

# Demostraciones Algebra

July 24, 2025

**Teorema 1** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$  matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones  $Ax = 0$  y  $Bx = 0$  tienen exactamente las mismas soluciones.

**Prueba:** Si  $A \sim B \implies \exists$  una sucesion de matrices tal que  $A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = B$ , donde cada  $A_j$  se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.

Por lo tanto basta probar que  $A_j x = 0$  y  $A_{j+1} x = 0$ .

- Caso  $e_r^c$ :  $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \iff c \cdot a_{r1}x_1 + c \cdot a_{r2}x_2 + \dots + c \cdot a_{rn}x_n = 0$ , pero como  $c \neq 0 \implies c \cdot (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n) = 0$ , por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso  $e_{r,s}$ : es trivial pues ambas filas  $r, s$  ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso  $e_{r,s}^c$ :  $(r + c \cdot s) = (a_{r1} + c \cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c \cdot a_{s2})x_2 + \dots + (a_{rn} + c \cdot a_{sn})x_n = 0$  de la misma formas que en el primer caso como las filas  $r, s$  son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila  $r$  tambien lo es.

□

**Teorema 2** Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  con  $m < n \implies$  el sistema  $Ax = 0$  tiene soluciones no triviales.

**Prueba:** Sea  $R$  la MERF equivalente a  $A \implies$  los sistemas  $Ax = 0$  y  $Rx = 0$  tienen exactamente las mismas soluciones. Sea  $r$  = la cantidad de filas no nulas de  $R \implies r \leq m$  y por lo tanto  $r < n \implies$  hay  $n - r > 0$  variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. □

**Teorema 3** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces  $A$  es equivalente por filas a las  $Id \iff Ax = 0$  tiene unicamente la solucion trivial.

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $A \sim Id$ , estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como  $Id x = 0$  admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- $(\impliedby)$  : Sea  $R$  la MERF  $\sim A \implies$  el sistema  $Rx = 0$  tiene unicamente la solucion trivial. Sea  $r$  = la cantidad de filas no nulas de  $R \implies n - r = 0$  porque no tienen variables libres. Entonces cada fila  $i$  tiene un 1 en la columna  $k_i$  por lo tanto  $R = Id$ .

□

**Teorema 4** Propiedades de la multiplicacion de matrices:

1.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, C \in \mathbb{K}^{p \times q} \implies (AB)C = A(BC)$ .
2.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \implies Id_m A = Id_n A = A$ .
3.  $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n \times p} \implies (A + A')B = AB + A'B$  y  $A(B + B') = AB + AB'$ .
4.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

**Teorema 5** Sea  $e$  una operacion elemental por filas y sea  $E = e(Id)$  la matriz elemental asociada. Entonces para toda  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  se cumple que  $e(A) = E \cdot A$ .

**Prueba:** Tenemos que el elemento  $i, j$  de  $e(A)$  es el mismo que el de la matriz  $EA$  para cada operacion elemental, osea  $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$ .

- Caso  $e_r^c$ :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} \quad (\text{si } i \neq k \implies E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii} A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

- Caso  $e_{r,s}$ :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r, s \\ A_{sj} & \text{si } i = r \\ A_{rj} & \text{si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \implies (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \implies (EA)_{ij} = E_{is} A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \implies (EA)_{ij} = E_{ir} A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso  $e_{r,s}^c$ :

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ c & \text{si } i = r \wedge j = s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

□

**Teorema 6** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ :

1. Si  $A$  es inversible  $\implies A^{-1}$  tambien lo es y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2. Si  $A, B$  son inversibles  $\implies AB$  es inversible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Prueba:**

1.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \implies A^{-1}$  inversible y  $(A^{-1})^{-1}$  es  $A$ .
2.  $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$ .

