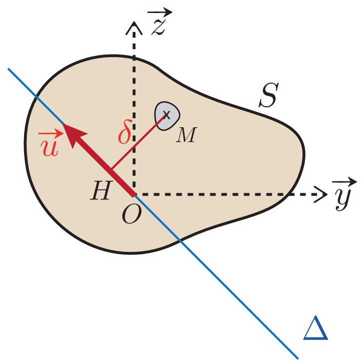
Moments et produits quadratiques d'une surface plane

Les moments quadratiques permettent de calculer les éléments du **tenseur d'inertie** d'un solide toujours **dans un repère donné**.

$\Longrightarrow$ choix judicieux du repère pour nous faciliter les calculs.

Le **moment quadratique** est souvent appelé moment d'inertie géométrique mais **ne rend compte que de la géométrie d'une section et non de sa masse** (idem matrice d'inertie en mécanique du point mais avec un solide plan et une masse surfacique unitaire).

Moment quadratique par rapport à un axe



Le **moment quadratique** de la surface S par rapport à un axe Δ est donné par :

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 \, dS = \iint_S \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2 dS$$

or $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2 = \left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right\|^2 = \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right) . \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \vec{u} . \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right]$

donc $\boxed{I_\Delta = \vec{u} . \mathfrak{I}(O,S)(\vec{u})}$

où l'application qui $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre

$$\boxed{\mathfrak{I}(O,S)(\vec{u}) = \iint_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] \, dS}$$

est **linéaire et symétrique**.

Démo :

Linéarité : $\mathfrak{J}(O,S)(\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}) = \lambda_1\, \mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) + \lambda_2\, \mathfrak{J}(O,S)(\vec{v})$

d'après la linéarité de l'intégrale et du produit vectoriel

Symétrie :

$$\begin{aligned}\vec{v}\,.\,\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) &= \vec{v}\,.\iint\limits_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})\right]\, dS \\ &= \iint\limits_S \left[\left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}\right).\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right]\, dS \\ &= \vec{u}\,.\,\mathfrak{J}(O,S)(\vec{v})\end{aligned}$$

permutation de . et $\wedge$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \quad I_\Delta = \vec{u}\,.\,\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) = \iint\limits_S \left[(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})\right]^2\, dS \geqslant 0$$

est donc une **forme quadratique définie positive**

On pose $\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) = \mathbf{I}(O,S)\,\vec{u}$ avec $\mathbf{I}(O,S)$ le **tenseur d'inertie en O**

$$\Longrightarrow \quad \boxed{I_\Delta = \vec{u}\,.\,\mathbf{I}(O,S)\,\vec{u}}$$

$$\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) = \iint\limits_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})\right]\, dS \;=\; \mathbf{I}(O,S)\,\vec{u}$$

$\overrightarrow{OM} = y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$ et $\vec{u} = u_2\,\vec{y} + u_3\,\vec{z}$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \begin{pmatrix} z^2 & -yz \\ -zy & y^2 \end{pmatrix}_{(\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{(\vec{y},\vec{z})}$$

Le **tenseur d'inertie en O** de la section (S) est : $\mathbf{I}(O,S) = \begin{pmatrix} I_{Oy} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oyz} & I_{Oz} \end{pmatrix}_{(\vec{y},\vec{z})}$

$$I_{Oy} = \iint\limits_S z^2\, dS \quad \text{et} \quad I_{Oz} = \iint\limits_S y^2\, dS \qquad ([m^4]; \quad >0)$$

moments quadratiques de l'aire S par rapport aux axes $(O\,\vec{y})$ et $(O\,\vec{z})$

$$I_{Oyz} = \iint\limits_S yz\, dS \qquad ([m^4]; \quad >0,\ <0 \text{ ou } =0)$$

produit quadratique de l'aire S par rapport au plan $(O\,\vec{y}\,\vec{z})$

Moment quadratique **caractéristique géométrique importante** d'une section car il intervient dans les calculs de la résistance à la flexion ou la détermination des flèches.

$\Longrightarrow$ donner à une aire S une géométrie telle que le moment quadratique par rapport à l'axe considéré soit **optimal**.

$\mathfrak{I}(O,S)$ est un opérateur symétrique $\Longrightarrow$ $\mathbf{I}(O,S)$ est une matrice **symétrique** dans toute base orthonormée.

Ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux donc la matrice est **diagonalisable** en base orthonormée.
Cette base est appelée **base principale d'inertie** du solide S :

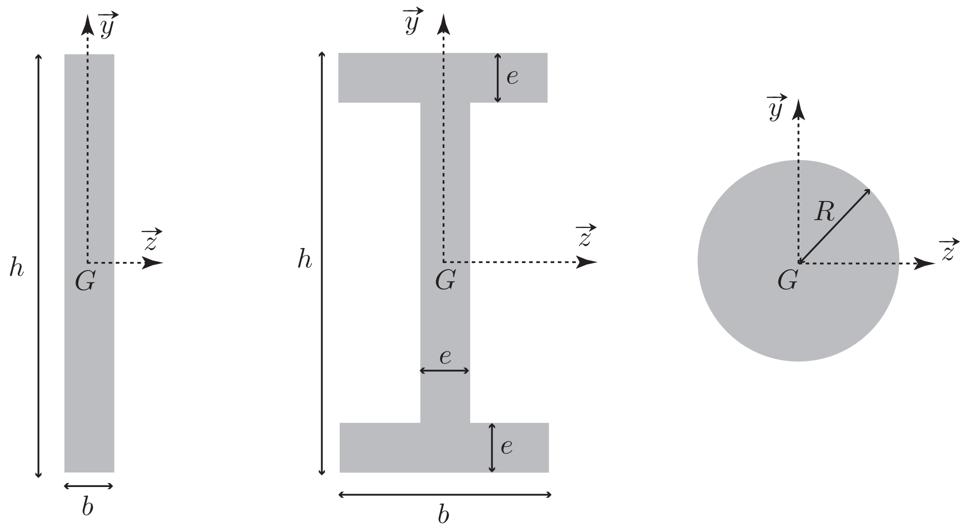
$$\boxed{\mathbf{I}(O,S) = \begin{pmatrix} I_{OY} & 0 \\ 0 & I_{OZ} \end{pmatrix}_{(\vec{Y},\vec{Z})}}$$

où les axes $(O\vec{Y})$ et $(O\vec{Z})$ sont les **axes principaux d'inertie**

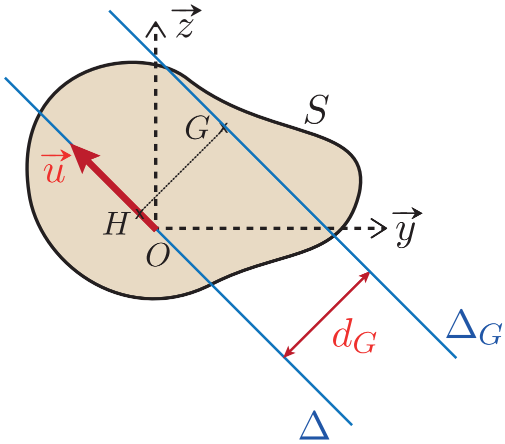
I_{OY} et I_{OZ} les **moments principaux d'inertie**

Dans la plupart des cas $(\vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{Y}, \vec{Z})$ coïncident.

Il suffit que l'un des axes soit axe de symétrie alors le produit d'inertie $I_{Oyz} = 0$.



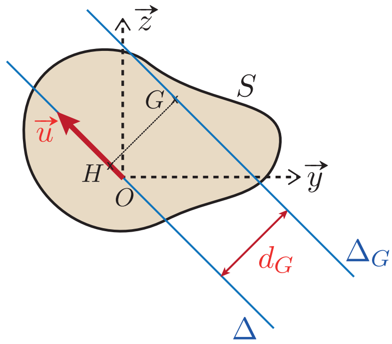
Théorème de Huygens



Le moment quadratique d'une surface S par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment quadratique de S exprimé par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ passant par G son centre de gravité et du produit de la surface par le carré de la distance entre Δ_G et Δ :

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta_G} + (d_G)^2\ S}$$

Démo :



$$\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) = \iint_S \left[\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})\right]\,dS$$

$$= \iint_S \left[(\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{OM}\right)\right]\,dS$$

$$= \iint_S \left[\vec{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{OM}\right)\right]\,dS + \iint_S \left[\vec{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{OM}\right)\right]\,dS$$

$$= \vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \left(\iint_S \vec{OM}\,dS\right) + \left(\iint_S \vec{GM}\,dS\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{OG}\right)\,dS + \iint_S \left[\vec{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{GM}\right)\right]\,dS$$

$$= \vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge S\ \vec{OG} + \vec{0} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{OG}\right)\,dS + \iint_S \left[\vec{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{GM}\right)\right]\,dS$$

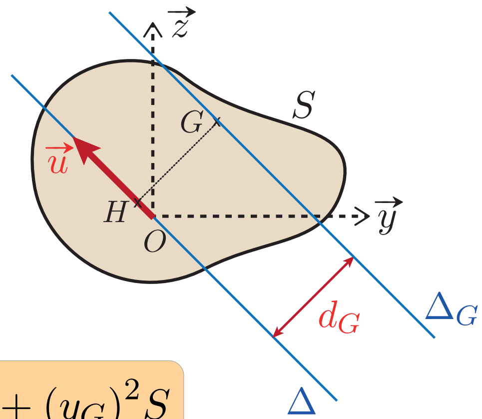
$$= \mathfrak{J}(G,S)(\vec{u}) + S\left(\vec{OG} \wedge \vec{u} \wedge \vec{OG}\right)$$

$$I_\Delta = \vec{u}.\mathfrak{J}(O,S)(\vec{u}) = \vec{u}.\mathfrak{J}(G,S)(\vec{u}) + S\vec{u}.\left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$$

$$I_{\Delta_G} = \vec{u}.\mathfrak{J}(G,S)(\vec{u})$$

$$\vec{u}.\left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) = \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right).\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) = \left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{HG}\right\|^2 = (d_G)^2$$

$$\Longrightarrow \quad I_\Delta = I_{\Delta_G} + (d_G)^2\, S \qquad \text{cqfd}$$

