Sorbonne Université **Année 2018-2019**

Master Sciences et Technologie - Mention Sciences pour l'Ingénieur

Traitement numérique du signal (4AN01)
2nde session - Mardi 7 Mai 2019 - durée : 2h00
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Radar de recul

La plupart des nouveaux véhicules sont aujourd'hui dotés de radars de recul. Celui-ci informe le conducteur de la distance qui le sépare d'un obstacle placé à l'arrière par l'émission d'un son. Cette distance est mesurée via un système mesurant le temps que met un ultrason à aller et revenir vers l'émetteur. Le principe retenu est simple : un ultrason de fréquence $f_0 = 32$kHz est émis à partir de $t = 0$s pendant une durée $T = 1$ms. Puis ce même signal est réfléchi et capté à nouveau après un temps τ représentant le temps nécessaire au signal pour aller vers l'obstacle et revenir vers l'émetteur ultrason.

La figure 1 présente un exemple de signal envoyé et reçu[1]. On note $x(t)$ le signal émis, et $y(t)$ le signal reçu. Dans ce problème, on souhaite analyser le signal $y(t)$ et proposer des solutions pour mesurer le temps τ, proportionnel à la distance séparant le véhicule de l'obstacle.

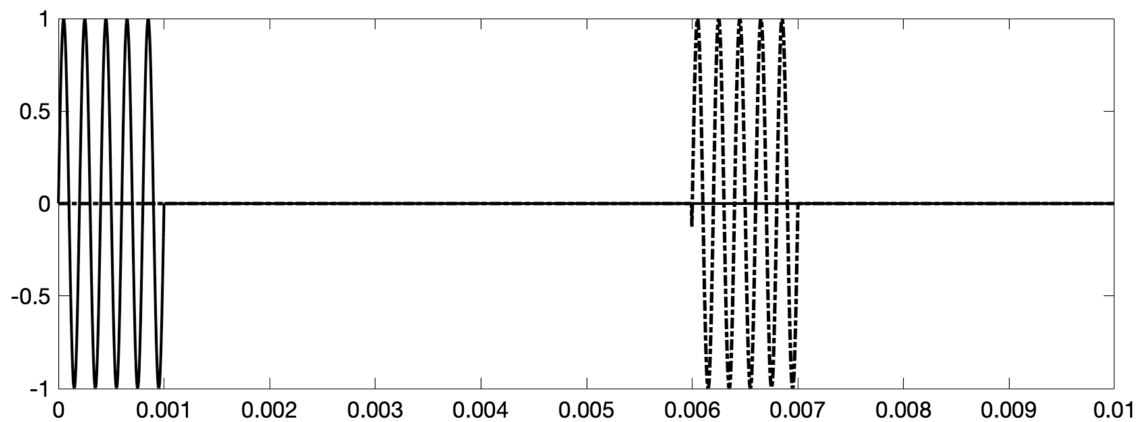

Figure 1: Signal émis $x(t)$ (traits pleins) et reçu $y(t)$ (pointillés).

1 Étude préalable

1. Exprimer le retard τ en fonction de la distance d séparant le véhicule de l'obstacle et de la vitesse de propagation du son c.

[1]Dans ce tracé, la fréquence f_0 est volontairement abaissée pour améliorer la lisibilité.

2. A l'aide de la figure 1, préciser la valeur numérique du retard τ.
3. En déduire la valeur de la distance d à l'obstacle.

2 Analyse du signal reçu, traitement et échantillonnage

Le signal reçu $y(t)$ peut s'écrire comme le produit entre un signal $p(t)$ sinusoïdal de fréquence f_0 et une fonction porte $\Pi_T(t-\tau)$, avec

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t \leq T \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. Déterminer la transformée de Fourier des signaux continus (TFSC) $\Pi(f)$ de la fonction porte $\Pi_T(t)$.
5. En utilisant les propriétés de la TFSC, déterminer sans plus de calcul la TFSC du signal $\Pi_T(t-\tau)$.
6. Rappeler, sans la démontrer, l'expression de la TFSC $P(f)$ de $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.
7. En déduire l'expression de la TFSC du signal reçu $y(t) = p(t)\Pi_T(t-\tau)$, notée $Y(f)$.
8. Tracer[2] l'allure du module de $Y(f)$ sur votre copie. Préciser les valeurs des fréquences pour lesquelles $|Y(f)| = 0$.

