physik 411: Physik IV

Sommer Semester 24

Prof. S. Hofferberth

Dr. N. Stiesdal

Dr. E. Urunuela

UNIVERSITÄT BONN

Nonlinear Quantum Optics

Übungsblatt 5

Abgabe Donnerstag 16. Mai.

Abgabetermin für das Blatt ist **Donnerstag um 10:00 Uhr**. Das Blatt soll auf ecampus in Ihrer Tutorgruppe abgegeben werden.
Die für Lehramtsstudenten vorgeschlagenen Übungen sind mit einem ★ gekennzeichnet.

Zögern Sie nicht, Ihre Tutoren zu kontaktieren, wenn Sie Fragen haben!

★ Aufgabe 1: Normaler Zeeman-Effekt — 10 Punkte

Die Energien für die verschiedenen magnetischen Quantenzahlen m_l eines bestimmten Energieniveaus $E_{n,l}$ im Wasserstoffatom sind normalerweise entartet. Durch Anlegen eines äußeren Magnetfelds $\vec{B} = (0, 0, B_z)^T$ kann man diese Entartung aufheben. Die Energieaufspaltung sei dabei durch $\Delta E = m_l \mu_\mathrm{B} B_\mathrm{z}$ gegeben, wobei B_z die Magnetfeldstärke in z-Richtung ist.

a) Wie groß ist die maximale Energieaufspaltung innerhalb des 3d-Niveaus, wenn ein Magnetfeld der Stärke $B_\mathrm{z} = 2\,\mathrm{T}$ angelegt wird?

b) Skizzieren Sie das Termschema (auch Grotrian-Diagramm bekannt) für 3d $\rightarrow$ 2p (Balmer-α-Linie) für $B_\mathrm{z} = 0$ und $B_\mathrm{z} \neq 0$. Labeln Sie die Energieniveaus mit den zugehörigen Quantenzahlen.

c) Berechnen Sie die absolute und relative Wellenlängenänderung folgender Übergänge der Balmer-α-Serie für $B_\mathrm{z} = 2\,\mathrm{T}$:

- 3d, $m_l = 0 \rightarrow$ 2p, $m_l = 0$,
- 3d, $m_l = 0 \rightarrow$ 2p, $m_l = \pm 1$.

d) Wie viele Linien des Gitters eines Spektrometers müssen mindestens ausgeleuchtet werden, wenn die Spektrallinien aus c) in erster Ordnung aufgelöst werden sollen?
Hinweis: Das Auflösungsvermögen A eines Gitters ist durch $A = \lambda/|\Delta\lambda| = mN$ gegeben, wobei m die Ordnung und N die Anzahl der beleuchteten Spalte ist.

Aufgabe 2: Stern-Gerlach Experiment — 13 Punkte

In dieser Übung befassen wir uns mit dem berühmten Stern-Gerlach-Experiment, das erstmals 1922 durchgeführt wurde. Das ursprüngliche Experiment wurde mit Silberatomen durchgeführt, aber hier betrachten wir einen Aufbau mit einer Kaliumquelle.

Aus einem Ofen mit Temperatur $T = 600\,\mathrm{K}$ tritt ein Strahl von Kaliumatomen aus. Im Ofen herrscht thermisches Gleichgewicht, d.h. die Geschwindigkeiten der Atome sind Maxwell-Boltzmann verteilt. Der Strahl durchläuft eine Strecke $L_1 = 20\,\mathrm{cm}$, auf der ein inhomogenes Magnetfeld B

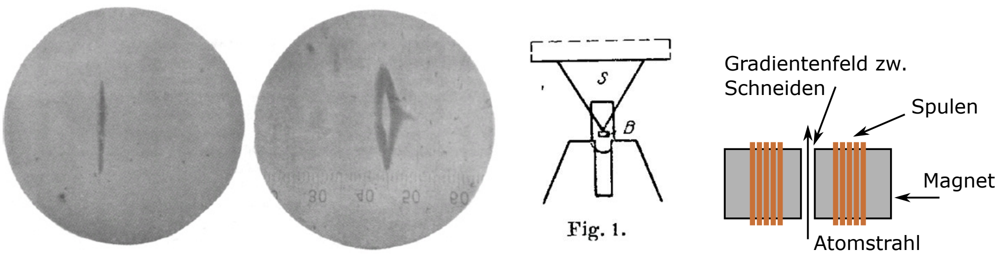

Abbildung 1: Messung der Richtungsquantelung des magnetischen Moments von Silberatomen durch von Stern und Gerlach, siehe Zeitschrift für Physik 9, 349 (1922). Links: $B = 0$, Mitte: $B \neq 0$ (Richtung des Feldes nach rechts). Rechts: Schnitt und Geometrie des verwendeten Elektromagneten.

