Demostraciones Algebra

July 22, 2025

Teorema 1 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.*

Prueba: Si $A \sim B \Longrightarrow \exists$ una sucesion de matrices tal que $A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n = B$, donde cada A_j se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.
Por lo tanto basta probar que $A_j x = 0$ y $A_{j+1}x = 0$.

- Caso e_r^c: $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \iff c\cdot a_{r1}x_1 + c\cdot a_{r2}x_2 + \cdots + c\cdot a_{rn}x_n = 0$, pero como $c \neq 0 \Longrightarrow c\cdot(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n) = 0$, por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso $e_{r,s}$: es trivial pues ambas filas r, s ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso $e_{r,s}^c$: $(r + c\cdot s) = (a_{r1} + c\cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c\cdot a_{s2})x_2 + \cdots + (a_{rn} + c\cdot a_{sn})x_n = 0$ de la misma formas que en el primer caso como las filas r, s son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila r tambien lo es.

$\square$

Teorema 2 *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ con $m < n \Longrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.*

Prueba: Sea R la MERF equivalente a $A \Longrightarrow$ los sistemas $Ax = 0$ y $Rx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Sea $r =$ la cantidad de filas no nulas de $R \Longrightarrow r \leq m$ y por lo tanto $r < n$ $\Longrightarrow$ hay $n - r > 0$ variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. $\square$

Teorema 3 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es equivalente por filas a las $Id \iff Ax = 0$ tiene unicamente la solucion trivial.*

Prueba:

- $(\Longrightarrow)$: Si $A \sim Id$, estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como $Idx = 0$ admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- $(\Longleftarrow)$: Sea R la MERF $\sim A \Longrightarrow$ el sistema $Rx = 0$ tiene unicamente la solucion trivial. Sea $r =$ la cantidad de filas no nulas de $R \Longrightarrow n - r = 0$ porque no tienen variables libres. Entonces cada fila i tiene un 1 en la columna k_i por lo tanto $R = Id$.

$\square$

Teorema 4 *Propiedades de la multiplicacion de matrices:*

1. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, C \in \mathbb{K}^{p\times q} \Longrightarrow (AB)C = A(BC)$.
2. $A \in \mathbb{K}^{m\times n} \Longrightarrow Id_m A = Id_n A = A$.
3. $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n\times p} \Longrightarrow (A + A')B = AB + A'B$ *y* $A(B + B') = AB + AB'$.
4. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda\cdot(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Teorema 5 *Sea e una operacion elemental por filas y sea $E = e(Id)$ la matriz elemental asociada. Entonces para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se cumple que $e(A) = E \cdot A$.*

Prueba: Tenemos que el elemento i, j de $e(A)$ es el mismo que el de la matriz EA para cada operacion elemental, osea $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$.

- Caso e^c_r:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{ij} \text{ si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \ (\text{si } i \neq k \Longrightarrow E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii}A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{ij} \text{ si } i = r \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}$:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r, s \\ A_{sj} \text{ si } i = r \\ A_{rj} \text{ si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \text{ , donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \Longrightarrow (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \Longrightarrow (EA)_{ij} = E_{is}A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \Longrightarrow (EA)_{ij} = E_{ir}A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso $e^c_{r,s}$:

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} \text{ si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \text{ , donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ c \text{ si } i = r \wedge j = s \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

□

Teorema 6 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:*

1. *Si A es inversible $\Longrightarrow A^{-1}$ tambien lo es y $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Si A, B son inversibles $\Longrightarrow AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Prueba:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \Longrightarrow A^{-1}$ inversible y $(A^{-1})^{-1}$ es A.
2. $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$.

□

Teorema 7 *Toda matriz elemental E es inversible.*

Prueba: Sea e la operacion elemental por fila correspondiente a E y sea e' la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} &Id = e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ &Id = e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ &\implies E \text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 8 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ entonces son equivalentes:*

1. *A es inversible.*
2. *A es equivalente por filas a la Id.*
3. *A es producto de matrices elementales.*

Prueba:

- [$1 \implies 2$] Sea R la MERF $\sim A \implies$ existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ talque $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Como las matrices elementales E_j y A son inversibles $\implies R$ tambien lo es $\implies R$ no tiene filas nulas por lo tanto $R = Id$.
- [$2 \implies 3$] Si $A \sim Id \implies Id \sim A \implies$ existen P productos de matrices elementales talque $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$.
- [$3 \implies 1$] Supongamos $A = E_1 \cdots E_k$ donde E_j es una matriz elemental. Como cada E_j es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es $\implies$ A es inversible.

$\square$

Teorema 9 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces B es equivalente por filas a $A \iff \exists\, P$ matriz inversible $m \times m$ talque $B = P \cdot A$*

Prueba:

- $(\implies)$: Si $B \sim A$ sabemos que $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ y como cada E_i es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- $(\impliedby)$: Sea P inversible talque $B = PA$ como P es producto de matrices elementales $\implies B = E_k \cdots E_1 A \implies B$ se obtiene de A haciendo operaciones elementales $\implies B \sim A$.

$\square$

Teorema 10 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces son equivalentes:*

1. *A es inversible.*
2. *El sistema $Ax = 0$ tiene una unica solucion (la trivial).*
3. *$\forall\, b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ el sistema no-homogeneo $Ax = b$ tiene una unica solucion.*

Prueba:

- [1 $\iff$ 2] Sabemos que A es inversible $\iff A \sim Id \iff$ el sistema $Ax = 0$ tiene como unica solucion la trivial.

