Pour satisfaire la seconde condition limite, on doit avoir :

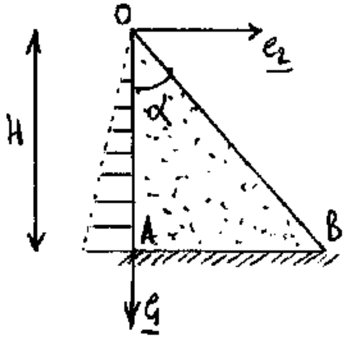
$$\frac{3}{8}r^2 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{\nu}{8}r^2 + \frac{\nu}{2}K_1 = 0 \Big|_{r=R}$$

soit $$K_1 = -\frac{3+\nu}{4(1+\nu)}R^2$$

Au final,

$$\boxed{u_r = -\frac{1-\nu}{8E}\rho\omega^2\left((1+\nu)r^3-(3+\nu)R^2 r\right)}$$

Exercice 2 : Barrage poids



On considère dans ce problème un barrage de masse volumique ρ_b et de section triangulaire OAB. Le barrage retient une hauteur H de liquide.

1 On suppose que le barrage est suffisamment long suivant la dimension transverse pour les déformations loin des bords soient confinées dans le plan (e_1, e_2).

→ Hypothèse de déformation plane

Le barrage est soumis à une densité volumique de force du type $\rho_b g \underline{e_1}$ qui peut s'écrire comme $-\underline{\nabla} V$ où $V = -\rho_b g x_1$ est le potentiel de pesanteur.

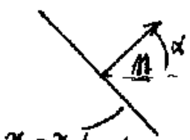
Écrivons les équations et conditions limites du problème.

▷ Les équations

- on a l'équilibre local : $\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ est un champ statiquement admissible.
- le champ de déformation est relié à σ par la loi de comportement
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}}$$
- le champ de déplacement $\underline{u}$ est quant à lui cinématiquement admissible

▷ Les conditions limites

- sur la face immergée, $\underline{\underline{\sigma}}\cdot(-\underline{e_2}) = \rho_{liquide}\, g\, x_1 \underline{e_2} \Big|_{x_2=0}$
(on pose ici P_{atm} à 0)
- sur la face libre de normale $\underline{n} = \cos\alpha\, \underline{e_2} - \sin\alpha\, \underline{e_1}$, on a



$x_2 = x_1 \tan\alpha$

$$\underline{\underline{\sigma}}\cdot(-\sin\alpha\, \underline{e_1} + \cos\alpha\, \underline{e_2}) = \underline{0} \Big|_{\text{surface libre}}$$

- sur la face en contact $\Big|_{x_1=H}$

Pb régulier de type 1 (base encastrée) unique solution en déplacement et en contraintes

i de développer ces équations et conditions limites dans le cadre des déformations planes

On choisit ici une résolution en contraintes.

les équations de compatibilité, comme les équations de Beltrami, se simplifiant en une seule équation:

rho_béton

$$(1-\nu)\Delta_2 \sigma_{\gamma\gamma} + \rho\, \mathrm{div}_2 f = 0$$

Plutôt que de rechercher chacune des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$, on peut ne rechercher qu'une seule fonction d'Airy χ reliée à $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ par les relations:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} + V \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} + V \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

avec (rho-béton f) = - grad V
soir V = -rho_béton g x_1
V défini à une constante additive près

et χ satisfait l'équation de Beltrami

$$\boxed{\Delta_2(\Delta_2 \chi) + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V = 0}$$

On peut réécrire les conditions limites à l'aide de la fonction d'Airy.

$$\begin{cases} \chi_{,12} = 0 \\ \chi_{,11} + V = -\rho_{liquide}\, g x_1 \end{cases} \quad \text{sur } x_2 = 0$$

$$\begin{cases} -\sin\alpha\,(\chi_{,22}+V) - \cos\alpha\, \chi_{,12} = 0 \\ \sin\alpha\, \chi_{,12} + \cos\alpha\,(\chi_{,11}+V) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } x_2 = x_1 \tan\alpha$$

