

# Demostraciones Algebra

July 30, 2025

**Teorema 1** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$  matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones  $Ax = 0$  y  $Bx = 0$  tienen exactamente las mismas soluciones.

**Prueba:** Si  $A \sim B \implies \exists$  una sucesion de matrices tal que  $A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = B$ , donde cada  $A_j$  se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.

Por lo tanto basta probar que  $A_j x = 0$  y  $A_{j+1} x = 0$ .

- Caso  $e_r^c$ :  $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \iff c \cdot a_{r1}x_1 + c \cdot a_{r2}x_2 + \dots + c \cdot a_{rn}x_n = 0$ , pero como  $c \neq 0 \implies c \cdot (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n) = 0$ , por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso  $e_{r,s}$ : es trivial pues ambas filas  $r, s$  ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso  $e_{r,s}^c$ :  $(r + c \cdot s) = (a_{r1} + c \cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c \cdot a_{s2})x_2 + \dots + (a_{rn} + c \cdot a_{sn})x_n = 0$  de la misma formas que en el primer caso como las filas  $r, s$  son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila  $r$  tambien lo es.

□

**Teorema 2** Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  con  $m < n \implies$  el sistema  $Ax = 0$  tiene soluciones no triviales.

**Prueba:** Sea  $R$  la MERF equivalente a  $A \implies$  los sistemas  $Ax = 0$  y  $Rx = 0$  tienen exactamente las mismas soluciones. Sea  $r$  = la cantidad de filas no nulas de  $R \implies r \leq m$  y por lo tanto  $r < n \implies$  hay  $n - r > 0$  variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. □

**Teorema 3** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces  $A$  es equivalente por filas a las  $Id \iff Ax = 0$  tiene unicamente la solucion trivial.

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $A \sim Id$ , estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como  $Id x = 0$  admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- $(\impliedby)$  : Sea  $R$  la MERF  $\sim A \implies$  el sistema  $Rx = 0$  tiene unicamente la solucion trivial. Sea  $r$  = la cantidad de filas no nulas de  $R \implies n - r = 0$  porque no tienen variables libres. Entonces cada fila  $i$  tiene un 1 en la columna  $k_i$  por lo tanto  $R = Id$ .

□

**Teorema 4** Propiedades de la multiplicacion de matrices:

1.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, C \in \mathbb{K}^{p \times q} \implies (AB)C = A(BC)$ .
2.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \implies Id_m A = Id_n A = A$ .
3.  $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n \times p} \implies (A + A')B = AB + A'B$  y  $A(B + B') = AB + AB'$ .
4.  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

**Teorema 5** Sea  $e$  una operacion elemental por filas y sea  $E = e(Id)$  la matriz elemental asociada. Entonces para toda  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  se cumple que  $e(A) = E \cdot A$ .

**Prueba:** Tenemos que el elemento  $i, j$  de  $e(A)$  es el mismo que el de la matriz  $EA$  para cada operacion elemental, osea  $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$ .

- Caso  $e_r^c$ :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} \quad (\text{si } i \neq k \implies E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii} A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

- Caso  $e_{r,s}$ :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r, s \\ A_{sj} & \text{si } i = r \\ A_{rj} & \text{si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \implies (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \implies (EA)_{ij} = E_{is} A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \implies (EA)_{ij} = E_{ir} A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso  $e_{r,s}^c$ :

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} [within] A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ c & \text{si } i = r \wedge j = s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

□ def

**Teorema 6** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ :

1. Si  $A$  es inversible  $\implies A^{-1}$  tambien lo es y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2. Si  $A, B$  son inversibles  $\implies AB$  es inversible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Prueba:**

1.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \implies A^{-1}$  inversible y  $(A^{-1})^{-1}$  es  $A$ .
2.  $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$ .

□

**Teorema 7** *Toda matriz elemental  $E$  es inversible.*

**Prueba:** Sea  $e$  la operacion elemental por fila correspondiente a  $E$  y sea  $e'$  la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea  $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} Id &= e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ Id &= e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ \implies E &\text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

□

**Teorema 8** *Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  entonces son equivalentes:*

1.  $A$  es inversible.
2.  $A$  es equivalente por filas a la  $Id$ .
3.  $A$  es producto de matrices elementales.

**Prueba:**

- $[1 \implies 2]$  Sea  $R$  la MERF  $\sim A \implies$  existen matrices elementales  $E_1, \dots, E_k$  talque  $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$ . Como las matrices elementales  $E_j$  y  $A$  son inversibles  $\implies R$  tambien lo es  $\implies R$  no tiene filas nulas por lo tanto  $R = Id$ .
- $[2 \implies 3]$  Si  $A \sim Id \implies Id \sim A \implies$  existen  $P$  productos de matrices elementales talque  $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$ .
- $[3 \implies 1]$  Supongamos  $A = E_1 \cdots E_k$  donde  $E_j$  es una matriz elemental. Como cada  $E_j$  es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es  $\implies A$  es inversible.

□

**Teorema 9** *Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Entonces  $B$  es equivalente por filas a  $A \iff \exists P$  matriz inversible  $m \times m$  talque  $B = P \cdot A$*

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $B \sim A$  sabemos que  $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$  y como cada  $E_i$  es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- $(\impliedby)$  : Sea  $P$  inversible talque  $B = PA$  como  $P$  es producto de matrices elementales  $\implies B = E_k \cdots E_1 A \implies B$  se obtiene de  $A$  haciendo operaciones elementales  $\implies B \sim A$ .

