Teorico Probabilidad y Estadistica

September 4, 2025

Índice

<u>Poblacion:</u> el conjunto **(Total)** sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones.

<u>Muestra:</u> es un subconjunto de la poblacion al que tenemos acceso y sobre el que realmente hacemos las observaciones. Nos interesa principalmente cuando es una **Muestra Aleatoria Simple**, puede ser **Con Reemplazo** o **Sin Reemplazo**.

<u>Experimento Aleatorio:</u> conocemos de antemano todos los posibles resultados que se pueden obtener, pueden repetirse indefinidamente en las mismas condiciones.

<u>Espacio Muestral Ω :</u> el conjunto de todos los posibles resultados distintos de dicho experimento.

<u>Eventos Elementales:</u> eventos (subconjunto del espacio muestral) formados por un unico resultado, $A = \{s\}$

<u>Operaciones entre eventos:</u>

- **Union:** $A \cup B = \{s \in \Omega \ : s \in A \vee s \in B\}$
- **Interseccion:** $A \cap B = \{s \in \Omega \ : s \in A \wedge s \in B\}$
- **Diferencia:** $A - B = \{s \in \Omega \ : s \in A \wedge s \notin B\}$
- **Complemento:** $A^{\mathsf{c}} = \{s \in \Omega \ : s \notin A\}$

Definicion 1 (Funcion de probabilidad) *Es una funcion $\mathcal{P}$ que verifica los siguientes axiomas:*

1. $\mathcal{P} : \mathbb{P}(\Omega) \to [0, 1]$, $\forall A \subset \Omega \quad 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$
2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
3. *Si A_i, A_j son eventos disjuntos* $(A_i \cap A_j = \emptyset) \Longrightarrow \mathcal{P}(A_i \cup A_j) = \mathcal{P}(A_i) + \mathcal{P}(A_j)$

Espacio Equiprobable:

- Ω tiene n posibles resultados diferentes
- los n resultados tienen la misma probabilidad de aparecer $\frac{1}{n}$

Definicion 2 (Regla de Laplace) *Si Ω es un espacio equiprobable. La probabilidad de un evento formado por k eventos elementales $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ es:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}(a_i) = \sum_{i=n}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\textit{casos favorables}}{\textit{casos posibles}}$$

Propiedades de la Funcion de Probabilidad:

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
4. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \cap B)$
5. $\mathcal{P}(\bigcup_{i=n}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathcal{P}(A_i) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

Definicion 3 (Variable Aleatoria) *Una Variable Aleatoria X es una funcion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, que a cada elemento del espacio muestral $(\Omega, \mathcal{P})$ le hace corresponder un numero real.*

Rango de la Variable Aleatoria: es el conjunto de valores que tienen asociado algun elemento del espacio muestral:

$$\Omega_X = \{x \in \mathbb{R} : \exists s \in \Omega, X(s) = x\}$$

Definicion 4 (Funcion de Masa Discreta) *Es la funcion que representa la probabilidad de que X tome cada uno de los valores posibles x_i :*

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{R} \to [0, 1] \\ &x_i \to p(x_i) = P(X = x_i) = \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) = x_i) \end{aligned}$$

Propiedades de la Funcion de Masa:

1. $0 \leq p(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{i \in I} p(x_i) = 1$
3. Si $A \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

<u>Funcion de Distribucion:</u>

$$F(x) = P(-\infty, x] = P(s \in \Omega : X(s) \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Se deducen las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. Si $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x^+) = \lim_{h \to 0^+} F(x + h) = F(x)$
5. $P(a, b] = F(a) - F(b)$

Definicion 5 (Funcion de Distribucion Discreta)

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$

Definicion 6 (Independencia) *Diremos que A y B son independientes sii:*

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

Definicion 7 (Evento Condcionado) *Si la probabilidad de un evento A esta condicionada por un evento B se da que:*

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

<u>**Particion sobre Ω :**</u>

1. Eventos exhaustivos: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$
2. Eventos excluyentes: $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Definicion 8 (Regla de Probabilidad Total) *A partir de una particion podemos calcular A como la union de todas las intersecciones con los eventos B.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Sea } A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_r) \\
&\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B_1) + \cdots + \mathcal{P}(A \cap B_r) \\
&\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A|B_1) \cdot \mathcal{P}(B_1) + \cdots + \mathcal{P}(A|B_r) \cdot \mathcal{P}(B_r) \\
&\implies \quad \mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i) \cdot \mathcal{P}(B_i)
\end{aligned}$$

Definicion 9 (Regla de Bayes) *Del mismo modo a partir de una particion de espacio muestral se deduce que:*

$$\mathcal{P}(B_j|A) = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i) \cdot \mathcal{P}(B_i)}$$

Definicion 10 (Esperanza Matematica) *Denotamos esperanza matematica (o media) a la tendencia central mas importante:*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

<u>**Propiedades:**</u> Sean X, Y variables aleatorias y sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes entonces:

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[c] = c$
- $E[cX] = cE[X]$
- Si $X \geq 0$ entonces $E[X] \geq 0$
- Si $X \leq Y$ entonces $E[X] \leq E[Y]$

Definicion 11 (Varianza) *Representa la distancia cuadratica promedio a la media, se denota* $V(X) = E[(X - \mu_x)^2] = E[X^2] - E[X]^2$. *Tambien denota a la raiz cuadrada de la desviacion tipica* (σ_X)*, por lo tanto* $V(X) = \sigma_X^2$.

