Aéroélasticité en Aéronautique :
I - Aéroélasticité statique des profils

jean-camille.chassaing@sorbonne-universite.fr (2020-2021)

Dryden Flight Research Center ECN 31306 Photographed 1984
Video frame 07.15.41.5 of DAST with diverging wingtip oscillations.
NASA photo

Plan du chapitre

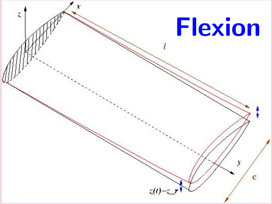
Configuration aéroélastique

- aile + volet
- gouvernail
- gouverne de profondeur

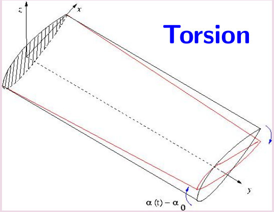
Configuration aéroélastique

- aile + volet
- gouvernail
- gouverne de profondeur

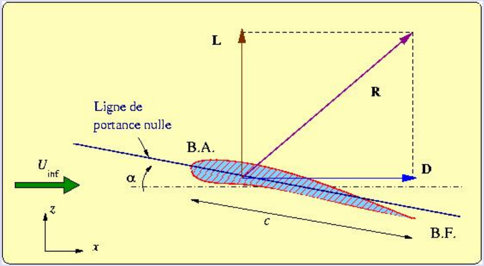
Mouvement d'une aile droite élastique



+

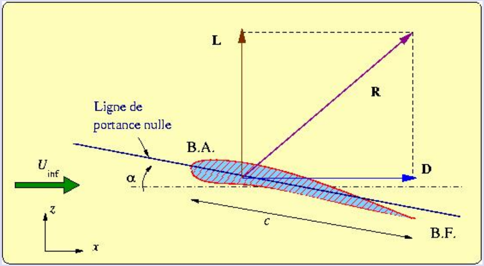


Charges aérodynamiques sur un profil



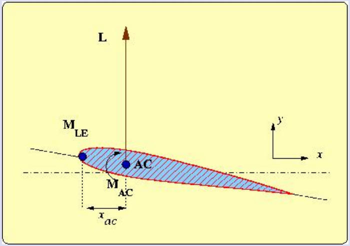
- α : angle d'attaque
- $\vec{R}$: résultante des forces aérodynamiques
- L : la portance est la projection de $\vec{R}$ suivant la perpendiculaire (ascendante) à la direction de l'écoulement
- D : la traînée est la projection de $\vec{R}$ suivant la direction de l'écoulement

Coefficients aérodynamiques



- S : surface de l'aile par unité d'envergure
- $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$: pression dynamique
- $C_L = \frac{L}{q_\infty S}$: coefficient de portance
- $C_D = \frac{D}{q_\infty S}$: coefficient de trainée
- $C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$: coefficient de pression

Moments aérodynamiques



- $\vec{M}_{aero}$: moment de tangage (ou de torsion) des forces aéro.
- $C_{mac} = \frac{M_{aero}}{q_\infty Sc}$: coefficient de moment
- Centre de poussée : point d'application de la force de portance (varie en fonction de α)
- x_{ac} : la position du foyer aérodynamique (AC) est définie de telle sorte que $\vec{M}_{aero}$ soit indépendante de l'angle d'incidence:
  RQ.: pour $M < 0.3 \Rightarrow x_{ac} = c/4$ et pour $M > 2 \Rightarrow x_{ac} = c/2$

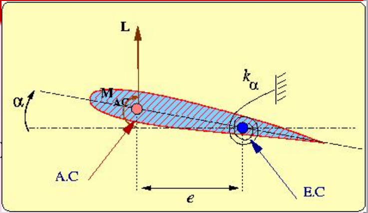
Définition

La vitesse critique de divergence U_D correspond à la vitesse de vol qui entraîne la ruine immediate de la voilure par un mouvement de torsion lorsque *les propriétés de raideur du système mécaniques ne peuvent plus contenir les charges aérodynamiques*

Définition

La vitesse critique de divergence U_D correspond à la vitesse de vol qui entraîne la ruine immediate de la voilure par un mouvement de torsion lorsque *les propriétés de raideur du système mécaniques ne peuvent plus contenir les charges aérodynamiques*

