

Vorlesung 25

Phasenlage zwischen **Erreger** und **System** :

$$\tan \varphi = \frac{\Im[z_0]}{\Re[z_0]} = - \frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

$$\omega_E \rightarrow 0$$

$$\tan \varphi = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$\omega_E \rightarrow \omega_0$$

$$\tan \varphi = -\infty$$

$$\varphi = -\pi/2$$

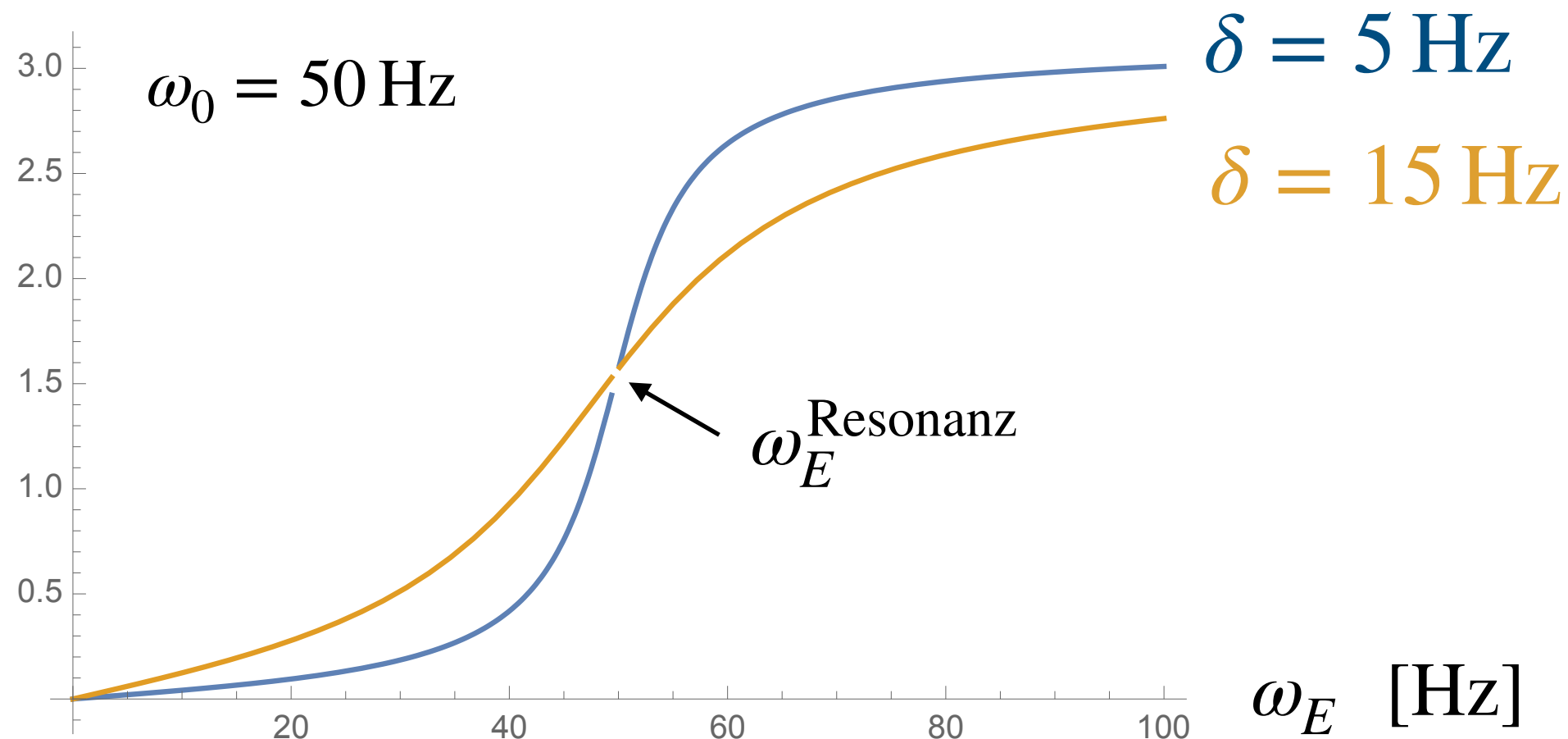
$$\omega_E \rightarrow \infty$$

$$\tan \varphi = 0$$

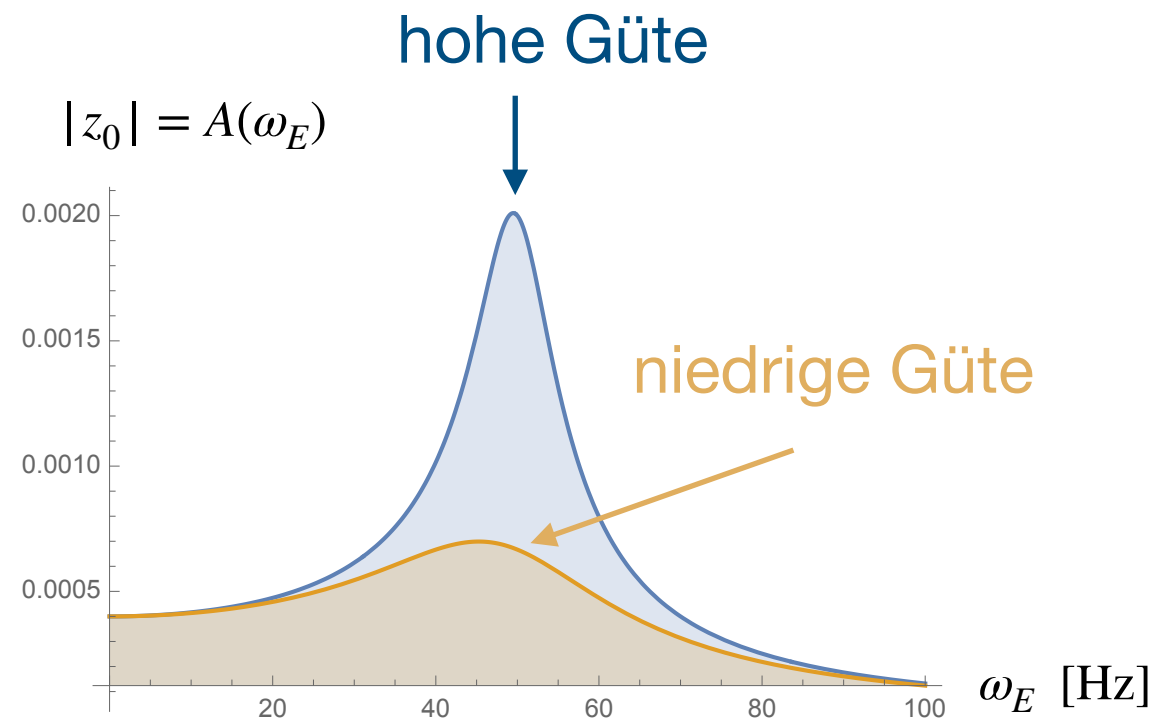
$$\varphi = -\pi$$

System hängt **hinter** Erreger **hinterher**

↓
 $-\varphi$



Güte Charakterisiert Stärke einer Resonanz



Definition:

$$Q = \frac{A(\omega_E = \omega_0)}{A(\omega_E = 0)}$$
$$= \frac{f_0 / (2\delta\omega_0)}{f_0 / \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Versuch : Glas zerspringen lassen

Freie Schwingung ohne Dämpfung :

Schwingung mit ω_0 wandelt kinetische Energie in potentielle Energie um und umgekehrt

$$E_{\text{pot}} \leftrightarrow E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{pot}} = - \int_x^0 k x' dx' = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad \leftarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_{\text{kin}} = \quad \quad \quad = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

mittlere Energie : $\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{pot}} dt = \frac{1}{T} \frac{m \omega_0^2}{2} \int_0^T x^2(t) dt$

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{kin}} dt = \frac{1}{T} \frac{m}{2} \int_0^T \dot{x}^2(t) dt$$



