Vorlesung 7

2.2.4 Der Impuls

In $\vec{F} = m\,\vec{a}$ hatten wir $m = \mathrm{const}$ angenommen

– gilt nicht für $v \approx c$ oder falls $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \neq 0$ (Rakete)

Definiere $\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$ Impuls (engl. *momentum*)

$$[p] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{N\,s}$$

⇒ Verallgemeinerung der Newton-Gesetze :

1. NG: $\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \mathrm{const}$

2. NG: $\boxed{\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\vec{v}) = \dot{\vec{p}}}$

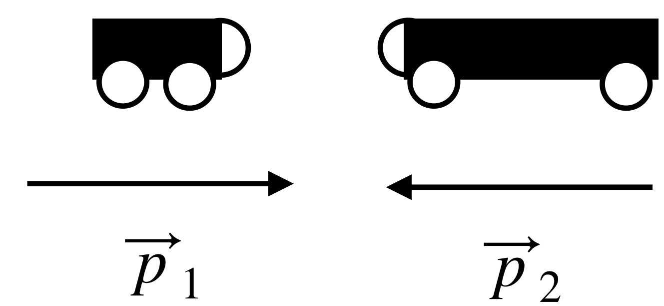
3\. NG: $\overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21}$

$$\dot{\overrightarrow{p}}_{12} = -\dot{\overrightarrow{p}}_{21} \qquad \frac{\overrightarrow{p}_{12}}{\Delta t}\Delta t = -\frac{\overrightarrow{p}_{21}}{\Delta t}\Delta t$$

$$\rightarrow \overrightarrow{p}_{12} = -\overrightarrow{p}_{21}$$

Impulserhaltung
(für das System 1 + 2)

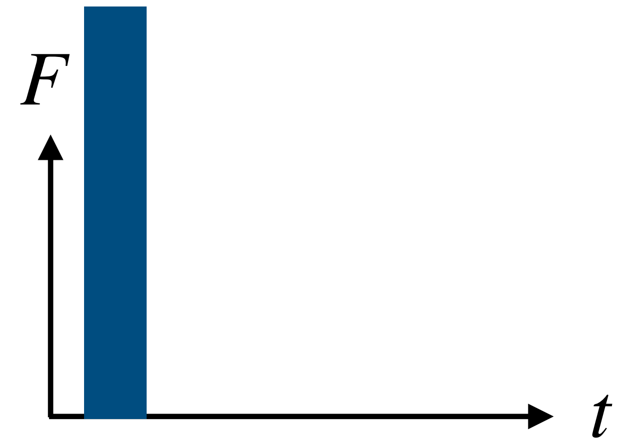
Versuch: Luftschiene mit $m_2 = 2 \times m_1$



$$\overrightarrow{F} = \dot{\overrightarrow{p}} \quad \Rightarrow \quad \text{Impulsänderung} \quad \overrightarrow{p}_2 - \overrightarrow{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t$$

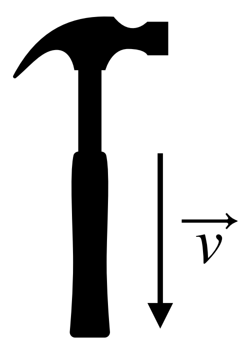
“Kraftstoß” (Zeitintegral der Kraft)

egal ob 

oder 

ergibt gleiches $\Delta\vec{p}$ (z.B. Knautschzone beim Auto $\Rightarrow$ Δt groß $\Rightarrow$ kleine Kraft)

Versuch: Hammer auf Tisch



$$\vec{p}_{\text{Eisen}} \gg \vec{p}_{\text{Stiel}}$$

$\Rightarrow$ beim Abbremsen: $\vec{F}_{\text{Eisen}} \gg \vec{F}_{\text{Stiel}}$ $\Rightarrow$ Eisen fest im Stiel

