Demostraciones Algebra

July 26, 2025

Teorema 1 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrices equivalentes por filas, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.*

Prueba: Si $A \sim B \Longrightarrow \exists$ una sucesion de matrices tal que $A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n = B$, donde cada A_j se obtiene por medio de una operacion elemental por filas.
Por lo tanto basta probar que $A_j x = 0$ y $A_{j+1}x = 0$.

- Caso e_r^c: $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \iff c \cdot a_{r1}x_1 + c \cdot a_{r2}x_2 + \cdots + c \cdot a_{rn}x_n = 0$, pero como $c \neq 0 \Longrightarrow c \cdot (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n) = 0$, por lo tanto ambos sistemas son iguales.
- Caso $e_{r,s}$: es trivial pues ambas filas r, s ya eran iguales a 0 y lo siguen siendo.
- Caso $e_{r,s}^c$: $(r + c \cdot s) = (a_{r1} + c \cdot a_{s1})x_1 + (a_{r2} + c \cdot a_{s2})x_2 + \cdots + (a_{rn} + c \cdot a_{sn})x_n = 0$ de la misma formas que en el primer caso como las filas r, s son iguales a 0 por lo tanto la nueva fila r tambien lo es.

$\square$

Teorema 2 *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ con $m < n \Longrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.*

Prueba: Sea R la MERF equivalente a $A \Longrightarrow$ los sistemas $Ax = 0$ y $Rx = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Sea $r =$ la cantidad de filas no nulas de $R \Longrightarrow r \leq m$ y por lo tanto $r < n$ $\Longrightarrow$ hay $n - r > 0$ variables libres, por lo tanto hay soluciones no triviales. $\square$

Teorema 3 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es equivalente por filas a las $Id \iff Ax = 0$ tiene unicamente la solucion trivial.*

Prueba:

- $(\Longrightarrow)$: Si $A \sim Id$, estas tienen exactamente las mismas soluciones. Por lo tanto como $Idx = 0$ admite unicamente la solucion trivial queda probado.
- $(\Longleftarrow)$: Sea R la MERF $\sim A \Longrightarrow$ el sistema $Rx = 0$ tiene unicamente la solucion trivial. Sea $r =$ la cantidad de filas no nulas de $R \Longrightarrow n - r = 0$ porque no tienen variables libres. Entonces cada fila i tiene un 1 en la columna k_i por lo tanto $R = Id$.

$\square$

Teorema 4 *Propiedades de la multiplicacion de matrices:*

1. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, C \in \mathbb{K}^{p\times q} \Longrightarrow (AB)C = A(BC)$.
2. $A \in \mathbb{K}^{m\times n} \Longrightarrow Id_m A = Id_n A = A$.
3. $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}, B, B' \in \mathbb{K}^{n\times p} \Longrightarrow (A + A')B = AB + A'B$ *y* $A(B + B') = AB + AB'$.
4. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda \cdot (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Teorema 5 *Sea e una operacion elemental por filas y sea $E = e(Id)$ la matriz elemental asociada. Entonces para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se cumple que $e(A) = E \cdot A$.*

Prueba: Tenemos que el elemento i, j de $e(A)$ es el mismo que el de la matriz EA para cada operacion elemental, osea $(e(A))_{ij} = (EA)_{ij}$.

- Caso e_r^c:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{ij} \text{ si } i = r \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \text{ (si } i \neq k \Longrightarrow E_{ik} = 0)$$

$$= E_{ii}A_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{ij} \text{ si } i = r \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}$:

$$\text{Sabemos que } (e(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r, s \\ A_{sj} \text{ si } i = r \\ A_{rj} \text{ si } i = s \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \text{ , donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \vee i = r, s \vee k = r, s \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Veamos } (EA)_{ij} \text{ en cada caso: } \begin{cases} \text{si } i \neq r, s \Longrightarrow (EA)_{ij} = A_{ij} \\ \text{si } i = r \Longrightarrow (EA)_{ij} = E_{is}A_{sj} = A_{sj} \\ \text{si } i = s \Longrightarrow (EA)_{ij} = E_{ir}A_{rj} = A_{rj} \end{cases}$$

- Caso $e_{r,s}^c$:

$$\text{Sabemos que } e(A)_{ij} = \begin{cases} [within]A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} \text{ si } i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} \text{ , donde } E_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ c \text{ si } i = r \wedge j = s \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

□ def

Teorema 6 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:*

1. *Si A es inversible $\Longrightarrow A^{-1}$ tambien lo es y $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Si A, B son inversibles $\Longrightarrow AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Prueba:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id \Longrightarrow A^{-1}$ inversible y $(A^{-1})^{-1}$ es A.
2. $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(Id)A^{-1} = AA^{-1} = Id$.

