

Modèles de turbulence pour la simulation des écoulements

7. Ecoulements compressibles

Paola CINNELLA

paola.cinnella@sorbonne-universite.fr

QCM#4



WEB

- 1 Connectez-vous sur www.wooclap.com/GHGFxB
- 2 Vous pouvez participer



SMS

- 1 Pas encore connecté ? Envoyez **@GHGFxB** au **06 44 60 96 62**
- 2 Vous pouvez participer

Effets de compressibilité en turbulence

- Trois modes de fluctuation (Yaglom 1948, Moyal 1952, Kovasznay 1953)
 - Mode de vorticité → fluctuations de vitesse solénoïdales, pas de variations de pression ou masse volumique
 - Mode acoustique → Pas de vorticité, fluctuations de vitesse irrotationnelles, relation isentropique pour pression/masse volumique
 - Mode entropique → pas de fluctuations de pression et vitesse, fluctuations de masse volumique et température
- Au premier ordre, ces modes évoluent de façon indépendante (petites perturbations)
- Effets non linéaires et gradients du champ moyen (chocs, cisaillements, ...) → couplage entre modes
- Turbulence incompressible → couplage non linéaire de modes de vorticité (étirement des tourbillons)
- Turbulence compressible → la densité des particules fluides change en réponse aux fluctuations de pression
 - Conversion d'énergie mécanique en thermodynamique et inversement
 - Les trois modes interagissent entre eux si les fluctuations deviennent importantes

Effets de compressibilité en turbulence

■ Variations de masse volumique et de température

- Écoulements à Mach élevé → échanges thermiques intenses, réchauffement par frottement → transfert d'énergie aux fluctuations turbulentes
- Réchauffement par frottement → viscosité élevée près des parois → sous-couche visqueuse plus épaisse
- Tout de même, pas de variation significatives de la structure de la turbulence pour des écoulements à Mach < 5, pourvu qu'il n'y ait pas de chocs!

- Pour des écoulements avec transferts thermiques, pas de variations significatives si $T_w/T_e < 6$

T_w = température de la paroi; T_e = température à l'extérieur de la couche limite

- Hypothèse de Morkovin : la turbulence reste in affectée par les effets de compressibilité si
 - Non vérifiée en cas de combustion, couches de mélange haute vitesse (Mach > 5) et, en moindre mesure, en proche paroi pour des couches limites haute vitesse

$$\rho' / \bar{\rho} \ll 1$$

Effets de compressibilité en turbulence

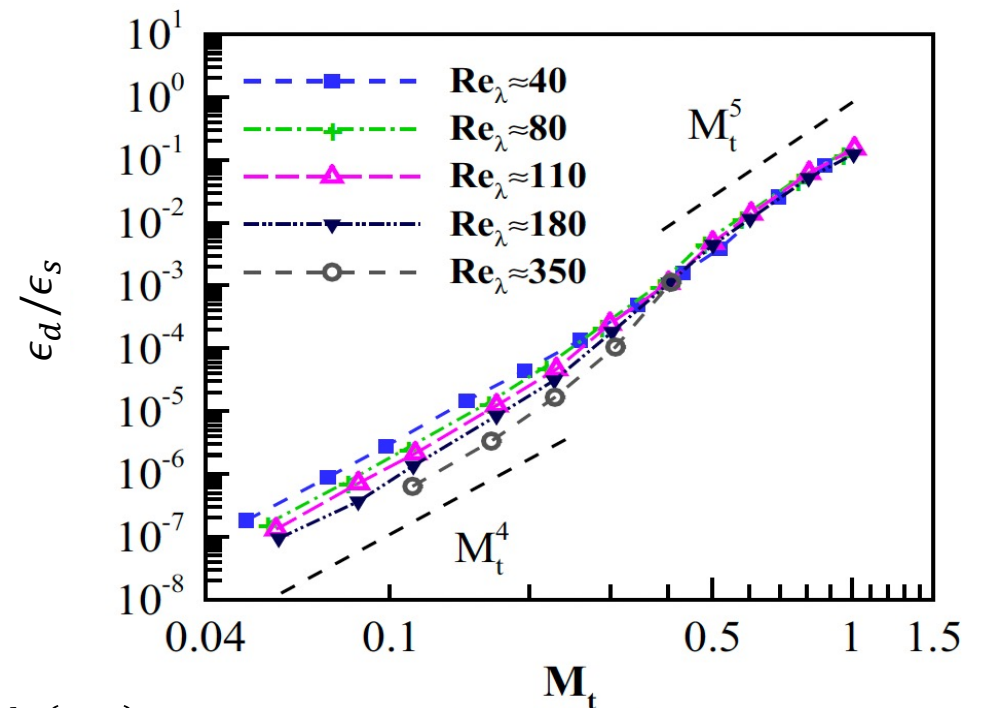
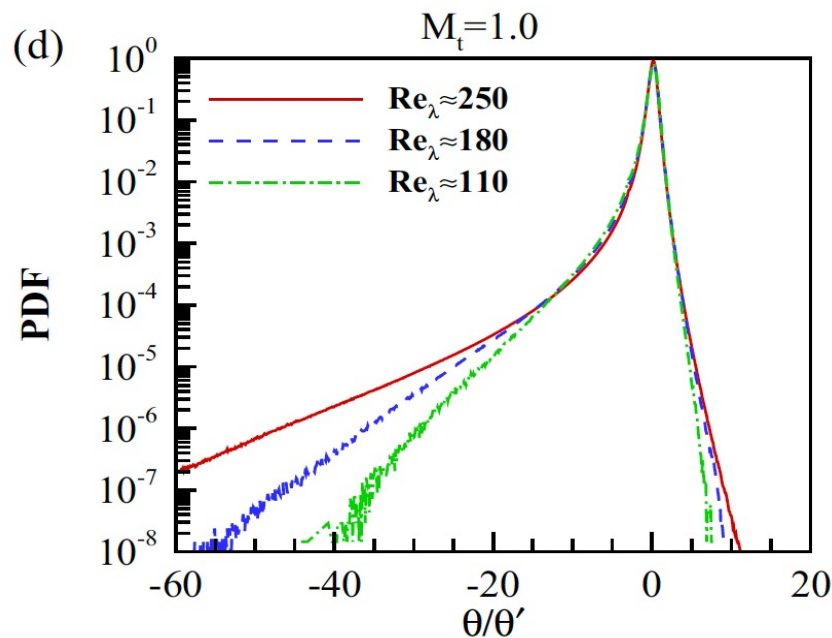
- On introduit un nombre de Mach turbulent correspondant au rapport entre la vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes et la vitesse du son moyenne :

