Signaux et Systèmes
Cours n°2

Mohamed CHETOUANI
Professeur des Universités
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR)
Sorbonne Université

mohamed.chetouani@sorbonne-universite.fr

Résumé cours 1

- Définitions: signaux et systèmes
- Classification des signaux: déterministe/aléatoire, énergie finie, bande étroite...
- Quelques signaux importants: porte, échelon
- Distribution de Dirac: propriétés
- Peigne de Dirac: échantillonnage

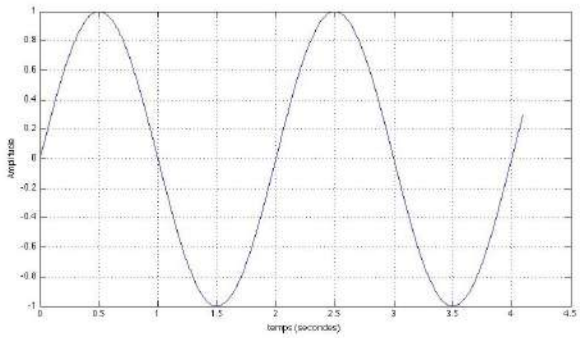
Plan

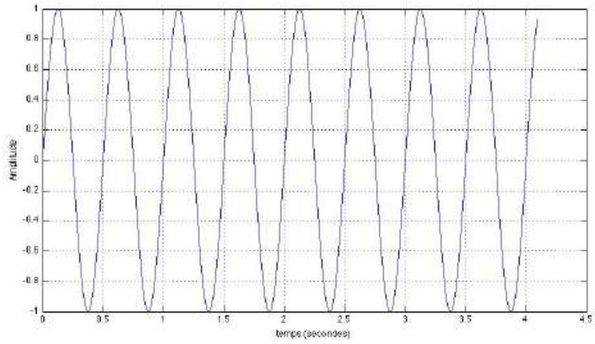
- Analyse spectrale
- Séries de Fourier
- Transformée de Fourier

Analyse spectrale Introduction

- Analyse temporelle d'un signal

$$y(t) = A\sin(2\pi f_1 t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$





Analyse spectrale Introduction

- Analyse temporelle d'un signal

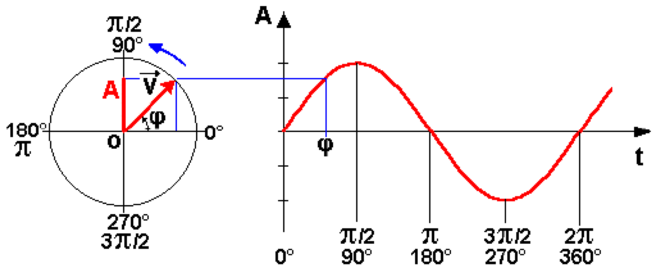
$$y(t) = A\sin(2\pi f_1 t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

- Paramètres importants:
  - Fréquence en Hertz
  - Période en Secondes

Analyse spectrale
Introduction

- Phase (φ)
  - Représentation angulaire de l'information

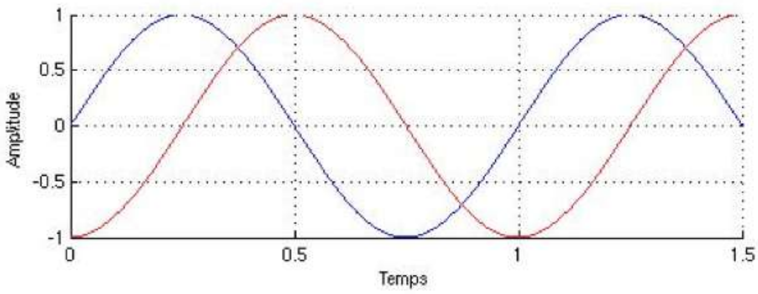
$$y(t) = A\sin(2\pi f_1 t)$$



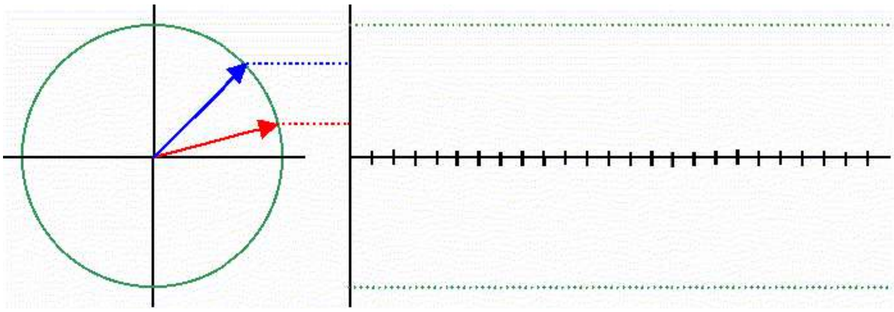
Analyse spectrale
Introduction

- Phase (φ)
  - Représentation angulaire de l'information
  - Φ0 est appelée la phase à l'origine (en radians)