□

Teorema 7 *Toda matriz elemental E es inversible.*

Prueba: Sea e la operacion elemental por fila correspondiente a E y sea e' la operacion elemental inversa (sabemos que existe por teorema). Por lo tanto sea $E' = e'(Id)$

$$\begin{aligned} & Id = e'(e(Id)) = e'(E) = E'E \\ & Id = e(e'(Id)) = e(E') = EE' \\ & \Longrightarrow E \text{ es inversible y su inversa es } E' \end{aligned}$$

□

Teorema 8 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entonces son equivalentes:*

1. *A es inversible.*
2. *A es equivalente por filas a la Id.*
3. *A es producto de matrices elementales.*

Prueba:

- [1 $\Longrightarrow$ 2] Sea R la MERF $\sim A \Longrightarrow$ existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ talque $R = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Como las matrices elementales E_j y A son inversibles $\Longrightarrow R$ tambien lo es $\Longrightarrow R$ no tiene filas nulas por lo tanto $R = Id$.
- [2 $\Longrightarrow$ 3] Si $A \sim Id \Longrightarrow Id \sim A \Longrightarrow$ existen P productos de matrices elementales talque $A = P \cdot Id = E_1 E_2 \cdots E_k \cdot Id$.
- [3 $\Longrightarrow$ 1] Supongamos $A = E_1 \cdots E_k$ donde E_j es una matriz elemental. Como cada E_j es inversible y el producto de matrices inversibles tambien lo es $\Longrightarrow$ A es inversible.

□

Teorema 9 *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Entonces B es equivalente por filas a $A \iff \exists\, P$ matriz inversible $m \times m$ talque $B = P \cdot A$*

Prueba:

- ($\Longrightarrow$) : Si $B \sim A$ sabemos que $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ y como cada E_i es inversible el producto de matrices inversibles tambien lo es.
- ($\Longleftarrow$) : Sea P inversible talque $B = PA$ como P es producto de matrices elementales $\Longrightarrow B = E_k \cdots E_1 A \Longrightarrow B$ se obtiene de A haciendo operaciones elementales $\Longrightarrow B \sim A$.

□

Teorema 10 *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces son equivalentes:*

1. *A es inversible.*
2. *El sistema $Ax = 0$ tiene una unica solucion (la trivial).*
3. *$\forall\, b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ el sistema no-homogeneo $Ax = b$ tiene una unica solucion.*

Prueba:

- [1 $\iff$ 2] Sabemos que A es inversible $\iff$ $A \sim Id$ $\iff$ el sistema $Ax = 0$ tiene como unica solucion la trivial.

- [1 $\implies$ 3] Sea $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, como A es inversible $\implies \exists A^{-1}$. Por lo tanto sea $x_0 = A^{-1}b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ $\implies Ax_0 = A(A^{-1}b) = b$.
  Veamos que es unica, para eso supongamos que existe otra solucion $x_1 \implies Ax_1 = b \implies$ $Ax_1 = b = Ax_0$ ahora multiplicamos por la inversa $\implies A^{-1}Ax_0 = A^{-1}Ax_1 \implies x_0 = x_1$

- [3 $\implies$ 2] Como tiene solucion para todo b tomo $b = 0$ por lo tanto, obviamente, tiene una unica solucion por hipotesis.

$\square$

Teorema 11 *Si* $W \subseteq V$ *y* $W \neq \emptyset$*. Entonces* W *es un* $\mathbb{K}-$*subespacio vectorial de* $V \iff \forall v, w \in W$ *y* $\forall c \in \mathbb{K}$ *el vector* $[c \cdot v + w] \in W$

Prueba:

- $(\Longrightarrow)$: Si W es un subespacio vectorial y $c \in \mathbb{K}$, $v, w \in W \Longrightarrow c \cdot v \in W \Longrightarrow c \cdot v + w \in W$
- $(\Longleftarrow)$: Supongamos que $\forall v, w \in W$ y $\forall c \in \mathbb{K} : c \cdot v + w \in W$ veamos contiene al $\vec{0}$, que es cerrado para la suma y el producto por escalar.
  1. Como $W \neq \emptyset \implies \exists w \in W \Longrightarrow (-1) \cdot w + (1) \cdot w \in W \Longrightarrow \vec{0} \in W$.
  2. Tomamos $c = 1$ por lo tanto $(1) \cdot v + w = v + w \in W$ por lo tanto la suma esta bien definida.
  3. Como $\vec{0} \in W$ tomamos $w = \vec{0}$ por lo tanto $c \cdot v + \vec{0} = c \cdot v \in W$ entonces el producto esta bien definido.

