SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 1 : les fondamentaux

Exercice 1 : La corde vibrante : ondes, vibrations et plus encore !

Le but de cet exercice est d'étudier la propagation d'ondes dans une corde tendue. Nous allons étudier différentes configurations :

- corde infinie,
- corde fixée à ses extrémités,
- propagation dans plusieurs cordes de masses linéiques différentes accrochées ensemble.

On s'intéresse au déplacement transverse de la corde $y(x,t)$ au point x et à l'instant t. On note T la tension et la μ masse linéique. Avec ces notations, le déplacement transverse satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

avec $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

1. On suppose que la corde est de longueur infinie. Montrer que la solution générale de l'équation des ondes est alors :

$$y(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

où f et g sont deux fonctions scalaires.

Solution: On fait le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \xi &= x - c_0 t \\ \eta &= x + c_0 t. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \eta} = -c_0\frac{\partial y}{\partial \xi} + c_0\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c_0^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}\right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}\right) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation des ondes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

D'abord, intégrons cette relation par rapport à η :

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = h(\xi)$$

Ensuite, intégrons par rapport à η :

$$y(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

avec $f(\xi)$ la primitive de $h(\xi)$.
Finalement, on a donc :

$$y(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

2. Donner une interprétation physique des termes $f(x - c_0 t)$ et $g(x + c_0 t)$.

   On suppose qu'à $t = 0$, le profil de la corde est celui de la figure 1, on suppose aussi que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$. Tracer la forme de la corde pour $t > 0$.

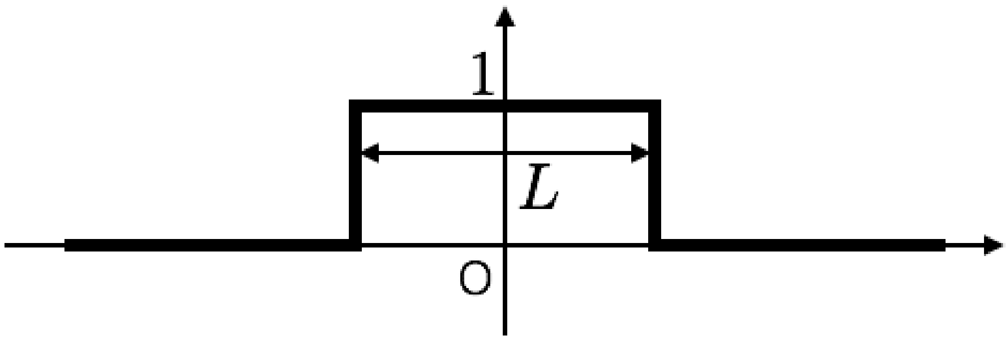


Figure 1 – Profil de la corde à $t = 0$

Solution: On note $y_0(x) = y(x, t = 0)$. A $t = 0$, on a :

$$y(x, 0) = y_0(x) = f(x) + g(x)$$

et

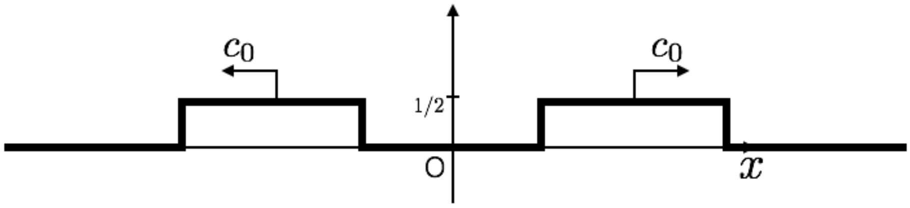
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \Leftrightarrow c_0(f'(x) - g'(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Par conséquent :

$$y_0(x) = 2f(x)$$

et donc

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t))$$



3. On suppose maintenant que la corde est fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. On suppose que les ondes se propageant vers les $x > 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = L$ et que les ondes se propageant vers les $x < 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = 0$. On a alors $f(\alpha) = g(\alpha) = A\sin(k_0\alpha)$. Dans ce cas montrer que :

$$y(x,t) = f(x)\phi(t)$$

D'après la forme de la solution, de quel type de phénomène s'agit-il ?

Solution:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\left(\sin(k_0(x - c_0t) + \sin(k_0(x + c_0t)\right)\right) \\ &= A\left(\sin(k_0x)\cos(k_0c_0t) - \cos(k_0x)\sin(k_0c_0t) + \sin(k_0x)\cos(k_0c_0t) + \cos(k_0x)\sin(k_0ct)\right) \\ &= 2A\left(\sin(k_0x)\cos(\omega_0t)\right) \end{aligned}$$

La solution du problème est donc une solution à variables séparées. Cette solution est celle que nous avons utilisée en vibrations. Nous sommes en présence d'un phénomène de vibrations : le temps d'observation est plus grand que le temps de parcours des ondes dans la structure. On voit un exemple concrêt de transition entre ondes et vibrations.

