Sorbonne Université **Année universitaire 2017/2018**

Licence de Mécanique
UE 3A005 : Méthodes Numériques pour la Mécanique
Examen du 20 juin 2018 (2nde session, durée 2h)

Eléments de correction

Exercice 1. Méthodes directes : méthode d'élimination de Gauss (7 points / 20).

On considère le système linéaire $Cx = d$, dans lequel la matrice C, le vecteur solution x et le vecteur second membre d sont respectivement définis par :

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a. (2 points) *Résoudre le système de manière exacte par la méthode de Gauss sans pivotage. Exprimer le vecteur solution x en fonction de ε. Quelle solution x obtient-on lorsque $\varepsilon \to 0$?*

La matrice de Gauss G_1 permet d'obtenir U_a matrice triangulaire supérieure telle que $G_1C = U_a$, ainsi que le vecteur second membre $G_1d = b_a$:

$$G_1C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 1-\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\frac{1}{\varepsilon} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : les mêmes opérations sont effectuées sur C et d de façon à obtenir un système équivalent au système de départ. La résolution du système triangulaire $U_ax = b_a$ s'effectue ensuite par simple remontée, on obtient :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\varepsilon} \\ \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon-1} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, la solution x est définie et vaut :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b. (2 points) *Résoudre le système $Cx = d$ de manière exacte, en utilisant la méthode de Gauss après permutation des deux premières lignes du système. Vérifier que la solution obtenue est identique à la solution calculée à la Question a.*

Remarque : La permutation des deux premières lignes du système signifie qu'on permute à la fois les deux premières lignes de la matrice C et celles du second membre d, de façon à obtenir un système équivalent au système de départ. La matrice de Gauss G_2 est appliquée à la matrice et au second membre du système après permutation des deux premières lignes (P désigne la matrice de permutation) :

$$G_2PC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1Pd = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2\varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système triangulaire résultant $U_bx = b_b$, avec $G_2PC = U_b$ matrice triangulaire supérieure, $G_2Pd = b_b$ vecteur second membre, est effectuée par simple remontée. On obtient :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\varepsilon} \\ \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon-1} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solution est identique à celle obtenue à la question précédente.

c. (1 point) On reprend à présent le système triangulaire obtenu à la Question a., avec U_a matrice triangulaire supérieure et b_a le vecteur second membre associé. *Introduire la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$ dans ce système. Afin de résoudre ce système de manière "approchée", simplifier U_a et b_a en considérant une précision de trois chiffres significatifs (telle que $1 - 10^{-4} \simeq 1$ par exemple).*

Le système $U_ax = b_a$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 1-\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\frac{1}{\varepsilon} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ou de manière équivalente, ε étant petit mais non nul :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon-1 & \varepsilon-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\varepsilon-1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On demande d'effectuer la simplification du système précédent *AVANT* la résolution. Avec un précision de 3 chiffres significatifs, $\varepsilon \simeq 0, \varepsilon-1 \simeq -1, 2\varepsilon-1 = 2\times10^{-4}-1 \simeq -1$, on obtient ainsi le système simplifié suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système simplifié. On note x_a la solution approchée obtenue.

Le système simplifié précédent conduit à la solution approchée suivante :

$$x_a = \begin{pmatrix} \text{indeterminé} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

d. (1 point) On reprend le système triangulaire obtenu à la Question b., avec U_b matrice triangulaire supérieure et b_b le vecteur second membre correspondant. *Introduire la valeur $\varepsilon = 10^{-4}$ dans ce système. Simplifier U_b et b_b en considérant une précision de trois chiffres significatifs.*

Le système $U_bx = b_b$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2\varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, une précision de trois chiffres significatifs implique $1-\varepsilon \simeq 1$ $1-2\varepsilon \simeq 1$, ce qui conduit au système simplifié suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système simplifié. On note x_b la solution approchée correspondante.

Le système simplifié précédent conduit à la solution approchée suivante :

$$x_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

e. (1 point) *Comparer les deux solutions x_a et x_b calculées respectivement aux Questions c. et d. Justifier les résultats obtenus.*

cf. cours, il est important d'éviter la division par un pivot trop petit. Ici c'est la matrice U_b obtenue après permutation des deux premières lignes du système (de façon à choisir comme pivot le terme le plus élevé de la première colonne de C : $C_{21} = 1$) qui permet d'obtenir la bonne solution lorsque $\varepsilon \to 0$.

Exercice 2. Résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient (6 points / 20).

