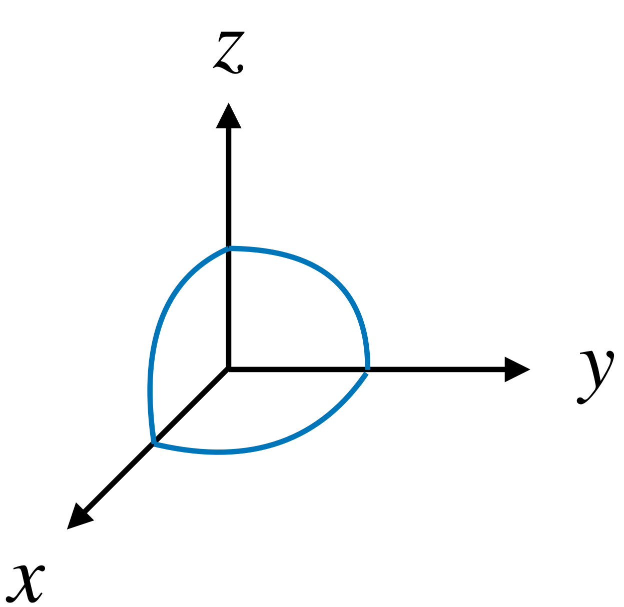
Vorlesung 18

Integrationsgrenzen :

$$\boxed{\begin{array}{llll} r' & : 0 & \dots & r \\ \theta & : 0 & \dots & \pi \\ \varphi & : 0 & \dots & 2\pi \end{array}}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}V = \int_0^r \mathrm{d}r'\, r'^2 \underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi}_{=2\pi}}_{=4\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Viel komplizierter in kart. Koordinaten :



Berechne einen **Oktanten** : $\frac{1}{8}V$

Integrationsgrenzen gegeben durch **Kugeloberfläche**

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

z.B.

$$
\begin{array}{rllll}
z & : 0 & \dots & r \\
y(z) & : 0 & \dots & \sqrt{r^2 - z^2} \\
x(y,z) & : 0 & \dots & \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}
\end{array}
$$

$$\frac{1}{8}V = \int_0^r \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^r \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \mathrm{d}y \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$$

$$= \int_0^r \mathrm{d}z \ \dots$$

nur noch mit Integraltafel …

```
Integrate[√(r^2 - y^2 - z^2), {z, 0, √(r^2 - z^2)}]
```

$$\mathrm{ConditionalExpression}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - z^2}\sqrt{-y^2 + z^2} + (r^2 - y^2)\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{\sqrt{-y^2 + z^2}}\right]\right),$$

$$\left(\left(\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right] > 1 \;\&\&\; \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - z^2}} \neq 0\right) \;||\; \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - z^2}} \notin \mathbb{R} \;||\right.$$

$$\left.\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right] < -1\right) \;\&\&\; \left(\frac{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[y]\,\mathrm{Re}[y]}}{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[z]\,\mathrm{Re}[z]}} \notin \mathbb{R} \;||\right.$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[y]\,\mathrm{Re}[y]}}{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[z]\,\mathrm{Re}[z]}}\right] \geq 0 \;||$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[y]\,\mathrm{Re}[y]}}{\sqrt{\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] - \mathrm{Im}[z]\,\mathrm{Re}[z]}}\right] \leq -1 \;||\; \Big(\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r] \leq$$

$$\mathrm{Im}[z]\,\mathrm{Re}[z] \;\&\&\; \mathrm{Im}[z]\left(\mathrm{Im}[y]^2 + \mathrm{Re}[r]^2 - \mathrm{Re}[y]^2\right)\mathrm{Re}[z] +$$

$$\mathrm{Im}[r]^2\,(\mathrm{Im}[y]\,\mathrm{Re}[y] - \mathrm{Im}[z]\,\mathrm{Re}[z]) +$$

$$\mathrm{Im}[r]\,\mathrm{Re}[r]\left(-\mathrm{Im}[y]^2 + \mathrm{Im}[z]^2 + \mathrm{Re}[y]^2 - \mathrm{Re}[z]^2\right) \geq$$

$$\left.\mathrm{Im}[y]\,\mathrm{Re}[y]\left(\mathrm{Im}[z]^2 + \mathrm{Re}[r]^2 - \mathrm{Re}[z]^2\right)\Big)\right)\Bigg]$$

