# Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 6

**Aufgabe 1** (2+2+2+2+2 Punkte)**.** Welche der folgenden Reihen konvergieren? Begründen Sie Ihre Entscheidungen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n+1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{(-1)^n}^{\text{alternierend}} \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\text{Nullfolge}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$

Quotientenkri. keine Nullfolge keine Nullfolge

**Aufgabe 2** (1+2+2+2 Punkte)**.** Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die $k$-te Partialsumme gleich $1 - \frac{1}{k+1}$ ist.

(c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(d) Rechnen Sie nach, dass die obige Reihe auch in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ gechrieben werden kann. Warum erleichtert diese Beobachtung den Beweis von (b)?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie, für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a^n)$ konvergiert.

$|\overset{n=1}{1} + \overset{n=3}{\tfrac{1}{3}} + \overset{n=5}{\tfrac{1}{5}} + \overset{n=7}{\tfrac{1}{7}}| > |-\overset{n=2}{\tfrac{1}{2}} - \overset{n=4}{\tfrac{1}{4}} - \overset{n=6}{\tfrac{1}{6}} - \overset{n=8}{\tfrac{1}{8}}|$ $\pi(n) = 2n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_{\pi(n)} \to -\infty$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$ $\pi = (2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n)$

**Aufgabe 4** (3 Punkte)**.** Betrachten Sie die alternierende harmonische Reihe, also $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, wobei $h_n := (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Geben Sie entsprechend des Umordnungssatzes eine Umordnungsfunktion $\pi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ an, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_{\pi(n)}$ divergiert.

Hinweis: Sie müssen keine explizite Funktionsvorschrift für die Umordnungsfunktion $\pi$ angeben.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils, an welchen Punkten von $\mathbb{R}$ sie stetig sind und an welchen nicht. (Begründen Sie!)

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 5$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|$

(d) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$

4.1

**Aufgabe 6** (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Hintereinausführung von zwei stetigen Funktionen stetig ist: Für $M \subseteq \mathbb{C}$ und $N \subseteq \mathbb{C}$ seien $f : M \to \mathbb{C}$ und $g : N \to \mathbb{C}$ zwei stetige Funktionen, wobei $f[M] \subseteq N$. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : M \to \mathbb{C}$, definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, stetig.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

**Abgabe am Donnerstag, den 17. November, bis 12:00 Uhr**

**bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.**