Versuch: Glasstab auf Haare

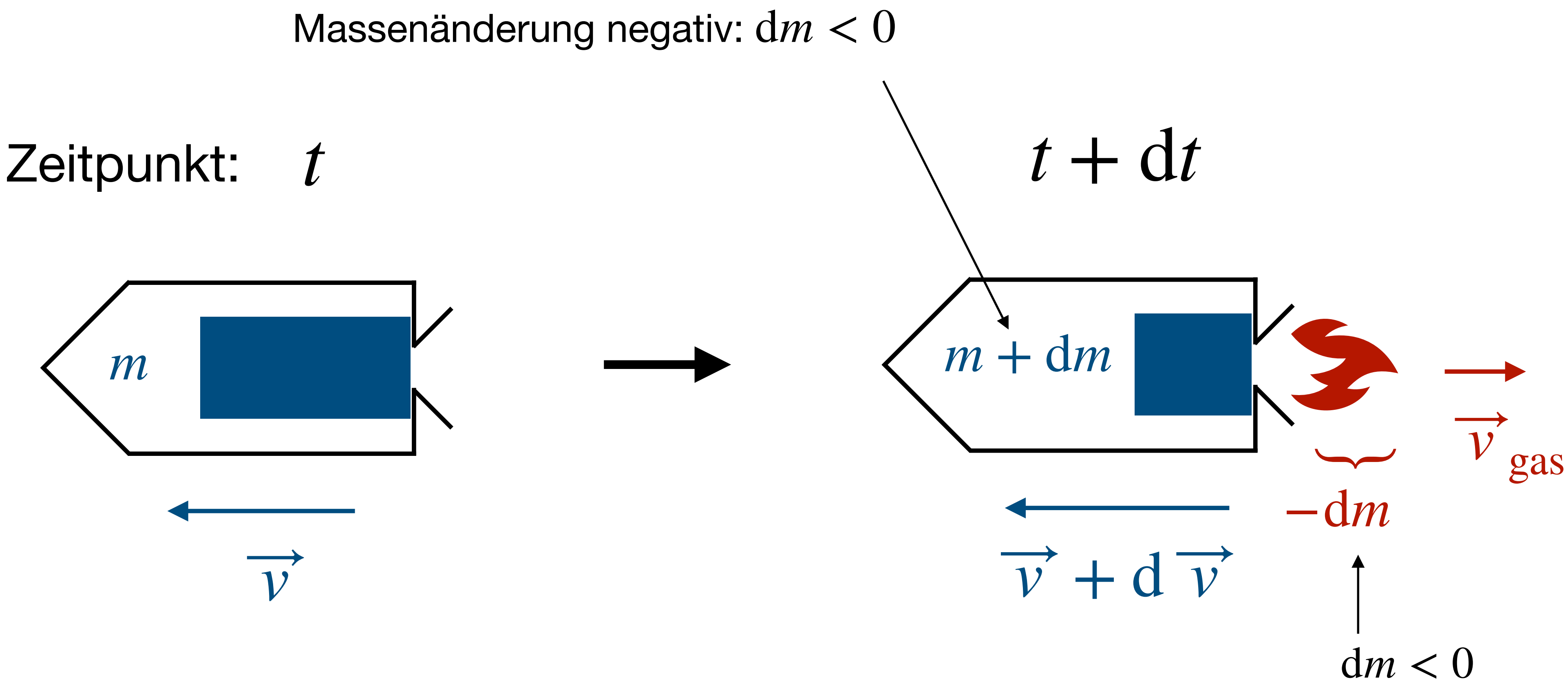
Haare elastisch $\Rightarrow$ $\dot{\vec{p}}$ kleiner

2.2.5 Systeme mit veränderlicher Masse

Beispiele:

Rakete, leckender Tankwagen	$\dot{m} < 0$	"Rückstoß" ($\dot{m} < 0$)
Flugzeug, das betankt wird	$\dot{m} > 0$	
(relativistisches beschl. Teilchen)	$\dot{m} > 0$	

Rakete:



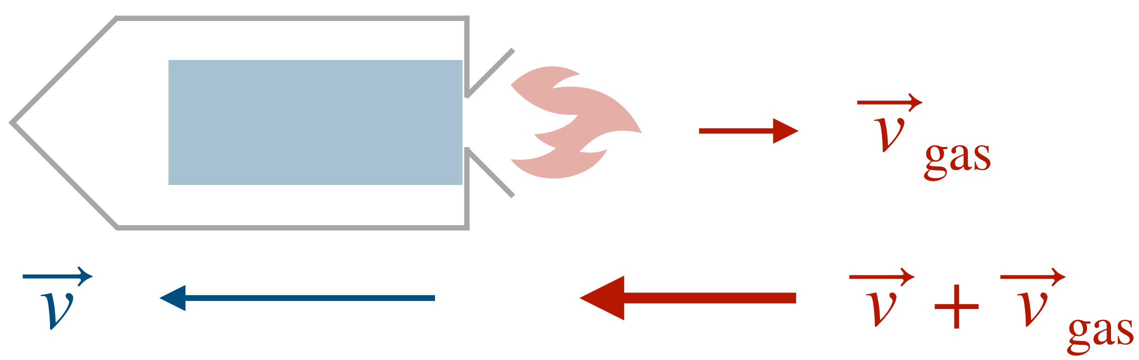
$\vec{v}$: Geschwindigkeit der Rakete **relativ zur Erde**

$\vec{v}_{gas}$: Ausstoßgeschw. des Gases **relativ zur Rakete** (Masse: $-\mathrm{d}m$)

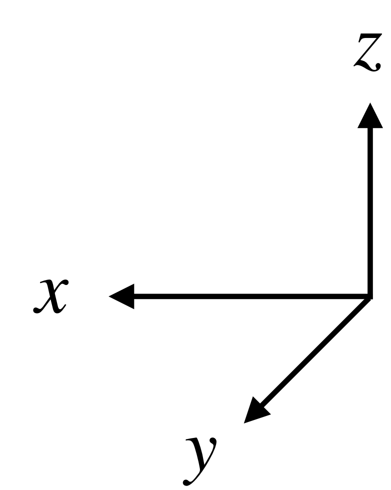
Massenausstoß: $\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0$

Schubkraft: $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{m}\,\vec{v}_{\mathrm{gas}}$ $\quad [\dot{m}v_{\mathrm{gas}}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{N}$ (!)

Ausströmgeschwindigkeit des Treibgases **relativ zur Erde**: $\vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{gas}} = (v - v_{\mathrm{gas}})\,\vec{e}_x$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{gas}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_{\mathrm{gas}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - v_{\mathrm{gas}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Impuls als eine Funktion der Zeit: (Ruhesystem Erde)

$$t: \quad \vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t) = mv\,\vec{e}_x$$

$$t + \mathrm{d}t: \quad \vec{p}(t+\mathrm{d}t) = \big(m \underbrace{+}_{\mathrm{d}m<0} \mathrm{d}m\big)\big(v(t) + \mathrm{d}v\big)\,\vec{e}_x \underbrace{-}_{\mathrm{d}m<0} \mathrm{d}m\,(v(t) - v_{\mathrm{gas}})\,\vec{e}_x$$

Rakete Gas

Ohne äußere Kraft: **Impulserhaltung** $\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = 0$

Explizit (wir lassen die Abhängigkeit von $\vec{e}_x$ weg da nun **alle Vektoren** in die **gleiche Richtung zeigen** um die Notation lesbarer zu halten)

$$p(t+\mathrm{d}t) - p(t) = \big(m + \mathrm{d}m\big)\big(v(t) + \mathrm{d}v\big) - \mathrm{d}m(v(t) - v_{\mathrm{gas}}) - mv(t)$$

$$= m\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}mv(t) + \underbrace{\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v}_{\to 0 \text{ (quadratisch)}} - \mathrm{d}m\,(v(t) - v_{\mathrm{gas}})$$

$$= m\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}m\,v_{\mathrm{gas}}$$

$$\Rightarrow 0 = m\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}m\, v_{\mathrm{gas}}$$

$$\boxed{\rightarrow \mathrm{d}v = -\, v_{\mathrm{gas}} \frac{\mathrm{d}m}{m}}$$

Lösung durch **Integration**:

Masse zum Zeitpunkt t

$$\int_{v(t=0)=v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v = v(t) - v_0 = -\, v_{\mathrm{gas}} \int_{m(t=0)=m_0}^{m(t)} \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\, v_{\mathrm{gas}} \left[\ln m_t - \ln m_0\right] = -\, v_{\mathrm{gas}} \ln \frac{m(t)}{m_0}$$

