LU3ME005 : Méthodes numériques pour la mécanique
Travaux Dirigés (20h)

1 Racines d'équations $(2h)$

1.1 Méthodes du Point fixe

Soit la fonction $f(x) = e^x - 4x$.

1. Etudier la fonction sur $\mathbb{R}^+$ et localiser graphiquement les deux racines réelles.
2. Proposer deux fonctions $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ qui permettent de calculer les deux racines r_1 et r_2 par des méthodes de point fixe $x_{k+1} = \phi(x_k)$.
3. Montrer que l'on peut accélerer ces méthodes en les relaxant, c'est-à-dire en utilisant la méthode de point fixe $x_{k+1} = \phi_\theta(x_k) = (1-\theta)\, x_k + \theta\, \phi(x_k)$.

1.2 Méthode de Newton et méthode de Jacobi-Chebyshev

Soit une fonction $f(x)$ de racine r telle que $f(r) = 0$.
On étudie la méthode du point fixe $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ avec x_0 donnée au voisinage de r.
A l'itération $k+1$, on définit l'erreur ϵ_{k+1} par $\epsilon_{k+1} = x_{k+1} - r$.
Le facteur de convergence d'une suite itérée pour une racine r est la quantité ρ_k définie par :

$$\rho_k \equiv \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$$

1. A partir du développement limité de $\varphi(x_k)$ au voisinage de r, montrer que l'erreur ϵ_{k+1} peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k\, \varphi'(r) + \frac{\epsilon_k^2}{2!}\, \varphi''(r) + \frac{\epsilon_k^3}{3!}\, \varphi'''(r) + \frac{\epsilon_k^4}{4!}\, \varphi^{(4)}(r) + O(\epsilon_k^5).$$

2. Donner les conditions sur les dérivées de $\varphi(r)$ pour que la convergence soit quadratique. Même chose pour une convergence cubique.
3. On souhaite construire des suites du type $x_{k+1} = x_k + \Phi(x_k)\, f(x_k)$.
   3.1 En posant $\varphi(x) = x + \Phi(x)\, f(x)$, calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
   3.2 Donner la condition sur $\Phi(r)$ pour que $\varphi'(r) = 0$.
   3.3 Donner la condition sur $\Phi'(r)$ pour que $\varphi''(r) = 0$, en considérant la condition précédente satisfaite.
4. On considère la suite :

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

4.1 Mettre la fonction φ_1 sous la forme $\varphi_1(x) = x + \Phi_1(x)\, f(x)$. En déduire $\Phi_1(x)$.

4.2 Calculer $\Phi_1(r)$.

4.3 Que peut-on dire de sa rapidité de convergence ?

4.4 De quelle méthode s'agit-it ?

5. On considère la suite :

$$x_{k+1} = \varphi_2(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(x_k)\,[f(x_k)]^2}{2\,[f'(x_k)]^3}.$$

5.1 Mettre la fonction φ_2 sous la forme $\varphi_2(x) = x + \Phi_2(x)\, f(x)$. En déduire $\Phi_2(x)$.

5.2 Donner $\Phi_2'(x)$.

5.3 Calculer $\Phi_2(r)$ et $\Phi_2'(r)$.

5.4 Que peut-on dire de sa rapidité de convergence ?

6. Comment peut-on envisager la construction de méthodes plus rapides ?

2 Méthodes directes, conditionnement $(4h)$

2.1 Gauss, $L\,U$

Soit à résoudre le système $Ax = b$ où $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ et $b \in \mathbb{R}^3$ sont définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss sans pivotage.
2. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss avec pivotage partiel.
3. Effectuer la décomposition $A = LU$ où L est à diagonale unité, et calculer x.

2.2 Cholesky, conditionnement

Soient la matrice A et les vecteurs b et b' définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 45 \\ 140 \\ 234 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 18 \\ 46 \\ 139 \\ 235 \end{bmatrix}$$

1. Donner la décomposition de Cholesky de la matrice A.
2. Résoudre, en utilisant cette décomposition, les systèmes $Ax = b$ et $Ax' = b'$.
3. Calculer le rapport entre $\dfrac{||x - x'||_\infty}{||x||_\infty}$ et $\dfrac{||b - b'||_\infty}{||b||_\infty}$. Qu'en déduisez-vous concernant le conditionnement infini ?
4. Même question pour le conditionnement 1.
5. Les valeurs propres de A sont : 177.183, 4.70437, 0.100583, 0.0119275. Vérifier les relations entre les normes $1, 2, \infty$ pour le vecteur b, puis pour la matrice A.
6. Comment peut-on approcher $\mathrm{cond}(A)$ sans calculer A^{-1} ?

