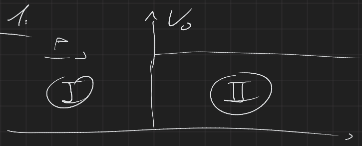
Theo 3 Blatt 2 Angelo Valentino Brade 25.04.2024

Aufgabe 1:

1.:



$$V(x)\begin{cases} V_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

I: $\hat{H}\psi = E\psi$ mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Die Welle kann in dieser Region als einfallende oder reflektierte ($\hat{=}$ umgedrehte Phase) Welle existieren:

$\Rightarrow \psi(x) = e^{i\frac{px}{\hbar}} + Re^{-i\frac{px}{\hbar}}$ mit $p^2 = 2mE$

II: $\hat{H}\psi = (E - V_0)\psi$

Die Welle kann mit reduzierter Energie in Region II als transmittierte Welle existieren

$\Rightarrow \psi(x) = Te^{i\frac{q}{\hbar}x}$ mit $q^2 = 2m(E - V_0)$

Es gibt keinen negativen Exponenten, damit falls $q \in \mathbb{C}$, $\lim_{x\to\infty} \psi(x) \to 0$ erfüllt bleibt. Sonst divergiert $\|\psi\|^2$.

2.: ψ und ψ' müssen stetig sein, damit ψ und die Wahrscheinlichkeit ρ_ψ glatt sind und es physikalisch Sinn ergibt.

3.: Sei $E_p > V_0$, somit gilt für $x > 0$:

$\psi(x) = Te^{i\frac{q}{\hbar}x}$ mit $q^2 \overset{(I)}{=} 2m(E - V_0) > 0 \Rightarrow q \in \mathbb{R} \Rightarrow \psi(x>0) \in \mathbb{C}$.

(I) $\psi'' + 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}\psi = 0$

$\Rightarrow \omega_0^2 = 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow \frac{q^2}{\hbar^2} = 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow q = \sqrt{2m(E - V_0)}$

Sei

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{p}{\hbar}x} + Re^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x < 0 \\ T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

somit folgt aus den Stetigkeiten bei $x = 0$:

$$e^{i\frac{p}{\hbar}x} + Re^{-i\frac{p}{\hbar}x}\Big|_{x=0} = T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}\Big|_{x=0} \Rightarrow \boxed{1 + R = T}$$

und

$$i\frac{p}{\hbar}e^{i\frac{p}{\hbar}x} - i\frac{p}{\hbar}Re^{-i\frac{p}{\hbar}x}\Big|_{x=0} = i\frac{q}{\hbar}T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}\Big|_{x=0} \Rightarrow \boxed{p(1 - R) = qT} \quad (II)$$

$\Rightarrow \frac{p}{q}(1 - R) = 1 + R$

$\Rightarrow \frac{p}{q} - \frac{p}{q}R - 1 = R$

$\Rightarrow \frac{p}{q} - 1 = R(1 + \frac{p}{q})$

$\Rightarrow \frac{p-q}{p+q} = R$, mit $q = \sqrt{2m(E - V_0)}$

$\overset{(I)}{\Rightarrow} T = \frac{p-q}{p+q} + 1$, $p = \sqrt{2mE}$

Das Ergebnis gibt Wahrscheinlichkeiten $|T|^2$ und $|R|^2$ an, die durch die Energie E und das Potential V_0 bestimmt werden.
Dies steht im Kontrast zu den deterministischen Bewegungen in der klassischen Mechanik. Wo, wird diese ebenso durch E und V_0 bestimmt werden:

$p = mv \quad E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$

$E'_{kin} = E - V_0$

$\Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - V_0$

$\Rightarrow p = \sqrt{2m(E - V_0)}$

Hier $p = q$, da deterministisch festgelegt ist, dass das Teilchen transmittiert.

4: Sei $E_p \leq V_0$, somit gilt für $x<0$:

$\psi(x) = T e^{i\frac{q}{\hbar}x}$ mit $q^2 \overset{(I)}{=} 2m(E-V_0) < 0 \Rightarrow q \in \mathbb{C} \Rightarrow \psi(x>0) \in \mathbb{R}$ (J)

$\Rightarrow \psi(x) = T e^{-\frac{\kappa}{\hbar}x}$ mit $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{p}{\hbar}x} + R e^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x<0 \\ T \cdot e^{-\frac{\kappa}{\hbar}x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

somit folgt aus den Stetigkeiten in $x=0$:

$\Rightarrow 1 + R = T$

und

$i\frac{p}{\hbar} - R i \frac{p}{\hbar} = \frac{-\kappa}{\hbar} T \Rightarrow ip(1-R) = -\kappa T.$

$\Rightarrow 1 + R = \frac{p}{i\kappa}(1-R)$

$\Rightarrow R\left(1 + \frac{p}{i\kappa}\right) = \frac{p}{i\kappa} - 1$

$\Rightarrow R = \frac{p - i\kappa}{p + i\kappa}$

$\Rightarrow T = 1 + \frac{p-i\kappa}{p+i\kappa}$ mit $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$, $p = \sqrt{2mE}$

Das steht wieder mit den Wahrscheinlichkeiten $|R|^2$ und $|T|^2$ im Kontrast zu dem klassischen Determinismus:

