

• Elastische Streuung

Ableitung des Wirkungsquerschnitts mittels Fermi's goldener Regel

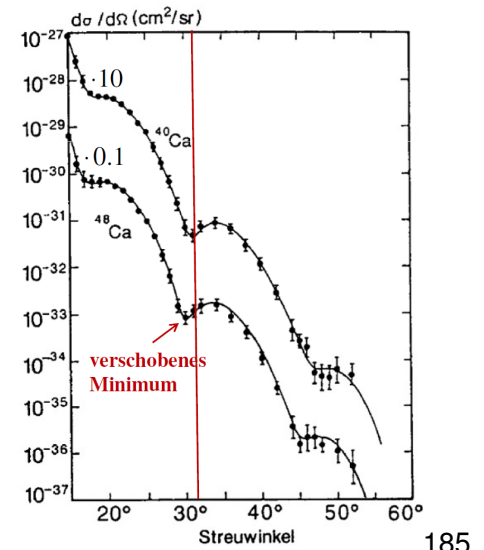
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

(ohne Rückstoß, ohne Spin)

$F(\vec{q})$ = **Formfaktor** = Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}}/\hbar \cdot f(\vec{r}) d^3r$$

| Ladungsverteilung $f(r)$ | | Formfaktor $F(q^2)$ | |
|--------------------------|--|--|--------------|
| Punkt | $\delta(r)/4\pi$ | 1 | konstant |
| exponentiell | $(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$ | $(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$ | Dipol |
| Gauß | $(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$ | $\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$ | Gauß |
| homogene Kugel | $\begin{cases} 3/4\pi R^3 \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$ | $3\alpha^{-3} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$ | oszillierend |



Elastische Streuung

Bisher:

Rutherfordstreuung, ausgedehnte Ladungsverteilung

⇔ kein Spin (und kein Rückstoß)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

Nächste Schritte:

- Berücksichtigung des Elektronenspins
- Berücksichtigen des Target-Spins bzw. magnetischem Moments

Berücksichtigung des Elektronenspins

Elektronen: Spin $1/2$ -Teilchen

→ Mott-Wirkungsquerschnitt:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott}^* = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Rückstoß auf das Target vernachlässigt (*)

Rückstoß auf das Targetberücksichtigt:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott}^* \cdot \frac{E'}{E} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Rutherford} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Änderung der Phasenraumdichte bedingt Faktor E'/E

Unterdrückungsterm

$$\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Veranschaulichung → ...

187

Berücksichtigung des Elektronenspins

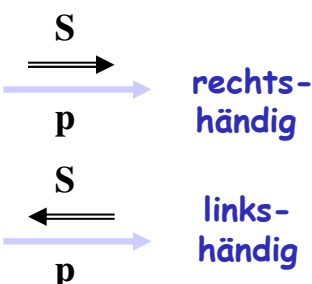
Elektronen: Spin $1/2$ -Teilchen

- Spinprojektion: $s_z = \pm 1/2$

Helizität h:

Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|}$$

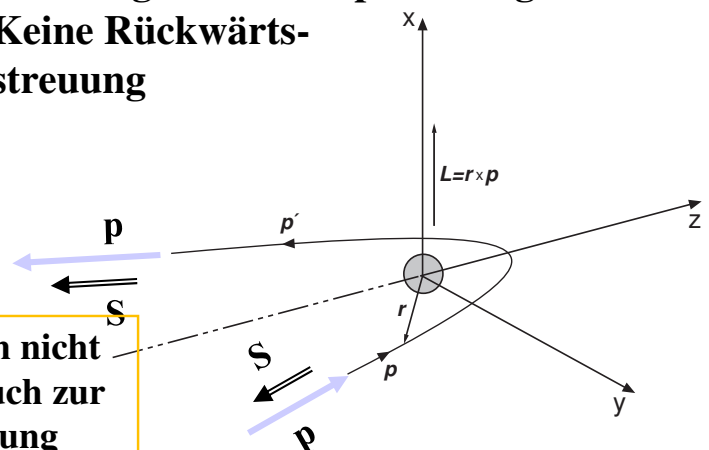


Helizitätserhaltung :

Im Grenzfall relativistischer Geschwindigkeiten ($v \approx c$) ist die Helizität erhalten (Streuprozesse)

⇒ Streuung an einem Spin 0 Target:
Keine Rückwärtsstreuung

Spin ändert sich nicht = im Widerspruch zur Helizitätserhaltung



Unterdrückungsterm:

$$\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

188

Zusammenfassung: Elektronenstreuung an Kernen

Rutherfordstreuung

vernachlässigt: Spin des Elektrons, Energieübertrag auf Rückstoßkern

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Berücksichtigung des Elektronenspins:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\beta \rightarrow 1)$$

