Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

Examen du 22/2/2021

Temps: 2 h. Notes de cours **autorisées**

Exercice 1 (8 pts)

On veut estimer les échelles caractéristiques de la turbulence dans la tache rouge de Jupiter. Celle-ci a un diamètre D ~ 4×10^7 m, épaisseur à travers l'atmosphère = 150 km, Vitesse caractéristique des grandes échelles = 50 m/s, taille caractéristique des grandes échelles = 2×10^6 m.

On suppose que l'atmosphère jupitérienne est constituée essentiellement d'hydrogène, de masse volumique ρ = 30 kg m^{-3} et viscosité cinématique $\nu = 2\times10^{-4}$ $m^2 s^{-1}$.

a) Estimer l'énergie cinétique massique des grandes échelles turbulentes.
b) Estimer le taux de transfert de l'énergie cinétique vers les petites échelles.
c) Quel est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε ?
d) Sachant que, aux plus petites échelles turbulentes, l'écoulement est piloté par ε et par la viscosité , déterminer les micro-échelles de Kolmogorov (échelle spatiale η, échelle temporelle τ et échelle de vitesse v).
e) Effectuer l'application numérique et calculer les trois micro-échelles de Kolmogorov (longueur, vitesse, temps caractéristiques des plus petites échelles). Les comparer à la taille de la tache rouge.
f) Donner une estimation du nombre minimal de points de maillage de calcul nécessaire pour la simulation numérique directe (DNS) de l'écoulement. Que devient ce nombre si on ne simule que les grandes échelles ?
g) Estimer la dissipation turbulente totale pour l'ensemble de la tache rouge en GW (gigawatts)
h) Comparer le résultat obtenu à la puissance produite par la plus grande centrale nucléaire terrestre (il s'agit actuellement de la centrale japonaise Kashiwazaki-Kariwa qui a une puissance nette de presque 8000 MW). Calculer combien de ces centrales seraient nécessaires pour entretenir le mouvement de la tâche rouge de Jupiter.

Exercice 2 (8 pts)

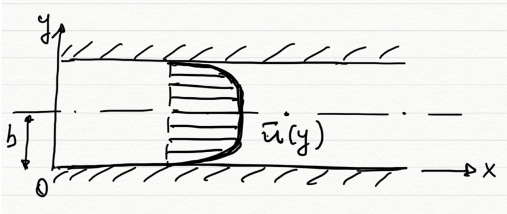
On considère l'équation de transport d'une espèce de concentration massique C (C étant le rapport entre la masse de l'espèce considérée et la masse de fluide contenues dans un volume unitaire) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j}$$

avec D un coefficient de diffusion massique en $m^2\, s^{-1}$. On suppose que l'écoulement est turbulent et incompressible. Le champ de vitesse (u_1, u_2, u_3) a donc une divergence nulle $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$.

a) Appliquer la décomposition de Reynolds aux variables présentes dans cette équation et déterminer une équation de transport pour la moyenne de Reynolds de la concentration.
b) L'opération de moyenne fait apparaître un nouveau terme non fermé. Donner une interprétation physique pour ce terme.
c) On rappelle que le nombre de Schmidt moléculaire, défini par Sc=$\frac{\nu}{D}$ représente le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion de masse dues au mouvement d'agitation moléculaire. Proposer un modèle de fermeture pour le terme supplémentaire de l'équation de transport moyenne [*pour cela, vous pouvez vous inspirer de la modélisation introduite pour un terme analogue apparaissant par exemple dans l'équation de transport pour la température*]. Décrire les éventuels coefficients du modèle. Donner l'expression finale de l'équation de transport moyenne modélisée.
d) Quelle condition doit respecter le coefficient du modèle de fermeture pour que le modèle soit physiquement valide?

Exercice 3 (8 pts)
On considère un l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et viscosité cinématique ν à travers un canal plan. Le champ moyen est statistiquement stationnaire et bidimensionnel.



Le champ moyen est donc décrit par les seules variables $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$, c.à.d. les deux composantes de la vitesse moyenne dans les directions x et y et la pression moyenne. Le champ moyen est régi par les équations :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'}\right]$$

avec $x_1 = x, x_2 = y,\ \bar{u}_1 = \bar{u}\,, \bar{u}_2 = \bar{v}$.

Compte-tenu de la symétrie du problème (écoulement entre deux plaques d'extension infinie), les composantes de vitesse ne dépendent pas de x.

a) Sous les hypothèses précédentes, montrer que le champ de pression moyen ne dépend que de x et que le champ de vitesse moyen est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

avec τ_w le cisaillement pariétal (constant) et b la demie-hauteur du canal.

b) Pour résoudre l'équation précédente, il faut introduire un modèle pour le tenseur de Reynolds. Nous choisissons pour cela une version bas-Reynolds du modèle $k - \epsilon$, de la forme :

$$-\overline{u_i' u_j'} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}; \qquad \nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\epsilon}{k}\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right]$$

avec $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$ le taux de déformation moyen, δ_{ij} le symbole de Kronecker, $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\epsilon$ les constantes de fermeture du modèle et $f_\mu = f_\mu(y), f_1 = f_1(y), f_2 = f_2(y)$ des fonctions d'amortissement.

1. Exprimer le terme de cisaillement turbulent en fonction de $y, \bar{u}, \rho, k, \epsilon, f_\mu$ et des constantes de fermeture du modèle.
2. Simplifier autant que possible l'équation de k pour l'écoulement de canal plan et montrer que k est la solution d'une équation différentielle ordinaire par rapport à y, dont vous donnerez l'expression en fonction des variables $\bar{u}, k, \epsilon$, des propriétés du fluide, et des fonctions d'amortissement et des constantes de fermeture du modèle nécessaires.
3. Répéter la procédure pour l'équation de ϵ et montrer que ce dernier respecte également une équation différentielle ordinaire en y, dont vous donnerez l'expression.