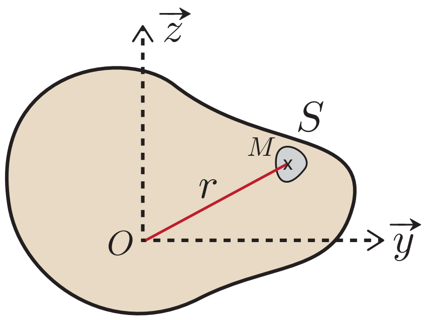


En particulier :

$$\boxed{I_{Oy} = I_{Gy} + (z_G)^2 S} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{Oz} = I_{Gz} + (y_G)^2 S}$$

Moment quadratique polaire ou moment de giration

Soit $M(y,z)$ un point de S distant de r de l'origine et dS un élément de surface entourant M.



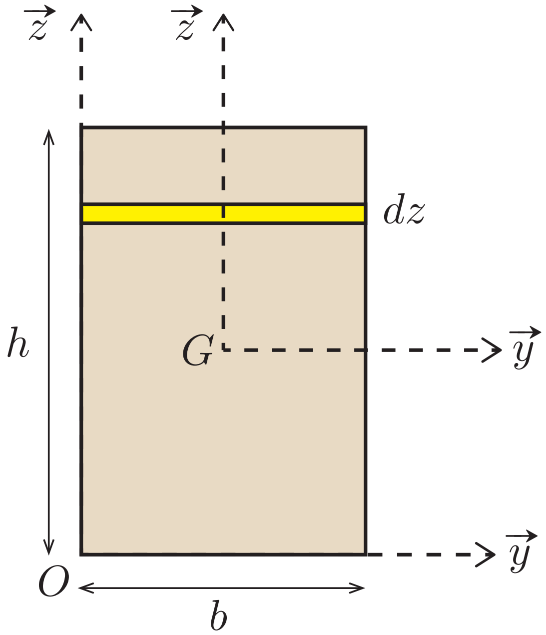
Le **moment quadratique polaire** I_O de la surface par rapport au point O de son plan est défini par :

$$\boxed{I_O = \iint_S r^2\, dS \qquad ([m^4]; \quad > 0)}$$

Remarque : $$I_O = \iint_S r^2\, dS = \iint_S (y^2 + z^2)\, dS = I_{Oz} + I_{Oy}$$

Exple de calcul des caractéristiques géométriques :

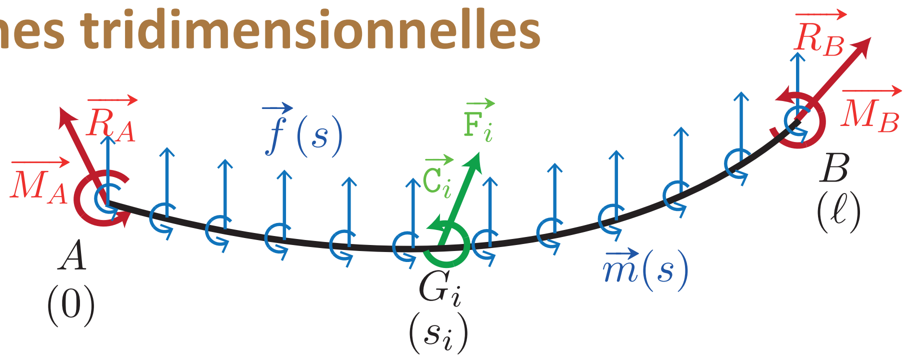
Soit une surface S rectangulaire de largeur b et de hauteur h.
$\mathcal{R}(G; \vec{y}, \vec{z})$ est le repère central principal.



