

Théorie classique de stratifiés et représentation polaire

Partie 1 – Expressions des tenseurs de comportement d'un stratifié par la représentation polaire

1. Rappeler les équations de comportement d'un stratifié issues de la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) et rappeler les expressions des tenseurs **A**, **B** et **D** en fonction des tenseurs $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$ représentant la rigidité des couches constitutives de la plaque stratifiée.
Particulariser ces relations dans le cas de couches constitutives identiques (c.a.d. même matériau et même épaisseur : on appelle alors *couche de base* ou *couche élémentaire* le matériau constitutif de chaque pli dans la séquence) : on indiquera alors $\mathbf{Q}(\delta_k)$ le tenseur de rigidité de la couche de base orientée à l'angle δ_k dans la séquence et $h = N t$, l'épaisseur totale de la plaque stratifiée, étant N le nombre de couches constitutives et t l'épaisseur d'une couche. Montrer donc que les tenseurs **A**, **B** et **D** peuvent s'écrire comme des sommes pesées des tenseurs de rigidité des couches $\mathbf{Q}(\delta_k)$ via des coefficients qu'il faudra expliciter (on notera b_k et d_k les coefficients pour les tenseurs de couplage et de flexion, respectivement : il faudra exprimer ces coefficients en fonction de l'indice k de la couche et du nombre total N de couches dans la stratification).
2. **CLPT en polaire** : on introduit la représentation polaire des tenseurs de l'élasticité 2D pour le tenseur **Q**. A partir des formules générales de la CLPT, écrire les paramètres polaires des tenseurs \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* et \mathbf{D}^* en fonction des paramètres polaires du tenseur **Q** de la couche de base et des angles δ_k dans la séquence (cas de stratifiés à couches identiques, cfr. notes et slides de cours). Que remarque-t-on pour les paramètres T_0^* et T_1^* en membrane et en flexion dans le cas de stratifiés à couches de base identiques ?
3. **Cas de couches de base orthotropes (renforts de fibres UD ou en tissus)** : la propriété d'orthotropie de la couche de base s'exprime par la relation polaire : $\Phi_0 - \Phi_1 = K \frac{\pi}{4}$, ce qui entraîne $\cos 4(\Phi_0 - \Phi_1) = (-1)^K$. Alors, les paramètres polaires indépendants nécessaires pour la représentation du matériau de la couche de base orthotrope seront T_0 , T_1 , R_1 , l'angle polaire Φ_1 (direction de l'axe principal d'orthotropie), ainsi qu'un nouveau paramètre que l'on notera $R_K = (-1)^K R_0$ (cela correspond, dans le cas de l'orthotropie, à la partie réelle de la composante polaire $R_0 e^{4i\Phi_0}$, la partie imaginaire associée étant nulle : $\sin 4(\Phi_0 - \Phi_1) = 0$). On posera $\Phi_1 = 0$ pour le tenseur **Q** de la couche de base orthotrope : cela correspond au fait que les propriétés de cette couche sont décrites au départ dans le référentiel local d'orthotropie du matériau (axe x_1 coïncidant avec l'axe principal d'orthotropie).
Avec cette notation pour les paramètres polaires de la couche de base orthotrope, particulariser les relations de la CLPT en polaire, telles qu'écrites au point précédent.
4. **Etude de familles de stratification particulières**. En appliquant les relations de la CLPT en polaire avec couche de base orthotrope, qu'on a obtenues au point précédent, calculer les propriétés de rigidité normalisée (paramètres polaires de \mathbf{A}^* et \mathbf{D}^*) pour les stratifications particulières suivantes :
 - a. stratification uni-directionnelle : tous les angles sont alignés à 0° . Montrer que l'on retrouve, pour le stratifié, les mêmes composantes polaires homogénéisées que celles de la couche de base orthotrope.
 - b. stratifications *cross-ply* : sur les N couches du stratifié, N_0 sont orientées à 0° et N_{90} à 90° , de telle manière que : $N = N_0 + N_{90}$. Alors on indiquera : $\rho_{90} = \frac{N_{90}}{N}$ la fraction de couches à 90° par rapport au nombre total de couches dans le stratifié, d'où : $\rho_0 = 1 - \rho_{90}$.

Particularises les formules polaires de la CLPT pour \mathbf{A}^* et \mathbf{D}^* pour cette famille de stratifiés en fonction de l'unique paramètre de stratification $\rho_{90} \in [0,0.5]$. A quelle stratification correspond la condition $\rho_{90} = 0$? Et $\rho_{90} = 0.5$? Dans le cas de \mathbf{A}^* , donner les expressions explicites des composantes polaires $\bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0}$ et $\bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1}$ en fonction des paramètres polaires de la couche de base orthotrope ainsi que du paramètre de stratification ρ_{90} : montrer que le comportement obtenu pour \mathbf{A}^* est toujours orthotrope et spécifier les valeurs de \bar{R}_0 , $\bar{\Phi}_0$ et $\bar{\Phi}_1$. En déduire la valeur de \bar{R}_K pour un stratifié *cross-ply*.

- c. stratifications *angle-ply* équilibrés : on définit *angle-ply* équilibré un stratifié composé d'un nombre N pair de couches, dont une moitié sont disposées à un angle α et l'autre moitié à l'angle opposé $-\alpha$. La valeur de l'angle α est alors le seul paramètre de stratification nécessaire pour décrire cette famille de stratifiés. Particulariser les formules polaires de la CLPT pour \mathbf{A}^* et \mathbf{D}^* pour cette famille de stratifiés en fonction de l'unique paramètre de stratification $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$. A quelle stratification correspond la condition $\alpha = 0^\circ$? Et $\alpha = 45^\circ$? Pour le tenseur \mathbf{A}^* , donner les expressions explicites des composantes polaires $\bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_0}$ et $\bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1}$ en fonction des paramètres polaires de la couche de base orthotrope ainsi que du paramètre de stratification α : montrer que le comportement obtenu pour \mathbf{A}^* est toujours orthotrope avec $\bar{\Phi}_1 = 0^\circ$ pour $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$. Déduire les expressions des paramètres polaires \bar{R}_K et \bar{R}_1 en fonction des paramètres polaires de la couche de base orthotrope et de l'angle de stratification α .

Quelle condition particulière de symétrie élastique est atteinte pour $\alpha = 45^\circ$?

5. **Représentation graphique de l'évolution des propriétés de stratifiés orthotropes remarquables** : dans le plan $\bar{R}_K - \bar{R}_1$, tracer les courbes constituées par les points représentatifs des stratifiés *cross-ply* et *angle-ply*, en utilisant les résultats obtenus au point précédent (questions 4.a-c). Pour cela, dans le cas des stratifiés *angle-ply*, il faut éliminer la variable α dans les expressions de \bar{R}_K et \bar{R}_1 , ce qui donne directement l'expression de la fonction reliant les deux paramètres, dont on pourra ensuite tracer la courbe. Dans le cas des stratifiés *cross-ply*, l'un des paramètres polaires étant constant, la courbe représentative est un segment : il faudra identifier les extrémités de ce segment en calculant les valeurs maximale et minimale admissibles pour le paramètre qui reste variable en fonction du paramètre de stratification $\rho_{90} \in [0,0.5]$.