

Vorlesung 21

Vorlesungsevaluation :

Um an der Evaluation teilnehmen zu können, ist eine Anmeldung im eCampus-Kurs der Fachschaft notwendig (einfach direkt beitreten)! Dieses Semester habt ihr auch die Möglichkeit der Fachschaft Feedback zu geben (FSR-Evaluation).

Fachschaft



fachschaft

FSR-Evaluation



Oder über [fspha.de/
fsrumfrage](http://fspha.de/fsrumfrage)

Florian Bernlochner



physik111

Physikalisches Kolloquium

Fachgruppe Physik/Astronomie der Universität Bonn

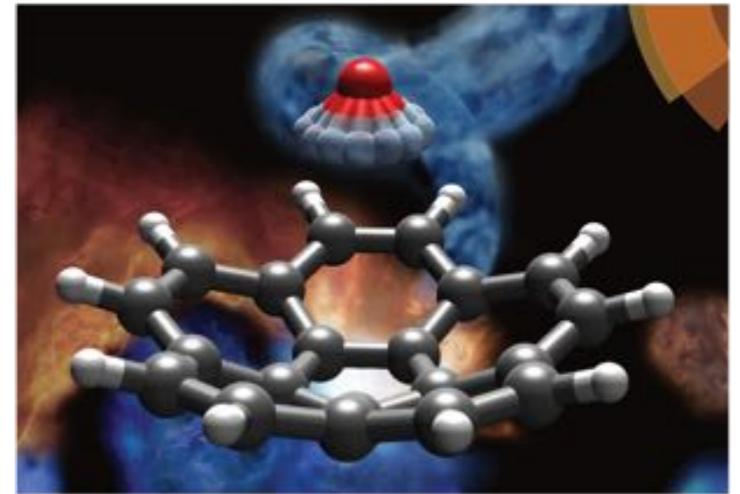
Freitag, 13. Januar 2023, 15 Uhr c.t. im Hörsaal I des Physikalischen Instituts



Melanie Schnell

DESY / Universität Kiel

**„Deciphering the structure, dynamics, and chirality
of astrophysically relevant molecules“**



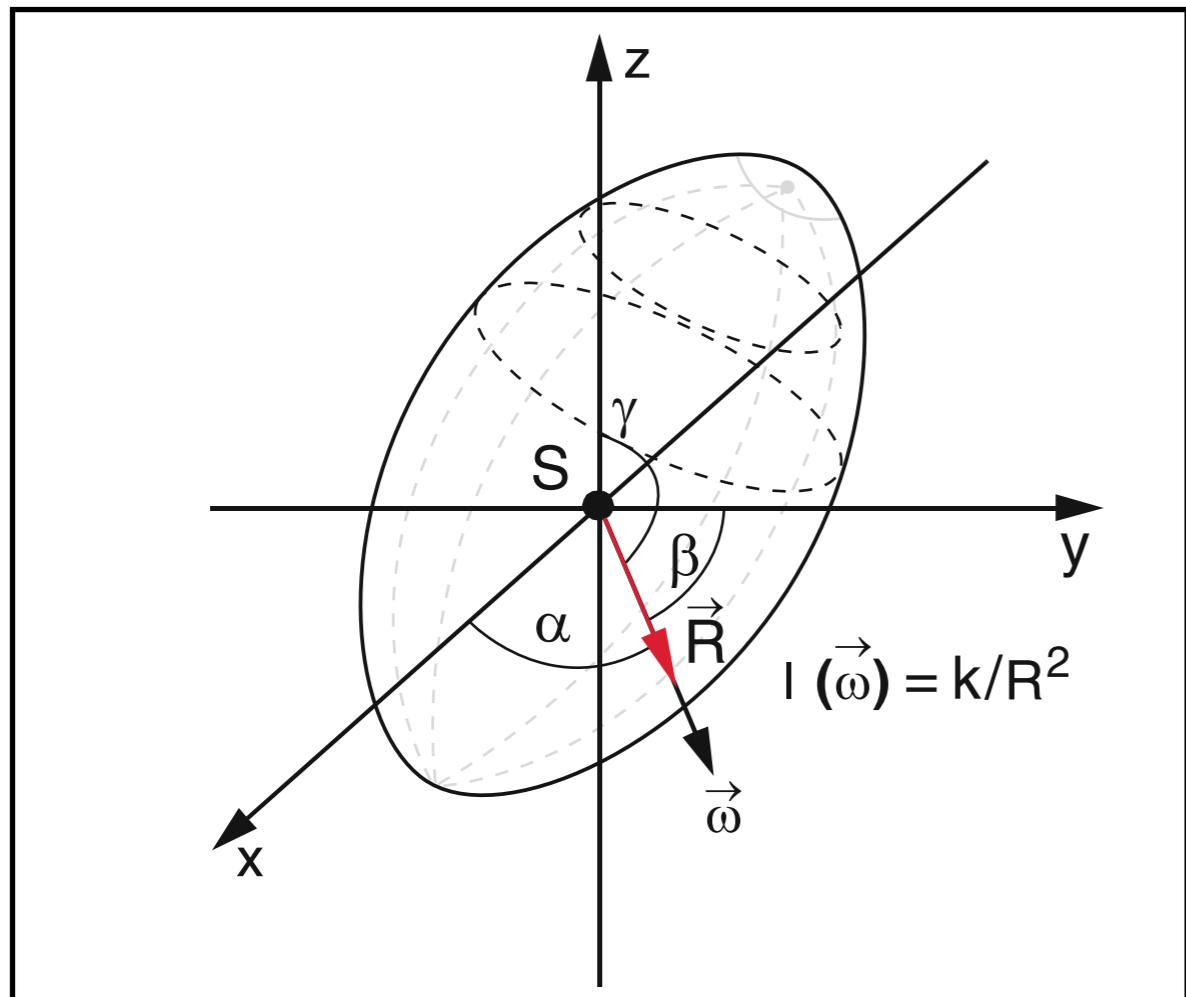
Atoms and molecules are the ambassadors of astrophysics. Detailed spectroscopic information is needed to fully exploit their potential for determining physical properties and chemical processes in space. Polycyclic aromatic hydrocarbons (PAHs) are of great interest for its potential central role in molecular astrophysics. It is assumed that they contain up to 20% of the galactic carbon, that they are present in a wide variety of interstellar environments, and dominate the spectra of almost all objects.

PAHs are also understood to play an important role in the energy balance of a galaxy. To unravel the various aspects of their impact in astrophysics, we perform a multi-spectroscopic approach covering large areas of the electromagnetic spectrum. For example, we use the Hamburg Free-Electron Laser (FEL) FLASH and perform ultrafast XUV-UV/IR pump-probe experiments to study PAH photophysics, observing ionization and dissociation as competing pathways. The analysis allows us to determine the lifetimes of electronically excited states of different PAH cations and charged fragments, which can be included into modern models. The structures and intermolecular interactions of PAHs are investigated using high-resolution chirped-pulse rotational spectroscopy in our lab and infrared spectroscopy using the Free-Electron Laser (FEL) FELIX in Nijmegen in the gas phase.

In a related branch of research, we focus on characterizing, controlling, and finally manipulating chirality. Chirality is ubiquitous in nature and involved in many aspects of life, making it an important phenomenon. Using the coherent, non-linear, and resonant microwave three-wave mixing approach, we can differentiate enantiomeric pairs of chiral molecules using tailored microwave pulses. The technique is uniquely mixture-compatible and allows for enantiomer separation.

In my presentation, I will provide an overview of our research activities on PAHs and chiral molecules discuss some of the latest results.