Anfangsmasse

$$\boxed{\rightarrow v(t) = v_0 + v_{\mathrm{gas}} \ln \frac{m_0}{m(t)}} = v_0 - v_{\mathrm{gas}} \ln \frac{m(t)}{m_0}$$

nach Brenndauer T_S :

Masse Treibstoff   Masse Nutzlast

$$v(T_S) = v_0 + v_{\text{gas}} \ln \frac{m_T + m_N}{m_N} = \boxed{v_0 + v_{\text{gas}} \ln \left(1 + \frac{m_T}{m_N} \right)}$$

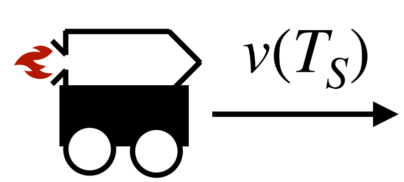
entscheidende Raketenparameter:

v_{gas} : Ausstoßgeschw. (welcher Treibstoff, Düsengeometrie)

m_T / m_N : Treibstoff zu Nutzlastverhältnis (geht leider nur logarithmisch in Endgeschw. ein)

Versuch: horizontale Rakete (ohne Schwerkraft auf Schlitten)

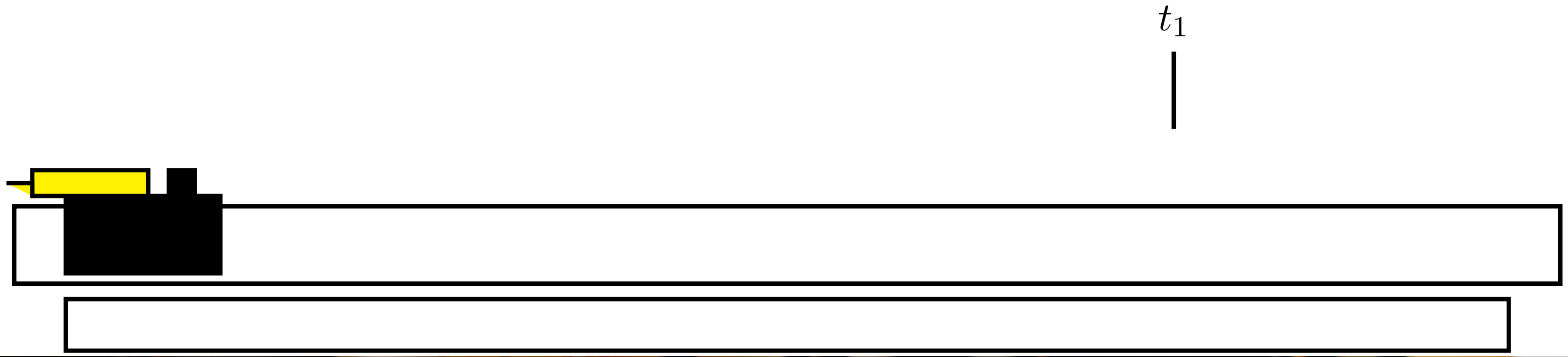
$$v_{\text{gas}} = \frac{v(T_S)}{\ln(1 + m_T/m_N)}$$

