Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 1: Der unendliche Potentialtopf

<u>Deadline:</u> Mittwoch 24.04.2024 18.00 via eCampus

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem 1-dimensionalen Potentialtopf, welcher durch folgendes Potential beschrieben wird:

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x \leq 0\,, \\ 0\,, & 0 < x < L\,, \\ \infty\,, & x \geq L\,. \end{cases}$$

1. (4 Punkte) Zeigen Sie dass die normierten und quadratintegrablen Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators, welche bei $x = 0$ und L verschwinden, gegeben sind durch

$$\hat{H}\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)\,, \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,,$$

mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{2\pi n x}{L}\,, \\ E_n &= \frac{2\hbar^2\pi^2 n^2}{mL^2}\,. \end{aligned}$$

2. Wir nehmen nun an dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wellenfunktion des Teilchens gegeben ist durch $\psi(x, t = 0) = \phi_n(x)$, für einen festen Wert von n.
   - 2.1. (0.5 Punkte) Bestimmen Sie den Wert der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.
   - 2.2. (1.5 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Energie, des Impulses und der Position zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.
   - 2.3. (3.5 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Energie, des Impulses und der Position zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.

3. Wir nehmen nun an dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wellenfunktion des Teilchens gegeben ist durch

$$\psi(x, t = 0) = N(2\phi_2(x) - 3\phi_1(x))\,.$$

   - 3.1. (0.5 Punkte) Bestimmen Sie einen Wert für die Konstante N so dass $\|\psi(x, t = 0)\| = 1$.
   - 3.2. (0.5 Punkte) Bestimmen Sie den Wert der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.
   - 3.3. (2.5 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Energie, des Impulses und der Position zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.
   - 3.4. (7 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Energie, des Impulses und der Position zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.