Volumenelement in bel. Koordinaten u, v, w : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = J \cdot \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$

J : **Jacobi-Determinante**

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial k} := \left(\frac{\partial x}{\partial k}, \frac{\partial y}{\partial k}, \frac{\partial z}{\partial k} \right)$$

Polarkoordinaten : $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ $\longleftarrow$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

Zylinderkoordinaten : $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ $\longleftarrow$

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z$$

6.2 Schwerpunkt

Wir hatten SP für MPe definiert als :

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i \vec{r}_i \,\Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i \,\rho_i(\vec{r}_i)\,\Delta V_i$$

$N \to \infty$
$\Delta V_i \to 0$:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\,\rho_i(\vec{r})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

Notation !

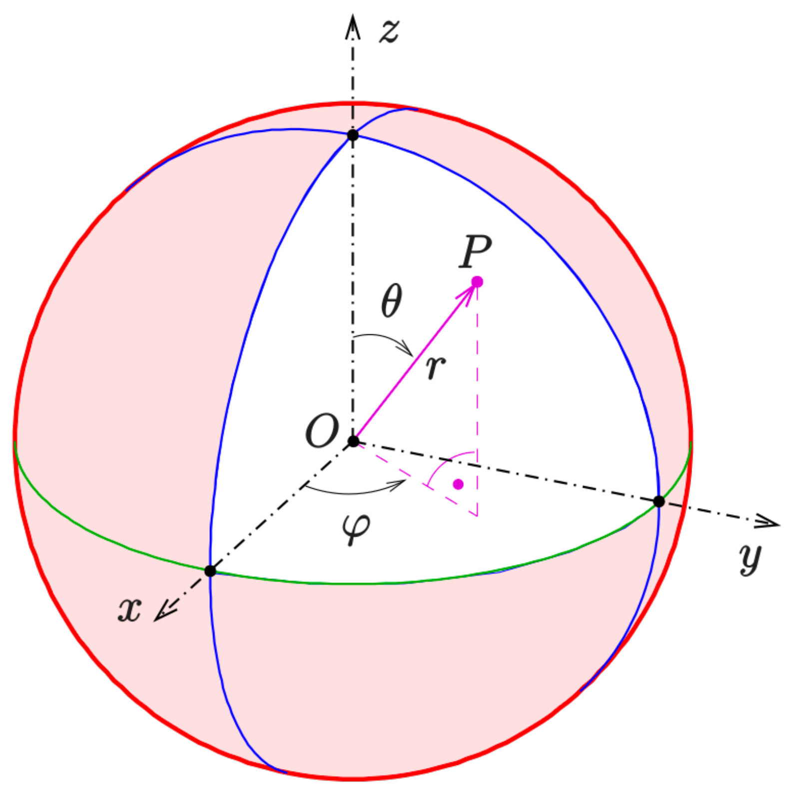
(kein 1D-Integral !)

Drei Komponenten : $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$

$$x_s = \frac{1}{M} \int_V x\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \quad y_s = \frac{1}{M} \int_V y\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V \quad z_s = \frac{1}{M} \int_V z\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

Homogener Körper : $\rho(\vec{r}) =$ const über $V \Rightarrow$ $\vec{r}_s = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V} \int \vec{r}\,\mathrm{d}V$

<u>Bsp.</u> homogene **Halbkugel** $x_s = y_s = 0$ (Symmetrieüberlegungen)



$$z_s = \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow \\ M = \rho \cdot V}}{M}} \int_V z \, \rho \, \mathrm{d}V = \frac{1}{V} \int z \, \mathrm{d}V \qquad z = r \cos\theta$$

$$= \frac{1}{V} \cdot \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \cos\theta \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{V} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}_{\frac{1}{2}\sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}} \quad = \frac{1}{V} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8} R$$ (Mit $V = \frac{2}{3} R^3 \pi$, Halbkugel)

$\boxed{\rightarrow x_s, y_s \text{ analog} \rightarrow \vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)}$