□

**Teorema 7** *Toda matriz elemental  $E$  es inversible.*

**Prueba:** Sea  $e$  la operacion elemental por fila correspondiente a  $E$  y sea  $e'$  la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea  $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} Id &= e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ Id &= e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ \implies E &\text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

□

**Teorema 8** *Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  entonces son equivalentes:*

1.  $A$  es inversible.
2.  $A$  es equivalente por filas a la  $Id$ .
3.  $A$  es producto de matrices elementales.

**Prueba:**

- $[1 \implies 2]$  Sea  $R$  la MERF  $\sim A \implies$  existen matrices elementales  $E_1, \dots, E_k$  talque  $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$ . Como las matrices elementales  $E_j$  y  $A$  son inversibles  $\implies R$  tambien lo es  $\implies R$  no tiene filas nulas por lo tanto  $R = Id$ .
- $[2 \implies 3]$  Si  $A \sim Id \implies Id \sim A \implies$  existen  $P$  productos de matrices elementales talque  $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$ .
- $[3 \implies 1]$  Supongamos  $A = E_1 \cdots E_k$  donde  $E_j$  es una matriz elemental. Como cada  $E_j$  es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es  $\implies A$  es inversible.

□

**Teorema 9** *Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Entonces  $B$  es equivalente por filas a  $A \iff \exists P$  matriz inversible  $m \times m$  talque  $B = P \cdot A$*

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $B \sim A$  sabemos que  $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$  y como cada  $E_i$  es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- $(\impliedby)$  : Sea  $P$  inversible talque  $B = PA$  como  $P$  es producto de matrices elementales  $\implies B = E_k \cdots E_1 A \implies B$  se obtiene de  $A$  haciendo operaciones elementales  $\implies B \sim A$ .

□

**Teorema 10** *Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $A$  es inversible.
2. El sistema  $Ax = 0$  tiene una unica solucion (la trivial).
3.  $\forall b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  el sistema no-homogeneo  $Ax = b$  tiene una unica solucion.

**Prueba:**

- $[1 \iff 2]$  Sabemos que  $A$  es inversible  $\iff A \sim Id \iff$  el sistema  $Ax = 0$  tiene como unica solucion la trivial.
- $[1 \implies 3]$  Sea  $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , como  $A$  es inversible  $\implies \exists A^{-1}$ . Por lo tanto sea  $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n \times 1} \implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$ .  
Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion  $x_1 \implies Ax_1 = b \implies Ax_1 = b = Ax_0$  ahora multiplicamos por la inversa  $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$
- $[3 \implies 2]$  Como tiene solucion para todo  $b$  tomo  $b = 0$  por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

□

**Teorema 11** Si  $W \subseteq V$  y  $W \neq \emptyset$ . Entonces  $W$  es un  $\mathbb{K}$ -subespacio vectorial de  $V \iff \forall v, w \in W \forall c \in \mathbb{K}$  el vector  $[c \cdot v + w] \in W$

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $W$  es un subespacio vectorial y  $c \in \mathbb{K}$ ,  $v, w \in W \implies c \cdot v \in W \implies c \cdot v + w \in W$
- $(\impliedby)$  : Supongamos que  $\forall v, w \in W$  y  $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$  veamos contiene al  $\vec{0}$ , que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
  1. Como  $W \neq \emptyset \implies \exists w \in W \implies (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \implies \vec{0} \in W$ .
  2. Tomamos  $c = 1$  por lo tanto  $(1) \cdot v + w = v + w \in W$  por lo tanto la suma esta bien definida.
  3. Como  $\vec{0} \in W$  tomamos  $w = \vec{0}$  por lo tanto  $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$  entonces el producto esta bien definido.

□

**Teorema 12** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Entonces la interseccion de subespacios de  $V$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Prueba:**

Sea  $\{W_i\}_{i \in I}$ , donde  $W_i$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Entonces sea  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ .

Para ver que  $W$  es un subespacio veamos que si  $v, w \in W$ ,  $c \in \mathbb{K} \implies c \cdot v + w \in W$ .

