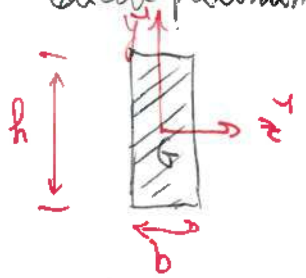
TD2 : Caractéristiques géométriques et dimensionn^t

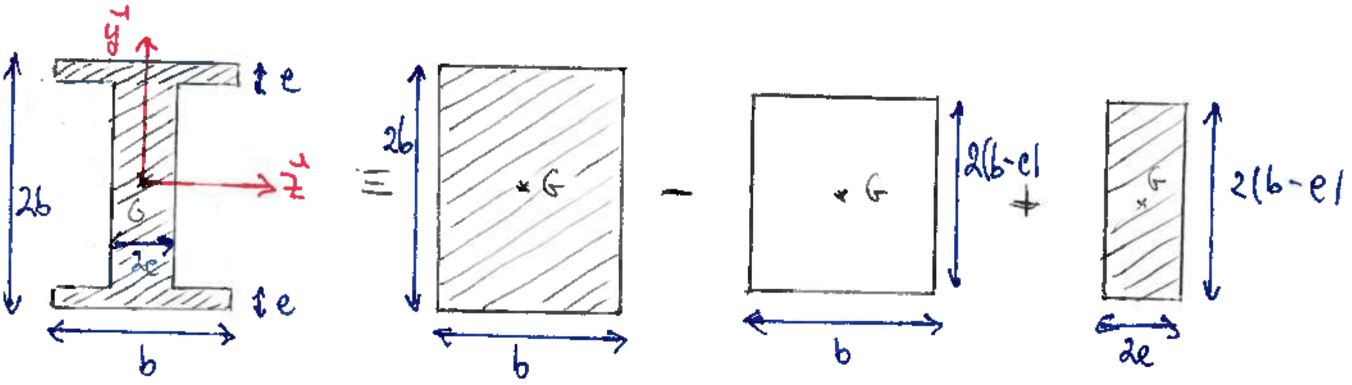
Exo 1 : C'est le m^t quadratique de la sect° par rapport à l'axe $(G\vec{z})$ qui représente la résistance à la flex° selon l'axe $(G\vec{z})$ donc à la flex° occasionnée par un effort selon $\vec{y}$.

• poutre en I : on voit de manière évidente que $O \equiv G$ (cdg de la sect°)

calcul préliminaire :



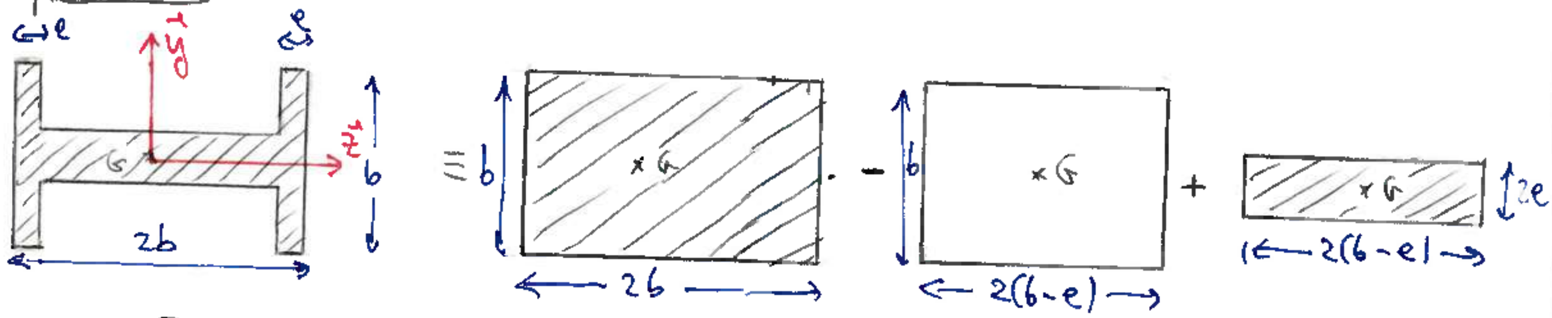
$$I_{Gz} = \int_{-b/2}^{+b/2}\int_{-h/2}^{+h/2} y^2\,dy\,dz = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}$$



d'où $$I_{Gz}^{(I)} = \frac{b(2b)^3}{12} - \frac{b[2(b-e)]^3}{12} + \frac{2e[2(b-e)]^3}{12}$$

soit $$I_{Gz}^{(I)} = \frac{1}{12}\left[8b^4 + 8(b-e)^3(2e-b)\right] = \frac{2}{3}\left[b^4+(2e-b)(b-e)^3\right]$$

