
UE 4AM01 - MMC partie Fluides

1ère session - Jeudi 5 janvier 2017 - 3h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit.

En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

1 Déformations d'une bulle

1.1 Pulsation de Minnaert

Une onde acoustique consiste en des perturbations de pression, de vitesse et de masse volumique, couplées, qui se propagent. Lorsqu'une bulle de gaz (de masse volumique négligeable) sphérique de rayon R immergée dans de l'eau de masse volumique ρ est irradiée par une onde acoustique, elle reste approximativement sphérique mais son volume, donc son rayon varie au cours du temps à la fréquence de l'onde acoustique. Une bulle se comporte en fait comme un oscillateur harmonique dont la raideur, c'est-à-dire la résistance aux variations de son volume, est liée à la compressibilité du gaz κ et l'inertie est liée à la masse de l'eau mise en mouvement lorsque le volume de la bulle varie.

1. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi pour la pulsation propre ω_M de cet oscillateur, appelée pulsation de Minnaert.

Solution: sur 3 points

$\omega_M = f(\rho, \kappa, R)$; $n + 1 = 4$, $k = 3$ (L,M,T) $\Rightarrow n + 1 - k = 1$: la loi peut s'exprimer comme une loi impliquant une seule grandeur sans dimension. En exprimant la dimension de ω_M en fonction des dimensions des k autres grandeurs dimensionnellement indépendantes ρ , κ , R , on trouve $\Pi = \omega R \sqrt{\kappa \rho}$ sans dimension. Donc la loi s'écrit : $\Pi = \text{constante}$, soit $\omega_M \propto \frac{1}{R \sqrt{\rho \kappa}}$. Autre voie : la fréquence propre d'un oscillateur harmonique de raideur k et de masse m s'écrit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc on peut construire une raideur à partir de κ et de R et une masse à partir de ρ et de R et trouver $\omega_M \propto \frac{1}{R \sqrt{\rho \kappa}}$

2. L'air étant assimilable à un gaz parfait, sa compressibilité est telle que $\kappa \sim \frac{1}{P}$, où P est la pression de l'air au repos. Calculez numériquement l'ordre de grandeur de la fréquence de Minnaert $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$ d'une bulle d'air de rayon 1 mm à la pression atmosphérique.

Solution: sur 1 point

$\omega_M \propto \frac{1}{R} \sqrt{\frac{P}{\rho}}$. A.N. : $f_M \sim 10^4$ Hz.

1.2 Ondes à la surface de la bulle

Les oscillations du volume de la bulle au passage de l'onde acoustique sont susceptibles d'induire des ondes à sa surface (vagues), comme le montre la figure 1. La propagation de ces ondes de surface résulte de la compétition entre la raideur de la surface de la bulle (résistance à son augmentation d'aire), traduite par sa tension de surface γ (homogène à une énergie par unité de surface), et l'inertie de l'eau mise en mouvement lorsque la surface de la bulle est déformée.

3. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi pour la relation de dispersion reliant le nombre d'onde k de l'onde de surface et sa pulsation ω_V , en supposant qu'elle ne fait pas intervenir le rayon de la bulle, ce qui est bien vérifié dans la pratique.

Solution: sur 3 points

$k = f(\omega_V, \gamma, \rho)$; $n + 1 = 4$, $k = 3$. On trouve : $\omega_V \propto \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} k^3$

4. La longueur d'onde maximale λ_{max} des ondes à la surface de la bulle est égale à son périmètre. Exprimez la pulsation minimale ω_{V1} en-dessous de laquelle aucune onde ne peut être excitée à la surface de la bulle.

Solution: sur 2 points

$\lambda_{max} = 2\pi R$ donc $k_{min} = \frac{2\pi}{\lambda_{max}} = \frac{1}{R}$ (**1 point**).

$\omega_V(k)$ étant croissante, lorsque k est minimal ω_V est aussi minimal : en-dessous de $\omega_V(k_{min})$ aucune onde de surface ne peut être excitée. Donc $\omega_{V1} = \omega_V(k_{min}) \propto \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}}$ (**1 point**).

