UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

Année 2017-2018

UE 4AM01 - partie Fluides
Partiel - Lundi 6 novembre 2017 - durée 2h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit. En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

Pression au centre de la Terre

On souhaite évaluer l'ordre de grandeur de la pression P_0 au centre de la Terre, considérée par souci de simplicité comme une sphère liquide de masse volumique homogène ρ et de rayon R. La distribution de pression au sein de la Terre résulte de son équilibre mécanique sous l'effet de l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur elle-même. La constante gravitationnelle, qui intervient dans l'expression de la force d'attraction gravitationnelle $\mathbf{F}$ entre deux masses m_1 et m_2 distantes de d, est notée $\mathcal{G}$: $F = \mathcal{G} m_1 m_2 / d^2$. Par analyse dimensionnelle, établissez une expression analytique de P_0, puis évaluez numériquement son ordre de grandeur. On donne : $\mathcal{G} \simeq 6 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$kg$^{-1} \cdot$s^{-2}, $R \simeq 6000$ km, $\rho \simeq 5000$ kg $\cdot$ m^{-3}.

Solution: La pression au centre de la Terre P_0 est liée à la force d'attraction gravitationnelle, qui implique $\mathcal{G}$, la distance entre les différentes parties de la Terre en interaction, d'ordre de grandeur R, et la masse des différentes parties de la Terre en interaction, qui implique elle-même ρ. Donc : $P_0 = f(\rho, \mathcal{G}, R)$: $n + 1 = 4$. Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 4 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème Pi, cette loi peut donc s'écrire comme une loi impliquant $n + 1 - k = 1$ grandeur sans dimensions, notée Π : $F(\Pi) = 0$, soit $\Pi =$ constante (une racine de F, a priori de l'ordre de l'unité). En cherchant à adimensionner P_0 à l'aide des $k = 3$ autres grandeurs ρ, $\mathcal{G}$ et R, qui sont dimensionnellement indépendantes (à prouver), on trouve :

$$[P_0] = [\rho]^2 \, [\mathcal{G}] \, [R]^2$$

Donc $\Pi = P_0 \rho^{-2} \mathcal{G}^{-1} R^{-2}$. P_0 vérifie donc :

$$P_0 = \text{constante } \times \rho^2 \mathcal{G} R^2$$

En prenant la constante égale à l'unité, on trouve numériquement : $P_0 \sim 5 \times 10^{10}$ Pa

Coulage d'un mur de béton

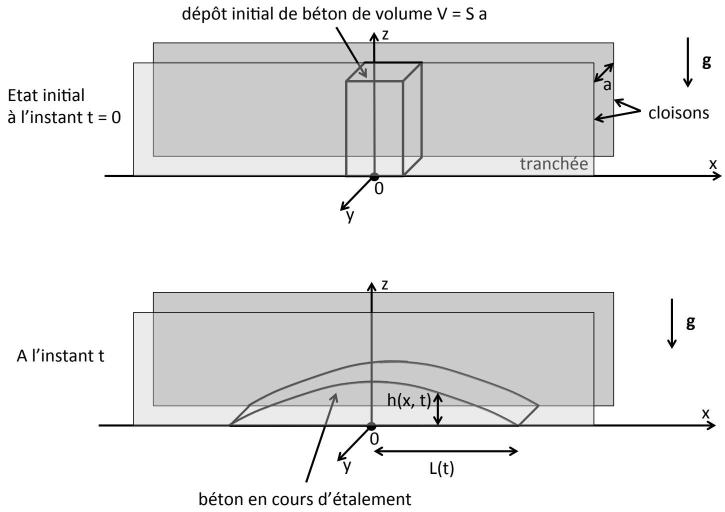

FIGURE 1 –

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur a, comme schématisé sur la figure 1. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume V au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de "prendre" (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement μ. L'accélération de la gravité est notée $\mathbf{g}$. On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon (Oy) et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan (Oxz). La forme du volume de béton est donc entièrement donnée par sa hauteur h fonction de l'abscisse x et du temps t.

1 Analyse dimensionnelle

1. Exprimez l'aire S de la portion de cloison mouillée par le béton en fonction de V et de a et justifiez pourquoi S est constante au cours de l'écoulement.

Solution: Le volume de béton étant invariant selon (Oy), $S = \frac{V}{a}$. V étant conservé, S est constante.

2. On suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon (Oy). Déduisez-en quel paramètre géométrique n'a pas d'influence sur l'étalement du béton.

Solution: L'écoulement du béton est invariant selon la direction perpendiculaire aux cloisons, donc la distance entre les cloisons a n'a pas d'influence sur l'écoulement.

3. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'évolution temporelle de la demi-longueur de la flaque de béton L (cf. figure 1) exprimée à l'aide de grandeurs sans dimension. Compte tenu de la nature bidimensionnelle de l'écoulement du béton, vous considérerez la surface mouillée S plutôt que son volume V comme paramètre pertinent. Pour former les grandeurs sans dimensions, vous emploierez g, S et ρ en justifiant préalablement pourquoi vous pouvez choisir ces trois grandeurs.

Solution: L est fonction du temps t, du volume de béton représenté par la surface mouillée S, du moteur de l'écoulement, à savoir le poids du béton, impliquant ρ et g, ainsi que de ses freins, à savoir sa viscosité μ et son inertie ρ :

$$L = f(t, \rho, \mu, g, S) : n + 1 = 6$$

Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 6 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème Pi, cette loi peut donc s'exprimer entre $n + 1 - k = 3$ grandeurs sans dimensions. On forme ces 3 GSD à l'aide de $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes. g, S et ρ étant 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes (g est la seule à impliquer le temps, ρ la seule à impliquer la masse), ceci permet effectivement de les choisir. En cherchant à adimensionner L, t et μ à l'aide de g, S et ρ on forme alors les GSD suivants : $\Pi = LS^{-1/2}$, $\Pi_1 = tg^{1/2}S^{-1/4}$, $\Pi_2 = \nu g^{-1/2}S^{-3/4}$ où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du béton. D'où :

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

2 Recherche de solution invariante d'échelle dans un régime d'écoulement lent

L'analyse en ordre de grandeur et l'analyse physique des équations décrivant l'écoulement du béton permettent de mettre en évidence l'existence d'un régime quasistatique (frein inertiel négligeable devant le frein visqueux) lorsque la flaque, de demi-longueur $L(t)$, est déjà bien étalée ($|\frac{\partial h}{\partial x}| \ll 1$), pour lequel l'approximation à l'ordre dominant du problème s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = D\frac{\partial^2(h^4)}{\partial x^2} \text{ pour } 0 \leq x \leq L(t) \\ h(x,t) = 0 \text{ pour } x > L(t) \end{cases} \tag{1}$$

où $D = \frac{g}{12\nu}$, $\nu = \mu/\rho$, sachant que :

— l'épaisseur de béton est nulle au bord de la flaque :

$$h\left(x = L(t), t\right) = 0 \ \forall t \tag{2}$$

— le sommet de la flaque reste au milieu des cloisons, en $x = 0$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,t) = 0 \ \forall t \tag{3}$$

— le volume de béton est constant :

$$\int_0^{+\infty} h(x,t)\, \mathrm{d}x = S/2 \ \forall t \tag{4}$$

1. Expliquez pourquoi ce problème {équation aux dérivées partielles (1), conditions (2, 3, 4)} est a priori bien posé, c'est-à-dire que le nombre de conditions aux limites et initiales est en accord avec l'ordre de l'e.d.p. Vous vous souviendrez avec profit de la diffusion de la chaleur dans un barreau dans lequel une quantité d'énergie donnée est déposée initialement en son milieu, étudiée en cours.

Solution: L'edp est d'ordre 2 en x, 1 en t. On a donc besoin de deux conditions aux limites spatiales et d'une condition aux limites temporelle. Les conditions (2) et (3) constituent deux conditions aux limites spatiales. La condition (4) est le résidu de la condition initiale temporelle. En principe, la condition initiale devrait porter explicitement sur le profil de la flaque à l'instant initial $h(x, 0)$. Mais aux temps longs, la flaque oublie le détail de sa forme initiale et ne retient que l'information intégrale de sa forme initiale, c'est-à-dire son volume, qui est conservé, ce que traduit la condition (4) (comme le champ de température dans la barre aux temps longs oublie le détail de la distribution de température initiale et ne retient que l'information intégrale de ce profil de température initial, c'est-à-dire l'énergie déposée initialement, qui est conservée).

2. Afin de déterminer si ce problème admet une solution auto-similaire, on cherche une solution invariante d'échelle. Pour cela, on définit le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x \mapsto x^{'} & / & x & = & x^* x^{'} \\ t \mapsto t^{'} & / & t & = & t^* t^{'} \\ h \mapsto h^{'} & / & h & = & h^* h^{'} \\ D \mapsto D^{'} & / & D & = & D^* D^{'} \\ S \mapsto S^{'} & / & S & = & S^* S^{'} \end{array}\right.$$

où $\{x^*, t^*, h^*, D^*, S^*\}$ sont des facteurs de changement d'échelle[1]. Déterminez les deux relations entre facteurs d'échelle imposés par la contrainte d'invariance d'échelle du problème (1, 2, 3, 4).

