Eléments de corrigé de l'écrit réparti de Novembre 2018 – 3A004 –

Exercice 1 : Calcul Indiciel

1.1. Opérateurs classiques

$$\underline{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e_i} = f_{,i}\, \underline{e_i}$$

$$\underline{\text{rot}}\, \underline{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \underline{e_i} = \varepsilon_{ijk}\, v_{k,j}\, \underline{e_i}$$

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \varepsilon_{ijk}\, u_j v_k\, \underline{e_i}$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e_i} \otimes \underline{e_j} = v_{i,j}\, \underline{e_i} \otimes \underline{e_j}$$

avec $\underline{e_i} \otimes \underline{e_j}$ le produit tensoriel des vecteurs $\underline{e_i}, \underline{e_j}$

1.2 Relation sur $\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{v} \cdot \underline{v}$

- $$(\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{v})\, \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j\, \underline{e_i} = v_{i,j}\, v_j\, \underline{e_i} = v_{i,k}\, v_k\, \underline{e_i}$$

- $$\frac{1}{2}\, \underline{\text{grad}}\, v^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^2)\, \underline{e_i} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j)\, \underline{e_i}$$
$$= \frac{2}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j\, \underline{e_i} = v_{j,i}\, v_j\, \underline{e_i}$$

- $$\underline{\text{rot}}\, \underline{v} \wedge \underline{v} = \varepsilon_{ijk}\, (\underline{\text{rot}}\, \underline{v})_j\, v_k\, \underline{e_i}$$
$$= \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{jlm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right) v_k\, \underline{e_i}$$
$$= -\varepsilon_{jik}\, \varepsilon_{jlm}\, v_{m,l}\, v_k\, \underline{e_i}$$
par antisymétrie du tenseur ε_{ijk} / indices (i,j)
$$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\, v_{m,l}\, v_k\, \underline{e_i}$$
$$= -v_{k,i}\, v_k\, \underline{e_i} + v_{i,k}\, v_k\, \underline{e_i}$$

de sorte que $$\frac{1}{2}\, \underline{\text{grad}}\, v^2 + \underline{\text{rot}}\, \underline{v} \wedge \underline{v} = v_{j,i}\, v_j\, \underline{e_i} - v_{k,i}\, v_k\, \underline{e_i} + v_{i,k}\, v_k\, \underline{e_i}$$

(k indices muets) et j peuvent être changés de nom dans les deux premiers termes $$\Rightarrow \frac{1}{2}\, \underline{\text{grad}}\, v^2 + \underline{\text{rot}}\, \underline{v} \wedge \underline{v} = v_{i,k}\, v_k\, \underline{e_i} = \underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{v} \cdot \underline{v}$$

1.3 Potentiel d'accélération

D'après la relation établie en 1.2, et la formule de l'accélération en description eulérienne en tant que dérivée particulaire de la vitesse eulérienne, on a :

$$\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \frac{d\underline{v}}{dt}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x},t) + \underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{v} \cdot \underline{v}$$
$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x},t) + \frac{1}{2}\, \underline{\text{grad}}\, v^2 + \underline{\text{rot}}\, \underline{v} \wedge \underline{v}$$

2/

si le champ de vitesse eulérien est irrotationnel $\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{v} = \underline{0}$

de sorte que $\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \underline{\mathrm{grad}}\, v^2$

Par ailleurs si $\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{v} = \underline{0}$ alors il existe un potentiel $V(x,t)$ tel que

$$\underline{v}(\underline{x},t) = -\underline{\mathrm{grad}}_x\, V(x,t)$$

De sorte que $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{\mathrm{grad}}_x\, V(x,t)\right] = -\underline{\mathrm{grad}}_x\left[\frac{\partial V}{\partial t}(x,t)\right]$

et donc $\underline{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\mathrm{grad}}\, v^2 = -\underline{\mathrm{grad}}\left[+\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2\right] = -\underline{\mathrm{grad}}\,\phi$

avec $\left\{ \phi(\underline{x},t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}v^2 = \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}\left(\underline{\mathrm{grad}}\, V\right)^2 \right.$

