Angelo Brade, Dominik Wawrzinek

Nr. 1

1.)

Molare Masse von ^{12}C

Gegeben: $\frac{^{14}C}{^{12}C}(t=0)=1{,}5\cdot10^{-12}$, $m=50mg$, $t=2000a$, $N_A=6{,}022\cdot10^{23}\,mol^{-1}$, $M=12{,}0107\,\frac{g}{mol}$, $T_{1/2}=5730a$

Zunächst wird die Menge an C-Atomen berechnet, wobei näherungsweise nur mit der molaren Masse von ^{12}C gerechnet wird, da $N(0)_{^{12}C} >> N(0)_{^{14}C}$ gilt:

$N(0)=N_A\cdot\frac{m}{M}\approx2{,}507\cdot10^{21}$

Daraus wird der Anteil an ^{14}C Atomen und deren Aktivität berechnet:

$N(0)_{^{14}C}=N(0)\cdot\frac{^{14}C}{^{12}C}\approx3{,}76\cdot10^{9}$

$A(0)_{^{14}C}=\lambda\cdot N(0)_{^{14}C}\approx0{,}0144\,\frac{1}{s}$ mit $\lambda=\frac{ln(2)}{T_{1/2}}\approx3{,}833\cdot10^{-12}\,\frac{1}{s}$

Nun wird die Aktivität des 2000 Jahre alten Holzes berechnet:

$A(2000a)_{^{14}C}=A(0)_{^{14}C}\cdot e^{-\lambda\cdot t}\approx0{,}0113\,\frac{1}{s}$

$\Rightarrow \frac{A(2000a)_{^{14}C}}{A(0)_{^{14}C}}\approx0{,}785$

Die Aktivität beträgt nach 2000a nurnoch 78.5% der Aktivität zu Beginn

Nun wird noch das Verhältnis $\frac{^{14}C}{^{12}C}$ nach 2000a berechnet, die Menge an ^{12}C-Atomen wurde näherungsweise als konstant angenommen:

$N(2000a)_{^{14}C}=N(0)_{^{14}C}\cdot e^{-\lambda\cdot t}\approx2{,}952\cdot10^{9}$

$\frac{N(2000)_{^{14}C}}{N(0)}\approx1{,}1775\cdot10^{-12}$

2.)

Gegeben: $\frac{^{14}C}{^{12}C}=(1{,}373\pm0{,}005)\cdot10^{-12}$

Das angegebene Verhältnis entspricht dem eines Holzstücks beliebiger Masse aber desselben Alters, weshalb es in das Verhältnis aus 1) eigesetzt werden kann, um $N(t)_{^{14}C}$ zu berechnen:

$\frac{N(t)_{^{14}C}}{N(0)}=1{,}373\cdot10^{-12}$

$\Leftrightarrow N(t)_{^{14}C}=N(0)\cdot1{,}373\cdot10^{-12}\approx3{,}442\cdot10^{9}$

Mit $N(0)_{^{14}C}$ und λ aus 1) lässt sich hieraus das Alter der Probe berechen:

$N(t)_{^{14}C}=N(0)_{^{14}C}\cdot e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow t=-ln\left(\frac{N(t)_{^{14}C}}{N(0)_{^{14}C}}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\approx730a$

Für den Fehler folgt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$\Delta N(t)_{^{14}C}=N(0)\cdot0{,}005\cdot10^{-12}\approx1{,}2535\cdot10^{7}$

$\Delta t=\frac{1}{N(t)_{^{14}C}}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\Delta N(t)_{^{14}C}\approx30a$

$\Rightarrow t=(730\pm30)a$

Iaea.org → Nuklidkarte

Nr.2

1.)

