

Table des matières

1	Éléments de calcul tensoriel	3
1.1	Définitions générales	4
1.1.1	Tenseurs d'ordre 1	4
1.1.2	Produit tensoriel	4
1.1.3	Contraction d'un tenseur selon un couple d'indice	4
1.2	Tenseurs d'ordre 2	4
1.2.1	Matrice d'un tenseur d'ordre 2	5
1.2.2	Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2	5
1.2.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur	6
1.2.4	Contractions de deux tenseurs d'ordre 2	7
1.2.5	Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2	7
1.2.6	Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur	7
1.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2	8
1.4	Calcul différentiel sur les tenseurs	8
1.4.1	Gradient d'un champ de tenseurs	9
1.4.2	Divergence d'un champ de tenseurs	10
1.5	Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs	11
1.5.1	coordonnées cartésiennes orthonormées	11
1.5.2	coordonnées cylindriques	11
1.5.3	coordonnées sphériques	13
2	Descriptions du mouvement des milieux continus	15
2.1	Introduction	15
2.2	Description Lagrangienne	16
2.2.1	Définition	16
2.2.2	Vitesse et accélération lagrangiennes	18
2.3	Approche eulérienne du mouvement	18
2.3.1	Définition	19
2.3.2	Lignes de courant	20
2.3.3	Mouvements permanents (ou stationnaires)	20
3	Tenseurs de déformation	23
3.1	Tenseurs de déformation en transformation finie	23
3.1.1	Transport des vecteurs matériels	23
3.1.2	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green	24
3.1.3	Déformation de Green-Lagrange	25
3.1.4	Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange	26

3.2	Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé	27
3.2.1	Hypothèse de petites perturbations (HPP) - Définition	27
3.2.2	Condition de compatibilité géométrique	28
3.2.3	Forme générale des solutions du problème 3.23	30
3.2.4	Bref commentaires sur les mesures de déformation	31
3.2.5	Annexe : Rotation infinitésimale	31
4	Cinématique des milieux continus - Taux de déformation	33
4.1	Taux de déformation volumique	33
4.2	Tenseur taux de déformation	34
4.3	Dérivées particulières d'un champ	35
4.3.1	Définition	35
4.3.2	Application au calcul de l'accélération eulérienne	36
4.3.3	Conservation de la masse	37
4.4	Dérivées particulières d'une intégrale de volume	37
4.4.1	Formulation et application à la conservation de la masse	37
4.4.2	Une 2e application : la conservation de la quantité de mouvement .	38
4.5	Annexe : expression de l'accélération	39
5	Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel	41
5.1	Modélisation des efforts extérieurs	41
5.2	Lemme du tétraèdre	43
5.3	Tenseur des contraintes de Cauchy	45
5.3.1	Définition et interprétation physique	45
5.3.2	Equation d'équilibre	46
5.3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	46
5.3.4	Discontinuités du champ de contraintes	47
5.4	Dualisation de l'équation de la dynamique	47
5.4.1	Théorème des puissances virtuelles	47
5.4.2	Théorème des travaux virtuels	48
5.4.3	Puissance et travail des efforts extérieurs dans le mouvement réel .	49
6	Comportement élastique du solide tridimensionnel	51
6.1	Comportement élastique en condition isotherme	51
6.2	Comportement élastique linéaire	52
6.3	Comportement élastique linéaire isotrope	54
6.4	Définition du chargement	56
6.5	Equations et méthode de résolution en déplacement des problèmes d'élasticité 3D	58
6.5.1	Définition de la solution d'un problème d'élasticité et méthodes . .	58
6.5.2	Méthode de résolution par les déplacements	59
6.5.3	Expérience de traction simple	60
6.6	Annexe : Méthode de résolution par les contraintes	62
7	Introduction à la Mécanique des Fluides	63

Chapitre 1

Eléments de calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus (MMC) introduit dans ses concepts, outre des scalaires et des vecteurs, des éléments d'algèbre linéaire tels les formes multilinéaires. Ces objets mathématiques, que l'on désigne par le terme de "tenseurs" y jouent un rôle primordial. De manière générale, l'utilisation des tenseurs découle de la nécessité de décrire les phénomènes physiques sous une forme indépendante du système de coordonnées. L'objectif visé dans ce chapitre est, sans souci de formalisme mathématique, de donner les connaissances élémentaires suffisantes pour l'utilisation du calcul tensoriel en mécanique des milieux continus. Le choix délibéré fait est le suivant :

- L'espace considéré euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire,
 - On n'utilisera que des bases orthonormées et les coordonnées cartésiennes associées. Dans cette optique, l'écriture en notation intrinsèque permettra de généraliser les diverses relations que l'on établira.
- Les calculs en coordonnées spatiales curvilignes nécessiteraient un formalisme plus général pour lequel le lecteur est renvoyé à des ouvrages spécialisés.

On se limite donc ici à une présentation succincte des notions de calcul tensoriel nécessaires pour l'étude des milieux continus abordés dans cet enseignement (solide élastique tridimensionnel, fluides newtoniens, etc.).

convention d'Einstein :

On munit E d'une base orthonormée (\underline{e}_i) ($1 \leq i \leq p$) et l'on note u_i la i -ième composante du vecteur \underline{u} . Sauf mention explicite du contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, dite convention d'Einstein : si un même indice figure 2 fois dans une expression, il y a sommation sur cet indice.

exemples :

Le vecteur \underline{u} peut s'écrire $u_i \underline{e}_i$.

Le produit scalaire $\underline{a} \cdot \underline{b}$ peut s'écrire $a_i b_i$.

Considérons maintenant l'écriture suivante : $a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, 3$. Elle représente un système de 3 équations (i prenant distinctement les valeurs 1 ou 2 ou 3) à trois inconnues (sommation sur j , pour chaque i fixé). L'indice i qui spécifie ici un terme particulier, s'appelle un indice libre ou franc. On notera que dans l'écriture précédente, la dénomination de l'indice, j , appelé indice muet ou de sommation, est sans importance. On aurait pu remplacer cet indice par un autre (par exemple k). On voit sur cet exemple apparaître une règle générale. Dans les deux membres d'une égalité, on doit trouver, dans chaque monôme, le même nombre d'indices libres désignés par les mêmes lettres. Ceci

permet de vérifier rapidement la cohérence des équations.

Cette convention, également appelée convention de l'indice muet, permet d'alléger les écritures des expressions intervenant dans les calculs en Mécanique des Milieux Continus (MMC).

1.1 Définitions générales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle tenseur d'ordre n une forme n -linéaire sur E .

1.1.1 Tenseurs d'ordre 1

Etant de dimension finie, E est isomorphe à son dual E^* . Ainsi, au vecteur \underline{a} , il est possible d'associer la forme linéaire a^* telle que $(\forall \underline{u}) a^*(\underline{u}) = \underline{a} \cdot \underline{u}$. Grâce à cet isomorphisme, on convient d'identifier le vecteur \underline{a} et la forme linéaire a^* , de sorte que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs d'ordre 1. Par convention, ils sont notés par une lettre soulignée une fois.

1.1.2 Produit tensoriel

Etant donnés deux tenseurs \mathcal{T} et \mathcal{T}' d'ordres respectifs p et q , on appelle produit tensoriel de \mathcal{T} et \mathcal{T}' et l'on note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ le tenseur d'ordre $p + q$ défini par :

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p) \mathcal{T}'(\underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) \quad (1.1)$$

L'extension au produit tensoriel de n tenseurs est immédiate. Ainsi, on appelle produit tensoriel des n vecteurs \underline{a}_i le tenseur d'ordre n suivant :

$$\underline{a}_1 \otimes \dots \otimes \underline{a}_n(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{u}_1) \times \dots \times (\underline{a}_n \cdot \underline{u}_n) \quad (1.2)$$

1.1.3 Contraction d'un tenseur selon un couple d'indice

Soit \mathcal{T} un tenseur d'ordre p . On appelle contraction de \mathcal{T} selon ses deux derniers indices le tenseur \mathcal{T}^c d'ordre $p - 2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^c(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}, \underline{e}_i, \underline{e}_i) \quad (1.3)$$

On vérifie sans peine que cette définition est indépendante du choix de la base (\underline{e}_i) . En modifiant la place des \underline{e}_i dans le p -uplet, il est évidemment possible de contracter \mathcal{T} selon un couple arbitraire d'indices.

A titre d'exemple, la contraction du produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ selon ses deux indices n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs :

$$\underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b} \quad (1.4)$$

1.2 Tenseurs d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 sont les formes bilinéaires sur E . On convient de souligner 2 fois la lettre désignant un tenseur d'ordre 2.

1.2.1 Matrice d'un tenseur d'ordre 2

La matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base (\underline{e}_i) est une matrice carrée de terme général

$$T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad (1.5)$$

où $\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ est le scalaire obtenu en appliquant la forme bilinéaire $\underline{\underline{T}}$ au couple de vecteurs $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. En vertu de la linéarité de $\underline{\underline{T}}$ par rapport à chacun de ses arguments, on note que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(u_i \underline{e}_i, v_j \underline{e}_j) = T_{ij} u_i v_j \quad (1.6)$$

On note $\underline{\underline{\delta}}$ le tenseur dont la matrice a pour terme d'indice ij le symbole de Kronecker δ_{ij} . D'après (1.6), le tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{\delta}}(\underline{u}, \underline{v}) = \delta_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (1.7)$$

${}^t \underline{\underline{T}}$ désigne le transposé du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini de la façon suivante :

$${}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) \quad (1.8)$$

On observe que les matrices de $\underline{\underline{T}}$ et ${}^t \underline{\underline{T}}$ sont transposées l'une de l'autre.

Le produit tensoriel des deux vecteurs \underline{a} et \underline{b} , noté $\underline{a} \otimes \underline{b}$, constitue un exemple important de tenseur d'ordre 2. Conformément à la définition (1.2), on a :

$$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v}) \quad \underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.9)$$

Il résulte immédiatement de (1.5) que le terme général de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est égal à $a_i b_j$. En particulier, le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ est le scalaire $\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}$.

Partant de (1.6) et compte tenu de (1.9), nous obtenons :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = T_{ij} u_i v_j = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.10)$$

La famille des produits tensoriels $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ constitue donc une base de l'espace des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.11)$$

1.2.2 Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2

Au tenseur $\underline{\underline{T}}$, on associe l'endomorphisme T de même matrice. On a donc :

$$T(\underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \quad (1.12)$$

On vérifie alors sans peine que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \quad (1.13)$$

On définit par ce procédé un isomorphisme de l'espace des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel E. Cet isomorphisme permet d'étendre aux tenseurs certains concepts propres aux endomorphismes, tels que l'inverse, le déterminant, la trace ...

Lorsque T est inversible, on appelle inverse du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\underline{\underline{T}}^{-1}$, le tenseur

associé à l'endomorphisme T^{-1} .

On appelle déterminant (resp. trace) du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\det \underline{\underline{T}}$ (resp. $\text{tr} \underline{\underline{T}}$) le déterminant (resp. la trace) de l'endomorphisme associé :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det T \quad ; \quad \text{tr} \underline{\underline{T}} = \text{tr} T \quad (1.14)$$

On remarque que l'endomorphisme associé au tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ (voir (1.7)) n'est autre que l'identité de l'espace vectoriel.

1.2.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur

On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et \underline{v} et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le vecteur¹ obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}$ selon les deux derniers indices². En utilisant l'équivalence vecteur-tenseur d'ordre 1 et la définition (1.3), on obtient :

$$(\forall \underline{u}) \quad \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}(\underline{u}) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}(\underline{u}, \underline{e}_j, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{e}_j) \underline{v} \cdot \underline{e}_j = u_i T_{ij} v_j = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \quad (1.15)$$

Il en résulte que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = T(\underline{v}) \quad (1.16)$$

En comparant (1.13) et (1.15), on observe en outre que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.17)$$

Par exemple, dans le cas particulier $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$, (1.17) s'écrit

$$(\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.18)$$

On en déduit que

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.19)$$

On appelle produit contracté de \underline{v} et de $\underline{\underline{T}}$ et l'on note $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}$ le vecteur obtenu en contractant $\underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les deux premiers indices :

$$(\forall \underline{u}) \quad (\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_i, \underline{u}) = v_i \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{u}) = v_i T_{ij} u_j = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.20)$$

L'application de (1.17) à ${}^t \underline{\underline{T}}$ donne

$${}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot ({}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.21)$$

En utilisant ce résultat dans (1.20), on a finalement :

$$\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} = {}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} \quad (1.22)$$

On déduit au passage de (1.19) et de (1.22) que

$$\underline{v} \cdot \underline{a} \otimes \underline{b} = (\underline{v} \cdot \underline{a}) \underline{b} \quad (1.23)$$

En rapprochant (1.17) et (1.22), on observe que l'on a :

$$\underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = {}^t \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = \underline{v} \cdot ({}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.24)$$

En définitive, l'ordre des parenthèses étant indifférent, on choisit de noter $\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le scalaire $\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v})$:

$$\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.25)$$

¹resp. le tenseur d'ordre 1

²De fait, il s'agit d'une convention conforme, en raisonnant en composantes, au produit de la matrice de $\underline{\underline{T}}$ par le vecteur colonne de \underline{v} .

1.2.4 Contractions de deux tenseurs d'ordre 2

Soient $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ deux tenseurs d'ordre 2 associés respectivement aux endomorphismes T et T' . On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}$ selon les indices 2 et 3. On a donc

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_k, \underline{e}_k, \underline{e}_j) = T_{ik}T'_{kj} \quad (1.26)$$

La matrice de $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ ayant pour terme d'indice ij le scalaire $T_{ik}T'_{kj}$, $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$ est donc le tenseur associé à l'endomorphisme $T \circ T'$. En particulier, étant associé à l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel, le produit $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} \quad (1.27)$$

$\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}^{-1}$ sont donc inverses pour le produit contracté des tenseurs d'ordre 2.

À titre d'exemple, considérons le produit contracté des tenseurs $\underline{a} \otimes \underline{b}$ (terme général $a_i b_j$) et $\underline{c} \otimes \underline{d}$ (terme général $c_i d_j$). D'après (1.26), le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d}$ est $a_i b_k c_k d_j$, soit $(\underline{b} \cdot \underline{c}) a_i d_j$. On a donc :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d} = (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \otimes \underline{d} \quad (1.28)$$

1.2.5 Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2

On appelle produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T'}}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}}$ le scalaire obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}$ selon les couples d'indices (2,3) et (1,4) :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}} = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T'}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_j, \underline{e}_i) = T_{ij}T'_{ji} \quad (1.29)$$

On observe que $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}}$ n'est autre que la trace du produit contracté $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}}$. La double contraction des tenseurs d'ordre 2 est donc une opération commutative :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T'}} = \text{tr} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T'}} = \underline{\underline{T'}} : \underline{\underline{T}} \quad (1.30)$$

1.2.6 Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur

On considère une fonction scalaire ψ de la variable tensorielle $\underline{\underline{T}}$. On suppose que ψ est dérivable par rapport aux composantes T_{ij} . On a donc :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} dT_{ij} \quad (1.31)$$

On pose

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.32)$$

Avec cette notation, (1.31) s'écrit encore

$$d\psi = \frac{{}^t \partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} : d\underline{\underline{T}} \quad (1.33)$$

Ceci constitue la définition intrinsèque de la dérivée de ψ par rapport à $\underline{\underline{T}}$.

1.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2

Soit \mathbb{C} un tenseur d'ordre 4. On pose

$$C_{ijkl} = \mathbb{C}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l) \quad (1.34)$$

Avec le même raisonnement qu'en (1.11), on obtient :

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (1.35)$$

Le produit doublement contracté $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ est défini comme la contraction de $\mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les couples d'indices (4,5) et (3,6). C'est donc un tenseur d'ordre 2. Le terme d'indice ij de la matrice de $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ vaut :

$$\underline{e}_i \cdot (\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{e}_j = \mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l, \underline{e}_l, \underline{e}_k) = C_{ijkl} T_{lk} \quad (1.36)$$

de sorte que

$$\mathbb{C} : \underline{\underline{T}} = C_{ijkl} T_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.37)$$

On définit également le produit doublement contracté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}$. C'est le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant le tenseur $\underline{\underline{T}} \otimes \mathbb{C}$ selon les couples d'indices (1,4) et (2,3). On obtient sans peine :

$$\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = T_{lk} C_{kl ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.38)$$

Notons que l'égalité $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ n'a lieu que si la matrice du tenseur \mathbb{C} possède la propriété de symétrie $C_{kl ij} = C_{ijkl}$.

On dispose enfin de l'identité suivante :

$$(\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}) : \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}} : (\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}') = T_{ji} C_{ijkl} T'_{lk} \quad (1.39)$$

L'ordre des parenthèses étant indifférent, le scalaire ci-dessus pourra être noté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}'$.

Remarque : Outre la définition intrinsèque des tenseurs (forme multilinéaire), un autre moyen dont on dispose pour vérifier la tensorialité d'un objet à partir de ses composantes est qu'il vérifie des règles de changement de base qui seront évoquées dans la présentation orale de cet enseignement. On pourra à titre d'exercice, vérifier que les tenseurs introduits à l'aide des diverses opérations satisfont bien aux règles de changement de base appropriées.

1.4 Calcul différentiel sur les tenseurs

En mécanique des milieux continus, les tenseurs sont en général fonction des variables d'espace et de temps. On est donc en présence de champs tensoriels.

La dérivation de ces champs par rapport aux variables d'espace conduit à l'introduction d'opérateurs aux dérivées partielles tels que le gradient, la divergence, le laplacien, le rotationnel.

On suppose que tous les champs tensoriels considérés par la suite sont suffisamment réguliers pour que toutes les expressions écrites aient un sens. De même, on suppose désormais que la base (\underline{e}_i) est *cartésienne* et orthonormée.

1.4.1 Gradient d'un champ de tenseurs

On considère pour commencer un champ de vecteurs³, c'est-à-dire une application $\underline{X} \rightarrow \underline{\Phi}(\underline{X})$. On suppose que les composantes Φ_i sont différentiables. On a donc

$$d\underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \right) \cdot d\underline{X} \quad (1.40)$$

Il existe donc un tenseur d'ordre 2 reliant les différentielles $d\underline{X}$ et $d\underline{\Phi}$. Il sera noté $\underline{\nabla} \underline{\Phi}$ ⁴ :

$$d\underline{\Phi} = \underline{\nabla} \underline{\Phi} \cdot d\underline{X} \quad (1.41)$$

D'après (1.40), on a

$$\underline{\nabla} \underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.42)$$

(1.41) constitue la définition intrinsèque du gradient de $\underline{\Phi}$. Elle permet notamment de déterminer $\underline{\nabla} \underline{\Phi}$ dans un système de coordonnées non nécessairement cartésien orthonormé. A titre d'exemple, calculons le gradient du champ de vecteurs \underline{e}_r en coordonnées cylindriques. On remarque d'abord que l'on a $d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta$. Puis l'on écrit la différentielle $d\underline{X}$ en fonction des différentielles des coordonnées cylindriques :

$$d\underline{X} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z \quad (1.43)$$

On en déduit que $r d\theta = \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X}$ dont on tire finalement

$$d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta = \frac{1}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X} \Rightarrow \underline{\nabla} \underline{e}_r = \frac{1}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (1.44)$$

Soit à présent $\underline{X} \rightarrow \underline{\mathcal{T}}(\underline{X})$ un champ de tenseurs d'ordre p . L'égalité (1.40) se généralise immédiatement sous la forme suivante :

$$d\underline{\mathcal{T}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \right) \cdot d\underline{X} \quad (1.45)$$

Le gradient $\underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}}$ reliant linéairement les différentielles $d\underline{X}$ et $d\underline{\mathcal{T}}$ est donc un tenseur d'ordre $p+1$. Il est défini de façon intrinsèque par

$$d\underline{\mathcal{T}} = \underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}} \cdot d\underline{X} \quad (1.46)$$

et dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées par

$$\underline{\nabla} \underline{\mathcal{T}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{T}}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \quad (1.47)$$

³resp. de tenseurs d'ordre 1

⁴On utilisera le cas échéant la notation $\underline{\underline{grad}} \underline{\Phi}$

1.4.2 Divergence d'un champ de tenseurs

On considère un champ de tenseurs \mathcal{T} d'ordre $p \geq 1$. On appelle divergence de \mathcal{T} , et l'on note $\operatorname{div} \mathcal{T}$, la contraction de $\nabla \mathcal{T}$ selon ses deux derniers indices. $\operatorname{div} \mathcal{T}$ est donc un tenseur d'ordre $p - 1$.

Dans le cas d'un champ de vecteurs, on déduit de (1.4) et de (1.42) que

$$\operatorname{div} \underline{\Phi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} \quad (1.48)$$

En coordonnées non cartésiennes orthonormées, on utilisera la définition intrinsèque. Ainsi, d'après (1.4) et (1.44), nous obtenons immédiatement $\operatorname{div} \underline{e}_r = 1/r$.