Weitere Überlegungen : Drücken Drehachse $\vec{\omega}$ mit Winkeln α, β, γ aus, die die Achse mit den Koordinatenachsen bildet



Eulerwinkel

$$\omega_x = \omega \cos \alpha$$

$$\omega_y = \omega \cos \beta$$

$$\omega_z = \omega \cos \gamma$$

Schreibt man die Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ mit (skalarem)

Trägheitsmoment I so ergibt ein Vergleich mit $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega}$



$$I = \cos^2 \alpha I_{xx} + \cos^2 \beta I_{yy} + \cos^2 \gamma I_{zz}$$

$$+ 2 \cos \alpha \cos \beta I_{xy} + 2 \cos \alpha \cos \gamma I_{xz} + 2 \cos \beta \cos \gamma I_{yz}$$

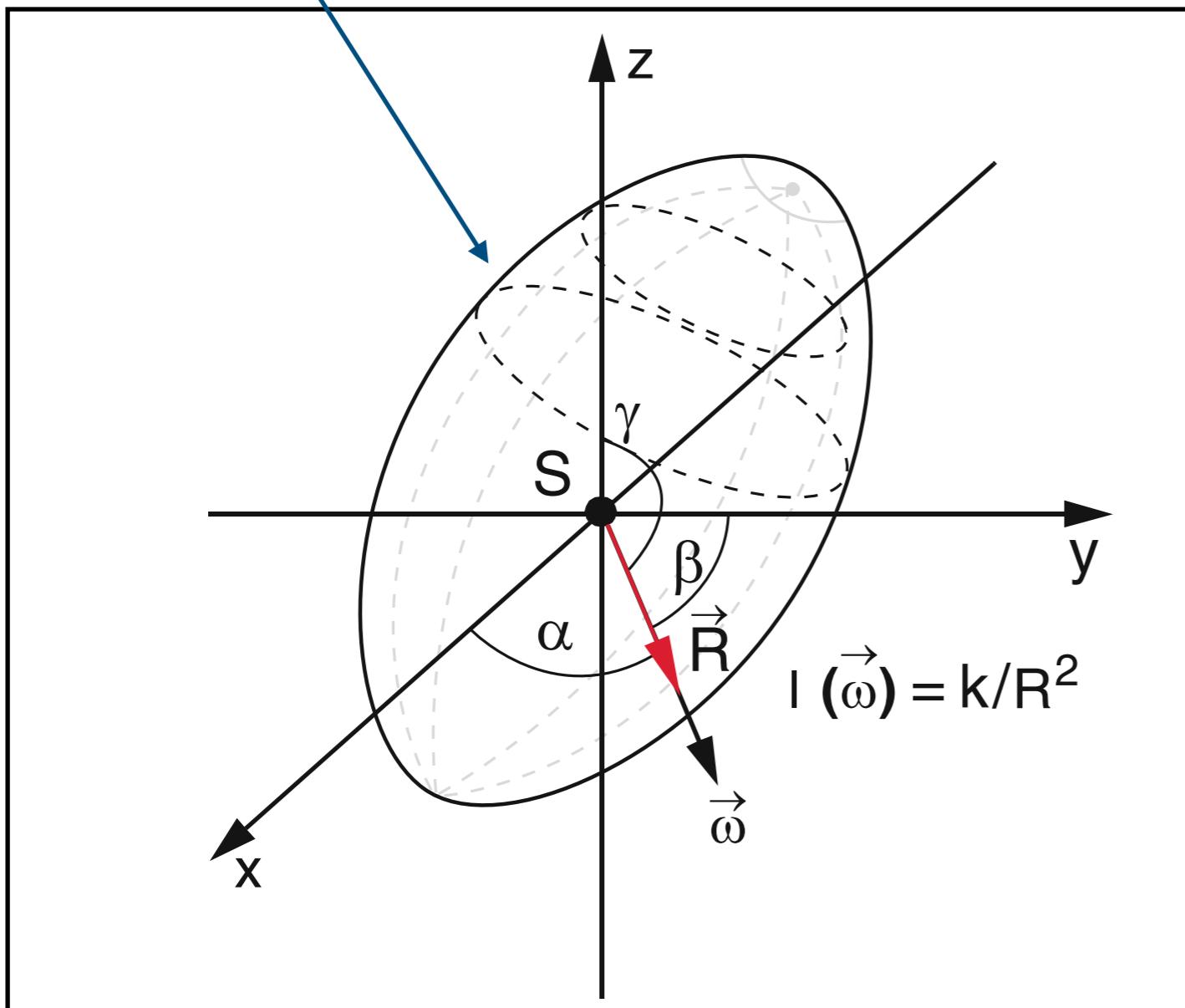
Führen wir nun einen Vektor \overrightarrow{R} parallel zu $\overrightarrow{\omega}$ ein mit den drei Komponenten $x = R \cos \alpha$ $y = R \cos \beta$ $z = R \cos \gamma$

dann erhalten wir

$$R^2 I = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}$$

Quadratische Gleichung, welche mit $R^2 I = k = \text{const}$
= **Ellipsoiden** darstellt

Trägheitsellipsoid



Wenn man $k = M R_m^4$ wählt
(R_m = “mittlerer Radius”)
dann kann man
Trägheitsmoment bei
Rotation um eine **Achse** $\vec{\omega}$
leicht erhalten als :

$$I_\omega = k/R^2$$

R : Abstand Ursprung → **Durchstoßpunkt**

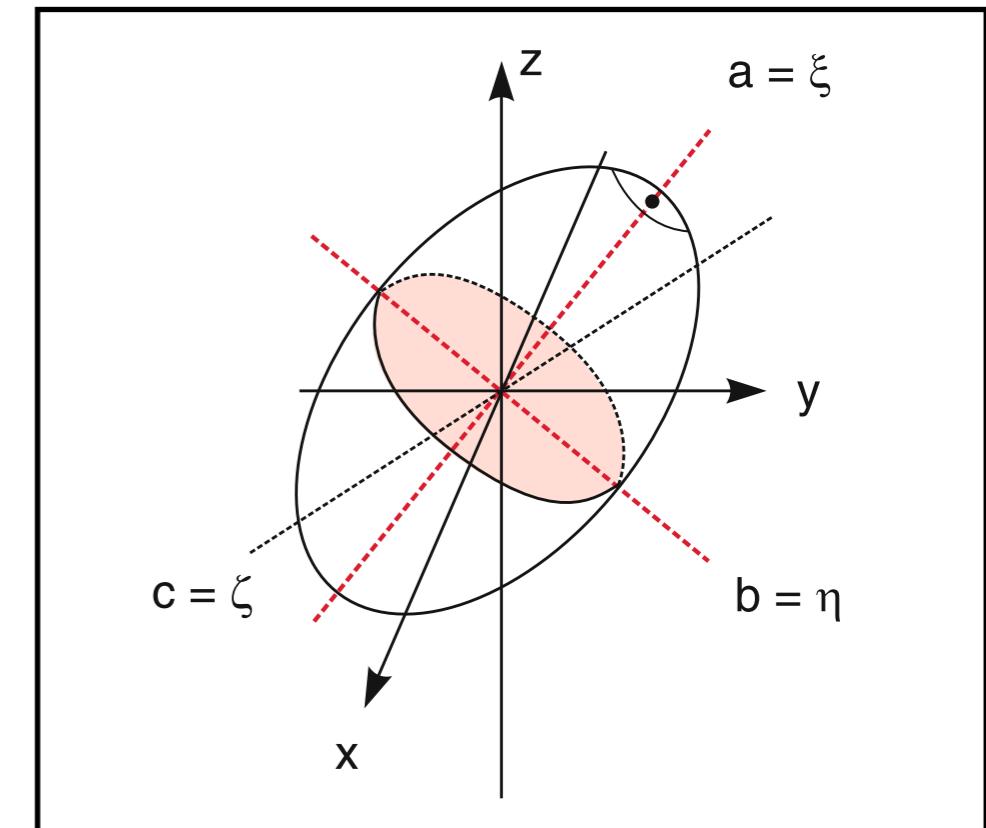
Trägheitsellipsoiden

→ I klein entlang der langgestreckten Achse (!)

