HA05

Samstag, 5. November 2022 13:54

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ
3,5/5	2,5/3	2/2	1,5/3	5,5/6	2/4	2,5/3	5/6	24,5/25

Lisa Peltze, Angelo Brade

(2)

a)

warum dürft ihr die Terme aufteilen und was ist mit 1?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11n+7n^2}{13n^3}+1 \overset{=}{\cancel{\Leftrightarrow}} \lim_{n\to\infty}\frac{11n}{13n^3}+\lim\frac{7n^2}{13n^3}+1 \overset{=}{\cancel{\Leftrightarrow}} \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{11}{13n^2}}_{\text{gegen } 0 \text{ Nullfolge}}+\lim\underbrace{\frac{7}{13n}}_{\text{gegen } 0 \text{ Nullfolge}}+1 \Leftrightarrow a=1$$ ok

+0,5P

Da die Folge a_n den Grenzwert $a=1$ hat, konvergiert sie. ✓

b)

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{(-1)^n}_{\text{ändert das Vorzeichen}}\frac{2^n}{3^n}\left.\begin{matrix}\} n \text{ zur Basis } 2\\ \} n \text{ zur Basis } 3\end{matrix}\right\} 3>2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} \text{ ist eine Nullfolge} \Rightarrow a=0$$ ✓

ändert das Vorzeichen
↳ nicht relevant, wenn der Rest gegen 0 konvergiert ✓

Da die Folge a_n den Grenzwert $a=0$ hat, konvergiert sie. ✓ +1P

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)(1+n)}{(2-n)^2}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{\cos(n)}^{\text{zwischen } -1 \text{ und } 1}}{2-n}}_{\text{Nullfolge}}\cdot\frac{1+n}{\underbrace{2-n}} \overset{\approx}{\cancel{\Rightarrow}} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{2-n}\cdot\frac{n}{-n}=\lim_{n\to\infty} -1\cdot\underbrace{\frac{\cos(n)}{2-n}}_{\text{Nullfolge}} \Rightarrow a=0$$ ok

Addierte Konst. irrelevant für große n

Da die Folge a_n den Grenzwert $a=0$ hat, konvergiert sie. ✓ +1P

2,5/5

(4) $a_n = n^{\frac{1}{2}}$: divergiert und Differenz zum Folgeglied wird geringer. wäre noch zu zeigen +0,5P

Da die Glieder der Zahlenfolge beliebig groß werden können, wird sie nicht konvergieren und die Folge kann somit keine Cauchy-Folge sein. ✓ +1P

1,5/3

(8)

a) $z^3 = 1 \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=0$

$z^3 = 1\cdot e^{i0}$

$z_k = \sqrt[3]{1}\cdot e^{i\left(\frac{0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)k} = e^{i\frac{2}{3}\pi k} \qquad k\in\{0,1,2\}$

$\mathbb{L}=\{z\in\mathbb{C} \wedge k\in\{0,1,2\} \mid z_k=e^{i\frac{2}{3}\pi k}\}$ ✓

wäre gut alle explizit anzugeben, da man manche vereinfachen kann.

$z^8=1 \qquad \phi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=0 \qquad z^{8}=1e^{i0}$

$z=\sqrt[8]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{8}+\frac{2\pi}{8}\right)k} = e^{i\frac{1}{4}\pi k} \qquad k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathbb{L}=\{z\in\mathbb{C} \wedge k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\} \mid z_k=e^{i\frac{1}{4}\pi k}\}$ ✓

+0,5P

b) $z^5=1 \qquad \phi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=0$

$z^5 = 1\cdot e^{i0}$

$z=\sqrt[5]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)k} \qquad k=1,2,3,4,5$

