Examen final

Films minces, corps de Rankine & étalement liquide

▷ **Consignes :**

- Durée de l'épreuve : 3 heures
- Le sujet est sur **4 pages**
- Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié
- Notes de cours autorisées
- Travail strictement personnel
- La rigueur et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la note finale
- Chaque exercice peut être traité indépendamment des autres

1 Relaxation et instabilité d'un film liquide

On s'intéresse ici à la dynamique d'un film liquide fin d'épaisseur caractéristique h_0, analogue à celui étudié en cours (chapitre 6). Le film est composé d'un liquide de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ et de tension de surface γ avec l'air environnant. On note $\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_y$ l'accélération de la pesanteur. Dans toute la suite, on suppose que le film est suffisamment fin pour que sa dynamique soit correctement capturée par une équation de film telle que celle obtenue en cours, à savoir :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu}\left(h^3 h'\right)' - \frac{\gamma}{3\mu}\left(h''' h^3\right)', \tag{1}$$

si l'on tient compte à la fois des effets de tension de surface et de gravité. Ici, h représente l'épaisseur locale de liquide à la position x. Dans tout le problème, on suppose une évolution 2D, i.e. invariante par translation suivant la direction $\boldsymbol{e}_z$.

1.1 Relaxation gravitaire d'un film liquide

Dans cette partie on cherche à décrire la relaxation d'un film liquide visqueux perturbé à grande longueur d'onde. Dans cette limite, le processus de relaxation est non plus dominé par la tension de surface, comme vu en cours, mais par la gravité uniquement.

1. *(0,5 point)* Réécrire l'équation de film mince (1) dans la limite où les effets capillaires sont négligeables devant les effets de gravité[1].
2. *(2 points)* Pour trouver le temps de relaxation du film, on conduit maintenant une analyse perturbative. Pour ce faire, on considère l'ansatz suivant pour la position de l'interface :

$$h = h_0\left(1 + \epsilon e^{ikx - t/\tau}\right), \tag{2}$$

   où k est le nombre d'onde, τ le temps de relaxation recherché et ϵ une faible modulation d'interface telle que $\epsilon \ll 1$. En injectant cette forme d'interface dans l'équation obtenue à la première question, obtenir l'équation pilotant la dynamique de l'interface au premier ordre en ϵ.
3. *(0,5 point)* Quel est le temps de relaxation d'une perturbation de longueur d'onde λ ? Ce résultat aurait-il pu être obtenu par analyse dimensionnelle ?

1.2 Instabilité de Rayleigh-Taylor d'un film liquide

Un film liquide comme un film de peinture posé au plafond est naturellement instable : si sa cinétique de séchage est trop lente, des gouttes vont spontanément se former, comme illustré sur la figure ci-contre. Cette instabilité hydrodynamique, dite de Rayleigh-Taylor en référence aux premiers scientifiques l'ayant décrite, est en fait très générique et se manifestera dès qu'un fluide dense est accéléré en direction d'un fluide léger. L'objet de cette partie est d'identifier les longueurs d'onde instables et d'obtenir le taux de croissance de cette instabilité.

1. *(0,5 point)* On peut obtenir très facilement l'équation gouvernant un tel film en remarquant simplement que seule la gravité change de signe, c'est-à-dire que $g \to -g$. À partir de l'équation (1) écrite pour un film posé *sur* une plaque, déduire directement l'équation pilotant la dynamique d'un film de peinture posé au plafond[2]. Note : on conservera

1. Note : il n'y a aucun piège à cette question !
2. À nouveau il s'agit d'une question facile ; aucun piège ici.

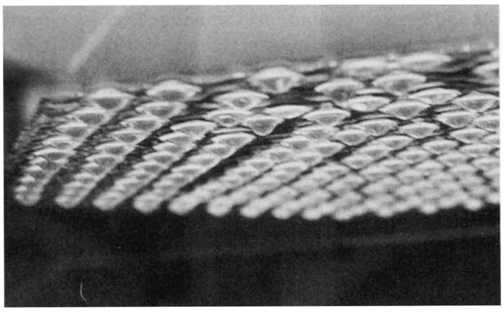

FIG. 1 : Gouttes perlant d'un film d'huile apposé sous une plaque (Fermigier et al., Phys Fluids, 1990).

bien cette fois les termes de gravité et de tension de surface.

