Zusammenfassung: Induzierte Spaltung, γ-Zerfall (VL1, KW 47)

• Induzierte Spaltung

$n + ^{238}_{92}U$ **ΔB = 5 MeV aber Spaltbarriere = 6,1 MeV für $^{239}_{92}U$**
schnelle Neutronen notwendig, aber $\sigma \sim 1/v$

$n + ^{235}_{92}U$ **ΔB = 6,4 MeV, Spaltbarriere = 5,3 MeV für $^{236}_{92}U$ (ug $\rightarrow$ gg-Kern)**
$\leftrightarrow$ thermische Neutronen ✓

• γ-Zerfall

$\leftrightarrow$ Multipolübergänge

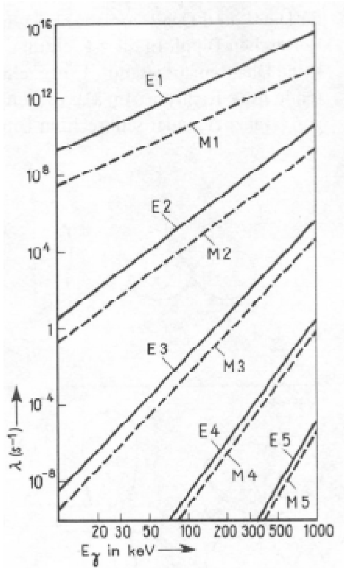
Bsp. für einen M1- Übergang (Dipol):

$1^+ \rightarrow 0^+$

$\Delta P = +, \quad \Delta J = 1,$

$(-1)^{L+1} = + \quad \Rightarrow \quad M$

$\leftrightarrow$ E_γ $\rightarrow$ Abstände der Energieniveaus
$\leftrightarrow$ Winkelverteilungen (Polarisation)
$\rightarrow$ Rückschlüsse auf J^P der beteiligten Kernniveaus



Nutzen von beobachteten γ-Zerfallslinien im Strahlenschutz

$\Leftrightarrow$ Freimessen von Gegenständen als SHK

UNIVERSITÄT BONN

Die Abteilung Strahlenschutz des HISKP sucht SHK mit:

- Interesse an einer verantwortungsvollen Tätigkeit
- Erfolgreich abgeschlossenem Praktikum 4
- Bereitschaft zu Arbeit in Kontrollbereichen

Ihre Aufgaben sind:

- Aktivierungs- und Kontaminationsmessungen in den Kontrollbereichen des HISKP
- Bedienung, Kalibration und Wartung von Strahlenschutz-Messgeräten
- Messung und Auswertung von γ–Emmissionsspektren mittels HPGe-Detektor
- Kontrolle von Wischproben mittels α,β- Counter
- Dokumentation der Messergebnisse

Bei Interesse:

Dr. Marcus Grüner
gruener@hiskp.uni-bonn.de

Dr. Christoph Wendel
cwendel@hiskp.uni-bonn.de

Zusammenfassung: Induzierte Spaltung, γ-Zerfall (VL1, KW 47)

- **Induzierte Spaltung**

$n +^{238}_{92} U$ **ΔB = 5 MeV aber Spaltbarriere = 6,1 MeV für $^{239}_{92}U$**
schnelle Neutronen notwendig, aber $\sigma \sim 1/v$

$n +^{235}_{92} U$ **ΔB = 6,4 MeV, Spaltbarriere = 5,3 MeV für $^{236}_{92}U$ (ug $\rightarrow$ gg-Kern)**
$\leftrightarrow$ thermische Neutronen ✓

- **γ-Zerfall**

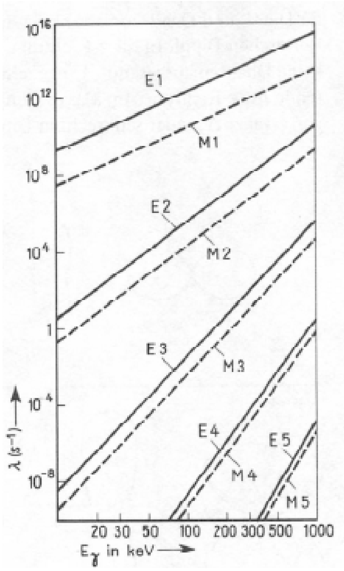
$\leftrightarrow$ Multipolübergänge

Bsp. für einen M1- Übergang (Dipol):

$1^+ \rightarrow 0^+$

$\Delta P = +, \quad \Delta J = 1,$

$(-1)^{L+1} = + \quad \Rightarrow \quad M$



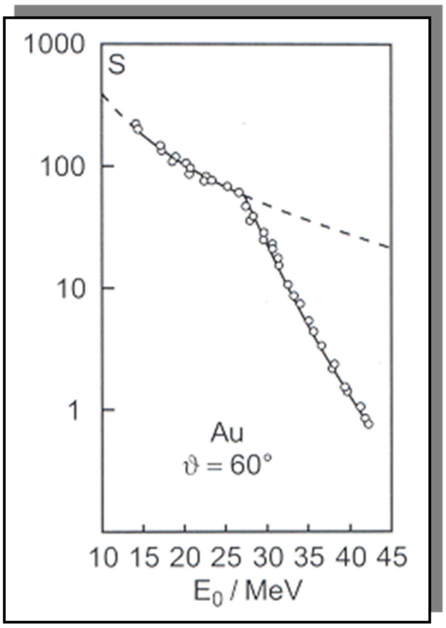
$\leftrightarrow$ E_γ $\rightarrow$ Abstände der Energieniveaus
$\leftrightarrow$ Winkelverteilungen (Polarisation)
$\rightarrow$ Rückschlüsse auf J^P der beteiligten Kernniveaus

... weiter mit: Elastische Streuung: $a + b \rightarrow a' + b'$
$\leftrightarrow$ Kernladungsverteilungen aus der e^--Streuung

