Vorlesung 4

1.5 Zusammenfassung heutiger Eichstandard

Seit 20.5.2019 sindalle SI-Basiseinheiten über die Festlegung von Naturkonstanten definiert

1.5 Heutiger Eichstandard

Die Sekunde (Symbol s) ist die SI-Einheit der Zeit. Sie wird definiert durch die Konstante der Cäsiumfrequenz $\Delta\nu$, der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsium-Isotops ^{133}Cs. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 9 192 631 770 festgelegt, wenn sie in der Einheit Hz bzw. s^{-1} angegeben wird.

Der Meter (Symbol m) ist die SI-Einheit der Länge. Er wird definiert durch die Konstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 299 792 458 festgelegt, wenn sie in der Einheit $m \cdot s^{-1}$ angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Das Kilogramm (Symbol kg) ist die SI-Einheit der Masse. Es wird definiert durch die Konstante des Planck'schen Wirkungsquantums h. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf $6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ festgelegt, wenn sie in der Einheit $J \cdot s$ bzw. $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ angegeben wird und die Sekunde und der Meter durch $\Delta\nu$ und c definiert sind.

1.5 Heutiger Eichstandard

Das Ampere (Symbol A) ist die SI-Einheit der Stromstärke. Es wird definiert durch die Konstante der Elementarladung e. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 1,602 176 634 · 10^{-19} festgelegt, wenn sie in der Einheit C bzw. A · s angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Das Kelvin (Symbol K) ist die SI-Einheit der thermodynamischen Temperatur. Es wird definiert durch die Boltzmann-Konstante k. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 1,380 649 · 10^{-23} festgelegt, wenn sie in der Einheit J · K^{-1} bzw. kg · m^2 · s^{-2} · K^{-1} angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h, c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Das Mol (Symbol mol) ist die SI-Einheit der Stoffmenge. Ein Mol enthält genau 6,022 140 76 · 10^{23} Einzelteilchen. Diese Zahl ist der festgelegte numerische Wert der Avogadrokonstante N_A, ausgedrückt in der Einheit mol^{-1}, und wird als Avogadrozahl bezeichnet. Die Stoffmenge, Symbol n, eines Systems ist ein Maß für eine Anzahl spezifizierter Einzelteilchen. Dies kann ein Atom, Molekül, Ion, Elektron sowie ein anderes Teilchen oder eine Gruppe solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

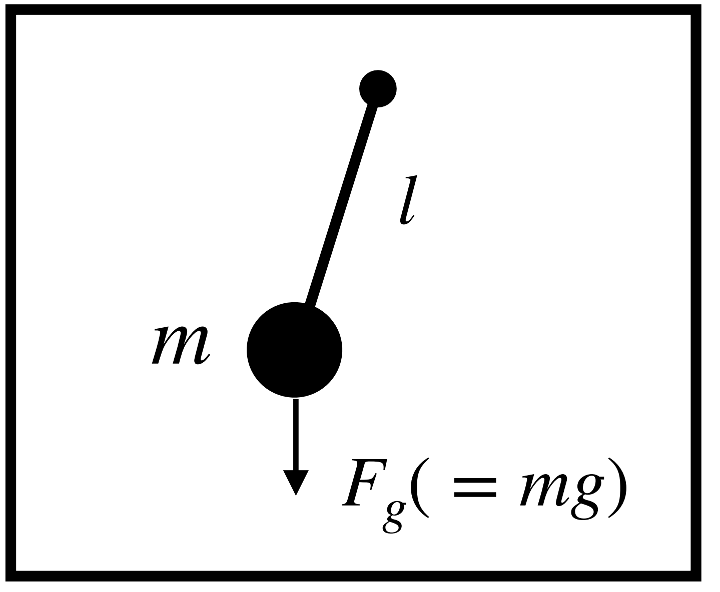
Die Candela (Symbol cd) ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Raumrichtung. Sie wird definiert durch die Konstante K_{cd}, das photometrische Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung von 540 · 10^{12} Hz. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 683 festgelegt, wenn sie in der Einheit lm · W^{-1} bzw. cd · sr · W^{-1} oder cd · sr · kg^{-1} · m^{-2} · s^3 angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h, c und $\Delta\nu$ definiert sind.

1.6 Dimensionsanalyse

Einheitensystem erlaubt “erraten” von Zusammenhängen, z.B.

Schwingungsdauer Fadenpendel

Annahme T hängt nur von m, l, g ab (plausibel)



Ansatz: $T = m^a\, l^b\, g^c$

$$\mathrm{s} = \mathrm{kg}^a\, \mathrm{m}^b\, (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})^c$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$b = +\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow T \sim \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(und unabhängig von m!)

Überprüfen der Einheiten **notwendige Bedingung** für **Korrektheit** eines **Ergebnisses**!

2. Massenpunkte

2.1 Kinematik

Beschreibung von Bewegung (**nicht** deren Ursache)

Massenpunkt:

- ★ Idealisierung
- ★ Vernachlässigung der Ausdehnung
- ★ oft: Reduktion auf Bewegung des Schwerpunkts (keine Rotation, Verformung, …)