3 Méthodes itératives $(4h)$

3.1 Jacobi, Gauss–Seidel, SOR

Soit à résoudre un système matriciel qui provient d'un problème de conduction stationnaire 2D. La matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^3$ sont définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 4/16 \\ 6/16 \end{bmatrix}$$

1. Peut-on résoudre ce système par la méthode de décomposition de Cholesky ? Expliquer. Donner la solution de ce système.
2. Montrer que la méthode itérative de Gauss–Seidel converge plus vite que celle de Jacobi. Estimer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de 4 chiffres après la virgule, si on prend le vecteur nul comme vecteur initial.
3. Donner le schéma de la méthode de relaxation.

3.2 Gradients, gradients conjugués

Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice réelle, symétrique. Soit à résoudre un système matriciel qui provient d'un problème de conduction stationnaire 1D. La matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^3$ sont définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Méthode du gradient

On rappelle la notation du produit scalaire : $< x, y >= x^t y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.
Décrire l'algorithme de résolution de $A\,x = b$ par la méthode du gradient et effectuer les trois premières itérations.

3.2.2 Méthode du gradient conjugué

Décrire l'algorithme de résolution de $A\,x = b$ par la méthode des gradients conjugués et effectuer les trois premières itérations.

3.2.3 Comparaison des deux méthodes

1. Comparer les résultats obtenus par chacune des deux méthodes.
2. Évaluer, pour chaque itération, le nombre d'opérations nécessaires.
3. Conclure.

4 Valeurs propres $(2h)$

On étudie la vibration d'un cordon acoustique sous tension. Après une perturbation initiale, une corde tendue, de longueur L fixée sur ses deux extrémités se met à vibrer. La tension et la densité de la corde sont notées σ et ρ. Ce mouvement vibratoire est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y(x)}{dx^2} + \omega^2\, y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0$$

Les pulsations ω_k sont les valeurs de ω correspondant aux solutions non nulles du problème. On montre que la solution générale $y(x)$ et la plus basse fréquence propre ω_0 sont :

$$y(x) = A\, e^{i\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}x} + B\, e^{-i\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}x}, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Le problème discret en trois points est décrit par le système linéaire :

$$\frac{\sigma}{\rho\, h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

1. Mettre ce système sous la forme matricielle $([M] - \lambda[I])\,(y) = 0$ avec $\lambda \equiv \rho h^2\omega^2/\sigma$. Expliciter la matrice $[M]$ et montrer qu'elle est définie positive.
2. Décrire l'algorithme de la puissance itérée appliquée à la matrice M.
3. Décrire l'algorithme de la puissance inverse appliquée à la matrice M.
4. Donner la décomposition $L\,U$, U à diagonale unité, de la matrice $[M]$.
5. Appliquer la méthode de la puissance inverse pour calculer la plus basse fréquence propre. Utiliser comme vecteur initial $(1, 1, 1)^t$.
6. Comparer la valeur de ω_0 à sa valeur analytique. Conclure.

5 Interpolation polynomiale $(2h)$

5.1 Lagrange, moindres carrés, minimax

Une fonction $f(x)$ est donnée en x_j ($0 \leq j \leq 3$) par le tableau suivant :

j	0	1	2	3
x_j	-2	0	4	6
$f(x_j)$	3	5	8	5

On veut réaliser une approximation polynomiale de $f(x)$ dans l'intervalle $[-2, 6]$ par différentes méthodes.

5.1.1 Polynômes de Lagrange

Ecrire le polynôme $F(x)$ de degré 3, interpolé de Lagrange de $f(x)$ sous la forme
$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Calculer a, b, c, d.