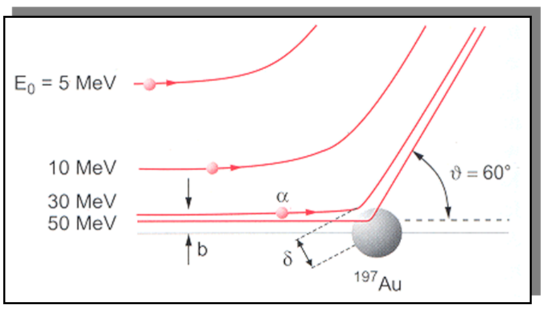
Erinnerung: Rutherford Experiment - Coulomb-Streuung

Experiment mit α-Teilchen
Abschätzung des Kernradius aus Abweichungen von der Coulomb-Streuung

- **fester Streuwinkel:**



$\Leftrightarrow$ Effekt der starken Wechselwirkung



$\Rightarrow$ Bestimmen des Kernradius

$$R_K \approx \delta_{crit} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 2E_{kin}} \cdot \left[1 + 1/\sin(\frac{\theta_{crit}}{2})\right]$$

$$\Rightarrow \quad R = R_0 \cdot A^{1/3}, \qquad R_0 \approx 1.3 fm$$

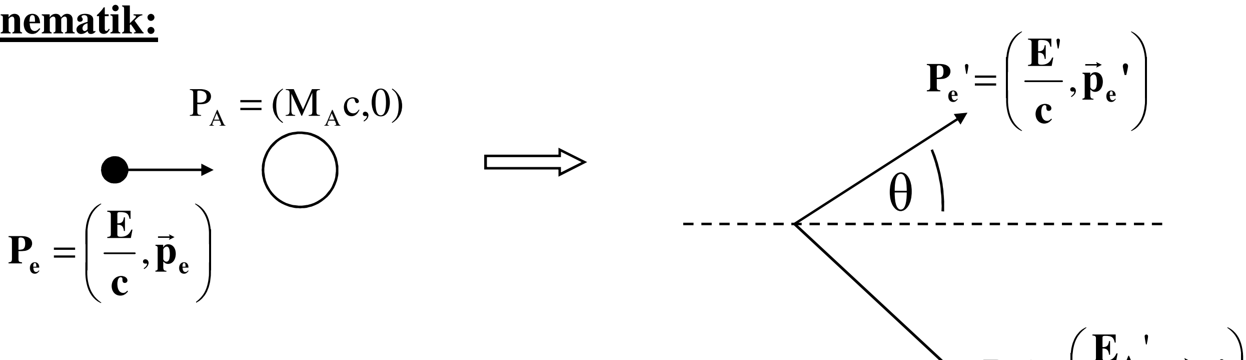
Streuung von Elektronen an Kernen

elektromagnetische WW; Ausmessung der <u>Ladungsverteilung</u>

<u>Vorteile:</u> Elektron elementar, keine innere Struktur
EM-WW sehr genau bekannt und zu berechnen

<u>Nachteile:</u> Wirkungsquerschnitte kleiner als bei starker WW

<u>Kinematik:</u>



Berechnung der Energie des gestreuten Elektrons:

4-Impulserhaltung: $P_e + P_A = P_e' + P_A'$

Elastische Streuung von Elektronen an Kernen

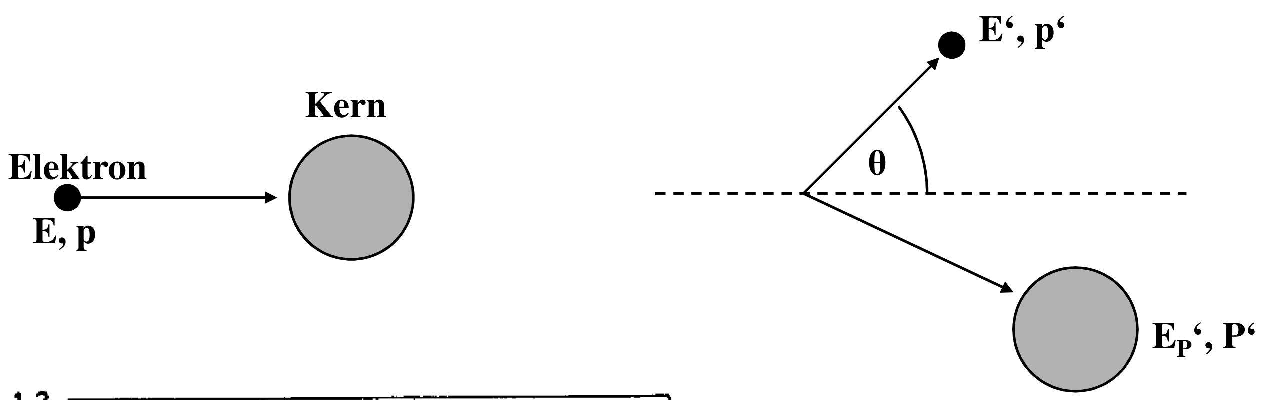
Berechnete Elektronenenergie :

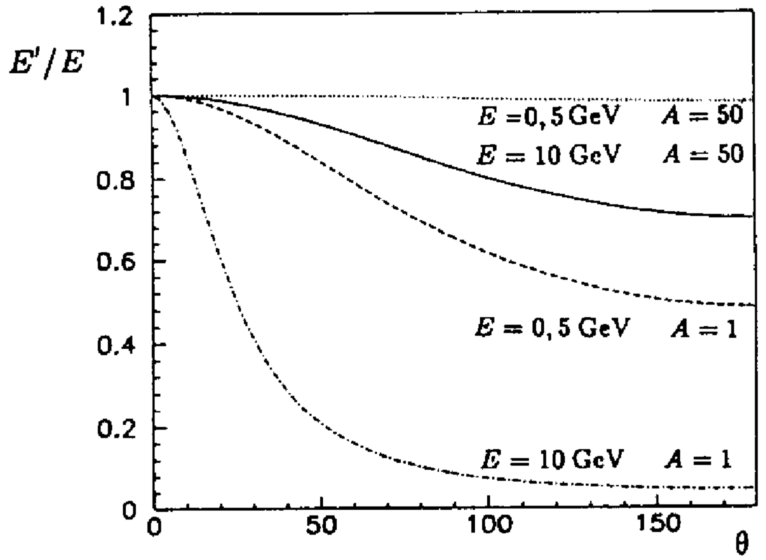
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M_A c^2}(1 - \cos(\theta))} = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M_A c^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{wegen } 1 - \cos(\theta) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$E - E' = \nu$ **Energieübertrag auf Rückstoßkern**

bei <u>elastischer</u> Streuung:
- fester Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Energie E´,
- Streuenergie E´ um so kleiner (Energieübertrag auf Rückstoßkern um so größer) je größer $E/M_A c^2$

