

Übungsblatt 7

Abgabe Donnerstag 13. Juni.

Abgabetermin für das Blatt ist **Donnerstag um 10:00 Uhr**. Das Blatt soll auf ecampus in Ihrer Tutorgruppe abgegeben werden.

Die Übungen für Lehramtsstudenten sind mit einem ★ gekennzeichnet.

Zögern Sie nicht, Ihre Tutoren zu kontaktieren, wenn Sie Fragen haben!

★ Aufgabe 1: Hyperfeinstruktur von Cäsium

8 Punkte

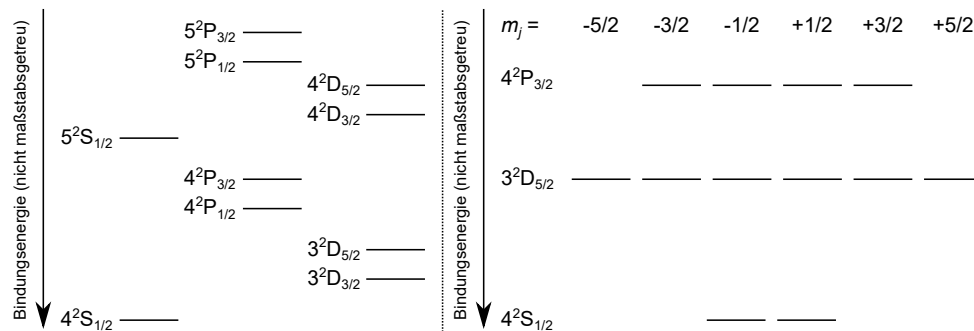
Cäsium ist ein Alkalimetall, besitzt also nur ein einziges Valenzelektron, während alle anderen Elektronen in vollständig gefüllten Schalen sitzen. Daher verhalten sich Elemente der 1. Hauptgruppe ähnlich zum Wasserstoff, insbesondere treten für das Valenzelektron die bereits bekannten Quantenzahlen auf. Für Cäsium befindet sich das Valenzelektron im Grundzustand im Zustand $6^2S_{1/2}$. Das einzig stabile Cäsiumisotop ^{133}Cs besitzt einen Kernspin von $I = 7/2$, so dass es eine Hyperfeinstruktur durch Kopplung von J und I zum Gesamtdrehimpuls F aufweist, analog zur Hyperfeinstruktur des Natriumatoms, die auf dem letzten Blatt eingeführt wurde. Wie bereits für L , S und J , sind die z -Komponenten von I und F ebenfalls durch $m_I\hbar$ mit Quantenzahl $m_I = -I, \dots, +I$ bzw. $m_F\hbar$ mit Quantenzahl $m_F = -F, \dots, +F$ gegeben. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung des $6^2S_{1/2}$ -Zustands ist von fundamentaler Bedeutung, da die Sekunde als inverse Frequenz des Übergangs zwischen den beiden F -Zuständen definiert ist.

- Geben Sie die möglichen Werte für F und m_F für den Zustand $6^2S_{1/2}$ an. Welche ungekoppelten Werte von I , m_I , J und m_J führen zu den jeweiligen Werten?
- In Cs-Atomuhren wird typischerweise eine Referenzfrequenz mit der atomaren Übergangsfrequenz verglichen. Handelt es sich bei dem für Cs-Uhren verwendeten atomaren Übergang um einen elektrischen oder magnetischen Dipolübergang?? Warum?
- Bestimmen Sie aus der Definition der Sekunde und den Werten von F , J und I die Hyperfeinstrukturkonstante von ^{133}Cs .
- Warum wird bei Cs-Atomuhren oft besonders Wert auf eine gute magnetische Abschirmung bzw. ein wohlbekanntes externes Magnetfeld gelegt? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Hyperfeinzustände aus a).

