

CHAPITRE 4

Assemblage et système linéaire équivalent

- Principe de construction (cas élasticité + isoparamétrique)
- ✓ • Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires (cas isoparamétrique)
- Assemblage
- ✓ • Prise en compte des conditions aux limites

-
- Stockage → matrices creuses
 - Méthodes de résolution → direct - itératif



Principe de construction

Rappel : On souhaite écrire de manière matricielle les formulations faibles des problèmes de structure s'écrivant : *Trouver* $\underline{u}^h \in U_{ad}^h(\underline{u}^d)$ *tel que*

$$a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = l(\underline{v}^h) \quad \forall \underline{v}^h \in U_{ad}^h(\underline{u}^d)$$

Symétrie

Réécriture du terme bilinéaire : $a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^h) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^h) dV = \int_{\Omega^h} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^h) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^h) dV$

Et avec la notation matricielle : $a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} {}^t \{ \varepsilon(\underline{v}^h) \} [A] \{ \varepsilon(\underline{u}^h) \} dV$

Utilisation de la représentation globale de $\{\varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon(\underline{v}^h) \} &= [\tilde{B}(\underline{x})] \{ V \} \\ \{ \varepsilon(\underline{u}^h) \} &= [\tilde{B}(\underline{x})] \{ U \} \end{aligned}$$

$$a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} {}^t \{ V \} {}^t [\tilde{B}(\underline{x})] [A] [\tilde{B}(\underline{x})] \{ U \} dV$$

$$a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = {}^t \{ V \} \underbrace{\int_{\Omega^h} {}^t [\tilde{B}(\underline{x})] [A] [\tilde{B}(\underline{x})] dV}_{[K]} \{ U \}$$

$a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = {}^t \{ V \} [K] \{ U \}$

Principe de construction

Réécriture du terme linéaire : $l(\underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} \underline{f}_v \cdot \underline{v}^h dV + \int_{\partial\Omega_F^h} \underline{F}^d \cdot \underline{v}^h dS$

Travail des efforts
volumiques

Travail des efforts
surfaciques imposés

Avec la notation matricielle :

$$l(\underline{v}^h) = \int_{\Omega^h} {}^t \{v^h\} \cdot \{f_v\} dV + \int_{\partial\Omega_F^h} {}^t \{v^h\} \cdot \{F^d\} dS$$

Utilisation de l'interpolation globale : $\{v^h\} = [\tilde{N}(\underline{x})] \{V\}$

$$l(\underline{v}^h) = {}^t \{V\} \left\{ \int_{\Omega^h} {}^t [\tilde{N}(\underline{x})] \{f_v\} dV + \int_{\partial\Omega_F^h} {}^t [\tilde{N}(\underline{x})] \{F^d\} ds \right\}$$

$\{F\}$

$l(\underline{v}^h) = {}^t \{V\} \{F\}$

Principe de construction

Au final : $a(\underline{u}^h, \underline{v}^h) = l(\underline{v}^h)$

$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^{K \times T}$

Equivaut à : ${}^t \{ \cancel{V} \} [K] \{ U \} = {}^t \{ \cancel{V} \} \{ F \}$ puis :

$$[K] \{ U \} = \{ F \}$$

Problème : On ne connaît pas toujours les matrices globales composant $[K]$ et $\{F\}$

→ On évalue la contribution de chaque élément puis on somme,
sachant que : $\Omega^h = \bigcup E_e$

$$\int_{\Omega^h} c \, dx = \sum_e \int_{\Omega_e} c \, dx$$

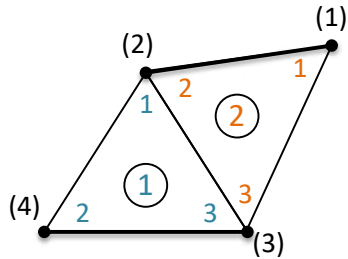
Il faudrait donc réécrire le système sous la forme:

$$\sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{ V_e \} \overset{\substack{\text{Matrice de rigidité} \\ \text{élémentaire}}}{[K_e]} \{ U_e \} = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{ V_e \} \overset{\substack{\text{Second membre} \\ \text{élémentaire}}}{\{ F_e \}}$$

Ne concerne que certains ddl propres à chaque élément → on ne peut pas simplifier, il faut utiliser une procédure d'**assemblage**.

Principe de construction

En effet :



$$[connec] = \begin{bmatrix} (2) & (4) & (3) \\ (1) & (2) & (3) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} [K_e] \{U_e\} = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} \{F_e\}$$

Dans la numérotation locale de chaque élément l'interpolation du déplacement a la même forme pour les 2 éléments :

$$\underline{u}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 N_k \underline{u}^{(k)}$$

$$\{\underline{u}^{(i)}\} = [N_e(\underline{a})] \{U_e\} = [N_e(\underline{a})] \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Identique pour les deux éléments

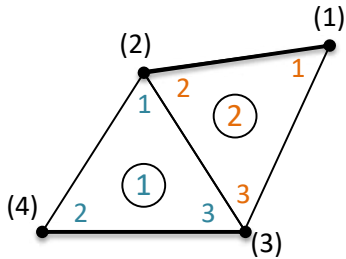
↓
Même forme
dans la
numérotation
locale

Principe de construction

En effet :

$$\sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} [K_e] \{U_e\} = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} \{F_e\}$$

6 x 6 6 x 1



$$[conec] = \begin{bmatrix} (2) & (4) & (3) \\ (1) & (2) & (3) \end{bmatrix}$$

Dans la numérotation locale de chaque élément l'interpolation du déplacement a la même forme pour les 2 éléments :

$$\underline{u}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 N_k \underline{u}^{(k)}$$

$$\{\underline{u}^{(i)}\} = [N_e(\underline{a})] \{U_e\} = [N_e(\underline{a})] \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Identique pour les deux éléments

Même forme
dans la
numérotation
locale

Mais :

N. local node → *N. global node*

composante →

$$\text{Local } \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \{U_e\} \quad \left| \quad \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \{U_{\textcircled{2}}\}$$

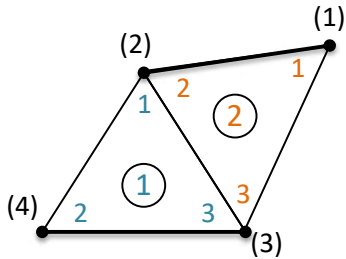
$$\text{Local } \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \{U_e\} \quad \left| \quad \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \{U_{\textcircled{2}}\}$$

$$\{U_{\textcircled{1}}\} \neq \{U_{\textcircled{2}}\}$$

Principe de construction

Rq : on définit des matrices de localisation telles que :

$$\{U_e\} = \{U_{\textcircled{i}}\} = [L_{\textcircled{i}}] \{U\} \quad \text{I} = \text{def map}(e, i)$$



A l'aide de la matrice de connectivité : $[conec] = \begin{bmatrix} (2) & (4) & (3) \\ (1) & (2) & (3) \end{bmatrix} \textcircled{1}$

N° de l'élément
N° local du nœud

→ propriété du modèle
 $conec(e, j) = (i)$ N° global du nœud
 $U^{(i)} = U_e^{(i)}$

$$\{U_{\textcircled{1}}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[L_{\textcircled{1}}]} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} \{U\}$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

- Intégrales du type : $[K_e] = \int_{E_e} {}^t [B_e(\underline{a})] [A] [B_e(\underline{a})] dV_{E_e}$
- Pour systématiser les calculs on utilise la représentation paramétrique :

$$[K_e] = \int_{E_e} {}^t [B_e(\underline{a})] [A] [B_e(\underline{a})] dV_{E_e} = \int_{\Delta_e} {}^t [B_e(\underline{a})] [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV_{\Delta_e}$$

\downarrow
 $dx_1 dx_2 dx_3$

\downarrow
 $da_1 da_2 da_3$

- Intégrales **restent complexes à calculer à cause de $[B_e(\underline{a})]$ et $J(\underline{a})$** , mais :



➤ il existe des méthodes d'approximation (cf suite du cours)

➤ Pour les éléments les plus simples $[B_e]$ et J ne dépendent pas de \underline{a}

Ex T3 :

$$[K_e] = \underbrace{{}^t [B_e] [A] [B_e]}_{\text{Matrice constante}} \times \underbrace{J}_{2 \times \text{Aire } E_e} \times \underbrace{\int_{\Delta_e} dV_{\Delta_e}}_{1/2}$$