Elastische Streuung von Elektronen an Kernen





$$E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2 \cdot (1-\cos\theta)}$$

Rutherfordstreuung

Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Vernachlässigt: Energieübertrag auf den Rückstoßkern, Spin
Kern wird als „punktförmige Ladung“ betrachtet

⇔ Bisher klassisch abgeleitet

Jetzt: Schrittweises Annähern an die realistische Elektron-Kern-Streuung
⇒ Ladungsverteilung der Kerne

⇒ Ladungsverteilung des Protons

⇒ ..... Struktur des Protons ⇔ etwas später in der Vorlesung

Ableitung des Wirkungsquerschnittes mittels Fermi‘s goldener Regel (Quantenmechanik) + Berücksichtigung der Ladungsverteilung des Kernes

$$\mathrm{W} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\Psi_f|\mathrm{H}_{int}|\Psi_i\rangle\right|^2 \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dE_f}}$$

⇒ 1) Relevante kinematische Größen
2) Matrixelement
=> Wirkungsquerschnitt

Rutherfordstreuung - kinematische Größen -

Kinematik:

$$q = k - k' = \begin{pmatrix} E - E' \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

Lorentz-Invarianten:

4er-Impulsübertrag: $(\hbar = c = 1)$

$$Q^2 = -q^2 = -k^2 - k'^2 + 2kk'$$
$$= -2m_e^2 + 2(EE' - |\vec{k}||\vec{k}'|\cos\theta)$$
$$\approx 2EE'(1-\cos\theta) = 4EE'\sin^2\theta/2$$

im Laborsystem

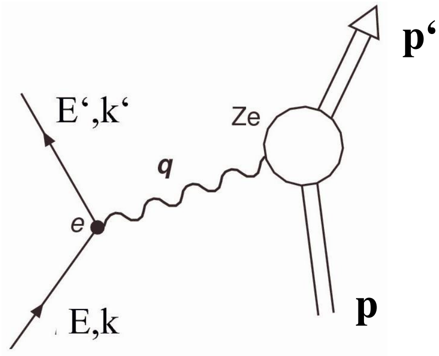
Energieübertrag:

$$\nu = \frac{pq}{M} = E_{\gamma^*} = E - E'$$

im Laborsystem

Quantenfeldtheorie:

Elektron emmitiert ein Photon mit Impulsübertrag q, dass vom Kern mit der Ladung Ze absorbiert wird



Elastische Streuung:

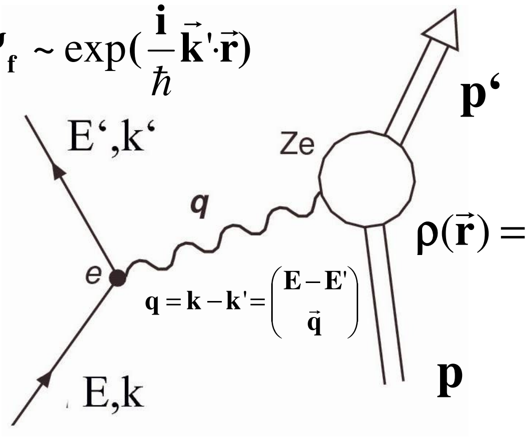
$$p' = p + q$$
$$p'^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$
$$M^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu} = 1$$

Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

(Kein Rückstoß, kein Spin (rechnen mit 3er-Impulsen) **)**

Born'sche Näherung $(Z\alpha \ll 1)$

$$\Psi_f \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{k}'\cdot\vec{r}\right)$$



$$\rho(\vec{r}) = Zef(\vec{r})$$

$$\Psi_i \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

Übergangsmatrixelement

$$M_{fi} = \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | e\Phi(\vec{r}) | \Psi_i \rangle$$
$$= \frac{e}{V}\int e^{(-i\vec{k}'\cdot\vec{r})/\hbar}\Phi(\vec{r})e^{(i\vec{k}\cdot\vec{r})/\hbar}d^3r$$
$$= \frac{e}{V}\int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}\Phi(\vec{r})d^3r$$

$\Phi(\vec{r})$: **Elektrisches Potential**

$\rho(\vec{r})$: **Ladungsdichte**

Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

(Kein Rückstoß, kein Spin)

Übergangsmatrixelement

$$M_{fi} = \frac{e}{V}\int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}\Phi(\vec{r})d^3r$$

$$= \frac{-e\hbar^2}{V|\vec{q}|^2}\int \Delta e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}\Phi(\vec{r})d^3r$$

$$= \frac{e\hbar^2}{\varepsilon_0 V|\vec{q}|^2}\int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}\rho(\vec{r})d^3r$$

$$= \frac{Z4\pi\alpha\hbar^3 c}{V|\vec{q}|^2}\underbrace{\int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}f(\vec{r})d^3r}_{F(\vec{q})}$$

mit:

<= $$\Delta e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar} = -\frac{|\vec{q}|^2}{\hbar^2}e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar}$$

<= **Green'sches Theorem:**

$$\int(u\Delta v - v\Delta u)d^3r = 0$$

Poisson-Gleichung:

$$-\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Formfaktor = Fouriertransformierte der Ladungsverteilung $f(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/Ze$

Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

(Kein Rückstoß, kein Spin)

Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der Strahlteilchen pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit } x \text{ Zahl der Streuzentren}}$$

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\phi_S \cdot N_T}$$

$$W = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der Strahlteilchen } x \text{ Zahl der Streuzentren}}$$

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\Psi_f|H_{int}|\Psi_i\rangle\right|^2\frac{dn}{dE_f} = \frac{\dot{N}}{N_S\cdot N_T} = \frac{\sigma\cdot\phi_S}{N_S} = \frac{\sigma\cdot\frac{N_S}{V}\cdot v_s}{N_S} = \frac{\sigma\cdot v_s}{V}$$

$$\Rightarrow\quad d\sigma\cdot\frac{v_s}{V} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\Psi_f|H_{int}|\Psi_i\rangle\right|^2\frac{V|\vec{k}'|^2\,d\vec{k}'}{(2\pi\hbar)^3 dE_f}d\Omega$$

Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung

(Kein Rückstoß, kein Spin)

Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

$$d\sigma \cdot \frac{v_s}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle \right|^2 \frac{V\,|\vec{k}'|^2\, d\vec{k}'}{(2\pi\hbar)^3 dE_f} d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |M_{fi}|^2 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} E' \approx |\vec{k}'| c \\ v \approx c \end{array}}$$

$$= \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \cdot \left(\frac{Z 4\pi\alpha\hbar^3 c}{V |\vec{q}|^2} F(\vec{q}) \right)^2$$

$$= \frac{Z^2 4\alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q} c|^4} |F(\vec{q})|^2$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{Q^2 = -q^2 = \frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \theta/2}$$

mit E=E‘

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

Rutherford-WQ

Formfaktor = Fouriertransformierte der Ladungsverteilung

$$F(\vec{q}) = \int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar} f(\vec{r}) d^3 r$$

Ausgedehnte Ladungsverteilung - Formfaktoren -

(Rutherfordstreuung: kein Rückstoß, kein Spin)

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

Rutherford-WQ

Formfaktor = Fouriertransformierte der Ladungsverteilung

$$F(\vec{q}) = \int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar} f(\vec{r}) d^3 r$$

Messung der Ladungsverteilung eines unbekannten Objektes:

- Messung des Wirkungsquerschnittes
- Division durch Rutherford-Wirkungsquerschnitt (berechnet)
- Bestimmen des Formfaktors
- Fourier-Rücktransformation:

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar} F(q) d^3 q$$

Hier : kugelsymmetrischer Fall:

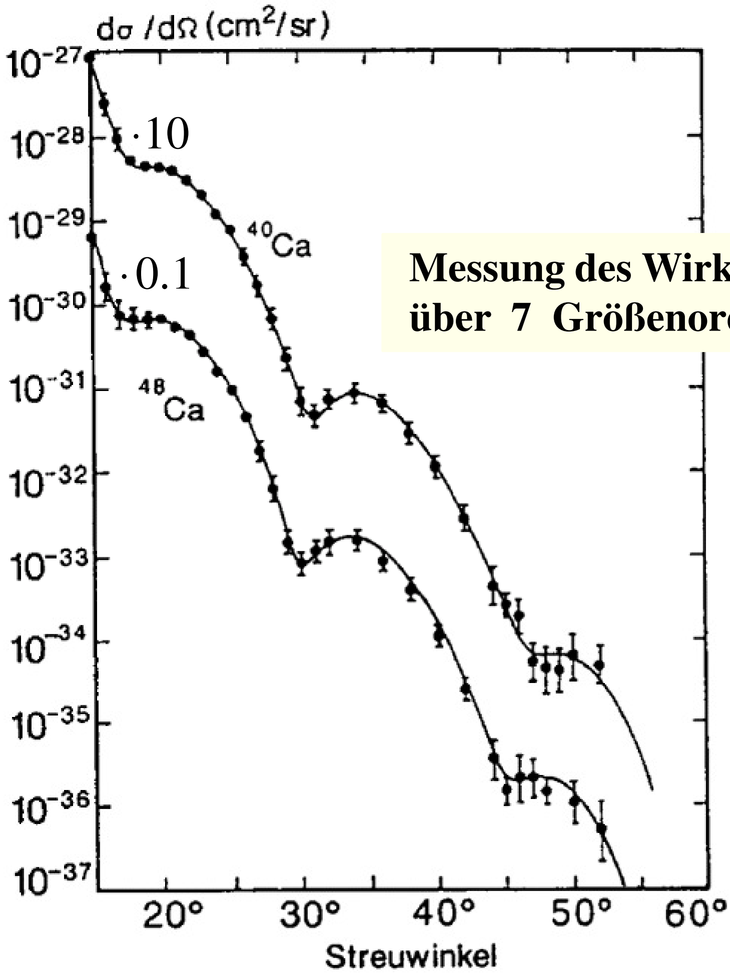
$$f(\vec{r}) = f(|\vec{r}|), \quad F(\vec{q}) = F(q)$$

oft auch als $F(q^2)$

Problem: Exp. Messung bei hohen q
- Begrenzte Strahlenergie
-WQ fällt mit zunehmendem q^2 ab

<=> Messung über gewissen Bereich, theoret. Parametrisierungen von f(r), berechnen von F(q), dann Vergleich mit Messung

Ausgedehnte Ladungsverteilung - Formfaktoren -



<u>**Streuung an ^{40}Ca und ^{48}Ca**</u>

Messung des Wirkungsquerschnittes über 7 Größenordnungen

⇔ Problem: Exp. Messung bei hohen q
- **Begrenzte Strahlenergie**
- **WQ fällt mit zunehmendem q^2 ab**

⇔ Messung über gewissen Bereich,
- **theoret. Parametrisierung von f(r),**
- **Berechnen von F(q),**
- **dann Vergleich mit Messung**

