2A004 Statique et dynamique des fluides.

Ecrit 22 octobre 2015, 2H, sans documents.

I - Cours

1. Rappelez la forme globale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
2. Écrivez la forme locale.

Solution de l'exercice 0.0.

1. $\int_V \mathbf{f}\ dV + \int_S -p\ \mathbf{n} dS = 0$
2. $\mathbf{f} = \mathbf{g}rad(p)$

II - Statique

Un bac de section triangulaire (hauteur H dans la direction Z, largeur l dans la direction X et profondeur L dans la direction Y) est rempli d'eau (Figure 1). On suppose la pression atmosphérique égale à zéro.

1. Établir l'équation de la pression ($p(t) = \rho g(H - Ht/t_0)$ pour $t > 0$) sur l'une des parois du bac en fonction de la coordonnée t dans la direction $\bar{OT}$. Dans cette expression t_0 est la longueur de l'hypoténuse que l'on peut exprimer en fonction des données du problème.
2. Donnez les composantes n_x et n_z de la normale à la paroi du bac.
3. Calculez la force totale selon la direction Z due à la pression sur les parois du bac.
4. Montrez que c'est équivalent au poids de l'eau contenue dans le bac.
5. Sans faire des calculs, quelle est la force totale dans la direction X ? Justifiez.

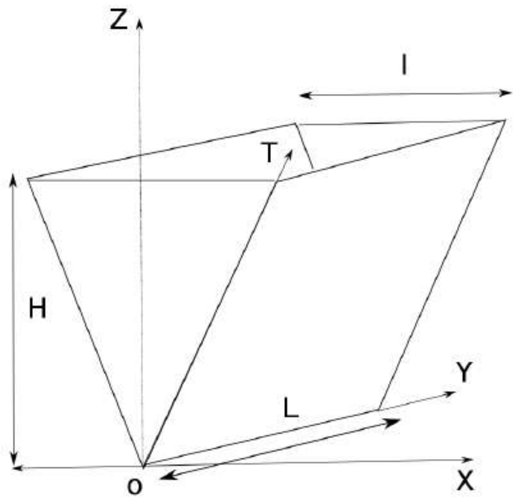

FIGURE 1 – Statique : Bac triangulaire.

Solution de l'exercice 0.0.

1. il suffit de se rappeler que $p(z) = \rho g z$ est d'écrire la coordonnée t en fonction de $z = H - Ht/t_0$. L'équation $p(t) = \rho g(H - Ht/t_0)$ satisfait bien $p(0) = \rho g H$ et $p(t_0) = 0$.
2. si l'angle entre l'axe Z et l'axe T est α alors $n_z = \sin\alpha = \frac{l/2}{t_0}$ et $n_x = \cos\alpha = H/t_0$
3. $F_Z = 2\int_0^{t_0}\int_0^L -p(t)n_z dt dy = -2\frac{\rho g l L}{2t_0}\left[Ht - \frac{Ht^2}{2t_0}\right]_0^{t_0} = -\rho g l L H/2$
4. c'est bien le volume ! !
5. la symmétrie implique que $F_X = 0$.

III - Cinématique I

Nous avons les composantes de la vitesse (u, v, w) en coordonnées cartésiennes

$$u = 3x + y$$
$$v = 2x - 3y$$
$$w = 0$$

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ? Justifiez.
2. C'est une représentation de Lagrange ou d'Euler ? Justifiez.
3. Donnez l'équation des lignes de courant.
4. Donnez l'équation du potentiel de vitesses si il existe.
5. Calculez l'accélération du champ de vitesses.
6. Soit une fonction scalaire $E = u^2 + v^2 + w^2$ calculez la dérivée $\frac{DE}{Dt}$.

Solution de l'exercice 0.0.

1. plan ($w = 0$), stationnaire (pas de dépendance en t), incompressible ($div(\mathbf{u}) = 0$).
2. Euler ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$).
3. $div(\mathbf{u}) = 0$ il existe donc une fonction de courant ψ

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

   $\psi = y^2/2 - 2x^2 + 3xy + Cte$
4. pas de potentiel de vitesses car l'écoulement est rotationnel.
5. il faut utiliser la dérivée convective ou particulaire (avec $w = 0$)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 11x$$
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 11y$$

6. Pour une fonction scalaire nous devons appliquer la dérivée convective (avec $w = 0$)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y} = 66(x^2 + xy - y^2)$$

   avec $E = (3x + y)^2 + (2x - 3y)^2$ ce qui donne une fonction scalaire ! ! ! attention.

IV - Cinématique II

Soit le champ de vitesses

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \omega A \cos(\omega t) \\ v &= \omega A \sin(\omega t) \end{aligned}$$

avec U_0, A et ω constants.

1. L'écoulement est plan ? stationnaire ? Incompressible ?
2. Dessinez les lignes de courant pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$.
3. Donnez la représentation de Lagrange en précisant les conditions initiales x_0 et y_0.
4. Calculez l'accélération de la particule de fluide.

Solution de l'exercice 0.0.

1. plan, instationnaire (il y a le temps t) et incompressible (pas de variables d'espace)
2. $t = 0$ donc $v = 0$ nous avons des lignes parallèles à l'axe x. Pour $t = \frac{\pi}{2\omega}$ u et v sont différents de zéro mais constants donc les linges de courant obliques.
3. Pour les trajectoires nous devons intégrer les équations en se rappelant que $u = dx/dt$ et $v = dy/dt$ et trouver les conditions initiales. Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = U_0 + \omega A \cos(\omega t)$$
$$\frac{dy}{dt} = \omega A \sin(\omega t)$$

donc

$$x(t) = U_0 t + A \sin(\omega t) + x_0$$
$$y(t) = A(1 - \cos(\omega t)) + y_0$$

4. c'est $d^2x(t)/dt^2$ et d^2y/dt^2

V - Bonus

Si vous avez tout fait...

Une sphère de rayon R de masse volumique ρ_s plus faible que celle de l'eau, est lâchée sous l'eau à une distance L de la surface libre. En supposant la force de frottement (ou de traînée) qui s'oppose au mouvement proportionnelle à la vitesse de la sphère : faire le bilan des forces, donnez l'équation de mouvement et, en résolvant celle-ci, la position de la sphère au cours du temps.

Solution de l'exercice 0.0.

1. bilan de forces $m du/dt = F_a + F_g + F_t$ avec Archimède, Gravité et traînée.
2.

$$\rho_s V du/dt = gV\Delta\rho - ku$$

3. équation différentielle de type

$$u' - k/V\ u = g\Delta\rho/\rho_s$$

soit une solution homogène plus une solution particulière.