Ecrit 1 - Mardi 19 mars 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures
Barême approximatif : exercice 1 sur 10 points, exercice 2 sur 8 points, rédaction sur 2 points.
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints.

Exercice 1 : Pièce mécanique en flexion sous l'action d'une force terminale

On étudie une pièce cylindrique de génératrice parallèle à l'axe $(O, \underline{e}_1)$ de longueur l dans cette direction, de section rectangulaire de dimensions $2\,h$ dans la direction $\underline{e}_2$ et $2\,e$ dans la direction $\underline{e}_3$. L'origine O du repère est pris au centre de la base S_0 d'équation $x_1 = 0$, (Figure 1).
La pièce est réalisée dans un matériau supposé élastique linéaire, homogène isotrope, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν.
Elle est en équilibre sous les sollicitations suivantes :

- Les efforts volumiques sont négligeables.
- La base S_0 : $x_1 = 0$, est encastrée.
- La base S_l : $x_1 = l$, est soumise à des efforts dont le torseur résultant est connu et a pour éléments de réduction au point A $(l, 0, 0)$ centre de la face S_l:

$$\underline{R} = P\,\underline{e}_2 \qquad \underline{M}(A) = \underline{0},$$

P étant une constante positive donnée.

- Les surfaces latérales $\Gamma_2^{\pm}$ d'équation $x_2 = \pm h$ et $\Gamma_3^{\pm}$ d'équation $x_3 = \pm e$ sont libres d'efforts.

Enfin, l'hypothèse des petites perturbations est supposée licite.

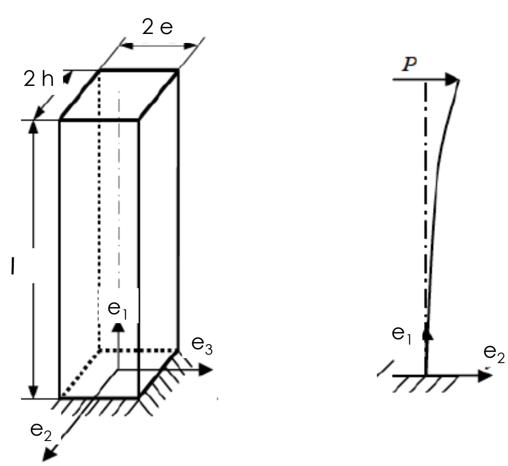


Figure 1: Géométrie de la pièce en flexion.

1. Ecrire les équations et conditions aux limites du problème posé.

Ce problème est-il régulier ou non ?

Discuter de l'existence et l'unicité d'une solution. On justifiera la réponse.

2. On se propose de rechercher une solution de ce problème en supposant que le champ de contraintes est plan parallèlement au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Rappeler la forme du champ de contraintes sous cette hypothèse.

En s'appuyant sur les équations d'équilibre, montrer que, sous l'hypothèse des contraintes planes, les composantes d'un tenseur des contraintes appartenant à l'espace des champs statiquement admissibles s'expriment en fonction des dérivées secondes d'une fonction $\chi(x_1, x_2)$.

3. On recherche la fonction $\chi(x_1, x_2)$ sous la forme d'un polynôme de la forme suivante :

$$\chi(x_1, x_2) = \alpha\, x_1 x_2^3 + \beta\, x_2^3 + \gamma\, x_1^2 + \delta\, x_1\, x_2,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes.

Déterminer les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que le champ de contraintes associé à la fonction $\chi(x_1, x_2)$ satisfasse les conditions aux limites en efforts du problème.

On vérifiera que le tenseur des contraintes ainsi obtenu est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = \frac{P}{I}\, x_2\, (x_1 - l)\, [\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\,] + \frac{P}{2I}\, (\, h^2 - x_2^2\,)[\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1\,]$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel et I le moment d'inertie géométrique de la section S_l défini par $I = \int\int_{S_l} x_2^2\, dS$.

4. Calculer le champ de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ associé.

Donner les équations que doit nécessairement satisfaire ce champ de déformation pour conduire à une solution du problème.

En déduire que le champ de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ calculé ne peut conduire qu'à une solution approchée du problème.

Justifier cette approximation dans le cas où l'épaisseur e de la pièce dans la direction $\underline{e}_3$ est supposée petite devant les dimensions l et h.

5. *Compte-tenu de l'approximation mise en évidence à la question précédente, on ne s'intéressera qu'aux composantes u_1 et u_2 selon les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ du champ de déplacement. Ces composantes seront supposées dépendantes seulement des variables (x_1, x_2). On ne cherchera pas à assurer leur compatibilité dans la direction $\underline{e}_3$.*

Déterminer des composantes $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ du champ de déplacement dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ associé au tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ en considérant uniquement les équations associées aux composantes ϵ_{11}, ϵ_{22} et ϵ_{12}.

Montrer que ce champ est une approximation du champ de déplacement solution lorsque la longueur l de la pièce est grande devant les dimensions de la section h et e.

6. On définit le module de rigidité à la flexion k de la pièce en fonction du déplacement à l'extrémité $A : (l, 0, 0)$ de la pièce par la relation :

$$k\,P \;=\; \underline{u}(A)\,.\,\underline{e}_2.$$

Montrer que la solution approchée développée dans cet exercice conduit à la valeur du module de rigidité à la flexion de $k \;=\; l^3\,/(\,3\,E\,I\,)$.