$$x(t) = A \sin \omega_0 t \quad (\text{OBdA } \varphi = 0)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\int_0^T \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt = \int_0^T \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt = \frac{T}{2}$$

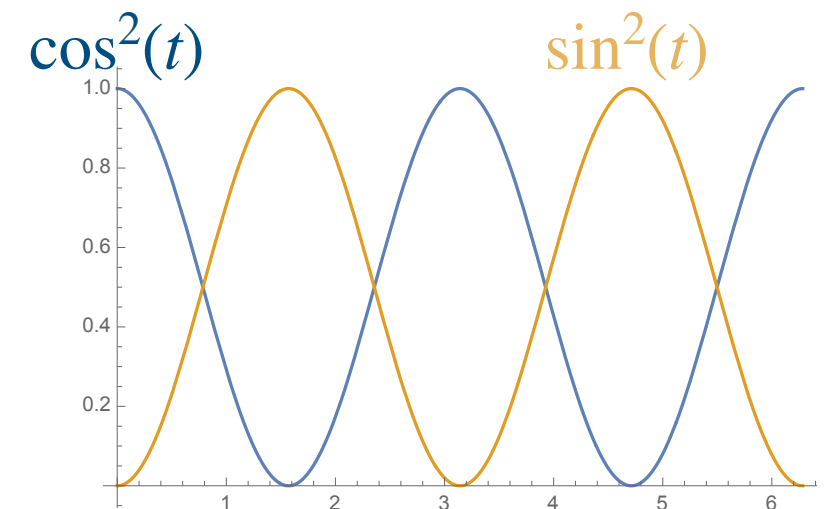
$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{T} \frac{m \omega_0^2}{2} \int_0^T A^2 \sin^2 (\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \frac{m \omega_0^2}{2} A^2 \cdot \frac{T}{2}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{T} \frac{m}{2} \omega_0^2 \int_0^T A^2 \cos^2 (\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \frac{m \omega_0^2}{2} A^2 \cdot \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{\text{ges}}$$

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \Rightarrow E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$



Erzwungene Schwingung nach Abklingen des Einschwingvorgangs :



System schwingt mit ω_E :

$$\langle E_{\text{ges}} \rangle = \frac{1}{4} m \omega_E^2 A^2 + \frac{1}{4} m \omega_E^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega_E^2 A^2$$

$$|z_0| = f_0 \cdot \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

Amplitude : $|z_0| = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$

vgl. Folie 467



$$= \frac{1}{2} m \omega_E^2 \cdot \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

Maximum : $\frac{d\langle E_{\text{ges}} \rangle}{d\omega_E} = 0 \Rightarrow \omega_E = \omega_0$ (**nicht** $\omega_E^{\text{Resonanz}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$!

