Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 4 : les vagues

Exercice 1 : Vagues et tsunamis

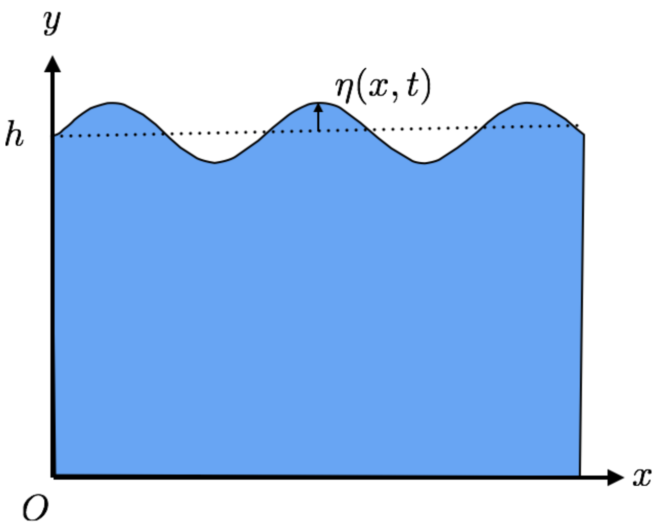


Figure 1 – Schématisation du problème

1. Rappeler la relation de dispersion des ondes de gravité.

Solution:

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)$$

2. Calculer la vitesse de phase des ondes de gravité.

Solution: La vitesse de phase des ondes de gravité est

$$c_\phi = \frac{\omega}{k}$$

D'après la question précédente, on trouve :

$$c_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)}$$

3. On s'intéresse aux deux cas limites suivants :
   - $kh << 1$
   - $kh >> 1$

   Justifier et associer les expressions "propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde" à ces deux cas limites.

> **Solution:** On rappelle que k est le nombre d'onde. Il est relié à la longueur d'onde par la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Cette relation permet d'interpréter le coefficient kh :
> - $kh << 1$ est équivalent à $h << \lambda$, la longueur d'onde est donc bien plus grande que la hauteur d'eau : on est dans le cas d'une propagation en eau peu profonde (comparée à la longueur d'onde) ;
> - $kh >> 1$ est équivalent à $h >> \lambda$, la longueur d'onde est donc bien plus petite que la hauteur d'eau : on est dans le cas d'une propagation en eau profonde (comparée à la longueur d'onde).

4. On rappelle que $\tanh(kh) \approx 1$ si $kh >> 1$ et que $\tanh(kh) \approx kh$ si $kh << 1$. Que vaut la vitesse de phase dans ces deux régimes (les ondes sont-elles dispersives) ?

> **Solution:**
> - $kh << 1$ (propagation en eau peu profonde) :
>
> $$c_\phi \approx \sqrt{gh}$$
>
> La vitesse de phase est constante : ondes non dispersives.
> - $kh >> 1$ (propagation en eau profonde) :
>
> $$c_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$$
>
> La vitesse de phase dépend de la fréquence (via le nombre d'onde) : ondes dispersives.

5. **A la plage** On s'intéresse à la propagation des vagues à la plage. En observant les vagues on s'aperçoit qu'elles arrivent toutes les 8s sur le rivage. Si on suppose que la hauteur de l'eau est égale à 1m, quelle est la longueur d'onde des vagues ?

> **Solution:** On fait l'hypothèse que la propagation se fait en eau peu profonde (car on est au bord de l'eau). La longueur d'onde est reliée à la vitesse de phase par la relation :
>
> $$\lambda = \frac{c_\phi}{f}$$
>
> La fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}$ La vitesse des vagues est $c_\phi \approx \sqrt{gh} \approx \sqrt{10} \approx 3$ On en déduit la longueur d'onde des vagues :
>
> $$\lambda \approx 3 \times 8 \approx 24m$$
>
> Cette valeur est cohérente avec l'hypothèse de propagation en eau peu profonde ($24 >> 1$).

