

Vorlesung 16

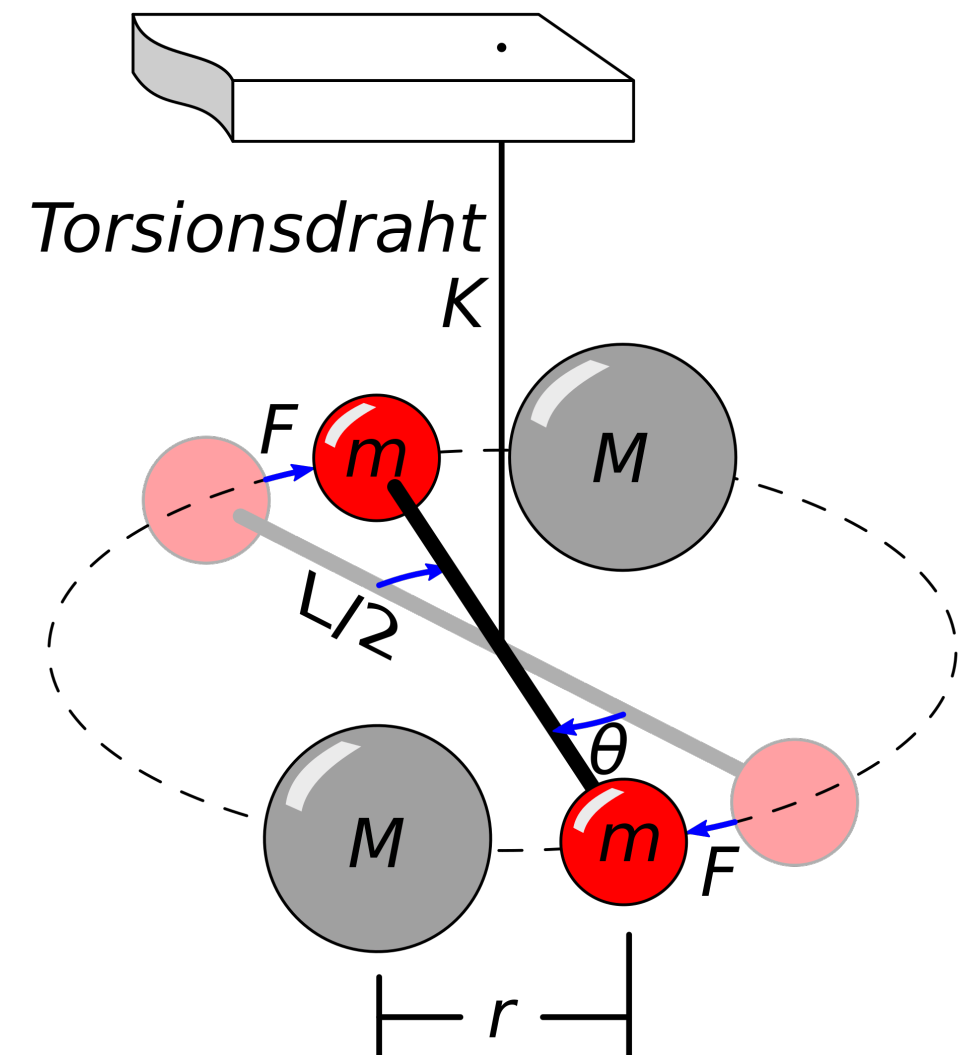
Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ kann (leider!) **nicht** aus **Planetenbewegung** bestimmt werden (man benötigt hierfür $m \cdot M$)

Messung im Labor notwendig (**Cavendish** 1798), aber 2 Massen von je 1 kg und mit einem Abstand von 1 m ziehen sich nur mit $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ an (winzig!)

⇒ reduziere r

⇒ empfindliche Kraftmessung (“Drehwage”)