Dans le cas d'un champ de tenseurs d'ordre 2, le gradient est un tenseur d'ordre 3. D'après (1.11) et (1.47), on a en effet

$$\underline{\nabla T} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial X_k} \otimes \underline{e}_k = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \quad (1.49)$$

La contraction d'un produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}$ selon les indices 2 et 3 est égale, par définition, à $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c}$ et vaut donc $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ (voir section 1.2.3 et (1.19)). On a donc

$$\operatorname{div} \underline{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k} \underline{e}_i \delta_{jk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \underline{e}_i \quad (1.50)$$

1.5 Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs

1.5.1 coordonnées cartésiennes orthonormées

coordonnées

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans la base orthonormée $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{OM} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$$

fonction scalaire

$$f = f(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_i \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

champ de tenseurs d'ordre 2

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

1.5.2 coordonnées cylindriques

coordonnées

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$$

$$d\underline{M} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z$$

$$d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta ; d\underline{e}_\theta = -\underline{e}_r d\theta ; d\underline{e}_z = 0$$

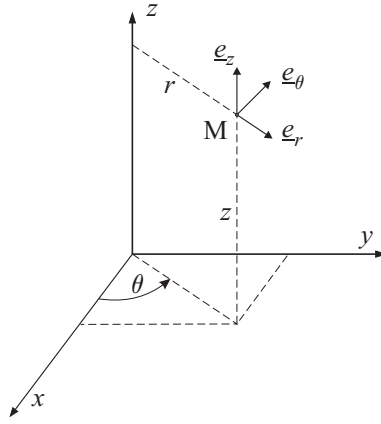


FIG. 1.1 – coordonnées cylindriques.

fonction scalaire

$$f = f(r, \theta, z)$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_z \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (\{i, j\} \in (r, \theta, z))$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r \\
&+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \underline{e}_z
\end{aligned}$$

1.5.3 coordonnées sphériques

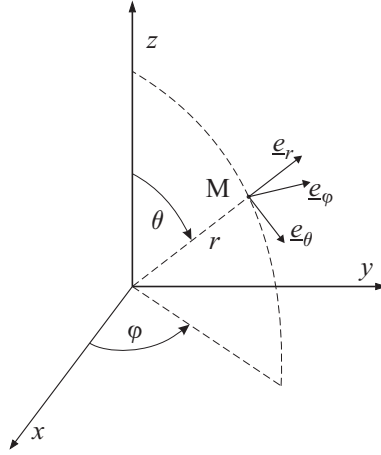


FIG. 1.2 – coordonnées sphériques.

coordonnées

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r$$

$$d\underline{M} = dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_r = d\theta \underline{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_\theta = -d\theta \underline{e}_r + \cos \theta d\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$d\underline{e}_\varphi = -\sin \theta d\varphi \underline{e}_r - \cos \theta d\varphi \underline{e}_\theta$$

fonction scalaire

$$f = f(r, \theta, \varphi)$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi$$

champ de vecteurs

$$\underline{v} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_\varphi \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \cotan \theta v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta v_\theta + v_r \right) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta \frac{v_\theta}{r} + 2 \frac{v_r}{r}$$

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (\{i, j\} \in (r, \theta, \varphi))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cotan \theta) \right) \underline{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cotan \theta + 3T_{r\theta}] \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cotan \theta] \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

Chapitre 2

Descriptions du mouvement des milieux continus

2.1 Introduction

Un corps physique est un ensemble de points matériels qui sont liés par des liaisons internes spécifiques. La matière est discontinue à l'échelle moléculaire et même à une échelle plus grande (p. ex. celles des cristaux d'un métal). Le point de vue de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) est tel que l'on se place à l'échelle d'un élément de volume suffisamment petit pour être traité comme un infiniment petit, et qui pourtant contient un très grand nombre de molécules (de cristaux). A cette échelle d'analyse, dite 'macroscopique', la matière se présente comme un milieu continu, c'est à dire un milieu dans lequel les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre, sauf éventuellement le long de certaines surfaces (de discontinuités). En particulier, on suppose que la distribution de masse est continue et non, comme dans la "réalité", concentrée dans une partie de volume très petite.

La validité de cette hypothèse de continuité dépend évidemment de l'échelle d'observation, donc des volumes appréhendés par les instruments de mesure. Les fluctuations des mesures seront alors appréhendées par leurs moyennes spatiale et temporelle considérées comme indépendantes du nombre de molécules appartenant au volume durant la mesure. C'est cette homogénéité statistique qui justifie en quelque sorte le concept de milieu continu. En général, un appareil appréhendant un volume de $10^{-2}mm \times 10^{-2}mm \times 10^{-2}mm$ pourra être considéré comme fournissant une mesure locale. En effet, les phénomènes observés habituellement en MMC ne subissent pas de variations notables sur une distance de 0.01 mm, à l'exception toutefois de certains phénomènes particuliers (p. ex. onde de choc, zone de cavitation dans un fluide, fissuration de solides etc..). Il est alors judicieux d'assimiler ces zones à des surfaces de discontinuités¹.

Ces restrictions ne doivent pas faire perdre de vue que le schéma 'milieu continu' est un outil très précieux et puissant qui permet de traiter de très nombreux problèmes de mécanique, notamment ceux qui se posent couramment à l'ingénieur. Enfin, la continuité

¹Le milieu lui même peut présenter une hétérogénéité à notre échelle (ex : alliages métalliques composés de monocristaux, milieux granulaires, matériaux composites). Dans ces cas, la particule doit être de taille grande par rapport à la taille moyenne des constituants.

du milieu devant être maintenue au cours de l'évolution de celui-ci, des conditions de régularité mathématique (continuité et différentiabilité) devront être vérifiées par les fonctions qui seront introduites pour la description des mouvements.

Décrire un système matériel c'est identifier, à tout instant t , les particules de ce système. Ceci revient à connaître leurs mouvements. On se propose dans ce chapitre de présenter les deux modes usuels de description du mouvement d'un milieu continu : la description matérielle (Lagrange) et la description spatiale (Euler). On précisera au préalable la notion de configuration d'un système matériel.

2.2 Description Lagrangienne

2.2.1 Définition

La modélisation de milieu continu tridimensionnel consiste à représenter le système mécanique considéré comme un volume de l'espace et à décrire toutes les grandeurs qui s'y rattachent comme des champs définis sur le volume en question. Notons Ω_o le volume qu'occupe le système avant qu'il subisse la transformation que l'on se propose d'étudier. La géométrie du système avant transformation est appelée *configuration initiale* ou *configuration de référence* notée κ_0^2 .

Les constituants élémentaires du système sont des volumes infinitésimaux. On les appelle particules ou points matériels. Etant donné un repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de l'espace affine, chaque point matériel est repéré par sa position \underline{X} dans la configuration initiale κ_0 , dans lequel il occupe le volume $d\Omega_o$.

Pour décrire mathématiquement la transformation, le point de vue dit *lagrangien* consiste à se donner la trajectoire de chacun des points matériels au moyen d'une fonction $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de la position initiale \underline{X} et du temps t :

$$t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (2.1)$$

A t fixé, l'application définie sur Ω_o par

$$\underline{X} \rightarrow \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$

permet de déterminer le domaine Ω_t qu'occupe le milieu continu (ou le système mécanique) dans la configuration à l'instant t (configuration actuelle), notée κ_t . \underline{x} désigne la position dans la configuration Ω_t du point matériel initialement situé en \underline{X} . Pour $t = 0$, on a évidemment $\underline{x} = \underline{X}$, ce qui signifie que l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, 0)$ est l'identité de l'espace affine :

$$\underline{X} = \underline{\phi}(\underline{X}, 0) \quad (2.3)$$

On introduit aussi le déplacement $\xi(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} . Il s'agit du vecteur d'origine \underline{X} et d'extrémité $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$:

$$\xi(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X} = \underline{x} - \underline{X} \quad (2.4)$$

Pour pouvoir calculer les vitesses des points matériels sur leurs trajectoires (2.1), on supposera pour tout \underline{X} que l'application $t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de la variable t est continue et dérivable.

²Dans la suite, Ω_o pourra désigner aussi bien le domaine géométrique ou le volume au sens scalaire

La continuité par rapport à t de cette application est nécessaire pour garantir que les vitesses restent finies.

Pour rendre compte mathématiquement de l'idée que des points matériels infiniment proches le restent, on impose à l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ de (2.2) d'être continue par rapport à la variable \underline{X} . Par ailleurs, pour formaliser le concept intuitif de déformation, on pressent qu'il sera nécessaire de rendre compte des variations locales de la fonction $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$. Une description mathématique précise de celles-ci nécessite la différentiabilité de la fonction en question. On notera que la continuité des dérivées partielles $\partial\phi_i/\partial X_j$ par rapport au temps résulte, pour tout \underline{X} de celle de la fonction $t \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

On note $J(\underline{X}, t)$ le jacobien de la transformation subie par le point matériel \underline{X} entre les instants 0 et t . Il s'agit par définition du déterminant de la matrice jacobienne (de composantes les $\partial\phi_i/\partial X_j$) :

$$J(\underline{X}, t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.5)$$

La propriété (2.3) indique que $J(\underline{X}, 0) = 1$. Dès lors, la continuité en $t = 0$ de l'application $t \rightarrow J(\underline{X}, t)$ impose qu'il existe un intervalle de temps sur lequel

$$\forall \underline{X}, t) \quad J(\underline{X}, t) > 0 \quad (2.6)$$

Sous réserve de cette condition, la formule de changement de variable dans les intégrales multiples fournit l'expression du volume occupé par le système à l'instant t en fonction du jacobien $J(\underline{X}, t)$

$$\Omega_t = \int_{\Omega_o} J(\underline{X}, t) d\Omega_o \quad (2.7)$$

La relation (2.7)³ transcrite au niveau du volume élémentaire se traduit par

$$d\Omega_t = J(\underline{X}, t) d\Omega_o \quad (2.8)$$

Ce résultat permet d'interpréter le jacobien $J(\underline{X}, t)$ comme la dilatation volumique du volume élémentaire entre les configurations initiale et actuelle. La relation (2.8), appelée *formule de transport des volumes élémentaires*, fournit un premier exemple du rôle joué par le gradient de la transformation $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ entre les instants 0 et t dans le calcul des déformations, en l'occurrence volumiques ici.

On a vu que la continuité de $t \rightarrow J(\underline{X}, t)$ par rapport à t imposait la positivité du jacobien dans un certain intervalle. La relation (2.8) montre que l'annulation du jacobien correspondrait géométriquement à la disparition du volume élémentaire. Cet évènement est bien entendu exclue de la modélisation. Les observations qui précèdent font de la transformation du système entre les instants 0 et t une bijection de l'espace affine.

En résumé, les transformations du milieu continu tridimensionnel considérées dans le cadre de la présente modélisation sont définies à chaque instant t par des bijections continues et différentiables de l'espace affine $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, possédant les propriétés (2.3) et (2.6). Par ailleurs, la continuité et la dérivabilité de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ par rapport à t permettent le calcul de la vitesse des points matériels. Il en sera de même pour la continuité et la dérivabilité de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ à l'ordre 2 qui garantira le calcul de l'accélération.

³où l'on a noté de la même façon le domaine géométrique et son volume au sens scalaire

Nota Bene : Pour certaines situations, il apparaît que les hypothèses de continuité doivent être assouplies pour pouvoir inclure dans la modélisation un certain nombre de problèmes d'intérêt pratique : écoulement autour d'obstacle, cavitation dans un milieu fluide, jet de fluide, glissement dans un solide, fissuration d'une structure mécanique, apparition de bandes de cisaillement dans les matériaux, etc.. Ceci conduit à ne retenir pour la modélisation du milieu continu que les hypothèses de continuité et de continue différentiabilité par morceaux. Ce procédé permet d'introduire si nécessaire des surfaces de discontinuités dans la schématisation "milieux continus".

2.2.2 Vitesse et accélération lagrangiennes

Les hypothèses formulées au sujet de la régularité par rapport au temps de l'application (2.1) permettent de définir la vitesse $\underline{U}(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (2.9)$$

(2.9) définit la vitesse comme un champ sur la configuration initiale Ω_o . Celle-ci est dite Lagrangienne.

L'approche Lagrangienne est également dénommée description par trajectoire, celle-ci étant attachée à une particule. Une trajectoire désigne la courbe géométrique déterminée par le lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps.

On définit l'accélération lagrangienne $\underline{\Gamma}(\underline{X}, t)$ à l'instant t du point matériel initialement situé en \underline{X} :

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\underline{X}, t) \quad (2.10)$$

Comme pour la vitesse, (2.10) définit l'accélération comme un champ sur la configuration initiale Ω_o .

Remarque sur la transformation inverse : Notons à présent $\underline{\psi}$ l'inverse de la fonction $\underline{\phi}$ de (2.2) :

$$\underline{x} \rightarrow \underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \quad (2.11)$$

Cette fonction permet de définir la vitesse comme un champ sur la configuration actuelle Ω_t . Plus précisément, la vitesse à l'instant t du point matériel situé à cet instant en \underline{x} est $\underline{u}(\underline{x}, t)$:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{\psi}(\underline{x}, t), t) \quad (2.12)$$

Les applications $\underline{X} \rightarrow \underline{U}(\underline{X}, t)$ et $\underline{x} \rightarrow \underline{u}(\underline{x}, t)$ sont appelées respectivement champs lagrangien et eulérien des vitesses. C'est précisément à la description eulérienne qu'est consacrée la section qui suit.

2.3 Approche eulérienne du mouvement

La description lagrangienne nécessite la connaissance d'une configuration de référence. Elle est bien adaptée à l'étude de nombreux problèmes en mécanique des solides. Si cette

description est la plus naturelle pour paramétrer le mouvement d'un milieu continu, il est évident qu'elle n'est pas la plus adaptée à tous les problèmes. En effet, dans le cas d'un fluide, il est impossible de suivre le mouvement individuel des particules fluides. On ne peut pas plus identifier leur position à un instant de référence. On utilise alors une description Eulérienne du milieu : on regarde ce qui se passe à un endroit donné indépendamment de la particule qui s'y trouve.

2.3.1 Définition

La description eulérienne du mouvement des milieux continus consiste à prendre à chaque instant la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre 2 instants t et $(t + dt)$. Ceci revient, pour l'aspect géométrique, à définir le mouvement par la donnée, à chaque instant t , de la vitesse \underline{u} , que l'on notera aussi \underline{U}_t , de la particule située au point géométrique M dans la configuration actuelle :

$$\underline{U}_t = \underline{U}_t(x, t) \quad (2.13)$$

Ainsi $\underline{U}_t(x, t)$ est bien la vitesse de la particule qui se trouve au point géométrique (\underline{x}) à l'instant t et qui, sauf cas particulier, ne sera plus au même point à un autre instant t' . Comme pour la description lagrangienne, l'approche eulérienne requiert la donnée d'une fonction vectorielle de 4 variables scalaires (dites eulériennes) qui sont les variables d'espace x_1, x_2, x_3 (relatives à la configuration actuelle) et le temps t . Il va de soi que l'on peut définir toute grandeur physique, dans un cadre eulérien sous la forme (par exemple pour une grandeur scalaire) : $B = b_t(x, t)$.

Du fait que les variables (x_1, x_2, x_3) sont des coordonnées spatiales, la description eulérienne est aussi appelée *description spatiale*.

Remarques :

i) Il convient de vérifier que la donnée du *champ de vitesses* $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ permet de bien définir le mouvement du milieu continu (au même titre que la description lagrangienne). Ce qui revient à montrer que la connaissance de $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ permet de déterminer la fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

ii) On a pris pour l'instant le soin de noter $\underline{U}(\underline{X}, t)$ et $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ les vitesses respectivement en variables de Lagrange et en variables eulériennes. On peut se poser maintenant la question des relations qui existent entre les 2 .

Considérons une particule passant au point repéré par le vecteur \underline{x} à l'instant t . Cette particule est en mouvement selon : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t)$. On peut alors écrire : $\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}_t(\underline{x}(\underline{X}, t), t)$. Ce qui peut s'écrire :

$$\left[\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right]_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = \left[\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right]_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = \underline{U}_t(\underline{x}(\underline{X}, t), t).$$

Soit une particule fixée repérée par la variable \underline{X} . Si on omet cette variable dans l'écriture précédente, on a :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{U}_t(\underline{x}, t) \quad (2.14)$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivation par rapport à une fonction du temps seul lorsqu'on suit la particule dans son mouvement.

On obtient ainsi un système différentiel (3 équations à 3 fonctions scalaires x_i de la variable t) auquel on associe la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{X}$. La fonction vectorielle \underline{U}_t étant supposée suffisamment régulière, ce système possède une solution et une seule : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$. Le passage Euler-Lagrange peut donc être réalisé si l'on connaît la configuration initiale.

L'ensemble des trajectoires dans l'espace de toutes les particules constitue une famille de courbes à 3 paramètres (qui sont les coordonnées X_i de M_0). Le système différentiel à résoudre s'écrit :

$$\frac{1}{\underline{U}_{t1}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\underline{U}_{t2}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\underline{U}_{t3}(x_1, x_2, x_3, t)} \frac{dx_3}{dt} = 1 \quad (2.15)$$

Sa solution se met est de la forme $x_i(t) = F_i(c_1, c_2, c_3, t)$.

Pour une particule donnée \underline{X} , la détermination des c_i par la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{X}$ permet d'obtenir la trajectoire (au même titre que la description lagrangienne).

2.3.2 Lignes de courant

Définition 11 : On appelle ligne de courant, à un instant T fixé, une courbe qui en chacun de ses points admet une tangente parallèle au vecteur-vitesse en ce point et à cet instant T .

s étant une abscisse curviligne, l'équation paramétrique de la ligne de courant $x_i = x_i(s)$ est obtenue en considérant que le vecteur vitesse $\underline{U}_t(\underline{x}(s), T)$ est colinéaire à $\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds}$. On obtient alors le système différentiel de 2 équations en x_1, x_2 et x_3 :

$$\frac{1}{\underline{U}_t^1(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\underline{U}_t^2(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{\underline{U}_t^3(\underline{x}(s), T)} \frac{dx_3}{ds} \quad (2.16)$$

qui s'écrit :

$$\frac{dx_1}{\underline{U}_t^1(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_2}{\underline{U}_t^2(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_3}{\underline{U}_t^3(x_1, x_2, x_3, T)} \quad (2.17)$$

Les lignes de courant sont des familles de courbes géométriques à 2 paramètres. Si on choisit par exemple x_3 comme paramètre, alors $x_i = G_i(d_1, d_2, x_3, T)$ pour $i = 1, 2$.

Remarque : Malgré les apparences, les lignes de courant ne doivent pas être confondues avec les trajectoires.

- Le sens physique des deux types de courbes est très différent
- Les systèmes différentiels à résoudre sont également différents : variable temps dans le premier, temps fixé dans le second.

2.3.3 Mouvements permanents (ou stationnaires)

Définition 12 : Un mouvement de milieu continu est dit permanent (ou stationnaire) dans un référentiel R si le champ de vitesses exprimé en variables d'Euler est indépendant du temps t : $\left. \frac{\partial \underline{U}_t}{\partial t} \right|_{\underline{x}} = 0$

Autrement dit, en un point géométrique fixe \underline{x} la vitesse ne varie pas avec le temps. Elle peut néanmoins varier d'un point à un autre du milieu continu.

Remarque : Pour un mouvement permanent, les deux systèmes différentiels caractérisant respectivement les trajectoires et les lignes de courant prennent la forme commune suivante :

$$\frac{dx_1}{U_t^1(x_1, x_2, x_3,)} = \frac{dx_2}{U_t^2(x_1, x_2, x_3,)} = \frac{dx_3}{U_t^3(x_1, x_2, x_3,)} \quad (2.18)$$

Trajectoires et lignes de courant sont ainsi confondues pour les mouvements permanents.

Chapitre 3

Tenseurs de déformation

On adopte dans ce chapitre une vision lagrangienne, qui permettra par comparaison entre la configuration actuelle et la configuration de référence, d'introduire la notion de déformation. On commence d'abord à introduire les formules de transport convectif, du point matériel et d'un vecteur matériel élémentaire. Puis, par l'intermédiaire de l'outil très simple qu'est le produit scalaire de vecteurs on mettra en évidence la déformation, concept local mesurant le changement de forme local (variation de longueur, variation angulaire). L'étude du cas particulier où le système subit une transformation homogène, c'est-à-dire identique en tout point, sera plus spécifiquement abordé lors de la présentation orale de cet enseignement. Pour le cas général, objet de ce qui suit, où la transformation du système mécanique est quelconque, on fera appel à la notion de transformation homogène tangente ; celle-ci est définie par le tenseur gradient de la transformation dont on déduira notamment le tenseur de dilatation de Cauchy-Green ainsi que le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Lorsque la transformation est infinitésimale les formules se simplifient par linéarisation (section 3.2). Les techniques de mesures usuelles (jauges d'extensométrie) et leur méthodes de dépouillement seront abordées dans le cours oral. Enfin, le présent chapitre se termine sur la question de la compatibilité géométrique, à savoir si les déformations (on se limitera à la déformation linéarisée) sont compatibles avec la continuité du milieu et avec les conditions éventuellement imposées sur les déplacements au contour du système étudié. On notera que la non compatibilité des déformations est de nature à induire des efforts intérieurs qui, s'ils sont excessifs, peuvent entraîner des ruptures préjudiciables au système mécanique considéré.

3.1 Tenseurs de déformation en transformation finie

On s'intéresse à la transformation $\underline{X} \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ subie par le système mécanique entre les instants 0 et t . L'instant t est ici fixé. La configuration atteinte à t sera appelée configuration actuelle.

3.1.1 Transport des vecteurs matériels

On se place au voisinage du point \underline{X} de la configuration initiale. La transformation transporte le point matériel \underline{X} et son voisin $\underline{X} + d\underline{X}$ en $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ et $\underline{x} + d\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X} + d\underline{X}, t)$ respectivement. Le vecteur matériel $d\underline{X}$, d'origine \underline{X} et d'extrémité $\underline{X} + d\underline{X}$ de la configuration initiale est donc représenté dans la configuration à t par le vecteur $d\underline{x}$,

d'origine \underline{x} et d'extrémité $\underline{x} + \underline{dx}$. Sur le plan mathématique, on fera la distinction qui s'impose entre le vecteur géométrique, classe d'équivalence de bipoints équipollents, et le vecteur matériel, dont la représentation mathématique, à l'image de celle du bipoint, nécessite la donnée d'une origine et d'une extrémité.

Par définition du gradient d'une fonction de la variable vectorielle \underline{X} , on établit sans peine la relation existant entre les vecteurs \underline{dX} et \underline{dx} :

$$\underline{dx} = \underline{\phi}(\underline{X} + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX} \quad \text{avec} \quad \underline{F} = \underline{\nabla} \underline{\phi} \quad (3.1)$$

au second ordre près en $|\underline{dX}|$. La relation (3.1) est appelée *formule de transport des vecteurs matériels*. A \underline{X} fixé, le transport en question s'effectue de façon linéaire par rapport à \underline{dX} . Plus précisément, (3.1) indique que la transformation au voisinage de \underline{dX} est entièrement caractérisée par la donnée de l'image $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ du point \underline{X} et de l'endomorphisme associé au gradient $\underline{\nabla} \underline{\phi}(\underline{X}, t)$. On appelle transformation tangente l'application affine définie au voisinage de \underline{X} par

$$\underline{X}' \rightarrow \underline{\phi}(\underline{X}, t) + \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot (\underline{X}' - \underline{X}) \quad (3.2)$$

Elle contient toute l'information nécessaire pour la description locale de la transformation.

