Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

08.11.2024
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 5

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 15.11.2024)

Quickies

a) Was ist der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit $h(M)$ eines Ereignisses M und dessen Wahrscheinlichkeit $W(M)$?

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $W(M_1 \cap M_2)$ an, dass zwei Ereignisse M_1 und M_2 eintreten. Was gilt, wenn M_1 und M_2 *statistisch unabhängig* sind?

c) Beweisen Sie den Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{1}$$

d) Was ist ein gemischter Zustand?

e) Wie lautet der quantenmechanische Erwartungswert eines Operators A für einen gemischten Zustand?

f) Was ist ein Ensemble in der statistischen Physik?

g) Wie hängt die Entropie mit der Anzahl der Zustände in einem mikrokanonischen Ensemble zusammen? Gießen Sie dies in eine Formel für die Entropie.

5.1 Zentraler Grenzwertsatz **14 Punkte**

In Aufgabe 1.1 haben Sie bereits viele wichtige Begriffe der Statistik kennengelernt. In der heutigen Aufgabe möchten wir einen sehr wichtigen Satz, den sog. *zentralen Grenzwertsatz* beweisen. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_Y(y)$ einer Summe $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ von Zufallsgrößen X_i unter bestimmten Voraussetzungen für $N \to \infty$ gegen eine Gauß-Verteilung konvergiert. Die Voraussetzungen sind zum einen, dass die Zufallsgrößen X_i voneinander unabhängig sind, und zum anderen, dass sie durch die gleichen und unabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w(x_i)$ charakterisiert sind, deren Mittelwert und Varianz existieren sollten. Allerdings wird keine weitere Annahme über $w(x_i)$ getroffen. Beim Beweis wird die *charakteristische Funktion* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von Nutzen sein, die definiert ist als Fourier-Transformation der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\chi(k) = \int \mathrm{d}x\, e^{-ikx} w(x) = \langle e^{-ikX} \rangle \tag{2}$$

Zunächst ist es wichtig festzustellen, dass die Funktion F einer Zufallsvariable X selbst eine Zufallsvariable ist, die einer Wahrscheinlichkeitsdichte $w_F(f)$ folgt.

a) (4P) Die *Kumulanten n-ter Ordnung* C_n einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind definiert durch

$$\chi(k) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} C_n\right]. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die ersten drei Kumulanten durch die Momente $\langle X^n \rangle$ folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$C_1 = \langle X \rangle, \tag{4}$$

$$C_2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = (\Delta x)^2, \tag{5}$$

$$C_3 = \langle X^3 \rangle - 3\langle X^2 \rangle \langle X \rangle + 2\langle X \rangle^3. \tag{6}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung des natürlichen Logarithmus:
$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots$

Nun können wir den zentralen Grenzwertsatz beweisen. Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe aus Zufallsgrößen für beliebige N zu standardisieren, reskalieren wir Y indem wir die Größe Z einführen, gegeben durch

$$Z = \frac{Y - N\langle X \rangle}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

b) (4P) Rechnen Sie die ersten drei Momente der Zufallsvariable Z aus, um zu zeigen, dass die Varianz von Z unabhängig von N ist und die Kumulanten ab der dritten Ordnung für große N verschwinden.

c) (3P) Berechnen Sie $w_Z(z)$, indem Sie die charakteristische Funktion χ_Z durch die Kumulanten ausdrücken und anschließend zurücktransformieren. Sie sollten eine Gauß-Verteilung erhalten:

$$w_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}. \tag{8}$$

d) (3P) Geben Sie $w_Y(y)$ an und drücken Sie Mittelwert und die Schwankungsbreite Δy durch die jeweiligen Größen der ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$ der Zufallsgrößen X_i aus. Wie verhält sich die relative Schwankung $\Delta y / \langle Y \rangle$ für große N?

5.2 Kombinatorik und bedingte Wahrscheinlichkeiten **9 Punkte**

a) (2P) Sie ziehen aus 49 Kugeln, die mit Zahlen 1, ..., 49 durchnummeriert sind, 6 Kugeln heraus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Zahlen 45 und 46 bei den 6 gezogenen Kugeln dabei sind?

b) (2P) Betrachten Sie ein System aus N gleichartigen, eindimensionalen, *unterscheidbaren* harmonischen Oszillatoren. Die Gesamtenergie im System ist $E - E_0 = M\hbar\omega$, $M \in \mathbb{N}_0$. Durch wie viele Zustände der N harmonischen Oszillatoren lässt sich diese Gesamtenergie realisieren?

