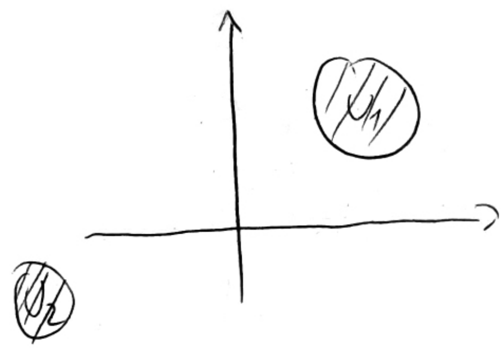
Hausaufgabenblatt 6

(i) Sternförmiges Gebiet $\Rightarrow$ Wegzusammenhängend



Sei $U = U_1 \cup U_2$

(ii)

(iii) OBDA $\quad u_0 = 0 \quad$ und sei $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$

1) Falls $u_0 \notin \mathrm{Int}(\gamma)$

wir wählen $u_1 \in Sp(\gamma) \subset U$, sodass $z \in [u_0, u_1]$

$\Rightarrow z \in U$

2) Falls $u_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$

funktioniert gleich.

Aufgabe 2)

(i) $\int_\gamma \underbrace{\frac{z^3+5}{z-i}}_{=:f(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$

$= 2\pi i \, (i^3 + 5)$

$= 2\pi \, (1 + 5i)$

(ii) $\int_\gamma \frac{e^z}{i\pi - z} dz = 0$ weil $z \mapsto \frac{e^z}{i\pi - z}$

ist holomorph auf $B_{2,5}(0)$ (Cauchysche Integralsatz)

(iii) $\int \underbrace{\frac{z^3+5}{(z+3)(z-1)}}_{=f(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1)$

$= 2\pi i \lim_{z \to 1} \frac{z^3+5}{z+3}$

$= 3\pi i$

Aufgabe 3) $\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta)) d\theta}_{=:A} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(\theta + \sin(\theta)) d\theta}_{=:B}$

$= \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} e^{i\theta + i\sin(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta$

$= \int_{\gamma = \partial B(0,1) \circlearrowleft} (-i) e^z dz \overset{\text{Stammfunktion}}{=} (-i) \left[e^{e^{2\pi i}} - e^{e^0} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

$(\gamma(t) = e^{i\theta})$