Exercice 2 : Déformations

• 2.1 Transformation

. $\underline{\underline{F}} = \underline{\nabla}\, \underline{\phi}(\underline{X},t)$ avec $\underline{\phi}(\underline{X},t) = (X_1 + \alpha X_2 X_3)\,\underline{e_1} + (X_2 - \alpha X_1 X_3)\,\underline{e_2} + X_3\,\underline{e_3}$

$$\Rightarrow \left\{ \underline{\underline{F}}(X,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} = 1 & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} = \alpha X_3 & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_3} = \alpha X_2 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} = -\alpha X_3 & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} = 1 & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_3} = -\alpha X_1 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial X_1} = 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_2} = 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_3} = 1 \end{pmatrix}_{(\underline{e_1},\underline{e_2},\underline{e_3})} \right.$$

. $\det \mathbb{F}(\underline{X},t) = 1 + \alpha X_3\,(\alpha X_3) = 1 + \alpha^2 X_3^2$

de sorte que $\forall \underline{X}\ \forall t \quad 0 < \det \mathbb{F}(X,t) < +\infty$

la transformation est donc bien définie pour le domaine Ω_0

. $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ dépend de X, la transformation n'est donc pas homogène

• 2.2 Etude de la transformation

- Base $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = 0$

la base $x_3 = 0$ reste donc fixe au cours de la transformation

- Base $x_3 = H \Rightarrow x_1 = X_1 + \alpha X_2 H$, $x_2 = X_2 - \alpha X_1 H$, $x_3 = H$

de sorte que $\begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{matrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha H \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H \end{vmatrix}$ soit encore $\underline{x} = \underline{X} + \underline{\omega} \wedge \underline{X}$

avec $\underline{\omega} = -\alpha H\,\underline{e_3}$. La base $x_3 = H$ reste plane à la côte $x_3 = H$ les points de la section sont soumis à une torsion autour de l'axe $\underline{e_3}$ d'angle $-\alpha H$.

3/ Plus généralement toute section $X_3 = $ cste subit une $\left\{\begin{array}{l}\text{torsion}\\ \text{rotation}\end{array}\right.$ autour de l'axe $\underline{e}_3$ d'angle $-\alpha X_3$ proportionnel à la côte de la section. La section $X_3 = H$ subit une torsion d'angle maximal

• 2.3 Variation de volume

Soit $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\,\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ le tenseur gradient de transformation

$J(\underline{X},t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ le jacobien de la transformation, alors :

$d\Omega_t = J(\underline{X},t)\, d\Omega_0$ où $d\Omega_0$ est un élément de volume infinitésimal centré en $\underline{X}$, $d\Omega_t$ son transformé à l'instant t.

d'où $d\Omega_t = (1 + \alpha^2 X_3^2)\, d\Omega_0$

de sorte que $V_t = $ volume du domaine Ω_t transformé de Ω_0 $= \int_{\Omega_t} d\Omega_t = \int_{\Omega_0} (1 + \alpha^2 X_3^2)\, d\Omega_0$

Soit $V_t = \underbrace{V_0}_{\text{volume de } \Omega_0} + \alpha^2 \int_{\Omega_0} X_3^2\, dX_1 dX_2 dX_3 = V_0 + \alpha^2 L^2 \int_0^H X_3^2\, dX_3$

$$\Rightarrow V_t = V_0 + \alpha^2 L^2 \frac{H^3}{3} \Rightarrow \left\{ \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{\alpha^2 H^2}{3} \right.$$

2.4 Tenseurs de déformation

• $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ tenseur de dilatation $= \underline{\underline{F}}^T(\underline{X},t)\, \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha X_3 & 0 \\ \alpha X_3 & 1 & 0 \\ \alpha X_2 & -\alpha X_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha X_3 & \alpha X_2 \\ -\alpha X_3 & 1 & -\alpha X_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 X_3^2 & 0 & \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 X_1 \\ 0 & \alpha^2 X_3^2 + 1 & \alpha^2 X_3 X_2 - \alpha X_1 \\ \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 X_1 & \alpha^2 X_3 X_2 - \alpha X_1 & \alpha^2 X_2^2 + \alpha^2 X_1^2 + 1 \end{bmatrix} \right.$$