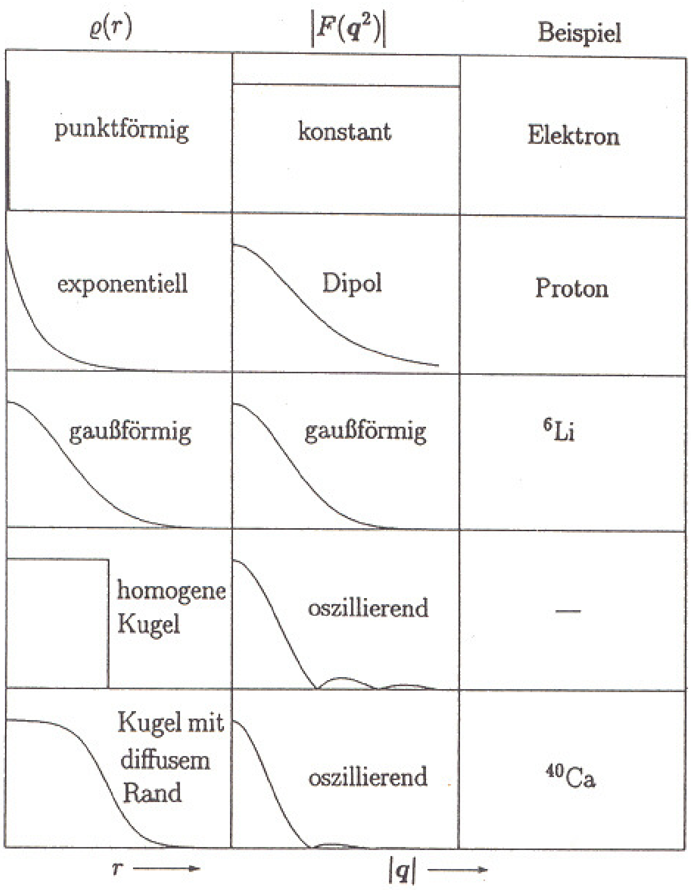
Ausgedehnte Ladungsverteilung - Formfaktoren -

Analytische Berechnung von $F(q^2)$ für einfache Radialfunktionen möglich

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi)\cdot\exp(-ar)$	$\left(1+q^2/a^2\hbar^2\right)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2}\cdot\exp(-a^2r^2/2)$	$\exp\left(-q^2/2a^2\hbar^2\right)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \le R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\,\alpha^{-3}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha=\lvert q\rvert R/\hbar$	oszillierend

Ausgedehnte Ladungsverteilung - Formfaktoren -

Analytische Berechnung von $F(q^2)$ für einfache Radialfunktionen möglich



$\varrho(r)$	$\lvert F(q^2)\rvert$	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	^{6}Li
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	^{40}Ca

$r \longrightarrow$ $\quad$ $\lvert q\rvert \longrightarrow$

$$\mathbf{F(q^2) = 1}$$

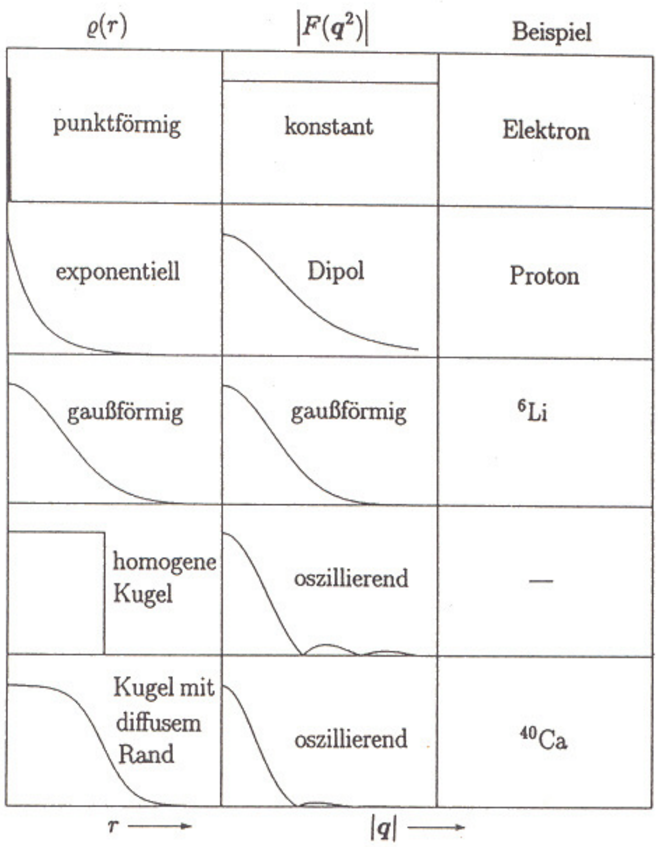
$$\mathbf{F(q^2)} = \frac{3\hbar^3}{(|\mathbf{q}|\mathbf{R})^3}\left[\sin\left(\frac{|\mathbf{q}|\mathbf{R}}{\hbar}\right) - \frac{|\mathbf{q}|\mathbf{R}}{\hbar}\cos\left(\frac{|\mathbf{q}|\mathbf{R}}{\hbar}\right)\right]$$

Beugungsminima und -maxima

Minimum für $\dfrac{|\mathbf{q}|\mathbf{R}}{\hbar} \approx 4.5$

Ausgedehnte Ladungsverteilung - Formfaktoren -

$F(q^2)$ für einfache Radialfunktionen:



$\varrho(r)$	$\lvert F(q^2)\rvert$	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	^{6}Li
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	^{40}Ca

$r \longrightarrow$ $\quad$ $\lvert q\rvert \longrightarrow$

grundsätzlich gilt:

- **im Grenzfall eines <u>punktförmigen</u> Objektes: $F(q^2) = 1 = \text{const.}$**

- **je größer bzw. <u>ausgedehnter</u> das Objekt ist, desto stärker fällt $|F(q^2)|$ zu großem q^2 ab**