6. **Tsunami** On s'intéresse maintenant au cas d'un tsunami généré par un tremblement de terre sous-marin en plein océan (on suppose que la profondeur de l'océan est de 4km). On suppose que la longueur d'onde associée au tsunami est de 100km. Dans quel régime est-on ("propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde") ? Quelle est la vitesse de propagation du tsunami (à exprimer en m/s et aussi en km/h) ?

Solution: Compte tenu des valeurs de la longueur d'onde et de la hauteur de l'océan, on est dans le cas d'une propagation en eau peu profonde. La vitesse de propagation du tsunami est donc :

$$\begin{aligned} c_\phi &\approx \sqrt{gh} \\ &\approx \sqrt{10 \times 4000} \\ &\approx \sqrt{4.10^4} \\ &\approx 2.10^2 m/s \\ &\approx 2.10^2.3600/1000 km/h \\ &\approx 720 km/h \end{aligned}$$

7. **Le mascaret** Le mascaret est une onde de marée qui remonte le long de certain fleuve les jours de grandes marées. Quelle est la vitesse à laquelle remonte cette vague (on suppose qu'elle fait 2m de haut et que la longueur d'onde est environ 10m) dans un fleuve dont la profondeur est 2m ?

Solution: On est dans le cas d'un propagation en eau peu profonde :

$$c_\phi = \sqrt{gh} = \sqrt{10 \times 2} \approx 4.5 m/s \approx 16.5 km/h$$

Exercice 2 : Vagues et ondes stationnaires

Dans ce problème, on s'intéresse à des ondes stationnaires créées dans une cuve à eau (cf Figure 2). Les notations sont celles du cours.

1. Rappeler l'équation de Laplace, la condition de sol rigide et la condition à la surface. On exprimera ces relations pour le potentiel des vitesses $\phi(x, y, t)$. Ces relations sont-elles toujours valables pour cette configuration ?

Solution: Ces trois relations sont valables pour cette configuration. Il faudra seulement ajouter des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

— equations de Laplace :

$$\Delta\phi = 0$$

— Condition au fond :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = h, t) = 0$$

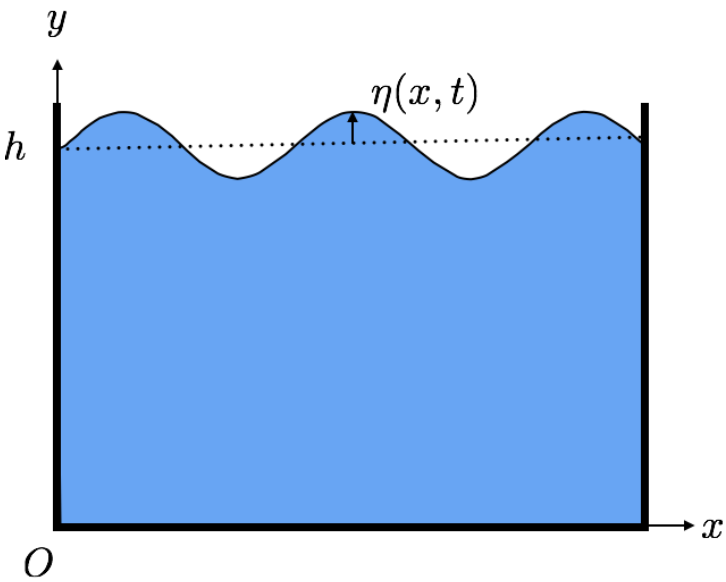


Figure 2 – Ondes stationnaires dans une cuve

— condition à la surface :
$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{y=surf} + g\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=surf} = 0$$
.

2. Justifier le fait que pour cette configuration, on cherche la solution sous la forme de variables séparées : $\phi(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$.

