

Aufgabe 4:

1.) $\rho = 0,15 \text{ fm}^3; M = 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{50} \text{ g}, m(n) = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
 $= 0,95 \cdot 10^{45} \text{ g/m}^3$

Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
 $\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad | V = \frac{M}{\rho \cdot \text{mln}} = 12,12 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$
 $= 14,25 \text{ km}$

2.) Atome in einem Fermi-Gas sind relativ schwach gebundene Systeme.

Zusätzlich besteht in einem Atomensystem ein sehr großer Druck, was wegen

für einen stabilen Zustand deutlich mehr Partikel benötigt werden.

Gleichzeitig haben die Elektronen eine kinetische Energie im Bereich der Bindungsenergie, weswegen es bei einem Ungleichgewicht von N_e zu N_p direkt zu einem β -Zerfall kommen würde, der für $N_e = N_p$ sorgt.

3.)

Da $M_p \approx M_n$ ist, ist $p_p \approx \frac{1}{2} p_0$ und $p_n \approx \frac{1}{2} p_0$.

Allerdings ist $N_p \neq N_n$, weswegen vermutlich über die Fermienergie und Bindungsenergie gegangen werden muss. Dafür werden diese irgendwie in Verbindung mit dem μ -Zerfall und $M_n \approx M_p + M_e$ verwendet, um $\frac{N_n}{N_p}$ zu ermitteln darüber lässt sich dann p_0 und p_n abschätzen.

Wie genau das gemacht werden soll weiß ich leider nicht.

Nr. 1

$$\langle r^2 \rangle := \frac{1}{2e} \int r^2 \rho(r) d^3r \xrightarrow{\text{kugelsymm.}} = \frac{4\pi}{2e} \int r^2 \rho(r) r^2 dr$$

1.)

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{2e}{4\pi R^3}, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad Q := 2e$$

$$\Rightarrow \langle r^2 \rangle = \frac{4\pi}{Q} \int_0^R r^4 \frac{3Q}{4\pi R^3} dr \\ = \frac{3}{R^3} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \\ = \frac{3R^2}{5}$$

2.)

$$\text{Rosenbluth-Formel: } \frac{d\sigma}{dQ^2} = \left(\frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Mott}} \left[G_E(Q^2) + \tau \cdot G_M(Q^2) \right] + 2\tau \cdot G_M(Q^2) \cdot \tan^2(\theta/2) \quad \text{mit } \tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = A x + B \quad \text{mit } y(x) = \frac{d\sigma}{dQ^2} / \left(\frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Mott}}, \quad x = \tan^2(\theta/2), \quad A = 2\tau \cdot G_M(Q^2), \quad B = \frac{G_E(Q^2) + \tau \cdot G_M(Q^2)}{1+\tau}$$

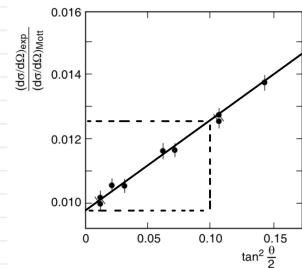
$$\Rightarrow G_M(Q^2) = -\frac{A'}{2\tau}, \quad G_E(Q^2) = -\sqrt{B \cdot (1+\tau) - \frac{A}{2}}$$

Aus der Abbildung lässt sich ablesen:

$$A = \frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{0.002}{0.1} = 2 \cdot 10^{-4}, \quad B \approx 0.01$$

Mit der Masse $M \approx 338 \text{ MeV}/c^2$ des Protons und $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2/c^2$ folgt für die Formfaktoren:

$$G_E(Q^2) \approx 0.13 \quad G_M(Q^2) \approx 0.012$$



3.)

Die beiden fehlerbehafteten Größen sind A und B , wobei B (und dessen Fehler) zwei Zehnerpotenzen größer als A ist. Da G_M nur von A abhängt und G_E von A und B , ist der Fehler von G_E größer.