3.1.2 Tenseur des dilatations de Cauchy-Green

Au sens commun, le concept de déformation s'oppose à celui de conservation des angles et des longueurs. Il est donc naturel d'introduire ce concept en cherchant à quantifier l'écart à l'isométrie dans la transformation considérée. La caractéristique mathématique de l'isométrie étant la conservation du produit scalaire, on est amené à calculer la variation de ce dernier dans la transformation considérée. Plus précisément, on se donne deux vecteurs matériels \underline{dX} et \underline{dX}' d'origine \underline{X} dans la configuration initiale. Leurs représentants dans la configuration actuelle (figure 3.1) sont les vecteurs \underline{dx} et \underline{dx}' d'origine $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ donnés par (3.1) :

$$\underline{dx} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX} \quad ; \quad \underline{dx}' = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX}' \quad (3.3)$$

Si l'application tangente de (3.2) était une isométrie, c'est-à-dire si \underline{F} était une rotation

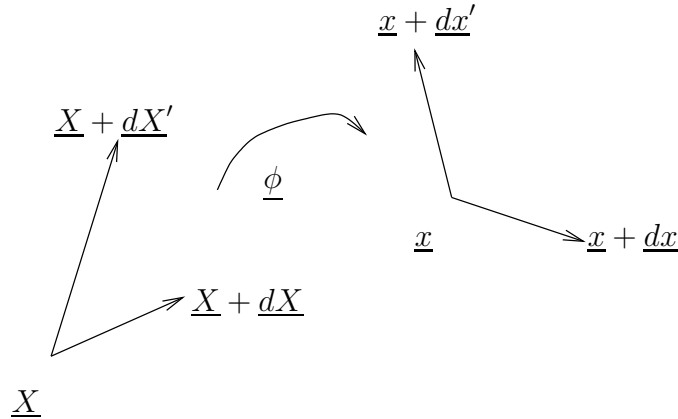


FIG. 3.1 – transport de vecteurs-matériels

ou l'identité de l'espace vectoriel, les produits scalaires $\underline{dX} \cdot \underline{dX}'$ et $\underline{dx} \cdot \underline{dx}'$ seraient égaux. En revanche, dans le cas général, on montre aisément que l'on a :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}' = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}' \quad (3.4)$$

où l'on a posé

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (3.5)$$

Le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{C}}$, entièrement formé à partir de $\underline{\underline{F}}$, est dénommé tenseur de dilatation de Cauchy-Green. Par sa définition même, il est symétrique. En tant que forme bilinéaire il est défini positif; en particulier, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Etant donné un vecteur matériel \underline{dX} de la configuration initiale, représenté dans la configuration actuelle par le vecteur \underline{dx} , on appelle dilatation dans la direction de \underline{dX} le rapport des longueurs $|\underline{dx}|$ et $|\underline{dX}|$:

$$\lambda(\underline{dX}) = \frac{|\underline{dx}|}{|\underline{dX}|} \quad (3.6)$$

Cette quantité peut être calculée en s'appuyant sur (3.4). Pour un vecteur unitaire \underline{n}_0 , on peut vérifier que :

$$\lambda(\underline{n}_0) = \sqrt{\underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n}_0} \quad (3.7)$$

En particulier, on a par exemple :

$$\lambda(\underline{e}_1) = \sqrt{C_{11}} \quad (3.8)$$

La variation angulaire entre deux directions initialement orthogonales peut également être déterminée en choisissant pour (3.4) 2 vecteurs \underline{dX} et \underline{dX}' orthogonaux (cf. cours oral ou paragraphe suivant eq. (3.17)).

3.1.3 Déformation de Green-Lagrange

Au lieu de comparer directement les produits scalaires des vecteurs infinitésimaux, on peut préférer procéder à leur différence. D'où :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' - \underline{dX} \cdot \underline{dX}' = \underline{dX} \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{dX}' = 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{dX}' \quad (3.9)$$

où l'on a posé

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \quad (3.10)$$

$\underline{\underline{e}}$ est appelé *tenseur des déformations de Green-Lagrange*. Il est nul lorsque $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$, c'est-à-dire si $\underline{\underline{F}}$ est une rotation ou l'identité. Cette définition mathématique est donc bien compatible avec l'acception commune du mot 'déformation' puisqu'il n'y aura de déformation au point \underline{X} au sens de (3.10) que si la transformation tangente en ce point n'est pas un mouvement de corps rigide.

Compte tenu de (2.4), on note que

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \quad (3.11)$$

On tire de (3.10) et (3.11) une expression du tenseur de Green-Lagrange en fonction de $\underline{\underline{\xi}}$:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \cdot \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.12)$$

3.1.4 Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange

On commence par introduire les concepts de dilatation et de glissement pour quantifier les variations de longueurs et d'angles lorsque la transformation n'est pas une isométrie. On montre ensuite que ces quantités peuvent être déterminées à partir du tenseur des déformations.

On considère à présent deux vecteurs matériels orthogonaux \underline{dX} et \underline{dX}' de la configuration initiale, et leurs images \underline{dx} et \underline{dx}' dans le transport par la transformation (figure 3.2). On appelle glissement du couple de directions \underline{dX} et \underline{dX}' le complémentaire θ de l'angle entre \underline{dx} et \underline{dx}' :

$$(\underline{dx}, \underline{dx}') = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (3.13)$$

Voyons à présent comment calculer une dilatation ou un glissement en fonction de \underline{e} .

On considère tout d'abord dans (3.9) le cas particulier où $\underline{dX} = \underline{dX}'$ est un vecteur

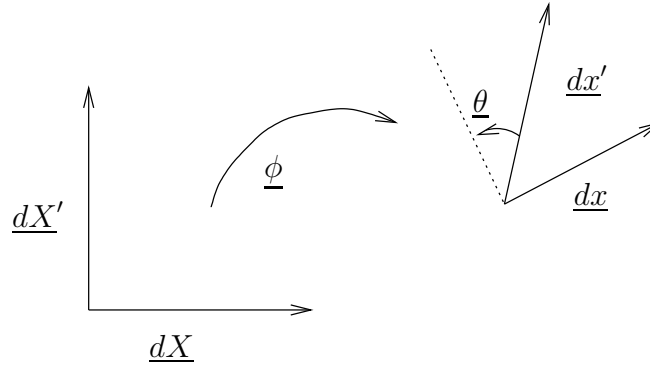


FIG. 3.2 – glissement d'un couple de directions

colinéaire au vecteur \underline{e}_i de la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On obtient :

$$|\underline{dx}|^2 - |\underline{dX}|^2 = 2 |\underline{dX}|^2 \underline{e}_i \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_i \quad (3.14)$$

sans sommation sur l'indice i . On a donc

$$e_{ii}(\underline{X}, t) = \frac{\lambda(\underline{dX})^2 - 1}{2} \quad (3.15)$$

qui prouve au passage que la dilatation ne dépend que de la direction du vecteur \underline{dX} .

Choisissons à présent \underline{dX} et \underline{dX}' respectivement colinéaires à \underline{e}_1 et \underline{e}_2 . L'application de (3.9) donne :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx}' = 2 |\underline{dX}| |\underline{dX}'| \underline{e}_1 \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_2 \quad (3.16)$$

soit, d'après (3.13) et (3.15) :

$$e_{12} = \frac{1}{2} \sin \theta \sqrt{1 + 2e_{11}} \sqrt{1 + 2e_{22}} \quad (3.17)$$

On retiendra que la non nullité d'un terme diagonal est le signe d'une dilatation dans la direction correspondante, tandis que la non nullité d'un terme non diagonal indique la perte d'orthogonalité du couple de directions correspondant.

Il convient de rappeler le lien entre le tenseur de dilatations de Cauchy-Green et celui de Green-Lagrange : $\underline{C} = 2\underline{e} + \underline{1}$; ce lien permet d'exprimer les diverses quantités en fonction des composantes de l'un ou l'autre de ces 2 tenseurs.

3.2 Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé

3.2.1 Hypothèse de petites perturbations (HPP) - Définition

La transformation du système entre les instants 0 et t est dite infinitésimale si, pour tout \underline{X} , le tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ est peu différent de l'identité. En vertu de (3.11), cette définition est équivalente à :

$$(\forall \underline{X}) \quad |\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \quad (3.18)$$

pour la norme usuelle dans R^9 .

Les conditions (3.18) sont dénommées Hypothèses de Petites Perturbations (HPP).

D'après (3.12), la condition de transformation infinitésimale sous la forme ci-dessus implique que les déformations soient elles-mêmes infinitésimales :

$$|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \Rightarrow |\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)| \ll 1 \quad (3.19)$$

Notons cependant que la réciproque de (3.19) est fausse. En effet, les rotations fournissent un contre-exemple puisque le tenseur de déformation est nul comme le montre (3.10), alors que la condition (3.18) est prise en défaut, sauf précisément dans le cas particulier des rotations infinitésimales.

Lorsque cette condition (3.18) est satisfaite, on peut négliger le terme du second ordre en $|\underline{\underline{\nabla \xi}}|$ dans l'expression (3.12) de $\underline{\underline{e}}$. On obtient *le tenseur des déformations linéarisé*, noté $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Il n'est autre que la partie symétrique du gradient de $\underline{\underline{\xi}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.20)$$

On prendra garde au fait que le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'a plus rien à voir avec le concept de déformation si la transformation n'est pas infinitésimale.

Puisque le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ constitue la forme linéarisée de $\underline{\underline{e}}$, les composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la base orthonormée de travail sont elles-mêmes obtenues en linéarisant celles de $\underline{\underline{e}}$, c'est-à-dire en négligeant les termes du second ordre en $|\underline{\underline{\nabla \xi}}|$. A partir de (3.15) et de (3.17), on obtient donc immédiatement

$$\varepsilon_{ii} = \lambda(\underline{e}_i) - 1 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (3.21)$$

et

$$\theta = 2\varepsilon_{12} \quad (3.22)$$

On retiendra que la matrice de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans une base orthonormée¹ donne

- sur la diagonale : l'écart à l'unité de la dilatation dans la direction correspondante ; on parle d'allongement relatif
- en dehors de la diagonale : la moitié du glissement du couple de directions correspondant.

¹ces résultats ne nécessitent pas que la base soit cartésienne. Ils sont valables en coordonnées sphériques ou cylindriques.

3.2.2 Condition de compatibilité géométrique

On se place ici dans l'hypothèse des transformations infinitésimales. On travaille avec une base *cartésienne et orthonormée*.

Les six composantes du tenseur des déformations linéarisé ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont calculées à partir des trois composantes du déplacement. Ainsi, un champ de tenseurs symétriques $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ n'est pas en général la partie symétrique du gradient d'un champ de déplacement. À l'inverse, le champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ est dit géométriquement compatible s'il existe un champ de vecteurs $\underline{\xi}$ solution du problème

$$\text{trouver } \underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\xi}}(\underline{X}) \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.23)$$

Pour qu'un tel champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ puisse être interprété comme le champ de déformations dans la transformation définie par $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\xi}}(\underline{X})$, il reste à vérifier que ce dernier satisfait la condition (3.18). Le but de cette section est de déterminer une condition nécessaire et suffisante de compatibilité géométrique.

condition nécessaire

On suppose que le champ $\underline{X} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ est géométriquement compatible. Il existe donc une solution $\underline{\underline{\xi}}$ au problème (3.23). Soit $\underline{\underline{w}}$ la partie antisymétrique du gradient de $\underline{\underline{\xi}}$:

$$\underline{\underline{w}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} - {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) \quad (3.24)$$

En base cartésienne orthonormée, on fait alors la remarque que le gradient des composantes de $\underline{\underline{w}}$ peut être calculé en fonction des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Plus précisément, on a :

$$w_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (3.25)$$

où $a_{,i}$ désigne la dérivée partielle $\partial a / \partial X_i$. La preuve de (3.25) s'obtient sans peine en explicitant le membre de droite en fonction des dérivées secondes des ξ_i et en échangeant l'ordre des dérivations. L'égalité des dérivées secondes croisées de la composante w_{ij} s'écrit

$$\begin{cases} i \neq j \text{ fixés} \\ k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial X_l} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial X_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial X_l} \right) \quad (3.26)$$

Elle se traduit, d'après (3.25) par des conditions à satisfaire par les composantes du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\begin{cases} i \neq j \text{ fixés} \\ k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial X_l} (\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}) = \frac{\partial}{\partial X_k} (\varepsilon_{li,j} - \varepsilon_{jl,i}) \quad (3.27)$$

Ces relations qui sont une conséquence de l'existence d'une solution au problème (3.23) sont les conditions nécessaires de compatibilité géométrique.

condition suffisante

Nous allons montrer que la condition (3.27) est suffisante pour assurer localement l'existence d'une solution au problème (3.23). La preuve fournit en fait une méthode de détermination des solutions $\underline{\xi}$ de ce problème. Elle se développe en deux temps :

1. On considère pour commencer à $i \neq j$ fixés les six formes différentielles

$$(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i})dX_k \quad (3.28)$$

La condition (3.27) assure l'intégrabilité locale de cette forme différentielle. Soit w_{ij} une primitive, définie à une constante près. On a donc

$$w_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (3.29)$$

Malgré l'identité formelle avec (3.25), il convient de souligner que les w_{ij} de (3.25) et de (3.29) n'ont pas le même statut dans la mesure où le concept de partie antisymétrique du gradient de $\underline{\xi}$ est encore dépourvu de sens à ce stade de la démonstration où l'existence de $\underline{\xi}$ reste à prouver.

On remarque que l'on change le signe de la forme différentielle de (3.28) en échangeant les indices i et j . Il est donc possible de choisir les constantes d'intégration de sorte que $w_{ij} = -w_{ji}$. Au total, 3 constantes sont donc apparues dans la détermination des champs w_{12} , w_{13} et w_{23} .

2. L'indice i étant fixé, on s'intéresse à présent aux trois formes différentielles

$$(\varepsilon_{ij} + w_{ij})dX_j \quad (3.30)$$

Pour que celles-ci soient localement intégrables, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions

$$\frac{\partial}{\partial X_k}(\varepsilon_{ij} + w_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_j}(\varepsilon_{ik} + w_{ik}) \quad (3.31)$$

dont on montre sans peine qu'elles résultent de (3.27) et de (3.29). Soit alors ξ_i une primitive de la forme différentielle de (3.30), définie à une constante près. On a donc :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij} \quad (3.32)$$

En faisant usage de la convention $w_{ij} = -w_{ji}$ et de la symétrie du tenseur $\underline{\varepsilon}$ dans (3.32), on conclut que

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} = 2\varepsilon_{ij} \quad (3.33)$$

Ceci achève de démontrer que le champ de vecteurs de composantes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 est bien solution du problème (3.23). Les w_{ij} s'interprètent alors comme les composantes de la partie antisymétrique du gradient de $\underline{\xi}$.

3 nouvelles constantes d'intégration étant apparues dans la deuxième séquence, nous observons que la solution du problème (3.23), lorsqu'elle existe, est déterminée à six constantes près. La section 3.2.3 va préciser la signification de ces dernières.

3.2.3 Forme générale des solutions du problème 3.23

On s'intéresse tout d'abord aux solutions du problème (3.23) dans le cas $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$. Avant tout calcul, il est logique de s'attendre à trouver les champs de déplacement correspondant aux isométries de l'espace affine, c'est-à-dire les translations et les rotations.

Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ est évidemment géométriquement compatible. Les primitives w_{ij} des formes différentielles (3.28) sont des constantes formant une matrice antisymétrique. On pose :

$$w_{12} = -r \quad ; \quad w_{13} = +q \quad ; \quad w_{23} = -p \quad (3.34)$$

Les composantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 des champs $\underline{\underline{\xi}}$ solutions sont obtenues par intégration des formes différentielles de (3.30). On trouve :

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda_1 - rX_2 + qX_3 \\ \xi_2 = \lambda_2 + rX_1 - pX_3 \\ \xi_3 = \lambda_3 - qX_1 + pX_2 \end{cases} \quad (3.35)$$

soit encore, sous forme vectorielle :

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{X}) = \underline{\lambda} + \underline{\theta} \wedge \underline{X} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\lambda} = \lambda_i \underline{e}_i \\ \underline{\theta} = p\underline{e}_1 + q\underline{e}_2 + r\underline{e}_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

Le champ de déplacement $\underline{X} \rightarrow \underline{\lambda}$ est associé à la translation de vecteur $\underline{\lambda}$. Par ailleurs, d'après la section 3.2.5, la transformation associée au champ de déplacement $\underline{X} \rightarrow \underline{\theta} \wedge \underline{X}$ s'interprète comme une rotation infinitésimale² sous réserve que $|\underline{\theta}| \ll 1$. Comme prévu, les champs $\underline{\underline{\xi}}$ de (3.36) satisfaisant cette condition peuvent donc être considérés, de façon approchée³, comme les déplacements dans les isométries de l'espace affine.

On note qu'un champ $\underline{\underline{\xi}}$ de (3.36) est défini par 6 constantes, 3 d'entre elles déterminant la translation $\underline{\lambda}$, et les 3 autres déterminant le vecteur rotation $\underline{\theta}$. L'ensemble des solutions du problème (3.23) pour $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$ est un espace vectoriel de dimension 6.

Soit à présent un champ $\underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$ géométriquement compatible et $\underline{\underline{\xi}}^*$ une solution particulière de (3.23). Pour toute autre solution $\underline{\underline{\xi}}$ de ce problème, le champ de déplacement $\delta\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}^*$, dont la déformation linéarisée est nulle, est de la forme (3.36). La forme générale des solutions de (3.23) lorsque $\underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$ est donc :

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^* + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

En d'autres termes, les solutions de (3.23) forment un espace affine de dimension 6. Elles sont définies à 3 degrés de liberté de translation et 3 degrés de liberté de rotation près.

²dont le point fixe est l'origine O et dont le vecteur rotation est $\underline{\theta}$

³On remarque en effet que la déformation de Green-Lagrange (3.12) associée à un champ $\underline{\underline{\xi}}$ de (3.36) n'est pas nulle : notant $\underline{\underline{\theta}}$ le tenseur antisymétrique associé à l'endomorphisme $\underline{X} \rightarrow \underline{\theta} \wedge \underline{X}$, elle vaut $\underline{\underline{\varepsilon}} = -\underline{\underline{\theta}}^2/2$. Il ne s'agit donc pas rigoureusement d'isométries. Cela renvoie au fait que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ne représente le concept de déformation que de façon approchée, dans l'hypothèse de transformation infinitésimale.

3.2.4 Bref commentaires sur les mesures de déformation

L'approche usuelle de détermination expérimentale des composantes du tenseur de déformation linéarisé s'appuie principalement sur des mesures d'allongement unitaire (cf. formule par exemple 3.21 pour la direction \underline{e}_1).

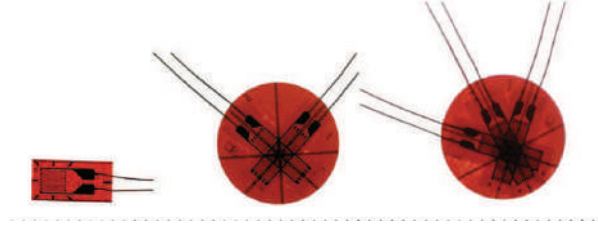


FIG. 3.3 – Jauge extensométrique unidirectionnelle et rosettes de jauges bi- et tridirectionnelles (photos : J. Salençon).

A cette fin, il existe de nombreuses techniques expérimentales (extensométrie, capteurs de déplacement, corrélation d'images, etc..) dont la plus courante est l'extensométrie par jauges électriques de déformation : le principe de la méthode consiste à faire subir à un fil la même extension que celle du matériau dans une direction donnée a priori, et à mesurer la variation de résistivité électrique correspondante. Ces jauges, collées à la surface du solide étudié, peuvent être seules ou groupées sous forme de rosettes jauges) (cf. figure 3.3). Si $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ représente le tenseur de déformation en un point M , la mesure donnée par une jauge collée en M dans une direction \underline{n} est égale à $\epsilon_n = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(M) \cdot \underline{n}$. Par exemple, dans le plan tangent à la surface du solide, en notant $\underline{n} = n_1 \underline{e}_1 + n_2 \underline{e}_2$, on a :

$$\epsilon_n = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + 2\varepsilon_{12}n_1n_2 \quad (3.38)$$

En choisissant judicieusement les directions de collage des jauges, ou la rosettes, on peut recueillir ainsi suffisamment d'information pour la détermination complète du tenseur de déformation (ici ses 3 composantes) dans le plan tangent à la surface du solide.

3.2.5 Annexe : Rotation infinitésimale

On considère une rotation \mathcal{R} de l'espace vectoriel de matrice $\underline{\underline{R}}$ dans une base orthonormée. Cette rotation est supposée infinitésimale, c'est-à-dire voisine de l'identité \mathcal{I} de l'espace vectoriel, de matrice notée $\underline{\underline{1}}$. On a donc $|\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}| \ll 1$, au sens de la norme de R^9 . On note $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$ l'écart à l'identité, de matrice $\underline{\underline{r}}$. Du caractère orthogonal de \mathcal{R} , on tire que

$${}^t\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}} = 0 \Rightarrow {}^t\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}} = O(|\underline{\underline{r}}|^2) \quad (3.39)$$

En d'autres termes, la matrice $\underline{\underline{r}}$ est antisymétrique, au second ordre près en $|\underline{\underline{r}}|$. A cet ordre d'approximation, on pourra donc considérer qu'une rotation infinitésimale est la somme de l'identité et d'un endomorphisme antisymétrique.

Une matrice antisymétrique en base orthonormée étant caractérisée par 3 scalaires indépendants, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques est un espace vectoriel

de dimension 3. On remarque par ailleurs qu'il est possible d'associer à tout vecteur $\underline{\theta}$ l'endomorphisme antisymétrique a_{θ} défini de la façon suivante :

$$\forall \underline{t}, \quad a_{\theta}(\underline{t}) = \underline{\theta} \wedge \underline{t} \quad (3.40)$$

L'ensemble $\{a_{\theta}, \underline{\theta} \in R^3\}$ étant manifestement un espace vectoriel de dimension 3, il coïncide donc avec l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques. Cela signifie que tout endomorphisme antisymétrique peut se mettre sous la forme (3.40) pour un choix judicieux du vecteur $\underline{\theta}$.

Revenant à présent au cas d'une rotation infinitésimale \mathcal{R} , on voit qu'il existe un vecteur $\underline{\theta}$ satisfaisant la condition $|\underline{\theta}| \ll 1$ tel que :

$$\forall \underline{t}, \quad \mathcal{R}(\underline{t}) = \underline{t} + \underline{\theta} \wedge \underline{t} + O(|\underline{\theta}|^2) \quad (3.41)$$

Dans la pratique, on négligera le terme du second ordre en $|\underline{\theta}|$.

Chapitre 4

Cinématique des milieux continus - Taux de déformation

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la notion de déformation en contexte eulérien, la donnée essentielle étant le champ de vitesse eulérien. On commence d'abord par introduire le taux de déformation volumique. Puis on introduit le tenseur taux (vitesse) de déformation, partie symétrique du gradient du champ de vitesse eulérien¹. Ce tenseur caractérise l'évolution de la déformation, rapportée à la configuration actuelle (servant à chaque instant de configuration de référence). On établit l'équation locale de la conservation de la masse. La notion de dérivation particulaire est ensuite exposée de manière plus précise, puis appliquée à une intégrale de volume. Cette dernière application permet de retrouver l'équation de la conservation de masse. En prévision du chapitre suivant sur les contraintes, on expose également, et de façon brève, les équations de la conservation de la quantité de mouvement.