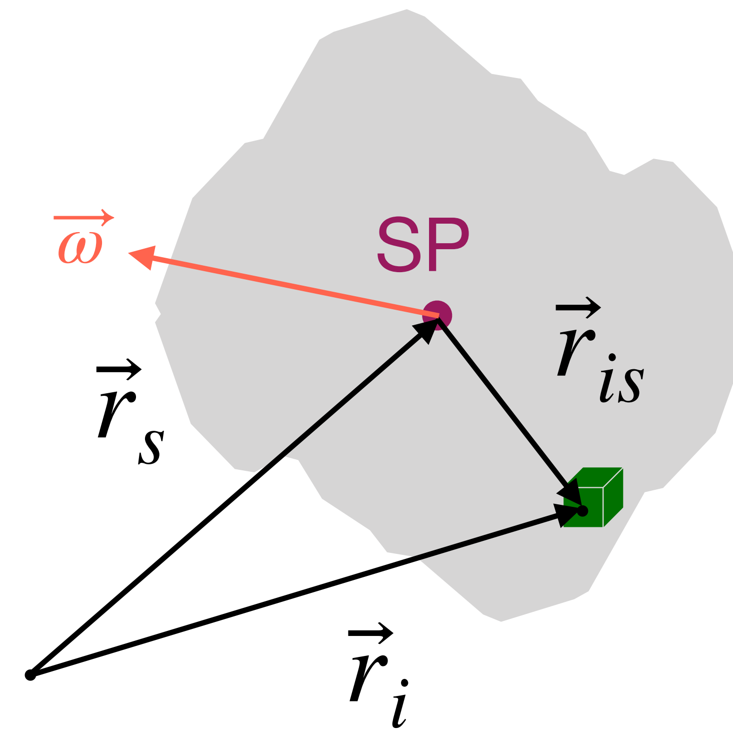
$$x_s \sim \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0 \,, \qquad y_s \sim \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0$$

6.3 Bewegung des starren Körpers

Zerlege den starren Körper in Volumenelemente ΔV_i mit Ortsvektoren $\vec{r}_i$

$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{r}_s$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{is}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$



Starrer Körper $\leftrightarrow$ $|\vec{r}_{is}| = \text{const.}$ $\leftrightarrow$ $\vec{r}_{is}^{\,2} = \text{const.}$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{is}^{\,2}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{r}_{is} \cdot \vec{v}_{is} = 0 \rightarrow \vec{r}_{is} \perp \vec{v}_{is}$$

($\Rightarrow$ Kreisbewegung!)

(Produktregel)

Wir können deshalb $\vec{v}_{is}$ schreiben als $\vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$

$\vec{\omega}$: Achse durch SP $\perp \vec{r}_{is}$ und $\perp \vec{v}_{is}$

Rotation um Schwerpunkt

Bewegung eines beliebigen Punktes i : $\quad \vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$

(des st. K)

Translation

(Geschw. Schwerpunkt)

Aber **Achtung** : $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

(kann sich zeitlich ändern!)

Freiheitsgrade :

MP :	3 Raumkoordinaten $\vec{r}(t)$	:	3 FG
st. K :	3 Raumkoordinaten + 3 Winkel	:	6 FG
bei festem SP :		:	3 FG
	+ 1 feste Drehachse	:	1 FG

6.4 Kräfte und Kräftepaare

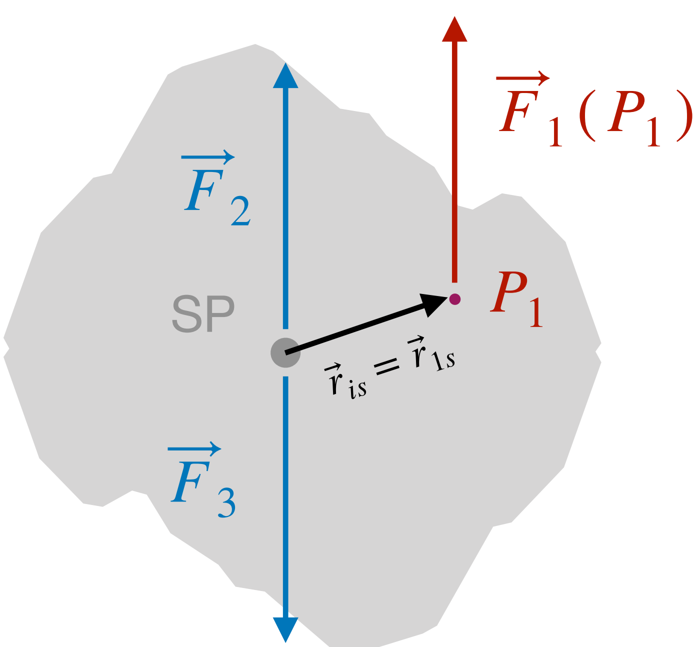
MP : Angabe der Kraft genügt um Bewegungsgleichungen zu lösen

st. K : Bewegung hängt davon ab, **wo** die Kraft angreift $\vec{F}_i(P_i)$

Angriffspunkt

→ **Versuch**: Holzbrett und Garnrolle

Um die Bewegungsänderung zu untersuchen wenden wir einen Trick an



Wir lassen am SP zwei Kräfte angreifen,

die sich vektoriell aufheben : $\vec{F}_2 \uparrow\downarrow \vec{F}_3$

(i.e. $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$)