Solution: Dans ce problème, les conditions aux limites font que les ondes vont pouvoir faire plusieurs aller-retours dans le système, on est donc dans une configuration de type "vibrations" pour laquelle les variables sont séparées.

3. Montrer que
$$\phi(x,y,t) = \cosh(kx)(C\cos(kx) + D\sin(kx))T(t)$$

Solution: On injecte $\phi(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ dans $\Delta\phi = 0$. On trouve 2 équations pour $X(x)$ et $Y(y) = 0$:
$$\begin{aligned} X(x) &= \bar{C}\cos(kx) + \bar{D}\sin(kx) \\ Y(y) &= Ae^{ky} + Be^{ky} \end{aligned}$$
En utilisant la condition de fond rigide, on trouve le résultat demandé.

4. Montrer que la fonction $T(t)$ vérifie l'équation $T'' + \omega^2 T = 0$ et trouver la solution de cette équation.

Solution: On injecte $\phi(x,y,t) = \cosh(kx)(C\cos(kx) + D\sin(kx))T(t)$ dans la condition à la surface :

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{y=surf} + g\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=surf} = 0.$$

On trouve alors :

$$T'' + gk\frac{\sinh kh}{\cosh kh}T = 0$$

On reconnait la relation de dispersion : $\omega^2 = gk\tanh kh$. La solution de cette équation est :

$$T(t) = F\cos(\omega t) + G\sin(\omega t)$$

5. D'après les questions précédentes et en effectuant quelques manipulations algébriques (non demandées ici), on suppose que la solution peut se mettre sous la forme :

$$\phi(x,y,t) = H\cosh(ky)\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Quelle est la hauteur des vagues ?

Solution: On utilise la relation liant η et ϕ :

$$\eta = \frac{-1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, y = surf, t)$$

On obtient :

$$\eta(x,t) = \frac{H\omega}{g}\cosh(kh)\cos(kx)\sin(\omega t)$$

6. Quelles sont les trajectoires des particules fluides dans cette configuration ?

Solution: Pour trouver la trajectoire des particules fluides, on utilise la définition du potentiel des vitesses :

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi.$$

On a alors : $u(x,y,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $v(x,y,t) = \frac{\partial\phi}{\partial y}$
En confondant représentations eulérienne et lagrangienne on a :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = -Lk\cosh(ky)\sin(kx)\cos(\omega t)\\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = Lk\sinh(ky)\cos(kx)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

En intégrant :

$$\begin{aligned}X(t) &= \frac{-Lk}{\omega}\cosh(ky)\sin(kx)\sin(\omega t)\\ Y(t) &= \frac{Lk}{\omega}\sinh(ky)\cos(kx)\sin(\omega t)\end{aligned}$$

7. le schéma de la figure 2 est-il correct ?

> **Solution:** Non, il n'y a pas de raison pour que la hauteur des vagues soit nulle sur les bords, la hauteur devrait est extrémale (min ou max).

Exercice 3 : Ondes capillaires

Figure 3 – Ondes gravito-capillaires

Lors de l'étude des vagues (ou ondes de gravité) faites en cours, nous avons négligé l'effet de capillarté qui peut exister à la surface d'un liquide (à cause de la tension de surface, la surface du liquide peut ne pas être plane). Dans ce problème, on se propose de voir l'influence de la tension de surface sur une interface eau/air, on parle alors d'ondes gravito-capillaires (c'est à dire des ondes dues à la gravité et à la capillarité du liquide). Dans l'étape de modélisation, la tension de surface peut être prise en compte via une modification de la pression à la surface du liquide. Les équations sont alors modifiées et on obtient une équation de dispersion plus complète que lorsque seules les ondes de gravité sont considérées :

$$\omega^2 = \left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right) k \tanh(kh) \qquad (1)$$

où T est la tension de surface qui se mesure en $\mathrm{N.m^{-1}}$.

1. Rappeler la relation générale qui existe entre la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k.

> **Solution:**
> $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2. Quelle est la relation de dispersion des ondes de gravité seules ?

