

SORBONNE UNIVERSITÉ
MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS



Compte-rendu :
Essais de flexion

Auteurs :
Clément LEVILLAIN
Valentin DUVIVIER
Gaspar DEFAYE

Superviseur :
Yves BERTHAUD

2 décembre 2019

Table des matières

1	Introduction	2
2	Théorie	2
3	Jauges de contrainte	4
3.1	Montage	4
3.2	Protocole expérimental	5
3.3	Résultats	5
4	Flexion en 30 pts	6
4.1	Montage	6
4.2	Protocole expérimental	6
4.3	Résultats	7
5	Comparaison des résultats	8
6	Calculs d'Erreurs	9
7	Conclusion	10

1 Introduction

Ce TP, "Essais de flexion trois points", a pour objectif de comparer théorie et expérimentation sur l'étude d'une poutre soumise à une flexion d'axe y descendant.

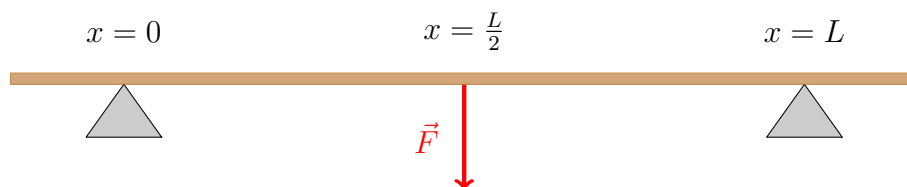
Le principe sera de faire des mesures sur la flexion d'une poutre soumise à une force F en son centre $x = \frac{L}{2}$, pour récupérer les mesures de déformations subies par cette même poutre.

Ces mesures seront réalisées de deux façons différentes : une fois directement, à l'aide d'un comparateur à cadran mesurant des variations de distances ; puis numériquement, à l'aide de jauges de déformations.

En comparant nos deux séries de mesures, nous pourrons alors déterminer de manière fiable l'évolution suivie par les déplacements en fonction de la contrainte normale σ , pour finalement en déduire le module d'Young E .

2 Théorie

Le schéma théorique de la poutre soumise à une flexion verticale est décrit sur le schéma suivant :

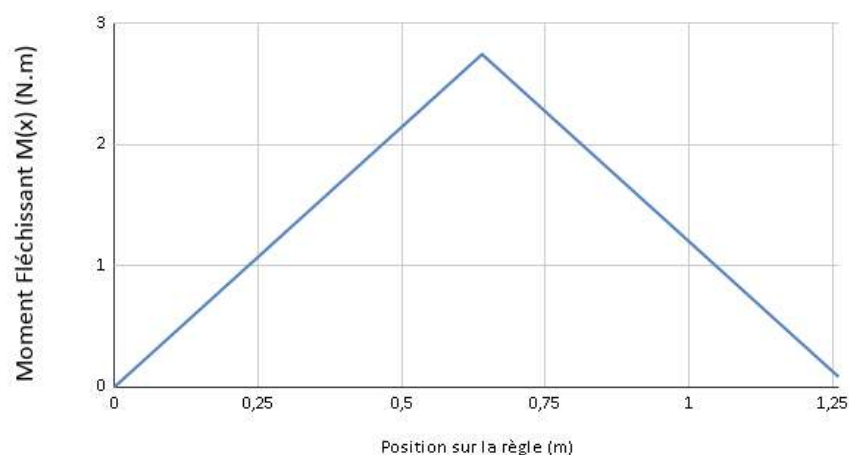


Notre poutre est fixée en $x = 0$ et $x = L$ tandis qu'elle subit une force en $x = \frac{L}{2}$, créant différentes flexions sur toute la longueur L . Ces flexions se représentent graphiquement par le biais du moment fléchissant décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} M(x) = \frac{F}{2}x & \text{pour } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ M(x) = \frac{F}{2}(L - x) & \text{pour } x \in [\frac{L}{2}, L] \\ M(x) = 0 & \text{pour } x \notin [0, L] \end{cases}$$

On retrouve ainsi l'évolution graphique suivante pour $M(x)$ (avec $L = 1,28$) :

Evolution du moment fléchissant en fonction de la position x



Pour notre étude, nous cherchons à mesurer les déplacements verticaux apparaissant lorsque la poutre est mise sous effort. Or, la mesure du déplacement ξ_y est liée au moment fléchissant par la formule suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi_y(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{E * I} * M(x) \quad (1)$$

Un dernier point qui nous est donné lors de cette étude sont les conditions aux limites de la fonction ξ_y . Ainsi, on sait qu'en $x = 0$ et $x = L$, les déplacements sont nuls, ce qui se remarque assez facilement visuellement.