Die Richtung ist so gewählt, dass $\vec{F}_2 || \vec{F}_1$ &

wir wählen die Beträge $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

→ Wir betrachten nun den **Effekt** von $\vec{F}_1 + \vec{F}_3$ und $\vec{F}_2$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_3$ setzt sich aus gleichgroßen, antiparallele Kräfte zusammen, die an unterschiedlichen Punkten (SP, P_1) angreifen $\leftrightarrow$ bilden sog. **Kräftepaar**

$\downarrow$

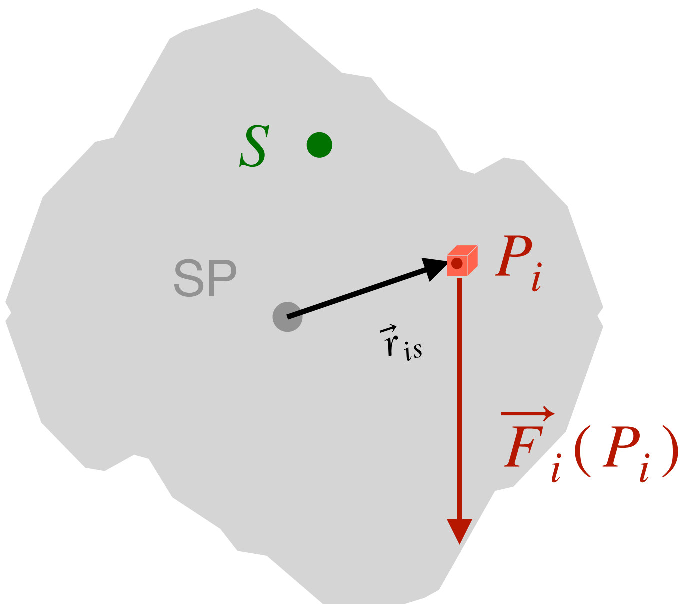
Bewirken **Drehmoment** bezogen auf SP : $\boxed{D_s = (\vec{r}_{1s} \times \vec{F}_1)}$ $\quad$ $\vec{F}_1 + \vec{F}_3$ bewegt SP nicht (!)

Aber $\vec{F}_2$: **beschleunigt** SP

$\downarrow$

Eine nicht am SP angreifende Kraft $\vec{F}_i(P_i)$ bewirkt ein Drehmoment, bezogen auf den SP und eine Beschleunigung des SPs.

Beispiel : Holzbrett (aufgehängt an beliebigem Punkt S)



Kraft, welche auf einen Punkt P_i wirkt mit Masse Δm_i :

$$\vec{F}_i(P_i) = \Delta m_i \cdot \vec{g}$$

→ Drehmoment am Punkt P_i : $\Delta \overrightarrow{D}_s = (\vec{r}_{is} \times \overrightarrow{F}_i) = \vec{r}_{is} \times \overrightarrow{g}\, \Delta m_i$

Gesamtdrehmoment : $\overrightarrow{D}_s = \int_V (\vec{r} \times \overrightarrow{g})\, \mathrm{d}m = -\overrightarrow{g} \times \int_V \vec{r}\, \mathrm{d}m = -M\, \overrightarrow{g} \times \vec{r}_s$

Definition des Schwerpunkts

mal die Masse des st. K!

