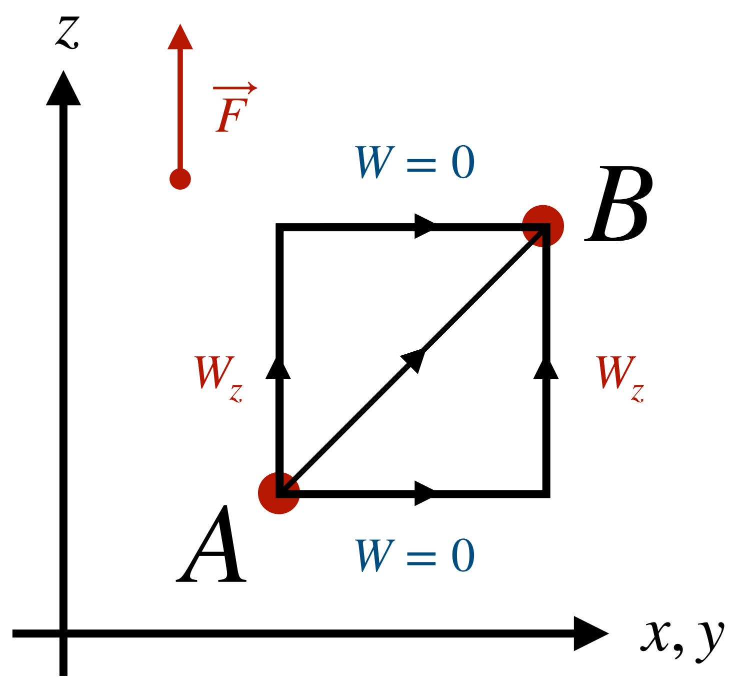
Vorlesung 9

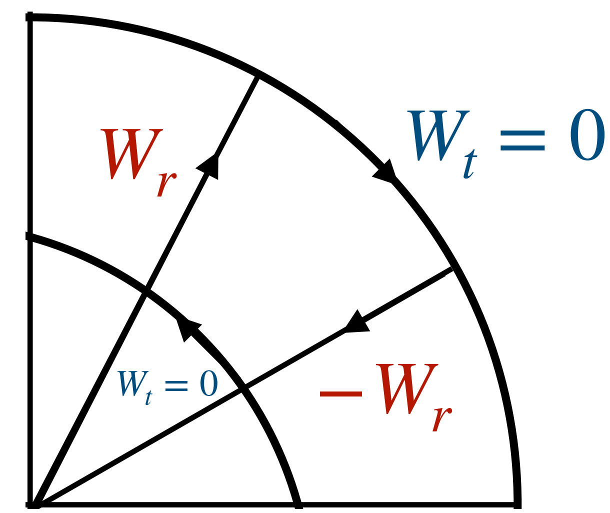
Beispiele: Konservativ

1. $\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, F_z)$ ("homogenes" Feld)



2. Jedes (zeitunabh.) Zentralfeld ist konservativ

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \vec{e}_r$$



Kann **jeden** Weg $A \to B$ in **radiale Bewegung** (leistet gleiche Arbeit unabhängig von θ, φ) & tangentiale Bew. (leistet keine Arbeit) zerlegen

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

Nicht konservativ

3. Reibungskräfte: $\oint \vec{F} \cdot \vec{r} \neq 0$ (!)

Vektoranalysis:

Wenn $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$ dann ist $\vec{F}$ konservativ

“Nabla-Operator” $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

Manchmal wird auch $\partial_k = \frac{\partial}{\partial k}$ als Notation genutzt um die Schreibweise kompakter zu halten

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0$$

3.1.4 Potenzielle Energie

In einem konservativen Kraftfeld ist die Arbeit

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$ unabh. vom Weg $A \to B$

Arbeit hängt nur von Ortsvektoren $\vec{r}_{A/B}$ ab!

$$\Rightarrow W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \boxed{E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_A) - E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_B)}$$

Geleistete Arbeit steht in Relation zur **Differenz** $E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_B) - E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_A)$