$$M_t = \frac{u''_{rms}}{\bar{c}} = \frac{\sqrt{2k}}{\bar{c}}$$

- Trois effets principaux :
 - Apparition d'une dissipation turbulente « dilatationnelle » associée à la formation de « shocklets » suite à la distorsion rapide des structures turbulentes → négligeable pour $M_t < 0.3$
 - Écoulements pariétaux : même si $M_t < 0.3$, des variations très importantes des propriétés du fluide sont présentes (réchauffement par frottement → modification de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse + modification de la pente de la loi log)
 - Interactions chocs/turbulence

Dissipation dilatationnelle et « shocklets »

- Lorsque le Mach turbulent augmente, des « shocklets » peuvent apparaître
 - structures turbulentes caractérisées par une dilatation fortement négative et très dissipatives
- La distribution de la dilatation devient dissymétrique (événements de compression plus probables que les détentes)
- Cet effet augmente avec le nombre de Reynolds (effet de « lissage » par la viscosité moins important)



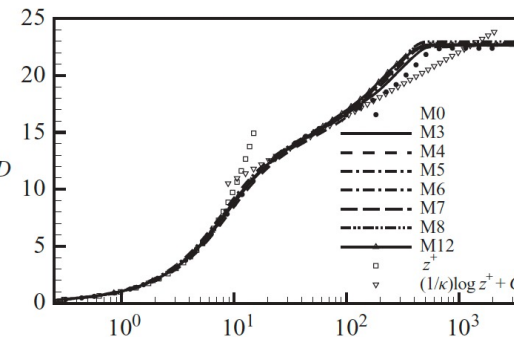
$$\frac{\epsilon_d}{\epsilon_s} \sim M_t^4 Re_\lambda^{-1} \ln(Re_\lambda)$$

Profils de vitesse pour des écoulements pariétaux compressibles

- La pente de la zone logarithmique est une fonction du gradient de masse volumique
- Transformation de van Driest (valable pour des parois adiabatiques)

DNS Duan & Martin, JFM (2011)

$$U_{VD}^+ = \int_0^{u^+} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} du^+, \quad \bar{U}_{VD}$$



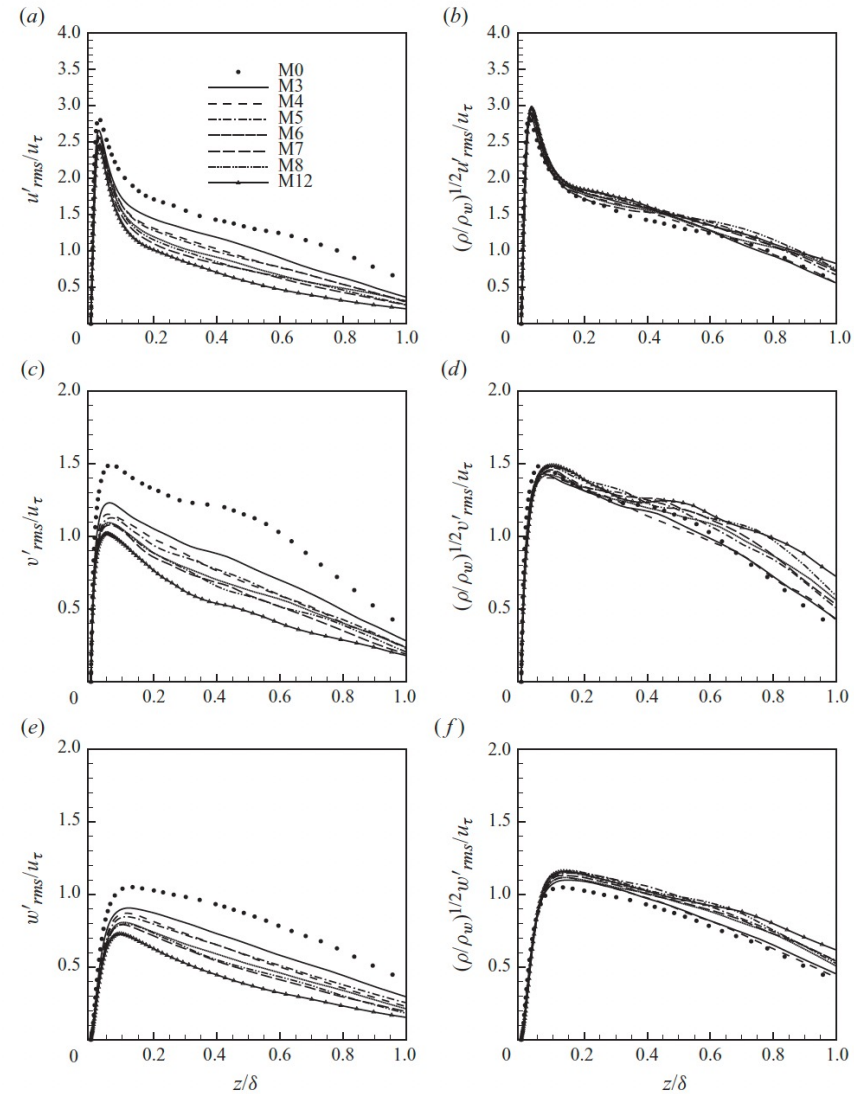
- Des transformations plus sophistiquées existent (Trettel & Larsson, Patel & Pecnick, ...)
- Baisse du Reynolds local du fait du réchauffement par frottement

