Zusammenfassung: β-Zerfall

- **β-Zerfall (Fermi's Goldene Regel)**
  - $\leftrightarrow$ **Form des β-Spektrums im wesentlichen durch den Phasenraum bestimmt, dn/dE**
    - Elektronen/Positronen des β-Zerfalls spüren Coulomb-Feld des Kerns (und der e^--Schale) $\rightarrow$ Modifikation des Spektrums
    - Auftretende Bahndrehimpulse/Spins $\rightarrow$ Modifikation des Spektrums, dn/dE
  - $\Rightarrow$ **Aus der Form des β-Spektrums kann man nicht viel über die schwache Wechselwirkung selbst lernen**
  - $\Rightarrow$ **aber: ν-Masse aus der genauen Vermessung des hochenergetischen Teils des Spektrums** $\leftrightarrow$ Katrin-Experiment

- **Halbwertzeiten im β-Zerfall**
  - **Exp.:** $(f \cdot t_{1/2}) = 10^3 - 10^{23}$ (z.B.: $\log(f \cdot t)$ = 2,95 für ^{6}He, ($T_{1/2} \approx$1s), $\log(f \cdot t)$ = 22,7 für ^{115}In, ($T_{1/2} \approx 6 \cdot 10^{14}$ Jahren)

$$\Leftrightarrow \quad |\langle \Psi_f | H | \Psi_i \rangle|^2 = \frac{2\pi^3}{f\tau} \frac{\hbar^7}{m_e^5 c^4} \qquad \mathrm{f(E_{max})\ berechnet,}\ \tau\ \mathrm{gemessen}$$

$\Leftrightarrow$ **Universalität der schwachen Wechselwirkung**

$\Leftrightarrow$ **Unterschiede in der Kernwellenfunktion**

$$f(E_{max}) \cdot t_{1/2} = \frac{ln2}{C \cdot \{g_F^2 M_F^2 + g_{GT}^2 M_{GT}^2\}}$$

$\Leftrightarrow$ **Fermi- (kein Spinflip) und Gamow-Teller-Übergänge (Spinflip)**
= (über)erlaubte Übergange ($\ell = 0$)

Zusammenfassung: Übergange - weitere Beispiele

Übergänge	Spin ΔJ	Parität	log ft	Beispiel Isotop	$t_{1/2}$
übererlaubt$^{(*)}$	$0, \pm1$	+	$\sim$ 3.5	^{1}n	11.7m
erlaubt	$0, \pm1$	+	$\sim$5.7	^{35}S	87d
1 mal verboten	$0, \pm1, \pm2$	-	$\sim$7.5	^{198}Au	2.7d
2 mal verboten	$\pm2, \pm3$	+	$\sim$12.1	^{137}Cs	30a
3 mal verboten	$\pm3, \pm4$	-	$\sim$18.2	^{87}Rb	$6 \cdot 10^{10}$a
4 mal verboten	$\pm4, \pm5$	+	$\sim$22.7	^{115}In	$6 \cdot 10^{14}$a

$^{(*)}$ Spiegelkerne bzw. Übergänge in Isospinmultipletts bei gleichem J^P,
sowie weitere A-gerade Kerne mit kleinem log(ft) (speziell großer Überlapp der Wellenfunktion (leichte Kerne))

$$^{35}\mathrm{S}: \quad E_{max} = 0,167\ \mathrm{MeV}$$
$$^{198}\mathrm{Au}: \quad E_{max} = 1,374\ \mathrm{MeV}$$

Verbotene Zerfälle ($\ell > 0$):

Leptonwellenfunktion bei r=0 ist null
(zuvor Konstanz der Wellenfunktion über den Kern angenommen - erlaubte Zerfälle)

$\Rightarrow$ e und ν werden nicht mehr von Zentrum des Kerns emmittiert:
Andere Matrixelemente relevant.

$\leftrightarrow$ H_{fi} nicht mehr energieunabhängig

α-Zerfall

Beobachtung: alle schweren Kerne Z$\geq$83 sind instabil gegen α-Zerfall

$^{239}_{94}\mathrm{Pu}$	5.157 MeV (73%),	5.144 MeV (15%),	... ,	24 110 a
$^{241}_{95}\mathrm{Am}$	5.486 MeV (85%),	5.443 MeV (13%),	... ,	432,2 a
$^{244}_{96}\mathrm{Cm}$	5.806 MeV (76%),	5.763 MeV (24%),	(...),	18.1 a

Beobachtung:
Je höher die Energie, desto kürzer schein die Lebensdauer zu sein

.... warum?