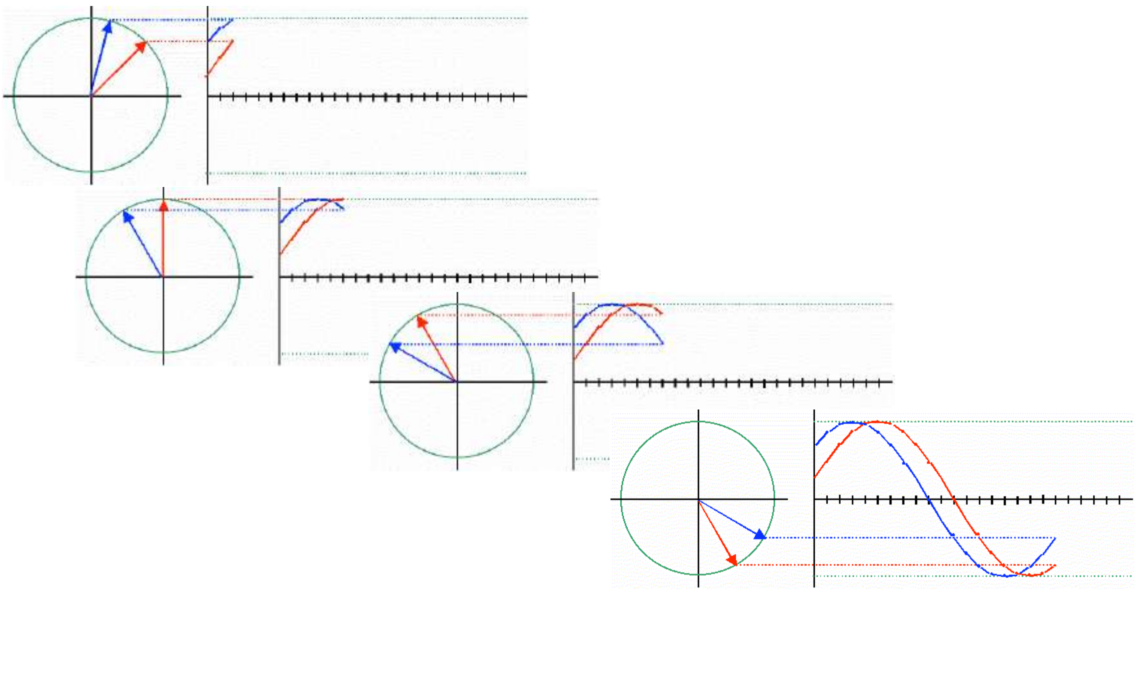
$$y_1(t) = A\sin(2\pi f_1 t) \qquad y_2(t) = A\sin(2\pi f_1 t - \phi_0)$$



Analyse spectrale
Introduction

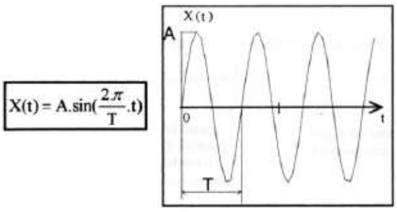


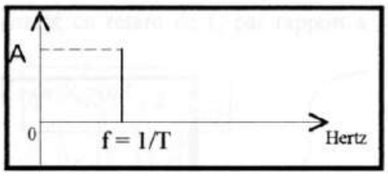
Analyse spectrale
Introduction



Analyse spectrale Introduction

- Spectre:
- Le spectre permet d’étudier le « contenu fréquentiel » d’un signal
- Même contenu mais sous une forme différente



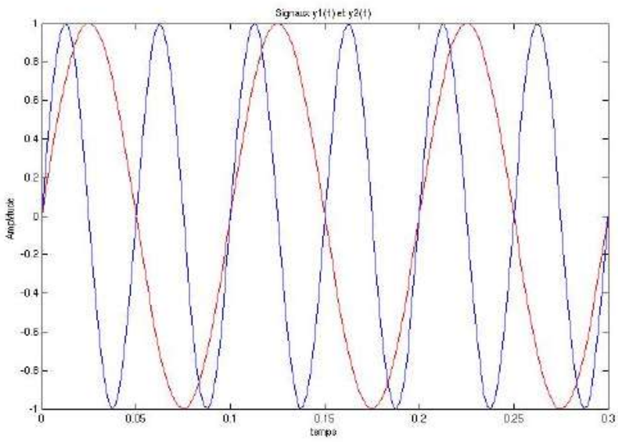


Représentation temporelle

Représentation fréquentielle (spectre)