• $\underline{\underline{E}}(\underline{X},t)$ tenseur de Green-Lagrange $= \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}})$

$$\left\{ \underline{\underline{E}}(\underline{X},t) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 X_3^2}{2} & 0 & \frac{1}{2}(\alpha X_2 + \alpha^2 X_3 X_1) \\ 0 & \frac{\alpha^2 X_3^2}{2} & \frac{1}{2}(\alpha^2 X_3 X_2 - \alpha X_1) \\ \frac{1}{2}(\alpha X_2 + \alpha^2 X_3 X_1) & \frac{1}{2}(\alpha^2 X_3 X_2 - \alpha X_1) & \frac{\alpha^2}{2}(X_2^2 + X_1^2) \end{bmatrix} \right.$$

2.5 Dilatations et variations angulaires

Soit $\underline{dM}_0$ un vecteur infinitésimal de longueur dl_0 porté par $\underline{e}_1$ issu du point $\underline{X}$

$\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_1$, $\underline{dM}$ son transformé

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\|\underline{dM}\|}{dl_0} = \sqrt{\underline{e}_1 \underline{\underline{C}}\, \underline{e}_1} = \sqrt{C_{11}}$ soit donc $\frac{\|\underline{dM}\|}{dl_0} = \sqrt{\alpha^2 X_3^2 + 1}$

41 . soit $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_2$ $\quad \dfrac{\|\underline{dM}\|}{dl_0} = \lambda_2(\underline{X},t) = \sqrt{C_{22}(\underline{X},t)} = \sqrt{1+\alpha^2 X_3^2}$

de sorte que $\left\{ \lambda_1(\underline{X},t) = \lambda_2(\underline{X},t) = \sqrt{1+\alpha^2 X_3^2} \right.$

les dilatations sont identiques dans les deux directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_3$

. Soit $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_3$ $\quad \left\{ \dfrac{\|\underline{dM}\|}{dl_0} = \lambda_3(\underline{X},t) = \sqrt{C_{33}(\underline{X},t)} = \sqrt{1+\alpha^2(X_1^2+X_2^2)} \right.$

$\lambda_i(\underline{X},t) \geq 1$ pour tout $i = 1,2,3$ $\forall \underline{X}, \forall t$

de sorte que $\|\underline{dM}\| \geq dl_0$, les éléments de longueur sont dilatés.

Variations angulaires :

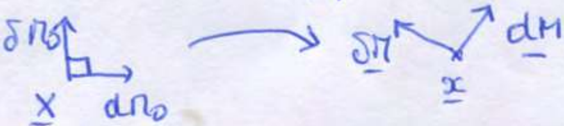
. Soient $\underline{dM}_0 = dl_0\underline{e}_1$ $\delta\underline{M}_0 = \delta l_0 \underline{e}_2$ deux vecteurs infinitésimaux de matière issus du point M_0 de coordonnées $\underline{X}$ et orthogonaux.

$\underline{dM}$, $\delta\underline{M}$ leurs transformés respectifs, on a :

$$\underline{dM} \cdot \delta\underline{M} = dl\, \delta l \sin\theta_{12} = dl_0 \delta l_0\, \underline{e}_1 \underline{\underline{C}}\, \underline{e}_2 = dl_0 \delta l_0\, C_{12}$$

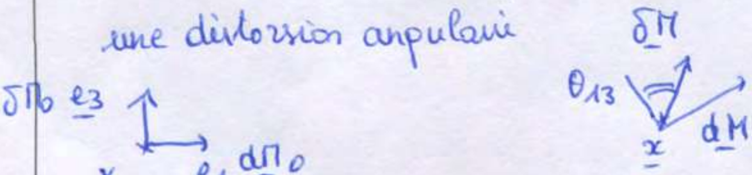
d'où $\sin\theta_{12} = \dfrac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}}$ or $C_{12} = 0$ de sorte que $\sin\theta_{12} = 0$ et donc $\theta_{12} = 0$

il n'y a donc pas de variation angulaire (de glissement), les vecteurs orthogonaux restent orthogonaux ici s'ils sont initialement portés par $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$

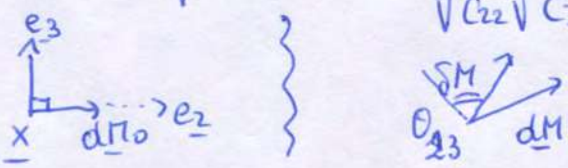


. Si maintenant, on considère $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_1$ $\quad \delta\underline{M}_0 = \delta l_0\, \underline{e}_3$