6.8.2 Hauptträgheitsachsen

Für jeden **Ellipsoid** lassen sich gedrehte Koordinatenachsen a, b, c finden, die den Symmetriearchsen (= Hauptachsen) des E's entsprechen

In diesen Koordinaten ist die Ellipsoidgleichung



$$R^2 I = a^2 I_a + b^2 I_b + c^2 I_c = k$$

In diesen Koordinaten ist der Trägheitstensor **diagonal**:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

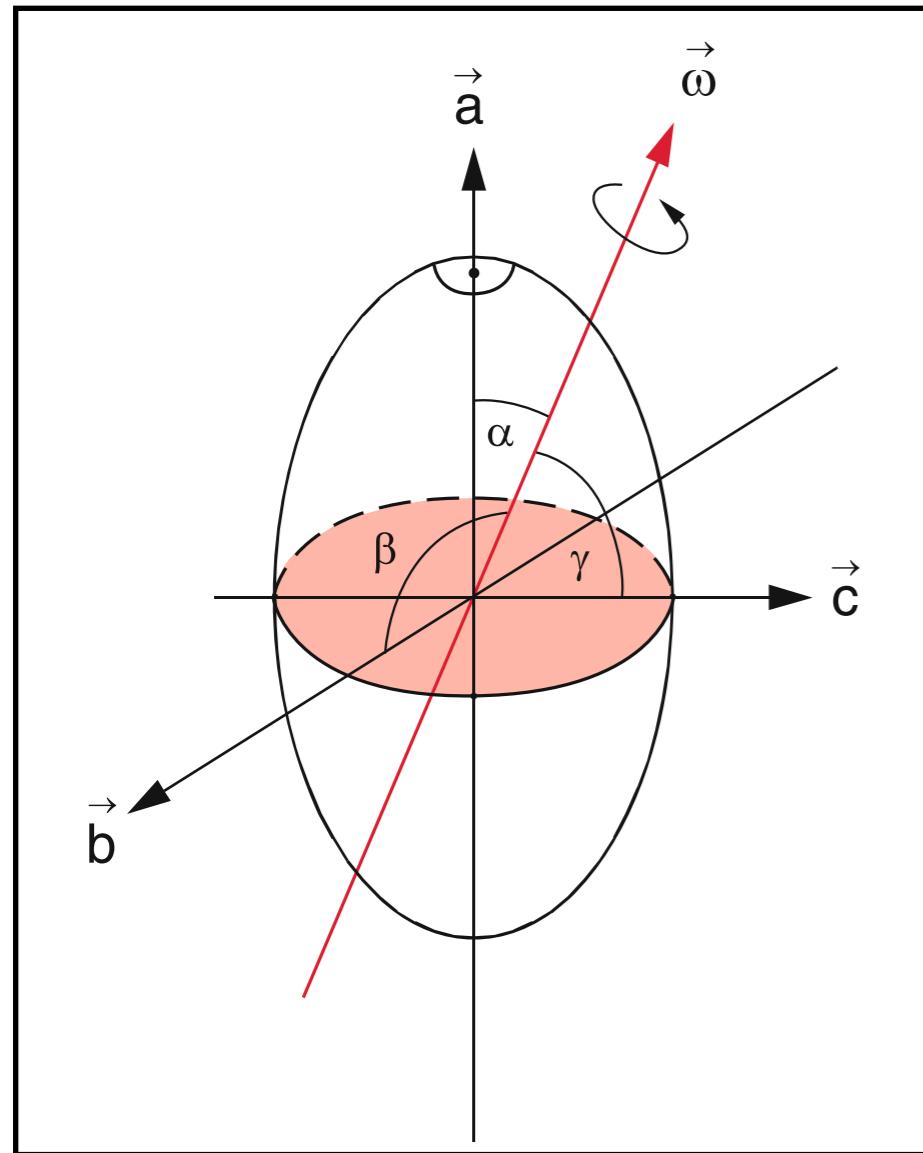
Achtung: $I_a \neq I_{xx}$ etc.

(sondern eine Rotation stellt den Bezug her)

Konvention : $I_a < I_b < I_c$ ← **Hauptträgheitsmomente**

Trägheitsmoment bei Rotation um beliebige Achse $\vec{\omega}$ im

Hauptträgheitsachsensystem (HTA-System) mit Winkeln α, β, γ)



$$I = I_a \cos^2 \alpha + I_b \cos^2 \beta + I_c \cos^2 \gamma$$

Durch die Rotation ins **HTA-System**
ist der Ausdruck viel einfacher geworden!

$$\vec{L} = \{L_a, L_b, L_c\} = \{\omega_a I_a, \omega_b I_b, \omega_c I_c\}$$

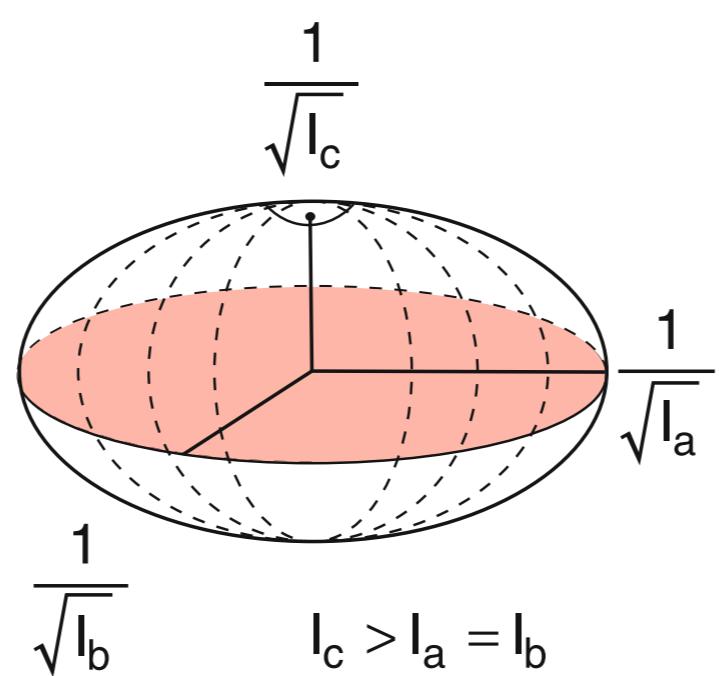
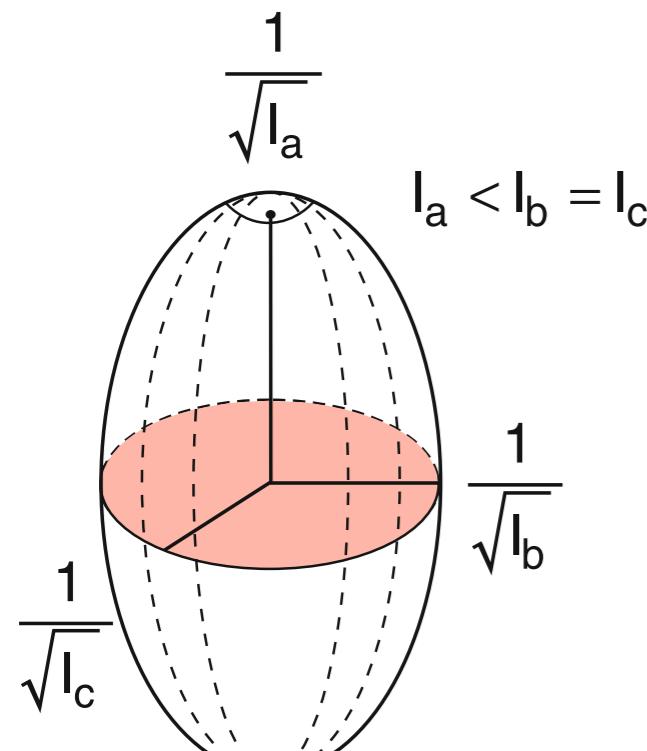
$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c) \\ &= \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c} \end{aligned}$$