Analyse spectrale Introduction

- Interprétation de la notion de fréquence pour des sons:
  - Plus la fréquence est basse, plus le son est grave
  - Plus la fréquence est haute, plus le son est aigu

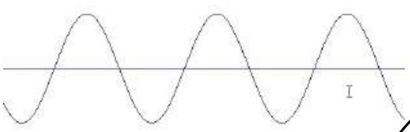


Son de fréquence 1100Hz

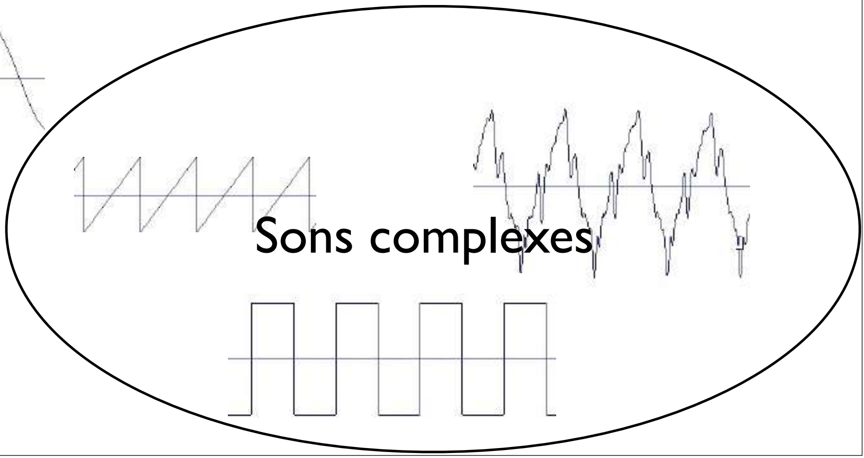
Son de fréquence 220Hz

Analyse spectrale
Introduction

- Sons périodiques
  - Motif sinusoïdal: son simple (pure)
  - Motif non sinusoïdal: son complexe

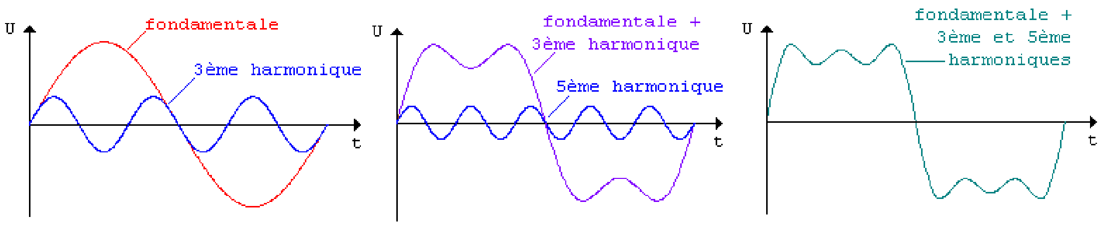


Son simple



Analyse spectrale
Introduction

- Comment créer des sons complexes?
  - Une somme de sons simples...



Analyse spectrale Introduction

Superposition:

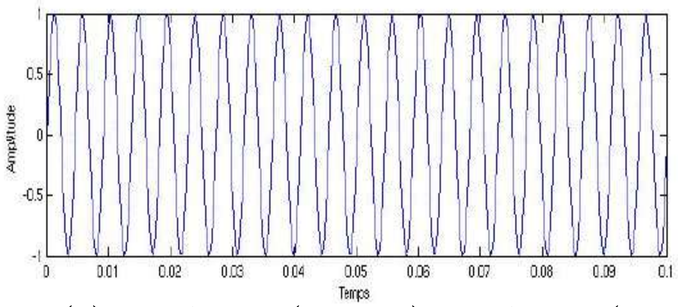
- Sons simples de fréquences f1=220Hz et f2=440Hz

$$y_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = A_1 \sin(2\pi 220 t)$$

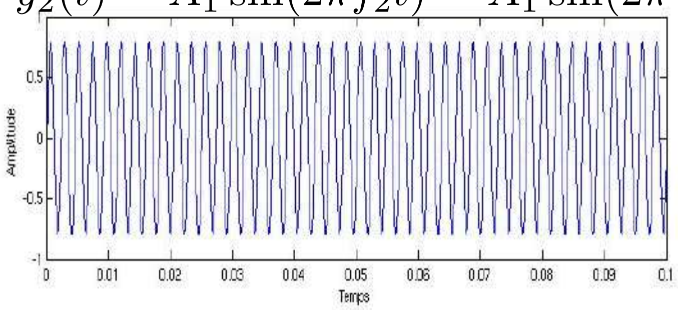
$$y_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_2 t) = A_1 \sin(2\pi 440 t)$$

