- Chapitre 3 -

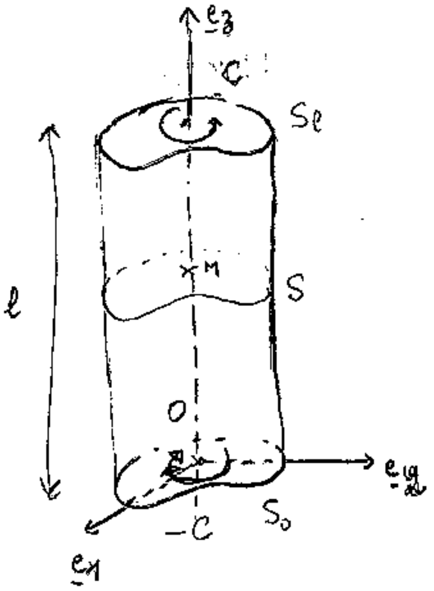
Problèmes classiques d'élasticité tridimensionnelle

-1. Torsion d'un arbre cylindrique

1- Torsion d'un arbre cylindrique

1.1 Formulation des équations

On considère un arbre cylindrique de génératrice $(O, \underline{e}_3)$ de longueur ℓ et de section courante S dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de géométrie quelconque. Les deux sections terminales sont notées S_0 et S_ℓ de côte $x_3 = 0$ et $x_3 = \ell$.



Cet arbre est constitué d'un matériau homogène élastique isotrope

L'état initial de l'arbre pris comme état de référence est l'état naturel

On étudie l'équilibre isotherme de cet arbre sous le chargement suivant :

- les efforts volumiques sont nuls
- la surface latérale de l'arbre est libre d'effort. $\partial\Omega \setminus (S_0 \cup S_\ell)$
- les sections S_0 et S_ℓ sont soumises à des densités

d'efforts telles que le torseur des efforts appliqués est un couple de résultante nulle et de moment porté par $\underline{e}_3$. Ainsi sur S_ℓ, le torseur des efforts appliqués s'écrit :

$$\underline{R} = \underline{0} \quad , \quad \underline{\mathcal{M}}(O) = C\,\underline{e}_3$$

soit donc :

$$\int_{S_\ell} \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, \ell) \cdot \underline{e}_3 \, dS = \underline{0}$$

$$\int_{S_\ell} \left[(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \ell \underline{e}_3) \wedge \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, \ell)\, \underline{e}_3 \right] dS = C\,\underline{e}_3$$

Sur la section S_0, le torseur des efforts appliqués est donné par :

$$\underline{R} = \underline{0} \quad , \quad \underline{\mathcal{M}}(O) = -C\,\underline{e}_3$$

avec $\underline{R} = \int_{S_0} \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, 0) \cdot (-\underline{e}_3)\, dS = 0$

$$\underline{\mathcal{M}}(O) = \int_{S_0} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \wedge \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, 0)\,(-\underline{e}_3)\, dS = -C\,\underline{e}_3$$

L'arbre est donc soumis à des couples opposés dirigés parallèlement à son axe, exercés sur les deux sections terminales.

C est appelé couple de torsion ou Moment de torsion

Remarque : La somme des torseurs des efforts extérieurs appliqués sur l'arbre est égale au torseur nul. On en déduit que : $\int_{\partial\Omega} \underline{F}^d \, ds + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \, dv = 0$
la condition de compatibilité des données statiques pour ce problème est donc satisfaite

Le problème aux limites ainsi posé est mal posé, seul le torseur des efforts appliqués est connu au lieu du vecteur contrainte ou du déplacement en chaque point du bord. le problème n'est pas régulier au sens défini au 1er chapitre. On peut donc s'attendre à ce que la solution du problème ainsi posé ne soit pas unique. On va construire une solution qui correspond à des formes particulières des efforts appliqués sur S_0 et S_e conduisant aux couples imposés. Cette solution a été proposée par Adémard Barré de Saint-Venant (1797-1886). En partant de cette solution on peut reformuler a posteriori le problème pour le poser de façon régulière.

Par ailleurs en vertu du principe de Saint-Venant, on sait qu'il existe une solution telle que, suffisamment loin des extrémités, elle est pratiquement indépendante de la façon dont les efforts sont appliqués sur les extrémités.
C'est cette solution qui nous intéresse.

