

Écoulements souterrains

”Écoulements en milieux naturels” Cours MSF12, M1 SU

P.-Y. Lagrée
CNRS & Sorbonne Université, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/~lagree

5 juin 2020

Résumé

planning du cours MU4MEF04 2019-2020 : 55-65 101 13 :45
http://master.spi.sorbonne-universite.fr/fr/mecanique-des-fluides/m1-mf2a/test_planning.html
cours, notes... <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/index.html>

1 Introduction

1.1 Généralités

La compréhension des écoulements en milieu naturel est un enjeu important à différents égards. Le sujet est important car c'est un enjeu essentiellement humain : la majeure partie des humains vivent le long des fleuves ou des côtes. (70 % des côtes sont en érosion, 80 % de la population mondiale habite à basse altitude et plus de 20 % à proximité d'un océan ou d'un estuaire. (source Wiki /Côte_(géographie))), l'eau en sous sol est une part importante de la consommation humaine. C'est aussi un enjeu industriel (irrigation des sols, captage de l'eau par des puits, réseaux d'approvisionnement et d'assainissement, houille blanche, usines marémotrices, fermes à courant, moulin à marée,...) et c'est devenu un enjeu scientifique (modélisation, simplification pour la compréhension des phénomènes).

Nous examinons dans ce chapitre non plus les écoulements à surface libre (vagues....<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf> fleuves....<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>) mais les écoulement souterrains.

La première remarque importante est que le sol n'est pas imperméable en général. S'il est constitué de sable, c'est particulièrement évident, l'eau s'infiltre entre les grains et disparaît de la surface pour descendre... Le sable n'est pas imperméable, il est perméable. Les autres sols ont de même des propriétés de perméabilité plus ou moins fortes dépendant de la

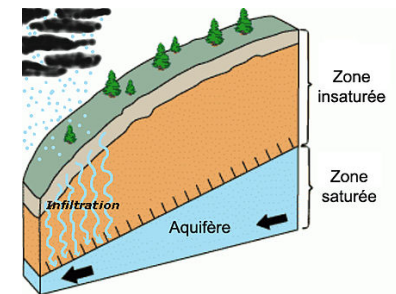


FIGURE 1 – Nappe phréatique, dessin wikipedia

structure du sol, sable plus ou moins grossier, graviers, roches, argile... Il y a toujours de petites possibilités pour l'eau de s'écouler à travers. Ces milieux perméables sont appelés milieux poreux. Ils ne sont pas "pleins" mais sont constitués de trous connectés, d'interstices... appelés pores. Dans la suite le sol sera considéré comme un milieu poreux. Mais nous supposons qu'il existe toujours des endroits plus denses non perméables qui vont finir par retenir l'eau.

L'eau ruisselant sur le sol finit toujours par rencontrer des surfaces délimitant des milieux poreux dans lesquels elle va s'infiltrer et le ruissellement va disparaître de la surface. L'eau est conservée, elle s'infiltré dans le sol et passe entre les interstices, par exemple si le matériau est du sable, on imagine bien l'eau passant autour des grains.

Dans cette zone instaurée, θ la teneur en eau volumétrique est telle qu'elle ne remplit pas tous les interstices disponibles, θ est la quantité d'eau contenue dans le matériau (*volume fraction saturation, volumetric water content, or moisture content*).

L'eau s'accumule lorsqu'elle rencontre finalement un milieu imperméable. Elle ne peut plus descendre, elle remplit tous les interstices : c'est ce qui forme un "aquifère" ou une "nappe phréatique libre". Les eaux souterraines peuvent être trouvées presque partout dans le sous-sol peu profond (voir image de https://fr.wikipedia.org/wiki/Nappe_phr\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{\e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactoratique).

La pluviométrie en France nous donne des ordres de grandeur, sur 760mm d'eau tombant en moyenne, 450 s'évaporent, 300 ruissellent et 10 s'infiltrant, voir <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf> pour des ordres de grandeurs pratiques.

Sur la figure 2, un dessin représentant une vision commune des écoulements souterrains, et à droite une expérience de laboratoire du même auteur pour les modéliser. Le massif montagneux est modélisé par un empilement de billes de verre de taille connue. Le fond imperméable rocheux est remplacé par un fond rigide plat. Un tuyau supérieur percé tout du long fait couler goutte à goutte une pluie qui s'infiltré dans le sol. On voit clairement l'eau accumulée au fond (vert plus sombre), le niveau de la "table" *water table* est incliné car à droite, il y a un mur imperméable, mais à gauche, il y a une grille qui retient les billes, et l'eau peut donc sortir (représentant l'alimentation d'une rivière, ou le fond d'un puits dans la réalité). L'eau qui sort est pesée, l'eau qui rentre par la pluie est aussi mesurée. On a par ce dispositif expérimental accès à des quantités cachées dans le cas du sol. Voir <http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf> pour plus de détails.

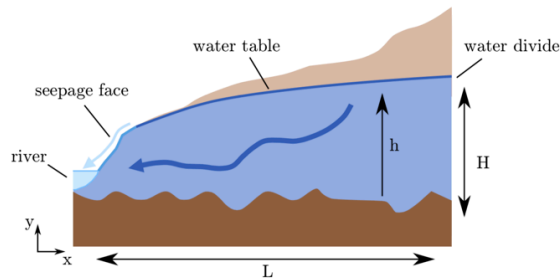


Figure 2.2: Two-dimensional groundwater flow towards a river, in a vertical section perpendicular to the river channel.

3.2. Laboratory aquifer compatible with the Dupuit-Boussinesq theory

51

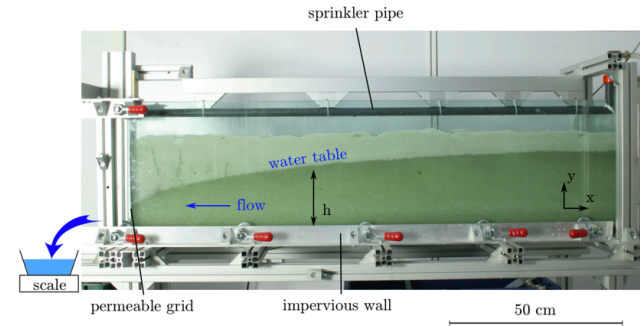


Figure 3.1: Experimental aquifer. The water table separates the unsaturated zone of porous material (light zone, above) from its saturated zone (darker zone, bottom). At the outlet, we collect water in a bucket weighed every second.

FIGURE 2 – images de <http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf>, gauche l'eau s'infiltré par la pluie dans le sous sol poreux et s'accumule lorsqu'elle rencontre un sol imperméable. Une partie de l'eau s'écoule le long du sol. Le niveau hydrostatique est appelé *water table*, la pression y est la pression atmosphérique extérieure, on dit aussi "nappe phréatique". L'eau emprisonnée est appelée Aquifère

Un point important pour la suite est la notion de saturation. Le sous sol peut être divisé en deux régions : la zone saturée ou la zone phréatique (avec les aquifères),

où tous les espaces disponibles du milieu poreux sont remplis d'eau, et la zone non saturée (également appelée zone vadose), où il y a sont encore des poches d'air qui contiennent de l'eau, mais qui peuvent être remplies avec plus d'eau.