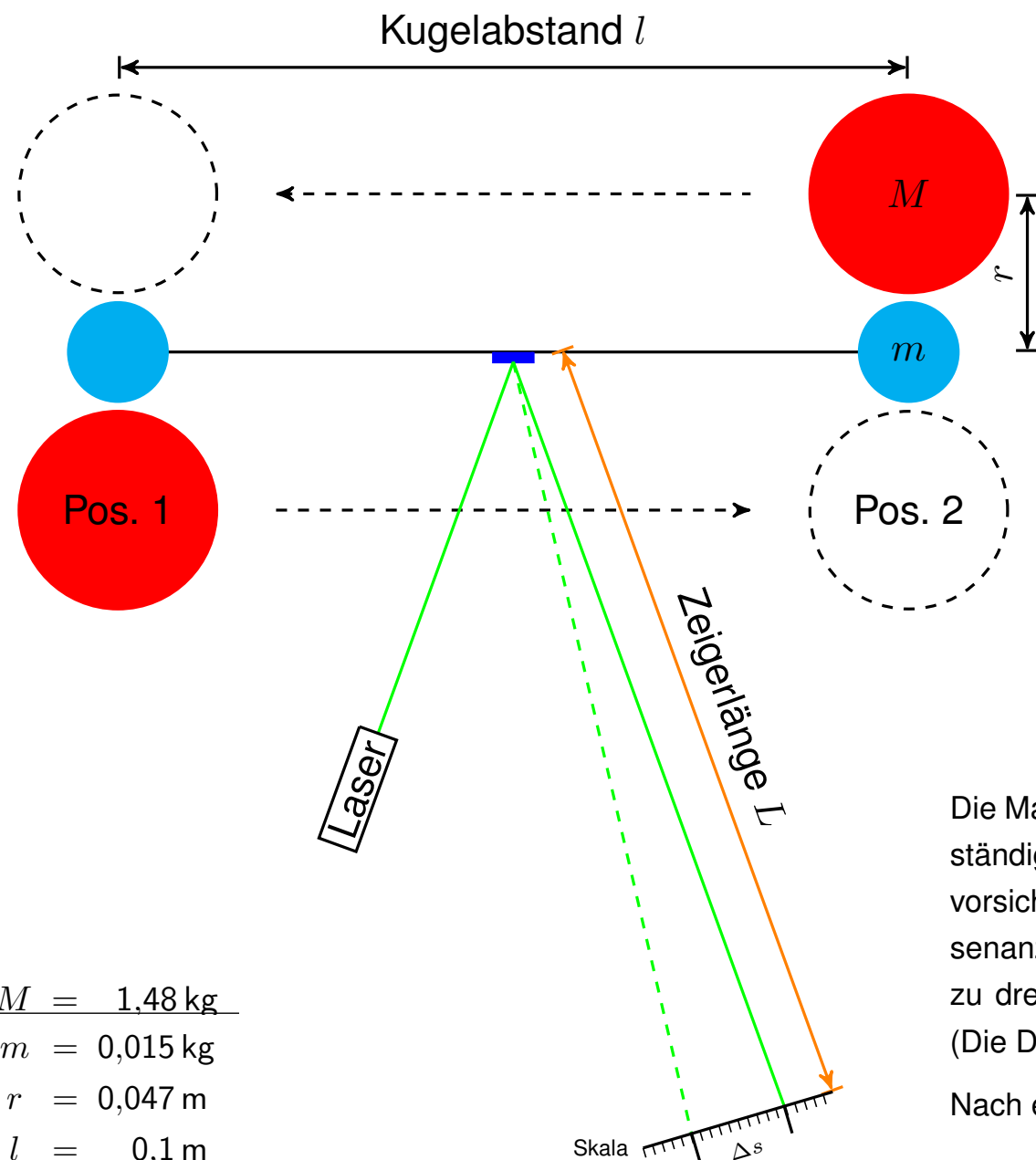
Herausforderung : Gravitation ist schwach!
ca. 10^{42} mal schwächer als die EM Kraft



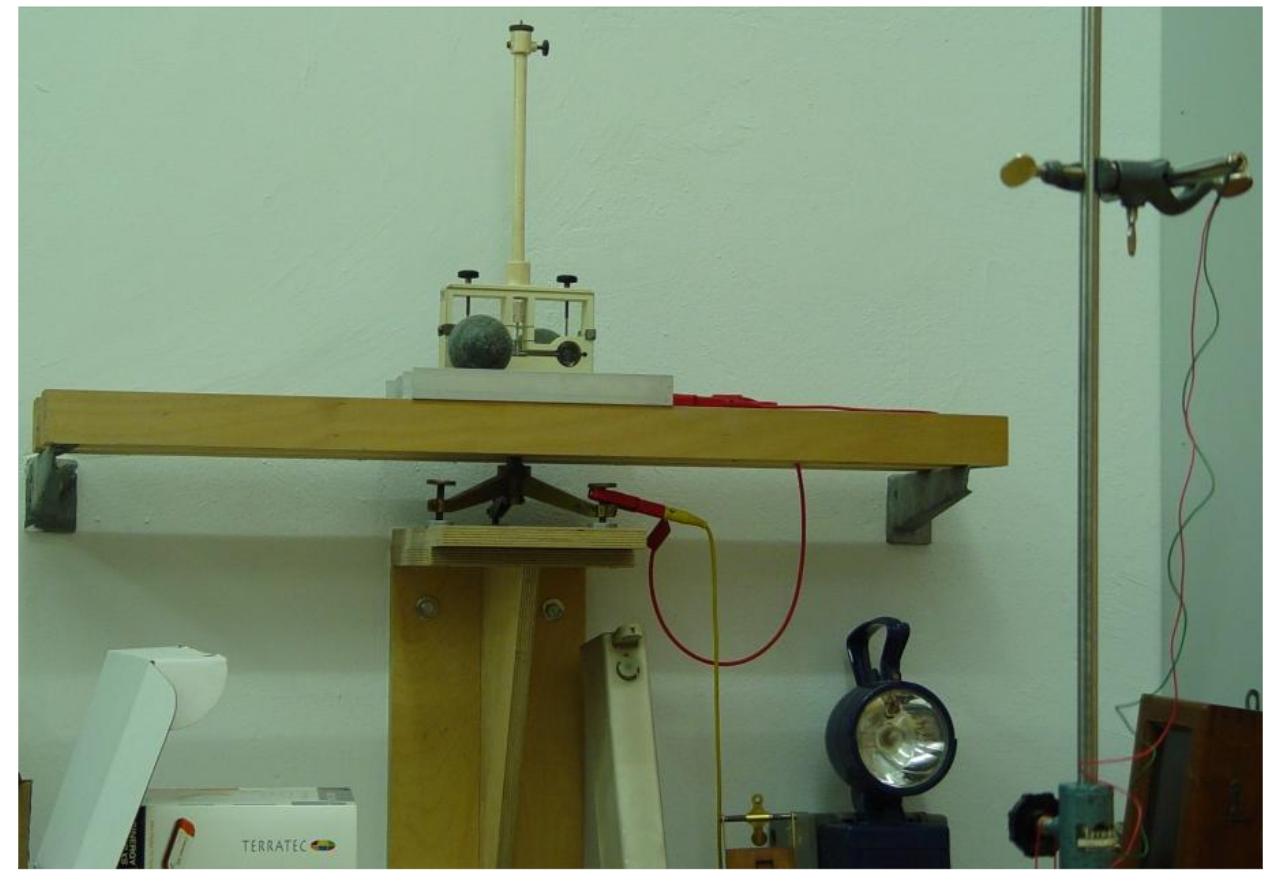
5.4 Bestimmung der Gravitationskonstante