Beobachtung: Geiger-Nuttal Geraden:

$$log\lambda = A + B \cdot logR_\alpha$$

(λ: Zerfallkonstante = $1/\tau$, R_α: Reichweite)

$$logE_\alpha = a + b \cdot log\lambda$$

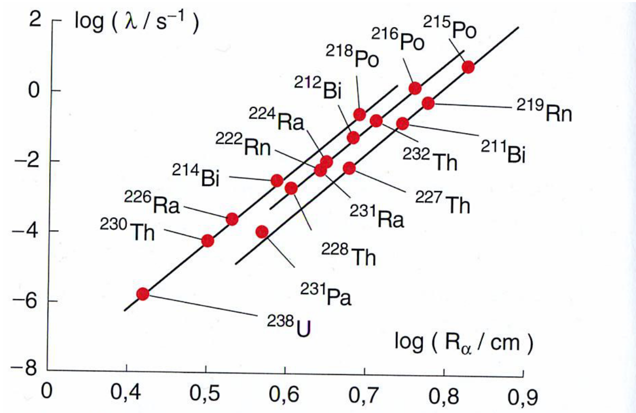
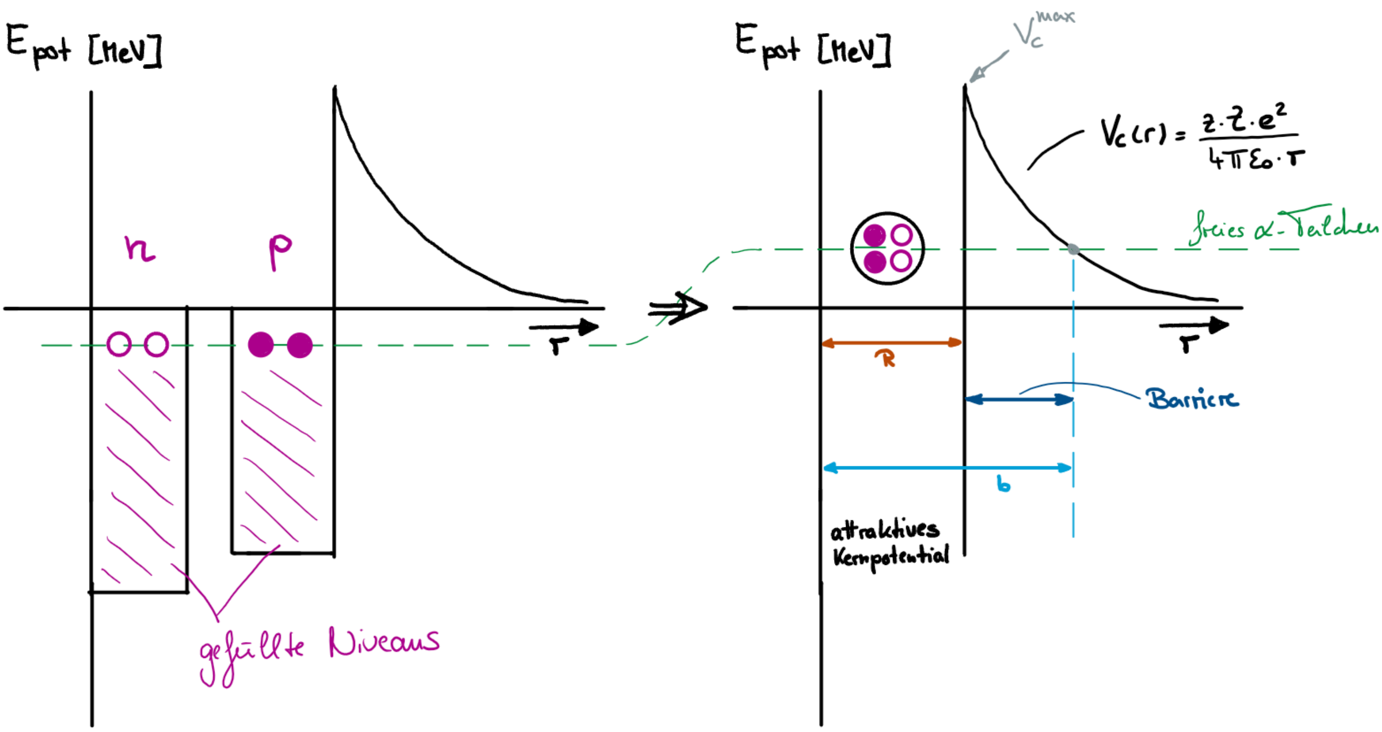


Abb. 3.15. Geiger–Nuttal-Geraden mit experimentell ermittelten Reichweiten (Punkte) für α-Strahler dreier Zerfallsketten. Aus G. Musiol, J. Ranft, R. Reif, D. Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988)

α-Zerfall



Gamov's Idee:

α bildet sich zufällig als (2p2n)-Cluster und existiert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit im Kern.

