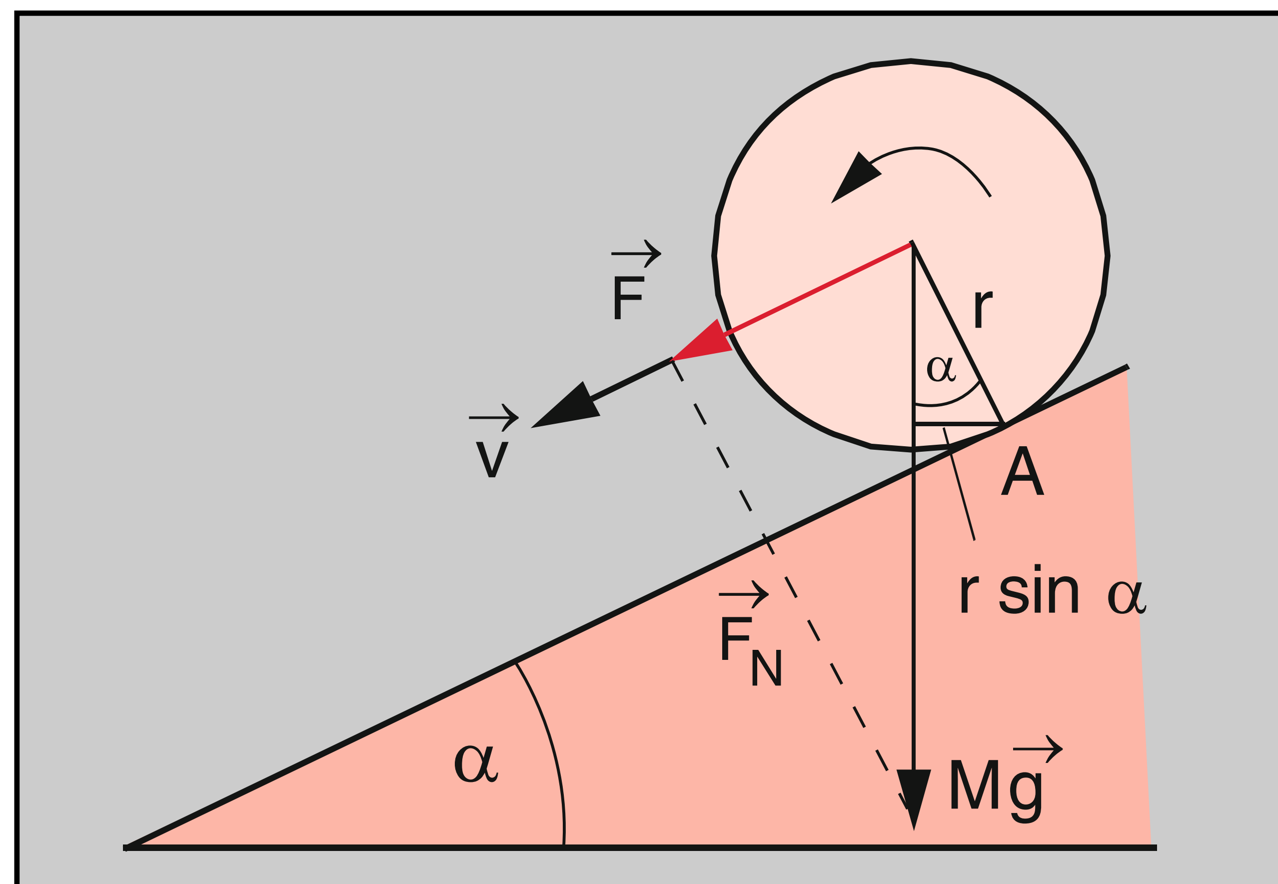
Vorlesung 20

Beispiel : **Rollen auf schiefer Ebene**

mit gleicher Masse

Drehung erfolgt um **Berührungslinie A** mit schiefer Ebene



Resultierendes **Drehmoment** :

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}_g \rightarrow D = r \sin\alpha \cdot F_g$$

Trägheitsmoment (mit Satz von Steiner) : $I_{\text{ges}} = I_{\text{SP}} + Mr^2$

Es gilt : $D = I\,\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad Mgr\sin\alpha = (I_{\text{SP}} + Mr^2)\,\dot{\omega}$

$v = \omega r \rightarrow a = \dot{\omega} r$

Translationsbeschleunigung des SP $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ = Umfangsbeschleunigung $r\,\dot{\omega}$ des herabrollenden Körpers

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = r\dot{\omega} = r\,\frac{Mgr\sin\alpha}{I_{\text{SP}} + Mr^2} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_{\text{SP}}}{Mr^2}} = a$$

	$I_{\text{SP}}/(Mr^2)$	$1 + I_{\text{SP}}/(Mr^2)$	a	Platz
Vollzylinder	$1/2$	$3/2$	$\frac{2}{3}g\sin\alpha$	2.
Hohlzylinder	1	2	$\frac{1}{2}g\sin\alpha$	3.
Kugel	$2/5$	$7/5$	$\frac{5}{7}g\sin\alpha$	1.