Gegeben: $T_{1/2}^{Bi} = 5{,}013\,d$ $\quad T_{1/2}^{Po} = 128{,}376\,d$ $\quad \lambda_i = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}^i}$

Aus dem Ansatz $A = -\frac{dN}{dt}$ mit $A = \lambda \cdot N$ folgt zunächst für ${}^{210}_{83}Bi$:

$$\frac{dN_{Bi}(t)}{dt} = -\lambda_{Bi} N_{Bi}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N_{Bi}(t)}\, dN_{Bi}(t) = -\lambda_{Bi}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{N_{Bi}(0)}^{N_{Bi}(t)} \frac{1}{N_{Bi}(t)}\, dN_{Bi}(t) = -\lambda_{Bi} \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{Bi}(t)}{N_{Bi}(0)}\right) = -\lambda_{Bi}$$

$$\Leftrightarrow N_{Bi}(t) = N_{Bi}(0)\, e^{-\lambda_{Bi} t}$$

Für ${}^{210}_{84}Po$ folgt anschließend:

$$\frac{dN_{Po}(t)}{dt} = \lambda_{Bi} N_{Bi}(t) - \lambda_{Po} N_{Po}(t) \qquad \Big| \text{Ansatz: } N_{Po}(t) = c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dc_{Po}(t)}{dt} \cdot e^{-\lambda_{Po} t} - \cancel{\lambda_{Po} c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t}} = \lambda_{Bi} N_{Bi}(0) e^{-\lambda_{Bi} t} - \cancel{\lambda_{Po} c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t}} \qquad \Big| \cdot dt \qquad \Big| : e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow c_{Po}(t) = \lambda_{Bi} N_{Bi}(0) \int e^{-\lambda_{Bi} t} / e^{-\lambda_{Po} t}\, dt$$

$$\Leftrightarrow c_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} e^{(\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}) t} + K_{Pi}$$

Durch einsetzen in den Ansatz folgt:

$$N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Bi} t} + K_{Pi} e^{-\lambda_{Po} t}$$

Aus $N_{Po}(0) = 0$ folgt $K_{Pi} = \frac{-\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}}$ und somit:

$$N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(e^{-\lambda_{Bi} t} - e^{-\lambda_{Po} t}\right)$$

Und zuletzt für ${}^{206}_{82}Pb$ gilt:

$$N_{Pb}(t) = \lambda_{Po} N_{Po}(t)\, dt \quad = N_{Bi}(0) - N_{Bi}(t) - N_{Po}(t)$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \int \left(e^{-\lambda_{Bi} t} - e^{-\lambda_{Po} t}\right) dt$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Bi} t} + \frac{1}{\lambda_{Po}} e^{-\lambda_{Po} t}\right) + c_{Pb} \qquad \Big| N_{Pb}(0) = 0 = \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} + \frac{1}{\lambda_{Po}}\right) + c_{Pb} \Leftrightarrow c_{Pb} = \frac{N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} (\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}) = N_{Bi}(0)$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Bi} t} + \frac{1}{\lambda_{Po}} e^{-\lambda_{Po} t}\right) + N_{Bi}(0)$$

2.)

Müsste auch gehen, vlt verrechnet

Der α-Zerfall wird für $\frac{dA_{Po}(t)}{dt} = 0$ maximal, woraus folgt:

Wird für $\frac{dN}{dt} = 0$ maximal $\Rightarrow t = \frac{\ln(\lambda_{Bi}) - \ln(\lambda_{Po})}{\lambda_{Bi} - \lambda_{Po}} \approx 24{,}4\,d$

$$A_{Po}(t) = -\frac{dN_{Po}(t)}{dt} = -\frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\lambda_{Bi} e^{-\lambda_{Bi} t} + \lambda_{Po} e^{-\lambda_{Po} t}\right)$$

$$\frac{dA_{Po}(t)}{dt} = -\frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(\lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} - \lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t}\right) = 0 \qquad \Big| \frac{-\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} = c$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = c\lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} - c\lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow c\lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t} = c\lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} \qquad \Big| : c \quad \Big| : \lambda_{Po}^2 \quad \Big| \cdot e^{\lambda_{Bi} t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda_{Po} t} \cdot e^{\lambda_{Bi} t} = \frac{\lambda_{Bi}^2}{\lambda_{Po}^2} \qquad \Big| \ln()$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda_{Po} t + \lambda_{Bi} t}\right) = \ln\left(\left(\frac{\lambda_{Bi}}{\lambda_{Po}}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow t(\lambda_{Bi} - \lambda_{Po}) = \ln\left(\left(\frac{\lambda_{Bi}}{\lambda_{Po}}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \ln\left(\left(\frac{\lambda_{Bi}}{\lambda_{Po}}\right)^2\right) / (\lambda_{Bi} - \lambda_{Po})$$