4. On considère une situation dans laquelle, deux cordes de masses linéiques différentes μ_1 et μ_2 sont couplées en $x = 0$ (cf Figure 2). On suppose que le deplacement transverse $y(x,t)$ et la pente de la corde $\partial y/\partial x$ sont des grandeurs continues en $x = 0$. Un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 de la forme : $y_I(x,t) = A\exp(i(k_1x - \omega t))$. On observe qu'une partie de l'onde se réfléchit en $x = 0$ et qu'une autre partie est transmise. On note R et T les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. Déterminer ces coefficients en fonction des données physiques du problème.

Solution: Dans ce problème, on a 2 cordes avec 2 vitesses de propagation différentes : $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$ La solution dans la corde 1 s'écrit :

$$y_1(x,t) = Y_I(x,t) + y_R(x,t) = A\exp(i(k_1x - \omega t)) + AR\exp(i(-k_1x - \omega t)$$

La solution dans la corde 2 s'écrit :

$$y_2(x,t) = Y_T(x,t) = AT\exp(i(k_2x - \omega t))$$

Le déplacement transverse est continu en $x = 0$:

$$y_1(x = 0, t) = y_2(x = 0, t)$$

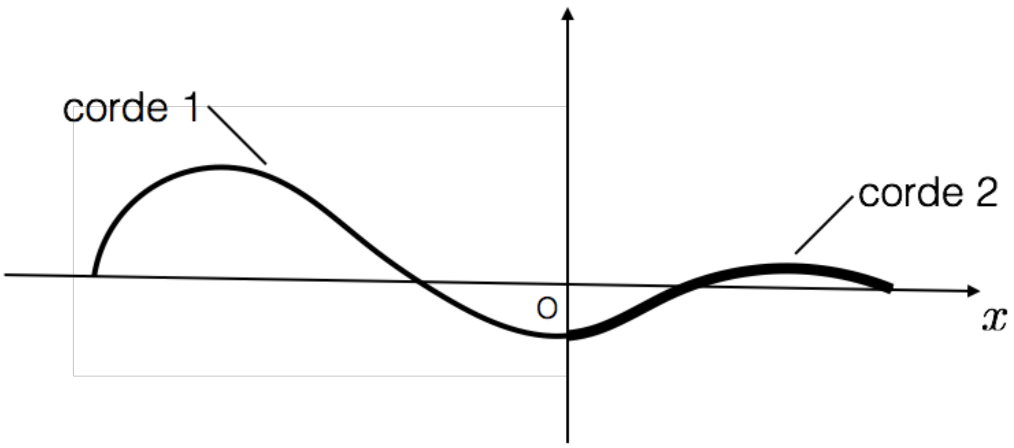


Figure 2 – Cordes de masses linéïques différentes assemblées en $x = 0$

par conséquent :

$$\begin{aligned} A\exp(i(-\omega t)) + AR\exp(i(-\omega t)) &= AT\exp(i(-\omega t)) \\ 1 + R &= T \end{aligned}$$

La pente est continue en $x = 0$:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(x=0,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(x=0,t)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} ik_1 A\exp(i(-\omega t)) - ik_1 AR\exp(i(-\omega t)) &= ik_2 AT\exp(i(-\omega t)) \\ (1 - R)k_1 &= Tk_2 \end{aligned}$$

avec $k_1 = \omega/c_1$ et $k_2 = \omega/c_2$. On a donc deux équations et deux inconnues à résoudre :

$$1 + R = T \quad (2)$$

$$(1 - R)\frac{c_2}{c_1} = T \quad (3)$$

Finalement on a :

$$R = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \quad (4)$$

$$T = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \quad (5)$$

On remarque que quand $c_1 = c_2$ il n'y a pas de réflexion et le coefficient de transmission en amplitude est égal à 1.

5. On considère maintenant une situation avec 3 cordes de masses linéiques μ_1, μ_2 et μ_3 (avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$) telle que la corde 2 soit comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ (la corde 1 est du côté des $x < 0$). Comme pour la question précédente, on suppose qu'un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 : $y_I(x,t) = A\exp(i(k_1 x - \omega t)$. On note R_1 le coefficient de reflexion

en amplitude dans la corde 1 et R_2 celui dans la corde 2. On note T_2 le coefficient de reflexion en amplitude dans la corde 2 et T_3 celui dans la corde 3.

