

Theoretische Physik IV: Statistische Physik Übungsblatt 2

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 25.10.2024)

2.1 Exaktheit und Integrabilität von Differentialen

14 Punkte

In dieser Aufgabe wiederholen wir mathematische Konzepte, die uns im Rahmen der Thermodynamik begegnen werden.

Man betrachte ein glattes Differential $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$, wobei die einzelnen Differentiale dx_i linear unabhängig seien. Das Differential α heißt *exakt*, falls eine (glatte) Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$ existiert (die *Stammfunktion*), so dass α das totale Differential von F ist, d.h. falls gilt

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (1)$$

Beachten Sie, dass das nicht automatisch erfüllt ist, wie wir unten sehen werden. Die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen von F gibt eine notwendige Bedingung für die Exaktheit von α (Integrabilitätsbedingung):

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j. \quad (2)$$

Tatsächlich ist (2) auch hinreichend, falls x_1, \dots, x_n Koordinaten eines einfach zusammenhängenden Gebietes sind.¹ Für exaktes α gilt für beliebige geschlossene, kontrahierbare Wege γ in diesem Gebiet

$$\oint_{\gamma} \alpha = 0. \quad (3)$$

Wir wollen die Begriffe zunächst an einem einfachen, rein formalen Beispiel illustrieren. Es sei im Folgenden $n = 2$ und $\alpha = x_1 x_2 dx_1 + x_1^2 dx_2$. Zeigen Sie, dass

- a) (2P) das Differential α nicht exakt ist,
- b) (2P) dies jedoch auf $x_1^{-1} \alpha$ zutrifft.
- c) (4P) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x_1, x_2)$ mit $dF = x_1^{-1} \alpha$.

Der Faktor x_1^{-1} in diesem Beispiel heißt *integrierender Faktor*; er macht aus α ein exaktes Differential. Dieser ist nicht unbedingt eindeutig, wie wir nun sehen.

- d) (6P) Setzen Sie $g\alpha$ als exakt an und bestimmen Sie anhand der Integrabilitätsbedingung die allgemeine Form des integrierenden Faktors g für obiges Beispiel. Wie ergibt sich daraus der zuvor betrachtete Spezialfall?

¹Das bedeutet, dass sich jedes Paar von Punkten durch einen Pfad verbinden lässt und sich ferner alle solchen Pfade stetig ineinander deformieren lassen. Machen Sie sich dies zeichnerisch an einem Beispiel klar.

2.2 Maxwell Relationen und Ableitungsregeln

10 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir einige mathematische Relationen herleiten. Es ist in der Thermodynamik üblich, bei partiellen Ableitungen die konstant gehaltenen Größen explizit anzugeben. Zum Beispiel schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$$

- a) (2P) Die Funktion $f(x, y)$ besitze das exakte Differential

$$df = u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

Zeigen Sie (vgl. Vorlesung)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_y \quad (4)$$

und drücken Sie diese Relation nur durch Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ aus.

Diese Beziehung heißt Maxwell-Relation. Die Zustandsvariablen x, y, z seien nun über eine Zustandsgleichung $F(x, y, z) = 0$ miteinander verknüpft. Ferner sei die Zustandsvariable $f = f(x, y)$ eine Funktion der Variablen x und y .

- b) (2P) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \quad (5)$$

- c) (3P) Zeigen Sie, dass unter den selben Voraussetzungen auch folgendes gilt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z. \quad (6)$$

- d) (3P) Bestimmen Sie die Maxwell-Relationen, die aus dem exakten Differential der Inneren Energie U folgen. Zur Erinnerung:

$$dU(S, V, N) = TdS - PdV + \mu dN. \quad (7)$$

2.3 Adiabatische Zustandsänderung: Adiatengleichungen

6 Punkte

Für ein Ideales Gas gelten die beiden folgenden Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2} N k_B T \quad \text{und} \quad pV = N k_B T . \quad (8)$$

Dabei bezeichnet U die innere Energie und f die Anzahl der Freiheitsgrade des idealen Gases. Benutzen Sie die differentielle Form des 1. Hauptsatzes,

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN , \quad (9)$$

um zu zeigen, dass für das ideale Gas bei einer adiabatischen Zustandsänderung, d.h., einer Änderung mit $dS = 0$ (die Teilchenzahl N sei fest), folgende Beziehungen gelten:

$$\text{a) } pV^{\frac{f+2}{f}} = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \text{b) } TV^{\frac{2}{f}} = \text{konst.} \quad (10)$$

Diese heißen adiabatische Zustandsgleichungen oder kurz Adiatengleichungen.

2.4 Der Otto-Zyklus

10 Punkte

Der Otto-Zyklus ist in Abbildung 1 im p - V -Diagramm gezeigt. Die vier Schritte sind:

- adiabatische Komprimierung,
- isochore Erwärmung,
- adiabatische Expansion und
- isochore Abkühlung.

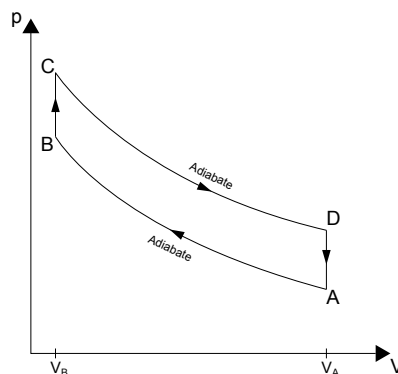


Figure 1: Der Otto-Kreisprozess im p - V -Diagramm.

- a) (5P) Bestimmen Sie die Arbeit und den Wärmetransfer in jedem Schritt unter der Annahme, dass das Arbeitsmedium ein ideales Gas sei ($pV = N k_B T$).
- b) (5P) Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Teil a), dass der Wirkungsgrad durch

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\kappa-1}$$

gegeben ist, wobei $\kappa = \frac{f+2}{f}$ der so genannte Adiatenexponent des idealen Gases ist.