# Zustände minimaler Unschärfe

Florian
Angelo
Pitt

||

# Ein System mit 2 Zuständen

Florian
Angelo
Pitt

$$H = \alpha |e_1\rangle\langle e_2| + \beta |e_2\rangle\langle e_1|$$

1. „$\Rightarrow$":

Sei $H$ hermitesch. Dann ist $H = H^\dagger$.

Dies bedeutet $\overline{(H^T)}$. Das Transponieren eines Operators ist linear, und ist definiert mit $(|e_i\rangle\langle e_j|)^T = (|e_j\rangle\langle e_i|)$, somit ist

$$H = H^\dagger \rightarrow \alpha |e_1\rangle\langle e_2| + \beta |e_2\rangle\langle e_1| \overset{!}{=} \overline{\alpha |e_2\rangle\langle e_1| + \beta |e_1\rangle\langle e_2|}$$

$\overline{|e_i\rangle\langle e_j|} = |e_i\rangle\langle e_j|$, somit gilt

$$\alpha|e_1\rangle\langle e_2| + \beta|e_2\rangle\langle e_1| = \alpha^*|e_2\rangle\langle e_1| + \beta^*|e_1\rangle\langle e_2|$$

$$\rightarrow |e_1\rangle\langle e_2|(\alpha - \beta^*) + |e_2\rangle\langle e_1|(\beta - \alpha^*) = 0$$

Dies passiert für $\alpha = \beta^*$, somit

$$H \text{ hermitesch} \rightarrow \alpha = \beta^*.$$

„$\Leftarrow$":

Sei $\alpha = \beta^*$. Berechne $H^\dagger$: $H^\dagger = \alpha^* |e_2\rangle\langle e_1| + \beta^* |e_1\rangle\langle e_2|$

da $\alpha = \beta^*$, $\alpha^* = \beta$, somit $H^\dagger = \beta|e_2\rangle\langle e_1| + \alpha|e_1\rangle\langle e_2|$

was gleich $H$ ist, somit

$$\alpha = \beta^* \rightarrow H \text{ hermitesch}, \text{ somit}$$

$$H \text{ hermitesch} \Leftrightarrow \alpha = \beta^*$$

$\square$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Wir suchen einen vektor s.d.

$$H|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

Wir benutzen die Matrixschreibweise

$$\hat{H} = \alpha|e_1\rangle\langle e_2| + \beta|e_2\rangle\langle e_1|$$
$$= \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0\ 1) + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 0)$$
$$= \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

und benutzen die Nullstellen der des char. pol. für die Eigenwerte

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha\beta \stackrel{!}{=} 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

und bestimmen jetzt die Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{\alpha\beta} & \alpha & 0 \\ \beta & -\sqrt{\alpha\beta} & 0 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} & 0 \end{array}\right)$$

$$\leadsto -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ v \;\middle|\; v = c\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha/\beta} \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{\alpha\beta} & \alpha & 0 \\ \beta & \sqrt{\alpha\beta} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{\beta/\alpha} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{\alpha/\beta} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \sqrt{\beta/\alpha}\, x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = -\sqrt{\beta/\alpha}\, x_1$$

$x_2 = 1$

$$\mathbb{L} = \left\{ v \mid v = c \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha/\beta} \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \right\}$$

somit:

$$D = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

und $T = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha/\beta} & \sqrt{\alpha/\beta} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\beta/\alpha} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\beta/\alpha} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

mit $\hat{H} = T D T^{-1}$

3. Sei der Zustand eines Systems $|S\rangle$ bei $t=0$ $|e_1\rangle$, $|S,0\rangle = |e_1\rangle$,
dann ist der Zustand zum Zeitpunkt $t$

$$|S,t\rangle = U(t)|S,0\rangle = U(t)|e_1\rangle$$

mit $U(t) = e^{-itH}$

wir wissen $e^{-itH} = e^{-itTDT^{-1}} = Te^{-itD}T^{-1}$

also, $e^{-itD} =$

somit

$$e^{-itH} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha/\beta} & \sqrt{\alpha/\beta} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it\sqrt{\alpha\beta}} & 0 \\ 0 & e^{-it\sqrt{\alpha\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\beta/\alpha} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\beta/\alpha} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Magie

$$= \frac{1}{2} e^{-it\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} 1 + e^{2it\sqrt{\alpha\beta}} & -\frac{-\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\, e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\beta}} \\ -\frac{-\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\, e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha}} & 1 + e^{2it\sqrt{\alpha\beta}} \end{pmatrix}$$

somit $e^{-itH}|e_1\rangle = \frac{1}{2} e^{-it\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} 1 + e^{2it\sqrt{\alpha\beta}} \\ -\frac{-\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\, e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$

schönstes Ergebniss in Theo 3

4:

$$P(|S,t\rangle = |e_2\rangle) = |\langle e_2|S,t\rangle|^2$$

$$\left|\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-it\sqrt{\alpha\beta}}\begin{pmatrix}1+e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}\\ -\frac{-\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha}}\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}e^{-it\sqrt{\alpha\beta}}\left(-\frac{-\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha}}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}e^{-it\sqrt{\alpha\beta}}\left(\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta}e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{1}{2}e^{it\sqrt{\alpha\beta}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha}e^{-2it\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta}\,e^{2it\sqrt{\alpha\beta}})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha}\,e^{-2it\sqrt{\alpha\beta}})}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta}\,e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}-\sqrt{\alpha\beta}\,e^{-2it\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{1}{4}(2-(e^{2it\sqrt{\alpha\beta}}+e^{-2it\sqrt{\alpha\beta}}))$$

$$= \frac{1}{4}(2-2\cos(2t\sqrt{\alpha\beta})$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos(2t\sqrt{\alpha\beta}))$$