Un milieu est dit "saturé" lorsque la pression de l'eau y est supérieure à la pression atmosphérique. La nappe phréatique est la surface où la pression est égale à la pression atmosphérique. On mesure toutes les pressions en prenant le niveau 0 à la pression atmosphérique, sur la nappe phréatique la pression est nulle $p = 0$. Les conditions saturées correspondent donc à $p > 0$. Des conditions non saturées se produisent au-dessus de la nappe phréatique où la pression est négative (pression inférieure à la pression atmosphérique) et l'eau qui remplit incomplètement les pores du matériau de l'aquifère est sous aspiration (pression négative $p < 0$). La teneur en eau dans la zone insaturée est maintenue par des forces d'adhérence de surface et elle s'élève au-dessus de la nappe phréatique (l'isobare à pression nulle $p = 0$) par capillarité pour saturer une petite zone au-dessus de la surface phréatique (la frange capillaire) à pression inférieure à la pression atmosphérique.

On introduira la hauteur de pression h qui est la pression exprimée en mètres, c'est $h = p/(\rho g)$. Attention, dans la description à la Saint Venant des équations de Dupuit Boussinesq, h sera l'épaisseur d'eau de l'aquifère (comme sur la figure 2 gauche).

2 Ecoulements saturés gouvernés par Darcy

2.1 Loi de Darcy

Partons de ce milieu constitué de trous et d'interstices répartis dans son ensemble. On note φ la fraction de volume accessible par le fluide dans le matériau poreux étudié, c'est dans ce domaine que le fluide coule. On l'appelle aussi la "porosité", φ varie de 1% pour le granite (le granite est une roche qui fait partie de celles qui sont l'essentiel de la croûte continentale de la planète, à ne pas confondre avec le granit, matériau de construction, dont le granite fait partie) à 40 % pour des graviers. Du point de vue du solide, on parle de compacité $\phi = 1 - \varphi$. La densité passe de l'eau à celle du grain et la vitesse passe de 0 dans le grain à une valeur différente de 0 hors du grain. On va faire une moyenne sur une échelle plus grande que celle du grain, et on va considérer à présent que le milieu est moyenné,

En considérant le milieu moyenné, on pourra ainsi définir une vitesse et une pression en tout point de l'espace. La loi de Darcy relie la vitesse moyenne du fluide ("vitesse débitante") au gradient de pression, c'est une relation locale, valable en tout point du milieu moyen idéalisé.

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p$$

k en m^2 est la perméabilité, l'unité D, le Darcy, correspond à une vitesse de 1 cm/s sous un gradient de pression un gradient de pression d'une atmosphère par cm, comme la viscosité de l'eau est $10^{-3} Pa.s$ on a $1D = 10^{-12} m^2$

Pour du sable k est environ 1D, pour du granite du μD , du gravier 100D.

Attention, on a supposé un milieu moyen isotrope, mais des fibres peuvent créer des directions privilégiées, donc pour un milieu anisotrope k est en fait un tenseur k_{ij} , par symétrie, il n'y a que 6 coefficients.

Bien entendu, dans un milieu inhomogène, k peut varier suivant la position.

2.2 Remarques

• Attention, \vec{u} est une vitesse (en m/s), mais on écrit aussi \vec{q} pour cette vitesse que l'on considère comme un débit par unité de surface [corriger la page anglaise https://en.wikipedia.org/wiki/Darcy%27s_law] qui est fautive (elle écrit q avec les mauvaises unités), mais les équations y sont justes. Elle exprime la portion de vitesse du fluide

$$\vec{u}^f = \vec{u}/\varphi \text{ ou encore } \vec{u} = (1 - \phi) \vec{u}^f.$$

Cette relation prend son sens si on ajoute la vitesse des grains : $\vec{u} = (1 - \phi) \vec{u}^f + (\phi) \vec{u}^p = \varphi \vec{u}^f + (1 - \varphi) \vec{u}^p$, la vitesse \vec{u} est bien une vitesse moyenne sur le volume complet *volume-averaged velocity*.

Table 5.5.1
Typical Values of Hydraulic Conductivity and Permeability

$-\log_{10}$ $\cdot K(\text{cm/s})$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Permeability	Pervious				Semipervious				Impervious					
Aquifer	Good				Poor				None					
Soils	Clean gravel	Clean sand or sand and gravel			Very fine sand, silt, loess, loam, solonetz									
					Peat	Stratified clay		Unweathered clay						
Rocks					Oil rocks			Sandstone		Good limestone, dolomite		Breccia, granite		
$-\log_{10}$ $\cdot k(\text{cm}^2)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\log_{10}k(\text{md})$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

FIGURE 3 – Valeurs typiques de k , en md (mili Darcy), Bear p 136

- L'équation initiale de Darcy 1856 est une équation globale (ce qui évite les φ) porte sur le flux traversant une surface S et soumis à un gradient de pression $\Delta P/L$

$$\frac{Q}{S} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

on retrouve le fait que $\frac{Q}{S}$ est certes une vitesse, mais aussi un débit surfacique. elle est expérimentale et globale, on peut mesurer la perméabilité et constater que le coefficient k est proportionnel à d^2 où d est la taille du diamètre caractéristique des grains (voir figure 5.5.1 de Bear).

- On peut estimer la perméabilité sur des modèles simples idéalisés de milieux poreux. Par exemple, pour un milieu constitué de tubes parallèles de rayon $d/2 = R$ le long de x :

$$u = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} p \text{ i. e. } k = \frac{d^2}{32}.$$

Pour des plaques parallèles séparées de d le long de x , on a $k = \frac{d^2}{12}$ (Hele Shaw). La loi de Kozeny Carman (1937) est semi empirique (voir Guyon Hulin p 495), elle est très utilisée (Bear p 166) :

$$k = \frac{d^2 \varphi^3}{180(1 - \varphi)^2}.$$

- Pour résoudre effectivement le problème d'un écoulement de Stokes dans un milieu constitué de grains, il faut passer par la théorie de l'homogénéisation. Elle permet connaissant la micro structure et résolvant l'écoulement dedans, de calculer ensuite le coefficient k , voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/homo.pdf>. Attention, c'est plus compliqué que de résoudre pour la vitesse \vec{u} à la petite échelle de la pore les équations de Stokes autour des grains qui serait

$$0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \frac{\mu}{k} \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

en effet comme les conditions aux limites ne sont pas claires, il faut faire intervenir ce qui se passe à petite et grande échelle. La bonne équation a besoin de mélanger les grandes et petites échelles de l'écoulement (c'est tout la difficulté de la méthode des échelles multiples mise en oeuvre dans la théorie de l'homogénéisation).

2.3 Loi de Darcy, autres notations

Comme en hydrologie, on mesure les pressions en hauteur d'eau, et qu'il y a aussi la gravité qui joue dans l'équilibre des contraintes, La loi de Darcy s'écrit sous la forme suivante qui rappelle l'équation de Stokes

$$0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ donc la loi de Darcy avec gravité est : } \vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p - \rho \vec{g})$$

que l'on écrit aussi, si h mesure la pression $p/(\rho g)$

$$\vec{u} = -\frac{k\rho g}{\mu} (\vec{\nabla} h + \vec{e}_z) \text{ ou } \vec{u} = -K \vec{\nabla} (h + z) \text{ ou encore } \vec{u} = -K \vec{\nabla} (H)$$

on note $K = \frac{k\rho g}{\mu}$ la conductivité hydraulique, et h la hauteur piézométrique. et on utilise $\rho g H = p + \rho g z$, ou $H = h + z$ avec H la charge hydraulique (écart à la pression hydrostatique), et K est en m/s, pour k valant 1D, K vaut 10^{-5} m/s.