Mise en équation du problème (1/2)



- Equilibre des moments :

$$\mathcal{M}^{\mathrm{aero}}_{x_{\mathrm{ref}}} + \mathcal{M}^{\mathrm{elastique}}_{x_{\mathrm{ref}}} = 0$$

où $x_{\mathrm{ref}} = x_{\mathrm{ec}}$ (*convention* : $e > 0 \Rightarrow x_{ac} < x_{ec}$)

- Décomposition de l'angle d'attaque

$$\alpha = \alpha_r + \alpha_e$$

où α_r : incidence pour l'aile supposée rigide
α_e : angle de déformation élastique relatif aux effets de tangage

jean-camille.chassaing@sorbonne-universite.fr

Mise en équation du problème (2/2)

- Moment des forces élastiques : $\mathcal{M}_{ec}^{\text{elastique}} = -K_\alpha \alpha_e$
  avec K_α : coefficient de raideur (linéaire) du système mécanique
- Moment des forces aérodynamiques :
  $\mathcal{M}_{ec}^{\text{aero}} = \mathcal{M}_{\text{ac}} + Le = C_{\text{mac}} qSc + C_L qSe$
- Hypothèse : α est suffisamment faible pour que l'opérateur aérodynamique reste **linéaire** :

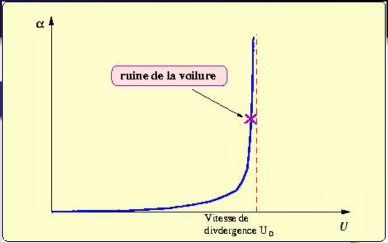
$$\begin{cases} C_L(\alpha) & = & C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha + O(\alpha^2) \\ C_{\text{mac}}(\alpha) & = & C_{\text{mac}_0} \end{cases}$$

RQ. 1. C_{L_0}, C_{mac_0} et $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ sont fonction du nombre de Mach et de la géométrie du profil et de l'aile
2. Cas d'une plaque plane dans un écoulement incompressible avec $\alpha_r = 0$:

$$\Rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 2\pi \text{ et } C_{L_0} = C_{\text{mac}_0} = 0$$

- Equation d'Equilibre Statique : $q\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} Se(\alpha_r + \alpha_e) - k_\alpha \alpha_e = 0$

jean-camille.chassaing@sorbonne-universite.fr



Conditions de divergence

- Angle élastique :

$$\alpha_e = \frac{qS}{k_\alpha} \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e \alpha_r}{1 - q \frac{Se}{k_\alpha} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}$$

- Pression dynamique de divergence : $q_D = \dfrac{k_\alpha}{Se \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}$

- Vitesse de divergence : $U_D = \sqrt{\frac{2 q_D}{\rho}}$

- Expression finale : $\alpha = \left(1 + \dfrac{\frac{q}{q_D}}{1 - \frac{q}{q_D}}\right) \alpha_r$

Remarque :

- Pour $e < 0$ la divergence est impossible
- Validité du raisonnement pour des angles élevés ?

jean-camille.chassaing@sorbonne-universite.fr

Comportement aéroélastique non-linéaire (1/2)

- Pour les *angles de déflexion élevés*, l'hypothèse linéaire n'est plus valable. Il faut tenir compte des non-linéarités mécaniques (raideur) et aérodynamique (décrochage)
- Moment des forces élastiques : $\mathcal{M}_{ce}^{\text{elastique}} = -K_\alpha \alpha_e - K_{\alpha_3} \alpha_e^3$

  avec $K_\alpha > 0$ et $K_{\alpha_3} > 0$
- Hypothèse: $\alpha_r = 0 +$ symétrique$\Rightarrow C_{L_0} = C_{mac_0} = 0$
- Portance: $L = qS \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha - \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_3 \alpha^3 \right)$

  avec $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} > 0$ et $\left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_3 > 0$

REMARQUE:

• Attention au signe (-) dans l'expression de L car la portance diminue pour α élevé à cause du décrochage !