Analyse spectrale Introduction

$$y_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = A_1 \sin(2\pi 220 t)$$



$$y_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_2 t) = A_1 \sin(2\pi 440 t)$$

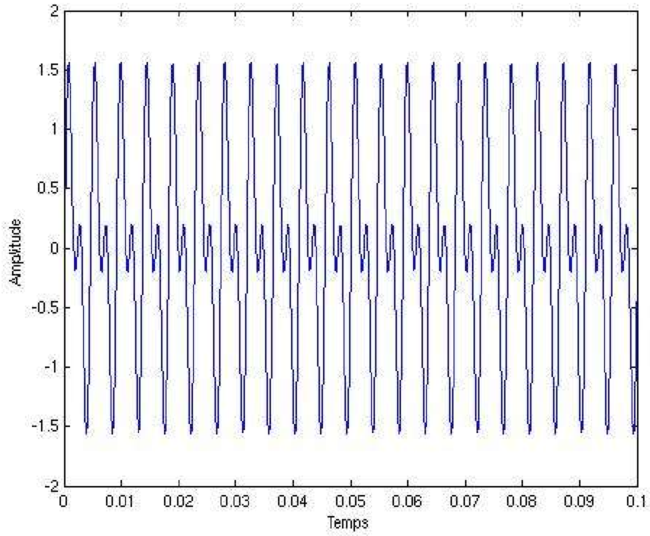


Analyse spectrale
Introduction

$$y_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = A_1 \sin(2\pi 220 t)$$

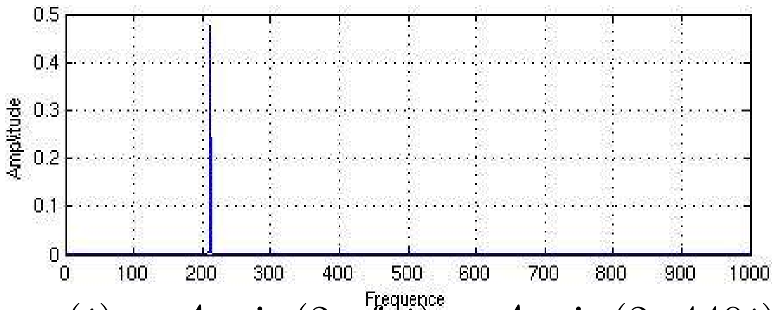
+

$$y_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_2 t) = A_1 \sin(2\pi 440 t)$$

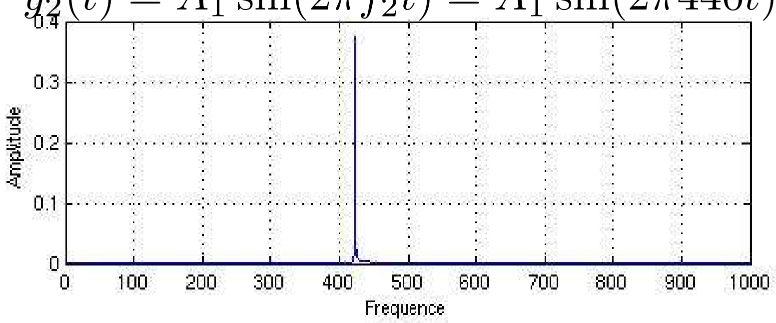


Analyse spectrale
Introduction

$$y_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = A_1 \sin(2\pi 220 t)$$



$$y_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_2 t) = A_1 \sin(2\pi 440 t)$$

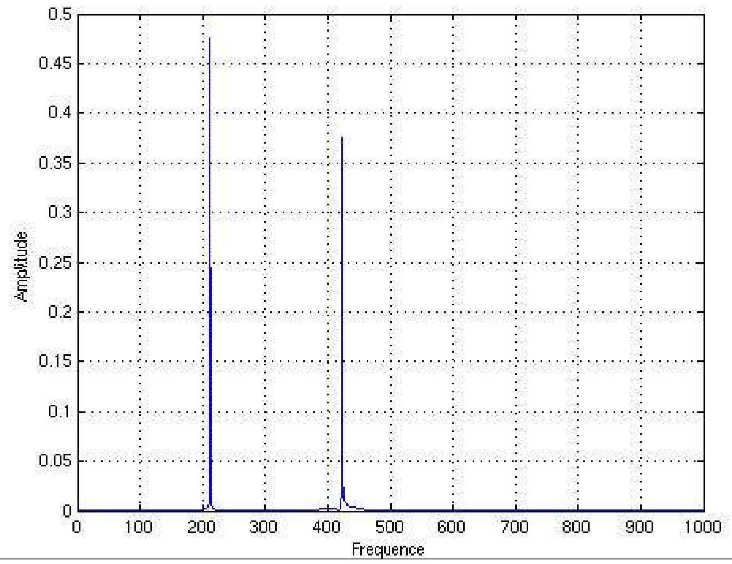


Analyse spectrale Introduction

$$y_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) = A_1 \sin(2\pi 220 t)$$