Calculer les caractéristiques géométriques de la section droite en O et G

Poutres curvilignes tridimensionnelles

Efforts extérieurs :



Efforts aux extrémités :

en $s = 0$ $\quad \left\{\mathcal{C}_A\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A$ $\qquad$ en $s = \ell$ $\quad \left\{\mathcal{C}_B\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_B \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}_B$

Efforts concentrés aux points G_i :

en $(s_i)_{1\leqslant i \leqslant N}$ $\qquad 0 < s_1 < \cdots < s_N < \ell$ $\qquad \left\{\mathcal{C}_{G_i}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_i \\ \vec{C}_i \end{matrix} \right\}_{G_i}$

Efforts répartis :

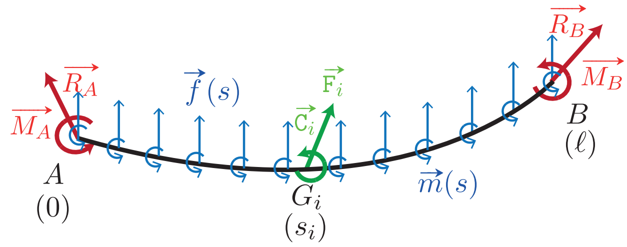
densité linéique efforts normaux

densité linéique de forces : $\vec{f}(s) = p(s)\vec{t}(s) + \vec{q}(s)$ avec $\vec{q}(s) = q_n(s)\vec{n}(s) + q_b(s)\vec{b}(s)$

densité linéique efforts tranchants

densité linéique de moments : $\vec{m}(s)$

Equations d'équilibre global :



Pour que la fibre moyenne $\mathscr{C}$ soit en équilibre sous l'effet des efforts extérieurs décrits précédemment, **il faut mais il ne suffit pas** que le **torseur résultant des efforts extérieurs soit nul**.

Equation de la résultante :

$$\overrightarrow{R_A} + \int_0^\ell \vec{f}(s)\, ds + \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} + \overrightarrow{R_B} = \vec{0}$$

Equation du moment résultant en O :

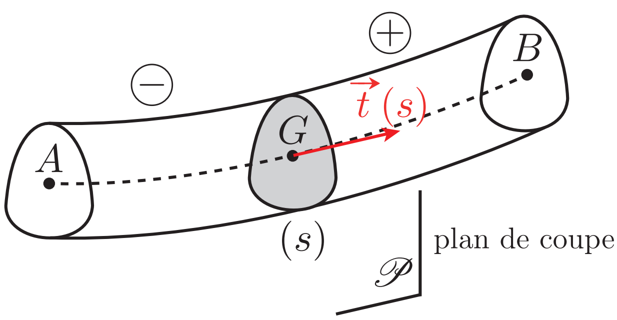
$$\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_A} + \int_0^\ell \vec{m}(s)\, ds + \int_0^\ell \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{f}(s)\, ds + \sum_{i=1}^{N} \vec{C_i} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OG_i} \wedge \vec{F_i} + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B} = \vec{0}$$

Efforts intérieurs :

On considère une poutre, que l'on oriente du point A vers le point B imposant la direction du vecteur tangent $\vec{t}(s)$.

On **sépare artificiellement** au point G d'abscisse s la poutre en deux parties :

⊖ pour la partie gauche et ⊕ pour la partie droite.

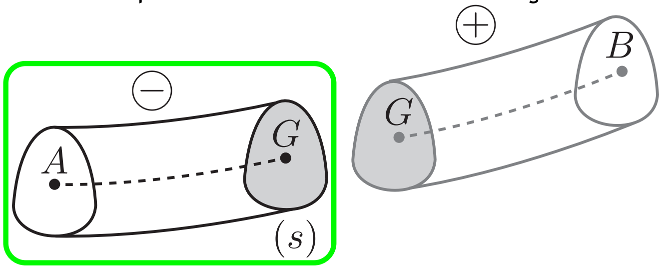


Pour un milieu déformable, **il ne suffit pas d'écrire les équations d'équilibre global pour être assuré qu'il est en équilibre**.

Il faut aussi écrire que chacune de ses parties sont en équilibre.

$\Longrightarrow$ Introduction de la notion d'**efforts intérieurs** qui représentent les **efforts de cohésion** (notion de contrainte) mis en oeuvre par le milieu pour maintenir son "intégrité".

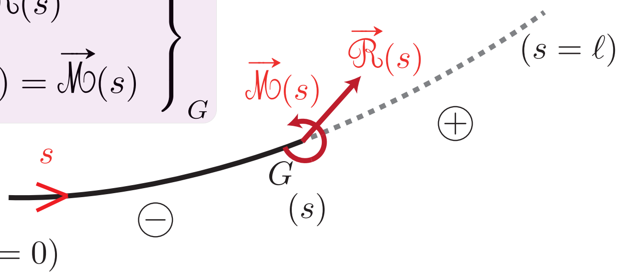
A partir de la coupure, on peut **isoler** un des 2 tronçons de la poutre (ici ⊖) :



Ce tronçon est soumis à une partie des actions mécaniques extérieures $\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\ominus}\right\}$ **et aussi** aux actions de la partie ⊕ sur la partie ⊖ à travers de la section (S).