Il est important de voir que la pression est positive quand on est dans l'eau et normalement nulle dans l'air (c'est la référence de pression). Comme on définit la pression avec une hauteur h telle que $p = (\rho g)h$, la hauteur h définie ici est nulle à pression atmosphérique.

2.4 Loi de Darcy-Forcheimmer

Il s'agit de généraliser la relation en tenant compte qualitativement des termes non linéaires causés par un écoulement plus rapide ρ^f est la densité du fluide. Darcy-Forcheimmer s'écrit

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \text{ et } 0 = -\frac{\partial p^f}{\partial x_i} - \frac{\mu}{k} u_i + \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |u_i| u_i + \rho_f g_i$$

ou si on préfère :,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \text{ et } 0 = -\vec{\nabla} p - \frac{\mu}{k} \vec{u} + \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |\vec{u}| \vec{u} + \rho_f \vec{g}$$

la contribution non linéaire de Ergun 1952 est $\frac{\rho_f d}{\kappa_i}$ le terme supplémentaire. On appelle $\frac{\kappa_i}{d}$ la "passabilité".

Les coefficients à déterminer sont k et κ_i . On choisit la loi de Kozeny -Carman $k = \frac{(1-\phi)^3 d^2}{180\phi^2}$ et on a approximativement, si on veut être cohérent avec Kozeny Carman, la forme de Ergun : $\kappa_i = \frac{(1-\phi)^3 d^2}{1.75\phi} = \frac{(\phi)^3 d^2}{1.75(1-\phi)}$ On remarque le côté implicite de la relation pour u .

2.5 Loi de Darcy-Forcheimmer, présentation à la Jackson

Ce paragraphe est à sauter en première lecture, il traite d'une vision moyenne de l'écoulement du fluide moyen u^f et surtout de son établissement en temps. En effet la loi de Darcy Instationnaire est

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

mais si on veut aller à une vitesse plus grande, ce n'est pas $\rho_f \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}$, le terme non linéaire d'advection est subtilement différent. Il faut repasser à l'écoulement moyen du fluide.

Si on considère le point de vue du fluide moyen, on écrit les équations d'évolution de ce fluide dans le cas avec non linéarité de vitesse et le terme instationnaire complet de la dérivée totale. Pour le fluide moyen s'écoulant dans le milieu poreux, on a l'incompressibilité, et il faut voir que les contraintes se partagent entre des

contraintes sur le fluide d'où le $(1 - \phi)$ et des contraintes sur la matrice solide qui est ici fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial((1 - \phi)u_i^f)}{\partial x_i} = 0, \\ \rho_f(1 - \phi) \left[\frac{\partial u_i^f}{\partial t} + u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} \right] = -(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial x_i} - f_i + (1 - \phi) \rho_f g_i, \end{array} \right. \quad (1)$$

ϕ est la fraction volumique du granulaire $u_i^p = 0$, les particules sont fixes, u_i^f est la vitesse du fluide. Le terme f_i représente les forces d'interaction entre la phase fluide et solide, en plus de la flottabilité.

Il faut donc modéliser cette force d'interaction, le plus simple est alors d'en faire un développement en puissance de la vitesse relative (avec une forme Darcy Forchheimer) :

$$f_i = \frac{\mu}{k}(1 - \phi)^2 u_i^f + \frac{\rho_f d}{\kappa_i}(1 - \phi)^3 |u_i^f| u_i^f \quad (2)$$

C'est donc le système précédent que l'on doit résoudre si on veut faire des écoulements instationnaires. On n'écrit pas l'accélération avec u_i mais avec u_i^f .

Comme les vitesses sont faibles, on néglige le terme d'accélération avec u_i^f (on néglige $+u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j}$) et comme $u_i = (1 - \phi)u_i^f$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial u_i}{\partial t} = -(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial x_i} - (1 - \phi) \frac{\eta_f}{\kappa_v} u_i + (1 - \phi) \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |u_i| u_i + (1 - \phi) \rho_f g_i, \end{array} \right. \quad (3)$$

on voit que la bonne expression est :

$$\frac{\rho_f}{1 - \phi} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Dans le cas stationnaire on retrouve que la vitesse u_i satisfait à l'équation de Darcy Forchheimer. Par la suite, on ne se pose plus de question d'accélération du fluide, on suppose qu'il est toujours à l'équilibre, et on ne distingue plus ρ_f , on écrit simplement ρ .

2.6 Loi de Darcy : équation en pression

Comme nous l'avons écrit, la loi de Darcy avec gravité est

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p - \rho \vec{g})$$

Comme le fluide est incompressible, on a une seconde équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ donc

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} p) = 0.$$

On utilise parfois $\rho g H = p + \rho g z$, avec H la charge hydraulique (écart à la pression hydrostatique) :

$$\vec{u} = -K (\vec{\nabla} H)$$

il faut résoudre le problème en H ; c'est un Laplacien si K est constant :

$$\vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} H) = 0.$$

A l'interface de l'aquifère et le long des frontières imperméables, la vitesse normale s'annule :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} H = 0.$$

Il faut donner les conditions adéquates ensuite aux autres bords : pression imposée, flux imposé, imperméabilité.... Nous verrons des exemples de mise en œuvre.

2.7 Ecoulement de Darcy confiné

Un exemple typique d'écoulement confiné est celui qui se produit lorsque l'on a une rivière creusée dans un milieu poreux. Ici nous mettons en plus une digue qui retient l'eau, Mais en fait il n'en n'est rien, de l'eau va passer dans le sol et si la pression est suffisante, le sol va être mouillé.

Le schéma est présenté sur la figure ?? gauche. Il est extrait du livre de J. Bear . Sur la figure ?? droite, un exemple plus simple issu de l'article cité dans le livre : Todd & Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>.

On voit aussi les lignes de courant *streamlines*.

Il s'agit donc d'un canal avec une digue posée sur un milieu poreux d'épaisseur H_d de sol en $z = H_d$. Il y a un fond imperméable en bas en $y = 0$. Le canal qui a lui même une profondeur (le fond est en $y = H_c$) est rempli d'eau, jusqu'à une hauteur d'eau $y = H_0$. Le sol est complètement imprégné, la nappe de l'aquifère affleure en $y = H_d$.