Case	M_δ	ρ_δ (kg m ⁻³)	T_δ (K)	T_w/T_δ	Re_θ	Re_τ	$Re_{\delta 2}$	θ (mm)	H	δ (mm)
M0	0.30	0.0900	220.0	1.00	1514.76	569.9	1515.2	2.76	1.41	23.0
M3	2.97	0.0910	219.9	2.51	3028.6	486.9	1586.7	0.619	5.09	8.85
M4	3.98	0.0902	219.2	3.83	4093.7	438.2	1587.4	0.658	8.01	12.0
M5	4.90	0.0962	224.4	5.31	4931.7	416.5	1578.0	0.682	11.29	15.1
M6	5.81	0.0990	230.7	7.02	5775.1	412.8	1582.2	0.730	15.4	19.7
M7	6.89	0.0929	224.2	9.49	7207.3	391.7	1586.4	0.838	20.2	28.1
M8	7.70	0.0990	232.8	11.2	7508.3	397.5	1577.5	0.861	24.2	31.8
M12	11.93	0.0906	228.0	27.6	11356.4	376.8	1577.5	1.33	46.1	84.7

TABLE 1. Dimensional boundary-layer edge and wall parameters for the DNS database.

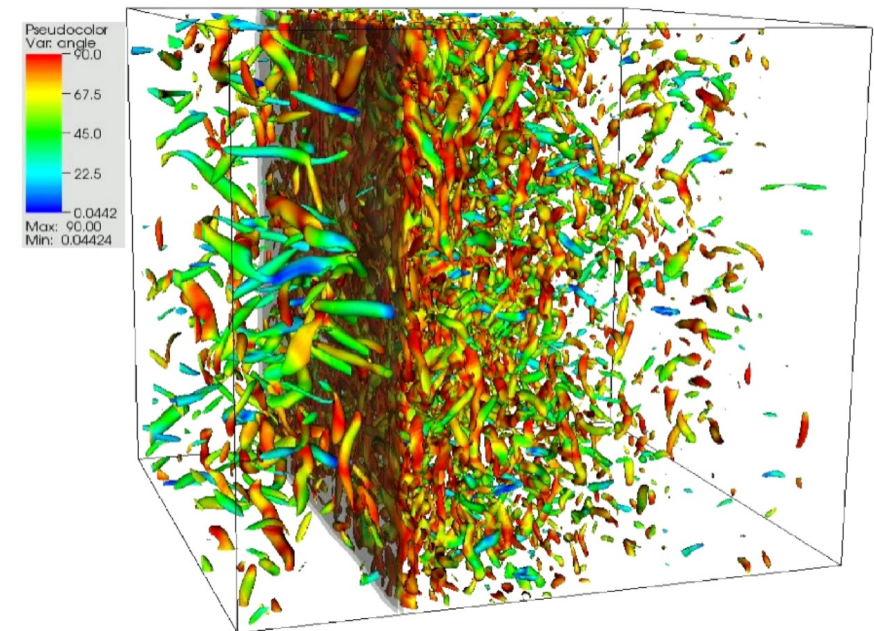
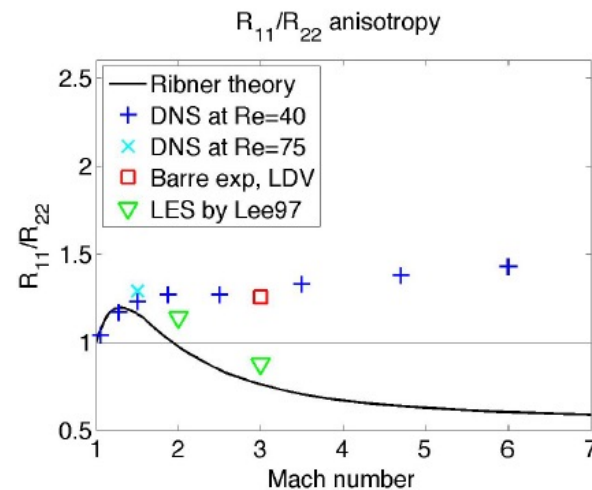
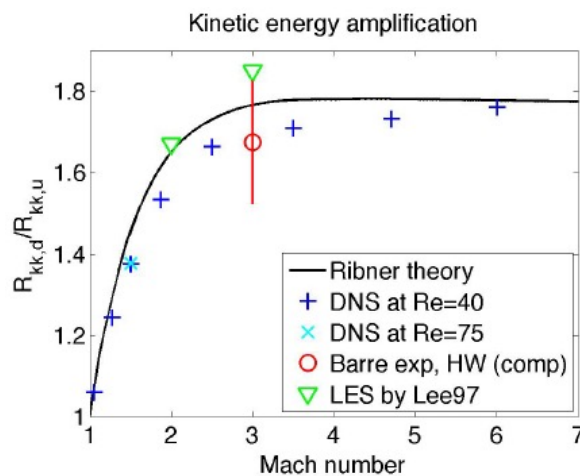
Profils de tensions de Reynolds

