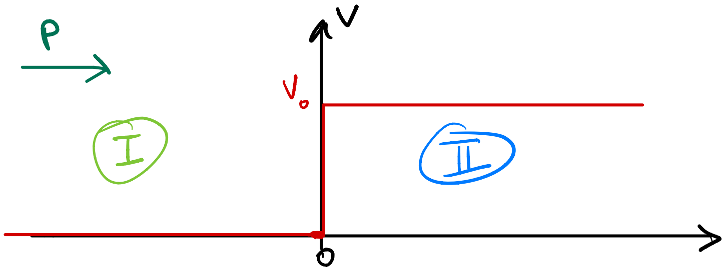
Mehr Beispiele: Stufenpotentiale

1. Einfache Potentialstufe



$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$$

Wir suchen Eigenfunktionen von $\hat{H}$, mit Energie E.

Fall 1: $E > V_0$

In Region I:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi \Rightarrow \psi'' = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \quad , \quad p^2 = 2mE$$

$$\Rightarrow \psi(x) = e^{ipx/\hbar} + R\, e^{-ipx/\hbar} \quad , \quad x \leq 0$$

In Region II:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = (E-V_0)\psi \Rightarrow \psi'' = -\frac{q^2}{\hbar^2}\psi$$

$$q^2 = 2m(E-V_0) > 0$$

Wir nehmen an: Teilchen "kommt" von links.

$$\rightsquigarrow \psi(x) = T e^{iqx/\hbar} \quad , \quad x > 0$$

$\rightsquigarrow$ Für $E > V_0$

Eingehende Wellenfunktion

Reflektierte Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ipx/\hbar} + R\, e^{-ipx/\hbar} & , x \leq 0 \\ T e^{iqx/\hbar} & , x > 0 \end{cases}$$

Durchgehende Wellenfunktion

R: Reflektionskoeffizent

T: Transmissionskoeffizient

Bedingungen: $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ müssen stetig sein bei $x = 0$:

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ p(1-R) = qT \end{cases}$$

Dies legt R und T fest. (Siehe Übung).

Deutung:

* Klassiche Mechanik (KM): Teilchen bewegt sich von link nach rechts, es wird abgebremst.

$$\text{Impuls} = \begin{cases} p = \sqrt{2mE} & , x \leq 0 \\ q = \sqrt{2m(E-V_0)} & , x > 0 \end{cases}$$

* QM: Mit Wahrscheinlichkeit $|R|^2$ wird das Teilchen REFLEKTIERT!

Fall 2: $E < V_0$

Region I: unverändert

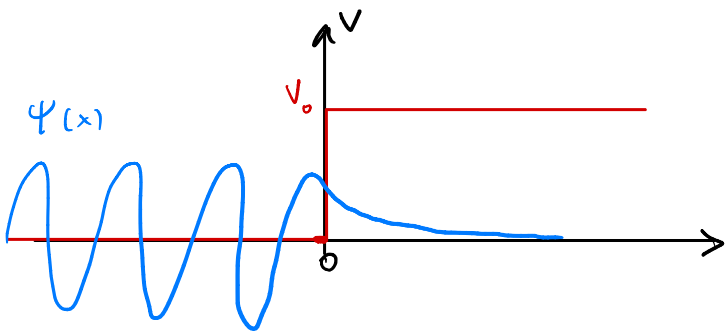
Region II: $\psi'' = \frac{\kappa^2}{\hbar^2}\psi \qquad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}$,

$$\Rightarrow \psi(x) = T e^{-\kappa x/\hbar} + A e^{\kappa x/\hbar}, \quad x > 0$$

Wir müssen $A = 0$ setzen, da $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$!

$$\rightsquigarrow \psi(x) = \begin{cases} e^{ipx/\hbar} + R e^{-ipx/\hbar} \\ T e^{\kappa x/\hbar} \end{cases}$$

Stetigkeitsbedingungen: $1 + R = T$, $P(1-R) = \kappa T$

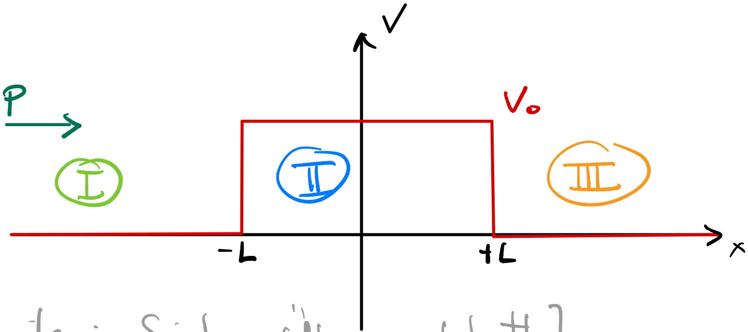


Deutung:

* KM: Teilchen kommt von links, und wird an Potentialbarriere reflektiert
* QM: Wahrscheinlichkeit dass Teilchen bei $x > 0$ ist

$$P(x>0) = \int_0^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = |T|^2 \int_0^{+\infty} dx\, e^{-\kappa x/\hbar} \overset{!}{=} \frac{\hbar |T|^2}{\kappa} \neq 0$$

