HA03

Sonntag, 23. Oktober 2022 10:59

23. Oktober 2022

Michael Vogt, Angelo Brade

①

(i) Ohne Aufsprung:

$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0y} t$

$y(t) \overset{!}{=} 0$

$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} \cdot t$

$0 = -gt + 2 v_{0y}$) Was passiert für $t=0$? (siehe ∗)

$t_1 = \frac{2 v_{0y}}{g}$ ∗

(∗) $0 = t\left(-\frac{1}{2} gt + v_{0,y}\right) \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \text{und} \\ t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \end{cases}$

$D = t_1 \cdot v_{0x}$

$D = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$; $v_{0x} = v_{0y} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0$

$\Leftrightarrow D = \frac{2 v_{0x}^2}{g} = \frac{v_0^2}{g}$

mit Aufsprung:

bis zum Aufsprung

$v_{ay} = \sin\theta \cdot v_0$

mit ∗ und $v_{0y} \to v_{ay}$:

$t_a = 2 \frac{v_{ay}}{g}$; $v_{ay} \to \sin(\theta) v_0$

$t_a = 2 \sin(\theta) \frac{v_0}{g}$

$D_a = t_a \cdot v_{ax} = 2 \sin(\theta) \frac{v_0}{g} \cdot \cos(\theta) v_0$

$D_a = \sin(\theta)\cos(\theta) \frac{2 v_0^2}{g}$

$D \overset{!}{=} D_a + D_b$

ab den Aufsprung:

$v_{by} = \frac{1}{2} v_{ay} = \frac{1}{2} \sin(\theta) v_0$

mit ∗ und $v_{0y} \to v_{by} = \sin(\theta) v_0$:

$t_b = \sin(\theta) \frac{v_0}{g}$

$D_b = t_b \cdot v_{bx} = \frac{1}{2} \sin(\theta) \frac{v_0}{g} \cdot \cos(\theta) v_0$

$D_b = \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{v_0^2}{2g}$

$\frac{2 v_{0x}^2}{g} = \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \frac{2 v_0^2}{g} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{v_0^2}{2g}$

$\frac{2 v_{0x}^2}{g} = \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \left(\frac{2 v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{2g} \right)$

$\frac{2 v_{0x}^2}{g} = \frac{5}{2} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \frac{v_0^2}{g}$

$\boxed{\begin{aligned} v_0^2 &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \\ v_{0y} &= v_{0x} \\ v_0^2 &= 2 v_{0x}^2 \end{aligned}}$

$\frac{2 v_{0x}^2}{g} = \frac{5}{2} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \frac{2 v_{0x}^2}{g}$

$1 = \frac{5}{2} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$

$1 = \frac{5}{2} \frac{\sin(2\theta)}{2}$

$\boxed{\sin\theta \cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}}$

$$1 = \frac{5}{2}\,\frac{\sin(2\theta)}{2} \qquad \boxed{\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}}$$

$$\frac{4}{5} = \sin(2\theta)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 26{,}6°$$

ii)

$$t_{ab} = t_a + t_b = \frac{3\sin\theta\, v_0}{g} = \frac{3\sin\theta\sqrt{2}\, v_{0x}}{g}$$

$$t_1 = \frac{2\, v_{0x}}{g}$$

$$\frac{t_1}{t_{ab}} = \frac{\left(\frac{2 v_{0x}}{g}\right)}{\left(\frac{3\sin\theta\sqrt{2}\, v_{0x}}{g}\right)} = \frac{2}{3\sin\theta\sqrt{2}}\,; \quad \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{t_1}{t_{ab}} \approx 1{,}05$$

(2)

(i) Egal welche Geschwindigkeit der Pfeil hat, er braucht immer eine Zeit $t = \frac{s}{v}$; $s > 0 \Rightarrow t > 0$ um die Scheibe zu erreichen. Während dieser Zeit t wird der Pfeil um $h = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$, also $h < 0$, durch die Schwerkraft g abgelenkt werden. Um den Mittelpunkt zu treffen muss $h = 0$ sein, was nicht möglich ist.