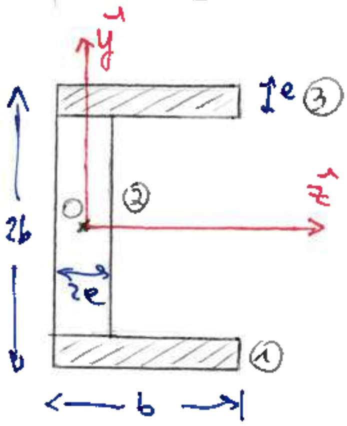
• poutre en H :

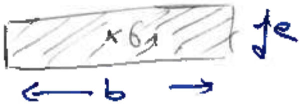


d'où $$I_{Gz}^{(H)} = \frac{2b\times b^3}{12} - \frac{2(b-e)b^3}{12} + \frac{2(b-e)\times(2e)^3}{12}$$

soit $$I_{Gz}^{(H)} = \frac{1}{6}\left\{b^4 + \left[(2e)^3-b^3\right](b-e)\right\}$$

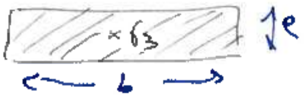
- poutre en C :





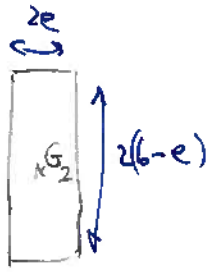
$y_{G_1} = b - \frac{e}{2}$; $z_{G_1} = \frac{b}{2} - e$; $S_1 = be$

$$I^{①}_{G_1 z} = \frac{be^3}{12}$$



$y_{G_3} = -b + \frac{e}{2}$; $z_{G_3} = \frac{b}{2} - e$; $S_3 = be$

$$I^{③}_{G_3 z} = \frac{be^3}{12}$$



$y_{G_2} = z_{G_2} = 0$; $S_2 = 2(b-e) \times 2e$

$$I^{②}_{G_2 z} = \frac{2e\,[2(b-e)]^3}{12} = \frac{16\,e\,(b-e)^3}{12}$$

Calcul du centre de gravité de toute la section $G(y_G, z_G)$:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{G_i} S_i}{\sum_{i=1}^{3} S_i} = 0 \quad \text{(évident par symétrie)}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_{G_i} S_i}{\sum_{i=1}^{3} S_i} \quad \leftarrow \text{pas faire car n'intervient pas ici}$$

Théorème de Huygens :

- $I^{①}_{Gz} = I^{①}_{G_1 z} + (\underbrace{y_G}_{0} - y_{G_1})^2 S_1 = \frac{be^3}{12} + (b - \frac{e}{2})^2 be$ idem pour $I^{③}_{Gz}$
- $I^{②}_{Gz} = I^{②}_{G_2 z} = \frac{16\,e\,(b-e)^3}{12}$ (car $y_G = y_{G_2} = 0$)

d'où $I^{Ⓒ}_{Gz} = I^{①}_{Gz} + I^{②}_{Gz} + I^{③}_{Gz} = \frac{1}{6}\left[be^3 + 12\left(b - \frac{e}{2}\right)^2 be + 8e(b-e)^3\right]$

Pour $\boxed{b = 10e}$ on trouve que $I^{Ⓘ}_{Gz} = I^{Ⓒ}_{Gz} = \frac{8336}{3} e^4$ et $I^{Ⓗ}_{Gz} = \frac{536}{3} e^4$

Il est donc préférable de choisir une poutre en I ou C ce qui permettra d'obtenir soit une déformat° moindre de la poutre à q^té de matière égale, soit une déformation identique mais avec moins de matière (structure plus légère).
Si l'on suppose que l'on applique un charg^t réparti sur le haut de la sect°, il est préférable de choisir une section en I car cette dernière présentera des déformat° de sect° moins importantes (symétrie sect°)