4.)

Im Grenzfall $Q \rightarrow 0$ erhält man:

$$G_E(Q^2=0) = 1, \quad G_M(Q^2=0) = 2.793$$

Zwischen dem mittleren quadratischen Ladungsradius und dem Formfaktor $F(q^2)$ besteht der Zusammenhang:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \hbar^2 \frac{dF(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}$$

Da $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ über einen großen Q^2 -Bereich denselben Verlauf haben, können sie in guter Näherung durch den Dipolfaktor beschrieben werden:

$$G_E(Q^2) \approx \frac{\mu_N G_M(Q^2)}{\mu_P} \approx G_{\text{Dipol}}(Q^2) \quad \text{mit } G_{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV})^2} \right)^{-2}$$

Durch einsetzen von diesem für $F(q^2)$ erhält man:

$$\langle r^2 \rangle_{\text{Dipol}} = -6 \hbar^2 \frac{dG_{\text{Dipol}}(Q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = \frac{12 \hbar^2}{0.71(\text{GeV})^2} = \frac{12 \cdot (0.137 \text{ fm})^2}{0.71(\text{GeV})^2} \approx 0.66 \text{ fm}$$

$$\langle r^2 \rangle_{\text{Dipol}} \approx 0.81 \text{ fm}$$

Nr. 2

1.)

Unterschiede der Spin-Bahn-Kopplung in der Kernphysik zur Atomphysik:

- Der Effekt der Spin-Bahn-Kopplung ist sehr viel größer
- Die Niveaus spalten sich immer (außer $L=0$) in genau zwei Unterniveaus auf

2.)

Magische Zahlen treten immer dann auf, wenn der Abstand zweier aufeinanderfolgender Schalen besonders groß ist. Aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung spalten sich die $n=1$ Niveaus ab $L=3$ sehr weit auf, an diesen Stellen liegen die magischen Zahlen, wie in der Abbildung zu sehen ist.

So ist 28 zum Beispiel eine magische Zahl, da für diese das $1f_{7/2}$ -Niveau und alle darunter liegenden mit Protonen/Neutronen gefüllt sind.

Der Abstand zum nächsthöheren $1f_{5/2}$ -Niveau ist sehr groß, weshalb dieser Zustand besonders stabil ist. Das Oszillatormodell beachtet die Spin-Bahn-Kopplung garnicht, weshalb es die magischen Zahlen als abgeschlossene Schalen deutet (wobei $N = 2(n-1)+L$ die N -te Schale ist).

3.)

$$P=(-1)^L \quad J=\text{jungekoppelt} = L \pm \frac{1}{2} > 0 \quad \text{Gerade Nukleonenzahl} \Rightarrow J=0^+ \quad \text{Multiplizität: } (2j+1) \quad \leftarrow \text{Anzahl Nukleonen in Schale}$$

	Protonen	Neutronen	Gesamt
^3_2He	0^+	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$
$^{15}_7\text{N}$	$\frac{1}{2}^-$	0^+	$\frac{1}{2}^-$
$^{15}_8\text{O}$	0^+	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$
$^{16}_8\text{O}$	0^+	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$
$^{56}_{28}\text{Ni}$	0^+	0^+	0^+
$^{92}_{32}\text{Pb}$	0^+	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$
$^{92}_{32}\text{Pb}$	0^+	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$
$^{92}_{32}\text{Pb}$	$\frac{9}{2}^-$	0^+	$\frac{9}{2}^-$

4.)

$^{56}_{28}\text{Ni}$ ist ein Isotop des natürlich vorkommenden $^{58}_{28}\text{Ni}$, es besitzt also einen Neutronenmangel. Es zerfällt daher durch Elektroneneinfang zu $^{56}_{28}\text{Co}$.

5.)