$\left\{ \sin\theta_{13} = \dfrac{C_{13}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{33}}} = \dfrac{\alpha^2 X_3 X_1 + \alpha X_2}{\sqrt{1+\alpha^2 X_3^2}\sqrt{1+\alpha^2 X_1^2 + \alpha^2 X_2^2}} \right.$ Cette fois on observe une distorsion angulaire



de même pour $\sin\theta_{23} = \dfrac{C_{23}}{\sqrt{C_{22}}\sqrt{C_{33}}} = \dfrac{\alpha^2 X_3 X_2 - \alpha X_1}{\sqrt{1+\alpha^2 X_3^2}\sqrt{1+\alpha^2 X_2^2 + \alpha^2 X_1^2}}$



26. Vecteur déplacement et tenseur des déformations linéarisées

$\underline{\xi}(X)$ vecteur déplacement est défini par $\underline{\xi}(\underline{X}) = \underline{x} - \underline{X} = \underline{\phi}(X,t) - \underline{X}$

soit ici $\underline{\xi}(\underline{X}) = \alpha X_2 X_3\, \underline{e}_1 - \alpha X_1 X_3\, \underline{e}_2$

$\underline{\underline{\varepsilon}}(X,t)$ tenseur des déformation linéarisées $= \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\xi} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_X \underline{\xi}\right)$

ici $\left\{ \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha X_3 & \alpha X_2 \\ -\alpha X_3 & 0 & -\alpha X_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)} \right.$ tenseur gradient de déplacement

d'où $\underline{\underline{\varepsilon}}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha X_2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha X_1}{2} \\ \frac{\alpha X_2}{2} & -\frac{\alpha X_1}{2} & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)}$

- L'hypothèse des petites perturbations est satisfaite lorsque $\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}(\underline{X},t)\right| \ll 1 \quad \forall \underline{X}\in\Omega \ \forall t$ et $(i=1,2,3),(j=1,2,3)$

soit donc ici $|\alpha X_3| \ll 1$; $|\alpha X_2| \ll 1$ et $|\alpha X_1| \ll 1 \quad \forall \underline{X}$

et donc si $\alpha H \ll 1$ et $\alpha L \ll 1$ et donc $\alpha\, \mathrm{Max}(H,L) \ll 1$

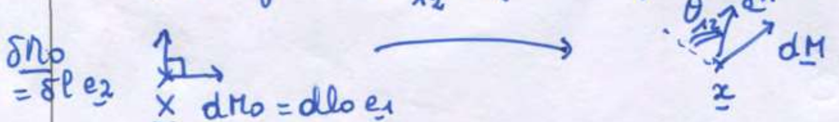
soit $\eta \ll 1$

2.7 Allongements relatifs

- Soit $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_1$ issu de $\underline{X}$, $\underline{dM}$ son transformé $\|\underline{dM}\| = dl$.

$\left\{ \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \underline{e}_1\, \underline{\underline{\varepsilon}}(X)\, \underline{e}_1 = \varepsilon_{11}(\underline{X}) = 0 \Rightarrow dl = dl_0 \right.$
de sorte que le vecteur infinitesimal $\underline{dM}_0$ ne subit aucun allongement dans la transformation. Il en est de même dans les deux autres directions $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$

- Soit $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_1$ $\quad \delta \underline{M}_0 = \delta l\, \underline{e}_2$ deux vecteurs infinitésimaux issus du point M_0 portés par $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ orthogonaux. et $\underline{dM}$, $\delta\underline{M}$ leurs transformés, θ_{12} l'angle de glissement après transformation



$\theta_{12} = 2\,\varepsilon_{12}(\underline{X}) = 0$ de sorte que $\underline{dM}$ et $\delta\underline{M}$ restent orthogonaux (pas de variations angulaires entre ces deux directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ distorsions

Soit maintenant $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_1 \quad \delta\underline{M}_0 = \delta l_0\, \underline{e}_3$

$\left\{ \theta_{13} = 2\,\varepsilon_{13}(X) = 2\alpha \frac{X_2}{2} \neq 0 \Rightarrow \theta_{13} \simeq \alpha X_2 \right.$

et pour $\underline{dM}_0 = dl_0\, \underline{e}_2 \quad \delta\underline{M}_0 = \delta l_0\, \underline{e}_3$

