Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

UNIVERSITÄT BONN

Präsenzaufgabenblatt 4.

Präsenzaufgabe 1. Es seien

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\},$$
$$M_2 := \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y = \sin(1/x)\}.$$

Wir definieren $M = M_1 \cup M_2$. Zeigen Sie, dass die Menge M zusammenhängend jedoch nicht wegzusammenhängend ist, indem sie wie folgt vorgehen.

(i) Nehmen Sie an, es gibt einen Pfad $\gamma \in C([0,1], M)$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1/\pi$. Zeigen Sie, dass es dann eine Folge $t_k \searrow 0, k \to \infty$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} \gamma(t_k) = i$ und folgern Sie, dass M nicht wegzusammenhängend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass M zusammenhängend ist, indem Sie annehmen, dass $M = A \cup B$ für zwei disjunkte, in M offene Mengen A, B. Argumentieren Sie, dass M_1 und M_2 wegzusammenhängend sind und demzufolge jeweils ganz in A oder B enthalten sein müssen. Zeigen Sie außerdem, dass in jeder offenen Umgebung eines Punktes von M_1 ein Punkt aus M_2 liegt und folgern Sie, dass entweder $A = M$ oder $B = M$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $R > 0$ und $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie das folgende Wegintegral:
$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$, wobei $|a| < R < |b|$.

Präsenzaufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| \, dz$$

im Allgemeinen nicht richtig ist, selbst wenn die rechte Seite reel ist.

Präsenzaufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit dem Betrag einfach zusammenhängende metrischen Räume sind.