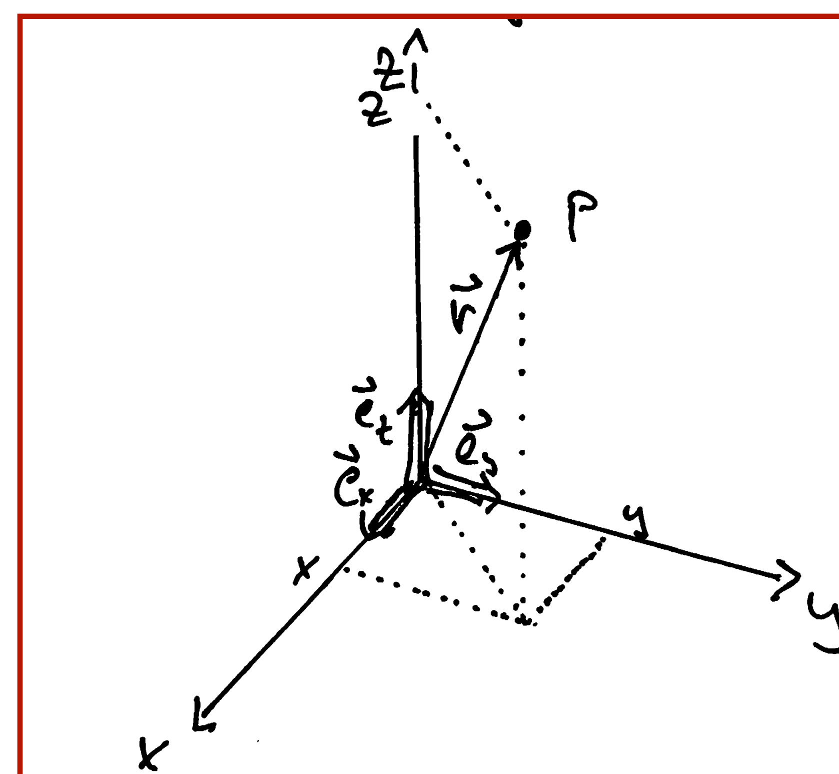
2.1.1. Ortsvektor und Bahnkurve

$\vec{r}$ beschreibt den Ort eines MP zur Zeit t : $\vec{r}(t)$

Koordinatensystem

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

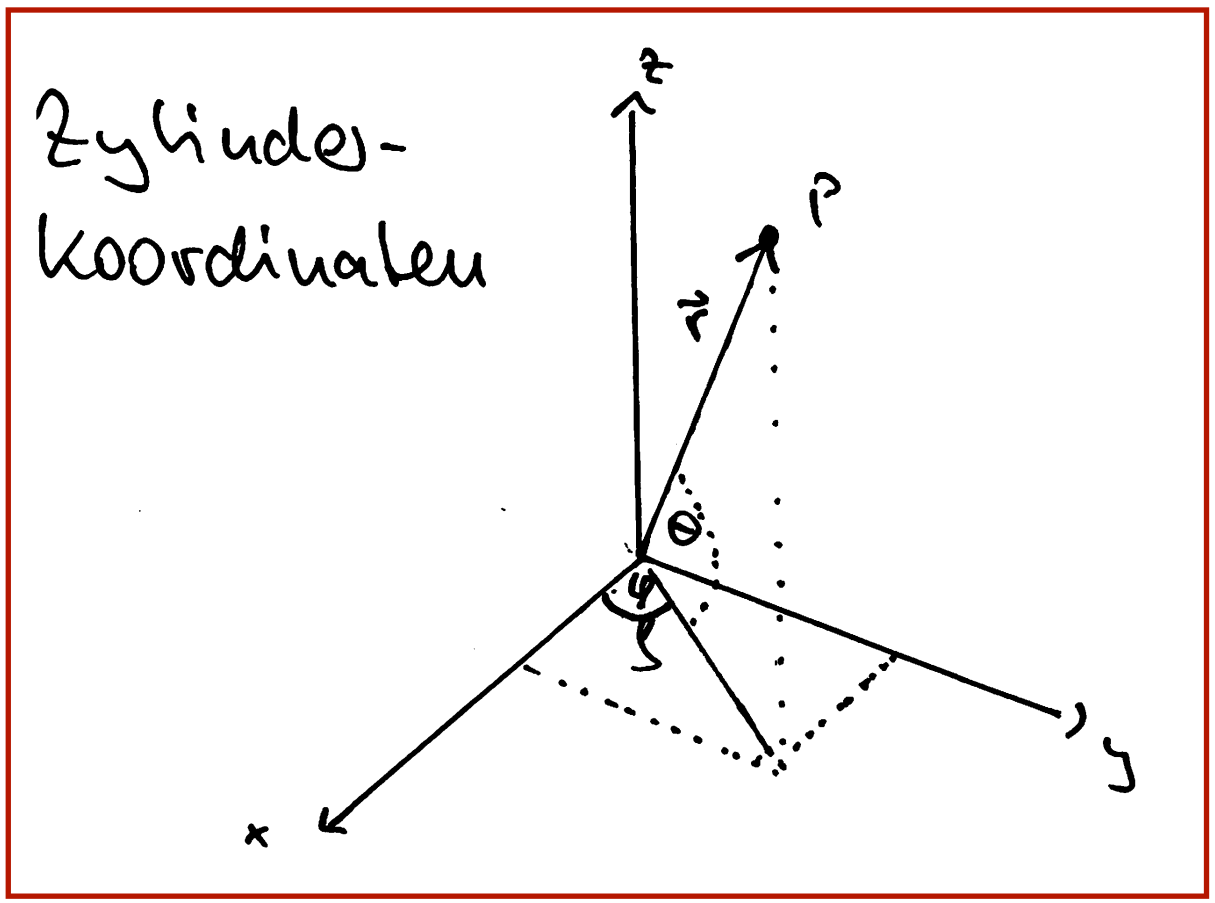
“kartesische Koordinaten” (rechtsh. System)



“Physik” hängt nicht vom gewählten K.-System ab.

Invarianzforderung! $\Rightarrow$ Erhaltungsgrößen (später)

Andere K.-Systeme:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

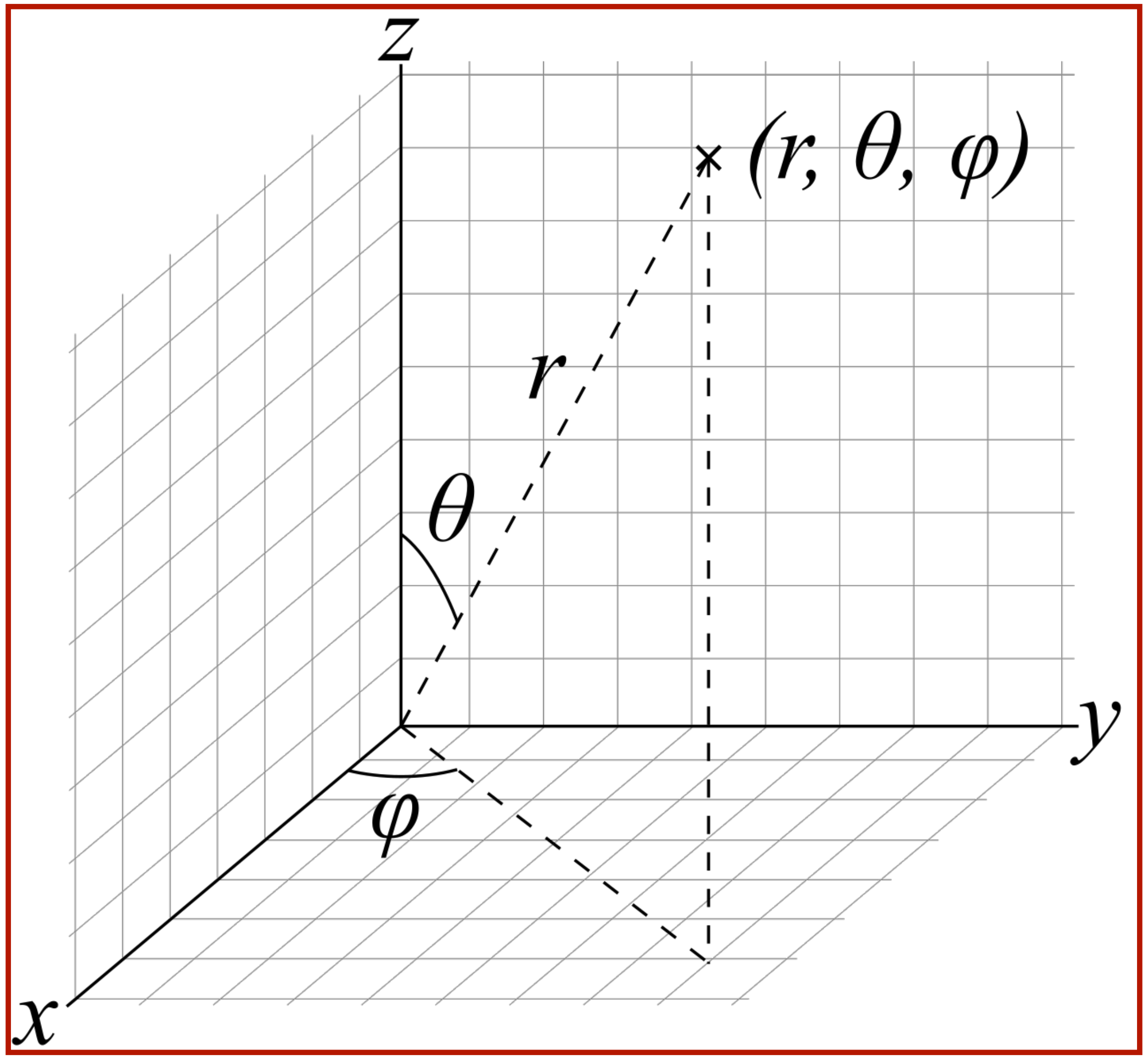
$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Polar-Koordinaten:

(Kugel-K., sphärische K.)