(Herleitung durch explizites Lösen)

wegen Extrafaktor ω_E^2)

Einsetzen von $\omega_E = \omega_0$: $\Rightarrow \langle E_{\text{max}} \rangle = \frac{1}{2} m \frac{f_0^2}{4\delta^2}$ **unabhängig von ω_0 !**

mehr Realismus :

MP → starrer Körper → **deformierbarer Körper**

Mikroskopische Ursache (Atome und ihre Wechselwirkungen)

i.A. sehr komplex → eigenes Feld **Festkörperphysik** (condensed matter physics)

Hier nur einfache **Phänomenologie**

- effektive Beschreibung
- lineare Näherungen (Hook'sches Gesetz, ...)
- viele Materialien wesentlich komplizierter

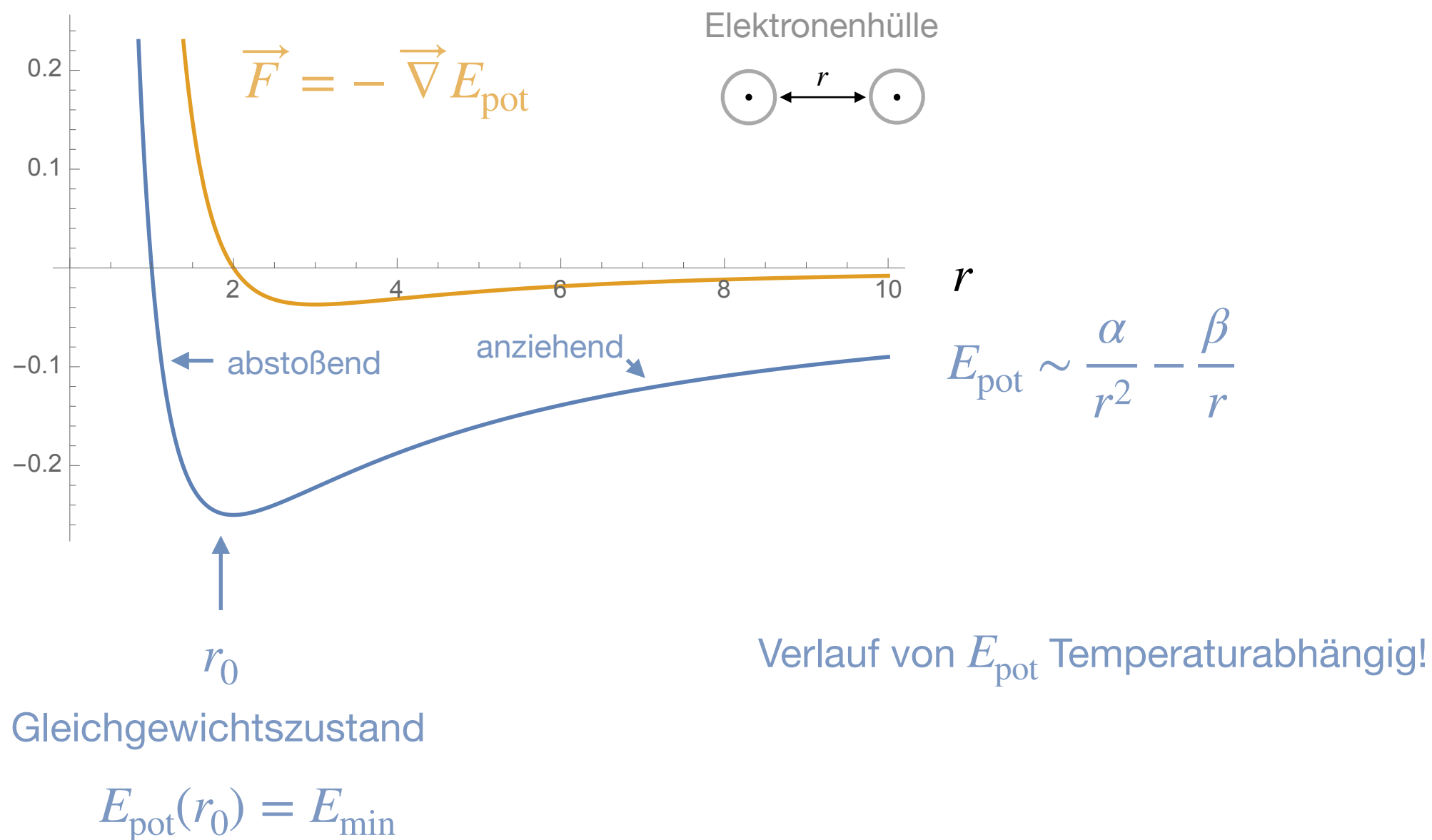
8.1. Aggregatzustände

#483

fest - flüssig - gasförmig

$$\Rightarrow \frac{\langle E_{\text{kin}} \rangle}{\langle E_{\text{pot}} \rangle} \text{ der Moleküle / Atome}$$

