Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 2

Aufgabe 1 (2 Punkte). Vor Ihnen liegen einige Karten eines Kartenspiels, auf deren Rückseite sich Buchstaben befinden. Sie sehen vor sich einen Herz König, eine Kreuz 7, sowie drei Karten mit den Aufschriften “L”, “R” und “E” liegen. Jemand stellt die Hypothese auf, dass sich hinter jedem Vokal eine Bildkarte (also Bube, Dame, König oder Ass) verbirgt. Welche der genannten Karten drehen Sie um, um diese Hypothese mit einer minimalen Anzahl von Kartendrehungen zu überprüfen und warum?

Aufgabe 2 (3 Punkte). Mathematische Sätze der Form “x hat die Eigenschaft E” werden durch den Ausdruck $E(x)$ formalisiert. Aussagen der Form “Alle x haben die Eigenschaft E” werden durch den Allquantor $\forall$ formalisiert: $\forall x\, E(x)$. In analoger Weise formalisiert man Aussagen der Form “ Es gibt x mit der Eigenschaft E” durch den Existenzquantor $\exists$ durch $\exists x\, E(x)$.

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Wahrheitswerte hin:

(1) $\forall x\, E(x) \iff \neg(\exists x \neg E(x))$
(2) $\exists x\, (E_1(x) \wedge E_2(x)) \implies \exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$
(3) $\forall x\, (E_1(x) \vee E_2(x)) \implies \exists x\, E_1(x) \wedge \exists x\, E_2(x)$

Aufgabe 3 (6 Punkte). Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
(2) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
(3) Die Zahl $n^3 - n$ ist stets durch 3 teilbar.
(4) Die Zahl $5^n - 1$ ist stets durch 4 teilbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden vier Gleichungssysteme über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in den Variablen x, y an:

(1) $5x = 5x + 2$ und $3y = 7$
(2) $3x + 7y = 4$
(3) $x + y = 3$ und $x - y = 7$
(4) $4x - 6y = 0$ und $2x - 3y = 15$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Geichung:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen, jeweils für positive reelle Zahlen:

(a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(b) $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

(c) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(d) $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Sie können hier insgesamt **24 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **20 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe bis Donnerstag, den 20. Oktober, 12:00 Uhr bei eCampus in Ihrer Tutoriumsgruppe.