6.)

$$\frac{\mu}{\mu_N} = \left(g_L \pm \frac{g_L - g_S}{2L+1} \right) \cdot J \quad \text{mit} \quad J=\text{jungekoppelt} = L \pm \frac{1}{2} > 0, \quad g_L = \begin{cases} 1, & \text{Protonen} \\ 0, & \text{Neutronen} \end{cases}, \quad g_S = \begin{cases} +5,58, & \text{Protonen} \\ -3,83, & \text{Neutronen} \end{cases}$$

a)

$$J=\frac{3}{2}, \quad L=2 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b \approx 0,126 \Rightarrow \Delta \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right) = \frac{\mu}{\mu_N} - \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b = 0,265$$

b)

$$J=\frac{3}{2}, \quad L=2 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b \approx 1,143 \Rightarrow \Delta \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right) = \frac{\mu}{\mu_N} - \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b = -0,127$$

c)

$$J=\frac{3}{2}, \quad L=3 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b \approx -1,915 \Rightarrow \Delta \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right) = \frac{\mu}{\mu_N} - \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b = 0,320$$

d)

$$J=\frac{7}{2}, \quad L=3 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b \approx 5,790 \Rightarrow \Delta \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right) = \frac{\mu}{\mu_N} - \left(\frac{\mu}{\mu_N} \right)_b = -0,359$$

Nr. 3

^{56}Fe : $Z = 26$, $N = 30$, $M_p \approx 938 \text{ MeV}/c^2$, $M_n \approx 940 \text{ MeV}/c^2$, $t_c \approx 197 \text{ MeV fm}$

Zahl der möglichen Zustände, die ein Nukleon in einem Volumen V und Impulsintervall $d\mathbf{p}$ einnehmen kann:

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V$$

Im Grundzustand des Kerns folgt daraus durch Integration:

$$n = \frac{V p_e^3}{6\pi^2 \hbar^3}$$

Da jeder Zustand zwei Fermionen gleicher Art beherbergen kann:

$$N = \frac{V(p_F)^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad Z = \frac{V(p_F)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Mit $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$, wobei $R_0 = 1,21 \text{ fm}$ ist, folgt:

$$\left. \begin{aligned} p_F^n &= \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi N}{4A} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 254 \text{ MeV/c} & \Rightarrow E_F^n = \frac{(p_F^n)^2}{2M_n} \approx 34,3 \text{ MeV} \\ p_F^p &= \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi Z}{4A} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 242 \text{ MeV/c} & \Rightarrow E_F^p = \frac{(p_F^p)^2}{2M_p} \approx 31,2 \text{ MeV} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta E_F = E_F^n - E_F^p = 3,1 \text{ MeV}$$

Energie des Coulombterms der Weizsäcker-Massenformel:

$$|E_c| = a_c \cdot Z(Z-1) \cdot A^{-\frac{1}{3}} \approx 121,3 \text{ MeV} \quad \text{mit } a_c = 0,714 \text{ MeV}$$

Die Fermienergie E_F ist die Energie des höchsten noch besetzten Zustands im Potentialtopf, wenn der Kern im Grundzustand ist.

Sie wird als Energiedifferenz zum tiefstmöglichen Zustand angegeben. Die Tiefe des Potentialtopfs wird durch die Größe der Fermienergie und deren Abstand B' zur Kante des Potentialtopfs bestimmt. B' ist bei stabilen Kernen für Protonen und Neutronen gleich groß und gleich der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon, welche für die meisten Kerne ca. 8 MeV beträgt. Somit folgt für die Tiefe der Potentialöpfe von ^{56}Fe :

$$V_0^n = E_F^n + B' \approx 42,3 \text{ MeV}, \quad V_0^p = E_F^p + B' \approx 39,2 \text{ MeV}$$

Kerne sind dabei relativ schwach gebundene Systeme, weil die mittlere kinetische Energie pro Nukleon $\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{5} E_F$ in der gleichen Größenordnung liegt wie die Tiefe des Potentials.