Pour reformuler le problème en un problème régulier, on peut s'appuyer sur des considérations intuitives. une section droite de la pièce va subir une rotation, variable selon la section, c'est à dire selon la cote x_3.
(autour de $\underline{e}_3$)

On peut supposer que la section S_0 ne bouge pas et que S_e subit une rotation maximale..

Pour des section de géométrie quelconque cette rotation s'accompagne d'un gondolement ou "gauchissement" de la section, une section plane ne reste pas plane. Et donc en particulier les sections terminales So et Sℓ

De sorte que les déplacements des points des sections So et Sℓ sont de la forme :

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2,0) = 0 \\ u_2(x_1,x_2,0) = 0 \end{cases} \text{ sur } S_0 \qquad \begin{cases} u_1(x_1,x_2,\ell) = -\alpha\ell x_2 \\ u_2(x_1,x_2,\ell) = \alpha\ell x_1 \end{cases}$$

où $\alpha\ell$ est l'angle de torsion de Sℓ que l'on suppose dans un premier temps donné

il sera a posteriori adapté pour conduire aux moments: Cz imposés.

Ces expressions découlent de la forme d'un déplacement de rotation infinitésimal dans le cadre HPP (A étant le centre de la section Sℓ)

$$\underline{u} = \underline{b} \wedge \underline{AM} = \alpha\ell\, \underline{e}_3 \wedge (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) = -\alpha\ell x_2\, \underline{e}_1 + \alpha\ell x_1\, \underline{e}_2$$

Mais compte tenu du gauchissement possible de la section dans le cas d'une section quelconque, on ne peut pas fixer $u_3 = 0$ sur So et Sℓ.

Par contre ; si l'effort sur ces faces est tel que $F_3^d = 0$, on aura bien un moment porté par $\underline{e}_3$. En effet $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot e_3$ et donc :

$(\underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3) = (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13})\, \underline{e}_3$ les deux autres composantes sont nulles.

On est donc amené à poser le problème régulier suivant :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \lambda \operatorname{trace} \underline{\underline{\varepsilon}}(x)\, \mathbb{1} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(x) & \underline{x} \in \Omega \qquad (2) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\, \underline{u}(x) + \underline{\nabla}\, \underline{u}^T(x)\right) & x \in \Omega \qquad (3) \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \qquad \forall x \in \partial\Omega \setminus (S_0 \cup S_\ell) \qquad (4)$$

$$\text{avec } \underline{n}(\underline{x}) = n_1 \underline{e}_1 + n_2 \underline{e}_2 \;;\; n_1^2 + n_2^2 = 1$$

$$\begin{cases} u_1(\underline{x}) = 0 \\ u_2(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in S_0 \quad \underline{x} = (x_1, x_2, 0) \qquad (5) \\ \sigma_{33}(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(\underline{x}) = -\alpha\ell x_2 \\ u_2(\underline{x}) = \alpha\ell x_1 & \forall \underline{x} \in S_\ell \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \ell) \qquad (6) \\ \sigma_{33}(x) = 0 \end{cases}$$

Ainsi posé, le problème est régulier : 3 composantes scalaires du déplacement ou des efforts complémentaires sont connus en tout point de $\partial\Omega$.

Il s'agit d'un problème de type III qui admet une solution unique en déformation et contraintes, mais pas en déplacement forcément. La solution est définie à un déplacement de corps rigide près compatible avec les liaisons cinématiques (voir Chapitre 1)

Les espaces des champs admissibles ~~est~~ pour ce problème :

Uad : CA : $\{ \underline{v}$ définis sur Ω, continus et continûment différentiables tels que

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ sur } S_0 \quad u_1 = -\alpha l x_2 \quad u_2 = \alpha l x_1 \text{ sur } S_e \}$$