De plus, considérant que la déformation de la poutre conserve les angles, on considère que l'angle entre la surface latérale et la surface supérieure de la poutre est toujours un angle droit, qui n'a subi qu'une légère rotation.

En somme, on se trouve ici dans une variation angulaire si petite qu'il devient acceptable de considérer l'hypothèse des petites déformations. On sait par ailleurs que le moment fléchissant est constant en $x = \frac{L}{2}$.

Ainsi, de par la relation que nous avons exposée plus haut et par l'hypothèse des petites déformations, il en découle une troisième condition sur ξ_y :

$$\frac{\partial \xi_y(L/2)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Il est à noter que l'on reste dans le domaine des petites déformations malgré le fait que l'on étudie des mouvements qui ne sont pas infinitésimaux. Cette distinction est nécessaire et elle nous permettra par la suite de justifier que nous sommes en mesure d'étudier expérimentalement un phénomène à petite échelle décrivant des déplacements infinitésimaux.

Finalement, nous sommes en mesure d'intégrer l'équation différentielle précédente et d'aboutir aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \xi_y = \frac{F}{E.I.48}(4x^3 - 3L^2x) & \text{pour } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \xi_y = \frac{F}{E.I.48}(12Lx^2 - 4x^3 - 9L^2x + L^3) & \text{pour } x \in [\frac{L}{2}, L] \\ \xi_y = 0 & \text{pour } x \notin [0, L] \end{cases}$$

Ces équations décrivent les déplacements subis par la poutre en tout point x en fonction de la force appliquée en son centre et des variables du système avec :

- **Le module de Young E ;**
- **Le moment d'inertie de la poutre I .**

Pour terminer cette étude théorique, nous allons retrouver le lien que nous avons introduit précédemment et qui lie la contrainte, les déplacements et le module d'Young par la formule suivante :

$$\sigma = \epsilon.E \quad (3)$$

Nous savons d'après le sujet que seules les composantes σ_{xx} et $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ sont non nulles. Nous allons nous aider dans cette partie de la formule suivante, qui met en lien les 3 variables attendues :

$$\epsilon_{\underline{\underline{1}}} = -\frac{\nu}{E}(tr(\sigma))_{\underline{\underline{1}}} + \frac{(1 + \nu)}{E}(\epsilon_{\underline{\underline{1}}}) \quad (4)$$

avec ν le coefficient de Poisson.

Par identification, on trouve les égalités suivantes :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E}$$

les autres composantes du tenseur des déformations $\epsilon_{\underline{1}}^{\underline{1}}$ étant nulles.

Nous verrons dans la partie étude des jauges que nous utiliserons l'équation ci-contre pour le calcul de E :

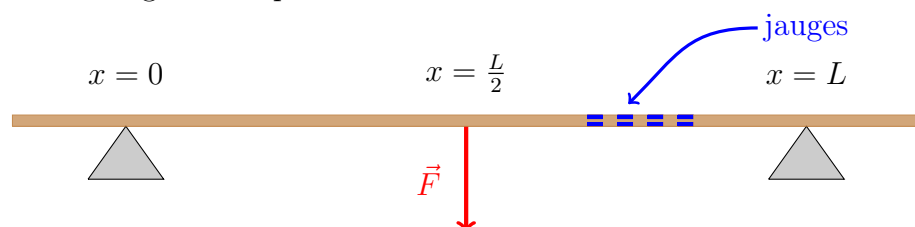
$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \text{ avec } \sigma_{xx} = -\frac{M(x).y}{I}$$

Maintenant que cette étude théorique sur le comportement de la poutre a été effectuée, nous allons pouvoir développer nos expériences et mettre en comparaison réflexion théorique et application expérimentale.

