Vorlesung 23

b) Anfangsbedingungen :

(ausstoßen)

$$\dot{z}(t=0) =: 0 = z_0 + z_0^* \qquad (1)$$

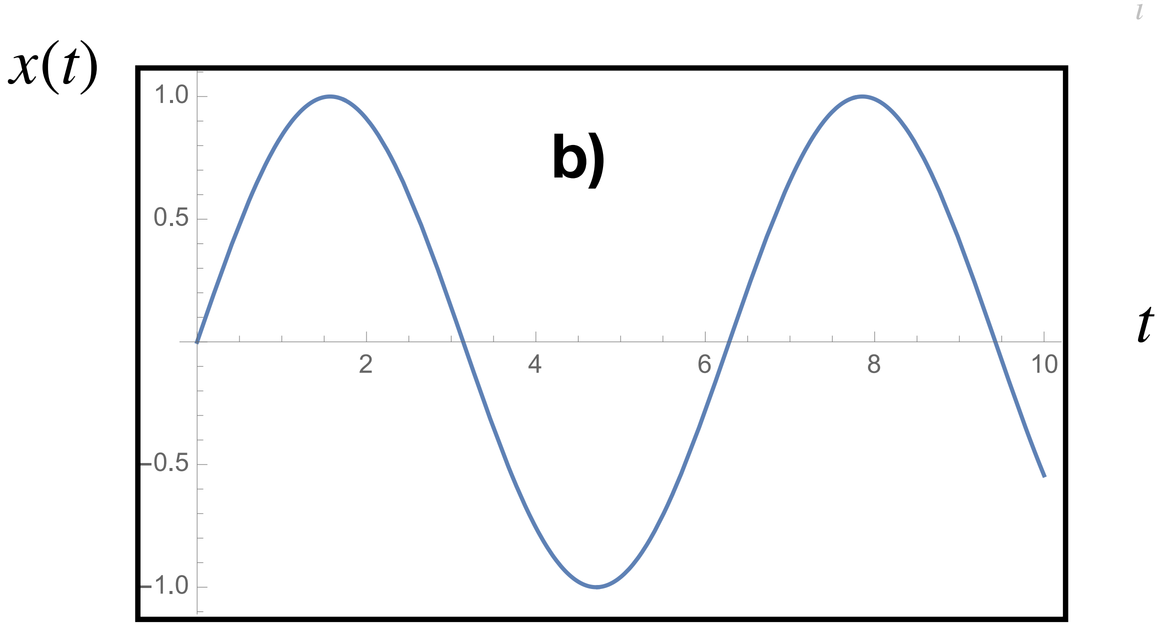
$$\dot{z}(t=0) =: v_0 = i\omega_0 z_0 - i\omega_0 z_0^* \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow z_0 = -\, z_0^*$$

$$(a+ib) = -\,(a-ib) \qquad \Rightarrow \Re[z_0] = 0\,, \quad \Im[z_0] = b \rightarrow z_0 = ib$$

$$(2) \Rightarrow v_0 = i\omega_0 z_0 + i\omega_0 z_0 = 2i\omega_0 z_0 = -\,2\omega_0\, b \in \mathbb{R} \qquad \rightarrow z_0 = -\,\frac{v_0}{2\omega_0} i$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = z_0 e^{i\omega_0 t} + z_0^* e^{-i\omega_0 t} = \frac{v_0}{\underbrace{2i\omega_0}_{-i = (-i)\times\frac{i}{i} = \frac{-i^2}{i} = \frac{1}{i}}} \underbrace{\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)}_{2i\sin\omega_0 t} = \frac{v_0}{\omega_0}\,\sin\omega_0 t$$



