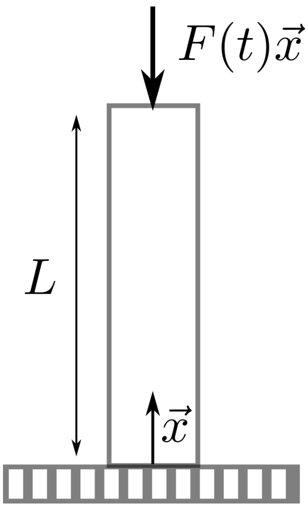
**Contrôle continu n°2 : partie « vibration des systèmes continus »**

**24 octobre 2016**

***Tous documents, calculatrice et téléphones portables interdits*** — **Durée : 1h30**

# 1 Vibrations longitudinales d'une poutre

Un barreau de longueur $L$, de section droite d'aire $S$, de module de Young $E$ et de densité volumique $\rho$ est aligné avec l'axe $\mathbf{x}$. Ses extrémités sont aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$. On néglige l'effet de la gravité. On cherche à calculer le déplacement axial $u(x,t)$ autour d'une position d'équilibre statique.




## 1.1 Vibrations libres

1. L'équation des ondes de traction-compression (ondes longitudinales) est

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Définir $c$ en fonction des caractéristiques de la poutre données dans l'énoncé.
[SOLUTION : ] $c^2 = E/\rho$

2. On pose $u(x,t) = \phi(t)X(x)$. Montrer que l'équation des ondes peut être récrite comme deux équations différentielles ordinaires : une équation pour une fonction $\phi(t)$ et une autre équation pour une fonction $X(x)$. Les constantes dans ces équations seront notées respectivement $\omega$ (dimension $[T^{-1}]$) et $k$ (dimension $[L^{-1}]$). Vous donnerez la relation entre $k$ et $\omega$.
[SOLUTION : ] Voir Cours.

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$$

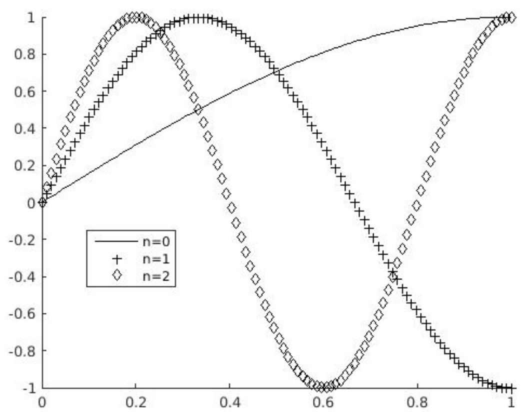
$$X^{''} + k^2 X = 0$$

$$\omega = kc$$

3. Donner les expressions de $\phi(t)$ et $X(x)$ solutions, et en déduire la forme générale de la solution $u(x,t)$ du problème vibratoire.
[SOLUTION : ]
$$\phi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$X(x) = C\cos kx + D\sin kx$$
$$u(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(C\cos kx + D\sin kx)$$

4. La poutre est encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$. Montrer que la solution prend la forme
$$u_l(x,t) = \sum_n (A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x), \tag{1}$$
et préciser l'expression de $k_n$ et la relation entre $k_n$ et $\omega_n$.
[SOLUTION : ] Les conditions aux limites imposent
$$X(0) = 0; \; X^{'}(L) = 0$$
On en déduit $C = 0$ et $\cos kL = 0$, d'où $kL = (2n+1)\pi/2$. Il y a donc $n$ solutions possibles pour $k$ :
$$kL = (2n+1)\pi/2$$

5. Tracer la forme des 3 premiers modes entre $x = 0$ et $x = L$.
[SOLUTION : ]




Aux instants $t < 0$, la poutre est comprimée par une force $F\vec{x}$. Cette force est relâchée instantanémment à $t = 0$. On cherche à calculer la vibration libre de la poutre aux instants $t > 0$.

6. Justifier avec des arguments physiques le type de vibrations (ou de mouvement) induites dans la poutre suite au relâchement de l'effort.
[SOLUTION : ] L'axe du barreau est $x$. La force étant selon $x$ uniquement, elle crée uniquement une compression (pas de flexion ni de torsion) dans le barreau. Le changement brusque de condition aux limites crée donc des ondes/vibrations longitudinales.

