2A002, Bases de Thermodynamique

Partiel du 16/10/2017 - Durée 1h30. Tout document interdit.

— Inscrivez votre numéro d'anonymat **sur chacune des feuilles.**

— Les calculatrices, baladeurs et autres appareils électroniques sont interdits.
— Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
— Les sacs et manteaux doivent être déposés dans un coin de l'amphi ou de la salle pendant l'examen.
— Cet énoncé contient 11 pages. Les pages paires servent de brouillon.
— Ne pas dégrafer le sujet.
— Répondez directement sur le sujet.

Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, ajoutez une feuille par exercice en précisant votre numéro d'anonymat ainsi que l'exercice concerné.

brouillon

Exercice 1.

Soit la différentielle suivante $\delta S(T,p) = \frac{C_p}{T}dT + \frac{NR}{p}dp$, où C_p, N, R sont des constantes données.

1. Montrer mathématiquement que δS est une différentielle totale exacte.

2. Exprimer alors les dérivées partielles $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ de la fonction d'état S en fonction des variables T et p.

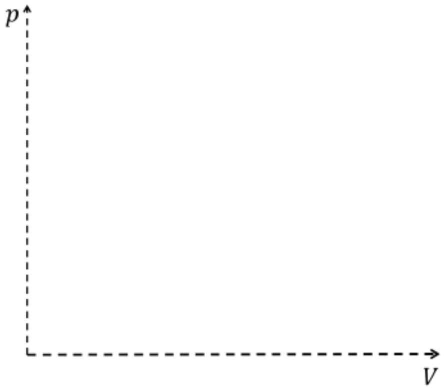
3. En intégrant le système précédent et en utilisant la donnée $S(T_0, p_0) = S_0$, calculer la fonction $S(T,p)$.

brouillon

Exercice 2.

On considère une masse m de gaz parfait, initialement à l'état d'équilibre 1, (V_1, p_1).

1. Sur le diagramme de Clapeyron ci-dessous, donner l'allure des transformations (A) et (B) suivantes, partant chacune de l'état 1 :
   Transformation (A) : Détente adiabatique réversible permettant de passer à l'état d'équilibre 2 défini par (V_2, p_2).
   Transformation (B) : Détente isotherme réversible suivie d'un refroidissement isochore réversible, permettant de rejoindre le même état d'équilibre 2 que précédemment.



transformation	W	Q	ΔU
(A)			
(B)			

2. Compléter le tableau ci-dessus en indiquant les signes des quantités : (< 0) ou (> 0) ou ($= 0$). Justifier les réponses en utilisant le cadre ci-dessous (on pourra s'appuyer sur la figure).

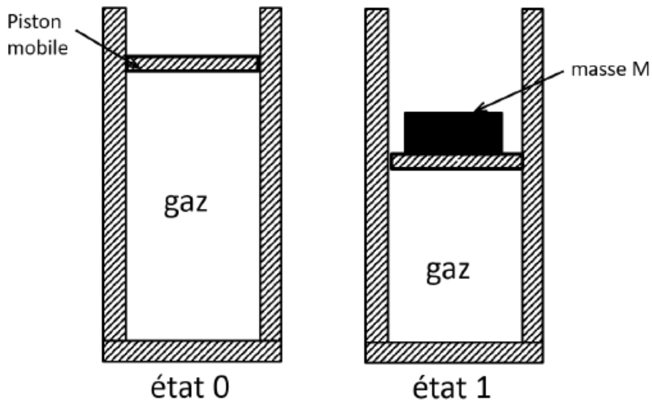
3. Application. Donner l'expression du travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B), et faire les applications numériques en choisissant parmi les données et résultats suivants : $V_1 = 0.5$ m^3, $p_1 = 10$ bar, $T_1 = 1000$ K, $V_2 = 2$ m^3, $p_2 = 1.425$ bar, $T_2 = 570$ K, $mr = 500$ J.K^{-1}, $mc_v = 1250$ J.K^{-1}, $\gamma = 1.4$, $\ln(4) \simeq 3/2 = 1.5$.

brouillon

Exercice 3

On considère une masse m de gaz parfait, enfermée dans un cylindre vertical de section S, fermé par un piston de masse négligeable qui peut coulisser verticalement sans frottement. Le cylindre et le piston sont adiabatiques. On note $\gamma = c_p/c_v$ le rapport des chaleurs massiques gaz, et r la constante du gaz parfait. L'atmosphère ambiante est caractérisée par sa température T_a et sa pression p_a, supposées constantes.. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. (**Question préliminaire.**) Donner les expressions de c_p et de c_v en fonction r et γ.



2. Le gaz est initialement à l'état d'équilibre noté (0) à la température $T_0 = T_a$ et pression $p_0 = p_a$. L'une de ces données était déductible de l'énoncé. Laquelle et pourquoi ?