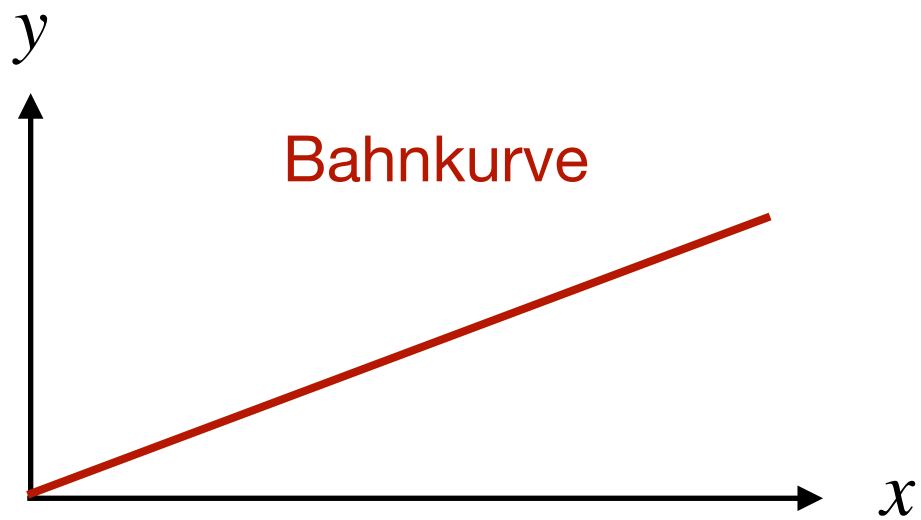
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$



$$x = r\cos\varphi\ \sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\ \sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos\frac{z}{r}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

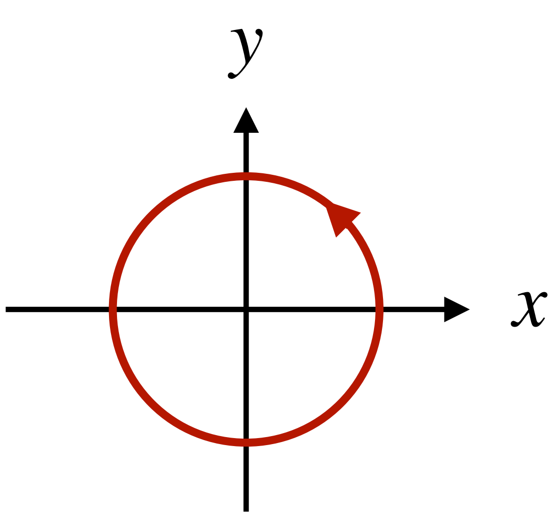
Bsp. ★ (1) $x(t) = a\,t \qquad y(t) = b\,t \qquad z(t) = 0$



geradlinige Bewegung

★ (2) $x(t) = R\cos(\omega t) \qquad y(t) = R\sin(\omega t) \qquad z(t) = 0$

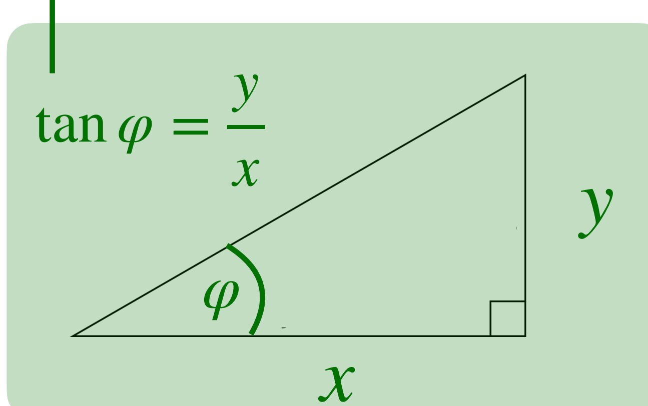
Kreisbewegung



Kreisfrequenz ω
(Winkelgeschwindigkeit)

$$\Rightarrow \quad x^2(t) + y^2(t) = R^2 = \text{const}$$

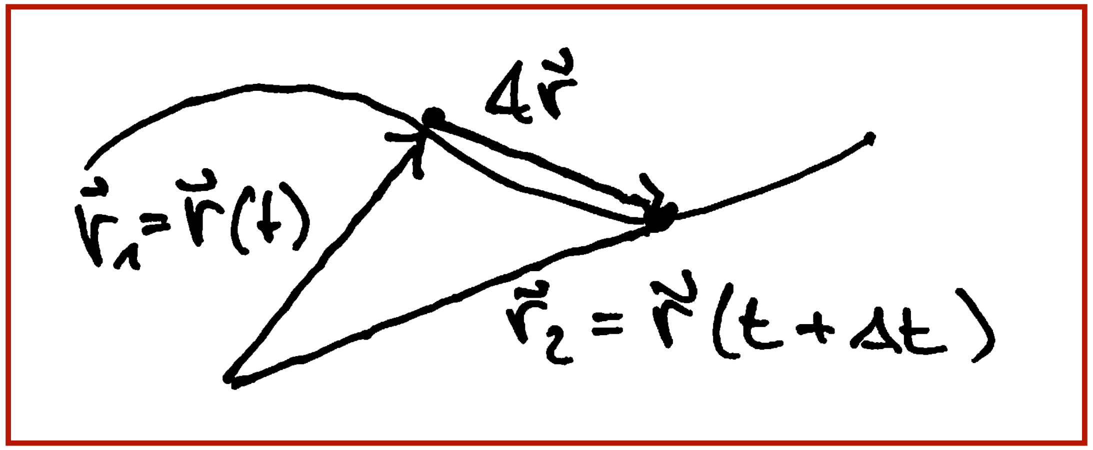
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} = \tan(\omega t)$$



$$\Rightarrow \quad \varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$\Rightarrow$ beliebige Bewegung im Raum lässt sich durch Angabe der Funktion $\vec{r}(t)$ beschreiben.

2.1.2 Geschwindigkeit (Velocity)



$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \overline{\vec{v}}$$

heißt mittlere Geschwindigkeit (des MP auf Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$)

$\Delta t \to 0$:

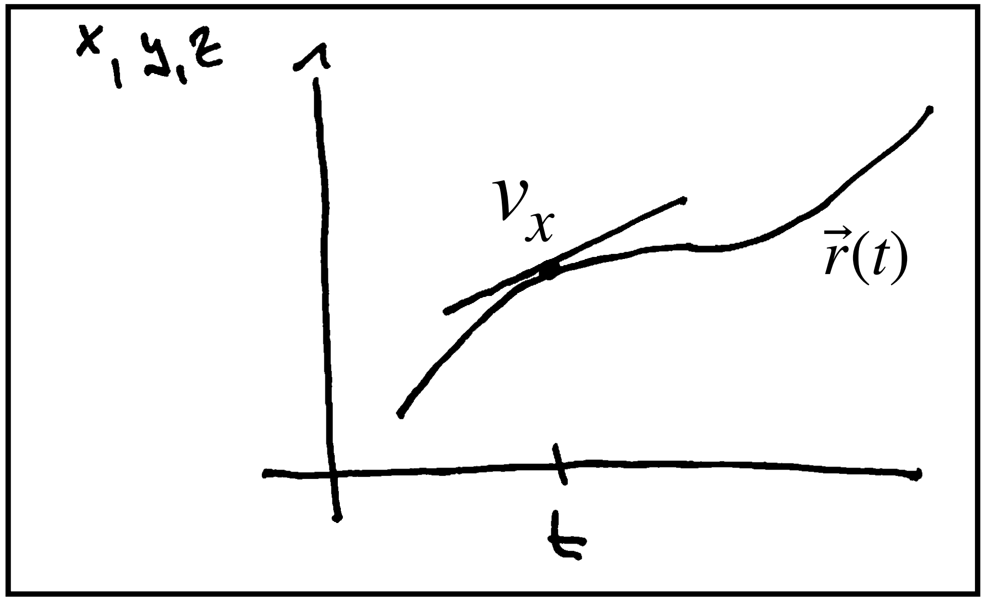
$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$$

zeitl. Ableitung der Ortsfunktion

ist die Momentangeschwindigkeit (oder "Geschwindigkeit") des MP zum Zeitpunkt t.