$\square$

Teorema 12 *Sea* V *un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial . Entonces la interseccion de subespacios de* V *es un subespacio vectorial de* V*.*

Prueba:

Sea $\{W_i\}_{i \in I}$, donde W_i es un subespacio vectorial de V. Entonces sea $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Para ver que W es un subespacio veamos que si $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K} \Longrightarrow c \cdot v + w \in W$.
Si $v, w \in W \Longrightarrow v, w \in W_i$ para todo $i \in I$ y como todo W_i es un subespacio $\Longrightarrow c \cdot v + w \in W_i$ $\Longrightarrow c \cdot v + w \in W$. $\square$

Teorema 13 *Sea* V *un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial y sean* $v_1, \ldots, v_k \in V$*.*
Entonces $W = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k | c_i \in \mathbb{K}\}$ = *Conjunto de todas la combinaciones lineales, es un subespacio vectorial de* V*.*

Prueba: Tomemos $v, w \in W$, $c \in \mathbb{K}$ veamos $c \cdot v + w \in W$.

$$\begin{aligned}
&\text{Sean } v = c_1 v_1 + \ldots c_k v_k \text{ y } w = d_1 v_1 + \ldots d_k v_k \Longrightarrow \\
&c \cdot v + w = (c \cdot c_1 v_1 + \ldots c \cdot c_k v_k) + (d_1 v_1 + \ldots d_k v_k) \\
&= (c \cdot c_1 + d_1) v_1 + \ldots (c \cdot c_k + d_k) v_k \\
&\Longrightarrow c \cdot v + w \text{ es una combinacion lineal, por lo tanto} \in W
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 14 *Sea* V *un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial de dimension finita y* W *subespacio de* V*. Todo subconjunto L.I. de* W *es finito y se puede completar a una base.*

Prueba: Si $S_0 \subseteq W$ es L.I. $\Longrightarrow S_0$ es un conjunto L.I de V y si $dim(V) = n$, sabemos que $|S_0| \leq n$, osea es finito. Queremos extenderlo a una base de la siguiente forma:

- Si S_0 genera W ya es una base.

- Si S_0 no genera $W \Longrightarrow \exists w_1 \in W$ talque $w_1 \notin \langle S_0 \rangle$, vimos que si agregamos algo que no esta en el espacio generado este conjunto sigue siendo L.I.
  Repetimos este paso hasta algun $S_k = S_0 \cup w_1 \cup \cdots \cup w_k$ talque $\langle S_k \rangle = W$. Como este conjunto es por definicion L.I. y genera este es una base.

$\square$

Teorema 15 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial , sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto de generadores de V. Entonces existe $B \subseteq S$ que es una base de V.*

Prueba: Vamos a definir inductivamente subconjuntos $G_j \subseteq S$ $(j = 1, \ldots, m)$ que sean L.I.

- $(j = 1)$:

$$G_1 = \begin{cases} \{v_1\} & si \quad v_1 \neq 0 \\ \emptyset \quad si & v_1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow G_1 \text{ es L.I.}$$

- $(j = 2)$:

$$G_2 = \begin{cases} G_1 \cup v_2 & si \quad v_2 \notin \langle G_1 \rangle \\ G_1 & si \quad v_2 \in \langle G_1 \rangle \end{cases} \qquad \Longrightarrow G_2 \text{ es L.I. en cualquier caso}$$

- $(j + 1)$:

$$G_{j+1} = \begin{cases} G_j \cup v_{j+1} & si \quad v_{j+1} \notin \langle G_j \rangle \\ G_j & si \quad v_{j+1} \in \langle G_j \rangle \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \text{en ambos casos } G_{j+1} \text{ es L.I.}$$

$\Longrightarrow G_m$ es L.I. y $\langle G_m \rangle = \{v_1, \ldots, v_m\} = V \Longrightarrow \mathcal{B} = G_m \subseteq S$ y la dimension de $V = |G_m|$. $\square$

Teorema 16 *Sean W_1, W_2 dos subespacios de V:*

1. *$W_1 + W_2$ es un subespacio de V.*
2. *$W_1 + W_2$ es el menor subespacio (respecto a la inclusion) que contiene a $W_1 + W_2$.*
3. *Si $\{v_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de generadores de W_1 y $\{w_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de generadores de $W_2 \Longrightarrow \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$.*