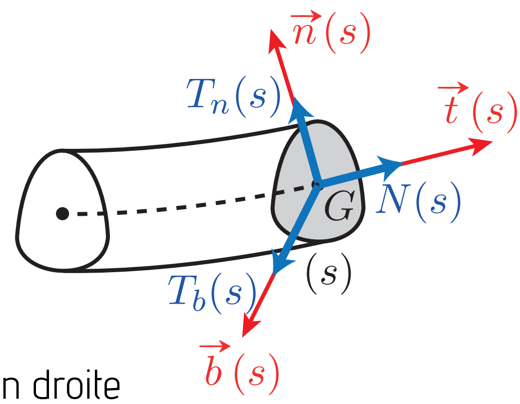
Par définition (convention) le torseur des actions mécaniques de ⊕ sur ⊖ est appelé **torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion**.

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_G \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathcal{T}_{\oplus\to\ominus}\right\}_G = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathcal{R}}(s)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(s) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(s)\end{array}\right\}_G$$



Cette liaison (les efforts et les moments qu'elle transmet) assure la cohésion des éléments et de la poutre.

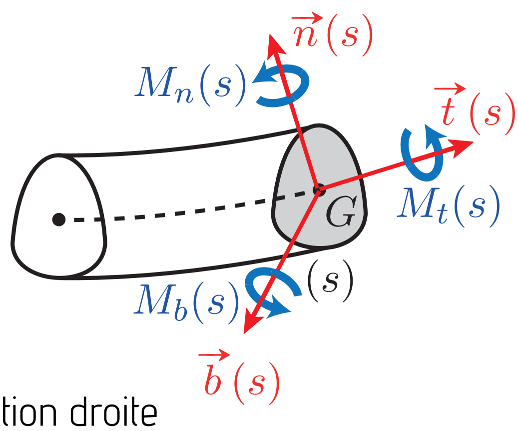
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{R}}(s) = N(s)\,\vec{t}(s) + \vec{T}(s)}$$



- $N(s)$: l'**effort normal** (suivant $\vec{t}(s)$)
  $[N > 0$ traction; $N < 0$ compression$]$

- $\vec{T}(s) = T_n(s)\,\vec{n}(s) + T_b(s)\,\vec{b}(s)$
  les **efforts tranchants** dans le plan de la section droite

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}(s) = M_t(s)\,\vec{t}(s) + \overrightarrow{M_f}(s)}$$

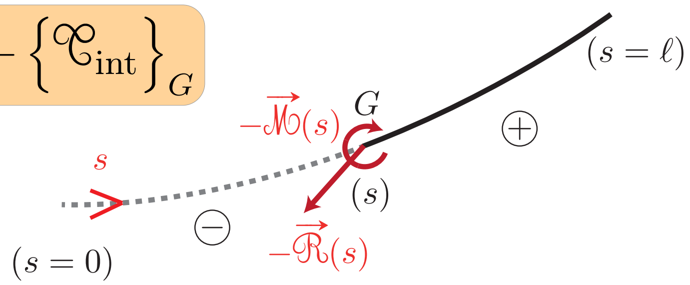


- $M_t(s)$: le **moment de torsion** (autour de $\vec{t}(s)$)

- $\overrightarrow{M_f}(s) = M_n(s)\,\vec{n}(s) + M_b(s)\,\vec{b}(s)$
  les **moments fléchissants** dans le plan de la section droite

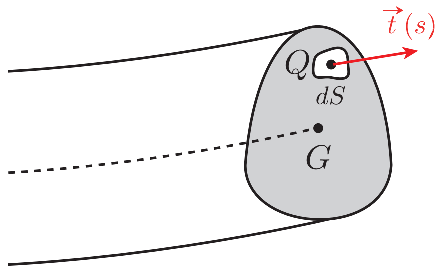
Si le point de coupure n'est pas soumis à des efforts extérieurs ponctuels, d'après le **principe d'action-réaction** :

$$\boxed{\left\{\mathcal{C}_{\ominus\to\oplus}\right\}_G = -\left\{\mathcal{C}_{\oplus\to\ominus}\right\}_G = -\left\{\mathcal{C}_{\text{int}}\right\}_G}$$

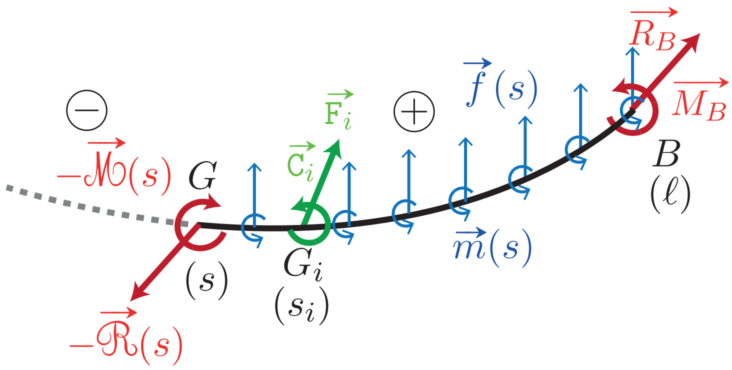


Lien entre les éléments du torseur de cohésion et les contraintes (voir MMC) :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{R}}(s) &= \iint_S \underbrace{\left(\overline{\overline{\sigma}}(Q).\vec{t}\,\right)}_{\text{vecteur contrainte}}\, dS \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(s) &= \iint_S \overrightarrow{GQ} \wedge \left(\overline{\overline{\sigma}}(Q).\vec{t}\,\right)\, dS\end{aligned}}$$

