

Demostraciones Algebra

July 25, 2025

Teorema 1 Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Prueba: Si $A \sim B \implies \exists$ una sucesion de matrices tal que $A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = B$, donde cada A_j se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.

Por lo tanto basta probar que $A_j x = 0$ y $A_{j+1} x = 0$.

- Caso e_r^c : $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \iff c \cdot a_{r1}x_1 + c \cdot a_{r2}x_2 + \dots + c \cdot a_{rn}x_n = 0$, pero como $c \neq 0 \implies c \cdot (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n) = 0$, por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso $e_{r,s}$: es trivial pues ambas filas r, s ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso $e_{r,s}^c$: $(r + c \cdot s) = (a_{r1} + c \cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c \cdot a_{s2})x_2 + \dots + (a_{rn} + c \cdot a_{sn})x_n = 0$ de la misma formas que en el primer caso como las filas r, s son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila r tambien lo es.

□

Teorema 2 Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ con $m < n \implies$ el sistema $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.

Prueba: Sea R la MERF equivalente a $A \implies$ los sistemas $Ax = 0$ y $Rx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Sea r = la cantidad de filas no nulas de $R \implies r \leq m$ y por lo tanto $r < n \implies$ hay $n - r > 0$ variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. □

Teorema 3 Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces A es equivalente por filas a las $Id \iff Ax = 0$ tiene unicamente la solucion trivial.

Prueba:

- (\implies) : Si $A \sim Id$, estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como $Idx = 0$ admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- (\impliedby) : Sea R la MERF $\sim A \implies$ el sistema $Rx = 0$ tiene unicamente la solucion trivial. Sea r = la cantidad de filas no nulas de $R \implies n - r = 0$ porque no tienen variables libres. Entonces cada fila i tiene un 1 en la columna k_i por lo tanto $R = Id$.

□

Teorema 4 Propiedades de la multiplicacion de matrices:

1. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, C \in \mathbb{K}^{p \times q} \implies (AB)C = A(BC)$.
2. $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \implies Id_m A = Id_n A = A$.
3. $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n \times p} \implies (A + A')B = AB + A'B$ y $A(B + B') = AB + AB'$.
4. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Teorema 5 Sea e una operacion elemental por filas y sea $E = e(Id)$ la matriz elemental asociada. Entonces para toda $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se cumple que $e(A) = E \cdot A$.

Prueba: Tenemos que el elemento i, j de $e(A)$ es el mismo que el de la matriz EA para cada operacion elemental, osea $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$.

- Caso e_r^c :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} \quad (\text{si } i \neq k \implies E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii} A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}$:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r, s \\ A_{sj} & \text{si } i = r \\ A_{rj} & \text{si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \implies (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \implies (EA)_{ij} = E_{is} A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \implies (EA)_{ij} = E_{ir} A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}^c$:

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ c & \text{si } i = r \wedge j = s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

□

Teorema 6 Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

1. Si A es inversible $\implies A^{-1}$ tambien lo es y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A, B son inversibles $\implies AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Prueba:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \implies A^{-1}$ inversible y $(A^{-1})^{-1}$ es A .
2. $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$.

□

Teorema 7 *Toda matriz elemental E es inversible.*

Prueba: Sea e la operacion elemental por fila correspondiente a E y sea e' la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} Id &= e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ Id &= e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ \implies E &\text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

□

Teorema 8 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entonces son equivalentes:*

1. A es inversible.
2. A es equivalente por filas a la Id .
3. A es producto de matrices elementales.

Prueba:

- $[1 \implies 2]$ Sea R la MERF $\sim A \implies$ existen matrices elementales E_1, \dots, E_k talque $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Como las matrices elementales E_j y A son inversibles $\implies R$ tambien lo es $\implies R$ no tiene filas nulas por lo tanto $R = Id$.
- $[2 \implies 3]$ Si $A \sim Id \implies Id \sim A \implies$ existen P productos de matrices elementales talque $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$.
- $[3 \implies 1]$ Supongamos $A = E_1 \cdots E_k$ donde E_j es una matriz elemental. Como cada E_j es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es $\implies A$ es inversible.

□

Teorema 9 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Entonces B es equivalente por filas a $A \iff \exists P$ matriz inversible $m \times m$ talque $B = P \cdot A$*

Prueba:

- (\implies) : Si $B \sim A$ sabemos que $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ y como cada E_i es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- (\impliedby) : Sea P inversible talque $B = PA$ como P es producto de matrices elementales $\implies B = E_k \cdots E_1 A \implies B$ se obtiene de A haciendo operaciones elementales $\implies B \sim A$.

□

Teorema 10 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces son equivalentes:*

1. A es inversible.
2. El sistema $Ax = 0$ tiene una unica solucion (la trivial).
3. $\forall b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ el sistema no-homogeneo $Ax = b$ tiene una unica solucion.

