MSX02 - Épreuve de Vibrations

Eléments de correction

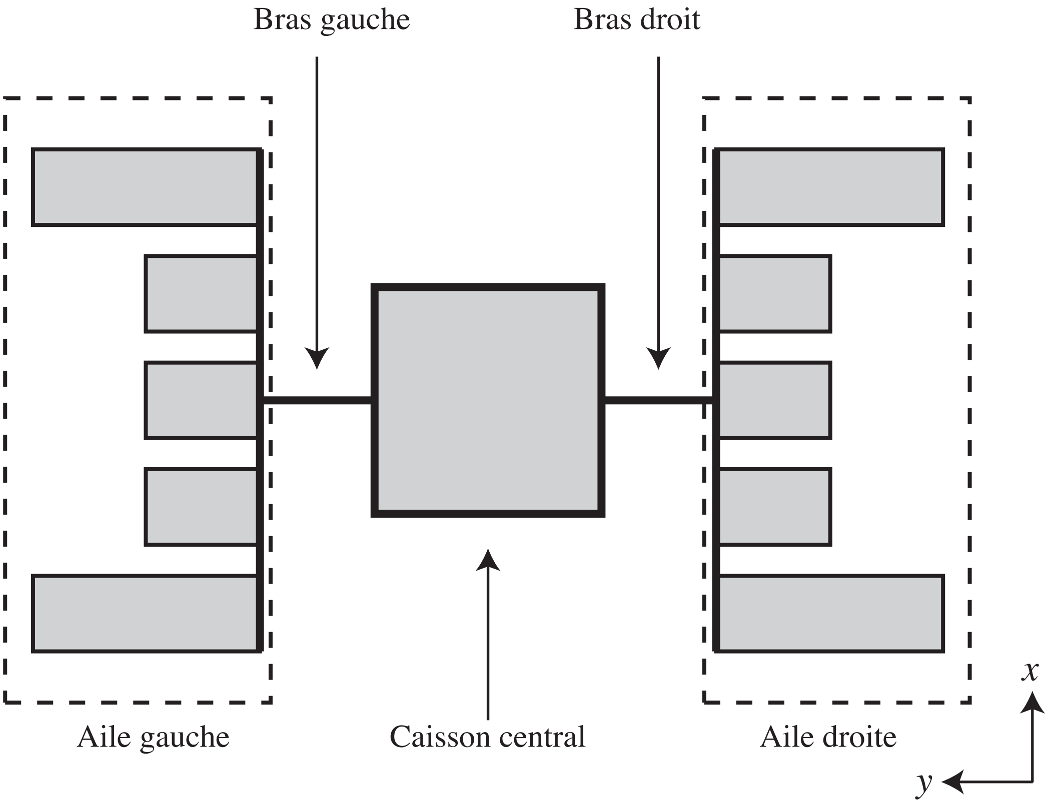

Fig. 1. Structure "satellite" étudiée.

