Année 2017-2018

UE 4AM01 - partie Fluides
Examen session 2 - Jeudi 3 mai 2018 - durée 2h

L'usage de documents et d'appareils électroniques est interdit. En cas de blocage sur une question, l'énoncé est rédigé de manière telle que les questions suivantes peuvent souvent être résolues. Vous apporterez un soin particulier à la rédaction.

Coulage d'un mur de béton

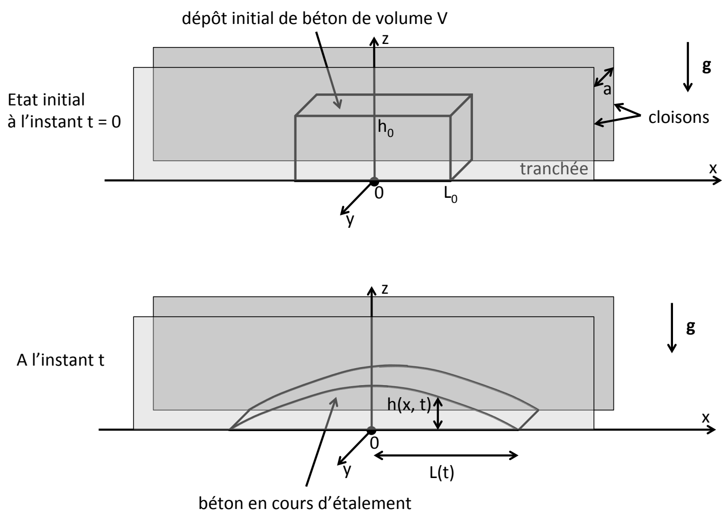

FIGURE 1 –

On souhaite construire un mur de béton en coulant du béton fluide entre deux cloisons verticales parallèles formant une tranchée de largeur a, comme schématisé sur la figure 1. On fait couler d'une bétonnière un tas de béton encore fluide de volume V au milieu des cloisons et on souhaite que le béton s'étale sous l'effet de son poids jusqu'aux extrémités de la tranchée avant de "prendre" (se solidifier). Le but de ce problème est de déterminer la dynamique d'étalement du béton liquide pour savoir si le béton a le temps de s'étaler avant de prendre.

Le béton liquide est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement μ. L'accélération de la gravité est notée $\underline{g}$. On suppose les cloisons suffisamment proches pour que le volume de béton soit invariant selon (Oy) et que son écoulement soit bidimensionnel, inscrit dans le plan (Oxz). En conséquence, la forme du volume de béton est entièrement donnée par sa hauteur h (hauteur de sa surface libre) fonction de l'abscisse x et du temps t. Enfin, on suppose que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon (Oy). Son champ de vitesse $\underline{u}$, inscrit dans le plan (Oxz), ainsi que son champ de pression P sont donc fonctions de x, z et t seulement.

1 Modélisation de l'écoulement (sur 33 points)

1.1 Mise en équations (sur 13 points)

Equations-bilan

1. L'écoulement du béton est-il stationnaire ?

> **Solution:** La surface libre du béton étant mobile, l'écoulement est par nature instationnaire. **1 point**

On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que non seulement il puisse être considéré comme isovolume mais aussi que l'accélération du béton puisse être négligée dans l'analyse de son écoulement (hypothèse d'évolution quasistationnaire). Les équations de bilan de matière et de quantité de mouvement s'expriment donc sous la forme simplifiée :

$$0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \tag{1}$$

$$\underline{0} = -\underline{\nabla} P + \mu \, \Delta \underline{u} + \rho \underline{g} \tag{2}$$

Dans le repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_z)$ associé aux coordonnées cartésiennes (x, z), on note $\underline{u} = u \, \underline{e}_x + v \, \underline{e}_z$ et $\underline{g} = -g \, \underline{e}_z$.

2. Ecrivez les trois équations scalaires liant u, v et P resultant de l'expression de (1) et (2) en coordonnées cartésiennes.

> **Solution:**
>
> $$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \textbf{1 point}$$
>
> $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \textbf{1 point}$$
>
> $$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho g \quad \textbf{1 point}$$

Conditions aux limites

3. **Conditions au fond de la tranchée -** Traduisez l'imperméabilité du fond de la tranchée et l'adhérence du béton sur le fond.