3 Jauges de contrainte

3.1 Montage

Le montage utilisé pour nos mesures est le suivant :



Il s'agit d'une poutre en laiton, de longueur $L = 1.28m$, largeur $b = 19.0mm$ et d'épaisseur $h = 6.4mm$, fixée en ses extrémités ($x = 0$ et $x = L$) à des supports . 4 couples de jauges de déformations y sont accrochés (une jauge par face), chacune espacée de $10cm$.

Les jauges sont reliées par câbles à un ordinateur, qui interprète les taux de déformations mesurés.

On va ainsi mettre ces jauges sous contraintes en disposant au milieu de la poutre différentes masses, amenant donc à différentes déformations. On relève les valeurs de ces déformations pour chaque masse testée et on en fait une représentation graphique en fonction de la contrainte, permettant d'avoir une représentation théorique du module d'Young E.

3.2 Protocole expérimental

On relève sur le logiciel les valeurs des déformations pour 4 chargements différents, placés au milieu de la poutre ($x = \frac{L}{2}$) :

- $m_0 = 0$ kg ;
- $m_1 = 0.766$ kg ;
- $m_2 = 1.969$ kg ;
- $m_3 = 2.769$ kg.

Les masses ont été choisies pour couvrir la plus grande plage de déformations possible. Les mesures à $m = 0$ kg nous permettent de déduire le taux de déformation $\Delta\epsilon = \epsilon_m - \epsilon_0$, débarrassé du fléchissement de la poutre sous son propre poids.

On relève la position de chaque jauge par rapport au bord $x = L$ de notre barre (nous nous plaçons donc dans l'intervalle $x \in [\frac{L}{2}, L]$, cf schéma).

On calcule ensuite

$$I = \frac{b.h^3}{12}$$

dans le but d'ensuite calculer

$$\sigma_{xx} = \frac{-M(x).y}{I} \quad \text{avec } y = \pm \frac{h}{2}$$

Et d'arriver enfin à

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\Delta\epsilon}$$

notre module de Young.

Les mesures effectuées ici auront ensuite pour but d'être comparées aux données théoriques données par les formules des ξ_y ainsi qu'aux mesures de la partie "Flexion en 30 points".

Il est important de remarquer que pour les jauges, les déplacements sur les faces supérieure et inférieure auront des interprétations différentes.

En effet, l'idée est qu'une jauge située sur la face supérieure (en $y = \frac{h}{2}$) va subir une compression, le déplacement $\Delta\epsilon$ sera donc négatif. Au contraire, une jauge sur la face inférieure ($y = -\frac{h}{2}$) sera liée à un $\Delta\epsilon > 0$.

Il y aura donc un équilibre dans les signes amenant nécessairement à un module d'Young $E > 0$.

3.3 Résultats

Les valeurs obtenues à l'utilisation du logiciel sont les suivantes :

	$m_0 = 0kg$	$m_1 = 0.766kg$	$m_2 = 1.969kg$	$m_3 = 2.769kg$	$x (m)$	$y (m)$	$I (kg.m^2)$
ϵ_1	-697 μ	-862 μ	-1,12m	-1,29m	0,53	0,0032	4,15.10 ⁻¹⁰
ϵ_2	-1,23m	-1,06m	-797 μ	-624 μ	0,53	-0,0032	
ϵ_3	-1,49m	-1,62m	-1,83m	-1,96m	0,43	0,0032	
ϵ_4	-1,91m	-1,77m	-1,56m	-1,41m	0,43	-0,0032	
ϵ_5	-824 μ	-927 μ	-1,09m	-1,19m	0,33	0,0032	
ϵ_6	-1,95m	-1,84m	-1,67m	-1,56m	0,33	-0,0032	
ϵ_7	-1,33m	-1,40m	-1,51m	-1,58m	0,23	0,0032	
ϵ_8	-2,51m	-2,44m	-2,33m	-2,25m	0,23	-0,0032	

On calcule ensuite $\Delta\epsilon$ pour chacune de nos masses.