Σad : SA : $\{ \underline{\underline{\tau}}$ définis sur Ω, symétriques, continus et continûment différentiables tels

$$\text{que} \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = 0 \text{ dans } \Omega \quad \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus S_0 \cup S_e$$

$$\tau_{33} = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_e \}$$

Soient $\underline{u}$ et $\underline{u}'$ deux solutions, $\underline{u} - \underline{u}^* = \underline{\rho}$ avec $\underline{\rho} \in R$ déplacement rigide

et $u_1 - u_1^* = u_2 - u_2^* = 0$ sur S_0 et S_e d'où, comme $\underline{\rho} = \underline{a} + \underline{b} \wedge \underline{OM}$; on a :

$$\begin{cases} u_1 - u_1^* = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 \\ u_2 - u_2^* = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3 \\ u_3 - u_3^* = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_1 - b_3 x_2 = 0 \\ a_2 + b_3 x_1 = 0 \end{cases} \text{ sur } S_0 \Rightarrow a_1 = a_2 = b_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_1^* = b_2 x_3 \\ u_2 - u_2^* = -b_1 x_3 \\ u_3 - u_3^* = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 - u_1^* = 0 \\ u_2 - u_2^* = 0 \end{cases} \text{ sur } S_e \Rightarrow b_2 = 0$$

$$\text{de sorte que} \quad \begin{cases} u_1 - u_1^* = 0 \\ u_2 - u_2^* = 0 \\ u_3 - u_3^* = a_3 \end{cases} \quad \text{avec } a_3 \text{ quelconque.}$$

Le déplacement solution du problème de torsion est unique à une translation près selon $\underline{e}_3$.

1.2 Résolution par l'approche déplacement.

Nous adoptons le schéma de résolution en déplacement décrit au chapitre 1 ;

i) On postule une forme de champ de déplacement admissible sous la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha x_3 x_2 \\ u_2 = \alpha x_3 x_1 \\ u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2) \end{cases}$$

où $\varphi(x_1,x_2)$ est une fonction scalaire qui a la dimension du carré d'une longueur, α a la dimension de l'inverse d'une longueur, c'est un angle par unité de longueur.

Ce champ de déplacement est bien cinématiquement admissible :

$u_1 = u_2 = 0$ sur S_0 d'équation $x_3 = 0$

et $u_1 = -\alpha l x_2$ $u_2 = \alpha l x_1$ sur S_l d'équation $x_3 = l$

La forme de champ de déplacement postulé s'écrit sous la forme :

$$\underline{u} = \alpha x_3\, \underline{e}_3 \wedge \underline{OM} + \alpha \varphi(x_1,x_2)\, \underline{e}_3 \quad \text{pour M de la section de cote } x_3$$

Le déplacement envisagé est donc une rotation d'ensemble de la section autour de l'axe $\underline{e}_3$, l'angle de rotation est proportionnel à la cote et vaut αx_3 et un "gauchissement" de la section traduit par le terme $\alpha \varphi(x_1,x_2)\, \underline{e}_3$

Le gauchissement est indépendant de la cote de la section, c'est le même pour toutes les sections. La fonction φ est appelée fonction de gauchissement

Remarque : Il faut que l'hypothèse des petits déplacements soit satisfaite pour que la forme proposée soit admissible. C'est à dire $(\alpha x_3 x_2)$, $(\alpha x_3 x_1)$ et $\alpha \varphi(x_1,x_2)$ doivent être suffisamment petits et ce $\forall x_3$ et $\forall (x_1,x_2)$ dans la section S

ii) Calcul du champ de déformation associé :

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}} u^T\right)$, soit $\quad \varepsilon_{11} = 0 \quad \varepsilon_{22} = 0 \quad \varepsilon_{33} = 0$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(-\alpha x_3 + \alpha x_3\right) = 0 = \varepsilon_{21}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(-\alpha x_2 + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \varepsilon_{31}$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\alpha x_1 + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = \varepsilon_{23}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right) \\ & 0 & \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right) \\ \text{Sym} & & 0 \end{pmatrix}$$

- On observe que la déformation ne s'accompagne d'aucune variation de volume

$$\text{trace } \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 = \text{div } \underline{u}$$