$M_\alpha < 2m_p + 2m_n \quad \Rightarrow$ **zusätzliche kinetische Energie:** $E_\alpha^{kin} > 0$

α-Zerfall

- $E_\alpha^{kin} > V_c(R)$: α-Teilchen kann Kern verlassen
  $\rightarrow$ geschieht instantan
  ($< 10^{-21}s$ -Zeit den Kern zu durchqueren)

- $E_\alpha^{kin} < V_c(R)$: klassisch: α-Teilchen in Kern eingeschlossen
  quantenmechanisch: Durchtunneln der Potentialbarriere möglich
  $\leftrightarrow$ α-Teilchen bewegt sich schnell
  häufige Stöße mit der Coulomb-Barriere

Quantitativ:
Höhe der Coulomb-Barriere

1/137·197 MeV·fm

$$V_c^{max} = V_c(R) = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R} = \frac{z \cdot Z \cdot \alpha \cdot \hbar c}{R}$$

Bsp.: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + \alpha$

$$V_c^{max} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 197 MeV \cdot fm}{137 \cdot 1,2 fm \cdot (234^{1/3} + 4^{1/3})} \approx 30\,MeV \qquad \gg E_\alpha \text{ beobachtet}$$

α-Zerfall

.... tunneln:

α-Teilchen stößt $\sim \frac{v_0}{2R}$ mal mit der Barriere

v_0(4 MeV α) $\approx 0.05c$

$\Rightarrow \;\sim 10^{21} 1/s$

Transmissionskoeffizient (Wahrscheinlichkeit für Transmission)

$$T = e^{-2\kappa \cdot \Delta r}$$

Δr: Dicke der Barriere

tunneln:

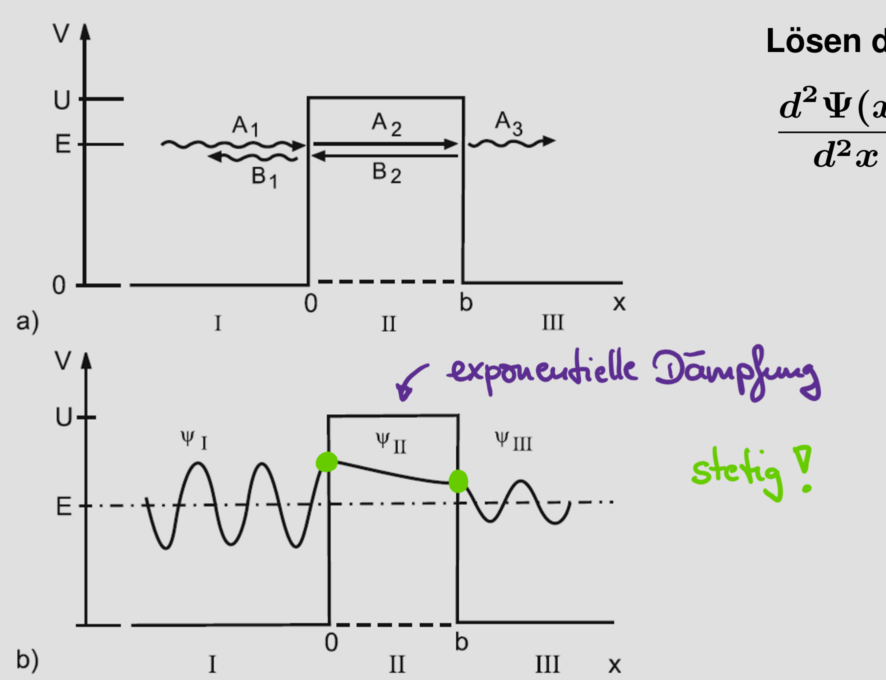


Bild K7.2. (**a**) Potentialbarriere und Kennzeichnung der Amplituden, (**b**) Wellenfunktionen in Bereichen I, III, Dämpfung im Bereich II

Lösen der Schrödingergleichung:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{d^2x} + \frac{2m(E-V)}{\hbar}\Psi(x) = 0$$

z.B.:

$$\psi_{\mathrm{I}} = A_1 \mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}x} + B_1 \mathrm{e}^{-ik_{\mathrm{I}}x}$$

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}}$$

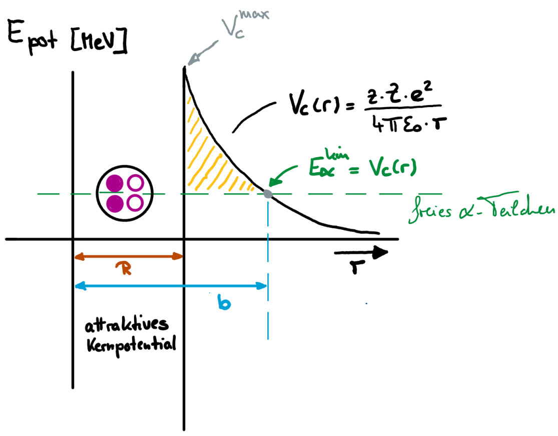
$$T = \frac{|A_3|^2 \cdot v_3}{|A_1|^2 \cdot v_1} = \frac{|A_3|^2 \cdot k_3}{|A_1|^2 \cdot k_1} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \qquad \textbf{Transmissionskoeffizient}$$

