

Σ 34. 5

Angelo Bräde, Dominik Waurzinek

1

Nr. 1

Σ 6

1.)

$$\text{Gegeben: } \frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}}(t=0) = 1,5 \cdot 10^{-12}, \quad m = 50 \text{ mg}, \quad t = 2000 \text{ a}, \quad N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \quad M = 12,0107 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad T_{1/2} = 5730 \text{ a}$$

Molare Masse von ^{12}C

Zunächst wird die Menge an C-Atomen berechnet, wobei näherungsweise nur mit der molaren Masse von ^{12}C gerechnet wird, da $N(t)_{^{14}\text{C}} \gg N(t)_{^{12}\text{C}}$ gilt:

$$N(t) = N_A \cdot \frac{m}{M} \approx 2,507 \cdot 10^{21}$$

Daraus wird der Anteil an ^{14}C Atomen und deren Aktivität berechnet:

$$N(t)_{^{14}\text{C}} = N(t) \cdot \frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \approx 3,76 \cdot 10^9$$

$$A(t)_{^{14}\text{C}} = \lambda \cdot N(t)_{^{14}\text{C}} \approx 0,0144 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{mit } \lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \approx 3,833 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{s}}$$

Nun wird die Aktivität des 2000 Jahre alten Holzes berechnet:

$$A(2000 \text{ a})_{^{14}\text{C}} = A(0)_{^{14}\text{C}} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \approx 0,0143 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \frac{A(2000 \text{ a})_{^{14}\text{C}}}{A(0)_{^{14}\text{C}}} \approx 0,785$$

Die Aktivität beträgt nach 2000 a nur noch 78,5% der Aktivität zu Beginn

Nun wird noch das Verhältnis $\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}}$ nach 2000 a berechnet, die Menge an ^{12}C -Atomen wurde näherungsweise als konstant angenommen:

$$N(2000 \text{ a})_{^{14}\text{C}} = N(0)_{^{14}\text{C}} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \approx 2,952 \cdot 10^9$$

$$\frac{N(2000 \text{ a})_{^{14}\text{C}}}{N(0)} \approx 1,1775 \cdot 10^{-12}$$

3/3

2.)

$$\text{Gesgeben: } \frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = (1,373 \pm 0,005) \cdot 10^{-12}$$

Das angegebene Verhältnis entspricht dem eines Holzstücks beliebiger Masse aber desselben Alters, weshalb es in das Verhältnis aus 1.) eingesetzt werden kann, um $N(t)_{^{14}\text{C}}$ zu berechnen:

$$\frac{N(t)_{^{14}\text{C}}}{N(0)} = 1,373 \cdot 10^{-12}$$

$$\Leftrightarrow N(t)_{^{14}\text{C}} = N(0) \cdot 1,373 \cdot 10^{-12} \approx 3,442 \cdot 10^9$$

Mit $N(t)_{^{14}\text{C}}$ und λ aus 1.) lässt sich hieraus das Alter der Probe berechnen:

$$N(t)_{^{14}\text{C}} = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{N(t)_{^{14}\text{C}}}{N(0)_{^{14}\text{C}}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} \approx 730 \text{ a}$$

Für den Fehler folgt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta N(t)_{^{14}\text{C}} = N(0) \cdot 0,005 \cdot 10^{-12} \approx 1,2535 \cdot 10^7$$

$$\Delta t = \frac{1}{N(t)_{^{14}\text{C}}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \Delta N(t)_{^{14}\text{C}} \approx 30 \text{ a}$$

$$\Rightarrow t = (730 \pm 30) \text{ a}$$

3/3

Nr. 2

1.) $\sum \text{S. 5}$

1.)

$$\text{Gegeben: } T_{112}^{Bi} = 5,013 \text{ d} \quad T_{112}^{Po} = 128,376 \text{ d} \quad \lambda_i = \frac{\ln(2)}{T_{112}}$$

Aus dem Ansatz $A = -\frac{dN}{dt}$ mit $A = \lambda \cdot N$ folgt zunächst für ${}^{208}\text{Bi}$:

$$\frac{dN_{Bi}(t)}{dt} = -\lambda_{Bi} N_{Bi}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N_{Bi}(t)} dN_{Bi}(t) = -\lambda_{Bi} dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{N_{Bi}(0)}^{N_{Bi}(t)} \frac{1}{N_{Bi}(t')} dN_{Bi}(t') = -\lambda_{Bi} \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{Bi}(t)}{N_{Bi}(0)}\right) = -\lambda_{Bi} t$$

$$\Leftrightarrow N_{Bi}(t) = N_{Bi}(0) e^{-\lambda_{Bi} t}$$

Für ${}^{208}\text{Po}$ folgt anschließend:

$$\frac{dN_{Po}(t)}{dt} = \lambda_{Bi} N_{Bi}(t) - \lambda_{Po} N_{Po}(t) \quad | \text{ Ansatz: } N_{Po}(t) = c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dc_{Po}(t)}{dt} e^{-\lambda_{Po} t} - \lambda_{Po} c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t} = \lambda_{Bi} N_{Bi}(0) e^{-\lambda_{Bi} t} - \lambda_{Po} c_{Po}(t) e^{-\lambda_{Po} t} \quad | : e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow c_{Po}(t) = \lambda_{Bi} N_{Bi}(0) \int e^{-\lambda_{Bi} t} / e^{-\lambda_{Po} t} dt$$

$$\Leftrightarrow c_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} e^{(\lambda_{Bi} - \lambda_{Po}) t} + K_{Po}$$

