta}{L} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{1}{L} \sim \left(\frac{\nu^3}{u'^3} L\right)^{1/4} \frac{1}{L} = \left(\frac{\nu^3}{u'^3 L^3}\right)^{1/4} = Re_L^{-3/4}$$

avec $Re_L = \dfrac{L u'}{\nu}$.

5. Nous avons vu en cours que l'échelle de Taylor λ peut être estimée comme:

$$\lambda \simeq (10\nu K/\varepsilon)^{1/2} \simeq (10\nu u'^2/\varepsilon)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{L} = \left(15\nu \frac{u'^2}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{1}{L} \simeq \left(15\nu \frac{L}{u'}\right)^{1/2} \frac{1}{L} = \left(15 \frac{\nu}{u' L}\right)^{1/2} \sim Re_L^{-1/2}$$

$\boxed{\text{EXO 3}}$

a) $K_L \sim 3u'^2 = 3 \times 50^2 = 7500\ J/kg$

b) $T = \dfrac{K_L}{L/u'} = \dfrac{7500}{2\times10^6/50} = 75\times10^{-6}\ \dfrac{J}{kg\cdot s}$

c) Hypothèse d'équilibre: $\varepsilon \sim T = 75\times10^{-6}\ \dfrac{J}{kg\cdot s}$

d) $\eta = \left(\dfrac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} = \left(\dfrac{(2\times10^{-4})^3}{\ldots}\right)^{1/4} = 0.018\ m \Rightarrow L \sim 2800$

$$+ \quad \eta \left(\frac{\ }{\varepsilon}\right) \left(\frac{\ }{75\times10^{-6}}\right) \qquad \eta$$

e) $$v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} = \left(2\times10^{-4}\cdot 75\times10^{-6}\right)^{1/4} = 0{,}011\ m/s \Rightarrow \frac{u'}{v_\eta} \sim 5000$$

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\times10^{-4}}{75\times10^{-6}}\right)^{1/2} = 1{,}63\ s$$

f) $$N \sim \frac{Vol}{\eta^3} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} H}{0{,}018^3} = \frac{\pi\times 4\cdot10^{14}\times 150000}{0{,}018^3} = 3\times10^{25}$$

$\rightarrow$ Nombre de points impossible à traiter.

g) $$\varepsilon_{TOT} = \int_{tache} \rho\varepsilon\, dV = \rho\varepsilon \frac{\pi D^2}{4} H = 30\times 75\cdot10^{-6}\times \pi\times 4\cdot10^{14}\times 150000 =$$
$$= 4\cdot10^{17}\ W = 4\cdot10^{8}\ GW$$

h) $$\varepsilon_{TOT} / P_{K-K} = \frac{4\cdot10^{11}}{8\cdot10^{3}} = 0{,}5\times10^{8} = 5\times10^{7} \text{ centrales!}$$

$\boxed{\text{EXO 4}}$

- $$K = \int_0^\infty E(k)\,dk = \int_0^{k_L} A k^m\,dk + \int_{k_L}^\infty \alpha\varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}\,dk =$$
$$= A\frac{k_L^{m+1}}{m+1} + \alpha\varepsilon^{2/3}\left[\frac{k^{-2/3}}{(-2/3)}\right]_{k_L}^{\infty} = A\frac{k_L^{m+1}}{m+1} + \frac{3}{2}\alpha\varepsilon^{\frac{2}{3}} k_L^{-2/3} \quad (1)$$

- Continuité du spectre :
$$E(k_L) = A k_L^m = \alpha\varepsilon^{\frac{2}{3}} k_L^{-5/3} \Rightarrow k_L^{m+\frac{5}{3}} = \frac{\alpha}{A}\varepsilon^{2/3} \quad (2)$$

- $$\varepsilon = -\frac{dK}{dt} \quad (3)$$

Injecter (2) dans (1) et trouver
$$K = f(\varepsilon, A, \alpha, m)$$
Remplacer cette dernière relation dans (3) et intégrer.