Definicion 12 (Uniforme: $X \equiv Unif\{x_1, \cdots, x_n\}$**)** *Una variable X tiene distribucion uniforme discreta sobre el conjunto* $\{x_1, \cdots, x_n\}$ *si la probabilidad de que tome cualquiera de los valores es la misma.*

- *Funcion de masa:*

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{n} \ \text{si } i \in \{x_1, \cdots, x_n\} \\ 0 \ \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- *Esperanza:*

$$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- *Varianza:*

$$V[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

Definicion 13 (Bernoulli: $X \equiv Bern(p)$**)** *Una distribucion Bernoulli se caracteriza por tener solo dos posibles resultados, "exito" o "fracaso". Con probabilidades p y* $(1 - p)$ *respectivamente.*

- *Funcion de masa:*

$$P(X = x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x} \ \text{donde } X = \begin{cases} 1 \ \text{si obtenemos un "exito"} \\ 0 \ \text{si obtenemos un "fracaso"} \end{cases}$$

- *Esperanza:*

$$E[X] = p$$

- *Varianza:*

$$V[X] = p \cdot (1 - p)$$

Definicion 14 (Binomial: $\mathcal{B}(n,p)$) *Se genera por la repeticion de n pruebas de Bernoulli independientes. En esta distribucion X="numero de exitos obtenidos en las n pruebas de Bernoulli". En este caso x_i vale "1" si obtenemos "exito" en la i-esima prueba y vale "0" en el caso contrario.*

- *Funcion de masa:*

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{1-xs}$$

- *Esperanza:*

$$E[X]=n\cdot p$$

- *Varianza:*

$$V[X]=n\cdot(1-p)\cdot p$$

Definicion 15 (Poisson: $\mathbb{P}(\lambda)$) *Expresa la probabilidad de que ocurran un numero de X sucesos en un tiempo fijo, ocurren con una tasa media conocida (λ) y son independientes del tiempo transcurrido desde el ultimo suceso.*
Se aplican a eventos con probabilidad muy baja de ocurrir, pues esta distribucion se aplica sobre un intervalo continuo numerable.

- *Funcion de masa:*

$$P(X=x)=\frac{e^{\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}\ \textit{con}\ x=0,1,\cdots$$

- *Esperanza:*

$$E[X]=\lambda$$

- *Varianza:*

$$V[X]=\lambda$$

Propiedad (Infinitamente Divisible): Si $X_i\equiv\mathbb{P}(\lambda_i)$ son independientes, entonces la v.a. :

$$X=\sum_i X_i\equiv\mathbb{P}(\sum_i\lambda_i)$$

Definicion 16 (Hipergeometrica: $\mathcal{H}(r_1,r,n)$) *Consideramos una poblacion de r objetos los cuales r_1 son de un tipo y $r_2=r-r_1$ son de otro.*
Extraemos de esta poblacion un subconjunto de n objetos al azar, sin reposicion y sin considerar el orden de extraccion.

- *Funcion de masa:*

$$P(X=X)=\frac{\binom{r_1}{x}\cdot\binom{r-r_1}{n-x}}{\binom{r}{n}}$$

- *Esperanza:*

$$E[X]=\frac{n\cdot r_1}{r}$$

- *Varianza:*

$$V[X]=\frac{r_1\cdot n\cdot(r-r_1)\cdot(r-n)}{r^2\cdot(r-1)}$$

Definicion 17 (Geometrica: $\mathcal{G}(p)$) *Consiste en repetir una serie de experimentos Bernoulli hasta obtener el primer "exito".*
Si X toma el valor k, entonces tenemos $k-1$ fracasos y 1 exito.

- *Funcion de masa:*

$$P(X = x) = (1-p)^{k-1} \cdot p \text{ con } k = 1, 2, 3, \cdots$$

- *Esperanza:*

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

- *Varianza:*

$$V[X] = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Definicion 18 (Binomial Negativa: $\mathcal{BN}(n,p)$) *Supongamos que tenemos una sucesion un experimento de Bernoulli independientes. Consideramos el evento donde realizamos k experimentos hasta obtener r "exitos".*
Toda secuencia de experimentos de ese evento tiene la misma probabilidad de aparecer y es de la forma $EF \cdots E$ (siempre hay un exito en la ultima posicion).
Por lo tanto la cantidad se secuencias posibles es la forma de acomodar los $r-1$ exitos en los $k-1$ lugares restantes.

- *Funcion de masa:*

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r \text{ con } k = r, (r+1), (r+2), \cdots$$

- *Esperanza:*

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

- *Varianza:*

$$V[X] = r \cdot \frac{(1-p)}{p^2}$$