Vibration et Ondes (4AM03)
Contrôle continu du 3 Octobre 2016
Partie *Vibrations des systèmes discrets*

Durée 1h30 - Sans document ni calculatrice

Etude d'un amortisseur dynamique

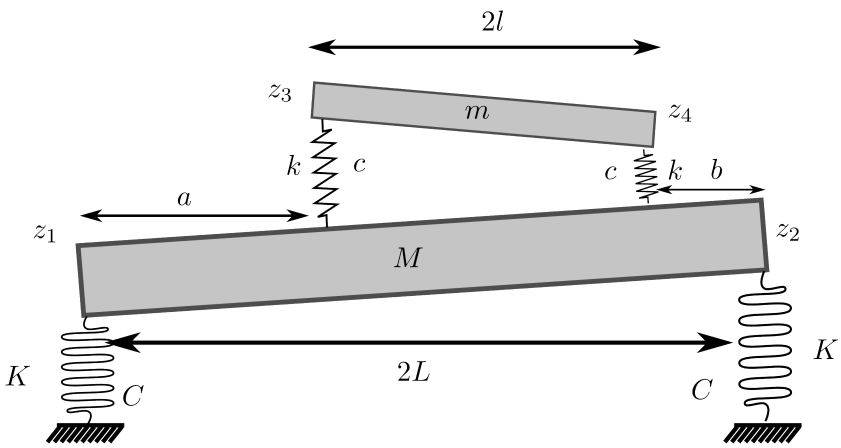


FIGURE 1 – Modèle, dimensions et variables

L'objectif du problème est de modéliser le fonctionnement d'un dispositif amortisseur des vibrations des structures. On place de tels systèmes par exemple sur les carters de turbines dans les centrales électriques. Le modèle simplifié du système est une structure plane à 4 degrés de liberté, comme représenté sur la figure 1.

L'ensemble vibrant est constitué de deux éléments liés :

— La structure vibrante rigide de longueur $2L$, de masse M et de moment d'inertie $I = \frac{ML^2}{3}$ par rapport à son centre d'inertie G. Elle est suspendue au bâti par ses extrémités par l'intermédiaire de *silent-blocs* chacun de raideur K et de coefficient d'amortissement C.

— l'amortisseur passif de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{ml^2}{3}$ par rapport à son centre d'inertie g. Il est lié à la structure par des ressorts de raideur réglable k. La liaison présente un coefficient d'amortissement c.

Pour décrire les déformations du système par rapport à sa position d'équilibre statique, on fait appel à 4 coordonnées généralisées :

— z_1, z_2 : positions verticales des extrémités de la structure vibrante

— z_3, z_4 : positions verticales des extrémités de l'amortisseur

Ces coordonnées généralisées sont rassemblées dans le vecteur $\mathbf{q} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^t$.

On se place dans l'hypothèse des petites déformations et dans un premier temps, on néglige l'amortissement.

1. Montrer que l'énergie cinétique T du système couplé structure + amortisseur s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\frac{M}{3}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{6}2\dot{z}_1\dot{z}_2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2) + \frac{1}{2}\frac{m}{6}2\dot{z}_3\dot{z}_4$$

Solution:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{Z}_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}_g^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

avec

$$Z_G = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \qquad \Theta = \frac{1}{2L}(z_2 - z_1) \qquad z_g = \frac{1}{2}(z_3 + z_4) \qquad \theta = \frac{1}{2l}(z_4 - z_3)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\frac{1}{4}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + 2\dot{z}_1\dot{z}_2) + \frac{1}{2}\frac{1}{4L^2}I(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 - 2\dot{z}_1\dot{z}_2) + \frac{1}{2}m\frac{1}{4}(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_3\dot{z}_4) + \frac{1}{2}\frac{1}{4l^2}J(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2 - 2\dot{z}_3\dot{z}_4) \\ &= \frac{1}{2}\frac{M}{4}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + 2\dot{z}_1\dot{z}_2) + \frac{1}{2}\frac{M}{12}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 - 2\dot{z}_1\dot{z}_2) + \frac{1}{2}\frac{m}{4}(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2 + 2\dot{z}_3\dot{z}_4) + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2 - 2\dot{z}_3\dot{z}_4) \\ &= \frac{1}{2}\frac{M}{3}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{6}2\dot{z}_1\dot{z}_2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2) + \frac{1}{2}\frac{m}{6}2\dot{z}_3\dot{z}_4 \end{aligned}$$