On cherche à résoudre le système $Ax = b$ par la méthode du gradient, avec la matrice A, le vecteur x et le vecteur second membre b définis respectivement par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a. (1 point) *Peut-on appliquer l'algorithme du gradient à la matrice A ? Montrer simplement en utilisant les propriétés de la matrice A qu'elle est définie positive. On donne une des valeurs propres de A : $\lambda_1 \simeq 3.802$.*

La matrice A est symétrique (donc à valeurs propres réelles), et également définie positive. Il y a plusieurs manières de le montrer. On peut ainsi utiliser la définition pour montrer que ${}^T x \cdot A \cdot x \; \forall x \neq 0$, et ${}^T x \cdot A \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Plus simplement, on peut remarquer que la trace de A, $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, que le déterminant de A, $det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 12-3-2 = 7 > 0$. Connaissant $\lambda_1 \simeq 3.802$, ceci implique que $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$, et $\lambda_2\lambda_3 = \frac{7}{\lambda_1} > 0$ également. Ainsi les trois valeurs propres de A sont strictement positives, A est bien définie positive.

b. (4 points) On rappelle l'algorithme du gradient :

Initialisation avec un vecteur $x^{(0)}$, calcul du vecteur direction de descente $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ et du pas de descente $\alpha^{(0)} = \frac{{}^T r^{(0)} \cdot r^{(0)}}{{}^T r^{(0)} \cdot A r^{(0)}}$.

A l'itération k ($k = 0, 1, 2, ...$), on calcule successivement :

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)}$

$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$

$\alpha^{(k+1)} = \frac{{}^T r^{(k+1)} \cdot r^{(k+1)}}{{}^T r^{(k+1)} \cdot A r^{(k+1)}}$

et on itère tant que $\|r^{(k+1)}\| \geq \varepsilon$ (ici on considère $\varepsilon = 0,01$).
En prenant pour vecteur initial :

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

effectuer les trois premières itérations de l'algorithme du gradient (soit l'initialisation, puis k = 0, 1).
En appliquant l'algorithme ci-dessus, on obtient :
Initialisation :

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(0)} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

Itération $k = 0$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(1)} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{35}{9}} = \frac{3}{5}$$

Itération $k = 1$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{15} \\ \frac{7}{15} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \quad r^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{16}{15} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)}) = \frac{1+256+100}{28+784+210} = \frac{357}{1022}$$

Vérifier les propriétés d'orthogonalité des directions de descente successives.
Pour les résidus successifs, on a :
${}^T r^{(0)} \cdot r^{(1)} = 1 \times (-\frac{4}{3}) + 2 \times (-\frac{1}{3}) + 3 \times (\frac{2}{3}) = 0$,
${}^T r^{(1)} \cdot r^{(2)} = (-\frac{4}{3}) \times \frac{1}{15} + (-\frac{1}{3}) \times \frac{16}{15} + (\frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} = 0$. Ainsi les directions de descente successives sont bien orthogonales.

c. (1 point) La solution exacte est donnée par :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On atteint le critère de convergence sur la norme 2 du résidu $r^{(k)}$ avec une précision de 10^{-2} au bout de k = 12 itérations. Pour une précision meilleure, inférieure à 10^{-8}, il faut poursuivre jusqu'à k = 43 itérations. Expliquez brièvement comment on peut améliorer la vitesse de convergence ?
Voir cours

Exercice 3. Résolution d'E.D.O. (Barème : 7 points / 20).
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$u'(x) = f\left(x, u(x)\right), \text{ pour x > 0}$$
$$u(x = 0) = u_0$$

où f est une fonction à valeurs réelles de x et de $u(x)$, et u_0 est un nombre réel donné et non nul.
Soit h un pas d'espace donné, on subdivise l'intervalle $I = [0; X]$ en sous-intervalles de longueur h, et on recherche en chaque noeud $x_i = i \times h$ ($i = 1, 2, ..., N$) la valeur inconnue u_i qui approche $u(x_i)$. Partant de la donnée de départ u_0 en $x_0 = 0$, l'ensemble des valeurs $(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_N)$ représente ainsi la solution numérique approchée aux noeuds $(x_1, x_2, ..., x_N)$ avec $x_N = N \times h = X$.
On considère trois schémas de résolution :
- Schéma a : Euler Explicite

$$u_{i+1} = u_i + hf\left(x_i, u_i\right)$$

- Schéma b : Euler Implicite

$$u_{i+1} = u_i + hf\left(x_{i+1}, u_{i+1}\right)$$

- Schéma c : Méthode de Heun d'ordre deux

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}} &= u_i + \tfrac{h}{2} f\left(x_i, u_i\right) \\ u_{i+1} &= u_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

a. (3 points) On étudie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} u'(x) = u(x), \text{ pour x > 0} \\ u(x = 0) = 1 \end{aligned}$$