Allgemein : $z_0 = |z_0| e^{i\varphi}, \quad z_0^* = |z_0| e^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow z(t) = x(t) = |z_0| \left(e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \right) = \boxed{\underbrace{2|z_0|}_{A} \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)}$$

und $\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \tilde{\varphi})}$ mit $\tilde{\varphi} = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

oder : $x(t) = z_0 e^{i\omega_0 t} + z_0^* e^{-i\omega_0 t}$

$$= z_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}}{2} + z_0^* \frac{e^{-i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

$$= \left(z_0 + z_0^*\right) \frac{1}{2} \left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) + \left(z_0 - z_0^*\right) \frac{1}{2} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

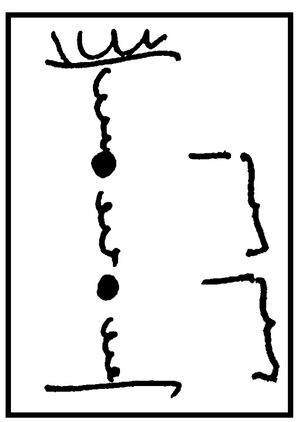
$$\boxed{= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}$$

7.2 Überlagerungen von Schwingungen

Versuch : Ein MP kann gleichzeitig in mehrere Richtungen schwingen

- Überlagerung in 2 oder 3 Dimensionen
- Überlagerung in 1 Dimension

Versuch : gekoppelte Federschwingung (1-dim)



$$x_1(t) = a\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)$$

$$x_2(t) = b\cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$$

Überlagerung : $x_1(t) + x_2(t) = x(t)$ → häufiges Phänomen

a) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega t + B\cos\omega t = C\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

mit

$$A = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$
$$B = -a\sin\varphi_1 - b\sin\varphi_2$$
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\tan\varphi = -B/A$$

Additionstheorem

(Beweis per nachrechnen…)

→ wieder harmonische Schwingung mit Amplitude und Phase

Spezialfälle : Wenn $a = b$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$: $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = 2a\cos(\omega t + \varphi)}$

Wenn $a = b$ aber $\varphi_1 \neq \varphi_2$:

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = a\sqrt{2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

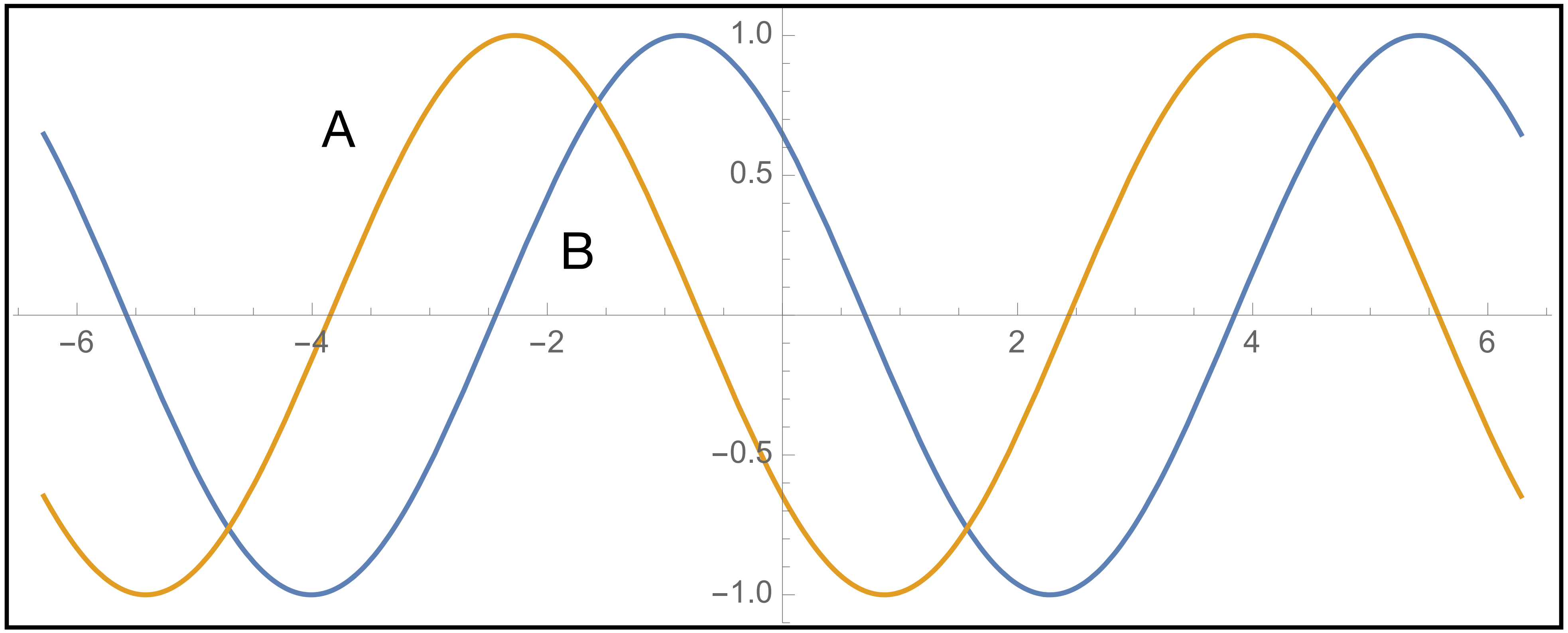
(Herleitung durch Einsetzen)