$\left\{ \theta_{23} = 2\,\varepsilon_{23}(X) = -2\alpha \frac{X_1}{2} \neq 0 \Rightarrow \theta_{23} = -\alpha X_1 \right.$

On observe des distorsions angulaires entre les directions $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ et $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$

- En transformations quelconques, nous avons pour les allongements / dilatation

$$\lambda_1 = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1+\alpha^2 X_3^2}$$

sous l'hypothèse des petites transformations et donc $\eta \ll 1$, on $\Rightarrow \alpha H \ll 1$

a $\lambda_1 = \frac{dl}{dl_0} = 1 + \frac{\alpha^2 X_3^2}{2} + O(X_3^4) \simeq 1$

de sorte que $\frac{dl - dl_0}{dl_0} \simeq 0$, ce qui correspond bien aux résultats obtenus à partir du tenseur des déformations linéarisées. De même pour les autres directions

$\lambda_2 = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1+\alpha^2 X_3^2} \simeq 1$ en petites perturbation

$\lambda_3 = \sqrt{1+\alpha^2(X_1^2+X_2^2)} \simeq 1 + \frac{\alpha^2}{2}(X_1^2+X_2^2) \simeq 1$ si $\eta = \alpha \operatorname{Max}(H L) \ll 1$

Concernant les variations angulaires, en question 2.7, on a :

$$\sin \theta_{13} = \frac{\alpha^2 X_3 X_1 + \alpha X_2}{\sqrt{1+\alpha^2 X_3^2}\sqrt{1+\alpha^2(X_1^2+X_2^2)}}$$

sous l'hypothèse des petites perturbation $|\alpha^2 X_3 X_1| \ll 1$, $|\alpha^2 X_3^2| \ll 1$, $|\alpha^2(X_1^2+X_2^2)| \ll 1$

de sorte que $\sin\theta_{13} \simeq \alpha X_2 \left(1 - \frac{\alpha^2 X_3^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}(X_1^2+X_2^2)\right)$

d'où $\sin\theta_{13} \simeq \alpha X_2 + O(X_i^2)$ et donc $\theta_{13} \simeq \alpha X_2$ ($\sin\theta_{13} \simeq \theta_{13}$)

on retrouve l'expression trouvée par l'approche des petites déformation. De même on retrouve l'expression de θ_{23}.

□ Exercice 3 : Cinématique

soit $\underline{v}(\underline{x}, t) = \alpha x_1 \underline{e}_1 + \beta x_2 \underline{e}_2$

avec $\alpha \neq 0$ et $\beta > 0$

3.1 Accélération eulérienne

Par définition :

- $\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \alpha \frac{dx_1}{dt}\underline{e}_1 + \beta \frac{dx_2}{dt}\underline{e}_2 = \alpha v_1 \underline{e}_1 + \beta v_2 \underline{e}_2$

soit $\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \alpha(\alpha x_1)\underline{e}_1 + \beta(\beta x_2)\underline{e}_2 = \alpha^2 x_1 \underline{e}_1 + \beta^2 x_2 \underline{e}_2$

- On peut également calculer l'accélération à partir de l'expression de la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{v} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$$

Ici le mouvement est stationnaire $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$, et

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{e_1, e_2, e_3}$$

de sorte que $\underline{\gamma} = \underline{0} + \alpha v_1 \underline{e}_1 + \beta v_2 \underline{e}_2$

soit $\underline{\gamma} = \alpha^2 x_1 \underline{e}_1 + \beta^2 x_2 \underline{e}_2$

On retrouve l'expression obtenue

3.2 Lignes de courant à $t = t^o$

Par définition, les lignes de courant sont les courbes tangentes au vecteur vitesse en tout point à l'instant $t = t^o$, soit pour $\underline{x} \in$ ligne de courant

$$\underline{v}(\underline{x}, t^o) \wedge d\underline{x} = \underline{0}$$

d'où ici $\quad v_2(x, t^o)\, dx_3 = 0 \qquad$ et $\quad v_1(\underline{x}, t^o)\, dx_2 = v_2(\underline{x}, t^o)\, dx_1$

$\qquad\qquad v_1(x, t^o)\, dx_3 = 0$

- soit comme $v_2 \neq 0$ $v_1 \neq 0$ pour $\underline{x} \neq \underline{0}$

  $dx_3 = 0$ les lignes de courant sont donc des courbes planes dans les plans $x_3 = $ Cste