2. En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$.

Solution:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2M & M & 0 & 0 \\ M & 2M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m & m \\ 0 & 0 & m & 2m \end{pmatrix}$$

3. Écrire l'énergie potentielle de déformation U et montrer qu'elle s'écrit :

$$U = \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 + \tfrac{1}{2}k(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 - z_3)^2 + \tfrac{1}{2}k(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 - z_4)^2$$

Préciser les α_i et β_i

Solution:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 + \tfrac{1}{2}k(z_1 + a\Theta - z_3)^2 + \tfrac{1}{2}k(z_2 - b\Theta - z_4)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 + \tfrac{1}{2}k(z_1 + \tfrac{a}{2L}(z_2 - z_1) - z_3)^2 + \tfrac{1}{2}k(z_2 - \tfrac{b}{2L}(z_2 - z_1) - z_4)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 + \tfrac{1}{2}k((1 - \tfrac{a}{2L})z_1 + \tfrac{a}{2L}z_2 - z_3)^2 + \tfrac{1}{2}k(\tfrac{b}{2L}z_1 + (1 - \tfrac{b}{2L})z_2 - z_4)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 + \tfrac{1}{2}k(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 - z_3)^2 + \tfrac{1}{2}k(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 - z_4)^2 \end{aligned}$$

avec

$$b = 2L - a - 2l \qquad \alpha_1 = 1 - a/2L \qquad \alpha_2 = a/2L \qquad \beta_1 = b/2L \qquad \beta_2 = 1 - b/2L$$

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}Kz_1^2 + \tfrac{1}{2}Kz_2^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}k(\alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + z_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 z_1 z_2 - 2\alpha_1 z_1 z_3 - 2\alpha_2 z_2 z_3) \\ &+ \tfrac{1}{2}k(\beta_1^2 z_1^2 + \beta_2^2 z_2^2 + z_4^2 + 2\beta_1\beta_2 z_1 z_2 - 2\beta_1 z_1 z_4 - 2\beta_2 z_2 z_4) \end{aligned}$$

4. En déduire la matrice de raideur de structure $\mathbf{K}$.

Solution:

$$\mathbf{K} = K\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & -\alpha_1 & -\beta_1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 & -\alpha_2 & -\beta_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Décrire la procédure permettant d'obtenir fréquences propres f_i du système, et les modes propres $\mathbf{Z}_i$ associés.

Solution: On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques : $q_i(t) = Z_i e^{\jmath\omega t}$. Cela donne le système linéaire :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{Z} = 0$$

Il faut s'assurer que les solutions $\mathbf{Z}$ sont non nulles en résolvant l'équation aux valeurs propres en ω^4 :

$$\left|\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2\right| = 0$$

On obtient 3 valeurs propres, les pulsations propres $\omega_i (i = 1, ..., 3)$
Les fréquences propres sont les $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$
Pour chacune des racines obtenues ω_i, on trouve le vecteur propre associé $\mathbf{Z_i}$ en résolvant l'équation :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_i^2)\mathbf{Z_i} = 0$$

On considère maintenant un cas simple qui permet d'obtenir une solution analytique : $a = b$, c'est à dire que le système est symétrique.

Dans cette configuration particulière, la base modale du système a la forme suivante :

Mode	1	2	3	4
pulsation propre	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Modes propres normalisés. Coefficients réels positifs : $0 < d_i < 1$	$\mathbf{Z_1}$	$\mathbf{Z_2}$	$\mathbf{Z_3}$	$\mathbf{Z_4}$
	d_1	d_2	$-d_3$	d_4
	d_1	d_2	d_3	$-d_4$
	1	-1	-1	-1
	1	-1	1	1

6. Représenter et analyser succinctement les 4 modes propres.

Solution:

— Mode 1 : Pompage en phase
— Mode 2 : Pompage en opposition de phase
— Mode 3 : Tangage en phase
— Mode 4 : Tangage en opposition de phase

7. Donner la matrice modale. Quelles relations mathématiques caractérisent cette base modale ?

Solution:
Matrice modale :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & -d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -d_4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Relations d'orthogonalité

$$\mathbf{Z_i^t M Z_j} = M_i \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Z_i^t K Z_j} = K_i \delta_{ij}$$

où les M_i et K_i sont respectivement les masses et les raideurs modales.

Lorsque le bâti est animé d'un mouvement vertical, deux forces identiques d'amplitude F sont transmises par les liaisons respectivement à z_1 et z_2.