Transmissionskoeffizient (Wahrscheinlichkeit für Transmission)

$$T = e^{-2\kappa \cdot \Delta r} \quad , \quad \kappa = \sqrt{2m_\alpha |E^{kin} - U|} \cdot \frac{1}{\hbar}$$

$$T = e^{-G} \quad , \quad G = \frac{2}{\hbar}\int_R^b \sqrt{2m_\alpha \left[V_c(r) - E_\alpha^{kin}\right]}dr$$

$$G = 2 \cdot \sqrt{\frac{m_\alpha \cdot Ze^2}{\pi\varepsilon_0\hbar^2}} \int_R^b \sqrt{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right]}dr$$



... ausrechnen Integral

mit $\mathbf{V_c(R) \gg E_\alpha^{kin}}$ **und** $\mathbf{b \gg R}$

$$G = \frac{4\pi\alpha\, Z\, c}{\sqrt{2 \cdot E_{kin}^{\alpha}/m_\alpha}} - 8 \cdot \sqrt{\left(\frac{m_\alpha c^2 R Z \alpha}{\hbar c}\right)}$$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit:

$$\lambda = \frac{v_0}{2R} \cdot e^{-G}$$

($\leftrightarrow$ enthält nicht explizit die Wahrscheinlichkeit ein α zu bilden)

α-Zerfall

$$ln(\lambda) = f - \frac{g \cdot Z}{\sqrt{E_{\alpha}^{kin}}} \quad , \quad g = 4\pi\alpha\sqrt{m_\alpha c^2/2} = const$$

$$f = ln\left(\frac{v_0}{2R}\right) + 8 \cdot \sqrt{\left(\frac{m_\alpha c^2 R Z \alpha}{\hbar c}\right)} \approx const$$ (Vereinfachende Annahme)

α-Zerfall

$$ln\lambda = f - \frac{gZ}{\sqrt{E_{kin}^{\alpha}}}$$

bisher: Annahme Tochterkern sehr massiv gegenüber α-Teilchen

$\rightarrow$ **reduzierte Masse:** $M = \frac{m_\alpha m_D}{m_\alpha + m_D}$

$\rightarrow$ Q_α **(tot. kinet. Energie statt E_{kin}^{α})**

$\rightarrow$ **V: Relativ-Geschwindigkeit der beiden Teilchen**

$$ln\lambda = f' - gZ\sqrt{\frac{M}{M_\alpha Q_\alpha}}$$

$$\Downarrow$$

Reproduziert die Variation der Übergangsrate ($ln\, w = ln\, \lambda$) **über 24 Größenordungen grob**
(aber: auch signifikante Abweichungen)

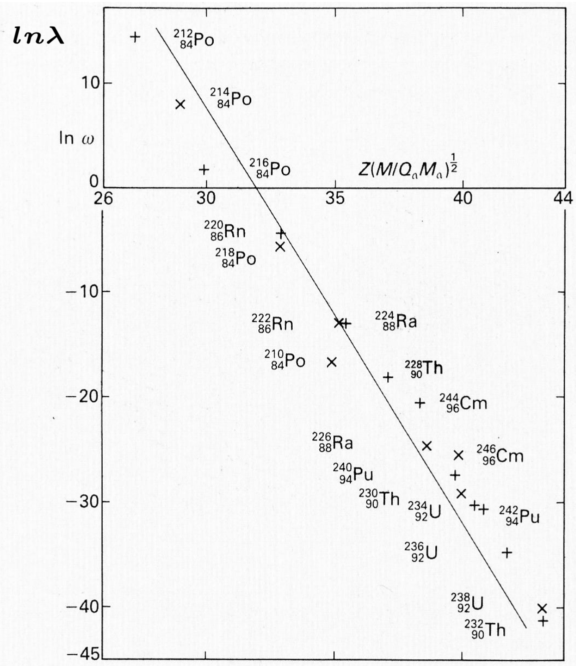


Fig. 6.3 Values of $\ln \omega$ plotted against the values of $Z(M/M_\alpha Q_\alpha)^{1/2}$ for the principal α-emitters of the two radioactive series having A(modulo 4) equal 0 (points +) and equal 2 (×). Each point is for the ground state to ground state transition only. As usual Z, M_α are the atomic number of the daughter and the mass of the α-particle respectively; M is the reduced mass of daughter and α-particle. The quantity $M_\alpha Q_\alpha/M$ is nearly equal to the kinetic energy of the emitted α-particle, T_α; the use of the former is equivalent to using the final particles' relative velocity, as required equation (6.8), rather than the velocity of the α-particle, as in equation (6.5). A line of slope -3.97 MeV$^{1/2}$ has been drawn to show the variation expected from the simple theory: it is clear that there are considerable departures from this elementary theory but that it does roughly explain the gross variation of transition rate over 24 orders of magnitude.