#326

Aufbau :

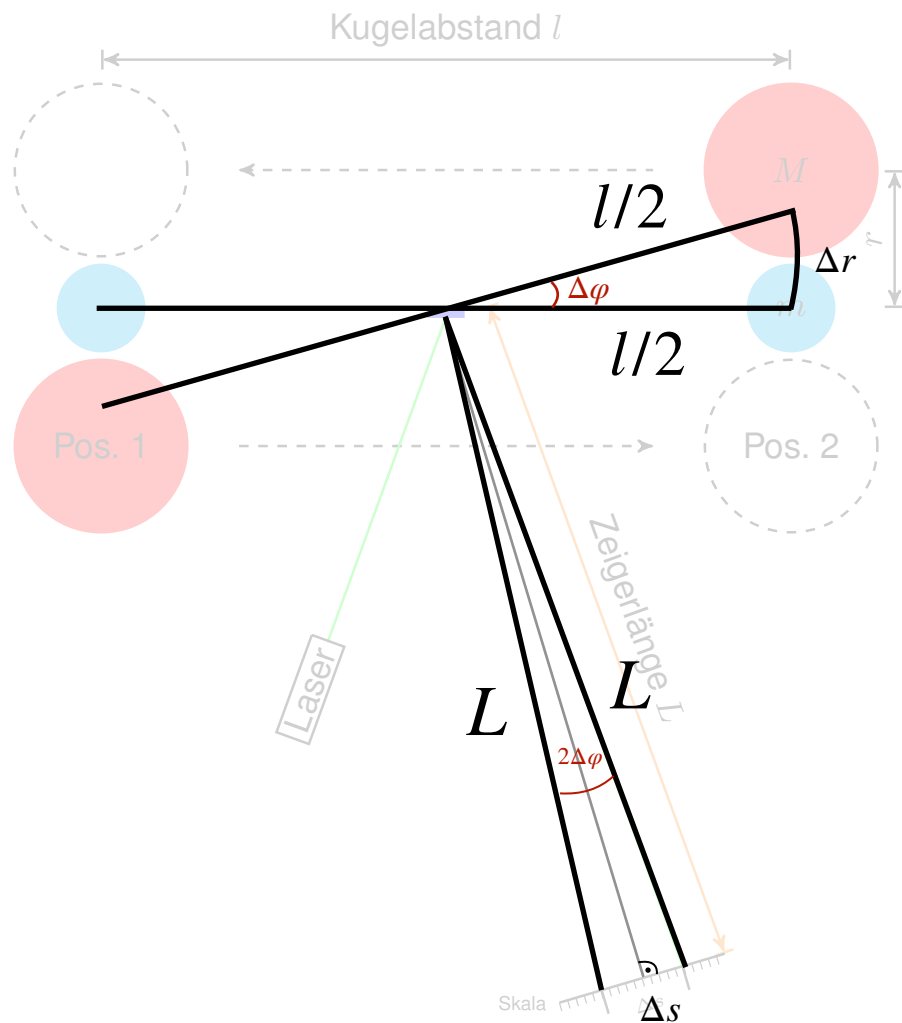


$$\begin{aligned} M &= 1,48 \text{ kg} \\ m &= 0,015 \text{ kg} \\ r &= 0,047 \text{ m} \\ l &= 0,1 \text{ m} \\ L &= 27,5 \text{ m} \\ t &= 60 \text{ s} \\ s &= 0,175 \text{ m} \end{aligned}$$



Die Massen werden in Position 1 gebracht und so ein bis zwei Tage ruhen gelassen, dass sie sich vollständig auspendeln können. Ein Laserpointer wird auf einen Nullpunkt skaliert. Die Massen M werden vorsichtig in Pos. 2 gebracht, losgelassen und gleichzeitig eine Stoppuhr gestartet. Aufgrund der Massenanziehung fallen die kleinen Massen frei im Gravitationsfeld der großen Kugeln: Sie beginnen sich zu drehen. Der „Lichtzeiger“ des Laserstrahls ermöglicht eine Erfassung von kleinen Ablenkungen. (Die Drehung um einen Winkel φ dreht den Laserstrahl um den doppelten Winkel 2φ .)

Nach einer Minute wird der Lichtzeiger-Ausschlag auf der Skala abgelesen.