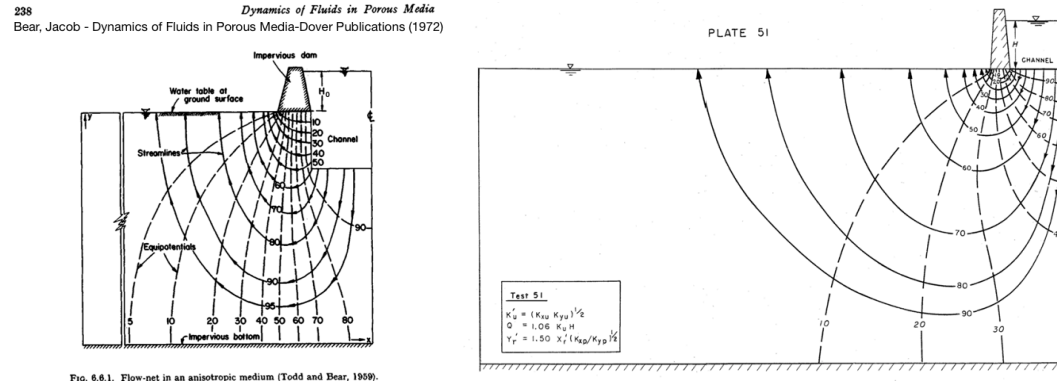


FIGURE 4 – Exemple de cas d'écoulement sous un barrage. figure issue du livre Bear . Droite figure de l'article de Todd Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>

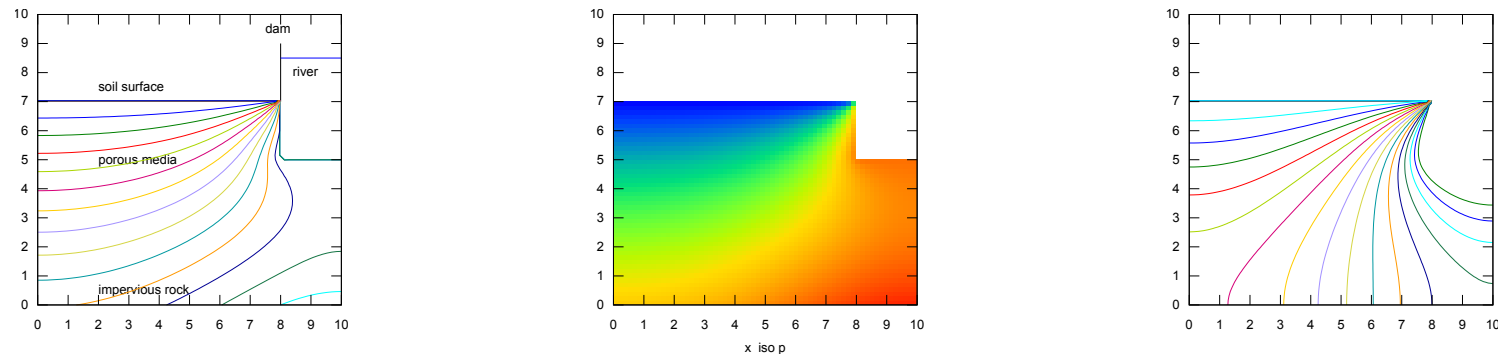


FIGURE 5 – Exemple de cas d'écoulement sous un barrage, calcul *Basilisk*, gauche et centre pression. Droite charge hydraulique $H = h + z$

- * sur le domaine à gauche une condition d'invariance pour exprimer que ça ne change plus trop $x = 0$ and $0 < y < H_d$ $\partial u / \partial x = 0$, $\partial v / \partial x = 0$, $\partial p / \partial x = 0$
- * sur le fond $y = 0$ pas de pénétration, $v = 0$, $\partial u / \partial y = 0$, $-\partial p / \partial y = \rho g$
- * en haut avant le barrage $y = H_d$ pour $x < x_0$ le sol est limite sec $p = \rho g h = 0$ pression atmosphérique de référence $p = 0$, sglissement $\partial u / \partial y = \partial v / \partial y = 0$
- * à droite , $x = L_0$ de $y = 0$ en montant jusu'au fond de la rivière par symétrie $\partial p / \partial x = 0$
- * pour la rivière elle même, en $x = x_0$ la pression le long de la berge est la pression hyrdostatique $p = \rho g (H_0 + H_d - y)$ où $\rho g H_0$ est la sur pression due à la hauteur du barrage.

une mise en œuvre dans *Basilisk* à la page <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/toddbear59.c>

3 Ecoulements non saturés ;

3.1 Conservation de la masse

Les cas précédents supposaient que tout le milieu dans son ensemble est rempli d'eau, mais en pratique, il va y avoir des parties mouillées, des parties sèches, et des parties avec un peu d'eau. On définit la teneur en eau volumétrique θ *volume fraction saturation, volumetric water content (or moisture content : the quantity of water contained in the material)* L'équation de conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

on peut rajouter un terme source. K est défini dans la partie mouillée accumulée jusqu'à une hauteur h , la vitesse $\vec{u} = -K \vec{\nabla}(h + z)$ La position de la surface libre sera un résultat du calcul.

En utilisant $s = \frac{\partial(\theta)}{\partial h}$ le coefficient d'emmagasinement du milieu

$$s \frac{\partial h}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla}(h + z)) = 0$$

dans la sous section suivante on suppose que toute l'eau va vers l'aquifère, il y a un domaine mouillé parfaitement, et au dessus un domaine parfaitement sec.

3.2 Ecoulement de Darcy non confiné

Dans cette sous section, nous supposons que toute l'eau va vers l'aquifère pour s'y accumuler. Il y a un domaine mouillé complètement, et au dessus un domaine parfaitement sec. Un exemple typique d'écoulement non confiné est présenté sur la figure 6. On a deux rivières (ou deux retenues d'eau) sur un fond imperméable, ces deux domaines de hauteur différente sont séparée par un digue en milieu poreux. L'eau est passée à travers les pores du poreux et s'est accumulée au dessus du fond imperméable. La difficulté est ici qu'il existe une surface (que l'on suppose bien définie) qui sépare une partie saturée d'eau d'une partie sèche. Cette surface est une inconnue, on sait seulement qu'elle est à la pression atmosphérique, donc $p = 0$ ($h = 0$ par connection à travers les pores à l'air à pression nulle). Le problème est beaucoup plus difficile à résoudre, il va falloir itérer pour que les conditions soient satisfaites.

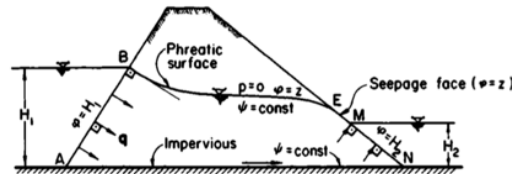


FIG. 7.1.2. Boundaries and boundary conditions in an earth embankment (Steady flow, isotropic medium).

FIGURE 6 – Exemple de cas d'écoulement dans un barrage poreux. Figure issue de Bear, un barrage sépare deux hauteurs d'eau.

En bas, la vitesse glisse $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} H = 0$. à gauche du barrage de hauteur H_1 , la surface libre est inconnue et $H = z$ le long de la ligne de courant (et $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} H = 0$), mais il faut déterminer la surface libre, à gauche du barrage de hauteur H_2 ,

3.3 Méthode des variables complexes

Comme nous venons de le dire la résolution de ce type de problème nécessite la détermination d'une frontière inconnue solution de l'équation. see Guerin page 164

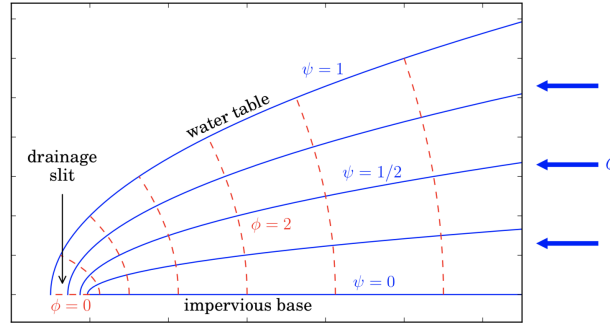


Figure 8.13: Example of a flow satisfying the Laplace equation: $\phi = \sqrt{z}$. The streamlines are defined by $\psi = \text{const}$ (—, equation (8.20)), and the isopotential lines are defined by $\phi = \text{const}$ (- - -, equation (8.21)).