$\vec{v}$ ist ein Vektor (Betrag + Richtung)



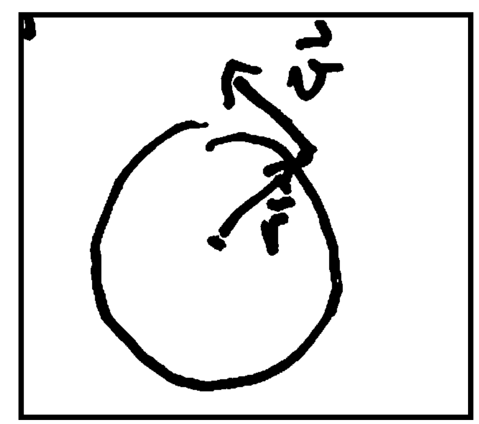
Richtung von $\vec{v}$: tangential an Bahnkurve

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t}$$

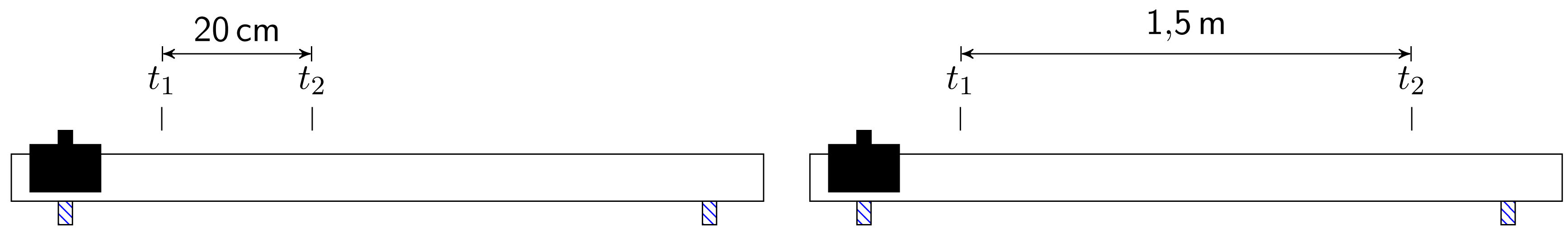
Achtung: Richtung von $\vec{v}$ i.A. nicht Richtung von $\vec{r}$

$$v = |\vec{v}| \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

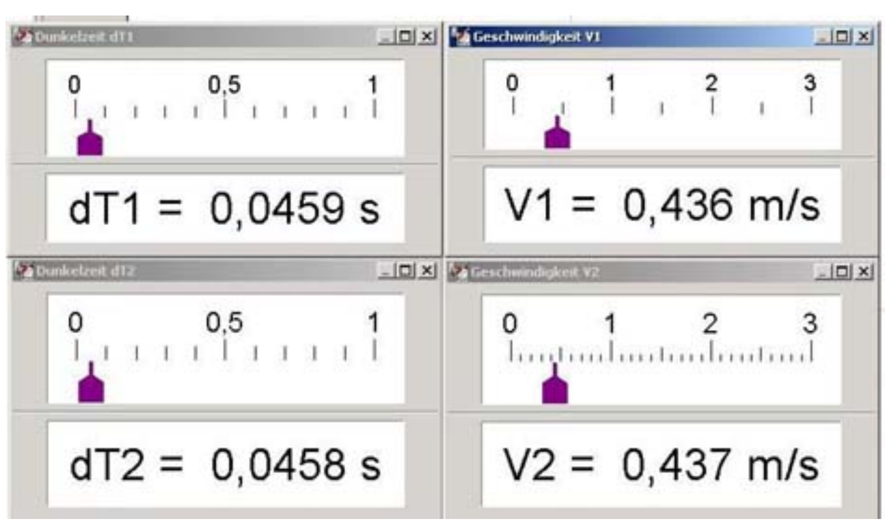
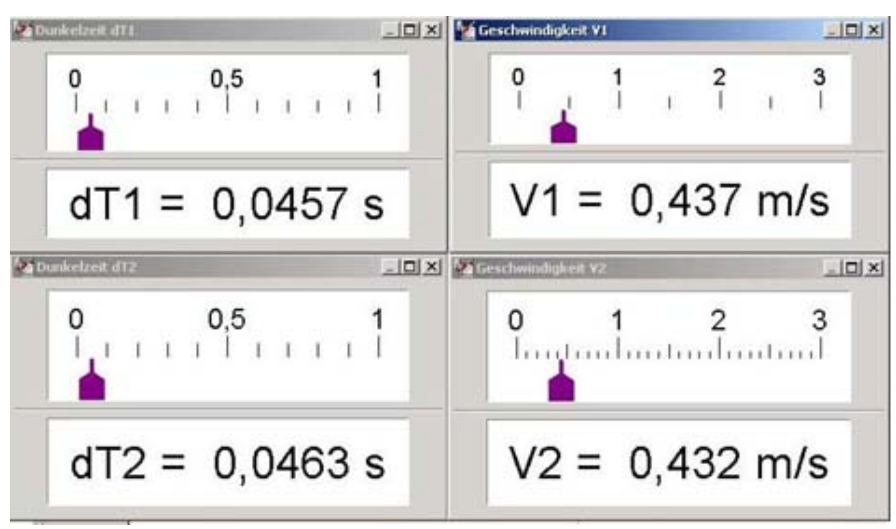
Gegenbeispiel:



Versuch: Geschwindigkeitsmessung Luftschiene

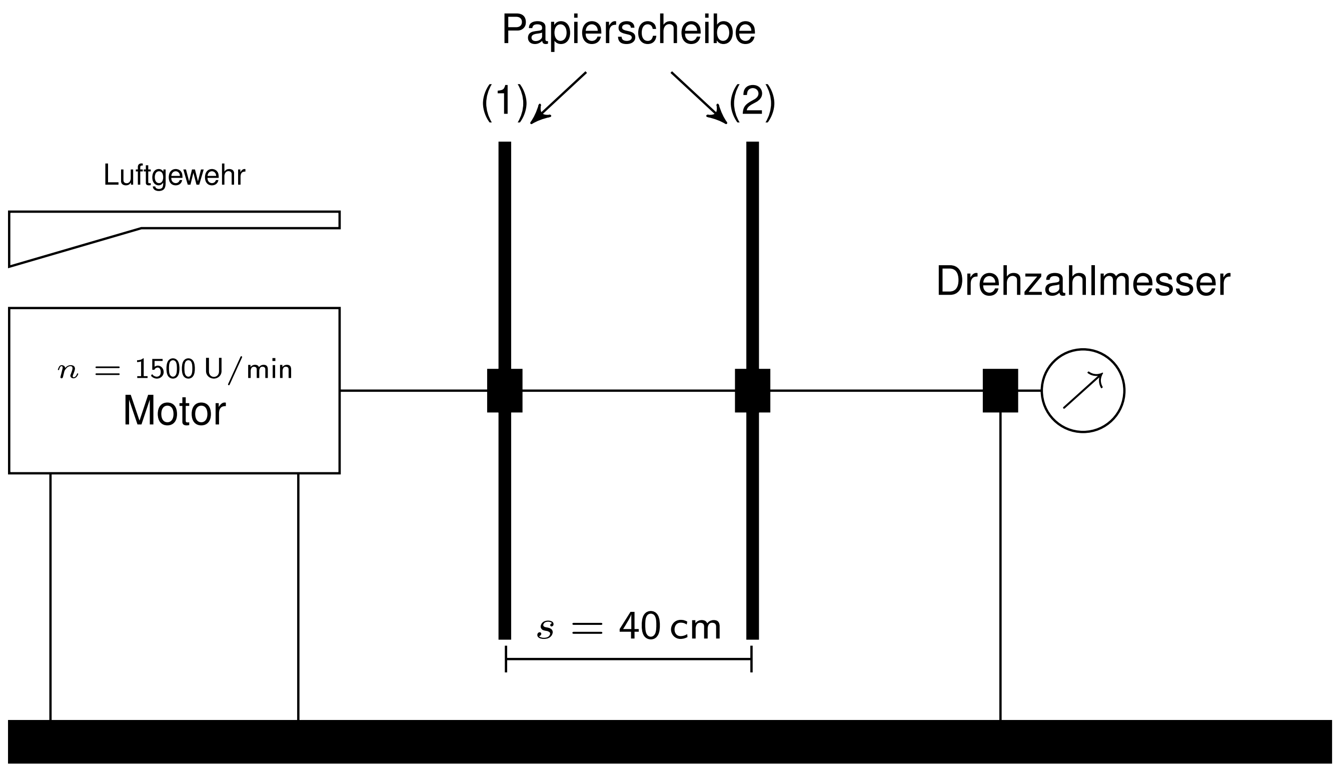


Versuch 1	**Versuch 2**
Der Abstand zwischen den Lichtschranken wird auf ca. $0{,}2\,\mathrm{m}$ eingestellt.	Der Abstand zwischen den Lichtschranken wird vergrößert (ca. $1{,}5\,\mathrm{m}$).