- Les profils dépendent de la densité locale



Interaction choc/turbulence

- Interaction entre turbulence homogène et isotrope et un choc droit
- Plusieurs régimes possibles en fonction de l'intensité du choc (Mach amont), du Mach turbulent et Reynolds amont, du rapport entre l'épaisseur du choc et l'échelle intégrale de la turbulence, ...)
- Forte augmentation de la vorticité à travers le choc, puis relaxation lente → augmentation de k
- Création d'anisotropie

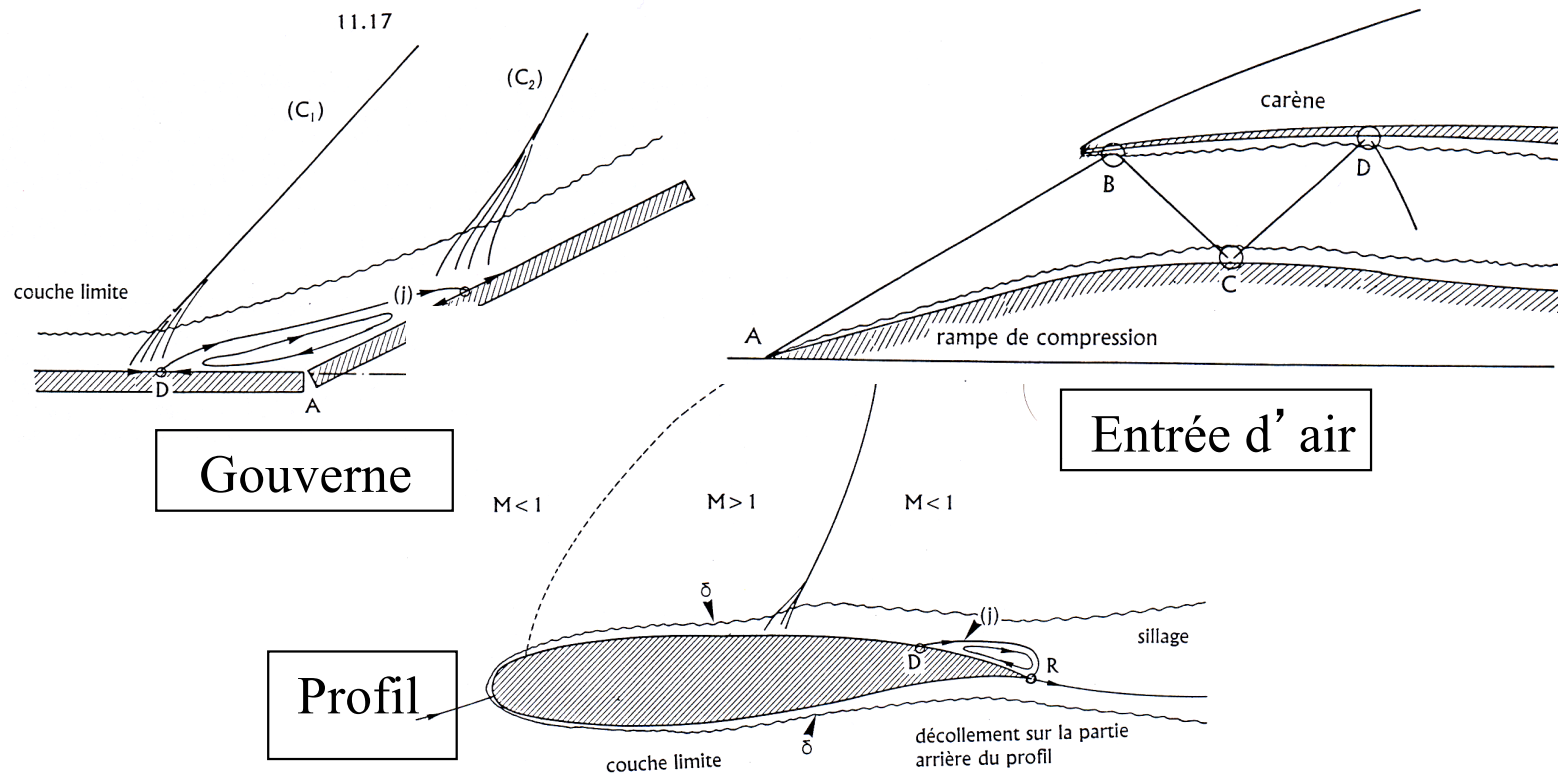


Larsson & Lele, Phys Fluids 2009

Interaction onde de choc/couche limite

- Interactions entre ondes de choc et couches limites turbulentes

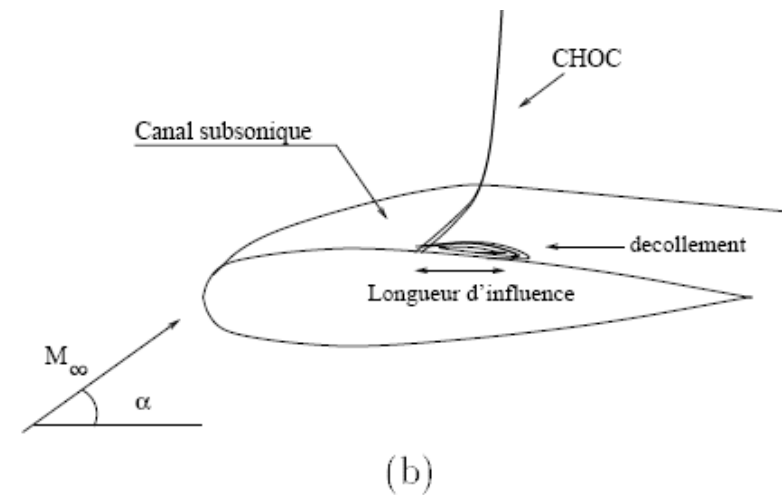
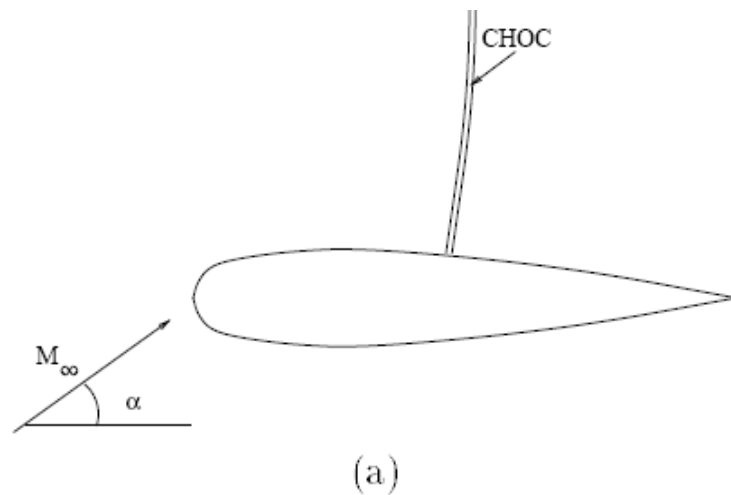
Exemples de décollement de CL induit par la présence de chocs dans l'écoulement



Interaction onde de choc/couche limite

■ Interactions choc/couche limite

- $M > 1.3 \rightarrow$ décollement de la couche limite (Délery)
- Epaississement de la couche limite
- Augmentation de la longueur d'influence amont
- Déviation du choc vers l'amont par rapport à sa position en écoulement idéal



Equations moyennées à la Favre

- Equations de NS compressibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(h + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] = \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

+ loi d'état, par exemple $p = \rho R T$

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad \tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij}; \quad q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

+ lois de transport $\mu = \mu(T), \kappa = \kappa(T)$

- Masse volumique **fluctuante** $\rho = \bar{\rho} + \rho'$
- L'application de la décomposition de Reynolds aux équations NS compressible conduit à un système d'équations pour le champ moyen qui n'est pas formellement identique aux équations du départ

Equations moyennées à la Favre

- C'est pourquoi on adopte la décomposition de Favre, basée sur des moyennes **pondérées** par rapport à la masse volumique, e.g. :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \tilde{u}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i dt$$

- Le champ de vitesse est décomposé de la façon suivante