Solution:

$$\left\{\begin{array}{rcr} t^* & = & \frac{x^{*2}}{D^* h^{*3}} \\ h^* x^* & = & S^* \end{array}\right.$$

3. Le groupe des changements d'échelle laissant invariant le problème est donc à 3 paramètres libres. En choisissant comme paramètres libres t^*, D^* et S^*, montrez que les deux autres paramètres s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcr} h^* & = & \left(\frac{S^{*2}}{D^* t^*}\right)^{1/5} \\ x^* & = & \left(S^{*3} D^* t^*\right)^{1/5} \end{array}\right. \tag{5}$$

4. En écrivant que la solution $h(t, x, D, S)$ de ce problème invariant par ce groupe de changements d'échelle est aussi invariante par ce même groupe, puis en choisissant comme changements d'échelle particuliers $D^* = 1/D^{'}$ et $S^* = 1/S^{'}$, montrez que :

$$\left(\frac{D^{'} t^{'}}{S^{'2} t^* t^{'}}\right)^{1/5} h^{'} = f\left(t^* t^{'}, \left(t^* t^{'}\right)^{1/5} \frac{x^{'}}{\left(S^{'3} D^{'} t^{'}\right)^{1/5}}\right)$$

1. L n'est ni une variable du problème ni un de ses paramètres mais une des caractéristiques de sa solution, donc on ne lui impose pas de changement d'échelle autre que celui imposé à x.

En déduire que :

$$\left(\frac{D't'}{S'^2}\right)^{1/5} h' = g\left(\frac{x'}{(S'^3D't')^{1/5}}\right)$$

h est donc autosimilaire, sa variable d'auto-similarité étant $\eta = \frac{x}{(S^3Dt)^{1/5}}$

Solution: $h(t,x,D,S)$ se transforme en $h^*h' = f(t^*t', x^*x', D^*D', S^*S')$. En prenant $D^* = 1/D'$ et $S^* = 1/S'$, et en utilisant les expressions (5), on trouve :

$$\left(\frac{D'}{S'^2t^*}\right)^{1/5} h' = f\left(t^*t', \frac{x't^{*1/5}}{(S'^3D')^{1/5}}, 1, 1\right) = f\left(t^*t', \frac{x't^{*1/5}}{(S'^3D')^{1/5}}\right)$$

En faisant apparaître t^*t' :

$$\left(\frac{D't'}{S'^2t^*t'}\right)^{1/5} h' = f\left(t^*t', \frac{x'}{(S'^3D't')^{1/5}}(t^*t')^{1/5}\right)$$

Donc :

$$\left(\frac{D't'}{S'^2}\right)^{1/5} h' = (t^*t')^{1/5} f\left(t^*t', \frac{x'}{(S'^3D't')^{1/5}}(t^*t')^{1/5}\right) = g\left(t^*t', \frac{x'}{(S'^3D't')^{1/5}}\right)$$

$h'(t', x', D', S')$ étant invariant par changement d'échelle, il est indépendant de t^*, donc de t^*t'. Donc :

$$\left(\frac{D't'}{S'^2}\right)^{1/5} h' = g\left(\frac{x'}{(S'^3D't')^{1/5}}\right)$$

5. L'extrémité de la flaque est définie par (2). Montrez que l'abscisse L de cette extrémité est telle que :

$$L(t) = \eta_0\left(S^3\frac{g}{\nu}t\right)^{1/5}$$

où η_0 est une constante dont vous donnerez la signification.
Pour étaler le plus rapidement possible le béton dans la tranchée, vaut-il mieux fractionner le versement du béton ou le verser d'un seul coup ?

Solution: h vérifie :

$$\left(\frac{Dt}{S^2}\right)^{1/5} h = g\left(\frac{x}{(S^3Dt)^{1/5}}\right)$$

A l'extrémité de la flaque, c'est-à-dire en $x = L(t)$, h s'annule. Donc

$$g\left(\frac{L}{(S^3Dt)^{1/5}}\right) = 0$$

Soit η_0 le (premier) zéro de g, on a donc $\eta_0 = \frac{L}{(S^3Dt)^{1/5}}$ cqfd.

$$t = \frac{12\nu}{gS^3}\left(\frac{L}{\eta_0}\right)^5$$

t décroissant avec S, donc avec V, il vaut mieux verser le béton en une seule fois pour obtenir l'étalement le plus rapide dans une tranchée de demi-longueur donnée L.

6. En comparant ce résultat et celui donné par l'analyse dimensionnelle, exprimez Π en fonction de Π_1 et Π_2 dans ce régime quasitatique aux temps longs.

Solution:

$$\Pi = \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)^{1/5}$$