□

**Teorema 10** *Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $A$  es inversible.
2. El sistema  $Ax = 0$  tiene una unica solucion (la trivial).
3.  $\forall b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  el sistema no-homogeneo  $Ax = b$  tiene una unica solucion.

**Prueba:**

- $[1 \iff 2]$  Sabemos que  $A$  es inversible  $\iff A \sim Id \iff$  el sistema  $Ax = 0$  tiene como unica solucion la trivial.
- $[1 \implies 3]$  Sea  $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ , como  $A$  es inversible  $\implies \exists A^{-1}$ . Por lo tanto sea  $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n \times 1} \implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$ .  
Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion  $x_1 \implies Ax_1 = b \implies Ax_1 = b = Ax_0$  ahora multiplicamos por la inversa  $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$
- $[3 \implies 2]$  Como tiene solucion para todo  $b$  tomo  $b = 0$  por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

□

**Teorema 11** Si  $W \subseteq V$  y  $W \neq \emptyset$ . Entonces  $W$  es un  $\mathbb{K}$ -subespacio vectorial de  $V \iff \forall v, w \in W \forall c \in \mathbb{K}$  el vector  $[c \cdot v + w] \in W$

**Prueba:**

- $(\implies)$  : Si  $W$  es un subespacio vectorial y  $c \in \mathbb{K}$ ,  $v, w \in W \implies c \cdot v \in W \implies c \cdot v + w \in W$
- $(\impliedby)$  : Supongamos que  $\forall v, w \in W$  y  $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$  veamos contiene al  $\vec{0}$ , que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
  1. Como  $W \neq \emptyset \implies \exists w \in W \implies (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \implies \vec{0} \in W$ .
  2. Tomamos  $c = 1$  por lo tanto  $(1) \cdot v + w = v + w \in W$  por lo tanto la suma esta bien definida.
  3. Como  $\vec{0} \in W$  tomamos  $w = \vec{0}$  por lo tanto  $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$  entonces el producto esta bien definido.

□

**Teorema 12** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Entonces la interseccion de subespacios de  $V$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Prueba:**

Sea  $\{W_i\}_{i \in I}$ , donde  $W_i$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Entonces sea  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ .

Para ver que  $W$  es un subespacio veamos que si  $v, w \in W$ ,  $c \in \mathbb{K} \implies c \cdot v + w \in W$ .

Si  $v, w \in W \implies v, w \in W_i$  para todo  $i \in I$  y como todo  $W_i$  es un subespacio  $\implies c \cdot v + w \in W_i \implies c \cdot v + w \in W$ . □

**Teorema 13** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sean  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

Entonces  $W = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_i \in \mathbb{K}\} =$  Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Prueba:** Tomemos  $v, w \in W$ ,  $c \in \mathbb{K}$  veamos  $c \cdot v + w \in W$ .

$$\begin{aligned}
 &\text{Sean } v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k \implies \\
 &c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \dots + c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \dots + d_k v_k) \\
 &= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
 &\implies c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto } \in W
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 14** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimension finita y  $W$  subespacio de  $V$ . Todo subconjunto L.I. de  $W$  es finito y se puede completar a una base.

**Prueba:** Si  $S_0 \subseteq W$  es L.I.  $\implies S_0$  es un conjunto L.I. de  $V$  y si  $\dim(V) = n$ , sabemos que  $|S_0| \leq n$ , osea es finito. Queremos extenderlo a una base de la siguiente forma:

- Si  $S_0$  genera  $W$  ya es una base.

- Si  $S_0$  no genera  $W \implies \exists w_1 \in W$  talque  $w_1 \notin \langle S_0 \rangle$ , vimos que si agregamos algo que no esta en el espacio generado este conjunto sigue siendo L.I.  
Repetimos este paso hasta algun  $S_k = S_0 \cup w_1 \cup \dots \cup w_k$  talque  $\langle S_k \rangle = W$ . Como este conjunto es por definicion L.I. y genera este es una base.

□

**Teorema 15** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, sea  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  un conjunto de generadores de  $V$ . Entonces existe  $B \subseteq S$  que es una base de  $V$ .

**Prueba:** Vamos a definir inductivamente subconjuntos  $G_j \subseteq S$  ( $j = 1, \dots, m$ ) que sean L.I.

- ( $j = 1$ ) :

$$G_1 = \begin{cases} \{v_1\} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ \emptyset & \text{si } v_1 = 0 \end{cases} \implies G_1 \text{ es L.I.}$$

- ( $j = 2$ ) :

$$G_2 = \begin{cases} G_1 \cup v_2 & \text{si } v_2 \notin \langle G_1 \rangle \\ G_1 & \text{si } v_2 \in \langle G_1 \rangle \end{cases} \implies G_2 \text{ es L.I. en cualquier caso}$$

- ( $j + 1$ ) :

$$G_{j+1} = \begin{cases} G_j \cup v_{j+1} & \text{si } v_{j+1} \notin \langle G_j \rangle \\ G_j & \text{si } v_{j+1} \in \langle G_j \rangle \end{cases} \implies \text{en ambos casos } G_{j+1} \text{ es L.I.}$$