Bindungsenergie



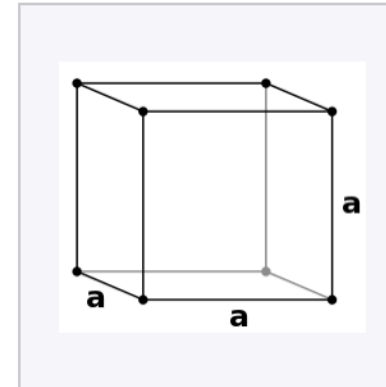
Falls Minimum vorhanden, haben Atome / Moleküle einen festen Abstand zueinander, im festen Zustand **können** sie in regelmäßigen Abständen angeordnet sein und **bilden ein Gitter**



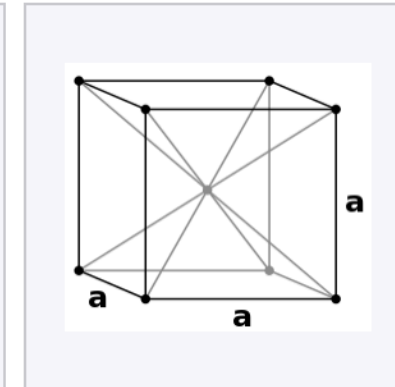
Wird ein Atom von vielen Atomen umgeben, so ist die Gesamtkraft, die auf das Atom wirkt die Summe aller Einzelkräfte

$$\vec{F}_{\text{Atom } i} = \sum_{ij} \vec{F}_j(\vec{r}_{ij})$$

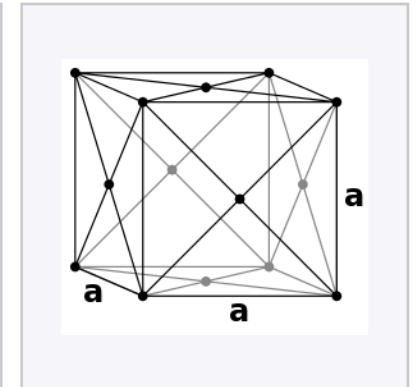
z.B.



Simple cubic (P)



Body-centered cubic (I)



Face-centered cubic (F)

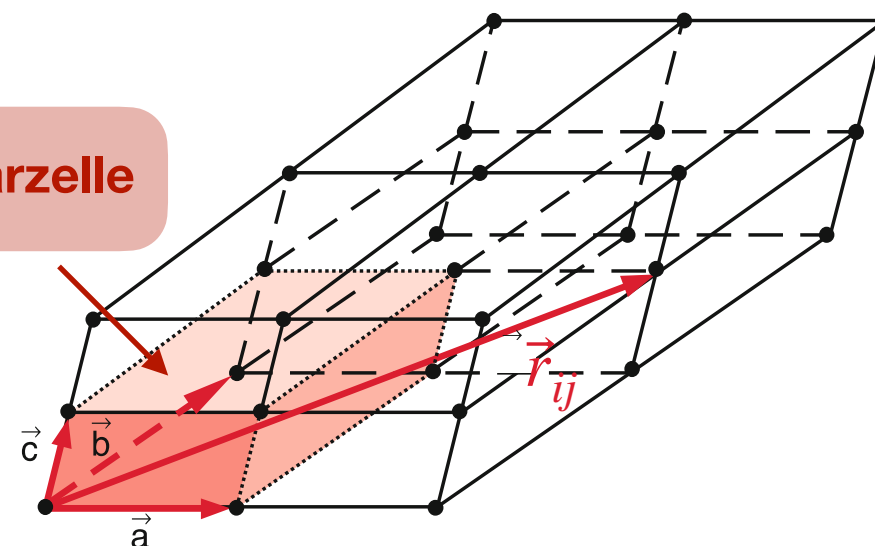
Die daraus resultierende potentielle Energie E_{pot} des Atoms i hängt von der räumlichen Anordnung der mit dem Atom wechselwirkenden Atomen ab.