Durch einsetzen in den Ansatz folgt:

$$N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Po} t} + K_{Po} e^{-\lambda_{Po} t}$$

Aus $N_{Po}(0) = 0$ folgt $K_{Po} = -\frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}}$ und somit:

$$N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} (e^{-\lambda_{Bi} t} - e^{-\lambda_{Po} t})$$

Und zuletzt für ${}^{206}\text{Po}$ gilt:

$$N_{Po}(t) = \lambda_{Po} N_{Po}(t) dt$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \int (e^{-\lambda_{Bi} t} - e^{-\lambda_{Po} t}) dt$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Bi} t} + \frac{1}{\lambda_{Po}} e^{-\lambda_{Po} t} \right) + C_{Po} \quad | N_{Po}(0) = 0 = \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} + \frac{1}{\lambda_{Po}} \right) + C_{Po} \Leftrightarrow C_{Po} = \frac{N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} (\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}) = N_{Bi}(0)$$

$$= \lambda_{Po} \frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} \left(-\frac{1}{\lambda_{Bi}} e^{-\lambda_{Bi} t} + \frac{1}{\lambda_{Po}} e^{-\lambda_{Po} t} \right) + N_{Bi}(0)$$

4/4

2.)

Der α -Zerfall wird für $\frac{dA_{Bi}(t)}{dt} = 0$ maximal, woraus folgt:

$$A_{Bi}(t) = -\frac{dN_{Bi}(t)}{dt} = -\frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} (-\lambda_{Bi} e^{-\lambda_{Bi} t} + \lambda_{Po} e^{-\lambda_{Po} t}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dA_{Bi}(t)}{dt} = -\frac{\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} (\lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} - \lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t}) = 0 \quad | : \frac{-\lambda_{Bi} N_{Bi}(0)}{\lambda_{Po} - \lambda_{Bi}} = c$$

$$\Leftrightarrow 0 = c \lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} - c \lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow c \lambda_{Po}^2 e^{-\lambda_{Po} t} = c \lambda_{Bi}^2 e^{-\lambda_{Bi} t} \quad | : c \quad | : \lambda_{Po}^2 \quad | \cdot e^{\lambda_{Po} t}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda_{Po} t} e^{\lambda_{Po} t} = \frac{\lambda_{Bi}^2}{\lambda_{Po}^2} \quad | \ln()$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-\lambda_{Po} t + \lambda_{Po} t}) = \ln\left(\frac{\lambda_{Bi}^2}{\lambda_{Po}^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t(\lambda_{Bi} - \lambda_{Po}) = \ln\left(\frac{\lambda_{Bi}^2}{\lambda_{Po}^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{\lambda_{Bi}^2}{\lambda_{Po}^2}\right) / (\lambda_{Bi} - \lambda_{Po})$$

$$\approx 48,75 \text{ d} \quad \text{mit } \lambda_{Bi} = 4,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}} \quad \lambda_{Po} = 1,7 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{s}}$$

F 0/1

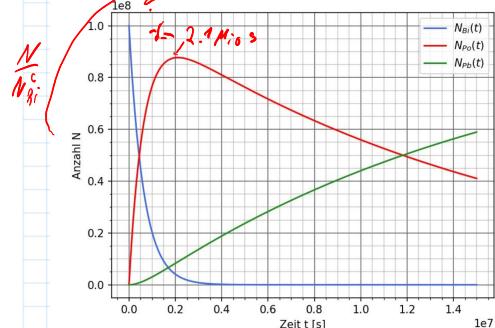
3.)

$$A_{B_i}(t) = \lambda_{B_i} \cdot N_{B_i}(t)$$

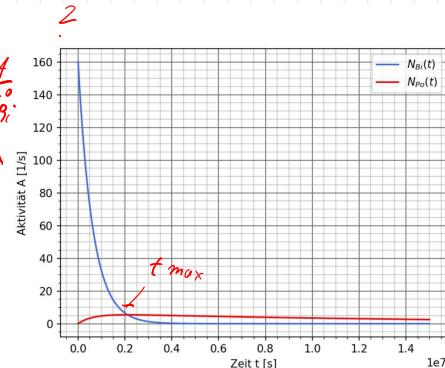
$$A_{P_0}(t) = \lambda_{P_0} \cdot N_{P_0}(t)$$

13.50 kommt

Anzahl der Kerne:



Aktivität:



0.5/1

4.)