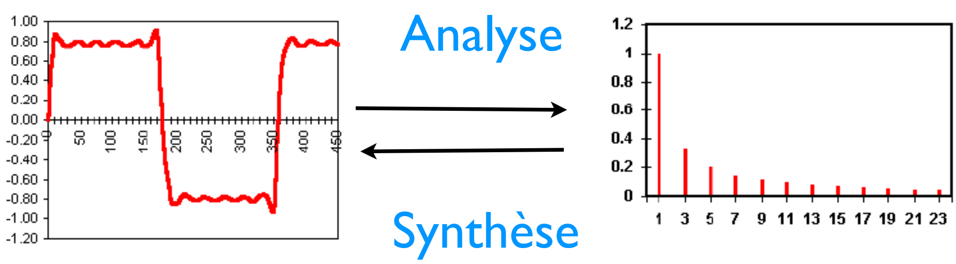
+

$$y_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_2 t) = A_1 \sin(2\pi 440 t)$$



Analyse spectrale Introduction

- Principe:
  - Comment analyser un signal? Identifier les fréquences et les amplitudes?
  - Comment synthétiser un son?



=> *Séries de Fourier*

Séries de Fourier

- Définitions:
  - Soit f(t) un signal périodique de période T (T>0)
  - f(t) se décompose sous la forme suivante:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi j n t}{T}}$$

  - Cette série converge vers f(t), si f(t) est continue en t.

Séries de Fourier

- Définitions:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi j n t}{T}}$$

- Les C_n sont appelées raies, composantes ou harmoniques du signal et se calculent par projection:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-\frac{2\pi j n t}{T}} dt$$

Séries de Fourier

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)e^{-\frac{2\pi jnt}{T}}dt$$

- C_0: composante continue: $$C_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)dt$$
- C_1: 1ére harmonique ou fondamentale du signal f(t)
- C_n: contribution de la n^{ieme} harmonique
- Propriétés:
  - Si f(t) réelle (f(t) = f*(t)) alors: $C_n = C^*_{-n}$
  - Si f(t) réelle et paire (f(t) = f*(t) = f(-t)) alors C_n réel
  - Si f(t) réelle et impaire (f(t) = f*(t) =- f(-t)) alors C_n imaginaire

Séries de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi jnt}{T}} \qquad C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)e^{-\frac{2\pi jnt}{T}}dt$$

Le spectre du signal, représenté par les Cn, peut être décomposé en:

- Un spectre d'amplitude: $|C_n|$
- Un spectre de puissance: $|C_n|^2$
- Un spectre de phase: $\mathrm{Arg}(C_n)$

Séries de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi jnt}{T}} \qquad C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-\frac{2\pi jnt}{T}} dt$$

Exemple 1:

- Soit C_n une suite définie par:

$$C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2}$$ et C_n =0 si n ≠{-1,1}

Déterminer f(t)?? $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi jnt}{T}}$$

$$f(t) = \frac{A}{2}(e^{\frac{-2\pi jnt}{T}} + e^{\frac{2\pi jnt}{T}}) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

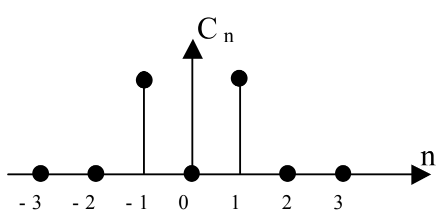
Séries de Fourier

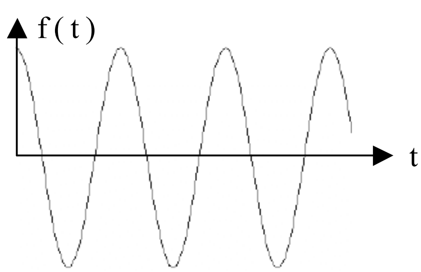
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+\frac{2\pi jnt}{T}} \qquad C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-\frac{2\pi jnt}{T}} dt$$

Exemple 1:

- Représentation graphique

$$C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2}$$ et C_n =0 si n ≠{-1,1}

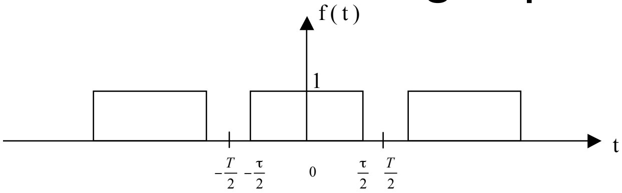




Séries de Fourier

Exemple 2:

- On considère le signal périodique f(t) défini par:



$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-\frac{2\pi jnt}{T}}dt \qquad = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-\frac{2\pi jnt}{T}}dt$$

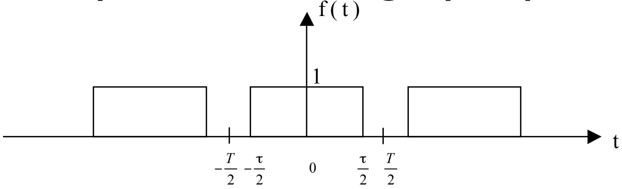
$$= \frac{1}{T}\frac{\left[e^{-\frac{2\pi jnt}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}}{-2\pi j\frac{n}{T}} \quad = \frac{1}{T}\frac{\sin\left(2\pi\frac{n\tau}{2T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}$$

$$= \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)$$

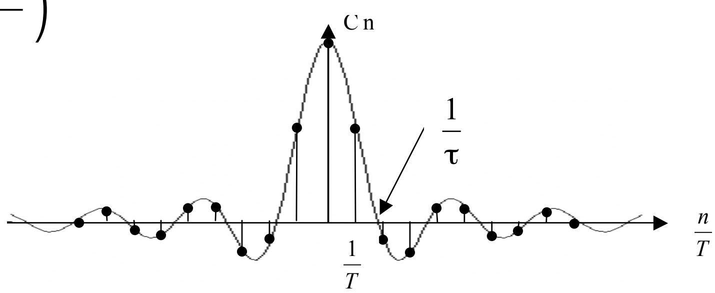
Séries de Fourier

Exemple 2:

- Représentation graphique



$$C_n = \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)$$



Séries de Fourier

- Décomposition sur une base de fonctions sinus et cosinus

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t)\right]}$$

Démonstration

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+j2\pi\frac{n}{T}t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n e^{+j2\pi\frac{n}{T}t} + C_{-n} e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}\right]$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(C_n + C_{-n}) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + j(C_n - C_{-n}) \sin(2\pi n \frac{t}{T})\right]$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= C_n + C_{-n} = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos(\frac{2\pi n t}{T})\, dt \\ b_n &= j(C_n - C_{-n}) = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\sin(\frac{2\pi n t}{T})\, dt \\ C_n &= \frac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \end{aligned}}$$

Séries de Fourier

Relation de Parseval:

- La relation de Parseval montre qu'il y a «conservation» de la puissance P lorsque l'on passe d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle:

$$P = \frac{1}{T}\int_{(T)} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

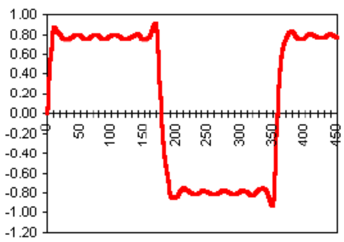
Application à l'analyse de sons

- La fréquence fondamentale d'un signal est souvent appelé f0:
- Exemple du « la3 » (440 Hz) du piano
  - f0 440 Hz fréquence fondamentale harmonique de rang 1
  - 2f0 880 Hz (440x2) fréquence multiple première harmonique de rang 2
  - 3f0 1320 Hz (440x3) fréquence multiple seconde harmonique de rang 3
  - 4f0 1760 Hz (440x4) fréquence multiple troisième harmonique de rang 4

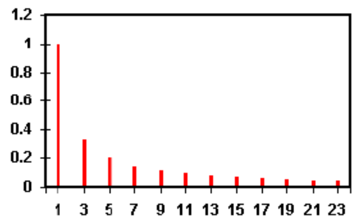
Application

- Signal périodique:

Signal complexe (périodique)



Représentation spectrale



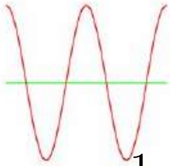
fondamentale : amplitude 1
- harmonique 3 : amplitude 1/3
- harmonique 5 : amplitude 1/5
-harmonique 7 : amplitude 1/7
...et ainsi de suite jusqu'à l'harmonique 23

Uniquement des harmoniques impaires....