Montrer qu'on peut choisir les propriétés physiques de la corde 2 (L et μ_2) pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie à l'interface entre les cordes 1 et 2 :

— $R_1 = 0$

— $L = \lambda_2/4$

— $\mu_2 = \sqrt{\mu_1\mu_3}$

Solution: Les solutions dans les cordes 1, 2 et 3 sont :

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= Ae^{i(k_1x-\omega t)} + AR_1e^{i(-k_1x-\omega t)} \\ y_2(x,t) &= AT_2e^{i(k_2x-\omega t)} + AR_2e^{i(-k_2x-\omega t)} \\ y_1(x,t) &= AT_3e^{i(k_3x-\omega t)} \end{aligned}$$

La condition de continuité du déplacement et de la pente en $x = 0$ permet de déterminer deux équations :

$$\begin{aligned} 1 + R_1 &= T_2 + R_2 \\ (1 - R_1)k_1 &= (T_2 - R_2)k_2 \end{aligned}$$

La condition de continuité du déplacement et de la pente en $x = L$ permet de déterminer deux autres équations :

$$\begin{aligned} T_2e^{ik_2L} + R_2e^{-ik_2L} &= T_3e^{ik_3L} \\ k_2T_2e^{ik_2L} - k_2R_2e^{-ik_2L} &= T_3k_3e^{ik_3L} \end{aligned}$$

Après résolution de ces 4 équations à 4 inconnues (R_1, R_2, T_2 et T_1), on impose $R_1 = 0$. On trouve alors la condition :

$$\cos(2k_2L) = \frac{(c_3 - c_1)(c_1 + c_2)}{(c3 + c2)(c1 - c2)}$$

On remarque que l'hypothèse $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ implique $c_1 > c_2 > c_3$, donc $\frac{(c_3-c_1)(c_1+c_2)}{(c_3+c_2)(c1-c2)} < 0$. Une solution possible est de s'arranger pour que $\cos(2k_2L) = -1$. Les conséquences de ce choix sont :

— $2k_2L = \pi$ donc $\lambda_2 = \pi/4$

— $\frac{(c_3-c_1)(c_1+c_2)}{(c3+c2)(c1-c2)} = -1$ donc $c_2 = \sqrt{c_1c_3}$.

Exercice 2 : Equation de dispersion de plusieurs types d'ondes

Pour chacune des équations ci-dessous calculer la relation de dispersion et la vitesse de phase.

— la propagation des ondes dans une corde est modélisée par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Solution: On cherche la solution sous la forme :

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2}A(i\omega)^2 e^{i(\omega t-kx)} - A(-ik)^2 e^{i(\omega t-kx)} &= 0 \\ -\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

La relation de dispersion associée à cette équation est donc : $-\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 = 0$.
La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c_0$. On constate que les ondes se propageant dans la corde le font à une vitesse constantes quelle que soit la fréquence. Elles ne sont pas dispersives.

— la propagation des ondes dans une corde avec amortissement peut être modélisée par l'équation de Klein-Gordon linéarisée :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \beta^2 y = 0$$

Solution: On cherche la solution sous la forme :

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2}A(i\omega)^2 e^{i(\omega t-kx)} - A(-ik)^2 e^{i(\omega t-kx)} + A\beta^2 e^{i(\omega t-kx)} &= 0 \\ -\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 + \beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

La relation de dispersion associée à cette équation est donc : $-\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 + \beta^2 = 0$ ou encore : $\omega = \pm c_0\sqrt{k^2+\beta^2}$
La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c_0 \frac{\sqrt{k^2+\beta^2}}{k} = \pm c_0\sqrt{1+\beta^2/k^2}$. Ces ondes sont dispersives. On rappelle que $k = 2\pi/\lambda$, cela implique que les ondes de grandes longueurs d'ondes se propagent plus vite que les petites longueurs d'ondes (quand $k \to +\infty$, $\lambda \to 0$ et $c_\phi \to c_0$ et quand $k \to 0$, $\lambda \to \infty$ et $c_\phi > c_0$)

— la propagation d'ondes de grandes longueurs d'ondes en eau peu profonde peut être modélisée par l'équation de Korteweg de Vries linéarisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Solution: On cherche la solution sous la forme :

$$u(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$\begin{aligned} A(i\omega)e^{i(\omega t-kx)} - A\alpha ik e^{i(\omega t-kx)} - A\beta(-ik)^3 e^{i(\omega t-kx)} &= 0 \\ \omega - \alpha k - \beta k^3 &= 0 \end{aligned}$$

La relation de dispersion associée à cette équation est donc : $\omega = \alpha k + \beta k^3$.
La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \alpha + \beta k^2$. On constate que les ondes ne se propagent que vers les x croissants. Ces ondes sont dispersives.On rappelle que $k = 2\pi/\lambda$, cela implique que les petites longueurs d'ondes (les vagues les plus rapprochées) se propagent plus vite que les grandes longueurs d'ondes