5. Dans la pratique, les ondes à la surface de la bulle ne sont excitables qu'à des fréquences proches de la fréquence de Minnaert, où les oscillations de volume sont de grande amplitude. Déduisez-en l'expression et la valeur numérique du rayon minimal de la bulle R_{min} en-dessous duquel aucune onde de surface n'est excitée par oscillations de volume de la bulle à la fréquence de Minnaert.

Solution: sur 3 points

Pour $R = R_{min}$, on a $\omega_M = \omega_{V1}$, soit $\omega_M(R_{min}) = \sqrt{\frac{P}{R_{min}^2 \rho}} = \omega_{V1}(R_{min}) =$

$\sqrt{\frac{\gamma}{\rho R_{min}^3}}$ soit $R_{min} = \frac{\gamma}{P}$ (**1 point**).

A.N. : $R_{min} \sim 1 \mu\text{m}$ (**1 point**).

Pour $R < R_{min}$, $\omega_M(R) < \omega_{V1}(R)$ donc aucune onde de surface n'est excitable à la fréquence de Minnaert (**1 point**).

2 Ecoulement convergent ou divergent dans un coin

L'objectif de ce problème est d'étudier certains aspects de l'écoulement convergent ou divergent dû à une source/puits ponctuelle de matière et limité par deux parois faisant un coin, schématisé sur la figure 3 b. Cet écoulement schématise par exemple l'estuaire d'un fleuve (figure 2 a), le "diffuseur" en aval de la turbine d'une centrale hydroélectrique (figure 2 b), ou encore le pavillon des instruments à vent.

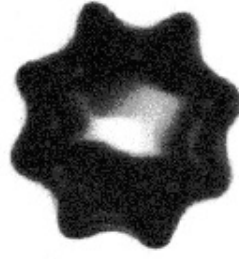


FIGURE 1 – Onde de surface à la surface d’une bulle induite par les oscillations du volume de la bulle au passage d’une onde acoustique. L’onde de surface présente ici 8 crêtes, donc la longueur d’onde de l’onde de surface vaut ici $1/8^e$ de son périmètre.

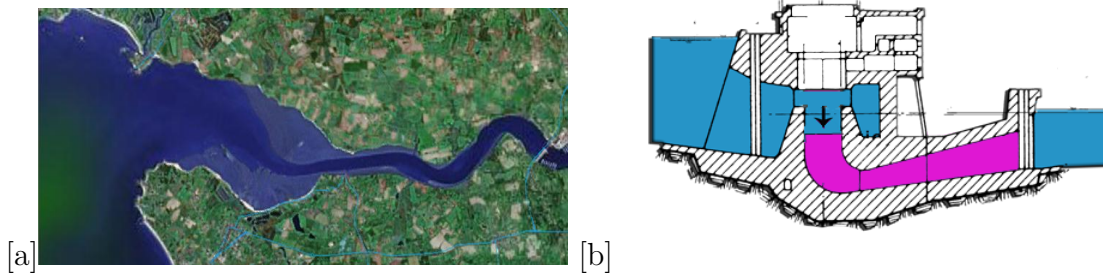


FIGURE 2 – (a) Estuaire d’un fleuve. (b) Diffuseur en aval de la turbine d’une centrale hydroélectrique vue en coupe.

Tout au long de l’énoncé, on considère un écoulement bidimensionnel dans le plan (Oxy) , incompressible, stationnaire, d’un fluide de masse volumique ρ , de viscosité cinématique ν dû à l’existence d’une source/puits de matière ponctuel situé à l’origine O . Loin de la source/puits, la pression du fluide est homogène constante, notée p_0 .

Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, un point M est repéré par le vecteur $\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. On emploiera aussi les coordonnées circulaires (r, θ) centrées sur O (voir la figure 3 a), dans lesquelles un point M est repéré par le vecteur $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$, avec $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$.

2.1 Préambule : écoulement source/puits de fluide parfait

Dans ce préambule, on considère un écoulement de fluide parfait.

