<u>Exercice 3</u>

On part des équations du modèle K-ε standard

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\tau_{ij}^R}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} \frac{\tau_{ij}^R}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right]$$

avec : $\nu_t = C_\mu K^2/\epsilon$ et

$C_\mu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_K = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$

On considère le cas d'une couche limite 2D sans gradient de pression.

Dans ce cas $x_1 = x$ $x_2 = y$.

Les équations de couche limite (voir cours Aérodynamique) sont :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \underbrace{\cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}}}_{0} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]$$

Dans la couche logarithmique, les termes de transport sont petits par rapport aux termes visqueux (moléculaire + turbulent).

L'équation devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] = 0$$

En intégrant une fois :

$$(\nu + \nu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{const} = \left[(\nu + \nu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]_{y=0} = \tau_w/\rho$$

Par ailleurs, dans la couche logarithmique les effets de la viscosité moléculaire sont petits devant la viscosité turbulente :

$$\Rightarrow (\nu+\nu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \simeq \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

On introduit la vitesse de frottement :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \text{const}$$

et les variables de paroi $u^+ = \bar{u}/u_\tau$

$$y^+ = y\, u_\tau/\nu$$

De la même façon, on peut simplifier l'équation pour k :

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial k}{\partial t} + u\frac{\partial k}{\partial x}}}_{\text{négligé}} + v\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\underbrace{\tau^R_{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{pour une couche limite 2D}} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho}\,\nu_t\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\underbrace{\cancel{\nu}}_{\text{négl}}+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right]$$

$$\Rightarrow 0 = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right]$$

L'équation pour ϵ devient :

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \epsilon}{\partial x}}}_{\text{négligé}} + v\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = C_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 - C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right]$$

$$\nu_t = C_\mu k^2/\epsilon$$

Par ailleurs, dans la couche logarithmique, la vitesse suit la loi :

[illegible]

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{y\,u_\tau}{\nu} + C$$

Donc $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa}\,\frac{\cancel{\nu}}{y\,\cancel{u_\tau}}\,\frac{\cancel{u_\tau}}{\cancel{\nu}} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\nu_t}{\sigma_k}\dfrac{\partial k}{\partial y}\right] = -\nu_t\left(\dfrac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\dfrac{1}{y^2} + \epsilon \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\dfrac{\partial \epsilon}{\partial y}\right] = -C_{\epsilon 1}\,\dfrac{\epsilon}{k}\,\nu_t\left(\dfrac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\dfrac{1}{y^2} + C_{\epsilon 2}\,\dfrac{\epsilon^2}{k} \end{cases}$$

On peut vérifier que la solution est de la forme:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} = \text{cte}, \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$$

En effet : $\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

$$0 = -\nu_t\left(\frac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\frac{1}{y^2} + \frac{u_\tau^3}{\kappa y} =$$

$$= -C_\mu\frac{k^2}{\epsilon}\left(\frac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\frac{1}{y^2} + \frac{u_\tau^3}{\kappa y} =$$

$$= -\cancel{C_\mu}\,\frac{u_\tau^4}{\cancel{C_\mu}}\,\frac{\kappa \cancel{y}}{\cancel{u_\tau^3}}\left(\frac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\frac{1}{y^2} + \frac{u_\tau^3}{\kappa y} =$$

$$= -\cancel{\frac{u_\tau^3}{\kappa y}} + \cancel{\frac{u_\tau^3}{\kappa y}} \Rightarrow \text{OK}$$

Et $$\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = -\frac{u_\tau^3}{\kappa y^2} \Rightarrow \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_\epsilon}C_\mu\frac{k^2}{\epsilon}\left(-\frac{u_\tau^3}{\kappa y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\epsilon}\cancel{C_\mu}\,\frac{u_\tau^4}{\cancel{C_\mu}}\,\frac{\cancel{\kappa y}}{\cancel{u_\tau^3}}\left(-\frac{\cancel{u_\tau^3}}{\cancel{\kappa} y^2}\right) = -\frac{u_\tau^4}{\sigma_\epsilon y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\; u_\tau^4 \;\right] \quad u_\tau^4\left(\;1\;\right) \quad u_\tau^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{u_\tau^4}{\sigma_\epsilon y}\right] = -\frac{u_\tau^4}{\sigma_\epsilon}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{u_\tau^4}{\sigma_\epsilon y^2}$$

$$-C_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{k}\nu_t\left(\frac{u_\tau}{\kappa}\right)^2\frac{1}{y^2} = -C_{\epsilon 1}\frac{\cancel{u_\tau^3}}{\cancel{\kappa y}}\frac{\sqrt{C_\mu}}{\cancel{u_\tau^2}}\cancel{C_\mu}\frac{u_\tau^4}{\cancel{C_\mu}}\frac{\cancel{\kappa y}}{\cancel{u_\tau^3}}\left(\frac{\cancel{u_\tau}}{\kappa}\right)^2\frac{1}{y^2}$$

$$= -C_{\epsilon 1}\frac{u_\tau^4}{\kappa^2 y^2}\sqrt{C_\mu}$$

$$C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k} = C_{\epsilon 2}\frac{u_\tau^{6\,4}}{\kappa^2 y^2}\frac{\sqrt{C_\mu}}{\cancel{u_\tau^2}} = C_{\epsilon 2}\frac{u_\tau^4}{\kappa^2 y^2}\sqrt{C_\mu}$$

On met tous les termes dans l'équation de ϵ :

$$\frac{\cancel{u_\tau^4}}{\sigma_\epsilon \cancel{y^2}} = -C_{\epsilon 1}\frac{\cancel{u_\tau^4}}{\kappa^2\cancel{y^2}}\sqrt{C_\mu} + C_{\epsilon 2}\frac{\cancel{u_\tau^4}}{\kappa^2\cancel{y^2}}\sqrt{C_\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa^2 = \sqrt{C_\mu}\,\sigma_\epsilon\left(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}\right)}$$

En remplaçant les constantes du modèle, on obtient : $\kappa = 0,433$, ce qui plus élevé que la valeur classique $\kappa = 0,41$ utilisée couramment pour des couches limites incompressible haut-Reynolds.