2. *(2 points)* Imaginons comme précédemment une très faible perturbation de surface caractérisée par :

$$h = h_0\left(1 + \epsilon e^{ikx - i\omega t}\right), \tag{3}$$

où k est le nombre d'onde, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est la pulsation (complexe) et ω_i le taux de croissance de la perturbation, et ϵ est le paramètre d'amplitude, à nouveau tel que $\epsilon \ll 1$. En injectant cette forme d'interface dans l'équation obtenue à la question précédente, obtenir l'équation pour la perturbation au premier ordre en ϵ.
3. *(0,5 point)* Justifier à partir de l'équation précédente le fait que ω soit imaginaire pur (c'est-à-dire que la perturbation croît ou décroît sur place, sans se propager).
4. *(1 point)* En déduire que le taux de croissance s'écrit :

$$\omega_i = \frac{(kh_0)^2}{\tau}\left(1 - (k\ell_{gc})^2\right), \tag{4}$$

où $\ell_{gc} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur gravito-capillaire et τ est un temps caractéristique de croissance de l'instabilité dont on donnera l'expression.
5. *(1 point)* Tracer cette relation et commenter.

2 Le corps de Rankine

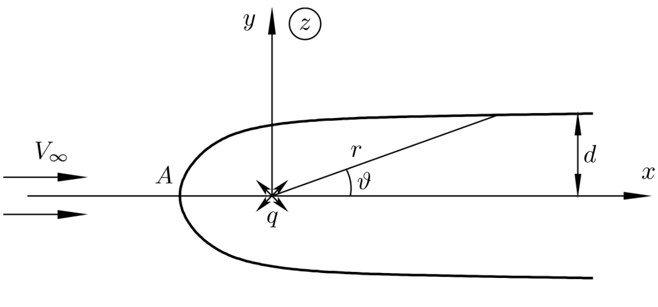

FIG. 2 : **Le corps de Rankine.**

On considère ici la superposition d'un écoulement uniforme (sans incidence) et d'une source d'intensité q localisée à l'origine. Le champ résultant permet de décrire l'écoulement autour d'un objet de géométrie non triviale appelé **solide de Rankine** et représenté sur la figure 2.

1. *(1 point)* Donner le potentiel complexe représentant un tel écoulement.
2. *(1 point)* En déduire l'expression du potentiel des vitesses φ et de la fonction de courant ψ.
3. *(1 point)* Calculer l'expression du champ de vitesse.
4. *(1 point)* Déterminer analytiquement la position $z^\star = (x^\star, 0)$ du point de stagnation, i.e. le point pour lequel la vitesse s'annule.

5. *(1 point)* Montrer que la surface du corps de Rankine satisfait :
$$y = \frac{q}{2V_\infty}\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \tag{5}$$
On notera que par définition $y = 0$ en $\theta = \pi$.
6. *(0,5 point)* Quelle est la largeur $2d$ de ce solide à l'infini ?
7. *(1,5 points)* Développer le champ de vitesse dans le voisinage du point de stagnation au premier ordre. Ce champ approximé vérifie-t-il l'équation de conservation de la masse ? À quel type d'archétype d'écoulement ce champ correspond-il ?
8. *(1 point)* En déduire une expression des lignes de courant approchées dans le voisinage du point de stagnation.
9. *(0,5 point)* Représenter schématiquement ces lignes de courant.

3 Tache d'huile

Benjamin Franklin a été le premier à documenter en 1774 le phénomène de "tache d'huile", i.e. l'étalement vif d'une gouttelette d'huile posée à la surface d'un liquide de plus forte tension de surface comme de l'eau. Il s'agit là d'un phénomène de la vie courante, que l'on peut observer également par exemple en déposant une petite goutte de détergent sur de l'eau recouverte préalablement de petites particules : on observe alors instantanément un mouvement radial très rapide.