FIGURE 7 – Exemple de résolution d'un problème à l'aide de l'analyse complexe

3.4 Imbibition : écoulements insaturés

3.4.1 Equation de Richards

On a défini la teneur en eau volumétrique θ *volume fraction saturation, volumetric water content* c'est au maximum φ la fraction de volume accessible par le fluide dans le matériau poreux étudié. L'équation de conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

on peut rajouter un terme source qui traduirait un échange évaporation/ condensation.

On a écrit déjà cette équation en supposant ensuite que toute l'eau était retenue par un fond imperméable et formait une hauteur d'eau saturée, et du poreux sec au dessus. Dans les d'infiltration d'eau, il faut avoir une version différente, l'eau n'a pas encore touché le fond. Il y a donc un front mouillé qui progresse.

On va supposer (avec Richards 1931) que la l'on peut généraliser l'équation de Darcy avec un coefficient $K(h)$ qui dépend cette fois de h , la pression. On a ainsi la loi de Darcy généralisée :

$$\vec{u} = -K(h) \vec{\nabla}(h + z)$$

donc l'équation de conservation

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (K(h) \vec{\nabla}(h + z))$$

ou écrite avec $C(h) = \partial\theta/\partial h$ la capacité capillaire,

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (K(h) \vec{\nabla}(h + z))$$

Cette équation présente la difficulté d'avoir deux coefficients $C(h)$ et $K(h)$ difficiles à mesurer et qui dépendent beaucoup de la texture du sol. par exemple dans Vauclin et al. on prend : $\theta = 0.3/(1 + (|h|^{2.9})/40000)$ et $K_s = 35 \text{ cm/h}$ et $K/K_s = 310^6/(310^6 + |h|^5)$ pour de l'argile la courbe $K(h)$ est plus plate (elle présente moins le passage marqué de décroissance), de même pour $\theta(h)$. Sur la figue 8 droite, on montre que la courbe $\theta(h)$ peut varier entre l'infiltration et le drainage, la longueur L_c ordre de grandeur de la distance à laquelle la courbe varie fortement est une longueur dite "capillaire". Un sable (structure grossière) a une conductibilité hydraulique

à saturation forte, une longueur L_c faible et $K(h)$ et $\theta(h)$ sont plus non linéaires que pour 'autres types de sols. Les sols à texture plus fine ont un K_s plus faible et une longueur L_c plus grande. Entre l'infiltration et le drainage, la courbe peut être différente : il y a un phénomène d'hystérésis.

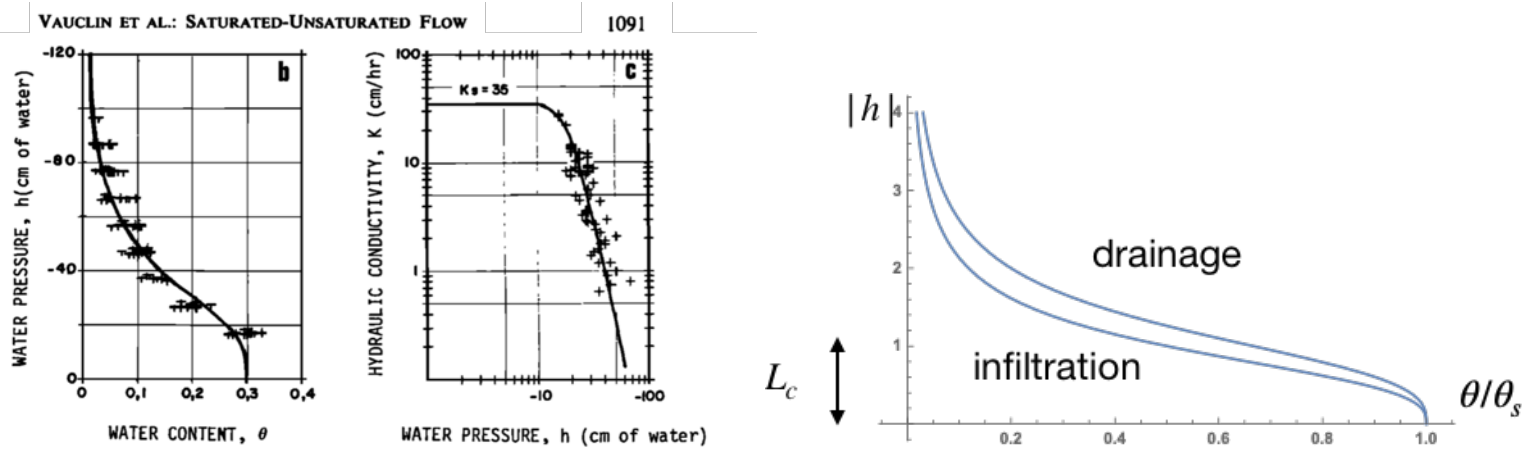


FIGURE 8 – $\theta(h)$ et $K(h)$ pour du sable fin de rivière tamisé (expérience de Vauclin 79). A droite, la courbe $\theta(h)$ peut varier entre l'infiltration et le drainage.

3.4.2 Exemple de résolution de l'Equation de Richards

dans le cas d'une infiltration suivant une direction (suivant x)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

avec H charge hydraulique ; h pression de l'eau dans le sol, $H = h + z$ ou $H = p/(\rho g) + z$ *hydraulic head* (charge hydraulique), $K(h)$ perméabilité *hydraulic conductivity* qui dépend maintenant de la teneur en eau.

$$C(h) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

with $C(h)$ specific moisture capacity and $K(h)$ hydraulic conductivity,

Saturation-based

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \text{ est écrit } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$D(h)$ is the hydraulic diffusivity

The surface is in $x = 0$, we impose θ , This is the imbibition problem.