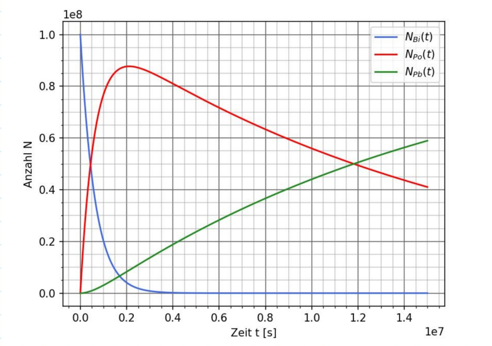
$$\approx 48{,}75\,d \quad \text{mit } \lambda_{Bi} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\,\tfrac{1}{s} \qquad \lambda_{Po} = 1{,}7 \cdot 10^{-10}\,\tfrac{1}{s}$$

3.)

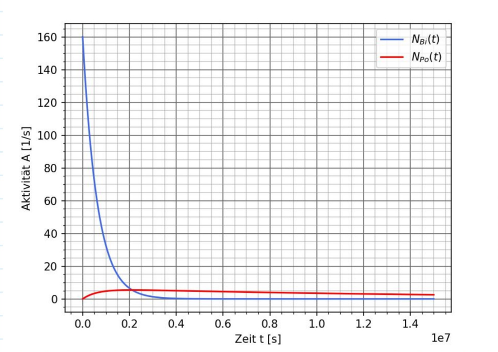
$A_{Bi}(t) = \lambda_{Bi} \cdot N_{Bi}(t)$

$A_{Po}(t) = \lambda_{Po} \cdot N_{Po}(t)$ Kein N_0 annehmen, sondern $\frac{N}{N_0}$ und $\frac{A}{N_0}$

Anzahl der Kerne:



Aktivität:



4.)

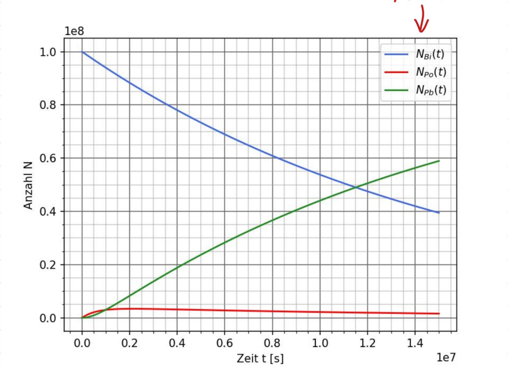
a) Die ~~Bedingung ändert nichts am Plot.~~ Vertauschte Rollen zu vorher $\Rightarrow T_{1/2}^{A} > T_{1/2}^{B}$

b) Die Menge an B-Kernen bleibt sehr klein, da sie sehr schnell weiter zu C-Kenen zerfallen.

c) Die A-Kerne zerfallen im Vergleich zu den B-Kernen fast sofort, weshalb zunächst alle A-Kerne zu B-Kernen zerfallen und von dort langsam zu C-Kernen.

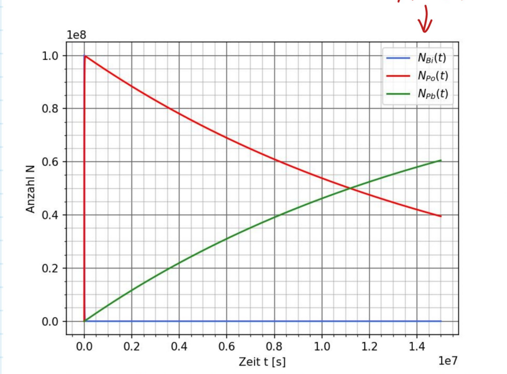
Plot zu b):

Mit A,B,C



Plot zu c)