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass Ereignis B eingetreten ist, ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{9}$$

wobei A *bedingtes Ereignis* genannt wird, während B *bedingendes Ereignis* heißt.

c) (3P) Nehmen Sie an, Sie werfen erst zwei Würfel, und dann nochmal drei Würfel.

  i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit in Summe (aus allen fünf Würfeln) 20 Augen oder mehr zu haben, nachdem Sie zwei der fünf Würfel geworfen haben und beide Sechser waren.

  ii) Sie haben eine Gesamtsumme (aus allen fünf Würfeln) von 24 Augen gewürfelt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Würfel Sechser waren.

Ziegenproblem: Bei einem Gewinnspiel gibt es drei zunächst verschlossene Tore. Hinter einem Tor steht ein brandneues Auto, hinter den anderen beiden Toren steht jeweils eine Ziege. Zu Beginn suchen Sie sich ein Tor aus. Daraufhin wird ein anderes Tor geöffnet, hinter dem eine Ziege steht, und Sie haben dann die Möglichkeit, Ihre Wahl des Tores zu ändern. Am Ende gewinnen Sie, was hinter dem ausgewählten Tor steht.

d) (2P) Sollten Sie Ihre Wahl nach Öffnung des ersten Tores ändern? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

5.3 Mikrokanonisches Ensemble von Zwei-Niveau Systemen **17 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, was ein Ensemble in der statistischen Physik ist. Ein mikrokanonisches Ensemble ist ein statistisches Ensemble, beim Energie sowie Teilchenzahl konstant gehalten werden. In dieser Aufgabe möchten wir uns ein mikrokanonisches Ensemble aus Spin-$1/2$-Teilchen anschauen. Das System bestehe aus einem Gitter von N Spin-$1/2$ -Teilchen in einem Magnetfeld H. Hierbei können die Teilchen jeweils in den zwei Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ auftreten. Der Hamilton-Operator für dieses System ist gegeben durch ($h = \mu_B H$)

$$\hat{\mathcal{H}} = -h \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \ , \quad \text{mit } \hat{\sigma}_i \left|\uparrow\right\rangle_i = \left|\uparrow\right\rangle_i \text{ und } \hat{\sigma}_i \left|\downarrow\right\rangle_i = -\left|\downarrow\right\rangle_i \ . \tag{10}$$

a) (3P) Zunächst möchten wir die Anzahl der Zustände mit der Energie E bestimmen. Berechnen Sie hierzu

$$\Omega(E) = \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_N)\in\{+1,-1\}^N} \delta\left(E + h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right) \ . \tag{11}$$

<u>*Hinweis*</u>: Drücken Sie die delta-Distribution durch ein Integral in der Fourierbasis aus.

Erhalten sollten Sie hierbei ein Integral der Form

$$\sim \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{f(k)} \qquad \text{mit } f(k) = ikE + N\ln(2\cos(kh)) \ . \tag{12}$$

b) (3P) Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe der Sattelpunktnäherung (Laplace-Methode). Entwickeln Sie hierfür die Funktion $f(k)$ bis zur zweiten Ordnung um ihr Extremum, und berechnen Sie danach das Integral. Verwenden Sie außerdem $e := \frac{E}{Nh}$.
<u>*Hinweis*</u>: $\arctan(ix) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ und $\cos(x) = 1/\sqrt{1+\tan^2(x)}$.

c) (3P) Berechnen Sie aus der Anzahl der Zustände die Entropie $S = k_\mathrm{B}\ln\Omega(E)$ des Systems. Berücksichtigen Sie nur die am Ende linearen Terme in N.

d) (3P) Bestimmen Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Temperatur $T = (\partial_E S)^{-1}$ des Systems. Diskutieren Sie das Verhalten der Temperatur, indem Sie $E \to \pm Nh$ und $E \to 0$ analysieren.

e) (3P) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität bei konstantem Magnetfeld als Funktion der Temperatur gegeben ist als

$$C_h(T) = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_h = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_h = Nk_B\left(\frac{h}{k_BT}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{h}{k_BT}\right)} \ . \tag{13}$$

Es ist hilfreich dafür zunächst die Energie E als Funktion der Temperatur auszudrücken.

f) (2P) Diskutieren Sie das Verhalten von $C_h(T)$ bei kleinen Temperaturen $T \to 0$ und großen Temperaturen $T \to \infty$. Was bedeutet dies für den Verlauf zwischen den beiden Limites?