- Les sections droites $x_3 = \text{cste}$ ne sont pas déformées dans leur plan

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yx} = 0$$

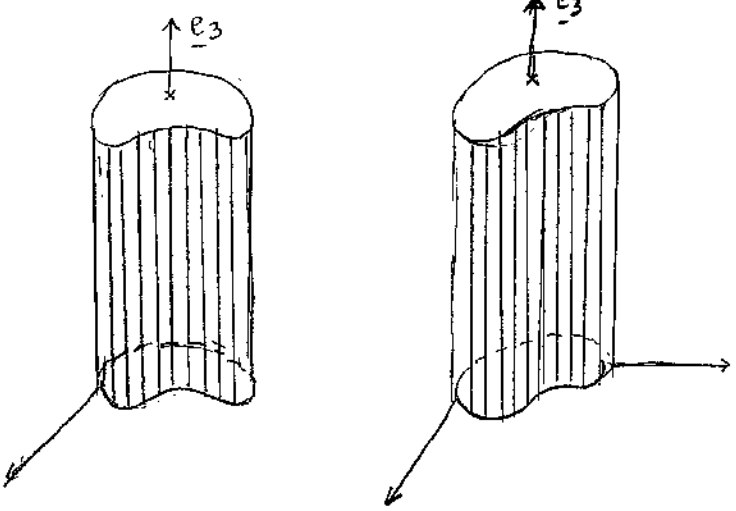
Elles subissent une rotation d'ensemble d'angle αx_3 pour x_3 fixé autour de $\underline{e}_3$

- Un élément matériel porté par $\underline{e}_3$ ne s'allonge pas

$$\varepsilon_{33} = 0$$

La barre ne s'allonge pas si on la tord sous l'hypothèse des petits déplacements.

Pour visualiser ce mode de déformation, on peut imaginer l'arbre comme un assemblage de fibres très fines parallèles à $O\underline{e}_3$. Dans la déformation de rotation infinitésimale, les fibres restent rectilignes ne subissent aucune variation de longueur ; Elles s'inclinent sur l'axe $(O, \underline{e}_3)$ et subissent une translation parallèle à cet axe.



III - Calcul du tenseur des contraintes

Comme la trace de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est nulle, les contraintes sont données directement par :

$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}$, soit donc :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) \\ & & \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) \\ \text{Sym} & & 0 \end{pmatrix}}$$

où μ est le module de cisaillement.

IV - Vérification de l'équilibre

En absence d'effort volumique, on doit avoir $\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in \Omega$. Les deux premières équation sont automatiquement satisfaites et la troisième s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{23}) = 0 \quad \text{soit} \quad \mu\alpha\, \Delta\varphi(x_1,x_2) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

avec $\Delta\varphi$, le laplacien bidimensionnel, soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 0} \qquad \forall (x_1,x_2) \in \Omega \text{ et donc } \forall (x_1,x_2) \in S$$

Donc le champ de déplacement proposé sera solution sous la condition necessaire $\Delta\varphi(x_1,x_2) = 0$ $\forall (x_1,x_2) \in S$. La fonction de gauchissement doit être harmonique. Cette condition n'est pas suffisante, il reste à vérifier les condition aux limites en effort.

V - Vérification des condition aux limites en effort.

Les condition se réduisent ici à la condition de bord latéral libre :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus (S_0 \cup S_e) \qquad \left(\text{et} \quad \sigma_{33} = 0 \text{ sur } S_0 \cup S_e \text{ satisfaite automatiquement}\right)$$

soit donc : $$\boxed{\mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) n_1 + \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) n_2 = } \quad \forall (x_1,x_2) \in \partial S$$

avec $n_1^2 + n_2^2 = 1$.

Le champ de déplacement sera solution sous la condition necessaire et suffisante sur la fonction $\varphi(x_1,x_2)$: φ doit satisfaire le problème suivant posé sur une section droite de l'arbre

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x_1, x_2) = 0 & \forall (x_1, x_2) \in S \\ \mu \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \mu \alpha (x_2 n_1 - x_1 n_2) & \forall (x_1, x_2) \in \partial S \end{cases}$$

avec $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \underline{\text{grad}}\, \varphi \cdot \underline{n}$ (dérivée normale)

Il s'agit d'un problème type laplacien bidimensionnel avec conditions aux limites de Neuman. On énonce un résultat général d'existence et d'unicité)

Résultat d'existence et d'unicité : le problème de Neuman suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi(\underline{x}) = f(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \underline{\text{grad}}\, \varphi \cdot \underline{n} = g(x) & \forall \underline{x} \in \partial \Omega \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions régulières ($f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$) admet une solution sous la condition nécessaire

$$\int_\Omega f(\underline{x})\, dx + \int_{\partial\Omega} g(\underline{x})\, ds = 0$$

et cette solution est unique à une constante additive près. ($\varphi \in H^1(\Omega)$)

Le cadre fonctionnel sera étudié dans le cours d'EDP 2.