Beispiel : **Eier auf schiefer Ebene**

Ein rohes und ein gekochtes Ei rollen eine schiefe Ebene herunter.

Welches kommt zuerst an oder kommen gar beide gleichzeitig an?

Antwort:

Das **rohe** Ei kommt schneller an, i.e. hat ein kleineres Trägheitsmoment

Beim rohen Ei “rollt” zu Beginn nur die Schale mit. Der flüssige Kern wird nur langsam beschleunigt.

Beim gekochten Ei muss die Gesamtmasse mitbeschleunigt werden.

Siehe auch: Eierwettlauf.pdf auf ecampus

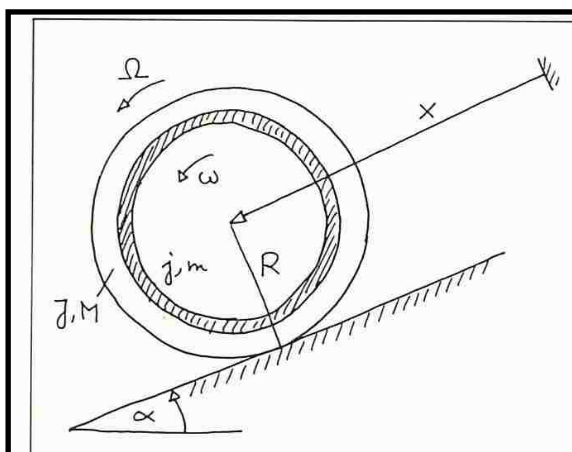


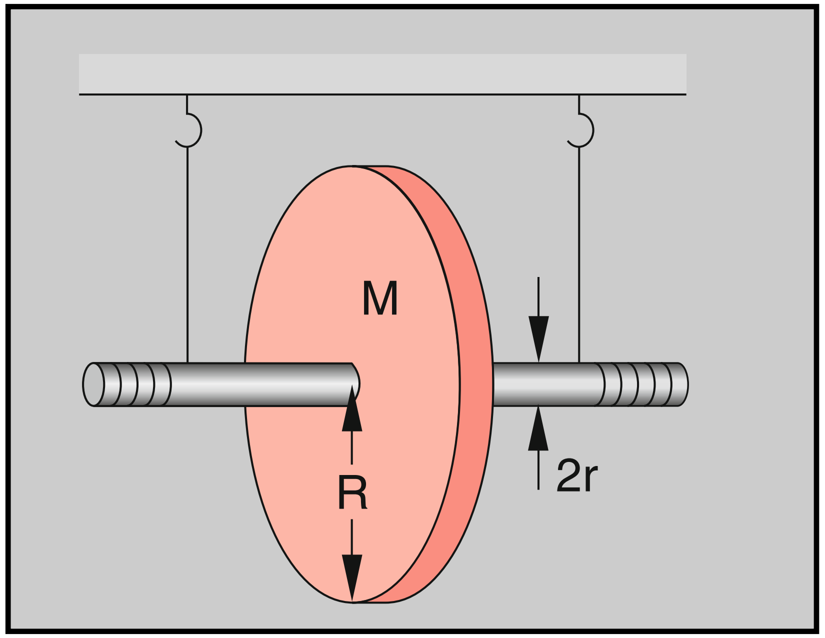
Bild 1. Modellvorstellung des rollenden Eies

Beispiel : **Maxwell-Rad**

Eine zylindrische Scheibe ist auf einer dünnen Achse zentriert aufgehängt

(Radius R, Masse M, Trägheitsmoment $I_{\rm SP} = \dfrac{1}{2} M R^2$,

Radius Achse $r \ll R$)



Auf der Achse ist ein Faden aufgewickelt. Lässt man das Rad los, so wird es unter dem Einfluss des **Drehmoments**

$$\overrightarrow{D} = \vec{r} \times M\,\overrightarrow{g}$$

zu rotieren beginnen und sich beschleunigt nach unten zu bewegen.

Es ist nun $D = r\,Mg$ und $D = I_{\rm ges}\,\ddot{\varphi} = \left(I_{\rm SP} + M\,r^2\right)\,\ddot{\varphi}$.

