Examen réparti du mercredi 2 novembre 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures. Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés. Les téléphones portables doivent être impérativement éteints. **Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation des résultats et à la rédaction des interprétations. Les deux parties sont indépendantes. Le barème approximatif est de 12 points pour la partie 1 et 8 pour la partie 2.**

Partie 1 : Cinématique

On considère le mouvement suivant caractérisé par la donnée de la vitesse eulérienne relativement au repère cartésien $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \;=\; l\,\omega\,[\,\sin(\,\varphi(x_3, t)\,)\,\underline{e}_1 \;-\; \cos(\,\varphi(x_3, t)\,)\,\underline{e}_2\,],$$

où la fonction $\varphi(x_3, t)$ est donnée par $\varphi(x_3, t) \;=\; k\,x_3 \;-\; \omega\,t$, l, k, ω étant des constantes données strictement positives, et où $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ représente la position d'un point d'un milieu continu à l'instant t.

On notera (X_1, X_2, X_3) la position à l'instant $t = 0$ de la particule qui occupe la position (x_1, x_2, x_3) à l'instant t.

1.1 Déterminer, par deux méthodes différentes, l'expression de l'accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t)$ dans la représentation eulérienne du mouvement.

1.2 Etablir les équations des lignes de courant à l'instant $t = t^*$.

Quelles sont leur nature ?

Les représenter dans le plan $x_3 \;=\; 0$ en précisant leur sens de parcours pour des valeurs de t^* telles que $0 \;<\; \omega\,t^* \;<\; \pi\,/\,2$ et $\omega\,t^* \;=\; \pi\,/\,2$.

1.3 Etablir la représentation lagrangienne du mouvement.

1.4 Montrer que la trajectoire d'une particule qui occupait à l'instant $t = 0$ la position $(X_1, X_2, X_3 = 0)$ est un cercle, dont on précisera le rayon et le centre.

Représenter la trajectoire et préciser le sens de parcours pour des instants t tels que $0 \;<\; t\,\omega \;<\pi\,/\,2$.

1.5 Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la représentation lagrangienne du mouvement.

Commenter le résultat en lien avec la question 1.1.

1.6 Soit $b(\underline{x}, t)$ une grandeur scalaire donnée en variable eulérienne par $b(\underline{x}, t) \;=\; \delta\,x_1\,t$, où δ est une constante donnée.

Déterminer la dérivée particulaire $\dfrac{d\,b}{dt}$ de la grandeur $b(\underline{x}, t)$.

Donner l'expression $B(\underline{X}, t)$ de la fonction $b(\underline{x}, t)$ en variables lagrangiennes.

Calculer la dérivée particulaire $\dfrac{d\,B}{dt}$. Commenter.

1.7 Calculer les composantes du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$.

En déduire les taux de dilatation linéique dans les trois directions $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ et les taux de glissement $\dfrac{d\,\gamma_{12}}{dt}$, $\dfrac{d\,\gamma_{13}}{dt}$, $\dfrac{d\,\gamma_{23}}{dt}$.

Calculer le taux de dilatation volumique.

Intrepréter les résultats.

1.8. **Question Bonus** Calculer les composantes du tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$.

En déduire l'expression du vecteur dual $\underline{\Omega}(\underline{x}, t)$ défini par $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{x} \;=\; \underline{\Omega}(\underline{x}, t) \wedge \underline{x}$.

Vérifier le calcul par rapprochement avec la vitesse eulérienne.