On peut montrer d'où provient ce résultat : Si la fonction $\varphi(\underline{x})$ existe on a :

$$-\int_\Omega \Delta \varphi(\underline{x})\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx$$

or $\displaystyle\int_\Omega \Delta \varphi(x) = \int_\Omega \text{div}(\underline{\text{grad}}\, \varphi)\, dx = \int_{\partial\Omega} \underline{\text{grad}}\, \varphi \cdot \underline{n}\, dS$ d'après la formule de la divergence d'où

$$\int_\Omega f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \underline{\text{grad}}\, \varphi \cdot \underline{n}\, ds = 0$$ et donc la condition nécessaire

annoncée compte tenu de la condition aux limites.

Par ailleurs, on voit que si φ existe, c'est à dire si la condition nécessaire est satisfaite on a :

$$\int_\Omega -\Delta \varphi(\underline{x})\, \Phi(\underline{x})\, dx = \int_\Omega f(x)\, \Phi(x)\, dx \quad \forall \Phi$$

soit $\displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla\varphi(x)} \cdot \underline{\nabla\phi(x)}\,dx = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,\phi(x)\,ds$ $\forall\phi$ regulier avec $\underline{\nabla\varphi} = \underline{\text{grad}}\,\varphi$

de sorte que si φ^* est egalement solution, on a :

$$\int_\Omega \underline{\nabla\varphi^*}(x) \cdot \underline{\nabla}\phi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,\phi(x)\,ds$$

d'ou $\displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla}(\varphi-\varphi^*) \cdot \underline{\nabla}\phi(x)\,dx = 0 \quad \forall\phi$

et donc en prenant $\phi = \varphi - \varphi^*$ on a $\displaystyle\int_\Omega |\nabla(\varphi-\varphi^*)|^2 dx = 0$

d'où $\underline{\nabla}(\varphi-\varphi^*)| = \underline{0}$ (presque partout dans Ω) soit $\varphi - \varphi^* = \text{Cste}$ dans Ω

donc la solution φ si elle existe est definie à une constante additive près.

. Revenons au probleme de Neuman satisfait par la fonction de gauchissement et vérifions si la condition necessaire est bien satisfaite c'est à dire si :

$$\int_{\partial S} \mu\alpha\,(x_2 n_1 - x_1 n_2)\,dS = 0.$$

En repassant sur S, on a : $\displaystyle\int_S \mu\,\alpha\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) ds = 0.$

Donc la fonction de gauchissement $\varphi(x_1,x_2)$ solution du problème de Neuman existe bien et en conséquence le déplacement proposé

$u_1 = -\alpha l\,x_2 \quad u_2 = \alpha l\,x_1 \quad u_3 = \alpha\,\varphi(x_1,x_2)$ est bien solution du probleme de torsion posé. Ce déplacement n'est pas unique, il est défini à une translation près selon $\underline{e}_3$ (car $\varphi^* = \varphi + C$ est aussi solution du probleme de Neuman).

Nous allons maintenant vérifier que la solution $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ du problème régulier conduit bien à des efforts surfaciques sur les section terminales tels que les torseurs associés soient bien des couples d'axe $(O, \underline{e}_3)$ suivant la formulation du problème de torsion initialement posé.

• 1.3 Calcul des efforts.

D'après la forme du champ de contrainte solution, on a sur les faces S_0 et S_ℓ

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \pm \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) \underline{e}_1 \pm \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) \underline{e}_2$$
$$= \pm e_3$$

Calculons la résultante associé tout d'abord à cet effort surfacique :

$$R_1 = \int_S \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) dS \;,\; R_2 = \int_S \mu\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) dS \;,\; R_3 = 0$$

or $$\mu\alpha \int_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) dS = \mu\alpha \int_S \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right]\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right]\right) - x_1 \Delta\varphi\right\} dS$$

soit $$\mu\alpha \int_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) dS = \mu\alpha \int_{\partial S} \left[x_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) n_1 + x_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) n_2\right] ds$$

car $\Delta\varphi = 0$ dans S

d'où $\mu\alpha \int_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) dS = 0$ car $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} n_2 = x_2 n_1 - x_1 n_2$ sur ∂S

de même on montre que $R_2 = 0$ d'où $\underline{R} = \underline{0}$

Calculons maintenant le Moment en O associé, on a pour la face S_ℓ :

$$\underline{M}(O) = \int_{S_\ell} (\underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3) dS = \left(\int_{S_\ell} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13})\, dS\right) \underline{e}_3$$

soit $$\underline{M}(O) = \mu\alpha \int_{S_\ell} \left[x_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) - x_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right)\right] dS \;\; \underline{e}_3$$