$\implies G_m$  es L.I. y  $\langle G_m \rangle = \{v_1, \dots, v_m\} = V \implies \mathcal{B} = G_m \subseteq S$  y la dimension de  $V = |G_m|$ . □

**Teorema 16** Sean  $W_1, W_2$  dos subespacios de  $V$ :

1.  $W_1 + W_2$  es un subespacio de  $V$ .
2.  $W_1 + W_2$  es el menor subespacio (respecto a la inclusion) que contiene a  $W_1 + W_2$ .
3. Si  $\{v_i\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores de  $W_1$  y  $\{w_j\}_{j \in J}$  es un conjunto de generadores de  $W_2 \implies \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$  es un conjunto de generadores de  $W_1 + W_2$ .

**Prueba:**

1.  $W_1 + W_2 \neq \emptyset$  pues  $\vec{0} \in W_1$  y  $\vec{0} \in W_2 \implies \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in W_1 + W_2$ . Sean  $v_1, v_2 \in W_1 + W_2$  queremos ver que  $c \cdot v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ .

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + y_1, v_2 = x_2 + y_2 \text{ con } x_1, x_2 \in W_1 \subseteq V \text{ y } y_1, y_2 \in W_2 \subseteq V \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &= c \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (cx_1 + x_2) \in W_1 + (cy_1 + y_2) \in W_2 \\ \implies c \cdot v_1 + v_2 &\in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

2.  $W_1 \subseteq W_1 + W_2$  pues si  $w_1 \in W_1 \implies w_1 + \vec{0} \in W_1 + W_2$  y del mismo modo con  $W_2$ . Por lo tanto  $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ , basta ver que es el menor subespacio que lo contiene.  
Sea  $U$  un subespacio de  $V$  talque  $W_1 \cup W_2 \subseteq U$ , queremos ver que  $W_1 + W_2 \subseteq U$ .  
Sea  $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$  con  $x \in W_1 \subseteq U$ ,  $y \in W_2 \subseteq U$  osea  $v \in U \implies W_1 + W_2 \subseteq U$ .

3.  $\{v_i\}_{i \in I}$  genera  $W_1$ ,  $\{w_j\}_{j \in J}$  genera  $W_2 \implies S = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$  genera  $W_1 + W_2$ .

Sea  $v \in W_1 + W_2 \implies v = x + y$  con  $x \in W_1, y \in W_2$

$$\implies x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i, y = \sum_{j \in J} \beta_j w_j \quad (\text{con } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K})$$

$$\implies v = x + y = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} \beta_j w_j$$

Por lo tanto  $v$  es combinacion lineal de elementos de  $S$

□

**Teorema 17** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, sean  $W_1, W_2$  subespacios de  $V$  y de dimension finita.

Entonces  $W_1 + W_2$  es un subespacio y  $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

**Prueba:**  $W_1 \cap W_2$  es un subespacio de  $W_1$  (y de  $W_2$ ) por lo tanto es de dimension finita. Sea  $\{u_1, \dots, u_k\}$  base de  $W_1 \cap W_2 \implies \{u_1, \dots, u_k\}$  es L.I. en  $W_1 \implies$  se puede extender a una base de  $W_1$ , analogamente con  $W_2$ .

Osea existen  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W_1$  tales que  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $W_1$ . De la misma forma existen  $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W_2$  tales que  $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$  es base.

$\implies W_1 + W_2$  es generado por  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  es  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ . Veamos que este conjunto es L.I.

$$\text{Si } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = - \underbrace{\sum_{i=1}^m c_i w_i}_{\in W_1 \cap W_2} \in W_1 \cap W_2$$

$$\text{Como } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ es base de } W_1 \cap W_2 \implies - \sum_{i=1}^m c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i$$

$$\text{Reemplazando } \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^k (-d_i) u_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^k (a_i - d_i) u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$$

Como  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $W_1$  el conjunto es L.I.  $\implies a_i = d_i$  y  $b_i = 0, \forall i$ .

Volviendo a la sumatoria con este resultado sabemos que:

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^m c_i w_i = 0$$

Como  $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$  es base de  $W_2$  el conjunto es L.I.  $\implies$  todos los escalares son 0.

Osea  $\beta = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  es L.I. y por lo tanto es base de  $W_1 + W_2$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) < \infty \text{ y } \dim(W_1 + W_2) = k + n + m$$

$$\dim(W_1) = k + n, \dim(W_2) = k + m, \dim(W_1 \cap W_2) = k$$

$$\implies \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

□

**Proposicion 17.1** Si  $V = W_1 \oplus W_2 \implies$  para cada  $v \in V : \exists$  unicos elementos  $x \in W_1, y \in W_2$  tales que  $v = x + y$ .

**Prueba:** Como  $V = W_1 + W_2$  sabemos que existen  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$  tales que  $v = w_1 + w_2$ . Si ademas  $v = u_1 + u_2 \implies \vec{0} = v - v = (w_1 + w_2) - (u_1 + u_2) = (w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) \implies w_1 - u_1 = w_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$  (pues es suma directa)  $\implies w_1 = u_1, w_2 = u_2$ .  $\square$

**Teorema 18** Sean  $W_1, W_2$  subespacios vectoriales de  $V$  y sean  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  bases de  $W_1$  y  $W_2$ . Entonces son equivalentes:

1.  $V = W_1 \oplus W_2$ .
2.  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  es una base de  $V$ .

