HA09 ori

Samstag, 3. Dezember 2022 14:15

Lisa Peltzer, Angelo Brade

①

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2a+1 \\ 1 \end{pmatrix} \land v_2 = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & 2a+1 & 1-a & 0 \\ \mathrm{II} & 1 & 1+a & 0 \end{array} \quad \Big| \; \mathrm{II} - \frac{1}{2a+1}\mathrm{I}$$

$$\lambda_1(2a+1) + \lambda_2(1-a) = 0 \quad | \; \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(2a+1) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2a+1} \Rightarrow \underline{\underline{a \neq -\tfrac{1}{2}}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$$

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & 2a+1 & 1-a & 0 \\ \mathrm{II} & & 1+a-\frac{1-a}{2a+1} & 0 \end{array}$$

$$\lambda_2 \cdot \left(1+a - \frac{1-a}{2a+1}\right) = 0$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{2a+1}{2a+1} + \frac{2a^2+a}{2a+1} + \frac{-1+a}{2a+1}\Big) = 0$$

$$\lambda_2 \left(\frac{2a^2+4a}{2a+1}\right) = 0$$

$$\lambda_2 \left(\frac{2a^2+4a}{2a+1}\right) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{2a+1}{a(2a+4)} \Rightarrow \underline{\underline{a \neq 0 \land a \neq -2}}$$

$$\lambda_2 = 0$$

Das System ist linear unabhängig für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\tfrac{1}{2}, 2\}$.

② a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \land v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \land v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \land v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \land v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vermutlich lässt sich auch schon nur mit v_1, v_2 und v_4 ein Erzeugenensystem für $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\begin{array}{c|cccc|l} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & & \\ \mathrm{I} & 0 & 2 & 0 & 0 & :2 \\ \mathrm{II} & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathrm{III} & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\mathrm{III} - \mathrm{I} - 4\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\lambda_1 = 0 \land \lambda_2 = 0 \land \lambda_4 = 0$

Da die Lösung der Koeffizienten nur 0 ist für Linearkombinationen, sind die Vektoren linear unabhängig. Außerdem sind die Vektoren ein Erzeugenensystem, da alle Vektoren von $\mathbb{R}^3$ mithilfe von drei ebenso drei-dimensionalen v_1, v_2 und v_4 dargestellt werden können. Sie bilden eine Basis.

b) Aus a) folgt, dass die fünf Vektoren zu einer Basis von v_1, v_2 und v_4 ausgedünnt werden können, da immernoch $\mathbb{R}^3$ erzeugt werden kann.

c) Basis: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \land v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \land v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 17\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{17}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{v_3 = \frac{3}{2}v_1 + 2v_2 - \frac{17}{2}v_4}}$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{v_5 = v_1 - 3v_2 + 13 v_4}}$$

③

a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$

$v_1 = -i \cdot v_2 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4 \Leftrightarrow v_1 = -i \cdot v_2 \Rightarrow \lambda_1 = -i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Lin. abhängig, da $(\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_4 = 0)$ falsch ist.

$v_3 = -i \cdot v_4 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_4 \Leftrightarrow v_3 = -i \cdot v_4 \Rightarrow \lambda_4 = -i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Lin. abhängig, da $(\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_4 = 0)$ falsch ist.

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot v_1 = \lambda_2 \cdot v_2$ $\lightning$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_2 = -i \in \mathbb{C} \notin \mathbb{R}$

v_1 kann nicht als Linearkombination dargestellt werden, wenn der Körper $\mathbb{R}$ ist.

$\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 \cdot v_2 = \lambda_3 \cdot v_3$

$\Rightarrow$ keine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für λ_2 und λ_3

$\Rightarrow v_2$ kann nicht als Linearkombination dargestellt werden, wenn der Körper $\mathbb{R}$ ist.

$\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$

$\lambda_3 \cdot v_3 = \lambda_4 v_4$

$\Rightarrow \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_4 = -i \in \mathbb{C}$ $\lightning$

v_3 kann nicht als Linearkombination dargestellt werden, wenn der Körper $\mathbb{R}$ ist.

$\lambda_4, \lambda_1 \in \mathbb{R}$

$\lambda_4 \cdot v_4 = \lambda_1 \cdot v_1$

$\Rightarrow$ keine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für λ_4 und λ_1

$\Rightarrow v_4$ kann nicht als Linearkombination dargestellt werden, wenn der Körper $\mathbb{R}$ ist.

Da für v_1, v_2, v_3 und v_4 keine Linearkombination existiert, sind sie linear unabhängig.

c) Körper$(\mathbb{C}^2) = \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$

Durch die, in b) schon gezeigte, lineare Unabhängigkeit müssen

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$ für $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 können mit entsprechenden reellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4 jeglichen komplexen Vektor $\mathbb{C}^2$ darstellen.

$\mathcal{L} = \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \}$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_4 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 + \lambda_2 i}^{\in \mathbb{C} \text{ für } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}} \\ \underbrace{\lambda_3 + \lambda_4 i}_{\in \mathbb{C} \text{ für } \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$\mathcal{L} = \{ v \in V \wedge \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = v \}$$

④

a) $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3 \Leftrightarrow p_1(x) = x^2 + 6$

$p_2(x) = (x-2)(x-3) \Leftrightarrow p_2(x) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$

$p_3(x) = 5x$

$p_3(x) = \lambda_1 p_1(x) - \lambda_2 p_2(x) \mid \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 1$

$p_3(x) = p_1(x) - p_2(x)$

$p_3(x) = x^2 + 6 - x^2 + 5x - 6$

$p_3(x) = 5x$

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_1 \cdot p_1 = 0$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{matrix}$$

$-5\lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$

$$\lambda_2 = 0$$

$$3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda_1 6 \cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \}$$

$\Rightarrow$ p_1 und p_2 lin. unabh.

c) Der Vektorraum der Polynome bis zum zweiten Grad ist dreidimensional, da mit λ_2, λ_1 und λ_0 in $p = \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x^1 + \lambda_0 x^0$ drei Variabeln wählbar sind. Da aber für einen drei dim. Vektorraum drei Vektoren benötigt und nur die zwei Vektoren p_1 und p_2 gegeben sind, reichen die Vektoren für ein Erzeugendensystem und somit für eine Basis nicht.

