HA08

Samstag, 26. November 2022 12:07

Lisa Peltzer, Angelo Beade

(1)

a) Die Aussage ist wahr, da die Basis von dem $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{R}$ ist und $\forall x \in \mathbb{Q}: x \in \mathbb{R}$ sind. Folgedessen $\forall x \in [\mathbb{Q}\text{-VR}]: x \in \mathbb{R}$

b) Die Aussage ist falsch, da die Basis von dem $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{Q}$ ist und $\neg\forall x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{Q}$ sind. Folgedessen $\neg\forall x \in [\mathbb{R}\text{-VR}]: x \in \mathbb{Q}$.

(5) ggT(24.531, 10.893)

i	x	y	q	r	a	b
1	24.531	10.893	2	2.745	1127	-2538
2	10.893	2.745	3	2.658	-284	1127
3	2.745	2.658	1	87	275	-284
4	2.658	87	30	48	-3	275
5	87	48	1	39	5	-9
6	48	39	1	9	-4	5
7	39	9	4	3	1	-4
8	9	3	$\underline{\underline{3}}$	0	0	1

ggT(24.531, 10.893) = 3

ggT(24.531, 10.893) = $24.531 \cdot 1127 + 10.893 \cdot (-2538)$

(2)

a)

z: I A ist nicht leer.

II A ist Additiv.

III A ist Skalierbar.

I: $(0,0)$: $\quad 2 \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0,0) \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ $\square$

II: $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$2x - y + 2x' - y' = 0$$

$$2(x+x') - (y+y') = 0 \quad \square$$

III: $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot (2x + y) = 0$$

$$\lambda 2x + \lambda y = 0$$

$$2\lambda x + \lambda y = 0 \quad \square$$

perfektes Lamda: λ ᵕ̈

A ist ein UVR.

b) z: kein neutrales Element der Addition $(0,0)$:

$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 = 2$ ↯ $\Rightarrow$ kein VR $\Rightarrow$ kein UVR.

B ist kein UVR.

c) Für den Vektorraum C mit der Gleichung $x \cdot y = 0$ muss entweder x oder y gleich 0 sein. Folgedessen besteht der Vektorraum aus den beiden Geraden $\lambda_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lambda_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_x = 1 \wedge \lambda_y = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C$ $\square$

C ist kein UVR.

d) z: I A ist nicht leer.

II A ist Additiv.

III A ist Skalierbar.

II A ist Additiv.

III A ist Skalierbar.

I: $(0,0) \Rightarrow 0^2+0^2=0 \Rightarrow (0,0)\in A \Rightarrow A\neq\emptyset$ $\square$

II: $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$(x^2+y^2)+(x'^2+y'^2)=0$$
$$(x^2+x'^2)+(y^2+y'^2)=0 \quad \square$$

III: $(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$$\lambda\cdot(x^2+y^2)=0$$
$$\lambda x^2+\lambda y^2=0 \quad \square$$

A ist ein UVR.

e) z: kein neutrales Element der Addition:

$(0,0) \Rightarrow 0=e^0 \Leftrightarrow 0=1$ ↯ $\Rightarrow$ kein VR $\Rightarrow$ kein UVR

E ist kein UVR.

3

a) $U_1 := \{f\in M \mid f(x)\geq 0$ für alle $x\in[-1,1]\}$

z: nicht Skalierbar:

$f(x)\in U_1,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Wenn $\lambda<0 \wedge f(x)>0 \Rightarrow (\lambda\cdot f(x))<0 \Rightarrow (\lambda\cdot f(x))\notin U_1$ ↯

U_1 ist kein UVR.

b) $U_2 := \{f\in M \mid$ für geeignete $a,b\in\mathbb{R}$ gilt: $f(x)=a\cos\pi x+b\sin\pi x$ für alle $x\in[-1,1]\}$

z: I A ist nicht leer.

II A ist Additiv.

III A ist Skalierbar.

I Keine leere Menge: $x=0 \wedge a=0 \wedge b=0 \Rightarrow (0,0)$: $0\cos\pi 0+b\sin\pi 0=0 \Rightarrow U_1\neq\emptyset$ $\square$

II Additiv: $a,b,a',b'\in\mathbb{R}; x\in[-1,1]$:

$$a\cos\pi x+b\sin\pi x+a'\cos\pi x+b'\sin\pi x=0$$
$$(a+a')\cos\pi x+(b+b')\sin\pi x=0 \quad \square$$

III Skalierbar: $a,b,\lambda\in\mathbb{R},\ x\in[-1,1]$:

$$\lambda(a\cos\pi x+b\sin\pi x)=0$$
$$(\lambda\cdot a)\cos\pi x+(\lambda\cdot b)\sin\pi x=0 \quad \square$$

c) $U_3 := \{f\in M \mid f(-x)=f(x)$ für alle $x\in[-1,1]\}$

z: I A ist nicht leer.

II A ist Additiv.

III A ist Skalierbar.

