Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 11 mai 2015

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner la Formule de Moivre. (*Attention à bien préciser les hypothèses*)
2. Enoncez le théorème fondamental sur la diagonalisation (condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable)
3. Donner la définition de la convergence uniforme sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'une suite de fonctions f_n vers une fonction f, où $f_n, f : I \to \mathbb{R}$.
4. Donnez la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donnez le développement en série entière de $f(x) = e^x$ et prècisez son rayon de convergence.

Exercice 1

On considère le système différentiel linéaire, à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ y' &= x + 4y \end{cases}$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions réelles inconnues.

1. Ecrire le système différentiel précédent sous forme matricielle $Y' = AY$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vecteur inconnu de dimension 2, A une matrice carrée 2x2 que l'on précisera.
2. Calculer les valeurs propres de la matrice A. Trouver les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
3. En utilisant la question précédente, trouver deux solutions linéairement indépendantes du système différentiel et en déduire la solution générale du système.

Corrigé

1. La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de l'équation

$$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On trouve :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

dont les solutions sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i est solution de $\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 3 \\ 1 & 4-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$.

Pour $\lambda_1 = 1$, l'espace des vecteurs propres associé est $v_1 + 3v_2 = 0$, d'où $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 5$, l'espace des vecteurs propres associé est $-3v_1 + 3v_2 = 0$, d'où $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable et les deux vecteurs propres forment une base.

3. Pour chaque valeur propre (réelle dans notre cas) et chaque vecteur propre associé on obtient une solution du système homogène de la forme

$$Y_1 = e^t V_1, \quad Y_2 = e^{5t} V_2$$

Les deux solutions forment une base dans l'espace des solutions. La solution générale est donc :

$$Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ constantes quelconques}$$

$$x(t) = 3\alpha e^t + \beta e^{5t}$$
$$y(t) = -\alpha e^t + \beta e^{5t}$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = f(x) \tag{1}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène associée à (1).
2. Déterminer une solution particulière de (1) pour $f(x) = 3e^x + \cos(x)$, en vous inspirant de la forme du second membre. En déduire l'ensemble des solutions réelles de (1) dans ce cas.
3. On considère maintenant le second membre $f(x) = e^x \cos(2x)$.
   i) Peut-on chercher une solution particulière pour (1) de la forme du second membre ? Justifiez votre réponse.
   ii) On souhaite trouver une solution particulière pour (1) avec la méthode de variation des constantes. Préciser le principe de la méthode et le système d'équations vérifié par les fonctions inconnues.
   Résoudre ce système et trouver ensuite une solution particulère rélle, puis déduire l'ensemble des solutions réelles pour l'équation non-homogène (1).

Corrigé

1. L'équation homogène est :

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

dont les solutions sont $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$. La solution générale complexe est :

$$y_h^c(x) = c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

et donc la solution générale réelle a la forme :

$$y_h(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. La solution particulière est de la forme

$$y_p(x) = ae^x + b\cos x + c\sin x$$

avec a, b, c constantes réelles à déterminer par identification en remplaçant y_p de cette forme dans léquation non-homogène. On trouve alors

$$ae^x - b\cos x - c\sin x - 2(ae^x - b\cos x + c\sin x) + 5(ae^x + b\cos x + c\sin x) = 3e^x + \cos x$$

d'où $a = 3/4$, $b = 1/5$, $c = -1/10$.
La solution particulière est donc : $y_p = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x$, d'où la solution générale :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x + \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x$$

3. i) Le second membre étant cette-fois ci une des solutions de l'équation homogène (voir question 1). On peut chercher une solution particulière soit par la méthode des coefficients indéterminés :

$$y_p(x) = xy_h(x) = x(Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x)$$

avec A et B coefficients à déterminer par identification . On trouve $A = 0$, $B = 1/4$.

ii) Principe de la méthode : on cherche une solution particulière de la forme inspirée par la solution de l'équation homogène, dans laquelle les constantes deviennent des variables, $A = A(x)$, $B = B(x)$, que l'on déterminera par la suite.

$$y_p(x) = A(x)e^x\cos 2x + B(x)e^x\sin 2x$$

Si on note $y_1(x) = e^x\cos 2x$, $y_2(x) = e^x\sin 2x$, y_1, y_2 forment une base pour l'espace des solutions de l'équation homogène.
Les fonctions inconnues $A(x), B(x)$ vérifient le système suivant (résultat général -voir cours) :

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) &= 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) &= f(x) \end{cases}$$

En remplaçant y_1, y_2 et $f(x)$, on trouve le système :

$$\begin{cases} A'(x)e^x\cos 2x + B'(x)e^x\sin 2x &= 0 \\ A'(x)(-2e^x\sin 2x) + B'(x)(2e^x\cos 2x) &= e^x\cos 2x \end{cases}$$