> **Solution:**
>
> $$\text{adhérence : } u(x, 0, t) = 0 \text{ pour } -L(t) \leq x \leq L(t), \ \forall t \quad \textbf{0,5 point}$$
>
> $$\text{imperméabilité : } v(x, 0, t) = 0 \text{ pour } -L(t) \leq x \leq L(t), \ \forall t \quad \textbf{0,5 point}$$

4. **Condition cinématique à la surface -** La surface libre du béton peut être décrite comme la surface isovaleur zéro de la fonction $f(x, z, t) = z - h(x, t)$. Exprimez le vecteur unitaire normal à la surface libre du béton orienté vers le haut $\underline{n}$ en fonction de h et ses dérivées partielles.

Solution: $\underline{\nabla} f$ est normal aux surfaces isovaleur de f donc à la surface libre. $\underline{n} = \frac{\underline{\nabla} f}{\|\underline{\nabla} f\|}$ donc :

$$\underline{n} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \underline{e}_z \text{ **1 point**}$$

5. Le caractère constant de f le long de la surface libre se traduit par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u}|_{\text{s. l.}} \cdot \underline{\nabla} f = 0$$

où $|_{\text{s.l.}}$ indique que la grandeur est évaluée à l'endroit de la surface libre. Montrez que :

$$v|_{\text{s.l.}} = \frac{\partial h}{\partial t} + u|_{\text{s.l.}} \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3}$$

Solution: Compte tenu de $f(x, z, t) = z - h(x, t)$,

$$\frac{df}{dt} = 0 = -\frac{\partial h}{\partial t} + u|_{\text{s. l.}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right) + v|_{\text{s. l.}} \times 1 \text{ cqfd } \textbf{1 point}$$

6. **Condition dynamique à la surface -** La viscosité et l'inertie de l'air sont tellement faibles devant celles du béton que tout se passe pour l'écoulement comme si l'air au-dessus du béton liquide restait immobile à la pression atmosphérique P_0. Sous cette hypothèse, la continuité de la contrainte à la surface libre du béton $\underline{T}|_{\text{s.l.}}$ s'écrit :

$$\underline{T}|_{\text{s.l.}} = \underline{\underline{\sigma}}\Big|_{\text{s.l.}} \cdot \underline{n} = -P_0 \, \underline{n} \tag{4}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes qui a pour expression intrinsèque $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T)$, $\underline{\underline{1}}$ étant le tenseur identité. Montrez que :

$$\left(-P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\text{s.l.}} n_x + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\text{s.l.}} n_z = -P_0 n_x \tag{5}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\text{s.l.}} n_x + \left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Bigg|_{\text{s.l.}} n_z = -P_0 n_z \tag{6}$$

Solution: En coordonnées cartésiennes, $\underline{\underline{D}}$ a pour expression :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

d'où (5) et (6). **1 point**

Formulation intégrale de la conservation de la matière

7. En intégrant par rapport à z de l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, montrez que :
$$v(x,h(x,t),t) = -\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z,t)dz \tag{7}$$

Solution: $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ s'intègre par rapport à z en
$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial v}{\partial z}dz = v(x,h(x,t),t) - \underbrace{v(x,0,t)}_{0} = -\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z,t)dz \quad \textbf{1 point}$$

8. Montrez que :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)dz\right) = \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z,t)dz + u(x,h(x,t),t)\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \tag{8}$$

Pour cela, vous pourrez éventuellement utiliser la fonction $H(x,z) = \int_0^z u(x,z^{'})dz^{'}$ et évaluer $\frac{dH(x,z(x))}{dx}$, puis rajouter la variable t et remplacer $z(x)$ par $h(x,t)$.