Anordnung lässt sich im Gitter z.B. ausdrücken als

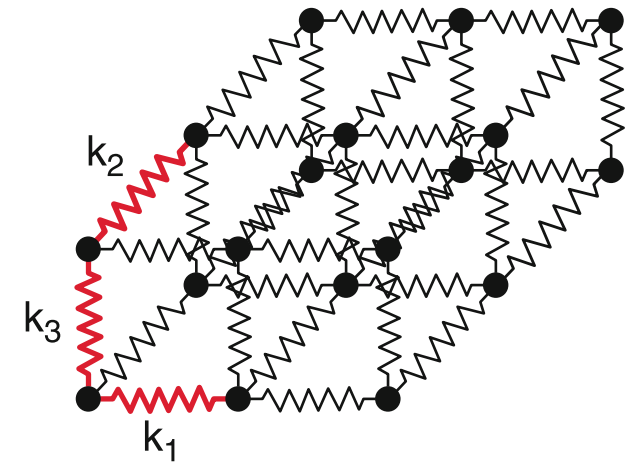
$$\vec{r}_{ij} = n_{ij}^a \vec{a} + n_{ij}^b \vec{b} + n_{ij}^c \vec{c}$$

Rot = Elementarzelle

$$\text{Gitter : } \left\{ n_{ij}^a \vec{a} + n_{ij}^b \vec{b} + n_{ij}^c \vec{c} \mid n_{ij}^k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Versuch : Modell : Kristallstruktur mit **Federn**



→ unterscheide zwischen

elastischer Verformung:

Gitterstruktur erhalten
(Federn), reversibel

plastischer Verformung:

Deformation über
Elastizitätsgrenze hinaus

→ neue Strukturen nach Krafteinwirkung

→ oder “Bruch”

fest :

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle \ll \langle E_{\text{bind}} \rangle$$

↑
Temperaturabh. (später)

nah	Ordnung	fern
amorph	polykristallin	Einkristall
Graphit	poly-Silikon	NaCl, Si, ...
Flüssigkeiten		

$$\text{Dichte : } \rho \sim 1 - 20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

gasförmig :

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle \gg \langle E_{\text{bind}} \rangle$$

→ Unordnung, kein “Eigenvolumen”, keine Oberfläche,
keine “Form”, hoch kompressibel, füllt jeden Raum aus

$$\text{Dichte : } \rho \sim 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

flüssig :

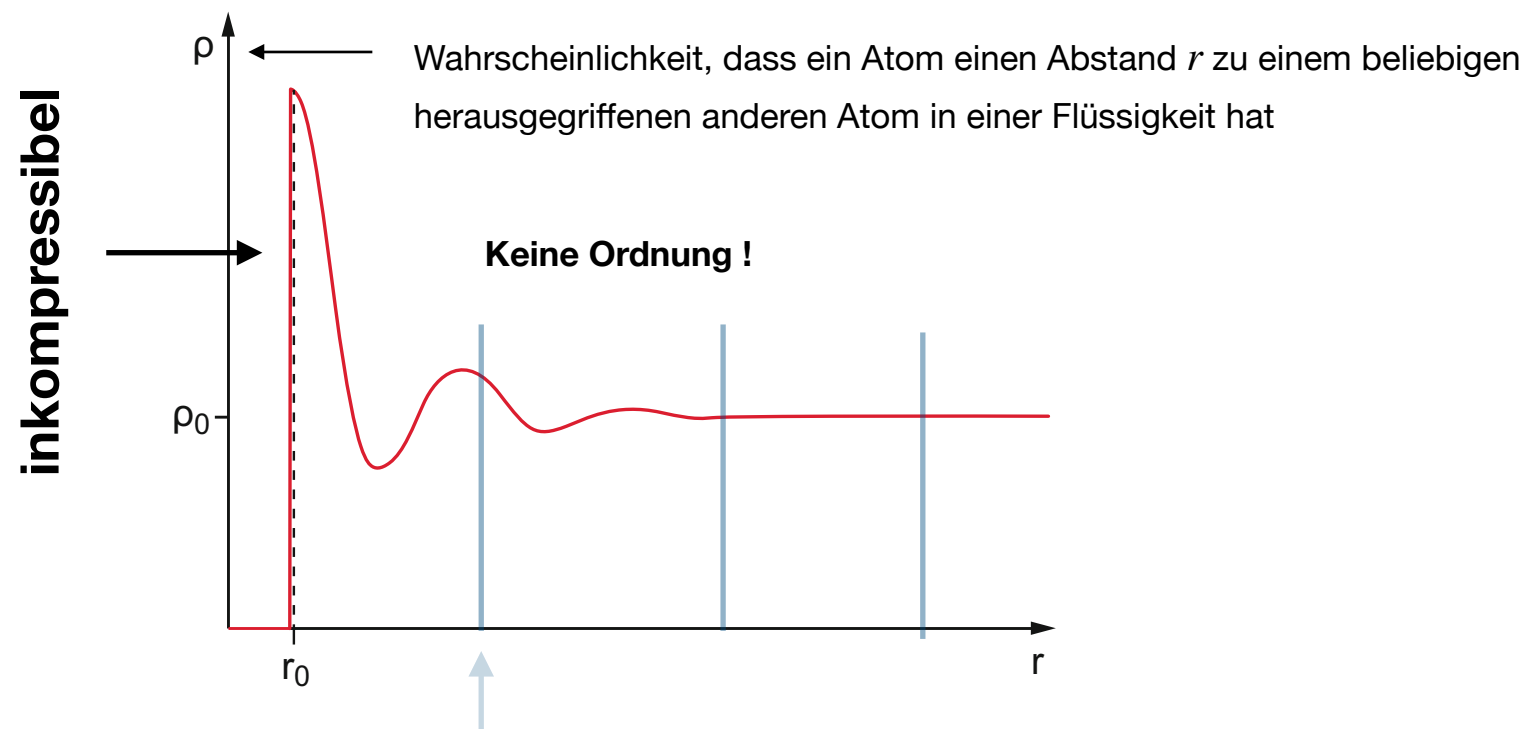
$$\langle E_{\text{kin}} \rangle \approx \langle E_{\text{bind}} \rangle$$

