Année 2018-2019

Licence de Mécanique

Transformées linéaires (3A102)
1ère session - Mardi 13 Novembre 2018 - durée : 1h30
sans document - sans calculatrice - sans téléphone portable

Le but de ce problème est d'étudier un système de bassins couplés comme ce qui existe à Versailles pour alimenter les différents jets d'eau. Plus précisément, nous allons chercher à déterminer l'évolution du niveau d'eau dans un bassin (noté bassin 2) alimenté par un autre bassin (bassin 1) lui-même alimenté par une arrivée d'eau. Le débit de l'arrivée d'eau peut varier au cours du temps et on le notera $q_0 + q(t)$. On considère que le niveau d'eau dans chaque bassin peut être décomposé en un niveau de base qui ne varie pas par rapport au temps (noté avec un indice 0) et un niveau de faibles variations. Ainsi les niveaux dans les bassins 1 et 2 sont respectivement notés : $n_{10} + n_1(t)$ et $n_{20} + n_2(t)$. On suppose que les bassins 1 et 2 sont reliés par une restriction R_1 (une liaison dont on contrôle le débit) et on décompose le débit en une partie stationnaire et une partie qui peut varier au cours du temps : $q_{10} + q_1(t)$. Enfin, le bassin 2 est également relié à une restriction R_2 qui permet un débit $q_{20} + q_2(t)$ avec q_{20} la partie stationnaire et $q_2(t)$ la partie qui peut évoluer dans le temps.

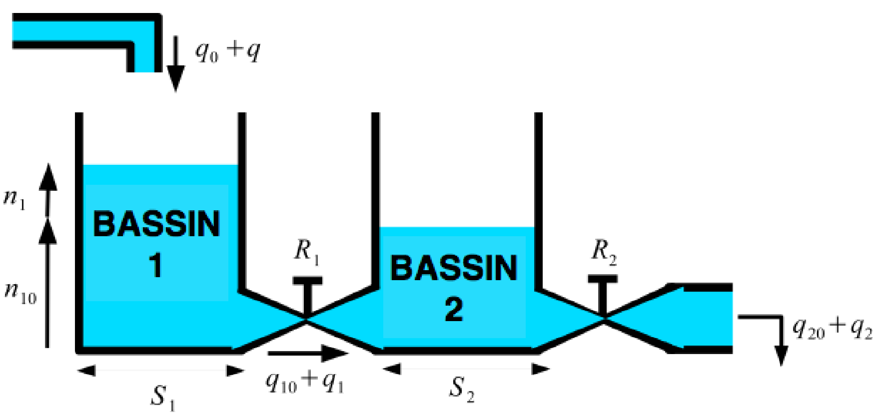


Figure 1: Système de bassins en cascade

On montre (non demandé dans ce problème) que les variations des niveaux d'eau dans les bassins doivent satisfaire les équations différentielles suivantes :

$$S_1 \frac{dn_1(t)}{dt} + \frac{1}{A_1} n_1(t) = q(t) + \frac{1}{A_1} n_2(t) \tag{1}$$

$$S_2 \frac{dn_2(t)}{dt} + \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) n_2(t) = \frac{1}{A_1} n_1(t) \tag{2}$$

Les paramètres S_1, S_2, A_1 et A_2 sont constants au cours du temps et représentent respectivement les surfaces des bassins 1 et 2 et des coefficients caractérisant les restrictions 1 et 2. Leurs valeurs sont :

- $S_1 = 2\text{m}^2$ et $S_2 = 3m^2$,
- $A_1 = A_2 = 5$.

Par ailleurs, dans tout le problème on considérera que $n_1(t = 0) = n_2(t = 0) = 0$.

L'objectif du problème est donc de déterminer $n_2(t)$ en fonction des différents paramètres du problème.

PARTIE 1 : partie introductive

Dans cette partie on va utiliser la transformée de Laplace par rapport au temps.

1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside ($h(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $h(t) = 0$ si $t < 0$).

Solution:

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_0^{+\infty} h(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2. Calculer la transformée de Laplace de la fonction e^{-bt}, où b est une constante (complexe ou réelle).

