$$u(x, y) = D(2x + y) + E(-8x + y)$$

Exo 2)

(a) $$v(x,t) = u(x,t) - \frac{t^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow v_{xx} = u_{xx} \qquad v(x,0) = x^2$$

$$v_{tt} = u_{tt} - 1 \qquad v_t(x,0) = 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = x^2 \\ v_t(x,0) = 1 \end{cases} \qquad \boxed{c = 1}$$

(b) $$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x+t)^2 + (x-t)^2\right] + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} ds}_{\cancel{x}+t-\cancel{x}+t}$$

$$2t$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[2x^2 + 2t^2\right] + t$$

$$= x^2 + t^2 + t$$

Donc $$\boxed{u(x,t) = x^2 + \frac{3}{2}t^2 + t.}$$

iv) Sachant que :

$$u(x,y,t) = V(x,t)\left(A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi y) e^{-\lambda_m t}\right)$$

On calcule les coeff. A_0 et A_m.

D'après la cond. initiale (6) :

$$u(x,y,0) = f(x)\, g(y) = V(x,0)\left(A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi y)\right)$$

Par identification :

$$f(x) = V(x,0)$$

et $$g(y) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi y)$$

Pour déterminer A_0 on multiplie la rélation de $g(y)$ par $\cos(0\pi y)$ et on intègre entre 0 et 1. Ds la série comme $m = 1, .., \infty$ tous les termes seront nulls par ~~la~~ ~~de~~ l'orthogonalité des séries en cos.

Il reste donc :

$$\int_0^1 g(y)\cos(0\pi y)\, dy = \int_0^1 A_0 \cos(0\pi y)\, dy.$$

Autrement dit : $A_0 = \int_0^1 g(y)\, dy.$