**Prueba:**

- $[1 \implies 2]$  : Asumimos que  $V = W_1 \oplus W_2 \implies \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  es un conjunto de generadores de  $W_1 + W_2$  bastar ver que es L.I.

Sabemos que  $\dim(V) = \dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(\{0\})$

$$\sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j = 0 \implies \sum_{\substack{i \in I \\ \in W_1}} a_i v_i = - \sum_{\substack{j \in J \\ \in W_2}} b_j w_j \implies W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = \vec{0}, \sum_{j \in J} b_j w_j = \vec{0}$$

$\implies a_i = 0, b_j = 0 \forall i \in I, \forall j \in J$  pues ambos  $v_i, w_j$  son base y por lo tanto son L.I.

- $[2 \implies 1]$  : Asumimos que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  base de  $V \implies V = W_1 + W_2$  pues sabemos que:

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j$$

Necesitamos ver que  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$  para ver que la suma es directa. Sea  $v \in W_1 \cap W_2$  :

$$\implies v = \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{j \in J} b_j w_j$$

$$\implies 0 = \sum_{i \in I} a_i v_i - \sum_{j \in J} b_j w_j$$

(como ambos conjuntos son L.I. esto solo pasa si  $a_i = 0 \forall i \in I, b_j = 0 \forall j \in J$ )

$$\implies v = 0 \implies W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$\square$



**Definición 1** Dados  $V, W$  espacio vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ .

Una transformacion lineal de  $V$  en  $W$  es una funcion,  $T : V \rightarrow W$  que satisface:

- $T(v + w) = T(v) + T(w) \quad \forall v, w \in V$
- $T(c \cdot v) = c \cdot T(v) \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathbb{K}$

De esas propiedades se deducen las siguientes:

- $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
- $T(-v) = -T(v) \quad \forall v \in V$

**Teorema 19** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacio vectorial,  $T : V \rightarrow W$  una T.L.

1. Si  $U \subseteq V$  es un subespacio de  $V \implies T(U)$  es un subespacio de  $W$ .
2. Si  $Z \subseteq W$  es un subespacio de  $W \implies T^{-1}(Z) = \{v \in V \mid T(v) \in Z\}$

**Prueba:**

1. Sea  $T(U) = \{w \in W \mid \exists v \in U \text{ con } T(v) = w\} \neq \emptyset$ , veamos que  $T(U)$  es subespacio:

Como  $\vec{0} \in U$  (por ser subespacio) y  $T(\vec{0}) = 0 \implies \vec{0} \in T(U)$

Sean  $w_1, w_2 \in T(U) \implies \exists v_1, v_2 \in U$  tales que  $w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$

$$\implies c \cdot w_1 + w_2 = cT(v_1) + T(v_2) = T(c \cdot v_1 + v_2)$$

Como  $c \cdot v_1 + v_2 \in U \implies c \cdot w_1 + w_2 \in T(U)$

2.  $\vec{0} \in T^{-1}(Z)$  pues  $T(0) = \vec{0} \in Z$  por lo tanto  $T^{-1}(Z) \neq \emptyset$ . Sean  $v_1, v_2 \in T^{-1}(Z), c \in \mathbb{K}$  veamos que  $c \cdot v_1 + v_2 \in T^{-1}(Z)$ :

$$T(c \cdot v_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) \in \text{def } Z$$

$$\implies c \cdot v_1 + v_2 \in T^{-1}(Z)$$

□

**Teorema 20** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacio vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal. Entonces:

1.  $Nu(T)$  es un subespacio de  $V$ .
2.  $Im(T)$  es un subespacio de  $W$ .

**Prueba:**

- 1.

$Nu(T) \neq \emptyset$ , pues  $\vec{0} \in Nu(T)$  porque  $T(\vec{0}) = \vec{0}$

Sean  $v_1, v_2 \in Nu(T), c \in \mathbb{K}$

$$\implies T(cv_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) = \vec{0} \implies c \cdot v_1 + v_2 \in Nu(T)$$

- 2.

$Im(T) \subseteq W, Im(T) \neq \emptyset$  pues  $\vec{0} \in Im(T)$ ,  $\vec{0} \in T(\vec{0})$

Sean  $w_1, w_2 \in Im(T), c \in \mathbb{K}$

$$\implies \exists v_1, v_2 \in V \text{ tales que } T(cv_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) = c \cdot w_1 + w_2 \in Im(T)$$

□

**Teorema 21** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal. (con  $\dim(V) < \infty$ ) Entonces:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Nu}(T))$$

**Prueba:** Sea  $\{v_1, \dots, v_k\}$  base de  $\text{Nu}(T) \subseteq V$ . Como el conjunto es L.I. podemos completarlo a una base de  $V$ . Sean  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq V$  tal que  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ . Probemos  $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$  es base de  $\text{Im}(T)$ :

$$\begin{aligned} \text{Sea } w \in \text{Im}(T) &\implies \exists v \in V \text{ tal que } w = T(v) \implies v = \sum_{j=1}^n c_j v_j \\ T(v) &= \sum_{j=1}^n c_j T(v_j) = \sum_{j=k+1}^n c_j T(v_j) \quad (\text{porque } T(v_j) = 0 \text{ si } j \leq k) \\ &\implies w \text{ es combinacion lineal de } \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} \end{aligned}$$