Die Beschleunigung ist nun :

$$a = r\ddot{\varphi} = \frac{r\,D}{I_{\text{ges}}} = \frac{r^2\,M\,g}{I_{\text{SP}} + Mr^2}$$

Satz von Steiner

Vollrad $\quad a = \dfrac{r^2 M\,g}{\frac{1}{2}MR^2 + Mr^2}$

Hohlrad $\quad a = \dfrac{r^2 M\,g}{MR^2 + Mr^2}$

$$\rightarrow a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{br^2}}$$

Vollrad $\quad b = 2$

Hohlrad $\quad b = 1$

Beim Abrollen wird **potentielle** in **kinetische Translations- und kinetische Rotationsenergie** umgewandelt. Es gilt :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}\right) = 0$$

mit

$$E_{\text{pot}} = Mgh(t)$$

$$E_{\text{kin,trans}} = \frac{1}{2}Mv_t^2(t)$$

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}I_{\text{SP}}\,\omega^2(t)$$

Wir betrachten die Gesamtenergie am **Ende** der Fallstrecke h :

$$Mgh = E_{\text{pot}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}$$

Die Translationsgeschwindigkeit v_t ist gegeben durch $v_t = r\,\omega = a\,T$ mit der Falldauer T

$$v_t = \frac{g}{1+\frac{R^2}{br^2}}T = r\omega \quad \rightarrow \quad \omega = v_t/r = \frac{g}{1+\frac{R^2}{br^2}}T/r$$

Die Falldauer T lässt sich aus der Fallhöhe und der Beschleunigung ermitteln:

$$h = \frac{1}{2}aT^2 \quad \rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2\frac{h}{g}\left(1+\frac{R^2}{br^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = v_t^2/r^2 = \frac{2hg}{r^2}\frac{br^2}{br^2+R^2}$$

Damit erhalten wir für die **kinetische Translations**- und **kinetische Rotationsenergie** :

$$E_{\text{kin,trans}} = \frac{1}{2} M v_t^2 = Mgh \frac{br^2}{br^2 + R^2} \qquad E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} I_{\text{SP}}\, \omega^2 = Mgh \frac{R^2}{br^2 + R^2}$$

Verhältnis $:\Rightarrow \dfrac{E_{\text{kin,trans}}}{E_{\text{kin,rot}}} = b \cdot \dfrac{r^2}{R^2}$ klein!

Die **meiste Energie** wird in **Rotationsenergie** umgewandelt!

Sobald wir das Rad fallen lassen, erwarten wir eine **Reduktion** der Kraft am Aufhängepunkt :

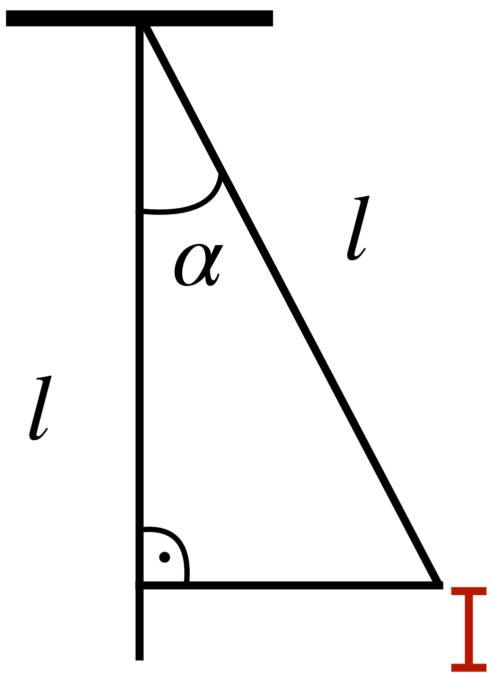
Beschleunigung des Rades :

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{br^2}} \quad \rightarrow F_S = mg \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R^2}{br^2}} \right)$$