α-Zerfall

$$ln\lambda = f - \frac{gZ}{\sqrt{E^{\alpha}_{kin}}}$$

bisher: Annahme Tochterkern sehr massiv gegenüber α-Teilchen

$\rightarrow$ reduzierte Masse: $M = \dfrac{m_\alpha m_D}{m_\alpha + m_D}$

$\rightarrow$ Q_α (statt E^{α}_{kin})

$\rightarrow$ V: Relativ-Geschwindigkeit der beiden Teilchen

$$ln\lambda = f' - gZ\sqrt{\frac{M}{M_\alpha Q_\alpha}}$$

- **Kernstruktur (Schalenstruktur, gg vs. uu, ...) nicht berücksichtigt**
- **Drehimpuls nicht berücksichtigt (Effekte einer Drehimpulsbarriere)**
- **Idealisertes Potential genutzt**
- **Kugelförmige Kerne angenommen, Deformation nicht berücksichtigt**

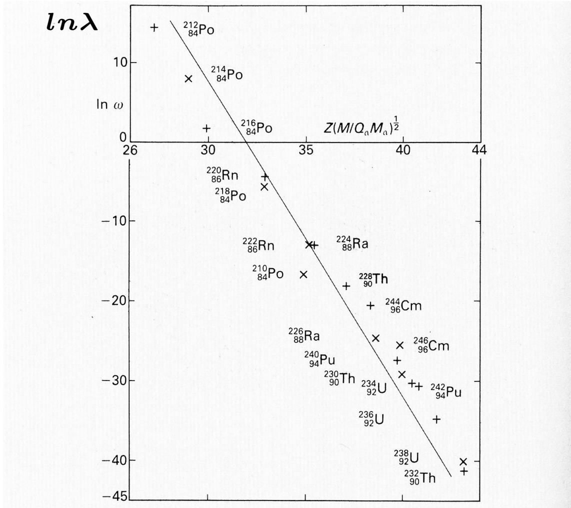


Fig. 6.3 Values of $\ln\omega$ plotted against the values of $Z(M/M_\alpha Q_\alpha)^{1/2}$ for the principal α-emitters of the two radioactive series having A(modulo 4) equal 0 (points +) and equal 2 (×). Each point is for the ground state to ground state transition only. As usual Z, M_α are the atomic number of the daughter and the mass of the α-particle respectively; M is the reduced mass of daughter and α-particle. The quantity $M_\alpha Q_\alpha/M$ is nearly equal to the kinetic energy of the emitted α-particle, T_α; the use of the former is equivalent to using the final particles' relative velocity, as required equation (6.8), rather than the velocity of the α-particle, as in equation (6.5). A line of slope -3.97 MeV$^{1/2}$ has been drawn to show the variation expected from the simple theory: it is clear that there are considerable departures from this elementary theory but that it does roughly explain the gross variation of transition rate over 24 orders of magnitude.

Reproduziert die Variation der Übergangsrate ($ln\,w = ln\,\lambda$) über 24 Größenordungen grob
(aber: auch signifikante Abweichungen)

α-Zerfall

α-Strahlung: lässt sich einfach abschirmen
aber: gefährlich, wenn inkorporiert

Bsp.:

Radon: 1.1 mSv (effektive Dosis inkl. Folgeprodukte) der 2.1 mSv der natürlichen Strahlenbelastung (BfS)
$\Leftrightarrow$ hohe biologische Wirksamkeit durch starke Ionisation

Spaltung

$\leftrightarrow$ **schwere Kerne:**
spontane Spaltung nur wenn: $M(A, Z) > M(A_1, Z_1) + M(A_2, Z_2)$

betrachten von: $A_1 \approx A_2 \approx A/2, \quad A_1 + A_2 = A$
$Z_1 \approx Z_2 \approx Z/2, \quad Z_1 + Z_2 = Z$

$\Leftrightarrow$ **Energiegewinn durch reduzierte Coulomb-Abstossung**

...Tafel ....

Spaltung

Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\longleftrightarrow$ gleiches V

Ellipsoid

$$V = \frac{4}{3}\pi a \cdot b^2$$

$$a = R \cdot (1 + \varepsilon) \qquad \varepsilon \text{ : Exzentrizität}$$

$$b = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx R \cdot (1 - 1/2\varepsilon + ...)$$

Oberfläche $\approx 4\pi R^2 \cdot (1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + ...)$

$$E_S = a_s \cdot A^{2/3} \cdot (1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + ...) = E_S^0 + \Delta E_S$$

$$E_C = a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \cdot (1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + ...) = E_C^0 + \Delta E_C$$

Coulomb-Energie eines geladenen Ellipsoids

$\Rightarrow$ **Deformationsenergie:**

= Differenz zum "kugelförmigen" Kern

$$E_D = \Delta E_S + \Delta E_C = \varepsilon^2 \cdot \left[a_s \cdot \frac{2}{5} A^{2/3} - a_C \cdot \frac{1}{5} A^{-1/3} \cdot Z^2 \right]$$

$\approx 6,9\,\mathrm{MeV} \qquad \approx 0,143\,\mathrm{MeV}$

Spaltung

$\Rightarrow$ Deformationsenergie:

= Differenz zum “kugelförmigen” Kern

$$E_D = \Delta E_S + \Delta E_C = \varepsilon^2 \cdot \left[\underbrace{a_s \cdot \frac{2}{5} A^{2/3}}_{\approx 6,9\,\mathrm{MeV}} - \underbrace{a_C \cdot \frac{1}{5} A^{-1/3} \cdot Z^2}_{\approx 0,143\,\mathrm{MeV}} \right]$$

$E_D > 0:$ $\hat{=}$ **gezeigtem Potentialverlauf $\leftrightarrow$ metastabiler Zustand**
niedriger Potentialwall $\rightarrow$ Spaltung mit beobachtbaren $t_{1/2}$

$E_D < 0 \Rightarrow$ **spontane Spaltung** (keine Spaltbarriere)

$\dfrac{Z^2}{A} > \dfrac{2a_s}{a_C} \approx 48 \Leftrightarrow$ **spontane Spaltung** $(Z > 100)$

je kleiner $\frac{Z^2}{A}$ desto größer die Halbwertszeit

Spontane Spaltung

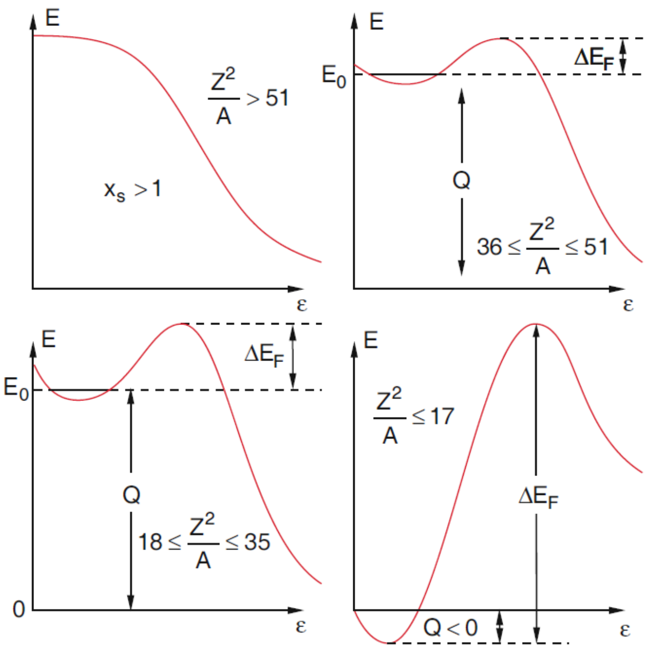


Abb. 6.14. Potentialschwelle ΔE_F für die Kernspaltung für verschiedene Werte des Verhältnisses Z^2/A

Exakter Wert im Modell:
abhängig von der verwendeten a_s-, a_C-Werten

Tabelle 6.1. Spaltbarkeitsparameter und Halbwertszeiten $T_{1/2}$ für die spontane Spaltung und für den α-Zerfall einiger Kerne

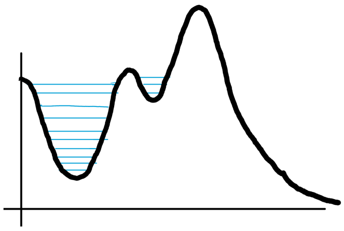
Nuklid	X_S	$T_{1/2}$(Spaltung)	$T_{1/2}$(α-Zerfall)
$^{232}_{90}$Th	0,68	$> 10^{19}$ a	$1{,}4 \cdot 10^{10}$ a
$^{235}_{92}$U	0,70	$\sim 10^{17}$ a	$7 \cdot 10^8$ a
$^{238}_{92}$U	0,693	$\sim 10^{16}$ a	$4 \cdot 10^9$ a
$^{242}_{94}$Pu	0,71	$\sim 10^{11}$ a	$\sim 4 \cdot 10^5$ a
$^{252}_{98}$Cf	0,74	$6 \cdot 10^1$ a	2,2 a
$^{254}_{100}$Fm	0,76	246 d	3,4 h
$^{255}_{102}$No	0,80	?	180 s

$$X_S = \frac{a_C \cdot Z^2/A^{1/3}}{2a_S \cdot A^{2/3}} = \frac{a_C}{2a_S}\,\frac{Z^2}{A}$$

α-Zerfall meist dominant

Anmerkungen - Modell (Näherungen/Vereinfachungen)

Bermerkung: Tröpfchenmodell benutzt
$\rightarrow$ keine Schalenstruktur
$\rightarrow$ starke Deformation nicht korrekt berücksichtigt
- .....
$\leftrightarrow$ Potential meist komplizierter



+ Annahme: symmetrische Spaltung

Induzierte Spaltung

für schwere Kerne: $Z \approx 92$, Spaltbarriere $\approx 6\ MeV$

- Nutzen von (niederenergetischen) Neutronen
$\rightarrow$ Einfangreaktion
$\Rightarrow$ angeregter Zustand oberhalb der Spaltbarriere

$n +^{238}_{92} U$ **ΔB = 5.0 MeV werden als Bindungsenergie frei**
aber Spaltbarriere = 6,1 MeV für $^{239}_{92}U$
schnelle Neutronen notwendig, aber $\sigma \sim 1/v$

$n +^{235}_{92} U$ **ΔB = 6,4 MeV**
Spaltbarriere = 5,3 MeV für $^{236}_{92}U$
$\leftrightarrow$ thermische Neutronen $\checkmark$

?: Warum ist $n +^{235}_{92} U$ vorteilhaft?

