Mathematatik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 11

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $f : V \to W$ für zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume V, W gegeben. Es gelte für beliebige $x, y \in V$ stets die Gleichung:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Beweisen Sie, dass dann f schon linear ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Es sei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Für fest gewähltes $a \in \mathbb{R}$ sei $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Vorschrift

$$f_a(e_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad f_a(e_2) := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad f_a(e_3) := \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Berechnen Sie den Rang und den Defekt von f_a.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie – falls möglich – jeweils die inverse Matrix mittels Gauß-Verfahren:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ an, so dass für beliebige Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ das Matrizenprodukt $T \cdot A$ aus A durch zyklische Permutation der Zeilen entsteht: Das heißt die erste Zeile wird zur zweiten, die zweite zur dritten, ..., und schließlich die m-te zur ersten Zeile.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung der Matrix $C(r, s)$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass das Produkt zweier Spiegelungen in der reellen Ebene eine Drehung ist, also:

$$S_{\frac{\varphi}{2}} \cdot S_{\frac{\psi}{2}} = D_{\varphi - \psi}.$$

Aufgabe 6 (1+1+2 Punkte)**.** Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A, 0)$.

(b) Geben Sie Rang und Defekt der Matrix A an.

(c) Ist die lineare Abbildung A injektiv? Ist sie surjektiv?

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte)**.** Üben Sie das Aufstellen von darstellenden Matrizen bei Abbildungen, die Sie geometrisch kennen:

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
die jedem Vektor der Ebene den um 90 Grad (im mathematisch positiven Sinne) gedrehten und auf die doppelte Länge gestreckten Vektor zuordnet.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
die jedem Vektor der Ebene sein x-Achsen-Spiegelbild der y-Achsen-Projektion zuordnet.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
die jedem Vektor das auf die halbe Länge reduzierte Spiegelbild an der Ebene, aufgespannt durch die Winkelhalbierende der x-y-Ebene und der z-Achse, zuordnet.

Sie können hier insgesamt **26 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **23 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 22. Dezember, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.