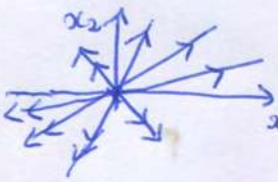
- et on a $\quad \alpha x_1\, dx_2 = \beta x_2\, dx_1 \quad$ ou encore $\quad \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{\beta}{\alpha} \dfrac{dx_1}{x_1}$

  ($\alpha \neq 0$ par hypothèse)

$$\Rightarrow \quad \ln x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \ln x_1 + C = \ln (x_1)^{\beta/\alpha} + C$$

et donc $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = K x_1^{\beta/\alpha} \\ x_3 = \text{Cste} \end{array} \right.$ équation des lignes de courant

Cas $\alpha = \beta$ $\quad x_2 = K x_1$ les lignes de courant sont des droites passant par l'origine



$\alpha = \beta > 0$ par hypothèse

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = \alpha x_1 > 0 \\ v_2 = \beta x_2 > 0 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} v_1 < 0 \\ v_2 < 0 \end{array}$

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} v_1 > 0 \\ v_2 < 0 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} v_1 < 0 \\ v_2 > 0 \end{array}$

Cas $\alpha = -\beta$ $\quad x_2 = \dfrac{K}{x_1}$ les lignes de courant sont des hyperboles (familles d'hyperboles)

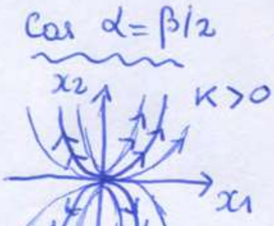
(pour $K > 0$) $\quad x_1 > 0, x_2 > 0 \quad v_1 < 0 \quad v_2 > 0$ car $\alpha < 0$

$x_1 < 0 \; x_2 < 0 \quad v_1 > 0 \quad v_2 < 0$

$x_1 > 0 \; x_2 < 0 \quad v_1 < 0 \quad v_2 < 0$

$x_1 < 0 \; x_2 > 0 \quad v_1 > 0 \quad v_2 > 0$

Cas $\alpha = \beta/2$ $\quad x_2 = K x_1^2$ les lignes de courant sont des familles de paraboles passant par l'origine



$x_1 > 0 \; x_2 > 0 \quad v_1 > 0 \quad v_2 > 0$

$x_1 < 0 \; x_2 > 0 \quad v_1 < 0 \quad v_2 > 0$

$x_1 > 0 \; x_2 < 0 \quad v_1 > 0 \quad v_2 < 0$

$x_1 < 0 \; x_2 < 0 \quad v_1 < 0 \quad v_2 < 0$

Cas $\alpha = -\beta/2$ $\quad x_2 = \dfrac{K}{x_1^2}$

($\alpha < 0$ car $\beta > 0$)

3.3 Représentation Lagrangienne du mouvement

Connaissant la vitesse eulérienne $\underline{v}(\underline{x},t)$ on obtient la représentation lagrangienne en integrant le système differentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = v_1(\underline{x},t) = \alpha x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v_2(x,t) = \beta x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

Soit donc $\dfrac{dx_1}{x_1} = \alpha dt \Rightarrow \ln x_1 = \alpha t + C_1 \Rightarrow x_1 = K_1 e^{\alpha t}$

$\dfrac{dx_2}{x_2} = \beta dt \Rightarrow \ln x_2 = \beta t + C_2 \Rightarrow x_2 = K_2 e^{\beta t}$

$\dfrac{dx_3}{dt} = 0 \Rightarrow x_3 = K_3$

En exploitant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{\alpha t} \\ x_2 = X_2 e^{\beta t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

soit $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)$ la representation lagrangienne

3-4 Equation de la trajectoire d'une particule située en $\underline{X}$ à $t=0$

L'equation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps de la representation lagrangienne du mouvement, soit

en revenant à la question 3.3 $e^{\alpha t} = \dfrac{x_1}{X_1} \Rightarrow \alpha t = \ln\dfrac{x_1}{X_1} = \ln x_1 - \ln X_1$

$\Rightarrow t = \dfrac{1}{\alpha}(\ln x_1 - \ln X_1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = X_2\, e^{\beta/\alpha \left(\ln \frac{x_1}{X_1}\right)} = X_2\left(\dfrac{x_1}{X_1}\right)^{\beta/\alpha} \\ \text{et } x_3 = X_3 \end{cases}$ equation de la trajectoire

le mouvement étant stationnaire $\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$, les lignes de courant et trajectoire sont de même nature géometrique. On retrouve donc les equations obtenues à la question 3.2 et les différentes natures de courbes selon les valeurs de α et β.