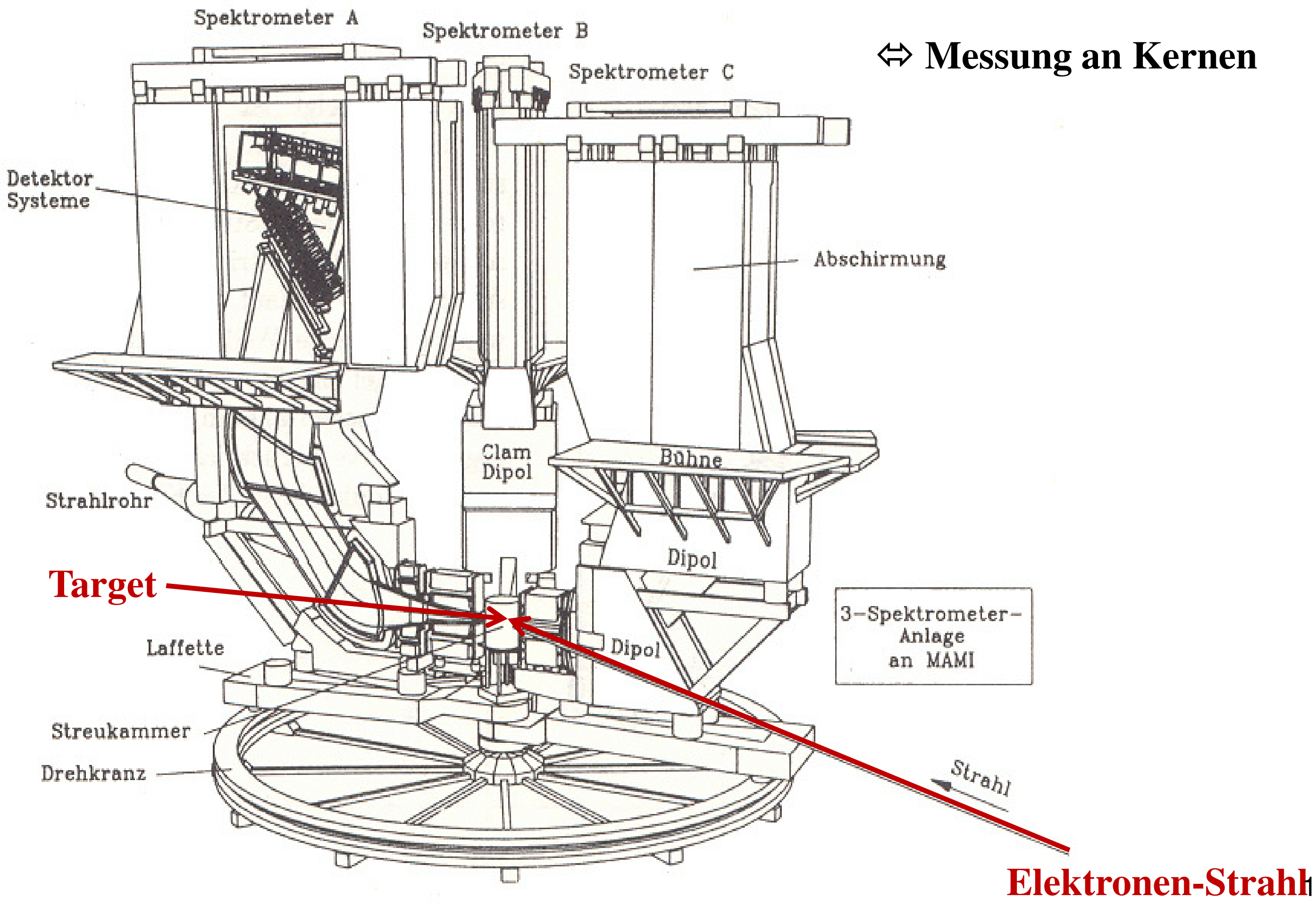
Formfaktor führt zu einer Verringerung des WQ bei großen Impulsüberträgen

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{|\vec{\mathbf{q}}|} = \frac{\hbar}{|\vec{\mathbf{k}}|}\,\frac{1}{2\sin(\theta/2)}; \quad \bar{\lambda} << \mathbf{R}_A$$