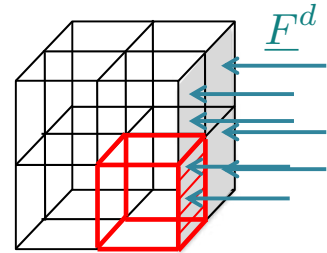
Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

- Intégrales du type :

$$\{F^e\} = \int_{E_e} {}^t [N_e(\underline{a})] \{f_v\} dV + \underbrace{\int_{\partial E_e \cap \partial \Omega_F^h} {}^t [N_e(\underline{a})] \{F^d\} dS}$$

Forces nodales élémentaires
= (nodal forces)

Intersection de la frontière
de l'élément avec la
frontière sur laquelle des
efforts sont imposés
 $= \partial \Omega_F^e$



$$\{F^e\} = \{F_v^e\} + \{F_S^e\}$$

- Pour systématiser les calculs on utilise la représentation paramétrique :

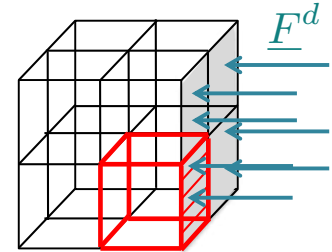
➤ Efforts volumiques :

$$\{F_v^e\} = \int_{E_e} {}^t [N_e(\underline{a})] \{f_v\} dV_{E_e} = \int_{\Delta_e} {}^t [N_e(\underline{a})] \{f_v\} J_e(\underline{a}) dV_{\Delta_e}$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

➤ Efforts surfaciques :

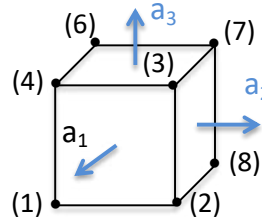
$$\{F_S^e\} = \int_{\partial\Omega_F^e} {}^t [N_e(\underline{a})] \{F^d\} dS$$



Impossible d'utiliser la relation : $dV_{E_e} = J(\underline{a})dV_{\Delta_e}$

On décrit la surface à l'aide d'une nouvelle représentation paramétrique :

$$\underline{x} = \sum_{\text{Noeuds de } \partial\Omega_F^e} \hat{N}_k(\underline{b}) \underline{x}^{(k)}$$



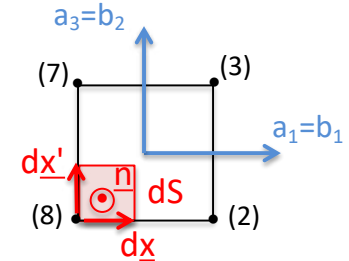
Ex : $(b_1, b_2) = (a_1, 1, a_3)$

Restrictions des fonctions de forme du Hex8/Cub8 = celles du Q4

$$\hat{N}_k(b_1, b_2) = N_k(b_1, 1, b_2)$$

On utilise ensuite la formule de transport de l'aire :

$$ndS = d\underline{x} \wedge d\underline{x}'$$



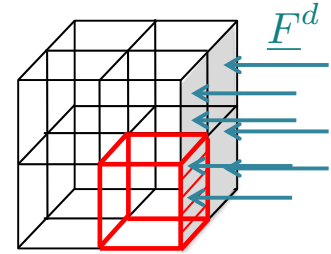
$$d\underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial \underline{x}}{\partial b_2} db_2 = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial \hat{N}_k(\underline{b})}{\partial b_1} \underline{x}^{(k)} db_1 + \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial \hat{N}_k(\underline{b})}{\partial b_2} \underline{x}^{(k)} db_2$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

➤ Efforts surfaciques :

Après développement et simplification + propriétés des fonctions de forme :

$$\underline{n}dS = \underbrace{\left\{ \left(\sum_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial b_1} \underline{x}^{(k)} \right) \wedge \left(\sum_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial b_2} \underline{x}^{(k)} \right) \right\}}_{\underline{\hat{J}}(\underline{b})} \underbrace{db_1 db_2}_{dS_{\Delta_e}}$$



Et au final : $dS = | \underline{\hat{J}}(\underline{b}) | dS_{\Delta_e} = \hat{J}(\underline{b}) dS_{\Delta_e}$

$$\{F_S^e\} = \int_{\Delta_e} {}^t [\hat{N}(\underline{b})] \{F^d(\underline{x}(\underline{b}))\} \hat{J}(\underline{b}) db_1 db_2$$

$${}^t [N(\underline{b})]$$

= Matrice
d'interpolation dérivée
de celle du Q4 avec ex
précédent

Bilan : Intégrales plus complexes à calculer / terme volumique (norme -> racine carrée)

Cas particulier = celui des pressions (normale) $\underline{F}^d = -p \underline{n}$

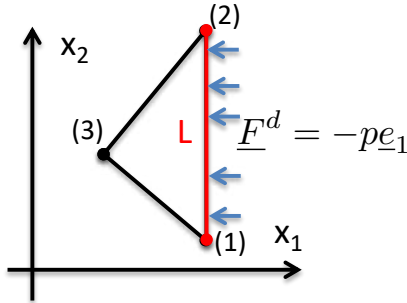
$$\{F_S^e\} = \int_{\Delta_e} -p(\underline{x}(\underline{b})) {}^t [\hat{N}(\underline{b})] \{ \hat{J}(\underline{b}) \} dS_{\Delta_e}$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

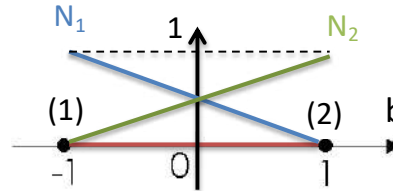
Travail par unité d'épaisseur : $\int_{S_{\Delta_e}} dS_{\Delta_e} = \int_{l_{\Delta_e}} dl_{\Delta_e} \times 1$

Ex de restriction des fonctions de forme en élasticité 2D :

$$\int_{\Omega_F^e} dS_{\Omega_F^e} = \int_{l_{\Omega_F^e}} dl_{\Omega_F^e} \times 1$$



$$dl_{\Omega_F^e} = (1) - (2)$$



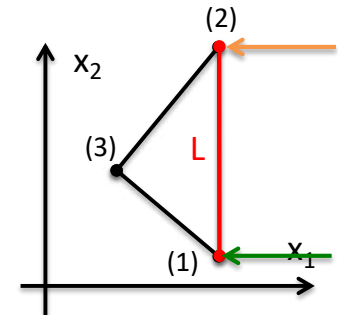
$$u = \{N_e(\underline{a})\} \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix} = \{N_1 \ N_2\} \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$J_e = \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{(1)}^{(2)} \underline{F}^d \cdot \underline{v}^h dl &= \int_{(1)}^{(2)} {}^t \{V_e\} {}^t [\hat{N}(b)] \{F^d\} dl \\ &= \int_{-1}^1 {}^t \{V_e\} {}^t [\hat{N}(b)] \{F^d\} J_e db \end{aligned}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \underline{F}^d \cdot \underline{v}^h dl = {}^t \{V_e\} \frac{L}{2} \int_{-1}^1 {}^t \begin{bmatrix} \frac{1-b}{2} & 0 & \frac{1+b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-b}{2} & 0 & \frac{1+b}{2} \end{bmatrix} db \begin{Bmatrix} -p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_e^S\} = \frac{-pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e^{(1)}\} \\ \{F_e^{(2)}\} \end{Bmatrix}$$



Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

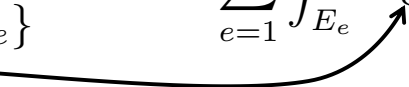
Seconds membres élémentaires induits par une précontrainte $\{\sigma_0\}$:

Présence d'un terme supplémentaire au second membre dans la formulation faible

$$F_0^h = - \int_{\Omega^h} \underline{\sigma}_0 : \underline{\varepsilon}(\underline{v}^h) dV$$

notation matricielle : $F_0^h = - \int_{\Omega^h} {}^t \{\varepsilon(\underline{v}^h)\} \{\sigma_0\} dV$

