Theo 4; Zettel 05; Franka Weronek, Marc Hauer, Angela Brake; 11.11.2024

5.1. Zentraler Grenzwertsatz

$$\chi(k) = \int dx \cdot e^{-ikx}\, \omega(x) = \langle e^{-ikX} \rangle$$

$F(X) = f \quad \Rightarrow$ folgt w-heitsdichte $\omega_F(f)$

a)

Komulanten n-ter Ordnung: $\quad \chi(k) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n\right]$

$$\chi(k) = \exp\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n}\Big]$$

Taylor entwicklung $(x_0 = 0)$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} c_n\right)^3 + \dots$$

$$\overset{\text{bis } n=3}{=} 1 - ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3 + \frac{1}{2}\left(-ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3\right)^3 + \dots$$

$$= 1 - ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3 + \frac{1}{2}\Big(-k^2c_1^2 + \frac{ik^3}{2}c_1c_2 + \frac{k^4}{6}c_1c_3 + \frac{ik^3}{2}c_1c_2 + \frac{k^4}{4}c_2^2 - \frac{ik^5}{12}c_2c_3$$
$$+ \frac{k^4}{6}c_1c_3 - \frac{ik^5}{12}c_2c_3 - \frac{ik^6}{36}\Big) + \frac{1}{6}\left(-k^2c_1^2 + ik^3c_1c_2 + \frac{k^4}{3}c_1c_3 + \frac{k^4}{4}c_2^2 - \frac{ik^5}{6}c_2c_3\right)\cdot\left(-ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3\right)\dots$$

$$= 1 - ikc_1 - \frac{k^2}{2}c_2 + \frac{ik^3}{6}c_3 + \frac{1}{2}\left(-k^2c_1^2 + ik^3c_1c_2 + \frac{k^4}{3}c_1c_3 + \frac{k^4}{4}c_2^2 - \frac{ik^5}{6}c_2c_3\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\Big(ik^3c_1^3 + \frac{k^4}{2}c_1^2c_2 - \frac{ik^5}{6}c_1^2c_3 + k^4c_1^2c_2 - \frac{ik^5}{2}c_1c_2^2 - \cancel{\frac{k^6}{6}c_1c_2c_3} - \frac{ik^5}{3}c_1^2c_3 - \frac{k^6}{6}c_1c_2c_3 + \frac{ik^7}{18}c_1c_3^2$$
$$- \frac{ik^5}{4}c_2^2c_1 - \frac{k^6}{8}c_2^3 + \frac{ik^7}{24}c_2^2c_3 - \cancel{\frac{k^6}{6}c_1c_2c_3} + \frac{ik^7}{12}c_2^2c_3 + \frac{k^8}{36}c_2c_3^2\Big) + \dots$$

$$= 1 + k(-ic_1) - k^2\left(\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_1^2\right) + k^3\left(\frac{i}{6}c_3 + \frac{i}{2}c_1c_2 + \frac{i}{6}c_1^3\right) + \mathcal{O}(k^4)$$

$$= 1 \underbrace{-ikc_1}_{1.} \underbrace{- \frac{1}{2}k^2(c_2 + c_1^2)}_{2.} + \underbrace{\frac{i}{6}k^3(c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3)}_{3.} + \mathcal{O}(k^4)$$

$$\langle e^{-ikx} \rangle \underset{\text{entwickelt}}{=} 1 + \frac{\langle -ikx \rangle}{1} + \frac{\langle (-ikx)^2 \rangle}{2} + \frac{\langle (-ikx)^3 \rangle}{6} + \dots$$

$$= 1 \underbrace{-ik\langle x \rangle}_{1.} \underbrace{-\frac{1}{2}k^2\langle x^2 \rangle}_{2.} + \underbrace{\frac{i}{6}k^3\langle x^3 \rangle}_{3.} + \mathcal{O}(\langle x^4 \rangle)$$

vgl:

1. $-ik\langle x \rangle = -ikc_1 \iff c_1 = \langle x \rangle$

2. $-\frac{1}{2}k^2(c_2 + c_1^2) = -\frac{1}{2}k^2\langle x^2 \rangle \iff c_2 = \langle x^2 \rangle - c_1^2 \implies c_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$$3.\quad \frac{i}{6}k^3\left(c_3+3c_1c_2+c_1^3\right)=\frac{i}{6}k^3\langle x^3\rangle \iff c_3=\langle x^3\rangle-3c_1c_2-c_1^3$$

$$\Rightarrow c_3=\langle x^3\rangle-3\langle x\rangle\left(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2\right)-\langle x\rangle^3$$
$$=\langle x^3\rangle-3\langle x\rangle\langle x^2\rangle+3\langle x^3\rangle-\langle x\rangle^3$$

$$\Rightarrow c_3=\langle x^3\rangle-3\langle x^2\rangle\langle x\rangle+2\langle x\rangle^3$$

---

1 b)

$$Z=\frac{Y-N\langle x\rangle}{\sqrt{N}}=\sum_i\left(x_i-\langle x\rangle\right)/\sqrt{N}$$ zu berechnen: $\langle z\rangle$, $\langle z^2\rangle$, $\langle z^3\rangle$

$$\langle z\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i\langle x_i-\langle x\rangle\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i\underbrace{\left(\langle x_i\rangle-\langle\langle x\rangle\rangle\right)}_{0}$$
$$=0$$

$$\langle z^2\rangle=\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i\left(x_i-\langle x\rangle\right)\right)^2\right\rangle$$
$$=\frac{1}{N}\left\langle\left(Y-N\langle x\rangle\right)^2\right\rangle$$
$$=\frac{1}{N}\left(\langle Y^2\rangle-2N\underbrace{\langle Y\rangle}_{N\cdot\langle x\rangle}\langle x\rangle+N^2\langle x\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{N}\left(\langle Y^2\rangle-N^2\langle x\rangle^2\right) \qquad \Big|\ (\Delta Y)^2=\langle Y^2\rangle-\langle Y\rangle^2$$
$$=\frac{1}{N}\left(\underbrace{(\Delta Y)^2}_{N(\Delta x)^2}+\underbrace{\langle Y\rangle^2}_{N^2\langle x\rangle^2}-N^2\langle x\rangle^2\right)$$
$$=(\Delta x)^2 \quad \leftarrow \text{unabh. von } N$$

$$\langle z^3\rangle=\left\langle\left(\frac{Y-N\langle x\rangle}{\sqrt{N}}\right)^3\right\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N}^3}\left\langle\left(Y^2-2YN\langle x\rangle+N^2\langle x\rangle^2\right)\left(Y-N\langle x\rangle\right)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}^3}\left\langle Y^3-N\langle x\rangle Y^3+2YN\langle x\rangle N\langle x\rangle-2Y^2N\langle x\rangle+N^2\langle x\rangle^2Y-N^3\langle x\rangle^3\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}^3}\left[\langle Y^3\rangle\left(1-N\langle x\rangle\right)-\langle Y^2\rangle\cdot 2N\langle x\rangle+3\langle Y\rangle N^2\langle x\rangle^2-N^3\langle x\rangle^3\right]$$

5.2) Kombinatorik und bedingte Wahrscheinlichkeiten

a) $X = \{1, \dots, 49\}$ mit $x_i \in X$ $\quad (N=6)$

- $P(x_i = 45 \wedge x_j = 46) = \binom{47}{4} / \binom{49}{6}$, da von den $\binom{49}{6}$ möglichen Kombinationen $\binom{47}{4}$ die geforderte Bedingung erfüllen

$\Rightarrow P(x_i = 45 \wedge x_j = 46) = \frac{47!}{4! \cdot 43!} \cdot \frac{6! \cdot 43!}{49!} = \frac{6 \cdot 5}{49 \cdot 48} = \frac{5}{392} \approx 1{,}28\,\%$

c) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

i) $X = \{1, \dots, 6\}$ mit $x_i \in X$ $\quad (N=3)$

- $P(\Sigma x_i \geq 8) = 1 - P(\Sigma x_i < 8) = 1 - \sum_{k=3}^{7} P(\Sigma x_i = k) = 1 - \{(\frac{1}{6})^3 + 3 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 6 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 10 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 15 \cdot (\frac{1}{6})^3\} = 1 - 35 \cdot (\frac{1}{6})^3 = \frac{181}{216} \approx 83{,}8\,\%$

ii)