En pratique, ce n'est pas le signal $y(t)$ qui sera numérisé, mais le signal $y_1(t) = y(t)^2$.

9. En remarquant que $(\Pi_T(t-\tau))^2 = \Pi_T(t-\tau)$, montrer que la TFSC $Y_1(f)$ du signal $y_1(t)$ est donnée par[3] :

$$Y_1(f) = \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(\frac{T}{2}+\tau)} - \frac{T}{4}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f(\frac{T}{2}+\tau)} * \big(\delta(f+2f_0) + \delta(f-2f_0)\big).$$

10. Tracer l'allure de $|Y_1(f)|$ sur votre copie. A nouveau, on précisera les valeurs des fréquences pour lesquelles $|Y_1(f) = 0|$.
11. Quelle est la fréquence maximale présente dans le signal $y_1(t)$? Expliquer et justifier.
12. En déduire à quelle valeur de fréquence d'échantillonnage minimale $f_e = 1/T_e$ le signal $y_1(t)$ peut être échantillonné.
13. Sur la base de l'expression de $Y_1(f)$ et du tracé précédent, comment est-il possible de récupérer l'information de distance du signal $y_1(t)$?
14. Le signal $y_1(t)$ est échantillonné à la fréquence f_e précédemment déterminée. On note $y_2(t) = y_1(t)\text{Ш}_{T_e}(t)$ ce signal échantillonné. Donner l'expression de $Y_2(f)$ en fonction de $Y_1(f)$.
15. Rappeler la définition de la transformée de Fourier des signaux discrets $X(e^{j2\pi f T_e})$ d'un signal discret $x[n]$.
16. Rappeler quelle relation unit la transformée de Fourier dicrète $X_N[k]$ et la transformée de Fourier des signaux discrets $X(e^{j2\pi f T_e})$ d'un signal $x[n]$ de durée finie.

[2]ATTENTION : les tracés demandés dans toute la suite doivent être rigoureux ! Par exemple, les axes doivent préciser la grandeur tracée, l'unité, et les échelles utilisées.

[3]RAPPEL : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

3 Filtrage numérique

On souhaite filtrer le signal $y_2[n] = y_2(nT_e)$ échantillonné à une fréquence $f_e = 176400$Hz par le filtre numérique de fonction de transfert $H(z)$ donnée par

$$H(z) = \frac{1}{N}\,\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

17. Peut-on déterminer si le filtre est de type RIF ou RII ? Justifier.
18. Déterminer la réponse en fréquence $H(e^{j2\pi f T_e})$ du filtre.
19. Peut-on maintenant déterminer si le filtre est de type RIF ou RII ? Justifier.
20. Déterminer l'équation de récurrence du filtre.

On choisit dans la suite de prendre $N = 4$.

21. Tracer sur votre copie l'allure de $|H(e^{j2\pi f T_e})|$ pour $0 \leq f \leq 2f_e$. Préciser les fréquences pour lesquelles $|H(e^{j2\pi f T_e})| = 0$.
22. Déterminer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre numérique.
23. Rappeler l'expression de la réponse indicielle $s_{\text{ind}}[n]$ du filtre en fonction de $h[n]$. En déduire les 10 premiers échantillons de $s_{\text{ind}}[n]$.
24. Représenter sur le même graphique sur votre copie la réponse impulsionnelle $h[n]$ et la réponse indicielle $s_{\text{ind}}[n]$ du filtre.
25. Mettre l'équation de récurrence sous une forme non récursive.
26. Déterminer la sortie du filtre $s[n]$ en réponse à l'entrée $y_2[n] = [0, 1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0, 0, \ldots]$.