

# Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

## 2. Les équations de Navier-Stokes moyennées

Paola CINNELLA

[paola.cinnella@sorbonne-universite.fr](mailto:paola.cinnella@sorbonne-universite.fr)

## Finalité des approches RANS

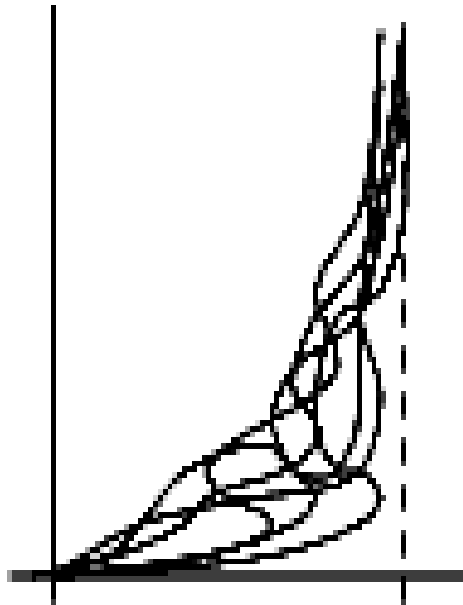
- Pour de nombreuses applications industrielles, il est inutile de connaître le détail des fluctuations turbulentes de réalisations particulières.
- L'objectif est de décrire certaines propriétés moyennes de l'écoulement, voire globales (intégrées)
  - Champs de vitesse ou de pression moyens
  - Distributions pariétales moyennes
  - Coefficients de performance aérodynamique
  - ...
- Une possibilité consiste à effectuer une DNS ou une LES de l'écoulement, puis calculer des moyennes
- Parfois il est possible de résoudre directement un système d'équations pour le champ moyen

## Historique

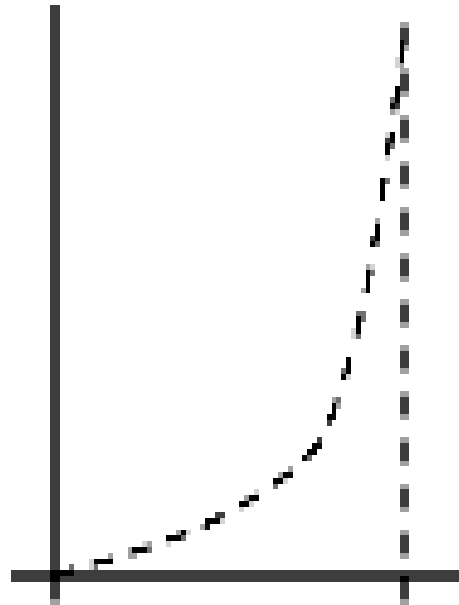
- Les équations de Navier-Stokes moyennées sont attribuées à Osborne Reynolds “On the dynamical theory of incompressible viscous fluids”, Philosophical Transaction of the Royal Society A 186, 123–164, 1895
- Toutefois une approche similaire est proposée par Joseph Boussinesq, « Essai sur la théorie des eaux courantes », Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXIII, No 1. Imprimerie Nationale, Paris, 1877.

# Description statistique d'un écoulement turbulent

Profils de vitesse instantanés



Profil de Vitesse moyen



# Equations moyennées à la Reynolds

- Equations pour le champ moyen
- Plusieurs définitions de moyenne possibles
  - Moyenne d'ensemble : la plus générale

$$\bar{f}_E(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{E,n}(\mathbf{x}, t)$$

Moyenne statistique sur N réalisations de l'écoulement → difficile à mettre en œuvre en pratique

- Moyenne spatiale : utilisée pour les écoulements homogènes (constants en espace)
- **Moyenne temporelle** : la plus utilisée pour les simulations numériques RANS → Bien adaptée à des écoulements statistiquement stationnaires

$$\bar{f}_T(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, t) dt$$

- Par la suite on ne considère que des moyennes temporelles

# Equations moyennées à la Reynolds

- Equations pour le champ moyen
- Plusieurs définitions de moyenne possibles
  - D'ensemble, spatiale, temporelle, de phase
  - La plus utilisée pour les simulations numériques RANS est la **moyenne temporelle**
    - Bien adaptée à des écoulements statistiquement stationnaires
- On décompose les grandeurs instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante

