Sorbonne Université **Année 2019-2020**

Master Sciences et Technologie - Département de Sciences pour l'Ingénieur

---

Traitement numérique du signal
1ère session - Mardi 14 Janvier 2020 - durée : 2h00
Sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Analyse de l'évolution de la température sur une période longue

On dispose de l'évolution de la **température moyenne journalière** (soit un relevé par jour) à Berlin[1], enregistrée sur une très grande durée. On note $x[n]$ ce signal numérique. L'objectif de ce problème est d'analyser ces données.

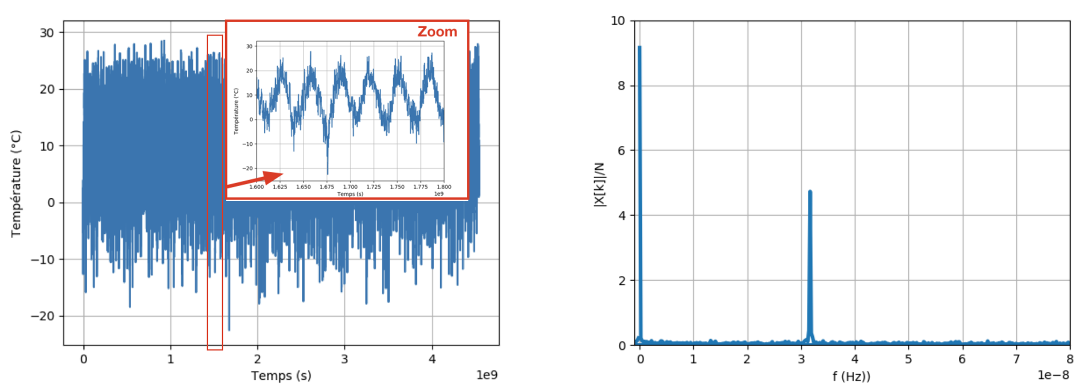

Figure 1: Evolution de la température journalière en fonction du temps (à gauche), Module de la TFD normalisée (à droite)

1 Analyse du signal brut

La figure 1 présente l'évolution journalière de la température (à gauche) et le module du spectre de ce signal (à droite) obtenu par la transformé de Fourier Discrète **et normalisée par N le nombre d'échantillons dans le signal**.

1. Estimer la durée sur laquelle les enregistrements sont faits (on exprimera le résultat en année, la précision demandée est à ± 25 ans - on utilisera l'approximation : $3.6e3 \times 24 \approx 1e5$).
2. D'après l'énoncé, quelle est la fréquence d'échantillonnage ?

[1] Klein Tank, A.M.G. and Coauthors, 2002. Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the European Climate Assessment. Int. J. of Climatol., 22, 1441-1453.

3. Sur le spectre (Fig 1 partie de droite), on voit émerger deux fréquences, la fréquence nulle et une fréquence notée f_1. Quelle est la valeur de f_1 ? A quelle période correspond-elle ? (on pourra exprimer cette période en année). Commenter.
4. Montrer que la valeur du spectre en $f = 0$ correspond à la valeur moyenne. Pour cela : (on utilisera la définition de la TFD). En déduire la valeur moyenne de la température sur toute la période considérée.
   (a) Rappeler la définition de la valeur moyenne d'un signal $x[n]$, calculée dans le domaine temporel.
   (b) Rappeler la définition de la TFD, et donner sa valeur en 0.
   (c) En déduire la valeur moyenne de la température à Berlin sur toute la durée d'enregistrement considérée.

2 Lissage du signal temporel par moyenne mobile

Dans cette partie, on veut lisser les courbes temporelles pour que le signal ait moins de variations (cf zoom). Pour cela on utilise un filtre à moyenne mobile défini par l'équation de récurrence :

$$y[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[n-k] \tag{1}$$

5. Rappeler la définition du produit de convolution discret. Montrer alors que l'équation de récurrence précédente peut aussi s'écrire sous la forme:
$$y[n] = x[n] * \Pi_L[n],$$
où $*$ désigne le produit de convolution discret et $\Pi_L[n]$ est la fonction porte d'amplitude 1/L.
6. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre.
7. Calculer la fonction de transfert de ce filtre
8. Placer les pôles et les zéros de la fonction de transfert dans le plan complexe (on prendra $L = 10$ pour ce tracé).
9. Quelle est la nature (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande) de ce filtre ? **Justifier**.
10. Ce filtre est-il stable ? **Justifier**.
11. Ce filtre est-il causal ? **Justifier**.
12. Calculer la réponse en fréquences de ce filtre.
13. Tracer l'allure du module de la réponse en fréquence (on prendra L=10 pour ce tracé).
14. Exprimer l'évolution de la phase $\varphi(f)$ de la réponse en fréquence en fonction de f. En déduire la valeur du temps de propagation de groupe $\tau(f)$ du filtre. **Commenter**.
15. Montrer que
$$TFD[x[n-n_0]] = X_K[k]e^{\frac{-2j\pi n_0 k}{K}},$$
où $X_K[k] = TFD[x[n]]$ représente la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur K points du signal $x[n]$.

