

Übungen zu Physik V: Kerne und Teilchen (10)

Abgabetermin: bis 07.01.2024, 10:00 Uhr

Hinweis 1: Auf diesem Übungszettel gibt es 15 (LA: 8) Bonuspunkte, also insgesamt 55 (LA: 28) Punkte. Für die Klausurzulassung werden insgesamt 260 (LA: 130) Punkte benötigt, wobei es 13 Übungszettel geben wird.

Hinweis 2: Zur Lösung der Aufgaben benötigte bzw. hilfreiche Angaben finden Sie z.B. bei der Particle Data Group im Review of Particle Physics unter <https://pdg.lbl.gov>.

Aufgabe 1: Gell-Mann–Okubo-Massenformel

[LA: nur Teilaufgaben 1–3] (8 Punkte)

Die Gell-Mann–Okubo-Massenformel zur Beschreibung der Massen von Hadronen innerhalb eines Multipletts lautet:

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right) \quad (1)$$

mit Isospin I und Hyperladung $Y = B + S$, wobei B die Baryonenzahl und S die Strangeness ist. Die Massen M_0 , M_1 und M_2 sind für jedes Multiplett empirisch zu bestimmende Konstanten.

1. Lesen Sie die Massen der Dekuplett-Baryonen aus den *Summary Tables* der Particle Data Group ab. Geben Sie jeweils I und Y für die Baryonen an. (3 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass für das Dekuplett $I = Y/2 + 1$ gilt, wodurch sich die Gell-Mann–Okubo-Massenformel auf die Form $M = aY + b$ vereinfachen lässt. Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b mit Hilfe der Massen der Dekuplett-Baryonen und sagen Sie damit die Masse des Ω^- voraus. (4 Punkte)
3. Vergleichen Sie Ihre Vorhersage mit der gemessenen Masse des Ω^- . (1 Punkt)

Aufgabe 2: Energieverlust geladener Teilchen in Materie (32 Punkte)

[LA: nur Teilaufgaben 1,2,5]

Bewegen sich schwere, geladene Teilchen durch Materie, so verlieren sie Energie durch Ionisation. Der dominante Prozess ist Stöße mit Elektronen.

Der mittlere Energieverlust pro Wegstrecke wird beschrieben durch die Bethe-Bloch-Formel:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = K \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 \right] \quad (2)$$

mit $K = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0,1535 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$, der Dichte ρ des Absorbermaterials und dessen Z/A , sowie der Ladung z des Teilchens in Einheiten der Elementarladung. W_{\max} ist der maximale Energieübertrag in einer Kollision, für ein Teilchen der Masse M gilt

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\frac{m_e}{M} \sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \quad (3)$$

Neben der Dichte ist der einzige materialabhängige Parameter das mittlere Anregungspotential I .

1. Programmieren Sie die Bethe-Bloch-Gleichung für Graphit ($I = 78 \text{ eV}$, $Z/A = 0,49954$, $\rho = 1,7 \text{ g/cm}^3$) in Abhängigkeit von z , M , und $\beta\gamma$.
Zeichnen Sie die Funktion in doppelt-logarithmischer Auftragung für α -Teilchen in einem Bereich von $10^{-2} < \beta\gamma < 10^2$. (8 Punkte)

2. Die Funktion hat ein Minimum bei $\beta\gamma \approx 3$. Teilchen an diesem Punkt werden *minimalionisierend* genannt. Berechnen Sie jeweils den Impuls und die kinetische Energie von minimalionisierenden μ^+ , p und α -Teilchen. (3 Punkte)

3. Die Reichweite R von geladenen Teilchen mit gegebener kinetischer Energie T_0 lässt sich theoretisch berechnen, indem man die Bethe-Bloch-Formel integriert:

$$R(T_0) = \int_0^{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE \quad (4)$$

Da die Bethe-Bloch-Formel für kleine Energien ($\beta\gamma \lesssim 0.01$) nicht gültig ist, muss man in der Praxis dem empirischen Ansatz

$$R(T_0) = R_0(T_{\min}) + \int_{T_{\min}}^{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE \quad (5)$$

wählen, mit empirisch zu bestimmender Konstante $R_0(T_{\min})$.

