Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 3

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 2.11 (Analysis) aus der Vorlesung, nämlich dass die symmetrische Gruppe eine Gruppe darstellt.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**.**

(a) Geben Sie folgende Permutationen aus der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$ in Zykelschreibweise an:

$$(3,4,5,2,1) \qquad (2,1,4,5,3) \qquad (5,2,4,3,1)$$

(b) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ abelsch, wohl aber $\mathcal{S}_3$ dies nicht ist.

(c) Folgern Sie nun, dass $\mathcal{S}_n$ genau dann abelsch ist, wenn $n \leq 2$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass in einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ jeweils gilt:

(a) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ (b) $(-1) \cdot x = -x$.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte)**.** Entscheiden Sie, für welche $1 \leq n < 10$ die aus der Vorlesung bekannte Struktur $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist. Stellen Sie dann eine Vermutung für alle natürlichen Zahlen auf. Hierbei besteht der Grundbereich von $\mathbb{Z}_n$ jeweils aus den Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ und die beiden Operationen $+$ und $\cdot$ sind als Restklasse modulo n des Ergebnisses der jeweiligen Operation über den ganzen Zahlen zu verstehen. (Haben Sie das verstanden?)

Für die weiteren Aufgaben führen wir einen neuen Begriff ein, der in der Vorlesung bereits gefallen ist und nun geübt werden soll:

Definition. Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M wird als *Äquivalenzrelation* bezeichnet, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Reflexivität: $\forall x \in M \; (\, xRx \,)$

(b) Symmetrie: $\forall x, y \in M \; (\, xRy \longrightarrow yRx \,)$

(c) Transitivität: $\forall x, y, z \in M\ (\ (\ xRy\ \wedge\ yRz\ )\ \longrightarrow\ xRz\ )$

Für $x \in M$ nennt man $[x] := \{y \in M | xRy\}$ die *Äquivalenzklasse von* x.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie!

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\ \} \\ R_2 &= \{\ (0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\ \} \\ R_3 &= \{\ (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\ \} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Begründen oder widerlegen Sie, dass es eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge der natürlichen Zahlen geben kann, so dass die Menge

$$\{\ n \in \mathbb{N}\ |\ n \sim 42\ \}$$

genau die geraden Zahlen sind.

Aufgabe 7 (2+1 Punkte)**.** Es sei $M = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf den natürlichen Zahlen ohne die Null, wobei

$$(a,b)R(c,d) \quad :\longleftrightarrow \quad (\ (a,b),(c,d)\ ) \in R \quad :\longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Wie kann man die Äquivalenzklassen von R interpretieren?

Sie können hier insgesamt **23 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **20 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 27. Oktober, bis 12:00 Uhr bei eCampus in Ihrer Tutoriumsgruppe.