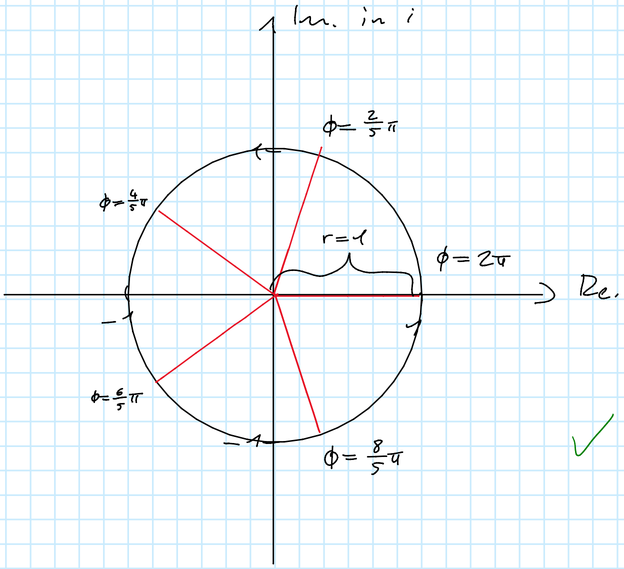
$z_1=e^{i\frac{2}{5}\pi}$; ✓ $z_2=e^{i\frac{4}{5}\pi}$; ✓

$z_3=e^{i\frac{6}{5}\pi}$; ✓ $z_4=e^{i\frac{8}{5}\pi}$ ✓

$z_1 = e^{i\frac{2}{5}\pi}$; $z_2 = e^{i\frac{4}{5}\pi}$;

$z_3 = e^{i\frac{6}{5}\pi}$; $z_4 = e^{i\frac{8}{5}\pi}$

$z_5 = e^{i2\pi} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z_1 = e^{i\frac{2}{5}\pi}, z_2 = e^{i\frac{4}{5}\pi}, z_3 = e^{i\frac{6}{5}\pi}, z_4 = e^{i\frac{8}{5}\pi}, z_5 = e^{i2\pi} \}$ ✓



✓

+1P

d)

$$\frac{(1-i)^5 - 1}{(1-i)^3 + 1} = \frac{-5+4i}{-1-i2} \cdot \frac{-1+i2}{-1+i2} = \frac{5 - i10 - i4 + 8i^2}{1 - i2 + i2 - 4i^2} = \frac{-3-14i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{14}{5}i \Rightarrow Re(z) = -\frac{3}{5} \land Im(z) = -\frac{14}{5}$$ ✓ +1P

e) $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

↓ wie?

$z = 1+i \Rightarrow Re(z) = 1 \land Im(z) = 1$ ✓ +0,5P

f) $z = -4-4i$; $r = |z| = \sqrt{32} = 4\cdot\sqrt{2} \land \theta = \frac{5}{4}\pi$

$z = 4\cdot\sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$ ✓ +1P

c)

$z = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i) \Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow r = 1 \land \phi = \frac{4}{3}\pi$

$= 1e^{\frac{4}{3}\pi i}$ z.z.: $(\bar{z})^4 \overset{!}{=} \bar{z}$

$1^4 e^{i\frac{4}{3}\pi\cdot 4} = 1e^{i\frac{16}{3}\pi (+2\pi i)}$ warum?

$= 1e^{i\frac{22}{3}\pi} = 1e^{i\frac{4}{3}\pi} \overset{!}{=} 1e^{i\frac{4}{3}\pi}$ ok +1P

5/6

(7)

a) Jede konvergente Folge hat einen Häufungspunkt. z.B.:
$a_n = 0$: a_n konvergiert gegen 0 und hat einen Häufungspunkt bei 0 ✓ +1P

b) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Eine konvergente Folge kann per Definition nur einen Häufungspunkt haben. (hier wär eine Begründung gut warum) Das impliziert, dass eine Nullfolge nicht mehr als einen Häufungspunkt haben kann. Da das geforderte a_n einen weiteren Häufungspunkt bei 1 fordert, kann es das geforderte a_n nicht geben. ✓ +0,5P

c) $a_n = \frac{1}{4}n + ((-1)^n \cdot \frac{1}{4}n)$

$a_0 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 0$; $a_4 = 2$; ...

a_n ist für jedes $n \in \mathbb{N} \land n :=$ ungerade auf 0 und für jedes $n \in \mathbb{N} \land n :=$ gerade auf $\frac{n}{2}$ ✓ +1P

2,5/3

(6)

$b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

$$\underbrace{\frac{(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n+1}}_{\text{Die Summe einer Anzahl } n+1 \text{ an Folgegliedern wird durch die Anzahl } n+1 \text{ geteilt.}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1}$$

b_n stellt den Durchschnitt der Folgenglider von a_0 bis a_n dar. Entsprechen sind das $n+1$ Werte.
Der Durchschnitt der Folgenglieder geht mit immer größeren n immer näher an den Grenzwert a heran.
Daraus folgt, dass mit $\lim_{n\to\infty} b_n$ gegen a konvergiert.