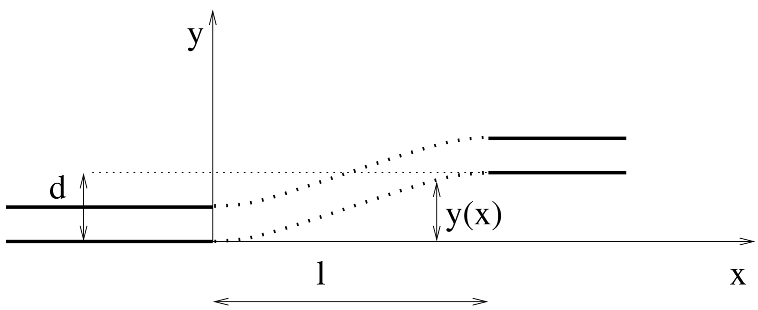
5.1.2 Moindres carrés

1. On approxime $f(x)$ par un polynôme de degré $m = 0$: $G_0(x) = a_0$. Déterminer a_0. Calculer l'écart quadratique S_0 par $S_m = \sum_{j=0}^{3}[G_m(x_j) - f(x_j)]^2$.
2. On approxime $f(x)$ par un polynôme de degré 1 : $G_1(x) = a_0 + a_1 x$. Calculer a_0, a_1 et S_1.
3. On approxime $f(x)$ par un polynôme de degré 2 : $G_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Trouver les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2 en résolvant le système linéaire. Calculer S_2.
4. Comparer S_0, S_1 et S_2 à S_3 que l'on déterminera.

5.1.3 Polynômes minimax

1. Calculer le polynôme $M_1(x)$ minimax de degré 1, $M_1(x) = a_0 + a_1 x$. Donner la valeur de l'erreur minimax.
2. Calculer la parabole d'égale erreur. On pose $M_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Trouver les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2 en résolvant le système linéaire correspondant au problème.
3. On définit les écarts quadratiques par $E_m = \sum_{j=0}^{3}[M_m(x_j) - f(x_j)]^2$. Comparer les valeurs de E_1 et E_2 à celles de S_1 et S_2. Conclure.

5.2 Hermite



Soient deux voies ferrées de distance latérale $d = 1$. On cherche à optimiser la courbure des rails d'aiguillage afin que le train puisse changer de voie de la manière la plus douce possible. L'aiguillage s'effectue sur une longueur l à déterminer. Soit $y(x)$ (avec $0 \leq y \leq 1$) la distance latérale de la voie d'aiguillage par rapport à la voie initiale. Les contraintes à respecter sont les suivantes :

$$y(0) = 0,\ y(l) = 1,\ y'(0) = 0,\ y'(l) = 0$$

Le tracé des voies sera défini à partir du polynôme d'Hermite.

1. Calculer le polynôme d'Hermite de degré 3 qui assure la collocation de $y(x)$ et de $y'(x)$ aux points $x = 0$ et $x = l$.
2. Discuter de la stratégie à adopter pour avoir l'aiguillage le plus doux possible.

6 Dérivation $(2h)$

6.1 Développements de Taylor

Retrouver la formule de différences progressives à l'ordre 2 en h, ainsi que la valeur de la constante C.

$$f'_j = \frac{(-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2})}{2h} + C\, h^2\, f'''_j + ...$$

En déduire l'expression de f'_j par différences régressives à l'ordre 2 en h.

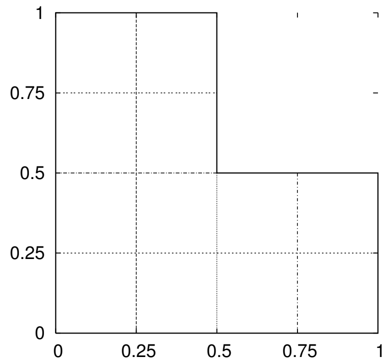
6.2 Vibrations acoustiques

1. Retrouver la matrice de la question 4.1 concernant le problème de vibration acoustique en utilisant un pas d'espace $h = L/4$.
2. Donner la nature de la matrice M pour n grand.
3. Discuter l'ordre de l'erreur commise pour la détermination de ω_0.