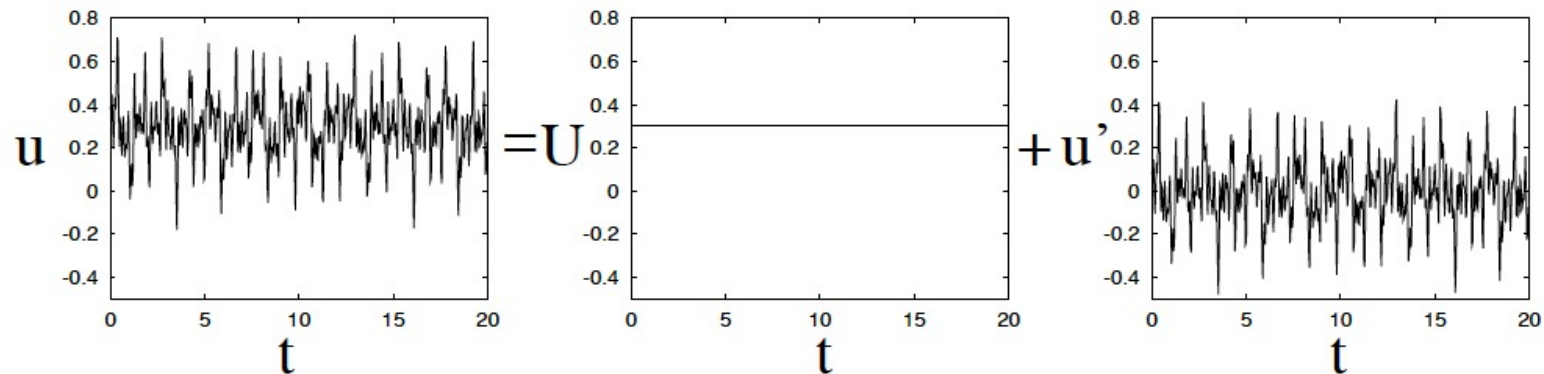
$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

- Propriétés des opérateurs de moyenne

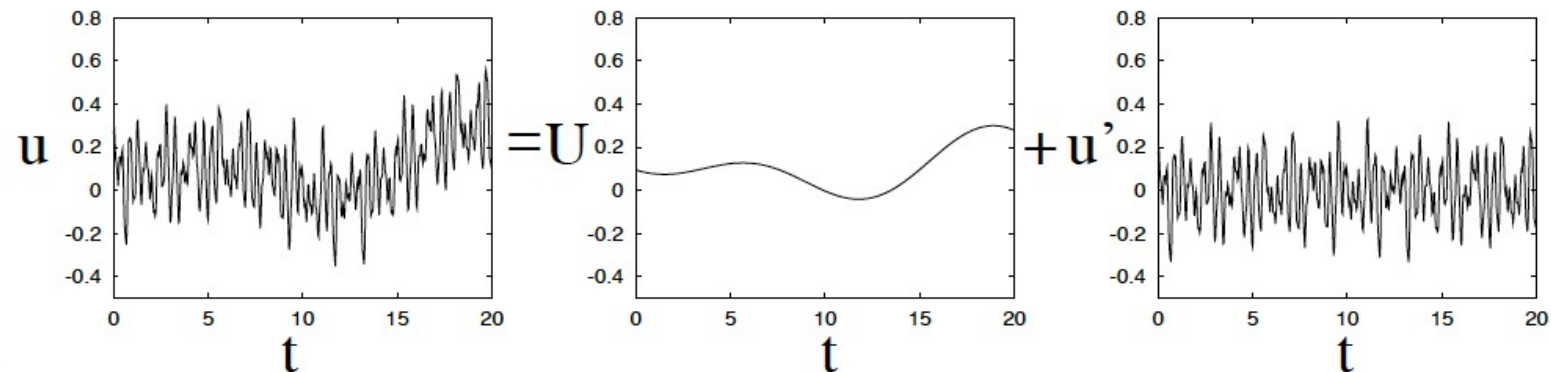
$$\overline{\phi'} = 0; \quad \overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'}; \quad \overline{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i}$$

# Exemples

- Décomposition en partie moyenne et fluctuante d'un signal statistiquement stationnaire

