Licence Mécanique - Module 2A003 : Méthodes mathématiques pour la mécanique
Examen du 13 juin 2017 - Session2

Durée 2h00 - Sans documents ni calculatrice
L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une base de vecteurs pour un espace vectoriel.
2. Donner la définition du Wronskien de deux fonctions $(y_1(x), y_2(x))$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Quelle est la condition nécéssaire et suffisante pour que $y_1(x)$, $y_2(x)$ soient une famille liée ? libre ?
3. Quelle est la condition pour que deux matrices carrées A et B soient semblables ?
4. Donner l'expresion de la solution générale pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1, non-homogène $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$, avec $p(x), r(x)$ deux fonctions continues données.
5. Donnez les définitions de la convergence simple et uniforme sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'une suite de fonctions f_n vers une fonction f, où $f_n, f : I \to \mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et les sous-espaces propres associés.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Corrigé

1. Le polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = det(A - IX) = -(1 + X)(1 + X(X - 2)) = -(1 + X)(1 - X)^2$$

2. Les valeurs propres de A sont les racines de P_A. On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ d'ordre de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 1$ d'ordre de multiplicité2. Le spectre de A s'écrit donc $Sp_A = \{-1, 1, 1\}$.
3. On cherche le sous-espace propre E_{λ_1} :

$$A - \lambda_1 I = A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $E_{-1} = Vect(0,0,1)$, avec $dim E_{-1} = 1$.

$$A - \lambda_2 I = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et donc $E_1 = Vect(1,1,0)$, de dimension 1 également.

4. On observe que la dimension $(= 1)$ de l'espace E_{-1} est différente de l'ordre de multiplicité $(= 2)$ de la valeur propre associée . La matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle, de fonction inconnue $y(x)$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$xy^2y' = x^3 + y^3 \tag{1}$$

1. Indiquez la nature (linéaire ou non-linéaire) et l'ordre de l'équation différentielle.
2. Montrez qu'on peut mettre l'équation précédente sous la forme $y' = g(\frac{y}{x})$ avec g une fonction à préciser.
3. En faisant le changement de variable $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, trouver l'équation différentielle vérifiée par l'inconnue $z(x)$.
4. En déduire $z(x)$, puis $y(x)$.

Corrigé

1. Équation non-linéaire, de premier ordre.
2. On divise l'équation par $xy^2 \neq 0$:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{(\frac{y}{x})^2} = g(\frac{y}{x})$$

d'où $g(z) = z + \frac{1}{z^2}$.

3. En faisant le changement de variable indiqué on a :

$$y' = z'x + z$$

et donc

$$z'x + z = z + \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z'x = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^2 dz = \frac{dx}{x}$$

On trouve $z(x) = (\ln(x^3) + Cte)^{\frac{1}{3}}$, d'où $y(x) = x(\ln(x^3) + Cte)^{\frac{1}{3}}$, $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1-x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2(x-1)^2e^{-x} \tag{2}$$

1. Indiquez la nature de l'équation et la forme de la solution générale. (2).

2. Vérifier que $y_1(x) = e^x$ est une solution particulière de l'équation homogène associée à (2) :

$$(1-x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \tag{3}$$

3. On cherche une deuxième solution de l'équation homogène (2) de la forme $y_2(x) = u(x)y_1(x)$.
   – Déterminer l'équation différentielle vériffiée par $u(x)$.
   – Trouver $u(x)$ et déterminer ensuite y_2 telle que $y_2(0) = 0$.
   – Vérifier que (y_1, y_2) sont linéairement indépendantes.
4. Déterminer une solution particulière de l'équation (2).
   Indication : on pourra chercher une solution du type $y_p(x) = P(x)e^{-x}$, avec $P(x)$ un polynôme qu'il faudra déterminer.
5. Former la solution générale de l'équation avec second membre.
6. Résoudre le problème de Cauchy (2) avec les conditions initiales $\left\{ \begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$.

Corrigé

1.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x(x+1)y''(x) + (3x+1)y'(x) + y(x) = 0 \tag{4}$$

1. On cherche une solution particulière sous forme de série entière $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Etablir une relation de récurrence entre les coefficients a_n, a_{n+1} et a_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quelle est la relation entre a_0 et a_1 ? Calculer a_n en fonction de a_0 et de n, $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver le rayon de convergence de cette série. Précisez le critère utilisé.
3. Trouver une expression simplifiée pour $y_1(x)$ (reconnaître la fonction qui correspond à la série entière trouvée).
4. A l'aide de $y_1(x)$, trouver une deuxième solution particulière de l'équation (4) et déduire ensuite la solution générale de l'équation (4). Précisez le domaine de définition de la solution ainsi obtenue.