

Übungen zu Physik V: Kerne und Teilchen (8)

Abgabetermin: bis 10.12.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Formfaktoren des Protons

[LA: nur Teilaufgaben 1&2] (10 Punkte)

Auf dem letzten Übungszettel haben Sie in Aufgabe 2 den Radius eines Kohlenstoffkerns aus dem gemessenen Formfaktor bestimmt, wobei der Kern als homogen geladene Kugel mit Radius R angenommen wurde. Für leichtere Kerne, insbes. für das Proton, ist diese Annahme nicht gerechtfertigt. Um dennoch einen Radius bestimmen zu können definiert man den mittleren quadratischen Ladungsradius:

$$\langle r^2 \rangle := \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \stackrel{(\text{kugelsym.})}{=} \frac{4\pi}{Ze} \int r^2 \rho(r) r^2 dr \quad (1)$$

1. Berechnen Sie zum Vergleich den mittleren quadratischen Ladungsradius für eine homogen geladene Kugel mit Radius R . Zur Erinnerung: $\rho(r) = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$ für $r \leq R$. (1 Punkt)

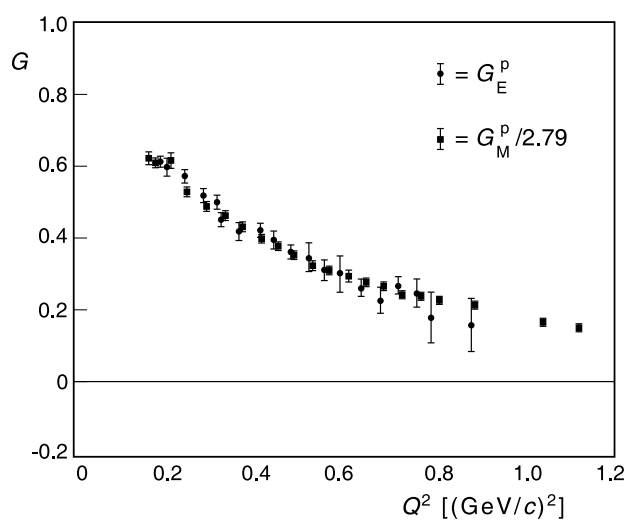
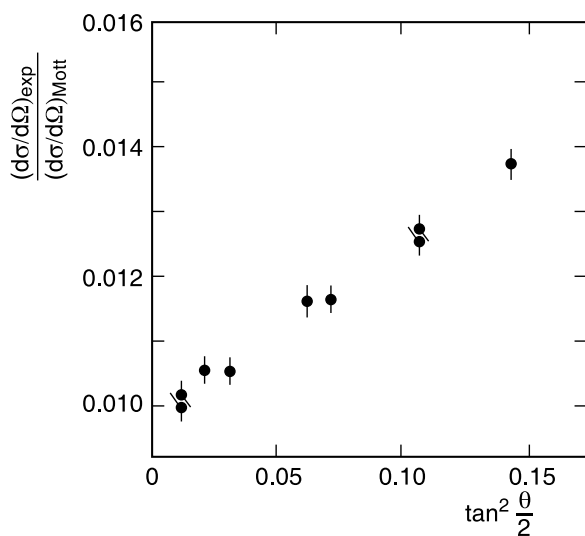
Bei der Streuung von Elektronen an Protonen muss zusätzlich zur Situation auf dem letzten Übungszettel noch das magnetische Moment berücksichtigt werden. Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ lässt sich in diesem Fall durch die Rosenbluth-Formel beschreiben.

Die linke Abbildung zeigt das Verhältnis aus experimentell gemessenem Wirkungsquerschnitt und berechnetem Mott-Wirkungsquerschnitt für Elektron-Proton-Streuung bei einem festen Viererimpulsübertrag $Q^2 = 2,5 \text{ GeV}^2/c^2$, aufgetragen gegen $\tan^2 \theta/2$.