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad \text{avec} \quad u_i'' = u_i' - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}}$$

Relation entre fluctuations de Favre et fluctuations de Reynolds:

$$\tilde{u}_i'' = u_i' - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho (u_i - \tilde{u}_i) dt = \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i dt \right) - \tilde{u}_i = \tilde{u}_i - \tilde{u}_i = 0$$

Equations moyennées à la Favre

- En introduisant des décompositions semblables pour toutes les variables, on aboutit aux équations de NS compressibles moyennées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right] = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{q}_j - \overline{\rho u_j'' h''} + \overline{\tau_{ij} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i \left(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) \right] \end{array} \right. \quad (\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T})$$

Système d'équations formellement similaire aux équations NS compressibles mais **ouvert**

Fermeture des équations RANS compressibles

■ Analysons les nouveaux termes

- Tenseur des contraintes de Reynolds $\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$
- Energie cinétique turbulente $\overline{\rho k} = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$
- Flux de chaleur turbulent $q_{Tj} = \overline{\rho u_j'' h''}$
- Diffusion moléculaire et transport turbulent d'énergie

$$\overline{\tau_{ji} u_i''} \quad \text{et} \quad \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''}$$

→ Ces deux termes sont souvent négligés (dans l'équation de l'énergie totale)

Fermeture des équations RANS compressibles

- Tenseur des contraintes de Reynolds
 - Souvent modélisé à l'aide de l'approximation de Boussinesq

$$\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = 2\mu_t \left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

- Le dernier terme permet d'avoir une trace égale à $-2k$.
- Flux de chaleur turbulent
 - Utilisation d'une "loi de Fourier" turbulente

$$q_{T_j} = \overline{\rho u_j'' h} = -\frac{\mu_t c_p}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}$$

