Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 4

Aufgabe 1 (3 Punkte). Beweisen oder widerlegen Sie für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ folgende Teilbarkeitsaussagen (hierbei binden in der dargestellten Formel Konjunktion und Disjunktion stärker als Implikationen):

(a) Aus $a|b$ und $a|c$ folgt $a|(b \cdot c)$.

(b) Aus $a|(b \cdot c)$ folgt $a|b$ oder $a|c$.

(c) Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Wir sagen für $a, b \in \mathbb{Z}$, dass "$a \equiv b \mod n$" gilt, wenn $n|(a-b)$ gilt. Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation darstellt, also die Eigenschaften "Reflexivität", "Symmetrie" und "Transitivität" erfüllt (vgl. Serie 3).

Aufgabe 3 (1+1 Punkte). Beweisen Sie in einem angeordneten Körper:

(a) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}$ stets $|xy| = |x||y|$ (Sie können dabei alles aus dem Skript, also der Vorlesung, benutzen, welches bis Satz 2.25(e) behandelt wurde.)

(b) Es gilt $x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte). Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ gegeben, also $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ mit $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Setze dann

$$x <_{\mathbb{Q}} y \iff ad <_{\mathbb{Z}} bc.$$

Hierbei bezeichne $<_{\mathbb{Z}}$ die auf den ganzen Zahlen wohlbekannte lineare Ordnung.

(a) Zeigen Sie, dass $<_{\mathbb{Q}}$ wohldefiniert ist, das heißt, dass die Beziehung $x <_{\mathbb{Q}} y$ nicht von der konkreten (gekürzten oder ungekürzten) Bruchdarstellung von x und y abhängt.

(b) Zeigen Sie, dass die Struktur $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ einen angeordneten Körper darstellt. inverse Elemente verwenden

Aufgabe 5 ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1$ Punkte). Es seien $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 2i + 1$ zwei komplexe Zahlen. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ sowie $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{1}{z_1}$. Schreiben Sie Ihr Ergebnis jeweils in der Form $a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (1+1+1+1 Punkte)**.** Berechnen Sie jeweils:

(a) Gesucht sind Real- und Imaginärteil von $z_1 = (1+i)^6$ sowie $z_2 = \frac{(1+2i)(3+4i)}{2+\frac{1+i}{2-3i}}$.

(b) Gesucht sind alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 16$.

(c) Gesucht sind Polarkoordinaten von $z = 1 - i$, berechnen Sie danach z^{10}.

(d) Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 - 1$ über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren.

Aufgabe 7 (2+2 Punkte)**.** Skizzieren Sie die beiden folgenden Mengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z - 1 + i| < 2\,\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| < |z - i|\,\}$

Sie können hier insgesamt **25 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **22 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Freitag, den 03. November, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.