Prueba:

1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$ pues $\vec{0} \in W_1$ y $\vec{0} \in W_2 \Longrightarrow \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in W_1 + W_2$. Sean $v_1, v_2 \in W_1 + W_2$ queremos ver que $c \cdot v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.

$$\begin{aligned} & v_1 = x_1 + y_1 \ , \ v_2 = x_2 + y_2 \text{ con } x_1, x_2 \in W_1 \subseteq V \text{ y } y_1, y_2 \in W_2 \subseteq V \\ & \Longrightarrow c \cdot v_1 + v_2 = c \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (cx_1 + x_2) \in W_1 + (cy_1 + y_2) \in W_2 \\ & \Longrightarrow c \cdot v_1 + v_2 \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

2. $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ pues si $w_1 \in W_1 \Longrightarrow w_1 + \vec{0} \in W_1 + W_2$ y del mismo modo con W_2. Por lo tanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$, basta ver que es el menor subespacio que lo contiene.
   Sea U un subespacio de V talque $W_1 \cup W_2 \subseteq U$, queremos ver que $W_1 + W_2 \subseteq U$.
   Sea $v \in W_1 + W_2 \Longrightarrow v = x + y$ con $x \in W_1 \subseteq U$, $y \in W_2 \subseteq U$ osea $v \in U \Longrightarrow W_1 + W_2 \subseteq U$.

3. $\{v_i\}_{i\in I}$ genera W_1, $\{w_j\}_{j\in J}$ genera $W_2 \Longrightarrow S=\{v_i\}_{i\in I}\cup\{w_j\}_{j\in J}$ genera W_1+W_2.

$$\begin{aligned}
&\text{Sea } v\in W_1+W_2 \Longrightarrow v=x+y \text{ con } x\in W_1, y\in W_2\\
&\Longrightarrow x=\sum_{i\in I}\alpha_i v_i \;,\; y=\sum_{j\in J}\beta_j w_j \quad (\text{ con } \alpha_i,\beta_j\in\mathbb{K})\\
&\Longrightarrow v=x+y=\sum_{i\in I}\alpha_i v_i+\sum_{j\in J}\beta_j w_j
\end{aligned}$$

Por lo tanto v es combinacion lineal de elementos de S

□

Teorema 17 *Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial , sean W_1, W_2 subespacios de V y de dimension finita.*
Entonces W_1+W_2 es un subespacio y $dim(W_1+W_2)=dim(W_1)+dim(W_2)-dim(W_1\cap W_2)$

Prueba: $W_1\cap W_2$ es un subespacio de W_1 (y de W_2) por lo tanto es de dimension finita. Sea $\{u_1,\ldots,u_k\}$ base de $W_1\cap W_2 \Longrightarrow \{u_1,\ldots,u_k\}$ es L.I. en $W_1 \Longrightarrow$ se puede extender a una base de W_1, analogamente con W_2.
Osea existen $\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq W_1$ tales que $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de W_1. De la misma forma existen $\{w_1,\ldots,w_m\}\subseteq W_2$ tales que $\{u_1,\ldots,u_k,w_1,\ldots,w_m\}$ es base.
$\Longrightarrow W_1+W_2$ es generado por $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m\}$ es $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$. Veamos que este conjunto es L.I.

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{n}b_iv_i+\sum_{i=1}^{m}c_iw_i=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{n}b_iv_i=\underline{-\sum_{i=1}^{m}c_iw_i}\in W_1\cap W_2$$

$$\text{Como } \{u_1,\ldots,u_k\} \text{ es base de } W_1\cap W_2 \Longrightarrow -\sum_{i=1}^{m}c_iw_i=\sum_{i=1}^{k}d_iu_i$$

$$\text{Reemplazando } \sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{n}b_iv_i+\sum_{i=1}^{k}(-d_i)u_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i-d_i)u_i+\sum_{i=1}^{n}b_iv_i=0$$

Como $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_n\}$ es base de W_1 el conjunto es $L.I. \Longrightarrow a_i=d_i$ y $b_i=0$, $\forall\, i$.
Volviendo a la sumatoria con este resultado sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{k}a_iu_i+\sum_{i=1}^{m}c_iw_i=0$$

Como $\{u_1,\ldots,u_k,w_1,\ldots,w_m\}$ es base de W_2 el conjunto es L.I. $\Longrightarrow$ todos los escalares son 0.
Osea $\beta=\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m\}$ es L.I. y por lo tanto es base de W_1+W_2

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow dim(W_1+W_2)<\infty \text{ y } dim(W_1+W_2)=k+n+m\\
&dim(W_1)=k+n \;,\; dim(W_2)=k+m \;,\; dim(W_1\cap W_2)=k\\
&\Longrightarrow dim(W_1+W_2)=dim(W_1)+dim(W_2)-dim(W_1\cap W_2)
\end{aligned}$$

□

Proposicion 17.1 *Si* $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow$ *para cada* $v \in V$: $\exists$ *unicos elementos* $x \in W_1, y \in W_2$ *tales que* $v = x + y$.