Calculer la solution analytique du problème.
La solution analytique est $u(x) = \exp(x)$.
Expliciter la fonction $f\left(x, u(x)\right)$ du problème.
$f(x, u(x)) = u(x)$.
Appliquer les trois schémas (Euler Explicite, Euler Implicite, Heun d'ordre deux) au problème et déduire par récurrence l'expression de la solution approchée u_i en fonction de i et h pour chaque schéma.
Par récurrence, on obtient (avec $u_0 = 1$) :
Pour le schéma a :

$$\begin{aligned} u_1 = (1 + h)u_0 &= (1 + h) \\ u_2 = (1 + h)u_1 &= (1 + h)^2 \\ &\ldots \\ \text{On suppose } u_{i-1} &= (1 + h)^{i-1} \text{ , alors} \\ u_i = (1 + h)u_{i-1} = (1 + h)(1 + h)^{i-1} &= (1 + h)^i \end{aligned}$$

Pour le schéma b :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{(1-h)} u_0 = \frac{1}{(1-h)} \\
u_2 &= \frac{1}{(1-h)} u_1 = \frac{1}{(1-h)^2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad ... \\
\text{On suppose } u_{i-1} &= \frac{1}{(1-h)^{i-1}} \text{ , alors} \\
u_i = \frac{1}{(1-h)} u_{i-1} &= \frac{1}{(1-h)} \frac{1}{(1-h)^{i-1}} = \frac{1}{(1-h)^i}
\end{aligned}
$$

Pour le schéma c :

Pour $i = 0$:

$$
\begin{aligned}
u_{\frac{1}{2}} &= u_0 + \frac{h}{2} u_0 = \left(1 + \frac{h}{2}\right) u_0 \\
u_1 = u_0 + h u_{\frac{1}{2}} &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Pour $i = 1$:

$$
\begin{aligned}
u_{\frac{3}{2}} &= u_1 + \frac{h}{2} u_1 = \left(1 + \frac{h}{2}\right) u_1 \\
u_2 = u_1 + h u_{\frac{3}{2}} &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) u_1 \\
\text{soit } u_2 &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{2}
$$

Si on suppose (pour $i \geq 2$) $u_{i-1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{i-1}$, alors :

$$
\begin{aligned}
u_{i-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{h}{2}\right) u_{i-1} \\
u_i = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) u_{i-1} &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^i
\end{aligned} \tag{3}
$$

b. (3 points) On utilise à présent les résultats de la Question a. pour déterminer l'ordre de la méthode. On rappelle les développements limités suivants au voisinage de $x = 0$ à l'ordre p :

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + ... + \tfrac{x^p}{p!} + O(x^{p+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\tfrac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\tfrac{x^3}{3!} + ... \\
&\quad + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)\tfrac{x^p}{p!} + O(x^{p+1})
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on peut montrer par récurrence les relations suivantes pour le développement limité de l'exponentielle au voisinage de $x = 0$ mis à la puissance m :

$$(exp(x))^m = (1 + x)^m + O(x^2)$$
$$(exp(x))^m = (1 + x + \frac{x^2}{2!})^m + O(x^3)$$

Pour chacun des trois schémas, utiliser les développements précédents pour exprimer l'erreur de consistance e_{i+1}.

$$e_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_{i+1}$$

qui donne l'écart entre la solution exacte $u(x_{i+1})$ et la solution approchée u_{i+1} du problème de Cauchy au noeud x_{i+1}.
En déduire l'ordre de chacun des trois schémas d'Euler Explicite, d'Euler Implicite et de la méthode de Heun d'ordre deux.
Pour le schéma a : en utilisant les développements donnés,

$$e_{i+1} = \exp(x_{i+1}) - u_{i+1} = (\exp(h))^{i+1} - (1 + h)^{i+1} = O(h^2) \tag{4}$$

sur le pas $[x_i; x_{i+1}]$. Sur l'ensemble des pas, l'erreur est d'ordre $O(h^2 N) = O(h^2 \frac{X}{h}) = O(h)$ pour X fini. Le schéma est donc d'ordre 1.
Pour le schéma b : en utilisant les développements donnés,

$$\begin{aligned} e_{i+1} = (\exp(h))^{i+1} - \frac{1}{(1-h)^{i+1}} &= (1 + h)^{i+1} + O(h^2) - (1 - h)^{(-i-1)} \\ &= \text{...(à developper)} = O(h^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Comme précédemment, le schéma est d'ordre 1.
Pour le schéma c : en utilisant les développements donnés,

$$e_{i+1} = \exp(x_{i+1}) - u_{i+1} = (\exp(h))^{i+1} - (1 + h + \frac{h^2}{2})^{i+1} = O(h^3) \tag{6}$$

On obtient donc que le schéma est d'ordre 2.

c. (1 point) *Donner une interprétation géométrique de ces trois schémas de résolution.* Voir cours.