Falta ver que el conjunto es L.I. :

$$\begin{aligned} &\implies b_{k+1}T(v_{k+1}) + \dots + b_n T(v_n) = T(\underbrace{b_{k+1}v_{k+1} + \dots + b_n v_n}_{v_0}) = 0 \\ &\implies v_0 \in \text{Nu}(T) \implies v_0 = \sum_{j=k+1}^n b_j v_j = \sum_{j=1}^k c_i v_i \text{ pues } \{v_1, \dots, v_k\} \text{ es base de } \text{Nu}(T) \\ &\implies \sum_{j=k+1}^n b_j v_j + \sum_{j=1}^k (-c_i) v_i = 0 \end{aligned}$$

Como la segunda parte es L.I.  $\implies b_j = 0$ ,  $\forall j = \{k+1, \dots, n\}$ . Con esto probamos que  $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$  es L.I. y como genera es base de  $\text{Im}(T)$ .

Por lo tanto  $\dim(\text{Im}(T)) = n - k$ , ademas sabiamos que  $\dim(\text{Nu}(T)) = k$

$$\implies \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = k + (n - k) = n = \dim(V)$$

□

## Definicion 2

- El Rango Fila ( $A$ ) =  $\dim(\text{espacio fila de } A)$
- El Rango Columna ( $A$ ) =  $\dim(\text{espacio columna de } A)$

**Teorema 22** Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  Entonces: Rango fila de  $A$  = Rango columna de  $A$

**Prueba:** Sea  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  la T.L. definida por  $T(x) = A \cdot x$ ,  $\text{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ . Sabemos que  $A$  se puede reducir a una MERF  $R$ .

$$\begin{aligned} &\implies \text{espacio fila de } A = \text{espacio fila de } R \\ &\implies \dim(\text{espacio fila de } A) = k \text{ (cantidad de filas no nulas)} \\ &\implies \dim(\text{Nu}(T)) = n - k, \text{ Rango Fila } (A) = k \\ &\implies \dim(\mathbb{K}^n) = n = \dim(\text{Nu}(T)) + \text{Rango Fila } (A) \end{aligned}$$

Por otra parte  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $x \rightarrow Ax$  entonces  $Im(T)$  es generada por las columnas de A:

$$\mathbb{K}^m \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$T(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ siendo } e_j \text{ el vector canonico que devuelve la columna } j$$

$$\Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\} \text{ es base de } \mathbb{K}^n \Rightarrow \{T(e_1), \dots, T(e_n)\} \text{ genera } Im(T)$$

$$\Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(\text{espacio columna de A}) = \text{Rango Columna (A)}$$

Ahora el teorema dice que  $\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(Nu(T)) + \text{Rango Columna (A)}$ . Pero antes vimos que  $\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(Nu(T)) + \text{Rango Columna (A)} \Rightarrow \underline{\text{Rango Fila (A)} = \text{Rango Columna (A)}}$   
□

**Proposicion 22.1** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacio vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal. Entonces:

- $T$  es inyectiva  $\iff Nu(T) = \{0\} \iff nulidad(T) = 0$
- $T$  es sobreyectiva  $\iff Im(T) = W \iff rango(T) = \dim(W)$

**Teorema 23** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacio vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal. Entonces:

1. Si  $T$  es inyectiva y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es L.I. en  $V \Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  es L.I. en  $W$ .
2. Si  $T$  es sobreyectiva y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V \Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera  $W$ .
3. En general si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V \Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera  $Im(T)$ .

**Prueba:**

1. Sean  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$  tales que  $c_1T(v_1) + \cdots + c_rT(v_r) = 0$  (como  $T$  es lineal)  
 $\Rightarrow T(c_1v_1 + \cdots + c_rv_r) = 0 \Rightarrow [c_1v_1 + \cdots + c_rv_r] \in Nu(T) = \{0\}$  (por ser inyectiva)  
 $\Rightarrow c_1v_1 + \cdots + c_rv_r = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \dots, c_r = 0$ .
2. Caso particular de (3) donde  $Im(T) = W$ .
3. Sea  $w \in Im(T) \Rightarrow \exists v \in V$  talque  $w = T(v)$ , como  $\{v_1, \dots, v_s\}$  genera  $V$   
 $\Rightarrow v = c_1v_1 + \cdots + c_s v_s$  (con  $c_i \in \mathbb{K}$ )  
 $\Rightarrow w = T(v) = T(c_1v_1 + \cdots + c_s v_s) = c_1T(v_1) + \cdots + c_sT(v_s)$   
 $\Rightarrow w \in \langle \{T(v_1), \dots, T(v_s)\} \rangle$  (esta en el espacio generado)  
 $\Rightarrow Im(T) \subseteq \langle \{T(v_1), \dots, T(v_s)\} \rangle \subseteq Im(T)$   
 $\Rightarrow \underline{Im(T) = \langle \{T(v_1), \dots, T(v_s)\} \rangle}$

□

**Teorema 24** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal. (talque  $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ ). Entonces son equivalentes:

1.  $T$  es un isomorfismo.
2.  $T$  es inyectiva.
3.  $T$  es sobreyectiva.
4. Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V \implies \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  es una base de  $W$ .