Exercice 2 : Arbre cylindrique creux en torsion

On considère un arbre cylindrique creux de hauteur h, de génératrices parallèles à l'axe $(O, \underline{e}_3)$. On note Σ_0 et Σ_h les bases extrêmales d'équations $x_3 \;=\; 0$ et $x_3 \;=\; h$ et ω une section droite de l'arbre. La frontière de la section droite est constituée du contour intérieur noté $\mathcal{C}_i$ et du contour extérieur noté $\mathcal{C}_e$. Ces contours sont quelconques. Les surfaces latérales intérieures et extérieures de l'arbre sont notées respectivement Σ_{int} d'équation $\mathcal{C}_i \cup]0, h[$ et Σ_{ext} d'équation $\mathcal{C}_e \cup]0, h[$, (Figure 2).
L'arbre est constitué d'un matériau élastique homogène isotrope et est en équilibre sous l'action des efforts suivants:

- Les surfaces latérales Σ_{int} et Σ_{ext} sont libres d'efforts.
- La base Σ_0 est soumise à des efforts normaux nuls et au déplacement

$$u_1(x_1, x_2, 0) \;=\; u_2(x_1, x_2, 0) \;=\; 0.$$

- La base Σ_h est soumise à des efforts normaux nuls et au déplacement

$$u_1(x_1, x_2, h) \;=\; -\,\alpha\,x_2\,h, \qquad u_2(x_1, x_2, h) \;=\; \alpha\,x_1\,h,$$

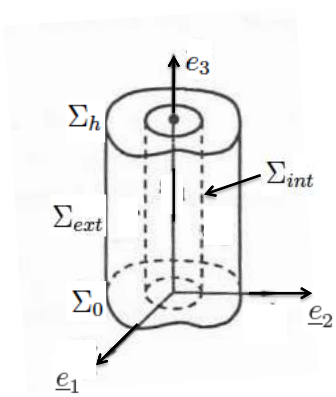
α étant la rotation unitaire de torsion constante.

- Les efforts volumiques sont supposés négligeables.

Enfin, l'hypothèse des petites perturbations est supposée licite.
Le champ de déplacement en tout point de la pièce est recherché, comme dans le cas de l'arbre plein traité en cours, sous la forme :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) \;=\; -\,\alpha\,x_2\,x_3, \qquad u_2(x_1, x_2, x_3) \;=\; \alpha\,x_1\,x_3, \qquad u_3(x_1, x_2, x_3) \;=\; \alpha\,\varphi(x_1, x_2),$$

où $\varphi(x_1, x_2)$ est une fonction inconnue à déterminer.



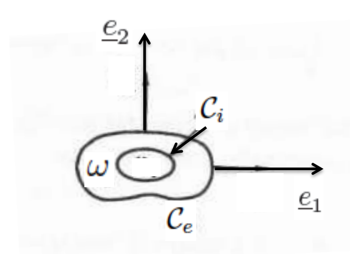


Figure 2: Géométrie de l'arbre creux en torsion.

1. Ecrire les équations et conditions aux limites du problème posé.

Ce problème est-il régulier ou non ? Si oui, quel est son type ?

La solution de ce problème est-elle unique en déplacement et en contraintes ? On justifiera la réponse.

2. Définir l'espace des champs cinématiquement admissibles $\mathcal{U}_{ad}$.

Mettre en oeuvre la démarche de résolution de ce problème par l'approche en déplacement en suivant la méthodologie adoptée en cours pour l'arbre plein.

Montrer que la fonction de gauchissement $\varphi(x_1, x_2)$ est solution du problème suivant posé dans la section droite ω :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x_1, x_2) &= 0, \ \text{dans}\, \omega, \\ \underline{\nabla}\varphi(x_1, x_2) \,.\, \underline{n}^e &= x_2\, n_1^e - x_1\, n_2^e, \ \text{sur}\, \mathcal{C}_e, \\ \underline{\nabla}\varphi(x_1, x_2) \,.\, \underline{n}^i &= x_2\, n_1^i - x_1\, n_2^i, \ \text{sur}\, \mathcal{C}_i, \end{aligned}$$

où Δ et $\underline{\nabla}$ désignent respectivement les opérateurs laplacien et gradient d'une fonction scalaire, où $\underline{n}_e$ et $\underline{n}_i$ désignent les normales extérieures unitaires aux contours extérieur $\mathcal{C}_e$ et intérieur $\mathcal{C}_i$.

Question bonus: Le problème satisfait par la fonction de gauchissement admet-il une unique solution? Justifier la réponse en s'appuyant sur le cours d'équations aux dérivées partielles pour la mécanique (LA 393).

3. Résoudre le problème satisfait par la fonction de gauchissement donné à la question 2. lorsque les contours $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_e$ sont des cercles concentriques de rayons respectivement R_i et R_e avec $R_i < R_e$.

4. Soit $\underline{M}$ le moment du torseur des efforts extérieurs exercés sur la face Σ_h au centre de la face, on rappelle que le module de rigidité à la torsion K de l'arbre est défini par : $\underline{M} \,.\underline{e}_3 \ = \ K\,\alpha$.

Montrer que le module de rigidité à la torsion de l'arbre creux à contours intérieur et extérieur circulaires vaut $K == \ \mu\,\pi\,(R_e^4 - R_i^4)/2$.

Que devient ce module lorsque le rayon intérieur R_i tend vers 0 ? Commenter ce résultat.