
Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 14

Das Team wünscht schon jetzt viel Erfolg in der Klausurphase!

Aufgabe 1. (5 Punkte) Beweisen Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und zwei stetige Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die in (a, b) differenzierbar sind, gilt: Es existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an (inklusive Definitionsbereich, der kleiner sein darf als der maximale Definitionsbereich der angegebenen Funktion):

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 7$$

$$k(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$$

$$g(x) = x^3 \exp(-x^2)$$

$$l(x) = \tan(x)$$

$$h(x) = \log(x^3 - x)$$

$$p(x) = \cos^2(x)$$

$$j(x) = \log(x^2 + 1)$$

$$q(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale. Benutzen Sie dabei eine geeignete trigonometrische Substitution – das heißt, setzen Sie $x = \varphi(t)$ für geeignete trigonometrische Terme.

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (b) \int_0^1 \sqrt{x^2+3} \, dx \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (d) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{dx}{\sin(x)}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte). Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int \frac{x-1}{x^2+x-20} \, dx \quad (b) \int \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x} \, dx \quad (c) \int \frac{x^3+x-1}{x^3-x^2} \, dx$$

$$(d) \int \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx \quad (e) \int \frac{10}{(x-4)^5} \, dx \quad (f) \int (x-1 - e^{-\frac{1}{2}x}) \, dx$$

$$(g) \int x \cos(x) \, dx \quad (h) \int x e^{(x^2)} \, dx \quad (i) \int x \ln(x) \, dx \quad (j) \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 2x + 3}{(x+2)(x^2+1)} \, dx$$

Aufgabe 5 (8 Punkte). Mehr zum Extra-Üben — Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int \frac{3x^2 + 1}{-9x^3 + 15x^2 - 7x + 1} dx$$

$$(b) \int (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$(d) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

$$(e) \int \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 2} dx$$

$$(f) \int \frac{4 - 6x}{-6x^3 - 4x^2 - 2} dx$$

$$(g) \int \frac{5x^2 + 6x + 5}{2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} dx$$

$$(h) \int \frac{7x + 1}{-x^3 - x^2 + x + 1} dx$$

Die Punkte dienen nur der Orientierung. Es werden keine Punkte mehr verteilt, die Zulassungserfolge stehen bereits fest. Die Inhalte dieser Aufgaben sind alle grundsätzlich klausurrelevant.

**Abgabe am Donnerstag, den 26. Januar, bis 12:00 Uhr
bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.**