Prueba: Como $V = W_1 + W_2$ sabemos que existen $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 = w_2$. Si ademas $v = u_1 + u_2 \Longrightarrow \vec{0} = v - v = (w_1 + w_2) - (u_1 + u_2) = (w_1 - u_1) + (w_2 - u_2)$ $\Longrightarrow w_1 - u_1 = w_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (pues es suma directa) $\Longrightarrow w_1 = u_1, w_2 = u_2$. □

Teorema 18 *Sean* W_1,W_2 *subespacios vectoriales de* V *y sean* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *bases de* W_1 *y* W_2. *Entonces son equivalentes:*

1. $V = W_1 \oplus W_2$.
2. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *es una base de* V.

Prueba:

- $[1 \Longrightarrow 2]$: Asumimos que $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$ bastar ver que es L.I.
  Sabemos que $dim(V) = dim(W_1 \oplus W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(\{0\})$

  $$\sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j = 0 \Longrightarrow \underbrace{\sum_{i \in I} a_i v_i}_{\in W_1} = \underbrace{-\sum_{j \in J} b_j w_j}_{\in W_2} \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

  $$\sum_{i \in I} a_i v_i = \vec{0}\ ,\ \sum_{j \in J} b_j w_j = \vec{0}$$

  $\Longrightarrow a_i = 0, b_j = 0\ \forall i \in I, \forall j \in J$ pues ambos v_i, w_j son base y por lo tanto son $L.I.$

- $[2 \Longrightarrow 1]$: Asumimos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base de $V \Longrightarrow V = W_1 + W_2$ pues sabemos que:

  $$v = \sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{j \in J} b_j w_j$$

  Necesitamos ver que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ para ver que la suma es directa. Sea $v \in W_1 \cap W_2$:

  $$\Longrightarrow v = \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{j \in J} b_j w_j$$

  $$\Longrightarrow 0 = \sum_{i \in I} a_i v_i - \sum_{j \in J} b_j w_j$$

  (como ambos conjuntos son L.I. esto solo pasa si $a_i = 0\ \forall i \in I, b_j = 0\ \forall j \in J$)

  $\Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

□

Definicion 1 *Dados V, W espacio vectoriales sobre $\mathbb{K}$.*
Una transformacion lineal de V en W es una funcion, $T : V \to W$ que satisface:

- $T(v + w) = T(v) + T(w) \quad \forall v, w \in V$
- $T(c \cdot v) = c \cdot T(v) \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathbb{K}$

De esas propiedades se deducen las siguientes:

- $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
- $T(-v) = -T(v) \quad \forall v \in V$

Teorema 19 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectorial , $T : V \to W$ una T.L.*

1. *Si $U \subseteq V$ es un subespacio de $V \Longrightarrow T(U)$ es un subespacio de W.*
2. *Si $Z \subseteq W$ es un subespacio de $W \Longrightarrow T^{-1}(Z) = \{v \in V \mid T(w) \in Z\}$*

Prueba:

1. Sea $T(U) = \{w \in W \mid \exists v \in U \text{ con } T(v) = w\} \neq \emptyset$, veamos que $T(U)$ es subespacio:

$$\begin{aligned}
&\text{Como } \vec{0} \in U \text{ (por ser subespacio) y } T(\vec{0}) = 0 \Longrightarrow \vec{0} \in T(U)\\
&\text{Sean } w_1, w_2 \in T(U) :\Longrightarrow \exists v_1, v_2 \in U \text{ tales que } w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)\\
&\Longrightarrow c \cdot w_1 + w_2 = cT(v_1) + T(V_2) = T(c \cdot v_1 + v_2)\\
&\text{Como } c \cdot v_1 + v_2 \in U \Longrightarrow c \cdot w_1 + w_2 \in T(U)
\end{aligned}$$