Partie I

3. On dépose brusquement une masse donnée M sur le piston (voir Figure ci-dessus), et on note (1) l'état d'équilibre obtenu en fin de transformation. Que peut-on dire de la transformation (donner 3 qualificatifs) ?

4. Exprimer la pression du gaz p_1 à l'équilibre final en fonction des données.

brouillon

5. Exprimer le travail W_{01} et la quantité de chaleur Q_{01} échangés par le gaz avec le milieu extérieur en fonction de p_0, p_1, V_0 et V_1.

6. Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{01} du gaz, d'abord en fonction des températures T_0, T_1, m, r et γ, puis en fonction de γ, p_0, p_1, V_0 et V_1.

7. Déduire des questions précédentes que le volume V_1 s'exprime en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ, par

$$V_1 = \left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma}$$

brouillon

Partie II - Cette partie peut être traitée indépendamment, en utilisant le résultat donné à la question 7.

8. On part de l'équilibre précédent (état (1)), et on dépose brusquement sur le piston une deuxième masse presque égale à M, de telle sorte que la pression finale soit $p_2 = 2p_1$.
   Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (1) et (2).

9. Donner l'expression du volume final V_2 en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ.

10. On suppose maintenant qu'en repartant du même état initial (0), on dépose brusquement les 2 masses ensemble sur le piston, de telle sorte que la pression finale soit $p_{2'} = p_2 = 2p_1$.
    Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (2').

11. Donner l'expression du volume final $V_{2'}$ en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ.

12. En utilisant les résultats des questions précédentes, comparer V_2 et $V_{2'}$. Conclure.

Exercice 1.

Soit la différentielle suivante $\delta S(T,p) = \frac{C_p}{T} dT + \frac{NR}{p} dp$, où C_p, N, R sont des constantes données.

1. Montrer mathématiquement que δS est une différentielle totale exacte.

On a $\delta S = X(p,T)\,dT + Y(p,T)\,dp$ avec $X = \frac{C_p}{T}$, $Y = \frac{NR}{p}$

or $\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C_p}{T}\right)\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{NR}{p}\right)\right)_p = 0$

On a donc $\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p$ (égalité de Schwarz)

$\Rightarrow$ δS est totale exacte

2. Exprimer alors les dérivées partielles $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ de la fonction d'état S en fonction des variables T et p.

On a donc $\delta S = dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$

Par identification, on a donc :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{NR}{p}$$

3. En intégrant le système précédent et en utilisant la donnée $S(T_0, p_0) = S_0$, calculer la fonction $S(T,p)$.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T} & \Longrightarrow S(T,p) = C_p \ln T + g(p) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{NR}{p} & \qquad \Downarrow \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = g'(p) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow g'(p) = \frac{NR}{p} \Rightarrow g(p) = NR \ln p + K$$

$$\Rightarrow S(T,p) = C_p \ln T + NR \ln p + K$$

et $S(T_0, p_0) = S_0 \Rightarrow S_0 = C_p \ln T_0 + NR \ln p_0 + K$

$$\Rightarrow K = S_0 - C_p \ln T_0 - NR \ln p_0$$

$$\Rightarrow S(T,p) = C_p \ln \frac{T}{T_0} + NR \ln \frac{p}{p_0} + S_0$$

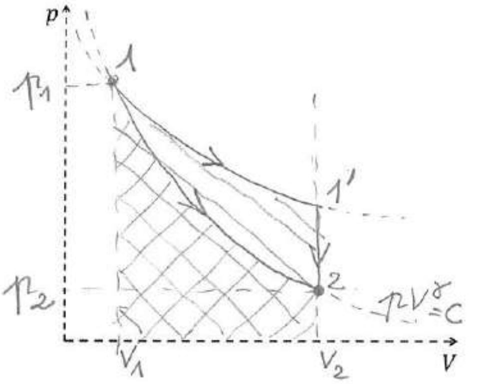
Exercice 2.

On considère une masse m de gaz parfait, initialement à l'état d'équilibre 1, (V_1, p_1).

1. Sur le diagramme de Clapeyron ci-dessous, donner l'allure des transformations (A) et (B) suivantes, partant chacune de l'état 1 :

   Transformation (A) : Détente adiabatique réversible permettant de passer à l'état d'équilibre 2 défini par (V_2, p_2).

   Transformation (B) : Détente isotherme réversible suivie d'un refroidissement isochore réversible, permettant de rejoindre le même état d'équilibre 2 que précédemment.



transformation	W	Q	ΔU
(A)	<0	0	<0
(B)	<0	>0	<0

2. Compléter le tableau ci-dessus en indiquant les signes des quantités : (<0) ou (>0) ou ($=0$). Justifier les réponses en utilisant le cadre ci-dessous (on pourra s'appuyer sur la figure).