Si  $v, w \in W \implies v, w \in W_i$  para todo  $i \in I$  y como todo  $W_i$  es un subespacio  $\implies c \cdot v + w \in W_i \implies c \cdot v + w \in W$ . □

**Teorema 13** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sean  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

Entonces  $W = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_i \in \mathbb{K}\} =$  Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Prueba:** Tomemos  $v, w \in W$ ,  $c \in \mathbb{K}$  veamos  $c \cdot v + w \in W$ .

$$\begin{aligned}
 &\text{Sean } v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k \implies \\
 &c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \dots + c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \dots + d_k v_k) \\
 &= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
 &\implies c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto } \in W
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 14** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimension finita y  $W$  subespacio de  $V$ . Todo subconjunto L.I. de  $W$  es finito y se puede completar a una base.

**Prueba:** Si  $S_0 \subseteq W$  es L.I.  $\implies S_0$  es un conjunto L.I. de  $V$  y si  $\dim(V) = n$ , sabemos que  $|S_0| \leq n$ , osea es finito. Queremos extenderlo a una base de la siguiente forma:

- Si  $S_0$  genera  $W$  ya es una base.

- Si  $S_0$  no genera  $W \implies \exists w_1 \in W$  talque  $w_1 \notin \langle S_0 \rangle$ , vimos que si agregamos algo que no esta en el espacio generado este conjunto sigue siendo L.I.  
Repetimos este paso hasta algun  $S_k = S_0 \cup w_1 \cup \dots \cup w_k$  talque  $\langle S_k \rangle = W$ . Como este conjunto es por definicion L.I.y genera este es una base.

□

**Teorema 15** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, sea  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  un conjunto de generadores de  $V$ . Entonces existe  $B \subseteq S$  que es una base de  $V$ .

**Prueba:** Vamos a definir inductivamente subconjuntos  $G_j \subseteq S$  ( $j = 1, \dots, m$ ) que sean L.I.

- ( $j = 1$ ) :

$$G_1 = \begin{cases} \{v_1\} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } v_1 = 0 \end{cases} \implies G_1 \text{ es L.I.}$$

- ( $j = 2$ ) :

$$G_2 = \begin{cases} G_1 \cup v_2 & \text{si } v_2 \notin \langle G_1 \rangle \\ G_1 & \text{si } v_2 \in \langle G_1 \rangle \end{cases} \implies G_2 \text{ es L.I. en cualquier caso}$$

- ( $j + 1$ ) :

$$G_{j+1} = \begin{cases} G_j \cup v_{j+1} & \text{si } v_{j+1} \notin \langle G_j \rangle \\ G_j & \text{si } v_{j+1} \in \langle G_j \rangle \end{cases} \implies \text{en ambos casos } G_{j+1} \text{ es L.I.}$$

$\implies G_m$  es L.I.y  $\langle G_m \rangle = \{v_1, \dots, v_m\} = V \implies \mathcal{B} = G_m \subseteq S$  y la dimension de  $V = |G_m|$ . □

**Teorema 16** Sean  $W_1, W_2$  dos subespacios de  $V$ :

1.  $W_1 + W_2$  es un subespacio de  $V$ .
2.  $W_1 + W_2$  es el menor subespacio (respecto a la inclusion) que contiene a  $W_1 + W_2$ .
3. Si  $\{v_i\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores de  $W_1$  y  $\{w_j\}_{j \in J}$  es un conjunto de generadores de  $W_2 \implies \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$  es un conjunto de generadores de  $W_1 + W_2$ .

**Prueba:**

1.  $W_1 + W_2 \neq \emptyset$  pues  $\vec{0} \in W_1$  y  $\vec{0} \in W_2 \implies \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in W_1 + W_2$ . Sean  $v_1, v_2 \in W_1 + W_2$  queremos ver que  $c \cdot v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ .

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + y_1, v_2 = x_2 + y_2 \text{ con } x_1, x_2 \in W_1 \subseteq V \text{ y } y_1, y_2 \in W_2 \subseteq V \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &= c \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (cx_1 + x_2) \in W_1 + (cy_1 + y_2) \in W_2 \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &\in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

2.  $W_1 \subseteq W_1 + W_2$  pues si  $w_1 \in W_1 \implies w_1 + \vec{0} \in W_1 + W_2$  y del mismo modo con  $W_2$ . Por lo tanto  $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ , basta ver que es el menor subespacio que lo contiene.  
Sea  $U$  un subespacio de  $V$  talque  $W_1 \cup W_2 \subseteq U$ , queremos ver que  $W_1 + W_2 \subseteq U$ .  
Sea  $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$  con  $x \in W_1 \subseteq U$ ,  $y \in W_2 \subseteq U$  osea  $v \in U \implies W_1 + W_2 \subseteq U$ .

3.  $\{v_i\}_{i \in I}$  genera  $W_1$ ,  $\{w_j\}_{j \in J}$  genera  $W_2 \implies S = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$  genera  $W_1 + W_2$ .

Sea  $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$  con  $x \in W_1, y \in W_2$

$$\implies x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i, y = \sum_{j \in J} \beta_j w_j \quad (\text{con } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K})$$

$$\implies v = x + y = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} \beta_j w_j$$

Por lo tanto  $v$  es combinacion lineal de elementos de  $S$

□

**Teorema 17** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, sean  $W_1, W_2$  subespacios de  $V$  y de dimension finita.

Entonces  $W_1 + W_2$  es un subespacio y  $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

**Prueba:**  $W_1 \cap W_2$  es un subespacio de  $W_1$  (y de  $W_2$ ) por lo tanto es de dimension finita. Sea  $\{u_1, \dots, u_k\}$  base de  $W_1 \cap W_2 \implies \{u_1, \dots, u_k\}$  es L.I. en  $W_1 \implies$  se puede extender a una base de  $W_1$ , analogamente con  $W_2$ .

Osea existen  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W_1$  tales que  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $W_1$ . De la misma forma existen  $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W_2$  tales que  $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$  es base.

$\implies W_1 + W_2$  es generado por  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  es  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ . Veamos que este conjunto es L.I.

$$\text{Si } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = - \underbrace{\sum_{i=1}^m c_i w_i}_{\in W_1 \cap W_2} \in W_1 \cap W_2$$

$$\text{Como } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ es base de } W_1 \cap W_2 \implies - \sum_{i=1}^m c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i$$

$$\text{Reemplazando } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^k (-d_i) u_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^k (a_i - d_i) u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$$

Como  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $W_1$  el conjunto es L.I.  $\implies a_i = d_i$  y  $b_i = 0, \forall i$ .

Volviendo a la sumatoria con este resultado sabemos que:

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

Como  $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$  es base de  $W_2$  el conjunto es L.I.  $\implies$  todos los escalares son 0.

Osea  $\beta = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  es L.I. y por lo tanto es base de  $W_1 + W_2$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) < \infty \text{ y } \dim(W_1 + W_2) = k + n + m$$

$$\dim(W_1) = k + n, \dim(W_2) = k + m, \dim(W_1 \cap W_2) = k$$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

□

**Proposición 17.1** Si  $V = W_1 \oplus W_2 \implies$  para cada  $v \in V : \exists$  unicos elementos  $x \in W_1, y \in W_2$  tales que  $v = x + y$ .

**Prueba:** Como  $V = W_1 + W_2$  sabemos que existen  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$  tales que  $v = w_1 + w_2$ . Si además  $v = u_1 + u_2 \implies \vec{0} = v - v = (w_1 + w_2) - (u_1 + u_2) = (w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) \implies w_1 - u_1 = w_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$  (pues es suma directa)  $\implies w_1 = u_1, w_2 = u_2$ .  $\square$

**Teorema 18** Sean  $W_1, W_2$  subespacios vectoriales de  $V$  y sean  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  bases de  $W_1$  y  $W_2$ . Entonces son equivalentes:

1.  $V = W_1 \oplus W_2$ .
2.  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  es una base de  $V$ .