Prueba:

- $[1 \iff 2]$ Sabemos que A es inversible $\iff A \sim Id \iff$ el sistema $Ax = 0$ tiene como unica solucion la trivial.
- $[1 \implies 3]$ Sea $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, como A es inversible $\implies \exists A^{-1}$. Por lo tanto sea $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n \times 1} \implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$.
Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion $x_1 \implies Ax_1 = b \implies Ax_1 = b = Ax_0$ ahora multiplicamos por la inversa $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$
- $[3 \implies 2]$ Como tiene solucion para todo b tomo $b = 0$ por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

□

Teorema 11 Si $W \subseteq V$ y $W \neq \emptyset$. Entonces W es un \mathbb{K} -subespacio vectorial de $V \iff \forall v, w \in W \forall c \in \mathbb{K}$ el vector $[c \cdot v + w] \in W$

Prueba:

- (\implies) : Si W es un subespacio vectorial y $c \in \mathbb{K}$, $v, w \in W \implies c \cdot v \in W \implies c \cdot v + w \in W$
- (\impliedby) : Supongamos que $\forall v, w \in W$ y $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$ veamos contiene al $\vec{0}$, que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
 1. Como $W \neq \emptyset \implies \exists w \in W \implies (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \implies \vec{0} \in W$.
 2. Tomamos $c = 1$ por lo tanto $(1) \cdot v + w = v + w \in W$ por lo tanto la suma esta bien definida.
 3. Como $\vec{0} \in W$ tomamos $w = \vec{0}$ por lo tanto $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$ entonces el producto esta bien definido.

□

Teorema 12 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Entonces la interseccion de subespacios de V es un subespacio vectorial de V .

Prueba:

Sea $\{W_i\}_{i \in I}$, donde W_i es un subespacio vectorial de V . Entonces sea $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Para ver que W es un subespacio veamos que si $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K} \implies c \cdot v + w \in W$.

Si $v, w \in W \implies v, w \in W_i$ para todo $i \in I$ y como todo W_i es un subespacio $\implies c \cdot v + w \in W_i \implies c \cdot v + w \in W$. □

Teorema 13 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_k \in V$.

Entonces $W = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_i \in \mathbb{K}\} =$ Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de V .

Prueba: Tomemos $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K}$ veamos $c \cdot v + w \in W$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Sean } v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k \implies \\
 &c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \dots + c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \dots + d_k v_k) \\
 &= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
 &\implies c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto } \in W
 \end{aligned}$$

□

Teorema 14 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimension finita y W subespacio de V . Todo subconjunto L.I. de W es finito y se puede completar a una base.

Prueba: Si $S_0 \subseteq W$ es L.I. $\implies S_0$ es un conjunto L.I. de V y si $\dim(V) = n$, sabemos que $|S_0| \leq n$, osea es finito. Queremos extenderlo a una base de la siguiente forma:

- Si S_0 genera W ya es una base.

- Si S_0 no genera $W \implies \exists w_1 \in W$ talque $w_1 \notin \langle S_0 \rangle$, vimos que si agregamos algo que no esta en el espacio generado este conjunto sigue siendo L.I.
Repetimos este paso hasta algun $S_k = S_0 \cup w_1 \cup \dots \cup w_k$ talque $\langle S_k \rangle = W$. Como este conjunto es por definicion L.I.y genera este es una base.

□

Teorema 15 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de generadores de V . Entonces existe $B \subseteq S$ que es una base de V .

Prueba: Vamos a definir inductivamente subconjuntos $G_j \subseteq S$ ($j = 1, \dots, m$) que sean L.I.

- ($j = 1$) :

$$G_1 = \begin{cases} \{v_1\} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } v_1 = 0 \end{cases} \implies G_1 \text{ es L.I.}$$

- ($j = 2$) :

$$G_2 = \begin{cases} G_1 \cup v_2 & \text{si } v_2 \notin \langle G_1 \rangle \\ G_1 & \text{si } v_2 \in \langle G_1 \rangle \end{cases} \implies G_2 \text{ es L.I. en cualquier caso}$$

- ($j + 1$) :

$$G_{j+1} = \begin{cases} G_j \cup v_{j+1} & \text{si } v_{j+1} \notin \langle G_j \rangle \\ G_j & \text{si } v_{j+1} \in \langle G_j \rangle \end{cases} \implies \text{en ambos casos } G_{j+1} \text{ es L.I.}$$

$\implies G_m$ es L.I.y $\langle G_m \rangle = \{v_1, \dots, v_m\} = V \implies \mathcal{B} = G_m \subseteq S$ y la dimension de $V = |G_m|$. □

Teorema 16 Sean W_1, W_2 dos subespacios de V :

1. $W_1 + W_2$ es un subespacio de V .
2. $W_1 + W_2$ es el menor subespacio (respecto a la inclusion) que contiene a $W_1 + W_2$.
3. Si $\{v_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de generadores de W_1 y $\{w_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de generadores de $W_2 \implies \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$.