⑤

a) gegeben: $\mathbb{R}^3$ – UVR über $\mathbb{Q}$

Der $\mathbb{R}^1$ – VR über $\mathbb{Q}$ hat schon unendlich Dimensionen, da, um die irrationalen Zahlen darzustellen, für jede irrationale Zahl ein Basisvektor mit einer irrationalen Zahl (z.B. $\sqrt{2} = \underbrace{1}_{\lambda \in \mathbb{Q}} \cdot \sqrt{2}$).
Da es unendlich viele irrationalen Zahlen gibt, werden unendlich viele Basisvektoren benötigt $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.

Der UVR U beschreibt eine zwei-dimensionale Ebene in einem drei-dimensionalen Raum: $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$

Für U werden doppelt soviele Dimensionen benötigt, weswegen immernoch unendlich viele Dimensionen benötigt werden: $\dim_{\mathbb{Q}} U = \infty$

b) Gegeben: $\mathbb{R}^3$ – UVR über $\mathbb{R}$.

Der Körper $\mathbb{R}$ kann jegliche Zahlen, einschließlich die irrationalen, darstellen. Deswegen würde ein $\mathbb{R}^1$ – VR über $\mathbb{R}$ nur eine Dimension haben.

Der UVR U beschreibt eine zwei-dimensionale Ebene in einem drei-dimensionalen Raum.
Folgedessen ist $\dim(U) = 2$ für $\mathbb{R}$ als Körper.

⑥ U_1 ist durch die Abhängigkeit von zwei Variabeln auch als zwei-dimensionale Ebene, und durch die fünf-dimensionalen Basis-Vektor, in einen fünf-dimensionalen Raum zu interpretieren.
Die Basis kann man auf die zwei Variablen aufspalten und als zwei Basisvektoren darstellen.
Folgedessen ist $\dim(U_1) = 2$.

$\underline{\underline{U_2:}}$

Die vier gegebenen Basis-Vektoren lassen sich auf drei Basis-Vektoren reduzieren, da v_4 eine Linear-kombination von v_1 und v_2 ist:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 2(v_1 - v_2)$$

Damit muss nur noch die lineare Unabhängigkeit von v_1, v_2 und v_3 geprüft werden:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 0 & \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ 3 & 5 & -1 & 0 & \mathrm{III} - (\mathrm{I} + \mathrm{II}) \\ 4 & 7 & 1 & 0 & \mathrm{IV} - 2\mathrm{II} \\ 5 & 9 & -1 & 0 & \mathrm{V} - (\mathrm{II} + \mathrm{III}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 4 & 7 & 1 & 0 & IV - 2II \\ 5 & 9 & -1 & 0 & V - (II + III) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & III - II \\ 0 & 1 & -1 & 0 & IV - II \\ 0 & 1 & -1 & 0 & V - II \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$-4\lambda_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_2 + 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 + 0 - 0 = 0$$
$$\lambda_1 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 \}$$

Da es keine Linearkombination, außer mit 0, gibt, sind die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig und somit die minimalen Basisvektoren und lassen sich auf 3 Dimensionen beschränken: $\dim(U_2) = 3$.

(7)

$\underline{U_1:}$

Polynom 5. Grades: $\lambda_5 x^5 + \lambda_4 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x^1 + \lambda_0 x^0$

Basis: $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (alle lin. unabhängig)

Erzeugend, da alle 6 Dimensionen dargestellt werden und somit die lin. Hülle dargestellt werden kann:

$\mathcal{L}_6 = \{ \lambda_0, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_5 v_5 + \lambda_4 v_4 + \dots + \lambda_0 v_0 \}$

$\underline{U_{n}:}$

Polynom geht durch Ursprung $\Rightarrow \lambda_5 x^5 + \lambda_4 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x^1$

Null, da sonnst Polynom verschoben ← entfällt, da Nullvektor

Basis: $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(, v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ (alle lin. unabhängig)

Erzeugend, da alle 5 Dimensionen dargestellt werden und somit die lin. Hülle dargestellt werden kann:

$U = \{ \lambda_0, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_5 v_5 + \lambda_4 v_4 + \dots + \lambda_1 v_1 + \underbrace{\lambda_0 v_0}_{0} \Leftrightarrow v = \lambda_5 v_5 + \lambda_4 v_4 + \dots + \lambda_1 v_1 \}$

Da $U \supseteq \mathcal{L}_6 \Rightarrow U$ ist eine Teilmenge von

$\underline{\text{Addition:}}$

$u_1, u_2 \in U$

$u_1 + u_2 \in U$

$\underbrace{\lambda_{5_1} v_5}_{\in U} + \dots + \underbrace{\lambda_{0_1} v_0}_{\in U} + \underbrace{\lambda_{5_2} v_5}_{\in U} + \dots + \underbrace{\lambda_{0_2} v_0}_{\in U} \in U$

$\underline{\text{Skalierung:}}$

$\lambda \in \mathbb{R} \wedge u \in U$

$\lambda (\lambda_5 v_5 + \dots + \lambda_0 v_0) \in U$

$\underbrace{\lambda \lambda_5}_{\in \mathbb{R}} v_5 + \dots + \underbrace{\lambda \lambda_0}_{\in \mathbb{R}} v_0) \in U \qquad \square$