Theo 4; Zettel 10; Marc Hauer, Franka Weroneh, Angelo Brade; 17.12.2024

Aufgabe 1:

a) Unser Teilchenzahl (Kettenelementzahl) N ist fest. Eine Temperatur T kann beliebig gewählt werden. Es kann Energie, hier in Form von Bindungen, ausgetauscht werden. Dies sind die notwendigen Kriterien für ein kanonischen Ensamble.

Aus $E_{tot} = \sum_i^N E_i = \sum_{i=1}^n E_i + \sum_{i=n}^N E_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon = n\varepsilon$ mit $E_i \Theta(n-i) = 0$,

da $E_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \text{ geschlossen} \\ \varepsilon, & \text{wenn } i \text{ offen} \end{cases}$ und $i \in n, \dots, N$ geschlossen, sonst i offen:

$$\Rightarrow Z_c(T) = \sum_n^N e^{-\beta \sum_i^N E_i} = \sum_n^N e^{-\beta n\varepsilon} = \frac{e^{-\beta\varepsilon N}(e^{-\beta\varepsilon(N+1)} - 1)}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}-1} - \frac{e^{-\varepsilon\beta N}}{e^{\varepsilon\beta}-1}$$

Mit $x = e^{-\beta\varepsilon}$ folgt:

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^N}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

b)

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_n n\omega(n)}{\sum_n \omega(n)} = \frac{\sum_n^N n e^{-\beta n\varepsilon}}{Z_c} = \frac{1}{Z_c}\frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)} \sum_n^N e^{-\beta n\varepsilon}$$

Da wir schon wissen, dass $Z_c = \sum_n^N e^{-\beta n\varepsilon} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ folgt

$$= \frac{1}{Z_c}\frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)}\frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{Z_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)\frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)}x \quad \Big| \frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)}x = x$$

$$= \frac{1}{Z_c}\left[\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} + \frac{(N+1)x^N}{1-x}\right] = \frac{1-x}{1-x^{N+1}}\left[\frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} + \frac{(N+1)x^N}{1-x}\right]$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{N+1}{x^{-N}-x}$$

c)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\langle n\rangle}{N}\Big|_{x<1} = \lim_{N\to\infty}\underbrace{\frac{1}{N(1-x)}}_{\to 0} + \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N(x^{-N}+1)} = \lim_{N\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x^{-N}+1}}_{\to\infty} + \lim_{N\to\infty}\underbrace{\frac{1}{N(x^{-N}+1)}}_{\to\infty} = \infty$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\langle n\rangle}{N}\Big|_{x>1} = \lim_{N\to\infty}\underbrace{\frac{1}{N(1-x)}}_{\to 0} + \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N(x^{-N}+1)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\underbrace{x^{-N}}_{\to 0}+1}_{\to 1}} + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\underbrace{N}_{\to\infty}\underbrace{(\underbrace{x^{-N}}_{\to 0}+1)}_{\to 1}}_{\to\infty}} = 1$$