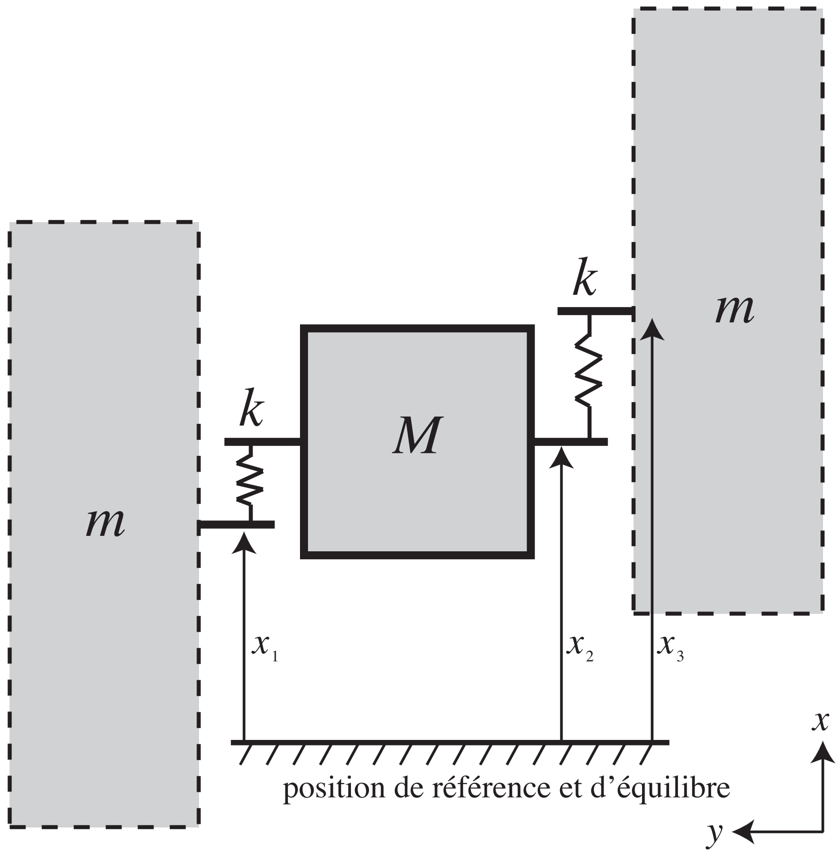

FIG. 2. Modèle global simplifié de la structure étudiée.

Question 1 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 \tag{1}$$

Question 2 :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_3^2 \tag{2}$$

Question 3 : Les équations de Lagrange du système conservatif s'écrivent, en notant le Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

d'où l'on obtient les équations de mouvement :

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \tag{4}$$
$$M\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0 \tag{5}$$
$$m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0 \tag{6}$$

Question 4 : Les équations de mouvement se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{X}} + \mathbf{K}\underline{X} = \underline{0} \tag{7}$$

dans laquelle on a :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \tag{8}$$

Question 5 : Le problème aux valeurs propres généralisées s'écrit :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\underline{X} = \underline{0} \tag{9}$$

Question 6 : Les pulsations propres sont données par :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 = \omega^2(k - \omega^2 m)(mM\omega^2 - k(M + 2m)) \tag{10}$$

d'où les 3 fréquences propres :

$$\omega_1 = 0 \tag{11}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k(M+2m)}{mM}} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Question 7 : Les modes propres correspondants sont :

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2m}{M} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Question 8 : L'énergie de déformation du mode associé à la fréquence propre nulle est également nulle. On peut par exemple l'obtenir directement en multipliant l'équation aux valeurs propres généralisées par $\underline{X}^T$:

$$2\mathcal{V}(\underline{X}_1) = \underline{X_1}^T\mathbf{K}\underline{X_1} = -\omega_1^2\underline{X_1}\mathbf{M}\underline{X_1} = 0 \tag{16}$$

Ceci vient de ce que ce mode propre est un mode de corps rigide.

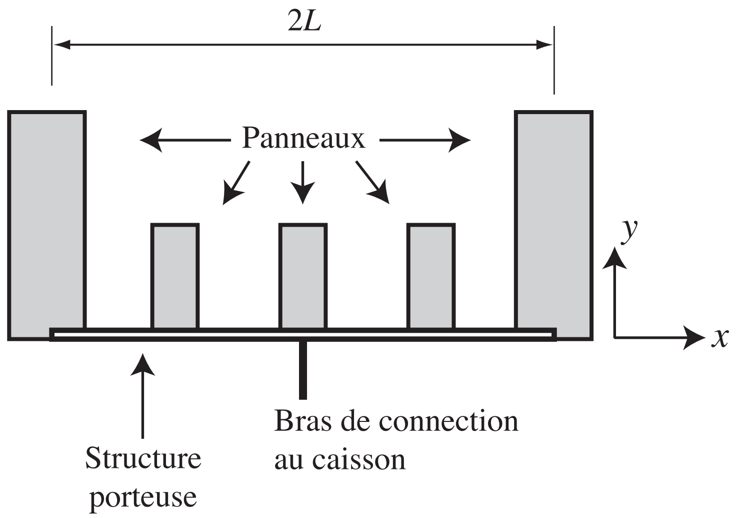

FIG. 3. Structure porteuse supportant les panneaux.