Drehung des Spiegels :

$$\frac{\Delta s}{2L} = \sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi$$

Wenn der Spiegel um $\Delta \varphi$ rotiert wird, verschiebt sich das Bild um $2\Delta \varphi$, vgl. Skizze nächste Seite

Bewegung der Masse :

$$\Delta r = \frac{l}{2} \cdot \Delta \varphi$$

$$\Rightarrow \Delta r = \frac{l}{2} \cdot \frac{\Delta s}{2L}$$

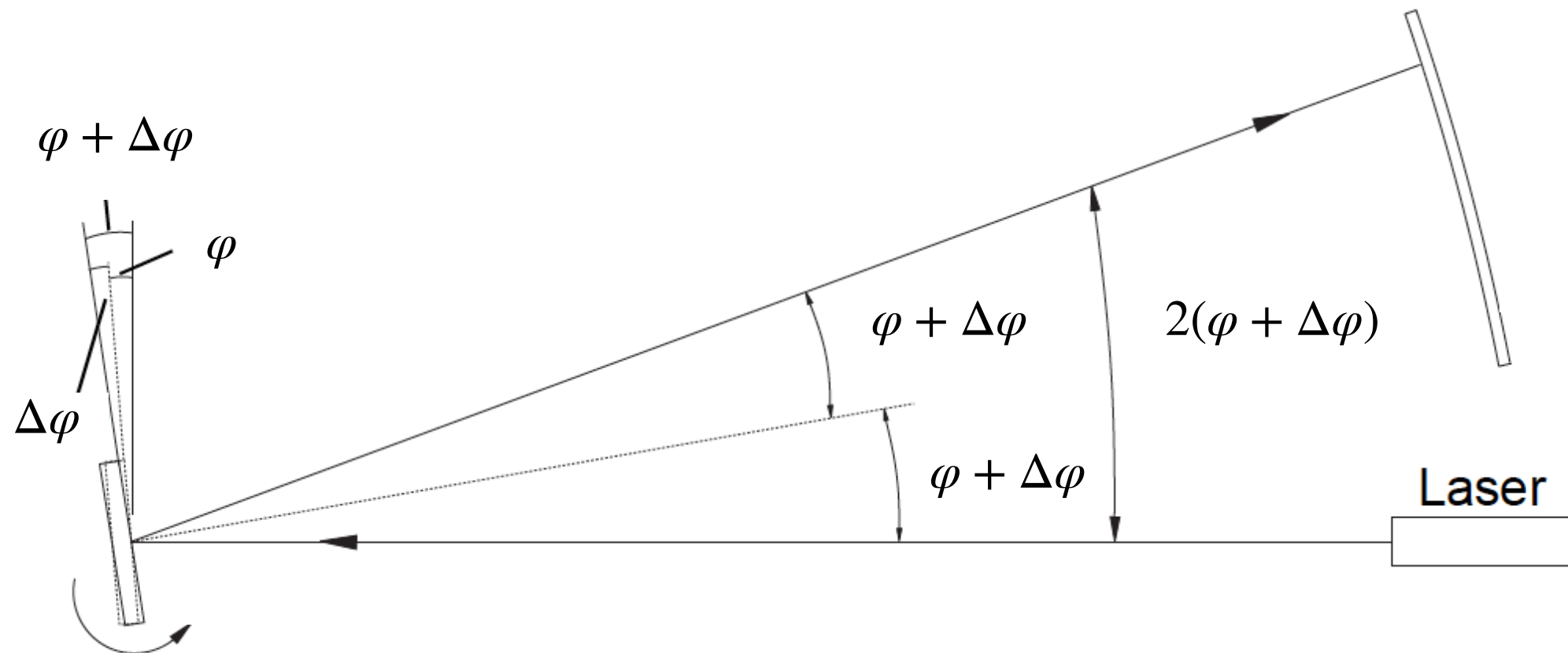
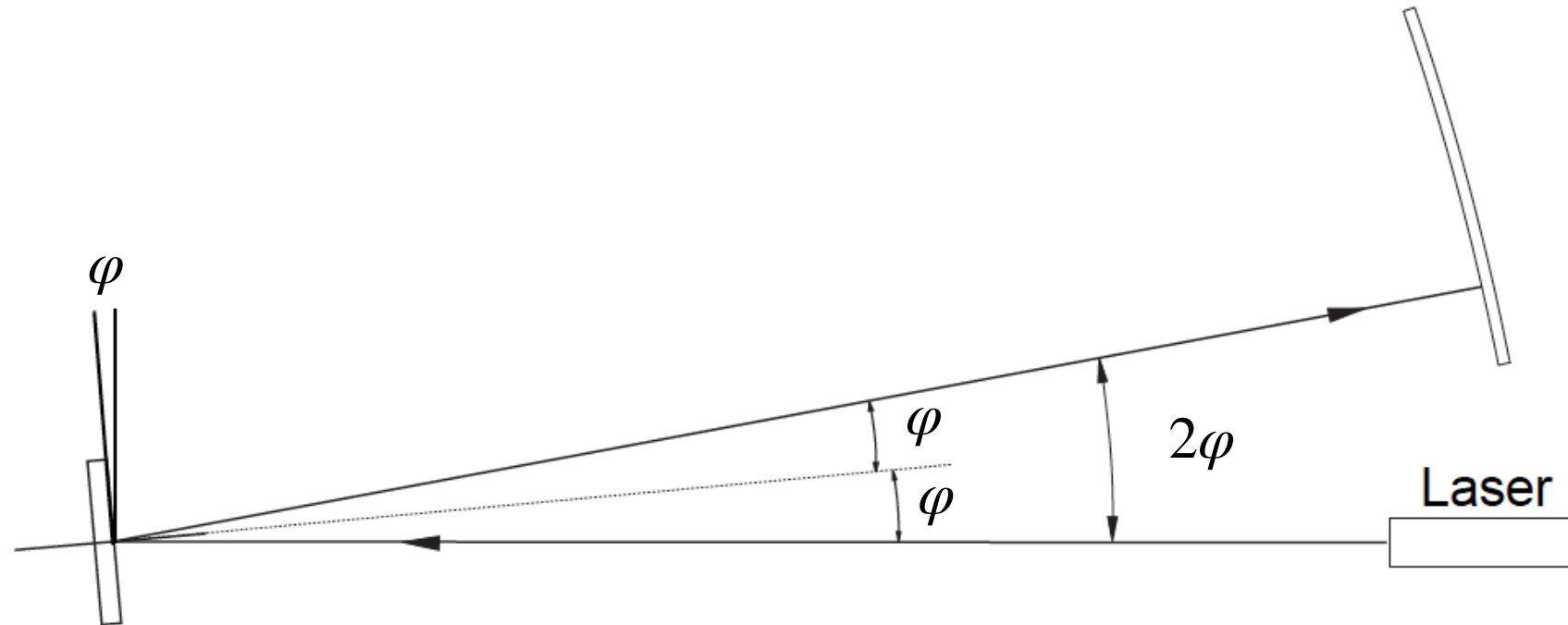
Es wirkt folgende Kraft auf eine Testmasse m :

