Mechanische Schwingungen:

↳ harmon. Schwingungen, z.B. Federschwingung

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = \underbrace{-k \cdot x}_{\text{Federkraft (rücktreibend)}}$$

⇓

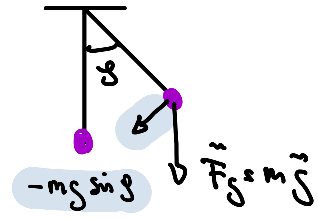
$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0$$

ω_0^2 mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

✱ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Mathematische & Physikalische Pendel:

Math. Pendel



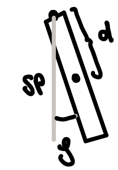
$$m \cdot \ddot{x} = -mg \underbrace{\sin\vartheta}$$

$\ddot{\vartheta} l$

$\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \dots$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Physik. Pendel (Ausg. Stab)



Drehmoment $|\vec{D}| = -|\vec{d} \times m\vec{g}|$

mit $\vec{d} = d \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D = -dmg \sin\vartheta \approx -dmg\vartheta$$

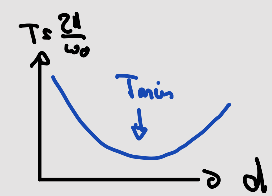
Und: $D = I_d \dot{\omega} = I_d \ddot{\vartheta}$ ← $I_d = I_{sp} + md^2$ (Steiner)

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgd}{I_d}\vartheta = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_d}} = \sqrt{\frac{gd}{\frac{1}{12}l^2 + d^2}}$$

Lösungen: $x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \vartheta)$
$x(t) = B(t) \cos(\omega_0 t + \vartheta)$

A, B Anfangsbedingungen

Lsg: $\vartheta(t) = A \sin(\omega_0 t + \vartheta_0)$



Vorlesung 23

Wann gilt ✱? lineares Kraftges.

ΠP-Limes: $I_d = ml^2$
↳ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ → Math. Pendel

Behandlung mit komplexen Zahlen:

Schreibe Schwingungsgl. mit $z = x + iy$
↳ $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

Ansatz: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

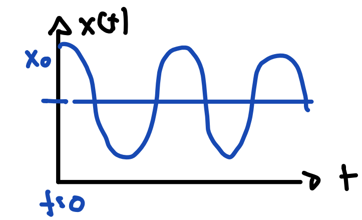
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{z} = i\omega \cdot z_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{z} = -\omega^2 \cdot z_0 e^{i\omega t} \end{array}\right]$ $\omega_0^2 = \omega$ — 2 Lösungen: $\omega_{1,2} = \pm\omega_0$

$\rightarrow$ $z(t) = z_0 e^{i\omega_0 t} + z_0^* e^{-i\omega_0 t}$ $\in \mathbb{R}$

Anfangsbed. für auslenken & loslassen:

$z(t=0) = x_0 = z_0 + z_0^*$ (1)

$\dot{z}(t=0) = 0 = i\omega_0 z_0 - i\omega_0 z_0^*$ (2)



(2): $z_0 = z_0^* \in \mathbb{R}$

(1): $x_0 = \frac{z_0}{2}$ $\Rightarrow$ $\underset{\hat{\mathbb{R}}}{z(t)} = x(t) = \frac{x_0}{2}\underbrace{\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)}_{2\cos(\omega_0 t)} = x_0 \cos(\omega_0 t)$