Comportement aéroélastique non-linéaire (2/2)

- E.E.S : $\mathcal{M}_{ce}^{\text{elastique}} + Le = 0$

$$\Rightarrow \alpha_e = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_e^2 = \frac{qeS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\alpha}{qeS\left.\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right|_3 + K_{\alpha_3}}$$

Comportement aéroélastique non-linéaire (2/2)

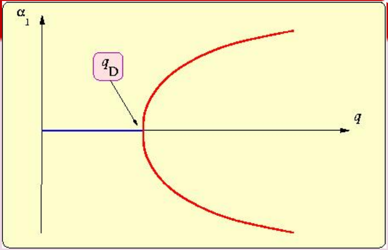
- E.E.S : $\mathcal{M}_{ce}^{\text{elastique}} + Le = 0$

$$\Rightarrow \alpha_e = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_e^2 = \frac{qeS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\alpha}{qeS \left.\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right|_3 + K_{\alpha_3}}$$

1^{ier} cas : $e > 0$

Les solutions non-triviales existent ssi

$$q > \frac{K_\alpha}{eS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} = q_D$$



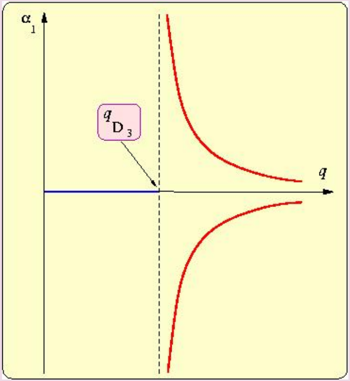
Pour $q > q_D$ on obtient 2 solutions opposées réalisables. La position d'équilibre dépendra alors des perturbations éventuelles de l'écoulement ou des imperfections de la géométrie ou du ressort.

jean-camille.chassaing@sorbonne-universite.fr

2^{nd} cas : $e < 0$

- L'angle élastique s'écrit :

$$\alpha_e^2 = \frac{q|e|S\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + K_\alpha}{q|e|S\left.\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right|_3 - K_{\alpha_3}}$$

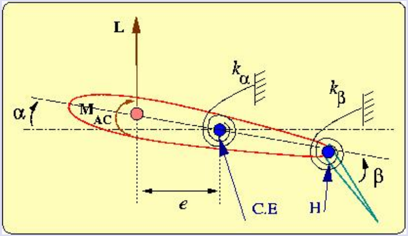


- Condition de divergence :

$$q = q_{D_3} = +\frac{K_{\alpha_3}}{|e|S\left.\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right|_3}$$

Remarque: Cette solution théorique n'a jamais été observée expérimentalement

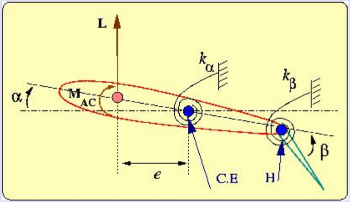
Configuration aéroélastique



Prise en compte de l'aileron :

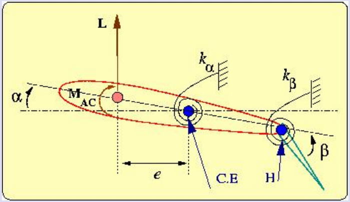
- H : point d'ancrage
- S_H : surface du volet par unité d'envergure
- c_H : corde
- β : angle de déflexion
- k_β : coefficient de raideur

Opérateur aérodynamique (Hyp.: $\alpha_r = C_{mac_0} = 0$ S.P.D.G)



- Portance: $L = qS\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta\right)$ > 0 *suivant* $\vec{e}_z$
- Moment aéro. au F.A: $\mathcal{M}_{ac}^{\text{aero}} = qSc\frac{\partial C_{mac}}{\partial \beta}\beta$ > 0 $B.A$ $\uparrow$
- Moment aéro. en H: $\mathcal{M}_{H}^{\text{aero}} = qS_Hc_H\left(\frac{\partial C_H}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_H}{\partial \beta}\beta\right)$ > 0 $B.F$ $\downarrow$

