Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

Probeklausur. Dauer 120 Minuten.

Aufgabe 1. Prüfen Sie jeweils für $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, an welchen Punkten die Funktion komplex differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung:

(a) $f(z) = |z|^2$,

(b) $g(z) = \exp(i \sin(z))$,

(c) $h(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$,

wobei jeweils $z = x + iy$.

Lösung.

(a) $f(z) = |z|^2$ ist in $z = 0$ komplex differenzierbar und nirgendwo sonst. Es gilt $f'(0) = 0$.
Berechne $\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(h)-f(0)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{|h|} = 0$.
Für $z \neq 0$ berechne die vier Ableitungen $\partial_x \mathrm{Re}(f)(z) = 2x$, $\partial_y \mathrm{Re}(f)(z) = 2y$, $\partial_x \mathrm{Im}(f)(z) = 0$, $\partial_y \mathrm{Im}(f)(z) = 0$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_x \mathrm{Re}(f) - \partial_y \mathrm{Im}(f) = 0$, $\partial_x \mathrm{Im}(f) + \partial_y \mathrm{Re}(f) = 0$ ergeben also $2x = 0, 2y = 0$, was nur in $z = 0$ erfüllt ist.

(b) $g(z) = \exp(i \sin(z))$ ist die Verknüpfung von holomorphen Funktionen, also für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Es gilt die Kettenregel $g'(z) = \exp'(i \sin(z)) i \sin'(z) = \exp(i \sin(z)) i \cos(z)$.

(c) Berechne die vier Ableitungen $\partial_x \mathrm{Re}(h)(z) = 2x$, $\partial_y \mathrm{Re}(h)(z) = -2y$, $\partial_x \mathrm{Im}(h)(z) = 2y$, $\partial_y \mathrm{Im}(h)(z) = 2x$. Also erfüllt h an allen $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_x \mathrm{Re}(h) - \partial_y \mathrm{Im}(h) = 0$, $\partial_x \mathrm{Im}(h) + \partial_y \mathrm{Re}(h) = 0$ und ist komplex differenzierbar mit $h'(z) = \partial_x \mathrm{Re}(f) + i\partial_x \mathrm{Im}(z) = 2x + 2yi = 2z$. (man kann auch sagen $h(z) = z^2$ ist ein Polynom und damit komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = 2z$.)

$\square$

Aufgabe 2. (a) Sei $\log : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ ein holomorpher Zweig des Logarithmus und $f(z) = z\log(z) - z$. Berechnen Sie $f'(z)$.

(b) Zeigen Sie, dass $g(z) = \exp(1/z)$ keine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat.
Hinweis: Berechnen sie das Residuum bei $z = 0$.

Lösung.

(a) Wir wissen dass $\log'(z) = \frac{1}{z}$ an allen Punkten $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Mit der Kettenregel und Produktregel ist also $f'(z) = \log(z) + \frac{z}{z} - 1 = \log(z)$.

(b) Schreibe g als Laurent-Reihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(-k)!} z^k$. Das Residuum ist damit $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{(--1)!} = 1$.
Um zu zeigen, dass g keine Stammfunktion hat, reicht es, mit dem Residuensatz $\int_{\partial B(0,1)} g(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 0) = 2\pi i \neq 0$ auszurechnen. Hätte g eine Stammfunktion $G : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, dann wäre $\int_{\partial B(0,1)} g(z)\, dz = G(1) - G(1) = 0$.

$\square$

Aufgabe 3. Sei

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-3i)^2(z+2i)}$$

und definiere die Halbkreise $\gamma_R : [0, \pi]$ für $R > 0$ durch $\gamma_R(t) = Re^{it}$.

(a) Berechnen sie

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

(b) Berechnen sie alle Residuen von f.

(c) Finden sie

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Lösung.

(a) Schreibe

$$|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz| = |\int_0^\pi iRe^{it} f(Re^{it})\,dt| \leq \int_0^\pi R\frac{e^{-R\sin(t)}}{(R-3)^2(R-2)}\,dt.$$

Der letzte Integrand konvergiert gleichmäßig gegen 0, also ist $\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(b) f hat Singularitäten bei $z_1 = 3i$ und bei $z_2 = -2i$. Berechne mit den Regeln für Residuen

$$\mathrm{Res}(f, -2i) = \frac{e^{iz}}{(z-3i)^2}|_{z=-2i} = \frac{e^2}{-25}.$$

$$\mathrm{Res}(f, 3i) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{z+2i}\right)|_{z=3i} = \left(\frac{ie^{iz}}{z+2i} - \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right)_{z=3i} = \frac{6}{25}e^{-3}.$$

(c) Wende den Residuensatz auf die Kurve $[-R, R] \cup \gamma_R$ an. Diese Kurve ist geschlossen, einfach, positiv orientiert. Also ist

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right) = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 3i) = \frac{12\pi i}{25}e^{-3}.$$

$\square$

Aufgabe 4. Sei

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-\pi)^2 \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die 2π-periodische Fortsetzung von f.