De sorte que le moment sera égal à $C\,\underline{e}_3$ si le paramètre α est donné par :

$$\left|\begin{array}{l} C = \mu J \alpha \quad \text{avec} \\ J = \displaystyle\int_S \left[x_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) - x_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right)\right] dS \end{array}\right.$$

μJ est appelée rigidité de torsion et J l'inertie de torsion de la section

J est une caractéristique géométrique de la section, elle a pour dimension la puissance 4 d'une longueur :

$$[C] = m \times \frac{N}{m^2} \times m^2 = \frac{N}{m^2}[J]\frac{1}{m} \quad , \text{ d'où } [J] = m^4 .$$

J est une grandeur positive, en effet on peut montrer que :

$$J = \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right)^2 dS .$$

En résumé, une solution du problème de torsion initialement posé avec les couples imposés est :

$$u_1 = -\frac{C}{\mu J} x_3 x_2 \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{C}{J}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right)\left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1\right)$$

$$u_2 = \frac{C}{\mu J} x_3 x_1 \qquad + \frac{C}{J}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right)\left(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2\right)$$

$$u_3 = \frac{C}{\mu J}\varphi(x_1, x_2)$$

où $\varphi(x_1, x_2)$ est solution unique de

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x_1, x_2) = 0 & \forall x \in S \text{ section} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_1, x_2) = n_1 x_2 - n_2 x_1 & \forall x \in \partial S \end{cases}$$

Cette solution vérifie les conditions aux limites en déplacement et effort imposé sur S_0 et S_ℓ. Elle vérifie également le problème régulier posé avec des efforts imposés sur les faces S_0 et S_ℓ, avec

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, \ell) = \frac{C}{J}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right) = F_1^d & \text{sur } S_\ell \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, \ell) = \frac{C}{J}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right) = F_2^d \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, \ell) = 0 \end{cases}$$

et sur S_0 des données opposées, φ étant obtenue en résolvant le problème de Neuman.

Saint-Venant a formulé la conjecture suivante à propos de ce problème :

" Hormis des effets d'extrémité, la façon dont le couple de torsion est appliqué n'a pas d'influence sur la solution du problème de torsion élastique".

Les solutions diverses que l'on peut obtenir pour le problème de torsion avec un couple terminal ne diffèrent sensiblement qu'au voisinage des extremités de l'arbre ou le couple est appliqué. Donc si la longueur de l'arbre est grande devant les dimension de la section, les diverses solutions sont voisines sur une majeure partie de la pièce

Cette conjecture (ce n'est pas un théorème établi) appelée Principe de Saint-Venant peut être utilisé (malgré tout avec prudence) à tout autre sollicitation exercée aux extremités d'un solide élancé.

1.4. Solution particulière pour un arbre à section circulaire.

On suppose la section de l'arbre circulaire de rayon R.

Le problème de Neuman satisfait par la fonction de gauchissement s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x_1,x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_1 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_2 = n_1 x_2 - n_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

car $n_1 = \dfrac{x_1}{R}$, $n_2 = \dfrac{x_2}{R}$

Une solution de ce problème est $\varphi(x_1,x_2) = 0$. Elle est définie à une constante additive près.

- Une solution du problème de torsion s'écrit alors en déplacement.

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha x_3 x_2 \\ u_2 = \alpha x_3 x_1 \\ u_3 = 0 \\ \text{avec } \alpha = \dfrac{C}{J} \end{cases}$$

soit $\underline{u} = \alpha x_3 r \, \underline{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques

Il n'y a pas de gauchissement des sections droites

- le champ de contraintes associé s'écrit

$$\sigma = -\mu\alpha x_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \mu\alpha x_1 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

soit encore en coordonnées cylindriques

$$\underline{\underline{\sigma}} = +\mu\alpha r \, (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)).$$

l'état de contrainte est donc un état de cisaillement dont l'intensité est proportionnelle au rayon et à l'angle α