$\boxed{2}$ On recherche χ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en x_1, x_2:

$$\chi(x_1,x_2) = Ax_1^3 + Bx_1^2x_2 + Cx_1x_2^2 + D\,x_2^3 + Ex_1^2 + Fx_1x_2 + Gx_2^2 + Hx_1 + Ix_2 + J$$

Réécrivons l'équation de Beltrami avec cette forme:

- on a $\Delta V = 0$
- $\Delta\chi = 6Ax_1 + 2Bx_2 + 2E + 2Cx_1 + 6Dx_2 + 2G$
- $\Delta(\Delta\chi) = 0 \quad \rightarrow$ équation de Beltrami ok.

$$\sigma_{11} = \chi_{,22} + V = 2Cx_1 + 6Dx_2 + 2G - \rho_b g x_1$$

$$\sigma_{22} = \chi_{,11} + V = 6Ax_1 + 2Bx_2 + 2E - \rho_b g x_1$$

$$\sigma_{12} = -\chi_{,12} = -(2Bx_1 + 2Cx_2 + F)$$

les conditions limites deviennent alors:

$$2Bx_1 + 2Cx_2 + F = 0\,\Big|_{x_2=0} \rightarrow 2Bx_1 + F = 0 \quad \forall x_1$$

$$6Ax_1 + 2Bx_2 + 2E - \rho_b g x_1 = -\rho_{liquide}\, g x_1\Big|_{x_2=0} \rightarrow \underbrace{6Ax_1 + 2E + (\rho_{liquide} - \rho_b) g x_1}_{=0\ \forall x_1}$$

on en déduit $B=0$, $F=0$, $E=0$ et $A = \dfrac{\rho_b - \rho_{liquide}}{6} g$

d'où $\boxed{\sigma_{22} = -\rho_{liquide}\, g x_1}$

De même, on a sur la face libre:

• $-\sin\alpha\left(2Cx_1+6Dx_2+2G-\rho_b g x_1\right)-\cos\alpha \times \left(\underbrace{2Bx_1}_{0}+2Cx_2+\underbrace{F}_{0}\right)=0$ en $x_2=x_1\tan\alpha$

donc $-\sin\alpha\left(2Cx_1+6Dx_1\tan\alpha+2G-\rho_b g x_1\right)-\cos\alpha\times 2Cx_1\tan\alpha=0$

pour tout x_1. Ainsi :

$$4Cx_1+6Dx_1\tan\alpha+2G-\rho_b g x_1=0 \quad \forall x_1$$

donc $G=0$ et $4C+6D\tan\alpha=\rho_b g$

• $\sin\alpha\left(\underbrace{2Bx_1}_{0}+2Cx_2+\underbrace{F}_{0}\right)+\cos\alpha\left(-\rho_{liquide}\, g\, x_1\right)=0$ sur $x_2=x_1\tan\alpha$

donc $\tan\alpha\times 2Cx_1\tan\alpha=\rho_{liquide}\, g\, x_1$

d'où $$\boxed{C=\frac{\rho_{liquide}\, g}{2\tan^2\alpha} \quad \text{et} \quad D=\frac{\rho_b g}{6\tan\alpha}-\frac{\rho_{liquide}\, g}{3\tan^3\alpha}}$$

on a alors

$$\sigma_{11}=\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^2\alpha}x_1+\frac{\rho_b g}{\tan\alpha}x_2-2\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^3\alpha}x_2-\rho_b g x_1$$

et $$\sigma_{12}=-\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^2\alpha}x_2$$

non demandé dans notre énoncé

$\boxed{3}$ La réaction du sol sur le barrage prend la forme

$$\vec{R}_{sol\to barrage}=\int \vec{df}_{sol\to barrage} \quad \text{où} \quad \vec{df}_{sol\to barrage}=\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e_1}\Big|_{x_1=H}$$