Mit A,B,C



Nr.3

1.) $\vec{r} \to -\vec{r}$

2.) $\vec{p} \to -\vec{p}$

3.) $\vec{L} \to \vec{L}$

4.) $\vec{S} \to \vec{S}$

5.) $\vec{E} \to -\vec{E}$

6.) $\vec{B} \to \vec{B}$

7.) $h \to -h$

Nr.4

$|J_1 - J_2| < S < J_1 + J_2 \qquad |S-L| < J_{tot} < S+L$

1.) $J_{tot} = 1,2 \qquad P_{tot} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)^0 = -1$

2.) $J_{tot} = 0,1,2 \qquad P_{tot} = 1 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -1$

3.) $J_{tot} = 1,2,3 \qquad P_{tot} = 1 \cdot 1 \cdot (-1)^2 = 1$

Nr.5

1.)

Nukleon: $I = \frac{1}{2}$ Proton: $I_3 = \frac{1}{2}$ Neutron $I_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad I \geq I_3 \quad |j_1 - j_2| \leq I \leq j_1 + j_2$

$\Rightarrow |n\rangle + |n\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |1,-1\rangle$

$|p\rangle + |p\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |1,1\rangle$

$|p\rangle + |n\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |1,0\rangle, |0,0\rangle$

2.)

Die Gesamtwellenfunktion des Deuterons setzt sich als Produkt der Wellenfunktionen im Ortsraum, Spinraum und Isospinraum zusammen und muss antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Fermionen sein. Da der Raum- und Spinanteil symmetrisch sind, muss der Isospinanteil antisymmetrisch sein.

$\Psi_{AS} = Spin_S \otimes Ort_S \otimes Isospin_{AS}$

3.)

Das Deuteron ist mit einer Bindungsenergie von ca. 2,2 MeV eher schwach gebunden, die durchschnittliche Bindungsenergie eines Nukleons in einem Atomkern liegt bei ca. 7-8 MeV.

Nr. 6

1.)

Der Spiegelkern von ^{6}Be ist ^{6}He, da Spiegelkerne Paare von Isobaren sind, bei denen die Protonenzahl des einen Kerns der Neutronenzahl des anderen entspricht.

2.)

Die zusätzlichen Singlett-Zustände von ^{6}Li treten auf, da der Kern jeweils ein Proton und Neutron besitzt, welches allein in einer Schale sitzt und somit somit nach oben oder unten orientiert sein kann.

3.)

Aufgrund des Coulombterms $-a_c \cdot Z(Z-1) \cdot A^{-\frac{1}{3}}$ unterscheiden sich die Energieniveaus, da die Kerne unterschiedliche Z besitzen.

4.)

Bei den kleineren Kernen ist der Einfluss durch den Asymmetrieterm als durch den Coulombterm. Bei $^{6}_{3}Li$ ist der Asymmetrieterm 0, während er für die anderen beiden Kerne $a_s \cdot \frac{(N-Z)^2}{4A} = a_s \cdot \frac{4}{4A}$ beträgt. Falsch, liegt an den Massen, Neutron ist schwerer

5.)

Gegeben: $\Delta M = M(^{14}O) - M(^{14}C) = 4{,}99\,MeV/c^2 \qquad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Vm}$

Annahme: $\Delta M = E_c(^{14}O) - E_c(^{14}C) \qquad \Big| E_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z(Z-1)}{R}$

$= \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}(8 \cdot 7 - 6 \cdot 5) \qquad \Big| \cdot R \quad \Big| : \Delta M$

$R = \frac{1}{\Delta M}\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 26 \approx 4{,}5 \cdot 10^{-15}\,m$

$r_0 = R \cdot A^{-1/3} \approx 1{,}87 \cdot 10^{-15}\,m$

$\Delta E_c = -\Delta E_B = \Delta M + 2(m_n - m_p - m_e)$

$\Rightarrow R = \frac{3}{5} \cdot 26 \cdot \frac{\alpha \hbar c}{-\Delta E_B}$ Für Konstanten: Pdg.Live.lbl.gov

$= \frac{3}{5} \cdot 26 \cdot \frac{1}{137} \frac{200\,MeV/fm}{6{,}55}$

$= 3{,}42\,fm$

$r_0 = 1{,}42\,fm$