Atome / Moleküle leicht verschiebbar

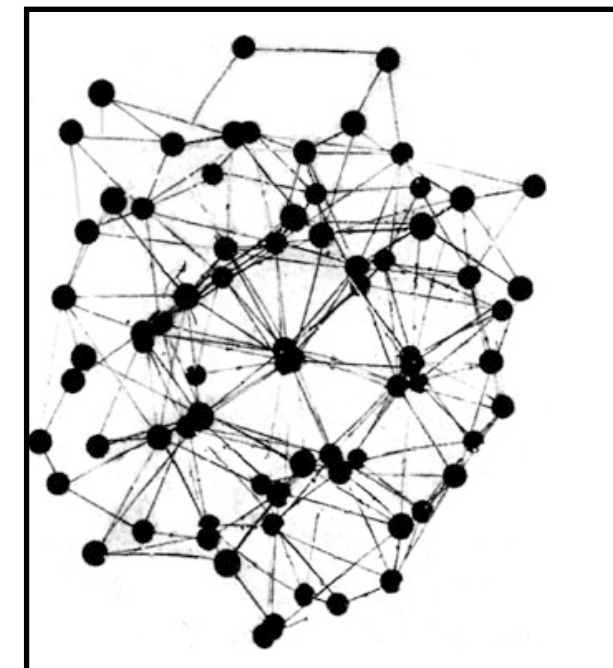
Volumen \approx konstant (Atome “**dicht-an-dicht**” → **inkompressibel**)

Übergang fest → flüssig gleitend

Dichte : $\rho \sim 0.5 - 1.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (flüssige Metalle, $\rho \sim 2 - 18 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)



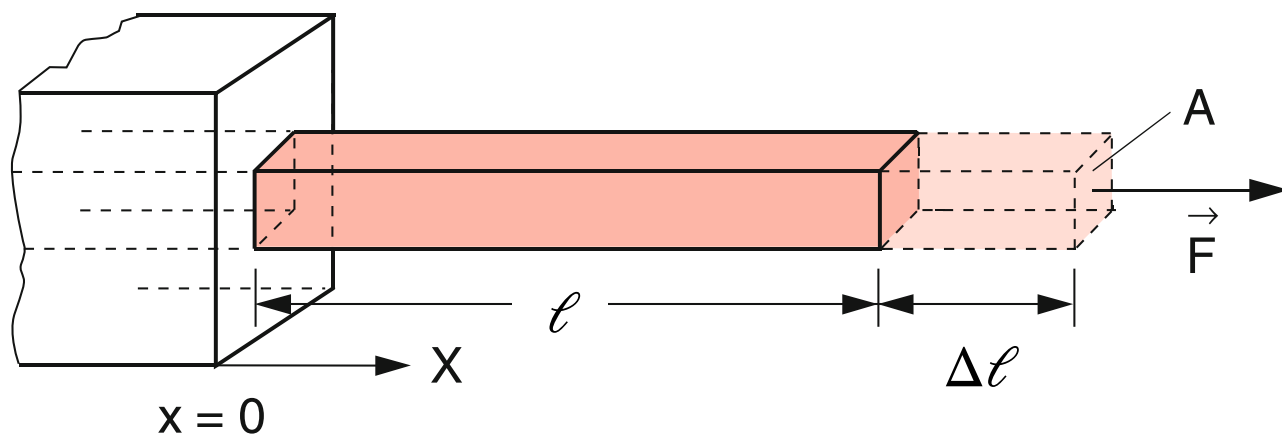
In einem Gitter würden wir zusätzlich diskrete Spitzen erwarten



8.2 Verformung fester Körper

#488

Wirkt auf einen elastischen Körper (Länge ℓ , Querschnitt A) eine **Zugkraft** F in x-Richtung, so **verlängert** sich die Länge um $\Delta\ell$:



Es gilt bei ausreichend kleinem $\Delta\ell$ dann :

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

bzw.
$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{E \cdot A}$$

Die Größe E heisst **Elastizitätsmodul**

$$[E] = [\text{N/m}^2]$$

→ Bei Materialien mit großem E benötigt man eine große Kraft um eine große rel. Verlängerung $\Delta\ell/\ell$ zu erzielen

Material	E 10^9 N/m^2
Aluminium	71
Gusseisen	64–181
Stahl, ferritisch	108–212
V2A-Stahl	200
Kupfer	125
Wolfram	407
Blei	19
Quarzglas	75
Eis (-4°C)	10

