

Partiel

Partie Mécanique des Fluides

Lundi 3 décembre avril 2018 – Durée : **2h**
sans document ni appareil électronique

1 Ascension capillaire sur 15 points

L'imbibition correspond au phénomène d'imprégnation d'un objet poreux par un liquide, comme par exemple celle d'un buvard par de l'encre ou d'un morceau de sucre par du café. Ce phénomène est d'essence **capillaire**, c'est-à-dire qu'il est piloté par les forces de tension de surface présentes aux interfaces. On cherche dans ce problème à caractériser par analyse dimensionnelle ce phénomène d'imbibition.

1. La tension de surface γ a la dimension d'une énergie par unité de surface. Exprimer la dimension de la tension de surface $[\gamma]$ dans le système **M**, **L**, **T**.



FIGURE 1 – **Imbibition**. Gauche : Imbibition d'un morceau de sucre par du café. Droite : Imbibition d'un papier filtre par de l'huile. Relevé expérimental de l'ascension capillaire de l'aniline au sein d'un échantillon de papier filtre (extra dur n°602 de Schleicher & Schüll) (adapté de Lucas, R. “*Ueber das Zeitgesetz des kapillaren Aufstiegs von Flüssigkeiten.*” Kolloid-Zeitschrift **23.1**, 1918)

1.1 Dynamique de l'imbibition

On considère dans la suite du problème l'ascension d'un milieu poreux par un liquide de viscosité dynamique μ sous l'action capillaire (Figure 1, gauche). Dans la phase initiale d'imbibition, le liquide envahit le milieu poreux, dont la taille caractéristique de pore est R . À mesure que le liquide progresse dans la matrice poreuse, il est de plus en plus ralenti par l'action de la viscosité μ du liquide. Dans cette partie, on modélise le milieu poreux par un ensemble de tubes de rayon R .

2. En supposant que dans ce régime les effets d'inertie (faisant intervenir la masse volumique ρ) et de pesanteur (faisant intervenir la masse volumique ρ et la gravité g) sont négligeables par rapport à ceux de la tension de surface et de la viscosité, écrire la dépendance fonctionnelle de h , la hauteur maximale instantanée du liquide, avec les paramètres pertinents du problème.
3. Appliquer le théorème π en utilisant γ , R et t comme grandeurs dimensionnellement indépendantes pour écrire une relation entre plusieurs grandeurs sans dimension dont vous donnerez l'expression.

L'expérience montre systématiquement que l'imbibition d'un milieu poreux ralentit au cours du temps en suivant une loi en racine carrée, comme montré sur la figure 1.

4. À l'aide de cette relation expérimentale, préciser la dépendance de h avec les paramètres de l'expérience (à une constante multiplicative près).

1.2 Statique de l'ascension capillaire

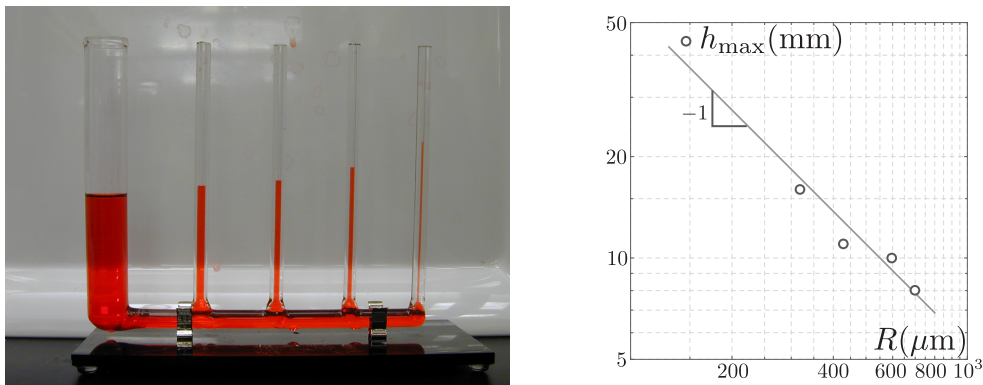


FIGURE 2 – **Ascension maximale.** Gauche : la hauteur d'ascension capillaire maximale dépend du rayon R du tube. Droite : sur ce graphique ont été reportées les hauteurs maximales h_{max} observées lors de l'ascension capillaire d'éthanol dans des tubes de différents rayons R , mettant en évidence une dépendance en $h_{\text{max}} \sim 1/R$.

Dans la phase ultime de l'ascension capillaire, le liquide finit par s'arrêter à une hauteur h_{max} . Dans cette phase, on ne peut plus négliger le poids de liquide et il faut désormais prendre en compte ρ et g .