> **Solution:** Il suffit de négliger la tension de surface $T = 0$:
> $$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

3. Montrer que si la longueur d'onde est bien plus grande que la longueur capillaire ($l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$), alors les effets capillaires deviennent négligeables.

Solution: Dans la relation de dispersion, on voit qu'il y a la somme de deux termes : $\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right)$ le premier est dû à la gravité, le second à la tension de surface. Les effets de tension de surface sont négligeables si :

$$g >> \frac{Tk^2}{\rho_0}$$

ou encore :

$$k^2 << \frac{g\rho_0}{T}$$

on exprime cette relation à partir de la longueur d'onde :

$$\lambda >> 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$$

4. On donne $T = 7.10^{-2}\mathrm{N.m}^{-1}$, estimer la longueur capillaire l_c au-dessus de laquelle les effets capillaires sont négligeables.

Solution:

$$l_c \approx 1.7cm$$

5. On suppose que la hauteur d'eau sans pertubration h est de l'ordre du mètre. Si on souhaite observer des effets capillaires importants, dans quel régime faut il se placer : $kh \ll 1$ ou $kh \gg 1$?

Solution: Si $\lambda > l_c$ les effets sont négligeables. Donc on veut $\lambda < l_c < 1cm$ donc :

$$kh = \frac{2\pi h}{\lambda} > \frac{2\pi 1}{1e-2} > 600 >> 1$$

C'est le régime dit d'eau profonde.

6. On suppose qu'on est dans ce régime jusqu'à la fin du problème. Montrer que la relation de dispersion se simplifie :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

Solution: si $kh >> 1$, alors $tanh(kh) \approx 1$, donc :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

7. Calculer la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires.

Solution: Par définition, la vitesse de phase est

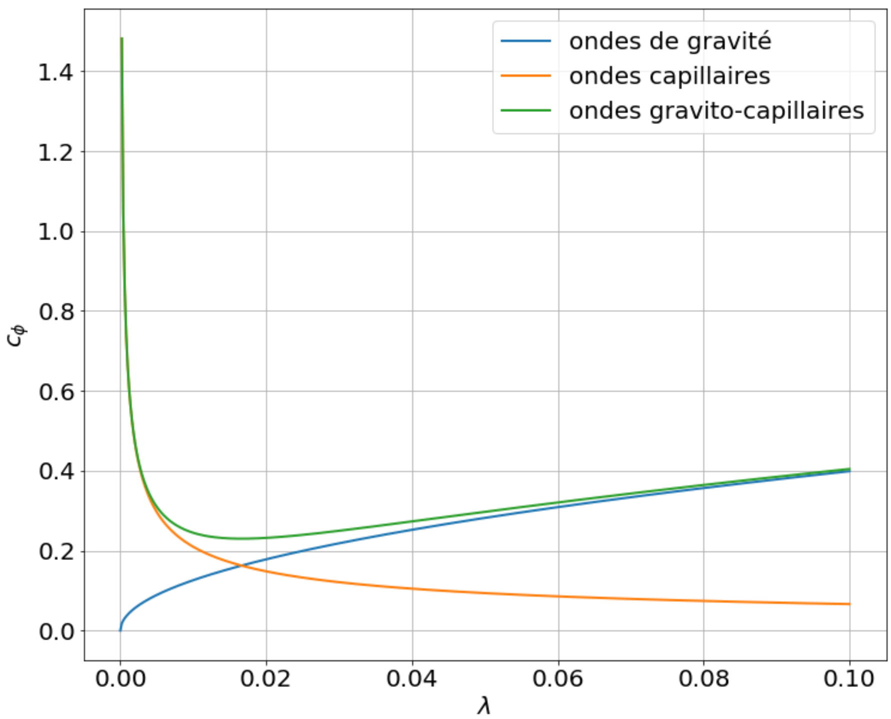
$$c_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Donc pour les ondes gravito-capillaires on a donc :

$$c_\phi = \sqrt{\frac{1}{k}\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right)}$$

8. Montrer que la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires à un minimum en $k = \frac{2\pi}{l_c}$.

Solution: La figure ci-dessous montre la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires. On voit que la vitesse de phase a un minimum.



