

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ
2/2	3/7	4/5	2/2	3/4	5/5	2/2	3/3	29/25

(1)

a) Nicht leer: $f_s(v) = x^2 + x \in V \wedge f_s(-x) = 0 \Rightarrow f_s \in V \Rightarrow V \neq \emptyset \quad \checkmark$
Additiv:

$$f_1, f_2 \in V$$

$$f_1(-x) = 0 \wedge f_2(-x) = 0$$

$$f_1(-x) + f_2(-x) = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 = 0 \in V \quad \checkmark$$

Skalierung:

$$\lambda_1 \in \mathbb{C} \wedge f \in V \wedge f(-x) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot f(-x) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0 \in V \quad \checkmark$$

+2P

b)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \quad | \quad f(-x) = 0$$

$$-a + b - c + d = 0$$

$$a = b - c + d$$

$$\mathcal{L} = \{a, b, c, d \in \mathbb{C} \mid a = b - c + d\} \quad f \quad \text{keine Basis}$$

$$\dim(\mathcal{L}) = 4 \quad f$$

+0P

c)

$$g(-x) = 6(-x)^3 + 4(-x)^2 - 3(-x) - 1 = -6 + 4 + 3 - 1 = -7 + 7 = 0 \quad \checkmark \quad +1P$$

$$\Rightarrow a = 6; b = 4; c = -3; d = -1$$

$$\text{Basis: } a = b - c + d \Rightarrow 6 = 4 + 3 - 1$$

$$\begin{aligned} 6 &= 7 - 1 \\ 6 &= 6 \quad f \end{aligned}$$

+0P

3/2

(8)

Falls f nur einen Fixpunkt, nämlich auf dem Ursprung, hat:

Nicht leer: Lin. Abh. $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) \neq \emptyset \quad \checkmark$

Addition: $f(0) + f(0) = 0$

$$\stackrel{\text{Lin.}}{\Rightarrow} f(0+0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Skalierung: $\lambda \in V$

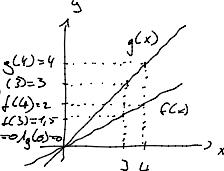
$$\lambda \cdot f(0) = 0$$

$$\stackrel{\text{Lin.}}{\Rightarrow} f(\lambda \cdot 0) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

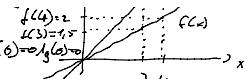
Skizze in \mathbb{R}^2 :

Gilt für V , wenn
Funktion linear ist

Falls f mehr Fixpunkte, als der auf dem Ursprung hat, muss durch die Linearität

jeder $f(x) = x$ sein, womit alle x in $\text{Fix}(f)$ sind und $\text{Fix}(f) = V$ ist. Damit sind alle Bedingungen durch die Erbung von V gegeben. Damit ist auch durch die Lin. der Funktion jeder Punkt durch Skalierung

Raus + mehr 1x Punkte, da von den vom Vorgehen war, muss durch die Linearität jedes $f(x) = x$ sein, womit alle x in $\text{Fix}(f)$ sind und $\text{Fix}(f) = V$ ist. Damit sind alle Bedingungen durch die Erbung von V gegeben. Damit ist auch durch die Lin. der Funktion jeder Punkt durch Skalierung und Addition auf $f(x)$ und somit in $\text{Fix}(f)$. ok



3/3

(5)

$$a) \quad f_1(x, y) = (0, 0)$$

$$x+2y=0$$

$$\exists x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x+2y=0 \quad |x=0$$

$$2y=0$$

$$\Rightarrow y=0$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(f_1) = \{(0, 0)\} \Rightarrow \text{dim}(f_1) = 0 \Rightarrow \text{Basis: } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Basis} = \{\}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y \in \mathbb{R} \\ 3x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{Bild}(f_1) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Rang}(f_1) = 2 \quad \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Basis: } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad +1,5P$$

b)

$$f \text{ ist lin.} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f_2(f) := f(0) \wedge f(0) = 0 \Rightarrow f_2(f) := 0 \Rightarrow \forall x \in f_2: x \mapsto 0 \Rightarrow \text{Kern}(f_2) = \{x \in f_2 \mid x = 0\} \wedge \text{Bild}(f_2) = \{0\}$$