Self similar solution $\eta = x/\sqrt{t}$ and

$$-\frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{d\theta}{d\eta} \right)$$

exemples de résolutions, valeurs et images issus de ftp://iris.metis.upmc.fr/m2HH/Support_cours_Ledoux/Cours%20hydrog\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactorologie-3.pdf

Ecoulement en zone non saturée Profil d'infiltration dynamique : réponse à une pluie

- fig. 9 gauche

Phase d'infiltration Durée 5 h Infiltration cumulée = 8,3 cm Intervalle entre courbes : 1 h Vitesse du front : $V_{\text{Darcy}} / (\text{porosité} \times \text{saturation en air}) \Rightarrow \text{distance} = 8,3 / (0,7 \times 0,3) = 40 \text{ cm}$

- fig. 9 centre

1 cycle infiltration - évaporation Durée des phases : 6 h Infiltration = 10 cm Intervalle entre courbes : 1 h

- fig. 9 droite

Phase de redistribution « naturelle » sur 100 jours Infiltration = 10^{-8} m/s Durée : 100 j Intervalle entre courbes : Infiltration : 1 h Redistribution : 10j

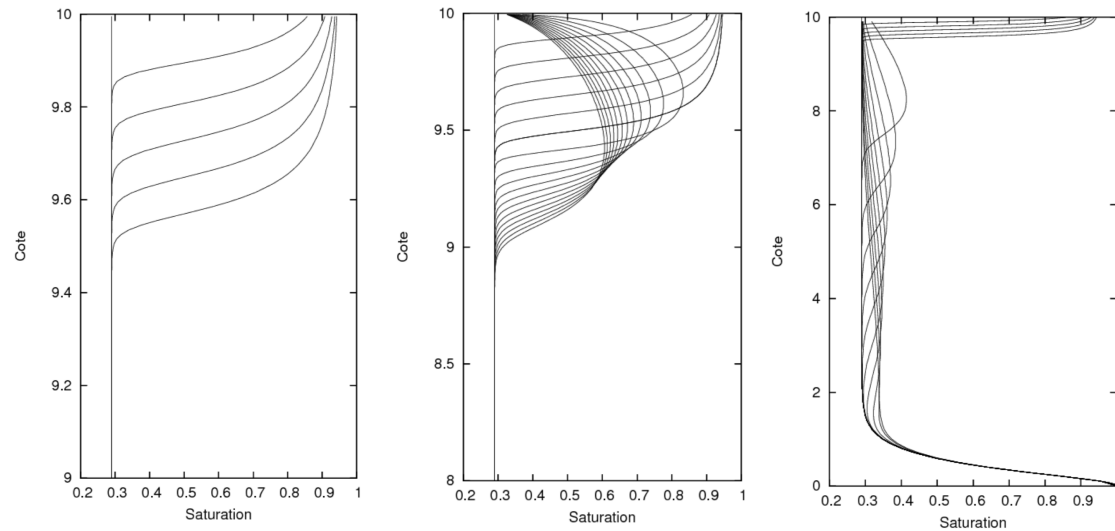


FIGURE 9 – Résolution de l'équation d'imbibition de Richards, issue de

3.4.3 Equation de Lucas-Washburn

Il s'agit d'un petit aparté qui rappelle que l'on peut interpréter simplement l'imbibition dans les tubes fins. On connaît la loi de Jurin qui montre que la force de capillarité soulève de l'eau dans un tube vertical de rayon R jusqu'à une hauteur $h \sim \sigma / (R\rho g)$ (équilibre poids tension de surface). Pour l'écoulement dans un capillaire causé par le ménisque, on va avoir un équilibre entre la tension de surface et le frottement. La vitesse est $u = \frac{dL}{dt}$ et la pression $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$

$$0 = -\frac{\Delta p}{L} - 8\pi \frac{\mu}{R^2} u$$

donc en éliminant et en intégrant :

$$L = \sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu}} t \text{ ce qui donne une vitesse } u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu t}}$$

on appelle $\sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu}}$ la sorptivité de Poiseuille (capacité du milieu à absorber ou désorber du liquide par capillarité).

La sorptivité de l'équation de Richards s est

$$(D \frac{\partial \theta}{\partial x})|_0 t^{1/2}$$

c'est la valeur de la pente de la solution autosemblable en 0.

3.4.4 Application à SV

On met en terme source dans l'équation de la masse de SV.

4 Synthèse unifiée des deux points de vue : saturé vs insaturé

4.1 Milieux modélisé par une interface diffuse fonction du champ continu de p

Pour unifier le propos, reprenons les équations des cas saturés et des cas insaturés. Il faut bien avoir à l'esprit, que la pression est positive, quand on est dans l'eau et normalement nulle dans l'air. Ici comme le milieu est insaturé, la pression est négative ($h < 0$). Dans la partie saturée la pression est positive ($h > 0$).

$$s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_s \frac{\partial(h+z)}{\partial x}) \text{ dans la zone saturée } h > 0$$

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K(h) \frac{\partial(h+z)}{\partial x}) \text{ dans la zone non saturée } h < 0$$

s coefficient d'emménagement, $K(h)$ conductivité hydraulique, K_s conductivité hydraulique à saturation, $C(h)$ capacité capillaire. La teneur en eau θ varie de φ la porosité quand les pores sont pleins à 0 suivant une loi $\theta(h)$ fittée. $C(h)$ varie de s pour $h > 0$ et est une fonction fittée $\frac{\partial \theta}{\partial h}$ pour $h < 0$.

Par exemple, on utilise les formules de Van Granuchten pour la saturation S du milieu (noter la possibilité d'une teneur en eau résiduelle θ_r)

$$S(h) = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{1}{1 + \alpha|h|} \right)^n \text{ pour } h < 0 \text{ sinon } 1$$

et

$$K(h) = S^{1/2} [1 - (1 - S^{1/m})^m]^2$$

les coefficients étant fittés à partir des expériences.

4.2 Milieux modélisé par une interface nette, saturé / sec

Une simplification de cette analyse est de supposer l'interface nette entre le mouillé et le sec.

pour $(x, y) \in$ le domaine mouillé

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (K_s \frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial x})$$

si $(x, y) \notin$ le domaine mouillé, alors il n'y a pas de champs. Sur la surface séparant le sec du mouillé, la pression est $p = 0$ et la vitesse est tangente.

Cette dernière vision est celle qui est utilisée par l'analyse couche mince qui va suivre.

5 Approximation 1D à la Saint Venant : équation de Dupuit-Boussinesq

5.1 Approximation de Dupuit, ou encore approximation de Dupuit-Boussinesq

Dans cette section, l'eau s'est infiltrée jusqu'au sol imperméable qui l'arrête. La hauteur h sera alors effectivement la hauteur d'eau emprisonnée (ce symbole h n'est plus la pression sans dimension $p/(\rho g)$, c'est une vraie hauteur physique mesurable). Les aquifères étant longs et minces (voir figure 10), l'écoulement étant lent, la pression est hydrostatique, l'eau a pris le temps de tomber et d'être accumulée au dessus du fond imperméable. Attention, répétons que le h que l'on définit ici, est la hauteur effective de la table d'eau de la base imperméable à la surface. Donc, dans l'aquifère de hauteur h :

$$p = \rho g(h - z).$$

En première approximation, puisque l'écoulement est en couche mince, la vitesse est le long de x , la vitesse de Darcy est alors uniforme sur la hauteur $u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} p$, et comme le flux est $q = uh$, donc

$$q = -\frac{\rho g k h}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -K h \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -\frac{K}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}.$$

L'équation de conservation de la masse d'eau

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

intégrée sur l'épaisseur h , avec $\theta = 1$ pour $z < h$ et attention, l'eau est dans la fraction ϕ donc l'intégration de $\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t}$ donne $\phi \frac{\partial h}{\partial t}$, le terme $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})$ intégré sur l'épaisseur h , devient en 1D $\frac{\partial q}{\partial x}$ avec q le débit (bien entendu les termes supplémentaires dus à la dérivée de Leibniz se sont compensés comme dans Saint Venant). L'équation de conservation de la masse est donc sans surprise :

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Cela donne l'Equation de Dupuit-Boussinesq en instationnaire :

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R$$

écrite avec un terme source correspondant à la pluie R .