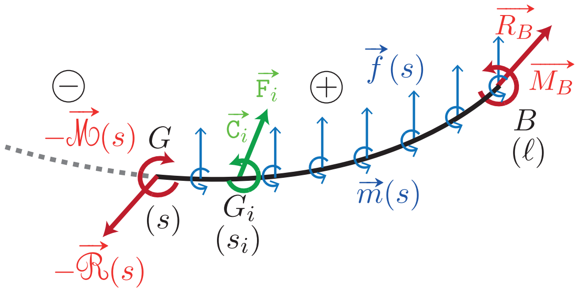


Equations d'équilibre du tronçon $]s,\ell[\quad (0 < s < \ell;\ s \neq s_i)$



$$\left\{\mathcal{C}_{\text{ext}\to\oplus}\right\}_G + \underbrace{\left\{\mathcal{C}_{\ominus\to\oplus}\right\}_G}_{\substack{||\\ -\left\{\mathcal{C}_{\text{int}}\right\}_G}} = \left\{0\right\}_G \quad\Longrightarrow\quad \left\{\mathcal{C}_{\text{int}}\right\}_G = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathcal{R}}(s)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(s)\end{array}\right\}_G = \left\{\mathcal{C}_{\text{ext}\to\oplus}\right\}_G$$

soit $$\left\{\mathcal{C}_{\text{int}}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathcal{R}}(s)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(s) + \overrightarrow{OG}(s)\wedge\overrightarrow{\mathcal{R}}(s)\end{array}\right\}_O$$



$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}(s) \\ \vec{\mathcal{M}}(s) + \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \end{array} \right\}_O = \left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\oplus}\right\}_O$$

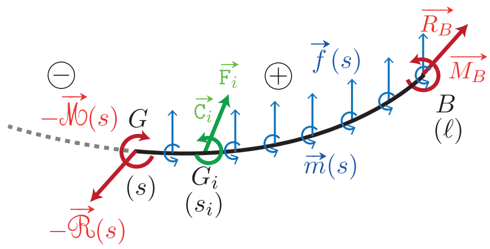
Théorème de la résultante :

$$\vec{\mathcal{R}}(s) = \int_s^\ell \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{F}_i + \overrightarrow{R_B} \qquad \text{(EQ1)}$$

Théorème du moment en O :

$$\vec{\mathcal{M}}(s) + \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \qquad \text{(EQ2)}$$
$$= \int_s^\ell \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_s^\ell \overrightarrow{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{C}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \overrightarrow{OG_i} \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B}$$

$$\vec{\mathcal{R}}(s) = \int_s^\ell \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{F}_i + \overrightarrow{R_B} \qquad \text{(EQ1)}$$



$$\vec{\mathcal{M}}(s) + \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s)$$
$$= \int_s^\ell \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_s^\ell \overrightarrow{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{C}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \overrightarrow{OG_i} \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B} \qquad \text{(EQ2)}$$

Conditions aux extrémités :

$$\lim_{s\to\ell^-} \vec{\mathcal{R}}(s) = \lim_{s\to\ell^-} \left[\int_s^\ell \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{F}_i + \overrightarrow{R_B} \right] = \overrightarrow{R_B} \qquad (\star)$$

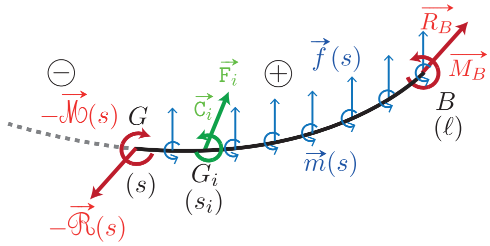
$$\lim_{s\to\ell^-} \left[\vec{\mathcal{M}}(s) + \overrightarrow{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \right]$$
$$= \lim_{s\to\ell^-} \left[\int_s^\ell \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_s^\ell \overrightarrow{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \vec{C}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ s_i > s}}^{N} \overrightarrow{OG_i} \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B} \right]$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}(\ell) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}(\ell) \overset{(\star)}{=} \vec{\mathcal{M}}(\ell) + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B}$$

au point B (extrémité droite $s = \ell$)

$$\vec{\mathcal{R}}(\ell) = \lim_{s\to\ell^-} \vec{\mathcal{R}}(s) = \overrightarrow{R_B}$$
$$\vec{\mathcal{M}}(\ell) = \lim_{s\to\ell^-} \vec{\mathcal{M}}(s) = \overrightarrow{M_B}$$

$$\vec{\mathcal{R}}(s) = \int_s^\ell \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{R_B} \quad \text{(EQ1)}$$



$$\vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s)$$
$$= \int_s^\ell \vec{m}(\xi)\,d\xi + \int_s^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{\mathtt{C}}_i + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{OG_i} \wedge \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{M_B} + \vec{OB} \wedge \vec{R_B} \quad \text{(EQ2)}$$

