Übungen zu Theoretische Physik I

Prof. M. Drees, Gerrit Bickendorf
http://www.th.physik.uni-bonn.de/Groups/drees/teaching.html
Abgabe: 24.04.2023

Anwesenheitsaufgaben

Die erste Aufgabe ist eine Übersicht über die Differentialoperatoren, die regelmäßig in Rechnungen benutzt werden. Danach folgen Beispiele für eine nicht konservative Kraft und die Fourier-Zerlegung einer Funktion.

A 1 Differentialoperatoren I

Die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation lauten in kartesischen Koordinaten mit der Notation $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ wie folgt:

$$(grad\ U(\vec{x}))_i = \vec{\nabla}_i\, U(\vec{x}) = \partial_i\, U(\vec{x}) \tag{1}$$

$$div\ \vec{A}(\vec{x}) \ = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \partial_i\, A_i(\vec{x}) \tag{2}$$

$$(rot\ \vec{A}(\vec{x}))_i = (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}))_i = \epsilon_{ijk}\, \partial_j\, A_k(\vec{x}) \tag{3}$$

Hierbei ist $\vec{\nabla}$ der Nabla-Operator mit $\vec{\nabla}_i = \partial_i$. Weiterhin ist der Laplace-Operator $\Delta = \partial_i \partial_i$. Zeige die folgenden Relationen für eine zweimal stetig differenzierbare skalare Funktion $U(\vec{x})$ bzw. vektorwertige Funktion $\vec{A}(\vec{x})$:

$$div\ rot\ \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \qquad rot\ grad\ U = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\, U) = \vec{0}, \qquad div\ grad\ U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\, U) = \Delta U$$
$$\text{und} \quad grad\ div\ \vec{A} - rot\ rot\ \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \Delta \vec{A}$$

A 2 Konservative Kräfte I

Für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ wird die verrichtete Arbeit

$$W = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

nur durch den Anfangs- und Endpunkt, aber nicht durch den genauen Verlauf des Weges S bestimmt. Es gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ (Das Kraftfeld ist wirbelfrei). Im Folgenden sollen die Linienintegrale zweier verschiedener Wege für ein nicht konservatives Kraftfeld berechnet und gesehen werden, dass sich deren Werte unterscheiden. (In den Hausaufgaben wird dies für eine konservative Kraft wiederholt.)

Sei $\vec{F} = (y, x^2/3, x + y)$ eine Kraft, die auf ein Teilchen zwischen den beiden Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wirkt, mit den Werten:

$$\vec{r}_1 = (3, 0, 0) \qquad \vec{r}_2 = (3, 0, 6)$$

Berechne das Linienintegral (4) zwischen den beiden Punkten, wenn der Weg eine Gerade parallel zur z-Achse ist. Vergleiche das Ergebnis mit dem Wert, den Du erhältst, wenn der Weg durch eine Schraubenlinie mit einer Windung beschrieben wird, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt. Berechne die Rotation der Kraft.

A 3 Fourier-Zerlegung I

Eine beliebige periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode $T > 0$ kann durch eine Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen wie folgt beschrieben werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\, \cos(n\omega t) + b_n\, \sin(n\omega t)] \tag{5}$$

Die Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi/T$ dient hierbei der Skalierung der Periode $2\,\pi$ von Kosinus und Sinus auf die Periode T von $f(t)$. Diese Zerlegung von $f(t)$ wird Fourier-Zerlegung (Fourier-Analyse) genannt.

Wenn $f(t)$ bekannt ist, können die Koeffizienten a_i und b_i wie folgt berechnet werden ($n > 0$):

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{6}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(nwt)\,dt \tag{7}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(nwt)\,dt \tag{8}$$

(a) Zeige, dass die Fourier-Zerlegung (5) die Periodizität der Funktion $f(t)$ wiedergibt, also $f(t) = f(t+T)$ gilt.

(b) Zeige, dass ein Rechtecksignal $f(t)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \le \omega t < \pi, \\ -1 & \text{wenn } \pi \le \omega t < 2\pi \end{cases} \qquad f(t) = f(t + \tfrac{2\pi}{\omega})$$

wie folgt als Fourier-Zerlegung geschrieben werden kann:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)\omega t) = \frac{4}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots] \tag{9}$$

Hausaufgaben

Die ersten drei Aufgaben dienen zur Vertiefung der Anwesenheitsaufgaben. Das mathematische Pendel ist ein Beispiel zur Lösung einer Differentialgleichung in Polarkoordinaten.