Analog erwarten wir am **Wendepunkt** (wo das Rad sich wieder aufrollt) eine Kraft von :

$$F_S = mg \left(\frac{1}{1 + \frac{R^2}{br^2}} \right)$$

Beispiel : **Schaukel**



$l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha)$

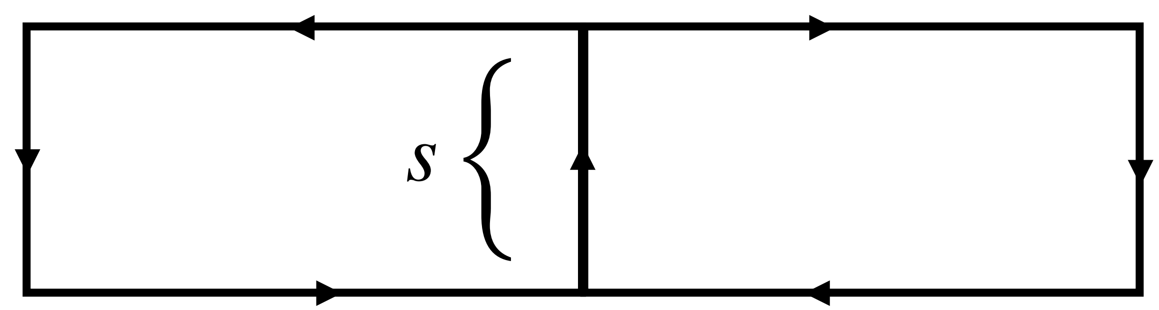
Umkehrpunkt : $E = E_{\text{pot}} = mgh$

Im Minimum : $E = E_{\text{rot}} = \dfrac{1}{2} I\,\omega^2 \longleftarrow \omega^2 = v^2/l^2$

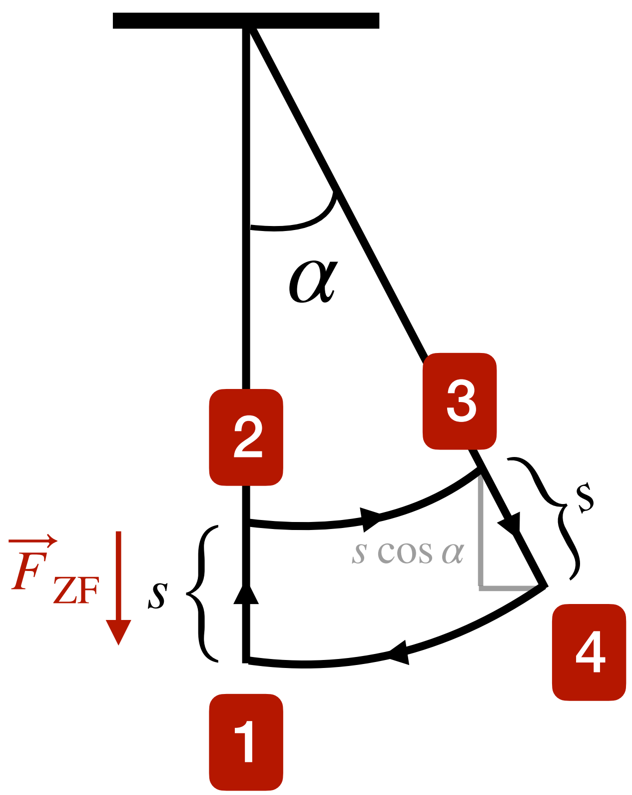
$I = m\,l^2 \rightarrow E_{\text{rot}} = \dfrac{1}{2} m v^2$

Masse der Person auf der Schaukel
plus Schaukel Masse

Ideale Bewegung :



Die Erklärung hängt mit der Hebung und Senkung des Schwerpunktes (SP) zusammen :



Hebung des SP 1 → 2

Senkung des SP 3 → 4

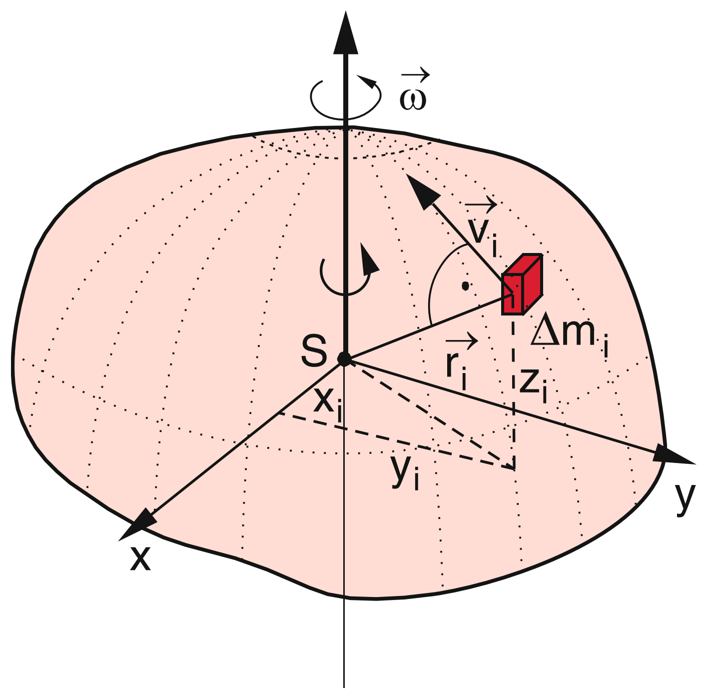
$$W_{\text{grav}} = W_{\text{grav:}1\to2} - W_{\text{grav:}3\to4}$$

