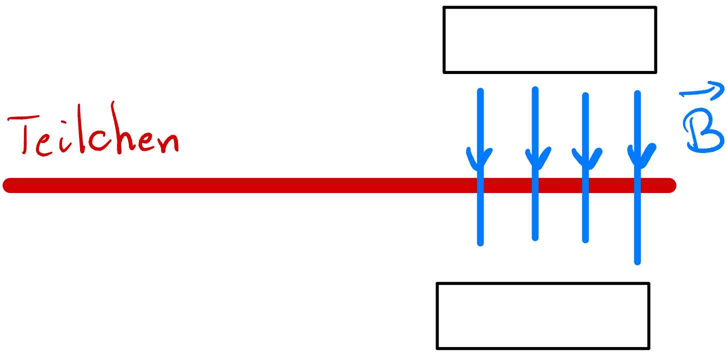
Spin

Das Stern-Gerlach Experiment



Ein geladenes Teilchen mit Ladung e und Masse M durchquert ein Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$.

Klassicher EM:

Beitrag zur Energie

$$H_{em} \propto \vec{m} \cdot \vec{B}$$

wobei $\vec{m}$ das magnetische Moment ist, welches mit dem Drehimpuls zusammenhängt:

$$\vec{m} = \frac{-e}{2M}\vec{L}$$

$$\rightsquigarrow \vec{m}\cdot\vec{B} = -\frac{e}{2M} B L_z$$

Nehmen wir an das eingehende Teilchen hat Energie E.

$\rightsquigarrow$ Gemessene Energie im Magnetfeld

$$E_m = E - \frac{e\hbar}{2M} m \qquad \mu_B := \frac{e\hbar}{2M}$$

Bohrsche Magneton

$\rightsquigarrow$ Energie hängt vom Wert von L_z ab!

$\rightsquigarrow$ Messung des L_z-Wertes!

$\vec{B} = \vec{0}$

E ___

$\vec{B} = (0,0,B) \neq \vec{0}$

___ $E + 2\mu_B$

___ $E + \mu_B$

___ E

___ $E - \mu_B$

___ $E - 2\mu_B$

e.g. $\ell = 2$

* m kann $2\ell+1$ verschiedene Werte annehmen

* $2\ell+1$ ist immer <u>ungerade</u> Falls <u>ℓ ganzzahlig.</u>

* Ergebnis des Stern-Gerlach Experiments für Elektronen:

$\vec{B} = \vec{0}$ $\qquad\qquad$ $\vec{B} = (0,0,B) \neq \vec{0}$

E ——— $\qquad\qquad$ ——— $E + \frac{1}{2}\mu_B$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ ——— $E - \frac{1}{2}\mu_B$

* Es gibt Operatoren mit denselben Kommutationsrelationen wie $\vec{L}$, aber mit Eigenwerten

$$\vec{L}^2 \longrightarrow \hbar^2 \ell(\ell+1) \qquad \ell = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots$$

$$L_z \longrightarrow \hbar m, \quad m = -\ell, \ldots, \ell$$

* Deutung des S-G-Experiments:

Das Elektron hat einen „intrisischen Drehimpuls" (Spin) welcher den Eigenwerten mit $l = 1/2$ entspricht.

* Wellenfunktion des Elektron mit Spin:

$$\Psi(\vec{x},t) := \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x},t) \\ \psi_-(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

wobei $|\psi_s(\vec{x},t)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist, dass das Elektron zur Zeit t den Spin $s\hbar\frac{1}{2}$ hat und sich am Punkt $\vec{x}$ befindet.

Spinoren

Wir betrachten den Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ mit Skalarprodukt:

$$\langle x | \xi \rangle = x^+ \xi = x_1^* \xi_1 + x_2^* \xi_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

In der Standardbasis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann jeder Operator auf $\mathbb{C}^2$ als 2x2 Matrix dargestellt werden:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$\hat{A} x = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

N.B.: $\hat{A}^+ = (\hat{A}^*)^T = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$

und somit $\hat{A} = \hat{A}^+$ hermitisch falls

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix} \quad , \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Pauli - Matrizen sind

$$\sigma_x = \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

1) $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$

2) $\sigma_i^+ = \sigma_i$

3) $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ist eine Basis für alle komplexen 2×2 Matrizen.

4) $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_4\}$ ist eine Basis für den reellen Vektorraum aller Rermitischen 2×2 Matrizen.

5) $\{\sigma_1, \sigma_2\} := \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$

$\{\sigma_2, \sigma_3\} = 0$

$\{\sigma_3, \sigma_1\} = 0$

6) $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$

7) $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\,\sigma_3$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\,\sigma_1$$

$$[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\,\sigma_2$$

Beweis [Übungsblatt]

Korollar: Sei $\hat{S}_k := \frac{1}{2}\hbar\,\sigma_k$. Dann gilt

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hat{S}_3$$
$$[\hat{S}_2, \hat{S}_3] = i\hat{S}_1$$
$$[\hat{S}_3, \hat{S}_1] = i\hat{S}_2$$

Folgerung: $\hat{\vec{S}} := (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ erfüllt die gleichen Kommutationsrelationen wie der Drehimpulsoperator $\hat{\vec{L}}$, aber $\hat{S}_3$ hat Eigenwerte $\pm\hbar\frac{1}{2}$.