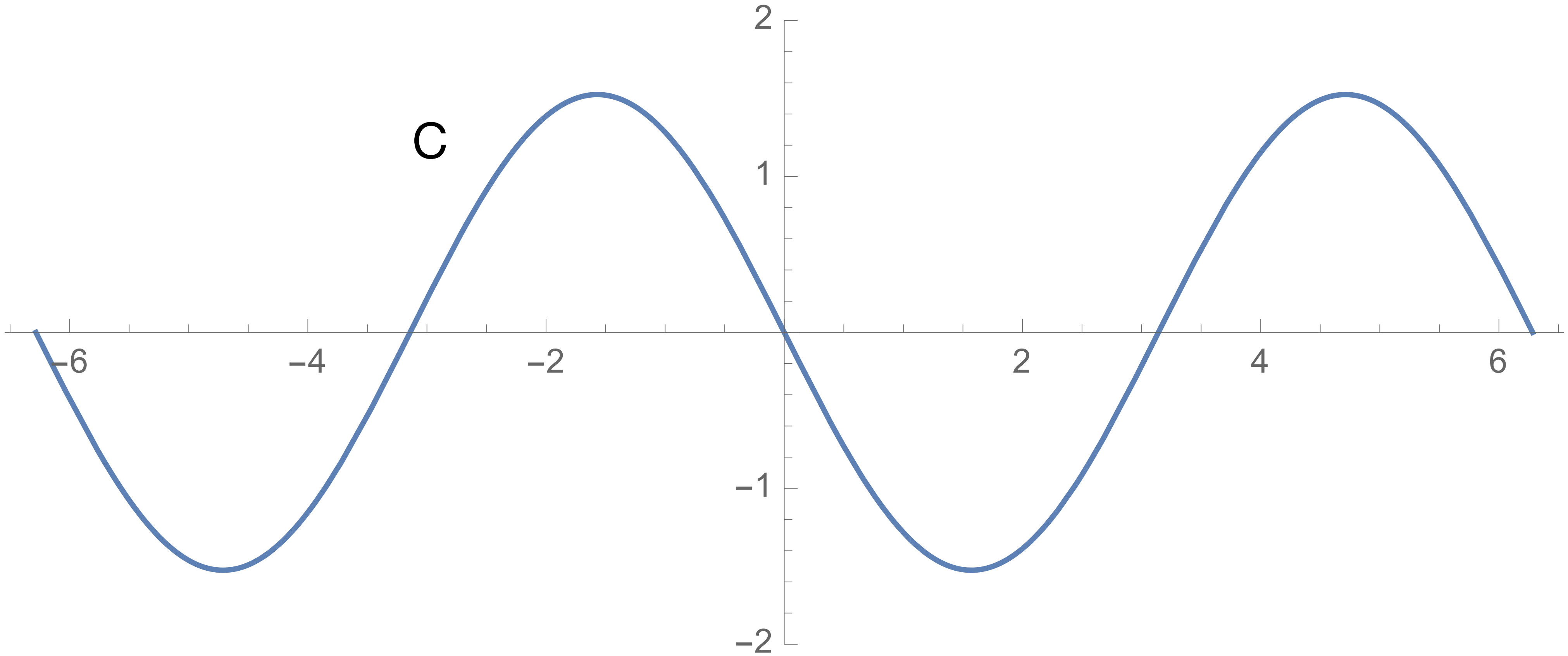
Amplitude : $a\sqrt{2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} < 2a$ wenn $\varphi_1 \neq \varphi_2$