On a

$$c_\phi = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0}\right)}$$

Le minimum de c_ϕ correspond à $\frac{dc_\phi}{dk} = 0$:

$$\frac{dc_\phi}{dk} = \frac{1}{2}\left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0}\right)\left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0}\right)^{-1/2} = 0$$

par conséquent :

$$\left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0}\right) = 0$$

ou encore

$$k = \sqrt{\frac{g\rho_0}{T}} = \frac{2\pi}{l_c}$$

9. Estimer la valeur numérique de la plus petite vitesse de phase possible pour les ondes gravito-capillaires (on donne $\sqrt[4]{28} = 2.3$).

Solution: Le minimum de c_ϕ vaut alors :

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{g}{\frac{2\pi}{l_c}} + \frac{T\frac{2\pi}{l_c}}{\rho_0}\right)}$$

Comme $l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$, on a :

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{g\sqrt{T}}{\sqrt{g\rho_0}} + \frac{T\frac{\sqrt{\rho_0 g}}{\sqrt{T}}}{\rho_0}\right)}$$

$$c_{\phi min} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{gT}}{\sqrt{\rho_0}} + \frac{\sqrt{Tg}}{\sqrt{\rho_0}}\right)}$$

$$c_{\phi min} = \sqrt{2\frac{\sqrt{gT}}{\sqrt{\rho_0}}} = \sqrt[4]{\frac{4gT}{\rho_0}}$$

Application numérique : $c_{\phi min} = \sqrt[4]{\frac{4\times 10\times 7.10^{-2}}{1000}} = \sqrt[4]{28}.10^{-1} = 0.23\text{m.s}^{-1}$.

Exercice 4 : Etude des vagues en eau peu profonde et profondeur variable

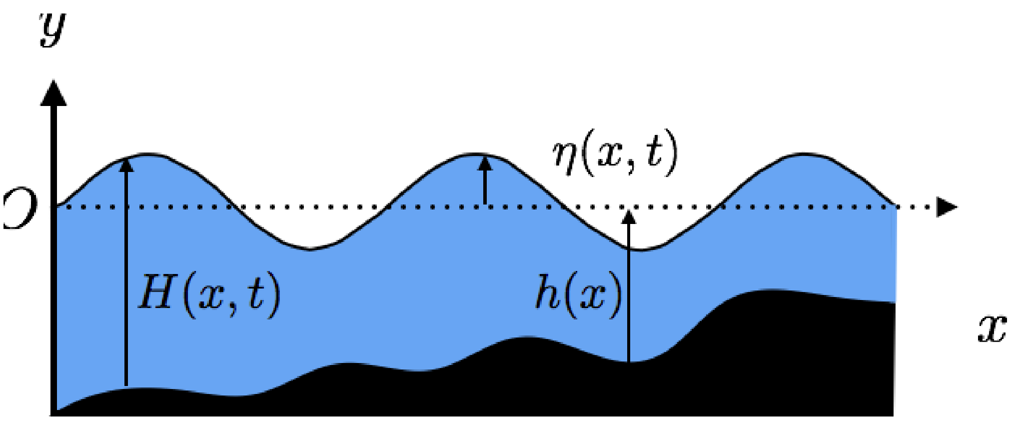


Figure 4 – Propagation de vagues avec une profondeur variable

On cherche à modéliser la propagation de vagues dans un cas où la profondeur est variable. En prenant comme référence $y = 0$ pour une configuration sans vague, on note (voir 4 :

— $h(x)$ la profondeur de l'eau dans une configuration sans vague,

— $H(x,t)$ la hauteur totale de l'eau avec vagues (état de base + perturbation) au point x et à l'instant t,

— $\eta(x,t)$ la hauteur des vagues (on remarque que $\eta(x,t) = H(x,t) - h(x)$).