On peut alors décomposer par élément :

$$\{\varepsilon_e(\underline{v}^h)\} = [B_e(\underline{a})] \{V_e\} \quad - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} {}^t \{\varepsilon^e(\underline{v}^h)\} \{\sigma_0\} dV$$


$$\sum_{e=1}^{N_E} {}^t \{V_e\} \underbrace{\int_{E_e} - {}^t [B_e(\underline{a})] \{\sigma_0(\underline{x}(\underline{a}))\} dV}_{\{F_0^e\}} = \sum_{e=1}^{N_E} {}^t \{V_e\} \{F_0^e\}$$

Il faut ensuite assembler

On peut par ailleurs réécrire l'intégrale sur l'élément de référence :

$$\{F_0^e\} = - \int_{\Delta_e} {}^t [B_e(\underline{a})] \{\sigma_0(\underline{x}(\underline{a}))\} J(\underline{a}) dV_{\Delta_e}$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

Thermique

**Matrices de conductivité
élémentaires**

= intégrales du type :

$$[K_e] = \int_{E_e} k^t [B_e] \cdot [B_e] dV$$

Rappel : attention matrice de taille différente / élasticité linéaire

Viennent des termes ci-dessous de la formulation faible :

$$\int_{E_e} {}^t \{grad(\theta)\} k \{grad(T)\} dV$$

On peut comme en élasticité utiliser la représentation paramétrique, de sorte que :

$$[K_e] = \int_{\Delta_e} k^t [B_e(\underline{a})] \cdot [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV_{\Delta_e}$$

Seconds membres élémentaires
(partie **volumique** – sources de chaleur) :

$$\begin{aligned} \int_{E_e} p \theta(\underline{x}) dV &= \int_{E_e} p^t \{N_e\} \{\theta_e\} dV \\ &= {}^t \{\theta_e\} \underbrace{\int_{E_e} p \{N_e\} dV}_{\{F_e v\}} \end{aligned}$$

Que l'on réécrit :

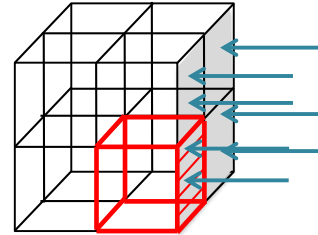
$$\int_{E_e} p \theta(\underline{x}) dV = {}^t \{\theta_e\} \int_{\Delta_e} p \{N_e(\underline{a})\} J_e(\underline{a}) dV_{\Delta_e}$$

Matrices de rigidité/conductivité et seconds membres élémentaires

Seconds membres élémentaires
(partie **surfactive** – sources de chaleur) :

$$\int_{\underbrace{\partial E_e \cap \partial \Omega_Q^h}} \underline{q} \cdot \underline{n} \, \theta(\underline{x}) dS$$

Intersection de la frontière
de l'élément avec la
frontière sur laquelle des
flux sont imposés
 $= \partial \Omega_Q^e$



Par les même méthodes qu'en
élasticité on réécrit ce terme :

$${}^t \{\theta_e\} \{F_{e \ s}\} = {}^t \{\theta_e\} \int_{\Delta_e} \{N_e(\underline{b})\} {}^t \{q^d\} \{n\} \hat{J}(\underline{b}) dS_{\Delta_e}$$

Assemblage

Objectif = calculer la matrice de rigidité $[K]$ sans faire appel aux fonctions d'interpolation globales (difficiles à calculer) mais en utilisant les matrices de rigidité élémentaires.

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

$$\sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} [K_e] \{U_e\} = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{V_e\} \{F_e\}$$

Problème = $[K_e]$, $\{F_e\}$, $\{U_e\}$, $\{V_e\}$ et définis à partir d'une numérotation locale sur l'élément, mais $[K]$, $\{F\}$, $\{U\}$, $\{V\}$ à partir d'une numérotation globale sur la structure.

Solution : utilisation des matrices de localisation

Pour le membre de gauche, rappel sur l'énergie de déformation de la structure \mathcal{E}_D :

$$\mathcal{E}_D = \frac{1}{2} {}^t \{U\} [K] \{U\} = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} \frac{1}{2} {}^t \{U_e\} [K_e] \{U_e\} \quad \text{où} \quad \{U_e\} = [L_e] \{U\}$$

$$\mathcal{E}_D = \frac{1}{2} {}^t \{U\} \underbrace{\sum_{e=1}^{N_{Ee}} [L_e] [K_e] [L_e]}_{[K]} \{U\}$$

$I = \text{defmap}(e, i)$

$$K_{I(i)J(i)}^{(e)} = K_{ij}^{(e)}$$

FOR e in nombre elements

FOR $i=1..n_e$

FOR $j=1..n_e$

$$K_{I(e,i)J(e,i)} + K_{ij}^{(e)}$$

$$\text{Dim}[K] = (N_N.D) \times (N_N.D)$$

$$\text{Dim}[K_e] = (n_e.D) \times (n_e.D)$$

Assemblage

Et pour le second membre, rappel sur le travail des efforts extérieurs :

$$W = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} W_e = \sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t \{U_e\} \{F_e\}$$

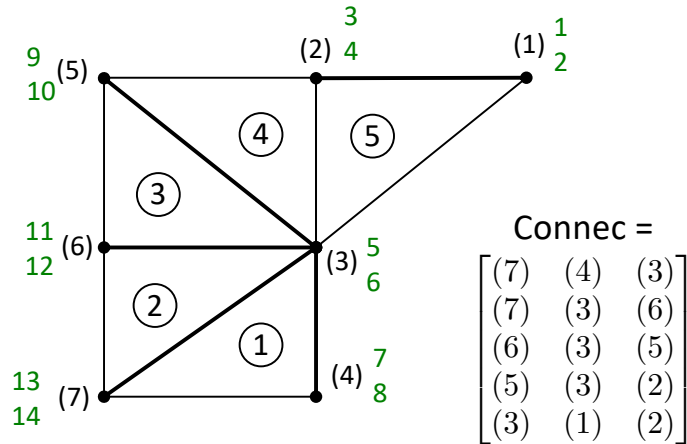
$$W = {}^t \{U\} \underbrace{\sum_{e=1}^{N_{Ee}} {}^t [L_e] \{F_e\}}_{\{F\}}$$

$$\text{Dim} \{F\} = (N_N \cdot D) \times 1$$

$$\text{Dim} \{F_e\} = (n_e \cdot D) \times 1$$

➔ Voir pseudo-algorithme
d'assemblage distribué

+ Application au maillage ci-
contre



Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1															
2															
3															
4															
5					x	x	x	x					x	x	x
6					x	x	x	x					x	x	x
7															
8					x	x	x	x					x	x	x
9					x	x	x	x					x	x	x
10															
11															
12															
13															
14															
13					x	x	Ke ₁₃ ¹	x					Ke ₁₁ ¹	Ke ₁₂ ¹	Fe ¹
14					x	x	x	x					x	x	x

Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1															
2															
3															
4															
5					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x
6					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9															
10															
11					x	x					x	x	x	x	x
12					x	x					x	x	x	x	x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1															
2															
3															
4															
5					x x x	x x x	x	x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x x
6					x x x	x x x	x	x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9					x	x			x	x	x	x			x
10					x	x			x	x	x	x			x
11					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
12					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1															
2															
3			x	x	x	x			x	x					x
4			x	x	x	x			x	x					x
5			x	x	x x x x	x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x
6			x	x	x x x x	x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
10			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
11					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
12					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	x	x	x	x	x	x									x
2	x	x	x	x	x	x									x
3	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
4	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
5	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
6	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
10			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
11					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
12					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

[K]

{F}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	x	x	x	x	x	x									x
2	x	x	x	x	x	x									x
3	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
4	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
5	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
6	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
10			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
11					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
12					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

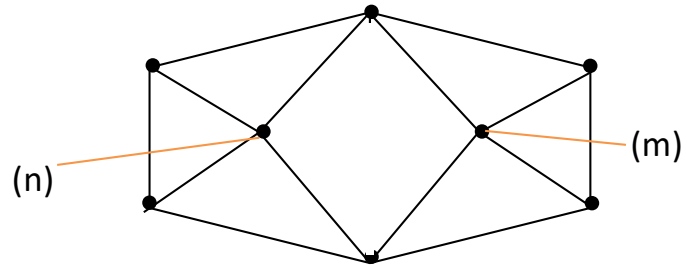
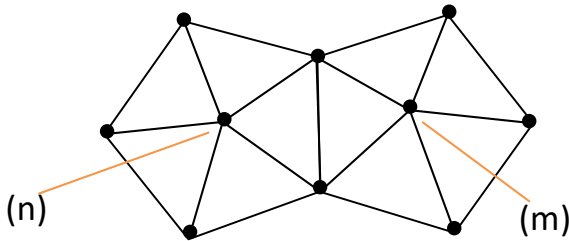
Remarques : $K_{IJ} = \int_{\Omega^h} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_I) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_J) \right\} dV$

Avec : $\begin{cases} \underline{\varphi}_I(\underline{x}) = \tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i \\ \underline{\varphi}_J(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \end{cases} \quad I = N^o \text{ global de } u_i^{(m)}$

Donc : $K_{IJ} = \int_{\Omega(m) \cap \Omega(n)} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j) \right\} dV$

Où $\Omega(m)$ = support géométrique de $\tilde{N}_m(\underline{x})$.