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden $I_a \neq I_b \neq I_c$

dann heißt der Körper ein **asymmetrischer Kreisel**

Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, so heißt der Körper ein
symmetrischer Kreisel

z.B. rotationssymmetrische Körper (Kreiszylinder, lineare Moleküle),
aber auch quadratische Quader



Unterscheiden zwischen
Prolaten ($I_a < I_b = I_c$) &
Oblaten ($I_a = I_b < I_c$)

Sphärischer Kreisel

$I_a = I_b = I_c$

(Beispiel : Kugel, Würfel)

Aber Achtung :

Man sieht, dass $\vec{\omega}$ und \vec{L} im allgemeinen nicht in die gleiche Richtung zeigen, ausser

- $I_a = I_b = I_c$ (sphärischer Kreisel)
- $\vec{\omega}$ zeigt in Richtung einer HTA
- Symmetrischer Kreisel und Rotation um bel. Achse senkrecht zur Symmetriearchse (zwei HTA sind “entartet”)

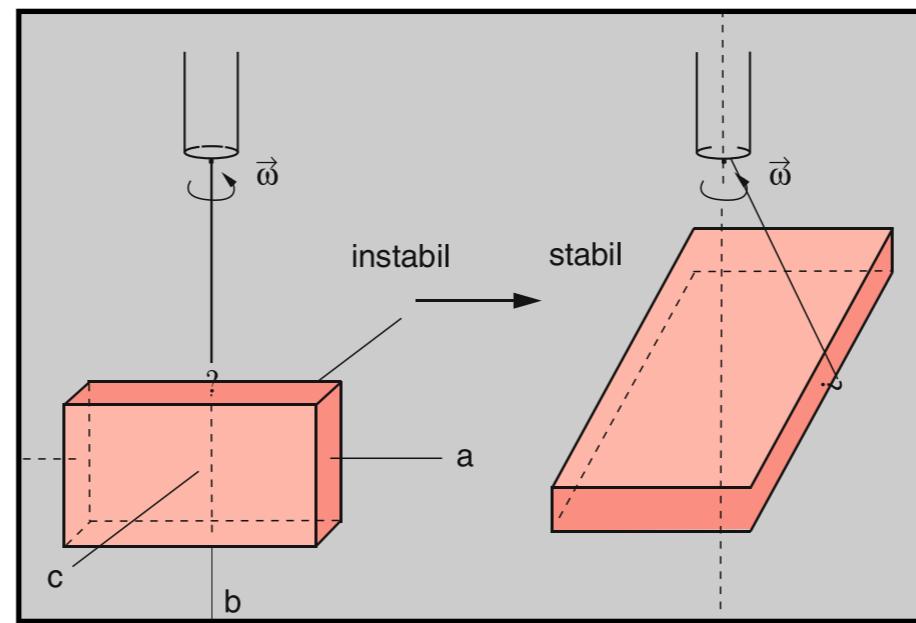
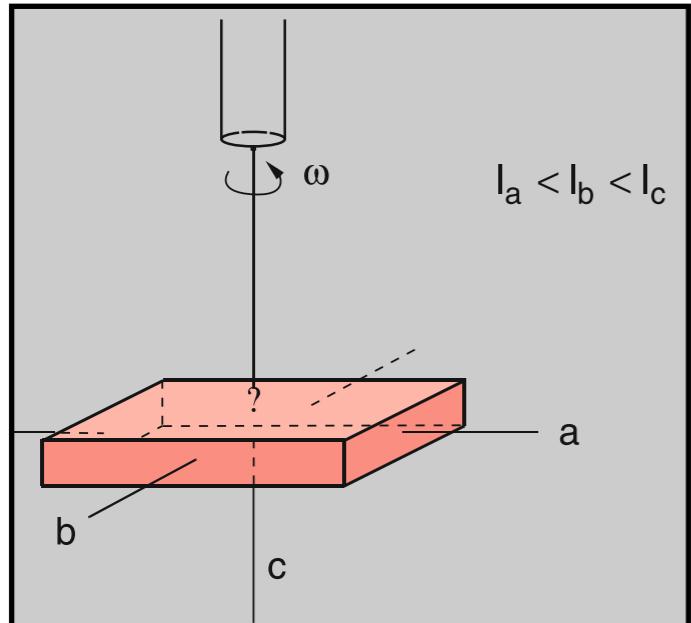
Kein äüßeres \vec{D} : dann $\vec{L} = \text{const.}$

Wenn $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ ist dann ist $\vec{\omega}$ raumfest (wie bei Rotation um starre Achse)

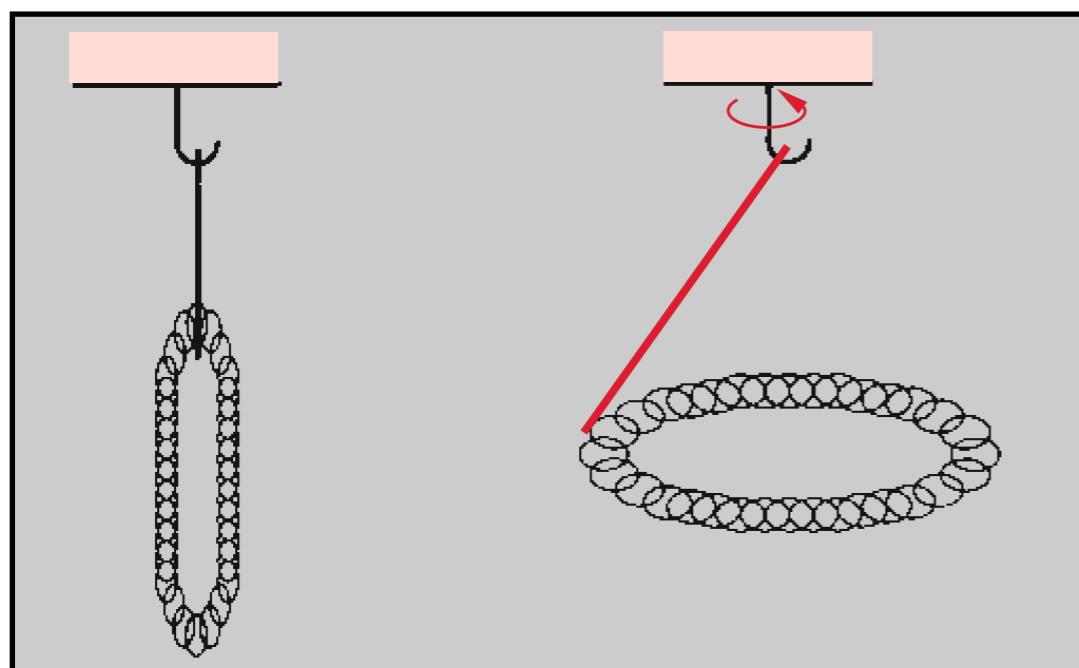
→ Aber Rotation um mittlere HTA ist **instabil**

