**Licence d'Ingénierie Mécanique - LA392**
**Examen du 6 Janvier 2015**

***Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice***
***L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé***

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

## Questions de cours

1. Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 5u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x$$
Indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non et si elle est homogène ou non.
2. Donner la définition d'une condition aux limites de Neumann.
3. Donner l'équation de la (des) famille de caractéristiques associée à une équation parabolique. Quel est le comportement d'une solution le long des caractéristiques ?
4. Soit $u(x,t) = e^{-9t}\sin(3x)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$. En se basant sur le comportement de la fonction $u(x,t)$ et sans vérification directe, décidez si $u$ peut être solution de l'équation des ondes ou de l'équation de diffusion. Justifiez la réponse.
5. Soit $u$ une fonction harmonique dans le disque de rayon $r < 2$ et telle que $u(r,\theta) = 3\sin(2\theta) + 1$ pour $r = 2$. Quel est le maximum de $u$ dans $\{(r,\theta) | r \leqslant 2\}$ ?
6. Comment change l'équation de Poisson (en deux dimensions) quand on effectue un changement de variables qui représente une translation dans le plan ?

## Exercice 1

Pour l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a) Déterminer le type de l'équation ;
b) On cherche la solution générale de cette équation dans le demi-plan $x > 0$. Proposez un changement de variables $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ pour réduire l'équation à la forme standard et obtenir cette forme standard.
c) Déterminez la solution générale $u(x,y)$.

## Exercice 2

Résoudre l'équation de la diffusion avec advection suivante :

$$u_t - ku_{xx} + Vu_x = 0, \text{pour } -\infty < x < \infty, \quad u(x,0) = \phi(x)$$

ou $V$ est une constante.
Indication : Effectuer un changement de variables $\xi = x - Vt$, $\eta = t$.

## Exercice 3

Cet exercice a pour but d'étudier par séparation de variables les vibrations longitudinales d'une poutre élastique (sous l'hypothèse des petites perturbations). Soit donc une poutre de longueur $L$, module d'Young $E$ et masse volumique $\rho$. Soit $u$ le champ de déplacement dans la poutre, fonction du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de l'abscisse $x \in [0, L]$. $u$ satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{E}$$

Dans la suite on posera $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ célérité des ondes longitudinales.

Cette poutre est soumise à une déformation initiale $u_0(x)$ connue :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \qquad \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \qquad \forall x \in [0, L] \end{aligned} \tag{CI}$$

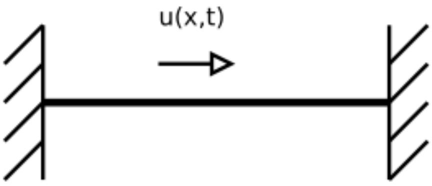


Figure 1 – Poutre bi-encastrée (CL1)

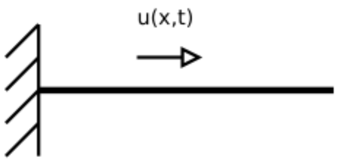


Figure 2 – Poutre encastrée-libre (CL2)

On considère dans un premier temps une poutre bi-encastrée (voir Figure 1) :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{CL1}$$

1. Montrer que pour satisfaire (E,CL1) la partie spatiale $X$ d'une forme séparée $u(x, t) = X(x)T(t)$ doit vérifier une équation différentielle et des conditions aux limites spécifiques.
2. On cherche $u$ sous la forme $u(x, t) = \sum_n X_n(x)T_n(t)$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par les $(T_n)$.
3. Déterminer complètement les $(T_n)$ afin qu'ils permettent de satisfaire (CI).

On considère maintenant une poutre encastrée-libre (voir Figure 2) :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{CL2}$$

4. Quelles sont les conséquences d'un tel changement de conditions aux limites ?

**Exercice 4**

Trouver la fonction harmonique $u$ définie sur le disque $x^2 + y^2 < 6$, telle que $u(x, y) = y + y^2$ sur le bord du disque. Écrivez la solution en coordonnées cartésiennes $(x, y)$.

Indication 1 : L'opérateur de Laplace en coordonnées polaires $(r, \theta)$ est :

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}$$

Indication 2 : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$