(* Rückstoßenergie vernachlässigt)

Berücksichtigung der Rückstoßenergie:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot \frac{E'}{E} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot \frac{1}{1 + \frac{2E}{M_A c^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

189

Zusammenfassung: Elektronenstreuung an Kernen

Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung des Streuzentrums:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q^2)|^2$$

Endformel:

differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an einem Atomkern mit Kernladungszahl Z (magn. Moment vernachlässigt)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \frac{2E}{M_A c^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} \cdot |F(q^2)|^2 \quad (\beta \rightarrow 1)$$

190

Wechselwirkung des Elektrons mit magnetischem Moment des Nukleons

Strom der e^- erzeugt B-Feld

- punktförmiges Spin 1/2 – Teilchen (Dirac-Teilchen) hat magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2M} \cdot \vec{s} \quad \begin{array}{l} M: \text{Masse des Nukleons} \\ \text{(Folgt aus Dirac-Gleichung)} \end{array}$$

$$\mu = g \frac{e}{2M} \cdot \frac{\hbar}{2} \quad \begin{array}{l} \text{mit } g=2 \text{ (geladenes Diraceteilchen),} \\ \mu = 0 \text{ (neutrales Diraceteilchen)} \end{array}$$

erfüllt für Elektronen und Myonen bis auf QED-Korrektor

- magnetische Wechselwirkung: flippen des Protonspins

$\Leftrightarrow 0^\circ$ -Streuung: Verletzung der Drehimpulserhaltung

\Rightarrow Unterdrückung der magnetischen Wechselwirkung unter 0°

Unterdrückungsterm für Vorwärtsstreuung: $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad \beta \rightarrow 1$

191

Magnetisches Moment des Nukleons

Wirkungsquerschnitt für die Streuung von 2 punktförmigen Dirac-Teilchen mit Spin $1/2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Pkt. Spin } 1/2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot (1 + 2\tau \tan^2(\theta/2)) \quad \text{mit } \tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

Begründung: $WW \sim \mu B$

$$M_{if} \sim \mu \sim \frac{I}{M}$$

$M_{if} \sim B \sim \text{Ablenkung des } e^- \sim \text{Impulsübertrag } Q$

$$\left. \begin{array}{l} M_{if} \sim \frac{Q}{M} \\ \sigma \sim M_{if}^2 \sim \frac{Q^2}{M^2} \end{array} \right\}$$

durch magnetische WW fällt σ nicht so stark ab wie bei elektrischer WW alleine

$$\begin{array}{l} \text{Exp.:} \quad \mu_p = \frac{g_p}{2} \mu_N = +2,79 \mu_N \\ \quad \quad \mu_n = \frac{g_n}{2} \mu_N = -1,91 \mu_N \end{array} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3,15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$$

Kernmagneton

\Rightarrow **Nukleon nicht punktförmig** $\Leftrightarrow \mu_p \neq \mu_N, \mu_n \neq 0 \cdot \mu_N$

192

endliche Ausdehnung des Nukleons wie bei Kernen beschrieben durch Formfaktoren:

$G_E(Q^2), G_M(Q^2)$: elektrischer und magnetischer Formfaktor

=> Räumliche Verteilung von Ladung und magnetischem Moment

Grenzwerte von G für verschwindende Q^2

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2=0) &= 1 & G_E^n(Q^2=0) &= 0 \\ G_M^p(Q^2=0) &= 2,79 & G_M^n(Q^2=0) &= -1,91 \end{aligned}$$

Rosenbluth-Formel: Streuung eines e^- am (ausgedehntem) Nukleon

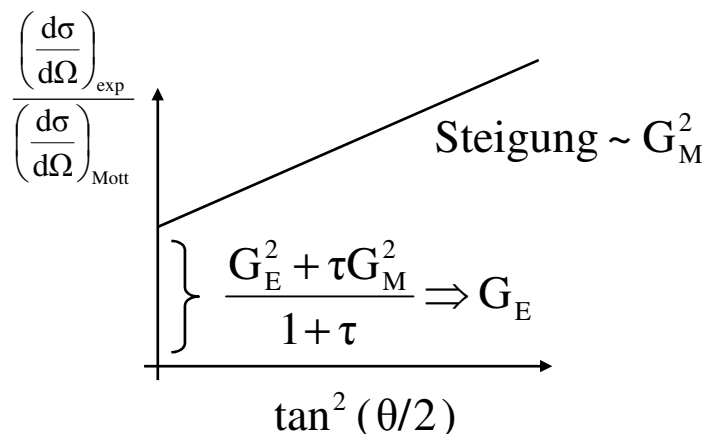
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left\{ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2(\theta/2) \right\} \quad \tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

zur Bestimmung von $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$: σ messen bei festem Q^2 für verschiedene Streuwinkel und Einschußenergien: Rosenbluth-Separation