Versuche

Quader; größtes I stabil, mittleres und kleinstes I instabil



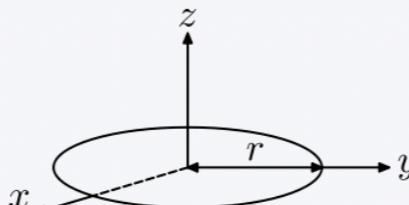
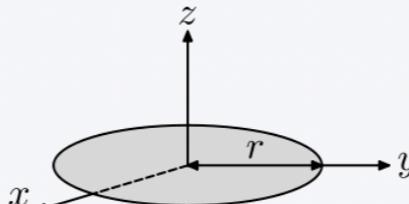
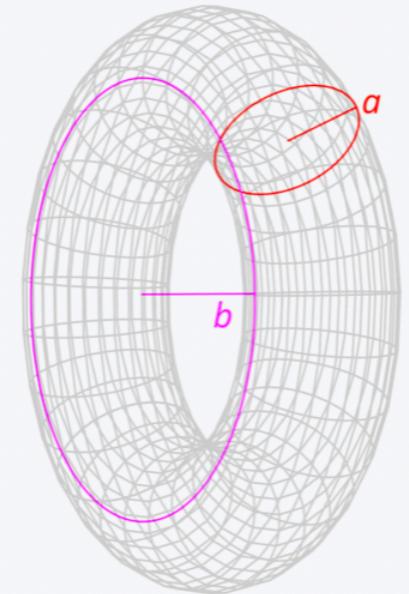
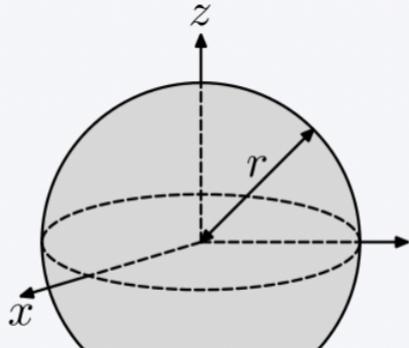
Kette rotieren lassen, richtet sich entlang größtem I aus



$$(\text{minimales } E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} \text{ bei festem } L)$$

Liste von Trägheitstensoren

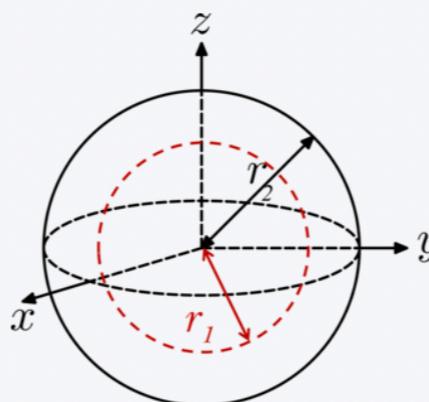
Beschreibung	Bild	Trägheitstensor
Schlanker Stab in x-Richtung mit Länge l und Masse m bezüglich eines Endes. [Anm. 1]		$\mathbf{I}_0 = \frac{m}{3} l^2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $m=\rho Al$ mit Querschnitt $A \ll l^2$
Schlanker Stab in x-Richtung mit Länge l und Masse m bezüglich seiner Mitte. [1][Anm. 1] Dieser Trägheitstensor entsteht beim massiven Quader unten mit $b = h = 0$.		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} l^2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $m=\rho Al$ mit Querschnitt $A \ll l^2$
Dünne rechteckige Platte in der xy-Ebene mit Länge w in x-Richtung, Breite h in y-Richtung und Masse m . [Anm. 1] Dieser Trägheitstensor entsteht beim massiven Quader unten mit $h = 0$.		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 & & \\ & w^2 & \\ & & w^2 + h^2 \end{pmatrix}$ $m=\rho whd$ mit Dicke $d \ll w,h$
Dünne parallelogramm förmige Platte mit Seite l , Höhe h , „Überhang“ p und Masse m . Mit $p = 0$ entsteht die Rechteckplatte. Nur dort sind die Hauptträgheitsachsen parallel zu den gewählten Koordinatenachsen.		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 & -hp & \\ -hp & l^2 + p^2 & \\ & & h^2 + l^2 + p^2 \end{pmatrix}$ $m=\rho lhd$ mit Dicke $d \ll l,h$
Massiver Quader mit Länge l in x-Richtung, Breite b in y-Richtung, Höhe h in z-Richtung und Masse m . [1][Anm. 1] Die Trägheitstensoren dünner Platten oder schlanker Stäbe entstehen durch Nullsetzen einer bzw. zweier Dimensionen b, h oder t .		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + h^2 & & \\ & l^2 + h^2 & \\ & & l^2 + b^2 \end{pmatrix}$ $m=\rho lbh$

Beschreibung	Bild	Trägheitstensor
Dünner Kreisring mit Radius r und Masse m . Dies ist der Spezialfall des Volltorus mit $a = 0$ und des zylindrischen Rohres mit offenen Enden mit $r_1 = r_2$ sowie $h = 0$.		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{2}r^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $m = \rho 2\pi r A$ mit Querschnitt $A \ll r^2$
Dünne Scheibe mit Radius r und Masse m . Dies ist der Spezialfall eines massiven Zylinders mit $h = 0$.		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{4}r^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $m = \rho \pi r^2 d$ mit Dicke $d \ll r$
Volltorus mit großem Kreis in der xy-Ebene und Radius b , Radius des kleinen Kreises a und Masse m . ^[1]		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{8} \begin{pmatrix} 5a^2 + 4b^2 & & \\ & 5a^2 + 4b^2 & \\ & & 6a^2 + 8b^2 \end{pmatrix}$ [2] $m = \rho 2\pi a^2 b$
Kugel mit Radius r und Masse m . ^[1]		$\mathbf{I}_{s, \text{ dünnwandig}} = \frac{2m}{3}r^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{dünnwandig}} = \rho 4\pi r^2 d$ $\mathbf{I}_{s, \text{ massiv}} = \frac{2m}{5}r^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{massiv}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ Dicke $d \ll r$
Halbkugel (Kugel von der xy-Ebene halbiert) mit Radius r , Masse m und Schwerpunktsabstand $z=3r/8$ von der Schnittebene. ^{[1]:12, 31}		$\mathbf{I}_s = \frac{mr^2}{320} \begin{pmatrix} 83 & & \\ & 83 & \\ & & 128 \end{pmatrix}$ $m = \rho \frac{2}{3}\pi r^3$

Hohlkugel mit Außenradius r_2 und zentrischem kugelförmigen Hohlraum mit Radius r_1 sowie Masse m .^[1]

Mit dem Innenradius $r_1 = 0$ entsteht der Spezialfall der massiven Kugel.

Aus $r_1 = r_2$ entsteht wegen $\lim_{r_1 \rightarrow r_2} \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3} = \frac{5}{3} r_2^2$ der Spezialfall der dünnwandigen Kugel.

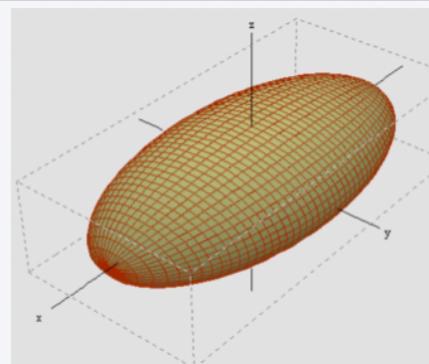


$$\mathbf{I}_s = \frac{2m}{5} \left(\frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3} \right) \mathbf{1} \quad [3]$$

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3)$$

Massives **Ellipsoid** mit Halbachsen a, b, c in x-, y- bzw. z-Richtung und Masse m .

Mit $a = b = c$ entsteht eine massive Kugel mit Radius a .