5. Expliquer pourquoi h_{max} ne dépend pas de la viscosité dynamique μ .
6. Expliciter la dépendance de h_{max} avec les paramètres pertinents du problème.
7. Appliquer le théorème π afin de réécrire cette relation à l'aide de grandeurs sans dimension que l'on explicitera. On prendra ρ , g et R comme grandeurs dimensionnellement indépendantes.
8. Comme précédemment, on se propose de préciser la dépendance fonctionnelle en se basant sur l'expérience. Sur la figure 2, on a reporté les hauteurs maximales observées à l'issue de l'ascension capillaire pour des tubes de différents rayons R . À partir de ce résultat expérimental, proposer (à un préfacteur près) une relation liant h_{max} aux paramètres du problème.

2 Écoulement induit par un disque tournant sur 20 points

L'objectif de ce problème est de décrire l'écoulement d'un fluide mis en mouvement par un disque tournant à vitesse angulaire Ω constante, et plus précisément de déterminer la structure de la solution invariante d'échelle du problème.

Par souci de simplicité, on considère que le disque est de diamètre infini et que le fluide, de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν , occupe le demi-espace au-dessus du disque.

Pour décrire l'écoulement, on emploie les coordonnées cylindriques centrées sur l'axe (Oz) du disque, comme indiqué sur la figure 3. Dans ce système de coordonnées, le domaine d'étude de l'écoulement est le demi-espace complet défini par $z \geq 0$. Le champ de vitesse \underline{u} est défini comme :

$$\underline{u} = u(r, \theta, z, t) \underline{e}_r + v(r, \theta, z, t) \underline{e}_\theta + w(r, \theta, z, t) \underline{e}_z$$

où $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ est la base mobile des coordonnées cylindriques, représentée sur la figure 3. Le champ de pression s'écrit : $p(r, \theta, z, t)$. On note $q = \frac{p}{\rho}$.

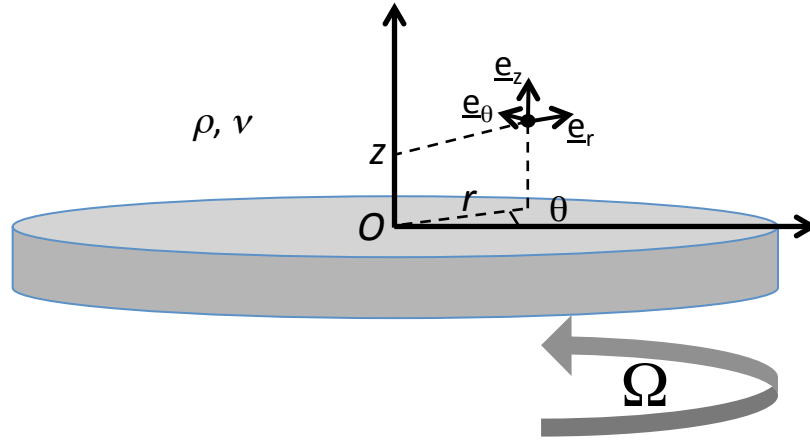


FIGURE 3 – Géométrie de l'écoulement induit par un disque tournant.

De manière générale, l'écoulement isovolume du fluide obéit donc aux équations suivantes :

▷ conservation de la matière :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

▷ bilan de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial q}{\partial r} + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \end{array} \right. \quad (2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{array} \right. \quad (2c)$$

où Δ représente l'opérateur laplacien scalaire : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

1. On recherche une solution stationnaire et axisymétrique (indépendante de θ). Simplifiez ces 4 équations.
2. Donnez les domaines de définition de r , θ et z correspondant au domaine d'étude.
3. Le disque est un solide indéformable en rotation à vitesse angulaire constante Ω . Exprimez la vitesse du disque \underline{U} en un point $(r, \theta, 0)$ quelconque de sa surface.
4. Ecrivez la condition aux limites imposée au fluide visqueux au contact du disque imperméable¹ en termes de valeurs imposées à u , v et w .
5. **Recherche d'une solution invariante d'échelle** - On impose un changement d'échelle à toutes les grandeurs impliquées dans la description de l'écoulement de la forme $a = a^* a'$, où a peut être r , z , u , v , w , q , ν , Ω . a est la grandeur de départ, a' la notation pour la grandeur dilatée par changement d'échelle, a^* le facteur de changement d'échelle. Montrez que, pour que le problème soit invariant par changement d'échelles, les facteurs de changement d'échelles doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u^* &= v^* = w^* \\ q^* &= u^{*2} \\ u^* &= \frac{\nu^*}{r^*} \\ r^* &= z^* \\ v^* &= r^* \Omega^* \end{aligned}$$

