Ecrit du vendredi 12 janvier 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures

Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction.
Les deux parties du problème sont indépendantes. Le barême sera approximativement de 12 points pour la partie 1, 6 points pour la partie 2 et 2 points pour la rédaction.

Partie 1 : Ecoulement d'un fluide visqueux entre deux plaques en mouvement

On étudie l'écoulement d'un fluide entre deux plaques planes parallèles horizontales d'équation $z = 0$ et $z = H$. L'écoulement du fluide est généré par le mouvement relatif des deux plaques, la plaque située en $z = 0$ étant supposée fixe et celle en $z = H$ animée d'une vitesse uniforme dans la direction $\underline{e}_x$, notée $U\underline{e}_x$, où U est une constante donnée positive ($U > 0$).

Le fluide est homogène, visqueux newtonien et pesant. On convient de noter ρ la masse volumique du fluide et λ, μ les coefficients de viscosités dynamiques.

L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, les lignes de courant étant des droites parallèles à l'axe $\underline{e}_x$. La dimension b des plaques dans la direction $\underline{e}_y$ étant supposée grande devant H, le champ de vitesse $\underline{v}(x, y, z, t)$ est supposé indépendant de la variable y.

1.1 Faire un schéma. Montrer que sous les hypothèses du problème, le champ de vitesse de l'écoulement $\underline{v}(x, y, z, t)$ est nécessairement de la forme : $\underline{v}(x, y, z, t) = v_x(z)\,\underline{e}_x$, où $v_x(z)$ est une fonction scalaire de la variable z uniquement.

1.2 Rappeler l'équation de Navier-Stokes. Puis expliciter pour l'écoulement considéré ses projections sur les trois axes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, ainsi que les conditions aux limites en vitesse.

En déduire que la vitesse $v_x(z)$ et la pression $p(x, y, z, t)$ en tout point de l'écoulement sont de la forme suivante :

$$v_x(z) = \frac{1}{2\,\mu}\left[A\,z^2 + \left(2\,\mu\,\frac{U}{H} - A\,H\right)z\right] \qquad p(x, y, z, t) = -\,\rho\,g\,z + A\,x + B,$$

où A et B sont des constantes.

1.3 Tracer le profil des vitesses en distinguant les 3 situations associées au signe du gradient de pression selon la direction $\underline{e}_x$, soient $A = 0$, $A < 0$ et $A > 0$.

Interpréter physiquement ces trois situations.

Calculer le débit massique de l'écoulement à travers un section S d'équation $x = x_0$ constante.

Montrer qu'il existe une valeur A du gradient de pression selon la direction $\underline{e}_x$ qui annule le débit.

Interpréter physiquement cette situation.

1.4 Déterminer l'expression du champ de contraintes en tout point de l'écoulement.

En déduire l'expression de la force de frottement $\underline{F}^1$ exercée par le fluide sur la plaque fixe $z = 0$, ainsi que l'expression de la force de frottement $\underline{F}^2$ exercée par le fluide sur la plaque mobile $z = H$.

Former $\underline{T} = \underline{F}^1 + \underline{F}^2$, analyser cet effort dans les trois situations $A = 0$, $A < 0$, $A > 0$ et commenter.

1.5 Les plaques en $z = 0$ et $z = H$ sont supposées toutes les deux fixes à partir de maintenant. À la différence des questions précédentes, l'écoulement n'est plus supposé laminaire. La vitesse de l'écoulement stationnaire est supposée présenter maintenant deux composantes selon $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$, ces deux composantes étant des fonctions de la variable z uniquement, soit : $\underline{v}(x, y, z, t) = v_x(z)\,\underline{e}_x + v_y(z)\,\underline{e}_y$.
Les effets de la pesanteur sont par ailleurs négligés cette fois.

a. Expliciter l'équation de Navier-Stokes sous ces nouvelles hypothèses et ses projections sur les trois axes.

b. Montrer que les composantes de la vitesse et la pression sont données par :

$$v_x(z) = \frac{A_1}{2\,\mu}\,z\,(\,z - H\,), \qquad v_y(z) = \frac{A_2}{2\,\mu}\,z\,(\,z - H\,), \qquad p(x, y, z, t) = A_1\,x + A_2\,y + A_3,$$

où A_1, A_2, A_3 sont des constantes.

c. Que se passe-t-il si le gradient de pression selon la direction $\underline{e}_x$ est prépondérant devant celui selon la direction $\underline{e}_y$, c'est à dire si $A_2 = \epsilon A_1$ avec $\epsilon << 1$?

Interpréter l'écoulement dans ce cas.

Partie 2 : Tassement d'une couche de sol

On considère une couche de sol d'épaisseur H dans la direction $\underline{e}_3$, de grandes dimensions dans les deux autres directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$.

Cette couche repose sur un substrat rigide fixe en $x_3 = 0$ et l'adhésion est supposée parfaite. Elle est en équilibre sous l'action d'une densité surfacique d'effort d'intensité $-q\,\underline{e}_3$ exercée sur la surface $x_3 = H$ avec q une constante donnée strictement positive ($q > 0$). Les efforts de pesanteur sont négligés.

Le sol est supposé homogène, élastique linéaire et isotrope. On désigne par λ et μ les coefficients de Lamé. Les déplacements et déformations sont supposés petits.

2.1 Faire un schéma. Ecrire les équations satisfaites par les champs de déplacements $\underline{\xi}(\underline{x})$, déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ et contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ en tout point de la couche de sol.

Préciser ensuite les conditions aux limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = H$.

2.2 On recherche le champ de déplacement solution sous la forme $\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3) = \xi(x_3)\,\underline{e}_3$, où $\xi(x_3)$ est une fonction scalaire dépendante uniquement de la variable x_3.

Rappeler l'équation de Lamé-Navier.

En déduire l'équation différentielle que doit nécessairement satisfaire la fonction $\xi(x_3)$ pour conduire à un champ de déplacement solution.

2.3 En déduire les expressions du champ de déformation linéarisée et de contrainte associés.

Achever la détermination du champ de déplacement solution.

On vérifiera que le déplacement solution est donné par :

$$\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{q}{\lambda + 2\,\mu}\,x_3\,\underline{e}_3.$$

2.4 Interpréter mécaniquement l'état de déformations dans la couche.

Quelle est la variation de volume de la couche ? Calculer la masse volumique après déformation.

Sous quelle condition sur le chargement q, l'hypothèse des petites déformations reste-elle valide?

Quelle est l'équation de la surface $x_3 = H$ après déformation ? Commenter.

2.5 Calculer les contraintes principales en tout point de la couche.

Représenter les cercles de Mohr et donner l'expression de la contrainte tangentielle maximale.

Sachant que le sol reste élastique tant que la contrainte tangentielle maximale est inférieure à un seuil k, quelle est la valeur limite du chargement q^* ?

Quels sont les plans de cisaillement maximum ? Commenter.