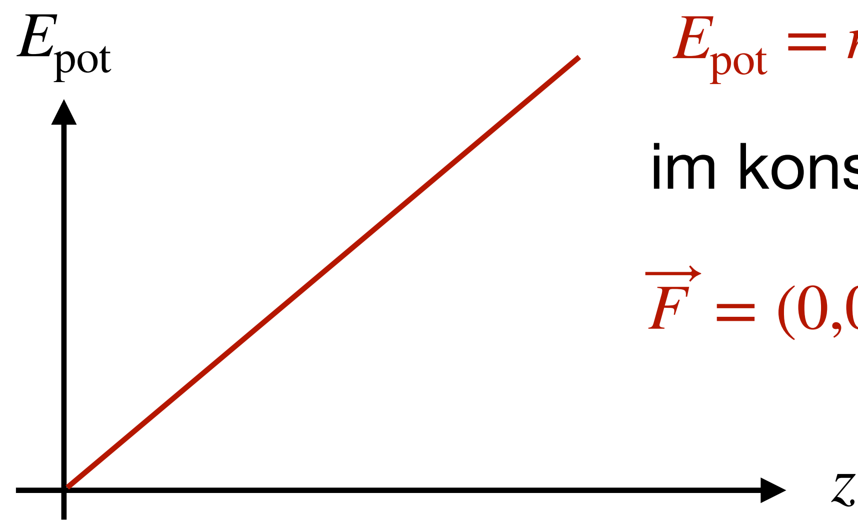
Die Funktion $E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})$ ist die **potenzielle Energie**

★ Vorzeichen: Wenn Kraft gegen Bewegung gerichtet ($\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} < 0$) nimmt die potenzielle Energie zu, $\Delta E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_B) - E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}_A) > 0$

★ Nullpunkt:

$E_{\text{pot}} = 0$ willkürlich, z.B.

- Ursprung des K-Systems

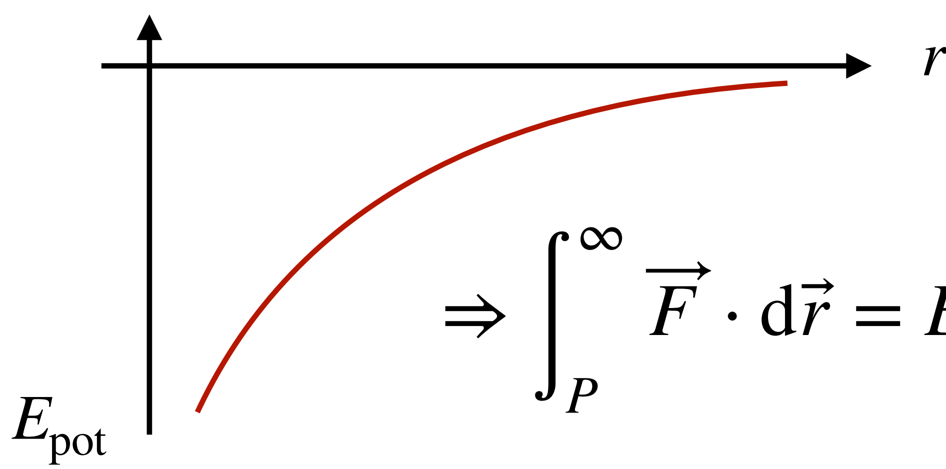


$E_{\text{pot}} = mg\,h$

im konst. Schwerefeld

$\vec{F} = (0,0,-mg)$

- $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$ z.B. für $E_{\text{pot}} = -\dfrac{GMm}{r}$



$$\Rightarrow \int_P^\infty \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{\text{pot}}(P) - E_{\text{pot}}(\infty) = E_{\text{pot}}(P)$$

$\Rightarrow E_{\text{pot}}(P)$ ist die Arbeit, die man aufbringen muss ($W < 0$) um den MP von $P \to \infty$ zu befördern

3.1.5 Kinetische Energie

Arbeit $$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t'$$

$$= m \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t' \quad = m \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{v}'\,\mathrm{d}\vec{v}'$$

2. NG

wegunabh. $$= m \left[\int_{v_{x0}}^{v_x} v_x'\,\mathrm{d}v_x' + \int_{v_{y0}}^{v_y} v_y'\,\mathrm{d}v_y' + \int_{v_{z0}}^{v_z} v_z'\,\mathrm{d}v_z' \right]$$

$$= m\,\frac{1}{2}\left[v_x^2 - v_{x0}^2 + v_y^2 - v_{y0}^2 + v_z^2 - v_{z0}^2\right]$$

$$\boxed{= m\,\frac{1}{2}\left[v^2 - v_0^2\right] = E_{\mathrm{kin}}(B) - E_{\mathrm{kin}}(A)}$$

Definition: $E_{\mathrm{kin}}(v) := \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad [E_{\mathrm{kin}}] = [W] = [E_{\mathrm{pot}}] = \mathrm{J}$

3.1.6 Energieerhaltung

Wir hatten $$\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B)$$

$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$

und $$\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{\text{kin}}(B) - E_{\text{kin}}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{\text{pot}}(A) + E_{\text{kin}}(A) = E_{\text{pot}}(B) + E_{\text{kin}}(B)}$$