1. Dans cette question, on considère qu’aucune paroi ne limite l’écoulement, si bien que le fluide diverge/converge radialement dans toutes les directions $\theta \in [0, 2\pi]$. L’écoulement est schématisé sur la figure 3 a dans le cas particulier d’un puits. En vous aidant éventuellement du formulaire donné à la fin de l’énoncé,

(a) montrez que le champ de vitesse

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

est incompressible,

Solution: sur 1 point
formulaire : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

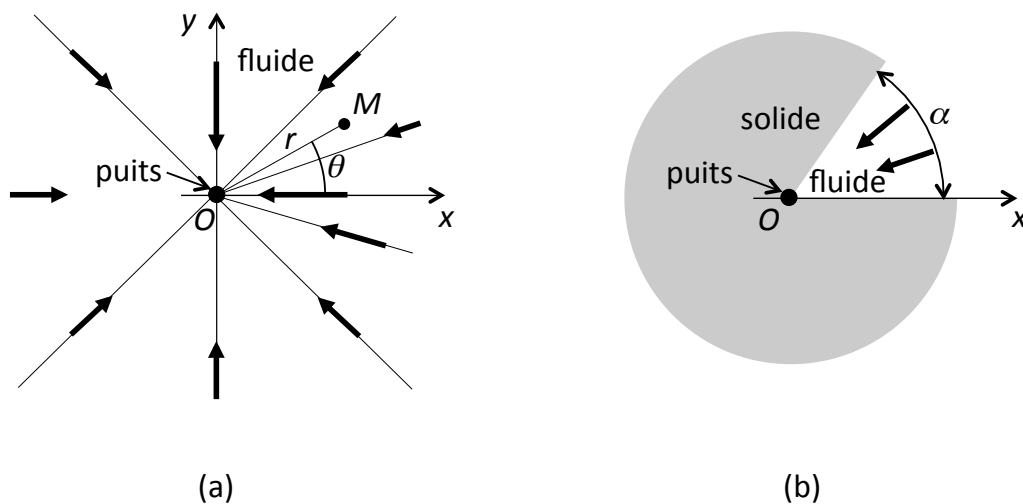


FIGURE 3 –

- (b) déterminez l'expression du champ de pression p au sein de l'écoulement,

Solution: sur 2 points

Écoulement de fluide parfait incompressible stationnaire : premier théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant radiale entre un point de rayon r et l'infini (**1 point**) : $p + \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}\|^2 = p_0$ soit $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{4\pi^2r^2}$ (**1 point**). Ou bien : en intégrant l'équation d'Euler radiale.

- (c) montrez que Q est le débit volumique par unité de hauteur du puits/source. Quel est le signe de Q si c'est un puits ? Une source ?

Solution: sur 2 points

$D_v = \iint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, C cylindre de hauteur h , de génératrice le cercle de centre O et de rayon r , $D_v = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} h r d\theta = Qh$ donc $Q = \frac{D_v}{h}$ débit volumique par unité de hauteur (**1 point**). puits : $Q < 0$, source : $Q > 0$ (**1 point**).

2. Dans cette question, on considère que l'écoulement est restreint angulairement dans un intervalle $\theta \in [0, \alpha]$ par deux parois solides semi-infinies dans la direction radiale, imperméables et planes, formant un coin, comme schématisé sur la figure 3 b. Justifiez pourquoi le champ de vitesse radial donné à la question précédente est toujours valable pour cette géométrie d'écoulement.

Solution: sur 1 point

Un écoulement de fluide parfait doit vérifier seulement l'imperméabilité des parois solides. Or les parois, qui sont radiales, sont confondues avec des lignes de courant donc au contact des parois $\mathbf{v} \perp \text{paroi}$: imperméabilité vérifiée. L'écoulement étudié en 2.1 vérifie les conditions aux limites imposées à l'écoulement schématisé sur la figure 3 b donc par unicité des solutions de l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$, Φ potentiel des vitesses de cet écoulement irrotationnel, c'est la solution. Par contre, le fluide glisse le long des parois.

2.2 Ecoulement dans le coin en tenant compte de la viscosité

A partir de maintenant, on ne néglige plus les effets de la viscosité. On considère donc l'écoulement d'un fluide visqueux dans un coin d'angle α dû à une source/puits ponctuelle de matière située en O, de débit volumique par unité de hauteur Q donné, comme schématisé sur la figure 3 b. On suppose qu'en présence d'effets visqueux, l'écoulement reste radial : $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_r$.

3. En effectuant l'analyse dimensionnelle du problème, justifiez la loi

$$u = \frac{Q}{r} f(\theta, X, \text{Re})$$

où X et Re sont deux grandeurs sans dimensions dont vous donnerez l'expression, Re s'interprétant comme un nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement. Dans la suite, on utilisera la notation simplifiée $u = \frac{Q}{r} f(\theta)$.