Partie 2 : Etude de la transformation

On considère la transformation caractérisée par la représentation lagangienne suivante relativement au repère cartésien $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$x_1(t) \;=\; \Phi_1(\underline{X}, t) \;=\; l\,\cos(\,k\,X_3 \;-\; \omega\,t\,) \;-\; l\,\cos(\,k\,X_3\,) \;+\; X_1,$$

$$x_2(t) \;=\; \Phi_2(\underline{X}, t) \;=\; l\,\sin(\,k\,X_3 \;-\; \omega\,t\,) \;-\; l\,\sin(\,k\,X_3\,) \;+\; X_2, \qquad x_3(t) \;=\; \Phi_3(\underline{X}, t) \;=\; X_3,$$

où (X_1, X_2, X_3) désigne la position à l'instant $t = 0$ de la particule qui occupe la position (x_1, x_2, x_3) à l'instant t et où $(\,l, k, \omega\,)$ sont des constantes données strictement positives.

2.1 Préciser les unités des constantes k, l et ω.

Calculer les composantes du tenseur gradient de déformations $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$.

La transformation est-elle homogène? Commenter.

Est-elle toujours définie ?

Soit un volume élémentaire $d\Omega_0$ centré au point M_0 de coordonnées $\underline{X}$ à l'instant initial $t = 0$, $d\Omega_t$ son transformé à l'instant t, calculer la variation de volume subie par cet élément. Commenter.

2.2 Exprimer les composantes des tenseurs de dilatation $\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t)$ et de déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ en fonction des composantes F_{13} et F_{23} du tenseur gradient de déformations $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$.

Vérifier que la composante e_{33} du tenseur de dilatation $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ est donnée par :

$$e_{33} \;=\; l^2\,k^2\,(\,1 \;-\; \cos(\omega t)\,).$$

On rappelle la formule trigonométrique suivante : $\cos(a - b) \;=\; \cos a\,\cos b \;+\; \sin a\,\sin b$.

2.3 Soient les vecteurs élémentaires de matière $\underline{dX}$, $\underline{dX}^{'}$ et $\underline{dX}^{''}$ issus du point M_0 de coordonnées (X_1, X_2, X_3) à l'instant initial $t = 0$, portés respectivement par les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ et de longueur respective dl_0, $dl_0^{'}$ et $dl_0^{''}$, soient :

$$\underline{dX} \;=\; dl_0\,\underline{e}_1, \qquad \underline{dX}^{'} \;=\; dl_0^{'}\,\underline{e}_2, \qquad \underline{dX}^{''} \;=\; dl_0^{''}\,\underline{e}_3.$$

Les transformés de ces vecteurs sont notés $\underline{dx}$, $\underline{dx}^{'}$ et $\underline{dx}^{''}$ à un instant t fixé.

Exprimer les longueurs $||\underline{dx}||$, $||\underline{dx}^{'}||$ et $||\underline{dx}^{''}||$ des transformés de ces vecteurs en fonction de $dl_0, dl_0^{'}, dl_0^{''}$. Commenter.

Donner l'expression de l'angle $\theta_{12}(t)$ à l'instant t fixé entre les vecteurs transformés $\underline{dx}$ et $\underline{dx}^{'}$, de l'angle θ_{13} entre $\underline{dx}$ et $\underline{dx}^{''}$ et de l'angle θ_{23} entre $\underline{dx}^{'}$ et $\underline{dx}^{''}$.

Commenter la nature de la transformation subie par des points de coordonnées $(X_1, X_2, X_3 \;=\; 0)$ à un temps t tel que $0 \;<\; \omega\,t \;<\; \pi\,/\,2$.

2.4 Déterminer le vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$.

Exprimer les composantes du tenseur gradient de déplacement $\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)$ et du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t)$ en fonction des composantes F_{13} et F_{23} du tenseur gradient de déformations $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$.

On suppose à partir de maintenant que les constantes l et k vérifient l'hypothèse $l\,k \;<<\; 1$.

Interpréter cette hypothèse en comparant les expressions des tenseurs $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}, t)$.

Que devient dans ce cas la longueur du vecteur infinitésimal $||\underline{dx}^{''}||$?

Commenter la nature de la transformation dans ce cas.

2.5 Sous l'hypothèse $l\,k \;<<\; 1$, comparer les résultats des questions 1.7 et 2.4.

Commenter.