Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 5 Mars 2018 - Session1

Durée 2h00-Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réeles de degré inférieur à 2. $\mathbb{R}_2[X]$ avec l'addition des polynômes et la multiplication avec un scalaire réel est un espace vectoriel de dimension 3. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est formée des polynômes 1, X et X^2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$f(P(X)) = (X^2+1)\frac{dP}{dX} - 2XP(X), \quad P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique. On note cette matrice avec L.
4. Déterminer le noyau et l'image de L. Indiquer leurs dimensions et donner des bases pour chacun.
5. f est-elle surjective ? injective ? Justifier en utilisant les propriétés de la matrice L.
6. (**Bonus**) Soit $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ une application définie par :

$$g(aX^2+bX+c) = a+c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

   (a) Montrer que g est aune application linéaire.
   (b) Calculer $g \circ f$ et en déduire que $Im(f) \subset Ker(g)$.
   (c) Montrer que $Im(f) = Ker(g)$ en utilisant le résultat de la question précédente et le théorème du rang.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. On considère l'application linéaire $f : E \to E$,

$$f(x,y,z) = (x, y\frac{\sqrt{3}}{2} - z\frac{1}{2}, y\frac{1}{2} + z\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

1. Ecrire $A = Mat(f,B,B)$ la matrice représentant f dans la base canonique. Quelle est l'interprétation géométrique de f ?

2. On définit les vecteurs $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2 + e_3$, $u_3 = -e_2 + e_3$. Montrer que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 forment une base de E, notée B'.
3. Donner P la matrice de passage de la base B vers la base B'.
4. Calculer A' la matrice de f dans la base B'.
5. Soit $v = e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $f(v)$ dans la base B, puis dans la base B'.

Exercice 3

Pour chaque $a \in \mathbb{R}$ on définit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble des matrices $M(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

1. E est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$?
2. On suppose que $a = 4$.
   i) Calculer le polynôme caractéristique de $M(4)$ et déterminer les valeurs propres de la matrice.
   ii) Calculer les espaces des vecteurs propres associés aux valeur propres.
   iii) La matrice $M(4)$ est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale $M'(4)$ ainsi que la matrice P de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres. Préciser la relation entre M, M' et P.
3. On se place maintenant dans le cas $a = 0$.
   i) Calculer les valeurs propres de $M(0)$.
   ii) La matrice $M(0)$ est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
   iii) Calculer par récurrence $(M(0))^n$, $\forall \in \mathbb{N}$.
   iv) **Bonus :** La matrice $M(0)$ est-elle inversible ? Que vaut $(M(0))^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$?
4. On revient au cas général $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. **Bonus :** Si $a \in \mathbb{C}$, déterminer les valeurs de a pour lesquelles $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.