Dans tout ce chapitre, le champ de vitesse eulérien sera noté \underline{u} .

4.1 Taux de déformation volumique

La connaissance du champ de vitesses eulérien donne accès aux variations de volume du système dans la transformation qu'il subit. On considère à cet effet un élément d'aire orienté de la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t . Il est défini comme le produit $\underline{n}dS$ de son aire dS par la normale unitaire extérieure \underline{n} à $\partial\Omega_t$. Au cours d'un intervalle de temps infinitésimal $[t, t+dt]$, cet élément d'aire balaye un volume cylindrique, dont les génératrices, colinéaires à \underline{u} , de longueur $|\underline{u}| dt$, s'appuyent sur le contour de l'élément. Le volume balayé est donc $\underline{u} \cdot \underline{n} dS dt$ (figure 4.1).

La variation du volume total du système est obtenue par intégration sur la frontière :

$$\Omega_{t+dt} - \Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} \underline{u} \cdot \underline{n} dS dt \quad (4.1)$$

de sorte que, en utilisant le théorème de la divergence, le taux de variation volumique est :

$$\dot{\overline{\Omega}}_t = \int_{\partial\Omega_t} \underline{u} \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega_t} \text{div } \underline{u} d\Omega_t \quad (4.2)$$

¹La partie antisymétrique de ce gradient est dénommée *taux de rotation* ; il permet de définir au niveau local le mouvement infinitésimal de rotation de la matière.

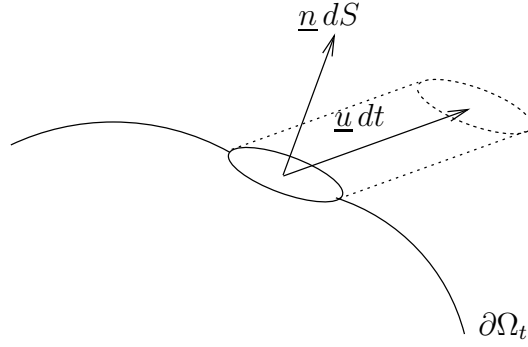


FIG. 4.1 – volume balayé par un élément d'aire

La notation \dot{b} représente la dérivée par rapport au temps de la grandeur b attachée à un élément matériel, en suivant cet élément matériel dans son mouvement. Cette dérivée sera dénommée *dérivée particulaire* de b , et sera aussi notée $\frac{db}{dt}$. On observera qu'en description lagrangienne, la dérivée particulaire s'identifie ainsi à la simple dérivée partielle par rapport à la variable temps, étant donné que les variables spatiales y permettent de repérer l'élément matériel concerné.

Considérons à présent un volume élémentaire $d\Omega_t$ de la configuration initiale situé initialement en \underline{X} où il occupait le volume $d\Omega_o$. On suit les variations de ce volume au cours du temps. La dérivation de (2.8) fournit d'abord

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \frac{\dot{J}}{J} d\Omega_t \quad (4.3)$$

Par ailleurs, la transcription de (4.2) pour un volume élémentaire s'écrit :

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \text{div } \underline{u} d\Omega_t \quad (4.4)$$

Le rapport $\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t}$ est appelé *taux de déformation volumique*. De la confrontation de (4.3) et (4.4), on tire la relation

$$\frac{\dot{d\Omega_t}}{d\Omega_t} = \text{div } \underline{u} = \frac{\dot{J}}{J} \quad (4.5)$$

4.2 Tenseur taux de déformation

On considère un vecteur matériel infinitésimal d'origine \underline{X} (resp. \underline{x}) et d'extrémité $\underline{X} + d\underline{X}$ (resp. $\underline{x} + d\underline{x}$) dans la configuration initiale (resp. actuelle). On s'intéresse à la vitesse de ce vecteur. Notée $\frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}}$, c'est par définition la dérivée par rapport au temps du vecteur $\underline{d\underline{x}}$. On peut calculer $\frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}}$ en utilisant la formule de transport des vecteurs matériels (3.1) :

$$\underline{d\underline{x}} = \underline{F} \cdot d\underline{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}} = \underline{\dot{F}} \cdot d\underline{X} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot d\underline{x} \quad (4.6)$$

Une autre façon de procéder consiste à expliciter $\underline{d\underline{x}}$ en fonction de \underline{X} et de $\underline{X} + d\underline{X}$

$$\underline{d\underline{x}} = \underline{\phi}(\underline{X} + d\underline{X}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow \frac{\dot{d\underline{x}}}{d\underline{x}} = \begin{cases} \underline{U}(\underline{X} + d\underline{X}, t) - \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{\nabla U} \cdot d\underline{X} \\ \underline{u}(\underline{x} + d\underline{x}, t) - \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad } u} \cdot d\underline{x} \end{cases} \quad (4.7)$$

ce qui donne 2 façons (lagrangienne et eulérienne)² de déterminer $\dot{\underline{dx}}$.

On souhaite définir maintenant le tenseur taux de déformation eulérien. Le point de départ est le résultat (4.7) : $\dot{\underline{dx}} = \underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}$. On en déduit :

$$\dot{\underline{dx}} \cdot \underline{dx}' = (\underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}) \cdot \underline{dx}' + \underline{dx} \cdot (\underline{\underline{grad u}} \cdot \underline{dx}') \quad (4.9)$$

qui s'écrit :

$$\dot{\underline{dx}} \cdot \underline{dx}' = \underline{dx} \cdot \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dx}' = 2 \underline{dx} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{dx}' \quad (4.10)$$

où l'on a noté $\underline{\underline{d}}$, la partie symétrique du gradient de la vitesse eulérienne \underline{u} :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \quad (4.11)$$

Le tenseur du second ordre $\underline{\underline{d}}$ est appelé taux (vitesse) de déformation eulérien. L'étude détaillée et l'interprétation de ses composantes seront présentées lors du cours oral.

La partie antisymétrique du gradient de \underline{u} est le tenseur taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ défini par :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) - {}^t \underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \right) \quad (4.12)$$

A ce tenseur est associé un vecteur dual $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que $\forall \underline{dx}$,

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{dx} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{dx} \quad (4.13)$$

On peut aisément vérifier que $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \underline{rot} \underline{u}$.

Remarque : Dans l'hypothèse (3.18) des transformations infinitésimales, on observe, en utilisant (3.11) et (2.9) dans (4.8) que

$$\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) \approx \underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.14)$$

En reportant ce résultat dans l'expression (4.11) de $\underline{\underline{d}}$, et en comparant avec (3.20), on constate que l'hypothèse des transformations infinitésimales autorise à confondre les tenseurs taux de déformation eulérien et lagrangien (en des points homologues) :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \approx \underline{\underline{\dot{\xi}}}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.15)$$

4.3 Dérivées particulières d'un champ

4.3.1 Définition

On considère une grandeur physique \mathcal{B} représentée à chaque instant sur la configuration initiale par un champ lagrangien $\underline{X} \rightarrow B(\underline{X}, t)$, et sur la configuration actuelle par un

²De la confrontation de (4.6) et de (4.7), on tire l'identité suivante :

$$\underline{\underline{grad u}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (4.8)$$

champ eulérien $\underline{x} \rightarrow b(\underline{x}, t)$. On suit un point matériel initialement situé au point \underline{X} sur sa trajectoire (2.1). Les variations de la grandeur physique en question qu'enregistre un observateur attaché au point matériel sont décrites par la fonction

$$t \rightarrow B(\underline{X}, t) = b(\phi(\underline{X}, t), t) \quad (4.16)$$

On appelle dérivée particulière (c'est-à-dire "en suivant la particule") de la grandeur physique \mathcal{B} , et l'on note \dot{B} ou \dot{b} , la dérivée par rapport au temps au sens usuel de la fonction de (4.16). La position initiale \underline{X} de la particule est une constante vis-à-vis de la dérivation en question. En fonction de la représentation lagrangienne, on a donc

$$\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (4.17)$$

En fonction de la représentation eulérienne, il vient

$$\dot{b} = \frac{\partial}{\partial t} (b(\phi(\underline{X}, t), t)) = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (4.18)$$

En utilisant (2.9) et (2.12), on voit que

$$\dot{b}(\underline{x}, t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} b(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (4.19)$$

Le premier terme du membre de droite de (4.19) rend compte des variations dans le temps de la grandeur \mathcal{B} . Le second représente l'effet du mouvement du point matériel par lequel l'observateur qui lui est attaché subit l'hétérogénéité du champ $\underline{x} \rightarrow b(\underline{x}, t)$ à l'instant considéré.

4.3.2 Application au calcul de l'accélération eulérienne

A titre d'exemple, considérons le calcul de l'accélération d'un point matériel initialement situé en \underline{X} et actuellement (à t) en \underline{x} . L'approche lagrangienne s'appuie sur la donnée de la trajectoire :

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\underline{X}, t) \quad (4.20)$$

L'approche eulérienne repose sur l'observation que l'accélération est, par définition, la dérivée particulière de la vitesse, puisqu'elle se rapporte aux variations de la vitesse du point matériel sur sa trajectoire :

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{u}}(\underline{x}, t) \quad (4.21)$$

En appliquant (4.19), on a donc :

$$\underline{\gamma} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u} \quad (4.22)$$

L'expression ci-dessus montre en particulier que l'accélération peut être non nulle même si la vitesse eulérienne est indépendante du temps (régime permanent). L'accélération résulte alors purement de l'hétérogénéité du champ de vitesses.

La cohérence des deux approches du concept d'accélération se traduit par la relation

$$\underline{\Gamma}(\underline{X}, t) = \underline{\gamma}(\phi(\underline{X}, t), t) \quad \text{ou bien} \quad \underline{\Gamma}(\psi(\underline{x}, t), t) = \underline{\gamma}(\underline{x}, t) \quad (4.23)$$

On retrouve sans peine (4.22) en dérivant (2.12) par rapport à t au sens usuel.

4.3.3 Conservation de la masse

Soit $\rho(\underline{x}, t)$ le champ eulérien de masse volumique. Par définition, $\rho(\underline{x}, t)d\Omega_t$ représente la masse du point matériel contenu dans le volume élémentaire $d\Omega_t$. La conservation de la masse se traduit par le fait que cette quantité ne varie pas lorsque l'on suit le point matériel sur sa trajectoire. D'après (2.8), le point matériel occupait à l'instant initial au point \underline{X} le volume $d\Omega_o = d\Omega_t/J(\underline{X}, t)$. Il faut donc écrire que la fonction

$$t \rightarrow \rho(\phi(\underline{X}, t), t)J(\underline{X}, t)d\Omega_o \quad (4.24)$$

est constante, ce qui donne

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho}J = \dot{\rho}J + \rho\dot{J} = 0 \quad (4.25)$$

Compte tenu de (4.5), on trouve d'abord

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (4.26)$$

Puis, en utilisant (4.19) pour le calcul de $\dot{\rho}$, il vient encore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad (4.27)$$

Cette équation représente la forme locale de la conservation de la masse. elle est dénommée *Equation de continuité*. Notons qu'elle peut également être établie à l'aide de formules de dérivation particulière d'une intégrale de volume, qui suit.

4.4 Dérivées particulières d'une intégrale de volume

4.4.1 Formulation et application à la conservation de la masse

On considère une grandeur physique \mathcal{B} représentée par une densité volumique eulérienne $b(\underline{x}, t)$. Cela signifie que la quantité de la grandeur physique \mathcal{B} attachée au point matériel occupant le volume $d\Omega_t$ de la configuration actuelle est égale à $b d\Omega_t$.

La quantité de la grandeur physique \mathcal{B} contenue dans un système mécanique \mathcal{S} est obtenue par intégration sur le volume Ω_t qu'il occupe à l'instant t :

$$I(t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (4.28)$$

Dans l'esprit de l'opération de dérivation particulière, on s'intéresse aux variations de la fonction $I(t)$ lorsque l'on suit le système \mathcal{S} dans la transformation (2.2). On appelle dérivée particulière de la quantité de \mathcal{B} contenue dans \mathcal{S} la dérivée par rapport au temps de l'intégrale $I(t)$ de (4.28). La dérivation prend en compte à la fois la variation en fonction du temps de l'intégrande et celle du domaine d'intégration. En tenant compte de (4.4), il vient :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} (\dot{b} + b \operatorname{div} \underline{u}) d\Omega_t \quad (4.29)$$

qui se met également sous la forme :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div}(b \underline{u}) \right) d\Omega_t \quad (4.30)$$

Une application directe de ce résultat dans le cas où b représente la densité de masse volumique ρ (l'intégrale I représente alors la masse du système, et est telle que $\dot{I} = 0$) conduit immédiatement à la forme globale de la loi de conservation de la masse :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) \right) d\Omega_t = 0 \quad (4.31)$$

d'où, par le lemme fondamental de la physique, on retrouve l'équation de continuité (4.27). Examinons à présent l'implication de l'équation de continuité sur le calcul des intégrales massiques. La grandeur physique \mathcal{B} est à présent représentée par une densité massique eulérienne $b(\underline{x}, t)$ telle que :

$$I(t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (4.32)$$

En notant que $\rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = dm$ se conserve en tant que masse de l'élément infinitésimal de volume $d\Omega_t$, il vient :

$$\dot{I} = \int_{\Omega_t} \dot{b} \rho d\Omega_t \quad (4.33)$$

Pour calculer la dérivée particulière d'une intégrale définie à partir d'une densité massique, il suffit donc de dériver la densité en question sous le signe \int .

4.4.2 Une 2e application : la conservation de la quantité de mouvement

A titre d'exemple, examinons d'abord le cas où la grandeur physique \mathcal{B} est la quantité de mouvement. Pour un système \mathcal{S} occupant un domaine Ω_t , elle est donnée par $\int_{\Omega_t} \underline{u} \rho d\Omega_t$. On remarque que la densité massique de quantité de mouvement n'est autre que la vitesse \underline{u} . On déduit de (4.33) et de (4.21) que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \underline{u} \rho d\Omega_t \right) = \int_{\Omega_t} \underline{\dot{u}} \rho d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \underline{\gamma} \rho d\Omega_t \quad (4.34)$$

La dérivée particulière de la quantité de mouvement d'un système est donc égale à la quantité d'accélération de ce système.

On s'intéresse à présent à son moment cinétique par rapport au point fixe O, défini par $\int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{u} \rho d\Omega_t$. La densité massique est le produit vectoriel $\underline{x} \wedge \underline{u}$. En observant que $\dot{\underline{x}} = \underline{u}$ et que $\dot{\underline{u}} = \underline{\gamma}$, on trouve

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{u} \rho d\Omega_t \right) = \int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{\gamma} \rho d\Omega_t \quad (4.35)$$

pour lequel on a tenu compte du fait que $\underline{u} = \frac{d\underline{x}}{dt}$.

. En conclusion, la dérivée particulière du moment cinétique d'un système est donc égale au moment dynamique.

4.5 Annexe : expression de l'accélération

L'accélération est par définition la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\underline{\gamma} = \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} \quad (4.36)$$

Pour les applications, il est intéressant d'établir l'identité :

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{u} \wedge \underline{u} \quad (4.37)$$

Pour s'en convaincre, remarquons que

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}^2 = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_j \underline{e}_i = 2 \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{u} \quad (4.38)$$

où $\underline{\underline{\Omega}}$ désigne la partie antisymétrique du gradient de \underline{u} . Par définition du rotationnel, $\underline{\underline{\Omega}}$ et le vecteur $\underline{\text{rot}} \underline{u}$ sont reliés par :

$$(\forall \underline{a}) \quad \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{u} \wedge \underline{a} \quad \text{avec} \quad 2\Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (4.39)$$

L'identité (4.37) est obtenue en combinant (4.38) et (4.39).

Chapitre 5

Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel

On se place dans un référentiel galiléen que l'on dote d'un repère cartésien orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On note \mathcal{S} le système mécanique considéré. A l'instant t , il occupe le domaine Ω_t . On note également de façon générique \mathcal{S}' un sous-système de \mathcal{S} occupant le domaine $\Omega'_t \subset \Omega_t$. La construction des efforts intérieurs dans le milieu continu tridimensionnel s'appuie sur la modélisation des efforts extérieurs et sur l'énoncé de la loi fondamentale de la Dynamique. Pour un système mécanique donné, rappelons que ce dernier comporte deux propositions :

1. La résultante $\underline{\mathcal{F}}'$ des forces s'exerçant sur \mathcal{S}' est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement de \mathcal{S}' :

$$\underline{\mathcal{F}}' = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega'_t} \rho \underline{u} d\Omega_t \right) \quad (5.1)$$

2. Le moment $\underline{\mathcal{M}}'_O$ calculé en O de toutes les actions s'exerçant sur \mathcal{S}' est égal à la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O de \mathcal{S}' :

$$\underline{\mathcal{M}}'_O = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{u} d\Omega_t \right) \quad (5.2)$$

Compte tenu de (4.34) et de (4.35), on voit que la résultante des forces est égale à la quantité d'accélération du système, et que le moment des forces est égal au moment des quantités d'accélération :

$$(a) \quad \underline{\mathcal{F}}'_O = \int_{\Omega'_t} \rho \underline{\gamma} d\Omega_t \quad ; \quad (b) \quad \underline{\mathcal{M}}'_O = \int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{\gamma} d\Omega_t \quad (5.3)$$

5.1 Modélisation des efforts extérieurs

On considère un sous-système \mathcal{S}' de \mathcal{S} . Les actions extérieures qu'il subit sont d'une part des actions à distance et d'autre part des actions de contact (figure 5.1). Elles sont définies sur la configuration actuelle du système.

- **actions à distance** : Elles proviennent par définition d'agents extérieurs à \mathcal{S}' . Elles sont représentées par une densité massique de force notée \underline{F} . Le point matériel de \mathcal{S}' occupant le volume élémentaire $d\Omega_t$ est donc soumis à la force $\rho \underline{F} d\Omega_t$. La gravité ou les forces électromagnétiques fournissent des exemples classiques d'actions à distance. On supposera que les valeurs de $|\underline{F}|$ dans Ω_t sont bornées.

On suppose que la force massique \underline{F} dépend de \underline{x} et de t exclusivement. En particulier, un volume élémentaire pouvant appartenir à divers sous-systèmes de \mathcal{S} , on fait l'hypothèse que le choix du sous-système n'affecte pas la valeur de l'action à distance.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple des forces de gravité sur terre. L'action à

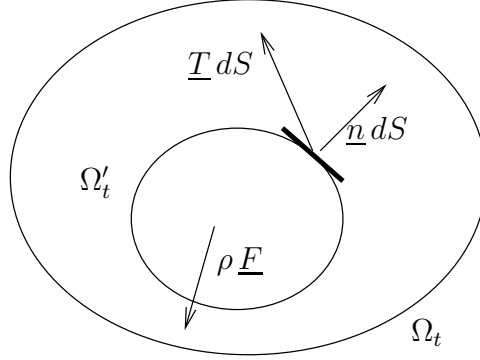


FIG. 5.1 – actions extérieures sur le sous-système \mathcal{S}'

distance subie par un élément de volume contenu dans \mathcal{S}' de la part de l'extérieur à \mathcal{S}' est due à la terre et au complémentaire de \mathcal{S}' dans \mathcal{S} . En toute rigueur, c'est une fonction du choix de \mathcal{S}' . La modélisation envisagée ne sera donc valide que si l'effet en question est négligeable. C'est le cas si les dimensions du système \mathcal{S} sont petites devant celles de la terre. Cette approximation est de toute évidence fondée pour les systèmes mécaniques usuels du génie civil et du génie industriel. En revanche, elle peut être prise en défaut pour certains problèmes de géophysique.

- **actions de contact** : le sous-système \mathcal{S}' est soumis de la part de ce qui lui est extérieur à des efforts s'exerçant sur sa frontière. Ils sont représentés par une densité surfacique \underline{T} . Ainsi, \underline{n} désignant la normale unitaire *extérieure* à Ω'_t , un élément d'aire $\underline{n} dS$ de la frontière de Ω'_t subit de la part de l'extérieur à \mathcal{S}' la force $\underline{T} dS$. On remarquera que la modélisation exclut les forces concentrées ou les densités linéiques de forces.

La densité \underline{T} n'est fonction que de \underline{x} , \underline{n} et t . En particulier, l'élément d'aire intervient exclusivement par sa position \underline{x} et son orientation \underline{n} . Cela suppose également que le choix du sous-système n'a pas d'effet sur la valeur de \underline{T} .

Dans le cadre de cette modélisation, la résultante et le moment en O des actions extérieures à \mathcal{S}' se calculent de la façon suivante :

$$\underline{\mathcal{F}}_O = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t + \int_{\Omega'_t} \rho \underline{F}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (5.4)$$

$$\underline{\mathcal{M}}'_O = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t + \int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{F}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (5.5)$$

5.2 Lemme du tétraèdre

On dispose de deux expressions de la force agissant sur \mathcal{S}' . Celle donnée en (5.4) est issue de notre modélisation. Celle donnée en (5.3a) résulte de la loi fondamentale. En les combinant, on déduit l'identité suivante :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) (\underline{\gamma}(\underline{x}, t) - \underline{F}(\underline{x}, t)) d\Omega_t \quad (5.6)$$

En exploitant la validité de (5.6) pour tout sous-système de \mathcal{S} , on va établir que la dépendance de $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ vis-à-vis de \underline{n} est linéaire. La preuve de ce résultat, connu sous le nom de lemme du tétraèdre, se construit en deux temps.