mit einem Feldgradienten $\partial B/\partial z = 2\,\mathrm{T/m}$ senkrecht zur Strahlachse anliegt. Nach einer weiteren feldfreien Flugstrecke von $L_2 = 100\,\mathrm{cm}$ trifft der Strahl auf einen Detektor.

a) Fertigen Sie eine Skizze des Experimentaufbaus an.

b) Um welchen Betrag werden die Atome mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit in der Detektorebene abgelenkt? Betrachten Sie die Atome als klassische Atome mit magnetischem Moment $\mu = \mu_B$, das beliebig ausgerichtet sein kann.

c) Stellen Sie Überlegungen zur experimentellen Implementierung des Versuchs an. Nehmen Sie dazu grobe Abschätzungen vor, auf der Basis von sinnvollen physikalisch-technischen Größenordnungen der relevanten Parameter.

   i) Schätzen Sie die benötigte Stromstärke I in einem Elektromagneten (einer Spule mit Windungsdichte N/L) zur Erzeugung eines Magnetfeldes von $10\,\mathrm{mT}$ ab. Schätzen Sie ebenfalls die benötigte Leistung in einem Labornetzteil zum Betrieb eines solchen Elektromagneten ab.

   ii) Nehmen Sie die Öffnung des Ofens als punktförmig an. Die Kalium-Atome werden in einem sehr weiten Öffnungswinkel emittiert. Zur Kollimierung des Strahls montieren Sie eine Blende mit Durchmesser $d = 0.2\,\mathrm{mm}$ im Abstand L_0 direkt vor dem Magnetfeld an. Wie weit entfernt müssen Sie den Ofen vor der Blende plazieren, damit die Kollimierung gut genug fur das Experiment ist?

   iii) Betrachten Sie die Geschwindigkeitsverteilung der Quelle. Kann die nötige Auflösung überhaupt mit dieser Quelle erreicht werden?

   iv) Machen Sie Vorschläge zur Verbesserung des Versuchs.

d) Stern und Gerlach haben mit Silberatomen experimentiert, und die unten gezeigten Bilder erhalten (Abb. 1). Erfüllen diese die klassische Erwartung?

e) In der Abbildung (Abb. 1) mit Aufspaltung erkennt man sowohl eine "linsenförmige" Aufspaltung, aber auch eine klare Asymmetrie. Wie lassen sich diese Beobachtungen erklären?

Aufgabe 3: Spin im Dirac-Formalismus **7 Punkte**

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen mit seinen zwei Basiszuständen $|\uparrow\rangle$ ("up" bzw. $m_s = +1/2$) und $|\downarrow\rangle$ ("down" bzw. $m_s = -1/2$). Allgemein wird der Spin-Zustand des Teilchens also durch den Ket $|\Psi\rangle = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle$ beschrieben, wobei $c_{\uparrow(\downarrow)}$ komplexe Zahlen sind.

a) Welche Bedingung muss $c_\uparrow$ und $c_\downarrow$ erfüllen, damit $|\Psi\rangle$ ein physikalischer Zustand ist?

b) Im Folgenden sei $c_\uparrow = 4/5$ und $c_\downarrow = 3/5$. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zustandsmessung des Systems die Ergebnisse $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ liefert.

c) Alternativ kann das Quantensystem auch in den Basiszuständen

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \text{ und } |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

betrachtet werden. Drücken Sie $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ und $|\Psi\rangle$ in der neuen Basis aus.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Zustandsmessung die Ergebnisse $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$?

★ Aufgabe 4: Bloch-Kugel und Pauli-Matrizen **10 Punkte**

Die in der Vorlesung erwähnte Bloch-Kugel ermöglicht es, den Quantenzustand eines Zwei-Niveau-Systems, wie z.B. eines Spin-1/2-Teilchens mit seinen beiden Eigenzuständen $|\uparrow\rangle$ ("up" bzw. $m_s = +1/2$) und $|\downarrow\rangle$ ("down" bzw. $m_s = +1/2$), zu visualisieren. Dazu wird der Zustand $|\Psi\rangle$ des Systems in der Form

$$|\Psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle$$

parametrisiert und in Polarkoordinaten durch einen Vektor auf der Einheitskugel dargestellt (siehe Abb. 2). Dabei enspricht die Darstellung des Eigenzustands $|\uparrow\rangle$ mit $\theta = 0$ dem Einheitsvektor $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ entlang der z-Achse und markiert den Nordpol der Kugel, während die Darstellung von $|\downarrow\rangle$ mit $\theta = \pi$ durch $-\vec{e}_z$ gegeben ist und den Südpol makiert (siehe Abb. 2). Der Polarwinkel $\theta \in [0, \pi]$ bestimmt dabei die Wahrscheinlichkeitsamplituden der beiden Eigenzustände, der Azimuthwinkel $\phi \in [0, 2\pi)$ eine mögliche relative Phase zwischen den beiden Komponenten des Superpositionszustandes, die durch eine Rotation des Vektors um die z-Achse dargestellt wird.