Solution: **sur 2 points**
Si z est indépendant de x :
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^z u(x,z^{'})dz^{'}\right) = \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x}(x,z^{'})dz^{'}$$
Si z dépend de x :
$$\begin{aligned}\frac{dH(x,z(x))}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x,z(x)) + \frac{dz}{dx}(x)\,\frac{\partial H}{\partial z}(x,z(x)) \\ &= \int_0^{z(x)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z^{'})dz^{'} + \frac{dz}{dx}\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^z u(x,z^{'})dz^{'}\right)}_{u(x,z(x))}\end{aligned}$$

Donc en rajoutant la variable t et en remplaçant $z(x)$ par $h(x,t)$, l'égalité ci-dessus devient :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)dz\right) = \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z^{'},t)dz^{'} + \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,u(x,h(x,t))$$

9. Déduisez de (3), (7) et (8) :
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)dz\right) \tag{9}$$

Solution: **sur 2 points**
(3) se réécrit :
$$\frac{\partial h}{\partial t} = v|_{\text{s.l.}} - u|_{\text{s.l.}} \frac{\partial h}{\partial x}$$
Or (8) se réécrit :
$$u|_{\text{s.l.}} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)dz\right) - \underbrace{\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z,t)dz}_{-v|_{\text{s.l.}} \text{ compte tenu de (7)}}$$
d'où (9).

1.2 Adimensionnement (sur 5 points)

Le béton occupe initialement un volume V approximativement parallélépipédique de largeur a, de longueur $2L_0$ et de hauteur h_0, voir la figure 1, avec $h_0 \ll L_0$.
Dans la suite, vous effectuerez les adimensionnements suivants : $x = L_0\,\bar{x}$, $z = h_0\,\bar{z}$, $u = U\bar{u}$ (U échelle de vitesse inconnue à ce stade), $v = V\bar{u}$ (V échelle de vitesse inconnue à ce stade) $p = P_0 + \delta P\,\bar{p}$ (P_0 est la pression de l'air, supposée constante, δP est l'échelle de pression inconnue à ce stade), où $\bar{\alpha}$ est la notation de la partie analytique de la variable α, α pouvant être x, z, t, u, v, P. Vous n'adimensionnerez pas t à ce stade.

10. Adimensionnez l'équation de bilan de matière écrite à la question 2, puis appliquez-lui le Principe de Non Simplification Abusive pour proposer une relation entre U et V faisant intervenir le paramètre $\varepsilon = h_0/L_0$.

Solution:
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V L_0}{U h_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$
A ce stade de l'analyse, on n'a aucune raison de négliger a priori l'un des termes de cette équation, donc on a $\frac{VL_0}{Uh_0} \sim 1$. On pose donc $V = \frac{h_0}{L_0}U = \varepsilon U$. **1 point**

11. Adimensionnez les deux équations scalaires de bilan de quantité de mouvement écrites à la question 2 en effectuant les simplifications automatiques, en utilisant la relation entre U et V établie à la question 10 et en faisant apparaître les grandeurs sans dimension suivantes : $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$, $\frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2}$ et ε.

Solution: Compte tenu de $\varepsilon \ll 1$,
$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2}\left(\underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}\right) \quad \textbf{1 point}$$
$$0 = -\frac{\delta P}{\rho g h_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\delta P}{\rho g h_0}\frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2}\varepsilon^2\left(\underbrace{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}\right) - 1 \quad \textbf{1 point}$$

12. Adimensionnez les conditions au fond de la tranchée.

Solution: En définissant $\bar{L}(t) = L(t)/L_0$,

$$\begin{array}{rcl} \bar{u}(\bar{x},0,t) & = & 0 \text{ pour } -\bar{L}(t) \leq \bar{x} \leq \bar{L}(t), \forall t \ \textbf{0,5 point} \\ \bar{v}(\bar{x},0,t) & = & 0 \text{ pour } -\bar{L}(t) \leq \bar{x} \leq \bar{L}(t), \forall t \ \textbf{0,5 point} \end{array}$$

13. Adimensionnez (9). Déduisez-en une échelle T pour t et adimensionnez t.

Solution: $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\frac{U}{L_0}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{z}\right)$ (**0,5 point**) donc en posant $t = T\bar{t}$ avec $T = \frac{L_0}{U}$ (**0,5 point**),

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\int_0^{\bar{h}} \bar{u} d\bar{z}\right)$$

1.3 Analyse physique (sur 15 points)

14. Appliquez le Principe de Non Simplification Abusive à l'équation de bilan de quantité de mouvement correspondant à la direction principale de l'écoulement pour proposer une valeur pour $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$.