7. Montrer que le champ de déplacement statique dans la poutre à $t < 0$ est

$$u(x) = \frac{F}{ES}x.$$

[SOLUTION : ] La contrainte est homogène dans le barreau

$$\sigma = F/S,$$

et $u(0) = 0$. En intégrant

$$u(x) = \int_0^x \epsilon(x)\ dx,$$

avec $\sigma = E\epsilon$, on trouve le résultat.

8. Écrire l'ensemble des conditions initiales qui permettront de préciser complètement les inconnues dans l'équation (1).
[SOLUTION : ] La vitesse est nulle dans tout le barreau à $t = 0$ : $\dot{u}(x,t)_{|t=0} = 0$
Le déplacement à $t = 0$ est celui donné à la question précédente.
On sait par ailleurs qu'il suffit de deux conditions initiales pour trouver la solution libre.

9. Déterminez les expressions de $A_n$ et $B_n$ et donnez la solution $u_l(x,t)$ correspondant aux conditions initiales. Vous montrerez en particulier que l'amplitude des modes $n$ est proportionnelle à $H_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
[SOLUTION : ] On rappelle la forme générale

$$u_l(x,t) = \sum_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x),$$

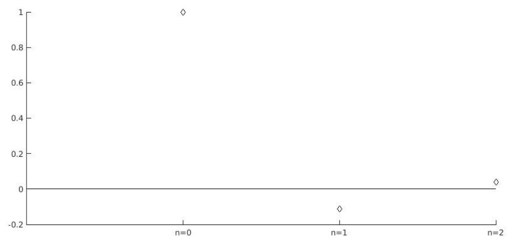
Les conditions initiales s'écrivent

$$u_l(x, t=0) = \sum_n A_n \sin(k_n x) = \frac{F}{ES}x$$
$$\dot{u}_l(x, t=0) = \sum_n \omega_n B_n \sin(k_n x) = 0, \forall x$$

On en déduit $B_n = 0$. On utilise les propriétés d'orthogonalité des modes :

$$\int_0^L \sum_n A_n \sin(k_n x)\sin(k_m x)\ dx = \int_0^L \frac{F}{ES}x\sin(k_m x)\ dx$$
$$\sum_n A_n \int_0^L \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx = \int_0^L \frac{F}{ES}x\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx$$
$$A_m\frac{L}{2} = \int_0^L \frac{F}{ES}x\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx$$
$$A_m\frac{L}{2} = \int_0^L \frac{F}{ES}x\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx$$
$$A_m = \frac{F}{ES}\frac{2}{L}\left(\frac{2L}{(2m+1)\pi}\right)^2(-1)^n$$

10. En utilisant le résultat donné à la question précédente, tracer qualitativement $H_n$ pour les trois premiers modes. Justifier par des arguments physiques le fait que le premier mode a une contribution largement supérieure aux modes d'ordre supérieur.
[SOLUTION : ] Le premier mode a une contribution largement supérieure aux modes




d'ordre supérieur car la déformée imposée à l'instant initial est plus proche de la déformée du premier mode ($n = 0$) que des modes d'ordre supérieur.

## 1.2 Vibrations forcées

11. Pour $t > 0$, une force $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\Omega t)\vec{x}$ est appliquée en $x = L$. Justifier que la réponse forcée $u_f(x,t)$ se met sous la forme

$$u_f(x,t) = \sum_n A_n(\Omega) \cos(\Omega t) \sin(k_n x). \tag{2}$$

[SOLUTION : ] La réponse forcée est une combinaison linéaire des déformées modales.
La linéarité du problème et le fait qu'il n'y a pas d'ammortissement implique que la réponse forcée (chaque mode) est en phase avec la force appliquée, donc proportionnelle à $\cos(\Omega t)$

12. Déterminer les coefficients $A_n(\Omega)$ en fonction de $F$ et des autres données du problème. Vous écrirez le résultat en faisant apparaître le terme $(\omega_n^2 - \Omega^2)$ où les $\omega_n$ sont les fréquences propres.
[SOLUTION : ] En introduisant la composition modale du barreau encastré-libre dans l'équation des ondes

$$\sum_n A_n \sin(k_n x)(\omega_n^2 - \Omega^2) = -F_0 c^2$$

$$\int_0^L \sum_n A_n \sin(k_n x) \sin(k_m x)(\omega_n^2 - \Omega^2)\ dx = -F_0 c^2 \int_0^L \sin(k_m x)\ dx$$

$$\sum_n A_n(\omega_n^2 - \Omega^2) \int_0^L \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x) \sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx = -F_0 c^2 \int_0^L \sin(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x)\ dx$$

