Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 5

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen reeller Zahlen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n := 1 + \frac{1}{n} \qquad b_n := \frac{1+n^2}{1-n^2} \qquad c_n := n - \sqrt{n} \qquad d_n := \frac{2n^3+1}{n-1} \qquad e_n := 2^{-n^2}$$

$(a_n + b_n) \Rightarrow a+b$

z.B.: $1 + \frac{1}{n}$

$a_n = 1$; $b_n = \frac{1}{n}$

↳ konst. Folge ↳ konvergent

↳ Nullfolge ↳ konvergent

konvergent

Konvergenz mit Epsilon beweisen

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Es sei $a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Untersuchen Sie jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

(a) $a_n = \dfrac{11n + 7n^2}{13n^3} + 1$ (b) $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{3^n}$ (c) $a_n = \dfrac{\cos(n)(1+n)}{(2-n)^2}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Untersuchen Sie Zahlenfolge $a_n := \frac{n^2-2}{2n^2+22n}$ auf Konvergenz. Berechnen Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Finden Sie eine reelle Zahlenfolge, deren Glieder beliebig groß werden können, aber deren Abstand benachbarter Folgeglieder beliebig klein wird – für die also gilt:

$$\forall K \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (\ K < a_n\ )$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (\ |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon\ ).$$

Entscheiden und begünden Sie weiterhin, ob eine solche Folge eine Cauchyfolge ist.

Hinweis: Halten Sie sich mit dieser Aufgabe nicht lange auf, falls Sie keine Idee haben, aber verstehen Sie mindestens die Aufgabenstellung.

Aufgabe 5 (1+1+2+2 Punkte)**.** Es sei die Folge der reellen Zahlen (a_n), rekursiv definiert durch $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \sqrt{2a_n - 1}$.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets $1 \le a_n \le 2$ gilt.

(b) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie.

(c) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert, wenn er existiert.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es sei (a_n) eine reelle Folge, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die reelle Folge (b_n) definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$ und wenden Sie die Definition an. Den Fall $a \neq 0$ können Sie auf den ersten Fall zurückführen.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Begründen Sie, ob es reelle Folgen (a_n) geben kann, die den angegebenen Bedingungen genügen. Geben Sie gegebenenfalls eine solche Folge an.

(a) (a_n) konvergiert und hat einen Häufungspunkt. $a_n = 0$

(b) (a_n) ist eine Nullfolge und hat einen Häufungspunkt bei 1. Hätte zwei Häufungspunkte ⇒ konvergiert nicht ⇒ keine Nullfolge

(c) (a_n) hat einen Häufungspunkt und jede natürliche Zahl wird von (a_n) getroffen. $\frac{1}{4}n + ((-1)^n \cdot \frac{1}{4}n)$

$a_0 = 0;\ a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = 0;\ a_4 = 2$

Aufgabe 8 (6 Punkte)**.** Üben Sie nochmals den Umgang mit den komplexen Zahlen:

$(1+i) = z = e^{i\frac{1}{2}\pi}$

(a) Berechnen Sie die dritten und achten Einheitswurzeln. $z^3 = e^{i\frac{1}{2}\pi}$ & $z^8 = e^{i4\pi}$?

(b) Geben Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung $z^5 = 1$ an und stellen Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dar.

? (c) Zeigen Sie, dass für $z = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ gilt: $(\bar{z})^4 = \bar{z}$.

(d) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{(1-i)^5-1}{(1-i)^3+1}$ an.

(e) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ an.

(f) Stellen Sie $-4 - 4i$ in Polarkoordinaten dar.

Sie können hier insgesamt **32 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 10. November, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.