Da alle Elemente von f_2 Basis: $v_1 = 0$ f. siehe oben
den Kern bilden und

die Elemente von f reell

sind, ist $\text{Kern}(f) = \mathbb{R}$,

womit $\dim(\text{Kern}(f_2)) = \dim(\mathbb{R}) \wedge \dim(\mathbb{R}) = 1$

$\Rightarrow \dim(\text{Kern}(f_2)) = 1$

$\Rightarrow \text{Basis: } v = \lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R} \text{ z.B.: } v = 1 \quad \checkmark$

+1,5P

3/4

(4)

$$f(2, 0) = (0, 2)$$

$$f(1, 1) = (0, 4)$$

$$f(1, 2) = (4, 6)$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x + \lambda_2 y \\ \lambda_3 x + \lambda_4 y \end{pmatrix}$$

$$f(2, 0) = (0, 2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix} \Rightarrow f(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_2 y \\ x + \lambda_4 y \end{pmatrix}$$

$$f(1, 1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 \\ 1 + \lambda_4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 3 \end{matrix} \Rightarrow f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

$$f(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 \\ 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es gibt keine lin. Abb. für die gegebenen Funktionswerte.

✓

2/2

Aufg 1.

$$p(x) = 2x^3 + x - 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1(x) = 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2(x) = x^2 + x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3(x) = 4x^3 - 7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_4(x) = 3x^2 + 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_5(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 + \lambda_4 q_4 + \lambda_5 q_5 = p$$

$$\rightarrow \lambda_1 + \dots = -7$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{array}$$

$$+ \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{1}{6} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

$$- \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{1}{22} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{1}{22} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

Definition 5.1:
Sei V ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Ein $v \in V$ ist eine Linearkombination (kurz LK) von v_1, \dots, v_n , wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt, sodass
 $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.
Die Körperelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen Koeffizienten dieser Linearkombination.
Die Menge $L(v_1, \dots, v_n) := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \subseteq V$ aller
Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n heißt Lineare Hülle von v_1, \dots, v_n .
Im Fall $n=0$ setzen wir $L(\emptyset) := \{0\}$

$$\lambda(2) \lambda(2) \quad \wedge(2) \lambda(2) \cdot \lambda(2)$$

finde ich eine sehr schöne Art das aufzuschreiben

2/2

Auf 3.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$
- (b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_2(f) := f(\pi)$
- (c) $f_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f_3(z) = z + z$

Definition 6.1

Seien V und W zwei \mathbb{K} -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$. Dann ist die Abbildung f linear oder ein Homomorphismus von V nach W , wenn

- (a) für alle $x, y \in V$ gilt:
 $f(x) + f(y) = f(x + y)$
- (b) für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:
 $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Satz 6.2

Seien V, W, X drei \mathbb{K} -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow X$ zwei lineare Abbildungen. Dann sind die beiden Abbildungen $g \circ f : V \rightarrow X$ und $\text{id}_V : V \rightarrow V$ linear.

$$a) f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$$

$$\text{z.z. } f(x) + f(y) = f(x + y)$$

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

selbe definition, nur für mich besser nachvollziehbar:

$$(1) \quad f(v) + f(v') = f(v + v')$$

$$(2) \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

$$v = (x, y) \quad v' = (x', y')$$

$$(1) \quad f(x, y) + f(x', y') = f(x + x', y + y')$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x, y)}_{\text{einsetzen}} + f(x', y') = f(x + x', y + y')$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y, 3x) + (x' + 2y', 3x') = (x + x' + 2y + 2y', 3x + 3x')$$

$$\Leftrightarrow (x + x' + 2y + 2y', 3x + 3x') = (x + x' + 2y + 2y', 3x + 3x') \quad \checkmark \quad \checkmark$$

$$(2) \quad f(\lambda \cdot (x, y)) = \lambda \cdot f(x, y)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda \cdot (x + 2y, 3x)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x) = (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x) \quad \checkmark$$

Beide Voraussetzungen sind erfüllt, also ist es linear \checkmark

xnp

b)

$$(1) f_2(f) + f_2(g) = f_2(f+g)$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) + g(\pi) = f(f+g)(\pi) \quad | \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) + g(\pi) = f(\pi) + g(\pi) \quad \checkmark$$

$$(2) f(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot f(\lambda \cdot f)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \cdot f)(\pi) = \lambda \cdot f(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(\pi) = \lambda f(\pi) \quad \checkmark$$