Solution: sur 3 points

$u = f(r, \theta, \alpha, \nu, Q)$. $n + 1 = 6$, $k = 2$ (L,T) donc la loi pour u peut s'exprimer comme une relation entre $n + 1 - k = 4$ grandeurs sans dimensions. En choisissant comme k grandeurs dimensionnellement indépendantes Q et r pour adimensionner ν et u , on construit deux grandeurs sans dimensions $\Pi = \frac{ur}{Q}$ et $\Pi_1 = \frac{|Q|}{\nu} = \text{Re}$, nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement, en plus de θ et α et on peut alors écrire : $u = \frac{Q}{r} f(\theta, \alpha, \frac{|Q|}{\nu})$.

4. En injectant cette forme $u = \frac{Q}{r} f(\theta)$ pour u dans l'équation de Navier-Stokes puis en éliminant la pression, montrez que f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$2ff' + \frac{4}{\text{Re}}f' + \frac{1}{\text{Re}}f''' = 0$$

Traduisez la conservation du débit volumique de l'écoulement et les conditions aux limites imposées à l'écoulement en égalités que doit vérifier f . Le problème est-il bien posé ?

Solution: sur 8 points

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) & \text{(1 point)} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \text{(1 point)} \end{cases}$$

En intégrant la composante selon θ de Navier-Stokes, $\frac{p}{\rho} = \frac{2\nu Q}{r^2} f(\theta) + \frac{q(r)}{\rho} + \frac{p_0}{\rho}$, q fonction inconnue (1 point).

Donc $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{4\nu Q}{r^3} f(\theta) - \frac{1}{\rho} q'(r)$. En injectant cette expression dans la composante selon r de Navier-Stokes, on trouve $f^2 + \frac{4}{\text{Re}}f + \frac{1}{\text{Re}}f'' = \frac{r^3}{\rho} q'$, soit en dérivant : $2ff' + \frac{4}{\text{Re}}f' + \frac{1}{\text{Re}}f''' = 0$ (2 points).

Conservation du débit volumique : $\int_0^\alpha f(\theta) d\theta = 1$ (1 point).

Non-glissement aux parois : $f(0) = f(\alpha) = 0$ (1 point).

ED d'ordre 3, 3 conditions donc problème a priori bien posé (1 point).

5. Postlude : il se trouve que ce problème admet une solution exacte. L'allure de l'écoulement dépend de manière cruciale du signe de Q^1 . Pour autant, l'écoulement dépend-il du nombre de Reynolds Re ? Peut-il présenter un caractère singulier dans la limite $1/Re \rightarrow 0$?

Solution: sur 2 points

L'ED, donc l'écoulement, dépendent de Re (**1 point**).

L'écoulement de fluide parfait ($1/Re = 0$) ne vérifie pas l'adhérence aux parois alors que l'écoulement de fluide visqueux le vérifie. Autrement dit :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0, \alpha} u(r, \theta)}_0 \right) \neq \lim_{\theta \rightarrow 0, \alpha} \left(\underbrace{\lim_{Re \rightarrow \infty} u(r, \theta)}_{\text{écoulement de fluide parfait}} \right)$$

\Rightarrow problème singulier dans la limite $1/Re \rightarrow 0$ (**1 point**).

La singularité se situe a priori aux parois.

2.3 Approximation de couche limite dans la limite $Re \rightarrow \infty$

Pour $Re \gg 1$, l'écoulement analysé dans la partie précédente présente au voisinage des parois une structure de type couche limite - écoulement extérieur qui motive une analyse perturbative des équations gouvernant l'écoulement au voisinage de la paroi. C'est l'objet de cette partie.