Conditions d'équilibre



- Moment élastique au C.E: $\mathcal{M}_{ce}^{\mathrm{meca}} = -K_\alpha \alpha$ $> 0 \; B.A \uparrow$
- Moment élastique en H: $\mathcal{M}_{H}^{\mathrm{meca}} = -K_\beta(\beta - \beta_r)$ $> 0 \; B.F \downarrow$

avec $\beta = \beta_r + \beta_e$

- E.E.S: $\mathcal{M}_{ce}^{\mathrm{meca}} + \mathcal{M}_{ac}^{\mathrm{aero}} + L^{aero} e = 0$

$$\mathcal{M}_{H}^{\mathrm{meca}} + \mathcal{M}_{H}^{\mathrm{aero}} = 0$$

Condition de divergence

- L'E.E.S fournit un système de 2 eqs à 2 inconnues (α et β)
- La pression dynamique de divergence q_D est déterminée par la condition :

$$\lim_{q \to q_D} \alpha = \pm\infty$$

soit:

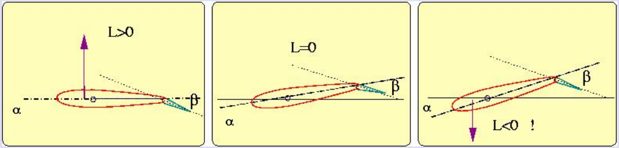
$$\begin{vmatrix} eqS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - K_\alpha & eqS\frac{\partial C_L}{\partial \beta} + qSc\frac{\partial C_{mac}}{\partial \beta} \\ qS_H c_H \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} & qS_H c_H \frac{\partial C_H}{\partial \beta} - K_\beta \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Il faut alors retenir la plus petite des deux racines réelles

APPLICATION : Commenter les effets de K_β sur q_D par rapport au cas flexion/torsion

Role de la surface de contrôle

- Adapter la portance de la voilure aux conditions de vol
- Perte d'efficacité: la portance diminue en fonction de β



- Condition généralisée d'inversion des gouvernes: *le taux de variation de la portance par rapport à la variation d'angle du volet est nul* :

$$\frac{dL}{d\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad q = q_R$$

- Cas particulier d'un profil symétrique ($C_{mac} = 0$) à incidence rigide nulle ($\alpha_r = 0$): $\dfrac{dL}{d\beta} = 0 \Rightarrow L = 0 \quad \text{pour} \quad q = q_R$

Calcul de q_R pour $\alpha_r = 0 = C_{mac_0} = 0$ et $K_\beta \to \infty$ (S.P.D.G)

- La condition $\dfrac{dL}{d\beta} = 0$ donne : $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta} = -\dfrac{\frac{\partial C_L}{\partial \beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}$
- Dérivons l'eq. d'équilibre des moments au F.A par rapport à β

$$K_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = qSc\frac{\partial C_{mac}}{\partial \beta} + qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + qSe\frac{\partial C_L}{\partial \beta}$$

- En se placant à la condition d'inversion des gouvernes, on obtient alors: $q_r = -\dfrac{K_\alpha}{Sc}\dfrac{\frac{\partial C_L}{\partial \beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\left(\dfrac{\partial C_{mac}}{\partial \beta}\right)^{-1}$

Calcul de q_R pour $\alpha_r = 0 = C_{mac_0} = 0$ et $K_\beta \to \infty$ (S.P.D.G)

- La condition $\dfrac{dL}{d\beta} = 0$ donne : $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\dfrac{\frac{\partial C_L}{\partial\beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}}$
- Dérivons l'eq. d'équilibre des moments au F.A par rapport à β

$$K_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = qSc\frac{\partial C_{mac}}{\partial\beta} + qSe\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + qSe\frac{\partial C_L}{\partial\beta}$$

- En se placant à la condition d'inversion des gouvernes, on obtient alors: $q_r = -\dfrac{K_\alpha}{Sc}\dfrac{\frac{\partial C_L}{\partial\beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}}\left(\dfrac{\partial C_{mac}}{\partial\beta}\right)^{-1}$

Vitesse critique d'inversion des gouvernes

$$U_R = \left(\frac{2K_\alpha}{\rho Sc}\right)^{1/2}\left(-\frac{\partial C_{mac}}{\partial\beta}\right)^{-1/2}\left(-\frac{\partial C_L}{\partial\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\right)^{-1/2}$$