$$F = ma = 2 \times G \frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{ar^2}{2M}$$

Messung von a : “Feier Fall” der kleinen Kugel im Feld der Großen Kugel

(Bei Wechsel der Position der schweren Massen entspannt sich der Torsionsfaden, dies führt zu einer weiteren Beschleunigung, ergibt Faktor $\Rightarrow 2 \times$)

Drehung des Spiegels um $\Delta\varphi$:



Es folgt : $\Delta r = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\Delta r}{t^2} = \frac{2}{t^2} \cdot \frac{l}{2} \frac{\Delta s}{2L}$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{2M} r^2 \underbrace{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \frac{l}{2} \frac{\Delta s}{2L} \right)}_a$$

bzw. $G = \frac{r^2}{2M} \cdot \frac{1}{2L} \cdot \frac{l}{t^2} \cdot \Delta s$

Mit :

$$\begin{aligned} t &= 60 \text{ s} \\ M &= 1.485 \text{ kg} \\ L &= 27.5 \text{ m} \\ l &= 0.1 \text{ m} \\ r &= 0.050 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G = 4.251 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{kg s}^2} \cdot \Delta s$$

Wir messen $\Delta s = 0.156 \text{ m}$ und bestimmen :

$$G = 6.63198 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Literaturwert : $G = 6.67259(85) \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Bemerkungen zum Gravitationsgesetz :

- G ist im vgl. zu anderen **Naturkonstanten** sehr **schlecht gemessen**

(weil Gravitation so schwach)

- Gibt Anlass zur Suche nach **Abweichungen** von $\sim \frac{1}{r^2}$

große Skalen : “**MOND**” (Modified Newtonian Dynamics)

kleine Skalen : **extra Dimensionen**, $F \sim \frac{1}{r^{2+(D-3)}}$ mit D = Raumdimensionen