2. $\vec{0} \in T^{-1}(Z)$ pues $T(0) = \vec{0} \in Z$ por lo tanto $T^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Sean $v_1, v_2 \in T^{-1}(Z), c \in \mathbb{K}$ veamos que $c \cdot v_1 + v_2 \in T^{-1}(Z)$:

$$\begin{aligned}
&T(c \cdot v_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) \in defZ\\
&\Longrightarrow c \cdot v_1 + v_2 \in T^{-1}(Z)
\end{aligned}$$

□

Teorema 20 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal.*
Entonces:

1. *$Nu(T)$ es un subespacio de V.*
2. *$Im(T)$ es un subespacio de W.*

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
&Nu(T) \neq \emptyset \text{ , pues } \vec{0} \in Nu(T) \text{ porque } T(\vec{0}) = \vec{0}\\
&\text{Sean } v_1, v_2 \in Nu(T) \text{ , } c \in \mathbb{K}\\
&\Longrightarrow T(cv_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) = \vec{0} \Longrightarrow c \cdot v_1 + v_2 \in Nu(T)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&Im(T) \subseteq W, Im(T) \neq \emptyset \text{ pues } \vec{0} \in Im(T) \text{ , } \vec{0} \in T(\vec{0})\\
&\text{Sean } w_1, w_2 \in Im(T) \text{ , } c \in \mathbb{K}\\
&\Longrightarrow \exists v_1, v_2 \in V \text{ tales que } T(cv_1 + v_2) = cT(v_1) + T(v_2) = c \cdot w_1 + w_2 \in Im(T)
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 21 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal. (con $dim(V) < \infty$) Entonces:*

$$dim(V) = dim(Im(T)\ ) + dim(Nu(T)\ )$$

Prueba: Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ base de $Nu(T) \subseteq V$. Como el conjunto es L.I. podemos completarlo a una base de V. Sean $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\} \subseteq V$ tal que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Probemos $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es base de $Im(T)$:

$$\text{Sea } w \in Im(T) \implies \exists v \in V \text{ tal que } w = T(v) \implies v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$$
$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j) = \sum_{j=k+1}^{n} c_j T(v_j) \quad (\text{porque } T(v_j) = 0 \text{ si } j \leq k)$$
$$\implies w \text{ es combinacion lineal de } \{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$$

Falta ver que el conjunto es $L.I.$:

$$\implies b_{k+1}T(v_{k+1}) + \cdots + b_n T(v_n) = T(\underbrace{b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_n v_n}_{v_0}) = 0$$
$$\implies v_0 \in Nu(T) \implies v_0 = \sum_{j=k+1}^{n} b_j v_j = \sum_{j=1}^{k} c_i v_i \text{ pues } \{v_1, \ldots, v_k\} \text{ es base de } Nu(T)$$
$$\implies \sum_{j=k+1}^{n} b_j v_j + \sum_{j=1}^{k} (-c_i) v_i = 0$$

Como la segunda parte es $L.I.$ $\implies b_j = 0$, $\forall j = \{k+1, \cdots, n\}$. Con esto probamos que $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es L.I. y como genera es base de $Im(T)$.
Por lo tanto $dim(Im(T)\ ) = n - k$, ademas sabiamos que $dim(Nu(T)\ ) = k$

$$\implies dim(Nu(T)\ ) + dim(Im(T)\ ) = k + (n-k) = n = dim(V)$$

$\square$

Definicion 2

- *El Rango Fila $(A) = dim($espacio fila de $A)$*
- *El Rango Columna $(A) = dim($espacio columna de $A)$*

Teorema 22 *Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ Entonces: Rango fila de A = Rango columna de A*

Prueba: Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ la T.L. definida por $T(x) = A \cdot x$, $Nu(T) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$. Sabemos que A se puede reducir a una MERF R.

$$\implies \text{espacio fila de A} = \text{espacio fila de R}$$
$$\implies dim(\text{espacio fila de A}) = k \text{ (cantidad de filas no nulas)}$$
$$\implies dim(Nu(T)\ ) = n - k \text{ , Rango Fila (A)} = k$$
$$\implies dim(\mathbb{K}^n) = n = dim(Nu(T)\ ) + \text{ Rango Fila (A)}$$

Por otra parte $T:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \to Ax$ entonces $Im(T)$ es generada por las columnas de A:

$$\mathbb{K}^m \Longrightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$T(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ siendo } e_j \text{ el vector canonico que devuelve la columna } j$$

$$\Longrightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\} \text{ es base de } \mathbb{K}^n \Longrightarrow \{T(e_1), \ldots, T(e_n)\} \text{ genera } Im(T)$$

$$\Longrightarrow dim(Im(T)\,) = dim(\text{espacio columna de A}) = \text{Rango Columna (A)}$$