**Prueba:**

- $[1 \implies 2]$  : obvio pues es isomorfismo cuando tanto inyectiva como sobreyectiva.
- $[2 \implies 3]$  : Si  $T$  es inyectiva  $\implies \text{Nu}(T) = \{0\} \implies \text{nulidad}(T) = 0$ .  
Por teorema de las dimensiones sabemos que:

$$\begin{aligned} n = \dim(V) &= \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ \implies n &= 0 + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(W) \\ \implies T &\text{ sobreyectiva (porque } \forall S \subseteq V : \dim(S) = \dim(W) \text{ es el mismo } W) \end{aligned}$$

- $[3 \implies 1]$  : Supongamos  $T$  sobreyectiva  $\implies \text{Im}(T) = \dim(W)$ , nuevamente por el teorema de las dimensiones sabemos que  $\dim(\text{Nu}(T)) = 0 \implies \text{Nu}(T) = \{0\}$ . Por lo tanto  $T$  es inyectiva  $\implies T$  es biyectiva.
- $[1 \implies 4]$  : Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V \implies \{v_1, \dots, v_n\}$  es L.I. y como es inyectiva (por ser biyectiva)  $\implies \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  tambien es L.I.  
Ademas  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V$  y como es sobreyectiva  $\implies \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera  $W$ .
- $[4 \implies 2]$  : Sea  $v_1 \in \text{Nu}(T)$ , supongamos que  $v_1 \neq 0 \implies \{v_1\}$  es L.I. por lo tanto se puede extender a una base  $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V \implies \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  es base de  $W \implies$  en particular  $T(v_1) \neq 0$  (ABSURDO pues  $v_1 \in \text{Nu}(T)$ , osea  $T(v_1) = 0$ ).

□

**Proposicion 24.1** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimension finita. Entonces:

$$\exists T : V \rightarrow W \text{ isomorfismo} \iff \dim(V) = \dim(W)$$

**Definicion 3** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ . Sean  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base ordenada de  $V$  y  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$  base ordenada de  $W$ . Sea  $T : V \rightarrow W$  T.L.

$$\text{Supongamos que } T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \text{ (cuando } 1 \leq j \leq n)$$

Definimos la matriz de  $T$  respecto a las bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  como:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \quad (\text{con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Si  $V \subseteq W$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  en particular denotaremos  $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

**Teorema 25** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal. Si  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$  bases ordenadas de  $V$  y  $W$  respectivamente

$$\implies [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'} \quad \forall v \in V$$

**Prueba:**

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (a_{ij})$$

Sea  $v \in V \implies \exists!$  escalares  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \implies [v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} \implies T(v) &= x_1 T(v_1) + \dots + x_n T(v_n) = \sum_{j=1}^n x_j T(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j (a_{ij} w_i) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} \right) w_i \\ \implies [T(v)]_{\mathcal{B}'} &= \left( \sum_{i=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{i=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mj} x_j \right) \quad (\star) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Por lo tanto  $[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}'}$  tenemos lo queriamos ver.  $\square$

**Proposicion 25.1** Sea  $V$   $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimension finita. Sean  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  bases de  $V$ . Entonces:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V$$

**Definicion 4** Sea  $V$   $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimension finita. Sean  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dos bases ordenadas de  $V$ . Denotaremos  $P = [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  como la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .

**Teorema 26** Sean  $V, W, Z$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ . Sean  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow Z$  T.L. y sean  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_Z$  bases de  $V, W, Z$  respectivamente. Entonces:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_V} = [S]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_W} \cdot [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$$

**Prueba:** Sea  $v \in V$  arbitrario:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} &= [T(v)]_{\mathcal{B}_W} \implies [S]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_W} \cdot [T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [S(T(v))]_{\mathcal{B}_Z} \\ [S \circ T]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_V} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} &= [S \circ T(v)]_{\mathcal{B}_Z} \\ \implies [S(T(v))]_{\mathcal{B}_Z} &= [S \circ T(v)]_{\mathcal{B}_Z} \quad (\text{por definicion de composicion}) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposicion 26.1** Sea  $V$   $\mathbb{K}$ -espacio vectorial ,  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  y sea  $T : V \rightarrow V$  T.L.  
Entonces:

1.  $[S \circ T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}$
2. Si  $I : V \rightarrow V$  es la identidad  $\implies [Id]_{\mathcal{B}} = Id$
3. Si  $T$  es inversible  $\implies [T]_{\mathcal{B}}$  es inversible y  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$

**Proposicion 26.2** Sea  $V$   $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimension finita, sean  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dos bases de  $V$ .

$$\text{Entonces si } P = [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \implies P^{-1} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

**Teorema 27** Sean  $V, W$   $\mathbb{K}$ -espacio vectoriales, sea  $T : V \rightarrow W$  transformacion lineal.

Sean  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_V$  dos bases de  $V$  y sean  $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}'_W$  dos bases de  $W$ .