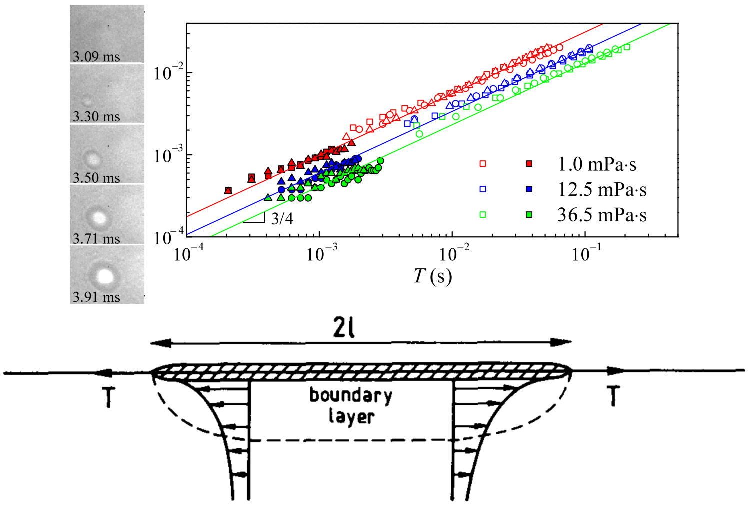

FIG. 3 : **Étalement d'une tache d'huile sur de l'eau.** Haut, gauche : chronophotographie de l'étalement d'une tache d'huile à la surface d'un liquide (Vernay, Ramos & Ligoure, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 2015). Haut, droite : rayon de la tache d'huile (en mètres) en fonction du temps pour différentes viscosités (ibid). Bas : vision schématique du processus d'étalement où la goutte s'étalant entraîne le liquide du bain sous-jacent. Dans ce schéma, T représente la tension de surface liquide-vapeur (Ockendon & Ockendon, *Viscous Flow*, Cambridge University Press, 1995).

Cet étalement a été étudié récemment par une équipe montpelliéraine dans le contexte de l'atomisation d'émulsions. La figure 3 reporte quelques-uns des résultats de cette étude.

1. *(1 point)* En vous basant sur cette figure, déterminer la loi horaire de l'étalement observée dans les expériences, c'est-à-dire la dépendance du rayon R de la tache avec le temps t.

La source de ce ralentissement est indiquée dans le schéma du bas de la figure 3 : à mesure que la goutte s'étale, elle crée un champ hydrodynamique dans le liquide sous-jacent qui ralentit son expansion par frottement visqueux. Les paramètres importants du problème sont donc la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du bain liquide, la tension de surface γ (notée T dans le schéma ci-dessus), le temps t.

2. *(1,5 points)* Par analyse dimensionnelle, peut-on déterminer de façon univoque la loi horaire de l'étalement $R(t)$?

Afin de modéliser le problème, on considère dans la suite la goutte comme une nappe 2D, c'est-à-dire invariante par translation suivant la direction transverse au plan (pour les besoins du calcul, on peut la considérer d'extension b selon cette direction). En première approche, on propose de voir la nappe liquide d'extension $2\ell(t)$ comme deux plaques solides croissant à la vitesse $U = \dot{\ell}(t)$. On suppose que la première plaque, allant de 0 à $\ell(t)$ se déplace en bloc à la vitesse U, alors que la seconde plaque, allant de 0 à $-\ell(t)$ est quant à elle animée de la vitesse $-U$. Par symétrie, il est donc possible de restreindre l'analyse à la moitié de la goutte, c'est-à-dire à une seule des deux plaques.

3. *(2 points)* La plaque entraîne le fluide par adhérence : il en résulte en retour une force de traînée visqueuse D exercée par le fluide sur la plaque. En utilisant avantageusement l'expression de la traînée hydrodynamique exercée sur une plaque plane obtenue dans le cours sur les couches limites, proposer une expression de la traînée visqueuse D en fonction de ρ, ν (ou μ) et de $\ell(t)$ et $\dot{\ell}(t)$ (la longueur et la vitesse de la plaque), et de b. On précisera les hypothèses et approximations faites pour utiliser cette formule.
4. *(2 points)* La goutte est sujette à une force de traction constante de la part de la tension de surface γb, donc si on néglige l'inertie propre de la goutte on aura $D = \gamma b$. En déduire la loi horaire de l'étalement $\ell(t)$ dans cette configuration simplifiée.