Ahora el teorema dice que $dim(\mathbb{K}^n) = dim(Nu(T)\,) +$ Rango Columna (A). Pero antes vimos que $dim(\mathbb{K}^n) = dim(Nu(T)\,) +$Rango Columna (A) $\Longrightarrow$ <u>Rango Fila (A)= Rango Columna (A)</u>
□

Proposicion 22.1 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal. Entonces:*

- *T es inyectiva $\iff$ $Nu(T) = \{0\}$ $\iff$ nulidad(T) = 0*
- *T es sobreyectiva $\iff$ $Im(T) = W$ $\iff$ rango(T) = dim(W)*

Teorema 23 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal. Entonces:*

1. *Si T es inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I. en $V \Longrightarrow \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es L.I. en W.*
2. *Si T es sobreyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera $V \Longrightarrow \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera W.*
3. *En general si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera $V \Longrightarrow \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera $Im(T)$.*

Prueba:

1. Sean $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{K}$ tales que $c_1T(v_1) + \cdots + c_rT(v_r) = 0$ (como T es lineal)
$\Longrightarrow T(c_1v_1 + \cdots + c_rv_r) = 0 \Longrightarrow [c_1v_1 + \cdots + c_rv_r] \in Nu(T) = \{0\}$ (por ser inyectiva)
$\Longrightarrow c_1v_1 + \cdots + c_rv_r = 0 \Longrightarrow c_1 = 0, \cdots, c_r = 0$.

2. Caso particular de (3) donde $Im(T) = W$.

3. Sea $w \in Im(T) \Longrightarrow \exists v \in V$ talque $w = T(v)$, como $\{v_1, \cdots, v_s\}$ genera V

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow v = c_1v_1 + \cdots + c_sv_s \quad (\text{con } c_i \in \mathbb{K}) \\
&\Longrightarrow w = T(v) = T(c_1v_1 + \cdots + c_sv_s) = c_1T(v_1) + \cdots + c_sT(v_s) \\
&\Longrightarrow w \in \langle\{T(v_1), \cdots, T(v_s)\}\rangle \quad (\text{esta en el espacio generado}) \\
&\Longrightarrow Im(T) \subseteq \langle\{T(v_1), \cdots, T(v_s)\}\rangle \subseteq Im(T) \\
&\Longrightarrow \underline{Im(T) = \langle\{T(v_1), \cdots, T(v_s)\}\rangle}
\end{aligned}$$

□

Teorema 24 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal. (talque $dim(V) = dim(W) < \infty$). Entonces son equivalentes:*

1. *T es un isomorfismo.*
2. *T es inyectiva.*
3. *T es sobreyectiva.*
4. *Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $V \Longrightarrow \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es una base de W.*

Prueba:

- $[1 \Longrightarrow 2]$: obvio pues es isomorfismo cuando tanto inyectiva como sobreyectiva.
- $[2 \Longrightarrow 3]$: Si T es inyectiva $\Longrightarrow Nu(T) = \{0\} \Longrightarrow nulidad(T) = 0$.
  Por teorema de las dimensiones sabemos que:
  $$\begin{aligned} & n = dim(V) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T)) \\ & \Longrightarrow n = 0 + dim(Im(T)) = dim(W) \\ & \Longrightarrow \text{ T sobreyectiva (porque } \forall\, S \subseteq V : dim(S) = dim(W) \text{ es el mismo W)} \end{aligned}$$
- $[3 \Longrightarrow 1]$: Supongamos T sobreyectiva $\Longrightarrow Im(T) = dim(W)$, nuevamente por el teorema de las dimesiones sabemos que $dim(Nu(T)) = 0 \Longrightarrow Nu(T) = \{0\}$. Por lo tanto T es inyectiva $\Longrightarrow T$ es biyectiva.
- $[1 \Longrightarrow 4]$: Sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $V \Longrightarrow \{v_1, \cdots, v_n\}$ es L.I. y como es inyectiva (por ser biyectiva) $\Longrightarrow \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ tambien es L.I.
  Ademas $\{v_1, \cdots, v_n\}$ genera V y como es sobreyectiva $\Longrightarrow \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ genera W.
- $[4 \Longrightarrow 2]$: Sea $v_1 \in Nu(T)$, supongamos que $v_1 \neq 0 \Longrightarrow \{v_1\}$ es L.I. por lo tanto se puede extender a una base $\Longrightarrow \exists\{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $V \Longrightarrow \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es base de $W \Longrightarrow$ en particular $T(v_1) \neq 0$ (ABSURDO pues $v_1 \in Nu(T)$, osea $T(v_1) = 0$).