I keine leere Menge: $x=0 \Rightarrow f(-0)=f(0) \Rightarrow U_3\neq\emptyset$ $\square$

II Additiv: $x\in[-1,1],\ f_1,f_2,f_3\in M$

$$f(x)=f(-x)\begin{cases} f_1(x)+f(x)=f_3(x) \\ f_1(-x)+f_2(-x)=f_3(x)\end{cases}$$
$$f_3(-x)=f_3(x) \quad \square$$

III Skalierbar: $x\in[-1,1],\ \lambda\in\mathbb{R};\ f_1,f_2\in M$

$$\lambda\cdot f_1(x)=f_2(x)$$

III Skalierbar: $x \in [-1, 1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $f_1, f_2 \in M$

$$\lambda \cdot f_1(x) = f_2(x)$$
$$\lambda \cdot f_1(x) = f_2(-x)$$
$$\lambda \cdot f_1(-x) = f_2(-x)$$
$$\lambda \cdot f_1(-x) = \lambda \cdot f_1(x)$$

$\square$

U_3 ist ein UVR.

d) $U_4 := \{ f \in M \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [-1, 1] \}$

Das neutrale Element der Addition fehlt, da $(x, 0)$, also auch $(0, 0)$, durch $f(x) \neq 0$ ausgeschlossen wird. Folgedessen ist U_4 kein VR und somit auch kein UVR, da jeder UVR ein VR sein muss.

$\square$

Auf 4.

$V =$ Q-Vektorraum $\quad U \subseteq V$

$W =$ R-Vektorraum $\quad U \subseteq W$

Unterraum Axiome

$U \neq \emptyset$

$x, y \in U$

$\rightarrow x + y \in U$

$\lambda \in \mathbb{Q} \vee \lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \lambda \cdot x \in U$

a) $U_1 = \{0\}$

$U_1 \neq \emptyset$

$x, y \in U_1 \rightarrow 0 + 0 = 0 \in 0$

$\lambda \in \mathbb{Q} \vee \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot 0 = 0 \quad 0 \in U_1$

Die Teilmenge U_1 ist ein Unterraum von V und W

b) $U_2 = \mathbb{R}$

$U_2 \neq \emptyset$

$x, y \in U_2 \rightarrow x + y \in U_2$

$\lambda \in \mathbb{Q} \rightarrow \lambda \cdot x \in U_2 \qquad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot x \in U_2$ ✓ $\qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

Die Teilmenge U_2 ist ein Unterraum von V und W c)

$U_3 = \mathbb{Q}$

$U_3 \neq \emptyset$

$x, y \in U_3 \rightarrow x+y \in U_3$

$\lambda \in \mathbb{Q} \rightarrow \lambda \cdot x \in U_3 \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$

$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot x \notin U_3 \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \notin \mathbb{Q}$

Die Teilmenge U_3 ist ein Unterraum von V

d) $U_4 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$U_4 \neq \emptyset$

$x, y \in U_4 \rightarrow x+y \in U_4$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \; (a_1\sqrt{2} + b_1\sqrt{3}) + (a_2\sqrt{2} + b_2\sqrt{3}) \in U_4$

$(a_1 + a_2) \cdot \sqrt{2} + (b_1 + b_2)\sqrt{3}$

$a_1 + a_2 \in \mathbb{R} \wedge b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot (a\sqrt{2} + b\sqrt{3}) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

$\lambda a = a_\lambda \quad \lambda b = b_\lambda \qquad a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{Q} \rightarrow \lambda \cdot (a\sqrt{2} + b\sqrt{3}) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

$\lambda a = a_\lambda \quad \lambda b = b_\lambda \qquad a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$

U_4 ist ein Unterraum von V und W

e) $U_5 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

$U_5 \neq \emptyset$

$x,y \in U_5 \rightarrow x+y \in U_5$

$a,b \in \mathbb{Q}$ $(a_1\sqrt{2} + b_1\sqrt{3}) + (a_2\sqrt{2} + b_2\sqrt{3})$

$(a_1 + a_2) \cdot \sqrt{2} + (b_1 + b_2)\sqrt{3}$

$a_1 + a_2 \in \mathbb{Q} \wedge b_1 + b_2 \in \mathbb{Q}$

$\lambda \in \mathbb{Q}$ $\lambda(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$

$\lambda a = a_\lambda$ $\lambda b = b_\lambda$ $\qquad a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \notin \mathbb{Q}$

U_5 ist ein Unterraum von V

f) $U_6 = \mathbb{Z}$

$U_6 \neq \emptyset$ ✓

$x,y \in U_6 \rightarrow (x+y) \in U_6$ ✓

$\lambda \in \mathbb{Q}$ $\lambda \cdot x \notin U_6$ $\qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{Q} \notin \mathbb{Z}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot x \notin U_6$ $\qquad \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ $\qquad \mathbb{R} \notin \mathbb{Z}$

U_6 ist kein Unterraum von V oder W

Aufgabe 6 (3+1+1 Punkte). Entscheiden und begründen Sie:

(a) Ist $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$?

(b) Beschreiben Sie $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$?

Auf 6

Satz 5.2:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ ein Untervektorraum von V.

Definition 5.1:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Ein $v \in V$ ist eine **Linearkombination** (kurz: **LK**) von $v_1, \dots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Die Körperelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen **Koeffizienten** dieser Linearkombination.
Die Menge $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) := \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\} \subseteq V$ aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ heißt **Lineare Hülle** von $v_1, \dots, v_n$.
Im Fall $n = 0$ setzen wir $\mathcal{L}(\emptyset) := \{0\}$.

a)

$$\mathcal{L}(v_1 \dots v_n) := \{\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n \mid \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$$

Nach Satz 5.2 ist die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$

b)

$$\mathcal{L} := \left\{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

lineare Hülle

$$[\mathcal{L}] = \left\{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

c) $\mathcal{L} := \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$[\mathcal{L}] = \left\{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{L}$?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \text{II} & 2\lambda_2 = -6 \quad | :2 \\ \text{III} & \lambda_1 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \text{II} & \lambda_2 = -3 \\ \text{III} & \lambda_1 = 4 \end{array}$$

II und III in I einsetzen

$$2 \cdot 4 - 3 = 1 \quad ↯$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt nicht in $\mathcal{L}$