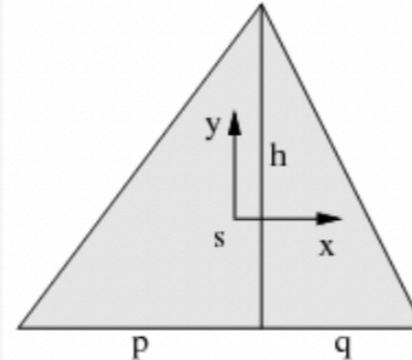


$$\mathbf{I}_s = \frac{m}{5} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & & \\ & a^2 + c^2 & \\ & & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi abc$$

Beschreibung	Bild	Trägheitstensor
Punktmasse m bei $x=r$. ^[Anm. 1]		$\mathbf{I}_0 = mr^2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
Zwei Punktmassen M und m im Abstand a auf der x-Achse und Massenmittelpunkt bei $x = 0$.		$\mathbf{I}_s = \frac{Mm}{M+m} a^2 \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

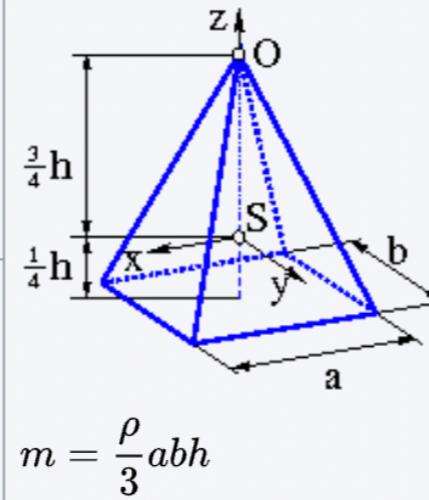
Dünne Dreiecksscheibe mit Höhe h , Grundseite $l = p + q$ sowie Masse m . Nur bei Symmetrie mit $p = q$ sind die Hauptträgheitsachsen parallel zu den gewählten Koordinatenachsen.



$$\mathbf{I}_s = \frac{m}{36} \begin{pmatrix} 2h^2 & (q-p)h \\ (q-p)h & 2(l^2 - pq) \\ & 2(h^2 + l^2 - pq) \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{1}{2}\rho h(p+q)d \text{ mit Dicke } d \ll h, p+q$$

Rechteck-Pyramide mit Höhe h , Breite a in x-Richtung, Breite b in y-Richtung sowie Masse m bezüglich des Schwerpunkts S.^[1]



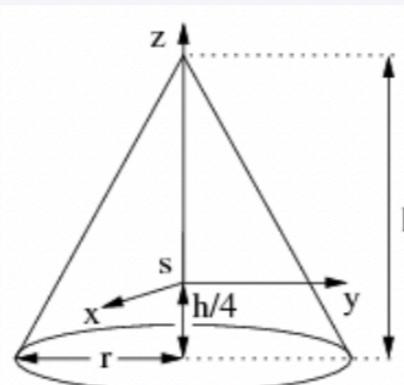
$$\mathbf{I}_s = \frac{m}{80} \begin{pmatrix} 4b^2 + 3h^2 & & \\ & 4a^2 + 3h^2 & \\ & & 4a^2 + 4b^2 \end{pmatrix}$$

Rechteck-Pyramide mit Höhe h , Breite a in x-Richtung, Breite b in y-Richtung sowie Masse m bezüglich der Spitze O.

$$m = \frac{\rho}{3} abh$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{m}{20} \begin{pmatrix} b^2 + 12h^2 & & \\ & a^2 + 12h^2 & \\ & & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

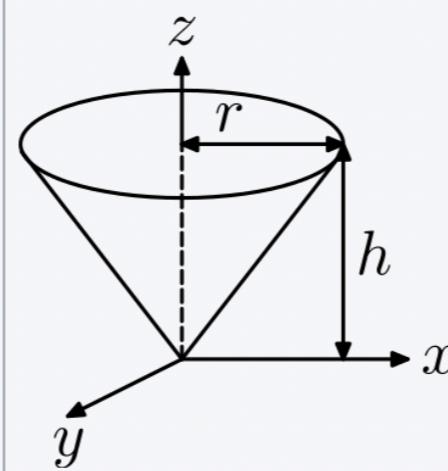
Gerader massiver Kreiskegel mit Radius r , Höhe h und Masse m bezüglich seines Schwerpunkts.^[1]



$$\mathbf{I}_s = \frac{3m}{80} \begin{pmatrix} 4r^2 + h^2 & & \\ & 4r^2 + h^2 & \\ & & 8r^2 \end{pmatrix}$$

$$m_{\text{massiv}} = \rho \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Gerader Kreiskegel mit Radius r , Höhe h und Masse m bezüglich seiner Spitze.^[4]

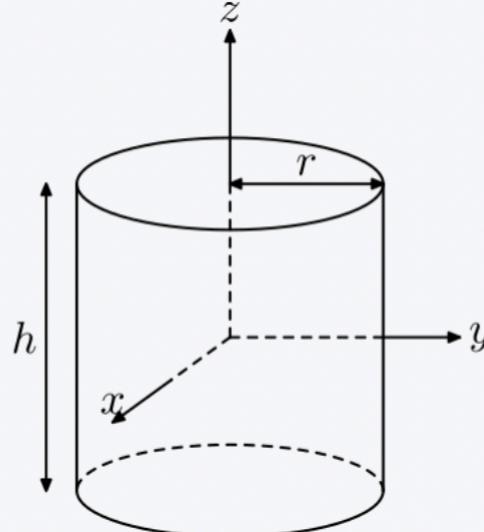
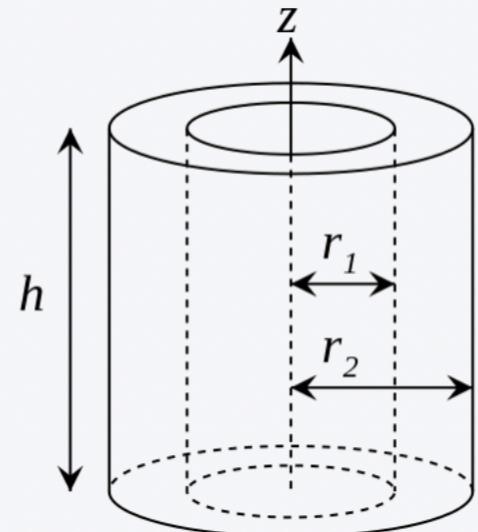
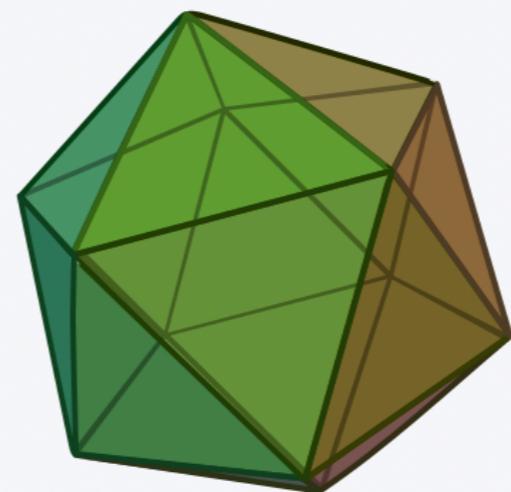


$$\mathbf{I}_{0, \text{ massiv}} = \frac{3m}{20} \begin{pmatrix} r^2 + 4h^2 & & \\ & r^2 + 4h^2 & \\ & & 2r^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{0, \text{ dünnwandig}} = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} r^2 + 2h^2 & & \\ & r^2 + 2h^2 & \\ & & 2r^2 \end{pmatrix}$$

$$m_{\text{dünnwandig}} = \rho \pi r \sqrt{r^2 + h^2} d$$

Dicke $d \ll r, h$

Beschreibung	Bild	Trägheitstensor
Massiver Zylinder mit Radius r , Höhe h und Masse m ^[1]		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3r^2 + h^2 & & \\ & 3r^2 + h^2 & \\ & & 6r^2 \end{pmatrix}$ $m = \rho\pi r^2 h$
Dickwandiges zylindrisches Rohr mit offenen Enden, innerem Radius r_1 , äußerem Radius r_2 , Länge h und Masse m ^[1]		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3d^2 + h^2 & & \\ & 3d^2 + h^2 & \\ & & 6d^2 \end{pmatrix}$ $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ $m = \rho\pi(r_2^2 - r_1^2)h$
Regelmäßiges Ikosaeder mit Kantenlänge s und Masse m .		$\mathbf{I}_{s, \text{ dünnwandig}} = \frac{m}{6} \phi^2 s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{dünnwandig}} = \rho 5\sqrt{3}s^2 d$ $\mathbf{I}_{s, \text{ massiv}} = \frac{m}{10} \phi^2 s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{massiv}} = \rho \frac{5}{6} (1 + \phi) s^3$ <p>wobei $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ [5]</p>