Notation:

$$\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Hieraus folgt:

$$\left[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_1\right] = \left[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_2\right] = \left[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_3\right] = 0$$

und es gilt

$$\boxed{\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}}$$

$s(s+1)\hbar^2$, mit $s = 1/2$.

Beziehung zu Rotationen

wir hatten schon gesehen, dass eine Rotation mit Winkel α um die Axe $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\|=1$) sich schreiben lässt als:

$$\hat{R}(\alpha,\vec{n}) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}/\hbar}$$

Rotationen in 3D agieren auf $\mathbb{C}^2$ durch den Operator

$$\hat{D}_{1/2}(\alpha,\vec{n}) := e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{S}/\hbar}$$

$$= e^{-\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2}$$

<u>Beispiel</u>: $\vec{n}=(0,0,1)=\vec{e}_3$

$$\hat{D}_{1/2}(\alpha,\vec{e}_3) = e^{-i\alpha\sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \hat{D}_{1/2}(\alpha,\vec{e}_3)\chi = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\chi_1 \\ e^{+i\alpha/2}\chi_2 \end{pmatrix}$$

⚠ $$\hat{D}_{1/2}(2\pi, \vec{e}_3) = -\mathbb{1} \;!$$

$$\rightsquigarrow \hat{D}_{1/2}(2\pi, \vec{e}_3)\chi = -\chi \;!$$

Ein Element aus $\mathbb{C}^2$ die sich so unter Rotationen transformieren nennt sich SPINOR.

$\rightsquigarrow$ Unter einer Rotation mit Winkel 2π ändert ein Spinor sein Vorzeichen.

Quantenmechanik mit Spin

* Wellenfunktion des Elektron mit Spin.

$$\Psi(\vec{x},t) := \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x},t) \\ \psi_-(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

wobei $|\psi_s(\vec{x},t)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist, dass das Elektron zur Zeit t den Spin $s\hbar\frac{1}{2}$ hat und sich am Punkt $\vec{x}$ befindet.

* Ψ ist ein Spinor!

genauer: Ψ lebt in Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$$

Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$:

$$\Psi_1(\vec{x},t) := \begin{pmatrix} \psi_{1+}(\vec{x},t) \\ \psi_{1-}(\vec{x},t) \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(\vec{x},t) := \begin{pmatrix} \psi_{2+}(\vec{x},t) \\ \psi_{2-}(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle := \int d^3x \; \psi_{1+}(\vec{x},t)^* \psi_{2+}(\vec{x},t) + \int d^3x \; \psi_{1-}(\vec{x},t)^* \psi_{2-}(\vec{x},t)$$

Normfunktion:

$$\|\Psi\|^2 := \langle \Psi | \Psi \rangle$$

* Operatoren auf $\mathcal{H}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{pmatrix}$$

wobei $\hat{a}_{ij}$ ein Operator auf $\mathcal{L}^2$ ist.

* Schrödingergleichung für Elektron mit Spin:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t)$$

Operator auf $\mathcal{H}$!

⇝ Wie sieht $\hat{H}$ aus?

* Klassischer EM:

Magnetisches Moment ⟺ Drehimpuls

$$\vec{M} = - \frac{e}{2M} \vec{L}$$

* QM: Es gibt 2 Drehimpulsoperatoren

- $\hat{\vec{L}} = \vec{x} \wedge \vec{p}$: orbitaler Drehimpuls

  ⇝ Operator auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$

- $\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}$: Spin

  ⇝ Operator auf $\mathbb{C}^2$

⇝ 2 Magnetische Momente:

- Orbitales magnetisches Moment:

$$\hat{\vec{m}}_{orb} := -\frac{e}{2M}\hat{\vec{L}} = -\mu_B \frac{\hat{\vec{L}}}{\hbar}$$

- Intrisisches magnetische Moment:

$$\hat{\vec{m}}_{int} := -\frac{e}{M}\hat{\vec{S}} = -\mu_B\, g\, \frac{\hat{\vec{S}}}{\hbar}$$

gyromagnetisches Moment.

Hier in der QM:

$$g_{\text{Elektron}} = 2$$

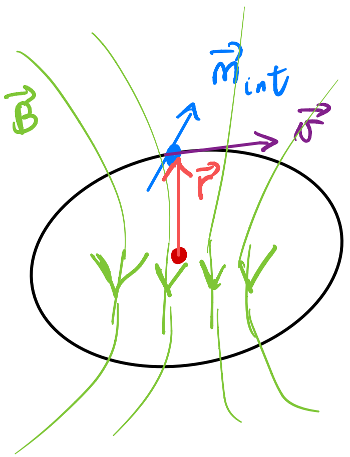
Später in Quantenfeldtheorie:

$$g_{\text{Elektron}} - 2 = 0{,}00233184110\ldots \quad (\pm 10^{-10}!)$$

$$\simeq \frac{\alpha}{\pi} + \ldots$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

Rein Klassisch: Nehmen wir an das Elektron hat Ladung $-e$ und intrinsisches mag. Moment $\vec{m}_{int}$, und bewegt sich auf einer Umlaufbahn um den Atomkern



- Das Elektron ist eine bewegte Ladung
  ⇝ Erzeugt ein Magnetfeld

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \wedge \vec{E}$$

E-Feld was durch das Elektron erzeugt wird

$$\vec{E} = -\frac{1}{e}\vec{\nabla}V(r) \quad , V(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$= -\frac{1}{e}\frac{\vec{r}}{r}\frac{d}{dr}V(r)$$