Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 10

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Geben Sie im Vektorraum der reellen Polynome eine Darstellung des Polynoms $p(x) = 2x^3 + x - 5$ als Linearkombination der folgenden Vektoren an:

$$q_1(x) = 2,\ q_2(x) = x^2 + x,\ q_3(x) = 4x^3 - 7,\ q_4(x) = 3x^2 + 4,\ q_5(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1.$$

Aufgabe 2 (2+2+(1+2) Punkte)**.** Betrachten Sie den Vektorraum V der komplexen Polynome vom Grade maximal 3 über dem Körper der komplexen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $W := \{f \in V \,|\, f(-1) = 0\}$ einen Unterraum von V darstellt.

(b) Finden Sie eine Basis von W und geben Sie die Dimension von W an.

(c) Rechnen Sie nach, dass $g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ ein Element in W ist und drücken Sie $g(x)$ als Linearkombination Ihrer Basis aus Teilaufgabe (b) aus.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)**.** Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2;\qquad f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$

(b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R};\qquad f_2(f) := f(\pi)$

(c) $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C};\qquad f_3(z) = \bar{z} \cdot z$

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügt? Begründen Sie!

$$f(2, 0) = (0, 2) \qquad f(1, 1) = (10, 4) \qquad f(1, 2) = (4, 6)?$$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**.** Geben Sie jeweils zu folgenden linearen Abbildungen Basen für Kern und Bild an:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2;\qquad f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$

(b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \longrightarrow \mathbb{R};\qquad f_2(f) := f(0)$

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte)**.** Betrachten Sie die $\boxed{\text{beiden}}$ Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass alle solche Abbildungen an der Stelle v den gleichen Wert annehmen – um welchen Wert handelt es sich?

Aufgabe 7 (2 Punkte)**.** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathtt{DM}(f)$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)**.** Für eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ ist die Menge $\mathrm{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f durch $\mathrm{Fix}(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum von V ist.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen.
Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein,
so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe am Donnerstag, den 15. Dezember, bis 15:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.