2. Bestimmen Sie anhand der Abbildung die elektrischen und magnetischen Formfaktoren G_E und G_M des Protons bei $Q^2 = 2,5 \text{ GeV}^2/c^2$. (3 Punkte)

Die rechte Abbildung zeigt Messungen von G_E und G_M für kleinere Q^2 .

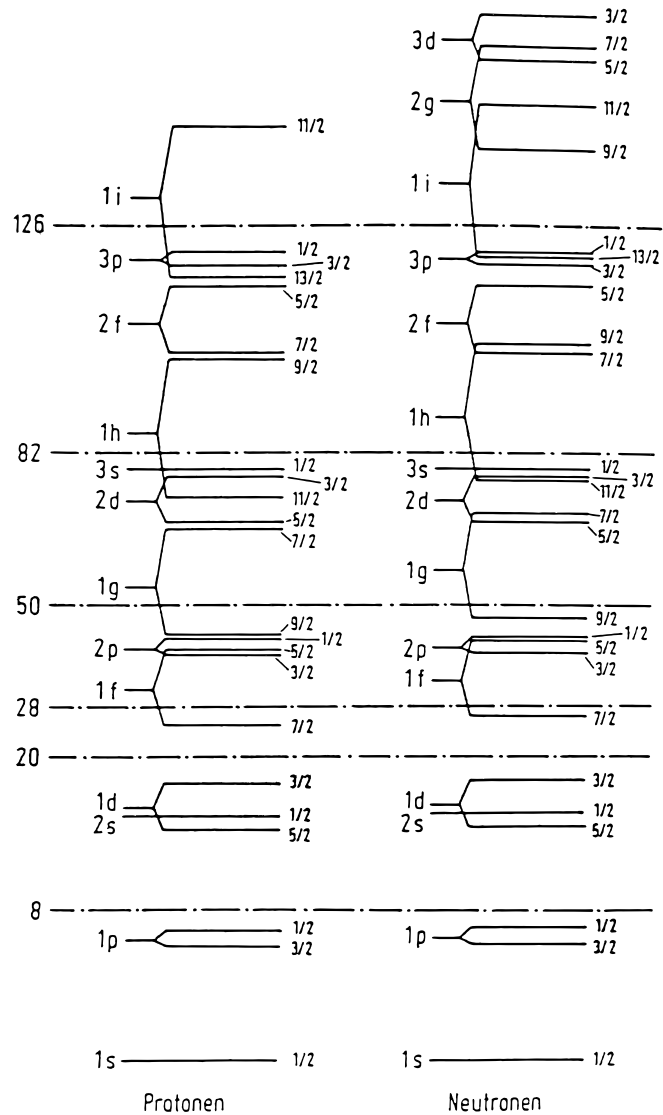
3. Erklären Sie, warum die Fehlerrbalken für G_M deutlich kleiner sind als für G_E . (2 Punkte)
4. Extrapolieren Sie die Messwerte zu $Q^2 \rightarrow 0$ und schätzen sie daraus den mittleren Ladungsradius des Protons ab. (4 Punkte)



Aufgabe 2: Schalenmodell

[LA: nur Teilaufgaben 1–4] (15 Punkte)

Bei bestimmten Protonen- bzw. Neutronenzahlen, den „magischen Zahlen“, sind die Bindungsenergien der Kerne besonders groß. Die magischen Zahlen können im Schalenmodell, analog zur Edelgaskonfiguration in der Atomphysik, durch voll besetzte Schalen erklärt werden. Dabei ist der energetische Abstand zum nächsten freien Niveau besonders groß. Das Kernpotential setzt sich additiv aus einem Zentralpotential und einem $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ -Term, der die Spin-Bahn-Kopplung beschreibt, zusammen. Die Abbildung zeigt das entsprechende Energieschema.