Le déterminant du système est précisément le Wronskien $W(y_1, y_2) \neq 0$ car (y_1, y_2) sont linéairement indépendantes. On vérifie :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x & e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0$$

Le système est un système de Cramer, avec solution unique donnée par :

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\frac{e^x\sin 2xe^x\cos 2x}{2e^{2x}} = -\frac{\sin 2x\cos 2x}{2} = -\frac{\sin 4x}{4}$$

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\frac{(e^x\cos 2x)^2}{2e^{2x}} = \frac{(\cos 2x)^2}{2} = \frac{\cos 4x + 1}{4}$$

En intégrant on trouve :

$$A(x) = \frac{\cos 4x}{16} + \mathcal{C}, \quad B(x) = \frac{\sin 4x + 4x}{16} + \mathcal{C}$$

d'où, en prenant la constante $\mathcal{C} = 0$, on trouve :

$$y_p(x) = e^x \frac{\cos 4x \cos 2x + (\sin 4x + 4x) \sin 2x}{16}$$

et

$$y(x) = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{\cos 4x \cos 2x + (\sin 4x + 4x) \sin 2x}{16})$$

Exercice 3

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$? Justifier votre réponse. Exprimer avec une fonction usuelle :

$$f(x) = 3\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}\right).$$

2. Soit l'équation différentielle $g' = 2(3-g)$, avec la condition initiale $g(0) = 0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{si } -R < x < R.$$

Déterminer les coefficients a_n et exprimer simplement g.

Corrigé

III. Série entière

1. Le critère de d'Alembert donne :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$ converge absolument pour tout réel x. On sait par ailleurs que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 3\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}\right) = 3\left(1 - e^{-2x}\right).$$

2. Soit l'équation différentielle $g' = 2(3-g)$, avec la condition initiale $g(0) = 0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{si } |x| < R$$

On a alors :

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^n,$$

donc :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad g'(x) + 2g(x) - 6 = (a_1 + 2a_0 - 6) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + 2a_n) x^n = 0,$$

ce qui donne un système d'inconnues $(a_n)_{n\geq 0}$. Puisque $g(0) = 0$, on a $a_0 = 0$. La première équation donne : $a_1 = 6 = -3 \times \frac{(-2)^1}{1!}$. On obtient ensuite : $a_2 = -a_1 = -3\frac{(-2)^2}{2!}$, puis $a_3 = -\frac{2}{3}a_2 = -3\frac{(-2)^3}{3!}$ etc. Finalement, on a $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$: $a_n = -3\frac{(-2)^n}{n!}$. Ainsi :

$$g(x) = -3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = 3\left(1 - e^{-2x}\right).$$

On retrouve la fonction de la question précédente. En particulier, l'égalité est valable pour tout réel x.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathcal{R}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ vérifiant :

$$\forall x < R \quad f(x) - xf(\lambda x) = 1.$$

1. Déterminer a_0 et a_1 .
2. Ecrire une rélation de récurrence entre a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$ et montrer que pour $n \geqslant 2$, $a_n = \lambda^{n(n-1)/2}$.
3. *Question bonus :* On note désormais f_λ la série entière utilisant les coefficients a_n déterminés ci-dessus et R_λ son rayon de convergence. Déterminer R_λ en fonction de λ.
Remarque : Pour certains λ il est possible d'obtenir $R_\lambda = 0$, ce qui signifie qu'il ne peut alors pas exister de série f vérifiant les premières lignes de l'énoncé.
4. *Question bonus :* Exprimer f_1 et f_{-1} en fonction d'une fraction rationnelle.

Corrigé

1. On remplace $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans l'équation :
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n x^n = 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n \lambda^n) x^{n+1} + a_0 = 1$$
Par unicité du développement d'une série entière on obtient :
$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_0 \lambda^0 = 1$$
2. Pour $n \geqslant 2$ on a la relation de récurrence :
$$a_{n+1} - a_n \lambda^n = 0$$
d'où :
$$a_n = a_{n-1}\lambda^{n-1} = a_{n-2}\lambda^{n-2}\lambda^{n-1} = ... = a_1 \lambda^{1+2+...+(n-1)} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
3. (Bonus) Pour déterminer le rayon de convergence on utilise la règle de d'Alembert. On calcule
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\lambda^n|$$
Si $|\lambda| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ et $R_\lambda = \infty$. Si $|\lambda| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = \infty$ et $R_\lambda = 0$.
Si $\lambda = \pm 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^n = 1$ et $R_\lambda = 1$
4. (Bonus) Si $\lambda = 1$ alors $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(a_n = 1)$. Il s'agit d'une série géométrique connue
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
Si $\lambda = -1$ alors $f_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n$.
On observe que :
$$f_{-1} = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + ... = (1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...) + (x - x^3 + x^5 - x^7 + ...) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} + x\frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x}{1+x^2}$$