193

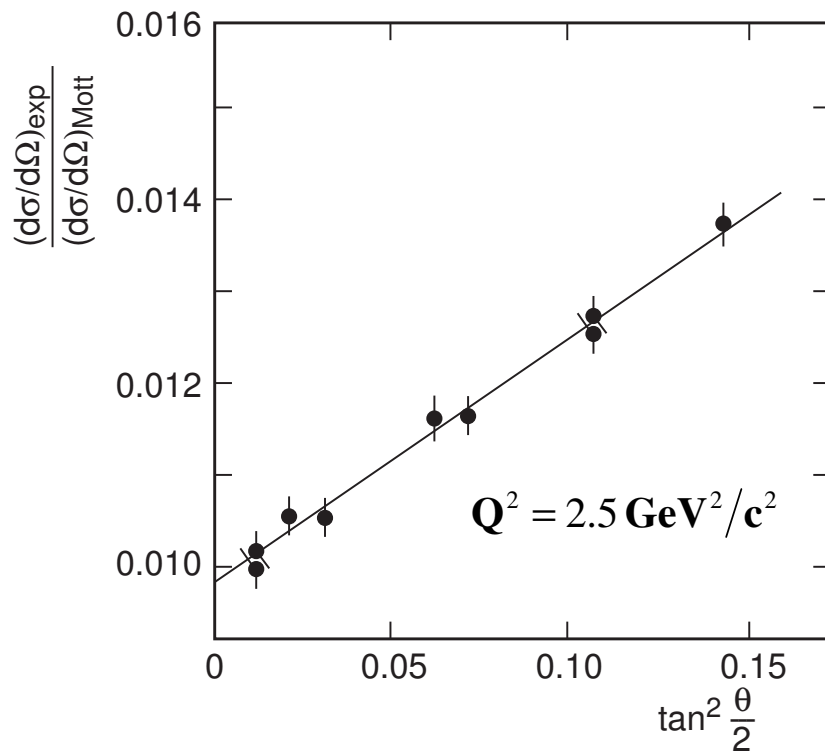
Rosenbluth Separation

Rosenbluth-Separation:



Für verschiedene feste Q^2
Wirkungsquerschnitt für verschiedene
Streuwinkel messen