5.2 Solution stationnaire de Dupuit

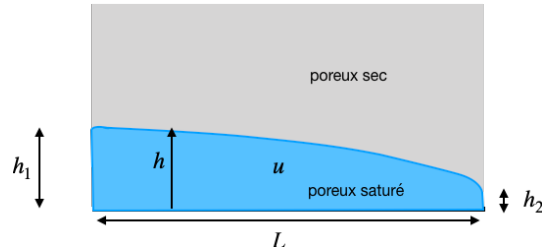


FIGURE 10 – Exemple de cas d'écoulement en couche mince dans un milieu poreux.

Le problème précédent (deux aquifères de hauteur h_1 et h_2 séparés par une distance L de percolation, figure 10) se résout alors plus facilement que dans la cas de la figure 6 (cas d'écoulement dans un barrage poreux).

Comme le débit est constant (conservation de la masse d'eau)

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

donc $q = cst$ et ainsi $2qdx = -Kd(h^2)$:

$$q = \frac{K(h_1^2 - h_2^2)}{2L}$$

la forme de la surface est une parabole (parabole de Dupuit)

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2qx}{K}}.$$

On a une solution explicite.

5.3 Approximation de Dupuit stationnaire, cas avec pluie

Un autre exemple intéressant est celui dans le cas où il y a une pluie donnée qui rajoute une source R tout le long : voir figure 11, on a un terme de pluie supposée

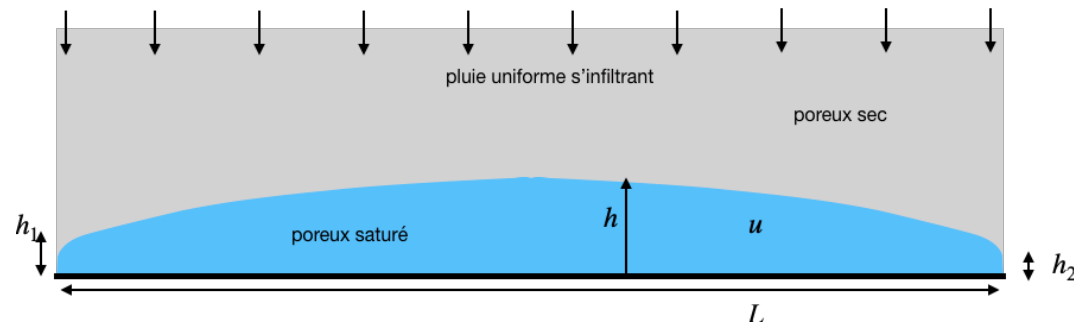


FIGURE 11 – Exemple de cas d'écoulement en couche mince dans un milieu poreux avec un terme de pluie. L' aquifère est alimenté par la pluie, il se vide à droite et à gauche.

uniforme additionnel :

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x} + R$$

On trouve en partant de $x = 0$ où $h = h_1$ jusqu'à $x = L$ où $h = h_2$ en intégrant :

$$h^2 = h_1^2 + \frac{(h_1^2 - h_2^2)x}{L} + \frac{R}{K}x(L - x).$$

C'est l'ellipsoïde de Dupuit. La ligne de partage des eaux est là où h est au maximum, elle sépare des régions où l'eau s'écoule dans un sens et dans l'autre. Si les hauteurs sont les mêmes $h_1 = h_2$ on trouve $h_m = \sqrt{\frac{RL}{K} \frac{L}{2}}$ Prenons par exemple un massif d'un kilomètre ayant une perméabilité de 100 mD (soit une conductivité hydraulique de 10^{-6} m/s) en présence d'une infiltration de 10 mm par an, on aura une sur hauteur de 9 mètres (cf <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf>)

5.4 Approximation de Dupuit, instationnaire cas avec pluie

L'équation de conservation,

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

intégrée sur l'épaisseur h , avec $\theta = 1$ pour $z < h$ et attention, l'eau est dans la fraction ϕ donc avec la vitesse $u = -K \frac{\partial h}{\partial x}$ cela donne l'Equation de Dupuit-Boussinesq en instationnaire :

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R$$

écrite avec un terme source correspondant à la pluie R .

- dans le cas avec pluie en domaine infini, et le cas où la sortie est sèche, $h = 0$ en $x = 0$, sans pluie et que le domaine est infini, on peut trouver une solution de similitude :

<http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf>

$$f f'' + 2\eta f' + f'^2 = 0 \quad f(0) = 0 \quad f(\infty) = 1$$

solution de similitude $h = f(x/\sqrt{t})$

bla bla bla bla

Response of a laboratory aquifer to rainfall

-cas linéarisé avec pluie $h = t f(x/\sqrt{t})$

$$2f'' + 2\eta f' - 2f + 2 = 0 \quad f(0) = 0 \quad f(\infty) = 1$$

solution analytique $f(\eta) = \frac{e^{-\frac{\eta^2}{4}} \left(\sqrt{\pi} e^{\frac{\eta^2}{4}} - 8H_{-3}\left(\frac{\eta}{2}\right) \right)}{\sqrt{\pi}}$
 dérivée en 0 : $2/\sqrt{\pi}$

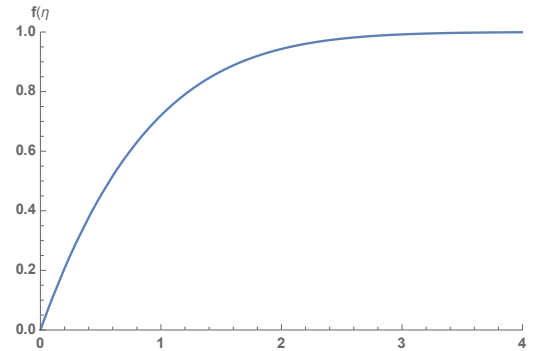


FIGURE 12 – Solution autosemblable

6 Exemples de résolution avec *Basilisk*

6.1 cas saturé

Il s'agit de résoudre un problème inspiré de rapport de Todd & Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>, dans ce rapport, la résolution est faite par un calculateur à analogie électrique, ancêtre des calculateurs actuels.

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/toddbear59.c>

les résultats ont été présentés sur la figure ??

6.2 Exemple de résolution de l'Equation de Richards

Une mise en oeuvre de la solution est proposée <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/richards.c>
Saturation-based

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \text{ est écrit } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$D(h)$ is the hydraulic diffusivity

The surface is in $x = 0$, we impose $h = 1$, we impose a Neumann at depth $x = L_0$. This is the imbibition problem.

Self similar solution $\eta = x/\sqrt{t}$ and

$$-\frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{d\theta}{d\eta} \right)$$

voir figure 13.

6.3 Exemple de résolution de Dupuis-Boussinesq

Résolution du "Basic problem" in 2D, potential incompressible flow

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - 1, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

to be solved as :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

in space $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) > \bar{y} > 0$ and $0 < \bar{x} < L_0$ at the wall $\bar{y} = 0$ velocity slips.

The shape of the aquifer $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$ has to be found. At time zero $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 1$.