Une des hypothèses fondamentales utilisées pour la modélisation de ce problème est de ne considérer que le cas pour lequel la profondeur est très faible devant la longueur d'onde des vagues $h(x) << \lambda$. On note le champ de vitesse : $\underline{V}(x,y,t) = u(x,y,t)\underline{e_x} + v(x,y,t)\underline{e_y}$. D'après l'hypothèse précédente, on supposera que u (composante horizontale de la vitesse du fluide) est de la forme :

$$u(x,y,t) = u(x,t).$$

On suppose que la masse volumique en tout point (x,y) de l'eau et à tout instant t est constante $\rho(x,y,t) = \rho_0$ et on néglige tout les phénomènes de viscosité.

Enfin, on donne le champ de pression dans le fluide :

$$p(x,y,t) = \rho_0 g(\eta(x,t) - y) + P_0$$

avec P_0 la pression atmosphérique (supposée constante).

1. En projetant l'équation d'Euler (bilan de quantité de mouvement) suivant $\underline{e_x}$, montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2}$$

Solution:
L'équation d'Euler est :

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V}.\underline{\nabla})\underline{V}\right) = -\underline{\nabla}p - \rho\underline{g}$$

L'équation d'Euler projetée sur $\underline{e_x}$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Comme $u(x,t)$, le troisième terme est nul, en injectant l'expression de $p(x,y)$ donné dans l'énoncé, on trouve le résultat demandé

2. En faisant un bilan de masse sur la tranche de fluide d'épaisseur dx, montrer que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Solution: On fait un bilan de masse (on prend une tranche d'épaisseur 1 dans la direction z). La masse de la tranche est : $\rho_0 H(x,t)dx$. Son évolution en temps est donc : $\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t}$ L'évolution temporelle est égale au flux entrant (en x moins le flux entrant en $x + dx$:

$$\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t} = \rho_0 H(x,t)u(x,t) - \rho_0 H(x+dx,t)u(x+dx,t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \rho_0 H(x,t)dx}{\partial t} = -\rho_0\frac{Hu}{\partial x}dx$$

et donc finalement :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0$$

3. Les deux équations précédentes sont non-linéaires. On rappelle que $|u(x,t)| << 1$ et $|\eta(x,t)| << 1$. Linéariser les équations précédentes et montrer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

Solution: Les 2 équations trouvées précédemment sont

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial Hu}{\partial x} \end{cases}$$

Le 2ème terme de la première équation est un terme quadratique en u, on peut l'éliminer. Dans la deuxième équation, on exprime H en fonction de η :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial (h(x)+\eta(x,t))}{\partial t} = -\frac{\partial (h(x)+\eta(x,t))u}{\partial x} \end{cases}$$

Le terme $h(x)$ ne dépend pas du temps. Par ailleurs, le terme $\eta(x,t)u(x,t)$ est un terme quadratique, on peut l'éliminer :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial h(x)u}{\partial x} \end{cases}$$

4. Montrer qu'on peut écrire une équation de propagation pour la fonction $\eta(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \tag{5}$$

Solution: d'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x}$$

On remarque que :

$$\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 h(x)u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

En injectant $\frac{\partial u}{\partial t}$ trouvé précédemment :

$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)(-g)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

5. Calculer la relation de dispersion de cette équation

> **Solution:** On cherche la solution sous la forme :
>
> $$\eta(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$
>
> on trouve :
>
> $$\omega^2 = -gik\frac{dh}{dx} + gk^2h$$

6. Calculer la vitesse de phase associée. Monter que si la profondeur est constante, alors $c_\phi = \sqrt{gh}$. Est ce cohérent avec les résultats du cours ?