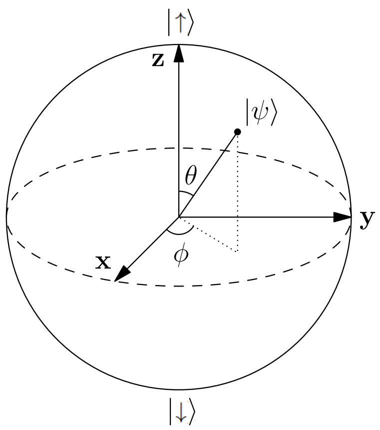

Abbildung 2: Darstellung des Quantenzustands eines Zwei-Niveau-Systems auf der Blochkugel.

a) Bestimmen Sie θ und ϕ für den Zustand $|\Psi\rangle = \frac{4}{5}|\uparrow\rangle + \frac{3}{5}|\downarrow\rangle$. Skizzieren Sie die Darstellung des Zustands auf der Bloch-Kugel.

In Vektor-Notation können die Eigenzustände des Systems durch $|\uparrow\rangle \hat{=} (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle \hat{=} (0,1)^T$ dargestellt werden. Analog zu den auf dem letzten Blatt eingeführten Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm$ (bzw. hier $\hat{S}_\pm$) für Drehimpulse lassen sich Operatoren

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definieren, die die beiden Eigenzustände wie folgt ineinander überführen: $\hat{\sigma}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\hat{\sigma}_-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$, $\hat{\sigma}_+|\uparrow\rangle = \hat{\sigma}_-|\downarrow\rangle = 0$.

b) Drücken Sie die Paulimatrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

als lineare Superposition der beiden Operatoren $\hat{\sigma}_\pm$ aus.

c) Betrachten Sie ein Teilchen, dass sich anfänglich im Zustand $|\uparrow\rangle$ befindet. Bestimmen Sie jeweils die Zustände

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{\sigma}_x + \mathbb{1}}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \text{ und } |\psi''\rangle = \frac{\hat{\sigma}_y + \mathbb{1}}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle$$

in denen sich das System nach Anwendung der Operatoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \mathbb{1})$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_y + \mathbb{1})$ auf $|\uparrow\rangle$ befindet. Bestimmen sie für die resultierenden Zustände jeweils ϕ und θ und stellen Sie die Zustände auf der Bloch-Kugel dar.

★ Aufgabe 5: Schreibe im Wiki — ≤ 8 Bonus-Punkte

Es ist möglich, Bonuspunkte zu sammeln, indem man einen Beitrag zum Vorlesungsskript auf der Wiki-Seite leistet. Um Bonuspunkte zu erhalten, müssen Sie einen Beitrag zum Abschnitt *Zusätzliches Material* zu einem der Themen der Vorlesung **Physik 4** im Wiki leisten.

Auf ecampus finden Sie eine Beschreibung, wie Sie Zugang zum Wiki erhalten. Bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen, lesen Sie die Regeln für die Einträge auf der Regelseite sorgfältig durch.

Wenn Sie das Übungsblatt abgeben, fügen Sie einen Link zu der/den Seite(n) und Ihren Benutzernamen hinzu, damit wir Ihren Beitrag anhand der Seitenhistorie überprüfen können. Sie können bis zu 8 Punkte *für dieses Blatt* erhalten, aber Ihre Arbeit am Wiki muss *auf dieser Abgabe vermerkt werden, um zu zählen.*

Anmerkung: Die Anzahl der Punkte, die Sie für Ihren Beitrag erhalten, hängt von der Qualität und Originalität des Materials ab.

Anmerkung: Wir akzeptieren keine Lösungen zu den Kursübungen im Wiki.

Anmerkung: Sie müssen für alles, was Sie im Wiki schreiben, Referenzen angeben, *egal, worüber Sie schreiben.* Bitte lesen Sie die Regeln zum Thema Plagiat sehr sorgfältig.