Definiere **Zugspannung** : $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A}$ bzw. $\sigma = \frac{F}{A}$

Dann erhält man das **Hookesche Gesetz** : $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E \cdot A \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}}{A} = E \cdot \varepsilon$



i.e. bei kleinen Dehnungen sind σ und ε zueinander Proportional. Kleine Änderung von r_0 (vgl. Folie 483)



mit Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Wir entwickeln $E_{\text{pot}} \sim \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$ in einer **Taylor-Reihe um** r_0 ($E_{\text{pot}}(r_0) = E_{\text{min}}$)

$$E_{\text{pot}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r - r_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n E_{\text{pot}}}{\partial r^n} \right)_{r=r_0} = 0 + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} + \frac{1}{6}(r - r_0)^3 \left(\frac{\partial^3 E_{\text{pot}}}{\partial r^3} \right)_{r=r_0} + \dots$$

$E_{\text{pot}}(r_0) = E_{\text{min}} \rightarrow \left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0$

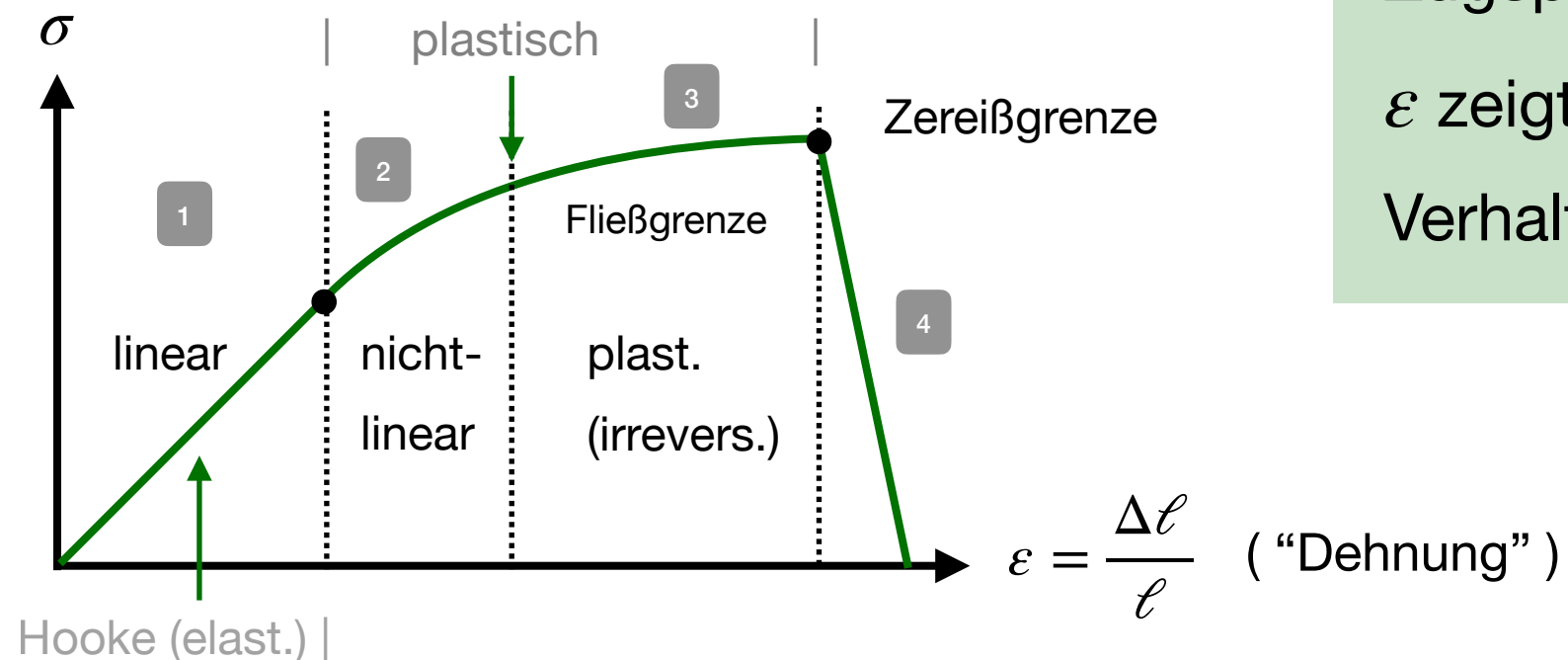
Für kleine **Auslenkung** $r - r_0$ kann man alle Terme mit Potenzen $n \geq 3$ vernachlässigen.

$$F = \partial_r \left[\frac{1}{2} (r - r_0)^2 \right] \cdot \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} = (r - r_0) \cdot \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} = (r - r_0) \cdot k$$

↑
Hookesches Gesetz !

Für große **Auslenkung** $r - r_0$ kann man die Terme mit Potenzen $n \geq 3$ nicht mehr vernachlässigen.

