TD 1- Résolution de problèmes d'élastostatique linéarisés par l'approche contrainte

Exercice 1 : Cylindre sous son poids propre

Dans cet exercice, on s'intéresse au comportement mécanique d'un cylindre sous son poids propre. On désigne par H la hauteur du cylindre selon la direction $\underline{e}_3$, R le rayon de sa section droite circulaire, Γ_0 (resp. Γ_1), la base du cylindre dans le plan $x_3 = 0$, (resp. $x_3 = H$) et par Γ_l sa surface latérale et le point O est le centre de la base Γ_0.
Le cylindre est élastique, homogène et isotrope, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν. Il est supposé pesant, de masse volumique ρ, encastré sur la base Γ_0 et ses surfaces Γ_1 et Γ_l sont libres d'efforts.

1. Traduire l'équilibre de la pièce et en déduire la résultante et le moment au point O du tenseur des efforts surfaciques exercés sur cette base.

Montrer que ce torseur est équivalent à une distribution d'efforts surfaciques uniforme de la forme $\underline{F} = P\,\underline{e}_3$, P étant un scalaire constant que l'on exprimera en fonction des données du problème.

2. Pour construire une solution analytique du problème, on considère à partir de maintenant le problème d'équilibre obtenu en remplaçant la condition d'encastrement sur Γ_0 par une condition aux limites en efforts. La base Γ_0 est supposée désormais soumise à la densité surfacique d'efforts $\underline{F} = P\,\underline{e}_3$ déterminée à la question précédente.

Ecrire les équations et conditions aux limites de ce nouveau problème.

Ce problème est-il régulier ? Si oui, de quel type ?

Définir les espaces de champs admissibles cinématiquement $\mathcal{U}_{ad}$ et statiquement Σ_{ad} pour ce problème.

3. On se propose de rechercher la solution en contrainte de ce nouveau problème sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.

A quelle(s) condition(s) un tel champ est-il statiquement admissible pour ce problème.

4. Déterminer le champ de déformations associé à ce champ de contraintes.

Existe-t-il un champ de déplacement qui en dérive ?

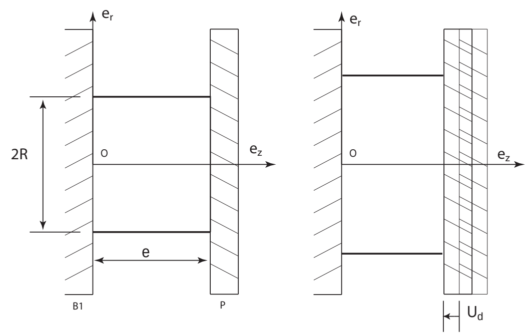
5. Calculer le champ de déplacement associé s'il existe.

Le problème résolu admet-il un couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ solution unique ? Commenter par rapport au problème initial.

6. Déterminer le déplacement du point O' centre de la face Γ_1, ainsi que la déformée de cette surface.

Exercice 2 : Joint en compression

Dans cet exercice, on s'intéresse au comportement mécanique d'un joint élastique, de forme cylindrique d'axe $\underline{e}_3$, de section circulaire de rayon R et de hauteur e selon $\underline{e}_3$, relié d'une part en $x_3 = 0$ à un bâti rigide fixe $(B1)$ et d'autre part, en $x_3 = e$ à une plaque rigide mobile (P) en translation rectiligne suivant $\underline{e}_3$ parallèlement au bâti $(B1)$ (voir figure). Le bloc est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène, isotrope, de coefficients de Lamé λ, μ, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν.



On étudie l'équilibre du joint dans les conditions suivantes:
- l'hypothèse des petites perturbations est licite,
- le contact entre le joint et les parois rigides (P) et $(B1)$ est sans frottement,
- le bâti $(B1)$ est fixe,
- la plaque mobile (P) est animée d'un déplacement uniforme $-U_d\, \underline{e}_3$,
- la surface latérale $r = R$ est libre d'effort,
- les forces volumiques sont négligeables.

1. Écrire les équations et conditions aux limites du problème d'élastostatique.

Le problème est-il régulier ? Si oui, de quel type ?

Définir les espaces de champs admissibles cinématiquement $\mathcal{U}_{ad}$ et statiquement Σ_{ad} pour ce problème.

2. Montrer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ de la forme:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} = \sigma_0\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3,$$

est statiquement admissible pour toute valeur constante de σ_0.

3. Déterminer le champ de déformations associé à ce champ de contraintes.

Existe-t-il un champ de déplacement qui en dérive ?

4. Déterminer une forme particulière de champ de déplacement potentiellement solution.

En déduire la forme générale du champ de déplacement.

5. Achever la résolution du problème.

Le problème admet-il un couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ solution unique ?

On suppose le point O fixé au bâti (déplacement et rotationnel nuls en O), en déduire le couple solution.