	$m_1 = 0.766kg$	$m_2 = 1.969kg$	$m_3 = 2.769kg$
$\Delta\epsilon_1$	-0,000165	-0,000423	-0,000593
$\Delta\epsilon_2$	0,00017	0,000433	0,000606
$\Delta\epsilon_3$	-0,00013	-0,00034	-0,00047
$\Delta\epsilon_4$	0,00014	0,00035	0,0005
$\Delta\epsilon_5$	-0,000103	-0,000266	-0,000366
$\Delta\epsilon_6$	0,00011	0,00028	0,00039
$\Delta\epsilon_7$	-0,00007	-0,00018	-0,00025
$\Delta\epsilon_8$	0,00007	0,00018	0,00026

On en déduit enfin nos contraintes σ (en Pa) et les valeurs de nos modules de Young E (en GPa), toutes deux arrondies au centième :

$\sigma_{m=0.766kg}$	$\sigma_{m=1.969kg}$	$\sigma_{m=2.769kg}$	$E_{m=0.766kg}$	$E_{m=1.969kg}$	$E_{m=2.769kg}$
-1,54e+7	-3,95e+7	-5,55e+7	93,05	93,29	93,59
1,54e+7	3,95e+7	5,55e+7	90,31	91,14	91,58
-1,25e+7	-3,20e+7	-4,50e+7	95,81	94,17	95,80
1,25e+7	3,20e+7	4,50e+7	88,97	91,48	90,05
-0,96e+7	-2,46e+7	-3,46e+7	92,81	92,38	94,41
0,96e+7	2,46e+7	3,46e+7	86,90	87,76	88,60
-0,67e+7	-1,71e+7	-2,41e+7	95,18	95,14	96,34
0,67e+7	1,71e+7	2,41e+7	95,18	95,14	92,63

En prenant la valeur moyenne de nos modules de Young, on obtient alors $E \approx 92,57$ GPa.

La littérature nous apprend que le module de Young habituel du laiton se situe vers 110 GPa.

Nous essaierons par la suite, en comparant nos résultats et en calculant les erreurs, de déterminer la cause de cette différence.

4 Flexion en 30 pts

4.1 Montage

Le montage est le même que celui précédemment utilisé, à ceci près que l'on utilise ici un comparateur à cadran permettant de mesurer manuellement les déformations, avec une précision de $10^{-5}m$. Ce dernier va nous permettre d'approcher au mieux les déformations, sans pour autant passer par un outil numérique.

Pour ce qui est de l'étude, elle se fera sur l'autre moitié de la poutre, soit en $x \in [0, \frac{L}{2}]$.

4.2 Protocole expérimental

On établit un protocole à appliquer deux fois : avec un chargement au centre de la poutre, et sans chargement. On se positionne sur une moitié (par symétrie on connaîtra l'autre) et on mesure la position de la poutre en 30 points par rapport à un rail fixe. On prend un intervalle de 20 mm entre chaque mesure, en veillant à ne pas activer le système

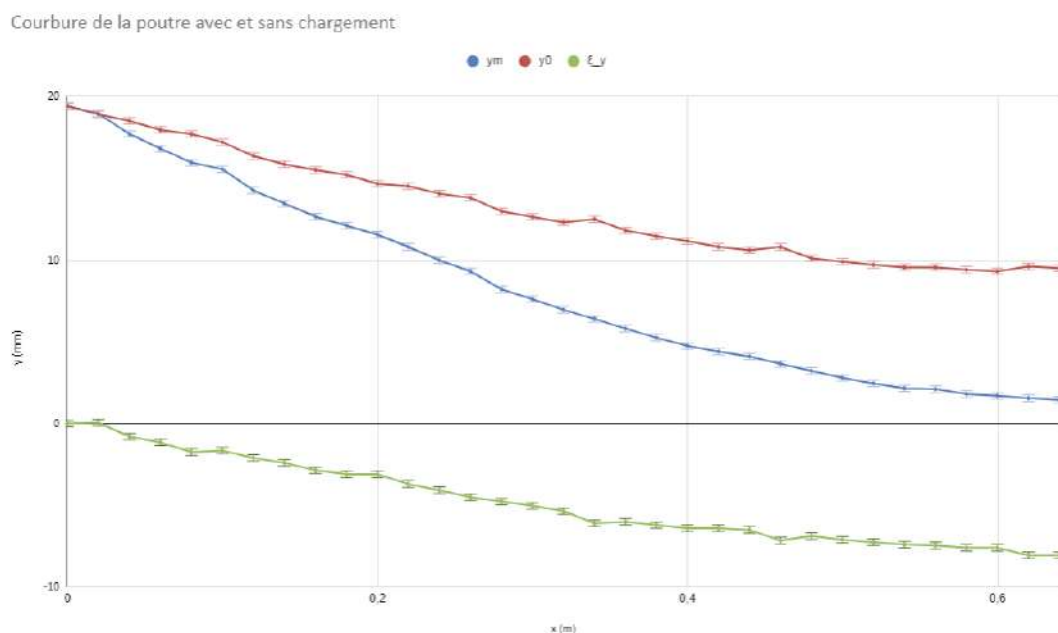
de ressort que contient le comparateur. En effet, il faut jauger manuellement l'instant exact où l'outil touche la poutre afin d'ensuite relever la position. Dans le cas contraire, en laissant l'outil toucher la poutre sans le retenir, le ressort contenu en son sein viendrait fausser nos mesures.