$\Downarrow$

Kernreaktoren
Kernwaffen
ebenso: ^{233}Th, ^{239}Pu

Induzierte Spaltung

Spaltung von Uran $^{235}_{92}U$ durch langsame (thermische) Neutronen und durch 14 MeV Neutronen

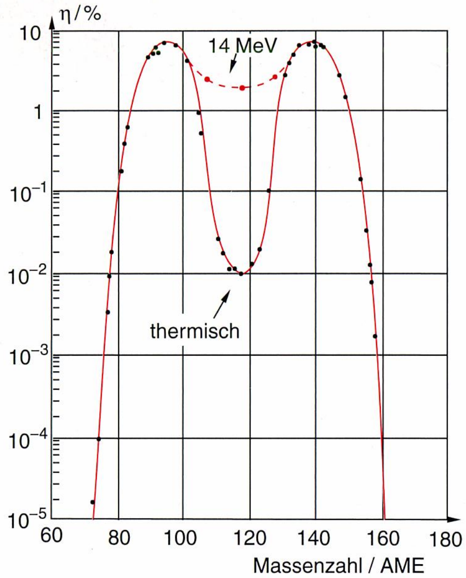


Abb. 6.18. Spaltwahrscheinlichkeit η in % als Funktion der Massenzahl der Spaltprodukte bei der Spaltung von Uran $^{235}_{92}$U durch langsame (thermische) Neutronen und durch 14 MeV-Neutronen

langsame Neutronen $(E_B = 6{,}4\,\mathrm{MeV} > E_c = 5{,}3\,\mathrm{MeV})$:

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^*$$
$$\rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\mathrm{n} + Q$$

Tabelle 6.2. Kritische Energie E_c (Höhe der Spaltbarriere), Bindungsenergie E_b des Neutrons im Compoundkern und Spaltschwellenenergie $\Delta E_F = E_c - E_b$ für die kinetische Energie der Spaltneutronen

Target-kern X	Compound-kern X+n	E_c (MeV)	E_b (MeV)	$E_c - E_b$ (MeV)
$^{233}_{92}$U	$^{234}_{92}$U	5,8	7,0	−1,2
$^{235}_{92}$U	$^{236}_{92}$U	5,3	6,4	−1,1
$^{234}_{92}$U	$^{235}_{92}$U	5,8	5,3	+0,5
$^{238}_{92}$U	$^{239}_{92}$U	6,1	5,0	+1,1
$^{231}_{91}$Pa	$^{232}_{91}$Pa	6,2	5,5	+0,7
$^{232}_{90}$Th	$^{233}_{92}$Th	6,8	5,5	+1,3

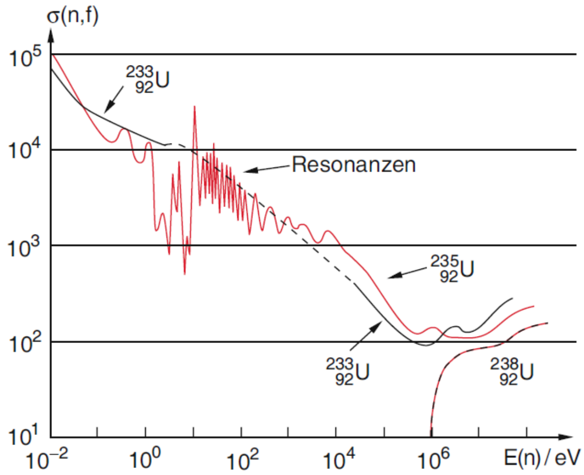


Abb. 6.17. Spaltungsquerschnitt $\sigma(U, n, f)$ als Funktion der kinetischen Energie der Neutronen für $^{238}_{92}$U, $^{235}_{92}$U und $^{233}_{92}$U

Spaltung - Massenverteilung der Spaltprodukte

Spaltung von Uran $^{235}_{92}U$ durch langsame (thermische) Neutronen und durch 14 MeV Neutronen

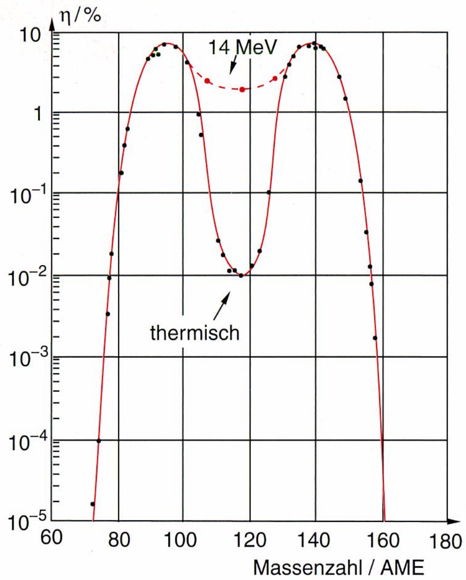


Abb. 6.18. Spaltwahrscheinlichkeit η in % als Funktion der Massenzahl der Spaltprodukte bei der Spaltung von Uran $^{235}_{92}$U durch langsame (thermische) Neutronen und durch 14 MeV-Neutronen

langsame Neutronen $(E_B = 6{,}4\,\mathrm{MeV} > E_c = 5{,}3\,\mathrm{MeV})$:

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^*$$
$$\rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\mathrm{n} + Q$$

Massenverteilung der Spaltprodukte nach α-Beschuss

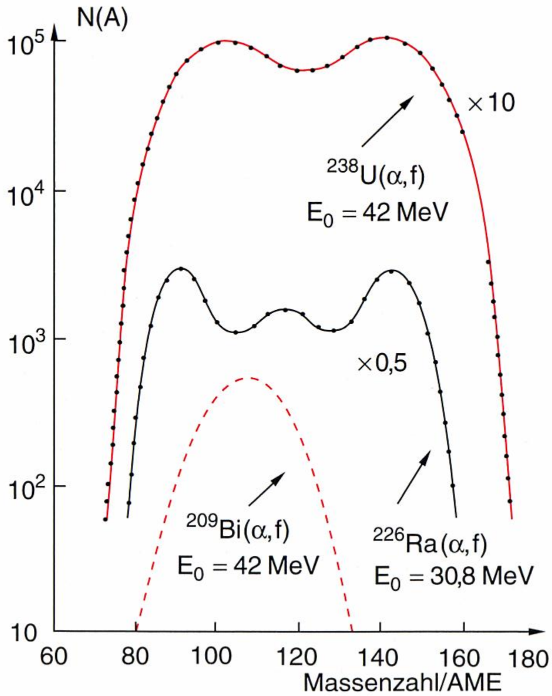
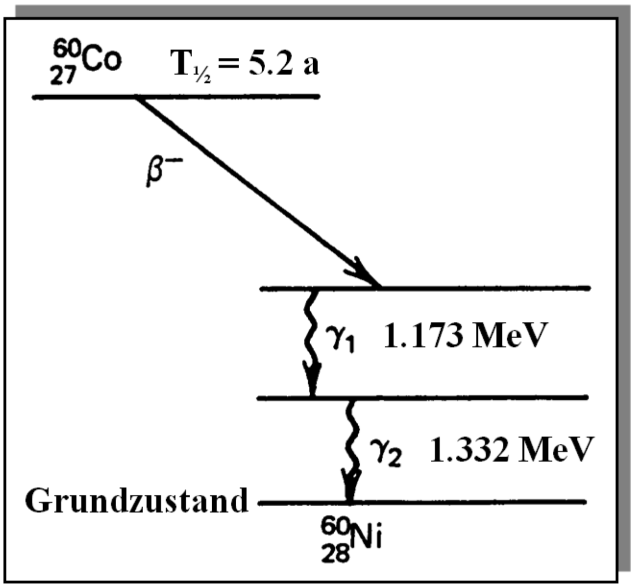


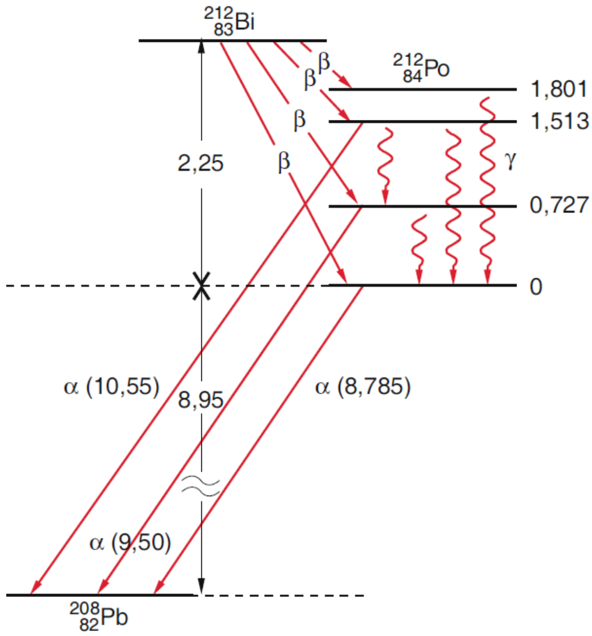
Abb. 6.19. Massenverteilung der Spaltprodukte bei einigen durch α-Beschuss mit der kinetischen Energie $E_0(\alpha)$ induzierten Kernspaltungen. Nach R. Vandenbosch, J.R. Huzenga: *Nuclear Fission*, Academic Press, New York 1973

γ-Zerfall

Population angeregter Kernzustände z.B. durch α-, β- Zerfälle:



vereinfachte Darstellung



γ-Zerfall