Es wird zu einem Stoß kommen: $v \to v' = -v$

$\Rightarrow p' = -mv = -p$

$\psi'' + 2m\frac{(E-V_0)}{\hbar^2}\psi = 0$

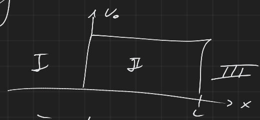
$\Rightarrow \omega_0^2 = 2m\frac{(E-V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow \frac{q^2}{\hbar^2} = 2m\frac{(E-V_0)}{\hbar^2} \quad | \; V_0 > E$

$\Rightarrow q = i\sqrt{2m(E-V_0)}$

Aufgabe 2:

1.:



I: In diesem Bereich kann die Welle Einfallen oder Reflektion ($\hat{=}$ umgekehrte Phase):

$$\psi(x<0) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}x}$$

II: In diesem Bereich kann die Welle Transmittieren:

$$\Rightarrow \psi(L>x>0) = Ce^{-\frac{\kappa}{\hbar}x}.$$

Da mit $E_0 < V$ und $\kappa > 0$ alle Lösungen $\psi \in \mathbb{R}$ reell sind, müssen die Koeffizient von dem Exponenten mit positiven Vorzeichen Null sein, da mit $P_\psi = 1$ $\lim_{x\to\infty} \psi(x) \to 0$ sein muss.

Da der Bereich II beschränkt ist dürfte doch eigentlich der „$e^{\frac{\kappa}{\hbar}x}$"-Term existieren, oder?

III: In diesem Bereich kann die Welle als einfache auslaufende Welle existieren:

$$\Rightarrow \psi(x>L) = De^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

2.:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{i\frac{p}{\hbar}x} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x<0 \\ Ce^{-\frac{\kappa}{\hbar}x} & , L>x>0 \\ De^{i\frac{p}{\hbar}x} & , x>L \end{cases}$$

$$\hat{H}\psi = E_n\psi$$
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi = E_n\psi$$
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E_n\psi \quad | \ \psi(x) = ae^{\lambda x}$$
$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E_n - V = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2m\frac{V-E_n}{\hbar^2}} \quad | \text{ nur } \lambda_2\text{, da Koeffizient von } \lambda_1 \text{ Null ist}$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{\kappa}{\hbar}$$
$$\Rightarrow -\frac{\kappa}{\hbar} = -\sqrt{2m(V-E_n)}\frac{1}{\hbar}$$
$$\Rightarrow \kappa = \sqrt{2m(V-E_n)}$$

Aus der Stetigkeit folgt:

$$\psi(x=0) = A + B = C$$
$$\psi'(x=0) = ip(A-B) = -\kappa C$$
$$\Rightarrow ipA - ipB = -\kappa A - \kappa B$$
$$\Rightarrow A(ip+\kappa) = B(ip-\kappa)$$
$$\Rightarrow B = A\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}$$
$$\Rightarrow C = A\left(1+\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right)$$
$$\psi(x=L) = Ce^{-\frac{\kappa}{\hbar}L} = De^{i\frac{p}{\hbar}L}$$
$$\Rightarrow D = Ce^{-\frac{L}{\hbar}(\kappa+ip)} \qquad \Rightarrow D = A\left(1+\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right)e^{-\frac{L}{\hbar}(\kappa+ip)}$$
$$\psi'(x=L) = -\frac{\kappa}{\hbar}e^{-\frac{\kappa}{\hbar}L}\cdot C = i\frac{p}{\hbar}e^{i\frac{p}{\hbar}L}\cdot D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = -Ci\frac{p}{\kappa}e^{-\frac{L}{\hbar}(\kappa+ip)}$$

$$1 = P(x) = \|\psi\|^2 = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2$$
$$= |A|^2 + \left|A\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right|^2 + \left|A\left(1+\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right)\right|^2 + \left|A\left(1+\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right)e^{-\frac{L}{\hbar}(\kappa+ip)}\right|^2 \quad \Big| \quad \left|\frac{ip+\kappa}{ip-\kappa}\right|^2 = |\mu|^2$$
$$= |A|^2 + |A|^2|\mu|^2 + |A|^2|(1+\mu)|^2 + |A|^2|(1+\mu)|^2e^{-2\frac{L}{\hbar}}$$
$$= |A|^2\left(2 + 2|\mu|^2 + |(1+\mu)|^2e^{-2\frac{L}{\hbar}}\right)$$
$$\Leftrightarrow A = e^{i\alpha}\left(2 + 2|\mu|^2 + |(1+\mu)|^2e^{-2\frac{L}{\hbar}}\right)^{-1/2}$$
$$= e^{i\alpha}\left(\frac{4p^2\kappa^2}{(p^2-\kappa^2)^2} + 4 + \frac{4p^2\kappa^2}{(p^2-\kappa^2)^2}e^{-2\frac{L}{\hbar}}\right)^{-1/2}$$
$$= e^{i\alpha}\left(4\frac{p^2\kappa^2}{(p^2-\kappa^2)^2}\left(1+e^{-2\frac{L}{\hbar}}\right) + 4\right)^{-1/2}$$

$$\mu = \frac{ip+\kappa}{ip-\kappa} = \frac{(ip+\kappa)(-)(ip+\kappa)}{(-\kappa-ip)(ip-\kappa)} = -\frac{(ip+\kappa)^2}{p^2+\kappa^2}$$
$$= -\frac{\kappa^2-p^2}{p^2+\kappa^2} - \frac{2ip\kappa}{p^2+\kappa^2}$$

$$\Rightarrow |\mu|^2 = \frac{4p^2\kappa^2}{(p^2-\kappa^2)^2} + 1$$

$$\Rightarrow 1 + \mu = \frac{2ip\kappa}{p^2-\kappa^2}$$