1. On considère un sous-système Ω'_t de forme cylindrique. Ses génératrices, de longueur ℓ , sont colinéaires à un vecteur unitaire \underline{N} . Ses faces inférieure et supérieure (dans le sens donné par \underline{N}), notées S^- et S^+ , ont pour normales extérieures $-\underline{N}$ et $+\underline{N}$ respectivement. On note encore S^L la surface latérale de ce cylindre (figure 5.2). L'identité (5.6) donne

$$\int_{S^-} \underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) dS_t + \int_{S^+} \underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) dS_t + \int_{S^L} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.7)$$

On fait alors tendre la valeur de ℓ vers 0. Les valeurs prises par $|\rho(\underline{\gamma} - \underline{F})|$ dans

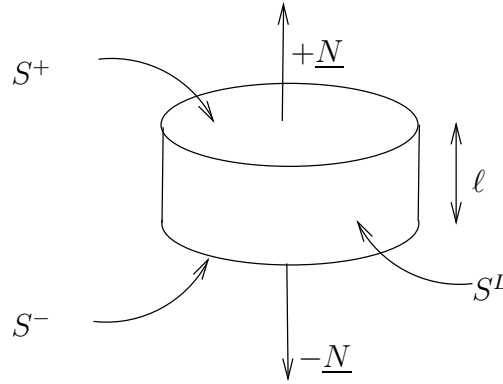


FIG. 5.2 – application de (5.6) à un cylindre élémentaire

Ω_t étant bornées, la limite du membre de droite est nulle. Il en est de même de la contribution de la face latérale au membre de gauche. Enfin, les faces S^+ et S^- tendent l'une vers l'autre. On obtient donc

$$\int_{S^-} \underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) + \underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) dS_t = 0 \quad (5.8)$$

Comme ce résultat a lieu pour un choix arbitraire de la surface S^- , il entraîne la nullité de la quantité intégrée :

$$\underline{T}(\underline{x}, -\underline{N}, t) = -\underline{T}(\underline{x}, +\underline{N}, t) \quad (5.9)$$

2. Ω'_t est à présent un tétraèdre. Trois de ses faces, notées S^i ($i = 1, 2, 3$) sont orthogonales deux à deux. La normale extérieure à Ω'_t sur S^i est le vecteur $-\underline{e}_i$. Le point d'intersection des S^i est situé en M de coordonnées \underline{x} . La normale extérieure à la quatrième face, notée S^n , est le vecteur unitaire \underline{n} . M' désigne la projection orthogonale du point M sur S^n . Enfin, on note A^i (resp. A^n) l'aire de la face S^i (resp. S^n) (figure 5.3). Selon une propriété classique du tétraèdre, on a :

$$\underline{n} = n_i \underline{e}_i \quad \text{avec} \quad n_i = \frac{A^i}{A^n} \quad (5.10)$$

Ecrivons à présent l'identité (5.6) pour ce tétraèdre. En utilisant (5.9), on obtient :

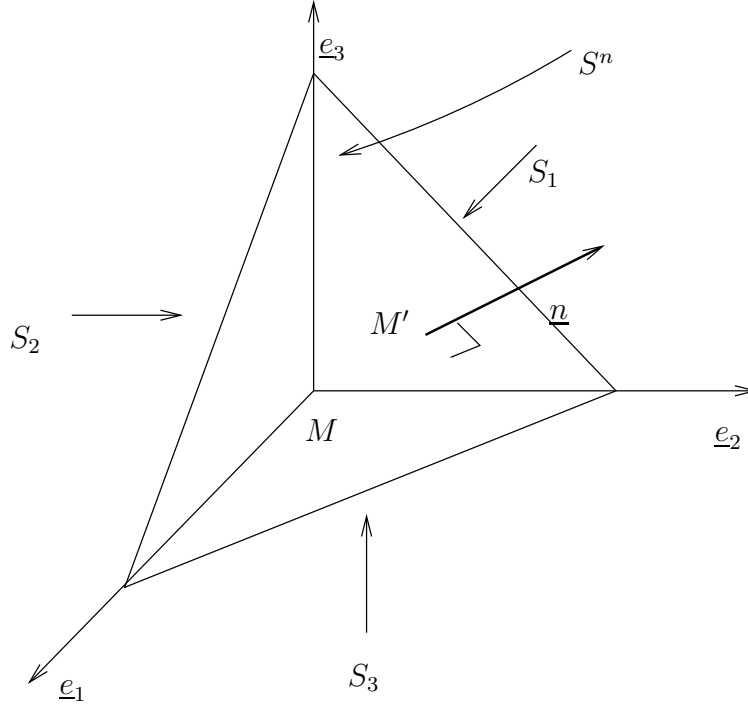


FIG. 5.3 – application de (5.6) à un tétraèdre

$$-\int_{S^i} \underline{T}(\underline{x}', \underline{e}_i, t) + \int_{S^n} \underline{T}(\underline{x}', \underline{n}, t) dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.11)$$

avec sommation sur l'indice i . Faisons maintenant tendre la hauteur MM' vers 0. Pour les mêmes raisons que précédemment, le membre de droite de (5.11) tend vers 0, de sorte que l'on trouve :

$$-A^i \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_i, t) + A^n \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = 0 \quad (5.12)$$

Il reste à utiliser (5.10) dans (5.12) pour obtenir la preuve du résultat de linéarité annoncé :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = n_i \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}_i, t) \quad (5.13)$$

5.3 Tenseur des contraintes de Cauchy

5.3.1 Définition et interprétation physique

A t et \underline{x} fixés, l'application $\underline{n} \rightarrow \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est la restriction à la sphère unité d'un endomorphisme. Ce dernier est associé à un tenseur d'ordre 2 que l'on note $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$. Il porte le nom de *tenseur des contraintes de Cauchy*. Par construction, il possède la propriété suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) \quad (5.14)$$

Le groupement $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ porte le nom de *vecteur-contrainte*.

La relation (5.14) contient la signification physique du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$. En appliquant ce dernier au vecteur \underline{n} , on obtient la force surfacique qui s'exerce sur un élément de surface matériel $\underline{n}dS$ de la part de la matière en contact avec ce dernier. La caractérisation de l'application $\underline{n} \rightarrow \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est ainsi ramenée à la donnée des 9 composantes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$.

En choisissant $\underline{n} = \underline{e}_j$ dans (5.14), on obtient (en omettant les arguments \underline{x} et t) :

$$\underline{T}(\underline{e}_j) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_j = \sigma_{ij} \underline{e}_i \quad (5.15)$$

Cette relation permet d'interpréter σ_{ij} comme la composante selon \underline{e}_i de la force surfacique agissant sur un élément de surface matériel de normale \underline{e}_j (figure 5.4).

Le champ $\underline{x} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ permet de calculer les efforts de contact \underline{T} s'exerçant sur la frontière d'un sous-système quelconque de Ω_t . Il constitue à ce titre une représentation des efforts intérieurs dans le système.

Par ailleurs, si l'on considère le système entier, la force surfacique \underline{T} de (5.14) devient un effort extérieur. La relation (5.14) écrite sur la frontière du système apparaît maintenant comme une condition aux limites sur le vecteur-contrainte.

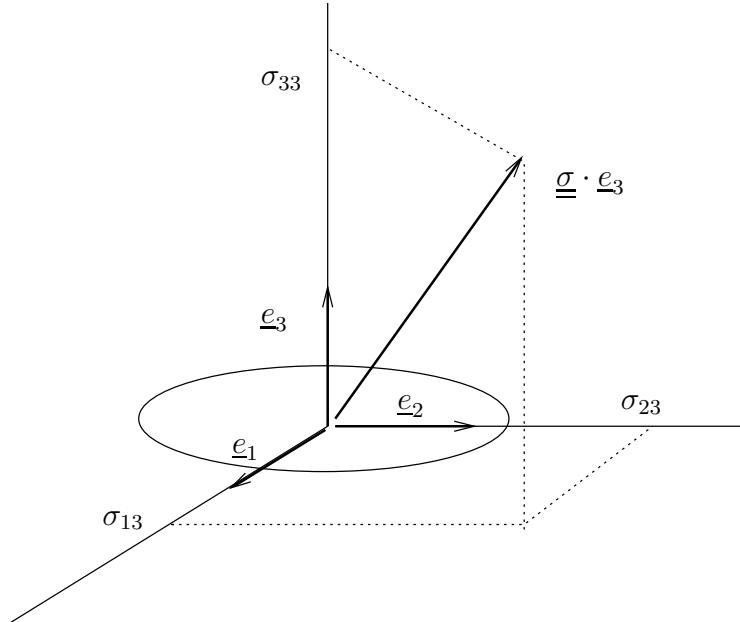


FIG. 5.4 – interprétation de σ_{ij}

5.3.2 Equation d'équilibre

On reporte dans (5.6) l'expression (5.14) de la force surfacique en fonction du tenseur des contraintes :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho (\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.16)$$

En appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche de (5.16), on obtient :

$$\int_{\Omega'_t} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{F} - \underline{\gamma}) d\Omega_t = 0 \quad (5.17)$$

La validité de (5.17) pour tout sous-domaine Ω'_t de Ω_t implique la nullité de la quantité intégrée : on obtient ainsi l'équation de la dynamique des milieux continus :

$$(\Omega_t) \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{F} - \underline{\gamma}) = 0 \quad (5.18)$$

L'équation (5.18) a le même contenu physique que l'identité (5.6) dont elle est issue : elle exprime de façon locale le postulat de la loi fondamentale concernant les forces.

5.3.3 Symétrie du tenseur des contraintes

Confrontons les deux expressions du moment des efforts extérieurs, à savoir (5.3) et (5.5), qui proviennent respectivement de la loi fondamentale et de notre modélisation des efforts extérieurs. En utilisant (5.18), nous obtenons :

$$\int_{\Omega'_t} \underline{x} \wedge \text{div} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_t} \underline{x} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t \quad (5.19)$$

Ecrite en projection, par exemple sur \underline{e}_3 , cette relation donne :

$$\int_{\Omega'_t} \left(x_1 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} - x_2 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \right) d\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_t} (x_1 \sigma_{2j} n_j - x_2 \sigma_{1j} n_j) dS_t \quad (5.20)$$

En intégrant par parties dans le membre de gauche, on trouve

$$\int_{\Omega'_t} \left(x_1 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} - x_2 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \right) d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} (x_1 \sigma_{2j} n_j - x_2 \sigma_{1j} n_j) dS_t \quad (5.21)$$

En comparant (5.20) et (5.21), on obtient finalement

$$\int_{\Omega'_t} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d\Omega_t = 0 \quad (5.22)$$

L'égalité $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ résulte du fait que cette égalité a lieu pour tout sous-système de Ω_t . On trouve de même $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ et $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ en projetant (5.19) sur \underline{e}_2 et \underline{e}_1 respectivement. Le tenseur des contraintes de Cauchy est donc symétrique.

5.3.4 Discontinuités du champ de contraintes

Les opérations de dérivation mises en jeu dans (5.18), pratiquées au sens usuel, requièrent une régularité suffisante du champ $\underline{\underline{\sigma}}$. En particulier, il est nécessaire de s'interroger sur les conditions régissant d'éventuelles discontinuités de $\underline{\underline{\sigma}}$.

Soit donc Σ une surface de discontinuité du champ de contraintes. \underline{N} désigne la normale à Σ au point \underline{x} . Soit encore Ω^+ et Ω^- les domaines situés respectivement au-dessus et au-dessous de Σ , selon le sens défini par \underline{N} . On note $\underline{\underline{\sigma}}^+$ (resp. $\underline{\underline{\sigma}}^-$) le champ de contraintes dans le domaine Ω^+ (resp. Ω^-). L'existence d'une discontinuité de $\underline{\underline{\sigma}}$ à la traversée de la surface Σ se traduit par

$$[\underline{\underline{\sigma}}](\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}^+(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}^-(\underline{x}, t) \neq 0 \quad (5.23)$$

On considère à présent un sous-système Ω'_t de Ω_t , de géométrie cylindrique. Les génératrices, colinéaires à \underline{N} , s'appuient sur le contour d'un élément de surface matériel $\underline{N}dS$ situé au point \underline{x} . Les faces supérieure et inférieure sont situées respectivement dans Ω^+ et Ω^- , de part et d'autre de la surface de discontinuité. La normale extérieure au cylindre est $+\underline{N}$ sur la face supérieure et $-\underline{N}$ sur la face inférieure. Compte tenu de (5.14), l'identité (5.6) s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^+ \cdot \underline{N} dS - \underline{\underline{\sigma}}^- \cdot \underline{N} dS + \int_{S^L} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{N} dS_t = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{\gamma} - \underline{F}) d\Omega_t \quad (5.24)$$

Comme dans la démonstration du lemme du tétraèdre, on fait tendre la longueur du cylindre vers 0, ce qui a pour effet de faire disparaître les intégrales sur S^L et sur Ω'_t . On obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}}^+(\underline{x}, t) \cdot \underline{N} = \underline{\underline{\sigma}}^-(\underline{x}, t) \cdot \underline{N} \Leftrightarrow [\underline{\underline{\sigma}}](\underline{x}, t) \cdot \underline{N} = 0 \quad (5.25)$$

Ainsi, *une discontinuité du champ de contraintes à la traversée d'une surface est compatible avec la loi fondamentale de la dynamique sous réserve que le vecteur-contrainte soit continu.*

On prendra garde au fait que le raisonnement conduisant à (5.25) fait l'hypothèse que l'accélération $\underline{\gamma}$ est bornée. On a donc supposé implicitement qu'il n'existe aucune discontinuité de la vitesse sur la trajectoire¹.

5.4 Dualisation de l'équation de la dynamique

5.4.1 Théorème des puissances virtuelles

On se donne sur Ω_t un champ de vecteurs $\underline{x} \rightarrow \underline{u}'(\underline{x})$ définissant une cinématique virtuelle. Sous réserve d'une régularité suffisante, ce champ peut être choisi de façon quelconque. Le cas particulier du mouvement réel correspond à $\underline{u}'(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}, t)$ (section 2.2.2). Comme dans le cas des milieux curvilignes, on dualise l'équation de la dynamique des milieux continus (5.18) en la multipliant par $\underline{u}'(\underline{x})$ et en intégrant ce produit scalaire sur Ω_t :

$$\int_{\Omega_t} \underline{u}' \cdot (\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{F} - \underline{\gamma})) d\Omega_t = 0 \quad (5.26)$$

¹La continuité du vecteur-contrainte n'est donc pas assurée dans le cas des ondes de choc

En appliquant la formule d'intégration par parties, il vient :

$$\int_{\Omega_t} \underline{u}' \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} u'_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} u'_i \sigma_{ij} n_j dS_t \quad (5.27)$$

En revenant aux notations intrinsèques, on a donc :

$$\int_{\Omega_t} \underline{u}' \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega_t = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}' d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{u}' \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t \quad (5.28)$$

On note $\underline{\underline{d}}'$ le taux de déformation virtuel associé au champ \underline{u}' , c'est-à-dire la partie symétrique du gradient de \underline{u}' . En utilisant la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans (5.28) et en reportant le résultat dans (5.26), on obtient finalement :

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}' d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{\gamma}} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{F} \cdot \underline{u}' d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{u}' \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_t \quad (5.29)$$

Ce résultat constitue le théorème des puissances virtuelles.

5.4.2 Théorème des travaux virtuels

On formule à présent les trois hypothèses suivantes :

- *évolution quasistatique du système.* Cette hypothèse autorise à négliger le terme de quantité d'accélération dans (5.18).
- *transformation infinitésimale.* D'une façon générale, la masse volumique se calcule en fonction de la masse volumique ρ_o dans la configuration initiale par la relation $\rho = \rho_o/J$ qui résulte de la conservation de la masse. En transformation infinitésimale, le jacobien J est peu différent de 1. Au premier ordre près en $|\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi}|$, nous sommes donc fondés à remplacer la force volumique $\rho \underline{F}$ par l'approximation $\rho_o \underline{F}$.
- *petits déplacements.* Comme pour le milieu curviligne, cette hypothèse est introduite afin de pouvoir confondre la configuration actuelle, inconnue à ce stade, et la configuration initiale.

La conjonction de ces trois hypothèses permet de simplifier (5.18) sous la forme suivante :

$$(\Omega_o) \quad \text{div}_X \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t) + \rho_o(\underline{X}) \underline{F}(\underline{X}, t) = 0 \quad (5.30)$$

où l'opérateur de divergence opère sur les coordonnées \underline{X} dans la configuration initiale.

On considère alors un champ de vecteurs $\underline{X} \rightarrow \underline{\xi}'(\underline{X})$ défini sur Ω_o auquel on donne le nom de champ de déplacements virtuels. Le choix de ce dernier est quelconque sous réserve qu'il possède une régularité suffisante. La démarche de dualisation de (5.30) est formellement identique à celle détaillée à la section 5.4.1. Le taux de déformation $\underline{\underline{d}}'$ de (5.29) est remplacé par le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\xi}}'$ associé à $\underline{\xi}'$:

$$\int_{\Omega_o} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}' d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \underline{F} \cdot \underline{\xi}' d\Omega_o + \int_{\partial\Omega_o} \underline{\xi}' \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_o \quad (5.31)$$

Le membre de droite représente le travail virtuel des efforts extérieurs, c'est-à-dire les forces volumiques $\rho_o \underline{F}$ agissant dans Ω_o et les forces surfaciques $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ agissant sur sa frontière, dans le mouvement virtuel envisagé. Le membre de gauche s'interprète comme le travail des efforts intérieurs représentés par le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la déformation virtuelle du système. Il porte à ce titre le nom de travail de déformation. L'égalité du travail des efforts extérieurs et du travail de déformation constitue le théorème des travaux virtuels.

5.4.3 Puissance et travail des efforts extérieurs dans le mouvement réel

Il est possible d'appliquer le théorème des travaux virtuels en faisant jouer le rôle de $\underline{\xi}'$ par le champ $\underline{X} \rightarrow \underline{U}(\underline{X}, t)$ des vitesses lagrangiennes à l'instant t . Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}'$, partie symétrique du gradient de $\underline{\underline{\xi}}'$ est alors égal au taux de déformation lagrangien $\underline{\underline{\dot{\xi}}}$. On a donc

$$\int_{\Omega_o} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega_o + \int_{\partial\Omega_o} \underline{U} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_o \quad (5.32)$$

On reconnaît dans le membre de droite la puissance mécanique \mathcal{P}_{ext} que le chargement extérieur volumique et surfacique fournit effectivement au système en travaillant dans le mouvement réel. Le travail mécanique réel fourni au système par le chargement est la quantité W obtenue en intégrant la puissance \mathcal{P}_{ext} sur l'intervalle d'étude $[0, T]$:

$$W = \int_0^T \mathcal{P}_{ext} dt \quad (5.33)$$

D'après le théorème des travaux virtuels sous la forme (5.32), ce travail est égal à l'énergie consommée dans la déformation du système :

$$W = \int_0^T \left(\int_{\Omega_o} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} d\Omega_o \right) dt \quad (5.34)$$

En particulier, (5.32) et (5.34) montrent que la puissance et l'énergie mécaniques reçues par un système élémentaire occupant le volume $d\Omega_o$ dans la configuration initiale sont :

$$\mathcal{P}_{ext} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} d\Omega_o \quad ; \quad W = d\Omega_o \int_0^T \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} dt \quad (5.35)$$

Chapitre 6

Comportement élastique du solide tridimensionnel

La problématique de la loi de comportement a déjà été rencontrée dans le contexte des milieux curvilignes. Dans l'hypothèse des transformations infinitésimales auxquelles nous allons nous limiter, il s'agit d'établir le lien existant entre les efforts intérieurs, représentés par le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et les déformations représentées par le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Cette question se pose à l'échelle du volume élémentaire que nous avons appelé point matériel. Nous nous préoccuperons également du couplage thermomécanique, c'est-à-dire de l'effet d'une variation de température sur les contraintes et les déformations.

Dans la pratique expérimentale, une éprouvette homogène du matériau étudié joue le rôle de ce point matériel. On s'efforce d'appliquer à celle-ci des états de contrainte, de déformation et de température uniformes. L'approche phénoménologique de la loi de comportement consiste à tenter de trouver une formulation mathématique rendant compte le plus fidèlement possible des observations disponibles. Nous verrons à la section 6.2 que les lois de la thermodynamique permettent de préciser le cadre des formulations possibles. Auparavant, nous allons prendre contact avec le comportement élastique dans le cadre particulier des évolutions isothermes en exploitant une définition énergétique de l'élasticité.

6.1 Comportement élastique en condition isotherme

On s'intéresse d'abord à la formulation du comportement en l'absence de variations de température. On soumet l'éprouvette du matériau étudié à une histoire de déformation $t \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On admet que les champs de déformations et de contraintes sont uniformes dans l'éprouvette qui joue donc le rôle d'un point matériel. Dans les conditions de cet essai, le comportement élastique peut être défini par le fait que l'énergie mécanique totale W fournie à l'éprouvette au cours de cette histoire de chargement (section 5.4.2) ne dépend en fait que de l'état final, c'est-à-dire de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(T)$. On va montrer que l'état de contraintes peut être calculé à partir de la connaissance de la fonction $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow W(\underline{\underline{\varepsilon}})$. On note w l'énergie W rapportée au volume initial de l'éprouvette et l'on écrit la relation (5.35) :

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) = \int_0^T \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} dt \quad (6.1)$$

En dérivant par rapport au temps T , on obtient

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) \dot{\varepsilon}_{ij} = \underline{\underline{\sigma}}(T) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (6.2)$$

En l'absence de restriction physique sur les histoires de déformations possibles, tous les choix du taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ sont possibles. Il en résulte que

$$\sigma_{ij}(T) = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(T)) \quad (6.3)$$

ce que nous noterons de façon intrinsèque sous la forme suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.4)$$

On obtient donc le tenseur des contraintes en dérivant $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ par rapport au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La donnée de la fonction $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ caractérise complètement le comportement élastique en condition isotherme. Elle est appelée énergie élastique de déformation¹. Pour se familiariser avec (6.4), on pourra utilement revenir au cas particulier où le système mécanique est un ressort de raideur k , la force F jouant le rôle de la contrainte et l'allongement x celui de la déformation. La transcription de la relation (6.4) énonce que la force F est la dérivée de l'énergie $\frac{1}{2}kx^2$ par rapport à l'allongement x .

6.2 Comportement thermoélastique

On note T la température et $\tau = T - T_o$ la variation de température à partir de l'état initial. On s'intéresse à une évolution *quasistatique* du système élémentaire constitué d'un point matériel.

On introduit l'énergie libre et l'entropie du point matériel. En les rapportant au volume $d\Omega_o$ de ce dernier dans la configuration initiale, on obtient les densités volumiques lagrangiennes d'énergie libre et d'entropie, notées respectivement ψ et s . Par définition, la densité volumique e d'énergie interne est la quantité $e = \psi + Ts$.

Le premier principe de la thermodynamique, écrit pour le système élémentaire en évolution quasistatique, énonce que les variations de l'énergie interne résultent de la puissance mécanique \mathcal{P}_{ext} et du taux de la chaleur Q qui lui sont apportés :

$$\mathcal{P}_{ext} + Q = \dot{e} d\Omega_o = \left(\dot{\psi} + s\dot{T} + \dot{s}T \right) d\Omega_o \quad (6.5)$$

Le comportement élastique peut être caractérisé par deux propriétés :

1. Les évolutions du système sont réversibles. D'après *le second principe de la thermodynamique*, cette hypothèse conduit à l'égalité

$$Q = T \dot{s} d\Omega_o \quad (6.6)$$

2. Les fonctions énergétiques ψ et s dépendent de deux arguments, appelés variables d'état : il s'agit du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de la variation de température τ^2 .