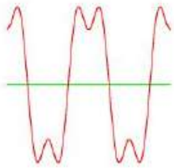
Application

- Exemple

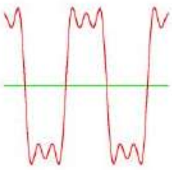
$$y_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$$



$$y_2(t) = \cos(2\pi f_1 t) - \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 \times f_1 t))$$



$$y_3(t) = \cos(2\pi f_1 t) - \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 \times f_1 t)) + \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 \times f_1 t)$$

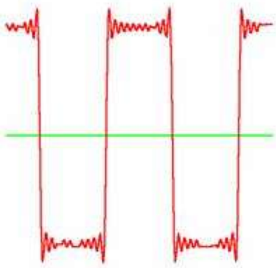


Application

- Exemple

$$y(t) = \cos(2\pi f_1 t) - \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 \times f_1 t) + \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 \times f_1 t) + \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{19} cos(2\pi 19 \times f_1 t) + \frac{2}{21}\cos(2\pi 21 \times f_1 t)$$

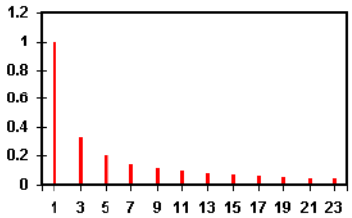


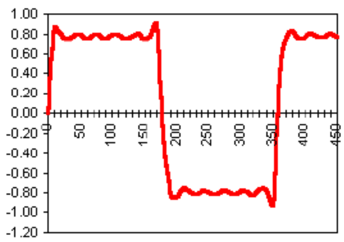
Application

- Exemple

$$y(t) = \cos(2\pi f_1 t) - \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 \times f_1 t) + \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 \times f_1 t) + \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{19} cos(2\pi 19 \times f_1 t) + \frac{2}{21}\cos(2\pi 21 \times f_1 t) + \ldots$$



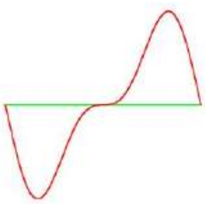


Démonstration: Applet

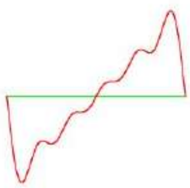
Application

- Influence du nombre d'harmoniques

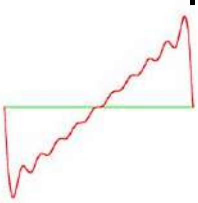
2 harmoniques



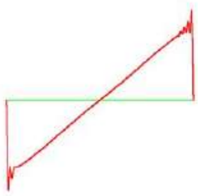
5 harmoniques



10 harmoniques

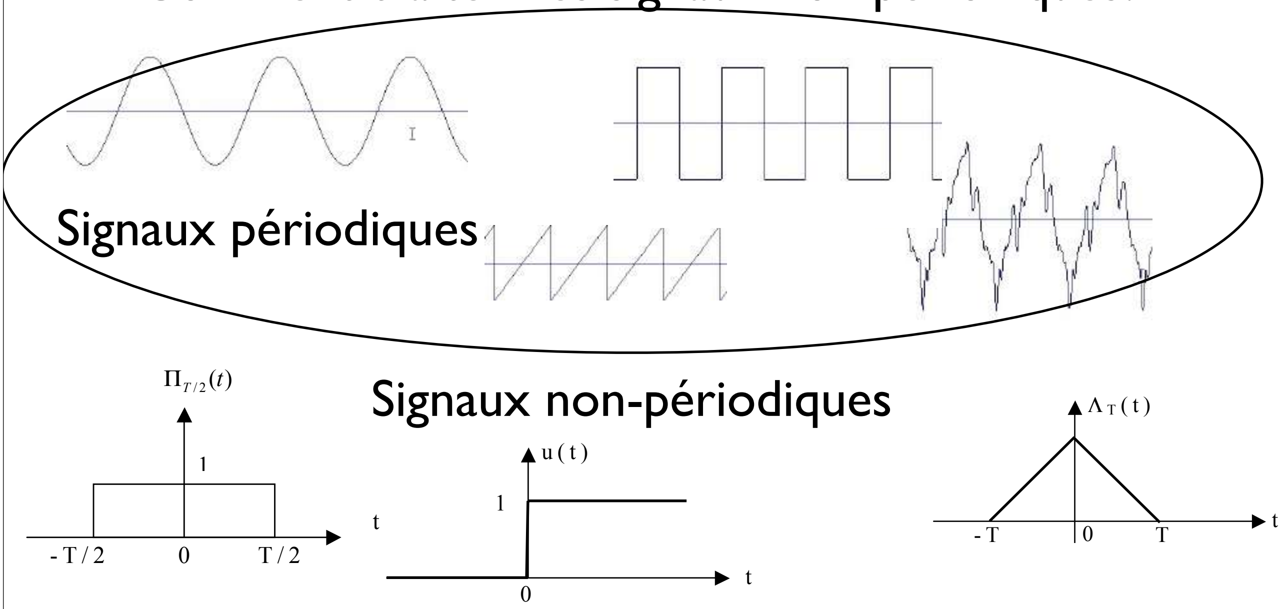


50 harmoniques



Transformée de Fourier

- Comment traiter des signaux non périodiques?



