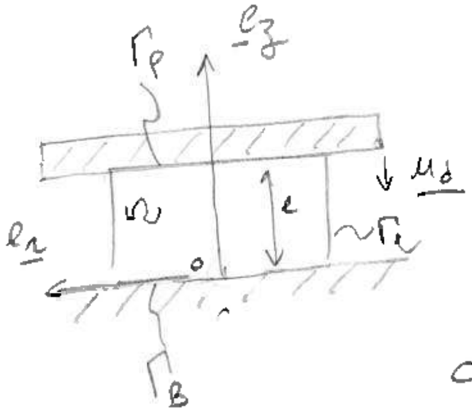
JOINT EN COMPRESSION

1

2019
2020



$\underline{u}_d = -U_d \underline{e}_3$

formulation forte

équilibre de Cauchy.

$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underbrace{\underline{f_v}}_{\text{négligée}/\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}})} = \underline{0}$$

$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0} \qquad \sigma_{ij,j}\underline{e}_i = \underline{0}$

loi de comportement (matériau élastique linéaire homogène, isotrope).

loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{Id}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$

inversée : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{Id}}$

avec HPP : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\xi_{i,j} + \xi_{j,i})$

et compatibilité (Beltrami) vérifiée $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial^2 \varepsilon_{jq}}{\partial x_k \partial x_r} = 0$ ⚠ défo (e?)

(ou $\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{kj,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{lj,ik}$ $i \neq j \quad l \neq k$)

conditions aux limites

- sur face latérale Γ_ℓ libre d'efforts.

$$\underline{\underline{\sigma}}(r=R)\cdot\underline{e}_r = \underline{0}$$

- contact sans frottement avec le bâti fixe

$$\underline{\xi}\cdot(-\underline{e}_3) = 0 \Rightarrow \boxed{\xi_3(x_3=0) = 0}$$

$\underline{\sigma_T} = \underline{0} = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} - \sigma_N\underline{n}$ avec $\sigma_N = \underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\sigma_{13} \\ -\sigma_{23} \\ -\sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\sigma_{13}(x_3=0) \\ &= \sigma_{23}(x_3=0) \\ &= 0 \end{aligned}}$$

• contact sans frottement avec la paroi mobile (2)

$$\underline{\xi} \cdot \underline{e_3} = \underline{u_d} \Rightarrow \boxed{\xi_3(x_3 = e) = -U_d}$$

$$\underline{\sigma_T} = \underline{0} \qquad \underline{\sigma_T} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e_3} - \sigma_{33}\underline{e_3} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{13}(x_3 = e) = \sigma_{23}(x_3 = e) = 0}$$

Problème régulier car on connaît en tout point de la frontière 3 composantes complémentaires de déplacement ou d'effort.

On a des CL en déplacement et effort $\Rightarrow$ pas de type 2

En aucun endroit de la frontière on ne connaît les 3 composantes de dép. de 3 pt non alignés $\Rightarrow$ pas type 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{type 3}}$

$\mathcal{U}ad = \{ \underline{v}$ réguliers sur Ω et en particuliers continus

$$[\![\underline{v}]\!] = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i, \text{ tels que :}$$

Γ_i surface interne à Ω

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3(x_3 = 0) = 0 \\ v_3(x_3 = e) = -U_d \end{array} \right\}$$

$\Sigma ad = \{ \underline{\underline{\tau}}$ réguliers sur Ω, symétriques et tels que

$$[\![\underline{\underline{\tau}}]\!] \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i$$

$$\underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\tau}}) = \underline{0} \quad \forall x \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\tau}}(r = R) \cdot \underline{e_r} = \underline{0} \quad \sigma_{13}(x_3 = 0) = \sigma_{23}(x_3 = 0) = \sigma_{13}(x_3 = e) = \sigma_{23}(x_3 = e) = 0 \}$$

σ_0 cst $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}$ régulier sur Ω et sym + $[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \cdot \underline{n} = \underline{0}$

$$\underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{0,3}\, \underline{e_3} = \underline{0} \Rightarrow \text{ok}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \text{ok}$$

+ termes hors diagonaux tous nuls $\Rightarrow$ ok

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\sigma}} \in \Sigma ad}$$

(+ Lax Milgram $\to \underline{\underline{\sigma}}$ champ de solution unique du pb)

3) Par la loi de comportement

caractéristique d'une sollicitation unidirectionnelle selon $\underline{e_3}$ (traction/compression selon signe de α) (3)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{Id}}$$

$\alpha = \sigma/E = \text{cte}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\nu/E\,\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E\,\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/E \end{bmatrix}_{(\underline{e_1},\underline{e_2},\underline{e_3})} = \begin{bmatrix} -\nu\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$\exists$ un champ de déplacement qui en dérive car comme les termes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont constants les équations de Beltrami sont automatiquement vérifiées (dérivées secondes nulles)

