HA 3

Donnerstag, 27. Oktober 2022 00:43

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ
1/2	5,5/6	4/4	2/3	2,5/3	2/2	-/3	17/20

Lisa Peltzer, Angelo Brade

① Die symmetrische Gruppe ist eine Gruppe da sie eine Menge ist, die den Axiomen K1 bis K3 folgt.

Abgeschlossenheit: $\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\in S_n} \circ \underbrace{(b_1, \dots, b_n)}_{\in S_n} = (a_{b_1}, \dots, a_{b_n}) \in S_n$

K1: $\pi = \{a_1, \dots, a_n\}, \rho = \{b_1, \dots, b_n\}, \sigma = \{c_1, \dots, c_n\} \in S_n$

$\pi \circ (\rho \circ \sigma) = (\pi \circ \rho) \circ \sigma$

$\pi \circ (\rho \circ \sigma) \Leftrightarrow \forall x (\pi \circ \rho(\sigma(x)))$

$\pi \circ (\rho \circ \sigma) \Leftrightarrow \forall x (\pi(\rho(x)) \circ \sigma)$

$\Leftrightarrow \pi \circ (\rho \circ \sigma) = (\pi \circ \rho) \circ \sigma$ □ zeigt es nicht klar

K2: Id von S_n: $Id = (1, 2, 3, \dots, n) \in S_n$

$\pi = \{a_1, \dots, a_n\} \in S_n$

$\pi \circ Id = \pi \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \circ (1, 2, \dots, n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ □ ✓

K3: $\pi = \{a_1, \dots, a_n\} \in S_n$

π^{-1} kann so gewählt werden, dass folgendes gilt:

$\pi \circ \pi^{-1} = Id$ □

$\Leftrightarrow \underbrace{(a_1, \dots, a_n)^{-1} := (b_1, \dots, b_n), \text{ wobei } a_{b_1} = 1, a_{b_2} = 2, \dots, a_{b_n} = n.}_{\text{Skript}}$ ok

1/2

②

a) $(3,4,5,2,1) = (351)(42)$ ✓

$(2,1,4,5,3) = (21)(453)$ ✓

$(5,2,4,3,1) = (51)(2)(43)$ $= (51)(43)$ ✓

+1,5P

b) $S_1 = \{(1)\}$; $S_2 = \{(12), (21)\}$; $S_3 = \{(123), (231), (312), (321), (213), (132)\}$

S_1: $(1) \circ (1) = (1)$ ✓

S_2: $(12) \circ (21) = (21) = (21) \circ (12)$; $(12) \circ (12) = (12) = (12) \circ (12)$; $(21) \circ (21) = (12) = (21) \circ (21)$ ✓

S_3: $(321) \circ (213) = (231) \neq (213) \circ (321) \Rightarrow$ Kommutativgesetz gebrochen $\Rightarrow S_3$ nicht abelsch ✓

+2P

c) S_n ist genau dann abelsch, wenn $n \leq 2$ ist, da sobald $n > 2$ ist, das Wertetripel, welches schon S_3 nicht abelsch definiert, eine Teilmenge einer Wertemenge in S_n ist, die sonst nur mit den Elementen der Identität aufgefüllt ist: $Id = \{123456 \dots n\}$ $S_3: (213) \Rightarrow S_n: (213456 \dots n) \wedge S_3: (321) \Rightarrow S_n: (321456 \dots n)$. ok

+2P

5,5/6

③

a) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ K4 & K8

$(-x) \cdot y = -(x \cdot y) \overset{+(x \cdot y)}{\Longleftrightarrow} ((-x) \cdot y) + (x \cdot y) = -(x \cdot y) + (x \cdot y) \Leftrightarrow y(x - x) = (x \cdot y) - (x \cdot y) \Leftrightarrow 0 = 0$ ok +2P

b) $(-1) \cdot x = -x$

$(-1) \cdot x \overset{a)}{=} -(1 \cdot x) \overset{K6}{=} -(x) \overset{K5}{=} -x$ ✓ +2P