Sean  $P = [Id]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}'_V} (\mathcal{B}'_V \rightarrow \mathcal{B}_V)$  y  $Q = [Id]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}'_W} (\mathcal{B}'_W \rightarrow \mathcal{B}_W)$ . Entonces:

$$[T]_{\mathcal{B}'_W}^{\mathcal{B}'_V} = Q^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot P$$

**Prueba:** Sea  $v \in V$  expresado en base  $\mathcal{B}'_V$

$$[T]_{\mathcal{B}'_W}^{\mathcal{B}'_V} \cdot [v]_{\mathcal{B}'_V} = [T(v)]_{\mathcal{B}'_W}$$

$$\begin{aligned} (Q^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot P) \cdot [v]_{\mathcal{B}'_V} &= (Q^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}) \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} \\ &= Q^{-1} \cdot [T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T(v)]_{\mathcal{B}'_W} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos lo queriamos ver  $[T]_{\mathcal{B}'_W}^{\mathcal{B}'_V} = Q^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot P$  □

**Teorema 28** Sea  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial ,  $T : V \rightarrow V$  T.L. , sean  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  base de  $V$ . Sea  $P$  la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  ( $P = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ). Entonces:  $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P$

**Definicion 5** Dado una matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  dados  $1 \leq i, j \leq n$  definimos la matriz  $A(i | j)$  como la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que se obtiene eliminando la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ .

**Definicion 6** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  el determinante de  $A$  se define de la siguiente forma:

1. Si  $n = 1$ ,  $A = (a) \implies \det(A) = a$
2. Si  $n > 1$  (desarrollamos por la primera columna de  $A$ )

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A(i | 1))$$

**Teorema 29** Si  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es una matriz triangular  $\implies \det(A) = a_{11} \times a_{22} \cdots \times a_{nn}$  (el producto de la diagonal).

**Prueba:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies \det(A) = a_{11} \cdot \det(1 | 1) + \cdots + 0 \cdot \det(n | 1)$$

$$A(1 | 1) = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies \text{nuevamente la matriz es triangular superior}$$

Por lo tanto  $\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$ . □

**Proposicion 29.1** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces:

- Si  $A = Id \implies \det(A) = 1$
- Si  $A$  es una MERF  $\implies \det(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ no tiene filas nulas} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$

**Teorema 30** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,  $B$  = matriz que se obtiene de  $A$  por medio de una operacion elemental por filas ( $e_j(A) = B$ ). Entonces:

1. Si  $e = e_i^c \implies \det(B) = c \cdot \det(A)$
2. Si  $e = e_{i,j}^c \implies \det(B) = \det(A)$
3. Si  $e = e_{i,j} \implies \det(B) = -\det(A)$

**Prueba:** Veamos la prueba para  $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ :

1.  $B = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{Bmatrix} \implies \det(B) = a_{11} + c(a_{22}) - c(a_{21})a_{12} = c(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = c \cdot \det(A)$
2.  $B = \begin{Bmatrix} a_{11}+ca_{21} & a_{12}+ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \implies \det(B) = (a_{11} + ca_{21})a_{22} - (a_{12} + ca_{22})a_{21} \\ \implies \det(B) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (c(a_{21} + a_{22}) - c(a_{21} + a_{22})) = \det(A)$
3.  $B = \begin{Bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{Bmatrix} \implies \det(B) = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\det(A)$

□

**Teorema 31** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \implies \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

**Proposicion 31.1** Si  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es inversible  $\implies \det(A) \neq 0$  y  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

**Proposicion 31.2** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Sean  $E_1, \dots, E_r$  matrices elementales y sea  $B = E_r \cdots E_1 A$ . Entonces  $\det(B) = \det(E_1) \times \cdots \times \det(E_r) \times \det(A)$  y se cumple lo siguiente:

1. Si  $B$  tiene alguna fila nula  $\implies \det(A) = 0$
2. Si  $B$  es una MERF sin filas nulas  $\implies \det(A) = \frac{1}{\det(E_1) \times \cdots \times \det(E_r)}$

**Teorema 32** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces  $A$  es inversible  $\iff \det(A) \neq 0$

**Prueba:**

- ( $\implies$ ) : Como  $A$  es inversible  $\exists A^{-1}$  talque  $A \cdot A^{-1} = Id$  y como vimos anteriormente

$$\begin{aligned} \det(Id) = 1 &= \det(A) \times \underbrace{\det(A^{-1})}_{\neq 0} \\ \implies \det(A) &\neq 0 \end{aligned}$$

- ( $\impliedby$ ) : Sea  $M$  la MERF  $\sim A \implies \exists$  matriz inversible  $E$  (producto de elementales) talque:

$$\begin{aligned} A = E \cdot M &\implies A \text{ inversible} \iff M \text{ inversible} \\ \iff M &= Id \text{ (no tiene filas nulas)} \\ \iff \det(M) &= 1 \neq 0 \iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

□

**Teorema 33** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  inversible  $\implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$  donde  $\text{adj}(A)$  es la matriz:  $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A(j \mid i))$



**Definición 7** Sea  $T : V \rightarrow V$  transformación lineal y  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

1.  $\lambda \in \mathbb{K}$  se dice autovalor de  $T$  si  $\exists v \in V, v \neq 0$  tal que  $T(v) = \lambda \cdot v$ .
2. Si  $\lambda$  autovalor, cada vector  $v \in V$  que satisface  $T(v) = \lambda \cdot v$  se llama autovector de  $T$ .
3. Sea  $W_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda \cdot v\}$  el autoespacio de autovalor  $\lambda$  (o el espacio propio asociado a  $\lambda$ ).