Transformée de Fourier

Définitions:

- La TF est une extension de la décomposition en séries de Fourier, mais pour des signaux quelconques.
- On peut considérer un signal non périodique comme un signal périodique de période T→+∞
- L'intervalle de Fréquence correspondant tend alors vers 0... Le spectre devient continue.
- On définit alors la TF X(f) de x(t) par:

$$\boxed{\begin{aligned} TF\ \{x(t)\} &= X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \\ TF^{-1}\{X(f)\} &= x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi ft}\, df \end{aligned}}$$

Transformée de Fourier

Conditions d'existence de la TF:

- f(t) bornée
- Convergence de l'intégrale
- Discontinuités de f(t) en nombre limité

$$\boxed{\begin{aligned} TF\ \{x(t)\} &= X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \\ TF^{-1}\{X(f)\} &= x(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi ft}\, df \end{aligned}}$$

Transformée de Fourier

Spectre de x(t)

- Spectre d'amplitude: |X(f)|
- Spectre de puissance (Densité Spectrale de Puissance): $|X(f)|^2$
- Spectre de phase:

$$\phi(f) = \arctan\left(\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right)$$

Transformée de Fourier

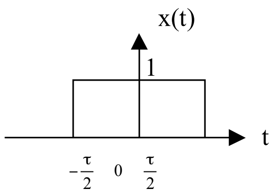
Exemple:

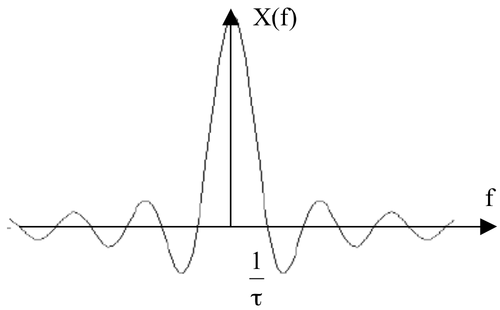
- Transformée de la fonction Porte

$$x(t)=\prod_{\frac{\tau}{2}}(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t \in \left[\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 \;\; \text{Ailleurs}\end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$X(f) = \frac{\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi f} = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \;\operatorname{sinc}(\pi f\tau)$$





Transformée de Fourier

Propriétés

- Linéarité

$$\forall\, \lambda \in C \qquad \lambda x(t) + y(t) \Longleftrightarrow \lambda X(f) + Y(f)$$

- Similitude:

$$\forall a \in R \qquad x(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- Translations:

Phase

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t - t_0) \overset{TF}{\Leftrightarrow} \exp(-j2\pi f t_0)\; X(f) \\ X(f - f_0) \overset{TF^{-1}}{\Leftrightarrow} \exp(+j2\pi f_0 t)\, x(t) \end{array}}$$

Transformée de Fourier

Propriétés

- Dérivation dans le domaine temporel

Filtre «passe-haut»

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow 2\pi j f X(f)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Longleftrightarrow (2\pi j f)^n X(f)$$

- Dérivation dans le domaine fréquentiel

$$\frac{dX(f)}{df} \Longleftrightarrow -2\pi j t x(t)$$

$$\frac{d^n X(f)}{df^n} \Longleftrightarrow (-2\pi j t)^n x(t)$$

Transformée de Fourier

Propriétés

- Parité:
  - Si x(t) est un signal réel et pair alors son spectre X(f) est réel et pair

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi f t} dt \overset{t'=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi(-f)t'} dt'$$

$$X(f) = X(-f) \rightarrow X(f) \quad \text{pair}$$

$$X(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right]^* = X(f)^* \rightarrow X(f) \quad \text{réel}$$

- Si x(t) est réel et impair, son spectre X(f) est imaginaire et impair

Transformée de Fourier

- Quelques transformées à connaître:

$\delta\ (t)$	1
1	$\delta\ (f)$
$e^{+2\pi j f_0 t}$	$\delta\ (f - f_0)$
$\delta\ (t - t_0)$	$e^{-2\pi j f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2}\left[e^{j\varphi_0}\ \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0}\ \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2j}\left[e^{j\varphi_0}\ \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi_0}\ \delta(f + f_0)\right]$
$\lvert\_\mathrm{I}\_\rvert_{T}\ (t)$	$= \frac{1}{T} \lvert\_\mathrm{I}\_\rvert_{\frac{1}{T}}\ (f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

Transformée de Fourier

Relation de Parseval

- Cette relation est comparable à celle qui existe pour les signaux périodiques.

- Soit x(t) un signal d'énergie fini et qui admet X(f) pour TF:

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\ df}$$

Résumé

- Introduction à l'analyse spectrale
- Séries de Fourier
- Transformée de Fourier

- Connaître les transformations des signaux usuels, les propriétés...