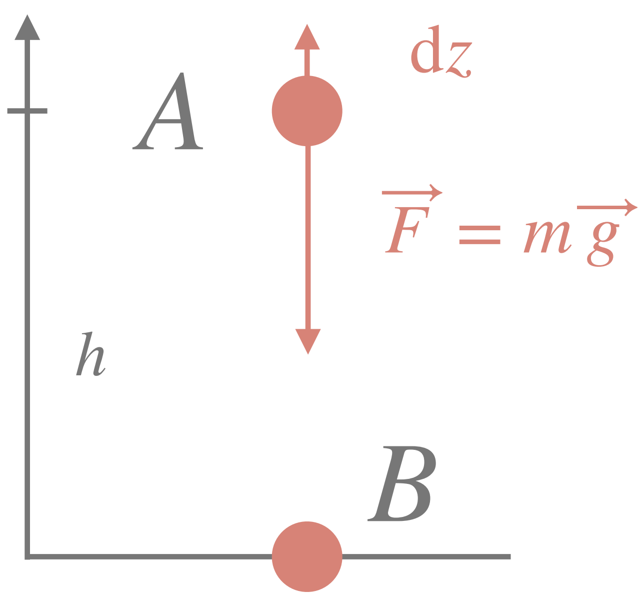
$$E = E_{\text{pot}}(A) + E_{\text{kin}}(A) = \text{const}$$

Energie(erhaltungs)satz der Mechanik:

Summe aus potenzieller und kinetischer Energie ist konstant (für konservative Kraftfelder)

Beispiele:

1. Freier Fall - Senkrechter Wurf

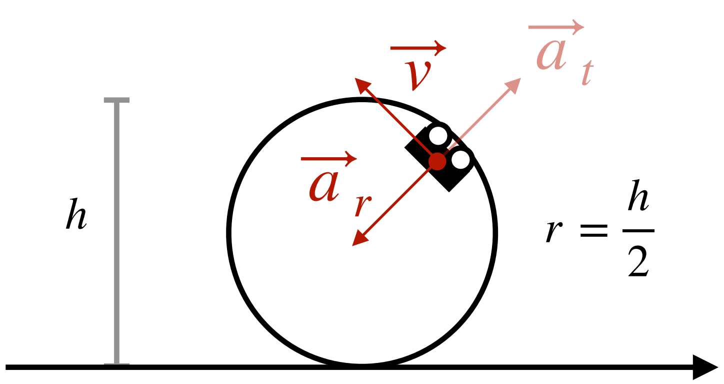


freier Fall Anfang: $E_{\text{pot}} = mgh\,, \quad E_{\text{kin}} = 0$

Ende: $E_{\text{pot}} = 0\,, \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

2. Looping Versuch



minimale Geschwindigkeit:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq mgh \;\rightarrow v \geq \sqrt{2gh}$$

$$h = 10\,\text{m} \quad \rightarrow \quad v \geq \sqrt{2 \times 10 \times 10}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 51\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$ (ohne Reibung)

In der Praxis größer, damit Insassen am höchsten Punkt noch **ausreichend Zentrifugalkraft** erfahren um nicht aus dem Sitz zu fallen

$$F = m\,a_t = \frac{m v_w^2}{r} \geq mg \quad \underset{r=\frac{h}{2}}{\Rightarrow} \quad \frac{2 v_w^2}{h} \geq g \quad \Rightarrow v_w^2 \geq \frac{gh}{2}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos \omega t \\ -\omega^2 R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

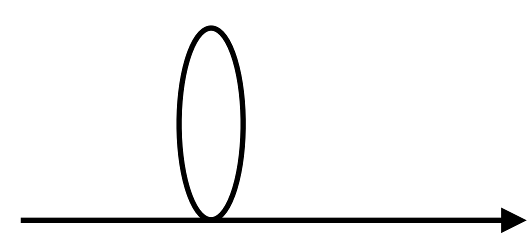
$$= -\omega^2 R \vec{e}_R = \omega^2 R \vec{e}_a = \frac{v^2}{R} \vec{e}_a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 \geq mgh + \frac{1}{2} m \boxed{\frac{gh}{2}} = \frac{5}{4} mgh$$

