

Demostraciones Algebra

July 22, 2025

Teorema 1 Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Prueba: Si $A \sim B \implies \exists$ una sucesion de matrices tal que $A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = B$, donde cada A_j se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.

Por lo tanto basta probar que $A_j x = 0$ y $A_{j+1} x = 0$.

- Caso e_r^c : $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \iff c \cdot a_{r1}x_1 + c \cdot a_{r2}x_2 + \dots + c \cdot a_{rn}x_n = 0$, pero como $c \neq 0 \implies c \cdot (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n) = 0$, por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso $e_{r,s}$: es trivial pues ambas filas r, s ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso $e_{r,s}^c$: $(r + c \cdot s) = (a_{r1} + c \cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c \cdot a_{s2})x_2 + \dots + (a_{rn} + c \cdot a_{sn})x_n = 0$ de la misma formas que en el primer caso como las filas r, s son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila r tambien lo es.

□

Teorema 2 Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ con $m < n \implies$ el sistema $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.

Prueba: Sea R la MERF equivalente a $A \implies$ los sistemas $Ax = 0$ y $Rx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Sea r = la cantidad de filas no nulas de $R \implies r \leq m$ y por lo tanto $r < n \implies$ hay $n - r > 0$ variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. □

Teorema 3 Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces A es equivalente por filas a las $Id \iff Ax = 0$ tiene unicamente la solucion trivial.

Prueba:

- (\implies) : Si $A \sim Id$, estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como $Id x = 0$ admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- (\impliedby) : Sea R la MERF $\sim A \implies$ el sistema $Rx = 0$ tiene unicamente la solucion trivial. Sea r = la cantidad de filas no nulas de $R \implies n - r = 0$ porque no tienen variables libres. Entonces cada fila i tiene un 1 en la columna k_i por lo tanto $R = Id$.

□

Teorema 4 Propiedades de la multiplicacion de matrices:

1. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, C \in \mathbb{K}^{p \times q} \implies (AB)C = A(BC)$.
2. $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \implies Id_m A = Id_n A = A$.
3. $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n \times p} \implies (A + A')B = AB + A'B$ y $A(B + B') = AB + AB'$.
4. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p}, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Teorema 5 Sea e una operacion elemental por filas y sea $E = e(Id)$ la matriz elemental asociada. Entonces para toda $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se cumple que $e(A) = E \cdot A$.

Prueba: Tenemos que el elemento i, j de $e(A)$ es el mismo que el de la matriz EA para cada operacion elemental, osea $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$.

- Caso e_r^c :

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} \quad (\text{si } i \neq k \implies E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii} A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ cA_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}$:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r, s \\ A_{sj} & \text{si } i = r \\ A_{rj} & \text{si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \implies (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \implies (EA)_{ij} = E_{is} A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \implies (EA)_{ij} = E_{ir} A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}^c$:

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}, \text{ donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ c & \text{si } i = r \wedge j = s \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

□

Teorema 6 Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

1. Si A es inversible $\implies A^{-1}$ tambien lo es y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A, B son inversibles $\implies AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Prueba:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \implies A^{-1}$ inversible y $(A^{-1})^{-1}$ es A .
2. $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$.

□

Teorema 7 *Toda matriz elemental E es inversible.*

Prueba: Sea e la operacion elemental por fila correspondiente a E y sea e' la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} Id &= e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ Id &= e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ \implies E &\text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

□

Teorema 8 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entonces son equivalentes:*

1. A es inversible.
2. A es equivalente por filas a la Id .
3. A es producto de matrices elementales.

Prueba:

- $[1 \implies 2]$ Sea R la MERF $\sim A \implies$ existen matrices elementales E_1, \dots, E_k talque $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Como las matrices elementales E_j y A son inversibles $\implies R$ tambien lo es $\implies R$ no tiene filas nulas por lo tanto $R = Id$.
- $[2 \implies 3]$ Si $A \sim Id \implies Id \sim A \implies$ existen P productos de matrices elementales talque $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$.
- $[3 \implies 1]$ Supongamos $A = E_1 \cdots E_k$ donde E_j es una matriz elemental. Como cada E_j es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es $\implies A$ es inversible.

□

Teorema 9 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Entonces B es equivalente por filas a $A \iff \exists P$ matriz inversible $m \times m$ talque $B = P \cdot A$*

Prueba:

- (\implies) : Si $B \sim A$ sabemos que $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ y como cada E_i es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- (\impliedby) : Sea P inversible talque $B = PA$ como P es producto de matrices elementales $\implies B = E_k \cdots E_1 A \implies B$ se obtiene de A haciendo operaciones elementales $\implies B \sim A$.

□

Teorema 10 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces son equivalentes:*

1. A es inversible.
2. El sistema $Ax = 0$ tiene una unica solucion (la trivial).
3. $\forall b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ el sistema no-homogeneo $Ax = b$ tiene una unica solucion.

Prueba:

- $[1 \iff 2]$ Sabemos que A es inversible $\iff A \sim Id \iff$ el sistema $Ax = 0$ tiene como unica solucion la trivial.
- $[1 \implies 3]$ Sea $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, como A es inversible $\implies \exists A^{-1}$. Por lo tanto sea $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n \times 1} \implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$.
Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion $x_1 \implies Ax_1 = b \implies Ax_1 = b = Ax_0$ ahora multiplicamos por la inversa $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$
- $[3 \implies 2]$ Como tiene solucion para todo b tomo $b = 0$ por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

□

Teorema 11 Si $W \subseteq V$ y $W \neq \emptyset$. Entonces W es un \mathbb{K} -subespacio vectorial de $V \iff \forall v, w \in W \forall c \in \mathbb{K}$ el vector $[c \cdot v + w] \in W$

Prueba:

- (\implies) : Si W es un subespacio vectorial y $c \in \mathbb{K}$, $v, w \in W \implies c \cdot v \in W \implies c \cdot v + w \in W$
- (\impliedby) : Supongamos que $\forall v, w \in W$ y $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$ veamos contiene al $\vec{0}$, que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
 1. Como $W \neq \emptyset \implies \exists w \in W \implies (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \implies \vec{0} \in W$.
 2. Tomamos $c = 1$ por lo tanto $(1) \cdot v + w = v + w \in W$ por lo tanto la suma esta bien definida.
 3. Como $\vec{0} \in W$ tomamos $w = \vec{0}$ por lo tanto $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$ entonces el producto esta bien definido.

□

Teorema 12 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Entonces la interseccion de subespacios de V es un subespacio vectorial de V .

Prueba:

Sea $\{W_i\}_{i \in I}$, donde W_i es un subespacio vectorial de V . Entonces sea $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Para ver que W es un subespacio veamos que si $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K} \implies c \cdot v + w \in W$.

Si $v, w \in W \implies v, w \in W_i$ para todo $i \in I$ y como todo W_i es un subespacio $\implies c \cdot v + w \in W_i \implies c \cdot v + w \in W$. □

Teorema 13 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_k \in V$.

Entonces $W = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_i \in \mathbb{K}\} =$ Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de V .

Prueba: Tomemos $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K}$ veamos $c \cdot v + w \in W$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Sean } v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k \implies \\
 &c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \dots + c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \dots + d_k v_k) \\
 &= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
 &\implies c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto } \in W
 \end{aligned}$$

□