→ introduction d'un "nombre de Prandtl turbulent" constant (0.9 pour l'air)

Fermeture des équations RANS compressibles

- Diffusion moléculaire et transport turbulent d'énergie

- Négligés pour des écoulements **subsoniques** et dans tous les modèles algébriques, ainsi que le terme

$$\frac{2}{3} \overline{\rho k} \delta_{ij}$$

dans l'expression du tenseur de Reynolds car

$$\overline{\rho k} \ll \overline{p}$$

- Pour des écoulements supersoniques, il faut assurer la conservation exacte de l'énergie moyenne
- Faute de mieux, les deux termes sont modélisés ensemble par une expression linéaire du type

$$\overline{\tau_{ji} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

Flux de chaleur turbulent

- L'hypothèse simplificatrice d'un nombre de Prandtl turbulent constant partout et égal à 0.9 (pour l'air) est très grossière
- En réalité ce nombre **varie** à travers l'écoulement ET en fonction de l'écoulement considéré
 - Exemples: 0.7 pour un jet, 0.5 pour une couche de mélange, ...

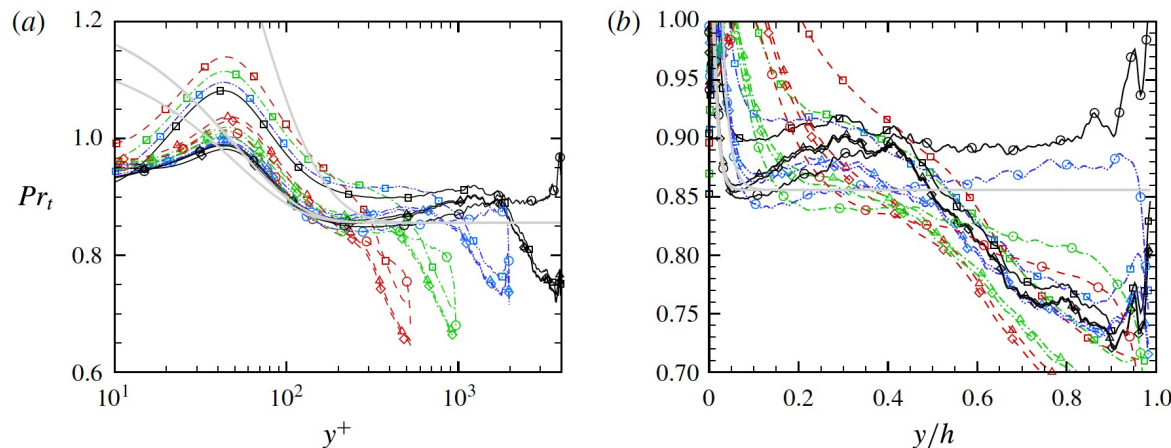
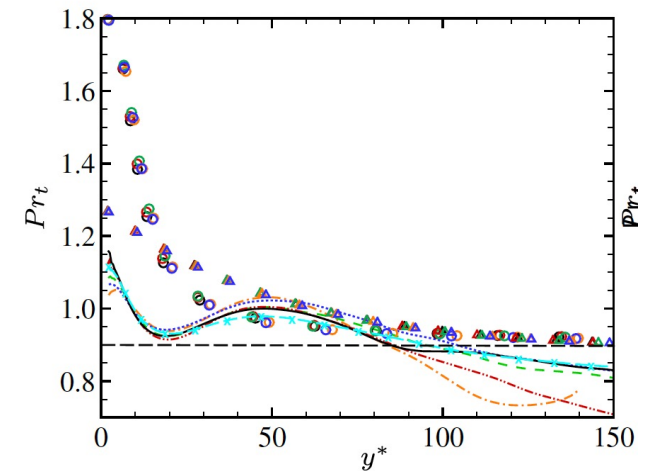


FIGURE 17. (Colour online) Turbulent Prandtl number as a function of wall distance. The thick grey lines indicate the predictions of (3.19) at $Pr = 0.2, 0.71, 1$. Refer to table 1 for nomenclature of the DNS data.

Prandtl turbulent pour des écoulements de canal plan incompressible (Pirozzoli et al., 2014)



Prandtl turbulent pour des écoulements de canal plan turbulent à Mach entre 1.5 et 3 (Sciacovelli et al., 2018)

Extensions au compressible des modèles de turbulence

- Dans les équations précédentes il reste à calculer le tenseur de Reynolds
 - Le plus souvent, un modèle à viscosité tourbillonnaire linéaire est utilisé
 - Besoin de calculer μ_t , comme en incompressible (modèles algébriques ou à équations de transport)
- Les modèles de turbulence pour les écoulements compressibles sont un sujet encore **ouvert**
- Les modèles actuelles sont des **extensions directes** des modèles développés en incompressible
- Les modifications consistent à :
 - Ecrire les termes de transport convectif sous forme conservative
 - Prendre en compte une masse volumique et viscosité moléculaire variables
- Des modifications plus spécifiques au compressible ont été formulées afin de :
 - Prendre en compte la dissipation dilatationnelle
 - Prendre en compte le travail de pression et de dilatation

Equation de l'énergie cinétique turbulente

- Comme en incompressible, on peut établir une équation pour l'énergie cinétique turbulente
- On multiplie l'équation de quantité de mouvement par la vitesse fluctuante (de Favre!) et moyenne