2. Tunneleffekt



[Details: Siehe Übungsblatt]

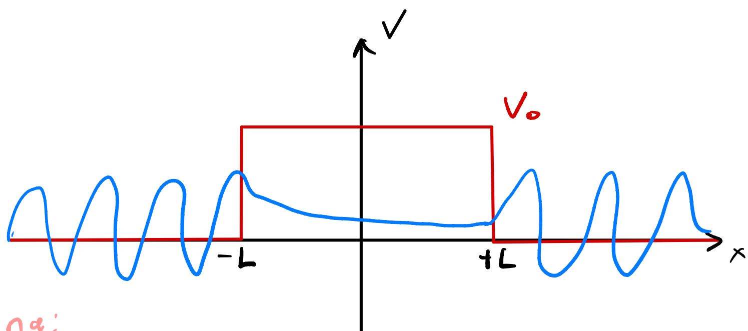
Annahme: $E = \frac{p^2}{2m} < V_0$.

Schrödingergleichung:

Region I: $\psi'' = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \rightsquigarrow \psi(x) \sim A e^{ipx/\hbar} + B e^{-ipx/\hbar}$

Region II: $\psi'' = \frac{\kappa^2}{\hbar^2}\psi \rightsquigarrow \psi(x) \sim C e^{-\kappa x/\hbar}$

Region III: $\psi'' = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \rightsquigarrow \psi(x) \sim D e^{ipx/\hbar}$



Deutung:

* KM: Teilchen wird an Potentialbarriere reflektiert.
* QM: Es gibt eine nicht verschwindende Wahrschein. dass Teilchen nach $x > L$ "tunnelt".

Hilberträume & Dirac Formalismus

Hilberträume

* Sei V ein komplexer Vektorraum.
  Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ so dass

  1) $\forall u, v, w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

  $$\langle u | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle$$

  $$\langle \alpha u + \beta v | w \rangle = \bar{\alpha} \langle u | w \rangle + \bar{\beta} \langle v | w \rangle$$

  2) $\forall u, v \in V$, $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$

  3) $\forall v \in V$, $\langle v | v \rangle \geq 0$ und

  $$\langle v | v \rangle = 0 \iff v = 0.$$

* u, v sind orthogonal falls $\langle u | v \rangle = 0$
* Ein Skalarprodukt induziert eine Normfunktion: $\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$
* Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

* Eine Basis $\{e_i\}$ von V ist eine Orthonormalbasis (ONB) Falls $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Dann, Falls $v = \sum_i v^i e_i$, dann

$$v^i = \langle e_i | v \rangle$$

* Sei $u_1, u_2, u_3, \dots$ eine Folge in V.
  Es ist eine Cauchy-Folge Falls

$$\| u_i - u_j \| \longrightarrow 0 \quad \text{wenn } i,j \to \infty$$

N.B: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, aber nicht jede Cauchy-Folge konvergiert!

In (topologischer) Raum indem jede Cauchy-Folge konvergiert heisst vollständig.

⟶ Ein endlich-dim. Vektorraum ist vollständig.

Definition Ein Hilbertraum ist ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

[Ab hier: $\mathcal{H}$ bezeichnet einen Hilbertraum]

N.B.: Falls $\mathcal{H}$ ∞-dim, dann hat jede Basis ∞ viele Elemente

$\rightsquigarrow$ abzählbar oder überabzählbar viele

$\rightsquigarrow$ Falls $\mathcal{H}$ eine Basis mit höchstens abzählbar vielen Elementen hat, dann heisst $\mathcal{H}$ <u>separabel</u>.

<u>Beispiel:</u>

$$\mathcal{H} = L^2(A, d\mu) = \left\{ f : A \to \mathbb{C} : \int_A d\mu \, |f|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_A d\mu \, f^*(x) \, g(x)$$

Der Dualraum

* Eine Linearform auf V ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{C}$.

* <u>Dualraum</u> von V :

$$V^* = \{ \varphi : V \to \mathbb{C} : \varphi \text{ linear} \}$$

* Es gilt immer $V^* \simeq V$, und somit

$$\dim V^* = \dim V .$$

Falls $\{e_i\}$ eine Basis von V, dann ist eine Basis von V^* $\{e_i^*\}$ mit

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

* Falls $V = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum, dann ist der Isomorphismus natürlich:

- Sei $v \in \mathcal{H}$. Wir definieren

$$\varphi_v := \langle v | \cdot \rangle$$

i.e. $$\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle , \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

- Sei $\varphi \in \mathcal{H}^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $v \in \mathcal{H}$ so dass $\varphi = \varphi_v$.

Bra-Ket Notation

- Elemente von $\mathcal{H}$: $|v\rangle$ "Ket"
- Elemente von $\mathcal{H}^*$: $\varphi_u \equiv \langle u|$ "Bra"

$$\varphi_u(v) = \langle u | v \rangle$$

Bra-c-Ket

⚠ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$|\alpha u + \beta v\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |v\rangle$$

$$\langle \alpha u + \beta v| = \overline{\alpha} \langle u| + \overline{\beta} \langle v|$$