Solution: La direction principale de l'écoulement est la direction (Ox) **0,5 points**. L'équation de bilan de quantité de mouvement selon (Ox) ne présente que 2 termes. A ce stade de l'analyse, on n'a aucune raison de négliger a priori l'un des termes de cette égalité et on suppose donc qu'ils s'équilibrent l'un l'autre, c'est-à-dire $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} \sim 1$. On pose donc $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} = 1$. **1 point**

15. Considérez maintenant l'autre direction de l'écoulement.
    (a) Quel sont les termes moteurs, de frein, les conséquences de l'écoulement ?
    (b) En déduire une relation valable en ordre de grandeur entre $\frac{\delta P}{\rho g h_0}$, $\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}$ et ε.
    (c) En déduire les lois d'échelles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \delta P & = & \rho g h_0 \\ U & = & \dfrac{\rho g h_0^3}{\mu L_0} \end{array}$$

Solution:

(a) Considérons maintenant la direction (Oz) **0,5 points**. La gravité est le moteur de l'écoulement, la viscosité en est le frein, le gradient de pression est une conséquence de l'écoulement. **1,5 points**

(b) Dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, le terme moteur doit être équilibré par le frein ou la conséquece :

$$1 \sim \text{Sup}\left(\frac{\delta P}{\rho g h_0}, \frac{\delta P}{\rho g h_0}\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2}\varepsilon^2\right) \quad \textbf{1 point}$$

(c) Or $\frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2} \sim 1$ donc $\frac{\delta P}{\rho g h_0} \; \frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2} \varepsilon^2 \sim \frac{\delta P}{\rho g h_0} \; \varepsilon^2 \ll \frac{\delta P}{\rho g h_0}$ donc nécessairement $\frac{\delta P}{\rho g h_0} \sim 1$ (**1 point**). On pose donc $\frac{\delta P}{\rho g h_0} = 1$. Comme $\frac{\mu U L_0}{\delta P\, h_0^2} = 1$, on a finalement $\delta P = \rho g h_0$ et $U = \frac{\rho g h_0^3}{\mu L_0}$ (**1 point**).

16. Montrez qu'en ne retenant que les termes dominants, l'adimensionnement des relations 5 et 6 en tenant compte des lois d'échelles données en question 15c conduit à :

$$\bar{p}\big|_{\text{s.l.}} = 0 \tag{10}$$
$$\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} = 0 \tag{11}$$

Solution: sur 3 points
$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U}{h_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{V}{L_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}$. Or $\frac{V}{L_0} = \varepsilon^2 \frac{U}{h_0} \ll \frac{U}{h_0}$ donc en ne conservant que les termes dominants $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U}{h_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$. De même, $\underline{n} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\, \underline{e}_x + \underline{e}_z$. Les relations 5 et 6 se réécrivent donc :

$$\begin{aligned}
\left.\left(-\delta P\, \bar{p} + 2\mu \frac{U}{L_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)\right|_{\text{s.l.}} \left(-\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right) + \mu \frac{U}{h_0}\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} &= 0 \\
\mu \frac{U}{h_0}\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} \left(-\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right) + \left.\left(-\delta P\, \bar{p} + 2\mu \frac{V}{h_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}\right)\right|_{\text{s.l.}} &= 0
\end{aligned}$$

$\mu \frac{U}{L_0} = \varepsilon^2\, \delta P$ et $\mu \frac{U}{h_0} = \varepsilon\, \delta P$ donc la première relation se réécrit :

$$\bar{p}\big|_{\text{s.l.}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} = 0$$

$\mu \frac{V}{h_0} = \varepsilon \frac{\mu U}{h_0} = \varepsilon^2\, \delta P$ donc la deuxième relation se réécrit :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} + \bar{p}\big|_{\text{s.l.}} = 0$$

On en déduit qu'à l'ordre dominant, $\bar{p}\big|_{\text{s.l.}} = 0$, donc que $\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right|_{\text{s.l.}} = 0$.

17. Montrez qu'en ne conservant que les termes dominants les équations de bilan s'écrivent finalement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{12}$$
$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \tag{13}$$
$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1 \tag{14}$$

Solution: $V = \varepsilon U$ donc $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$ **0,5 point**.
$\frac{\mu U L_0}{\delta P h_0^2} = 1$ donc $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}$ **0,5 point**.
$\varepsilon \ll 1$ et $\frac{\delta P}{\rho g h_0} = 1$ donc à l'ordre dominant : $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -1$ **0,5 point**.