Transformation (A) : $W_A = -\int_1^2 p\,dV$, or $dV > 0 \Rightarrow W_A < 0$ (aire sous la courbe)

$Q_A = 0$ (adiabatique) $\Rightarrow \Delta U_A < 0$ $(\Delta U_A = W_A + Q_A)$

Transformation (B) : $\Delta U_A = \Delta U_B$ (m̂ états de départ et d'arrivée)

$W_B = -\int_1^{1'} p\,dV$ avec $dV > 0 \Rightarrow W_B < 0$

et en comparant les aires, on voit

$|W_A| < |W_B| \Rightarrow -W_A < -W_B$

$\Rightarrow Q_B = \Delta U_B - W_B = \Delta U_A - W_B > \Delta U_A - W_A = Q_A$

$\Rightarrow Q_B > 0$

3. Application. Donner l'expression du travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur pour les transformations (A) et (B), et faire les applications numériques en choisissant parmi les données et résultats suivants : $V_1 = 0.5$ m^3, $p_1 = 10$ bar, $T_1 = 1000$ K, $V_2 = 2$ m^3, $p_2 = 1.425$ bar, $T_2 = 570$ K, $mr = 500$ J.K^{-1}, $mc_v = 1250$ J.K^{-1}, $\gamma = 1.4$, $\ln(4) \simeq 3/2 = 1.5$.

$W_A = \Delta U_A = mc_v(T_2 - T_1)$ AN : $W_A = 1250 \times (570 - 1000) = -1250 \times 430$
$= -5375 \times 10^2 = -537{,}5$ kJ

$W_B = -\int_1^{1'} p\,dV = -\int_1^{1'} mrT_1 \frac{dV}{V} = -mrT_1 \ln \frac{V_{1'}}{V_1} = -mrT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$

A.N. $W_B = -500 \times 1000 \ln \frac{2}{0{,}5} = -5 \times 10^5 \times \frac{3}{2} = -7{,}5 \times 10^5 = -750$ kJ

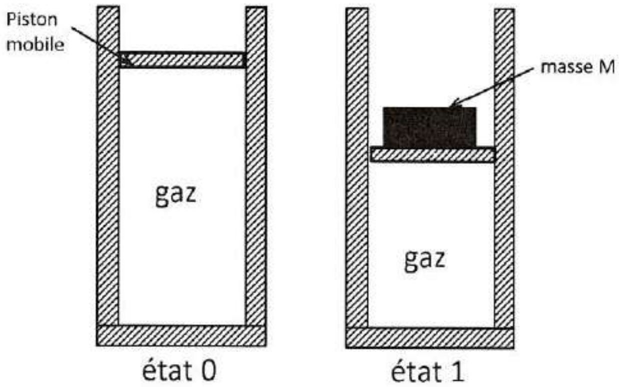
Exercice 3

On considère une masse m de gaz parfait, enfermée dans un cylindre vertical de section S, fermé par un piston de masse négligeable qui peut coulisser verticalement sans frottement. Le cylindre et le piston sont adiabatiques. On note $\gamma = c_p/c_v$ le rapport des chaleurs massiques gaz, et r la constante du gaz parfait. L'atmosphère ambiante est caractérisée par sa température T_a et sa pression p_a, supposées constantes.. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. (**Question préliminaire.**) Donner les expressions de c_p et de c_v en fonction r et γ.

Relation de Mayer : $c_p - c_v = r$, et $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

d'où : $\begin{cases} c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \\ c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \end{cases}$



2. Le gaz est initialement à l'état d'équilibre noté (0) à la température $T_0 = T_a$ et pression $p_0 = p_a$. L'une de ces données était déductible de l'énoncé. Laquelle et pourquoi ?

La donnée déductible est $p_0 = p_a$ (car il y a équilibre à l'état initial ⇒ le piston est à l'équilibre ⇒ $p_{ext} = p_0 = p_a$)

Partie I

3. On dépose brusquement une masse donnée M sur le piston (voir Figure ci-dessus), et on note (1) l'état d'équilibre obtenu en fin de transformation. Que peut-on dire de la transformation (donner 3 qualificatifs) ?

Il s'agit d'une compression, adiabatique, irréversible.

