$\boxed{\text{Exercice 1}}$ - Corrigé

1) Pour montrer que f est un endomorphisme il faut
i) montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2(x)$
ii) $\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

i) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$; alors $P(x) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dP}{dx} = P'(x) = 2aX + b.$$

$$f(P(x)) = (x^2+1)(2aX+b) - 2x(aX^2+bX+c)$$
$$= \cancel{2aX^3} + bx^2 + 2aX + b - \cancel{2aX^3} - 2bx^2 - 2cX$$
$$= -bx^2 + 2(a-c)x + b \in \mathbb{R}_2[X].$$

ii) $$f(\alpha P + Q) = (X^2+1)\frac{d}{dx}(\alpha P + Q) - 2x(\alpha P(x) + Q(x))$$
$$= \alpha(x^2+1)\frac{dP}{dx} - \alpha \cdot 2xP(x) + (x^2+1)\frac{dQ}{dx} - 2xQ(x)$$
$$= \alpha f(P) + f(Q).$$

2) $f(1) = -2X$
$f(X) = -X^2+1.$
$f(X^2) = (X^2+1)(2X) - 2X \cdot X^2 = 2X$

3) $$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $$\text{Ker } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tq } L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y = 0} \\ -2x + 2z = 0 \Rightarrow \underline{x = z}. \\ -y = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ker } L = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim Ker$L = 1$, base $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Im}\, L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ tq. } \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = a \\ -2x + 2z = b \\ -y = c \end{cases} \Rightarrow a + c = 0. \quad b = \text{quelconque}.$$

$$\mathrm{Im}\, L = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

dim $(\mathrm{Im}\, L) = 2$, Base de ImL $= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

5) dim Ker $L = 1$ $\Rightarrow$ dim Ker $f = 1$ $\Rightarrow$ $f \neq$ injective

dim Im $L = 2$ $\Rightarrow$ dim $(\mathrm{Im}\, f) = 2$ $\Rightarrow$ Im $f \neq \mathbb{R}_2[X]$

donc $f \neq$ surjective

bonus

6) (a)

Soit $P_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$

$P_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

$$(\alpha P_1 + P_2)(x) = (\alpha a_1 + a_2) x^2 + (\alpha b_1 + b_2) x + \alpha c_1 + c_2$$

$$g(\alpha P_1 + P_2) = (\alpha a_1 + a_2) + \alpha c_1 + c_2 = \alpha(a_1 + c_1) + a_2 + c_2$$

$$= \alpha g(P_1) + g(P_2)$$

donc g = linéaire

(b) $(g \circ f)(P(x)) = g(f(P(x))) = g\left((x^2+1)\frac{dp}{dx} - 2xP(x)\right)$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(P(x)) = -bx^2 + 2(a-c)x + b$

On utilise la définition de g :

$$\left.\begin{array}{l} g(f(P)) = -b + b = 0 \\ \text{vrai } \forall P \in \mathbb{R}_2[X] \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f = 0. \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

(c) $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.
Elle vérifie donc le théorème du rang :
$\dim(\mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2$
On sait que $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$ (question 4)
les 2 ensembles sont des espaces vectoriels $\Rightarrow$
$\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g$
$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g}$

Exercice 2

1) $$A = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

f = rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe x (e_1)

2) $$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = \text{famille libre}.$$

$\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = B'$ base de E.

3) $$\underset{B \to B'}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $$A'_{B'} = P^{-1} A P$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{+\frac{1}{2}} & \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2} \\ 0 & \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = A'$$

On trouve $A' = A$.

5) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la base $\mathcal{B}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{f(v)}$$

$v' = P^{-1} v = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

$f(v') =$ $(A' = A) \cdot v' =$

Obs :

On aurait pu aussi faire.

$$f(v') = P\cdot f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt3}{2} - \frac12 \\ \frac{\sqrt3}{2} + \frac12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{\frac{\sqrt3}{2}} - \frac12 - \cancel{\frac{\sqrt3}{2}} - \frac12 \\ \frac{\sqrt3}{2} - \cancel{\frac12} + \frac{\sqrt3}{2} + \cancel{\frac12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1). Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Alors.

$$\lambda M(a_1) + M(a_2) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda_1+1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda a_1 + a_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M(a\lambda_1+a_2)}$$

donc $E \neq$ espace vectoriel

2) $a=4$. , $M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $$P_\lambda(M) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + 4(-1)(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2)$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda).$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3}$$

ii). $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 0. \\ x + 2y = 0. \\ x + 2z = 0. \end{cases}$

~~$x = -2z$~~ $\Rightarrow y = z$.

$x = -2z$.

$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 1}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_{\lambda_2} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = 3}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Big\} y = z$

$E_{\lambda_3} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) La matrice $M(4)$ est diagonalisable car le polynôme caractéristique à 3 racines différentes donc $M(4)$ a 3 valeurs propres distinctes.

$M'(4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M' = P^{-1} M P$

3) $\underline{a = 0}$

i) $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_\lambda(M(0)) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$

$\lambda = 1$ valeur propre triple

ii) Espace propre associé : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$

$\dim E_1 = 2 \neq 3$ (ordre de multiplicité de 1)

$\Rightarrow M(0) \neq$ diagonalisable.

Autrement, raisonnement par absurd :
Si M est diagonalisable alors $M'(0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (matrice identité)

$M' = P^{-1}MP.$

$\Rightarrow M = PM'P^{-1} = P.I.P^{-1} = I.$

donc $M = I$ absurd !

Donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

iii) $M(0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$

On observe que $M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$

Raisonnement par récurrence :
On a déjà vérifié pour $n = 1, 2, 3$.
On suppose que $M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$ et on veut démontrer que $M^{n+1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\n+1&1&0\\n+1&0&1\end{pmatrix}.$

$M^{n+1} = M^n \cdot M = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\n+1&1&0\\n+1&0&1\end{pmatrix}$ q.e.d

$\Rightarrow M^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

(v) . $M(0)$ est inversible car $\det M = 1$.

$$(M(0))^{-n} = [M^{-1}(0)]^n = [M^n(0)]^{-1}.$$

$$M^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[M^n(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Si a est quelconque, $a \in \mathbb{R}$.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - a\right).$$

1) si $a < 0$ alors $(1-\lambda)^2 - a = 0$ a deux racines complexes donc le polynôme $P(\lambda)$ a une seule racine réelle ce qui veut dire que la matrice $M(a)$ a une seule valeur propre réelle. La matrice n'est donc pas diagonalisable (pour cela il faudrait 3 valeurs propres réelles distinctes ou non)

2) Si $a = 0$ on a vu que la matrice $M(0)$ n'est pas diagonalisable même si elle a toutes les valeurs propres réelles.

3) Si $a > 0$ alors $(1-\lambda)^2 - a = 0$ a deux racines réelles car $a = (\sqrt{a})^2 \Rightarrow (1-\lambda-\sqrt{a})(1-\lambda+\sqrt{a}) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{a} - 1$$
$$\lambda_3 = \sqrt{a} + 1$$

Donc $\boxed{a \in \mathbb{R}_+^*}$ pour que $M(a)$ soit diagonalisable

5) Si $a = 0$, $M \neq$ diagonalisable, si $\boxed{a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$ alors on a 3 valeurs propres complexes distinctes $\Rightarrow M(a) =$ diagonalisable