$\square$

Proposicion 24.1 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales de dimension finita. Entonces:*

$$\exists\, T : V \to W \text{ isomorfismo } \Longleftrightarrow dim(V) = dim(W)$$

Definicion 3 *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base ordenada de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base ordenada de W. Sea $T : V \to W$ T.L.*

$$\text{Supongamos que } T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{ (cuando } 1 \leq j \leq n\text{)}$$

Definimos la matriz de T respecto a las bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ como:

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \quad (\text{con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Si $V \subseteq W$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ en particular denotaremos $\big[T\big]_{\mathcal{B}} = \big[T\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Teorema 25 *Sean V, W $\mathbb{K}-$espacio vectoriales, sea $T : V \to W$ transformacion lineal. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}, \mathcal{B}' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente*

$$\Longrightarrow \big[T\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{B}} = \big[T(v)\big]_{\mathcal{B}'} \quad \forall v \in V$$

Prueba:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ , \ \big[T\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (a_{ij})$$

Sea $v \in V \Longrightarrow \exists!$ escalares $x_1, \cdots, x_n$ tales que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \Longrightarrow \big[v\big]_{\mathcal{B}} = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j (a_{ij} w_i) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij}) w_i \\
&\Longrightarrow \big[T(v)\big]_{\mathcal{B}'} = \underline{\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{1j} x_j \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_{2j} x_j \ , \ \cdots \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_{mj} x_j\right)} \quad (\star)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ \ddots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Por lo tanto $\big[T(v)\big]_{\mathcal{B}'} = \big[T\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \big[v\big]_{\mathcal{B}'}$ tenemos lo queriamos ver. $\square$

Proposicion 25.1 *Sea V $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimension finita. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V. Entonces:*

$$\big[v\big]_{\mathcal{B}'} = \big[Id\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V$$

Definicion 4 *Sea V $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimension finita. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases ordenadas de V. Denotaremos $P = \big[Id\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ como la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Teorema 26 *Sean V,W,Z espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Sean $T : V \to W, S : W \to Z$ T.L. y sean $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_Z$ bases de V,W,Z respectivamente. Entonces:*

$$\big[S \circ T\big]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_V} = \big[S\big]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_W} \cdot \big[T\big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$$

Prueba: Sea $v \in V$ arbitrario:

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{B}_V} = \big[T(v)\big]_{\mathcal{B}_W} \Longrightarrow \big[S\big]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_W} \cdot \big[T(v)\big]_{\mathcal{B}_W} = \big[S(T(v))\big]_{\mathcal{B}_Z}$$

$$\big[S \circ T\big]_{\mathcal{B}_Z}^{\mathcal{B}_V} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{B}_V} = \big[S \circ T(v)\big]_{\mathcal{B}_Z}$$

$$\Longrightarrow \big[S(T(v))\big]_{\mathcal{B}_Z} = \big[S \circ T(v)\big]_{\mathcal{B}_Z} \text{ (por definicion de composicion)}$$

$\square$

Proposicion 26.1 *Sea* V $\mathbb{K}-$*espacio vectorial* , $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *y sea* $T : V \to V$ *T.L.*
Entonces:

1. $\big[S \circ T\big]_{\mathcal{B}} = \big[S\big]_{\mathcal{B}} \cdot \big[T\big]_{\mathcal{B}}$

2. *Si* $I : V \to V$ *es la identidad* $\Longrightarrow \big[Id\big]_{\mathcal{B}} = Id$

3. *Si* T *es inversible* $\Longrightarrow \big[T\big]_{\mathcal{B}}$ *es inversible y* $\big[T^{-1}\big]_{\mathcal{B}} = \big[T\big]_{\mathcal{B}}^{-1}$

Proposicion 26.2 *Sea* V $\mathbb{K}-$*espacio vectorial de dimension finita, sean* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *dos bases de* V.

$$\textit{Entonces si } P = \big[Id\big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \Longrightarrow P^{-1} = \big[Id\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Teorema 27 *Sean* V, W $\mathbb{K}-$*espacio vectoriales, sea* $T : V \to W$ *transformacion lineal.*
Sean $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_V$ *dos bases de* V *y sean* $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}'_W$ *dos bases de* W.
Sean $P = \big[Id\big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}'_V} (\mathcal{B}'_V \to \mathcal{B}_V)$ *y* $Q = \big[Id\big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}'_W} (\mathcal{B}'_W \to \mathcal{B}_W)$. *Entonces:*

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}'_V} = Q^{-1} \cdot \big[T\big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot P$$