$$= mgs - mgs\cos\alpha = mgs\,(1-\cos\alpha) > 0$$

6.8 Rotation um freie Achse (Kreisel)

6.8.1 Trägheitstensor

bisher : Rotation um feste Achse



→ Rotationsbewegung mit $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ und $\vec{L} \,||\, \vec{\omega}$

jetzt : Was passiert wenn der starre Körper **“frei”** rotiert (ohne fest verankerte Drehachse?)

(bis auf Unterstützung im SP um $\vec{F}_G$ zu kompensieren)

Man unterscheidet:

externes Drehmoment

1. Bewegung ohne $\vec{D}_{\text{ext}}$ **“kräftefrei”** ⟶ Kreisel

2. Bewegung mit $\vec{D}_{\text{ext}}$

Drehimpuls von Massenelement Δm_i eines Körper mit Winkelgeschw. $\vec{\omega}$ um beliebige Achse durch SP :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right)$$

$$= \sum_i \Delta m_i \left(r_i^2\, \vec{\omega} - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\right) \longleftarrow \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Kontinuum-Limes $\longrightarrow$

$$\vec{L} = \int_V r^2\, \vec{\omega}\, \mathrm{d}m \quad - \quad \int_V \left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right)\, \vec{r}\, \mathrm{d}m$$

$|| \, \vec{\omega}$ i.A. nicht $|| \, \vec{\omega}$

$\Longrightarrow$ Bei freien Achsen: $\vec{\omega} \not\parallel \vec{L}$

Betrachten x-Komponente L_x :

$$L_x = \int_V \left(r^2\,\omega_x - x\left(x\,\omega_x + y\,\omega_y + z\,\omega_z\right)\right)\,\mathrm{d}m$$

$$= \omega_x \underbrace{\int_V (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}m}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V xy\,\mathrm{d}m}_{-I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int_V xz\,\mathrm{d}m}_{-I_{xz}}$$

und entsprechend

$$L_y = I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Es gilt: $\boxed{\vec{L} = \mathbf{I}\,\vec{\omega}}$

Trägheitstensor $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$

(Tensor 2. Stufe ≙ Matrix)

vgl. Folie 365

Diagonalelemente : **Trägheitsmomente**

Trägheitsmoment : $I := \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}m = \int_V r_\perp^2 \varrho \, \mathrm{d}V$

$$I_{xx} = \rho \int_V (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}V = \rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}V = \rho \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{dV}$$

$\Longrightarrow$ **Trägheitsmoment** bei **Rotation** um **x-Achse**, etc.

Nicht-Diagonalelemente : **Deviationsmomente / Nebenträgheitsmomente**

$$I_{xy} = -\int_V xy \, \mathrm{d}m = -\int_V yx \, \mathrm{d}m = I_{yx}$$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{I}$ ist **symmetrisch**

$\Longrightarrow$ **Tragen** bei, wenn ein Körper **nicht ausschließlich** um **x-Achse**, etc. rotiert

Rotationsenergie :

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \left(\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\right)$$

Kontinuum-Limes

$$\longrightarrow \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_V \left(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\right) \, \mathrm{d}m$$

$$= \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}{2} \int_V r^2 \, \mathrm{d}m - \frac{1}{2} \int_V \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)^2 \, \mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2} \omega_x^2 \int_V \left(r^2 - x^2\right) \, \mathrm{d}m + \ldots + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int_V \left(r^2 - z^2\right) \, \mathrm{d}m$$

$$- \omega_x \omega_y \int_V xy \, \mathrm{d}m - \ldots \omega_y \omega_z \int_V yz \, \mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\omega_x I_{xx}\omega_x + \omega_y I_{yy}\omega_y + \omega_z I_{zz}\omega_z\right\} + \omega_x I_{xy}\omega_y + \omega_y I_{yz}\omega_z + \omega_z I_{zx}\omega_x$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbf{I}\,\vec{\omega} \qquad \left(\neq \frac{1}{2}\mathbf{I}\,\omega^2\right) \qquad = \text{Matrix!}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\begin{pmatrix} I_{xx}\,\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

Alle Elemente von $\mathbf{I}$ tragen zur Rotationsenergie bei !