6.3 Conduction stationnaire 2D

On s'intéresse à résoudre l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2\, u(x,y)}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2\, u(x,y)}{\partial\, y^2} = 0$$



sur un domaine en forme de L (voir ci-contre) par la méthode des différences finies. Les conditions aux limites sont les suivantes :
a) sur la ligne $x = 0$: $u = y(1 - y)$
b) sur la ligne $y = 0$: $u = x(1 - x)$
c) sur le reste de la frontière : $u = 0$.

1. Discrétiser l'équation de Laplace par les différences finies centrées en utilisant un pas constant $h = 0.25$ en x et en y.
2. En utilisant les conditions aux limites et la symétrie du problème, expliciter le système linéaire (3×3) qui régit ce problème.

7 Intégration $(2h)$

7.1 Newton–Cotes

Soit une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$. On pose $I(f) = \int_a^b f(t)\, dt$. On considère les formules de quadrature suivantes :

$$S_1(f) = (b - a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad S_2(f) = (b - a)\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right)$$

1. Déterminer le plus haut degré des polynômes pour lesquels ces formules sont exactes.

2. Pour f de classe C^2 sur $[a,b]$, on admet qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de f telles que :

$$I(f) - S_1(f) = C_1\, f''(\xi_1) \quad \xi_1 \in [a,b], \qquad I(f) - S_2(f) = C_2\, f''(\xi_2) \quad \xi_2 \in [a,b]$$

Calculer C_1 et C_2.

3. On considère la formule de quadrature $S(f) = \alpha_1\, S_1(f) + \alpha_2\, S_2(f)$, (α_1, α_2) réels. Calculer (α_1, α_2) pour que $S(f)$ soit exacte pour les polynômes de degré q le plus haut possible.
4. Calculer $S(f), S_1(f), S_2(f), I(f)$ pour $a = 1, b = 2, f(t) = 1/(1+t^2)$.

7.2 Gauss–Legendre

1. Calculer le polynôme de Gauss–Legendre X_3 (de degré 3), en utilisant pour $n \geq 1$ la relation de récurrence : $X_0 = 1,\ X_1 = x,\ (n+1)\,X_{n+1} = (2n+1)\,x\,X_n - n\,X_{n-1}$.
2. Montrer que le polynôme X_3 est orthogonal dans $L^2([-1,1])$ aux polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
3. On cherche à construire sur l'intervalle $[-1,1]$ une formule $S_g(f)$ de quadrature de type Gauss à trois points.
   (a) Donner le plus haut degré du polynôme pour lequel elle est exacte.
   (b) Déterminer les racines x_i du polynôme X_3.
   (c) Calculer les fonctions poids ω_i en utilisant la formule : $\omega_i = 2/\left[(1-x_i^2)(X_3'(x_i))^2\right]$.
4. Appliquer $S_g(f)$ pour $a = 1, b = 2, f(t) = 1/(1+t^2)$. Comparer $S_g(f)$ à $S(f)$ et à $I(f)$.

8 Equations différentielles $(2h)$

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} dy/dx & = f(x,y) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$, où $y(x)$ est la fonction réelle inconnue sur l'intervalle $[0, X]$.
Soit $x_0 = 0, x_1 = h, \cdots, x_n = nh = X$ une subdivision régulière de l'intervalle $[0, X]$. Pour les schémas d'intégration à un pas, on note $\phi(x,y,h)$ la fonction telle que $y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h)$.

8.1 Question préliminaire

On considère la fonction $f(x,y) = x^2 \cos y$.

1. Montrer que cette fonction f est lipschitzienne par rapport à y.
2. Qu'en déduit-on pour le problème de Cauchy dans ce cas ?

Dans la suite du TD, on utilisera cette fonction-exemple pour les illustrations des méthodes.

8.2 Méthode d'Euler 1 explicite

1. Utiliser un développement de Taylor pour construire le schéma d'Euler 1 explicite. Quelle est l'expression de $\phi(x,y,h)$?
2. Déterminer l'ordre d'approximation de la méthode.
3. Illustrer la mise en œuvre numérique de cette méthode sur la fonction-exemple.

8.3 Méthode d'Euler 1 implicite

1. Utiliser maintenant un autre développement de Taylor pour construire un schéma implicite.
2. Illustrer sa mise en œuvre sur la fonction-exemple. Quelle opération supplémentaire est nécessaire pour intégrer l'EDO ?

