Sorbonne Université **Année 2019-2020**

Master Sciences de l'Ingénieur - Mention mécanique

Ondes (M1)
1ère session - Lundi 6 Janvier 2020 - durée : 1h30
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Couplage d'une onde de flexion avec une onde sonore

Dans ce problème, on étudie le couplage d'une onde de flexion dans une plaque avec une onde sonore dans un fluide parfait. Le problème est découpé en 4 parties largement indépendantes (les résultats intermédiaires sont généralement rappelés).

1 Ondes sonores dans les fluides parfaits

On rappelle que dans un fluide parfait, les équations linéarisées de l'acoustique s'écrivent :

- équation linéarisée de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \underline{\nabla} . \underline{v_a} = 0 \quad (1)$$

- équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} = -\underline{\nabla} p_a \quad (2)$$

où $\rho_a(\underline{x}, t)$, $p_a(\underline{x}, t)$ et $\underline{v}_a(\underline{x}, t)$ désignent respectivement les perturbations des champs de masse volumique, de pression et de vitesse dues au passage de l'onde au point $\underline{x}$ et au temps t.

On notera $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_y \underline{e}_y + k_z \underline{e}_z$ le vecteur d'onde dans le fluide.

1. Rappeler la relation liant $p_a(\underline{x}, t)$ et $\rho_a(\underline{x}, t)$.
2. Montrer qu'on peut écrire une équation des ondes portant uniquement sur la variable $p_a(\underline{x}, t)$.
3. Quelle est la relation de dispersion associée à cette équation ? Justifiez.
4. Quelles sont les vitesses de phase et de groupe ? Ces ondes sont-elles dispersives ? Justifier.

2 Ondes de flexion dans une plaque mince élastique et isotrope

L'équation des ondes de flexion dans une plaque mince élastique et isotrope est :

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \Delta^2 u = \Sigma_i \underline{f}_i . \underline{e}_z \quad (3)$$

où $u(x, y, t)$ est le déplacement transverse de la plaque au point (x, y) au temps t, ρ_s est la masse surfacique de la plaque ($\rho_s = \rho/h$, avec ρ la masse volumique du matériau et h l'épaisseur de la plaque), $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

est la rigidité à la flexion des plaques (E module d'Young et ν coefficient de Poisson), $\underline{f}_i$ désigne un effort surfacique, enfin $\Delta^2 = \nabla^4$ est l'opérateur bi-laplacien.

Dans un premier temps, on considère la plaque seule (sans fluide) comme si elle était dans le vide donc sans effort surfacique : $\underline{f}_i = \underline{0} \forall i$.

On notera $\underline{k}_{PV} = k_{PVx}\underline{e}_x + k_{PVy}\underline{e}_y$ le vecteur d'onde de la plaque dans le vide ($|\underline{k}_{PV}| = k_{PV}$).

5. Quelle est la relation de dispersion de cette équation ?

6. Tracer ω en fonction de k_{PV}.

7. Quelles sont les vitesses de phase et de groupe ? Ces ondes sont-elles dispersives. Justifier.

3 Modélisation du couplage entre une onde de flexion dans une plaque avec une onde sonore dans un fluide

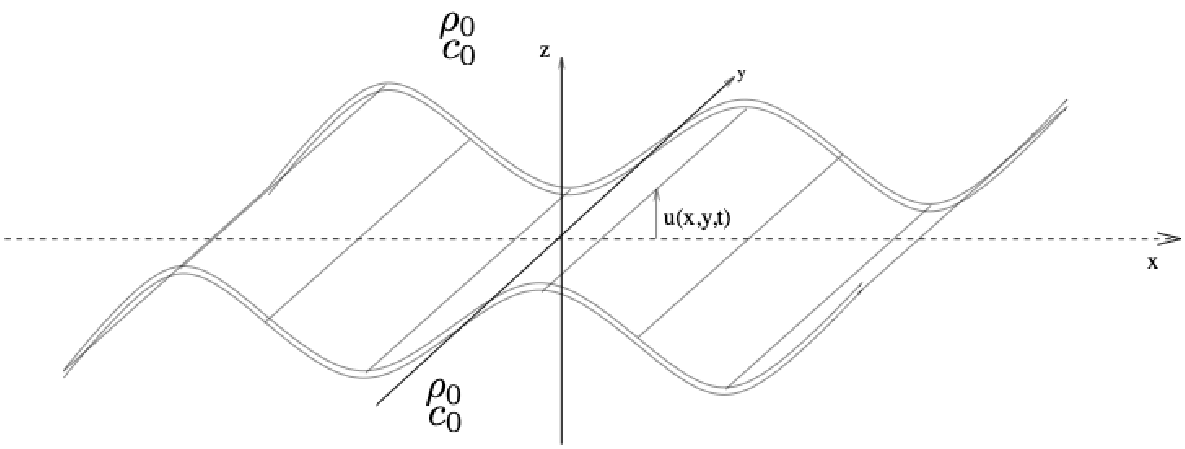

Figure 1: Plaque mince élastique isotrope parcourue par une onde de flexion

Dans cette partie, on s'intéresse au couplage entre les deux types d'ondes. La plaque est située en $z = 0$, et est entourée en $z < 0$ et $z > 0$ par un fluide de célérité c_0 et de masse volumique ρ_0, la pression hydrostatique est la même des deux côtés de la plaque (cf figure). On notera p_{a1} le champ de pression du côté inférieur ($z < 0$) et p_{a2} le champ de pression du côté supérieur ($z > 0$). On suppose que le problème est invariant suivant $\underline{e}_y$. Par conséquent, le vecteur d'onde dans la plaque s'écrit $\underline{k}_P = k_{Px}\underline{e}_x$ et celui dans le fluide $\underline{k} = k_x\underline{e}_x + k_z\underline{e}_z$. Enfin, on suppose que le champ de déplacement dans la plaque est de la forme :