18. Déterminez $\bar{p}$.

Solution: On intègre (14) en tenant compte de (10) : $\bar{p}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{h}(\bar{x}) - \bar{z}$. **1 point**

19. En intégrant (13), montrez que :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{2} - \bar{h} \right)$$

Solution: **sur 2 points**
$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ donc en intégrant par rapport à $\bar{z}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} + f(\bar{x})$. Or d'après (11) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x}, t)) = 0 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{h} + f(\bar{x})$$

donc $f(\bar{x}) = -\bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(\bar{z} - \bar{h})$. En intégrant encore une fois par rapport à $\bar{z}$, $\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} - \bar{h}\bar{z} \right) + g(\bar{x})$. Or $\bar{u}(\bar{x}, 0, t) = 0$ donc $g(\bar{x}) = 0$ donc $\bar{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{2} - \bar{h} \right)$.

20. En injectant cette expression de $\bar{u}$ dans l'expression adimensionnée de $\frac{\partial h}{\partial t}$ trouvée en question 13, déterminez l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit $\bar{h}$.

Solution: **sur 1 point**

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{h}^4}{\partial \bar{x}^2}$$

2 Analyse dimensionnelle (sur 7 points)

L'objet de cette partie est de déterminer une loi d'échelle pour l'évolution temporelle de l'étalement du béton par analyse dimensionnelle.

21. Exprimez l'aire S de la portion de cloison mouillée par le béton en fonction de V et de a et justifiez pourquoi S est constante au cours de l'écoulement.

Solution: Le volume de béton étant invariant selon (Oy), $S = \frac{V}{a}$. V étant conservé, S est constante. **0,5 point**

22. On rappelle que les cloisons sont lubrifiées à l'eau de telle manière que le béton n'adhère pas aux cloisons, si bien que l'écoulement du béton est invariant selon (Oy). Déduisez-en quel paramètre géométrique n'a pas d'influence sur l'étalement du béton.

Solution: L'écoulement du béton est invariant selon la direction perpendiculaire aux cloisons, donc la distance entre les cloisons a n'a pas d'influence sur l'écoulement. **0,5 point**

23. Par analyse dimensionnelle, proposez une loi d'évolution temporelle de la demi-longueur de la flaque de béton L (cf. figure 1) exprimée à l'aide de grandeurs sans dimension. Compte tenu de la nature bidimensionnelle de l'écoulement du béton, vous considérerez la surface mouillée S plutôt que son volume V comme paramètre pertinent. Pour former les grandeurs sans dimensions, vous emploierez g, S et ρ en justifiant préalablement pourquoi vous pouvez choisir ces trois grandeurs.

Solution: **sur 6 points**
L est fonction du temps t, du volume de béton représenté par la surface mouillée S, du moteur de l'écoulement, à savoir le poids du béton, impliquant ρ et g, ainsi que de ses freins, à savoir sa viscosité μ et son inertie ρ :

$$L = f(t, \rho, \mu, g, S) : n + 1 = 6 \text{ \textbf{1 point}}$$

Au sein de la classe de systèmes d'unités incluant le système international, les unités de longueur, de masse et de temps sont suffisantes pour exprimer les 6 grandeurs liées entre elles : $k = 3$. D'après le théorème Pi, cette loi peut donc s'exprimer entre $n + 1 - k = 3$ grandeurs sans dimensions. **1 point**
On forme ces 3 GSD à l'aide de $k = 3$ grandeurs dimensionnellement indépendantes. g, S et ρ étant 3 grandeurs dimensionnellement indépendantes (g est la seule à impliquer le temps, ρ la seule à impliquer la masse **1 point**), ceci permet effectivement de les choisir. En cherchant à adimensionner L, t et μ à l'aide de g, S et ρ on forme alors les GSD suivants : $\Pi = LS^{-1/2}$ (**1 point**), $\Pi_1 = tg^{1/2}S^{-1/4}$ (**1 point**), $\Pi_2 = \nu g^{-1/2}S^{-3/4}$ (**1 point**) où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du béton. D'où :

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2)$$