Berechnen Sie jeweils die Reichweite von Protonen in Graphit für kinetische Energien von 10 MeV, 100 MeV und 1000 MeV. Integrieren Sie numerisch ab $T_{\min} = 0,1 \text{ MeV}$, mit $R_0(0,1 \text{ MeV}) = 1 \mu\text{m}$. (8 Punkte)

4. Betrachten Sie wieder Protonen mit einer kinetischen Energie von $T_0 = 100 \text{ MeV}$ in einem Graphit-Absorber. Berechnen Sie numerisch den Energieverlust $\frac{dE}{dx}$ und die Energie der Protonen als Funktion der Eindringtiefe d :

$$T(d) = T_0 + \int_0^d \frac{dE}{dx}(T) dx \quad (6)$$

Segmentieren Sie hierzu den Absorber in dünne Scheiben mit einer Dicke dx und nehmen Sie an, dass sich $\frac{dE}{dx}$ innerhalb dieser Scheibe nicht ändert.

Zeichnen Sie $\frac{dE}{dx}$ als Funktion der Eindringtiefe.

(8 Punkte)

5. Strahlenschäden im menschlichen Erbgut können zu Krebs führen. Dabei sind Doppelstrangbrüche in der DNA besonders gefährlich. Um einen Doppelstrangbruch zu verursachen, muss die ionisierende Strahlung auf kurzer Distanz mehrfach Atome bzw. Moleküle ionisieren.

Gegeben sei ein Teilchenstrahl aus geladenen Teilchen mit einer kinetischen Energie von 6 MeV. Ordnen Sie die folgenden Teilchen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der sie einen Doppelstrangbruch verursachen können:

$$\alpha, \mu^+, p, \pi^+.$$

Nehmen Sie hierzu an, dass im Mittel 78 eV pro Ionisation benötigt werden und ein DNA-Molekül durch Graphit modelliert werden kann. Berechnen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe 1 jeweils die mittlere Zahl der Ionisationen durch den jeweiligen Teilchenstrahl beim Durchqueren eines DNA-Moleküls ($\Delta x \approx 2 \text{ nm}$).

(Hinweis: Der Energieverlust ist klein gegenüber der Teilchenenergie.)

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Wechselwirkung von Photonen mit Materie [LA: nur Teilaufgabe 1] (15 Punkte)

Im Gegensatz zu geladenen Teilchen, die entlang ihrer Flugstrecke durch Materie kontinuierlich Energie verlieren, zeichnet sich die Wechselwirkung von hochenergetischen Photonen (Gamma-Strahlung) dadurch aus, dass ein Photon durch eine einzelne Wechselwirkung aus einem Strahl entfernt wird, entweder durch Absorption oder durch Streuung.

1. Ein Photonenstrahl mit einer Energie von 661 keV und Intensität I_0 trifft auf einen Absorber aus Aluminium. Der totale Wirkungsquerschnitt beträgt ca. 3,3 barn. Berechnen Sie die Intensität nach dem Absorber als Funktion der Absorberdicke. (4 Punkte)

Die für die Kern- und Teilchenphysik relevanten Wechselwirkungsprozesse sind der photoelektrische Effekt, der Compton-Effekt, und e^+e^- -Paarproduktion.

2. Der photoelektrische Effekt kann nur mit gebundenen Elektronen stattfinden. Zeigen Sie, dass ein freies Elektron keine Photonen absorbieren kann. (3 Punkte)
3. Beim Compton-Effekt handelt es sich um die elastische Streuung eines Photons an einem Elektron, wobei das Elektron einen Teil der Energie des Photons aufnimmt.
 - a) Leiten Sie die Formel für die Wellenlängenänderung des Photons her:

$$\lambda - \lambda' = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (7)$$

wobei θ der Streuwinkel, λ und λ' die Wellenlänge vor und nach der Streuung, m_e die Elektronmasse und h die Planck-Konstante ist. (3 Punkte)

- b) In welchem der folgenden Fälle verliert das Photon den größten Anteil seiner Energie? Begründen Sie Ihre Antwort!
 - i. einfache Compton-Streuung mit $\theta = 180^\circ$
 - ii. doppelte Compton-Streuung mit je $\theta = 90^\circ$
 - iii. dreifache Compton-Streuung mit je $\theta = 60^\circ$

(2 Punkte)

4. Paarproduktion findet im Coulomb-Feld eines Atomkerns (oder eines Elektrons) statt.
 - a) Welchen Erhaltungssatz verletzt die Paarproduktion im Vakuum, also die Reaktion $\gamma \rightarrow e^+e^-$? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)
 - b) Welche Energie muss ein Photon mindestens haben, damit e^+e^- -Paarproduktion möglich ist? (1 Punkt)