- $P(\sum_{i=1}^{2} x_i = 12 \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 24) = \frac{P(\sum_{i=1}^{2} x_i = 12 \wedge \sum_{i=1}^{5} x_i = 24)}{P(\sum_{i=1}^{5} x_i = 24)} = \frac{P(\sum_{i=1}^{2} x_i = 12) \cdot P(\sum_{i=2}^{5} x_i = 12)}{P(\sum_{i=1}^{5} x_i = 24)}$

$\Rightarrow P(\sum_{i=1}^{2} x_i = 12 \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 24) = \frac{(1/6)^2 \cdot 24 (1/6)^3}{205 \cdot (1/6)^5} = \frac{24}{205} \approx 11{,}71\,\%$

$P(\sum_{i=1}^{2} x_i = 12) = (\frac{1}{6})^2$

$P(\sum_{i=2}^{5} x_i = 12) = 6 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 6 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 3 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 3 \cdot (\frac{1}{6})^3 + 6 \cdot (\frac{1}{6})^3 = 24 (\frac{1}{6})^3$

$P(\sum_{i=1}^{5} x_i = 24) = (\frac{1}{6})^5 \cdot [20 + 50 + 90 + 45] = 205 \cdot (\frac{1}{6})^5$

$$\left[\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} 1\,5666 \rightarrow 4 \cdot 5 = 20 \end{array}\right\} & 20 \\
\left.\begin{array}{l} 2\,4666 \rightarrow 4 \cdot 5 = 20 \\ 2\,5566 \rightarrow 6 \cdot 5 = 30 \end{array}\right\} & 50 \\
\left.\begin{array}{l} 3\,3666 \rightarrow 4+3+2+1 = 10 \\ 3\,4566 \rightarrow 12 \cdot 5 = 60 \\ 3\,5556 \rightarrow 4 \cdot 5 = 20 \end{array}\right\} & 90 \\
\left.\begin{array}{l} 4\,4556 \rightarrow 12+9+6+3 = 30 \\ 4\,5555 \rightarrow 1 \cdot 5 = 5 \\ 4\,4466 \rightarrow 10 \end{array}\right\} & 45
\end{array}\right]$$

d) Ja, nach öffnen des ersten Tores sollte die Wahl geändert werden, da nur wenn zu Beginn das Tor mit dem Auto ausgesucht wurde $(P(A) = \frac{1}{3})$, eine Umentscheidung falsch wäre. Wurde zu Beginn ein Tor mit einer Ziege ausgewählt $(P(Z) = \frac{2}{3})$, ist, nachdem das zweite Tor mit einer Ziege geöffnet wurde, nur noch das Tor mit Auto übrig, weswegen hier eine Umentscheidung sinnvoll ist.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Umentscheidung sinnvoll ist $P = \frac{2}{3}$.

(Dies gilt allerdings nur solange der Wunsch nach einem Auto dem nach einer Ziege übersteigt.)

Aufgabe 3:

a) $\Omega(E) = \sum_{\omega} \delta\left(E + h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)$ mit $\omega = (\sigma_1,\dots,\sigma_N) \in \{1,-1\}^N$

$$= \sum_{\omega} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{i(E+h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i)k}$$

$$= \sum_{\omega} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{iEk}\cdot\prod_{i=1}^{N} e^{ih\sigma_i k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{iEk}\prod_{i=1}^{N}\sum_{\sigma_i=\pm1} e^{ih\sigma_i k} \quad \Big|\ e^{hk}+e^{-hk} = 2\cos(hk)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{iEk}(2\cos(hk))^N$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{iEk}\, e^{N\ln(2\cos(hk))}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{iEk+N\ln(2\cos(hk))}$$

b) $f(k) = ikE + N\ln[2\cos(hk)]$

Extremum:

$$0 \overset{!}{=} \frac{df(k)}{dk} = \frac{-N}{2\cos(hk)}\cdot 2\sin(hk)\cdot h + iE = -Nh\tan(hk) + iE$$

$$\frac{d^2 f(k)}{dk^2} = -Nh^2\sec^2(hk)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\arctan(ie)}{h} \quad \text{mit } e = \frac{E}{Nh}$$