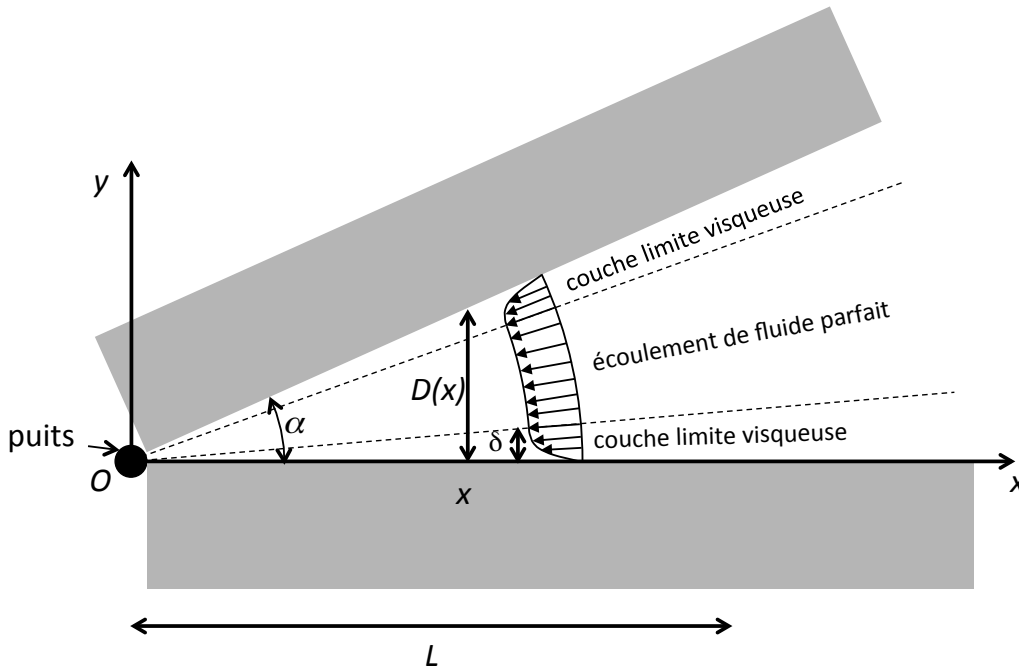


FIGURE 4 –

On considère donc toujours l'écoulement d'un fluide visqueux dans un coin d'angle $\alpha \sim 1$ dû à une source/puits ponctuelle de matière située en O , de débit volumique par unité de hauteur Q donné, dans la limite $Re \gg 1$. On se focalise sur le voisinage d'une des deux parois, plus précisément sur une portion de longueur L de la paroi de direction $\theta = 0$,

1. cf. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, Mc Graw-Hill.

voir la figure 4. On suppose que les effets de la viscosité sur l'écoulement du fluide ne sont sensibles qu'au proche voisinage de la paroi, dans la couche limite visqueuse, d'épaisseur caractéristique très inférieure à la distance entre les parois D et qu'à l'extérieur de cette couche limite l'écoulement est bien décrit par le modèle d'écoulement de fluide parfait étudié en partie 2.1.

2.3.1 Ecoulement extérieur

Exprimons l'écoulement de fluide parfait extérieur à la couche limite, noté dans la suite \mathbf{v}_e , (et p_e sa pression) au proche voisinage de la paroi.

6. Montrez qu'au proche voisinage de la paroi, c'est-à-dire pour $y \ll D(x)$, le champ de vitesse de l'écoulement de fluide parfait (1) s'écrit de manière approchée

$$\mathbf{v}_e \simeq \frac{Q}{2\pi x} \mathbf{e}_x.$$

On le note dans la suite $\mathbf{v}_e = u_e \mathbf{e}_x$ avec $u_e = \frac{Q}{2\pi x}$.

Solution: sur 3 points

$D(x) = x \tan \alpha$. $y = x \tan \theta$. $y \ll D(x) \Rightarrow \theta \ll \alpha \sim 1$ (**1 point**).
donc $x = r \cos \theta \simeq r$ (**1 point**).
et $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \simeq \mathbf{e}_x$ (**1 point**).

7. Montrez que

$$p_e = p_0 - \frac{1}{2} \rho u_e^2.$$

Solution: sur 1 point

Écoulement extérieur = écoulement de fluide parfait incompressible stationnaire donc on applique encore le premier théorème de Bernoulli comme en 2.1.