H 1 Differentialoperatoren II

Zeige mit $x \equiv |\vec{x}|$ und $|\vec{x}| = (x_i\,x_i)^{1/2}$ die folgenden Gleichungen:

(a) Gradient:

$$\vec{\nabla}\,\frac{1}{x} = -\frac{\vec{x}}{x^3} \qquad \vec{\nabla}\,(\ln x) = \frac{\vec{x}}{x^2}$$

(b) Divergenz:

$$\vec{\nabla}\cdot(x\vec{v}) = \vec{v}\cdot\frac{\vec{x}}{x},\ \vec{v} = konst. \qquad \vec{\nabla}\cdot(x^n\vec{x}) = (3+n)\,x^n \qquad \vec{\nabla}\cdot(x\,\vec{\nabla}\frac{1}{x^3}) = \frac{3}{x^4}$$

(c) Rotation:

$$\vec{\nabla}\times\vec{x} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times(\frac{1}{2}\,\vec{B}\times\vec{x}) = \vec{B},\ \vec{B} = konst. \qquad \vec{\nabla}\times(f(x)\,\vec{x}) = \vec{0}$$

H 2 Konservative Kräfte II

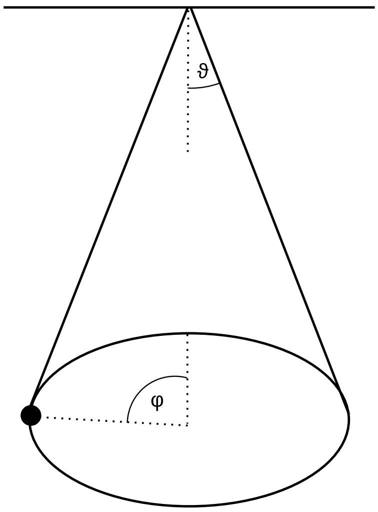
Wiederhole die Aufgabe A 2 mit der Kraft $\vec{F} = (x+z, z, x+y)$.

H 3 Fourier-Zerlegung II

Zeige, dass ein Sägezahnsignal $f(t) = 1 - 2\,t/T$ mit $0 \le t < T$ und $f(t) = f(t+T)$ wie folgt als Fourier-Zerlegung geschrieben werden kann:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \ldots] \tag{10}$$

H 4 Pendel I



Ein Massepunkt der Masse m schwingt reibungsfrei im Schwerefeld an einem masselosen, starren Faden der Länge l. Betrachte zuerst den Fall, dass das Pendel nur um den Winkel ϕ schwingt, also $\dot{\theta} = 0$. Die Masse überstreicht dann die schwarze Kreisbahn aus der Abbildung.

(a) Finde die horizontale und vertikale Komponente der Zugkraft T_F entlang des Fadens.

(b) Eliminiere T_F durch die beiden Gleichungen und bestimme die Kreisfrequenz der Schwindung.

H 5 Pendel II

Betrachte nun den Fall, dass das Pendel um den Winkel θ schwingt. Nun ist ϕ konstant und beliebig. Der Winkel der Auslenkung aus der Ruhelage sei $\theta(t)$.

(a) Stelle die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $\theta(t)$ auf. Zeige explizit, dass die Gesamtenergie $E(t)$ erhalten ist.

(b) Löse die Bewegungsgleichung zunächst für kleine Auslenkungen $\theta \ll 1$, setze also $\sin\theta \approx \theta$. Was ist die Eigenfrequenz ω_0 bzw. die Schwingungsperiode T in diesem Fall? Vergleiche die Frequenz in der gleichen Näherung mit dem Ergebnis aus H 4.b.

(c) Versuche nun (*ohne* die Näherung für kleine Auslenkungen), die Schwingungsdauer T mit Hilfe der Energieerhaltung bis auf ein (unbestimmtes) so genanntes elliptisches Integral erster Art

$$F(\psi, \sin\frac{\theta_0}{2}) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\,\sin^2\psi'}} \tag{11}$$

zu bestimmen. Setze dazu die in H 5.a berechnete Energie E gleich $-m\,g\,l\,\cos\theta_0$ (anfängliche potentielle Energie) und löse nach $dt(\theta)$ auf. Integriere durch Trennung der Variablen formal von $\theta = 0$ bis θ (Hinweis: Die Zeit, die das Pendel von $\theta = 0$ bis zum Maximalausschlag $\theta = \theta_0$ braucht, ist gleich dem Viertel einer Schwingungsdauer.) und substituiere im Integral $\sin\psi = \sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\theta_0}{2}$. Zeige schließlich:

$$T = 4\,t(\theta \to \theta_0) = \frac{4}{\omega_0}\,F(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_0}{2}) \tag{12}$$

Was passiert für große Auslenkungen $\theta_0 \to \pi$? Kann T für kleine Auslenkungen, wie es in Aufgabe H 5.b berechnet wurde, aus Gleichung (12) reproduziert werden?

Viel Spaß!