$\rightarrow K_{IJ} \neq 0$ si les nœuds (n) et (m) appartiennent à un même élément fini.



Assemblage

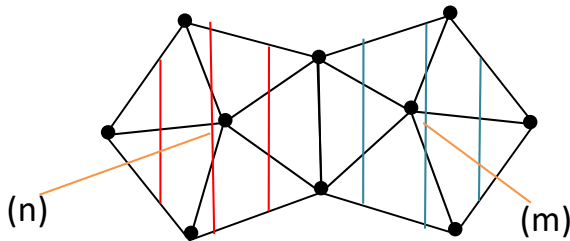
Remarques : $K_{IJ} = \int_{\Omega^h} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_I) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_J) \right\} dV$

Avec : $\begin{cases} \underline{\varphi}_I(\underline{x}) = \tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i \\ \underline{\varphi}_J(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \end{cases} \quad I = N^o \text{ global de } u_i^{(m)}$

Donc : $K_{IJ} = \int_{\Omega(m) \cap \Omega(n)} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j) \right\} dV$

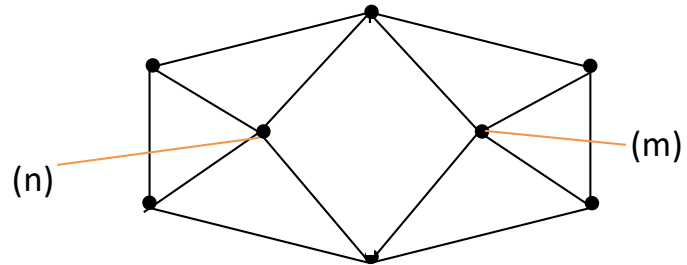
Où $\Omega(m)$ = support géométrique de $\tilde{N}_m(\underline{x})$.

$\rightarrow K_{IJ} \neq 0$ si les nœuds (n) et (m) appartiennent à un même élément fini.



$$\Omega(n) \cap \Omega(m) = \emptyset$$

$$K_{IJ} = 0$$



Assemblage

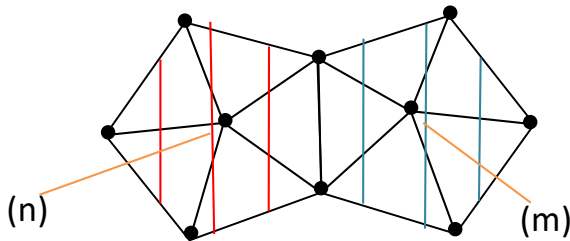
Remarques : $K_{IJ} = \int_{\Omega^h} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_I) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_J) \right\} dV$

Avec : $\begin{cases} \underline{\varphi}_I(\underline{x}) = \tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i \\ \underline{\varphi}_J(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \end{cases} \quad I = N^o \text{ global de } u_i^{(m)}$

Donc : $K_{IJ} = \int_{\Omega(m) \cap \Omega(n)} {}^t \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i) \right\} [A] \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j) \right\} dV$

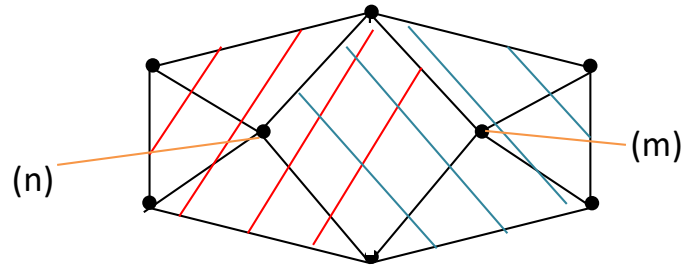
Où $\Omega(m)$ = support géométrique de $\tilde{N}_m(\underline{x})$.

$\rightarrow K_{IJ} \neq 0$ si les nœuds (n) et (m) appartiennent à un même élément fini.



$$\Omega(n) \cap \Omega(m) = \emptyset$$

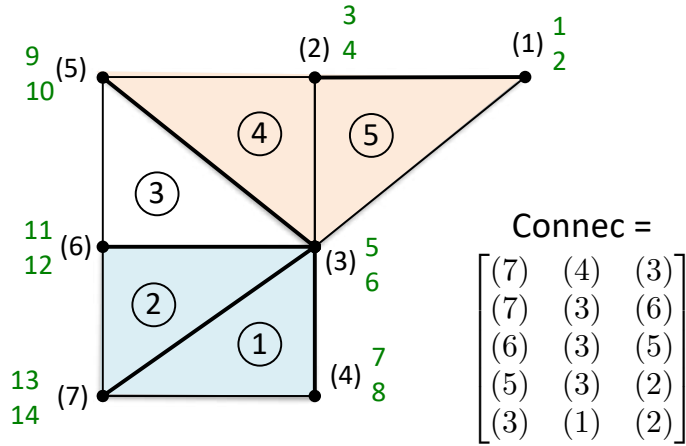
$$K_{IJ} = 0$$



$$\Omega(n) \cap \Omega(m) = E_e \text{ double hachure}$$

$$K_{IJ} \neq 0^{29}$$

Assemblage

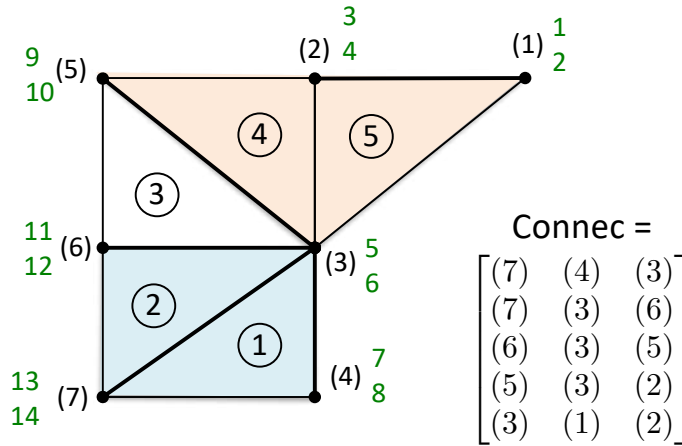


$$\Omega(2) \cap \Omega(7) = \emptyset$$

$$K_{313} = K_{314} = K_{413} = K_{414} = 0$$

$$K_{133} = K_{134} = K_{143} = K_{144} = 0$$

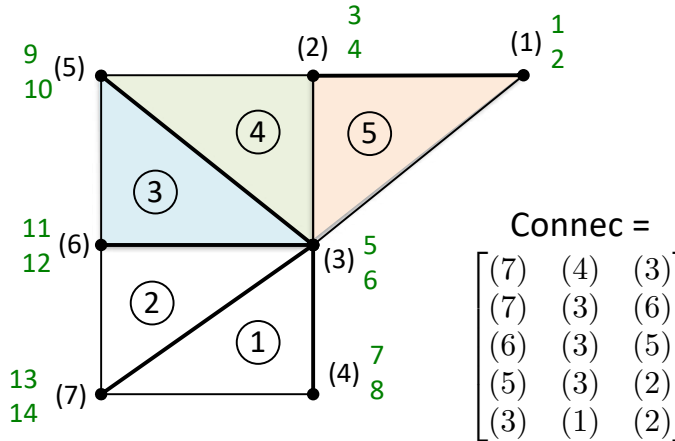
Assemblage



$$\Omega(2) \cap \Omega(7) = \emptyset$$

$$K_{313} = K_{314} = K_{413} = K_{414} = 0$$

$$K_{133} = K_{134} = K_{143} = K_{144} = 0$$



$$\Omega(2) \cap \Omega(5) = \textcircled{4}$$

$$K_{39} \neq 0 \quad K_{310} \neq 0 \quad K_{49} \neq 0 \quad K_{410} \neq 0$$

$$K_{93} \neq 0 \quad K_{94} \neq 0 \quad K_{103} \neq 0 \quad K_{104} \neq 0$$

Assemblage

[K]