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/dupuit2D.c>

The flow is in thin layer we have almost an hydrostatic pressure :

$$p = \rho g h$$

so that the longitudinal velocity is proportional to the slope, and the flux is :

$$q = -K \rho g h \frac{\partial h}{\partial x}$$

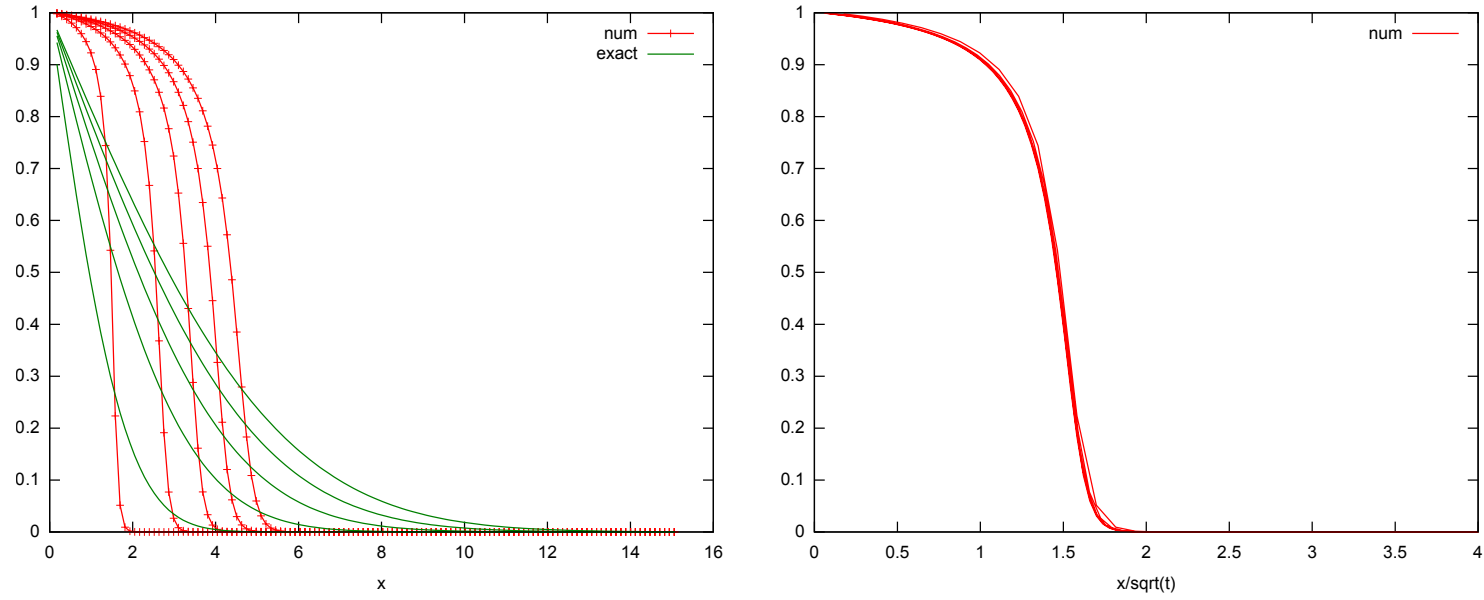


FIGURE 13 – Résolution de l'équation d'imbibition de Richards, $D = (0.05/(1.05 - \theta))^2$

and by mass conservation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

case of the Dupuit steady solution, q is constant so that

$$q = \frac{K(h_1^2 - h_2^2)}{2L}$$

la forme de la surface est une parabole (parabole de Dupuit)

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2qx}{K}}.$$

The Dupuit Boussinesq equation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

has a self similar solution of variable

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

and the mass flow rate is proportional to $t^{-1/2}$. That is visible at the begining, after a while, the flow is no more self similar as it goes to the Dupuit parabolic solution.

6.4 Vauclin

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/vauclin.c>

The river full of water imbibes the soil which is at first unsaturated. As time evolves, saturation (i.e. $p > 0$) arises. A water table is generated at the bottom over the impervious soil in $y = 0$, thickness of the porous media is H_d .

We model this with Darcy unsaturated theory. We have to solve a Darcy problem without dimension :

$$u = -\beta(p) \frac{\partial p}{\partial x} \text{ and } v = -\beta(p) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - 1 \right)$$

β is proportional to the permeability or the conductivity and is function of the pressure p .

Conservation of water is $C(p) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ so that we have to solve an unsteady non linear diffusion problem :

$$C(p) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta(p) \frac{\partial p}{\partial y} - 1 \right)$$

with $C(p)$ and $\beta(p)$ given functions, as p is without dimension p is as well h . The so called 'hydraulic head' is then $H = p + y$ (again p is without dimension). Note that if pressure is negative, the porous media is unsaturated, if pressure is positive the porous media is saturated. The *ad hoc* functions $C(p)$ and $\beta(p)$ are given thereafter.

evaluate physical quantities β permeability and ρ density as function of pressure, if pressure is negative, the porous media is unsaturated, if pressure is positive the porous media is saturated

$$C = 1 \text{ for saturated, and for unsaturated : } C = \frac{1}{1 + \alpha_1(|p|^{n_1})}$$

$$\beta = 1 \text{ for saturated, and for unsaturated : } \beta = \frac{1}{1 + \alpha_2(|p|^{n_2})}$$

empirical values α_1 , α_2 , n_1 and n_2 are provided... and the density is 1 by adimensionalisation

7 Conclusion

Il y a encore beaucoup à dire sur la diffusion (par exemple de polluants, de matières radioactives etc), le couplage entre l'eau interne et l'eau externe, l'imbibition....
On a parlé des réservoirs d'eau, mais il y a aussi les réservoirs de pétrole...

Références

- [1] Jacob Bear “Dynamic of fluids in porous media”
- [2] Todd & Bear 1959 River Seepage investigation
- [3] O. Thual <http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/2010/00main.pdf>
- [4] Response of a laboratory aquifer to rainfall
- [5] Guerin <http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf>
- [6] Guyon Hulin Petit ”Hydrodynamique physique” nouvelle édition
- [7] <http://mquintard.free.fr/cours/cours.html>
- [8] <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf>
- [9] L. A. Richards CAPILLARY CONDUCTION OF LIQUIDS THROUGH POROUS MEDIUMS Physics 1, 318 (1931); doi : 10.1063/1.1745010
- [10] F. Lafolie, R. Guennelon, and M. Th. van Genuchten Analysis of Water Flow under Trickle Irrigation : I. Theory and Numerical Solution SOIL SCI. SOC. AM. J., VOL. 53, SEPTEMBER-OCTOBER 1989
- [11] TH. VANGENUCHTEN A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils1 SOIL SCI. SOC. AM. J., VOL. 44, 1980
- [12] M. Vauclin , D. Khanji , G. Vachaud “Experimental and numerical study of a transient, two dimensional unsaturated saturated water table recharge problem”
- [13] Yury Villagrán Zaccardi, Natalia Alderete, and Nele De Belie Lucas-Washburn vs Richards equation for the modelling of water absorption in cementitious materials MATEC Web of Conferences 199, 02019 (2018)
- [14] ftp://iris.metis.upmc.fr/m2HH/Support_cours_Ledoux/Cours%20hydrog\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactorologie-1.pdf

The web page of this text is :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/>

The last version of this file is on :

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv_aquifere.pdf