5.5 Äquivalenz von träger und schwerer Masse

#331

In

$$m a = G \frac{M m}{r^2}$$

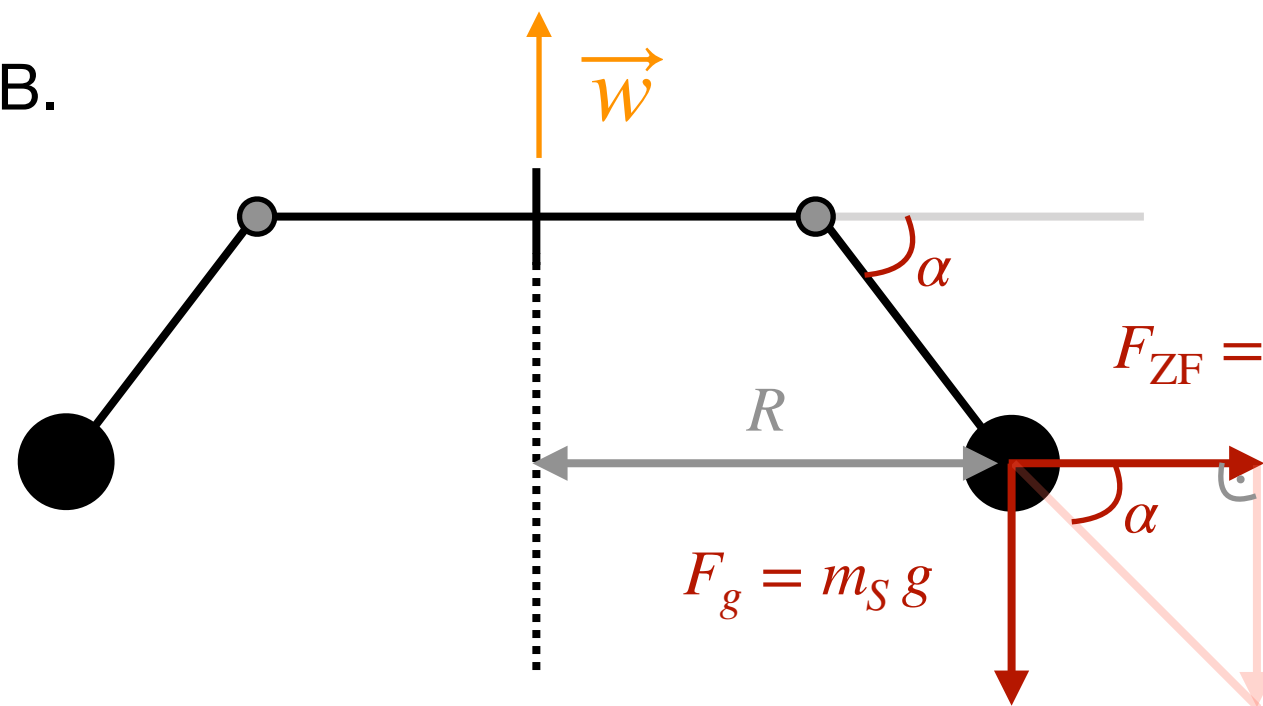
m_T ? m_S

andere Eigenschaft?

Abhängig von der Stoffart ?

Wie kann man das testen?

z.B.



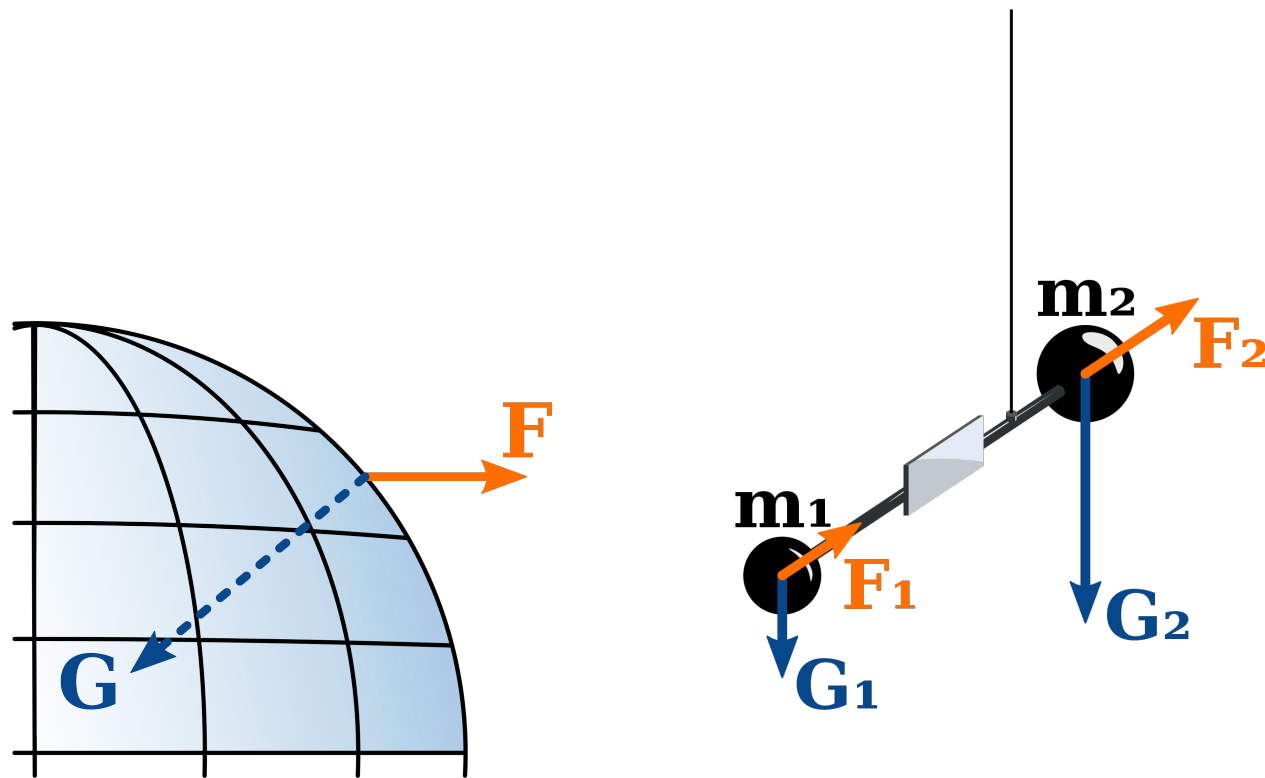
$$F_{ZF} = m_T \omega^2 R = m_T \frac{v^2}{R}$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{F_g}{F_{ZF}} = \frac{m_S g}{m_T \omega^2 R}$$

Messe α und vergleiche mit Erwartung (muss ω kennen bzw. messen)

Alternative: Nutze gleiches Prinzip und Erdrotation. Statt Messung nutze
balanciertes System mit **zwei Massen**

Eötvös-Experiment :



Wäre das Verhältnis der **Zentrifugalkräfte**
 F_1 / F_2 anders als das der
Gravitationskräfte G_1 / G_2
würde der Stab anfangen zu rotieren.

