Teorico Probabilidad y Estadistica

August 25, 2025

Índice

Poblacion: el conjunto **(Total)** sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones.

Muestra: es un subconjunto de la poblacion al que tenemos acceso y sobre el que realmente hacemos las observaciones. Nos interesa principalmente cuando es una **Muestra Aleatoria Simple**, puede ser **Con Reemplazo** o **Sin Reemplazo**.

Experimento Aleatorio: conocemos de antemano todos los posibles resultados que se pueden obtener, pueden repetirse indefinidamente en las mismas condiciones.

Espacio Muestral Ω : el conjunto de todos los posibles resultados distintos de dicho experimento.

Eventos Elementales: eventos (subconjunto del espacio muestral) formados por un unico resultado, $A = \{s\}$

Operaciones entre eventos:

- **Union:** $A \cup B = \{s \in \Omega \, : s \in A \vee s \in B\}$
- **Interseccion:** $A \cap B = \{s \in \Omega \, : s \in A \wedge s \in B\}$
- **Diferencia:** $A - B = \{s \in \Omega \, : s \in A \wedge s \notin B\}$
- **Complemento:** $A^{\mathsf{c}} = \{s \in \Omega \, : s \notin A\}$

Definicion 1 (Funcion de probabilidad) *Es una funcion $\mathcal{P}$ que verifica los siguientes axiomas:*

1. $\mathcal{P} : \mathbb{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\forall A \subset \Omega \quad 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$
2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
3. *Si* A_i, A_j *son eventos disjuntos* $(A_i \cap A_j = \emptyset) \Longrightarrow \mathcal{P}(A_i \cup A_j) = \mathcal{P}(A_i) + \mathcal{P}(A_j)$

Espacio Equiprobable:

- Ω tiene n posibles resultados diferentes
- los n resultados tienen la misma probabilidad de aparecer $\frac{1}{n}$

Definicion 2 (Regla de Laplace) *Si Ω es un espacio equiprobable. La probabilidad de un evento formado por k eventos elementales $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ es:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}(a_i) = \sum_{i=n}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\textit{casos favorables}}{\textit{casos posibles}}$$

Propiedades de la Funcion de Probabilidad:

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
4. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \cap B)$
5. $\mathcal{P}(\bigcup_{i=n}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathcal{P}(A_i) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

Definicion 3 (Variable Aleatoria) *Una Variable Aleatoria X es una funcion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, que a cada elemento del espacio muestral $(\Omega, \mathcal{P})$ le hace corresponder un numero real.*

Rango de la Variable Aleatoria: es el conjunto de valores que tienen asociado algun elemento del espacio muestral:

$$\Omega_X = \{x \in \mathbb{R} : \exists s \in \Omega, X(s) = x\}$$

Definicion 4 (Funcion de Masa Discreta) *Es la funcion que representa la probabilidad de que X tome cada uno de los valores posibles x_i :*

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{R} \to [0,1] \\ &x_i \to p(x_i) = P(X = x_i) = \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) = x_i) \end{aligned}$$

Propiedades de la Funcion de Masa:

1. $0 \leq p(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{i \in I} p(x_i) = 1$
3. Si $A \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

Funcion de Distribucion:

$$F(x) = P(-\infty, x] = P(s \in \Omega : X(s) \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. Si $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x^+) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$
5. $P(a, b] = F(a) - F(b)$

Definicion 5 (Funcion de Distribucion Discreta)

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$

Definicion 6 (Independencia) *Diremos que A y B son independientes sii:*

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

Definicion 7 (Evento Condcionado) *Si la probabilidad de un evento A esta condicionada por un evento B se da que:*

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

<u>Particion sobre Ω :</u>

1. Eventos exhaustivos: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$
2. Eventos excluyentes: $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Definicion 8 (Regla de Probabilidad Total) *A partir de una particion podemos calcular A como la union de todas las intersecciones con los eventos B.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Sea } A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_r) \\
&\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B_1) + \cdots + \mathcal{P}(A \cap B_r) \\
&\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A|B_1) \cdot \mathcal{P}(B_1) + \cdots + \mathcal{P}(A|B_r) \cdot \mathcal{P}(B_r) \\
&\implies \quad \mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i) \cdot \mathcal{P}(B_i)
\end{aligned}$$

Definicion 9 (Regla de Bayes) *Del mismo modo a partir de una particion de espacio muestral se deduce que:*

$$\mathcal{P}(B_j|A) = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i) \cdot \mathcal{P}(B_i)}$$

Definicion 10 (Esperanza Matematica) *Denotamos esperanza matematica (o media) a la tendencia central mas importante:*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$