$$A_m(\omega_m^2 - \Omega^2)\frac{L}{2} = F_0 c^2 \frac{1}{\pi}\frac{2L}{2m+1}$$

$$A_m = F_0 c^2 \frac{1}{\pi(\omega_n^2 - \Omega^2)}\frac{4}{2m+1}$$

## 2 Vibrations libres d'une poutre en flexion

Soit une poutre de longueur $L$ alignée avec l'axe $\mathbf{x}$ dont les extrémités sont aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$. La poutre a un module de Young $E$, une densité $\rho$ et un moment d'inertie de flexion $I$. La section droite est d'aire $S$. On néglige l'effet de la gravité sur la poutre et on fait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. On s'intéresse au déplacement transverse $v(x,t)$ autour d'une position d'équilibre statique. En $x = 0$ et $x = L$, la poutre est simplement appuyée.

En $x = L/2$ une masse ponctuelle $m_0$ est solidaire de la poutre. On cherche à calculer la première pulsation propre du système complet {poutre + (masse ponctuelle)}. Pour cela on étudie d'abord, dans les deux premières questions qui suivent, la poutre seule.

1. L'équation des ondes de flexion est

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0.$$

   Définir $c$ en fonction des caractéristiques de la poutre données dans l'énoncé.
   [SOLUTION : ] $c^2 = \frac{EI}{\rho S}$

2. On note $v(x,t) = f(t)X(x)$. Donner en termes physiques les conditions aux limites puis les conditions mathématiques correspondantes.
   [SOLUTION : ] Au niveau d'un appui simple, le déplacement transverse est nul et le moment est nul. La première conditions correspond à $X(0) = X(L) = 0$, et la deuxième à $X''(0) = X''(L) = 0$.

3. Justifier le choix de la fonction

$$X(x) = \sin \frac{\pi x}{L}, \tag{3}$$

   comme approximation de la déformée en vue de rechercher la première pulsation propre du système complet par une méthode de Rayleigh.
   [SOLUTION : ] Cette fonction vérifie bien les conditions sur $X$ et $X''$ définies ci-dessus. C'est de plus exactement la forme du premier mode pour une poutre simplement appuyée. Ce peut être un bon choix dans la mesure où la masse additionnelle ne perturbe pas exagérément la vibration de la poutre.

4. Donner la relation entre la raideur $K$ et l'inertie $M$ associée au premier mode et la pulsation propre $\omega$ de ce mode.
   [SOLUTION : ] $\omega^2 = \frac{K}{M}$.

5. Calculer l'energie potentielle élastique du système complet et identifier la raideur modale.
   [SOLUTION : ] L'énergie potentielle d'un mode de flexion est

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$
$$U = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{L^4} f^2(t) \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{4} EI \frac{\pi^4}{L^4} f^2(t)$$

   La masse additionnelle ne procure pas d'énergie potentielle (on néglige la pesanteur). D'où la raideur modale $K = \frac{L}{2} EI \frac{\pi^4}{L^4}$

6. Calculer l'energie cinétique du système complet et identifier la masse modale.

[SOLUTION : ] L'énergie cinétique d'un mode de flexion est

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S(\dot{f}\sin(\pi x/L))^2 dx$$
$$T = \frac{L}{4}\rho S \dot{f}^2$$

Energie liée à la masse $m_0$

$$T' = \frac{1}{2}m_0\Big(\sin(\pi/2)\dot{f}\Big)^2 = \frac{1}{2}m_0\dot{f}^2$$

L'énergie cinétique totale est

$$T + T' = \frac{1}{2}m_0\dot{f}^2 + \frac{L}{4}\rho S\dot{f}^2 = \frac{1}{2}M\dot{f}^2,$$

avec $M = m_0 + \frac{\rho S L}{2}$

7. Déterminer l'expression de la pulsation propre. Vous exprimerez le résultat final en fonction de la première pulsation propre $\omega_1$ de la poutre en l'absence de masse additionnelle. On rappelle $\omega_1 = c(\pi/L)^2$.
[SOLUTION : ]

$$\omega^2 = \frac{K}{M}$$
$$\omega^2 = \frac{\frac{L}{2}EI\frac{\pi^4}{L^4}}{m_0 + \frac{\rho S L}{2}}$$
$$\omega^2 = \omega_1^2 \frac{1}{\frac{2m_0}{\rho S L} + 1}$$

# FORMULAIRE

$$\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)\, dx = \frac{L}{\pi(m-n)}\sin(m-n)\frac{\pi}{2} - \frac{L}{\pi(m+n)}\sin(m+n)\frac{\pi}{2}$$