SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Année 2020-2021

Master SPI

Ondes
Thème 1 : les fondamentaux

Exercice 1 : La corde vibrante : ondes, vibrations et plus encore !

Le but de cet exercice est d'étudier la propagation d'ondes dans une corde tendue. Nous allons étudier différentes configurations :

- corde infinie,
- corde fixée à ses extrémités,
- propagation dans plusieurs cordes de masses linéiques différentes accrochées ensemble.

On s'intéresse au déplacement transverse de la corde $y(x,t)$ au point x et à l'instant t. On note T la tension et la μ masse linéique. Avec ces notations, le déplacement transverse satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

avec $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

1. On suppose que la corde est de longueur infinie. Montrer que la solution générale de l'équation des ondes est alors :
$$y(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$
où f et g sont deux fonctions scalaires.
2. Donner une interprétation physique des termes $f(x - c_0 t)$ et $g(x + c_0 t)$.
On suppose qu'à $t = 0$, le profil de la corde est celui de la figure 1, on suppose aussi que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$. Tracer la forme de la corde pour $t > 0$.

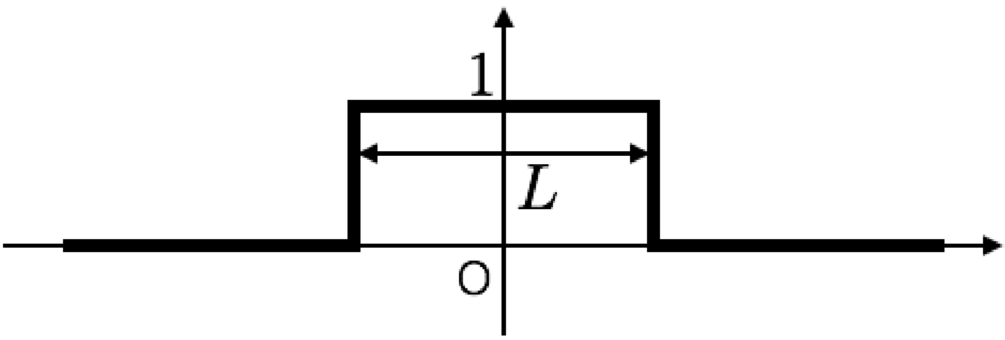

Figure 1 – Profil de la corde à $t = 0$

3. On suppose maintenant que la corde est fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. On suppose que les ondes se propageant vers les $x > 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = L$ et que les ondes se propageant vers les $x < 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = 0$. On a alors $f(\alpha) = g(\alpha) = A\sin(k_0\alpha)$. Dans ce cas montrer que :

$$y(x,t) = f(x)\phi(t)$$

D'après la forme de la solution, de quel type de phénomène s'agit-il ?

4. On considère une situation dans laquelle, deux cordes de masses linéiques différentes μ_1 et μ_2 sont couplées en $x = 0$ (cf Figure 2). On suppose que le deplacement transverse $y(x,t)$ et la pente de la corde $\partial y/\partial x$ sont des grandeurs continues en $x = 0$. Un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 de la forme : $y_I(x,t) = A\exp(i(k_1 x - \omega t))$. On observe qu'une partie de l'onde se réfléchit en $x = 0$ et qu'une autre partie est transmise. On note R et T les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. Déterminer ces coefficients en fonction des données physiques du problème.

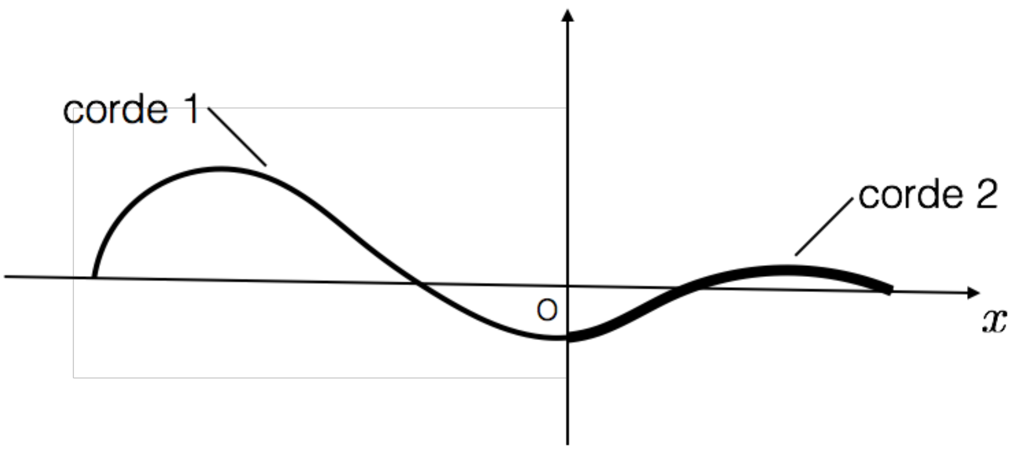

Figure 2 – Cordes de masses linéïques différentes assemblées en $x = 0$

5. On considère maintenant une situation avec 3 cordes de masses linéiques μ_1, μ_2 et μ_3 (avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$) telle que la corde 2 soit comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ (la corde 1 est du côté des $x < 0$). Comme pour la question précédente, on suppose qu'un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 : $y_I(x,t) = A\exp(i(k_1 x - \omega t)$. On note R_1 le coefficient de reflexion en amplitude dans la corde 1 et R_2 celui dans la corde 2. On note T_2 le coefficient de reflexion en amplitude dans la corde 2 et T_3 celui dans la corde 3.

   Montrer qu'on peut choisir les propriétés physiques de la corde 2 (L et μ_2) pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie à l'interface entre les cordes 1 et 2 :
   - $R_1 = 0$
   - $L = \lambda_2/4$
   - $\mu_2 = \sqrt{\mu_1\mu_3}$

Exercice 2 : Equation de dispersion de plusieurs types d'ondes

Pour chacune des équations ci-dessous calculer la relation de dispersion et la vitesse de phase.

— la propagation des ondes dans une corde est modélisée par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

— la propagation des ondes dans une corde avec amortissement peut être modélisée par l'équation de Klein-Gordon linéarisée :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \beta^2 y = 0$$

— la propagation d'ondes de grandes longueurs d'ondes en eau peu profonde peut être modélisée par l'équation de Korteweg de Vries linéarisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$