Si $\alpha = \beta$ $\quad x_2 = X_2 \dfrac{x_1}{X_1}$, $x_3 = X_3$ $\Big\}$ la trajectoire est une droite dans le plan $x_3 = X_3$

$\alpha = -\beta$ $\quad x_2 = X_2\left(\dfrac{x_1}{X_1}\right)^{-1} = \dfrac{X_2 X_1}{x_1}$ $\Big\}$ hyperbole dans le plan $x_3 = X_3$

$\alpha = \beta/2$ $\quad x_2 = X_2\left(\dfrac{x_1}{X_1}\right)^{2} = \dfrac{X_2}{X_1^2} x_1^2$ $\Big\}$ parabole

9/ $\alpha = -\beta/2 \qquad x_2 = X_2\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{-2} = X_2 \frac{X_1^2}{x_1^2}$

3.5 Champ de vitesse lagrangien et d'accélération

• $\underline{V}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{\Phi}}{dt} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X},t)$ par définition

soit ici $\left\{ \underline{V}(\underline{X},t) = \alpha e^{\alpha t} X_1\, \underline{e}_1 + \beta e^{\beta t} X_2\, \underline{e}_2 \right.$

• $\underline{V}(\underline{X},t) = \underline{v}(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t), t)$ autre méthode en exploitant l'expression de la vitesse eulérienne

$\left\{ \text{soit} \quad \underline{V}(\underline{X},t) = \alpha(\underset{X_1 e^{\alpha t}}{\overset{\shortparallel}{x_1}})\, e_1 + \beta \underset{X_2 e^{\beta t}}{\overset{\shortparallel}{x_2}}\, \underline{e}_2 = \alpha X_1 e^{\alpha t} \underline{e}_1 + \beta X_2 e^{\beta t} \underline{e}_2 \right.$

• $\underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X},t)$

$\left\{ \text{soit } \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \alpha^2 X_1 e^{\alpha t} \underline{e}_1 + \beta^2 X_2 e^{\beta t} \underline{e}_2 \right.$

ou encore $\left\{ \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \underline{\gamma}(\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X},t)) \right.$

d'après la question 1 $\quad \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \alpha^2 \underset{X_1 e^{\alpha t}}{\overset{\shortparallel}{x_1}}\, \underline{e}_1 + \beta^2 \underset{X_2 e^{\beta t}}{\overset{\shortparallel}{x_2}}\, \underline{e}_2$

$\Rightarrow \quad \underline{\Gamma}(\underline{X},t) = \alpha^2 X_1 e^{\alpha t} \underline{e}_1 + \beta^2 X_2 e^{\beta t} \underline{e}_2$

3.6 Calcul du volume V(t)

• Calcul de $\frac{d}{dt}V(t)$ et $V(t)$

• on a $\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_t} = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x},t) = \operatorname{trace} \underline{\underline{d}}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \frac{\dot{J}}{J}$

où $d\Omega_t$ est un élément infinitésimal de volume autour du point $\underline{x}$

avec $J = \det \underline{\underline{F}}$

ici $\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \alpha + \beta$

d'où $\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_t} = \alpha+\beta \Rightarrow \frac{d(d\Omega_t)}{dt} = (\alpha+\beta)\, d\Omega_t$ soit $\frac{d(d\Omega_t)}{(d\Omega_t)} = (\alpha+\beta)\,dt$

$\Rightarrow \ln(d\Omega_t) = (\alpha+\beta)t + C$ et donc $d\Omega_t = K e^{(\alpha+\beta)t} = (d\Omega_0)\, e^{(\alpha+\beta)t}$

car $K e^{(\alpha+\beta)0} = d\Omega_0$

et donc $\left\{ V(t) = \int_{\Omega_t} d\Omega_t = \int_{\Omega_0} e^{(\alpha+\beta)t} d\Omega_0 = e^{(\alpha+\beta)t}\, V_0 \right.$