$$F = m_T \frac{v^2}{\rho} \quad G = m_S g$$

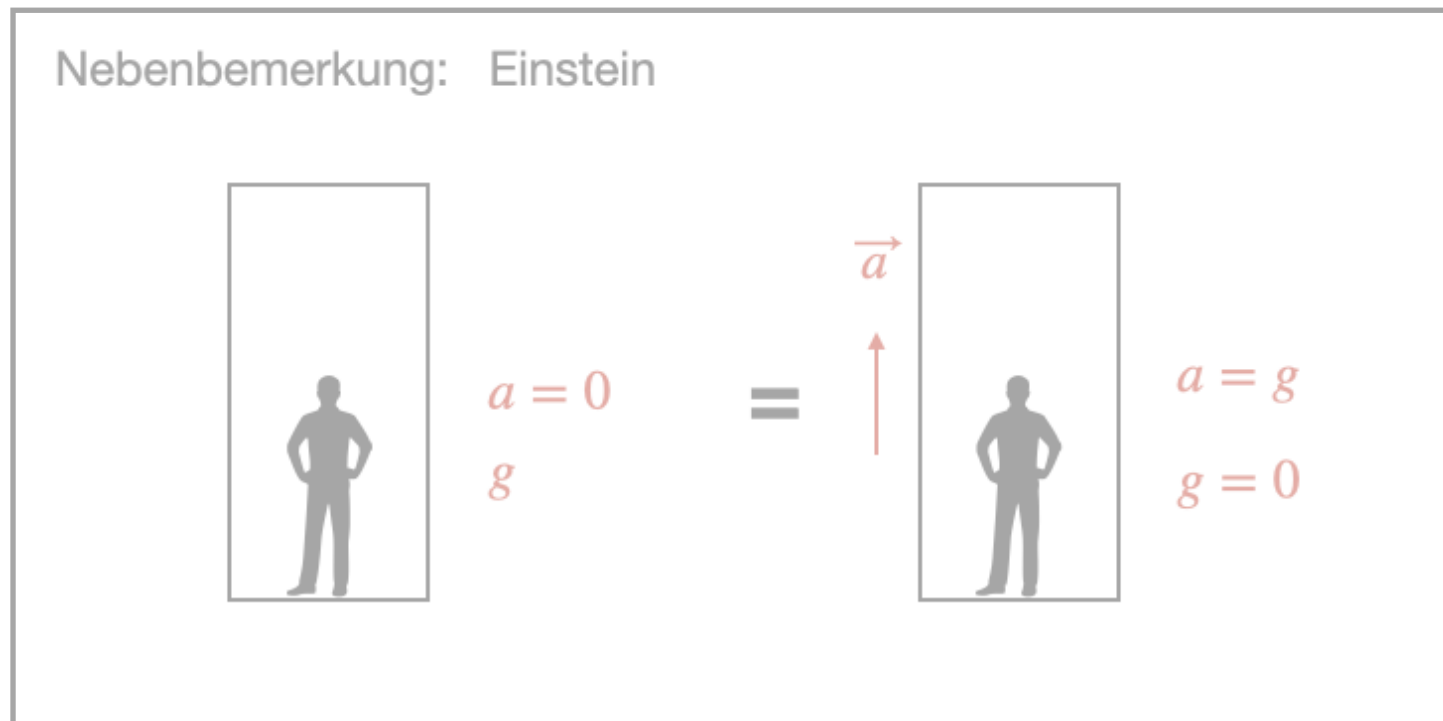
Bis heute **keine** Abweichung

von $m_T = m_S = m$

“**Äquivalenzprinzip**”

Experimentell $\frac{m_S - m_T}{m_S} < 5 \times 10^{-9}$ (heute 10^{-15})

Einstein : “**Ä-Prinzip**” als Ausgangspunkt der ART



Researcher	Year	Method	Average sensitivity
John Philoponus	517 AD	Drop Tower	"small"
Simon Stevin	1585	Drop Tower	5×10^{-2}
Galileo Galilei	1590?	Pendulum, Drop Tower	2×10^{-2}
Isaac Newton	1686	Pendulum	10^{-3}
Friedrich Wilhelm Bessel	1832	Pendulum	2×10^{-5}
Southerns	1910	Pendulum	5×10^{-6}
Zeeman	1918	Torsion balance	3×10^{-8}
Loránd Eötvös	1922	Torsion balance	5×10^{-9}
Potter	1923	Pendulum	3×10^{-6}
Renner	1935	Torsion balance	2×10^{-9}
Dicke, Roll, Krotkov	1964	Torsion balance	3×10^{-11}
Braginsky, Panov	1972	Torsion balance	10^{-12}
Shapiro	1976	Lunar Laser Ranging	10^{-12}
Keiser, Faller	1981	Fluid support	4×10^{-11}
Niebauer, et al.	1987	Drop Tower	10^{-10}
Heckel, et al.	1989	Torsion balance	10^{-11}
Adelberger, et al.	1990	Torsion balance	10^{-12}
Baeßler, et al. ^[15]	1999	Torsion balance	5×10^{-13}
Adelberger, et al. ^[16]	2006	Torsion balance	10^{-13}
Adelberger, et al. ^[17]	2008	Torsion balance	3×10^{-14}
MICROSCOPE	2017	Satellite orbit	10^{-15}

