Licence Ingénierie Mécanique 3A005 – Méthodes Numériques pour la Mécanique
UPMC

3A005 – Examen du 11 Janvier 2018

Durée 2h, Documents et calculatrice non autorisés. Tout matériel électronique interdit.

Exercice 1 (/22 points)

On étudie l'équation différentielle suivante $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -10y$
avec la condition limite : $y(x=0) = 1$. La solution exacte est donnée par $y(x) = e^{-10x}$.

Résolution numérique de l'EDO

On souhaite obtenir une solution numérique dans l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}6]$.

1. On utilise le schéma à un pas (S1) suivant : $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.
   En utilisant la valeur h_1= 0,05, montrer que l'on obtient par ce schéma la solution numérique suivante : $y^1_{S1}(x = 0{,}3) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ et $y^1_{S1}(x = 0{,}6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$.
2. En utilisant le même schéma (S1) avec un pas plus grand, h_2=0,3, recalculer $y^2_{S1}(x = 0{,}3)$, et $y^2_{S1}(x = 0{,}6)$.
3. Tracer sur un même graphe la solution exacte (on donne $e^{-3} \approx 0{,}05,\ e^{-6} \approx 0$) ainsi que les deux solutions approchées des questions 1 et 2. Commenter et expliquer les résultats en utilisant les terminologies du cours.
4. On utilise maintenant le schéma à un pas (S2) suivant : $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ avec h_2=0,3. Calculer les nouvelles solutions approchées $y^2_{S2}(x = 0{,}3)\ et\ y^2_{S2}(x = 0{,}6)$
5. Ajouter les solutions approchées obtenues en 4 sur le graphe de la question 3. Commenter et expliquer les résultats en utilisant les terminologies du cours.
6. On utilise maintenant le schéma à un pas (S3) suivant :
   $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ avec h_2=0,3.
   Calculer les nouvelles solutions approchées $y^2_{S3}(x = 0{,}3)\ et y^2_{S3}(x = 0{,}6)$.
7. Ajouter les solutions approchées obtenues en 6 sur le graphe de la question 3. Commenter les avantages et inconvénients du schéma (S3) par rapport aux deux précédents en utilisant les terminologies du cours.

Interpolation polynômiale

8. Expliciter les polynômes de base de l'interpolation de Lagrange $L_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$ définis par les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = 0{,}6$.
9. Construire le polynôme interpolé de Lagrange, $L(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)y(x_i)$ de la fonction $y(x) = e^{-10x}$. (On donne $e^{-3} \approx 0{,}05$ et $e^{-6} \approx 0$).
10. Calculer $L(x = 0{,}1)$.

Intégration numérique

Soit une fonction *g(x)* dont on veut approcher l'intégrale *I(g)* sur l'intervalle [0 ; 0,6].

11. En utilisant les polynômes de Lagrange calculés à la question 8 et définis par les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}3$ et $x_2 = 0{,}6$, donner l'expression du polynôme interpolé de Lagrange de la fonction *g*.
    Par intégration, en déduire une formule de quadrature $s(g) = \sum_{i=0}^{2} w_i g(x_i)$ sur ces trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}3$, et $x_2 = 0{,}6$ pour le calcul approché de $I(g) = \int_0^{0,6} g(x)dx$.
12. Comment s'appelle cette formule de quadrature et quelle est sa précision?
13. Calculer numériquement $s(y)$ et $I(y) = \int_0^{0,6} y(x)dx$ pour la fonction $y(x) = e^{-10x}$.
14. Calculer l'erreur d'intégration de la formule de quadrature.

Exercice 2 Valeurs propres (/14 points)

Soit B une matrice réelle 3x3 définie par B=$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ avec $a > b > c > 0$

1. Montrer que *a, b, c* sont les 3 valeurs propres de la matrice B.
2. Trouver un vecteur propre associé à la valeur propre *a*, nommé x.
3. Décrire la méthode de la puissance itérée. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée à la matrice B.
4. Montrer que *a, b, c* sont aussi les valeurs propres de la transposée de B, notée B^t, et trouver un vecteur propre associé à la valeur propre *a* pour la matrice B^t, nommé *y*.
5. Construire la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{B} - a\frac{xy^t}{x^t y}$.
6. Montrer que *b, c*, et 0 sont les valeurs propres de C.
7. Sans effectuer de calcul, donner le résultat de l'application de la méthode de la puissance itérée sur la matrice C.
8. Peut-on utiliser la méthode de la puissance inverse avec la matrice B ? Si oui, donner le résultat sans faire de calcul.
9. Est-il possible d'appliquer la méthode de la puissance inverse à la matrice C ? Pourquoi ?

Exercice 3. Méthode itérative pour la résolution d'un système linéaire (/4 points)

On souhaite résoudre un système linéaire donné, A*x=b,* à l'aide d'une méthode itérative donnée, de matrice d'itération notée **Ω**.

1. Montrer que ||**Ω**||<1 est une condition suffisante de convergence de cette méthode itérative.
2. Calculer la norme infinie de **Ω**, notée $\|\boldsymbol{\Omega}\|_\infty$. Soit une méthode itérative telle que la matrice d'itération soit $[\boldsymbol{\Omega}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. La méthode itérative converge-t-elle ? Justifier la réponse.