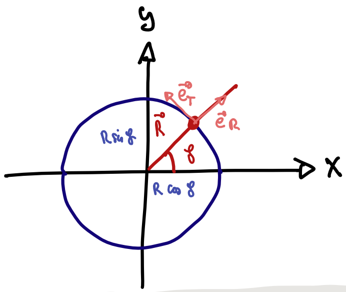
Kreisbewegung:



Gleichförmige Bewegung $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$

$|\vec{v}| = \text{const.}$ aber $\vec{v} \neq \text{const}$

$\Rightarrow$ Beschleunigung

Definiere $\omega := \frac{d\varphi}{dt}$ Winkelgeschw. (o. Kreisfrequenz)

$[\omega] = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow$ gleichförm. Kreisbewegung gilt $\varphi(t) = \omega \cdot t$

Umlaufzeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Umlauffrequenz $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

(φ übersteigt 2π)

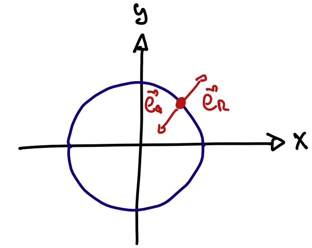
In x-y-Ebene:

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi(t) \\ R\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = R \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_R}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\sin\omega t \\ \omega R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega R\, \vec{e}_T$$

$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{R}$

$|\vec{v}| = v = \omega R = \frac{2\pi R}{T}$



$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R\cos(\omega t) \\ -\omega^2 R\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R\, \vec{e}_R = \omega^2 R\, \vec{e}_a \Rightarrow \vec{e}_R = -\vec{e}_a$$

$$= \frac{v^2}{R}\vec{e}_a$$ (Beschleunigung zeigt zum Zentrum)

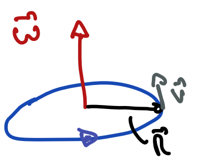
Vorlesung 6

Bewegung in x-y-Ebene:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\sin\varphi \\ \omega R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = v\,\vec{e}_T \checkmark$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = -\omega^2 \vec{R} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_a \checkmark$$

Verallgemeinerung für bel. Kreisebene.



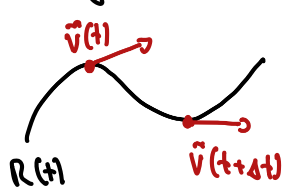
Winkelgeschw. als Vektor

$\vec{\omega} \perp \vec{R}$ und $\vec{\omega} \perp \vec{v}$

Wählen $\vec{\omega}$ so, dass $\vec{R}, \vec{v}, \vec{\omega}$ Rechtssystem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (= -\vec{R} \times \vec{\omega})$$

Allgem. krummlinige Bewegung



$\vec{v}$ immer tangential zu Bahnkurve $\vec{R}$

$\vec{v} = v\,\vec{e}_T$

$\hookrightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \underbrace{\dot{v}\,\vec{e}_T}_{\text{Änderung Betrag } v} + \underbrace{v\,\dot{\vec{e}}_T}_{\text{Änderung Richtung } \vec{v}}$

$\vec{a}_N = 0$: geradlin. Bewegung

$\vec{a}_T = 0$: $|\vec{v}| = \text{const} \Rightarrow$ Kreisbahn

allg. Bewegung in x-y-Ebene

$\vec{e}_T = \underbrace{|\vec{e}_T|}_{=1} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $\vec{e}_N = \underbrace{|\vec{e}_N|}_{=1} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \dot{\vec{e}}_T = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_N$

?

Idee: lokale Approximation durch Kreisbahnen