Soit $$\vec{df}_{sol\to barrage}=\left(\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^2\alpha}H+\frac{\rho_b g}{\tan\alpha}x_2-2\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^3\alpha}x_2-\rho_b gH\right)\underline{e_1}-\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^2\alpha}x_2\,\underline{e_2}$$

critère n°1 : fissuration

Pour éviter le soulèvement, on doit avoir :

$$\frac{\rho_{liquide}}{\tan^2\alpha}gH+\frac{\rho_b g}{\tan\alpha}x_2-2\frac{\rho_{liquide}\, g}{\tan^3\alpha}x_2-\rho_b gH<0 \quad \forall x_2$$

ceci sera garanti si

$$\boxed{\begin{cases}\rho_{liquide}<\rho_b\tan^2\alpha & (\text{valeur en } x_2=0)\\ \cancel{\rho_b\tan^2\alpha<2\rho_{liquide}} & \cancel{(\text{pente négative})}\end{cases}}$$ inutile

⚠ En $x_2=H\tan\alpha$ (au bout du barrage), $\underline{df}\cdot\underline{e_1}=-\frac{\rho_{liquide}\, gH}{\tan^2\alpha}$ est toujours négatif.

A.N. : si on prend $\rho_{liquide}=1000\ kg.m^{-3}$ et $\rho_{béton}=2500\ kg.m^{-3}$ on obtient $\alpha_{critique}=0.564$ soit $32.3°$.

critère n°2 : basculement rigide

on montre (statique des fluides) que la résultante des forces de pression est $\frac{1}{2}\rho gH^2$ et que son point d'application est en $(x_1,x_2)=\left(\frac{2}{3}H,0\right)$. Le moment résultant de cette force au point B est donc

$$\left(-H\tan\alpha\,\underline{e_2}-\frac{1}{3}H\underline{e_1}\right)\wedge\frac{1}{2}\rho gH^2\underline{e_2}=-\frac{1}{6}\rho gH^3\underline{e_3}$$

Le moment résultant des forces élastiques au point B s'écrit quant à lui :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{BM}\wedge d\vec{f} = \int_{x_2=0}^{x_2=H\tan\alpha} (H\tan\alpha - x_2)\,\underline{e_2}\wedge\left(\frac{\rho_{liquide}\, g H}{\tan^2\alpha} + \frac{\rho_b g x_2}{\tan\alpha} - 2\frac{\rho_{liquide}\, g\, x_2}{\tan^3\alpha} - \rho_b g H\right)\underline{e_1}\; dx_2$$

$$= \left(+\frac{1}{3}\rho_b\, g H^3\tan^2\alpha - \frac{1}{6}\rho_\ell\, g H^3\right)\underline{e_3}$$

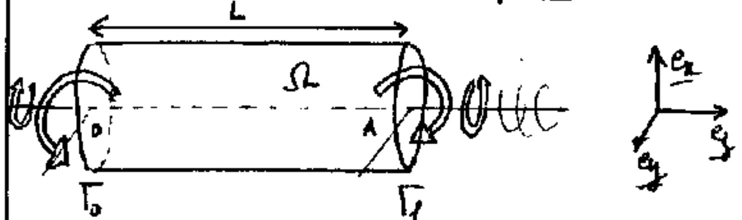
Il n'y a pas basculement rigide tant que le moment total reste positif, soit tant que

$$\frac{1}{3}\rho_b\, g H^3\tan^2\alpha - \frac{1}{3}\rho_\ell\, g H^3 > 0$$

ou $\boxed{\rho_\ell < \rho_b \tan^2\alpha}$ on retrouve le même critère que précédemment

TD n°3 : TORSION, FLEXION Et Principe de Superposition

Problème : Torsion-Flexion composée



On considère la déformation d'un arbre Ω constitué d'un matériau homogène élastique isotrope caractérisé par le module d'Young E et coefficient de Poisson ν.
À ses deux extrémités, l'arbre est soumis à des efforts surfaciques $\underline{t_0}$ et $\underline{t_L}$ dont les torseurs se réduisent à :

$$\{T_{ext}\to\Gamma_0, O\} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -M^t \underline{e_z} + M^f \underline{e_y} \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{ext}\to\Gamma_\ell, A\} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ +M^t \underline{e_z} - M^f \underline{e_y} \end{Bmatrix}$$

Partie 1 : Equations du problème

1 Déterminer les efforts surfaciques t_0^f et t_L^f portés par e_z, linéaires en x, qui permettent de retrouver les conditions de chargement en flexion.