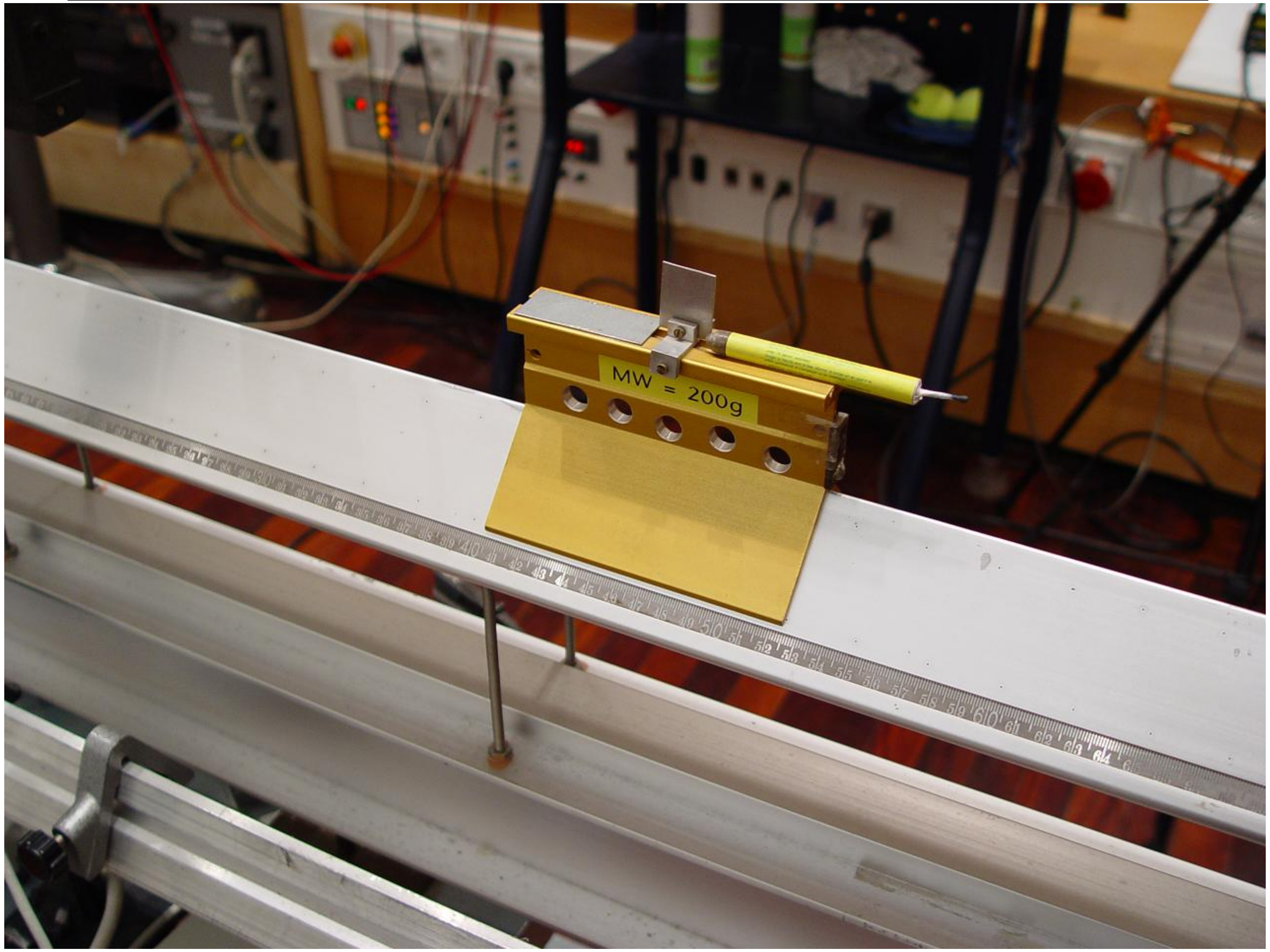


$m_T = 1.5\,\text{g}$ Treibstoff

$m_N = 200\,\text{g} + 1.5\,\text{g} = 201.5\,\text{g}$

Schlitten + Raketehülse





Ein Luftheuler wird auf einem Reiter der Luftschiene befestigt.

Gewicht des Reiters: $200\,\mathrm{g}$

Gewicht des Luftheulers: $3\,\mathrm{g}$; davon Treibstoff: $1{,}5\,\mathrm{g}$ $(= \Delta m)$

Der Impulserhaltungssatzes ergibt:

$$m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}_{\text{e}} \cdot \frac{\Delta m}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

wobei Δm = ausgestoßene Masse < 0; $\vec{v}_{\text{e}} =$ Geschwingdigkeit des ausströmenden Gases relativ zur Rakete. Durch Integration von 0 bis zur Brenndauer T erhält man die Raketengleichung (ohne äußere Kraft, z.B. Erdanziehung, und unter der Berücksichtigung, dass $\vec{v}(t)$ entgegengesetzt zu $\vec{v}_{\text{e}}$ ist):

$$\vec{v}(T) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{e}} \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{nutz}}}\right) \tag{2}$$

$m_0 =$ Startmasse;

$$\vec{v}_{\text{e}} = \frac{\vec{v}(T)}{\ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{nutz}}}\right)} \tag{3}$$

da $\vec{v}_0 = 0$.