(b) Die N-te partielle Fouriersumme von f ist

$$f_N(x) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx}$$

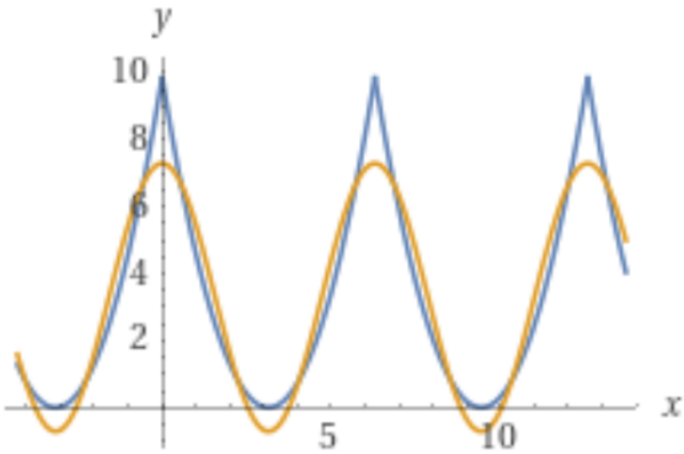
Schreiben Sie $f_1(x) = \alpha + \beta\cos(x) + \gamma\sin(x)$.

(c) Prüfen Sie, ob die Reihe f_N im Limes $N \to \infty$ gleichmäßig nach f konvergiert. Wie groß muss man N wählen, damit $\sup_x |f(x) - f_N(x)| \le \frac{1}{100}$?

Lösung.

$$\begin{aligned}
&\text{für } k \neq 0: \\
\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 e^{-ikx}dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{-ik}(x-\pi)^2 e^{-ikx}|_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi}\frac{2}{-ik}(x-\pi)e^{-ikx}dx\right) \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{(-ik)^2}(x-\pi)e^{-ikx}|_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{2}{(-ik)^2}e^{-ikx}dx}_{0}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{-k^2}(2\pi-\pi) - \frac{-2}{-k^2}(0-\pi)\right) \\
&= \frac{2}{k^2} \\
&\text{für } k = 0: \\
\hat{f}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{3}x^3]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{2\pi^3}{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

(a) blau: Die periodische Fortsetzung von f, orange: Die Fouriersumme f_1



(b) $f_1(x) = \hat{f}_{-1}e^{-ix} + \hat{f}_0 e^{0x} + \hat{f}_1 e^{ix} = \frac{\pi^2}{3} + 4\cos(x)$

(c) Wir sehen dass $\sum_{k=-\infty^\infty} |\hat{f}_k| < \infty$, also konvergiert die Fouriersumme gleichmäßig und

$$\sup_x |f_N(x) - f(x)| \leq \sum_{|k|>N} |\hat{f}_k| \leq 2\int_{N-1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\, dk = \frac{8}{N-1}.$$

Wir können also $N = 801$ wählen, dann ist $\frac{8}{N-1} \leq \frac{1}{100}$.

$\square$

Aufgabe 5. (a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben als $f(x)=e^{-|x|}$. Berechnen Sie $\mathcal{F}f(k)$.

(b) Berechnen die die Fourier-Transformation $\mathcal{F}T_f$ von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x$, im Sinne von temperierten Distributionen.

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-|x|}](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x-ikx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x-ikx}dx \\
&= \left[\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x}\right]_{x=-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-1-ik}e^{(-1-ik)x}\right]_{x=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-ik} - 0 + 0 - \frac{1}{-1-ik} \\
&= \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \\
&= \frac{(1+ik)}{(1-ik)(1+ik)} + \frac{(1-ik)}{(1+ik)(1-ik)} \\
&= \frac{2}{1+k^2}.
\end{aligned}$$

(b) $f(x)=\frac{1}{i^3}(ix)^3-\frac{1}{i}(ix)$, also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}T_f =& \frac{1}{i^3}\mathcal{F}((ix)^3T_1) - \frac{1}{i}\mathcal{F}((ix)T_1) \\
=& i(-\partial)^3\mathcal{F}(T_1) + i(-\partial)\mathcal{F}(T_1) = -i\partial^3(2\pi\delta_0) - i\partial(2\pi\delta_0)
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem für die Schwartz-Funktion $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von (1).

(b) Lösen Sie die Fourier-transformierten Gleichungen als gewöhnliche Differenzialgeleichung in t (für festes k).

(c) Lösen sie (1) als Faltung mit u_0.

Lösung.

(a)

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{F}u(t,k) - ik \\ mathcal F u(t,k) = 0 \\ \mathcal{F}u(0,k) = \mathcal{F}u_0(k) \end{cases}$$

(b) Die erste Gleichung wird gelöst durch $\mathcal{F}u(t,k) = f(k)e^{ikt}$, wobei $f(k)$ eine Beliebig ist. Durch die Anfangsbedingung finden wir $f(k) = \mathcal{F}u_0(k)$. Also ist

$$\mathcal{F}u(t,k) = e^{ikt}\mathcal{F}u_0(k).$$

(c) $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{ikt}] * u_0 = \delta_t * u_0 = u_0(x-t)$

□