L'inertie de torsion s'obtient en calculant l'intégrale :

$$J = \int_S \left[x_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right) - x_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right)\right] ds$$

soit $$J = \int_S x_1^2 + x_2^2 \, ds = R^2 \pi \frac{R^2}{2} = \pi \frac{R^4}{2}$$

la distribution des efforts surfaciques sur S_e vaut :

$$\left\{\begin{array}{lll} \sigma_{13} = -\mu\alpha x_2 & = & -\dfrac{2C}{\pi R^4} x_2 \\ \sigma_{23} = \mu\alpha x_1 & = & \dfrac{2C}{\pi R^4} x_1 \\ \sigma_{33} = 0 & & \end{array}\right.$$

soit encore $\underline{F}^d = \dfrac{2C}{\pi R^4} r \, \underline{e}_\theta$

- Remarques :

i) la solution établie pour un arbre cylindrique à section circulaire est également valable pour un tube creux de section circulaire. Dans ce cas J vaut $J = \frac{\pi}{2}(R_1^4 - R_0^4)$ où R_1 et R_0 sont respectivement les rayons extérieur et intérieur.

. Si le tube est mince, les champs de contrainte et de déformation sont uniformes et l'essai de torsion devient intéressant pour mesurer le module de cisaillement μ.

ii) la solution établie est valable dans le cadre de validité de l'hypothèse HPP, c'est à dire en petites déformations et petits déplacements.

soit : $|\alpha l| \ll 1$ et $|\alpha R| \ll 1$

iii) Pour des sections non circulaires, par exemple triangulaire ou carrée, les sections droites ne restent pas planes. On observe un gauchissement des sections (cf illustration). Mais les sections terminales restent planes. Il existe des solutions explicites du problème de torsion pour des arbres de section elliptique, triangulaire, circulaire avec entaille.

o 1.5 Au delà du régime élastique : rupture - plasticité

- Pour des matériaux fragiles, la rupture survient lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique seuil :

$$\max \left(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \right) = \sigma_{0\,critique}$$

(σ_i) étant les contraintes normales principales

D'après l'expression des contraintes, on a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu \alpha r \left(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \right) \qquad \text{(état de cisaillement simple)}$$

les contraintes normales principales sont $\mu\alpha r$, $-\mu\alpha r$ et 0 et les direction principales associées sont les bissectrices de $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

soit $\quad \frac{1}{2}\left(\underline{e}_\theta + \underline{e}_z\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\underline{e}_\theta - \underline{e}_z\right)$ et la direction perpendiculaire à e_θ dans le plan S : $\underline{e_r}$

La contrainte normale principale est maximale en $r = R$ sur le bord de l'éprouvette et vaut $\mu\alpha R$.

La rupture aura lieu dès que α atteint la valeur critique

$$\alpha_{critique} = \frac{\sigma_{0\,critique}}{\mu R}$$

la surface de rupture associée a lieu selon les plans bissecteurs des directions principales maximales (cf cours cercle de Mohr) soit ici dans les directions à 45° des vecteurs $\underline{e}_\theta, \underline{e}_z$. Ce qui explique la rupture hélicoïdale observée sur l'éprouvette de fonte, ou encore sur le bâton de craie

- pour des matériaux ductiles, le matériau rentre dans un domaine plastique dès qu'un critère de plasticité est atteint. On peut par exemple retenir le critère de Tresca qui porte sur la différence maximale entre les contraintes principales et qui s'écrit

$$Max\left(|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_1-\sigma_3|\right) \leq \frac{\sigma_0}{2}$$

σ_0 est la limite d'élasticité du matériau,

Ici ce critère est atteint en premier lieu sur le contour de l'arbre en $r=R$ c'est à cet endroit que la plasticité s'initie en premier lieu car

$$\sup_{x\in S}\left(|\mu\alpha r|\right) = \mu\alpha R$$

l'arbre reste élastique tant que $|\alpha| \leq \frac{\sigma_0}{2\mu R}$

ou encore en terme de couple imposé $|C| \leq C_{limite} = \frac{J\sigma_0}{2R} = \frac{\pi R^3\sigma_0}{4}$

o 1.6. Recherche de la solution en approche contrainte.