$$u(x, y, t) = \hat{u}(x, y)e^{-i\omega t} = Fe^{i(k_P x - \omega t)} \tag{4}$$

et que les champs de pression pour $z < 0$ et $z > 0$ s'écrivent :

$$p_{a1}(x, y, z < 0, t) = \hat{p}_{a1}(x, y, z)e^{-i\omega t} = \left(A_1 e^{-ik_x x} + B_1 e^{ik_x x}\right)\left(C_1 e^{-ik_z z} + D_1 e^{ik_z z}\right)e^{-i\omega t} \tag{5}$$

et

$$p_{a2}(x, y, z > 0, t) = \hat{p}_{a2}(x, y, z)e^{-i\omega t} = \left(A_2 e^{-ik_x x} + B_2 e^{ik_x x}\right)\left(C_2 e^{-ik_z z} + D_2 e^{ik_z z}\right)e^{-i\omega t} \tag{6}$$

8. Pourquoi peut-on dire que $k_{1x} = k_{2x} = k_P = k_x$?

9. En déduire que $k_{1z} = k_{2_z} = k_z$.

10. A quoi correspondent les différents termes dans les champs de déplacement (Eq. 4) et de pression (Eqs. 5 et 6) ?

11. Si on suppose que les ondes sonores sont produites par la plaque et qu'elles ne rencontrent aucun obstacle lors de la propagation, justifiez que $D_1 = 0$ et $C_2 = 0$.

12. En tenant compte des hypothèses précédentes, montrer qu'on a la relation suivante (on supposera que l'épaisseur de la plaque est négligeable et on notera $-\frac{h}{2} = 0^-$ et $+\frac{h}{2} = 0^+$) :

$$\left(-\rho_s\omega^2 + Dk_P^4\right)\hat{u} = \hat{p}_{a1}(x, y, z = 0^-) - \hat{p}_{a2}(x, y, z = 0^+)$$

13. En utilisant les conditions aux limites, montrer qu'il est possible de relier les champs de pression au champ de déplacement : [1]

$$\begin{cases} \hat{p}_{a1}(x, y, z) = \frac{i\omega^2\rho_0\hat{u}}{k_z}e^{-ik_z z} \\ \hat{p}_{a2}(x, y, z) = \frac{-i\omega^2\rho_0\hat{u}}{k_z}e^{ik_z z} \end{cases}$$

14. En déduire que :

$$-\rho_s\omega^2 + Dk_P^4 - \frac{2i\omega^2\rho_0}{k_z} = 0 \tag{7}$$

15. On introduit le paramètre a tel que $a = (k_P^2 - k^2)^{1/2} = ik_z$, montrer que l'équation précédente (Eq. 7) peut se mettre sous la forme :

$$a^5 + 2k^2a^3 + a(k^4 - k_{PV}^4) + \frac{2k_{PV}^4\rho_0}{\rho_s} = 0, \tag{8}$$

où k_{PV} est le nombre d'onde des ondes de flexion pour la plaque dans le vide.

4 Interprétation physique du couplage

Dans cette partie on va simplifier le problème en se plaçant dans le cas où le fluide entourant la plaque a une masse volumique faible devant la masse surfacique de la plaque $\rho_0 << \rho_s$. On rappelle que le rayonnement dans les fluides 1 et 2 est régit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(x, y, z < 0) &= -\frac{\omega^2\rho_0}{a}\hat{u}(x, y)e^{-az}, \\ \hat{p}_2(x, y, z > 0) &= \frac{\omega^2\rho_0}{a}\hat{u}(x, y)e^{az}. \end{aligned}$$

16. Montrer que a peut prendre les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} a_1 = -\sqrt{-k^2 - k_{PV}^2} = -i\sqrt{k^2 + k_{PV}^2}, \\ a_2 = +\sqrt{-k^2 - k_{PV}^2} = i\sqrt{k^2 + k_{PV}^2}, \\ a_3 = -\sqrt{-k^2 + k_{PV}^2} \text{ si } k^2 < k_{PV}^2, \\ a_3 = -i\sqrt{k^2 - k_{PV}^2} \text{ si } k^2 > k_{PV}^2 \\ a_4 = +\sqrt{-k^2 + k_{PV}^2} \text{ si } k^2 < k_{PV}^2 \\ a_4 = i\sqrt{k^2 - k_{PV}^2} \text{ si } k^2 > k_{PV}^2 \end{cases} \tag{9}$$

17. On s'intéresse aux racines a_3 et a_4. On se place dans le cas où $k < k_{PV}$. Les deux racines sont-elles acceptables ? Si oui, de quel type d'onde s'agit-il ?

[1] On remarquera que $\hat{p}_{a1}(x, y, z) = \hat{p}_{a1}(x, y, z = 0)e^{-ik_z z}$ et que $\hat{p}_{a2}(x, y, z) = \hat{p}_{a2}(x, y, z = 0)e^{ik_z z}$

18. On s'intéresse aux racines a_3 et a_4. On se place dans le cas où $k > k_{PV}$. Les deux racines sont-elles acceptables ? Si oui, de quel type d'onde s'agit-il ?

19. Justifier le fait que pour ce type de couplage, on dise que "seules les ondes de flexion supersoniques génèrent un rayonnement dans le fluide".

20. A partir de quelle fréquence (appelée fréquence critique) les ondes de flexion deviennent-elles supersoniques ?