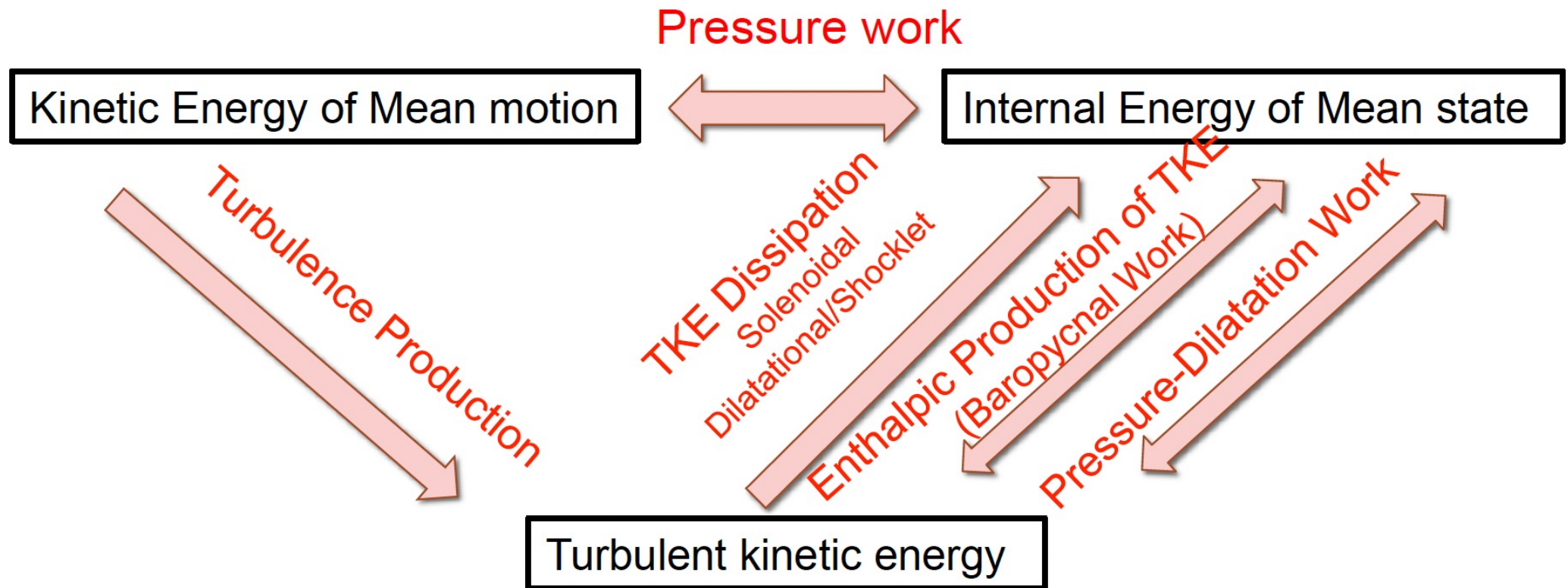
$$\overline{\rho u_i'' \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho u_j'' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}$$

- Après calculs, on obtient l'équation suivante :

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_j k)}{\partial x_j} = \bar{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\tau_{ji} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} - \overline{p' u_j''} \right] - \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

- Les termes suivants sont simplement la contrepartie des termes correspondants dans le cas incompressible :
 - Production $\bar{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$, dissipation $\bar{\rho} \epsilon = \overline{\tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$, transport moléculaire, turbulent et de pression
- On voit apparaître deux nouveaux termes, propres aux écoulements compressibles :
 - Travail de pression : $-\overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} = -\overline{\frac{\rho' u_i'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} \rightarrow$ travail mécanique de la pression moyenne sur les structures turbulentes
 - Travail de dilatation : $\overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} \rightarrow$ travail de pression fluctuante pour dilater/comprimer les structures turbulentes

Echanges d'énergie entre le champ moyen et fluctuant



Equation de l'énergie cinétique turbulente : fermeture

- L'équation pour k fait apparaître de nombreux termes non fermés :
- Termes déjà présents en incompressible :
 - Dissipation $\bar{\rho}\epsilon = \overline{\tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} = \bar{\rho}\epsilon_s + \bar{\rho}\epsilon_d \rightarrow$ peut être décomposée en une partie **solénoïdale** et une **dilatationnelle**
 - Transport moléculaire : $\overline{\tau_{ji} u_i''} \sim \bar{\mu} \frac{\partial k}{\partial x_j} \rightarrow$ modèle de type gradient, avec $\bar{\mu}$ la viscosité dynamique moyenne
 - Transport turbulent et diffusion de pression : $-\overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} - \overline{p' u_j''} \sim \frac{\bar{\mu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \rightarrow$ modèle de type gradient, viscosité tourbillonnaire
- Termes propres au compressible :
 - Les plus souvent, ils sont négligés
- Dans la suite nous allons discuter les limites de validité des modélisations « incompressibles » et quelques corrections de compressibilité

Dissipation solénoïdale et dilatationnelle

- Développons le terme de dissipation turbulente sachant que $\tau_{ji} = 2\mu S_{ji} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ji}$ et $\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} = S_{ij}'' + \Omega_{ij}''$

