Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 4: Lineare Operatoren

<u>Deadline:</u> Mittwoch 15.05.2024 18.00 via eCampus

Allgemeine Eigenschaften von linearen Operatoren

1. Im Folgenden bezeichnen $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lineare Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, und α, β sind komplexe Zahlen. Zeigen Sie dass folgende Identitäten gelten:
   - (0.5 Punkte) $(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$
   - (0.5 Punkte) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$
   - (0.5 Punkte) $(\hat{A}^{-1})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1}$
   - (0.5 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger]$
   - (0.5 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
   - (0.5 Punkte) $[\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \hat{C}] = \alpha[\hat{A}, \hat{C}] + \beta[\hat{B}, \hat{C}]$
   - (1 Punkt) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$
   - (0.5 Punkte) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
   - (2 Punkte) $[\hat{A}^n, \hat{B}] = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{A}^k [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}^{n-k-1}$, wobei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl ist.
2. Im Folgenden sind $\hat{U}$ und $\hat{V}$ unitäre Operatoren auf $\mathcal{H}$, und $\hat{A}$ is hermitisch.
   - (1 Punkt) Zeigen Sie dass die Menge aller unitärer Operatoren auf $\mathcal{H}$ eine Gruppe bildet.
   - (0.5 Punkte) Zeigen Sie dass $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ hermitisch ist.

Die Exponentialfunktion

Das Exponential eines linearen Operators ist definiert als

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} \,.$$

1. (1 Punkt) Zeigen Sie dass $[\hat{A}, e^{\hat{A}}] = 0\,$.
2. (1 Punkt) Zeigen Sie dass $e^{\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1}} = \hat{B} e^{\hat{A}} \hat{B}^{-1}$
3. Zeigen Sie dass $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$ dann und nur dann wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Zu diesem Zweck definieren wir zwei Funktionen:
$$f(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} \quad \text{and} \quad g(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})} \,.$$
   Wir müssen nun zeigen dass $f(t) = g(t)$ für alle t dann und nur dann wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

- (1 Punkt) Zeigen Sie dass aus $f(t) = g(t)$, für alle t, folgt dass $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. *<u>Hinweis:</u> Wenn f und g gleich sind, dann müssen auch deren Ableitungen gleich sein.*
- (2 Punkte) Wir nehmen nun an dass $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Zeigen dass daraus folgt dass $f(t) = g(t)$ für alle t. *<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie dass f und g Lösung einer gemeinsamen Differentialgleichung sind.*

4. Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen wie man das Exponential im endlich-dimensionalen Fall ausrechnen kann. Wir betrachten den linearen Operator auf $\mathbb{C}^2$ der in der Standardbasis dargestellt wird durch die Matrix
$$M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & -3 \end{smallmatrix}\right) .$$
   - (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M, und schreiben Sie M in der Form $M = UDU^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.
   - (3 Punkte) Wenden Sie die vorherigen Ergebnisse an um e^M auszurechnen.