2.3.2 Adimensionnement à l'échelle de la couche limite visqueuse

Dans la suite, on adopte définitivement les coordonnées cartésiennes, et on pourra s'aider du formulaire donné à la fin de l'énoncé. On note $\mathbf{v} = u(x, y) \mathbf{e}_x + v(x, y) \mathbf{e}_y$ le champ de vitesse de l'écoulement dans la couche limite, $p(x, y)$ son champ de pression. On note δ l'épaisseur caractéristique de la couche limite, supposée telle que $\delta \ll D(L)$ dans la limite $Re \gg 1$. Dans la suite, on note \bar{z} la partie analytique de la grandeur z .

8. (a) Justifiez pourquoi l'échelle de u est $|u_e(L)|$, notée U dans la suite. On note V l'échelle de v , pour l'instant indéterminée.

Solution: sur 1 point

Dans la couche limite, le fluide est immobile à la paroi et est entraîné par l'écoulement extérieur à la vitesse $u_e(x)$ donc l'échelle pour u est $|u_e(x)|$. Or $x \sim L$ donc $u_e(x) \sim u_e(L)$. On peut donc poser $u = U \bar{u}$ avec $U = |u_e(L)|$ et on écrit $v = V \bar{v}$.

- (b) En adimensionnant l'équation de conservation de la matière écrite en coordonnées cartésiennes à l'échelle de la couche limite et lui appliquant le principe de moindre dégénérescence, exprimez V en fonction de U et ε , avec $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$. Montrez que $\varepsilon \ll 1$.

Solution: sur 3 points

Le domaine d'étude est $x \in [\simeq 0, L]$, $y \in [0, \delta]$ donc on pose $x = L\bar{x}$ et $y = \delta\bar{y}$ (**1 point**).

$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$. principe de moindre dégénérescence / non simplification abusive : $\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta}$. On peut donc poser $V = U \frac{\delta}{L}$ (**1 point**).

$\delta \ll D(L)$ avec $D(L) = L \tan \alpha \sim L$ donc $\varepsilon \ll 1$ (**1 point**).

9. En notant δp l'échelle de p , adimensionnez l'équation de Navier-Stokes écrite en coordonnées cartésiennes à l'échelle de la couche limite, c'est-à-dire n'exprimez les équations qu'à l'aide de parties analytiques, du nombre d'Euler $\text{Eu} = \frac{\delta p}{\rho U^2}$, du nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$ et de ε . Effectuez ensuite les simplifications automatiques.

Solution: sur 6 points

Loin de O, $p = p_0$ donc $p = p_0 + \delta p \bar{p}$ (**1 point**).

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\text{Eu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}_{\ll 1 (\text{1 point})} \right) \quad (\text{2 points})$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\text{Eu}}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}_{\ll 1} \right) \quad (\text{2 points})$$

10. Exprimez les conditions imposées à la vitesse à la paroi sous forme dimensionnée, puis adimensionnée.

Solution: sur 2 points

adhérence : $u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0 \quad \forall x$ (**1 point**).

donc $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = \bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0 \quad \forall \bar{x}$ (**1 point**).

11. Montrez que le raccordement des champs de vitesse et de pression du domaine intérieur (couche limite) et du domaine extérieur (écoulement de fluide parfait) implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow \frac{s}{\bar{x}} \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow -\frac{1}{2\bar{x}^2} \quad \text{! coquille!} \\ \delta p = \rho U^2 \end{array} \right.$$

avec $s = 1$ dans le cas d'une source, -1 dans le cas d'un puits.

Solution: sur 4 points

- $u(x, y \rightarrow +\infty) \rightarrow u_e(x)$ (**1 point**)
soit $U\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow \frac{Q}{2\pi x}$ avec $U = |u_e(L)| = \frac{|Q|}{2\pi L}$, $x = L\bar{x}$ et $\frac{Q}{|Q|} = s$
donc $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow \frac{s}{\bar{x}}$ (**1 point**).
- $p_0 + \delta p \bar{p}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow p_e$ (**1 point**)
avec $p_e = p_0 - \frac{1}{2}\rho u_e^2 = p_0 - \rho U^2 \frac{L^2}{2x^2}$ donc $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow -\frac{1}{2\bar{x}^2}$ et $\delta p = \rho U^2$ (**1 point**).

