Hausaufgabenblatt 7

Aufgabe 1)

(i) $$\int_\Gamma \underbrace{\frac{z}{(z-i)^3(z+3)}}_{=f(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = \frac{2\pi i}{2!} \lim_{z\to i}\left(\frac{z}{z+3}\right)'' = \pi i \left(\frac{3}{(z+3)^2}\right)'\Big|_{z=i}$$

$$\frac{\pi i(-6)}{(i+3)^2}$$

(ii) $$\int_\Gamma \frac{z^3+5}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,-1) = \frac{2\pi i}{2!}(6z)_{z=-1} = \pi i(-6)$$

(iii) $\cdot \int_\Gamma e^z z^n dz = 0 \quad \forall n \geq 0$ (sehe $z \mapsto e^z z^n$ holomorph und der Cauchysche Integralsatz)

$\cdot \forall n < 0 \quad \int_\Gamma \frac{e^z}{z^{-n}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} \lim_{z\to 0} e^z = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}$

Aufgabe 2) Bei der Cauchysche Ungleichung

$$|f^{(m+1)}(z)| \leq \frac{(m+1)!}{r^{m+1}} \max_{\tilde{z}\in \partial D_r(z)} \underbrace{|f(\tilde{z})|}_{\leq K|\tilde{z}|^m \text{ für } r>R}$$

$$= \frac{K(m+1)!}{r^{m+1}} \cdot r^m \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

und $|f^{(k)}(z)| = 0 \quad \forall k \geq m+1$ (gleich wie oben).

$\Rightarrow f$ ist ein Polynom mit Grad höchstens m.

Aufgabe 3)

(i) $\int_\Gamma \underbrace{\frac{1}{z(z-1)}}_{=f} dz = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)\right]$

$= 2\pi i \left[-1 + 1\right] = 0$

(ii) $\int_\Gamma \frac{1}{z^3(z-1)} dz = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,0) + \underbrace{\mathrm{Res}(f,1)}_{=1}\right]$

$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \left(\left(\frac{1}{z-1}\right)''\right) = \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right)'\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2!}(-2)\frac{1}{(z-1)^3}\Big|_{z=0} = -1$

$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{1}{z^3(z-1)} dz = 2\pi i \left[-1+1\right] = 0$