Präsenzaufgabe 1)

(i) Wir nehmen an, dass es ein Weg $\gamma \in C([0,1], M)$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = \frac{1}{\pi}$ gibt ($0 \in M_1$ und $\frac{1}{\pi} \in M_2$, da $\sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\pi}\right)}\right) = \sin(\pi) = 0$)

Dann ist auch $Re(\gamma)$ stetig und wegen Zwischenwertsatz gibt es Punkte $t_k \in [0,1]$, so dass $Re(\gamma(t_k)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. $k \geq 1$

Der einzige Punkte in M mit $Re(z) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ ist jedoch

$z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} + i$, da $Re(z) = 0$ $\forall z \in M_1$.

Offenbar gilt $\lim_{k \to +\infty} \gamma(t_k) = i$, das ist ein Widerspruch, da wegen Stetigkeit $\lim_{k \to +\infty} \gamma(t_k) = \gamma(0) = 0$ gelten müsste.

Also gibt es keinen Weg von 0 nach $\frac{1}{\pi}$ in M und M ist nicht wegzusammenhängend.

(ii) Seien $z_1, z_2 \in M_1$. Dann ist $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) := t z_1 + (1-t) z_2$ ein Weg in M_1 zwischen z_1 und z_2, da $Re(\gamma(t)) = 0$ und

$|Im(\cancel{\gamma}(t))| \leq t|Im(z_1)| + (1-t)|Im(z_2)| \leq 1$. Somit ist M_1 wegzusammenhängend.

Seien $z_1, z_2 \in M_2$. Dann ist

$[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) = t Re(z_1) + (1-t) Re(z_2) + i \sin\left(\frac{1}{t Re(z_1) + (1-t) Re(z_2)}\right)$

ein Weg in M_2 zwischen z_1 und z_2. Somit ist M_2 wegzusammenhängend.

Seien nun A, B offen in M mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = M$. Da M_1 und M_2 wegzusammenhängend sind, muss jeweils $M_1 \subset A$ oder $M_1 \subset B$ und $M_2 \subset A$ oder $M_2 \subset B$ gelten.

Sonst wären z.B. die Mengen $M_1 \cap A$, $M_1 \cap B$ offen in M_1 und $(M_1 \cap A) \cup (M_1 \cap B) = M_1 \cap (A \cup B)$

$$= M_1 \cap M = M_1$$

während $(M_1 \cap A) \cup (M_1 \cap B) = \emptyset$ und sowohl $M_1 \cap A$ und $M_1 \cap B$ wären nicht leer. Dann wäre M_1 nicht zusammenhängend; das ist ein Widerspruch zum Wegzusammenhang. Analog für M_2.

Wenn $M_1 \cup M_2 \subset A$ oder $M_1 \cup M_2 \subset B$ sind wir fertig, da dann $B = \emptyset$ oder $A = \emptyset$.

Wir nehmen an, dass $M_1 \subset A$ und $M_2 \subset B$. Es ist $i \in M_1$ und da $M_1 \subset A$ offen in M ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, $\forall z \in M$ mit $|z - i| < \varepsilon$ folgt $z \in A$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} < \varepsilon$. Dann $z_k = t_k + i \in M_2$ und $|z_k - i| = t_k < \varepsilon$, also ist $z_k \in A$. Aber $z_k \in M_2 \subset B \Rightarrow z_k \in A \cap B$ ↯ zu $A \cap B = \emptyset \Rightarrow M$ ist zusammenhäng.

Präsenz 2)

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{(Re^{it}-a)(Re^{it}-b)} = i\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{(a-b)}\frac{1}{(Re^{it}-a)} - \frac{b}{(a-b)}\frac{1}{(Re^{it}-b)}\right]dt$$

$$= \frac{ia}{a-b}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}}{R-ae^{-it}}dt - \frac{bi}{a-b}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}}{(R-be^{-it})}dt$$

$$= \frac{-ia}{(a-b)}\int_{\gamma_1^*}\frac{1}{R-az}dz + \frac{bi}{(a-b)}\int_{\gamma_1^*}\frac{1}{(R-bz)}dz \quad \text{wobei } \gamma_1^*(t) = e^{-it} \quad t\in[0,2\pi].$$

wir haben $\int_{\gamma_1^*}\frac{1}{(R-az)}dz = \int_{\gamma_{11}^*}\frac{1}{(R-az)}dz + \int_{\gamma_{12}^*}\frac{1}{(R-az)}dz$

wobei $\gamma_{11}^*(t) = e^{-it}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ und $\gamma_{12}^*(t) = e^{-it}$, $t\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$

Wir definieren jetzt $\ln z := \ln(|z|) + \underbrace{\arg(z)}_{\in]-\pi,\pi[}$

und $\ln^*(z) := \ln(|z|) + \underbrace{\arg^*(z)}_{\in]\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4}[}$

Nach Lemma 5.2), wir haben

$$\int_{\gamma_{11}^*}\frac{1}{(R-az)}dz = -\frac{1}{a}\Big[\ln(|R-ae^{i\frac{\pi}{2}}|) + \arg(R-ae^{i\frac{\pi}{2}}) - \ln(|R-ae^{i0}|) - \arg(R-ae^{i0})$$

$$\int_{\gamma_{12}^*}\frac{1}{(R-az)}dz = -\frac{1}{a}\Big[\ln(|R-ae^{i2\pi}|) + \arg^*(R-ae^{i2\pi}) - \ln(|R-ae^{i\frac{\pi}{2}}|) - \arg^*(R-ae^{i\frac{\pi}{2}})\Big]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R}\frac{1}{(z-a)(z-b)}dz = \frac{1}{a-b}\Big[\arg(R-ae^{i\frac{\pi}{2}}) - \arg^*(R-ae^{i\frac{\pi}{2}}) + \arg^*(R-a) - \arg(R-a)$$
$$-\arg(R-be^{i\frac{\pi}{2}}) + \arg^*(R-be^{i\frac{\pi}{2}}) + \arg(R-b) - \arg^*(R-b)\Big]$$

Präsenzaufgabe 3

Sehe Skript: Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ und $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\gamma |f(z)|\, dz \overset{\text{Def.}}{=} \int_0^{2\pi} \underbrace{|e^{-it}|}_{=1} i \underbrace{e^{it}}_{(= \cos(t) + i\sin(t))} dt = 0$$

aber andererseits $\left| \int_\gamma \frac{1}{z} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} i \, dt \right| = \underbrace{|i|}_{=|e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1} 2\pi = 2\pi > 0.$

Präsenzaufgabe 4

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ eine ~~geschlossene~~ Kurve.

Dann ist $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$; $(t,s) \mapsto t + (1-t)\gamma(s)$

eine Homotopie auf die Kurve, die Konstant 1 ist.

Falls $\operatorname{Im}(\gamma(s)) \neq 0$ für alle $t < 1$, dann $H(t,s) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ $\forall t \in [0,1]$.

Falls $\operatorname{Im}(\gamma(s)) = 0$ ist, ist $\operatorname{Re}(\gamma(s)) > 0$ und somit auch $\operatorname{Re}(H(t,s)) > 0$ $\forall t < 1$.

Also $H(t,s) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ für alle $t \in [0,1]$