**Teorema 34** Sea  $T : V \rightarrow V$  transformación lineal y  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Entonces son equivalentes:

1.  $\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor de  $T$
2.  $\det(T - \lambda \cdot I) = 0$

**Prueba:** Si  $\lambda$  es autovalor  $\implies \text{Nu}(T - \lambda I) \neq \{0\}$  por lo tanto  $T - \lambda I$  no es inversible  $\implies \det(T - \lambda I) = 0$ .  $\square$

**Definición 8** Sean  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  se dicen semejantes si  $\exists C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  inversible:  $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$ . Lo denotaremos  $A \sim B$ .

**Definición 9** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces, los autovalores, autovectores y autoespacios de  $A$  coinciden con los de la transformación lineal  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  dada por  $T_A(x) = Ax$ .

**Definición 10** Sea  $T : V \rightarrow V$  transformación lineal y  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

- $T$  es diagonalizable si  $\exists \mathcal{B}$  base de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  es diagonal.
- $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es diagonalizable si  $A$  es semejante a  $D$  ( $\exists C$  inversible :  $C^{-1}AC = D$ ).

**Teorema 35**  $T : V \rightarrow V$  es diagonalizable  $\iff \exists \mathcal{B}$  base de  $V$  formada por autovectores de  $T$ :

$$\exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} : T(v_j) = \lambda_j v_j, \text{ para algun } \lambda_j \in \mathbb{K}$$

**Prueba:**

- ( $\Leftarrow$ ) :  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base,  $T(v_j) = \lambda_j v_j$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ diagonal} \implies T \text{ es diagonalizable}$$

- ( $\Rightarrow$ ) : Si  $T$  es diagonalizable  $\implies \exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  :  $[T]_{\mathcal{B}}$  es diagonalizable

$$\implies T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \lambda_1 v_1$$

En general:  $T(v_j) = \lambda_j v_j$ , donde cada  $v_j$  es un autovector

$\square$

**Teorema 36** Sea  $T : V \rightarrow V$  T.L., sean  $v_1, \dots, v_r$  autovectores de  $T$  (no nulos) asociados a autovalores distintos  $\implies \{v_1, \dots, v_r\}$  es L.I.

**Prueba:** Veamos por induccion, caso  $\{v_1\}$  es claramente L.I., supongamos que vale el caso  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ . Basta ver que  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es L.I. por lo tanto veamos:

$$\underline{c_1 v_1 + \dots + c_r v_r = 0} \implies c_j = 0 \forall j \quad (1)$$

Sabemos que todos los  $v_j \neq 0$ , ahora aplicando T tenemos:

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_r v_r) = \underline{c_1 \cdot \lambda_1 v_1 + \dots + c_r \cdot \lambda_r v_r = 0} \quad (2)$$

Si multiplicamos (1)  $\times \lambda_r$  y se lo restamos a (2) obtenemos:

$$c_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \dots + c_{r-1} \cdot (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} + c_r \cdot (\lambda_r - \lambda_r) v_r = 0 \quad (3)$$

Como sabemos cada  $v_j$  esta asociados a un autovalor distintito (3) y por hipotesis sabemos que  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  es L.I.

$$\implies (\lambda_i - \lambda_r) \neq 0, \forall i \leq r-1 \implies c_i = 0, \forall i \leq r-1 \quad (4)$$

Si juntamos (1) y (4) tenemos que:

$$\underbrace{c_1}_{0} v_1 + \underbrace{c_2}_{0} v_2 + \dots + \underbrace{c_{r-1}}_{0} v_{r-1} + c_r v_r = 0$$

Por definicion  $v_r$  es no nulo  $\implies c_r = 0$ . Por lo tanto  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es L.I.  $\square$

**Proposicion 36.1** Sea  $T : V \rightarrow V$  lineal, con  $\dim(V) = n$ . Entonces si  $T$  tiene  $n$  autovalores distintos  $\implies T$  es diagonalizable.

**Definicion 11** Si  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  definimos el polinomio caracteristico de  $A$  como:

$$P_A = \det(xI - A) \in \mathbb{K}[x]$$

Si  $T : V \rightarrow V$  es lineal, el polinomio caracteristico de  $T$  es:

$$P_T = \det(xI - T) \in \mathbb{K}[x]$$

**Teorema 37** Sea  $T : V \rightarrow V$  transformacion lineal,  $V$  espacio vectorial de dimension finita sobre  $\mathbb{K}$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  los autovalores (distintos) de  $T$  y sea  $W_j$  el autoespacio asociado a  $\lambda_j$  ( $W_j = \text{Nu}(T - \lambda_j I)$ ). Entonces son equivalentes:

1.  $T$  es diagonalizable.
2. El polinomio caracteristico de  $T$  es:

$$P_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \times \dots \times (x - \lambda_r)^{d_r} \quad (\text{con } d_j \text{ la dimension de } W_j)$$

3.  $\dim(V) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_r)$  (en particular  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  es una base de  $V$ , cada  $\mathcal{B}_j$  es base de los  $W_j$  y estos son los autovectores del  $\lambda_j$ )