Efficacité élastique

- Le critère d'efficacité élastique *Eff* est défini par le rapport entre le cas élastique et le cas rigide, de la variation de portance en fonction de l'angle du volet :

$$Eff = \left(\frac{dL}{d\beta}\right)\left(\frac{dL_r}{d\beta}\right)^{-1}$$

avec $L_r = L|_{(K_\alpha \to \infty, K_\beta \to \infty)} = qS\frac{\partial C_L}{\partial \beta}\beta_r$

Efficacité élastique

- Le critère d'efficacité élastique Eff est défini par le rapport entre le cas élastique et le cas rigide, de la variation de portance en fonction de l'angle du volet :

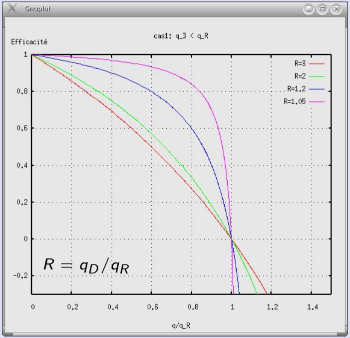
$$Eff = \left(\frac{dL}{d\beta}\right)\left(\frac{dL_r}{d\beta}\right)^{-1}$$

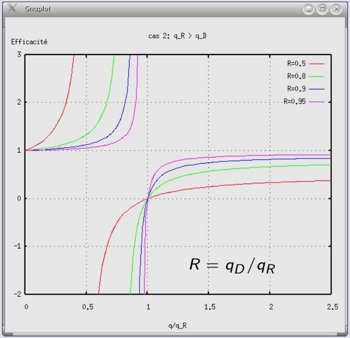
avec $L_r = L|_{(K_\alpha\to\infty, K_\beta\to\infty)} = qS\frac{\partial C_L}{\partial\beta}\beta_r$

Ecriture finale

Aprés calcul, on montre que: $Eff = \dfrac{1-q/q_R}{1-q/q_D}$

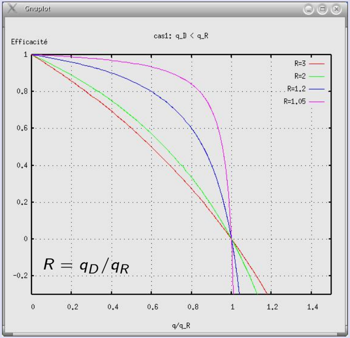
Commentaires

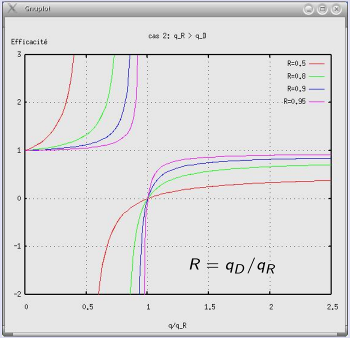




2. Modèle 3-DOF: perte d'efficacité et inversion des gouvernes

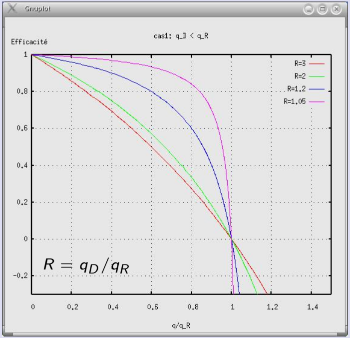
Commentaires

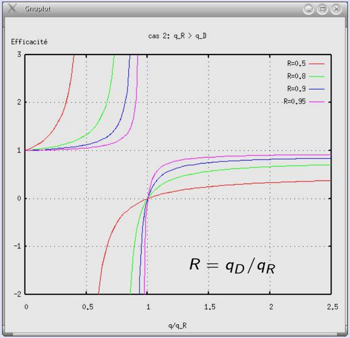




- Pour *Eff* ~ 1, les effets élastiques sont négligeables et les perfomances sont optimales
- Pour *Eff* ~ 0, les conditions critiques d'inversion sont atteintes

Commentaires





- Pour *Eff* ~ 1, les effets élastiques sont négligeables et les perfomances sont optimales
- Pour *Eff* ~ 0, les conditions critiques d'inversion sont atteintes
- CONCLUSION: q_R et q_D doivent être le plus proche possible pour conserver une efficacité élastique élevée le plus longtemps possible