<table>
<tr><th>Versuch 1</th><th>Versuch 2</th></tr>
<tr><td>$\Delta t_1 \simeq \Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \simeq v_2$</td><td>$\Delta t_1 < \Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 > v_2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Bei der kurzen Strecke ist der Effekt der Reibung kleiner als die Messgenauigkeit, sodass die Geschwindigkeit des Reiters scheinbar zunimmt.
Bei der langen Strecke macht sich die Reibung in dem Geschwindigkeitsverlust bemerkbar.

Versuch: Gewehrschuss durch rotierende Scheibe



Gemessener Drehwinkel

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi\,\frac{1}{T}} = \frac{\alpha}{2\pi \cdot \nu}$$

Winkelgeschw.

Frequenz $\nu = \dfrac{1}{T}$

(Umdrehungen pro Sekunde)

$$\boxed{\rightarrow v = \frac{s}{t}}$$

$$d = 40\,\mathrm{cm}$$

$$T = \frac{1}{25}\,\mathrm{s}$$

$$\nu = 25\,\mathrm{Hz}$$

Mit $\alpha \approx 22^{\mathrm{o}} \rightarrow v \approx 160\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 570\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Berechnung der Bahnkurve, wenn $\overrightarrow{v}(t)$ bekannt:

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{v}(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{v}(t')\,\mathrm{d}t'$$

Gleichförmige Bewegung : $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{\mathrm{const}}$

Geradlinige Bewegung : Richtung von $\overrightarrow{v}$ konstant ;

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{e}_v\, v(t)$$

2.1.3 Beschleunigung

Änderung der Geschwindigkeit = **Beschleunigung**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Geschwindigkeit durch Integration:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\mathrm{d}t'$$

(Herleitung analog Bahnkurve)

Verallgemeinerte Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')\,\mathrm{d}t'' \right) \mathrm{d}t'$$

2.1.3.1a Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Konstante Beschleunigung $\vec{a}(t) = \mathrm{const}$

(z.B. Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ in Bonn) :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t' - t_0)\,\mathrm{d}t'$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Für $t_0 = 0$: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t' - t_0)\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, t'\,\mathrm{d}t' - \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, t_0\,\mathrm{d}t'$$

$$= \vec{a}\,\frac{1}{2}t'^2\Big|_{t_0}^{t} - \vec{a}\, t_0 t'\Big|_{t_0}^{t}$$

$$= \vec{a}\,\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - \vec{a}\, t_0(t - t_0)$$

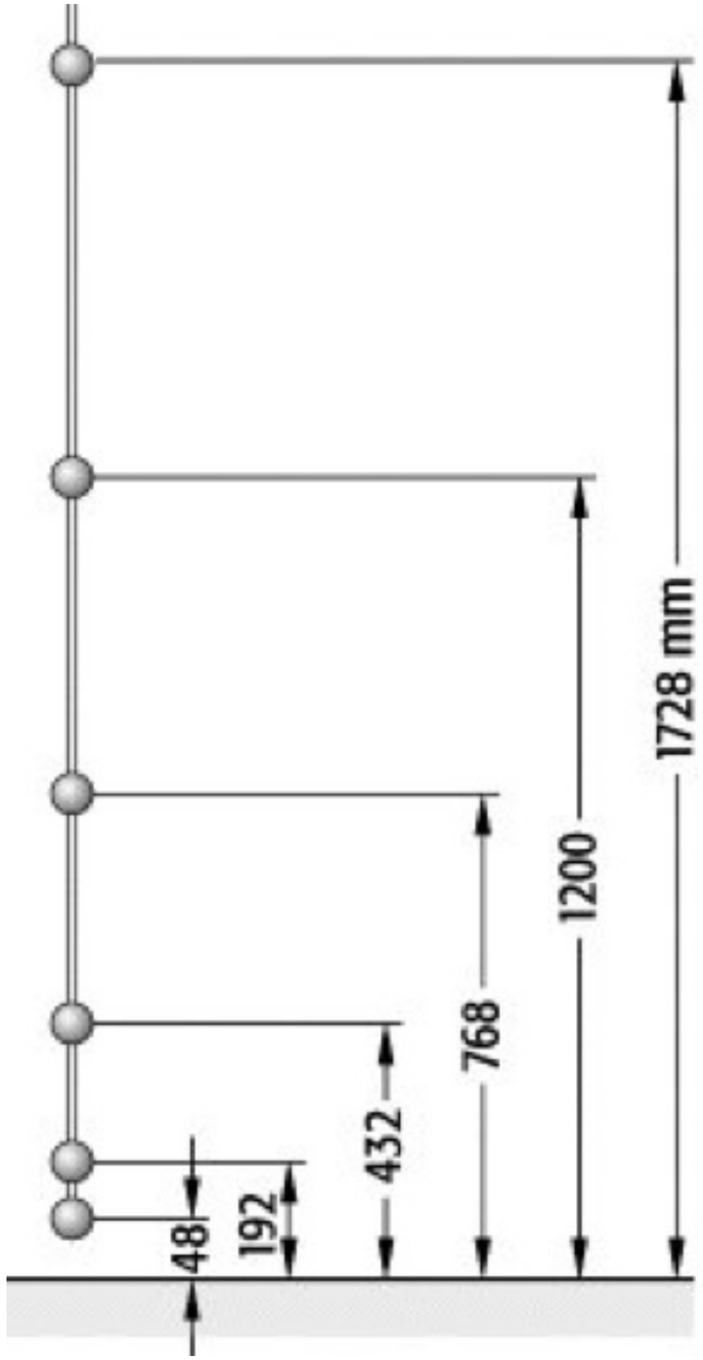
$$= \vec{a}\,(\frac{1}{2}t^2 - t\,t_0 + \frac{1}{2}t_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

Versuch: Fallschnüre

$$x = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad x = 1, 4, 9, 16, \; \ldots$$

führt zu Δt = const



Kugel Nummer	Abstände der Kugeln quadratisch (m)	linear (m)
12	7,06	7,7
11	5,93	7,0
10	4,90	6,3
9	3,94	5,6
8	3,13	4,9
7	2,40	4,2
6	1,76	3,5
5	1,22	2,8
4	0,78	2,1
3	0,44	1,4
2	0,19	0,7
1	0,04	0