4/4

④

$\cdot$	0
0	0

+	0
0	0

Z_1 ist kein Körper, da das neutrale Element der Addition gleich dem der Multiplikation ist und somit K10 verletzt. ✓

$\cdot$	0	1	2	3
2	0	2	0	2

Z_4 ist kein Körper, da das Element 2 kein inverses Element der Multiplikation hat und somit K7 verletzt ✓

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0	3	0	3	0	3	0	3	0

$\mathbb{Z}_6$ ist kein Körper, da das Element 3 kein inverses Element der Multiplikation hat und somit K7 verletzt

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	0	4	0	4	0	4	0	4	0

$\mathbb{Z}_8$ ist kein Körper, da das Element 4 kein inverses Element der Multiplikation hat und somit K7 verletzt

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0

$\mathbb{Z}_9$ ist kein Körper, da das Element 3 kein inverses Element der Multiplikation hat und somit K7 verletzt

Mutiplikation

$\mathbb{Z}_2$

	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_3$

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}_5$

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Addition $\mathbb{Z}_2$

	0	1
0	0	1
1	1	0

$\mathbb{Z}_3$

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\mathbb{Z}_5$

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\mathbb{Z}_7$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0

$\mathbb{Z}_7$							
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

das Inverse der Addition ist $(-k)$

Für $\forall k \in \mathbb{Z}_n$ mit $n \in \{2,3,5,7\}$ gibt es ein inverses Element k^{-1}, so dass $k^{-1} \cdot k = 1$ bzw. $k^{-1} + k = 0$ ergibt, womit K3 und K7 für $\mathbb{Z}_n$ mit $n \in \{2,3,5,7\}$ bewiesen ist.

Die Axiome K1, K2, K4, K5, K6, K8 und K9 werden aus $\mathbb{Z}$ vererbt.

Das Axiom K10 ist für $\mathbb{Z}_n$ mit $n \in \{2,3,5,7\}$ mit den Tabellen ebenso bewiesen, da kein neutrales Element der Multiplikation dem gleich der Addition. ok +1,5P

Es war nach einer Vermutung gefragt und das reicht nicht als Beweis

Damit $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist muss K7 gelten.

Wenn man das neutrale Element der Multiplikation durch das Produkt von $k \in \mathbb{Z}_n$ und $k^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ bildet, muss n modulo $k \neq 0$ sein:

$(\forall k \in \mathbb{Z}_n \mid k \cdot k^{-1} = 1 \Rightarrow n \bmod k \neq 0)$

Dabei handelt es sich für n um die Primzahlen $\mathbb{P}$.

Damit folgt, dass für $n \in \mathbb{Z} \land 1 \leq n < 10$ $n \in \{2,3,5,7\}$ sein muss. Also sind $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$ Körper.

+0,5P

2/3

(5)

R_1 ist eine Äquivalenzrelation, da die Relationen reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, da es nur (x,x) Tupel gibt: Reflexivität: xRx; Symmetrie: $(xRx \to xRx)$; Transitivität: $((xRx \land xRx) \to xRx)$ ✓

R_2 ist eine Äquivalenzrelation, da die Relationen reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, da die Tupel (x,x) alle Bedingungen erfüllen und $(1,2)$ mit $(1,2)$ reflexiv, $(1,2)$ mit $(2,1)$ symmetrisch und $(1,2)$ mit $(2,1)$ und $(1,1)$ transitiv ist: Reflexiv: $1R1$; Symmetrie: $1R2 \Leftrightarrow 2R1$; Transitivität: $((1R2 \land 2R1) \to 1R1)$ ok

was ist mit $(2,1)$ und $(1,2)$ transitiv zu $(2,2)$

R_3 ist keine Äquivalenzrelation, da die Relation nicht symmetrisch ist, weil es zu $(1,2)$ kein $(2,1)$ gibt. ✓

2,5/3

(6) Es kann eine Äquivalenzrelation geben, da es z.B. folgende gibt:

$x \sim y := \{(x,y) \mid x \bmod 2 = y \bmod 2\}$.