Beschreibung	Bild	Trägheitstensor (Diagonalelement)
Regelmäßiges Tetraeder mit Kantenlänge s und Masse m .		$I_{s, \text{ dünnwandig}} = \frac{m}{12} s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{dünnwandig}} = \rho \sqrt{3} s^2 d$ $I_{s, \text{ massiv}} = \frac{m}{20} s^2 \mathbf{1}$ [5] $m_{\text{massiv}} = \rho \frac{\sqrt{2}}{12} s^3$
Der Würfel ist der Spezialfall des #Quaders mit drei gleichen Seiten s .		$\mathbf{I}_s = \frac{m}{6} s^2 \mathbf{1}$ $m = \rho s^3$
Regelmäßiges Oktaeder mit Kantenlänge s und Masse m .		$\mathbf{I}_{s, \text{ dünnwandig}} = \frac{m}{6} s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{dünnwandig}} = \rho 2\sqrt{3} s^2 d$ $\mathbf{I}_{s, \text{ massiv}} = \frac{m}{10} s^2 \mathbf{1}$ [5] $m_{\text{massiv}} = \rho \frac{\sqrt{2}}{3} s^3$
Regelmäßiges Dodekaeder mit Kantenlänge s und Masse m .		$\mathbf{I}_{s, \text{ dünnwandig}} = \frac{m}{90} (39\phi + 28) s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{dünnwandig}} = \rho 3\sqrt{15 + 20\phi} s^2 d$ $\mathbf{I}_{s, \text{ massiv}} = \frac{m}{150} (39\phi + 28) s^2 \mathbf{1}$ $m_{\text{massiv}} = \frac{\rho}{2} (4 + 7\phi) s^3$ wobei $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ [5]

6.8.3 Eulersche Gleichungen

Quantitative Beschreibung der Rotation um freie Achse bei beliebiger Drehachse $\vec{\omega}$ (in raumfesten Koordinaten (Laborsystem))

Im Laborsystem **S** gilt :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$$

↑
Im Hauptachsensystem **S'** gilt :

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - (\vec{\omega} \times \vec{L}')$$

Rotiert, daher beschl. Bezugssystem : Coriolisbeschl. $\vec{a}' = \vec{a} - (\vec{\omega} \times \vec{v}')$

$$\rightarrow \vec{D} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L}')$$

In Komponenten :

$$D_a = \frac{dL_a}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L}')_a = \frac{d}{dt} (I_a \omega_a) + (\vec{\omega}_b L'_c - \omega_c L'_b)$$

$$= I_a \frac{d\omega_a}{dt} + \vec{\omega}_b I_c \omega_c - \omega_c I_b \omega_b$$

$$L_x = \omega_x I_x$$

Analog für die anderen Komponenten :

$$D_a = I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_c \omega_b$$

$$D_b = I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c$$

$$D_c = I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_b \omega_a$$

→ Dynamik beschrieben
durch **drei gekoppelte
Differentialgleichungen**

Lösungen hängen i.A. von
Anfangsbedingungen ab und
sehr kompliziert

6.8.4 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Ein symmetrischer Kreisel weist **zwei gleiche Hauptträgheitsmomente** auf

z.B. $I_a = I_b \neq I_c$ für Fahrradkreisel mit

c = Radachse / Figurenachse

Wirkt **kein äußeres Drehmoment** so bleibt
der Drehimpuls konstant, d.h. raumfest =
kräftefreier Kreisel



Dreht sich der Kreisel um seine Figurenachse, dann sind $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Dreht sich der Kreisel um eine andere Achse, wird die Bewegung **kompliziert**:

Man unterscheidet dann :

1. Raumfeste Drehimpulsachse \vec{L}
2. Momentane Drehachse $\vec{\omega}$
3. Die Figurenachse des symmetrischen Kreisels

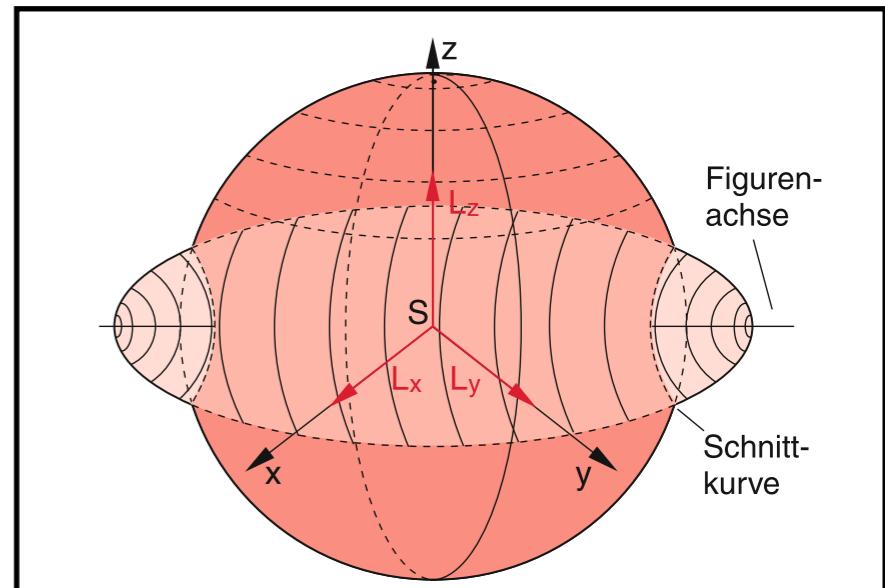
Qualitativ : Sowohl \vec{L} wie E_{rot} sind zeitlich konstant

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \text{const.}$$

→ **Kugel**

$$L_a^2/(2I_a) + L_b^2/(2I_b) + L_c^2/(2I_c) = \text{const.}$$

→ **Ellipsoid**

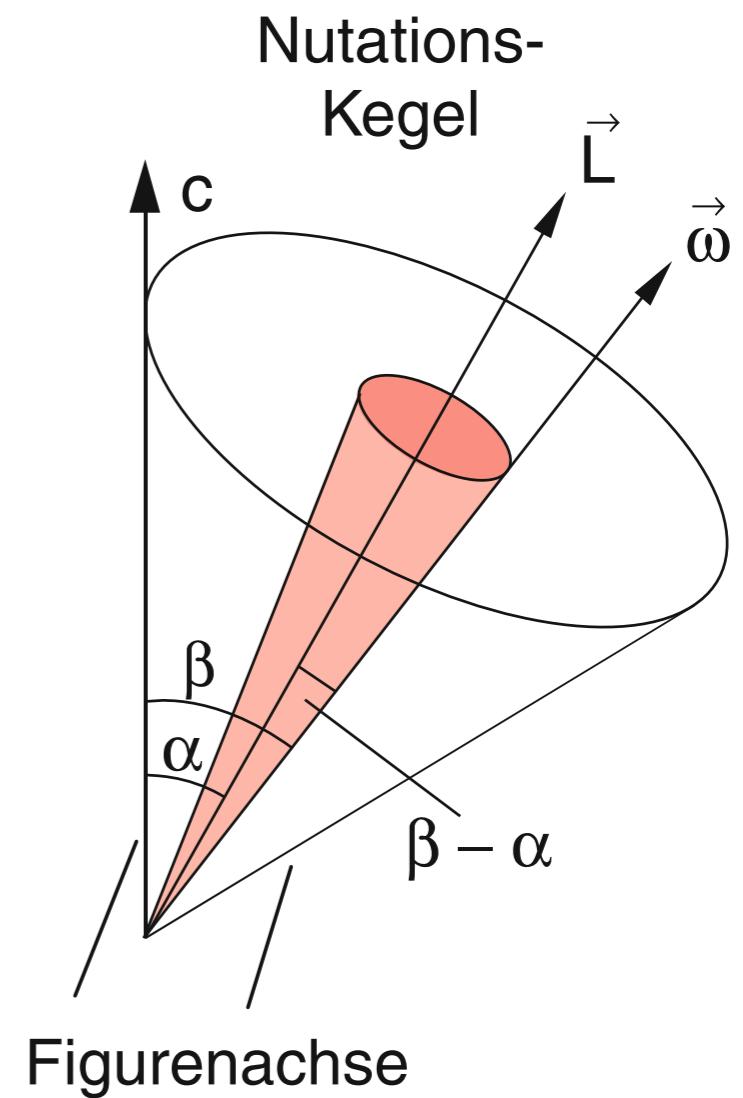


→ Spitze von \vec{L} auf **Schnittkurve** von **Kugel & Ellipsoid**

Ausrichtung des Ellipsoid ist durch das Hauptachsensystem festgelegt (rotiert mit dem Kreisel).

