physik 421

Theorie 3

Quantenmechanik

Claude Duhr

SoSe 2024

Eckdaten

- Vorlesungen: wöchentlich
  Dienstags & Freitags 10-12 ct, HS 1.

KEINE VORLESUNG FREITAG 12.4 !

- Tutorien: Details werden im Laufe
  der nächsten Woche bekannt gegeben.
  Erstes Tutorium: 3. Semesterwoche

Übungsblätter werden jeweils Freitag Abend über eCampus öffentlich gemacht.

Lösungen müssen bis Freitag der darauffolgenden Woche bei eCampus hochgeladen werden.

Es ist erlaubt Lösungen in Gruppen von bis zu 3 Personen einzureichen.

1. Übungsblatt : verfügbar : 19.4
Deadline : 26.4

Es wird 10 Übungsblätter geben à 20 Punkte

Klausurzulassung : 50% der Punkte : 100/200

Voraussichtliche Klausurtermine:

26.07 , 9-12
30.09 , 9-12

Wiederholung: Hamiltonischer Formalismus

$$(\vec{q}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Position $\hookleftarrow$ $\quad\quad$ $\hookrightarrow$ Impuls

Hamilton Funktion: $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \qquad\qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

Beispiel:

$$H(t,\vec{q},\vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q}) \leftarrow \text{Energie!}$$

$$= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{q})$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\ddot{\vec{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung

Eigenschaften:

1) Für eine Anfangsbedingung $(\vec{q}(t_0), \vec{p}(t_0)) = (\vec{q}_0, \vec{p}_0)$ ist die Lösung eindeutig.

Die klassische Physik ist DETERMINISTISCH !

2) Falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (d.h.: $H = H(\vec{q}, \vec{p})$), H ist eine Erhaltungsgrösse:

$$\frac{d}{dt} H(\vec{q}(t), \vec{p}(t)) = \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \dot{\vec{p}} = 0$$

Energie-
-erhaltung!

Poisson – Klammer

$A, B: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ "oft genug" differenzierbar.

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial A}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{q}}$$

Eigenschaften:

- $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha \{A, C\} + \beta \{B, C\}$
- Jacobi – Identität:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Bewegungsgleichung für A ← observable

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \dot{\vec{q}}\,\frac{\partial A}{\partial \vec{q}} + \dot{\vec{p}}\,\frac{\partial A}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

Konsequenz: Falls $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, dann

A Erhaltungsgrösse $\left(\frac{dA}{dt} = 0\right)$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\{A, H\} = 0.$$

Wiederholung: Wahrscheinlichkeitstheorie

Ω : Menge

F : Menge an Untermengen von Ω so dass

- $\Omega \in F$
- $A \in F \Rightarrow \overline{A} := \Omega / A \in F$
- $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$.

Wahrscheinlichkeitsmass auf (Ω, F):

Funktion $P : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ so dass

- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\vdots$

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

[+ einige Eigenschaften]

$$P(X = x_0) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_0\})$$

$$P(X \leq x_0) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_0\})$$

etc.

Falls Ω diskret: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$

$= \{\omega_i : i \in I\}$

endlich oder unendlich

$$X(\omega_i) = x_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

$\rightsquigarrow$ Falls $I = \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Reihe muss (absolut) konvergieren.

Erwartungswert:

$$E(X) = \langle X \rangle = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$$

Varianz:

$$Var(X) = (\Delta X)^2 = E((X - \langle x \rangle)^2) = \langle X^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

- Falls Ω kontinuierlich: z.B: $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$

$$X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte: $f: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$P(X \in A) = \int_A dx\, f(x)$$

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) = 1$$

f muss (Lebesgue-)integrierbar sein

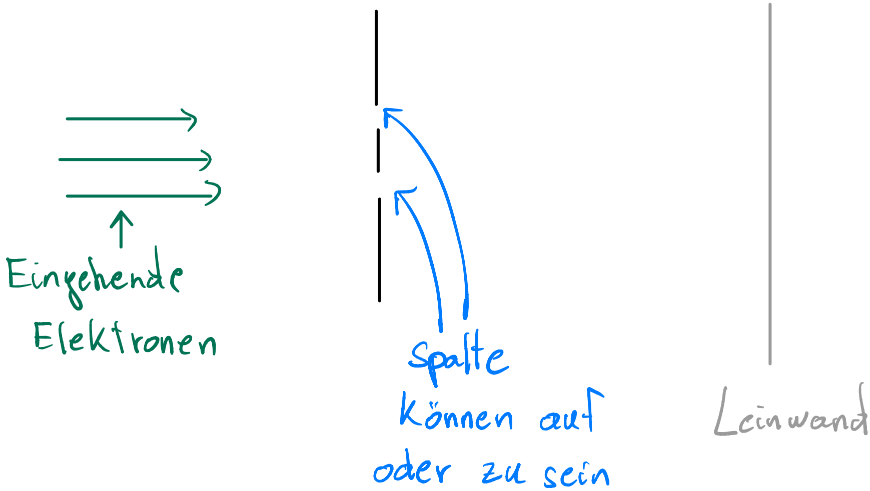
Erwartungswert:

$$E(X) = \langle X \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \; x \, f(x)$$

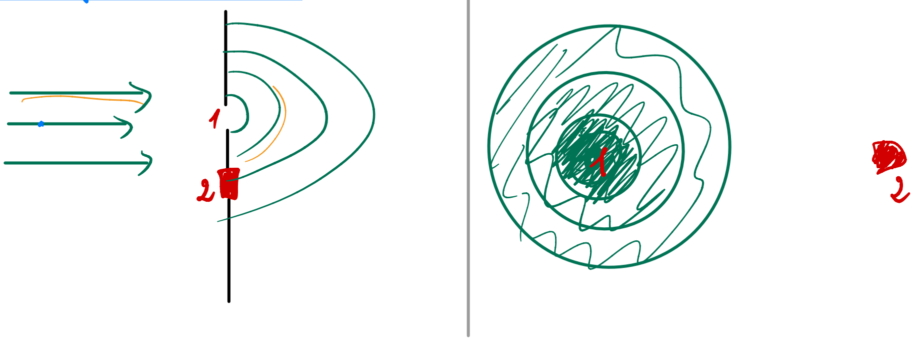
Varianz:

$$Var(X) = (\Delta X)^2 = E\left((X - \langle x \rangle)^2 \right) = \langle X^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Das Doppelspaltexperiment



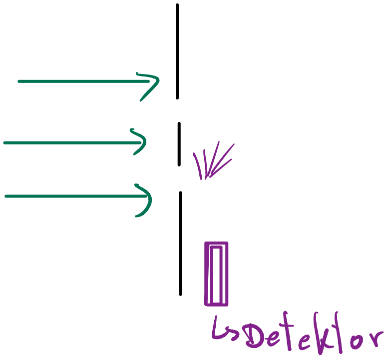
1 Spalt offen

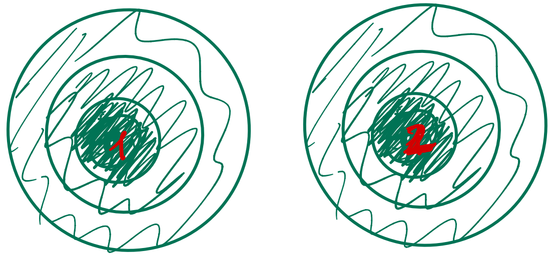


2 Spalte offen

↳ Interferenzmuster

2 Spalte offen + Detektor





2 Spalten, + einzelne Elektronen

→ Einzelne Teilchen erscheinen als Punkte, aber Verteilung bildet immer noch Interferenzmuster

Deutung des Doppelspaltexperiments im Rahmen der QM

* Dem Elektron ist eine komplexwertige Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ zugeordnet
* $|\psi(\vec{x},t)|^2 d^3x$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung das Elektron zum Zeitpunkt t in einem infinitesimalen Volumenelement d^3x am Punkt $\vec{x}$ zu finden.

  oder: Die Wahrscheinlichkeit das Elektron zur Zeit t in der Region $A \subseteq \mathbb{R}^3$ zu finden ist

$$P_t(A) = \int_A d^3x \, |\psi(\vec{x},t)|^2$$

* Eine Messung der Position verändert die Wellenfunktion ("Kollaps" der Wellenfunktion).

  Genauer: Wenn die Position zur Zeit t gemessen wird, und die Messung das Ergebnis $\vec{x} = \vec{x}_0$ liefert, dann

$$\psi(\vec{x},t) \longrightarrow \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$\downarrow$

Dirac δ-Funktion

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

* Die Zeitevolution der Wellenfunktion ist gegeben durch die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t)$$

wobei $\hat{H}$ der lineare Differentialoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x})$$

ist, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ das Plancksche Wirkungsquantum ist.