Rosenbluth Separation

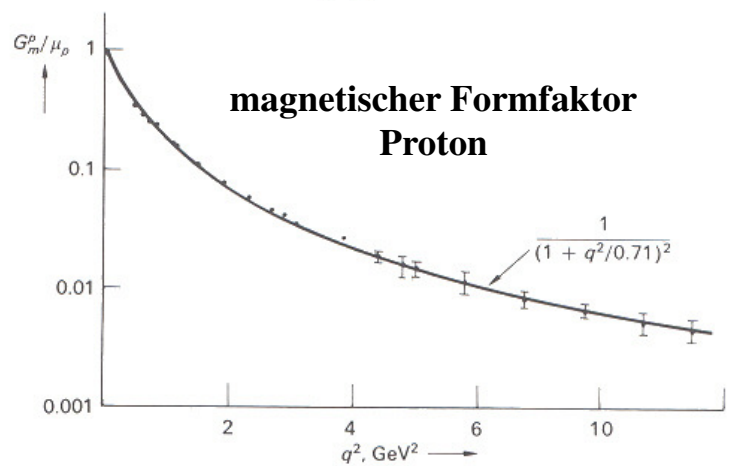
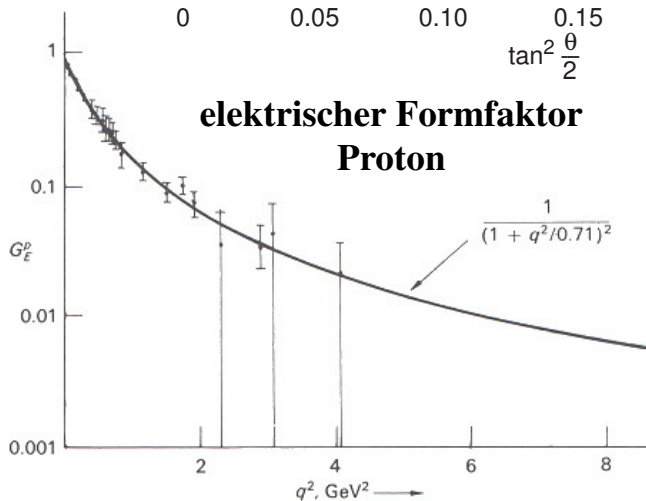
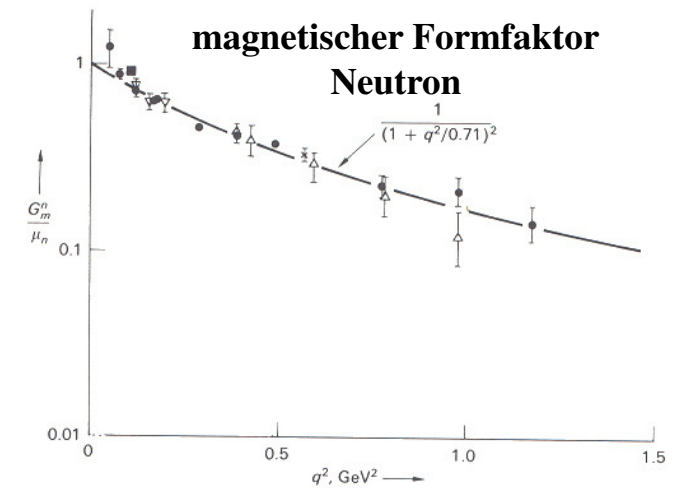
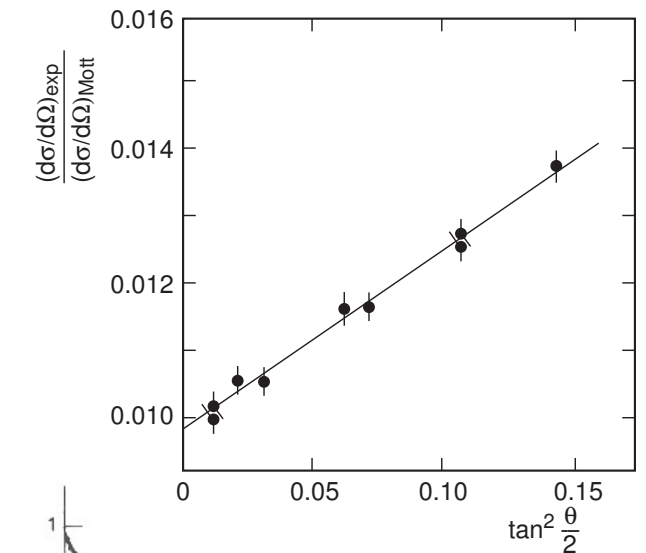


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Mott} = a + b \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

195

data from ~1960, 1970's
(SLAC, Stanford)

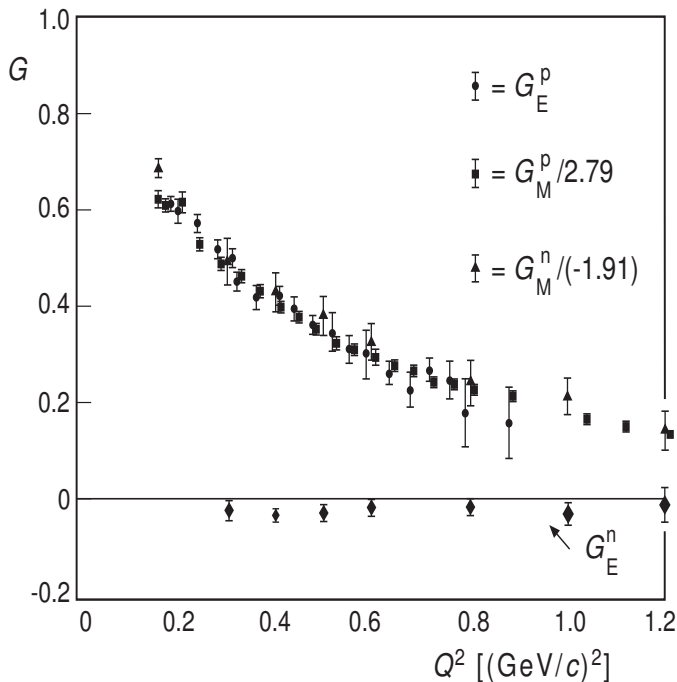
Rosenbluth Separation



196

Formfaktoren der Nukleonen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{d\sigma}{d\Omega}_{Mott} = \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}$$



Elektrischer FF G_E
Magnetischer FF G_M

Q²-Abhängigkeit der FF:

Messungen zeigen, dass
Q²-Abhängigkeit aller vier FF
in etwa identisch ist:

$$G_E^p(Q^2) = 1 \cdot G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

$$G_E^n(Q^2) = 0 \cdot G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

$$G_M^p(Q^2) = 2.79 \cdot G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

$$G_M^n(Q^2) = -1.91 \cdot G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