¹ou, plus précisément, densité volumique lagrangienne d'énergie élastique de déformation.

²ce deuxième postulat généralise la définition de l'élasticité donnée à la section 6.1

D'après (5.35), la puissance mécanique reçue par le point matériel est $\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega_o$. En utilisant ce résultat ainsi que (6.6) dans (6.5), on obtient

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\psi} + s\dot{T} \quad (6.7)$$

Il reste à introduire dans (6.7) le deuxième postulat définissant le comportement élastique. On obtient

$$0 = \left(-\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + s \right) \dot{T} \quad (6.8)$$

En l'absence de restrictions sur les évolutions des variables d'état, tous les choix de $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ et de \dot{T} sont possibles. On déduit donc de (6.8), non plus une équation d'état comme dans le cas isotherme, mais deux relations déterminant le tenseur des contraintes et l'entropie en fonction des variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et τ :

$$(a) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) \quad ; \quad (b) \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) \quad (6.9)$$

qui généralise (6.4) en condition anisotherme. Il convient à ce propos de préciser le lien existant entre l'énergie libre et l'énergie w introduite à la section 6.1. A cet effet, plaçons-nous en condition isotherme en faisant $\dot{T} = 0$ dans (6.7). En rapprochant le résultat de (6.2), on trouve

$$\dot{\psi} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{w} \quad (6.10)$$

Il reste à intégrer (6.10) à partir de l'instant initial, c'est-à-dire de la configuration de référence ³. On obtient :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau = 0) - \psi^o = w(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.11)$$

où l'on a noté ψ^o l'énergie libre de l'unité de volume dans la configuration de référence. En condition isotherme, $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau = 0)$ s'interprète donc⁴ comme l'énergie mécanique qu'il convient de donner à l'unité de volume pour l'amener à partir de l'état de référence dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

6.3 Comportement thermoélastique linéaire

D'après (3.15), nous savons que l'hypothèse de transformations infinitésimales entraîne que les déformations soient elles-mêmes infinitésimales. Nous supposons également que les variations de température sont petites. Dans le domaine des petites déformations et des petites variations de température, il est naturel de chercher à simplifier la formulation (6.9) du comportement thermoélastique en approchant la densité d'énergie libre ψ par un développement limité de ψ par rapport aux variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et τ .

Nous considérons donc le développement limité au second ordre en fonction des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans une base orthonormée et de τ . Il comporte un terme constant, des termes linéaires en ε_{ij} et en τ , des termes quadratiques en $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$, en $\tau \varepsilon_{ij}$ et en τ^2 :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) = \psi^o - s^o \tau - \frac{1}{2} c \tau^2 + \sigma_{ij}^o \varepsilon_{ji} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk} - k_{ij} \varepsilon_{ji} \tau \quad (6.12)$$

³pour laquelle la déformation est nulle, par définition

⁴à une constante près

Ce développement fait intervenir diverses constantes scalaires ou tensorielles. Certaines d'entre elles s'interprètent dès maintenant à partir de considérations énergétiques.

1. Tout d'abord, en faisant $\tau = \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$, on obtient $\psi = \psi^o$ qui représente donc l'énergie libre dans l'état de référence.
2. Puis, en condition isotherme ($\tau = 0$, $\underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$), nous obtenons d'après (6.11) l'énergie nécessaire pour amener l'éprouvette en condition isotherme dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sigma_{ij}^o \varepsilon_{ji} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk} = \underline{\underline{\sigma}}^o : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (6.13)$$

Cette remarque fournit le sens physique énergétique des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^o$ et $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$. ψ étant une énergie par unité de volume, on observe que ces tenseurs sont homogènes à une contrainte. On reviendra dans la suite sur leur signification en termes d'efforts intérieurs.

A titre d'illustration de la relation (6.13), il est instructif de considérer un ressort de raideur k , comprimé dans l'état initial pris comme référence par une force F_o induisant un allongement x_o . Nous adoptons $\delta x = x - x_o$ comme variable d'état qui joue le rôle de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas tridimensionnel. L'énergie fournie au ressort dans une évolution quelconque à partir de l'état initial $x = x_o$ vaut :

$$w = \frac{1}{2} k (x^2 - x_o^2) = \delta x F_o + \frac{1}{2} k (\delta x)^2 \quad (6.14)$$

Les coefficients F_o et k jouent dans (6.14) le rôle des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^o$ et $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ dans (6.13). En extrapolant, on pressent que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^o$ rend compte d'une éventuelle contrainte dans l'état initial (on parle de précontrainte), tandis que le tenseur $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ généralise le concept de raideur dans le contexte tridimensionnel.

3. Enfin, en bloquant la déformation ($\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$), nous obtenons successivement

$$\psi = \psi^o - s^o \tau - \frac{1}{2} c \tau^2 \quad (6.15)$$

puis d'après (6.9), $s = s^o + c\tau$. Le scalaire s^o est donc l'entropie dans l'état de référence $\tau = 0$, $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$. On en déduit également que la quantité $T\dot{s}$ qui représente le taux de chaleur reçu par la matière (par unité de volume initial) vaut $Tc\dot{\tau}$. Ainsi Tc peut-il s'interpréter comme la capacité calorifique de l'unité de volume de matière à déformation nulle.

Notons au passage l'expression suivante de l'énergie libre qui fait apparaître la contribution spécifique de l'énergie élastique de déformation :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) = \psi^o - s^o \tau - \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tau - \frac{1}{2} c \tau^2 + w(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.16)$$

Comme le tenseur de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est symétrique, on ne restreint pas la généralité en imposant que les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^o$ et $\underline{\underline{k}}$ le soient également et que les composantes de $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ satisfassent $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ainsi que $\bar{C}_{ijkl} = C_{jikl}$. Par ailleurs, les couples (i, j) et (k, l) étant choisis, on note que le groupement $\varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk}$ intervient dans (6.12) dans les deux termes $\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk}$ et $\frac{1}{2} C_{klij} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{lk}$. En d'autres termes, sa contribution est contrôlée par la somme $\frac{1}{2} (C_{klij} + C_{ijkl})$, de sorte que l'on ne restreint pas la généralité en imposant la symétrie

des couples (i, j) et (k, l) , c'est-à-dire en imposant $C_{klij} = C_{ijkl}$.

Avec ces conventions, on utilise à présent le développement de ψ à l'ordre 2 dans les équations d'état (6.9). Il vient :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + C_{ijkl}\varepsilon_{lk} - \tau k_{ij} \\ s = s^o + c\tau + k_{ij}\varepsilon_{ji} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^o + \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \tau \underline{\underline{k}} \\ \text{(b)} & s = s^o + c\tau + \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases} \quad (6.17)$$

En approchant l'énergie libre par un développement quadratique, on obtient donc des expressions linéaires de la contrainte et de l'entropie. Ceci résulte évidemment du fait que les équations d'état (6.9) mettent en jeu des dérivées premières de l'énergie libre. Un matériau dont le comportement est donné par (6.17) est dit thermoélastique linéaire. Du point de vue énergétique, il s'agit d'un matériau dont on peut décrire l'énergie libre dans le domaine des petites déformations et des petites variations de température par un développement quadratique du type (6.12).

Notons que l'équation (6.17a) peut être inversée de façon à exprimer la déformation en fonction de la variation de température et de la contrainte :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{S} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^o) + \tau \underline{\underline{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1} \\ \underline{\underline{\alpha}} = \mathbb{C}^{-1} : \underline{\underline{k}} \end{cases} \quad (6.18)$$

(6.17a) confirme l'interprétation de $\underline{\underline{\sigma}}^o$ comme contrainte initiale, et celle de \mathbb{C} comme transcription tridimensionnelle du concept de raideur. Par ailleurs, nous observons que (6.17a) et (6.17b) fournissent deux interprétations différentes du tenseur $\underline{\underline{k}}$, de nature respectivement mécanique et énergétique. D'après (6.17a), $\underline{\underline{k}}$ représente la contrainte qui s'établit dans une éprouvette initialement non contrainte lorsqu'on la soumet à une variation de température unité *sans lui permettre de se déformer*. D'après (6.17b), un échange de chaleur se produit entre le monde extérieur et l'éprouvette lorsqu'on impose à celle-ci une déformation *en condition isotherme*. Plus précisément, le taux de chaleur en question est $T\dot{s} = T\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$. Le produit $T\underline{\underline{k}}$ s'interprète donc comme la chaleur latente de déformation de l'unité de volume de matière. En d'autres termes, au cours d'une évolution isotherme à la température T amenant l'éprouvette dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, celle-ci reçoit une quantité de chaleur égale à $T\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$.

6.4 Comportement thermoélastique linéaire isotrope

Nous considérons ici un matériau thermoélastique linéaire. Nous recherchons les simplifications qu'apporte l'hypothèse d'isotropie dans l'écriture de l'énergie libre et des équations d'état. Nous examinons successivement le cas où l'état initial est naturel et celui où il est précontraint.

6.4.1 Etat initial naturel

L'état de référence de l'éprouvette est ici l'état naturel : c'est par définition l'état non contraint. On a donc $\underline{\underline{\sigma}}^o = 0$.

L'énergie mécanique $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ nécessaire pour amener l'éprouvette dans l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dépend a priori des valeurs principales du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ainsi que de ses directions principales.

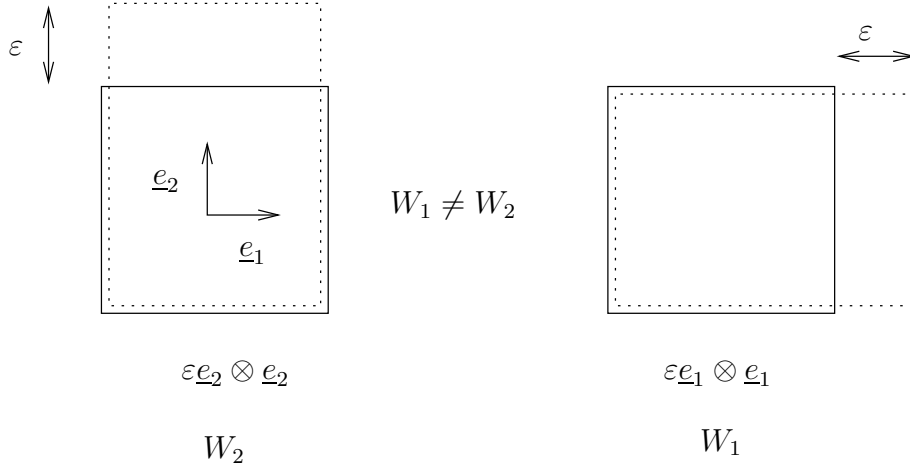


FIG. 6.1 – extensions simples dans 2 directions orthogonales

A titre d'exemple, deux extensions simples dans lesquelles la même déformation ε est appliquée respectivement selon les directions \underline{e}_1 et \underline{e}_2 (figure 6.1) ne consomment pas en général la même énergie mécanique :

$$w(\varepsilon \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) \neq w(\varepsilon \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (6.19)$$

Ceci résulte du fait que le matériau peut comporter des directions de renforcement et des directions de faiblesse.

A l'inverse, un matériau est dit isotrope si toutes les directions de l'espace sont équivalentes du point de vue mécanique. Dans ces conditions, l'orientation des directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est sans effet sur la valeur de $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$. En particulier, l'égalité a lieu dans (6.19).

Etant formulée en fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, la propriété d'isotropie fait intervenir explicitement le choix de la configuration de référence. L'isotropie n'est donc pas une propriété intrinsèque dans la mesure où un matériau peut être isotrope ou non selon le choix de la configuration de référence. Nous nous intéressons ici à la situation où le matériau est isotrope dans l'état naturel.

On exprime l'indépendance de $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ vis-à-vis des directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en écrivant que cette énergie est une fonction des trois invariants de $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = w(I_1, I_2, I_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii} \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^3 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} \end{cases} \quad (6.20)$$

Ayant en vue la formulation d'une loi de comportement linéaire, on se limite comme en (6.13) à un développement quadratique de w par rapport à $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La fonction quadratique isotrope (s'annulant en 0) la plus générale comporte un terme linéaire en I_1 et deux termes du second degré respectivement en I_1^2 et I_2 . Etant du troisième degré, l'argument I_3 n'intervient pas. On cherche donc $w(\underline{\underline{\varepsilon}})$ sous la forme suivante :

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sigma^o I_1 + \frac{\lambda}{2} I_1^2 + 2\mu I_2 \quad (6.21)$$

Nous savons que le coefficient σ^o du terme linéaire rend compte de l'existence d'une contrainte initiale, en l'occurrence de la forme $\underline{\underline{\sigma}}^o = \sigma^o \underline{\underline{\delta}}^5$. Comme l'état initial est ici l'état naturel, cette contrainte initiale est nulle : $\sigma^o = 0$.

La propriété d'isotropie concerne également le tenseur $\underline{\underline{k}}$. Rappelons que la chaleur reçue par l'éprouvette de volume unité lorsqu'on lui applique la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en condition isotherme à la température T est $T \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$. Dans le cas isotrope, cette chaleur ne dépend de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que par l'intermédiaire de ses invariants. Comme elle varie linéairement en fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, c'est en fait une fonction linéaire de I_1 . Ceci impose que $\underline{\underline{k}}$ soit un tenseur sphérique :

$$T \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = T k I_1 \Rightarrow \underline{\underline{k}} = k \underline{\underline{\delta}} \quad (6.22)$$

On retrouve immédiatement ce résultat en utilisant l'interprétation mécanique de $\underline{\underline{k}}$. En effet, nous avons vu qu'il représente la contrainte s'établissant dans une éprouvette soumise à une variation de température unité lorsqu'on l'empêche de se déformer. L'équivalence de toutes les directions de l'espace impose que cette contrainte soit un tenseur sphérique. En résumé, compte tenu de (6.16), (6.21) et (6.22), l'expression du développement quadratique de l'énergie libre pour un matériau isotrope dans l'état naturel est la suivante :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) = \psi^o - s^o \tau - \frac{1}{2} c \tau^2 + \frac{\lambda}{2} I_1^2 + 2\mu I_2 - k I_1 \tau \quad (6.23)$$

On vérifie sans peine les règles de dérivation suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\delta}} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \end{array} \right. \quad (6.24)$$

de sorte que les équations d'état (6.9) calculées avec l'énergie libre de (6.23) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k \tau \underline{\underline{\delta}} \\ \text{(b)} \quad s = s^o + c \tau + k tr \underline{\underline{\varepsilon}} \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Les relations (6.25) constituent les équations d'état du *matériau thermoélastique linéaire, initialement dans l'état naturel et isotrope dans cet état*. On note que le calcul du tenseur des contraintes en fonction de celui des déformations requiert la donnée des trois constantes λ , μ et k . λ , μ portent le nom de constantes de Lamé et sont homogènes à une contrainte (Pa). Le produit $k\tau$ étant lui aussi homogène à une contrainte, l'unité du scalaire k est le $Pa^o K^{-1}$.

La confrontation avec les équations d'état (6.17) de l'élasticité linéaire dans le cas général conduit à souligner dans (6.25) les spécificités suivantes :

- La contrainte initiale est nulle, conformément à la définition de l'état naturel.
- Le tenseur d'élasticité \mathbb{C} ne dépend plus que des deux constantes λ et μ .
- Le tenseur $\underline{\underline{k}}$ est sphérique.

⁵On rappelle que $I_1 = tr \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\delta}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

En inversant (6.25a), on obtient la déformation en fonction de la variation de température et de la contrainte :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\delta}} + \alpha \tau \underline{\underline{\delta}} \quad (6.26)$$

où l'on a posé

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{3\lambda + 2\mu} \quad (6.27)$$

E porte le nom de *module de Young*. Il est homogène à une contrainte. ν , appelé *coefficient de Poisson*, est sans dimension. La détermination expérimentale et l'interprétation physique de E et ν seront présentées à la section 6.6.4. α est appelé *coefficient de dilatation thermique linéique* et s'exprime en $^{\circ}K^{-1}$. Cette terminologie sera justifiée à la section 6.6.2. Voici quelques valeurs typiques :

	E (GPa)	ν	α ($10^{-5}^{\circ}K^{-1}$)
béton	≈ 30	0,2	10
acier doux	200	0,25 – 0,30	12
granite	70	0,27	9

(6.28)

On montre que la forme quadratique $\frac{\lambda}{2}I_1^2 + 2\mu I_2$ qui représente l'énergie élastique de déformation w est définie positive si et seulement si $E > 0$ et $\nu \in]-1, 1/2[$:

$$(\forall \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \frac{\lambda}{2}I_1^2 + 2\mu I_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0, \nu \in]-1, 1/2[\quad (6.29)$$

Ces conditions assurent la stabilité du matériau⁶. On verra dans l'étude des problèmes classiques (traction simple, compression isotrope ...) qu'elles assurent également la conformité des solutions avec l'intuition.

6.4.2 Etat initial précontraint

Comme à la section 6.4.1, le matériau étudié est élastique linéaire et il est isotrope dans l'état naturel. Cependant, on s'intéresse à présent à l'écriture des équations d'état lorsque le choix de la configuration de référence n'est pas l'état naturel, c'est-à-dire qu'il existe une contrainte initiale. Cette situation est évidemment d'une très grande importance pratique.

Plus précisément, on suppose que l'on passe de l'état naturel à la configuration de référence en question par une transformation infinitésimale isotherme $\underline{\underline{\phi}}^o$, associée à une déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^o$. Comme à la section 3.2.1, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (resp. $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$) désigne la déformation atteinte dans la configuration actuelle, comptée à partir de l'état naturel (resp. de la configuration de référence)⁷. La relation (3.23) indique que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ se décompose de façon additive en $\underline{\underline{\varepsilon}}^o$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^o + \underline{\underline{\varepsilon}}^r \quad (6.30)$$

⁶En effet, s'il existait un état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour lequel $w(\underline{\underline{\varepsilon}}) < 0$, il serait possible de récupérer de l'énergie mécanique dans la transition de l'état naturel vers l'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$. L'état naturel serait donc instable.

⁷l'exposant 'r' renvoie à 'référence'

L'état de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^o$ atteint dans la configuration de référence est déduit de (6.25) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^o = \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}^o) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^o \quad (6.31)$$

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^o$ représente la précontrainte dans la configuration de référence. Par ailleurs, (6.25) permet également de déterminer l'état de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ atteint dans la configuration actuelle en fonction de la déformation comptée à partir de l'état naturel :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\delta}} \quad (6.32)$$

En retranchant terme à terme les équations (6.32) et (6.31) et en utilisant (6.30), on trouve l'expression de la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de la déformation comptée à partir de la configuration de référence. C'est l'équation d'état recherchée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^o + \lambda (tr \underline{\underline{\varepsilon}}^r) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^r - k\tau \underline{\underline{\delta}} \quad (6.33)$$

On note que le matériau n'est pas isotrope dans la configuration de référence précontrainte, sauf si l'état de contraintes initial $\underline{\underline{\sigma}}^o$ est sphérique.

La relation (6.33) s'inverse de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \frac{1+\nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^o) - \frac{\nu}{E} tr (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^o) \underline{\underline{\delta}} + \alpha\tau \underline{\underline{\delta}} \quad (6.34)$$

Cherchons pour finir l'expression de l'énergie libre dans l'état actuel en fonction de la variation de température et de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$. On part de l'énergie libre donnée par (6.23) en fonction de τ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans laquelle on introduit la décomposition (6.30). On obtient

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^r, \tau) = \psi^r - s^r \tau - \frac{1}{2} c \tau^2 + \underline{\underline{\sigma}}^o : \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \frac{\lambda}{2} I_1^{r2} + 2\mu I_2^r - k I_1^r \tau \quad (6.35)$$

où ψ^r et s^r désignent l'énergie libre et l'entropie de l'unité de volume dans l'état de référence :

$$\psi^r = \psi^o + \frac{\lambda}{2} I_1^{o2} + 2\mu I_2^o \quad ; \quad s^r = s^o + k I_1^o \quad (6.36)$$

6.5 Définition du chargement

On se place dans le cadre d'hypothèses de la section 5.4.2 (évolution quasistatique du système, transformation infinitésimale, petits déplacements). Comme pour le milieu curviligne, le chargement appliqué à une structure tridimensionnelle est défini par des données sur les efforts et sur les déplacements. Il comporte de plus des données sur le champ de température.

données sur le déplacement

Dans le cadre des données dites de type classique auquel nous nous limitons ici, les données sur le déplacement portent sur la valeur de certaines composantes du vecteur déplacement qui est prescrite sur certaines parties de la frontière $\partial\Omega_o$ du système. Il s'agit donc de conditions aux limites. Plus précisément, on note \mathcal{S}_{ξ_i} la partie de la frontière où la composante ξ_i est donnée et l'on note ξ_i^d la valeur qui lui est attribuée⁸. On a donc

$$(\forall \underline{x} \in \mathcal{S}_{\xi_i}) \quad \xi_i(\underline{x}) = \xi_i^d(\underline{x}) \quad (6.37)$$

⁸L'exposant 'd' se rapporte à une grandeur donnée.

On parle d'encastrement lorsque le vecteur déplacement est donné égal à 0 sur une partie de la frontière.

Les données sur le déplacement sont rassemblées symboliquement sous la notation \mathcal{D}^C :

$$\mathcal{D}^C = \{\mathcal{S}_{\xi_i}, \xi_i^d\} \quad (6.38)$$

données en efforts

Il s'agit de données qui portent sur les efforts extérieurs appliqués au système. On a vu qu'il s'agit d'une part de forces à distance et d'autre part de forces de contact décrites par une densité surfacique sur la frontière $\partial\Omega_o$.

Les forces à distance doivent être données sous la forme d'une densité volumique $\rho \underline{F}^d$ dont les propriétés ont été discutées à la section 5.1.