Versuch: Freier Fall

$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$

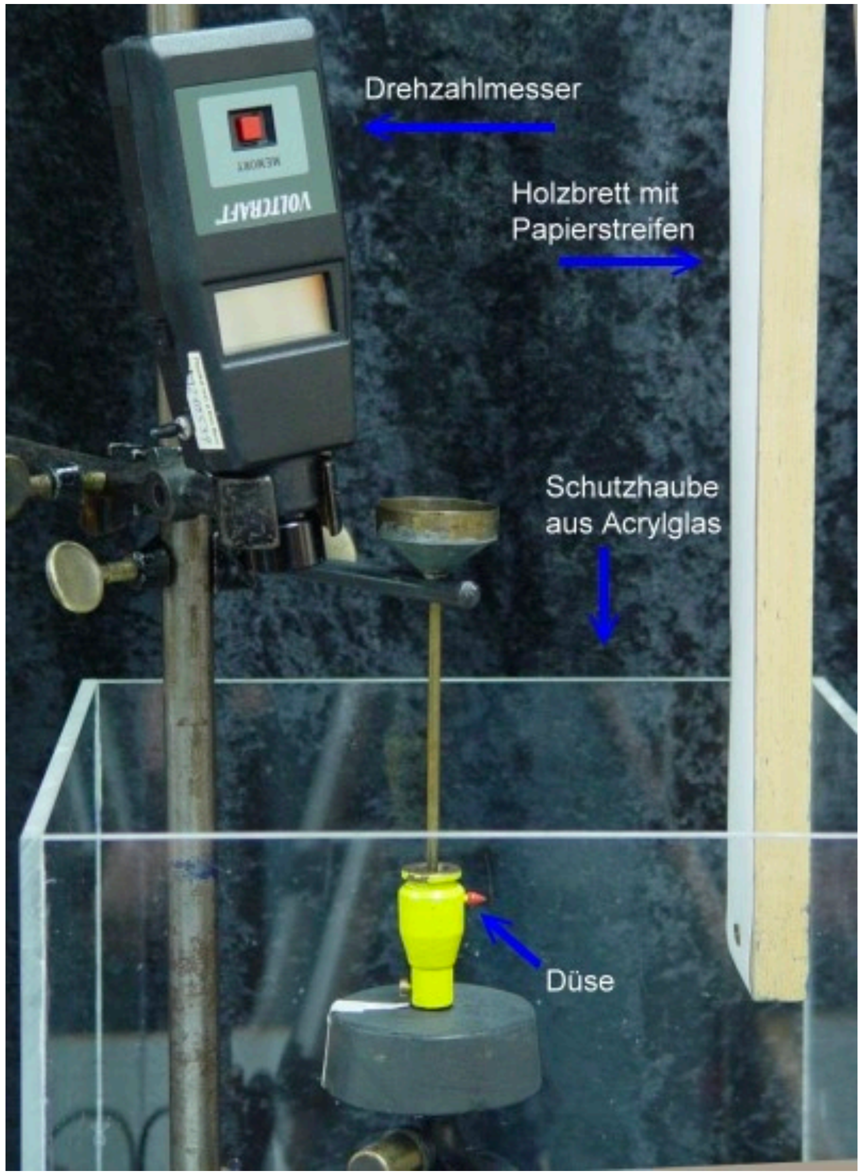
$$|\overrightarrow{a}| = g \qquad \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{0} \qquad \vec{r}_0 = \overrightarrow{0}$$

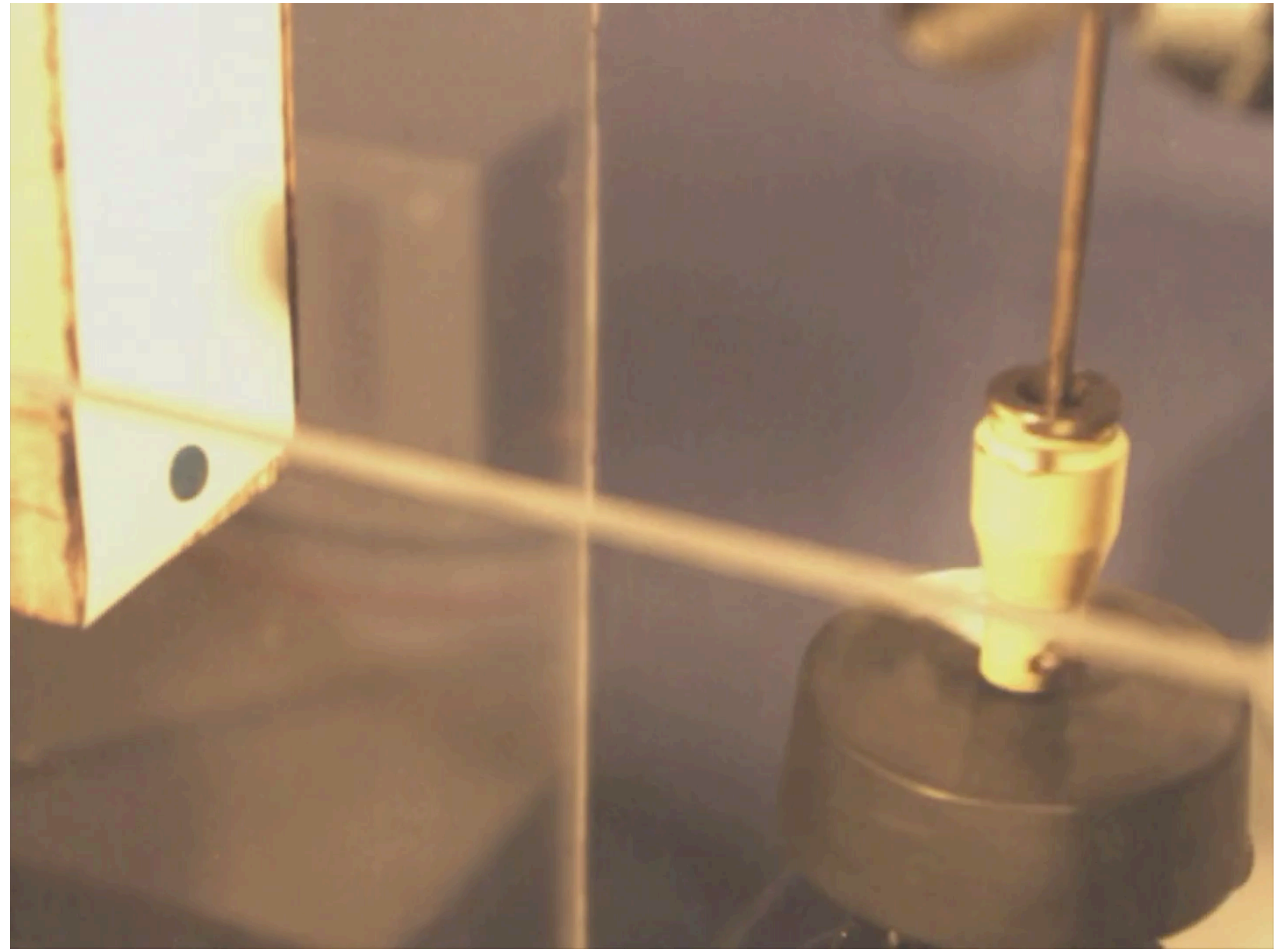
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

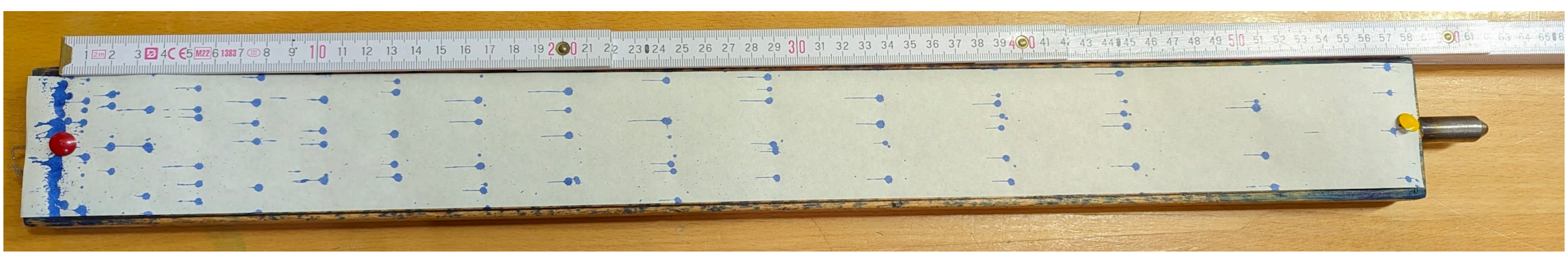
Falldauer von $x = 5\,\mathrm{m}$ $\quad \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{10\,\mathrm{m}}{9.81\mathrm{m/s}^2}} \approx 1\ \mathrm{s}$

Geschwindigkeit: $v = gt = \sqrt{2\,xg} \approx \sqrt{100}\ \mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{m/s}$