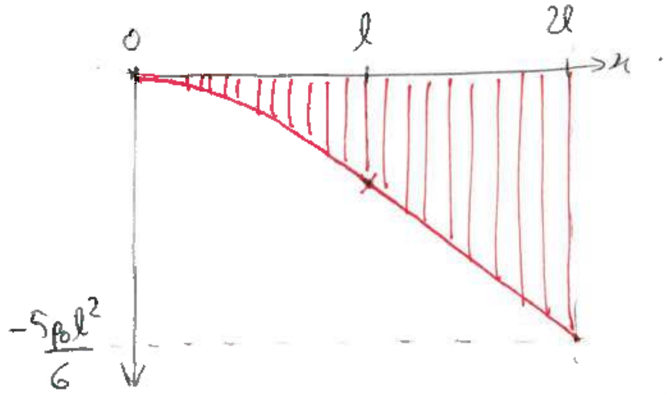
$\boxed{\text{Exo 2}}$:

pas effort normal — car pb plan

1) $\sigma_{xx} = \cancel{\dfrac{N(x)}{S}} - \dfrac{M_z(x)\, y}{I_{Gz}} + \cancel{\dfrac{M_y(x)\, z}{I_{Gy}}}$

$$|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|M_z(x)|_{max} \cdot |y_{max}|}{I_{Gz}}$$

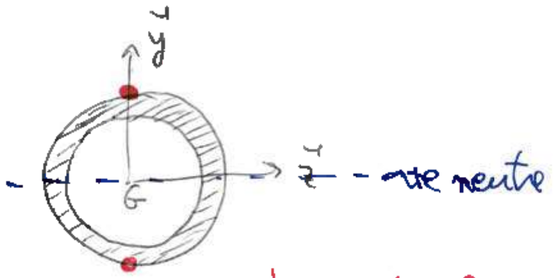
on d'ap Exos TD1



$M_z^{①}(x) = \dfrac{p_0}{6l} x^2 (x - 3l)$

$M_z^{②}(x) = -\dfrac{p_0 l}{6} (3x - l)$

donc $|M_z(x)|_{max} = \dfrac{5 p_0 l^2}{6}$ en $\underline{\underline{x = 2l}}$



$|y_{max}| = R$

donc $|\sigma_{xx}|_{max}$ en $\{x = 2l ; y = \pm R\}$

$|\sigma_{xx}|_{max} = \dfrac{5 p_0 l^2}{6} \times R \times \dfrac{1}{I_{Gz}}$ or $I_{Gz} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{R-e}^{R} y^2\, dS = \int_0^{2\pi}\int_{R-e}^{R} r^2 \underbrace{\sin^2\theta}_{= \frac{1-\cos 2\theta}{2}}\, r\, dr\, d\theta$

$\Rightarrow I_{Gz} = \pi \left[\dfrac{r^4}{4}\right]_{R-e}^{R} = \dfrac{\pi}{4}\{R^4 - (R-e)^4\}$

d'où $\boxed{|\sigma_{xx}|_{max} = \dfrac{10}{3\pi} \dfrac{p_0 l^2 R}{[R^4 - (R-e)^4]}}$

2/

Ĉ $|\sigma_{xx}|_{max} \leq \sigma_e \Rightarrow \dfrac{10 p_0 l^2 R}{3\pi \sigma_e} \leq R^4 - (R-e)^4 \Rightarrow R^4 - \dfrac{10 p_0 l^2 R}{3\pi\sigma_e} \geq (R-e)^4$

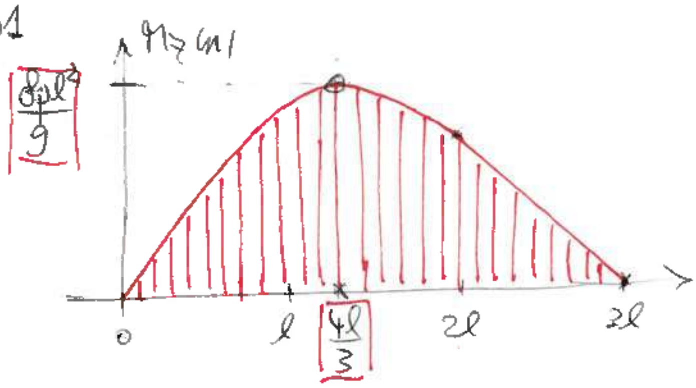
$[\ldots]^{1/4} \geq R - e$ d'où $e \geq R - [\ldots]^{1/4}$

donc $\boxed{e \geq \underbrace{R\left\{1 - \left[1 - \dfrac{10 p_0 l^2}{3\pi\sigma_e R^3}\right]^{1/4}\right\}}_{e_{min}}}$

Exo 3 :

