Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 11 Mars 2019 - Sujet2

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1

On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

I Etude de l'application

1. Déterminer le noyau $Ker(u)$ et l'image $Im(u)$ de l'application linéaire u, en précisant une base pour chacun des ensembles.
2. Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image ? Vérifier le théorème du rang.
3. u est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

II Changement de base

On considère $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs suivants :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$

$$f'_1 = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad f'_2 = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

1. Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $C' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Ecrire la matrice de passage de la base B vers la base B'. On la notera P.
3. Ecrire la matrice de passage de la base C vers la base C'. On la notera Q.
4. Que peut-on dire des matrices P et Q ?
5. Soit le vecteur $x = e_1 + 9e_2 + 7e_3$. Quelles sont les coordonnés de x dans la base B ? Dans la base B' ?
6. Calculez $u(x)$ dans la base C, puis $u(x)$ dans la base C'.
7. Ecrire la matrice de u dans les nouvelles bases B' et C'. On la notera A'. (*Indication :* la matrice A' est construite avec les vecteurs $u(e'_1)$, $u(e'_2)$, $u(e'_3)$ exprimés dans la base C')
8. Vérifiez que $A' = Q^{-1}AP$.

Exercice 2

Dans la suite on demande d'étudier si les matrices suivantes sont **diagonalisables sur** $\mathbb{R}$.
On considère la matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs propres de la matrice B_1.
2. Calculer les espaces de vecteurs propres associés aux valeurs propres.
3. B_1 est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.
4. Donner la matrice diagonale B_1' semblable à B_1 , ainsi que la matrice de passage P_1. Précisez la relation reliant B_1 et B_1'.
5. Etudier si la matrice :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et donner sa matrice diagonale le cas échéant. Justifiez votre réponse.

Exercice 3

I **Etude d'une équation linéaire**

On considère l'équation différentielle suivante, $y = y(x)$ étant la fonction inconnue :

$$x\frac{dy}{dx} = y + 2x^3 \tag{1}$$

Trouver la solution générale de l'équation non-homogène (1) en utilisant la méthode de variation de la constante pour le calcul d'une solution particulière.

II **Etude d'une équation nonlinéaire : réduction à une forme séparable**

On considère l'équation différentielle suivante, où $y = y(x)$ est la fonction inconnue :

$$x\frac{dy}{dx} = y + 2x^3 \sin^2(\frac{y}{x}), \quad x \neq 0 \tag{2}$$

1. Pourquoi l'équation précédente est elle non-linéaire ? Peut-on résoudre cette équation par la méthode de séparation de variables ?
2. On veut résoudre l'équation précédente à l'aide d'un changement de variable approprié. Pour cela, montrer que l'équation peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}, x), \quad x \neq 0$$

avec f une fonction à préciser.

3. En faisant le changement de variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, montrer que u est solution de l'équation à variables séparées :

$$\frac{du}{dx} = 2x \sin^2(u(x)) \tag{3}$$

4. Donner la solution générale de l'équation (3). (Formulaire : $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$.)
5. Déduire ensuite la solution générale $y(x)$ de l'équation (2).
6. Donner la solution du problème de Cauchy formé par l'équation (2) et la condition initiale $y(1) = \frac{\pi}{2}$.