> **Solution:** La vitesse de phase est :
>
> $$c_\phi = \frac{\omega}{Re(k)}$$
>
> On sait que k est une racine du polynôme $ghk^2 - gik\frac{dh}{dx} - \omega^2 = 0$.
> Le discriminent est $\Delta = -gh' + 4gh\omega^2$.
> Si $\Delta \geq 0$ alors
>
> $$k_{1,2} = \frac{igh' \pm \sqrt{\Delta}}{2gh}$$
>
> Si $\Delta < 0$ alors
>
> $$k_{1,2} = \frac{igh' \pm i\sqrt{-\Delta}}{2gh}$$
>
> Par conséquent, la vitesse de phase n'est définie que pour $\Delta \geq 0$ et vaut :
>
> $$c_\phi = \frac{2gh\omega}{\sqrt{\Delta}}$$
>
> Remarque dans le cas où la hauteur est constante $h'(x) = 0$ et $\Delta = 4gh\omega^2$, ce qui entraine $c_\phi = \sqrt{gh}$ ce qui est cohérent avec les résultats précédents.

Exercice 5 : Aménagement sous-marin de l'entrée d'un port

On reprend les notations et les résultats de l'exercice précédent. Pour éviter l'ensablement d'un port, une marche a été aménagée à son entrée. Ainsi, le sable qui vient du large est bloqué par la marche (on suppose que le sable est entrainé au fond de l'eau). On cherche à caractériser les conséquences de cet aménagement sur la hauteur des vagues dans le port. On modélise la géométrie du problème de la façon suivante :

— vers le large, on considère un fond plat de hauteur h_1,

— vers le port, on a un fond plat de hauteur h_2 (avec $h_2 < h_1$).

On note $\eta_1(x,t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_1 et $\eta_2(x,t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_2. On suppose que le changement de hauteur d'eau entraine l'apparition d'une onde transmise (T est le coefficient de transmission en amplitude) et d'une onde réfléchie (R est le coefficient de réflexion en amplitude).

Les conditions de continuité en $x = 0$ pour ce problème sont :

— continuité de la hauteur des vagues ($\eta_1(x=0,t) = u_2(x=0,t)$)
— continuité du débit ($u_1(x=0,t)h_1 = u_2(x=0,t)h_2$)

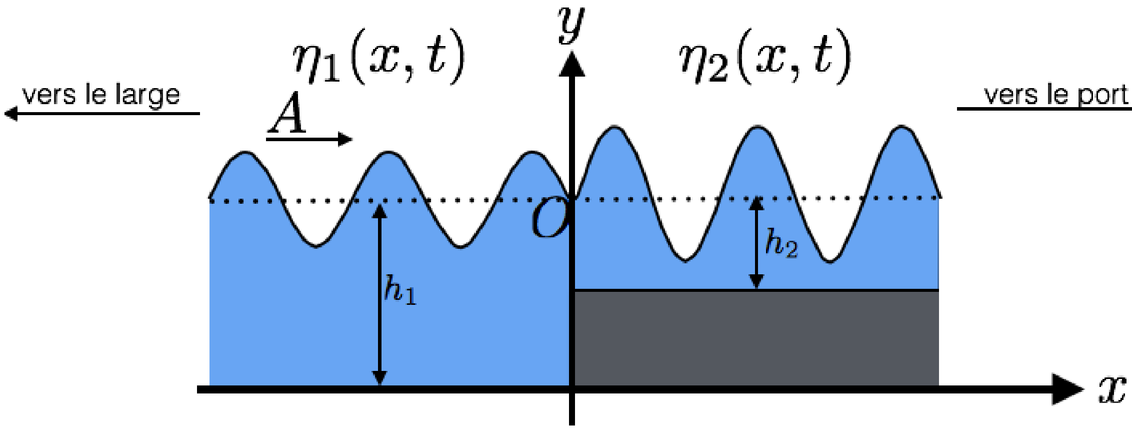


Figure 5 – Propagation de vagues en eau peu profonde

1. Donner les équations des ondes que doivent satisfaire $\eta_1(x,t)$ et $\eta_2(x,t)$ et les vitesses de phases c_1 et c_2 dans ces deux cas.