1/ $\sigma_{xx} = -\dfrac{M_z(x)\, y}{I_{Gz}} \Rightarrow |\sigma_{xx}|_{max} = \dfrac{|M_z(x)|_{max} \cdot |y_{max}|}{I_{Gz}}$

d'ap Exo 4 TD1

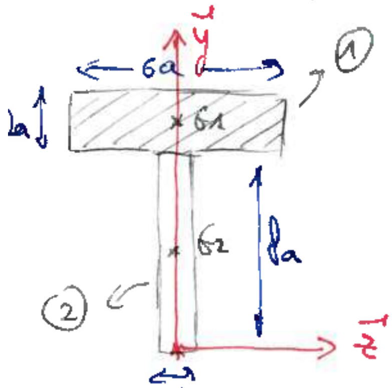


$M_z^{(1)}(x) = -\dfrac{p}{6}\, x\,(3x - 8l)$

$M_z^{(2)}(x) = -\dfrac{2pl}{3}(x - 3l)$

- $|M_z(x)|_{max} = \dfrac{8pl^2}{9}$ pour $x = \dfrac{4l}{3}$

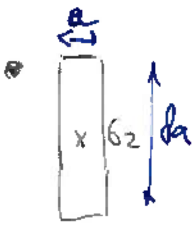
- Calcul de I_{Gz} :



- 

$y_{G_1} = 9a \; ; \; z_{G_1} = 0 \; ; \; S_1 = (2a)(6a) = 12a^2$

$I^{(1)}_{G_1 z} = \dfrac{6a \times (2a)^3}{12} = \dfrac{6 \times 8}{12} a^4 = 4a^4$

- 

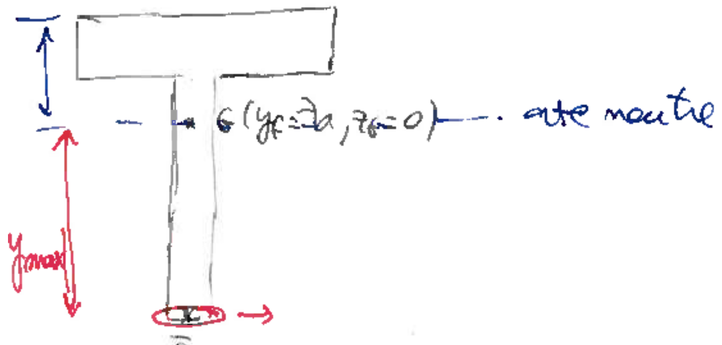
$y_{G_2} = 4a \; ; \; z_{G_2} = 0 \; ; \; S_2 = 8a^2$

$I^{(2)}_{G_2 z} = \dfrac{a(8a)^3}{12} = \dfrac{64 \times 8 a^4}{12} = \dfrac{128}{3} a^4$

calcul du centre de gravité

- $y_G = \dfrac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2}{S_1 + S_2} = \dfrac{9a \times 12a^2 + 4a \times 8a^2}{20a^2} = \dfrac{(108 + 32)a^3}{20a^2} = \dfrac{140}{20} a = \underline{7a}$

- $z_G = 0$



$|y_{max}| = 7a$

donc $|\sigma_{xx}|_{max}$ pour $\left(x = \dfrac{4l}{3} \; ; \; y = -7a\right)$

d'après le Th de Huygens : 5/

$$I^{(1)}_{Gz} = I^{(1)}_{G_1 z} + (y_G - y_{G_1})^2 S_1 = 4a^4 + (7a - 9a)^2 \times 12a^2 = 4a^4 + 48a^4 = 52a^4$$

$$I^{(2)}_{Gz} = I^{(2)}_{G_2 z} + (y_G - y_{G_2})^2 S_2 = \frac{128a^4}{3} + (7a - 4a)^2 \times 8a^2 = \frac{128a^4}{3} + 72a^4$$

donc $I^{tot}_{Gz} = I^{(1)}_{Gz} + I^{(2)}_{Gz} = \left(\frac{128}{3} + 52 + 72\right) a^4 = \left(\frac{128}{3} + 124\right) a^4 = \frac{(128 + 372)}{3} a^4$

$$\Rightarrow \underline{I_{Gz} = \frac{500}{3} a^4}$$

donc $|\sigma_{xx}|_{max} = \frac{|M_z(x)|_{max} \times |y_{max}|}{I_{Gz}} = \frac{8pl^2}{9} \times 7a \times \frac{3}{500a^4} = \frac{14pl^2}{3 \times 125 a^3} = \boxed{\frac{14pl^2}{375a^3}}$

2/ $|\sigma_{xx}|_{max} \leq \sigma_e \Rightarrow$

$$\boxed{p \leq \underbrace{\frac{375 \sigma_e a^3}{14 l^2}}_{p_{max}}}$$