Versuch: Tintenspritzer → **Übungsblatt 3**







Versuch: Tintenspritzer

Frequenz $\nu = \frac{1}{T} = 50\,\mathrm{Hz}$

3000 Umdrehungen pro Minute
=
50 Umdrehungen pro Sekunde

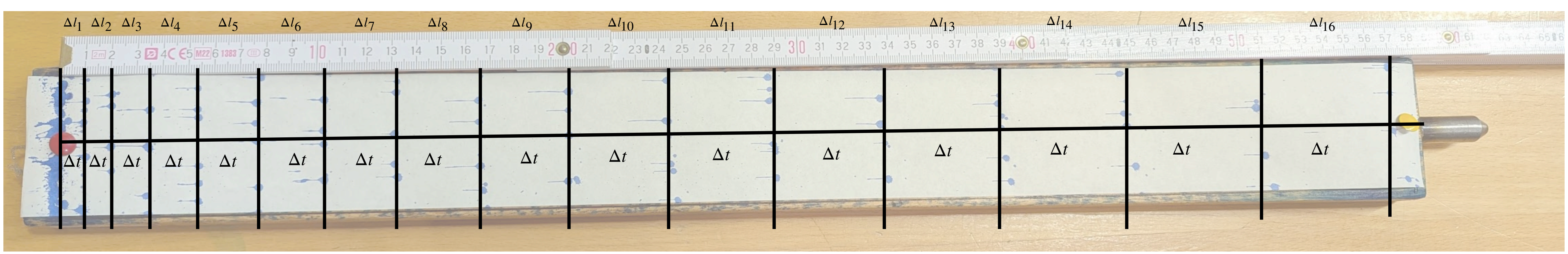
Pro Umdrehung vergeht $\Delta t = 1/50\,\mathrm{s}$

$$v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$s_0 = 0$$

$$s_{16} = ? \qquad t_{16} = ?$$

$$s_{16} = f(t)\,?$$



Versuch: Tintenspritzer

Frequenz $\nu = \frac{1}{T} = 50\,\mathrm{Hz}$

3000 Umdrehungen pro Minute
=
50 Umdrehungen pro Sekunde

Pro Umdrehung vergeht $\Delta t = 1/50\,\mathrm{s}$

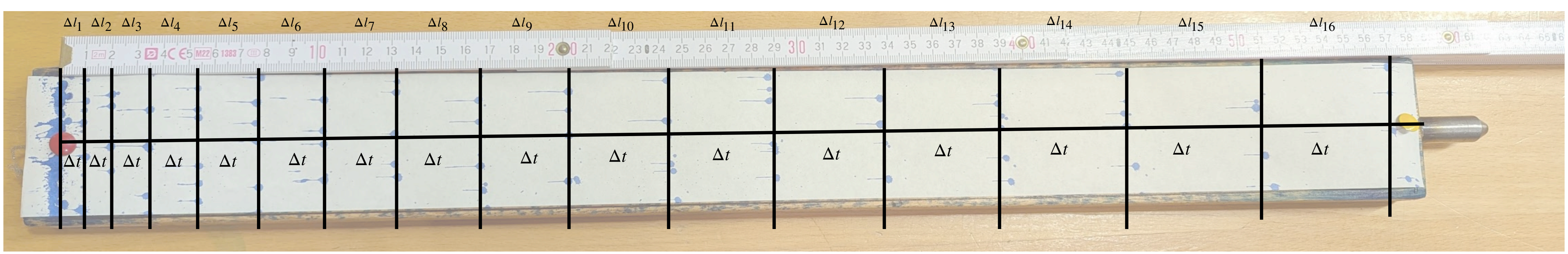
$$v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$s_0 = 0$$

$$s_{16} = \sum_{i=1}^{16} \Delta l_i \qquad t_{16} = \sum_{i=1}^{16} \Delta t$$

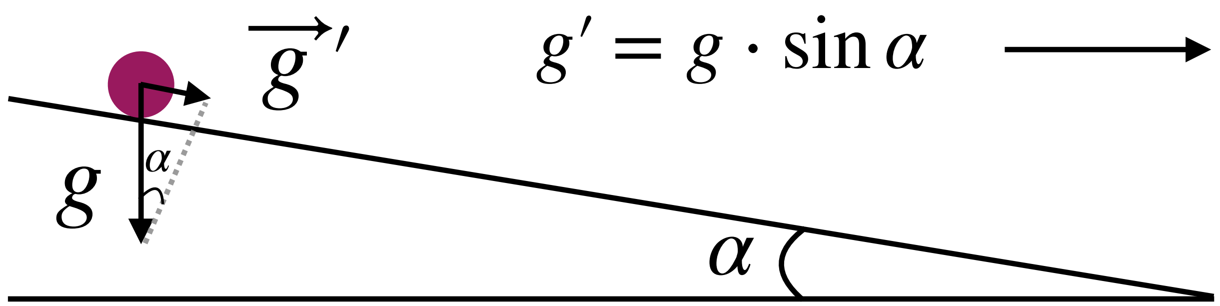
Und: $$s_{16} = v_0\, t + \frac{1}{2} g\, t_{16}^2 = \frac{1}{2} g\, t_{16}^2$$

Wir finden: $g = \dfrac{2\, s_{16}}{t_{16}^2} \approx 11.13 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



Versuch: Korken + Feder im Vakuum

Versuch: Zeitdehnung freier Fall

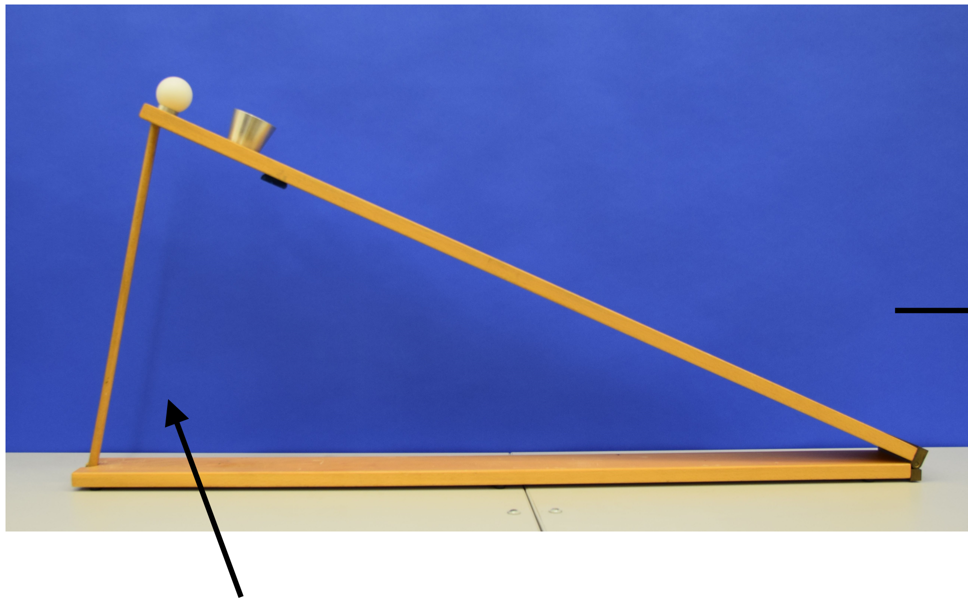


$$g' = g \cdot \sin\alpha \longrightarrow \tan\alpha = \sin\alpha = \frac{15\,\mathrm{mm}}{2800\,\mathrm{mm}} \approx 0.0053$$

$$\downarrow$$

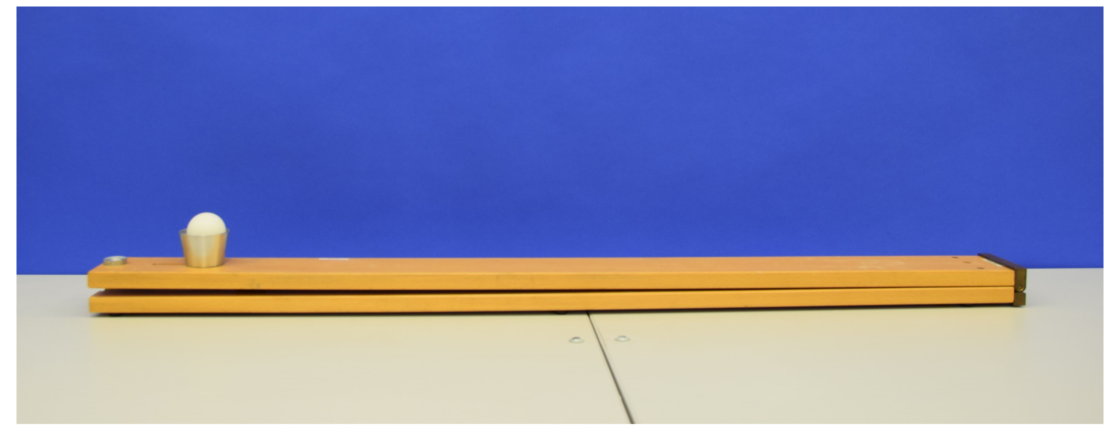
$$g' \approx 0.05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Versuch: Fallbrett