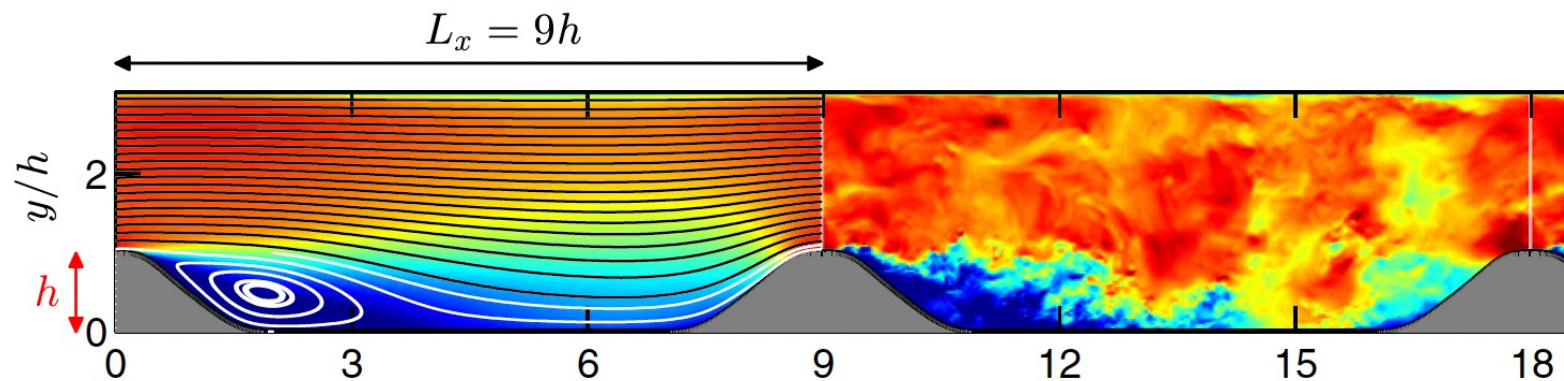


- Décomposition en partie moyenne et fluctuante d'un signal instationnaire

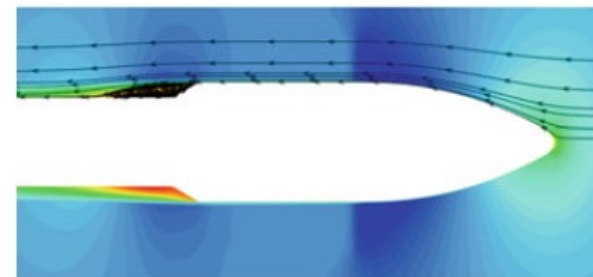
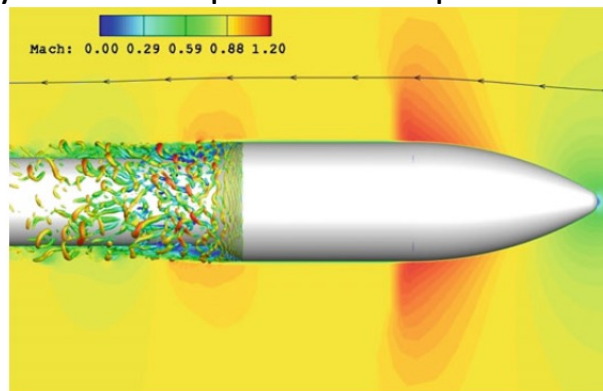


## Exemples

- Champ moyen et champ instantané pour l'écoulement dans un canal avec restrictions périodiques



- Champ moyen et champ instantané pour l'écoulement transsonique autour de Ariane 6





# Equations moyennées à la Reynolds (RANS)

- Prenons les équations de NS incompressibles
- On décompose vitesse et pression en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'; \quad p = \bar{p} + p'$$

- On injecte dans les équations de NS
- Après moyenne, on aboutit aux équations de Reynolds :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} + \tau_{ij}^R) \end{cases}$$

avec les tenseurs des contraintes visqueuses et des contraintes turbulentes (**tenseur de Reynolds**)

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right);$$
$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

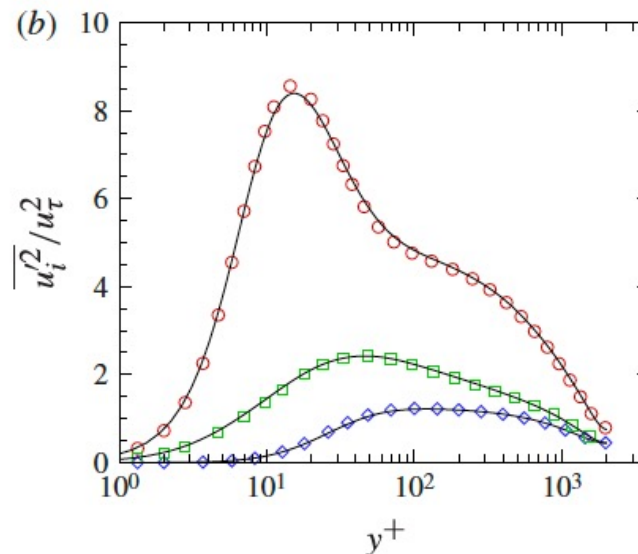
Système d'équations formellement similaire à celui de NS mais **ouvert**