Dipol-Fit:

$$G^{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV}/c)^2} \right)^{-2}$$

197

Formfaktoren der Nukleonen

Dipolformfaktor

| | $\rho(r)$ | $ F(q^2) $ | Beispiel | $F(q^2)$ |
|----------------------------|--------------|------------|----------|------------------------------------|
| $f(r)$ | | | | |
| $\delta(r - r_0)$ | punktförmig | konstant | Elektron | 1 |
| $\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$ | exponentiell | Dipol | Proton | $\frac{1}{(1 + q^2/a^2\hbar^2)^2}$ |

**Protonen haben eine exponentiell
abfallende Ladungsverteilung !**

$$\rho(r) = \rho(0) e^{-ar} \quad a = 4,27 \text{ fm}^{-1}$$

Nukleonen sind weder punktförmig noch homogen geladene Kugeln sondern diffuse Objekte

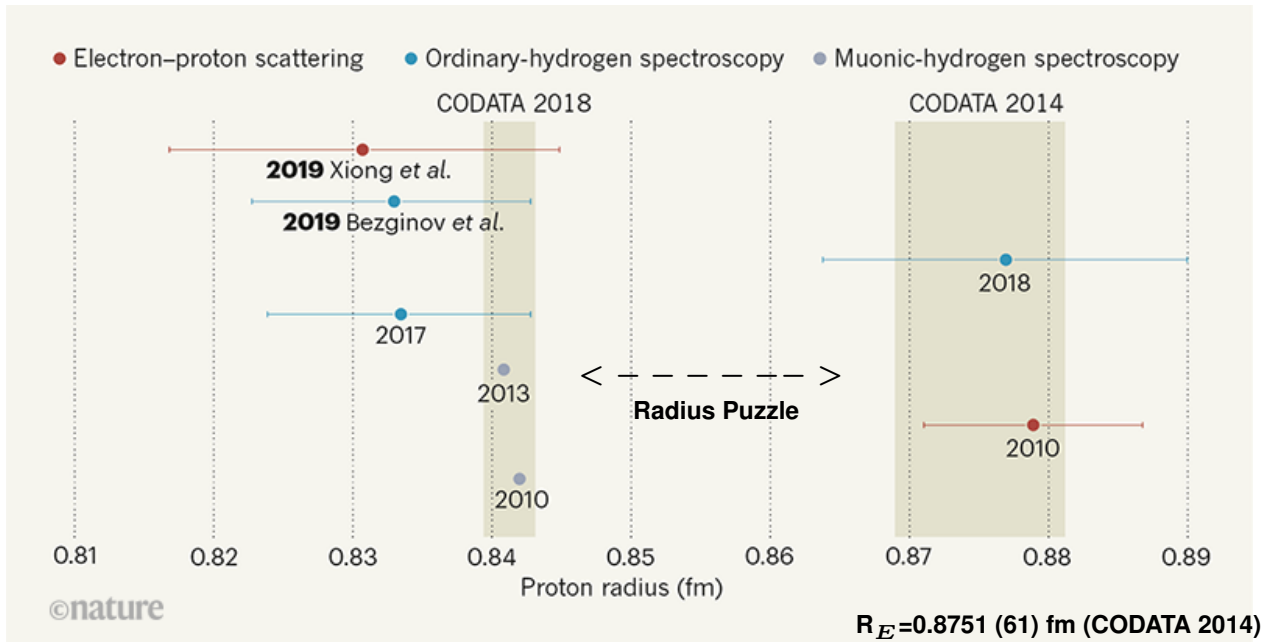
mittlerer quadratischer Radius $\rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle_{\text{Dipol}}} = 0,81 \text{ fm}$
aus Dipolfit, direkt aus Daten: 0.862 fm

Proton Radius

... man dachte, man kennt den Wert aus neueren Experimenten auf $\sim 1\%$:

$$R_E = 0.879(3) \text{ fm}$$

und dann das Proton Radius Puzzle



199

Proton Radius

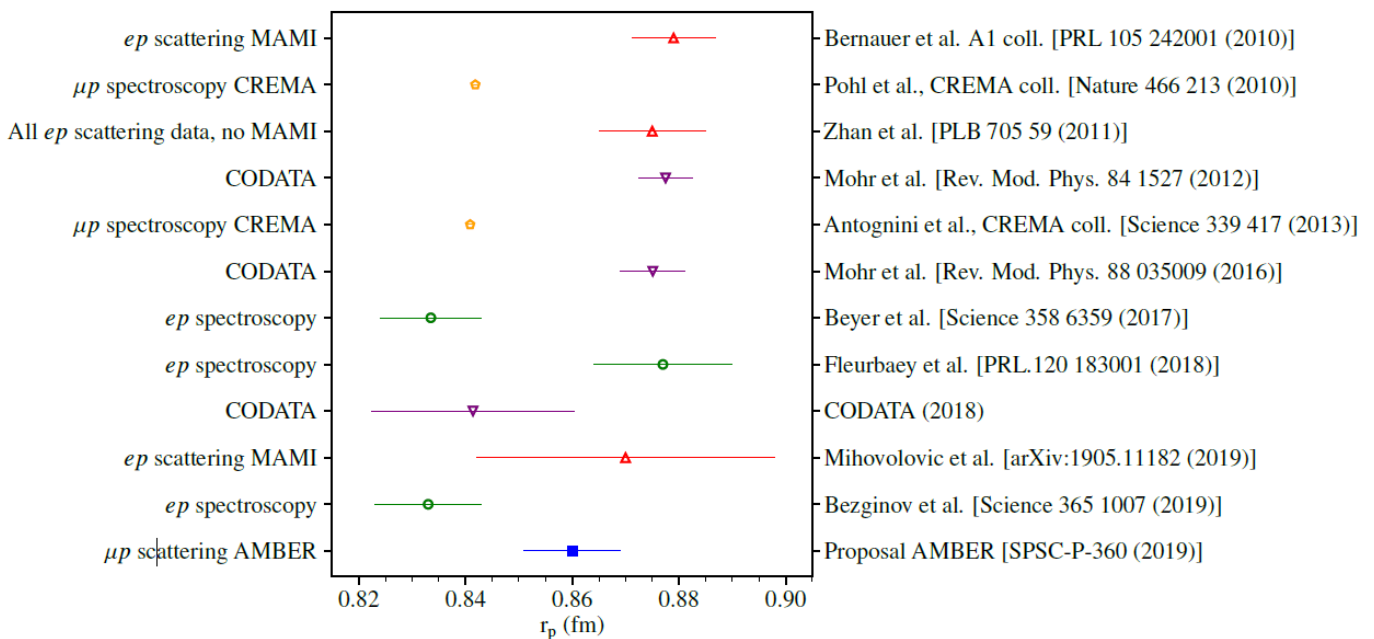
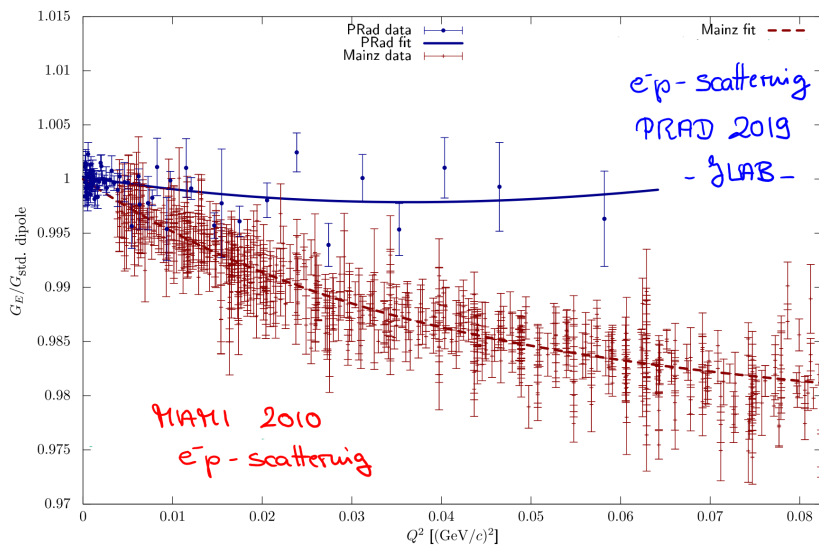


Figure 2: Compilation of data on the proton radius puzzle, sorted by time. Electron-proton scattering and spectroscopy (red/green), muon-proton spectroscopy (orange) and summary data (purple) is shown with the value of this proposed measurement (blue) arbitrarily placed at 0.86 fm, with the projected uncertainties. There are several reanalyses of different subsets of the electron scattering data. We refer to [18] for an overview and to [19] for a critical discussion. Error bars represent statistical and systematic uncertainties added in quadrature.