Für $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \rightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \rightarrow$ **Amplitude verschwindet !**

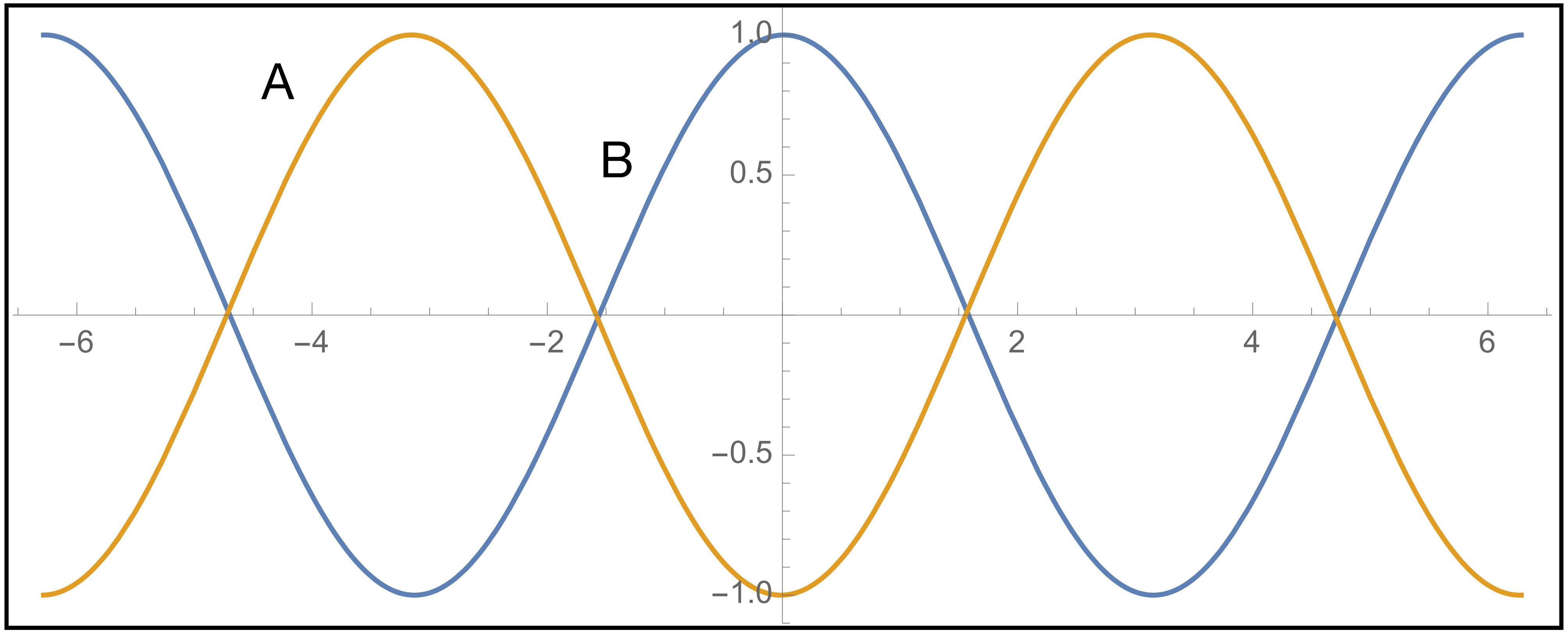
sog. Auslöschung

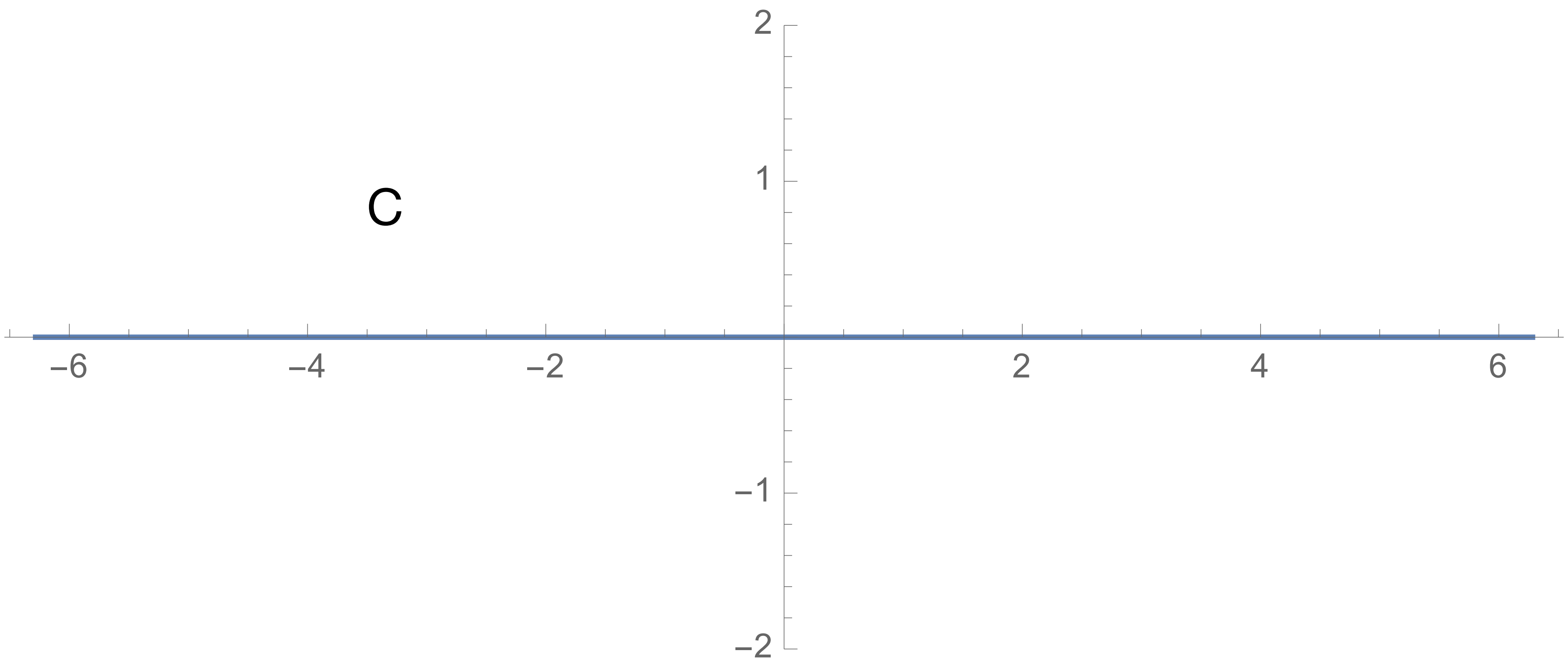
$a = b$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$





$a = b$ mit $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$





b) $\omega_1 \neq \omega_2$ Annahmen hier : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad a = b$

$$\Rightarrow x(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Kein harmonische Schwingung!