6. Justifiez que le groupe de changements d'échelles laissant le problème invariant est à 2 paramètres indépendants.
7. On choisit comme facteurs de changements d'échelles indépendants Ω^* et r^* . En :
 - listant les grandeurs dont dépend u sous la forme $u = f(...)$, f fonction inconnue,
 - opérant les changements d'échelle sur toutes les grandeurs impliquées dans cette relation,
 - exprimant tous les changements d'échelle en fonction de Ω^* et r^* ,
 - choisissant une valeur particulière pour Ω^* ,

montrez que :

$$\frac{u'}{\Omega' r'} = g \left(r^* r', \frac{z'}{r'}, \frac{\nu'}{\Omega' r'^2} \right), \quad g \text{ fonction inconnue}$$

8. Justifiez alors que :

$$u = \Omega r \, g \left(\frac{z}{r}, \frac{\nu}{\Omega r^2} \right) \quad (6)$$

9. On peut montrer que la composante radiale de la vitesse d'une solution particulière de ce problème invariant d'échelle s'écrit :

$$u = \Omega r \, F \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (7)$$

où F est une fonction inconnue à ce stade et $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$.

1. Aucune condition aux limites ne peut être imposée *a priori* à l'écoulement infiniment loin du disque, en raison de son rayon infini qui invalide l'hypothèse courante d'extension finie de l'écoulement.

- (a) Dites en quoi cette solution est auto-similaire. Quelle est la variable d'auto-similarité η ?
- (b) En établissant la relation entre η , $\frac{z}{\delta}$ et $\frac{\nu}{\Omega r^2}$, montrez que cette solution auto-similaire est une solution invariante d'échelle particulière.

10. **Recherche d'une solution auto-similaire** - Les composantes orthoradiale et verticale de la vitesse et la pression de la solution auto-similaire ont pour expression :

$$v = \Omega r G \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (8)$$

$$w = \sqrt{\nu \Omega} H \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (9)$$

$$q = \nu Q \left(\frac{z}{\delta} \right) \quad (10)$$

où G , H et Q sont des fonctions inconnues à ce stade. En injectant les expressions (7) de u et (9) de w dans l'équation (1), montrez que :

$$2F + H' = 0$$

L'injection des expressions (7, 8, 9, 10) dans (2) permet d'établir 3 autres équations différentielles non-linéaires couplant F , G , H et Q et leurs dérivées que l'on peut résoudre numériquement². Ceci permet de déterminer une des rares solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes³.

11. Les variations des fonctions F , G et $-H$ en fonction de $\frac{z}{\delta}$ obtenues par résolution numérique pour les conditions aux limites $u(r, z \rightarrow \infty) = 0$, $v(r, z \rightarrow \infty) = 0$ sont tracées sur la figure 4. Expliquez pourquoi cet entraînement par disque tournant peut être exploité comme principe de pompe hydraulique.

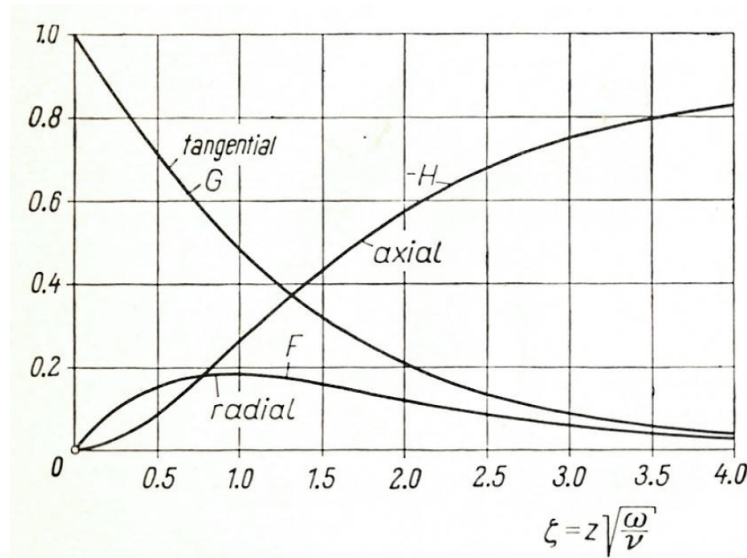


FIGURE 4 – Variations des fonctions F , G et $-H$ en fonction de $\frac{z}{\delta}$ obtenues par résolution numérique du système d'équations différentielles décrivant les solutions auto-similaires pour les conditions aux limites $\{u(r, z \rightarrow \infty) = 0, v(r, z \rightarrow \infty) = 0\}$.

2. H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, 7th ed., McGraw-Hill (1979), p. 102-105

3. Une solution exacte est entendue ici comme une solution valable sans approximation quel que soit les valeurs des paramètres de contrôle Ω et ν .