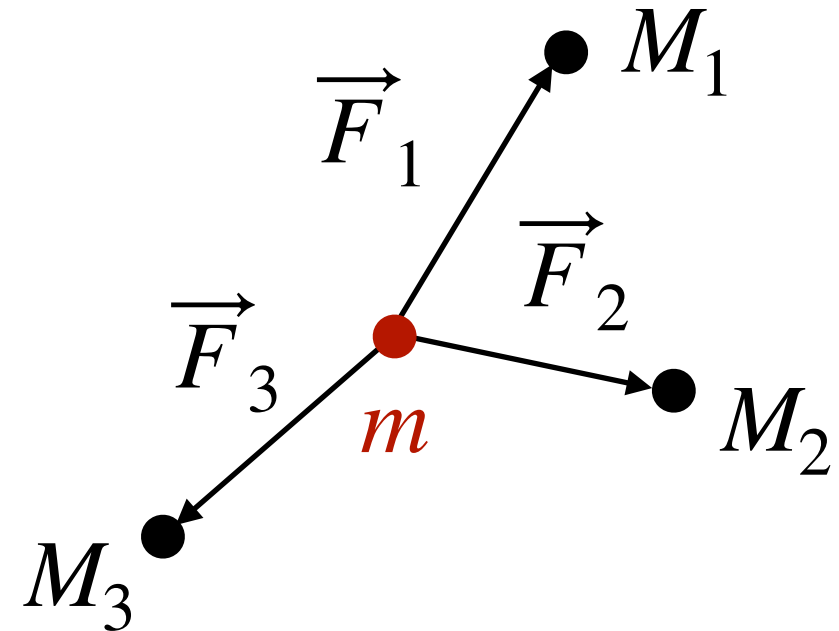
5.6 Gravitationsfeld ausgedehnter Massenverteilungen

#334

Bisher: Annahme von Massenpunkten !

Superpositionsprinzip : Kraft auf **Probemasse** m

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i$$



Gesamtpotential :

$$V_{\text{ges}} = \sum_i V_i \quad \text{bzw.} \quad E_{\text{pot}} = \sum_i E_{\text{pot } i}$$

für ein Massenelement dM : $dE_{\text{pot}} = -G \frac{m dM}{r}$

Das Gravitationspotential der Erde (oder irgend einer anderen Kugel) besitzt **zwei erstaunliche Eigenschaften**

Im folgenden bezeichnen wir den Radius der Kugel als R_E und den Abstand eines Punktes zum Zentrum der Kugel mit a

1.

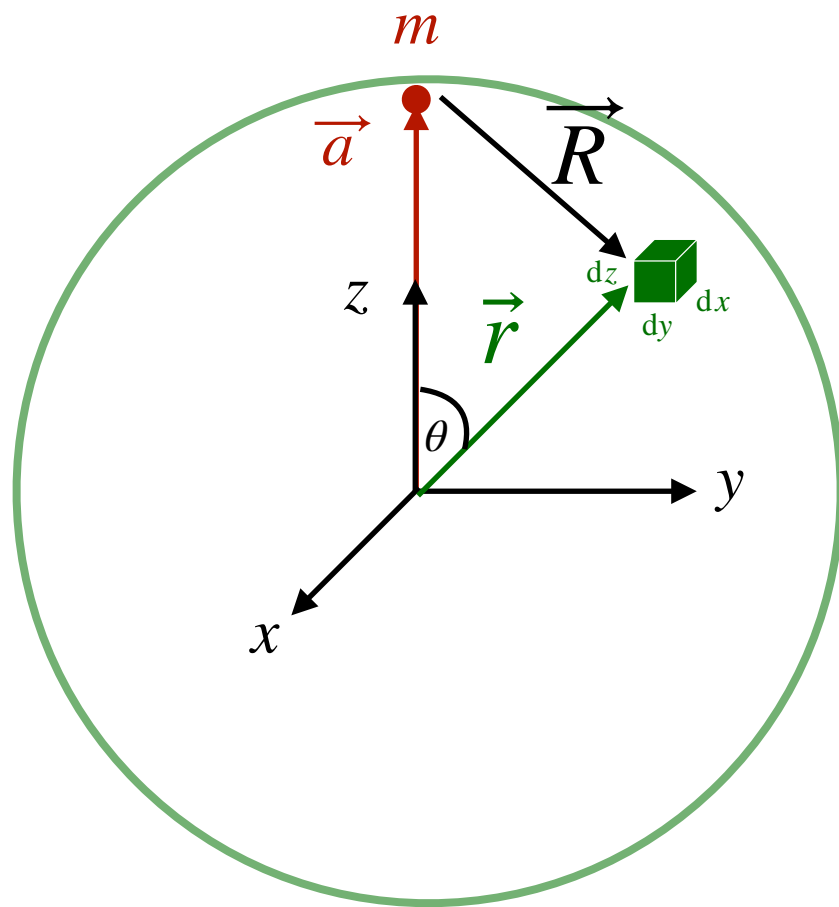
Außerhalb der Kugel ($a \geq R_E$) hängt das Potenzial nur vom Abstand zum Zentrum der Kugel ab, $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(a)$

2.

Innerhalb der Kugel ($a < R_E$) hängt es nur vom Teil der Masse ab, der näher am Zentrum liegt. Die Massenanteile der Kugel außerhalb $|\vec{r}| > a$ spielen keine Rolle

Wählen Koordinatensystem mit **Ursprung** im **Zentrum der Kugel**

Punkt \vec{a} mit Abstand a auf der z -Achse versetzt mit Probemasse m



Betrachten Volumenelement $dx \cdot dy \cdot dz$ am
mit Masse $dM = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ am Ort \vec{r} der Kugel

Dichte

Abstand zwischen Probemasse und Volumenelement:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad R(\theta) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$$

folg aus Kosinussatz

Winkel zw. \vec{a} und \vec{r}

Das Potential aufgrund von dM am Ort \vec{a} ist dann

$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{dM m}{R(\theta)} = -G m \rho \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{R(\theta)} = -G m \rho \frac{r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{R(\theta)}$$

Transformation in
Kugelkoordinaten