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}\epsilon &= \overline{\tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} = \overline{\left(2\mu S_{ji} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ji}\right) (S_{ij}'' + \Omega_{ij}'')} = \overline{\left(2\mu S_{ji} S_{ij}'' - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)} = \\
 &= \overline{(décomposition de Reynolds de S_{ji}) \left(2\mu S_{ji}'' S_{ij}'' - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)} = \\
 &\overline{\mu \left(2 \left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_i} - \Omega_{ji}''\right) \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} - \Omega_{ij}''\right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)} = \left(\text{en introduisant la vorticité } \epsilon_{ijk} \Omega_{ij}'' = \frac{1}{2} \omega_k\right) = \\
 &\overline{\mu \left(2 \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \omega_i'' \omega_i'' - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)} = \left(\text{sachant que } \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \approx \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right) = \\
 &\overline{\mu \left(\omega_i'' \omega_i'' + \frac{4}{3} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}\right)} = \overline{\mu \omega_i'' \omega_i''} + \frac{4}{3} \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} = \bar{\rho}\epsilon_s + \bar{\rho}\epsilon_d
 \end{aligned}$$

Modélisation de la dissipation dilatationnelle

- La dissipation dilatationnelle est une fonction du Mach turbulent
- Sarkar (1989) et Zeman (1990) font l'hypothèse que $\epsilon_d \propto \epsilon_s$:

$$\epsilon_d = \xi^* F(M_t) \epsilon_s$$

avec ξ^* un coefficient de fermeture.

Leurs modèles diffèrent par le choix de ξ^* et la forme de la fonction $F(M_t)$

- Pour des écoulements à faible Mach turbulent, la dissipation dilatationnelle (liée aux shocklets) est négligeable
- Ceci est raisonnablement vrai pour $Mach < 5$.

Exemple : modification du modèle $k - \epsilon$

- Toujours Sarkar et Zeman postulent que la dissipation solénoïdale reste essentiellement in affectée par les effets de compressibilité
- La version haut-Reynolds de l'équation de transport pour ϵ (interprété comme le taux de dissipation solénoïdale) s'écrit :

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\epsilon_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j\epsilon_s)}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon_s}{k} \tau_{ij}^R \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{4}{3} \bar{\rho} \epsilon_s \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon_s^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j} \right)$$

$$\text{avec } \bar{\mu}_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \text{ et } \sigma_\epsilon = \frac{\kappa^2}{(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \sqrt{C_\mu}}, \kappa = 0.41 \text{ (constante de von Karman)}$$

- Les termes en rouge (dépendant de la dilatation moyenne) sont négligés dans la plupart des cas
- Ceci rend le modèle trop dissipatif et empêche d'avoir une estimation correcte de l'échelle intégrale (qui diminue dans une détente et augmente dans une compression)
- L'équation n'est pas correcte dans la zone logarithmique d'un écoulement pariétal, parce qu'il ne prend pas en compte correctement la variation de la pente (due à la variation de masse volumique moyenne) pour un écoulement compressible
- En pratique, les modèles ne prennent généralement pas en compte la contribution de la dissipation moyenne, ni la dissipation dilatationnelle

Modélisation du travail de dilatation et du flux de masse

- D'après Sarkar (1992) le **travail de dilatation** peut être approché par :

$$\overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} \approx \alpha_2 \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} M_t + \alpha_3 \bar{\rho} \epsilon M_t^2$$

avec $\alpha_2 = 0.15$ et $\alpha_3 = 0.2$

- Le **flux de masse** est également exprimé en fonction du Mach turbulent (Zeman, 1993 ; Ristorcelli, 1993)

$$\overline{u_i''} \sim \frac{M_t k \tau_{ij}^R}{\bar{\rho} \epsilon} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}$$

Le modèle est essentiellement basé sur l'analyse dimensionnelle

Correction des termes de transport turbulent

- Catris et Aupoix (1999) et Pecnick et Patel (2017) étudient le comportement de la zone logarithmique pour des écoulements compressibles, caractérisés donc par de fortes variations des propriétés de l'écoulement en proche paroi.
- Ils en déduisent la nécessité de pondérer les termes de transport turbulent par la masse volumique
- La correction de Catris s'écrit :

- Dans l'équation de k :

$$\overline{-\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i'' - p' u_j''} \sim \frac{\bar{\mu}_t}{\bar{\rho} \sigma_k} \frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial x_j}$$

- Dans l'équation de ϵ_s :

$$\frac{\bar{\mu}_t}{\sqrt{\bar{\rho}} \sigma_\epsilon} \frac{\partial(\sqrt{\bar{\rho}} \epsilon_s)}{\partial x_j}$$

- Les corrections pour ϵ peuvent être transposées à d'autres modèles en opérant un changement de variable

Validité des hypothèses de modélisation

- Validité des approximations introduites pour des écoulements compressibles en **Aérodynamique**
 - En aérodynamique externe, typiquement on a $Mach < 3$
 - Les hypothèses sont assez bien respectées, sauf au voisinage des chocs
 - En cas d'interaction choc/couche limite, **la plupart des modèles échouent**
 1. Les modèles prévoient une longueur d'influence trop faible: l'augmentation de pression a lieu en aval de la position mesurée
 2. Les coefficients de frottement et de transfert thermique en aval du rattachement sont trop élevés
 3. Les profils de vitesse en aval du rattachement indique une décélération excessive de l'écoulement dans la couche limite
- Validité pour des écoulements **fortement compressibles**
 - Bases de données encore relativement limitées
 - Amélioration des modèles sujet ouvert

Next time...

- Dans le prochain cours on introduira des méthodes pour quantifier les incertitudes des modèles de turbulence et des techniques moderne d'apprentissage de modèles à partir de données.