Entwicklung in k um Extremum $\frac{\arctan(ie)}{h}$ bis zur zweiten Ordnung:

$$T_f\left(k; \frac{\arctan(ie)}{h}\right) = \underbrace{\frac{i}{h}\arctan(ie)E + N\ln[2\cos(\arctan(ie))]}_{0.\text{ order}} + \underbrace{0}_{1.\text{ order}}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}Nh^2\sec^2(\arctan(ie))\left(k - \frac{\arctan(ie)}{h}\right)^2}_{2.\text{ order}} + \mathcal{O}(k^3)$$

Mit $\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ folgt für $\Omega(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, \exp[f(k)]$:

$$\Rightarrow \Omega(E) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[\frac{i}{h}\arctan(ie)E + N\ln[2\cos(\arctan(ie))]\right]\sqrt{\frac{2\pi}{Nh^2\sec^2(\arctan(ie))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[\frac{i}{h}\arctan(ie)E + N\ln[2\cos(\arctan(ie))]\right]\frac{\cos[\arctan(ie)]}{h}$$

Mit $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ und $\arctan(ix) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ folgt:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N h^2(1-e^2)}}\exp\left[-\frac{E}{2h}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + N\ln\left[\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\right]\right] \quad \text{mit } e = \frac{E}{Nh}$$

c) $S = k_B \ln(\Omega)$

$$= k_B\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi N h^2(1-e^2)}}\right) - \frac{E}{2h}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + N\ln\left[\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\right]\right) \quad | \quad S = \mathcal{O}(T) + \cancel{\mathcal{O}(1, T^2, \ldots)}^{\to 0}$$

$$\simeq k_B N \ln\left[\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\right] \qquad \simeq \mathcal{O}(T)$$

d) $$T = (\partial_E S)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)} = \left(\frac{\partial}{\partial E} N \ln \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{E}{Nh}\right)^2}}\right)^{-1} = \left(N \frac{\sqrt{1-e^2}}{2} \cdot \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot 2\frac{E}{N^2h^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{2}{1-e^2}\frac{E}{Nh^2} = \frac{2}{1-\frac{E^2}{N^2h^2}} \cdot \frac{E}{Nh^2}$$

$E \to \pm Nh$: $\lim_{E \to +Nh} T = \infty$, $\lim_{E \to -Nh} T = \frac{1}{h}$

$E \to 0$: $\lim_{E \to 0} T = 0$

e) $$T = \frac{2}{1-\frac{E^2}{N^2h^2}} \cdot \frac{E}{Nh^2}$$

Ich weiß echt nicht, warum es hilft erst $E = E(T)$ auszudrücken... :/

$$\Rightarrow 1 - \frac{E^2}{N^2h^2} = \frac{2E}{TNh^2}$$

$$\Rightarrow E^2 + E \cdot \frac{2N}{T} - N^2h^2 = 0$$

$$\Rightarrow E_{1/2} = -\frac{N}{T} \pm N\sqrt{\frac{1}{T^2} + h^2}$$

$$= N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{T^2} + h^2} - \frac{1}{T}\right)$$

f) $$C_h(T) = N k_B \left(\frac{h}{k_B T}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{h}{k_B T}\right)}$$

$$C_h(T) \sim \frac{\cosh^{-2}\left(\frac{h}{k_B T}\right)}{T^2}$$

$\lim_{T \to \infty}$:

$$\lim_{T \to \infty} \cosh^{-2}\Big(\underbrace{\frac{h}{k_B T}}_{\to 0}\Big) = 1, \quad \lim_{T \to \infty} T^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{T \to \infty} C_h(T) = 0$$

$\lim_{T \to 0}$:

$$\lim_{T \to 0} \cosh^{-2}\left(\frac{h}{k_B T}\right) = 0, \quad \lim_{T \to 0} T^{-2} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{T \to 0} C_h(T) = 0$$

In der Umgebung von $T \approx 0$ ist $C_h \approx 0$, wobei C_h zwischen diese Umgebung und ∞ in der Größenordnung von h liegt. Im Unendlichen sinkt C_h mit T wieder auf 0.