Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 8

Aufgabe 1 (2 Punkte). Begründen oder widerlegen Sie:

(a) Die reellen Zahlen lassen sich als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen.

(b) Die rationalen Zahlen lassen sich als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Unterräume?

(a) $A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$ $y = 2x \Rightarrow$ Lin. F. $\wedge$ geht durch Ursprung $\Rightarrow$ Abgeschlossen

(b) $B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ $y = 2 - x \Rightarrow$ Lin. F. $\wedge$ geht nicht durch Ursprung $\Rightarrow$ nicht abgeschlossen

(c) $C := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ $y = \frac{0}{x} \Rightarrow x = 0$:= undef. $\Rightarrow$ nicht Abgeschlossen

(d) $D := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $y = \sqrt{-x^2} \mapsto \mathbb{C} \Rightarrow$ nicht Abgeschlossen

(e) $E := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$ $\nexists x: y = 0 \Rightarrow$ nicht durch Ursprung $\Rightarrow$ nicht Abgeschlossen.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Betrachten Sie den Vektorraum $M = \{f \mid f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$ wie in Satz 2.5 im LA-Skript. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von M? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $U_1 := \{f \in M \mid f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [-1, 1]\}$ $[f(x)] \subseteq \mathbb{R} \wedge [f] \in M \Rightarrow$ Unterraum

(b) $U_2 := \{f \in M \mid$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a \cos \pi x + b \sin \pi x \text{ für alle } x \in [-1, 1]\}$$

(c) $U_3 := \{f \in M \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in [-1, 1]\}$

(d) $U_4 := \{f \in M \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [-1, 1]\}$

Aufgabe 4 (9 Punkte). Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und W der $\mathbb{R}$-Vektorraum ebenfalls der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Durch die Änderung des Grundkörpers bekommen wir verschiedene Unterraumbegriffe. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen Unterräume von V bzw. W sind:

(a) $U_1 = \{0\}$

(b) $U_2 = \mathbb{R}$

(c) $U_3 = \mathbb{Q}$

(d) $U_4 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

(e) $U_5 = \{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

(f) $U_6 = \mathbb{Z}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Wie in der Vorlesung versprochen: Machen Sie sich (in entsprechender Literatur/Internet – ja, ich weiss, das Leben kann hart sein) mit dem sogenannten (erweiterten) Euklidischen Algorithmus vertraut. Wenden Sie diesen schriftlich an, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von 10.893 und 24.531 zu bestimmen und um schließlich ganze Zahlen a und b zu finden, so dass gilt:

$$a \cdot 10.893 + b \cdot 24.531 = \mathrm{ggT}(10.893, 24.531).$$

Definition. Für gegebene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 6 (3+1+1 Punkte)**.** Entscheiden und begründen Sie:

(a) Ist $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$?

(b) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$?

Sie können hier insgesamt **28 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **24 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 01. Dezember, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.