(ii) $s = 50\,m$; $v = 200\,m/s$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{50\,m}{200\,m/s}$$

$$t = 0{,}25\,s$$

$$h = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot (0{,}25\,s)^2$$

$$h \approx 0{,}31\,m \Rightarrow d \approx 0{,}62\,m$$

Die Scheibe muss einen Durchmesser von ca. 0,62 m haben, damit der Pfeil noch trifft.

(iii) Geschwindigkeit v des Pfeils: $\vec{v}$

$$v_x = \cos\cdot(\alpha)\cdot|\vec{v}| \qquad v_y = \sin\cdot(\alpha)\cdot|\vec{v}| \quad \rightarrow \quad \frac{x_{t1}}{v_x} = t_1 = \frac{x_{t1}}{\cos(\alpha)\cdot|\vec{v}|}$$

Zeit t_1: Zeit für die Strecke x_{t1} von Abschussstelle bis zur Wand

Pfeil: Überlagerung vertikale Komponente der Geschw. mit Erdanziehung

$$\Rightarrow \text{Höhe: } h(t) = h_0 + v_y\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = h_0 + \sin(\alpha)\cdot|\vec{v}|\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ursprüngliche Höhe

Apfel: $\cancel{h_{A,0} = h_0 + \tan(\alpha)\cdot x_{t1}}$ Höhe des Apfels abhängig vom Abschusswinkel?

$$y_A(t) = h_{A,0} - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = \cancel{h_0 + \tan(\alpha)\cdot x_{t1} - \frac{1}{2}gt^2}$$

Zum Zeitpunkt t_1: Pfeil $y(t_1)$, $y_A(t_1)$

$$y(t_1) = h_0 + \sin(\alpha)\cdot|\vec{v}|\cdot\frac{x_t}{\cos(\alpha)\cdot|\vec{v}|} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 = h_0 + \tan(\alpha)\cdot x_{t1} - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$y(t_1) = y_A(t)$ ist die Voraussetzung, nicht das Ergebnis.

$y_A(t) = h_0 + \tan(\alpha)x_{t1} - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow$ Da die Geschwindigkeit v nicht mehr in der Formel vorkommt, trifft der Pfeil den Apfel unabhängig von der Geschwindigkeit. Ebenso zeigt die Gleichung, dass der Pfeil den Apfel immer trifft, da es abhängig von h_0, g, t und α immer eine Lösung gibt.

(3) Mithilfe von $g = \frac{2x}{t^2}$ lässt sich die Schwerkraft anhand jeden Punktes berechnen.

In t lässt sich einfach $\frac{n}{50s^{-1}}$ einsetzen, da nach jedem Punkt n $\frac{1}{50s^{-1}}$ vergangen sind.

Daraus folgt folgende Tabelle:

n	s*100 in m	g=(2s/100)/(n/50s^(-1))
1	-	-
2	1,10	13,75
3	2,00	11,11
4	3,50	10,94
5	5,30	10,60
6	7,60	10,56
7	10,30	10,51
8	13,10	10,23
9	16,40	10,12
10	20,20	10,10
11	24,30	10,04

12	28,60	9,93
13	33,50	9,91
14	38,60	9,85
15	44,40	9,87
16	50,50	9,86
17	57,00	9,86

Besonders größre Werte von n, wie z.B. $n > 11$, sind von weniger Messfehlern betroffen, da der Abstand s relativ zur Zeit $\frac{n}{50\,s^{-1}}$ genauer bestimmt werden kann.

Bildet man nun den Mittelwert von g von $17 \geq n \geq 12$ folgt:

$\bar{g} = 9{,}88\ m/s^2$

Der selbst ermittelte Wert von $9{,}88\ m/s^2$ ist im Vergleich zum Literaturwert $9{,}81\ m/s^2$ im Angesicht der relativ großen systematischen und statistischen Messfehlern verträglich.

Welche konkrete Fehler?
Die Aussage ist gleichbedeutend mit „aus irgendwelchem Grund“.

okay!