Question 9 :

$$\rho I \ddot{\theta} = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad \text{équilibre d'un tronçon} \tag{17}$$

$$M = GI\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{relation de comportement} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Question 10 : On obtient immédiatement

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

Question 11 : Il s'agit d'une équation de D'Alembert dans laquelle la célérité des ondes est donnée par :

$$c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{21}$$

Question 12 : La célérité des ondes de traction-compression dans une barre est donnée par :

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{22}$$

En utilisant la relation classique $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ on obtient :

$$\frac{c_0}{c_L} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2,6}} \tag{23}$$

Les ondes de torsion sont donc plus lentes que les ondes longitudinales.

Question 13 : En décomposant $\theta(x,\, t)$ en onde stationnaire dans l'équation d'onde on obtient une équation sur f et une équation sur g :

$$f'' + k^2 f = 0 \tag{24}$$
$$g'' + \omega^2 g = 0 \tag{25}$$

Question 14 : La forme générale des solutions f et g est (par exemple) :

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \tag{26}$$
$$g(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{27}$$

La relation de dispersion relie la pulsation (temporelle) au vecteur d'onde :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{28}$$

Question 15 : Il faut 2 conditions limites (pour f) et deux conditions initiales (pour g) pour pouvoir résoudre complètement le problème. Ceci est lié à la nature des équations différentielles vérifiées par f et g (EDL d'ordre 2).

__1^er^ modèle__

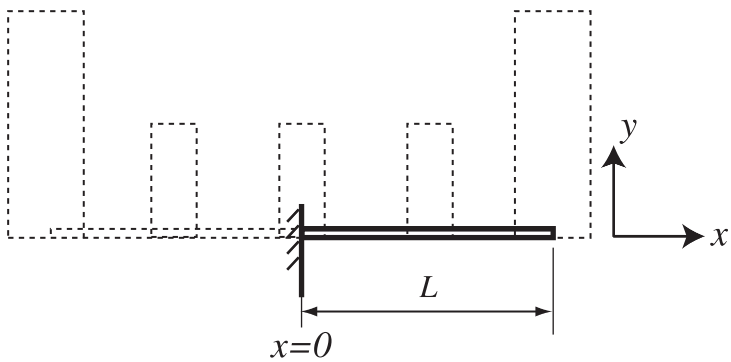

FIG. 4. Premier modèle : les panneaux sont négligés.

Question 16 :

$$\theta(0,t) = 0 \qquad \text{(encastrement)} \tag{29}$$
$$\theta_{,x}(L,t) = 0 \qquad \text{(bord libre)} \tag{30}$$

Question 17 : On obtient successivement k par les conditions limites puis ω par la relation de dispersion :

$$k_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{L} \qquad \omega_n = (n + \frac{1}{2})\frac{c_0\pi}{L} \tag{31}$$

2^{e} modèle

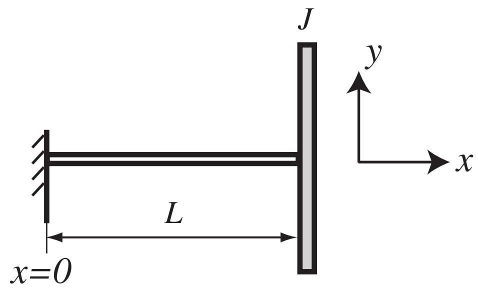

FIG. 5. Deuxième modèle : les panneaux internes sont négligés, les panneaux externes sont assimilés à une inertie J.

Question 18 : Il suffit d'isoler le "volant d'inertie" en $x = L$ et d'appliquer le PFD :

$$J\ddot{\theta}(L,\, t) = -M(L,\, t) = -GI\theta_{,x}(L,\, t) \tag{32}$$

d'où la valeur de β :

$$\beta = \frac{GI}{J} \tag{33}$$

Question 19 : En utilisant les deux conditions aux limites et la relation de dispersion on obtient :

$$k\,L\,\tan(k\,L) = \frac{GIL}{Jc_0^2} \tag{34}$$

d'où la valeur de α :

$$\alpha = \frac{GIL}{Jc_0^2} = \beta\frac{L}{c_0^2} \tag{35}$$

Question 20 : Le fait d'utiliser un modèle dans lequel le milieu de l'aile est encastré aboutit à sélectionner dès le départ uniquement les **modes symétriques**. En effet, les modes antisymétriques ont une composante non nulle au milieu de l'aile. Ils ne peuvent donc pas être obtenus par ce modèle.