Wähle Ursprung als Aufhängepunkt S um das Drehmoment zu bestimmen

→ Drehmoment : $\overrightarrow{D} = -M \cdot \overrightarrow{g} \times \vec{r}_s$ (wie MP mit M bei $\vec{r}_s$)

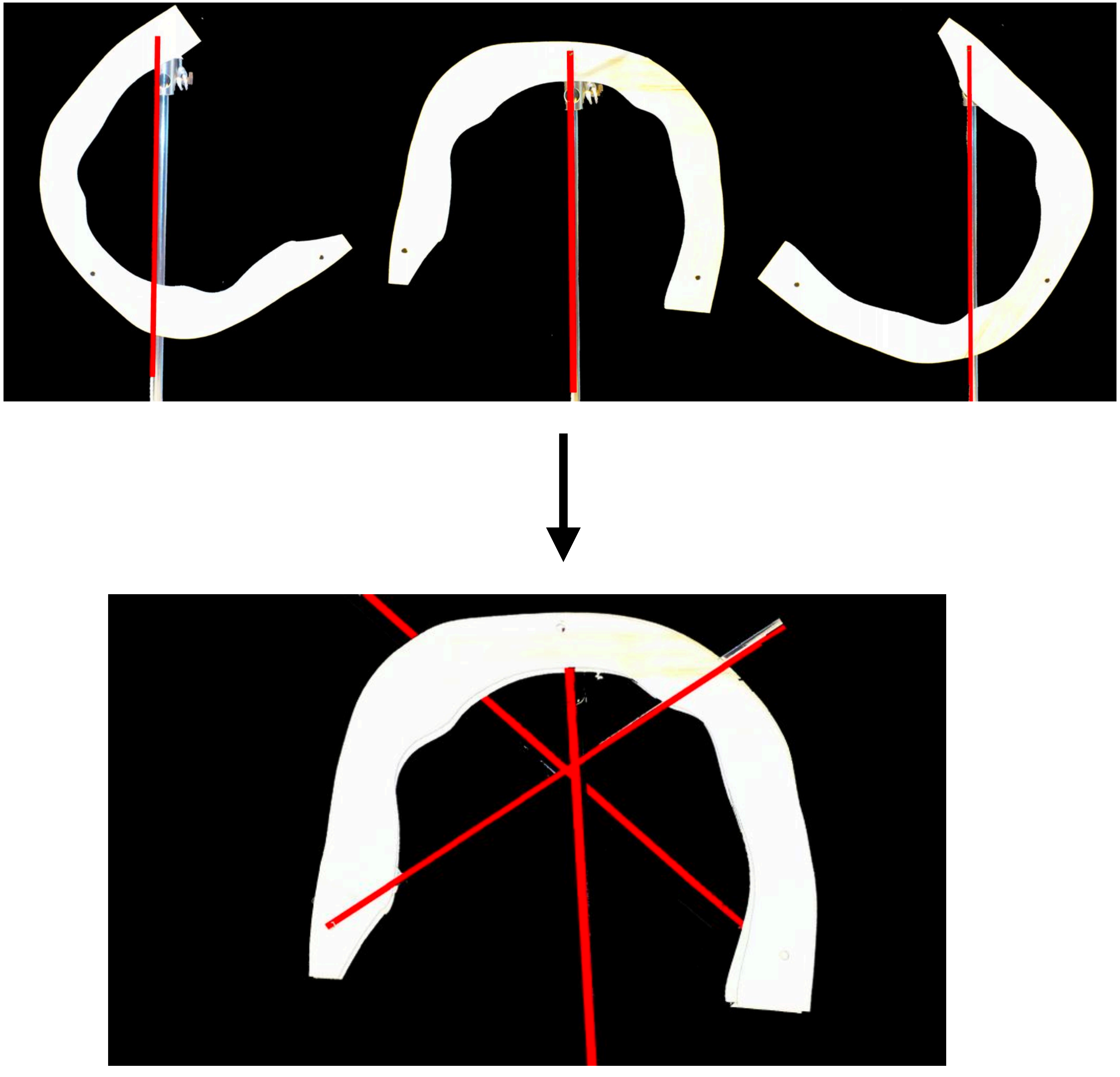
→ Rotation

Wenn : S = SP → $\overrightarrow{D} = 0$

$S \neq$ SP aber $\vec{r}_s \,||\, \overrightarrow{g}$ → $\overrightarrow{D} = 0$