200

- neue Messungen:



Unterschiedliche Messungen mit unterschiedlichen Systematiken:

- Spektrometer-basiert (muss bewegt werden)
- Kalorimeter basierte Methode ($2.1 \cdot 10^{-4} < Q^2 < 6 \cdot 10^{-2}$)

in Vorbereitung:

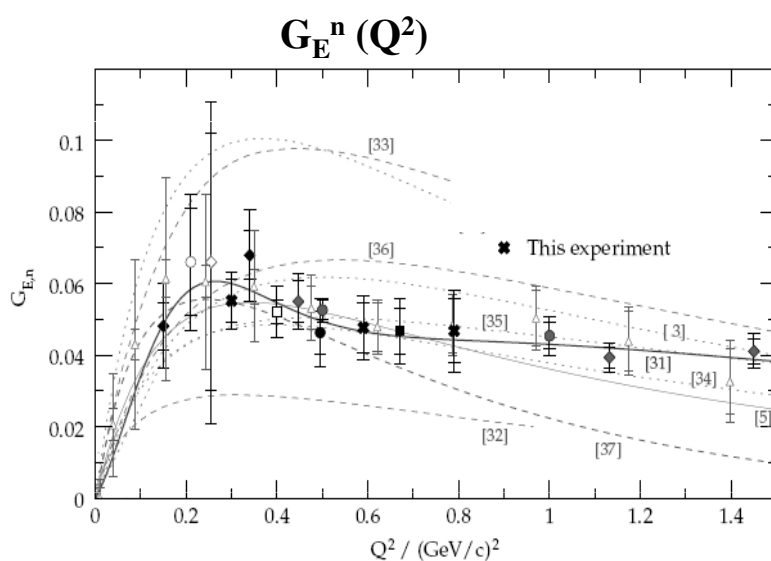
AMBER/COMPASS @ CERN: μp -Streuung

\leftrightarrow high energy, small Q^2 ($10^{-3} < Q^2 < 4 \cdot 10^{-2}$ (TPC))

201

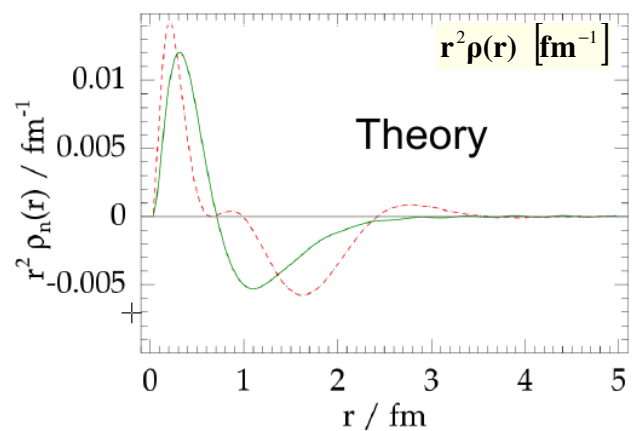
Elektrischer FF und Ladungsverteilung des Neutrons

Fourier Transformation



aus Messung der Reaktion $d(\bar{e}, e'\bar{n})p$

Radiale Ladungsverteilung



Neutron hat einen positiven „Kern“
 $n = p + \pi^-$

202

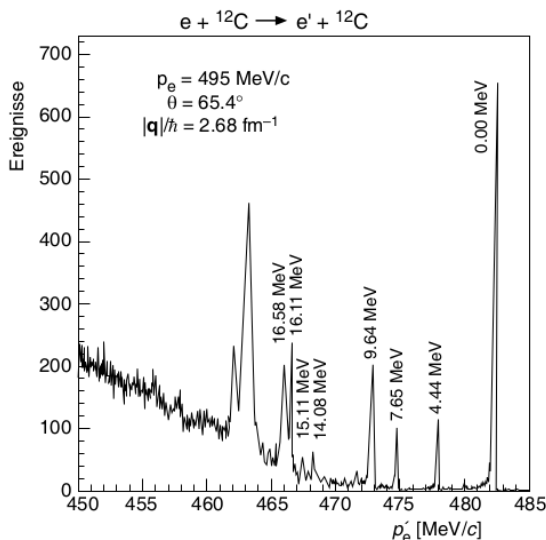
bisher: elastische Streuung

⇒ Ladungsverteilung $\rho(r)$ der Kerne

z.B. Proton: Dipol-Formfaktor → exponentielle Ladungsverteilung

..... inelastische/tief-inelastische Streuung später in der Vorlesung
(Quarks im Proton)

Inelastisch (aus Povh, Rith, Scholz, Zetsche):



203

Kernmodelle

bisher: Tröpfchenmodell => Semi-empirische Massenformel

- gute Beschreibung der Massen der stabilen Kerne

aber: viele Kern-Eigenschaften nicht erklärt, z.B.:

- Spin und Paritäten (Grundzustand, angeregte Zustände)
- Magische Zahlen
- Magnetische Momente
- Werte der Koeffizienten in der semi-empirischen Massenformel (mit Ausnahme von Coulomb)