On peut également rechercher la solution en adoptant une approche contrainte on va alors postuler une forme du champ de contraintes statiquement admissible, sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ & 0 & \sigma_{23} \\ \text{symétrique} & & 0 \end{pmatrix}$$

telle que $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ dans Ω

et $F_3^d = 0$ sur S_0 et S_e

et $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = 0$ sur $\partial\Omega\setminus(S_0\cup S_e)$

soit donc $\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1,x_2)$

$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1,x_2)$

d'où $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(x_1,x_2)$

$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = 0$ dans S

On en déduit si S est simplement connexe (sans trou) qu'il existe une fonction $\theta(x_1,x_2)$ telle que

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

θ est appelée fonction de contrainte pour le problème de torsion.

(*)
Maintenant, si l'on suit la méthode décrite au chapitre 2, $\underline{\underline{\sigma}}$ doit satisfaire l'équation de Beltrami pour s'assurer de la compatibilité des déformations, soit donc en absence d'efforts volumiques comme c'est le cas ici

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\, \Sigma_{,ij} = 0 \qquad i,j = 1,2,3 \quad \underline{x} \in S \qquad \text{avec } \Sigma = \text{trace } \underline{\underline{\sigma}}$$

qui se réduit à :

$\Delta \sigma_{13} = 0$ et $\Delta \sigma_{23} = 0$ soit donc en intervertissant les dérivées

$\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta \theta) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta \theta) = 0$ dans S, d'où :

$\Delta \theta$ est constant dans S section de la barre.

On note $-2K$ cette constante, d'où θ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \theta(x_1,x_2) = -2K & (x_1,x_2) \in S \\ \underline{\text{grad}}\,\theta \cdot \underline{\tau} = 0 & \forall \underline{x} \in \partial S \end{cases}$$

Or $\underline{\text{grad}}\,\theta \cdot \underline{\tau} = 0 \;\; \forall x \in \partial S \Rightarrow \theta = \text{Cste}$ sur le bord ∂S (pour un bord convexe)

Comme les contraintes sont des gradients de θ, on peut choisir

$$\theta = 0 \text{ sur } \partial S$$

La fonction θ satisfait un problème de type Dirichlet qui admet toujours une seule solution.

(*) Pour que $\underline{\underline{\sigma}}$ soit un champ statiquement admissible, il reste à vérifier les conditions aux limites en effort. Soit donc ici (les autres étant automatiquement vérifiées)

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \qquad \underline{x} \in \partial\Omega$$

d'où $\frac{\partial \theta}{\partial x_2} n_1 - \frac{\partial \theta}{\partial x_1} n_2 = 0 \quad x \in \partial \Omega$, soit encore $\underline{\text{grad}}\,\theta \cdot \underline{\tau} = 0$ sur $\partial\Omega$

où $\underline{\tau}$ est le vecteur tangent unitaire $\underline{\tau} = (-n_2, n_1)$

Donc les équation de Beltrami sont bien satisfaites, le champ de contraintes conduits aux effets suivants globaux sur les faces So et Se

$$R_1 = \int_{Se} \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\, dS = \int_{\partial Se} \theta\, n_2\, dl = 0 \quad \text{car } \theta = 0 \text{ sur } \partial S$$

$$R_2 = \int_{Se} -\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\, dl = \int_{\partial Se} \theta\, n_1\, dl = 0$$

et $R_3 = 0$

Les moments valent sur Se ou So

$$M_1 = \int_{Se} +l\, \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\, dS = 0 \qquad M_2 = \int_{Se} l\, \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\, dS = 0$$

et $$M_3 = \iint_{Se}\left[-x_1 \frac{\partial\theta}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right] dS = \iint_{Se}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\theta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\theta)\right) + 2\theta\right] dS$$

soit encore $$M_3 = 2\int_{S_i} \theta(x_1,x_2)\, dS = C$$

On retrouve bien un couple de torsion selon $(0,\underline{e}_3)$.

Soit $\hat{\theta}$ la fonction de torsion solution du problème adimensionné.

$$\begin{cases} -\Delta\hat{\theta} = 2 & \text{dans } S \\ \hat{\theta} = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases}$$

En posant $\theta = \mu\alpha\,\hat{\theta}$, on a $M_3 = 2\mu\alpha \int_S \hat{\theta}\, dS = C$

d'où en introduisant $K = 2\int_S \hat{\theta}(x_1,x_2)\, dS$ le module géométrique, on a :

$$M_3 = \mu\alpha K = C$$

On retrouve la formulation en déplacement.