Pour ce qui est de la masse, on utilise pour nos mesures un chargement de 712.2 g. Même si cette masse ne correspond à aucune des masses précédemment testées, le résultat de l'expérience ne devrait pas en être affecté et nous devrions retrouver un schéma semblable au cas théorique.

4.3 Résultats

Une fois les mesures de déformations effectuées à vide et avec masse, nous sommes en mesure de tracer le graphique suivant. Nous retrouvons en rouge la position y_0 de la poutre soumise à son propre poids et en bleu la position y_m correspondant à la position de la poutre après application de la masse, et donc déformation.

Ensuite, à l'aide de ces deux courbes et des données qui les composent, on calcule $\xi_y = y_m - y_0$, déformation relative de la poutre, pour tenir compte de la courbure de celle-ci sous sa propre masse (courbe verte).



Nous allons ensuite pouvoir comparer les courbes obtenues expérimentalement (celles ci-dessus) aux courbes théoriques (celles des jauges). Pour cela, nous allons nous aider d'une formule théorique trouvée précédemment afin de faire le lien entre la position relative ξ_y et la valeur du module de Young. En fait, le procédé va être le suivant : nous avons ici obtenu la courbe expérimentale donnant le déplacement en fonction de la position x , et nous allons chercher à la comparer à la même courbe dans le cas des jauges. Pour ce faire, nous faisons appel à la formule suivante :

$$\xi_{yth} = \frac{F}{48.E.I}(4x^3 - 3L^2x) \quad \text{pour } x \in [0, \frac{L}{2}]$$

Ainsi, connaissant le module de Young E dans le cas des jauges, on est en mesure d'appliquer cette formule pour différents x . Nous allons ainsi tracer la courbe $\xi_y = f(x)$ dans

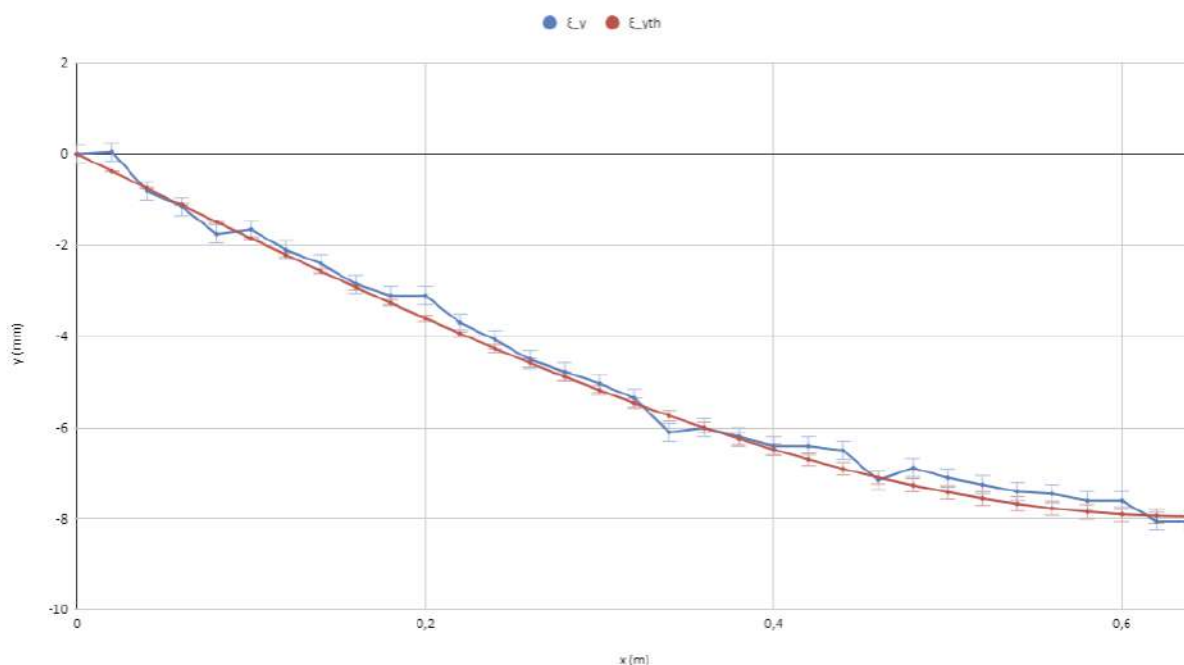
le cas des jauges, en prenant les même x que pour la courbe expérimentale.