$m_0 = 203\,\mathrm{g}$; $\quad m_{\text{nutz}} = 201{,}5\,\mathrm{g}$

v_T gemessen

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{m_T}{m_N}+1\right)^{-1} = 134.8$$

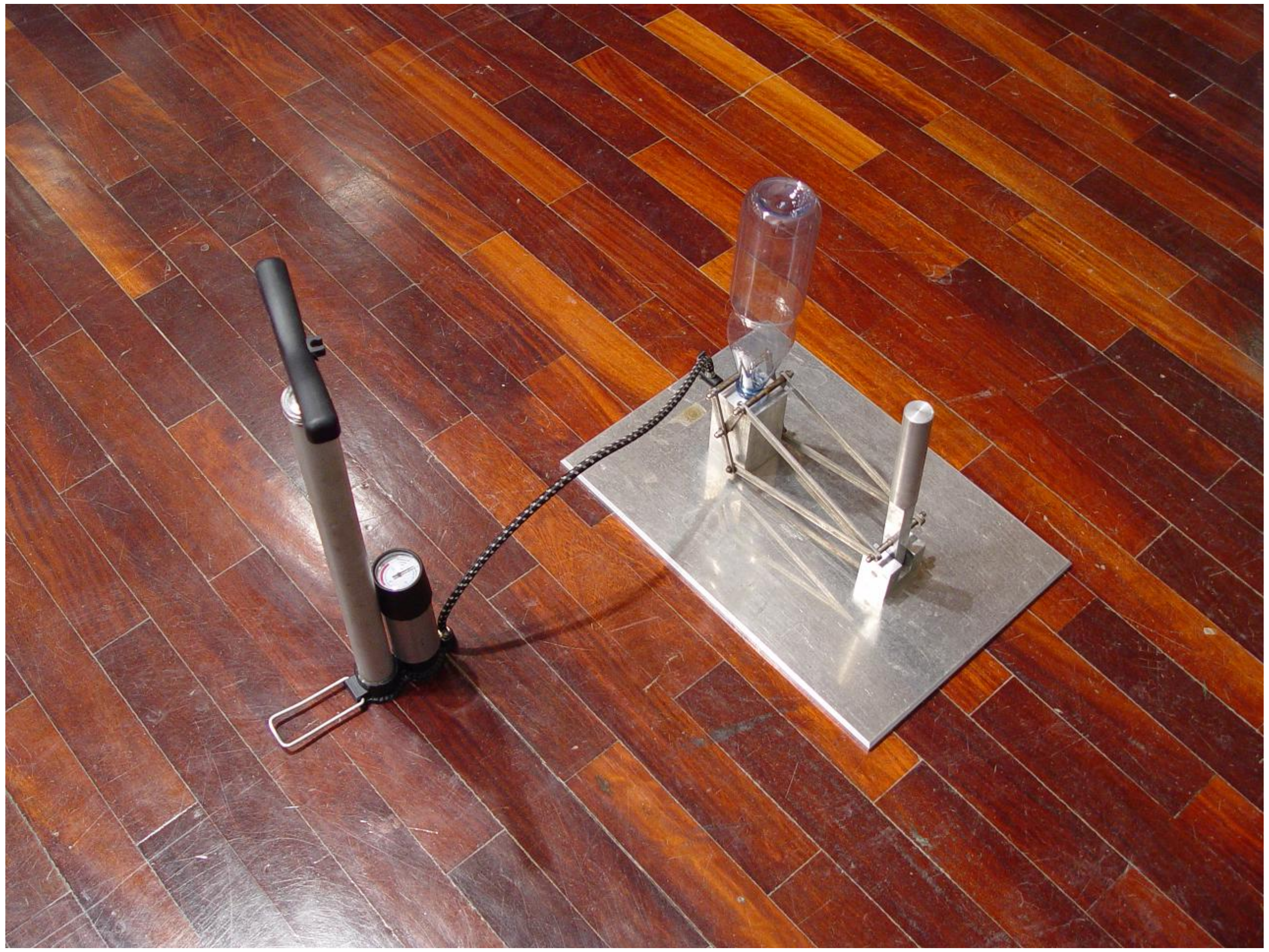
$$\Rightarrow v_{\text{gas}} = 134.8 \underbrace{v(T_S)}_{4\,\text{km/h}} = 539.3\,\text{km/h} \quad (!)$$

