Da $\hat{T}(\vec{a})$ unitär, gibt es $\hat{A}(\vec{a})$ hermitisch

so dass $\hat{T}(\vec{a}) = e^{i\hat{A}(\vec{a})}$.

Da $\hat{T}(\vec{a})^N = \hat{T}(N\vec{a})$, $N\hat{A}(\vec{a}) = \hat{A}(N\vec{a})$.

$$\Rightarrow \quad \hat{A}(\vec{a}) = \frac{1}{\hbar}\hat{\vec{P}}\cdot\vec{a}$$

Impuls Operator

$$\hat{\vec{P}} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n), \qquad \hat{P}_i^+ = \hat{P}_i$$

$$\boxed{\hat{T}(\vec{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{P}}\cdot\vec{a}\right)}$$

Wirkung auf $|\psi, t\rangle$:

$$\hat{T}(\vec{a})|\psi, t\rangle = \int d^n x \; T(\vec{a})|\vec{x}\rangle \psi(\vec{x}, t)$$

$$= \int d^n x \; |\vec{x}+\vec{a}\rangle \psi(\vec{x}, t)$$

$$= \int d^n x \; |\vec{x}\rangle \psi(\vec{x}-\vec{a}, t)$$

⇝ Wirkung des Translationsoperators auf die Wellenfunktion:

$$\psi(\vec{x},t) \xrightarrow{\hat{T}(\vec{a})} \psi(\vec{x}-\vec{a},t)$$

$$= \psi(\vec{x}) - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t) + \ldots$$

Da $\hat{T}(\vec{a}) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{\vec{P}}\cdot\vec{a} + \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\vec{x},t) \xrightarrow{\hat{\vec{P}}} -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)}$$

oder

$$\langle\vec{x}|\hat{\vec{P}}|\psi,t\rangle = -i\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{x}|\psi,t\rangle$$

Sei $|\vec{p}\rangle$ ein Eigenzustand mit Eigenwert $\vec{p}$:

$$\hat{\vec{P}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,|\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad -i\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = N(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$$

für eine Funktion $N(\vec{p})$.

Es gilt:

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = \int d^n x \, \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \vec{q} \rangle$$

$$= \int d^n x \; N(\vec{p})^* N(\vec{q}) \, e^{i\vec{x}(\vec{q}-\vec{p})/\hbar}$$

$$= (2\pi\;)^n N(\vec{p})^* N(\vec{q}) \, \hbar^n \, \delta^{(n)}(\vec{p}-\vec{q})$$

$$= (2\pi\hbar)^n \, |N(\vec{p})|^2 \, \delta^{(n)}(\vec{p}-\vec{q})$$

$\rightsquigarrow$ Falls $N(\vec{p}) = \dfrac{e^{i\alpha}}{(\sqrt{2\pi\hbar})^n}$ $(\alpha = 0)$,

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \\ \langle \vec{p} | \vec{p}\,' \rangle &= \delta^{(n)}(\vec{p}-\vec{p}\,') \end{aligned}}$$

Es gilt:

$$|\psi, t\rangle = \int d^n p \; |\vec{p}\rangle \underbrace{\langle \vec{p} | \psi, t \rangle}_{=:\tilde{\psi}(\vec{p},t)}$$

Wellenfunktion im Impulsraum

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) \xrightarrow{\hat{\vec{p}}} \vec{p}\,\tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) \xrightarrow{\hat{\vec{x}}} -i\hbar \vec{\nabla}_p \tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

[Siehe Übungsblatt]

Zusammenhang zwischen $\psi(\vec{x},t)$ und $\tilde{\psi}(\vec{p},t)$:

$$\psi(\vec{x},t) = \langle \vec{x} | \psi, t\rangle$$

$$= \int d^n p \, \langle \vec{x} | \vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \psi, t\rangle$$

$$\psi(\vec{x},t) = \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \, \tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) = \int \frac{d^n x}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \, \psi(\vec{x},t)$$

$\tilde{\psi}(\vec{p},t)$ ist die Fourier-Transformierte von $\psi(\vec{x},t)$.

Parität

Paritätstransformation: $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$

⇝ Es gibt einen Operator $\hat{P}$ so dass

$$\hat{P}|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$$

⇝ Wirkung auf eine Wellenfunktion:

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{\hat{P}} \psi(-\vec{x})$$

⇝ Es gilt: $\hat{P}\hat{x}_R\hat{P}^{+} = -\hat{x}_R$

Eigenschaften:

1) $\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{+} = \hat{P}$
2) Eigenwerte von $\hat{P}$: ± 1

Beweis [Übungsblatt]

Es folgt dass Eigenfunktionen genau die geraden und ungeraden Funktionen sind:

$$\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x}) = \pm\psi(\vec{x})$$

Wirkung auf Impulsoperator:

$$\hat{\mathcal{P}} P_R \hat{\mathcal{P}}^{+} = ?$$

Es gilt:

$$\hat{\mathcal{P}} |\vec{p}\rangle = \int d^n x \; |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\hat{\mathcal{P}}|\vec{p}\rangle$$

$$= \int d^n x \; |\vec{x}\rangle\langle -\vec{x}|\vec{p}\rangle$$

$$= \int d^n x \; |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| -\vec{p}\rangle$$

$$= |-\vec{p}\,\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathcal{P}} P_R \hat{\mathcal{P}}^{+} = - P_R}$$

Definition: Wir sagen dass ein System invariant unter Paritätstransformationen ist falls $\hat{\mathcal{P}} \hat{H} \hat{\mathcal{P}}^{+} = \hat{H}$.

N.B. Falls $\hat{H}$ eine Potenzreihe in $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$, dann

$$\hat{H}(-\hat{\vec{x}}, -\hat{\vec{p}}) = \hat{\mathcal{P}} \hat{H}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}) \hat{\mathcal{P}}^{+}$$

Theorem Falls ein System paritäts-invariant ist, dann gibt es eine gemeinsame ONB von $\hat{H}$ und $\hat{P}$. Speziell gibt es eine ONB an geraden/ungeraden Eigenfunktionen von $\hat{H}$

Beweis: $\hat{P}\hat{H}\hat{P}^{\dagger} = \hat{H}$

$$\Rightarrow \hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}$$

$$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{P}] = 0$$

und das Theorem fdgl.

$\boxtimes$

Beispiel: Das freie Teilchen:

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}^2}{2m} \; ; \quad \hat{P}\hat{H}\hat{P}^{\dagger} = \frac{(-\vec{P})^2}{2m} = \hat{H}$$

$\rightsquigarrow$ Paritäts-Invarianz

Eigenfunktionen von $\hat{H}$: $\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$

und

$$\hat{H}\phi_{\pm\vec{p}}(\vec{x}) = E_{\vec{p}}\,\phi_{\pm\vec{p}}(\vec{x}) \; ; \quad E_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

aber $\phi_{\mp\vec{p}}(\vec{x}) = \phi_{\pm\vec{p}}(-\vec{x}) \neq \phi_{\pm\vec{p}}(\vec{x})$

Wir definieren:

$$\phi^{+}_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\phi_{-\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\cos\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}$$

$$\phi^{-}_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{2i}\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) - \frac{1}{2i}\phi_{-\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\sin\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}$$

Und

$$\hat{H}\phi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x}) = E_{\vec{p}}\,\phi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x})$$

$$\hat{P}\phi^{\pm}_{\vec{p}}(\vec{x}) = \pm\,\phi_{\vec{p}}(\vec{x})$$