4. Exprimer la pression du gaz p_1 à l'équilibre final en fonction des données.

Equilibre du piston ⇒ $p_1 = p_a + \frac{Mg}{S}$

5. Exprimer le travail W_{01} et la quantité de chaleur Q_{01} échangés par le gaz avec le milieu extérieur en fonction de p_0, p_1, V_0 et V_1.

$$W_{01} = -\int_0^1 p_{ext}\, dV = -p_{ext}(V_1 - V_0)$$ car $p_{ext} = p_1$ pendant la transformation

$$\Rightarrow W_{01} = -p_1 (V_1 - V_0)$$

$$Q_{01} = 0$$ (transformation adiabatique)

6. Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{01} du gaz, d'abord en fonction des températures T_0, T_1, m, r et γ, puis en fonction de γ, p_0, p_1, V_0 et V_1.

$$\Delta U_{01} = m c_v (T_1 - T_0) = \frac{m r}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\left[m r T_1 - m r T_0\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\left[p_1 V_1 - p_0 V_0\right]$$

7. Déduire des questions précédentes que le volume V_1 s'exprime en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ, par

$$V_1 = \left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma}$$

1er principe $\Rightarrow \Delta U_{01} = W_{01}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 V_1 - p_0 V_0) = -p_1 (V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\gamma - 1} p_1 + p_1\right] V_1 = \left[\frac{1}{\gamma - 1} p_0 + p_1\right] V_0$$

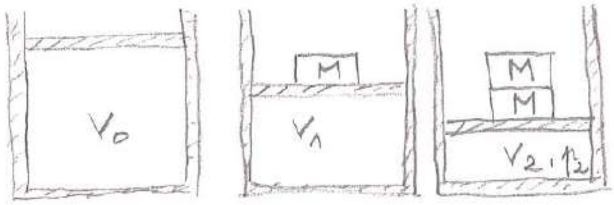
$$\Rightarrow \left[\frac{p_1 + (\gamma - 1) p_1}{\cancel{\gamma - 1}}\right] V_1 = \left[\frac{p_0 + (\gamma - 1) p_1}{\cancel{\gamma - 1}}\right] V_0$$

$$\Rightarrow \gamma p_1 V_1 = (p_0 + (\gamma - 1) p_1) V_0$$

$$\Rightarrow V_1 = \left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma}$$

Partie II - Cette partie peut être traitée indépendamment, en utilisant le résultat donné à la question 7.

8. On part de l'équilibre précédent (état (1)), et on dépose brusquement sur le piston une deuxième masse presque égale à M, de telle sorte que la pression finale soit $p_2 = 2p_1$.
Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (1) et (2).

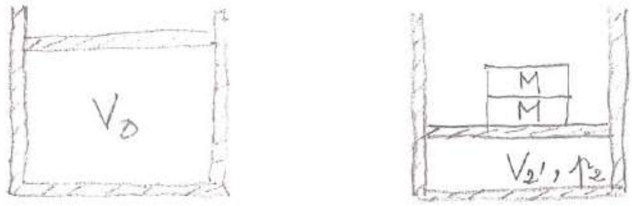


9. Donner l'expression du volume final V_2 en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ.

On utilise la formule de la question 7.

$$V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} + \gamma - 1\right)\frac{V_1}{\gamma} = \left(\frac{1}{2} + \gamma - 1\right)\frac{V_1}{\gamma} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma^2}$$

10. On suppose maintenant qu'en repartant du même état initial (0), on dépose brusquement les 2 masses ensemble sur le piston, de telle sorte que la pression finale soit $p_{2'} = p_2 = 2p_1$.
Faire un schéma de l'expérience, montrant les états (0), (2').



11. Donner l'expression du volume final $V_{2'}$ en fonction de V_0, p_1, p_0 et γ.

$$V_{2'} = \left(\frac{p_0}{p_2} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{2p_1} + \gamma - 1\right)\frac{V_0}{\gamma}$$

12. En utilisant les résultats des questions précédentes, comparer V_2 et $V_{2'}$. Conclure.

Regardons si $V_2 < V_{2'}$?

$$\iff \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right)\frac{\cancel{V_0}}{\gamma^{\cancel{2}}} < \left(\frac{p_0}{2p_1} + \gamma - 1\right)\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{\gamma}} \quad ?$$

$$\iff \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_0}{p_1} + \gamma - 1\right) < \gamma\left(\frac{p_0}{2p_1} + \gamma - 1\right) \quad ?$$

$$\iff \gamma\frac{p_0}{p_1} + \cancel{\gamma(\gamma-1)} - \frac{1}{2}\frac{p_0}{p_1} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} < \gamma\frac{p_0}{2p_1} + \cancel{\gamma(\gamma-1)} \quad ?$$

$$\iff \gamma\frac{p_0}{2p_1} - \frac{1}{2}\frac{p_0}{p_1} < \frac{\gamma-1}{2} \quad ?$$

$$\iff \frac{\gamma-1}{2}\frac{p_0}{p_1} < \frac{\gamma-1}{2} \quad ?$$

$$\iff p_0 < p_1 \quad \boxed{\text{oui}} \implies$$

Le piston s'enfonce + dans la 1ère expérience.