Versuch: Rakete im Schwerefeld

$$m\,\mathrm{d}\vec{v} - \mathrm{d}m\,\vec{v}_{\text{gas}} = -\vec{F}\,\mathrm{d}t \qquad \vec{F} = m\vec{g}$$

(Achtung: in unserer Definition ist $\vec{v}_{\text{gas}} = -v_{\text{gas}}\vec{e}_x$)

$$\boxed{v(T_S) = v_0 + \mathrm{v}_{\text{gas}} \ln\left(1+\frac{m_T}{m_N}\right) - gT_S}$$



Versuch 1	Versuch 2
Die Wasserrakete wird nur mit Luft gefüllt.	Die Wasserrakete wird mit Wasser und Luft gefüllt.

Versuch 1	Versuch 2
Die Rakete fliegt nur ca. $2\,\mathrm{m}$ weit.	Die Rakete fliegt jetzt bis zum Ende des Hörsaals. Mit dem Wasser wird eine größere Masse ausgestoßen, die einen größeren Rückstoß bewirkt.

Der erste überlieferte Raketenstart fand 1266 in China statt. In Europa war es 1555 in Hermannstadt.

Beispiel Saturn V : $\dot{m} = -13.8\,\mathrm{t/s}$ Schubkraft 35 MN (1. Stufe)

$v(T_S)/v_{\mathrm{gas}}$	1	2	3	4
m_T/m_N	1.7	6.4	19.1	53.6

$$\frac{v(T_S)}{v_{\mathrm{gas}}} = \ln\left(1 + \frac{m_T}{m_N}\right)$$

für Feststoffrakete: $v_{\mathrm{gas}} \leq 3\,\mathrm{km/s}$

Fluchtgeschwindigkeit: $11.3\,\mathrm{km/s}$ (später)

$$\Rightarrow \frac{v(T_s)}{v_{\mathrm{gas}}} \geq \frac{11.3}{3} = 3.7$$ nötig

$$\Rightarrow \frac{m_T}{m_N} \geq 40$$ **schlecht**

Lösung: Mehrstufige Raketen (sukzessive Verringerung der Nutzlast)

1. Stufe Saturn V :

$$m_T = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg} \qquad m_N = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$$

$$v_{\mathrm{gas}} = 4\,\mathrm{km/s} = 4000\,\mathrm{m/s}$$

$$T_S = 100\,\mathrm{s} \qquad gT_S = 981\,\mathrm{m/s}$$

$$v(T_S) = \mathrm{v}_{\mathrm{gas}} \ln\left(1 + \frac{m_T}{m_N}\right) - gT_S = 3.4\,\mathrm{km/s} \ll 11.3\,\mathrm{km/s}$$

2. Stufe: $m_T = 7 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$ $m_N = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$ $v(T_S) \approx 8400\,\mathrm{m/s}$

3. Stufe: $m_T = 1.55 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$ $m_N = 2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}$ $v(T_S) \approx 15000\,\mathrm{m/s}$

Steighöhe (mit $m(t) = qt$)

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x$$

$$z(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = v_0 t - \mathrm{v}_{\mathrm{gas}} \int \ln(1 - \frac{q}{m_0} t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= (v_0 + v_{\mathrm{gas}})t + \mathrm{v}_{\mathrm{gas}} \left(\frac{m_0}{q} - t \right) \ln(1 - \frac{q}{m_0} t) - \frac{1}{2} g t^2$$

1. Stufe Saturn V: $z \approx 130\,\mathrm{km}$

$g(z(T_S)) \approx g(z=0)$, sonst numerisch lösen mit $g(z(t))$

Versuche: Wasserrakete, Kerzenschiff, Raketenwagen