Aufgabe 2: Auswahlregeln**10 Punkte**

Die Abbildung zeigt ein Termschema mit dem elektronischen Grundzustand ($4^2S_{1/2}$) und einigen benachbarten Zuständen von einfach ionisiertem Calcium-40 ($^{40}\text{Ca}^+$). Da das Ion nur ein einziges Valenzelektron auf der äußeren 4s Schale besitzt, ist die Struktur der Zustände und Energien vergleichbar mit der von Alkaliatomen wie z.B. dem im Periodensystem benachbarten Kalium, wobei das Elektron aufgrund der höheren Kernladung jedoch stärker gebunden ist. Da $^{40}\text{Ca}^+$ keinen Kernspin besitzt ($I = 0$), besitzt es keine Hyperfeinstruktur.

- Untersuchen Sie anhand der Auswahlregeln, zwischen welchen der abgebildeten Zustände elektrische Dipolübergänge (E1) erlaubt sind.
- Untersuchen Sie, welche nicht-E1-erlaubten Übergänge als magnetischer Dipolübergang (M1) erlaubt sind.
- Rechts in der Abbildung sind für einige der Zustände auch die verschiedenen magnetischen Zustände gezeigt. Nennen Sie bzw. markieren Sie in der Abbildung alle erlaubten elektrischen Dipolübergänge.



Links: Termschema von $^{40}\text{Ca}^+$ mit Zuständen nahe des Grundzustands $4^2S_{1/2}$ des Valenzelektrons. Rechts: Termschema inkl. der m_j -Zustände für drei der Zustände.

Aufgabe 3: Übergangsmatrixelemente**10 Punkte**

Betrachten Sie den $2p \leftrightarrow 1s$ Übergang im Wasserstoffatom unter Vernachlässigung der Feinstruktur.

- Bestimmen Sie die z-Komponente des Übergangsmatrixelement des o.g. Übergangs.
Hinweis: Evtl. benötigen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{r^n}{a_0^n} \exp(-\alpha \frac{r}{a_0}) dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} a_0.$$

- Berechnen Sie die Übergangsfrequenz, die Einstein-A- und B-Koeffizienten des Übergangs sowie die Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma = 1/A$ des 2p-Zustandes.
Hinweis: Für den Einstein-A-Koeffizienten gilt

$$A = \frac{2}{3} \frac{\omega^3}{\epsilon_0 c^3 h} |\mu_{21,q}|^2.$$

Zur Berechnung benötigen Sie nur die z-Komponente des Übergangsmatrixelements $\mu_{21,q}$. Der Zustand $2p$ ($m_l = 0$) zerfällt nur als π -Übergang, die Zustände $2p$ ($m_l = \pm 1$) nur als σ_{\pm} -Übergang. Da die Raten jeweils gleich sind, entspricht die Gesamtrate den Einzelraten.

★ Aufgabe 4: Zwei-Niveau-System

12 Punkte

Gegeben ist ein Zwei-Niveau-Atom mit den Zuständen $|g\rangle$ und $|e\rangle$. Die Eigenenergien sind durch den atomaren Hamiltonoperator \hat{H}_0 gegeben mit $\hat{H}_0|g\rangle = \hbar\omega_g|g\rangle$ und $\hat{H}_0|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle$. Die beiden Zustände werden nun durch ein Lichtfeld mit dem Wechselwirkungshamiltonoperator

$$\hat{H}_i = -\vec{\hat{d}} \cdot \vec{E} \cos(\omega_L t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

gekoppelt. Dabei ist $\vec{\hat{d}}$ der Dipoloperator, \vec{E} die Amplitude des elektrischen Felds, ω_L die Laserfrequenz und \vec{k} der Wellenvektor.

- a) Als Lösungsansatz wird die Wellenfunktion $|\psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)|e\rangle$ gewählt, so dass die gesamte Zeitabhängigkeit durch die Koeffizienten c_g und c_e bestimmt ist. Setzen Sie $|\psi(t)\rangle$ in die Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\psi} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_i)\psi$ ein und multiplizieren Sie von links jeweils mit $\langle g|$ bzw. $\langle e|$. Zeigen Sie, dass Sie so folgendes Ergebnis erhalten:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_g &= \hbar\omega_g c_g + \langle g|\hat{H}_i|e\rangle c_e, \\ i\hbar\dot{c}_e &= \hbar\omega_e c_e + \langle e|\hat{H}_i|g\rangle c_g. \end{aligned}$$