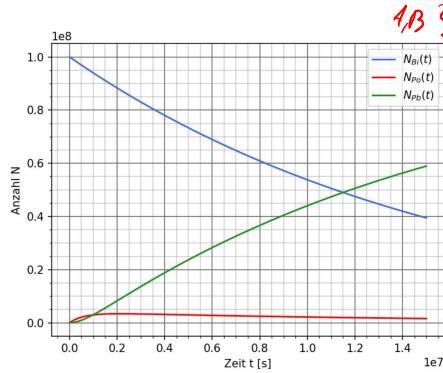
a) Die Bedingung ändert nichts am Plot. ✓

b) Die Menge an B-Kernen bleibt sehr klein, da sie sehr schnell weiter zu C-Kernen zerfallen. ✓ $A(t) = A_B(t)$

c) Die A-Kerne zerfallen im Vergleich zu den B-Kernen fast sofort, weshalb zunächst alle A-Kerne zu B-Kernen zerfallen und von dort langsam zu C-Kernen.

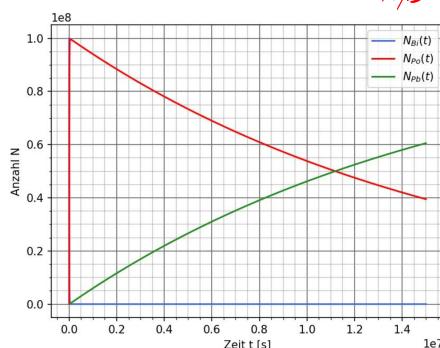
Plot zu b):

Plot zu c)



A,B?

1/2



Nr.3

Σ 7

- 1.) $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
- 2.) $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
- 3.) $\vec{L} \rightarrow \vec{L}$
- 4.) $\vec{s} \rightarrow \vec{s}$
- 5.) $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$
- 6.) $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$
- 7.) $h \rightarrow -h$

✓

Nr.4

Σ 6

$$|J_1 - J_2 - L| < J_{tot} < J_1 + J_2 + L$$

- 1.) $J_{tot} = 1, 2$ $P_{tot} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)^0 = -1$ 2/2
- 2.) $J_{tot} = 0, 1, 2$ $P_{tot} = 1 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -1$ 2/2
- 3.) $J_{tot} = 1, 2, 3$ $P_{tot} = 1 \cdot 1 \cdot (-1)^2 = 1$ 2/2

Nr.5

Σ 4

$$\text{Nukleon: } I = \frac{1}{2} \quad \text{Proton: } I_3 = \frac{1}{2} \quad \text{Neutron: } I_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |n\rangle + |n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |1, -1\rangle$$

$$|p\rangle + |p\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|p\rangle + |n\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |1, 0\rangle, |0, 0\rangle$$

✓ 1/1

2.)

Die Gesamtwellenfunktion des Deuterons setzt sich aus Produkt der Wellenfunktionen im Ortsraum, Spinraum und Isospinraum zusammen und muss antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Fermionen sein. Da der Raum- und Spinanteil symmetrisch sind, muss der Isospinanteil antisymmetrisch sein. ✓

2/2

3.)

Das Denteron ist mit einer Bindungsenergie von ca. 2,2 MeV eher schwach gebunden, die durchschnittliche Bindungsenergie eines Nukleons in einem Atomkern liegt bei ca. 7-8 MeV.

2
besonders1/1

Nr. 6 Σ 6

1.)

Der Spiegelkern von ${}^6\text{Be}$ ist ${}^6\text{He}$, da Spiegelkerne Paare von Isobaren sind, bei denen die Protonenzahl des einen Kerns der Neutronenzahl des anderen entspricht.

1/1

2.)

Die zusätzlichen Singlett-Zustände von ${}^6\text{Li}$ treten auf, da der Kern jeweils ein Proton und Neutron besitzt, welches allein in einer Schale sitzt und somit nach oben oder unten orientiert sein kann.

1/1

3.)

Aufgrund des Coulombterms $-a_s \cdot z(z-1) \cdot A^{-\frac{1}{3}}$ unterscheiden sich die Energieniveaus, da die Kerne unterschiedliche z besitzen.

1/1

4.)

Bei den kleineren Kernen ist der Einfluss durch den Asymmetrieterm als durch den Coulombterm. Bei ${}^3\text{Li}$ ist der Asymmetrieterm 0, während er für die anderen beiden Kerne $a_s \cdot \frac{(N-z)^2}{4A} = a_s \cdot \frac{4}{4A}$ beträgt.

21 \Rightarrow 4 dominiert

Maschen?

0/2

5.)

Gegeben: $\Delta M = M({}^{16}\text{O}) - M({}^{14}\text{C}) = 4,33 \text{ MeV}/c^2$ $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}$

$$\text{Annahme: } \Delta M = E_c({}^{16}\text{O}) - E_c({}^{14}\text{C}) \quad |E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z(Z-1)}{R}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} (8 \cdot 7 - 6 \cdot 5) \quad | \cdot R \quad | : \Delta M$$

$$R = \frac{1}{\Delta M} \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 26 \approx 4,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$r_0 = R \cdot A^{-\frac{1}{3}} \approx 1,87 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_B = \Delta M + 2(m_n - m_p - m_e) \approx 655 \text{ MeV}$$

3/4