En revanche, la densité surfacique \underline{T} sur $\partial\Omega_o$ n'est pas en général une donnée du problème. Ainsi, si le déplacement est prescrit sur une partie de la frontière, les efforts nécessaires pour obtenir ce déplacement sont inconnus⁹. Le cadre des conditions aux limites de type classique consiste à prescrire certaines composantes de la force surfacique sur certaines parties de la frontière. On note \mathcal{S}_{T_i} la partie de la frontière sur laquelle la composante T_i est donnée et l'on note T_i^d la valeur qui lui est attribuée. On a donc

$$(\forall \underline{x} \in \mathcal{S}_{T_i}) \quad T_i(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad (6.39)$$

Notons qu'une partie de la frontière où la force surfacique est donnée égale à 0 est dite

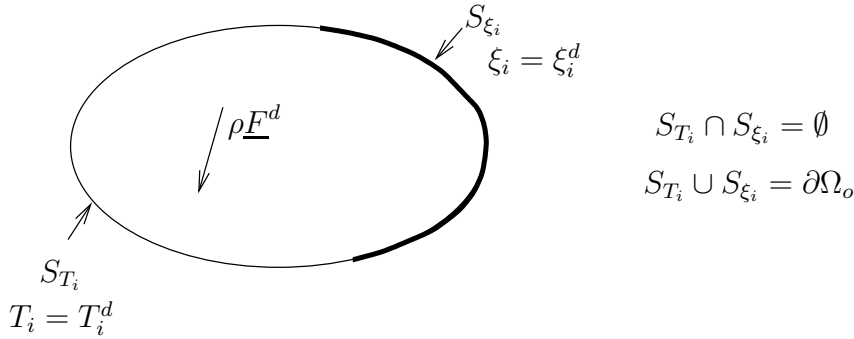


FIG. 6.2 – conditions aux limites

libre de contraintes.

On rassemble symboliquement l'ensemble des données en efforts sous la notation \mathcal{D}^S :

$$\mathcal{D}^S = \{\rho \underline{F}^d, \mathcal{S}_{T_i}, T_i^d\} \quad (6.40)$$

Nous venons de voir qu'il pouvait y avoir incompatibilité entre données statiques et données cinématiques. En l'occurrence, il convient de prescrire en chaque point de la frontière et pour chaque direction de l'espace une information scalaire portant soit sur le déplacement (ξ_i^d), soit sur la force surfacique (T_i^d), sans qu'il soit possible de prescrire simultanément l'effort T_i et la grandeur cinématique duale ξ_i . Mathématiquement, ces considérations signifient que, pour chaque valeur de l'indice i , les ensembles \mathcal{S}_{T_i} et \mathcal{S}_{ξ_i} constituent une partition de la frontière du système :

$$\mathcal{S}_{T_i} \cup \mathcal{S}_{\xi_i} = \partial\Omega_o \quad ; \quad \mathcal{S}_{T_i} \cap \mathcal{S}_{\xi_i} = \emptyset \quad (6.41)$$

⁹Il n'est pas possible d'imposer à la fois la tension et l'allongement d'un ressort.

données sur la température

En toute rigueur, la détermination de la température est couplée à celle des déplacements et des contraintes. On peut entrevoir l'origine physique de cette difficulté mathématique dans le fait que l'application d'une déformation à un système élémentaire s'accompagne d'un échange de chaleur entre ce dernier et le reste du système (voir section 6.3), de nature à modifier l'équilibre thermique global. Cependant, dans la pratique, on montre que ce couplage thermoélastique est en général suffisamment faible pour qu'il puisse être négligé. Il est alors possible de déterminer le champ de températures comme la solution d'un problème purement thermique. Nous supposons que ce problème est résolu, ce qui confère au champ de température et à sa variation τ le statut de donnée.

6.6 Equations et méthodes de résolution des problèmes d'élasticité 3D

6.6.1 Définition de la solution d'un problème d'élasticité et méthodes

On applique au système un chargement défini par le champ de température τ ainsi que les ensembles \mathcal{D}^C de (6.38) et \mathcal{D}^S de (6.40). On s'intéresse aux efforts intérieurs et à la transformation géométrique qui en résultent. En vue de caractériser la solution du problème, on introduit les concepts de champs de contraintes statiquement admissibles et de champs de déplacements cinématiquement admissibles.

champs de contraintes statiquement admissibles

Un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini sur Ω_o est dit statiquement admissible (s.a.) s'il est en équilibre avec les données en efforts \mathcal{D}^S . Il est donc soumis à l'équation locale (5.30) pour la valeur $\rho_o \underline{\underline{F}}^d$ des forces de volume, à la condition de continuité (5.25) et aux conditions aux limites (6.39) :

$$\underline{\underline{\sigma}}' \text{ s.a. avec } \mathcal{D}^S \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \operatorname{div}_X \underline{\underline{\sigma}}' + \rho_o \underline{\underline{F}}^d = 0 \quad (\Omega_o) \\ \text{(b)} & [\underline{\underline{\sigma}}'] \cdot \underline{\underline{N}} = 0 \quad (\Sigma) \\ \text{(c)} & \sigma'_{ij} n_j = T_i^d \quad (\mathcal{S}_{T_i}) \end{cases} \quad (6.42)$$

L'ensemble des champs $\underline{\underline{\sigma}}'$ s.a. avec \mathcal{D}^S est noté \mathbf{S} .

champs de déplacements cinématiquement admissibles

Un champ de déplacements $\underline{\underline{\xi}}'$ défini sur Ω_o est dit cinématiquement admissible (c.a.) s'il est continu, continûment différentiable par morceaux, et s'il satisfait les conditions aux limites définies par \mathcal{D}^C :

$$\underline{\underline{\xi}}' \text{ c.a. avec } \mathcal{D}^C \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & \underline{\underline{\xi}}' \in C^0; C^1 \text{ par morceaux} \\ \text{(b)} & \xi'_i = \xi_i^d \quad (\mathcal{S}_{\xi_i}) \end{cases} \quad (6.43)$$

L'ensemble des champs $\underline{\xi}'$ c.a. avec \mathcal{D}^C est noté \mathbf{C} .

Avec ces définitions, on appelle solution du problème le couple formé par un champ de contraintes $\underline{\sigma}$ s.a. et un champ de déplacements $\underline{\xi}$ c.a., tels que la contrainte $\underline{\sigma}$ soit en tout point du système reliée par l'équation d'état (6.17a) à la déformation dans le déplacement $\underline{\xi}$:

$$(\underline{\sigma}, \underline{\xi}) \text{ solution} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \underline{\sigma} \text{ s.a.} & ; & \underline{\xi} \text{ c.a.} \\ \text{(a)} & \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^o + \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) - \tau \underline{k} \\ & \text{ou bien} \\ \text{(b)} & \underline{\varepsilon} = \mathbb{S} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^o) + \tau \underline{\alpha} \end{cases} \end{cases} \quad (6.44)$$

En fixant la géométrie du système, l'hypothèse des petits déplacements rend linéaire l'équation locale de la statique (6.42a) ainsi que les conditions aux limites (6.42c) par rapport aux données en efforts $^{10}\rho_o \underline{F}^d$ et T_i^d . On note également la linéarité des conditions aux limites cinématiques (6.43b) par rapport aux ξ_i^d . Enfin, la relation entre contraintes et déformations est elle-même linéaire¹¹. Les ensembles \mathcal{S}_{ξ_i} et \mathcal{S}_{T_i} étant fixés, on vérifie alors sans peine que la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ dépend de façon linéaire des données $\rho_o \underline{F}^d$, T_i^d et ξ_i^d .

La définition de la solution suggère deux approches pour la résolution du problème. A la recherche d'un couple $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$ vérifiant (6.44), on peut :

- sélectionner un champ de contraintes s.a. et tenter, à partir des déformations associées à ces contraintes par la loi de comportement (6.44b) d'en déduire un champ de déplacements c.a. : c'est la *méthode de résolution par les contraintes*.

ou bien

- sélectionner un champ de déplacements c.a. et tenter de démontrer que le champ de contraintes qui lui est associé par la loi de comportement (6.44a) est s.a. : c'est la *méthode de résolution par les déplacements*.

On remarque que la méthode des contraintes procède par intégration puisqu'elle nécessite de remonter d'un champ de déformation vers un champ de déplacements, tandis que la méthode des déplacements qui passe par la détermination de la déformation à partir du déplacement procède par dérivation. Voyons à présent le détail de chaque méthode.

6.6.2 Méthode de résolution par les contraintes

Les étapes sont les suivantes :

1. On se donne $\underline{\sigma} \in \mathbf{S}$.
2. On calcule $\underline{\varepsilon}$ par (6.44b).
3. On teste la compatibilité géométrique de $\underline{\varepsilon}$. Dans le cas négatif, $\underline{\sigma}$ n'est pas solution.
4. Dans le cas positif, on recherche les champs de déplacements $\underline{\xi}'$ tels que $\underline{\varepsilon} = (\underline{\nabla} \underline{\xi}' + {}^t \underline{\nabla} \underline{\xi}')/2$.

¹⁰Soulignons que ce ne serait pas le cas si ces équations étaient écrites sur une configuration fonction du chargement.

¹¹Cette propriété repose en particulier sur l'hypothèse de transformation infinitésimale (chapitre 6)

5. On teste s'il existe un champ $\underline{\xi}$ c.a. parmi les champs $\underline{\xi}'$ déterminés à l'étape précédente. Dans le cas négatif, $\underline{\sigma}$ n'est pas solution. Dans le cas positif, le couple $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$ est la solution recherchée.

La méthode des contraintes est dominée par la problématique de la compatibilité géométrique introduite à la section 3.2.2 du chapitre 2¹². Soulignons toutefois que la compatibilité géométrique de $\underline{\varepsilon}$ ne suffit pas pour assurer que $\underline{\sigma}$ est solution. Il reste en effet à tester la compatibilité de $\underline{\sigma}$ avec les conditions aux limites en déplacement (étape 5). Evidemment, en l'absence de conditions aux limites sur les déplacements, l'étape 5 est sans objet. Dans ces conditions, $\underline{\sigma}$ est solution si et seulement si $\underline{\varepsilon}$ est géométriquement compatible.

Illustrons sur un exemple le rôle des conditions aux limites en déplacements dans la méthode des contraintes. On considère un solide élastique linéaire homogène isotrope, initialement dans l'état naturel. Il est soumis à partir de l'état initial à une variation de température uniforme τ . Il n'y a pas de forces de volume. Examinons deux cas :

1. La frontière $\partial\Omega_o$ du système est libre de contraintes ($\underline{T} = 0$ sur $\partial\Omega_o$). Il est immédiat de vérifier (voir (6.42)) que le champ de contraintes nul est s.a. avec les données (nulles) en effort. Le champ de déformation associé est $\underline{\varepsilon} = \alpha\tau\underline{\delta}$. Etant uniforme, il est évidemment géométriquement compatible. En l'absence de conditions aux limites en déplacement, *on peut donc affirmer que $\underline{\sigma} = 0$ est la solution en contraintes*. La dilatation étant libre ($\underline{T} = 0$), la variation de température n'induit pas de contrainte dans la pièce. Les champs $\underline{\xi}'$ de l'étape 4 sont donnés par

$$\underline{\xi}'(\underline{X}) = \alpha\tau\underline{X} + \text{mouv. rigid.} \quad (6.45)$$

La solution en déplacements, déterminée à un mouvement rigidifiant près, est une homothétie de rapport $1 + \alpha\tau$. Ceci fournit le sens physique du coefficient α et justifie la terminologie de coefficient de dilatation thermique linéique.

2. On suppose à présent qu'une partie de la frontière est encastree, la partie complémentaire étant libre de contraintes. Le champ de contraintes nul est encore s.a. et nous venons de voir que le champ de déformation uniforme $\underline{\varepsilon} = \alpha\tau\underline{\delta}$ qui lui est associé par le comportement est bien géométriquement compatible. En revanche, aucun champ $\underline{\xi}'$ de la forme (6.45) ne peut satisfaire une condition aux limites d'encastrement. On en conclut que le champ de contraintes nul n'est pas solution. En fait, sous l'action de la variation de température, le solide a tendance à se dilater. Le fait de gêner la dilatation au voisinage de la zone encastree fait apparaître des contraintes dans cette région.

On remarque que la méthode des contraintes pour le milieu continu tridimensionnel n'est pas systématique : elle ne permet d'obtenir la solution que d'un petit nombre de problèmes. Dans le cas du milieu continu tridimensionnel, \mathbf{S} est un espace de dimension infinie, et il n'existe pas d'outils permettant de construire ses éléments de façon systématique. C'est la raison pour laquelle l'étape 1 relève bien plus de l'intuition que de la méthode.

¹²On cherche parfois à s'assurer directement sur les composantes de $\underline{\sigma}$ de la compatibilité géométrique du champ de déformations $\underline{\varepsilon}$ associé à $\underline{\sigma}$ par la loi de comportement. C'est l'objet de l'équation de Beltrami qui ne sera pas présentée ici. Par exemple, si les composantes de $\underline{\sigma}$ dans une base cartésienne orthonormée sont des fonctions linéaires des coordonnées, il en est de même de celles de $\underline{\varepsilon}$. La compatibilité géométrique de $\underline{\varepsilon}$ est donc acquise en condition isotherme. Elle dépend de celle du champ $\tau\underline{\alpha}$ dans le cas anisotherme.

6.6.3 Méthode de résolution par les déplacements

Les étapes sont les suivantes :

1. On se donne $\underline{\xi} \in \mathbf{C}$.
2. On calcule la déformation associée $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^t \underline{\nabla} \underline{\xi})/2$.
3. On calcule $\underline{\underline{\sigma}}$ par (6.44a).
4. On teste si $\underline{\underline{\sigma}}$ est s.a. . Dans le cas positif, $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ est solution du problème.

En éliminant le champ de contraintes dans (6.42a) en fonction du champ de déplacements, on obtient une équation différentielle qui permet de tester directement sur le déplacement si les conditions de l'équilibre local sont satisfaites. Cette équation ne prend cependant de forme simple que dans le cas où *les caractéristiques élastiques du système sont homogènes et isotropes*. En supposant pour simplifier que l'état initial est naturel, et en introduisant (6.25a) dans (6.42a), on trouve :

$$\lambda \underline{\text{grad}}(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu \text{div } \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho \underline{F}^d - k \underline{\text{grad}} \tau = 0 \quad (6.46)$$

On remarque en outre que $\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{div } \underline{\xi}$ et que

$$\text{div } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\Delta \xi_i \underline{e}_i + \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi})) \quad (6.47)$$

de sorte que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ associé à $\underline{\xi}$ (via $\underline{\underline{\varepsilon}}$) par la loi de comportement satisfait la condition (6.42a) si et seulement si $\underline{\xi}$ est solution de l'équation différentielle suivante

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} + \rho \underline{F}^d - k \underline{\text{grad}} \tau = 0 \quad (6.48)$$

qui porte le nom d'*équation de Navier*. L'intérêt de (6.48) réside dans le fait de regrouper une fois pour toutes les étapes 2 à 4 de la méthode des déplacements. Malheureusement, elle n'est pas une condition suffisante pour que $\underline{\xi}$ soit solution. En effet, pour qu'il soit s.a., le champ de contraintes doit également satisfaire la condition de continuité (6.42b) et les conditions aux limites en effort (6.42c). En revanche, si $\underline{\xi}$ possède une régularité suffisante et s'il n'existe pas de condition aux limites en contraintes, un champ de déplacements c.a. et satisfaisant (6.48) est solution du problème.

Illustrons l'emploi de l'équation de Navier en revenant au problème du chargement thermique. Comme à la section 6.6.2, le système est un solide élastique linéaire homogène isotrope, initialement dans l'état naturel que l'on soumet à partir de l'état initial à une variation de température uniforme τ en l'absence de forces de masse. Envisageons deux types de conditions aux limites :

1. On suppose d'abord que le solide est encasté sur toute sa frontière. Le champ de déplacements nul est évidemment c.a. avec ces conditions aux limites et satisfait l'équation de Navier (6.48). En l'absence de conditions aux limites en contraintes, on peut conclure que c'est la solution du problème. On déduit de (6.25a) que le champ de contraintes est uniforme et vaut $\underline{\underline{\sigma}} = -k\tau \underline{\underline{\delta}}$. On retrouve ici *pour un système macroscopique* l'interprétation mécanique de k présentée pour *un système élémentaire* à la section 6.3. Notons que l'équation de Navier montre, par le terme en $\underline{\text{grad}} \tau$, que ce résultat est faux si la variation de température n'est plus uniforme.

2. Supposons à présent qu'une partie de la frontière soit encastrée, et que la partie complémentaire soit libre de contraintes. En raison de l'existence de conditions aux limites en contraintes, l'équation de Navier n'est plus une condition suffisante pour que $\underline{\xi}$ soit solution du problème. En effet, en partant comme dans la situation précédente de l'hypothèse $\underline{\xi} = 0$, on retrouve le champ $\underline{\sigma} = -k\tau\underline{\delta}$ qui n'est manifestement pas s.a. avec les conditions en efforts sur la partie de la frontière libre de contraintes.

6.6.4 Expérience de traction simple

L'objet de cette section est de présenter la détermination expérimentale du module de Young E et du coefficient de Poisson ν ainsi que l'interprétation physique de ces quantités. Ce propos fournit également l'occasion d'illustrer la méthode de résolution directe par les contraintes de la section 6.6.2.

Détermination de la solution

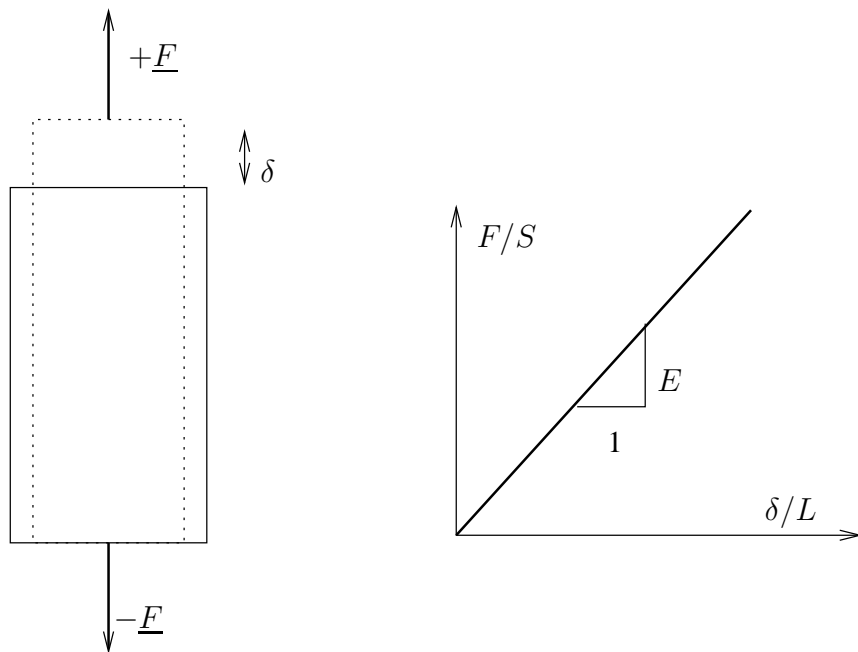


FIG. 6.3 – expérience de traction simple

On considère une pièce homogène de forme cylindrique, dont les génératrices sont colinéaires à \underline{e}_3 , limitée inférieurement par le plan $X_3 = 0$ et supérieurement par le plan $X_3 = H$. Elle est constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope. Initialement dans l'état naturel, elle est soumise en condition isotherme ($\tau = 0$) et en l'absence de forces de volume ($\rho_o \underline{F}^d = 0$) à une expérience de traction simple (figure 6.3). Elle consiste à imposer un déplacement vertical δ à la face supérieure, la face inférieure restant dans le plan $X_3 = 0$, et la face latérale S^L étant libre de contraintes. Plus précisément, les

conditions aux limites propres au chargement en question sont les suivantes :

$$\begin{aligned} X_3 = 0 : \quad \xi_3^d &= 0 \quad T_1^d = T_2^d = 0 \\ X_3 = H : \quad \xi_3^d &= \delta \quad T_1^d = T_2^d = 0 \\ S^L : \quad \underline{T}^d &= 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Les conditions aux limites en efforts et l'absence de forces de volume suggèrent de rechercher la solution en contrainte sous la forme d'un champ uniforme uniaxial :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (6.50)$$

où σ reste à déterminer. Pour toute valeur de σ , on vérifie que le champ de (6.50) est s.a. Le champ de déformations associé est uniforme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)) \quad (6.51)$$

Il est donc géométriquement compatible. Les déplacements associés à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{\sigma}{E} (X_3 \underline{e}_3 - \nu(X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2)) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

La condition $\xi_3^d = 0$ en $X_3 = 0$ impose $\lambda_3 = p = q = 0$ tandis que la condition $\xi_3^d = \delta$ en $X_3 = H$ fixe $\sigma = E\delta/H$. Les champs

$$\underline{\underline{\sigma}} = E \frac{\delta}{H} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad ; \quad \underline{\underline{\xi}} = \frac{\delta}{H} (X_3 \underline{e}_3 - \nu(X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2)) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

sont donc solutions du problème. On observe que les degrés de liberté λ_1 , λ_2 et r ne sont pas fixés par les conditions aux limites en déplacement de (6.49).

Interprétation de E et ν

La résultante \underline{F} des forces qu'il faut exercer sur la section $X_3 = H$ pour imposer le déplacement δ de cette section est obtenue par intégration du vecteur-contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$:

$$\underline{F} = F \underline{e}_3 = \int_{X_3=H} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 dA = ES \frac{\delta}{H} \underline{e}_3 \quad (6.54)$$

où S désigne l'aire de la section droite de la pièce. Le module de Young est donc la pente de la droite donnant la force normalisée F/S en fonction de la déformation axiale δ/H . L'interprétation du coefficient de Poisson est obtenue en analysant la déformée de la pièce sous l'action de la traction qui lui est imposée. A un mouvement de corps rigide près,

Chapitre 7

Introduction à la Mécanique des Fluides

A la différence des solides, la notion de configuration de référence est en général dépourvue d'intérêt pour la compréhension des évolutions d'un fluide. En effet, comme on le verra les efforts intérieurs qui se développent au sein d'un fluide ne sont pas fonction des évolutions du système à partir d'un état particulier fixé à l'avance. Par conséquent, la description lagrangienne s'avère inadaptée et l'on préférera le mode eulérien de description de la cinématique, objet du chapitre 4.

Dans le présent chapitre qui vise une introduction à la mécanique des fluides, on se limite aux modèles de fluide parfait et de fluide visqueux newtonien. Dans une première section, on présente des généralités sur les fluides et on introduit la loi de comportement des fluides newtoniens. Une seconde section est ensuite consacrée à un bref exposé de la statique des fluides. Puis on établit les équations (de Navier-Stokes) régissant la dynamique des fluides. Le chapitre se poursuit par une revue des conditions aux limites entre un fluide et un obstacle (typiquement la paroi d'un solide), et entre deux fluides non miscibles. La dernière section est dédiée à la description et la résolution de deux problèmes classiques d'écoulement stationnaire de fluides visqueux incompressibles : écoulement entre deux plaques planes parallèles, écoulement de Poiseuille.

