Präsenzaufgabenblatt 6

1) $$\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{z(z-1)(z+1)}}_{=:f(z)} dz \overset{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,0)\big)$$

und $$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} (z) f(z) = -1$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z+1)} dz = 0$$

2) $$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i\big(\overbrace{\mathrm{Res}(f,1)}^{=\frac{1}{2}} + \overbrace{\mathrm{Res}(f,-1)}^{=-\frac{1}{2}} + \mathrm{Res}(f,0)\big)$$

und $$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{1}\lim_{z\to 0} \frac{d^{(1)}}{dz^{(1)}}\left(\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d^{(1)}}{dz^{(1)}}\left(\frac{1}{2(z-1)}\right) + \lim_{z\to 0}\frac{d^{(1)}}{dz^{(1)}}\left(\frac{1}{-2(z+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(0-1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{(-1)}{(0+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} dz = 0$$

3) Sehe Satz (5.9) Seite 35 – Skript

Beweis vom