Prueba:

1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$ pues $\vec{0} \in W_1$ y $\vec{0} \in W_2 \implies \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in W_1 + W_2$. Sean $v_1, v_2 \in W_1 + W_2$ queremos ver que $c \cdot v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + y_1, v_2 = x_2 + y_2 \text{ con } x_1, x_2 \in W_1 \subseteq V \text{ y } y_1, y_2 \in W_2 \subseteq V \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &= c \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (cx_1 + x_2) \in W_1 + (cy_1 + y_2) \in W_2 \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &\in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

2. $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ pues si $w_1 \in W_1 \implies w_1 + \vec{0} \in W_1 + W_2$ y del mismo modo con W_2 . Por lo tanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$, basta ver que es el menor subespacio que lo contiene.
Sea U un subespacio de V talque $W_1 \cup W_2 \subseteq U$, queremos ver que $W_1 + W_2 \subseteq U$.
Sea $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$ con $x \in W_1 \subseteq U$, $y \in W_2 \subseteq U$ osea $v \in U \implies W_1 + W_2 \subseteq U$.

3. $\{v_i\}_{i \in I}$ genera W_1 , $\{w_j\}_{j \in J}$ genera $W_2 \implies S = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$ genera $W_1 + W_2$.

Sea $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$ con $x \in W_1, y \in W_2$

$$\implies x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i, y = \sum_{j \in J} \beta_j w_j \quad (\text{con } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K})$$

$$\implies v = x + y = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} \beta_j w_j$$

Por lo tanto v es combinacion lineal de elementos de S

□

Teorema 17 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, sean W_1, W_2 subespacios de V y de dimension finita.

Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio y $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Prueba: $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de W_1 (y de W_2) por lo tanto es de dimension finita. Sea $\{u_1, \dots, u_k\}$ base de $W_1 \cap W_2 \implies \{u_1, \dots, u_k\}$ es L.I. en $W_1 \implies$ se puede extender a una base de W_1 , analogamente con W_2 .

Osea existen $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W_1$ tales que $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$ es una base de W_1 . De la misma forma existen $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W_2$ tales que $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ es base.

$\implies W_1 + W_2$ es generado por $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ es $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Veamos que este conjunto es L.I.

$$\text{Si } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = - \underbrace{\sum_{i=1}^m c_i w_i}_{\in W_1 \cap W_2} \in W_1 \cap W_2$$

$$\text{Como } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ es base de } W_1 \cap W_2 \implies - \sum_{i=1}^m c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i$$

$$\text{Reemplazando } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^k (-d_i) u_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^k (a_i - d_i) u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$$

Como $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$ es base de W_1 el conjunto es L.I. $\implies a_i = d_i$ y $b_i = 0, \forall i$.

Volviendo a la sumatoria con este resultado sabemos que:

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

Como $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ es base de W_2 el conjunto es L.I. \implies todos los escalares son 0.

Osea $\beta = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ es L.I. y por lo tanto es base de $W_1 + W_2$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) < \infty \text{ y } \dim(W_1 + W_2) = k + n + m$$

$$\dim(W_1) = k + n, \dim(W_2) = k + m, \dim(W_1 \cap W_2) = k$$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

□

Proposición 17.1 Si $V = W_1 \oplus W_2 \implies$ para cada $v \in V : \exists$ unicos elementos $x \in W_1, y \in W_2$ tales que $v = x + y$.

Prueba: Como $V = W_1 + W_2$ sabemos que existen $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$. Si además $v = u_1 + u_2 \implies \vec{0} = v - v = (w_1 + w_2) - (u_1 + u_2) = (w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) \implies w_1 - u_1 = w_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (pues es suma directa) $\implies w_1 = u_1, w_2 = u_2$. \square

Teorema 18 Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de V y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de W_1 y W_2 . Entonces son equivalentes:

1. $V = W_1 \oplus W_2$.
2. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V .

Prueba:

- $[1 \implies 2]$: Asumimos que $V = W_1 \oplus W_2 \implies \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$ bastar ver que es L.I.

Sabemos que $\dim(V) = \dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(\{0\})$

$$\sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j = 0 \implies \sum_{\substack{i \in I \\ v_i \in W_1}} a_i v_i = - \sum_{\substack{j \in J \\ w_j \in W_2}} b_j w_j \implies W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = \vec{0}, \sum_{j \in J} b_j w_j = \vec{0}$$

$\implies a_i = 0, b_j = 0 \forall i \in I, \forall j \in J$ pues ambos v_i, w_j son base y por lo tanto son L.I.

- $[2 \implies 1]$: Asumimos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base de $V \implies V = W_1 + W_2$ pues sabemos que:

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j$$

Necesitamos ver que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ para ver que la suma es directa. Sea $v \in W_1 \cap W_2$:

$$\implies v = \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{j \in J} b_j w_j$$

$$\implies 0 = \sum_{i \in I} a_i v_i - \sum_{j \in J} b_j w_j$$

(como ambos conjuntos son L.I. esto solo pasa si $a_i = 0 \forall i \in I, b_j = 0 \forall j \in J$)

$$\implies v = 0 \implies W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

\square