- b) In der sogenannten Dipolnäherung wird der Wechselwirkungsterm $\langle \dots|\hat{H}_i|\dots\rangle$ durch $-\vec{E} \frac{1}{2} (e^{i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t}) \langle \dots|\hat{e}\vec{r}|\dots\rangle$ genähert. e ist die Elektronenladung. Was bedeutet diese Näherung physikalisch?
- c) Um die beiden gekoppelten Differentialgleichungen aus a) zu lösen wird nun der Ansatz

$$\begin{aligned} c_g(t) &= \tilde{c}_g(t) e^{-i\omega_g t}, \\ c_e(t) &= \tilde{c}_e(t) e^{-i\omega_e t} \end{aligned}$$

gewählt. Setzen Sie dies in die Gleichungen aus a) ein und ermitteln Sie die neuen gekoppelten Gleichungen für \tilde{c}_g und \tilde{c}_e unter Berücksichtigung der Dipolnäherung.

- d) Zur weiteren Vereinfachung wird $\omega_e - \omega_g = \omega_{ge}$ und $\omega_L - \omega_{ge} = \Delta$ gesetzt. Des Weiteren werden in der sogenannten Rotating-Wave-Approximation Terme mit $\omega_L + \omega_{ge}$ vernachlässigt. Was bedeutet dies physikalisch? Zeigen Sie, dass die Rotating-Wave-Approximation zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}_g(t) &= -\frac{i}{2}\Omega e^{i\Delta t} \tilde{c}_e(t), \\ \dot{\tilde{c}}_e(t) &= -\frac{i}{2}\Omega^* e^{-i\Delta t} \tilde{c}_g(t) \end{aligned}$$

führt. $\Omega = -\vec{E} \cdot \langle \hat{d}_{ge} \rangle / \hbar$ ist die Rabifrequenz.

- e) Lösen Sie die Differentialgleichung aus d) für reelle Rabifrequenzen ($\Omega = \Omega^*$). Plotten Sie für verschiedene Ω und Δ die Wahrscheinlichkeiten das Atom zur Zeit t in $|g\rangle$ bzw. $|e\rangle$ zu finden, wenn sich das Atom bei $t = 0$ in $|g\rangle$ befindet, d.h. $c_g(t=0) = 1$ und $c_e(t=0) = 0$.
Hinweis: Sinnvolle Werte für die Plots sind $\Omega, \Delta = 0 \dots 10 \mu\text{s}^{-1}$ bei $t = 0 \dots 10 \mu\text{s}$.

★ **Aufgabe 5: Schreibe im Wiki**

≤ 8 Bonus-Punkte

Es ist möglich, Bonuspunkte zu sammeln, indem man einen Beitrag zum Vorlesungsskript auf der Wiki-Seite leistet. Um Bonuspunkte zu erhalten, müssen Sie einen Beitrag zum Abschnitt *Zusätzliches Material* zu einem der Themen der Vorlesung **Physik 4** im Wiki leisten.

Auf ecampus finden Sie eine Beschreibung, wie Sie Zugang zum Wiki erhalten. Bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen, lesen Sie die Regeln für die Einträge auf [der Regelseite](#) sorgfältig durch.

Wenn Sie das Übungsblatt abgeben, fügen Sie einen Link zu der/den Seite(n) und Ihren Benutzernamen hinzu, damit wir Ihren Beitrag anhand der Seitenhistorie überprüfen können. Sie können bis zu 8 Punkte *für dieses Blatt* erhalten, aber Ihre Arbeit am Wiki muss *auf dieser Abgabe* vermerkt werden, um zu zählen.

Anmerkung: Die Anzahl der Punkte, die Sie für Ihren Beitrag erhalten, hängt von der Qualität und Originalität des Materials ab.

Anmerkung: Wir akzeptieren keine Lösungen zu den Kursübungen im Wiki.

Anmerkung: Sie müssen für alles, was Sie im Wiki schreiben, Referenzen angeben, *egal, worüber Sie schreiben*. Bitte lesen Sie die Regeln zum Thema Plagiat sehr sorgfältig.