{F}

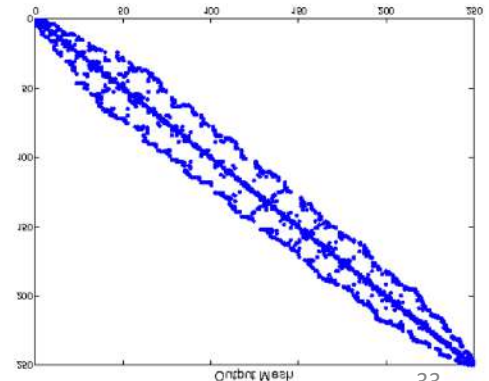
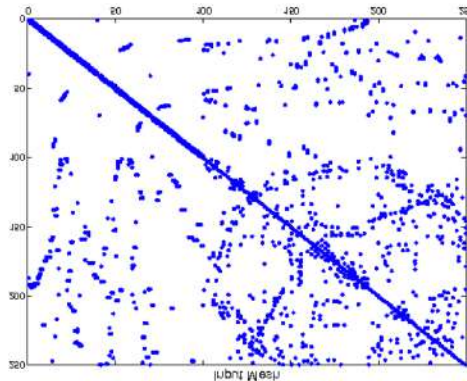
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	x	x	x	x	x	x									x
2	x	x	x	x	x	x									x
3	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
4	x	x	x x	x x	x x	x x			x	x					x x
5	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
6	x	x	x x	x x	x x x x x	x x x x x	x	x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x x x x
7					x	x	x	x					x	x	x
8					x	x	x	x					x	x	x
9			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
10			x	x	x x	x x			x x	x x	x	x			x x
11					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
12					x x	x x			x	x	x x	x x	x	x	x x
13					x x	x x	Ke ₁₃ ¹	x			x	x	Ke ₁₁ ¹ x	Ke ₁₂ ¹ x	Fe ¹ x
14					x x	x x	x	x			x	x	x x	x x	x x

Assemblage

Remarques :

1. Le nombre de termes non nuls sur une ligne ou une colonne ne dépend que de la **configuration locale** (éléments adjacents et numérotation)
1. La proportion de coefficients non nuls ↗ si la finesse ↘.
(i.e. + le maillage est fin + [K] est creuse) Matrice creuse = (*sparse matrix*)
1. La position des termes non nuls dans [K] est a priori quelconque (inconvenient pour stockage et rapidité)
→ Il existe des algorithmes de renumération automatique qui assurent que dans un même élément les n° globaux des nœuds soient voisins. Ex : Cuthill et McKee (1969)

plt.spy(K)



Prise en compte des Conditions aux Limites

a. Méthode du terme diagonal unité :

$U_i = U_i^D$ pour i sur le bord bloqué
 $K_U = F$

Idée = faire passer au second membre les termes connus. Si U_i est un déplacement connu et $U_i = U^D$ il faut :

- Mettre à zéro tous les K_{ij} et $K_{ji} \forall j \neq i$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & K_{1\ i-1} & 0 & K_{1\ i-1} & \dots & K_{1\ N} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 K_{i-1\ 1} & \dots & K_{i-1\ i-1} & 0 & K_{i-1\ i+1} & \dots & K_{i-1\ N} \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 K_{i+1\ 1} & \dots & K_{i+1\ i-1} & 0 & K_{i+1\ i+1} & \dots & K_{i+1\ N} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 K_{N\ 1} & \dots & K_{N\ i-1} & 0 & K_{N\ i+1} & \dots & K_{N\ N}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 \dots \\
 U_{i-1} \\
 U_i \\
 U_{i+1} \\
 \dots \\
 U_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 \\
 \dots \\
 F_{i-1} \\
 F_i \\
 F_{i+1} \\
 \dots \\
 F_N
 \end{Bmatrix}$$

Handwritten notes: A pink bracket highlights the row i of the stiffness matrix, where the diagonal term is 1 and off-diagonal terms are 0. A pink arrow points from the text 'Mettre à zéro tous les K_{ij} et K_{ji} ' to this row. Above the matrix, a pink 'U' is written next to the displacement vector and a pink 'F' is written next to the force vector. In the force vector, the term F_i is circled in pink and labeled with a pink 'U'.

Prise en compte des Conditions aux Limites

a. Méthode du terme diagonal unité :

Idée = faire passer au second membre les termes connus. Si U_i est un déplacement connu et $U_i = U^D$ il faut :

- Mettre à zéro tous les K_{ij} et $K_{ji} \forall j \neq i$
- Poser $K_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1\ i-1} & 0 & K_{1\ i-1} & \dots & K_{1\ N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i-1\ 1} & \dots & K_{i-1\ i-1} & 0 & K_{i-1\ i+1} & \dots & K_{i-1\ N} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{i+1\ 1} & \dots & K_{i+1\ i-1} & 0 & K_{i+1\ i+1} & \dots & K_{i+1\ N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N\ 1} & \dots & K_{N\ i-1} & 0 & K_{N\ i+1} & \dots & K_{N\ N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_{i-1} \\ F_i \\ F_{i+1} \\ \dots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des Conditions aux Limites

a. Méthode du terme diagonal unité :

Idée = faire passer au second membre les termes connus. Si U_i est un déplacement connu et $U_i = U^D$ il faut :

- Mettre à zéro tous les K_{ij} et $K_{ji} \forall j \neq i$
- Poser $K_{ii} = 1$
- Tenir compte du retrait de la ligne dans le second membre et poser $F_i = U^D$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1\ i-1} & 0 & K_{1\ i-1} & \dots & K_{1\ N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i-1\ 1} & \dots & K_{i-1\ i-1} & 0 & K_{i-1\ i+1} & \dots & K_{i-1\ N} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{i+1\ 1} & \dots & K_{i+1\ i-1} & 0 & K_{i+1\ i+1} & \dots & K_{i+1\ N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N\ 1} & \dots & K_{N\ i-1} & 0 & K_{N\ i+1} & \dots & K_{N\ N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i} U^D \\ \dots \\ F_{i-1} - K_{i-1\ i} U^D \\ U^D \\ F_{i+1} - K_{i+1\ i} U^D \\ \dots \\ F_N - K_{Ni} U^D \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

Idée =

- scinder le vecteur des déplacements en 2 sous-vecteurs correspondant respectivement aux déplacements inconnus et imposés.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{inc} \\ U_{imp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{« vrais » ddl}$$

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

Idée =

- scinder le vecteur des déplacements en 2 sous-vecteurs correspondant respectivement aux déplacements inconnus et imposés.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{inc} \\ U_{imp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \text{« vrais » ddl}$$

- Il faut ensuite réorganiser le second membre en conséquence.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{imp} \\ F_{inc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(D)} \end{Bmatrix}$$

Travail des efforts liés aux ddls restants
(chargement en efforts imposés y compris bords libres)

Travail des réactions d'appui
(efforts apparaissant là où les déplacements sont imposés)

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

- On réorganise et partitionne alors la matrice de rigidité sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- On a donc deux groupes d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(D)} \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

- On réorganise et partitionne alors la matrice de rigidité sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- On a donc deux groupes d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(D)} \end{Bmatrix}$$

- 1^{er} groupe = système permettant de trouver la solution du problème (déplacements inconnus)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K^{(00)} \end{bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U^{(0)} \end{Bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F^{(0)} \end{Bmatrix}}_{\text{connu}} - \underbrace{\begin{bmatrix} K^{(0D)} \end{bmatrix}}_{\text{connu}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U^{(D)} \end{Bmatrix}}_{\text{connu}}$$

Inconnues du problème

connu

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

- On réorganise et partitionne alors la matrice de rigidité sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- On a donc deux groupes d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(D)} \end{Bmatrix}$$