- Vergleichen Sie die Spin-Bahn-Kopplung in der Atom- und Kernphysik. Nennen Sie zwei charakteristische Unterschiede. (2 Punkte)
- Erläutern Sie mit Hilfe der Abbildung, warum die ersten vier magischen Zahlen 2, 8, 20, 28 lauten und nicht – wie man z.B. aus dem Oszillatormodell erwarten würde – 2, 8, 20, 40. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung den Drehimpuls J und die Parität P für den Grundzustand der folgenden Kerne:
 ${}^3_2\text{He}$, ${}^{15}_7\text{N}$, ${}^{15}_8\text{O}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{56}_{28}\text{Ni}$, ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, ${}^{209}_{82}\text{Pb}$ und ${}^{209}_{83}\text{Bi}$. (4 Punkte)

- Der doppelt magische Kern ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ ist nicht stabil und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 6 Tagen. Erläutern Sie, warum das Nickel-Isotop nicht stabil ist und geben Sie sowohl die Zerfallsart als auch den Tochterkern an. (2 Punkte)
- Berechnen Sie den Abstand der Neutron-Energieniveaus $1p_{1/2}$ und $1d_{5/2}$ für Kerne mit $A \approx 16$ aus den Bindungsenergien dieser Kerne:
 ${}^{15}_8\text{O}$: $E_B = 111,955 \text{ MeV}$
 ${}^{16}_8\text{O}$: $E_B = 127,619 \text{ MeV}$
 ${}^{17}_8\text{O}$: $E_B = 131,762 \text{ MeV}$ (3 Punkte)

- Berechnen Sie das magnetische Moment für den Grundzustand der folgenden Kerne und vergleichen Sie dieses mit den experimentell bestimmten Werten:
a) ${}^{39}_{19}\text{K}$: $\mu/\mu_N = +0,391$
b) ${}^{39}_{20}\text{Ca}$: $\mu/\mu_N = +1,022$
c) ${}^{41}_{20}\text{Ca}$: $\mu/\mu_N = -1,595$
d) ${}^{41}_{21}\text{Sc}$: $\mu/\mu_N = +5,431$ (2 Punkte)

Aufgabe 3: Fermigasmodell**[LA: komplette Aufgabe] (5 Punkte)**

Berechnen Sie für ^{56}Fe die Fermienergie für Protonen (E_F^p) und Neutronen (E_F^n) und vergleichen Sie die Differenz mit dem Wert den Sie aus dem Coulombterm der Weizsäcker–Massenformel ermitteln. Was bedeutet das für die Tiefe der Potentialtöpfe von Protonen und Neutronen? Wieso sind Kerne relativ schwach gebundene Systeme?

Aufgabe 4: Neutronenstern**[LA: nur Teilaufgabe 1] (10 Punkte)**

Ein Neutronenstern ist ein kompaktes Objekt mit einer Dichte, die in der selben Größenordnung wie Kernmaterie liegt.

1. Berechnen Sie den Radius eines Neutronensterns mit einer Masse von 1,5 Sonnenmassen ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$). Nehmen Sie eine Dichte von $\rho_0 = 0,15 \text{ Nukleonen/fm}^3$ an. (1 Punkt)

Ein Neutronenstern kann als Fermigas aus Protonen, Elektronen und Neutronen angesehen werden, wobei sich die Teilchen im gesamten Stern frei bewegen können.

2. Begründen Sie, warum ein makroskopischer Körper mit einer Dichte wie die Dichte der Kernmaterie nicht zu etwa gleichen Teilen aus Protonen und Neutronen bestehen kann, wenn der Körper insgesamt elektrisch neutral ist, d.h. $N_e = N_p \approx N_n$.
Hinweis: Überlegen Sie, welche Energie die Elektronen besitzen und welche Reaktionen von Elektronen und Nukleonen Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind. (4 Punkte)
3. Schätzen Sie die Dichte der Protonen ρ_p für $N_p = N_e$ in einem Neutronenstern mit einer Dichte von $\rho_0 = 0,15 \text{ Nukleonen/fm}^3$ ab.
Hinweis: Die Näherung $M_n \approx M_p + M_e$ vereinfacht die Rechnung. (5 Punkte)