Da der Drehimpuls aber raumfest ist, muss der Kreisel und damit der Trägheitsellipsoid so rotieren, dass \vec{L} immer auf der Schnittkurve bleibt.

Dies führt dazu, dass sowohl die **momentane Drehachse** als auch die **Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse** eine **Nutationsbewegung** ausführen



Erklärung der Nutationsbewegung aus den **Eulerschen Gleichungen** mit
 $\vec{D} = 0$ und $I_a = I_b$:

$$D_a = 0 = I_a \dot{\omega}_a + (I_c - I_b) \omega_c \omega_b$$

$$D_b = 0 = I_b \dot{\omega}_b + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c$$

$$D_c = 0 = I_c \dot{\omega}_c$$

\rightarrow

$$0 = \dot{\omega}_a + \Omega \omega_b$$

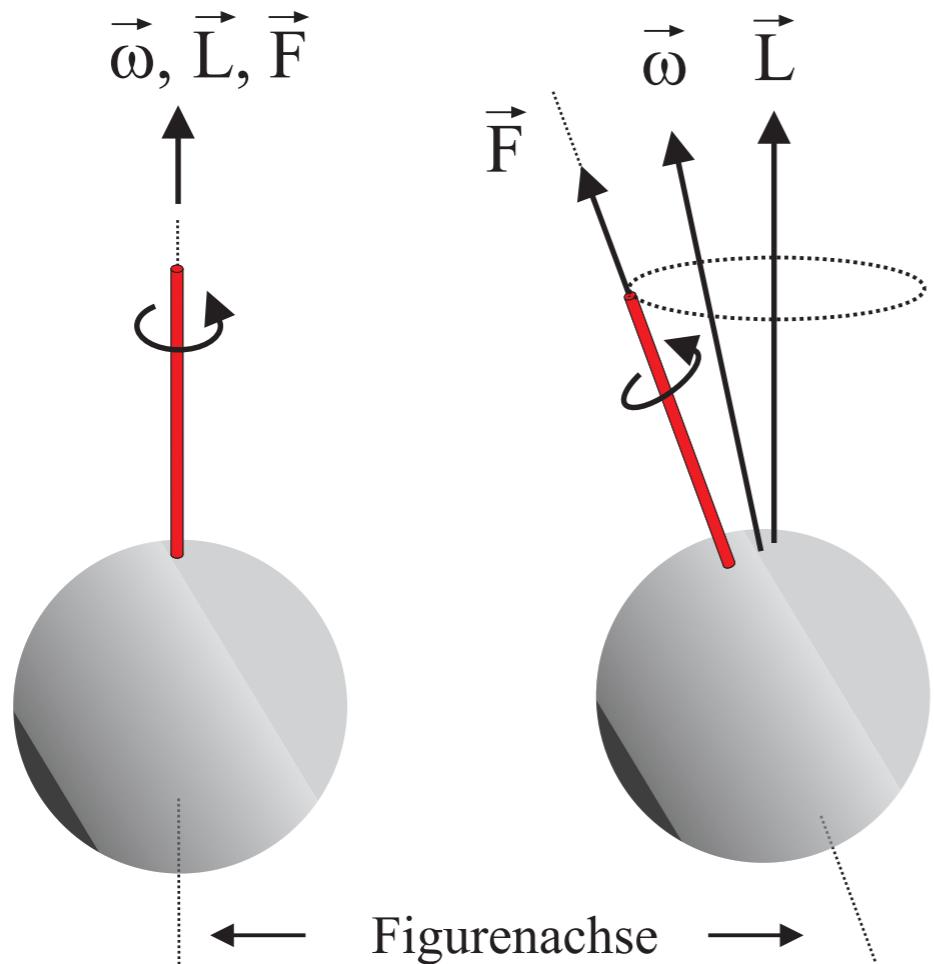
$$0 = \dot{\omega}_b - \Omega \omega_a \quad \Omega = \frac{I_c - I_a}{I_a} \omega_c$$

$$0 = \dot{\omega}_c$$

Lösung: $\omega_a = A \cos \Omega t$ $\omega_b = A \sin \Omega t$ $\omega_c = C$

Versuch : Nutationsbewegung Pressluftkreisel

Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels
mit Figurenachse \vec{F} :



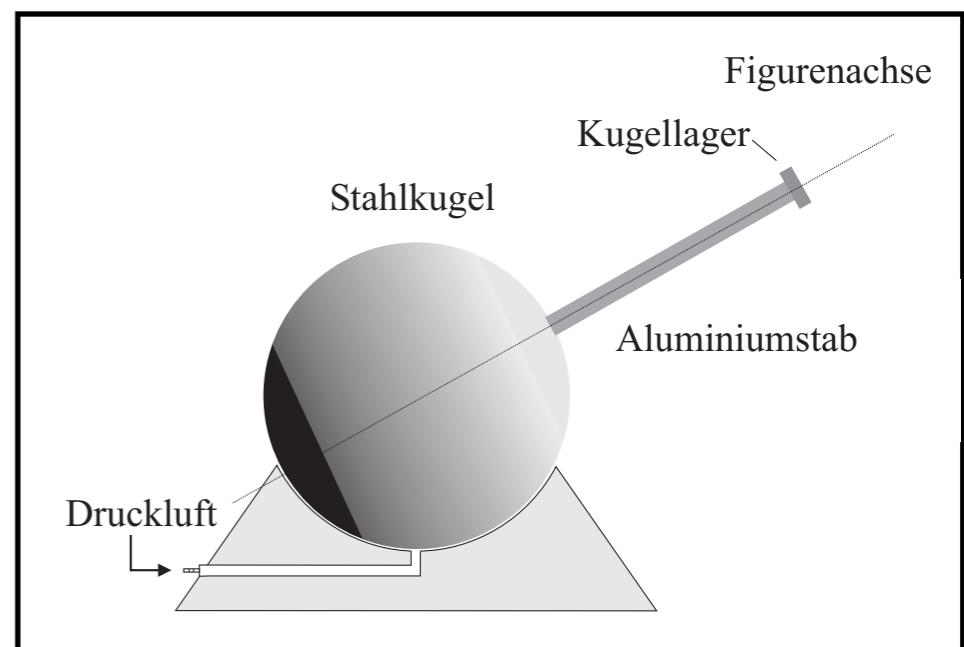
Drehrichtung und Drehimpuls
gleichgerichtet ($\vec{L} \parallel \vec{\omega}$)

Nutationsbewegung :
Alle drei Achsen ($\vec{L}, \vec{\omega}, \vec{F}$)
zeigen in andere Richtungen
und nur \vec{L} ist zeitlich konstant



Experimentelle Realisation :

Druckluft erzeugt ein
Luftkissen, auf dem die
Stahlkugel reibungsfrei rotieren
kann



Bei Nutation liegen Figurenachse,
Drehimpuls und momentane
Winkelgeschwindigkeit **immer in einer**
Ebene

Kreisel weist $I_z < I_x = I_y$ auf,
mit I_z Trägheitsmoment der Figurenachse

Resultierende Bewegung = Abrollen eines
körperfesten Kegels auf raumfesten Kegel

Können momentane Winkelgeschwindigkeit in
Nutationsanteil $\vec{\omega}_N$ und **Rotationsanteil** um
Figurenachse $\vec{\omega}_F$ zerlegen :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F$$