Solution:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-bt}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-bt}e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(b+p)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{-(b+p)t}}{-(b+p)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{b+p} \end{aligned}$$

PARTIE 2 : étude du système pour un débit d'entrée constant
Dans cette partie on va utiliser la transformée de Laplace par rapport au temps. On note : $Q(p) = \mathcal{L}\{q(t)\}$, $N_1(p) = \mathcal{L}\{n_1(t)\}$ et $N_2(p) = \mathcal{L}\{n_2(t)\}$

1. Calculer les transformées de Laplace des équations (1) et (2).

Solution:

$$S_1pN_1(p) - n_1(t=0) + \frac{1}{A_1}N_1(p) = Q(p) + \frac{1}{A_1}N_2(p)$$
$$S_2pN_2(p) - n_2(t=0) + \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)N_2(p) = \frac{1}{A_1}N_1(p)$$

2. On considère le système dont l'entrée est $q(t)$ et la sortie est $n_2(t)$. Montrer qu'on a alors

$$T(p) = \frac{N_2(p)}{Q(p)} = \frac{5}{150p^2 + 35p + 1} \tag{3}$$

Solution: En combinant les deux équations de la question 1, on trouve que :

$$\begin{aligned}
Q(p) &= A_1 N_2(p) \left(S_2 p + \left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \right) \right) \left(S_1 p + \frac{1}{A_1} \right) - \frac{1}{A_1} N_2(p) \\
&= N_2(p) \left[-\frac{1}{A_1} + A_1 \left(S_2 p + \left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \right) \right) \left(S_1 p + \frac{1}{A_1} \right) \right] \\
&= N_2(p) \left[\frac{150p^2 + 35p + 1}{5} \right]
\end{aligned}$$

d'où

$$T(p) = \frac{5}{150p^2 + 35p + 1}$$

3. **Dans toute cette partie**, on suppose que le débit d'entrée est $q(t) = ah(t)$, où $h(t)$ est la fonction de Heaviside. Montrer que $N_2(p)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$N_2(p) = \frac{a}{30(p + \frac{1}{5})(p + \frac{1}{30})p}$$

Solution:

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= T(p)Q(p) \\
&= \frac{5}{150p^2 + 35p + 1} \frac{a}{p} \\
&= \frac{a}{30(p + \frac{1}{5})(p + \frac{1}{30})p}
\end{aligned}$$

4. Montrer que $N_2(p)$ peut aussi s'écrire :

$$N_2(p) = \frac{\alpha_1}{(p - p1)} + \frac{\alpha_2}{(p - p_2)} + \frac{\alpha_3}{p}$$

On donnera les valeurs de α_1, α_2, α_3, p_1 et p_2

Solution: D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, on peut rééecrire $N_2(p)$ sous la forme :

$$N_2(p) = \frac{\alpha_1}{(p - p1)} + \frac{\alpha_2}{(p - p_2)} + \frac{\alpha_3}{p}$$

avec $p_1 = \frac{-1}{5}$ et $p_2 = \frac{-1}{30}$. Reste à déterminer α_1, α_2, α_3 :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= N_2(p).(p + \frac{1}{5})|_{p=\frac{-1}{5}} && (4) \\
&= \frac{a}{30(\frac{-1}{5} + \frac{1}{30})\frac{-1}{5}} && (5) \\
&= a && (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= N_2(p).(p + \frac{1}{30})|_{p=\frac{-1}{30}} && (7) \\
&= \frac{a}{30(\frac{-1}{30} + \frac{1}{5})\frac{-1}{30}} && (8) \\
&= -6a && (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= N_2(p).p|_{p=0} && (10) \\ &= \frac{a}{30.\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{30}} && (11) \\ &= 5a && (12) \end{aligned}$$