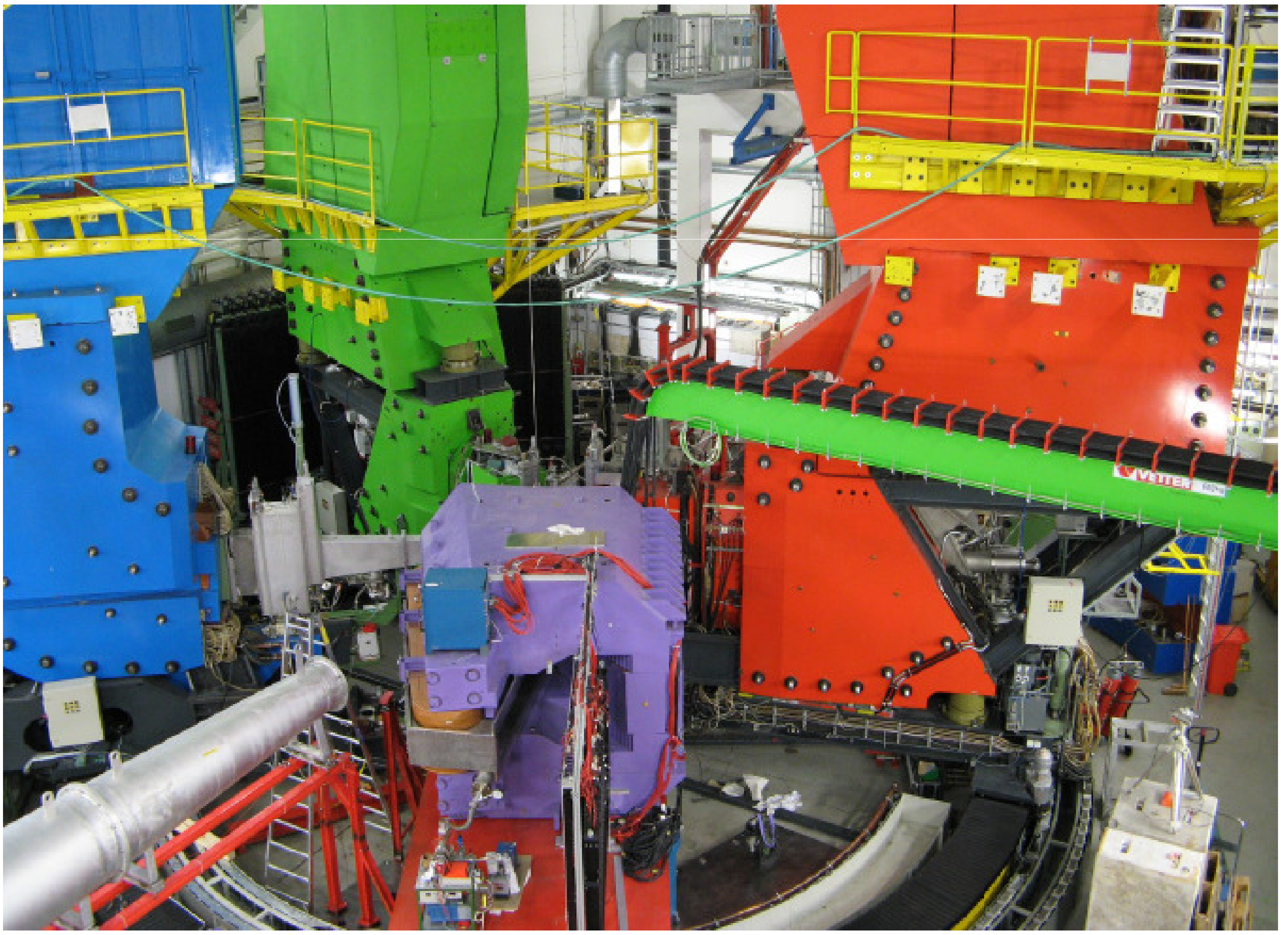
virtuelles Photon sieht immer weniger von der Ladungsverteilung, Auflösung wird verbessert

Die Drei-Spektrometeranlage am Mainzer Mikrotron (MAMI)