Diese erfüllt die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

$x \sim y \quad x \bmod 2 = y \bmod 2$

Reflexivität Sei $x \sim y$ z.z.: $x \sim x$

$x \sim x \overset{Def}{\Leftrightarrow} x \bmod 2 = x \bmod 2$

Symmetrie

Sei $x \sim y$ z.z. $y \sim x$

$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \overset{Def}{\Leftrightarrow} x \bmod 2 = y \bmod 2 \Leftrightarrow y \bmod 2 = x \bmod 2$ ✓

$x \sim y \quad x \bmod 2 = y \bmod 2$

Reflexivität Sei $x \sim y$ z.z: $x \sim x$

$x \sim x \overset{Def}{\iff} x \bmod 2 = x \bmod 2$

Symmetrie

Sei $x \sim y$ z.z $y \sim x$

$x \sim y \iff y \sim x \overset{Def}{\iff} x \bmod 2 = y \bmod 2 \iff y \bmod 2 = x \bmod 2$

Transivität

Sei $x \sim y \wedge y \sim z$ z.z: $x \sim z$

$x \sim y \wedge y \sim z \overset{Def}{\iff} x \bmod 2 = y \bmod 2 \wedge y \bmod 2 = z \bmod 2 \Rightarrow x \bmod 2 = z \bmod 2$ ✓

Für $\{n \in \mathbb{N} \mid n \sim 42\}$ ist dann $x \sim y$ wahr, wenn n gerade ist, da eine gerade Zahl modulo 2 immer 0 ergibt, sowie 42 modulo 2 immer 0 ergibt. Für ungerade Zahlen von n wird die Äquivalenzrelation unwahr, da eine ungerade Zahl modulo 2 immer 1 ergibt und $1 \neq 0$ ist. ✓

2

2/2

Auf 2. a)

1) Prüfe reflexivität

Sei $(a,b) \in R$ z.z.: $(a,b) \sim (a,b)$

$\overset{a\,,\,b}{(a,b)} \sim \overset{c\,\,d}{(a,b)} \overset{Def}{\Longleftrightarrow} \overset{a\,d}{a \cdot b} = \overset{c\,b}{a \cdot b}$ ✓ ist reflexiv

Prüfe symmetrie

Sei $(a,b) \sim (c,d)$ z.z: $(c,d) \sim (a,b)$

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} ad = bc \Leftrightarrow cb = da$ ✓ ist symmetrisch

Prüfe transitivität

Sei $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$ z.z. $(a,b) \sim (e,f)$

$\overset{Def}{\Longleftrightarrow} \quad \underset{\downarrow \cdot f}{ad = bc} \quad \wedge \quad \underset{\downarrow \cdot b}{cf = de}$

$\Longleftrightarrow \quad adf = bcf \quad \wedge \quad cfb = deb$

$\Rightarrow \quad \underset{\downarrow : d}{adf = deb}$

$\Longleftrightarrow \quad af = eb$

$\overset{Def}{\Longleftrightarrow} \quad (a,b) \sim (e,f)$ ✓ ist transitiv

Da die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist sie eine Äquivalenzrelation

b) $(a,b) R (c,d) :\Longleftrightarrow ((a,b),(c,d)) \in R :\Longleftrightarrow \quad ad = bc$

$\Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\Longleftrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$

Die Äquivalenzklassen von R sind alle Darstellungsweisen von der rationalen Zahl, die durch $\frac{a}{b}$ gebildet wird und sich anders durch $\frac{c}{d}$ darstellen lässt.

Z.B. lässt sich $\frac{3}{7}$ auch durch $\frac{9}{21}$ darstellen.