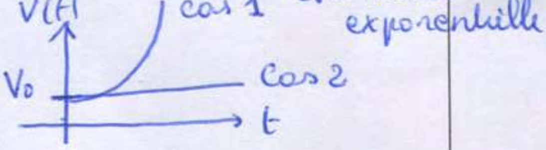
$\Rightarrow \left\{ \frac{dV}{dt}(t) = (\alpha+\beta)\, V(t) \right.$

ou encore directement

$- \; V(t) = \int_{\Omega t} d\Omega t$ ~~et~~ $\frac{dV}{dt}(t) = \int_{\Omega t} \operatorname{div} \underline{v} \, d\Omega t = (\alpha+\beta) V(t)$

d'où $\quad \frac{dV(t)}{V(t)} = (\alpha+\beta)\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln V(t) = (\alpha+\beta) t + C$

soit $\quad V(t) = V_0 \, e^{(\alpha+\beta)t}$



Cas 1 $\quad \alpha = \beta \quad V(t) = V_0 e^{2\alpha t}$

Cas 2 $\quad \alpha = -\beta \quad V(t) = V_0$

volume reste identique au cours du temps

3.7. Domaine Ωt

$\Omega_0 = \{ \underline{X}$ tel que $\quad X_1^2 + X_2^2 \leq R^2 . \quad 0 \leq X_3 \leq H \}$

- En utilisant l'expression de la transformation inverse, on a

$X_1 = x_1 e^{-\alpha t} \quad X_2 = x_2 e^{-\beta t} \quad X_3 = x_3$

soit donc $\quad \Omega(t) = \{ \underline{x}$ tel que $\quad \frac{x_1^2}{e^{2\alpha t}} + \frac{x_2^2}{e^{2\beta t}} \leq R^2 \quad 0 \leq x_3 \leq H \}$

$\Rightarrow$ le domaine $\Omega(t)$ est donc un cylindre d'axe $\underline{e_3}$ de hauteur H de section elliptique dont les axes principaux sont $Re^{\alpha t}$ dans la direction $\underline{e_1}$ et $Re^{\beta t}$ dans la direction $\underline{e_2}$

$$\left(\frac{x_1}{Re^{\alpha t}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{Re^{\beta t}}\right)^2 \leq 1$$

- Si $\alpha = \beta$ le domaine $\Omega(t)$ est un cylindre de section circulaire dont le rayon croît exponentiellement avec le temps.

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 e^{2\alpha t}$$

- 3.8 tenseur $\mathbb{d}$ des taux de dilatation

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{v}^T\right)$$

soit $\underline{dM} = dl_1 \underline{e_1} \qquad \frac{\overset{\circ}{dl_1}}{dl_1} = \alpha \quad$ taux de dilatation linéique dans la direction e_1

$\underline{d\Gamma} = dl\, \underline{e_2} \qquad \frac{\overset{\circ}{dl_2}}{dl_2} = \beta \quad$ " " " " $\underline{e_2}$

$\underline{dM} = dl\, \underline{e_1} \quad \underline{\delta n} = \delta l\, \underline{e_2} \qquad \overset{\circ}{\theta} = 2\, d_{12} = 0 \quad$ taux de glissement nul idem entre e_1 et $\underline{e_3}$ et $\underline{e_2}, \underline{e_3}$

11/

3.9 Equation locale de conservation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_t \\ \text{ou } \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \, \text{div} \, \underline{v} = 0 \end{cases}$$

soit donc $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho(\alpha+\beta) = 0$ ici

d'où $\dfrac{d\rho}{\rho} = -(\alpha+\beta)\,dt \Rightarrow \rho = K e^{-(\alpha+\beta)t}$

et donc $\rho(x) = \rho_0 e^{-(\alpha+\beta)t}$

→ Autre méthode

On sait par ailleurs que

$$d\Omega_t = J \, d\Omega_0$$

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \det \begin{vmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{\alpha t} e^{\beta t} = e^{(\alpha+\beta)t}$$

d'où $\dfrac{1}{\rho} dm_t = e^{(\alpha+\beta)t} \dfrac{1}{\rho_0} dm_0 \Rightarrow$ par conservation de la masse

$dm_t = dm_0 \Rightarrow \rho_0 = e^{(\alpha+\beta)t} \rho(t)$ on retrouve le même résultat naturellement