→ Aufhängen in S : Lot geht durch SP

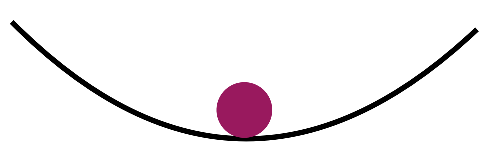
Versuch: SP-Bestimmung Holzbrett



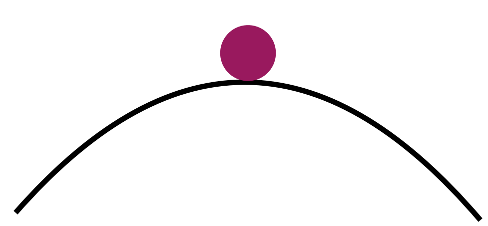
Gleichgewicht wenn $\sum_i \overrightarrow{D}_i = 0$ (und $\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0$)

stabil : $E_{\text{pot}} =$ (lokales) minimum **Auslenkung → rücktreibende Kraft**

Versuch: Uhrglas und Holzbrett (stabil wenn SP unter Aufhängepunkt)

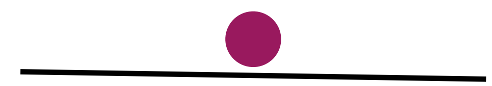


labil : $E_{\text{pot}} =$ maximum **→ kleine Auslenkung führt zu Änderungen des Zustandes.**



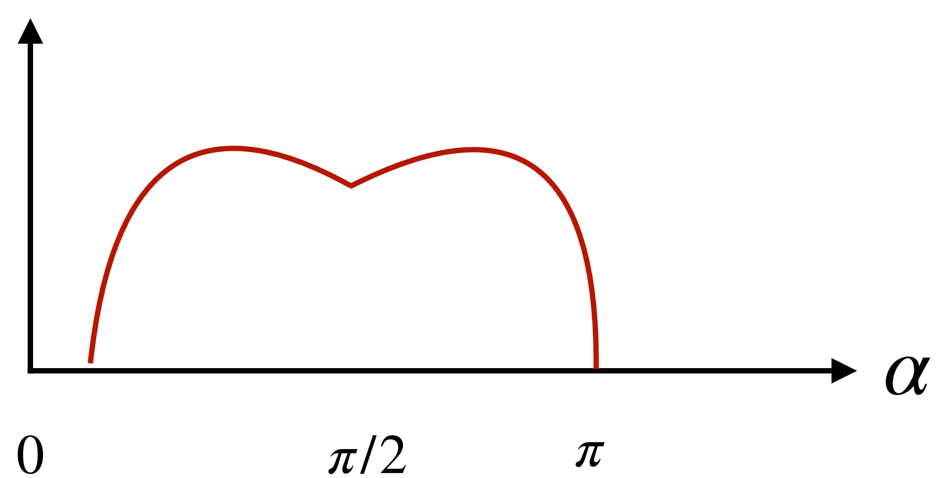
Versuch: Besen balancieren

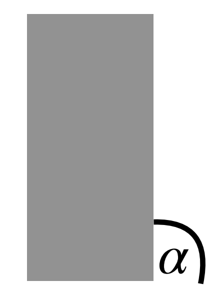
indifferent : $E_{pot} =$ const



Versuch: Holzbrett im SP

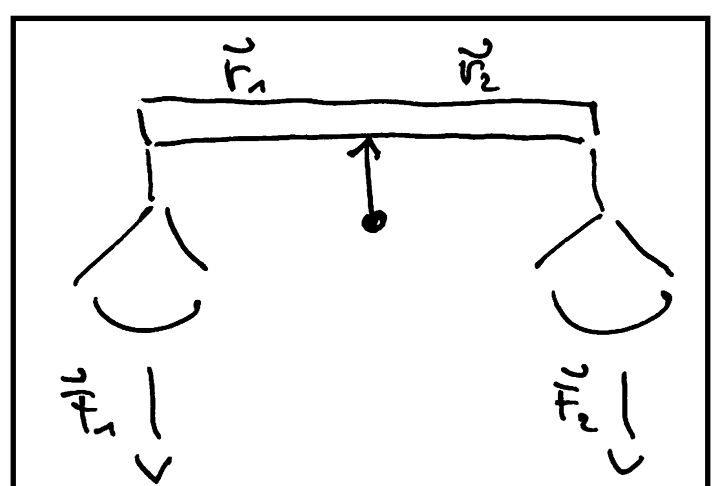
metastabil : E_{pot} hat nur **lokales** Minimum; Stabilität hängt von Größe der Auslenkung ab





Quader

Versuch: Balkenwaage



Gleichgewicht wenn:

$$\vec{F}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{F}_2 \times \vec{r}_2$$

"Hebelgesetz"