Conditions aux extrémités :

$$\lim_{s\to 0^+} \vec{\mathcal{R}}(s) = \lim_{s\to 0^+} \left[\int_s^\ell \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{R_B} \right] = \int_0^\ell \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{R_B} = -\vec{R_A} \qquad (\star\star)$$

$$\lim_{s\to 0^+} \left[\vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) \right]$$
$$= \int_0^\ell \vec{m}(\xi)\,d\xi + \int_0^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathtt{C}}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{OG_i} \wedge \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{M_B} + \vec{OB} \wedge \vec{R_B}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}(0) + \vec{OA} \wedge \vec{\mathcal{R}}(0) \overset{(\star\star)}{=} \vec{\mathcal{M}}(0) + \vec{OA} \wedge (-\vec{R_A}) = -\vec{M_A} - \vec{OA} \wedge \vec{R_A}$$

au point A (extrémité gauche $s = 0$)
$$\vec{\mathcal{R}}(0) = \lim_{s\to 0^+} \vec{\mathcal{R}}(s) = -\vec{R_A}$$
$$\vec{\mathcal{M}}(0) = \lim_{s\to 0^+} \vec{\mathcal{M}}(s) = -\vec{M_A}$$

$$\vec{\mathcal{R}}(s) = \int_s^\ell \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{R_B} \quad \text{(EQ1)}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s)$$
$$= \int_s^\ell \vec{m}(\xi)\,d\xi + \int_s^\ell \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\,d\xi + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{\mathtt{C}}_i + \sum_{\substack{i=1\\ s_i>s}}^{N} \vec{OG_i} \wedge \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{M_B} + \vec{OB} \wedge \vec{R_B} \quad \text{(EQ2)}$$

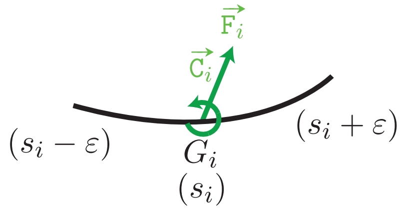
Equations d'équilibre locales: pour $s \neq s_i$

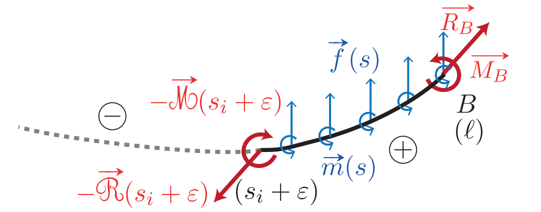
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\text{(EQ1)} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{R}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{f}(s) = \vec{0}}$$ équilibre local des forces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\text{(EQ2)} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}(s)}{\mathrm{d}s} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{OG}(s)}{\mathrm{d}s}}_{\vec{t}(s)} \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) + \vec{OG}(s) \wedge \overbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{R}}(s)}{\mathrm{d}s}}^{-\vec{f}(s)}$$
$$= -\vec{m}(s) - \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s)$$

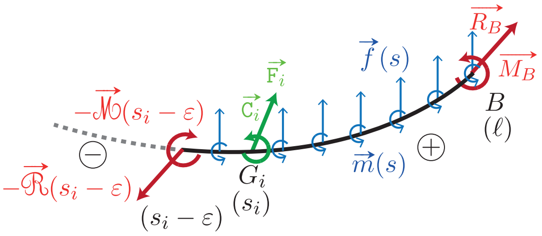
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s) + \vec{m}(s) = \vec{0}}$$ équilibre local des moments

Conditions de saut: pour $s = s_i$





$$\vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon) = \int_{s_i+\varepsilon}^{\ell} \vec{f}(\xi)\, d\xi + \vec{R}_B$$



$$\vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon) = \int_{s_i-\varepsilon}^{\ell} \vec{f}(\xi)\, d\xi + \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{R}_B$$

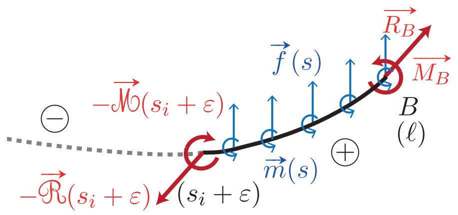
$$\Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon) - \vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon) = \int_{s_i+\varepsilon}^{s_i-\varepsilon} \vec{f}(\xi)\, d\xi - \vec{\mathtt{F}}_i$$