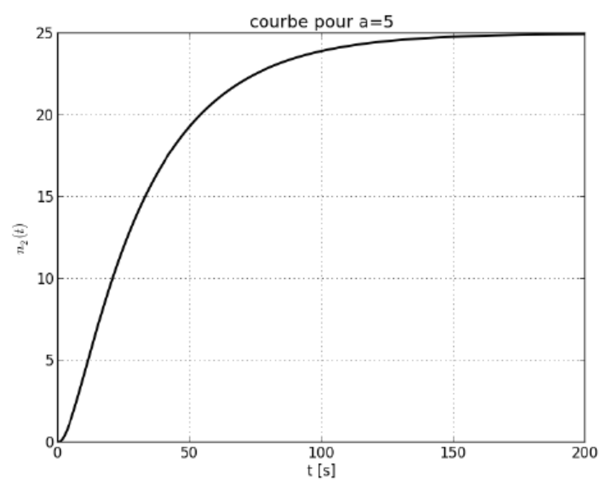
5. En déduire le niveau du bassin 2 au cours du temps, $n_2(t)$.

Solution:

$$\begin{aligned} n_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{N_2(p)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3a}{2(p+\frac{1}{5})}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{15a}{2(p+\frac{1}{30})}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6a}{p}\right\} \\ &= \left(ae^{-\frac{t}{5}} - 6ae^{-\frac{t}{30}} + 5a\right) h(t) \end{aligned}$$

6. Tracer qualitativement la fonction $n_2(t)$. On précisera l'axe des ordonnées.

Solution:



7. Comment choisir la valeur du débit d'alimentation $q(t)$ pour que le niveau d'eau dans le bassin 2 soit stable et égal à 0.25m ?

Solution: D'après la forme de $n_2(t)$, on voit que si t est suffisamment grand alors $n_2(t) \approx 5a$, par conséquent en choisissant $q(t) = 0.05h(t)$ on obtient le résultat souhaité.

PARTIE 3 : analyse de la réponse en fréquences

Dans cette partie on va utiliser la transformée de Fourier par rapport au temps. L'objectif est d'analyser le comportement en fréquences (ou en pulsations) du système composé des deux bassins. On notera les transformées de Fourier de la façon suivante : $\mathcal{F}\{n_1(t)\} = \hat{n}_1(\omega)$, $\mathcal{F}\{n_2(t)\} = \hat{n}_2(\omega)$ et $\mathcal{F}\{q(t)\} = \hat{q}(\omega)$

1. Calculer la transformée de Fourier des équations (1) et (2).

Solution:

$$S_1 i\omega \hat{n}_1(\omega) + \frac{1}{A_1}\hat{n}_1(\omega) = \hat{q}(\omega) + \frac{1}{A_1}\hat{n}_2(\omega)$$
$$S_2 i\omega \hat{n}_2(\omega) + \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)\hat{n}_2(\omega) = \frac{1}{A_1}\hat{n}_1(\omega)$$

2. Rappeler la définition de la fonction de transfert en fréquences (en pulsations) de ce système que l'on notera $\hat{T}(\omega)$

Solution:

$$\hat{T}(\omega) = \frac{\hat{n}_2(\omega)}{\hat{q}(\omega)}$$

3. Donner l'expression de $\hat{T}(\omega)$.

Solution:

$$\hat{q}(\omega) = \hat{n}_1(\omega)\left(S_1 i\omega + \frac{1}{A_1}\right) - \frac{1}{A1}\hat{n}_2(\omega)$$

et

$$\hat{n}_1(\omega) = A_1\left(S_2 i\omega \hat{n}_2(\omega) + \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)\hat{n}_2(\omega)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\hat{q}(\omega) &= A_1\left(S_2 i\omega \hat{n}_2(\omega) + \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)\hat{n}_2(\omega)\right)\left(S_1 i\omega + \frac{1}{A_1}\right) - \frac{1}{A1}\hat{n}_2(\omega) \\
&= \hat{n}_2(\omega)\left(-\frac{1}{A1} + A_1 S_2 i\omega + \frac{A_1 A_2 + A_1^2}{A_1 A_2}\right)\left(S_1 i\omega + \frac{1}{A_1}\right) \\
&= \hat{n}_2(\omega)\left[\frac{-150\omega^2 + 35 i\omega + 1}{5}\right]
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\hat{T}(\omega) = \frac{5}{-150\omega^2 + 35 i\omega + 1}$$

4. Comparer l'expression de $\hat{T}(\omega)$ à l'équation 3. Comment peut-on passer d'une équation à l'autre ? Est-ce cohérent par rapport aux définitions des transformées de Fourier et de Laplace ?