- [1 $\implies$ 3] Sea $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, como A es inversible $\implies \exists A^{-1}$. Por lo tanto sea $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ $\implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$.
  Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion $x_1 \implies Ax_1 = b \implies Ax_1 = b = Ax_0$ ahora multiplicamos por la inversa $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$

- [3 $\implies$ 2] Como tiene solucion para todo b tomo $b = 0$ por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

$\square$

Teorema 11 *Si $W \subseteq V$ y $W \neq \emptyset$. Entonces W es un $\mathbb{K}-$subespacio vectorial de V $\iff$ $\forall v, w \in W$ y $\forall c \in \mathbb{K}$ el vector $[c \cdot v + w] \in W$*

Prueba:

- $(\Longrightarrow)$: Si W es un subespacio vectorial y $c \in \mathbb{K}$, $v, w \in W \Longrightarrow c \cdot v \in W \Longrightarrow c \cdot v + w \in W$
- $(\Longleftarrow)$: Supongamos que $\forall v, w \in W$ y $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$ veamos contiene al $\vec{0}$, que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
  1. Como $W \neq \emptyset \Longrightarrow \exists w \in W \Longrightarrow (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \Longrightarrow \vec{0} \in W$.
  2. Tomamos $c = 1$ por lo tanto $(1) \cdot v + w = v + w \in W$ por lo tanto la suma esta bien definida.
  3. Como $\vec{0} \in W$ tomamos $w = \vec{0}$ por lo tanto $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$ entonces el producto esta bien definido.

$\square$

Teorema 12 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Entonces la interseccion de subespacios de V es un subespacio vectorial de V.*

Prueba:

Sea $\{W_i\}_{i \in I}$, donde W_i es un subespacio vectorial de V. Entonces sea $W = \bigcap\limits_{i \in I} W_i$.

Para ver que W es un subespacio veamos que si $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K} \Longrightarrow c \cdot v + w \in W$.
Si $v, w \in W \Longrightarrow v, w \in W_i$ para todo $i \in I$ y como todo W_i es un subespacio $\Longrightarrow c \cdot v + w \in W_i$ $\Longrightarrow c \cdot v + w \in W$. $\square$

Teorema 13 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_k \in V$.
Entonces $W = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k | c_i \in \mathbb{K}\}$ = Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de V.*

Prueba: Tomemos $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K}$ veamos $c \cdot v + w \in W$.

$$\begin{aligned}
&\text{Sean } v = c_1 v_1 + \dots c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \dots d_k v_k \Longrightarrow \\
&c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \dots c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \dots d_k v_k) \\
&= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \dots (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
&\Longrightarrow c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto} \in W
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 14 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y sea $S \subseteq V$ no vacio $\Longrightarrow$
$\langle S \rangle = \bigcap_{i \in I} Wi$ (donde W_i subespacio y $S \subseteq W_i$). ie: El subespacio generado por S coincide con la interseccion de todos los subespacios que contienen a S.*

Prueba: Llamemos $W_1 = \langle S \rangle$ y $W_2 = \bigcap \{W_i : W_i \text{ subespacio}, S \subseteq W_i\}$ queremos ver que W_1 y W_2 son iguales. Para eso veamos la doble contencion.

- $(W_1 \subseteq W_2)$: Sea $v \in W_1$, para ver que $v \in W_2$, sea W un subespacio que contiene a $S \Longrightarrow$ contiene a cualquier combinacion lineal de elementos de S.
  Si $v \in W_1 \Longrightarrow v = c_1 v_1 + \ldots c_k v_k$ con $v_i \in S$ y $c_i \in \mathbb{K}$ (como $S \subseteq W \Longrightarrow v_i \in W$). Como W y como la interseccion de todo subespacio de W tambien lo es $\Longrightarrow v \in W_2$.
- $(W_2 \subseteq W_1)$: Como $W_1 = \langle S \rangle$ es un subespacio y contiene a S es en particular uno de los subespacios que se interseca en W_2.

$\square$

Teorema 15 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_r \in V$ tales que $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = V \Longrightarrow$ Todo conjunto L.I. de V es finito y no puede tener mas de r elementos.*

Prueba: Veamos que cualquier conjunto de mas de r elementos es L.D. , sea $S = \{w_1, \ldots, w_s\}$ con $s > r$, con cada $w_j \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \Longrightarrow \exists a_{ij} \in \mathbb{K}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} v_i$. Por lo tanto si vemos como matriz a cada w_j escrito como combinacion lineal tendremos una matriz $A \in \mathbb{K}^{r \times s}$. Si miramos el sistema $Ax = 0$ como $r < s$ sabemos que tiene soluciones no triviales. Es decir $\exists x \neq \vec{0}$ talque $x_1 w_1 + \ldots x_s w_s = 0$.

$$\sum_{j=1}^{s} x_j w_j = \sum_{j=1}^{s} x_j \sum_{i=1}^{r} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{s} x_j a_{ij}) v_i = 0$$

Por lo tanto $\exists$ combinacion lineal con escalares no todos nulos, tales que $x_1 + w_1 + \ldots x_s + w_s = 0$ $\Longrightarrow \{w_1, \ldots, w_s\}$ es L.D. $\square$