# Propriétés du tenseur de Reynolds

- La quantité  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  a les dimensions d'une contrainte  $\rightarrow$  **contrainte de Reynolds**
- $\overline{u'_i u'_j}$  est un tenseur symétrique et semi-défini positif (**tenseur de corrélation**):

$$\det(\overline{u'_i u'_j}) \geq 0, \lambda_i \geq 0$$

- La quantité  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = -\frac{1}{2\rho} \text{tr}(\tau_{ij}^R) \geq 0$  est appelée **énergie cinétique turbulente**
- Les composantes normales de  $\tau_{ij}^R$  ne sont pas isotropes pour des écoulements de paroi :
  - Une estimation grossière montre que  $\overline{u'_1 u'_1} : \overline{u'_2 u'_2} : \overline{u'_3 u'_3} \approx 4 : 2 : 3$



Profils des tensions de Reynolds  
à travers un canal plan.

En rouge :  $\overline{u'_1 u'_1}$

En bleu :  $\overline{u'_2 u'_2}$

En vert :  $\overline{u'_3 u'_3}$

(From Bernardini et al., 2014)

# Tenseur d'anisotropie

- $\tau_{ij}^R$  peut être décomposé en une partie isotrope et une partie déviatrice :

$$\tau_{ij}^R = -\rho \left( \frac{2}{3} k \delta_{ij} + a_{ij} \right)$$

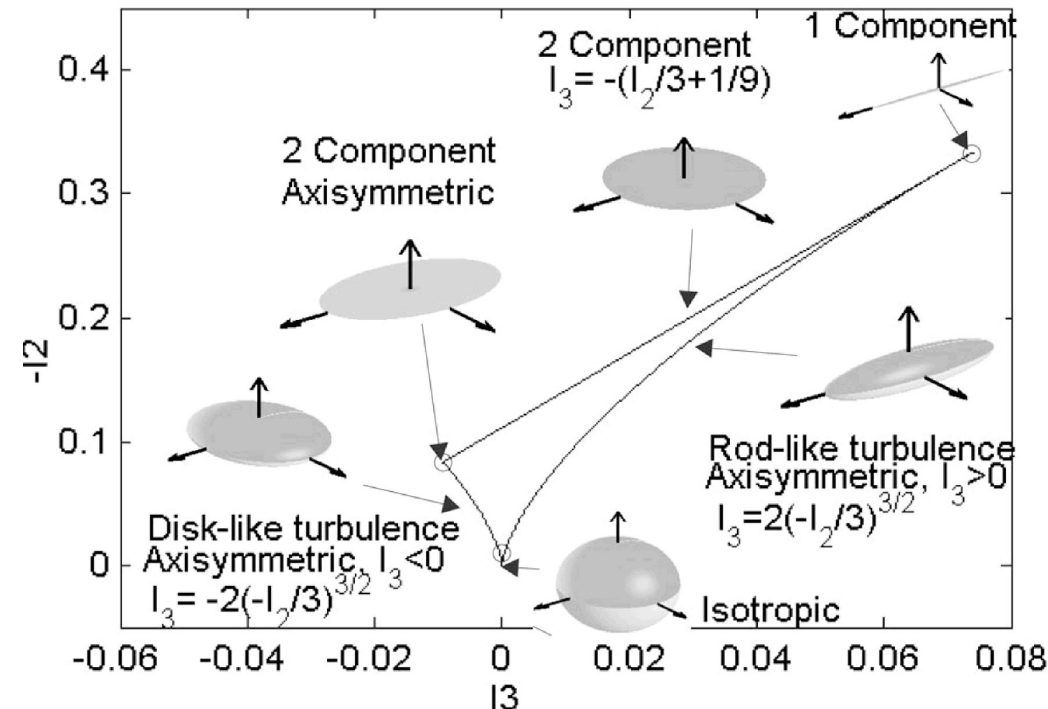
avec  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  tenseur d'anisotropie