⇔ **Messung an Kernen**



A1-Spektrometer an MAMI



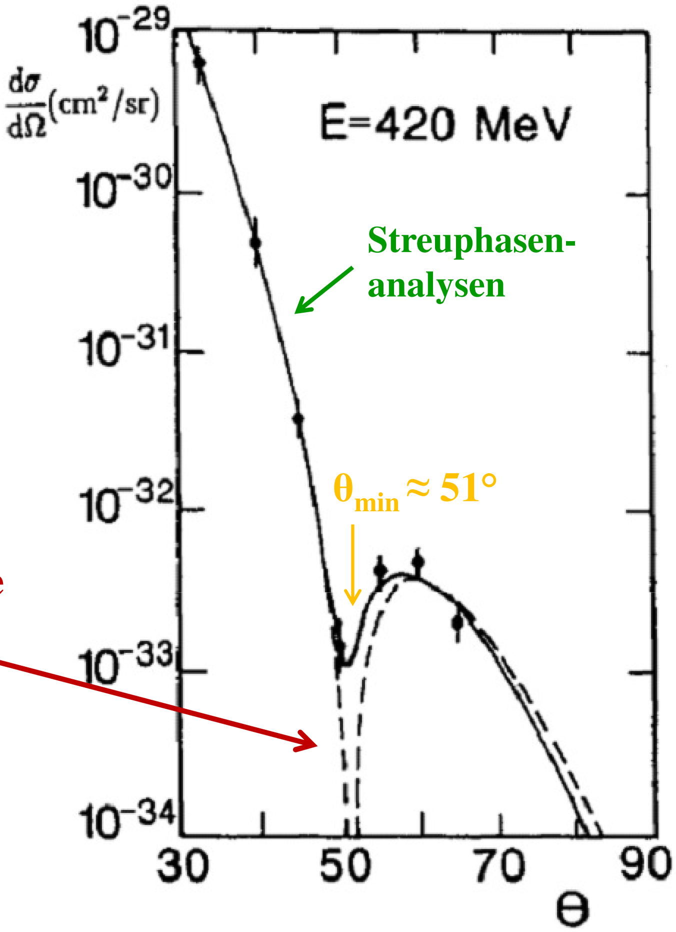
Messung des Radius eines Kernes

e^- -Streuung an ^{12}C bei 420 MeV

Minimum bei $\theta_{min} \approx 51°$

→ R = 2,45 fm

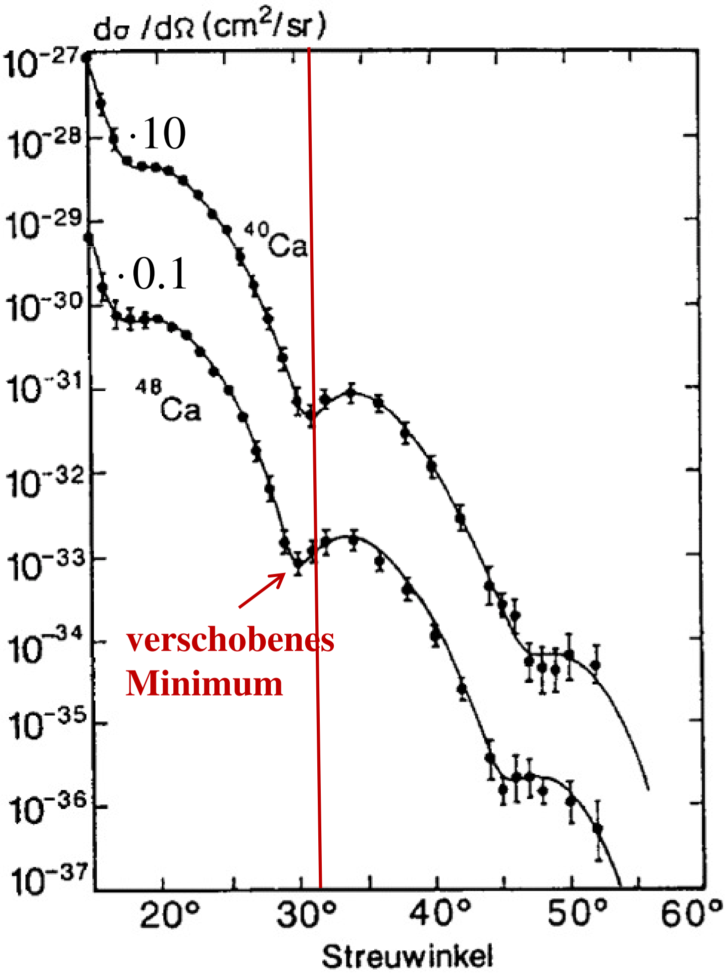
$$\boxed{\frac{|q|R}{\hbar} \approx 4.5}$$



Born'sche Näherung für eine homogene Kugel mit diffusem Rand

Born'sche Näherung nur anwendbar für kleine Kerne
Sonst: Mehrfachwechselwirkungen des Elektrons im Coulombfeld des Kernes

Bestimmung des Kernradius



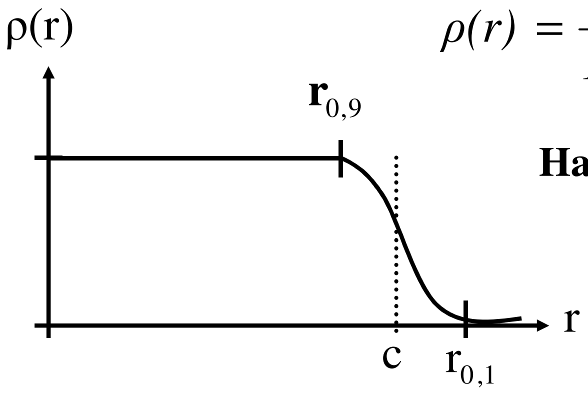
<u>Vergleich der Streuung an ^{40}Ca und ^{48}Ca</u>

$R(^{48}Ca) > R(^{40}Ca)$

→ Ladungsverteilung in ^{48}Ca : größere räumliche Ausdehnung trotz gleicher Zahl von Protonen ⇔ Neutronen

Radiale Ladungsverteilung

Präzisionsmessungen der e⁻ -Streuung zeigen:
- **Kerne haben keine scharf begrenzte Oberfläche**
- **im Inneren Ladungsdichte in etwa konstant → Parametrisierung durch Fermi-Funktionen**



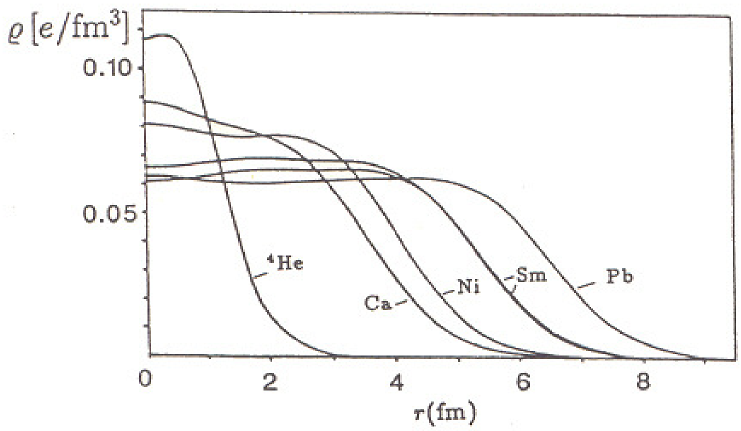
$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

$\mathbf{c} = 1{,}07\,\mathbf{fm} \cdot \mathbf{A}^{1/3}$

$\mathbf{a} = 0{,}545\,\mathbf{fm}$

Hautdicke: $\mathbf{t = r(\rho = 0{,}1) - r(\rho = 0{,}9) \approx 2{,}4fm}$

≈ für alle schweren Kerne



Ergebnis einer Vielzahl von Elektronenstreuexperimenten

Formfaktoren – mittlerer Radius einer Ladungsverteilung -

(Rutherfordstreuung: kein Rückstoß, kein Spin)

$$\mathbf{F(\vec{q}) = \int e^{(i\vec{q}\cdot\vec{r})/\hbar} f(\vec{r})\, d^3r}$$

Integration über den vollen Raumwinkel (kugelsym. Ladungsverteilung)

$$= 4\pi \int_0^\infty \mathbf{f(r)} \frac{\sin(|\vec{q}|\, r/\hbar)}{|\vec{q}|\, r/\hbar} \cdot \mathbf{r^2 dr}$$

Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\mathbf{F(q)} = \underbrace{4\pi \int_0^\infty \mathbf{f(\vec{r})\, r^2 dr}}_{1 \text{ (Normierung)}} - \frac{1}{6}\frac{|\vec{q}|^2}{\hbar^2} \underbrace{4\pi \int_0^\infty \mathbf{r^2 f(\vec{r})\, r^2 dr}}_{<\mathbf{r}^2> \,\hat{=}\, \text{Definition}} + \ldots$$

=> Mittlerer Ladungsradius²:

$$<\mathbf{r}^2> \approx -6\hbar^2 \left.\frac{\mathbf{dF(q^2)}}{\mathbf{dq^2}}\right|_{\mathbf{q}^2=0}$$

Ergibt sich aus der Steigung des Formfaktors für q²→0

⇔ **Messung des Formfaktors bis zu sehr kleinen $\mathbf{q}^2$ notwendig**