- ➡ a) Fermi-Gasmodell
b) Schalenmodell

204

Basis:

- Überlagerung der WW aller Nukleonen kann als mittleres Kernpotential zusammengefaßt werden
 - Restwechselwirkung zwischen Paaren von Nukleonen vernachlässigt
- Protonen und Neutronen als unabhängige Systeme von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen (Pauli – Prinzip)
- Nukleonen bewegen sich im Potential ohne zu wechselwirken

Erklärt z.B.:

- Impulsverteilung gebundener Nukleonen im Kern
- Wichtige Charakteristika der Massenformel

205

Fermi-Gas-Modell

Annahme: Nukleonen im Potentialtopf

- Anzahl der möglichen Zustände in einem Volumen V und in einen Impulsintervall $[p + dp]$:

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V$$

- Im Grundzustand:

- die am niedrigsten gelegenen Zustände sind gefüllt bis zu einem maximalen Impuls p_F = **Fermi-Impuls**

$$n = \int_0^{p_F} dn = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}$$

- jeder Zustand ist von 2 identischen Fermionen mit Spin: $\uparrow \downarrow$ besetzt
 $\Rightarrow 2n$:

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

\leftrightarrow unabhängiges Proton- und Neutronsystem

Volumen der Kerne: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot A$ ($R_0 = 1,21 fm$)

206

Fermi-Gas-Modell

$$N = \frac{V(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad Z = \frac{V(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

Volumen der Kerne: $V = 4/3\pi R^3 = 4/3\pi R_0^3 \cdot A$ ($R_0 = 1,21 fm$)

für Kerne mit $Z = N = A/2$

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 MeV/c$$

Nukleon kann sich im Kern frei bewegen mit relativ großem Impuls

= abgesehen von leichten Kernen in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der quasi-elastischen e^- -Streuung am Kern

Leichtere Kerne \rightarrow kleinere Werte

$${}^6Li : p_F^{exp} = 169 MeV/c; \quad {}^{40}Ca = 249 MeV/c$$

↑
Fermi-Gas: keine gute Näherung

Energie des höchsten besetzten Zustands: Fermi-Energie E_F

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} = 33 MeV \quad (\text{kinetische Energie, } M: \text{Nukleonenmasse})$$

$\Rightarrow p_F, E_F$ hängen für nicht zu leichte Kerne im wesentlichen nicht von A ab

207

Fermi-Gas-Modell

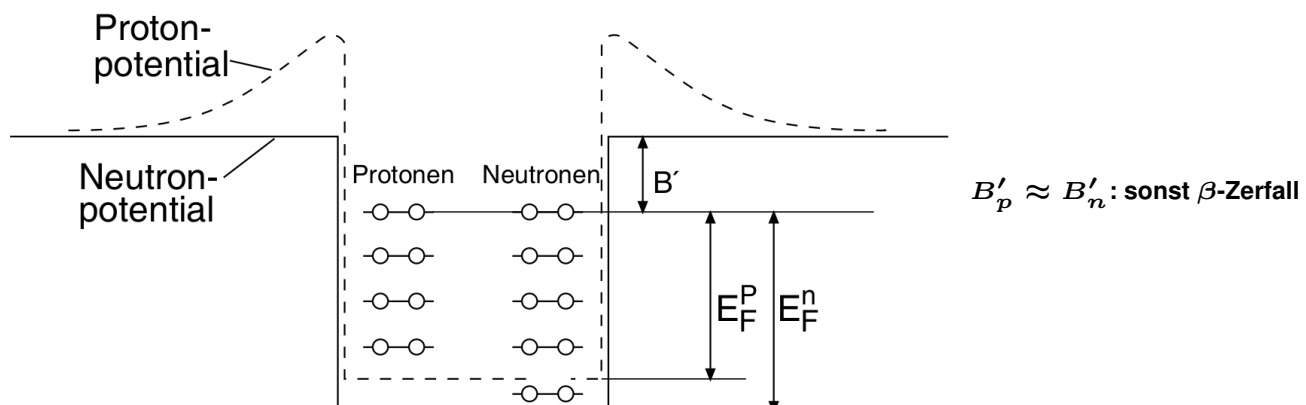
Unterschied zwischen E_F (Fermi-Kante) und der Kante des Potentialwalls

$\approx \text{const} \approx$ mittlere Bindungsenergie pro Nukleon $B' = B/A = 7 - 8 MeV$

\leftrightarrow Potentialwall $V_0 = E_F + B' \approx \text{const} \approx 40 MeV$

\Rightarrow kinetische Energie in der gleichen Größenordnung wie Potentialwall

\Rightarrow Kerne sind relativ schwach gebundene Systeme



208