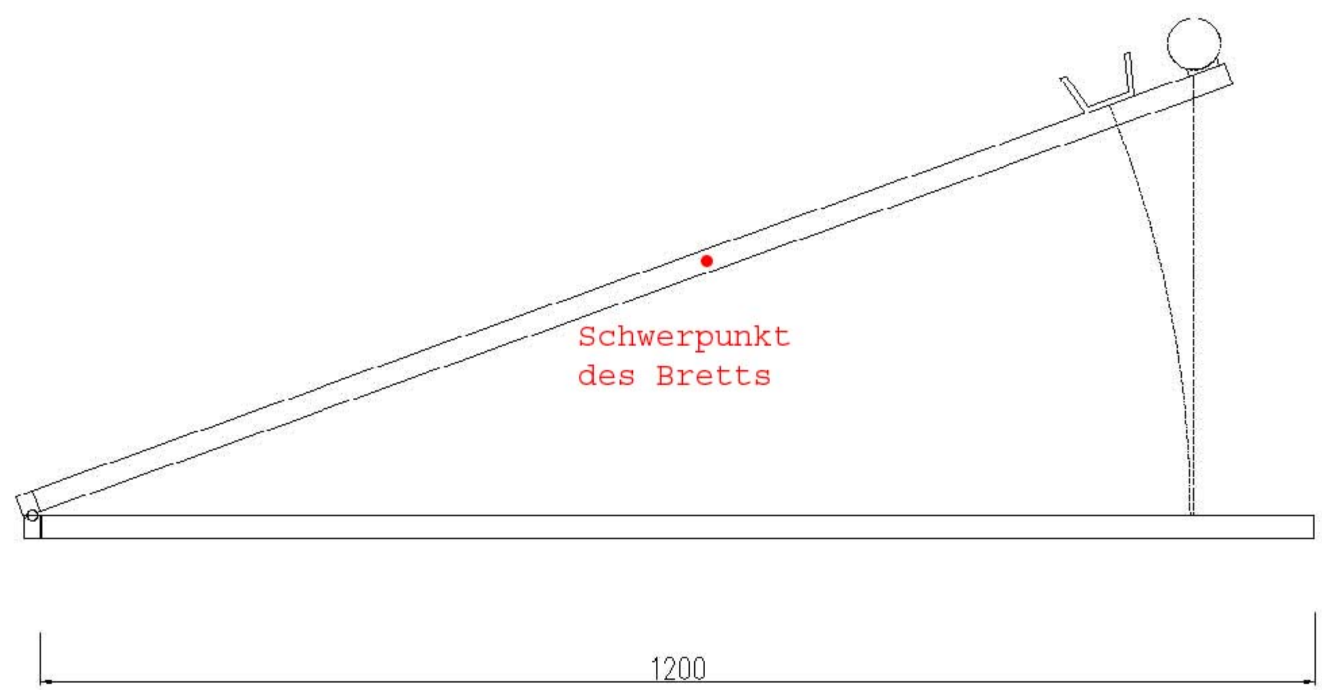
Wird herausgezogen

Kugel landet im Becher!

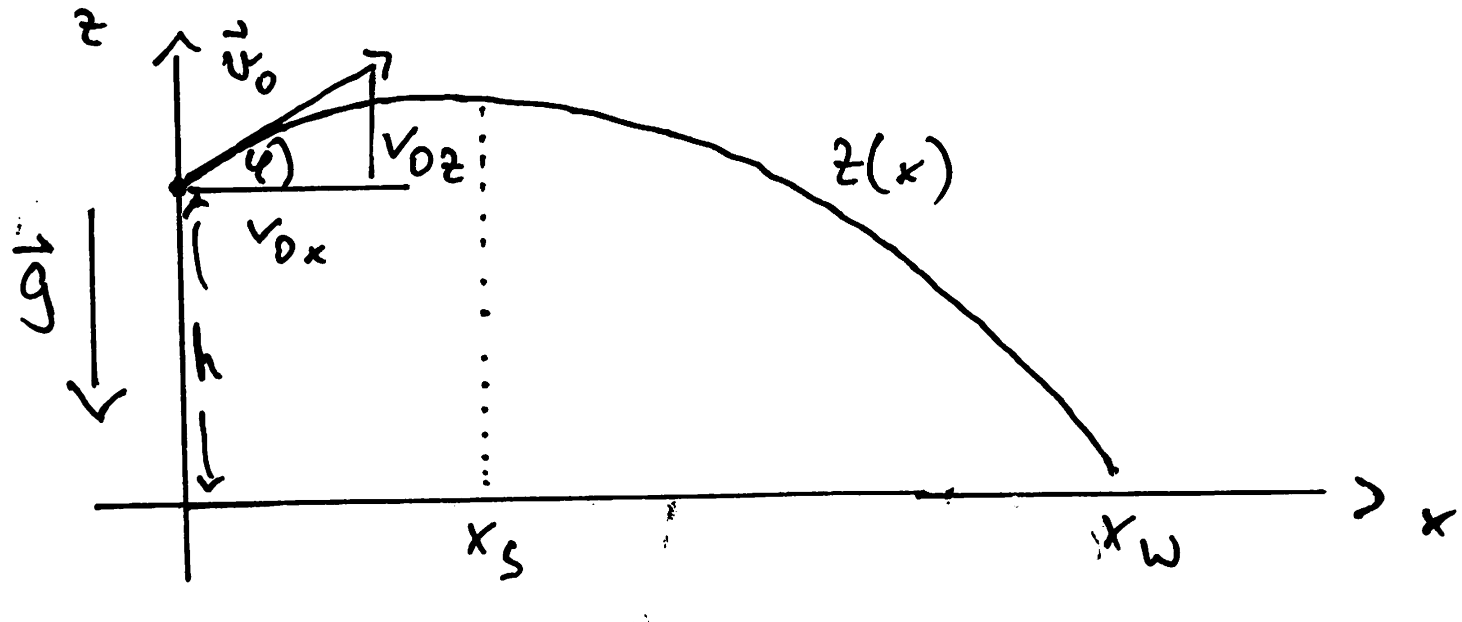


Erklärung:

Der Schwerpunkt des Brettes erfährt die Erdbeschleunigung, genau wie die Kugel. Der Schwerpunkt des Brettes liegt aber deutlich unterhalb dem der Kugel beim Start des Versuchs. Das Brettende fällt stets mit größerer Geschwindigkeit als der Brettschwerpunkt, weil es sich durch den Drehpunkt auf einem Kreisbogen bewegt und gleichzeitig mit der Mitte des Brettes (Schwerpunkt) am Boden ankommen muss. So fällt der Becher auf einem Kreisbogen unter die Kugel, während die Kugel durch die Erdbeschleunigung gerade nach unten fällt.



2.1.3.1b Schiefer Wurf



Überlagerung von

- ★ gleichförmiger Bewegung in x
- ★ gleichm. beschleunigter Bewegung in z

$$x(t) = v_{0x}\,t$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h$$ ersetze $t = \dfrac{x}{v_{0x}}$ $$\Rightarrow z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x + h$$

Wurfparabel !