- 1^{er} groupe = système permettant de trouver la solution du problème (déplacements inconnus)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K^{(00)} \end{bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U^{(0)} \end{Bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F^{(0)} \end{Bmatrix}}_{\text{connu}} - \underbrace{\begin{bmatrix} K^{(0D)} \end{bmatrix}}_{\text{connu}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U^{(D)} \end{Bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}}$$

Inconnues du problème

connu

- 2^{ème} groupe = système permettant de calculer les réactions d'appui

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K^{(D0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(0)} \end{Bmatrix}}_{\text{connu après la résolution du premier système}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K^{(DD)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(D)} \end{Bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F^{(D)} \end{Bmatrix}}_{\text{Inconnues du problème}}$$

connu après la résolution
du premier système

Inconnues du
problème

Prise en compte des Conditions aux Limites

b. Méthode du partitionnement :

- On réorganise et partitionne alors la matrice de rigidité sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- On a donc deux groupes d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K^{(00)} & K^{(0D)} \\ K^{(D0)} & K^{(DD)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(D)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(D)} \end{Bmatrix}$$

- 1^{er} groupe = système permettant de trouver la solution du problème (déplacements inconnus)

$$\underbrace{[K^{(00)}]}_{\text{Inconnues du problème}} \underbrace{\{U^{(0)}\}}_{\text{Inconnues du problème}} = \underbrace{\{F^{(0)}\}}_{\text{connu}} - \underbrace{[K^{(0D)}]}_{\text{connu}} \underbrace{\{U^{(D)}\}}_{\text{Inconnues du problème}}$$

Inconnues du problème

connu

- 2^{ème} groupe = système permettant de calculer les réactions d'appui

$$\underbrace{[K^{(D0)}]}_{\text{connu après la résolution du premier système}} \underbrace{\{U^{(0)}\}}_{\text{connu après la résolution du premier système}} + \underbrace{[K^{(DD)}]}_{\text{connu après la résolution du premier système}} \underbrace{\{U^{(D)}\}}_{\text{Inconnues du problème}} = \underbrace{\{F^{(D)}\}}_{\text{Inconnues du problème}}$$

connu après la résolution
du premier système

Inconnues du
problème

- Avantage : \searrow de l'ordre de la matrice de rigidité pour trouver les déplacements inconnus = \nearrow de la vitesse de résolution

- Inconvénient : Nécessite une restructuration du système

- En pratique combinaison des méthodes a) et b)

Prise en compte des Conditions aux Limites

c. Méthode de la pénalisation (terme diagonal dominant) :

- Si $U_i = U^D$ est le ddl connu 10^8
- On remplace K_{ii} par $10^{30} + K_{ii}$ et F_i par $10^{30} \times U^D$
avec $K_{ii} \ll 10^{30}$
- La i-ème équation à résoudre se réduit alors à $10^{30} \times U_i = U^D \times 10^{30}$
(terme $K_{ii}U_i$ négligeable devant $10^{30} \times U_i$)
- Une variante consiste à remplacer K_{ii} par $10^{30} \times K_{ii}$
Il faut alors remplacer F_i par $10^{30} K_{ii} U^D$ ➔ moins pratique

Prise en compte des Conditions aux Limites

d. Multiplicateurs de Lagrange (système linéaire augmenté) :

- Permet de revenir sur les conditions d'admissibilité des champs solution.
- On les impose de façon explicite par des équations supplémentaires (au lieu de réduire l'espace de recherche des solutions).

Prise en compte des Conditions aux Limites

Multiplicateurs de Lagrange (système linéaire augmenté) :

Formulation variationnelle associée = Rendre stationnaire la fonctionnelle :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\underline{v}, \underline{T}) = I(\underline{v}) - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{v} - \underline{u}^d) \cdot \underline{T} dS \\ \forall \underline{v} \in U \text{ et } \forall \underline{T} \in \mathcal{F}(\partial\Omega_u) \end{cases}$$

Sous sa forme discrétisée et en notation matricielle le Langrangien devient :

$$\mathcal{L}(\{U\}, \{T\}) = \frac{1}{2} \{U\}^t [K] \{U\} - \{U\}^t \{F\} + \{T\}^t \left([C] \{U\} - \{U^{(D)}\} \right)$$

Et on cherche les solutions des conditions de stationnarité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{U^*\}} (\{U\}, \{T\}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{T^*\}} (\{U\}, \{T\}) = 0 \end{array} \right. \iff \begin{bmatrix} [K] & -[L] \\ -{}^t[L] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ -\{U^{(D)}\} \end{Bmatrix}$$

Prise en compte des Conditions aux Limites

d. Multiplicateurs de Lagrange (système linéaire augmenté) :

- Permet de revenir sur les conditions d'admissibilité des champs solution.
- On les impose de façon explicite par des équations supplémentaires (au lieu de réduire l'espace de recherche des solutions).
- Cela revient à résoudre le problème sous la formulation faible suivante :

- Trouver $(\underline{u}, \underline{T}) \in (U^h \times \mathcal{F}(\partial\Omega_u^h))$ tels que :

$$\int_{\Omega^h} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) dV - \int_{\partial\Omega_u^h} \underline{T} \cdot \underline{v} dS = \int_{\Omega^h} \underline{f}_v \cdot \underline{v} dV + \int_{\partial\Omega_F^h} \underline{T}^d \cdot \underline{v} dS \quad \forall \underline{v} \in U^h$$

$$\int_{\partial\Omega_u^h} \underline{u} \cdot \underline{T}' dS = \int_{\partial\Omega_u^h} \underline{u}^d \cdot \underline{T}' dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{F}(\partial\Omega_u^h)$$

Vecteur contrainte test défini sur $\mathcal{F}(\partial\Omega_u^h)$ tel que les intégrales sur $\partial\Omega_u^h$ soient définies pour tout champ de U^h

Prise en compte des Conditions aux Limites

d. Multiplicateurs de Lagrange (système linéaire augmenté) :

- $[L]$ = matrice de localisation = matrice rectangulaire telle que :

$${}^t [L] \cdot \{U\} = \left\{ U^{(D)} \right\} \quad \text{Restriction aux nœuds supportant des déplacements imposés}$$

- Au final il faut résoudre le **système augmenté** suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K] & -[L] \\ -{}^t [L] & [0] \end{bmatrix}}_{[K_{aug}]} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ -\{U^{(D)}\} \end{Bmatrix}$$

$\text{Dim}[K_{aug}] = (\text{nb total de ddl} + \text{nb de liaisons})^2$

- $[K]$ non inversible, mouvement de corps rigide non retirés (inclus dans U^h espace des solutions)
- $[K_{aug}]$ inversible mais pas définie positive (à cause de $[0]$) → attention à la méthode de résolution choisie, LU pas applicable.
- La résolution du système permet d'obtenir directement $\{T\}$. Intéressant pour contact ou problème pour lesquels on a des relations linéaires entre ddl (ex. appui glissant hors axes)

Stockage

- [K] est **symétrique** définie positive si les CL bloquent les mouvements de corps rigides (vient des propriétés de $a(\underline{u}, \underline{v})$)

$${}^t \{U\} [K] \{U\} \geq 0 \quad \forall \{U\} \in U_{ad}^h(\underline{u}^d)$$

$${}^t \{U\} [K] \{U\} = 0 \Rightarrow \{U\} = \{0\}$$

- On appelle **demie-largeur de bande** le nombre entier L_B tel que :

- $L_B \leq nb \text{ ddl total}$

- $\forall I, J = 1 \dots nb \text{ ddl total}$

$$|I - J| > L_B \quad K_{IJ} = 0$$

$$I \begin{matrix} & \begin{matrix} J \\ K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$K_{11} \neq 0 \quad |1 - 1| = 0$$

$$K_{12} \neq 0 \quad |1 - 2| = 1$$

$$K_{13} = 0 \quad |1 - 3| = 2$$

$$K_{14} = 0 \quad |1 - 4| = 3$$

$$K_{31} = 0 \quad |3 - 1| = 2$$

$$K_{32} \neq 0 \quad |3 - 2| = 1$$

$$K_{33} \neq 0 \quad |3 - 3| = 0$$

$$K_{34} \neq 0 \quad |3 - 4| = 1$$

$$K_{21} \neq 0 \quad |2 - 1| = 1$$

$$K_{22} \neq 0 \quad |2 - 2| = 0$$

$$K_{23} \neq 0 \quad |2 - 3| = 1$$

$$K_{24} = 0 \quad |2 - 4| = 2$$

$$K_{41} = 0 \quad |4 - 1| = 3$$

$$K_{42} = 0 \quad |4 - 2| = 2$$

$$K_{43} \neq 0 \quad |4 - 3| = 1$$

$$K_{44} \neq 0 \quad |4 - 4| = 0$$

Stockage

- [K] est **symétrique** définie positive si les CL bloquent les mouvements de corps rigides (vient des propriétés de $a(\underline{u}, \underline{v})$)

$${}^t \{U\} [K] \{U\} \geq 0 \quad \forall \{U\} \in U_{ad}^h(\underline{u}^d)$$

$${}^t \{U\} [K] \{U\} = 0 \Rightarrow \{U\} = \{0\}$$

- On appelle **demie-largeur de bande** le nombre entier L_B tel que :

