Licence de Mécanique - 3A002
Examen du 30 mai 2017

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner un exemple de équation aux dérivées partielles linéaire elliptique que vous avez étudié en cours (aucune justification de ces propriétés est exigé)
2. Soit l'équation $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$. Déterminer le domaine où l'équation est elliptique, puis hyperbolique.
3. Soit le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-homogène :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty] \qquad (1) \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Quel est le domaine de dépendance de la solution u au point $(0,2)$?
4. On veut modéliser la vibration d'une corde de guitare.
   (a) Donner l'équation aux dérivées partielles régissant ce phénomène. On appelera $u(x,t)$ l'amplitude de la vibration à l'abscisse x.
   (b) Sachant que la corde est attachée en $x = 0$ et en $x = L$ écrire les conditions frontière.
   (c) La corde est supposée lâchée sans vitesse initiale et sa forme initiale est supposée donnée par une fonction $u_0(x)$. Ecrire les conditions initiales.
5. Donner la solution de l'équation de la diffusion sur l'axe réel en utilisant la fonction de Green.
6. Enoncez le principe de maximum pour une fonction harmonique.

Exercice 1

Soit le problème :

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y = 0 \\ u(0,y) = e^{-y^2} \qquad (2) \end{aligned}$$

1. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation. Tracez quelques courbes soigneusment. Comment se comporte la solution le long de ces courbes ?
2. Déterminer la solution de ce problème.

Exercice 2

Soit le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \quad (1) \\ u(x,0) &= x^2, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2) \\ u_t(x,0) &= 1, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3) \end{aligned}$$

i) Précisez de quelle équation de la mécanique il s'agit. Que représente les relations (2) et (3) ?
ii) Déterminer la solution u(x, t) qui vérifie les conditions initiales.

Exercice 3
(a) Utiliser la méthode de séparation des variables pour déterminer la solution générale du problème de Neumann pour la diffusion de la chaleur dans une barre isolée :

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \end{aligned} \tag{3}$$

(b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer la solution de l'équation $u_t = 12u_{xx}$, $\forall\ 0 < x < \pi,\ t > 0$ avec les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) &= 1 + \cos^3 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Indication : $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.
(c) Étudier la limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, $\forall\ 0 < x < \pi$, et donner une interprétation physique de votre étude. Est-ce que ce résultat était prévisible ?

Exercice 4
Résoudre l'équation de Laplace :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall\ 0 < x < 2\pi, -1 < y < 1$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(x,-1) = 0,\ 0 < x < 2\pi \\ u(x,1) = 1 + \sin 2x, \quad 0 < x < 2\pi \\ u_x(0,y) = u_x(2\pi,y) = 0, \quad -1 < y < 1. \end{aligned}$$

Eléments de correction :

Exercice 1
On a : $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, donc $x^2 - y^2 = c$ est l'équation des caractéristiques. La solution u est constante le long de ces courbes d'équation $c = x^2 - y^2$. Cette solution s'écrit : $y(x,y) = f(c) = f(x^2 - y^2)$.
On utilise la condition auxiliaire pour trouver $u(0,y) = f(-y^2) = e^{-y^2}$ donc $f(w) = e^w, \forall w$. On trouve ainsi la solution du problème : $u(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Exercice 2
i) Il s'agit de l'équation des ondes sur l'axe réelle avec des conditions initiales : position initiale (2), et vitesse initiale (3).
ii) On utilise la formule de d'Alembert pour trouver la solution ($c = 1$, $\Phi(x) = x^2$ et $\Psi(x) = 1$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-t) + \Phi(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\mathrm{d}s = x^2 + t^2 + t$$

Exercice 3
(a) La solution par superposition de l'équation de la diffusion avec les conditions aux limites de type Neumann est :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

Et la condition initiale s'exprime en série de Fourier cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

avec A_n le coefficient de la série de Fourier. On utilise la propriété d'orthogonalité pour montrer que :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x$$

(b) Pour $k = 12$, $L = \pi$ on a :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 kt}\cos(nx)$$

avec :

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos^3 x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

On utilise l'indication et on a seulement deux coefficients non-nuls : A_1 et A_3 a calculer (+ le coefficient libre A_0).
(c) Quand $t \to \infty$ la solution $u \to 0$ ce qui était attendu d'une EDP de diffusion : l'énergie décroît avec le temps .

Exercice 4
On utilise la méthode de séparation de variables. L'equation en X sera :

$$X'' + \lambda X = 0$$

avec $\lambda = \beta^2 >= 0$. La solution $X(x) = Acos(\beta x) + Dsin(\beta x)$. On utilise les conditions de Neumman pour trouver : $X_n(x) = A_n\cos(\beta x)$ avec $\beta = n$.
Pour l'équation en Y on a :

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

de solution réelle : $Y(y) = C\cosh(ny) + D\sinh(ny)$. On utilise la condition limite homogène $Y(-1) = 0$ pour trouver $C\cosh(n) - D\sinh(n) = 0$ ce qui donne $C = D\tanh(n)$.
La solution par superposition est alors :

$$u_n(x,y) = K_0 + \sum_{n\geqslant 1} K_n\cos(nx)(\tanh(n)\cosh(ny) + \sinh(ny)).$$

avec $K_n = A_n C_n$.
On utilise la condition aux limites non-homogène en y pour obtenir :

$$u_n(x,1) = K_0 + \sum_{n\geqslant 1} K_n\cos(nx)(\tanh(n)\cosh(n) + \sinh(n)) = 1 + \sin(2x)$$

ou encore :

$$u_n(x,1) = K_0 + \sum_{n\geqslant 1} K_n\cos(nx)(2\sinh(n)) = 1 + \sin(2x) = 1 + 2\cos(x)\sin(x)$$

et on calcule les coefficients K_n comme toujours en utilisant les propriétés des coefficients de Fourier (on peut ici même utiliser des résultats de l'exercice précédent).