8.4 Autres méthodes issues des développements de Taylor

1. Utiliser les trois premiers termes d'un développement de Taylor pour construire un schéma d'Euler explicite du second ordre. Donner $\phi(x, y, h)$.
2. Illustrer la mise en œuvre à l'aide de la fonction-exemple. Pourquoi n'utilise-t-on que peu ce type de méthode ?

8.5 Méthodes de Runge-Kutta

1. Soit la méthode de Heun d'ordre 2 : $\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y} & = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} & = y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}, \tilde{y}) \,. \end{array} \right.$
   Donner $\phi(x, y, h)$. Montrer rapidement que la méthode est au moins d'ordre 2.
2. Pour la méthode d'Euler modifié d'ordre 2, on a :

   $$\phi(x, y, h) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))].$$

   Écrire la méthode en deux étapes comme ci-dessus, et illustrer sa mise en œuvre.
3. Écrire la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 usuelle et illustrer sa mise en œuvre.

8.6 Une méthode à deux pas : leapfrog

1. À l'aide de développements de Taylor, construire un schéma de la forme :

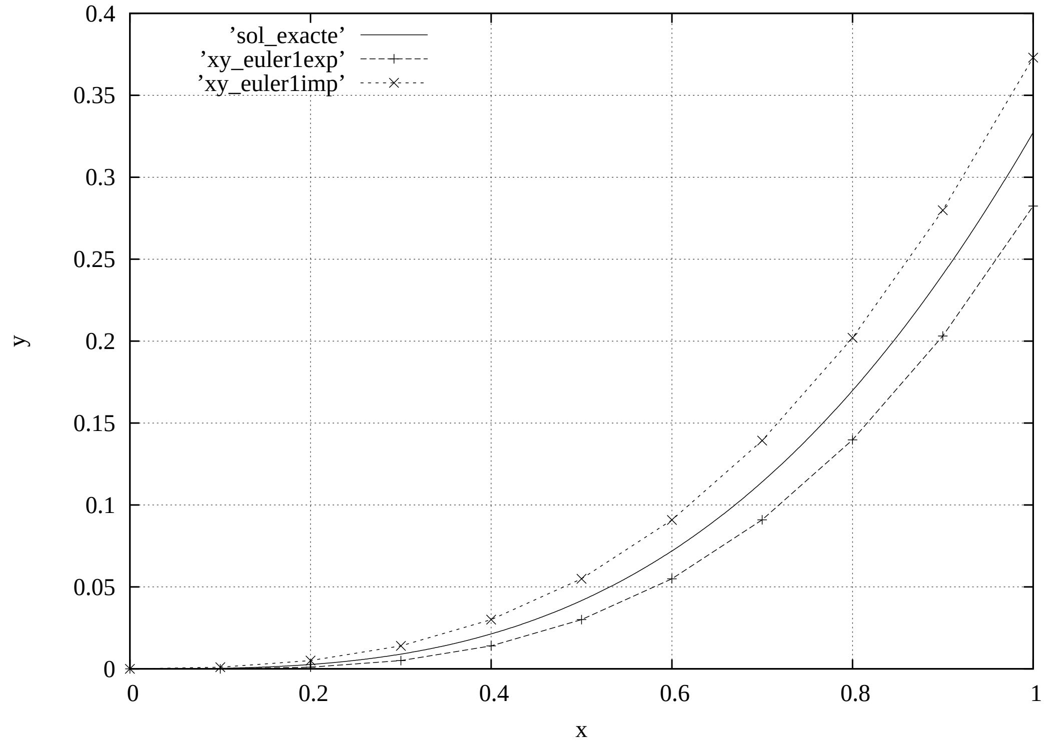
   $$y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi(x_i, y_i, h) \,.$$

   Quel est son ordre ?
2. Quel problème se pose lors de la mise en œuvre numérique ? Proposer une solution. Illustrer avec la fonction-exemple.

8.7 Comparaisons.

Commenter les figures de résultats ci-après.

Comparaison solution exacte et méthodes d'Euler ordre 1



Etude de l'erreur en $x = 1$ pour différents pas et méthodes