- $L_B \leq nb \text{ ddl total}$

- $\forall I, J = 1 \dots nb \text{ ddl total}$

$$|I - J| > L_B \quad K_{IJ} = 0$$

$$I \begin{matrix} & \begin{matrix} J \\ K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$L_B = 1$$

$K_{11} \neq 0 \quad 1 - 1 = 0$	$K_{21} \neq 0 \quad 2 - 1 = 1$
$K_{12} \neq 0 \quad 1 - 2 = 1$	$K_{22} \neq 0 \quad 2 - 2 = 0$
$K_{13} = 0 \quad 1 - 3 = 2$	$K_{23} \neq 0 \quad 2 - 3 = 1$
$K_{14} = 0 \quad 1 - 4 = 3$	$K_{24} = 0 \quad 2 - 4 = 2$
$K_{31} = 0 \quad 3 - 1 = 2$	$K_{41} = 0 \quad 4 - 1 = 3$
$K_{32} \neq 0 \quad 3 - 2 = 1$	$K_{42} = 0 \quad 4 - 2 = 2$
$K_{33} \neq 0 \quad 3 - 3 = 0$	$K_{43} \neq 0 \quad 4 - 3 = 1$
$K_{34} \neq 0 \quad 3 - 4 = 1$	$K_{44} \neq 0 \quad 4 - 4 = 0$

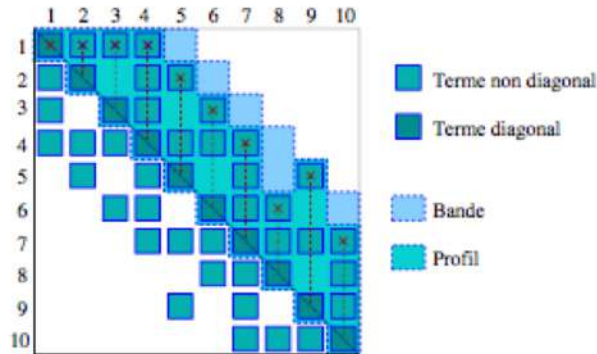
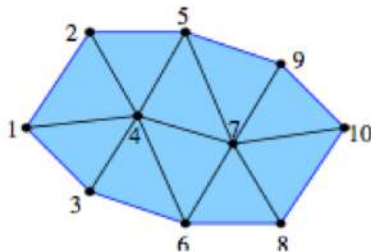
$$|I - J| \geq 2 \quad K_{IJ} = 0$$

Stockage

- Matrice **diagonale** : $L_B = 0$
- Tous les coefficients non nuls sont situés dans une **bande** de largeur $2L_B + 1$
- On appelle **demie largeur de bande** la plus grande différence entre n° d'inconnues appartenant au même élément.
- Pour chaque colonne J on définit un **profil** $L(J)$ $1 \leq L(J) \leq J$ tel que :

$$L(J) = \min \{I / K_{IJ} \neq 0\} \quad \sim \text{localisation du début des colonnes}$$

On a alors la relation : $L_B = \max_{1 \leq J \leq nb} \text{ddl} \{J - L(J)\}$



J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L(J)	1	1	1	1	2	3	4	6	5	7
J-L(J)	0	1	2	3	3	3	3	2	4	3

$$L_B = 4$$

Ex en thermique
(1 ddl par
nœud).

Tiré de M. Bonnet et A. Frangi : Analyse
des solides déformables par la méthode
des éléments finis

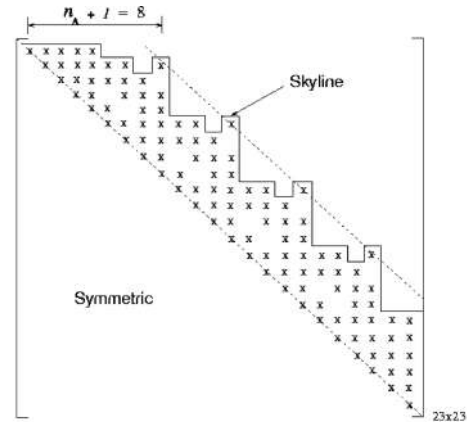
Stockage

- Stockage en **bande symétrique**. On stocke $[K]$ dans un vecteur $A^{(k)}$ sous forme de sa demie bande :

$${}^t \left\{ A^{(k)} \right\} = \{ K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}, K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{26}, K_{33}, \dots \}$$

Pb dans ce cas on stocke beaucoup de 0

- Stockage **profil** ou **ligne de ciel** ou **skyline** : On stocke $[K]$ dans un vecteur suivant son profil et $L(J) \rightarrow$ on réduit de beaucoup le nb de zéros mais il en reste



$$\begin{bmatrix}
 X_1 & 0 & X_3 & 0 \\
 & X_2 & 0 & 0 \\
 \text{sym} & & X_4 & X_5 \\
 & & & X_6
 \end{bmatrix}
 \rightarrow
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 \dots \\
 X_6
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 2 \\
 \dots \\
 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 2 \\
 \dots \\
 4
 \end{bmatrix}$$

$A^{(k)}$
 I
 J

- Stockage **Morse** : On ne stocke que les coefficients non nuls de $[K]$ et leurs indices (1 tableau à 2 indices \rightarrow 3 tableaux à 1 indice).

Utile pour méthodes de résolution itératives

Méthodes de résolution

Rappels : 2 grandes classes de résolution de systèmes linéaires :

- solveurs **directs** (Faciles à mettre en œuvre, taille du système élevée, résultat n'est jamais rigoureusement exact, erreur mal estimée,...)
- solveurs **itératifs** (ne convergent pas toujours rapidement, impossible de prévoir le nb d'opérations à l'avance, la convergence dépend de l'initialisation mais : pas d'algorithme de décomposition, Suite convergeant vers la solution, erreur estimée)

Solveurs directs

Avantages :

- méthode fiable + permet la détection des singularités
- méthode bien adaptée au stockage en bande de la matrice de rigidité
- nb d'opération connu à l'avance
- bien adapté à la mise en œuvre par technique frontale et/ou sous-structures

1 - Méthode d'élimination de Gauss

On part de :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

On calcule U_1 dans l'équation n°1 et on l'élimine dans les équations 2 à N :

$$U_1 = \frac{F_1}{K_{11}} - \frac{K_{12}}{K_{11}}U_2 - \dots - \frac{K_{1N}}{K_{11}}U_N$$

Méthodes de résolution

$$\begin{bmatrix} 1 & K_{12}/K_{11} & \dots & K_{1N}/K_{11} \\ 0 & K_{22} - \frac{K_{21}}{K_{11}}K_{12} & \dots & K_{2N} - \frac{K_{21}}{K_{11}}K_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{N2} - \frac{K_{N1}}{K_{11}}K_{12} & \dots & K_{NN} - \frac{K_{N1}}{K_{11}}K_{1N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1/K_{11} \\ F_2 - K_{21}\frac{F_1}{K_{11}} \\ \dots \\ F_N - K_{N1}\frac{F_1}{K_{11}} \end{Bmatrix}$$

Ce qui se réécrit :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ 0 & K_{22}^1 & \dots & K_{2N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{N2}^1 & \dots & K_{NN}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^1 \\ \dots \\ F_N^1 \end{Bmatrix}$$

Exposant = nb d'inconnues éliminées

On calcule U_2 dans l'équation n°2 et on l'élimine dans les équations 3 à N :

$$U_2 = \frac{F_2^1}{K_{22}^1} - \frac{K_{23}^1}{K_{22}^1}U_3 - \dots - \frac{K_{2N}^1}{K_{22}^1}U_N$$

[...]