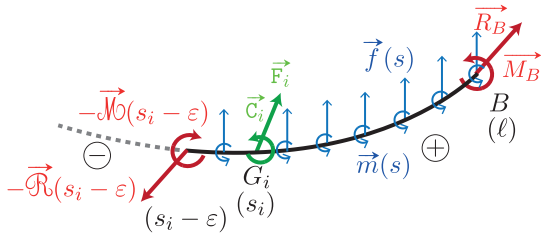
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon) - \vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon)\right] = \vec{\mathcal{R}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{R}}(s_i^-) = \left[\!\left[\vec{\mathcal{R}}\right]\!\right](s_i)$$

or $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{s_i+\varepsilon}^{s_i-\varepsilon} \vec{f}(\xi)\, d\xi = \vec{0}$ donc $\boxed{\left[\!\left[\vec{\mathcal{R}}\right]\!\right](s_i) + \vec{\mathtt{F}}_i = \vec{0}}$

condition de saut pour forces

$$\vec{\mathcal{M}}(s_i+\varepsilon) + \vec{OG}(s_i+\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon)$$
$$= \int_{s_i+\varepsilon}^{\ell} \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_{s_i+\varepsilon}^{\ell} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B$$





$$\vec{\mathcal{M}}(s_i-\varepsilon) + \vec{OG}(s_i-\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon)$$
$$= \int_{s_i-\varepsilon}^{\ell} \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_{s_i-\varepsilon}^{\ell} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi + \vec{\mathtt{C}}_i + \vec{OG}_i \wedge \vec{\mathtt{F}}_i + \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{M}}(s_i+\varepsilon) - \vec{\mathcal{M}}(s_i-\varepsilon) + \vec{OG}(s_i+\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon) - \vec{OG}(s_i-\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon)$$
$$= \int_{s_i+\varepsilon}^{s_i-\varepsilon} \vec{m}(\xi)\, d\xi + \int_{s_i+\varepsilon}^{s_i-\varepsilon} \vec{OG}(\xi) \wedge \vec{f}(\xi)\, d\xi - \vec{\mathtt{C}}_i - \vec{OG}_i \wedge \vec{\mathtt{F}}_i$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\vec{\mathcal{M}}(s_i+\varepsilon) - \vec{\mathcal{M}}(s_i-\varepsilon)\right] = \vec{\mathcal{M}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{M}}(s_i^-) = \left[\!\left[\vec{\mathcal{M}}\right]\!\right](s_i)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\vec{OG}(s_i+\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i+\varepsilon) - \vec{OG}(s_i-\varepsilon) \wedge \vec{\mathcal{R}}(s_i-\varepsilon)\right]$$
$$= \vec{OG}(s_i) \wedge \left[\vec{\mathcal{R}}(s_i^+) - \vec{\mathcal{R}}(s_i^-)\right] = \vec{OG}_i \wedge \left[\!\left[\vec{\mathcal{R}}\right]\!\right](s_i) = -\vec{OG}_i \wedge \vec{\mathtt{F}}_i$$

donc $\boxed{\left[\!\left[\vec{\mathcal{M}}\right]\!\right](s_i) + \vec{\mathtt{C}}_i = \vec{0}}$ condition de saut pour moments

Equations d'équilibre locales: pour $s \neq s_i$

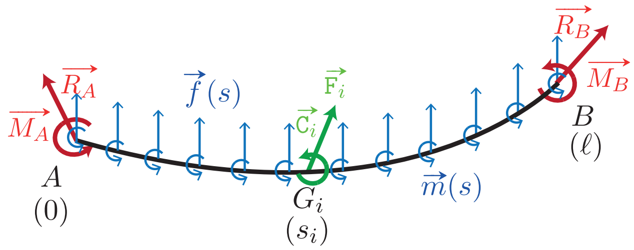
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{R}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}}(s)}{\mathrm{d}s} + \vec{t}(s) \wedge \overrightarrow{\mathscr{R}}(s) + \vec{m}(s) = \vec{0}$$

Conditions de saut: pour $s = s_i$

$$\left[\!\left[\overrightarrow{\mathscr{R}}\right]\!\right](s_i) + \vec{\mathtt{F}}_i = \vec{0}$$

$$\left[\!\left[\overrightarrow{\mathscr{M}}\right]\!\right](s_i) + \vec{\mathtt{C}}_i = \vec{0}$$



Conditions aux extrémités:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathscr{R}}(0) = -\overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(0) = -\overrightarrow{M_A} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathscr{R}}(\ell) = \overrightarrow{R_B} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(\ell) = \overrightarrow{M_B} \end{cases}$$