Beide Voraussetzungen sind erfüllt, also ist es linear ✓ +2P

$$c) f_3(z) + f_3(z') = f_3(z+z')$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = f_3(z+z')$$

komplex konjugiert

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (\bar{z} + \bar{z}') \cdot (z + z')$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (x - iy + x' - iy') \cdot (z + z')$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (\bar{z} + \bar{z}') \cdot (z + z')$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = \bar{z} \cdot z + \bar{z}' \cdot z' + \bar{z}' \cdot z + \bar{z} \cdot z'$$

$$2 \cdot f_3(z) = f_3(2 \cdot z)$$

$$2 \cdot \bar{z} \cdot z = f_3(2) \cdot \bar{z} \cdot z$$

$$2 \cdot f_3(z) = f_3(z') \quad z' = 2 \cdot z$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \bar{z} \cdot z = \bar{z}' \cdot z'$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \bar{z} \cdot z = \bar{z}' \cdot z$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot \bar{z}) \cdot 2 \cdot z = (2x - 2iy) \cdot 2 \cdot (x + iy)$$

$$(2 \cdot \bar{z}) \cdot \overline{2x + 2iy} = 2x - 2iy$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (x - iy) \cdot (x + iy) = (2x - 2iy) \cdot (2x + 2iy)$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2iy) \cdot (x + iy) = (2x - 2iy) \cdot (2x + 2iy) \quad \not\in \text{linear}$$

$\lambda = 2$ ok, ist aber irgendwie nicht ganz klar was du tutst und warum +1,5P

4,5/5

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$
- (b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_2(f) := f(\pi)$
- (c) $f_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f_3(z) = z \cdot z$

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte). Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass alle solche Abbildungen an der Stelle v den gleichen Wert annehmen – um welchen Wert handelt es sich?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 + hx_4 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c-d \\ e+2f+3g-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+4d \\ 2e+f+4h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a+2b+3c-d & 1 \\ 2a+b+4d & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[1-a]{1-a} \left(\begin{array}{cc|c} 1+ad & 1 \\ 1-2a-4d & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3c+2b & 1-a+d \\ b & 1-2a-4d \end{array} \right) \xrightarrow[1-2a-4d]{3c+2 \cdot (1-2a-4d)} \left(\begin{array}{cc|c} 1-a+d & 1 \\ 1-2a-4d & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3c+2-4a-8d & 1-a+d \\ b & 1-2a-4d \end{array} \right) \xrightarrow[1-2a-4d]{1-2} \left(\begin{array}{cc|c} 1+4a & 1+8d \\ 1-2a-4d & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3c & -1+3a+9d \\ b & 1-2a-4d \end{array} \right) \xrightarrow[1-2a-4d]{1:3} \left(\begin{array}{cc|c} c & -\frac{1}{3}+a+3d \\ b & 1-2a-4d \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & -\frac{1}{3}+a+3d \\ b & 1-2a-4d \end{array} \right) \Leftrightarrow \{a, b, c, d \mid a, d \in \mathbb{R} \mid c = -\frac{1}{3}+a+3d, \quad b = 1-2a-4d\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e+2f+3g-h & 1 \\ 2e+2f+6h & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1-e \\ 1-2e \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+h \\ 0 & 1-4h \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2f+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 \cdot (2-2e-4h)+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-4e-8h+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1-4 \\ 1+4e \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1+4e & 1+8h \\ 0 & 1-4e-8h \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3g & -3+3e+9h \\ f & 2-2e-4h \end{array} \right) \xrightarrow{1:3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} g & -1+1e+3h \\ f & 2-2e-4h \end{array} \right) \quad \mathbb{L} = \{ (e, f, g, h) \mid e, h \in \mathbb{R} \mid g = -1 + e + 3h, f = 2 - 2e - 4h \}$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2-4a-8d-1+3a+9d-d \\ e+4-4e-8h-3+3e+9h-h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a+3a-6a-8d+9d-d \\ 1+e+3e-4e-8h+9h-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kürzt sich weg

\Rightarrow unendlich viele Lösungen ok, sieht man in Lösungsmenge schon

+ 2P

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1-2a-4d+0+4d \\ 2e+2-2e-4h+0+4h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a-2a-4d+4d \\ 2+2e-2e-4h+4h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kürzt sich weg

\Rightarrow unendlich viele Lösungen

$$f(v) = \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1-2a-4d-\frac{1}{3}+a+3d+d \\ e+2-2e-4h-1+e+3h+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

+ 2P
+ 1P

5/5

Auf 7.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Bestimmen Sie die darstellende Matrix $D(f)$ für die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_3) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D(f) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\left(D(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad 2/2$$