8. Écrire alors le vecteur $\mathbf{Q}$ des efforts généralisés et celui $\mathbf{F}_m$ des efforts modaux.

Solution:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F \\ F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}_m = \mathbf{Z^t Q} = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 1 & 1 \\ d_2 & d_2 & -1 & -1 \\ -d_3 & d_3 & -1 & 1 \\ d_4 & -d_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 F \\ 2d_2 F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On suppose le mouvement du bâti et les forces résultantes en z_1 et z_2 harmoniques de pulsation Ω et les positions et vitesses initiales nulles.

9. Écrire les équations du mouvement forcé dans la base modale. On note $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^t$ les coordonnées modales.
10. En déduire les expressions des coordonnées modales. Préciser quels modes contribuent au mouvement.
11. Établir les relations entre les coordonnées généralisées et en déduire que le système se réduit à 2 degrés de liberté.

Solution:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_m \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \frac{2d_1 F}{\omega_1^2 - \Omega^2} \\ \frac{1}{m_2} \frac{2d_2 F}{\omega_2^2 - \Omega^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \Omega t$$

où les m_i sont les masses modales.
Seuls le 2 premiers modes sont mobilisés.

$$\mathbf{q} = \mathbf{Zp} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & -d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -d_4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 p_1 + d_2 p_2 \\ d_1 p_1 + d_2 p_2 \\ p_1 - p_2 \\ p_1 - p_2 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$z_1 = z_2 = \left(\frac{1}{m_1} \frac{2d_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{m_2} \frac{2d_2^2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right) F sin\Omega t$$

$$z_3 = z_4 = \left(\frac{1}{m_1} \frac{2d_1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{m_2} \frac{2d_2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right) F sin\Omega t$$

Les deux mobiles ne se déplacent qu'en translation (les rotations sont inhibées).
On a donc bien 2 degrés de liberté seulement.

On montre que les déplacements z_1 et z_3 prennent les formes suivantes :

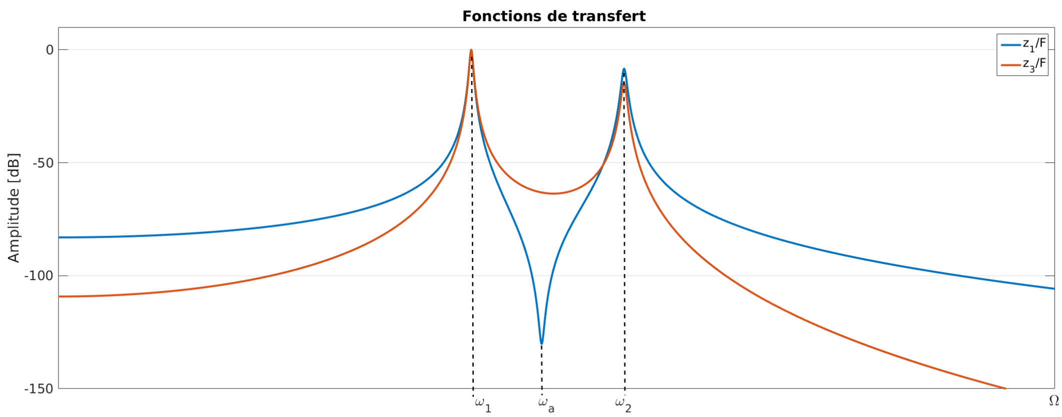
$$z_1 = \frac{A_1(\omega_a^2 - \Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} F sin\Omega t \qquad \text{et} \qquad z_3 = \frac{A_3}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} F sin\Omega t$$

avec précisément

$$\omega_a^2 = \frac{2k}{m}$$

12. Tracer les allures des amplitudes des fonctions de réponse en fréquence $\frac{z_1}{F}(\Omega)$ et $\frac{z_3}{F}(\Omega)$

Solution:



13. En se souvenant que la raideur k est réglable, expliquer en quoi et comment l'oscillateur secondaire $(m, 2k)$ peut jouer le rôle d'absorbeur des vibrations de l'oscillateur principal $(2K, M)$.

Solution: La FRF du mobile principal présente une antirésonance en $\omega_a = \sqrt{2k/m}$. Il est possible d'accorder la valeur de k de manière à placer cette anti-résonance à la fréquence à laquelle le mobile principal vibre naturellement sous l'effet d'excitations transitoires ($\omega_a = \sqrt{2K/M} \Rightarrow k = m/MK$) ou permanentes ($\omega_a = \Omega$).