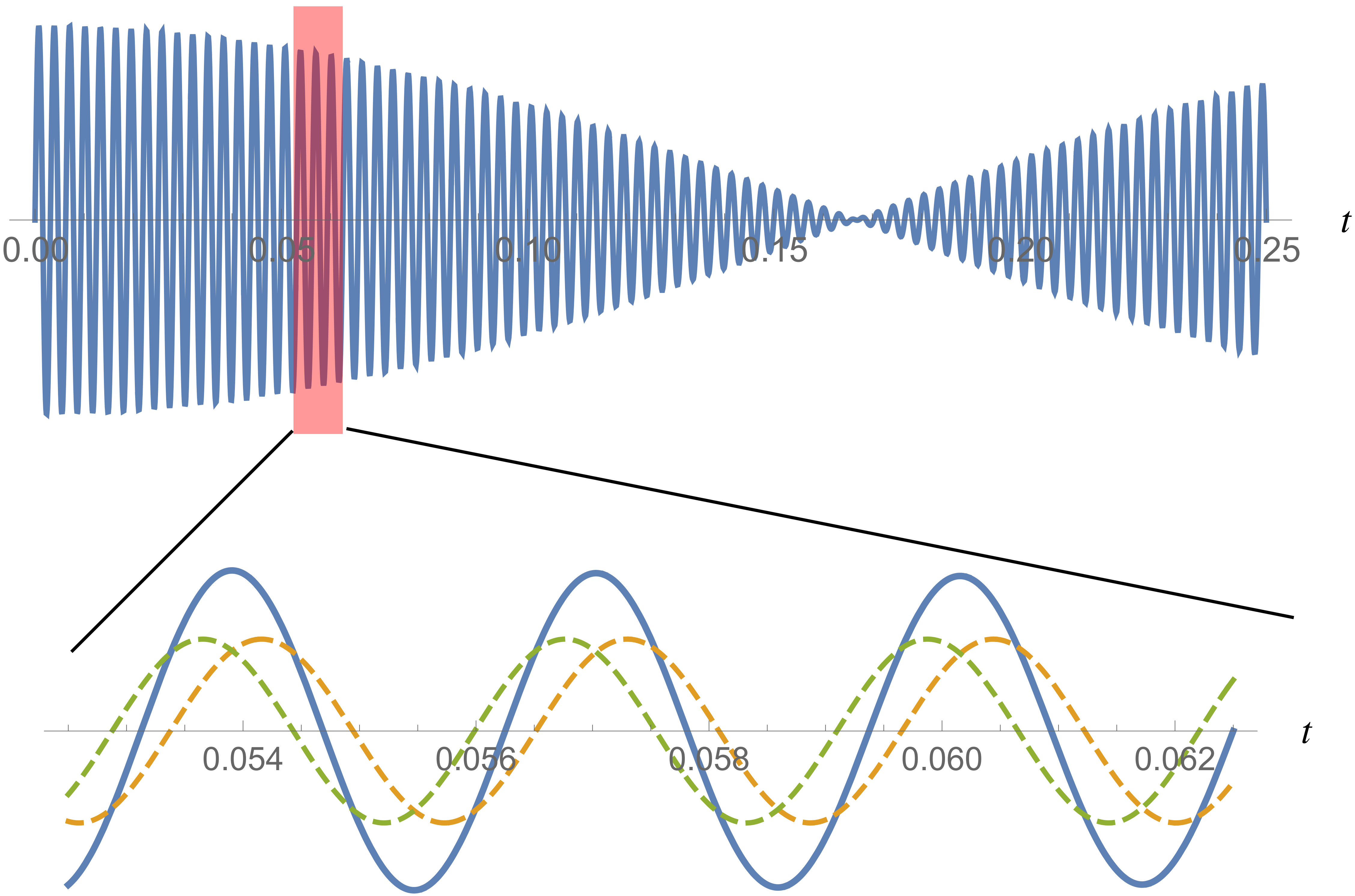
(Herleitung mit $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$)

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$: approximative harmonische Schwingung mit mittlere Frequenz $\overline{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