Solution: Pour passer d'une équation à l'autre, on pose $p = i\omega$. Cette relation est cohérente par rapport aux définitions des transformées de Fourier et de Laplace (cf cours).

5. Montrer que $\hat{T}(\omega)$ se met sous la forme :

$$\hat{T}(\omega) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + iC\omega}$$

Que valent A, ω_0 et C ?

Solution:

$$\begin{aligned}
\hat{T}(\omega) &= \frac{5}{-150\omega^2 + 35i\omega + 1} && (13)\\
&= \frac{1}{30(-\omega^2 + \frac{7}{30}i\omega + \frac{1}{150})} && (14)\\
&= = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + iC\omega} && (15)
\end{aligned}$$

avec $A = \frac{1}{30}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{150}}$ et $C = \frac{7}{30}$.

6. Calculer $|\hat{T}(\omega)|$.

Solution:

$$\begin{aligned}
|\hat{T}(\omega)| &= \frac{|A|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + iC\omega|} && (16)\\
&= \frac{A}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (C\omega)^2\right)^{1/2}} && (17)
\end{aligned}$$

7. Calculer $\log(|\hat{T}(\omega)|)$ pour les cas suivants :

- $\omega << \omega_0$
- $\omega = \omega_0$
- $\omega >> \omega_0$

Solution:

$$\begin{aligned}
\log(|\hat{T}(\omega)|) &= \log\left(\frac{|A|}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (C\omega)^2\right)^{1/2}}\right) && (18)\\
&= \log(|A|) - \frac{1}{2}\log\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (C\omega)^2\right) && (19)\\
&\approx -\frac{1}{2}\log\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (C\omega)^2\right) && (20)
\end{aligned}$$

Si $\omega << \omega_0$,

$$\log(|\hat{T}(\omega)|) \approx \log(|A|) - 2\log(\omega_0)$$

Si $\omega = \omega_0$,

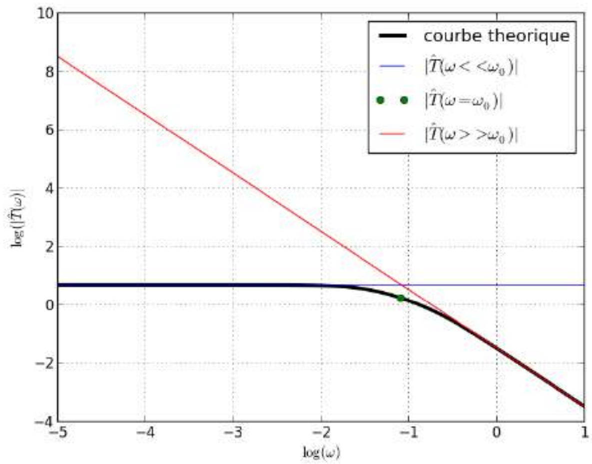
$$\log(|\hat{T}(\omega)|) = \log(|A|) - \log(C\omega_0)$$

Si $\omega >> \omega_0$,

$$\log(|\hat{T}(\omega)|) = \log(|A|) - 2\log(\omega)$$

8. Tracer qualitativement $\log(|\hat{T}(\omega)|)$ en fonction de $\log(\omega)$.

Solution:



9. Comment se comporte le niveau d'eau dans le bassin 2 ($n_2(t)$) si le débit d'eau entrant $q(t)$ subit des variations très rapides en temps ?

Solution: Si le débit d'eau entrant $q(t)$ subit des variations très rapides en temps, cela signifie que le spectre de $q(t)$ comporte des fréquences élevées. Or d'après la question précédente : ces hautes fréquences seront fortement atténuées car le système agit comme un filtre passe bas. C'est même comportement que celui étudié en TD lors de l'étude de l'enceinte basse reflex.