Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Sid Maibach

UNIVERSITÄT BONN

Präsenzaufgabenblatt 10.

Präsenzaufgabe 1. In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation um die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x)$ zu lösen. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variable x.

(ii) Die transformierte Differentialgleichung aus (i) ist für festes k eine gewöhnliche Differenzialgleichung in der Variable t mit den Anfangswerten $\mathcal{F}_x u(0,k) = \mathcal{F}u_0(k)$. Löse diese Differentialgeleichung.

(iii) Löse die Wärmeleitungsgleichung (1). *Hinweis:* Nutze das Faltungslemma $\mathcal{F}[u * v] = \mathcal{F}u\mathcal{F}v$ und die inverse Fourier-Transformation der Funktion $e^{-k^2 t}$ für festes $t > 0$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$. Zeigen Sie, dass $-\Delta T_\Phi = \delta_0$, wobei δ_0 die Dirac-Distribution, definiert durch $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$, ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie dass $-\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, und dass $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ ist.

(ii) Berechnen Sie für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ den Grenzwert $-\Delta T_\Phi(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} -\Phi(x)\Delta\varphi(x)\,dx$ mit zweifacher partieller Integration. Hinweis: Es bleibt nur ein Oberflächenintegral $\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \dots dS^2$ übrig.

Präsenzaufgabe 3. Sei für $a > 0$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-a,a]$ definiert durch

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-a,a] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]. \end{cases}$$

(i) Berechne die Fourier-Transformation von $\chi_{[-a,a]}$.

(ii) Drücke das Ergebnis aus (i) mittels der Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ aus.

(iii) Beschreiben Sie die Faltung von einer Funktion $f(x)$ mit dem Ergebnis aus (i). Stellen sie sich dazu $f(x)$ z.B. als Audiosignal vor, wobei x die Zeit ist und $f(x)$ die Amplitude.