On calcule U_{N-1} avec l'équation n°N-1 et on l'élimine dans l'équation N, ce qui donne un système de la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ 0 & K_{22}^1 & \dots & K_{2N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{NN}^{N-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice triangulaire supérieure } [S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix}}_{\{U\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^1 \\ \dots \\ F_N^{N-1} \end{Bmatrix}}_{\{F'\}}$$

Méthodes de résolution

On effectue alors une analyse « montante » pour résoudre le système à partir de l'équation N :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ 0 & K_{22}^{(1)} & \dots & K_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{NN}^{(N-1)} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix}}_{\{U\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ \vdots \\ F_N^{(N-1)} \end{Bmatrix}}_{\{F'\}}$$

- Calcul de U_N
$$U_N = \frac{F_N^{N-1}}{K_{NN}^{N-1}}$$

- On remplace U_N par son expression dans l'équation N-1 et on trouve U_{N-1} , etc jusqu'à trouver U_1 .

Remarques :

- Cette méthode exige que tous les pivots (K_{11} , $K_{22}^{(1)}$, $K_{33}^{(2)}$, ...) soient positifs ce qui est le cas en élasticité et thermique
- En cours de résolution les sous-matrices $[K^i]$ après i éliminations restent symétriques.
- Le rapport $\lambda = \text{pivot minimal} / \text{pivot maximal}$ est appelé le rapport de singularité. Il indique la qualité du conditionnement de la matrice.
- Si $\lambda < 10^{-12}$ en 32 bits et $\lambda < 10^{-20}$ en 64 bits la fiabilité du calcul est mauvaise (s'évite en excluant les éléments distordus ou trop rigides).

Méthodes de résolution

2- Méthode de décomposition de Gauss (aussi appelée méthode [L][U])

La matrice $[K]$ **symétrique** (OK en élasticité et thermique) → produit de 2 matrices triangulaires :

$$[K] = [L].[M] = [L].[U]$$

Matrice triangulaire inférieure (Lower)
avec des 1 sur la diagonale

Matrice triangulaire
supérieure (Upper)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ L_{N1} & \cdots & L_{NN-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1N} \\ 0 & M_{22} & & M_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

Crout (matrice symétrique)

$$[K] = [L] \cdot [D] \cdot {}^t [L]$$

Matrice triangulaire
inférieure (Lower)
avec des 1 sur la
diagonale

Matrice diagonale

Cholesky (matrice symétrique définie
positive)

$$[K] = [L] \cdot {}^t [L]$$

Méthode la plus utilisée car
stockage d'une seule matrice
triangulaire

Méthodes de résolution

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$[K] = [L][M]$$

La résolution se fait en 2 étapes :

$$\begin{cases} [L]\{Y\} = \{F\} & \text{Analyse descendante donne } \{Y\} \\ [M]\{U\} = \{Y\} & \text{Analyse montante donne } \{U\} \end{cases}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & & 0 \\ L_{21} & L_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ L_{N1} & L_{N2} & \dots & L_{NN} \end{bmatrix}$$

Analyse descendante :

1^{ère} ligne : $L_{11}Y_1 = F_1 \Rightarrow Y_1 = \frac{F_1}{L_{11}}$

l^{ème} ligne donne : $Y_I = \frac{1}{L_{II}}[F_I - L_{I1}Y_1 - \dots - L_{I(I-1)}Y_{I-1}] = \frac{1}{L_{II}}[F_I - \sum_{J=1}^{I-1} L_{IJ}Y_J]$

Analyse montante :

N^{ème} ligne : $M_{NN}U_N = Y_N \Rightarrow U_N = \frac{Y_N}{M_{NN}}$

l^{ème} ligne donne : $U_I = \frac{1}{M_{II}}[Y_I - \sum_{J=I+1}^N U_{IJ}Y_J]$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & & M_{1N} \\ 0 & M_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & M_{NN} \end{bmatrix}$$

Méthodes de résolution

Solveurs itératifs

Initialisation
+ test de convergence

$$[K] = [D] - [Ls] - [Ms]$$

Diagonale
de [K]
inversible

Matrice
strictement
inférieure

Matrice
strictement
supérieure

Méthode de Jacobi :

$$\{U^{(k+1)}\} = [D]^{-1} ([Ls] + [Ms]) \{U^{(k)}\} + [D]^{-1} \{F\}$$

$$U_I^{(k+1)} = -\frac{1}{K_{II}} \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{IJ} U_j^{(k)} + \frac{F_I}{K_{II}}, \quad i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

OK même si [K] pas
symétrique définie
positive

Attention aux
conditions sur

termes diagonaux
ou valeurs propres

pour assurer la
convergence

Méthode de Gauss Seidel :

$$\{U^{(k+1)}\} = ([D] - [Ls])^{-1} [Ms] \{U^{(k)}\} + ([D] - [Ls])^{-1} \{F\}$$

Méthode du gradient conjugué (résidu) :

OK seulement si [K] est symétrique définie positive

a_k un scalaire (formule existe pour déterminer l'optimum)

$$\{U^{(k+1)}\} = \{U^{(k)}\} + a_k \{P^{(k)}\}$$

$$\{R^{(k+1)}\} = \{R^{(k)}\} - a_k [K] \{P^{(k)}\}$$

$P(k)$ = directions de descente

Méthodes de résolution

Solveurs directs :

- Faciles à mettre en œuvre
- Mais : Taille du système élevée → nombre d'opérations important
Or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.
- Utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact → difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus
- Donc le résultat n'est jamais rigoureusement exact.

Solveurs itératifs :

Inconvénients :

- ne convergent pas toujours rapidement
- impossible de prévoir le nb d'opérations à l'avance
- la convergence dépend de l'initialisation
- Nécessité de « pré-conditionneurs »

Avantages :

- pas d'algorithme de décomposition
- Suite convergeant vers la solution, erreur estimée.

Questions de **convergence** en élasticité linéaire

Estimation d'erreur :

Champ approché
après discrétisation

Champ solution du problème physique
(inconnu, existence supposée)

Définition de la fonction erreur :

$$\underline{e}(\underline{x}, t) = \underline{u}^h(\underline{x}, t) - \underline{u}(\underline{x}, t)$$

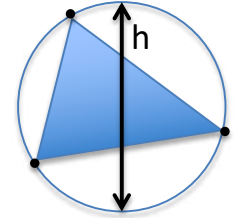
Mesure pratique = norme (champ scalaire)

$$|e_u|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} e^2(\underline{x}, t) d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\underline{u}^h - \underline{u})^t \cdot (\underline{u}^h - \underline{u}) d\Omega}$$

$$|e_{\sigma}|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (\underline{\sigma}^h - \underline{\sigma}) : (\underline{\sigma}^h - \underline{\sigma}) d\Omega}$$

évaluées pour tout le
domaine pour ou un
élément i de sorte que :

$$|e_{\sigma}|_{L_2} = \sum_{i=1}^{N_e} |e_{\sigma}|_i \quad L_2$$



- Si finesse = h + fonctions d'interpolation polynômiales d'ordre p, la solution obtenue rejoint exactement le développement de Taylor jusqu'à cet ordre → l'erreur commise sera de l'ordre de **$O(h^{p+1})$** .

Ex : en élasticité plane, si on utilise des développements linéaires on obtient un taux de convergence d'ordre $O(h^2)$ en déplacement (convergence quadratique)

- L'erreur faite sur les déformations et contraintes (qui font intervenir les n-ièmes dérivées du déplacement) sont de l'ordre de **$O(h^{p+1-n})$** .

Ex : sur le même problème, n=1 l'erreur sur les déf. et cont sera donc $O(h^1)$ (convergence linéaire)

- L'erreur sur l'énergie (qui fait intervenir un produit cont./déf.) sera de l'ordre de **$O(h^{2(p+1-n)})$**

Ex : toujours sur le même exemple : $O(h^2)$ (convergence quadratique)

- **Meilleure précision et convergence plus rapide** avec des éléments **d'ordre supérieur** (quadratique > linéaire) si la solution attendue est régulière (pas de variation abrupte)
- Ordre supérieur préférable pour la statique, inverse pour la dynamique rapide