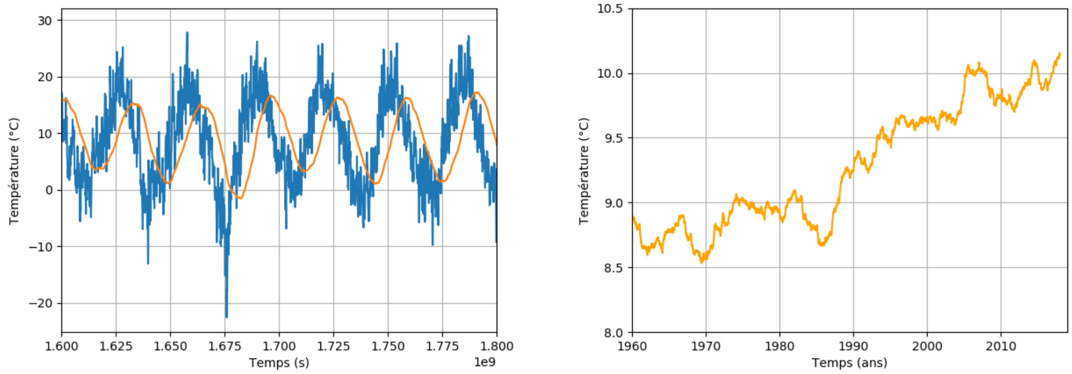

Figure 2: (A gauche) Évolution de la température journalière et résultat du filtrage par moyenne mobile ($L = 150$, zoom), (A droite) évolution filtrée par moyenne mobile ($L = 3650$).

16. La figure 2 montre l'évolution brute et l'évolution filtrée avec un filtre à moyenne mobile pour $L = 150$. Le décalage des courbes était-il prévisible ? Estimer sa valeur.
17. La figure 2 montre l'évolution filtrée avec un filtre à moyenne mobile pour $L = 3650$. Justifier la valeur choisie pour L ? Quelle conclusion peut-on tirer sur la méthode de filtrage choisie et sur l'évolution de la température ?

3 Etude de la variabilité journalière

On souhaite dans cette partie étudier la variabilité journalière, c'est à dire les variations rapides, en éliminant la composante lente f_1. Pour cela, on va utiliser un nouveau filtre, noté filtre 2 et dont la réponse en fréquence souhaitée est définie selon :

$$H_2(e^{2j\pi f Te}) = \begin{cases} 1 \text{ si } f_c < f < f_e - f_c, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{4}$$

18. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelle valeur de la fréquence de coupure faut-il choisir ?
19. Tracer le module de la réponse en fréquence de ce filtre **sur l'intervalle** $f \in [-f_e/2 : f_e/2]$.
20. Calculer la TFSD inverse de $H_2(e^{j2\pi f T_e})$, notée $h_2[n]$. Que représente $h_2[n]$?
21. **Justifier** si le filtre 2 ainsi obtenu est de type RIF ou RII.
22. **Justifier** si le filtre 2 ainsi obtenu est causal ou non.
23. On pose maintenant $h_3[n] = h_2[n] w_T[n]$, avec

$$w_T[n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{L} & \text{si } -L/2 \leq n < 0, \\ 1 - \frac{2n}{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L/2 - 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

Tracer $w_T[n]$ pour $L = 8$.

24. Le filtre 3, de réponse impulsionnelle $h_3[n]$, est-il RIF ou RII ? Justifier.

25. On montre que $W_T(e^{j2\pi fT_e}) = TFSD[w_T[n]] = \frac{2}{L}\left(\frac{\sin(\pi \frac{f}{f_e}\frac{L}{2})}{\sin(\pi f/f_e)}\right)^2 e^{j4\pi fT_e}$. Préciser la valeur de $|W_T(e^{j2\pi fT_e})|$ en $f = 0$Hz et les positions en fréquence des zéros de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$.

26. Tracer l'allure de $W_T(e^{j2\pi fT_e})$ pour $f \in [-f_e, f_e]$ et avec $L = 8$.

27. Exprimer $H_3(e^{j2\pi fT_e})$ en fonction de $H_2(e^{j2\pi fT_e})$ et $W_T(e^{j2\pi fT_e})$. Représenter alors l'allure de $|H_3(e^{j2\pi fT_e})|$.