Zugspannung



Zugspannung σ versus Dehnung ε zeigt Abweichung vom linearen Verhalten

1

linearer Bereich

Hookesches Gesetz gilt

2

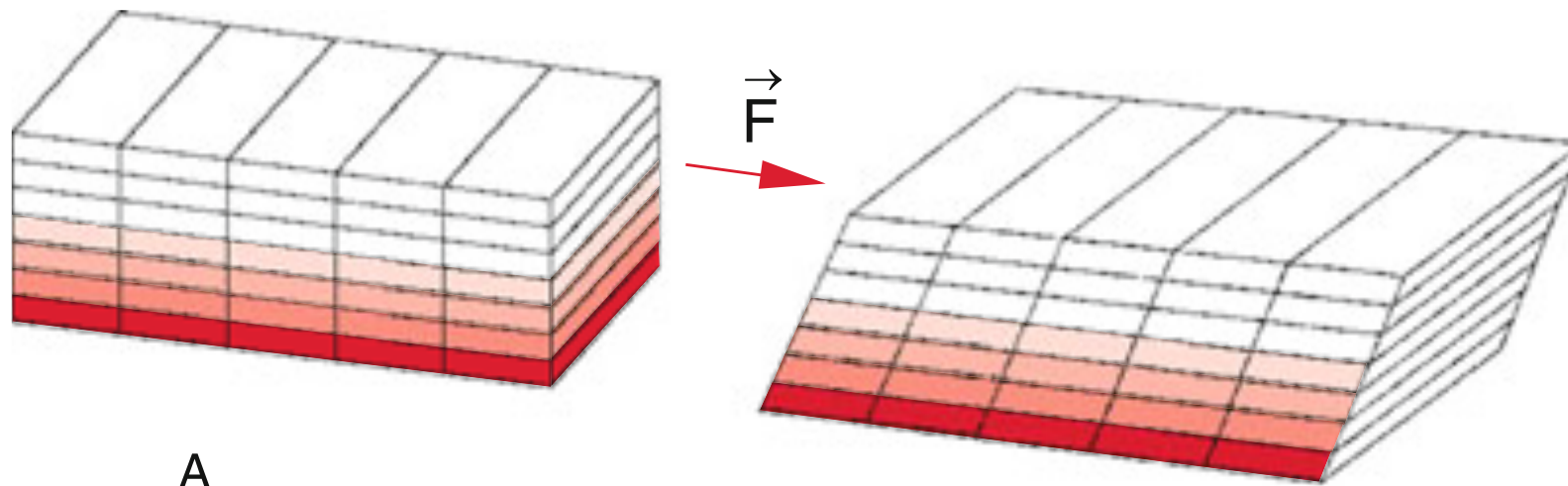
nichtlinearer Bereich

Dehnung wächst **stärker** als Spannung

3

Fließgrenze

Gefügeänderungen setzen ein, Atomlagen verschieben sich gegeneinander



Nach **Entlastung**
 → **dauerhafte**
 Veränderungen

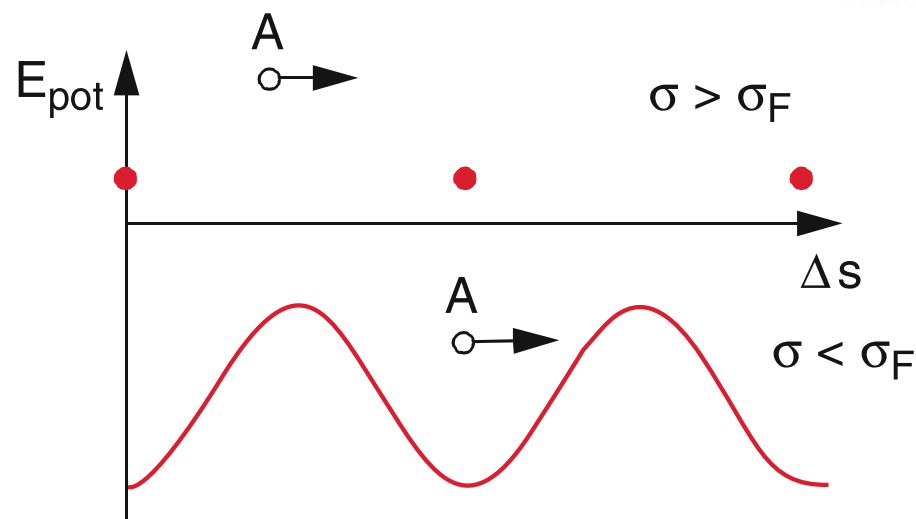


Illustration für ein einzelnes Atom:
 oberhalb der Fließgrenze kann sich ein
 Atom "frei" verschieben

4

Zerreißgrenze

Versuch : Flummi, Stahlkugeln versus Bleikugeln auf Glasplatte



jeder Festkörper verform sich unter Kraft

plastisch : Knetgummikugel, Silly Putty, Gedächtnisdraht, Temperaturabhängigkeit

Versuch :	Drähte dehnen	0.2 mm Stahl	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
		0.2 mm Cu	$E = 129 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

Zugverfestigung fließen → verschieben von Gitterebenen

Härtung von Cn-Plättchen



Mechanische Verformungseigenschaften sind temperaturabhängig