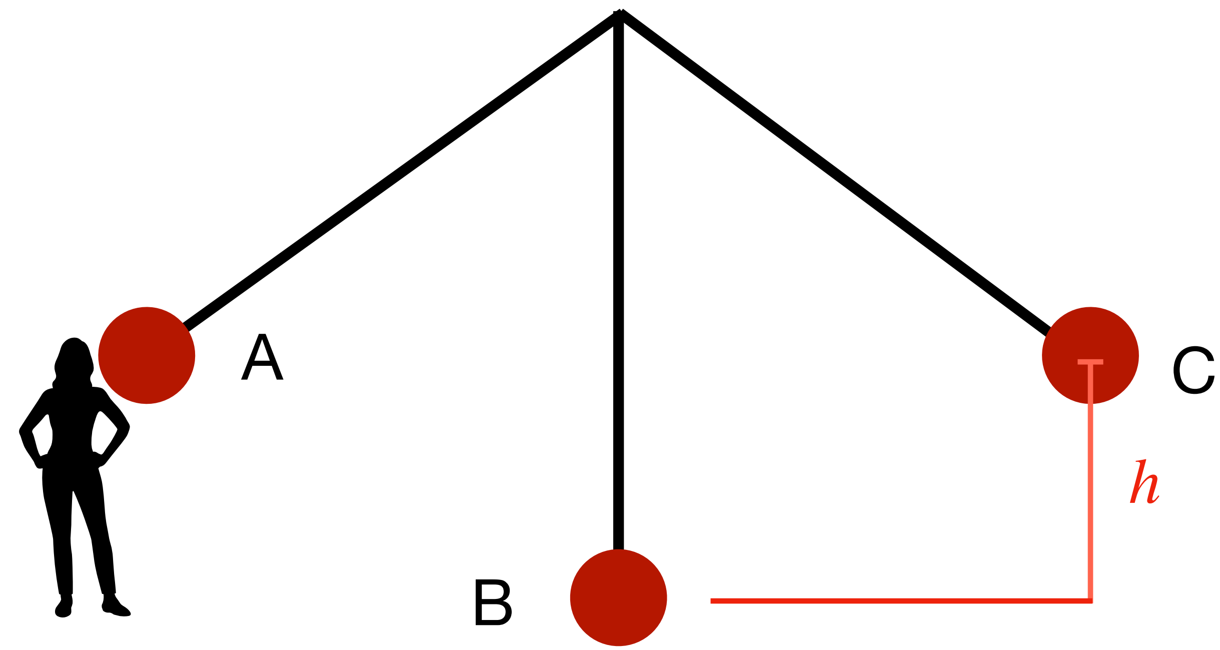
$$v_0 \geq \sqrt{\frac{5}{2} gh} = \sqrt{5gr}$$

Beschleunigung im Looping: $a = \frac{v_0^2}{r} = \frac{5gr}{r} = 5g$ unabhängig vom Radius!

Beschl. will man schnell verringern (da unangenehm), deshalb Design eher $\longrightarrow$



Versuch: **Todespendel**



A $\quad E_{\text{pot}} = mgh \quad E_{\text{kin}} = 0$

B $\quad E_{\text{pot}} = 0 \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

C = A

$$\downarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Energiesatz d. Mechanik :

Nur $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ für konservative Felder

Später: andere Energieformen

Reibung → Wärmeenergie
elektr. + magn. Energie

dann allgemein: $$\sum_{\text{E-formen}} E_i = \text{const}$$

3.1.7 Das Potenzial

Potenzielle Energie in einem Kraftfeld hängt oft von den Eigenschaften des Objektes ab, auf das die Kraft ausgeübt wird:

($G = 6.67430.. \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$)

Gravitationsfeldkonstante

Gravitation: $\vec{F} = G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$

$$E_{\text{pot}} = G \frac{Mm}{r} \sim m$$

Elektr. Kraft: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r}$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} \sim q$$

elektrische Feldkonstante

($\epsilon_0 = 8.854.. \times 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$)

Für solche Fälle ist eine Größe praktisch, die unabhängig von der “Probemasse”, “Probeladung”, etc. ist :

Gravitationspotenzial : $V(\vec{r}) := \dfrac{1}{m} E_{\text{pot}}(\vec{r})$ $\qquad [V] = \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

Potenzial = pot. Energie pro Probemasse = Eigenschaft der Masse, die das Feld erzeugt

Bezug zur Kraft:

$$\mathrm{d}W = \underbrace{\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z} = -\,\mathrm{d}E_{\text{pot}}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x} =$ “partielle” Ableitung

Leiten nach x ab, nehmen an, dass y, z konstant

$$\Rightarrow \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(-\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}, -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y}, -\frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\right) = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{=\vec{\nabla}} E_{pot}(\vec{r})$$

Oder grad : **Gradient**

$$\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\, E_{pot}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\, E_{pot}(\vec{r})$$

In welche Richtung zeigt $\vec{\nabla}\, E_{pot}$?

Zeigt immer in die Richtung der **größten pos. Änderung** von $E_{pot}(\vec{r})$