Pour trouver $\underline{\xi}$ on intègre :

$$\begin{cases} \xi_{1,1} = -\nu\alpha \\ \xi_{2,2} = -\nu\alpha \\ \xi_{3,3} = \alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\nu\alpha x_1 + f_1(x_2,x_3) \\ \xi_2 = -\nu\alpha x_2 + f_2(x_1,x_3) \\ \xi_3 = \alpha x_3 + f_3(x_1,x_2) \end{cases}$$

$$(\Delta)\begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \xi_{1,2} + \xi_{2,1} = 0 \\ 2\varepsilon_{13} = \xi_{1,3} + \xi_{3,1} = 0 \\ 2\varepsilon_{23} = \xi_{2,3} + \xi_{3,2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f_{1,2}(x_2,x_3) + f_{2,1}(x_2,x_3) = 0 & (1) \\ f_{1,3}(x_2,x_3) + f_{3,1}(x_1,x_2) = 0 & (2) \\ f_{2,3}(x_1,x_3) + f_{3,2}(x_1,x_2) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1)_{,2} \text{ et } (2)_{,3} \Rightarrow f_{1,22} = 0 = f_{1,33}$$

$$\Rightarrow f_1 = a_1 x_2 x_3 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + C_1$$

De manière analogue :

$$f_2 = a_2 x_1 x_3 + b_{21} x_1 + b_{23} x_3 + C_2$$

$$f_3 = a_3 x_2 x_1 + b_{32} x_2 + b_{31} x_1 + C_3$$

À remplacer dans (Δ)

$$\begin{cases} a_1 x_3 + b_{12} + a_2 x_3 + b_{21} = 0 \\ a_1 x_2 + b_{13} + a_3 x_2 + b_{31} = 0 \\ a_2 x_1 + b_{23} + a_3 x_1 + b_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+a_2)x_1 + (b_{12}+b_{21}) = 0 \\ (a_1+a_3)x_2 + (b_{13}+b_{31}) = 0 \\ (a_2+a_3)x_1 + (b_{23}+b_{32}) = 0 \end{cases}$$ à vérifier $\forall \underline{x} \in \Omega$.

1ers termes $\longrightarrow$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2èmes termes $\longrightarrow$ $\underline{\underline{B}}$ antisymétrique avec $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{bmatrix}$

$\exists\, \underline{B} = \begin{pmatrix} b_{32} \\ b_{13} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ tel que $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{x} = \underline{B} \wedge \underline{x}$ $\qquad \begin{cases} b_{23} = -b_{32} \\ b_{31} = -b_{13} \\ b_{12} = -b_{21} \end{cases}$

- Le champ de déplacement est donc de la forme :

$$\underline{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\nu\alpha x_1 \\ -\nu\alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{x} \\ \text{déformation pure}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{13}x_3 - b_{21}x_2 \\ b_{21}x_1 - b_{32}x_3 \\ b_{32}x_2 - b_{13}x_1 \end{pmatrix}}_{\substack{\underline{B}\wedge\underline{x} \\ = \underline{\underline{B}}\,\underline{x} \\ \text{rotation} \\ (\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\omega}})}} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\underline{C} \\ \text{translation}}} \quad \text{(HPP)}$$

Rq : $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{x} + \underline{C}$ mouvement de corps rigide

Pour identifier les constantes indéterminées on utilise les CL en déplacement

- $\xi_3(x_3 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_{32}x_2 - b_{13}x_1 + C_3 = 0 \\ \text{à vérifier } \forall x_1 \text{ et } \forall x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ nécessairement $b_{32} = b_{13} = C_3 = 0$

- $\xi_3(x_3 = e) = -U_d \quad \Rightarrow \quad \alpha e = \dfrac{\sigma_0}{E} e = -U_d \quad \Rightarrow \boxed{\sigma_0 = \dfrac{-U_d E}{e} < 0 \text{ compression}}$

Au final :

$$\boxed{\underline{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\nu\alpha x_1 \\ -\nu\alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{déformation} \\ \text{pure} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{x}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -b_{21}x_2 \\ b_{21}x_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotation} \\ \text{autour de } \underline{e_3} \\ \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{21} & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{translation} \\ \text{dans } (\underline{e_1}, \underline{e_2})}}}$$

$\underline{\xi}$ non unique, défini à 1 rotation autour de $\underline{e_3}$ et 1 translation dans $(\underline{e_1}, \underline{e_2})$ près

Si on impose déplacement et rotationnel nuls en $O(0,0,0)$.

- $\underline{\xi}(0,0,0) = \underline{0} + \underline{0} + \underline{C} = 0$

$\Rightarrow$ nécessairement $C_1 = C_2 = 0$

On bloque la translation de corps rigide.

- $\underline{B} = \frac{1}{2}\,\underline{rot}(\underline{\xi}) = \underline{0}\ (=\underline{\omega})$ tel que $\underline{B} \wedge \underline{x} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{x}$

$\Rightarrow b_{12} = -b_{21} = 0$

Le champ de déplacement solution est alors parfaitement identifié. Il devient solution unique du problème. Il caractérise une transformation de déformation pure (ici compression unidirectionnelle)

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} -\nu\alpha x_1 \\ -\nu\alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{x}$$

Avec les données du pb :

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{-U_d}{e}$$

$$\boxed{\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\nu U_d}{e} x_1 \\ \dfrac{\nu U_d}{e} x_2 \\ -\dfrac{U_d}{e} x_3 \end{pmatrix}}$$

$\xi_1 = \xi_2$ et $\xi_1 > 0$

$\xi_3 < 0$

En conclusion faire schéma de résolution d'un pb en dep. / contrainte