2.3.3 Analyse physique

12. En effectuant une analyse physique de la composante de l'équation de Navier-Stokes parallèle à la direction de l'écoulement principal, c'est-à-dire en identifiant les termes moteur, frein et conséquence de l'écoulement, montrez que

(a) $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$,

Solution: sur 6 points

Écoulement principal selon (Ox) donc analyse physique de Navier-Stokes selon (Ox) (**1 point**) :

- moteur = entraînement par l'écoulement extérieur = terme d'inertie (**1 point**),
- frein = frottement visqueux sur les parois immobiles = terme de viscosité (**1 point**),
- pression = conséquence du mouvement (**1 point**).

Donc : moteur \sim frein, \gtrsim conséquence, soit :

$$1 \sim \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \gtrsim \text{Eu} \quad (\text{1 point})$$

soit $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$ (**1 point**).

- (b) puis que $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$,

Solution: sur 2 points

$\text{Eu} \lesssim 1$ (on n'a pas de raison d'estimer à ce stade que $\text{Eu} \ll 1$) donc dans NS selon (Oy) : $\frac{\text{Eu}}{\varepsilon^2} \gg 1 \sim \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}}$ (**1 point**).

donc $\frac{\text{Eu}}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$ est le seul terme dominant, compensé par aucun autre en ordre de grandeur. Il est donc nul (cad d'ordre de grandeur petit devant l'unité) : $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$ (**1 point**).

- (c) enfin que $\bar{p}(\bar{x}) = -\frac{1}{2\bar{x}^2}$ **re-coquille**.

Dans la limite $\text{Re} \gg 1$, a-t-on bien $\delta \ll D(L)$?

Solution: sur 2 points

$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$ donc \bar{p} ne dépend pas de \bar{y} . Or $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow -\frac{1}{2\bar{x}^2}$ donc

$$\bar{p}(\bar{x}) = -\frac{1}{2\bar{x}^2} \text{ (1 point).}$$

$$\text{Re} \gg 1 \Rightarrow \delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \ll L = \frac{D(L)}{\tan \alpha} \sim D(L) \text{ (1 point).}$$

En posant $\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$, on a donc comme système d'équations régissant la couche limite visqueuse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = \bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0 \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow \frac{s}{\bar{x}} \end{array} \right. \quad (2)$$

2.3.4 Solution invariante d'échelle / autosimilaire

13. Pourquoi le système d'équations (2) est-il susceptible de posséder une solution invariante d'échelle / autosimilaire ?

Solution: sur 1 point

Domaine d'étude borné en x et en y par 0 et ∞ donc ce système d'équations est susceptible de posséder une solution invariante d'échelle / autosimilaire impliquant x et y dans ce domaine d'étude.

14. En imposant des changements d'échelle d'un facteur z^* à toutes les grandeurs \bar{z} intervenant dans le système (2), montrez que le groupe de changements d'échelle laissant le problème (2) invariant est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{1}{x^*} \\ v^* = \frac{1}{y^*} \\ x^* = y^* \end{array} \right.$$

Combien y-a-t-il de facteurs d'échelle indépendants dans ce groupe de changements d'échelles laissant le système (2) invariant ?

Solution: sur 3 points

Le système (2) est invariant par changement d'échelles si :

$$\text{(1 point)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^*}{x^*} = \frac{v^*}{y^*} \\ \frac{u^{*2}}{x^*} = \frac{v^* u^*}{y^*} = \frac{1}{x^{*3}} = \frac{u^*}{y^{*2}} \\ u^* = \frac{1}{x^*} \end{array} \right.$$

soit :

$$\text{(1 point)} \quad \left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{1}{x^*} \\ v^* = \frac{1}{y^*} \\ x^* = y^* \end{array} \right.$$

4 facteurs d'échelle x^*, y^*, u^*, v^* , 3 relations entre eux imposées par la contrainte d'invariance, donc un seul facteur d'échelle indépendant, les 3 autres s'en déduisant (**1 point**).

15. En imposant à la solution $\{\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}), \bar{v} = g(\bar{x}, \bar{y})\}$ du système (2) d'être invariante par ce même groupe de changements d'échelle, montrez que :

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{x}^{-1} f\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \\ \bar{v} = \bar{x}^{-1} g\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \end{cases}$$

Solution: sur 4 points

Par changement d'échelles, $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y})$ se transforme en $u^* u = f(x^* x, y^* y)$. Compte tenu des relations imposées entre les facteurs de changement d'échelle par la contrainte d'invariance, on a $\frac{1}{x^*} u = f(x^* x, x^* y)$. En posant $x^* = \frac{1}{x}$, on a $xu = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (**2 points**).
De même pour v (**2 points**).