L'ensemble des données recueillies lors de cette manipulation sont synthétisées dans la partie suivante, faisant le comparatif final entre théorie et expérimentation.

5 Comparaison des résultats

Comme annoncé, nous avons tracé la courbe donnant les déplacements pour le cas théorique, en s'appuyant notamment sur les données trouvées dans la partie "Jauges de contrainte". Une fois les 2 courbes superposées, on obtient alors :

Comparaison courbure de la poutre théorique/expérimentale



On constate que nos deux courbes sont très similaires, les plus grosses différences entre les deux étant de l'ordre des $\pm 3mm$.

Ce résultat semble indiquer que le module de Young de notre poutre se situe bien aux alentours de 92 GPa, comme on l'avait observé lors de l'étude théorique. A cette observation, il peut y avoir deux explications :

- Le fait que la poutre soit posée et non pas fixée en ses extrémités pourrait avoir faussé nos mesures ;
- Notre poutre est constituée d'un alliage de laiton et d'un autre métal, ou de laiton à forte teneur en zinc.

Outre ce point, on peut conclure de ces graphiques que les déformations subies par la poutre suivent bien le comportement attendu. Le fait d'avoir effectué de nombreuses mesures sur de petites distances nous a permis à la fois de considérer des cas de petites déformations mais aussi et surtout de coller au mieux à la théorie, en réduisant le plus possibles les incertitudes et les erreurs liées aux mesures.

Pour faire état des légers écarts observés entre les deux courbes, nous allons calculer les erreurs sur nos mesures, que ce soit pour le cas théorique et expérimental. Nous chercherons notamment à retrouver le fait que les écarts entre les courbes restent de l'ordre d'environ 8%, ce qui retranscrirait fidèlement les écarts de 3mm observés.

6 Calculs d'Erreurs

Les calculs d'erreur porteront dans cette partie sur les variables σ , ϵ , ξ et E , qui sont les variables desquelles dépendent nos mesures et observations finales. On obtient finalement les erreurs suivantes :

$$\sigma = -\frac{M(x) * y}{I} = -\frac{\frac{F.x.(h)}{2}}{\frac{b*h^3}{12}}$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta b}{b} + 2\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g}$$

Par application numérique : $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \left(\frac{5.e-4}{2.e-2} + \frac{5.e-4}{1,9.e-2} + 2\frac{5.e-4}{6,4.e-2} + \frac{e-4}{7.e-1} + \frac{10.e-2}{9.81}\right)$
= 6,68e-2

Pour ce qui est de ϵ , il n'est mesuré que pour le cas des jauges, c'est à dire dans un contexte théorique, d'où la notation $\epsilon_{thorique}$:

$$\longrightarrow \frac{\Delta\epsilon_{thorique}}{\epsilon_{thorique}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta Ordinateur}{Ordinateur} + \frac{\Delta m}{m}$$

