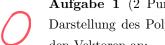
Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 10



Aufgabe 1 (2 Punkte). Geben Sie im Vektorraum der reellen Polynome eine Darstellung des Polynoms $p(x) = 2x^3 + x - 5$ als Linearkombination der folgenden Vektoren an:

$$q_1(x) = 2$$
, $q_2(x) = x^2 + x$, $q_3(x) = 4x^3 - 7$, $q_4(x) = 3x^2 + 4$, $q_5(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$.

Aufgabe 2 (2+2+(1+2)) Punkte). Betrachten Sie den Vektorraum V der komplexen Polynome vom Grade maximal 3 über dem Körper der komplexen Zahlen.

- (a) Zeigen Sie, dass $W := \{ f \in V | f(-1) = 0 \}$ einen Unterraum von V darstellt.
- (b) Finden Sie eine Basis von W und geben Sie die Dimension von W an.
- (c) Rechnen Sie nach, dass $g(x) = 6x^3 + 4x^2 3x 1$ ein Element in W ist und drücken Sie q(x) als Linearkombination Ihrer Basis aus Teilaufgabe (b) aus.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

Aufgabe 4 (2 Punkte). Gibt es eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügt? Begründen Sie!

$$f(2,0) = (0,2)$$
 $f(1,1) = (10,4)$ $f(1,2) = (4,6)$?

Aufgabe 5 (2+2 Punkte). Geben Sie jeweils zu folgenden linearen Abbildungen Basen für Kern und Bild an:

- (a) $f_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad f_1(x,y) := (x+2y, 3x)$
- (b) $f_2: \{f \mid f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f_2(f):=f(0)$

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte). Betrachten Sie die beider Vektoren

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_{\overline{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es unendlich viele lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass alle solche Abbildungen an der Stelle v den gleichen Wert annehmen – um welchen Wert handelt es sich?

OPERITE Aufgabe 7 (2 Punkte). Bestimmen Sie die darstellende Matrix DM(f) für die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\3\\2 \end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\2\\0 \end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\3\\-1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte). Für eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V$ ist die Menge Fix(f) der Fixpunkte von f durch Fix $(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}$ definiert. Zeigen Sie, dass Fix $(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum von V ist.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe am Donnerstag, den 15. Dezember, bis 15:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.