HA 2 Angelo Brade

Freitag, 14. Oktober 2022 12:47

①

Man muss die Karte „E“ umdrehen,
um die Implikation „Vokal“ -> „Bild“
zu beweisen, und die Karte „Kreuz 7“
umdrehen, um ¬„Bild“ -> ¬„Vokal“
zu beweisen.

„Vokal“ -> „Bild“ <=> ¬„Bild“ -> ¬„Vokal“.

②

(1) $\forall x\, E(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x\, \neg E(x))$: Wahr

$E(x)$	$\forall x\, E(x)$	$\neg(\exists x\, \neg E(x))$	$\Leftrightarrow$
1	1	1	1
0	0	0	1

(2) $\exists x(E_1(x) \wedge E_2(x)) \Rightarrow \exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$. Wahr

$E_1(x)$	$E_2(x)$	$\exists x(E_1(x) \wedge E_2(x))$	$\exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$	$\Rightarrow$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

(3) $\forall x(E_1(x) \vee E_2(x)) \Rightarrow \exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$: Falsch

$E_1(x)$	$E_2(x)$	$\forall x(E_1(x) \vee E_2(x))$	$\exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$	$\Rightarrow$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0 ↯
0	1	1	0	0 ↯
0	0	0	0	1

③

(1) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

Induktionsanfang:

$n \to 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2$$

$$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$$

$$1 = 1$$

Induktionsschritt:

Induktionsschritt:

$n \to (n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

$$n^2 + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2 \quad \square$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Induktionsanfang:

$n \to 1$

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^{1+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$$

$$3 = 3$$

Induktionsschritt:

$n \to (n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1 \quad \square$$

(3) $k \in \mathbb{Z}$

$$n^3 - n = 3k$$

Induktionsanfang:

$n \to 1$

$$1^3 - 1 = 3k$$

$$0 = 3k$$

$$0 = 3k$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = k$$

Induktionsschritt:

$n \to n+1$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3k$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad - n - 1 = 3k$$

$$3(n^2+n) + n^3 - n = 3k$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n + \frac{n^3-n}{3} = k \quad \square$$

(4) $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$5^n - 1 = 4k$$

Induktionsanfang:

$n \to 1$

$$5^1 - 1 = 4k$$

$$4 = 4k$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = k$$

Induktionsschritt:

$n \to n+1$

$$5^{(n+1)} - 1 = 4k$$

$$(5 \cdot 5^n) - 1 = 4k$$

$$(5 \cdot (5^n - 1) + 5) - 1 = 4k$$

$$5 \cdot (5^n - 1) + 5 - 1 = 4k$$

$$5 \cdot (5^n - 1) + 4 = 4k$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot \left(\frac{(5^n - 1)}{4}\right) + 1 = k \quad \square$$

④

(1)

I $\quad 5x = 5x + 2 \quad | -5x$

$$0 \neq 2$$

II $\quad 3y = 7 \quad |:3$

$$y = \frac{7}{3}$$

$\mathbb{L} = \{\frac{7}{3}\}$

$y = \frac{\;}{3}$

$\mathbb{L} = \{\}$

(2) $3x + 7y = 4 \quad | -3x \quad | :7$

$$y = 4 - \frac{3}{7}x$$

$\mathbb{L} = \{x ; 4 - \frac{3}{7}x\}$

(3)

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad x + y = 3 \\ &\text{II} \quad x - y = 7 \end{aligned} \quad \Bigg| \; \text{I} + \text{II}$$

$\text{I}' \quad 2x = 10 \quad | :2$

$$x = 5$$

$\text{II} \quad 5 - y = 7 \quad | -5 \; | \cdot (-1)$

$$y = -2$$

$\mathbb{L} = \{5, -2\}$

(4)

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 4x - 6y = 0 \\ &\text{II} \quad 2x - 3y = 15 \end{aligned} \quad \Bigg| \; \text{I} - 2\text{II}$$

$\text{I}' \quad 0 \neq -30$

$\mathbb{L} = \{\}$

5

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

<u>Induktionsanfang:</u>

$n \to 1$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$$

$$2 = 2$$

<u>Induktionsschritt.</u>

$n \to n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

$$\sum^{n} \binom{n+1}{\;} + \binom{n+1}{\;} = 2^{n+1}$$

$$k=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}+\quad 1 \quad = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\quad + 1 = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1} + 1 = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}+2^n+ 1 = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{n} \quad +2^n+1=2^{n+1}$$

$$2^n - \binom{n}{n} \quad +2^n+1=2^{n+1}$$

$$2^n-1+2^n+1=2^{n+1}$$

$$2^n+2^n=2^{n+1}$$

$$2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$$2^{n+1}=2^{n+1} \quad \square$$

(6)

(a) $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \overset{(a-b)^2}{a^2+2ab+b^2} \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad \geq 0$$

Da der komplette Term quadriert wird, bleibt dieser immer größer oder gleich 0 $\square$

(b) $$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4}{ab} \leq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\frac{1}{ab} - \left(\frac{1}{b}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \quad \square$$

(c) $$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{-2ab}{-2}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq ab$$

Da nur positiv reelle Zahlen eingesetzt werden, ist ab immer größer oder gleich 0. $\square$

(d) $$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a}\frac{a}{a} \geq 2\frac{a}{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+a^2}{a} \geq 2\frac{a}{a}$$

$$\Longleftrightarrow 1+a^2 \geq 2a$$

$$\Longleftrightarrow 1+a^2-2a \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

Da der Term quadriert wird, erhällt man nur positive reelle Zahlen auf der linken Seite. $\square$