Par application numérique : $\frac{\Delta\epsilon_{thorique}}{\epsilon_{thorique}} = \left(\frac{5.e-4}{2.e-2} + \frac{e-6}{1,5.e-5} + \frac{e-4}{7.e-1}\right)$
= 3,8e-2

Au contraire, la mesure de ξ peut être résumée au cas expérimental, sa formule étant inchangé entre les cas théoriques et expérimentaux. On notera donc $\xi_{experimental}$ la mesure utilisée avec les flexions en 30 points, soit donc :

$$\longrightarrow \frac{\Delta\xi_{experimental}}{\xi_{experimental}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta Comparateur_{Cadrant}}{Comparateur_{Cadrant}} + \frac{\Delta m}{m}$$

Par application numérique : $\frac{\Delta\xi_{experimental}}{\xi_{experimental}} = \left(\frac{5.e-4}{2.e-2} + \frac{e-5}{8.e-4} + \frac{e-4}{1,835}\right)$
= 9,18e-2

Pour finir, nous calculons l'erreur liée au module de Young. Soit la formule $E = \sigma_{xx}/\epsilon_{xx}$ exposée précédemment, le calcul donne donc :

$$\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \sigma}{\sigma} + \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = \mathbf{0,104}$$

Pour ce qui est de l'interprétation de ces erreurs, on voit qu'elles sont d'un ordre d'environ $5e - 2$ pour σ et ϵ . Ainsi, les erreurs ont des répercussions conséquentes sur nos mesures du fait que l'on manipule des variables allant jusqu'à l'ordre $10e+7$. Toutefois, même si ces erreurs sont de l'ordre de 5%, le bilan reste acceptable compte tenu de l'objet d'étude et des sources d'incertitudes nombreuses dans le cas de la contrainte par exemple. Par ailleurs, on remarque, compte tenu de nos résultats que ces valeurs s'enregistrent tout à fait dans une plage que l'on pourrait qualifier d'acceptable.

Un autre point lié à ce facteur 5% est qu'il met en avant le fait que les outils pratiques ont une précision environnant celle des outils numériques et théoriques que sont les jauges, l'ordinateur, etc. Nous pouvons donc en conclure que malgré une erreur qui a des répercussions conséquentes, on reste dans une plage acceptable comparé au point de vue théorique.

Cette erreur passe à environ $10e - 1$ lorsque l'on calcule le module de Young E et le déplacement ξ . Or, E est de l'ordre de $10e+11$. On voit donc que là aussi, des petites erreurs sur la masse ou encore les mesures sur la poutre amènent à des erreurs de l'ordre de $10e+10$.

En remettant cela dans le contexte de l'expérience et à la vue des résultats trouvés, il semble que ces erreurs soient elles aussi dans une plage acceptable étant donné qu'on est très proche de la valeur théorique environnant les 100 GPa ($10e+11$). De plus, on se retrouve pour ξ autour d'une erreur de 9%, valeur très proche de celle attendue et qui justifie analytiquement les observations faites à la partie précédente.

Au final, le matériel à notre disposition était d'une grande précision, notamment les valeurs de déplacement données par l'ordinateur et celles données par le comparateur à cadran. Ainsi, si on cherchait à refaire ce TP dans le but de diminuer les erreurs, nous devrions nous focaliser sur l'erreur humaine. Pour pallier à cette dernière, il serait par exemple possible d'effectuer les manipulations plusieurs fois afin de moyenner les expériences et affiner les résultats.

7 Conclusion

Pour conclure sur cette expérience, elle a permis de mesurer par le biais expérimental la **valeur du module d'Young** pour une poutre en laiton. Que ce soit en fonction de la contrainte σ et de la déformation ϵ ou bien en fonction du déplacement ξ et des données du problème, nous avons retrouvé des valeurs de E tout à fait cohérentes.

Tandis que nos **calculs d'erreur** justifient les écarts observés graphiquement, nos recherches en amont ont permis d'émettre des hypothèses quant aux matériaux constituant la poutre, ce qui pourrait apporter une justification extérieure pour nos écarts.

Enfin, le comportement de la poutre sous flexion a été entièrement décrit lors de cette étude, que ce soit par le biais de calculs théoriques ou bien de mesures expérimentales.