> **Solution:** On a dans la partie 1 :
>
> $$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = gh_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ c_1 = \sqrt{gh_1} \end{cases} \tag{6}$$
>
> et dans la partie 2 :
>
> $$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = gh_2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} \\ c_2 = \sqrt{gh_2} \end{cases} \tag{7}$$

2. Donner les expressions de η_1 et η_2.

> **Solution:**
>
> $$\begin{cases} \eta_1(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega t)} + ARe^{i(-k_1 x - \omega t)} \\ \eta_2(x,t) = ATe^{i(k_2 x - \omega t)} \end{cases} \tag{8}$$

3. En utilisant la continuité de la hauteur des vagues en $x = 0$, trouver une première relation entre les coefficients de réflexion et de transmission.

> **Solution:** la hauteur des vagues est continue en $x = 0$:
>
> $$\eta_1(x=0,t) = \eta_2(x=0,t)$$
>
> par conséquent :
>
> $$1 + R = T$$

4. Exprimer $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ en fonction des données du problème.

Solution: On sait que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\left(Aik_1e^{i(k_1x-\omega t)} - ARik_1e^{i(-k_1x-\omega t)}\right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\left(ATik_2e^{i(k_2x-\omega t)}\right) \end{cases}$$

En intégrant par rapport à t et en supposant les constantes d'intégration nulles, on trouve :

$$\begin{cases} u_1 = -g\left(-\frac{Ak_1}{\omega}e^{i(k_1x-\omega t)} + \frac{ARk_1}{\omega}e^{i(-k_1x-\omega t)}\right) \\ u_2 = \frac{ATk_2g}{\omega}e^{i(k_2x-\omega t)} \end{cases}$$

5. En utilisant la continuité du débit en $x = 0$, trouver une deuxième relation entre R et T.

Solution: La condition de continuité de débit est : $u_1(x=0,t)h_1 = u_2(x=0,t)h_2$. En injectant la relation précédente et en utilisant la relation de dispersion ($\omega = c_nk_n$), on trouve :

$$\frac{gh1}{c_1} - \frac{gRh_1}{c_1} = \frac{gTh_2}{c_2}$$

donc

$$\frac{h_1}{c_1}(1-R) = \frac{h_2}{c_2}T$$

6. Déduire des questions précédentes les expressions de R et T en fonction des vitesses c_1 et c_2.

Solution: Pour obtenir R et T il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1+R = T \\ \frac{h_1}{c_1}(1-R) = \frac{h_2}{c_2}T \end{cases}$$

Tout d'abord, on remplace les hauteurs en les exprimant en fonction des vitesses de phase ($c_n = \sqrt{gh_n}$)

$$\begin{cases} 1+R = T \\ \frac{c_1^2}{gc_1}(1-R) = \frac{c_2^2}{gc_2}T \end{cases}$$

Ce système se résoud facilement :

$$\begin{cases} R = \frac{c_1-c_2}{c_1+C_2} \\ T = \frac{2c_1}{c_1+c_2} \end{cases}$$

7. Exprimer T en fonction de h_1 et h_2.

Solution: Comme

$$T = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}$$

on a :

$$T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}$$

8. Quelle va être la conséquence de l'aménagement du fond sous-marin sur la hauteur des vagues dans le port. Commenter.

Solution: on a $h_2 < h_1$, donc $\sqrt{h_2/h_1} < 1$ et donc $T > 1$: la hauteur des vagues dans le port est plus grande que la hauteur des vagues au large. Cet aménagement est donc mauvais pour les bateaux qui vont être soumis à des vagues plus hautes.