Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 6: Die Unschärferelation und ein System mit 2 Zuständen

Deadline: **Mittwoch 05.06.2024 18.00 via eCampus**

Zustände minimaler Unschärfe

In Übungsblatt 5 hatten wir uns ein Gausssches Wellenpaket angeschaut, und gezeigt dass dieser Zustand die Heisenbergsche Uneschärferelation für Position und Impuls minimiert, also dass für diesen Zustand $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$ gilt. In dieser Übung schauen wir uns dieses Problem noch einmal aus einer allgemeineren Sicht an.

Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ 2 hermitische Operatoren. Wir sagen dass ein Zustandsvektor $|\psi\rangle$ *ein Zustand minimaler Unschärfe für $\hat{A}$ und $\hat{B}$* ist, falls $(\Delta\hat{A})_\psi\,(\Delta\hat{B})_\psi = \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_\psi|$.

Im Folgenden sind alle Erwartungswerte und Varianzen relativ zum Zustand $|\psi\rangle$ zu verstehen ($\langle\hat{A}\rangle := \langle\hat{A}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$, etc.). Wir definieren (siehe Herleitung der Unschärferelation in der Vorlesung)

$$|\phi_A\rangle := (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\psi\rangle\,,$$
$$|\phi_B\rangle := (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)|\psi\rangle\,.$$

Unser Ziel ist es zu zeigen dass $|\psi\rangle$ Zustand minimaler Unschärfe für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist dann und nur dann wenn es eine reelle Zahl ρ gibt mit $|\phi_A\rangle = i\rho\,|\phi_B\rangle$.

1. (0.5 Punkte) Zeigen Sie dass $\|\phi_A\|^2 = (\Delta\hat{A})^2$.

2. (3 Punkte) Zeigen Sie dass für einen Zustand minimaler Unschärfe gilt:

$$\|\phi_A\|\cdot\|\phi_B\| = |\langle\phi_A|\phi_B\rangle| = \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|\,.$$

3. (2 Punkte) Schlussfolgern Sie dass, wenn es eine reelle Zahl ρ gibt so dass $|\phi_A\rangle = i\rho\,|\phi_B\rangle$, dann ist $|\psi\rangle$ ein Zustand minimaler Unschärfe.

4. (3 Punkte) Es bleibt zu zeigen dass für jeden Zustand minimaler Unschärfe die Bedingung $|\phi_A\rangle = i\rho\,|\phi_B\rangle$ erfüllt ist. Um dies zu zeigen, beginnen Sie damit einen Wert für λ zu bestimmen, so dass die Ungleichung $\|\phi_A + \lambda\phi_B\|^2 \geq 0$ äquivalent ist zur Cauchy-Schwarz Ungleichung.

5. (4 Punkte) Zeigen Sie dass für den Fall $\hat{A} = \hat{x}$ und $\hat{B} = \hat{p}$ die Zustände minimaler Unschärfe genau die sind, für die die Wellenfunktion im Ortsraum ein Gaussches Wellenpaket ist, und bestimmen Sie diese Wellenfunktion.

Ein System mit 2 Zuständen

Wir schauen uns ein quantenmechanisches System an, dessen Hilbertraum der 2-dimensionale Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \alpha \, |e_1\rangle\langle e_2| + \beta \, |e_2\rangle\langle e_1| \, ,$$

wobei α und β komplexe Zahlen sind, und $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist, $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$.

1. (0.5 Punkte) Zeigen Sie dass $\hat{H}$ hermitisch ist dann und nur dann wenn $\beta = \alpha^*$. Im Folgenden nehmen wir an dass diese Bedingung erfüllt ist.

2. (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{H}$.

3. (2 Punkte) Wir nehmen an dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|e_1\rangle$ befindet. Bestimmen Sie den Zustandsvektor des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ (Wir nehmen an dass in dem Zeitintervall keine weitere Messung durchgeführt wird).

4. (1 Punkt) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System zum Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $|e_2\rangle$ befindet.