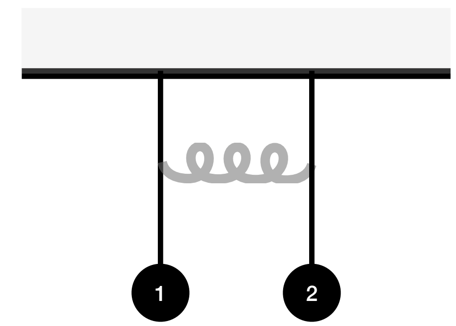
deren Amplitude eine langsam veränderliche Funktion ist ($\sim \cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$) gegenüber der

Periodendauer $T = \dfrac{2\pi}{\overline{\omega}}$. → **sog. Schwebung**

$\overline{\omega} = 320\,\mathrm{Hz}, \quad \omega_1 - \omega_2 = 3\,\mathrm{Hz}$



Versuch : gekoppeltes Pendel



- gegenphasig
- gleichphasig
- $\Delta\varphi \neq 0, \pi \quad \Rightarrow$ Schwebung

Annahmen : $m_1 = m_2 = m$ und $k_1 = k_2 = k$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \qquad \rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k_{12}}{m}(x_1 - x_2) = 0 \quad (1) \quad \leftarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \qquad \rightarrow \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k_{12}}{m}(x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

gekoppelte Differentialgleichung

Lösung durch **Variablensubstitution** : $\xi_+ = x_1 + x_2 \qquad \xi_- = x_1 - x_2$

$$(1)+(2): (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{\xi}_+ + \omega_0^2 \xi_+ = 0$$

$$(1)-(2): (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 - x_2) + 2\frac{k_{12}}{m}(x_1 - x_2) = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{\xi}_- + (\omega_0^2 + 2\frac{k_{12}}{m})\xi_- = 0$$

$$\xi_+(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad \omega_1 = \omega_0$$

$$\xi_-(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k_{12}}{m}}$$

Rücktransformation auf x_1, x_2 :

$$\boxed{x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\xi_+(t) + \xi_-(t)\right) \qquad x_2(t) = \frac{1}{2}\left(\xi_+(t) - \xi_-(t)\right)}$$

Für $A_1 = A_2$: $\quad x_1(t) = \frac{A}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)\right)$

$$= A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Schwebung wenn $2k_{12}/m \ll \omega_0$ (schwache Kopplung)

Spezialfälle : gleichphasig $x_1(t) = x_2(t)$

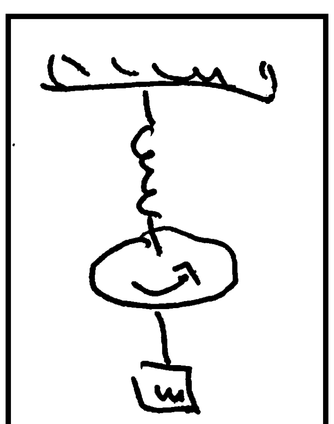
$$\rightarrow \xi_- = 0\,, \quad \xi_+ = 2A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

gegenphasig $x_1(t) = -\,x_2(t)$

$$\rightarrow \xi_+ = 0\,, \quad \xi_- = 2A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_{12}}{m} > \omega_0^2$$

Versuch : Kopplung von Translation und Rotation



2D - Überlagerungen von Schwingungen :

Wir hatten schon gesehen, dass die Projektion einer Kreisbewegung eine **harm.** **Schwingung** entspricht (mit fester Phasenbeziehung $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

allgemein :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_1 t$$

$$y(t) = y_0 \cos \left(\omega_2 t + \varphi\right)$$

Lissajous-Figuren :

Jules Antoine Lissajous (1822 - 1880)

$\omega_1 = \omega_2$: Kreis wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$