16. En définissant la variable d'autosimilarité $\eta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, injectez les expressions $\bar{u} = \bar{x}^{-1} f(\eta)$ et $\bar{v} = \bar{x}^{-1} g(\eta)$ dans le système (2) et montrez :

- (a) d'abord que $g' = f + \eta f'$,

Solution: sur 3 points

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{-1}{\bar{x}^2} (f(\eta) + \eta f'(\eta)) \quad (\text{1 point})$$

$$\text{et } \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\bar{x}^2} g'(\eta) \quad (\text{1 point})$$

donc $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$ se transforme en $\frac{-1}{\bar{x}^2} (f + \eta f') + \frac{1}{\bar{x}^2} g' = 0$ soit $g' = f + \eta f'$ (**1 point**).

- (b) puis que $g = \eta f$,

Solution: sur 2 points

$g' = \frac{d}{d\eta}(\eta f) \Rightarrow g = \eta f + \text{constante}$. Or $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0$ implique $g(0) = 0$ donc constante = 0.

- (c) que par ailleurs $-fg' + gf' = -1 + f''$,

Solution: sur 2 points

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\bar{x}^2} f'(\eta) \text{ et } \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{\bar{x}^3} f''(\eta) \quad (\text{1 point})$$

donc $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$ se transforme en :

$$\frac{1}{\bar{x}^3} (-f(\underbrace{f + \eta f'}_{g'}) + gf') = \frac{1}{\bar{x}^3} (-1 + f'') \text{ soit } -fg' + gf' = -1 + f'' \quad (\text{1 point}).$$

- (d) enfin que f vérifie :

$$\begin{cases} f'' + f^2 - 1 = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(+\infty) = s, \end{cases}$$

équation différentielle dont la solution (dépendant de manière cruciale de la valeur de s) permet d'écrire la solution invariante d'échelle/autosimilaire du problème de couche limite recherchée.

Solution: sur 3 points

On injecte $g = \eta f$ dans l'égalité précédemment trouvée et on trouve $f'' + f^2 - 1 = 0$ (**1 point**).

Par ailleurs, compte tenu de $\bar{u} = \bar{x}^{-1} f\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$, $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = 0$ se transforme en $f(0) = 0$ (**1 point**)

et $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow +\infty) \rightarrow \frac{s}{\bar{x}}$ se transforme en $f(+\infty) = s$ (**1 point**).

17. En définissant la frontière entre la couche limite et le domaine extérieur comme $\eta \sim 1$, montrez que l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse est telle que $\delta \sim x$. Quelle est la forme de cette frontière ?

Solution: sur 1 point

$\eta_{\text{frontière}} \sim 1 \Leftrightarrow \bar{y}_{\text{frontière}} \sim \bar{x}$ or $y_{\text{frontière}} = \delta$ donc $\frac{\delta}{L} \sim \frac{x}{L}$ soit $\delta \sim x$: frontière = droite linéaire.

18. En se rappelant que l'épaisseur caractéristique de la couche limite visqueuse se développant le long d'une plaque plane dans un écoulement uniforme de vitesse U est telle que $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$, comment aurait-on pu d'emblée prédire le comportement de l'épaisseur de la couche limite visqueuse dans le cas d'un écoulement divergent/convergent comme celui étudié dans ce problème ?

Solution: sur 2 points

Ici $U(x) \propto \frac{1}{x}$ donc $\delta \sim \sqrt{x^2}$.

Fomulaire

Equations bilan en coordonnées cartésiennes

Pour un champ de vitesse bidimensionnel $\mathbf{v} = u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$ et un champ de pression bidimensionnel $p(x, y, t)$:

- Conservation de la matière au sein d'un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible (équation de Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Equations bilan en coordonnées circulaires

Pour un champ de vitesse bidimensionnel $\mathbf{v} = u(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + v(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta$ et un champ de pression bidimensionnel $p(r, \theta, t)$:

— Conservation de la matière au sein d'un écoulement incompressible :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

— Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible (équation de Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$