- Le plus souvent, on préfère utiliser le tenseur d'anisotropie normalisé :  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ,  $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k}$
- Ces tenseurs sont diagonalisables :  $\mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^T$ , avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1^B, \lambda_2^B, \lambda_3^B)$  et  $\mathbf{E}$  la matrice des vecteur propres
  - On peut utiliser les invariants de  $\mathbf{B}$  pour décrire le caractère multi-dimensionnel des fluctuations turbulentes  
(1D, 2D ou 3D) :  $I_B = \text{tr}(\mathbf{B}) = 0$ ;  $II_B = \text{tr}(\mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)$ ;  $III_B = \det(\mathbf{B})$
- Les invariants sont liés entre eux par le **théorème de Cayley-Hamilton**:

$$b_{ij}^3 + II_B b_{ij} - III_B \delta_{ij} = 0$$

# Propriétés du tenseur de Reynolds

- Réalisabilité : triangle de Lumley (1978)
- A l'intérieur de ce triangle généralisé,  $\det(\overline{u'_i u'_j})$  est toujours positif
  - Il satisfait la condition de « réalisabilité »



# Propriétés d'un modèle (ici, de turbulence)

- **Homogénéité dimensionnelle**

- **Invariance galiléenne**

- Les équations ne changent pas pour tout changement de repère Galiléen, i.e. en mouvement de translation uniforme par rapport au précédent

- **Cohérence formelle:**

- un tenseur de rang donné doit être décrit par une fonction d'arguments tensoriels présentant les mêmes invariances/symétries,

- **Objectivité:** indifférence du modèle au changement de repère

- le comportement d'un matériau (fluide, solide...) est le même pour tout observateur, i.e. quel que soit le repère d'observation
- Propriété invariante sous une transformation de la forme:

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), t + a), \quad \mathbf{Q} \text{ tenseur d'ordre 2 orthogonal } (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I})$$

Exemples de scalaire, vecteur et tenseur objectifs :  $s = s^*$ ;  $\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}$ ;  $\mathbf{S}^* = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T$

- **Vraisemblance** (réalisabilité): contraintes de positivité et de norme.

# Equation de transport pour les tensions de Reynolds

- On utilise les équations NS pour déterminer une équation de transport pour les tensions de Reynolds

- On pose d'abord :

$$NS(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0$$

- On construit l'opérateur suivant :  $\overline{u'_i NS(u_j) + u'_j NS(u_i)} = 0$
- Cela donne 6 équations scalaires de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = & -\tau_{ik}^R \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk}^R \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} + \rho \overline{u'_i u'_j u'_k} \right] \end{aligned}$$

# Equation de transport pour les tensions de Reynolds

- Bonne nouvelle : nous avons trouvé des équations de transport pour  $\tau_{ij}^R$
- Mauvaise nouvelle : nous avons créé 22 nouvelles inconnues !

$$\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} \rightarrow 10 \text{ inconnues}$$

$$2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \rightarrow 6 \text{ inconnues}$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \rightarrow 6 \text{ inconnues}$$

- Caractère non linéaire des équations NS  $\rightarrow$  à chaque fois que l'on construit des équations de transport pour les corrélations turbulentes d'ordre  $m$ , des corrélations d'ordre  $m+1$  apparaissent

$\rightarrow$  **Problème de fermeture** des équations RANS :

l'opération de moyenne implique une perte d'information, qui se traduit en l'apparition de **nouveaux termes non fermés**

# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

- La partie déviatrice de  $\tau_{ij}^R$  représente la contribution des fluctuations turbulentes au transport de quantité de mouvement
  - Diffusivité accrue des écoulements turbulents!
- La plupart des modèles de fermeture pour  $a_{ij}$  utilisés dans les applications en sciences de l'ingénieur utilisent une approximation de type gradient de la forme:

$$\tau_{ij}^R - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} = 2\rho k a_{ij} = 2\rho \nu_t \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \text{tenseur du taux de déformation moyen}$$

où le coefficient  $\nu_t$  est appelé **viscosité tourbillonnaire** ou **viscosité turbulente** (eddy viscosity)

- Le problème de modélisation se réduit alors à déterminer  $\nu_t$
- Analogie avec la loi de comportement des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien isochore :

$$\tau_{ij} = 2\rho \nu S_{ij}$$

- Cette approximation est connue sous le nom d'**hypothèse de Boussinesq**
- Nous discuterons par la suite d'autre choix de modélisation pour  $\tau_{ij}^R$



# Approximation (hypothèse) de Boussinesq

- Modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq  $\Leftrightarrow$  « modèles à viscosité tourbillonnaire linéaire » (LEVM, *linear eddy viscosity models*)

- Implications :

- Les équations du champ moyen prennent la forme :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left( \bar{p} + \frac{2}{3} k \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

- Approximation « pseudo-laminaire »