7.1 Généralités sur les fluides - Fluides Newtoniens

7.1.1 Classification des fluides

On désigne sous le nom général de fluides, des milieux continus matériels qui peuvent se mettre sous une forme quelconque lorsqu'ils sont soumis à des efforts même très faibles. Cette définition permet d'exclure les milieux plastiques, qui se comportent comme des solides tant que les contraintes en leur sein ne dépassent pas un certain seuil. Les fluides recouvrent trois grandes catégories : gaz, liquides et plasmas. Mais on rencontre des états plus originaux : lorsqu'on dépasse la température critique d'un équilibre liquide vapeur d'un corps pur (état superfluide). Les fluides s'opposent aux solides, bien que dans certains cas, il ne soit pas facile de trancher. Souvent c'est une question d'échelle. En fait, la distinction n'a pas forcément beaucoup d'importance. Si on est capable de trouver une

loi de comportement approprié pour le milieu, on peut ignorer sa nature.

D'un point de vue mathématique, on dit qu'un milieu continu est un fluide si le tenseur de contraintes est une fonction des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (partie symétrique du gradient du champ de vitesse eulérien) : $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} u(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\underline{grad}} u(\underline{x}, t) \right)$. Il en résulte l'existence d'une application f telle que

$$\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{d}}) \quad (7.1)$$

De plus, on supposera l'isotropie du milieu.

On notera que le tenseur des contraintes de Cauchy, $\underline{\underline{\sigma}}$, ainsi que celui des taux de déformation, $\underline{\underline{d}}$ sont deux grandeurs eulériennes. Ainsi, les fluides n'ont qu'une mémoire instantanée.

Plusieurs critères sont utilisés pour classer les fluides :

- nature : gaz, liquides, plasmas (ces derniers ne seront pas traités dans ce cours introductif; la matière devient un plasma quand elle est chauffée à très haute température (environ 2 000 degrés Celsius));
- compressibilité : les gaz sont bien évidemment compressibles. Une des caractéristiques des liquides est leur faible compressibilité.
- viscosité : cette propriété introduit des efforts liés aux gradients de vitesse dans le fluide. Nous l'examinerons dans ce qui suit.

7.1.2 Fluides newtoniens

La viscosité est une propriété caractéristique de la majorité des fluides. Elle s'applique aussi bien aux gaz qu'aux liquides, même si elle est plus importante pour les liquides. L'expérience indique qu'en plus de la pression régnant dans le fluide (et notée p), les efforts intérieurs représentés par le tenseur des contraintes de Cauchy comportent une partie qui est fonction du taux de déformation, $\underline{\underline{\tau}}$, dite, contrainte visqueuse :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tau}}, \quad (7.2)$$

Il apparait que la loi de comportement d'un fluide est fournie par la donnée d'une relation entre $\underline{\underline{\tau}}$ et $\underline{\underline{d}}$.

Définition d'un fluide newtonien : Un fluide est newtonien lorsque la contrainte visqueuse $\underline{\underline{\tau}}$ est une fonction linéaire de $\underline{\underline{d}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{d}} \quad (7.3)$$

λ et μ sont des coefficients scalaires, dits de viscosités. Malgré la similarité des notations, il convient de ne pas confondre les coefficients de viscosité, homogènes à une pression multipliée par le temps (l'unité est le Poiseuille, Pl) avec les coefficients de Lamé en élasticité, homogènes à une pression (MPa). Par ailleurs, en s'appuyant sur la décomposition de $\underline{\underline{d}}$ en parties sphérique et déviatorique, la relation de comportement peut se mettre sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + K \text{tr}(\underline{\underline{d}})\underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{d}}' \quad (7.4)$$

dans lequel on a posé $3K = 3\lambda + 2\mu$ et \underline{d}' désigne la partie déviatorique du tenseur des taux de déformation \underline{d} . Le coefficient K est dénommé viscosité de volume. Il n'intervient dans la loi de comportement que si l'écoulement se fait avec des variations de volumes. On peut montrer que le coefficient de compressibilité du fluide K ainsi que μ doivent être positifs.

Exemples de valeurs de la viscosité La viscosité d'un fluide dépend en général de son état thermodynamique (Température, Pression). Cette dépendance varie suivant la nature du fluide. Pour l'eau, la référence pour μ est à 1 mPl (mili Poiseuille), le Poiseuille étant égal à 1Pa.s.

Comme pour tous les liquides la viscosité décroît avec la température : pour l'eau à 20°C on a 1,79mPl, tandis qu'à 100°C on a une valeur de 0,28mPl. Ce phénomène s'explique par le fait que lorsque la température augmente, les interactions faibles entre les molécules diminuent et donc cela abaisse la "cohésion" des particules fluides, notamment par dissociation des amas de molécules.

Les huiles ont des valeurs de viscosité très variables : elles peuvent passer de quelques 10mPl à quelques 100mPl. Les liquides courants qui ont les viscosités les plus extrêmes sont la glycérine (1.5Pl) et l'éther (0.24mPl).

La viscosité dans les gaz est beaucoup plus faible que dans les liquides. Par exemple dans l'air à 20°C sous 1 atmosphère on a 18μPl. Le comportement des gaz vis-à-vis de la température est opposé à celui des liquides : il croît avec la température comme avec la pression. Cela s'explique par l'augmentation des échanges moléculaires entre les particules fluides. Pour l'air : à 0°C on a 11μPl, tandis qu'à 1000°C on a une valeur de 49μPl.

7.2 Statique des fluides

Dans le cas statique, le champ de vitesse est nul (fluide au repos), ce qui conduit à la nullité du tenseur taux de déformations. La loi de comportement se réduit ainsi à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1}, \quad (7.5)$$

L'équation de continuité (conservation de la masse) est sans objet dans un tel cas, tandis que les équations de mouvement (conservation de la quantité de mouvement) conduisent à

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0 \quad (7.6)$$

Si on suppose que la seule force volumique présente est celle liée à la pesanteur, $\underline{f} = \underline{g}$, l'équation de la statique s'exprime alors

$$-\underline{\text{grad}} p + \rho \underline{g} = 0 \quad (7.7)$$

En raison de la présence de ρ dans cette équation, sa résolution requiert de statuer sur la nature du fluide, c'est à dire en pratique de prendre en compte ou non la compressibilité du fluide. Cette distinction s'avère importante, les calculs étant assez différents dans les 2 cas. On notera d'ailleurs que de ce point de vue, l'étude de la statique des fluides se révèle d'un certain intérêt en montrant les différences entre fluides compressibles et incompressibles.

7.2.1 Cas des fluides incompressibles

Expression de la pression : Dans ce cas, la masse volumique reste constante : $\rho = \rho_0$. Si on choisit comme axe \underline{z} la verticale ascendante, l'équation d'équilibre devient :

$$\underline{\text{grad}} p + \rho_0 g \underline{z} = 0 \quad (7.8)$$

dont l'intégration conduit immédiatement à

$$p = p_0 - \rho_0 g z \quad (7.9)$$

avec p_0 la valeur de la pression à l'altitude $z = 0$.

Pour illustrer le propos, on pourra considérer une immersion hydrostatique de $h = 10m$. Dans ce cas, l'augmentation de pression vaut

$$\Delta p = \rho_0 g h = 10^5 Pa \quad (7.10)$$

qui est de l'ordre de la pression atmosphérique.

Pour être complet, on évoquera le principe d'Archimède (qui n'en est en fait pas un puisqu'il découle entièrement des équations de la Mécanique des Milieux continus) dont on se contentera ici de rappeler juste l'énoncé :

Enoncé du principe d'Archimède : Tout corps Ω entièrement ou partiellement plongé dans un liquide au repos subit de la part de ce dernier une poussée verticale dirigée vers le haut égale au poids du liquide déplacé et appliqué au centre de gravité géométrique de la partie immergée.

7.2.2 Fluides compressibles

On s'intéresse à présent au cas de gaz parfaits compressibles pour lesquels on se propose de déterminer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude. La différence avec un liquide provient du fait que la masse volumique ne peut pas être considérée comme constante.

L'équation de la statique est à nouveau donnée par (7.7), soit $\frac{dp}{dz} = -\rho g$.

Pour simplifier, plaçons nous dans le cas isotherme, il vient :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad (7.11)$$

d'où

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} M g \quad (7.12)$$

puis par intégration

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} z} \quad (7.13)$$

avec p_0 la pression à l'altitude $z = 0$. En assimilant par exemple l'air à un gaz parfait de masse molaire $29g$, le passage du niveau de la mer à une altitude de $1000m$ entraîne une variation de pression telle que : $\frac{p}{p_0} = 0,88$.

7.3 Equations de la dynamique des fluides

On se propose de présenter les équations de la dynamique des fluides, d'abord dans le cas des fluides incompressibles, puis en prenant en compte la compressibilité.

7.3.1 Cas des fluides visqueux incompressibles

Les inconnues du problème d'écoulement sont la pression $p(\underline{x})$ et les 3 composantes de la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x})$. L'équation locale traduisant l'incompressibilité du fluide s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{V} = 0 \quad (7.14)$$

En reportant la relation de comportement du fluide newtonien incompressible (7.3) dans les équations de mouvement, $\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \gamma = \rho \frac{d\underline{V}}{dt}$, il vient :

$$-\underline{\operatorname{grad}} p + \rho \underline{f} + 2\mu \operatorname{div}(\underline{\underline{d}}) = \rho \frac{d\underline{V}}{dt} \quad (7.15)$$

Détaillons le calcul de $\operatorname{div}(\underline{\underline{d}})$ en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\operatorname{div}(2\underline{\underline{d}}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \underline{e}_i \quad (7.16)$$

qui s'écrit, en tenant compte de l'incompressibilité

$$\operatorname{div}(2\underline{\underline{d}}) = \Delta V_i \underline{e}_i + \underline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \underline{V}) = \Delta V_i \underline{e}_i \quad (7.17)$$

En reportant ce résultat dans (7.15), on obtient les équations dites de Navier-Stokes pour le fluide visqueux incompressible :

$$-\underline{\operatorname{grad}} p + \rho \underline{f} + 2\mu \Delta \underline{V} = \rho \frac{d\underline{V}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{V} \cdot \underline{V} \right) \quad (7.18)$$

où $\Delta \underline{V}$ désigne le champ de vecteur dont les composantes en cartésiennes orthonormées sont les laplaciens des composantes du champ \underline{V} (cf. chapitre calcul tensoriel).

On notera que pour un fluide parfait incompressible ces équations se réduisent à

$$-\underline{\operatorname{grad}} p + \rho \underline{f} = \rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{V} \cdot \underline{V} \right) \quad (7.19)$$

qui sont les équations d'Euler.

7.3.2 Cas des fluides visqueux compressibles

Les inconnues du problème d'écoulement sont à présent la pression $p(\underline{x}, t)$, les 3 composantes de la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x}, t)$ et la densité $\rho(\underline{x}, t)$ (en raison de la compressibilité du fluide). L'équation locale traduisant la conservation de la masse (équation de continuité) s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{V} = 0 \quad (7.20)$$

Pour l'établissement des équations de Navier-Stokes dans le cas compressible, on suit la même démarche que précédemment, en reportant la relation de comportement (7.3) dans les équations de mouvement, $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}} = \rho \gamma = \rho \frac{dV}{dt}$. Sans donc l'hypothèse d'incompressibilité il vient :

$$-\underline{\underline{grad}}p + (\lambda + \mu)\underline{\underline{grad}}(\text{div}\underline{V}) + \mu\Delta\underline{V} + \rho\underline{\underline{f}} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}\underline{V}.\underline{V}\right) \quad (7.21)$$

qui sont les équations dites de Navier-Stokes pour le fluide visqueux incompressible. Pour le fluide parfait compressible ces équations se réduisent également à celles d'Euler.

7.4 Types de conditions aux limites

Dans cette section on se propose de compléter les équations de la dynamique des fluides par les conditions aux limites usuellement rencontrées . En raison de la présence de 2 types de variables dans les équations du mouvement (variables cinématiques liées au champ de vitesse et variables dynamiques au travers du champ de contraintes), on distingue généralement :

- les conditions aux limites cinématiques, auxquelles doit satisfaire le champ de vitesse
- les conditions aux limites dynamiques auxquelles sont assujettis les champs de contrainte et de vitesse au bord du domaine ou à l'interface entre deux fluides.

Nous examinerons ainsi deux situations usuelles : conditions à l'interface fluide-solide, conditions à l'interface entre deux fluides non miscibles.

7.4.1 Conditions à l'interface entre un fluide et un solide

Considérons un écoulement autour d'un obstacle solide animé d'un mouvement de vitesse \underline{W} (éventuellement nulle, cas du solide immobile). On rappelle que le champ de vitesse en tout point de l'écoulement est noté \underline{V} . Pour l'écriture des conditions aux limites, on distingue :

- le cas du fluide parfait pour lequel des conditions d'imperméabilité (égalité des vitesses normales) doivent être satisfaites en tout point de l'interface :

$$\underline{V}.\underline{n} = \underline{W}.\underline{n} \quad (7.22)$$

- le cas des fluides visqueux pour lesquels, en raison de la viscosité, on observe une adhérence parfaite des particules se trouvant à l'interface "Fluide-Solide". Cela se traduit par une égalité des vecteur vitesses à cette interface.

$$\underline{V} = \underline{W} \quad (7.23)$$

Dans le cas particulier de parois immobiles, la vitesse des particules s'annule évidemment le long de l'interface.

7.4.2 Conditions à l'interface entre 2 fluides non miscibles

On s'intéresse à présent à l'interface entre deux fluides notés 1 et 2, cette interface se déplaçant à une vitesse \underline{W} . Les champs de vitesse au sein des fluides 1 et 2 sont notés \underline{V}_1 et \underline{V}_2 respectivement.

— le cas de fluides parfaits :

Les conditions cinématiques à l'interface entre les 2 fluides s'écrivent alors

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{n} = \underline{V}_2 \cdot \underline{n} = \underline{W} \cdot \underline{n} \quad (7.24)$$

et traduisent l'imperméabilité entre les 2 fluides.

Quant aux conditions dynamiques, elles correspondent à la continuité du vecteur contraintes en tout point de l'interface :

$$-p_1 \underline{n} = -p_2 \underline{n} \quad (7.25)$$

ce qui conduit à l'égalité des pressions en tout point de l'interface.

— le cas de fluides visqueux :

Les conditions cinématiques à l'interface entre les 2 fluides s'écrivent alors

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_2 = \underline{W} \quad (7.26)$$

et traduisent l'adhérence à l'interface entre les 2 fluides.

Quant aux conditions dynamiques, la continuité du vecteur contraintes à l'interface s'exprime :

$$(-p_1 \underline{1} + \underline{\tau}_1) \cdot \underline{n} = (-p_2 \underline{1} + \underline{\tau}_2) \cdot \underline{n} \quad (7.27)$$

7.5 Quelques problèmes d'écoulement simples stationnaires

On se propose d'étudier dans cette section deux problèmes classiques et élémentaires de mécanique des fluides. L'objectif principal est d'exposer la mise en équation du problème traité et de résoudre ce problème en s'appuyant sur les équations de dynamique des fluides. Pour la détermination complète de la solution on aura recours aux conditions aux limites. Dans ces 2 problèmes simples, les difficultés inhérentes aux équations de Navier-Stokes seront contournées en recherchant la solution sous la forme d'un écoulement laminaire (à lignes de courant connues).

7.5.1 Écoulement entre deux plaques planes parallèles (Couette plan)

Enoncé et mise en équation du problème

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques planes parallèles. L'écoulement est plan parallèle (plan O, x_1, x_2). Les deux plaques planes sont d'équation $x_2 = 0$ et $x_2 = H$, respectivement, la donnée H étant un scalaire strictement positif. Le plan $x_2 = 0$ est immobile, tandis que $x_2 = H$ est animé d'un mouvement

de translation de vitesse U suivant \underline{e}_1 , la donnée U étant une constante positive. Le champ de vitesse est ainsi de la forme

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 \quad (7.28)$$

On cherche la solution du problème sous la forme d'un écoulement laminaire dont les lignes de courants sont les droites $x_2 = \text{constante}$. Ceci réduit la recherche du champ de vitesse à celle d'une fonction scalaire $u_1(x_1, x_2)$, ce qui est de nature à simplifier significativement la résolution du problème.

Le fluide étant incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle, c'est à dire tel que $\text{div}\underline{V} = 0$. Il en résulte

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_1(x_2)\underline{e}_1 \quad (7.29)$$

En notant $p(x_1, x_2, x_3)$ le champ de pression dans l'écoulement, et en négligeant les forces à distance (forces de volume), les équations de Navier-Stokes, (7.18), s'écrivent :

$$-\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1(x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \quad (7.30)$$

La résolution de ces équations et la vérification des conditions aux limites permettront de déterminer entièrement les champs de pression et de vitesse de l'écoulement.

Le fluide étant visqueux, les conditions aux limites sur les deux plaques sont celles d'une adhérence parfaite qui s'expriment ici comme :

$$u_1(0) = 0 \quad ; \quad u_1(H) = U \quad (7.31)$$

Résolution du problème

Les deux dernières équations de (7.30) indiquent que le champ de pression ne dépend ni de x_2 ni de x_3 . Il vient donc $p = p(x_1)$. Le report dans la première équation de (7.30) donne :

$$\frac{\partial p(x_1)}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1(x_2)}{\partial x_2^2} \quad (7.32)$$

Les 2 membres de cette égalité dépendent de x_1 et de x_2 , respectivement. On en déduit qu'ils ne peuvent qu'être égaux à une constante que l'on notera $-C$. Il s'en suit :

$$p(x_1) = -Cx_1 + p_0 \quad (7.33)$$

En notant p_0 et p_L la pression dans les sections d'extrémité $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ (L étant la longueur du domaine d'écoulement), on a $C = \frac{p_0 - p_L}{L}$ d'où l'expression finale du champ de pression

$$p(x_1) = \frac{p_L - p_0}{L}x_1 + p_0 \quad (7.34)$$

On note que la distribution de pression dans l'écoulement est entièrement régie par la chute linéique de pression entre les 2 sections d'extrémité.

Venons en maintenant à la détermination du champ de vitesse. En reconsidérant l'équation (7.32), c'est à dire donc $\mu \frac{d^2 u_1(x_2)}{dx_2^2} = -C$, il vient, après intégration et écriture des conditions aux limites (7.31) :

$$u_1(x_2) = \frac{C}{2\mu} x_2(H - x_2) + \frac{U}{H} x_2 \quad (7.35)$$

où l'expression de C a été précédemment donnée.

Il apparait ainsi qu'outre la chute linéique de pression, représentée par C , la vitesse U de la plaque supérieure est l'autre grandeur qui contrôle le champ de vitesse de l'écoulement. Plus exactement, on note une compétition entre ces 2 données ; Pour l'allure précise du champ de vitesse, il conviendra notamment de distinguer les cas $C > 0$, $C = 0$ et $C < 0$. On est à même maintenant de déterminer le champ de vitesse de déformation puis, par la loi de comportement, la distribution des contraintes dans l'écoulement. Ceci fournit l'accès au calcul des efforts appliqués par le fluide sur les plaques planes.

7.5.2 Ecoulement de Poiseuille

Enoncé et mise en équation du problème

On considère un cylindre immobile, rectiligne, creux et de longueur L (supposée grande par rapport au diamètre, afin de diminuer l'influence des extrémités). Le Cylindre est de section circulaire, de rayon R . Les axes étant choisis (O, x_1, x_2, x_3) , l'axe du cylindre est considéré porté par Ox_3 , et les sections sont dans le plan $(O, X - 1, x_2)$. On cherche un écoulement laminaire ayant les lignes de courant parallèles à Ox_3 . Le champ de vitesse eulérien est ainsi de la forme :

$$\underline{V}(\underline{x}) = u_3(x_1, x_2, x_3) \underline{e}_3 \quad (7.36)$$

Le fluide étant incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle, $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$. Sa seule composante s'écrit alors

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) \quad (7.37)$$

d'où en reportant dans les équations Navier-Stokes, (7.18), avec le champ de pression $p(x_1, x_2, x_3)$, on obtient :

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} + \mu \Delta u_3(x_1, x_2) = 0 \quad (7.38)$$

avec $\Delta u_3 = \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$ le laplacien du champ scalaire $u_3(x_1, x_2)$.

Ces équations doivent être complétées par les conditions aux limites (adhérence) : $u_3 = 0$ sur le bord du cylindre, ce dernier dans le cas présent de la section circulaire considérée ici étant défini par $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

Résolution du problème

On cherche à résoudre les équations (7.38), avec les conditions aux limites précisées ci dessus. Les deux premières indiquent que le champ de pression ne dépend ni de x_1 ni

de x_2 . Il vient donc $p = p(x_3)$. Le report dans la troisième équation de (7.38) fournit :

$$\frac{\partial p(x_3)}{\partial x_3} = \mu \Delta u_3(x_1, x_2) \quad (7.39)$$

Les 2 membres de cette égalité étant dépendant de x_3 et de (x_1, x_2) , respectivement, on déduit qu'ils ne peuvent qu'être égaux à une constante que l'on notera $-C$. Il s'en suit pour le champ de pression :

$$p(x_3) = -Cx_3 + p_0 \quad (7.40)$$

où on a noté à nouveau p_0 et p_L la pression dans les sections d'extrémité $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ (L , longueur du domaine d'écoulement). On a $C = \frac{p_0 - p_L}{L}$ d'où l'expression finale du champ de pression

$$p(x_1) = \frac{p_L - p_0}{L} x_3 + p_0 \quad (7.41)$$

A nouveau, la distribution de pression dans l'écoulement est entièrement régie par la chute linéique de pression entre les 2 sections d'extrémité.

Pour la détermination du champ de vitesse, on considère que l'équation (7.39), c'est à dire maintenant

$$\mu \Delta u_3(x_1, x_2) = -C \quad (7.42)$$

Compte tenu de la géométrie cylindrique du domaine d'écoulement, avec une section circulaire de rayon R , on vérifie aisément que la solution de l'équation (7.42), avec les conditions aux limites (condition d'adhérence) $u_3 = 0$ sur le bord $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, est donnée par

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{C}{4\mu} (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \quad (7.43)$$

où C est la chute linéique dont l'expression est fournie auparavant.

De manière évidente, la vitesse de l'écoulement est contrôlée par cette chute linéique de pression C .

nouveau, il est maintenant possible de déterminer le champ des taux de déformation puis, par la loi de comportement, la distribution des contraintes dans l'écoulement, et enfin les efforts appliqués par le fluide sur la paroi du tube cylindrique.