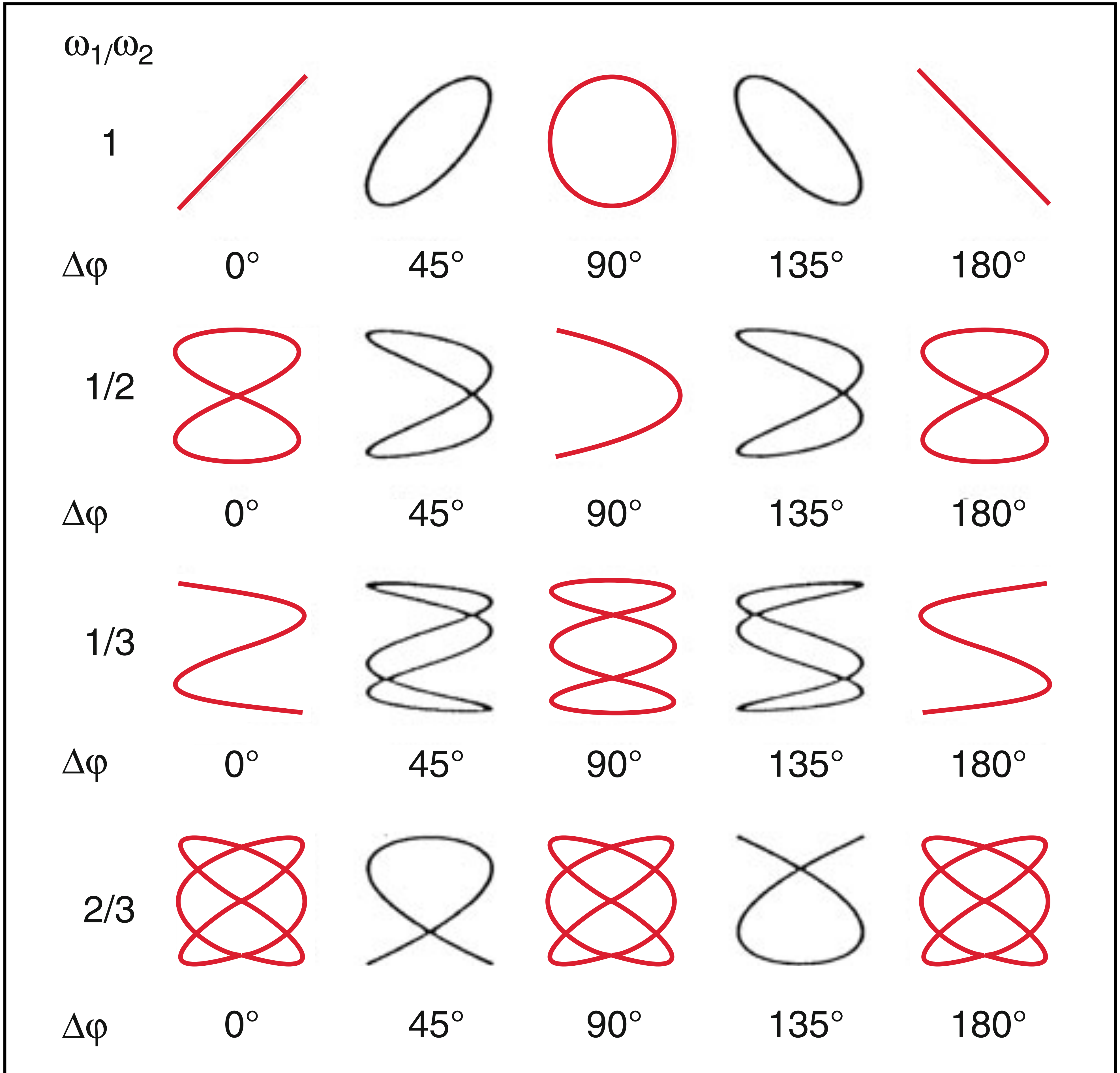
ansonsten Ellipse

$\omega_1 = n\omega_2$: geschlossene Kurve

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$: geschlossene Kurve

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}$: **keine** geschlossene Kurve garantiert !

Versuch : mech. Lissajonsfig.



ω_1/ω_2
1
$\Delta\varphi$
0°
45°
90°
135°
180°
1/2
$\Delta\varphi$
0°
45°
90°
135°
180°
1/3
$\Delta\varphi$
0°
45°
90°
135°
180°
2/3
$\Delta\varphi$
0°
45°
90°
135°
180°