- $\bar{p} \gg \frac{2}{3} k$  pour des écoulements bas Mach  $\rightarrow$  contribution de la pression turbulente négligée
- Tenseur d'anisotropie modélisé **parallèle** au taux de déformation moyen.
- 5 composantes indépendantes, liées entre elles via le coefficient  $\nu_t \rightarrow$  hypothèse rarement vérifiée
- Pour des écoulements 2D avec une direction prédominante (ex. couches limites), la seule composante non négligeable de  $\tau_{ij}^R$  est la contrainte de cisaillement  $\rho \overline{u'_1 u'_2}$ .
  - ✓ Cela donne  $\overline{u'_1 u'_2} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$ , ce qui peut être pris comme une définition de  $\nu_t$
  - ✓ La contrainte totale s'annule lorsque le profil de vitesse atteint un maximum!

## Equation de la température moyenne

- Dans un écoulement incompressible avec propriétés constantes, la température se comporte comme un scalaire passif, qui est simplement transporté par le champ de vitesse :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

avec  $\alpha$  la diffusivité thermique.

- En introduisant une décomposition de Reynolds pour la température :  $T = \bar{T} + T'$  et en moyennant l'équation précédente on obtient une équation similaire pour la température moyenne :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \overline{u'_i T'} \right)$$

où l'on remarque un terme non fermé, analogue du tenseur de Reynolds.

- $-\overline{u'_i T'}$  est appelé **flux de chaleur turbulent** et il représente la diffusion de température due aux fluctuations turbulentes
- Il est souvent modélisé par une approximation de type gradient (loi de Fourier turbulente) :

$$-\overline{u'_i T'} = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

# Classification des modèles RANS

Modèles à viscosité tourbillonnaire linéaire (Boussinesq)

*Linear Eddy Viscosity Models (LEVM)*

- Algébriques:
  - De longueur de mélange (Prandtl, 1925)
  - À viscosité tourbillonnaire (Baldwin-Lomax, Cebeci-Smith, Michel...)
- Modèles à une équation de transport
  - pour l'énergie cinétique turbulente
  - pour la viscosité turbulente (Spalart-Allmaras, Baldwin-Barth)
- Modèles à deux équations de transport
  - k-e, k-w, k-l, k-t, q-w, ...

Modèles à viscosité tourbillonnaire non linéaire  
(Modèles aux tensions de Reynolds algébriques)

*Non-linear Eddy Viscosity Models (NLVM)*  
*Algebraic Stress Models (ASM)*

- Analogie viscoélastique
- Modèles aux tensions de Reynolds algébriques
- Modèles algébriques explicites (EARSMS)

Modèles aux tensions de Reynolds (équations de transport)

*Reynolds-Stress Models (RSM)*

Equations de transport pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds + une échelle de longueur  
Launder-Reece-Rodi, Wilcox-Rubesin,...

## Classification des modèles RANS

- Par la suite, nous allons étudier quelques uns de ces modèles, choisis parmi les plus utilisés dans les applications

L'objectif de ce cours n'est pas de proposer un catalogue de modèles mais de montrer les principes de leur développement, leur mise en œuvre numérique, leur limites d'application

# Récapitulatif

- Pour de nombreuses applications, la connaissance du comportement « moyen » d'un écoulement est suffisante pour extraire certaines quantités d'intérêt (forces, débits, ...)
  - La notion de « moyenne » nécessite d'être précisée (d'ensemble, volumique, temporelle,...)
  - La plus utilisée est la **moyenne temporelle**
- Les propriétés de l'écoulement sont décomposées en une **partie moyenne** et une **partie fluctuante**
- Les équations RANS décrivent le comportement du champ moyen mais font apparaître des **termes supplémentaires non fermés**
  - Ces termes représentent la contribution des fluctuations turbulentes aux transferts du champ moyen
- Pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, le terme additionnel fait apparaître un tenseur d'ordre 2, appelé **tenseur de Reynolds**
  - Les composantes du tenseur de Reynolds ont les dimensions d'une contrainte et elles sont appelées **les tensions de Reynolds**
- Dans le cas compressible, de nombreux termes non fermés apparaissent dans l'équation de l'énergie, dont le **flux de chaleur turbulent**
- Tous ces termes nécessitent d'être **modélisés** afin de les relier au champ moyen
- La loi de comportement la plus répandue pour le tenseur de Reynolds s'appuie sur une analogie entre les contraintes de Reynolds et les contraintes visqueuses d'un fluide Newtonien : c'est **l'approximation de Boussinesq**