Das reicht leider nicht ganz aus.

2/4

1.

$a_n := 1 + \frac{1}{n}$

1 konvergiert gegen 1

$\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0

$1 + 0 = 1$

Warum dürft ihr die Terme getrennt betrachten?

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$\left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad | \cdot n_0 \; | : \varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$

Wähle n_0 so das $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ gilt

z.B. $\left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{2}{\varepsilon}$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} < \varepsilon$ □ ✓

+ 0,5P

$b_n := \frac{1+n^2}{1-n^2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+n^2}{1-n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{-n^2} = -1$

weil die 1 bei einem Limes gegen Unendlich keinen großen Unterschied macht, kann sie auch weggelassen werden ok, geht sauberer +1P

$c_n := n - \sqrt{n}$ $\quad n - n^{0,5}$

$\rightarrow n\left(1 - \frac{1}{n^{0,5}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = n \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{n^{0,5}}{n}\right) = n \cdot \left(1 - n^{0,5-1}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot (1 - 0)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n$

hier dürftet ihr es streng genommen nicht auseinander ziehen

$= \infty$ ist divergent +0,5P

$d_n := \frac{2n^3+1}{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(\frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(\frac{2}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^3}{-1}\right)$ selbiges wie bei c_n

$= \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(2n^2+1\right)$

$= \infty$ divergiert ✓ +0,5P

$e_n := 2^{-n^2}$

$\lim_{n\to\infty} 2^{-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{2^{n^2}}_{\text{Teiler geht gegen unendlich}}}$ konvergiert gegen 0 ok +1P

3,5/6

Afg 3.

$$a_n := \frac{n^2-2}{2n^2+22n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{2n^2+22n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\cancel{n^2}\cdot(1-\frac{2}{n^2})}{\cancel{n^2}\cdot(2+\frac{22}{n})} = \frac{1-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{22}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{22}{n}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n}{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{22n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

konvergiert gegen $\frac{1}{2}$

Da die Folge einen Grenzwert a hat, konvergiert sie ✓

2/2

Auf 5

$a_0 := 2 \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n - 1}$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	2	$\sqrt{3}$	1,569	1,4627	1,38759	1,33235

a)

Induktions Anker

für $n=1$ gilt:

$a_1 = \sqrt{2 \cdot a_0 - 1} = \sqrt{3}$ $\qquad 1 \leq \sqrt{3} \leq 2$ ✓ ok oder $a_0 = 2$ $1 \leq 2 \leq 2$:D

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$

Induktionsschritt

$1 \leq a_n \leq 2 \quad | \cdot 2$

$2 \leq 2a_n \leq 4 \quad | -1$

$1 \leq 2a_n - 1 \leq 3 \quad | \sqrt{}$

$1 \leq \sqrt{2a_n - 1} \leq \sqrt{3}$

$1 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{3}$

$1 \leq a_{n+1} \leq 2$ gilt, da $1 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{3}$ gilt und $\sqrt{3}$ ist kleiner als 2. Dazu ist $\sqrt{3} = a_1$ und für $n \to \infty$ wird a_n immer kleiner ✓

+1P

Definition 3.17:

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

(a) (a_n) ist **strikt monoton wachsend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m < a_n$
(b) (a_n) ist **monoton wachsend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m \leq a_n$
(c) (a_n) ist nach **oben beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle n gilt: $a_n < b$
(d) (a_n) ist **strikt monoton fallend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m > a_n$
(e) (a_n) ist **monoton fallend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m \geq a_n$
(f) (a_n) ist nach **unten beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle n gilt: $a_n > b$
(g) Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt **beschränkt**.

b) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$

$a_{n+1} \overset{!}{<} a_n$

Wenn $a_{n+1} < a_n$ dann $a_{n+1} - a_n < 0$

$\sqrt{2a_n - 1} - a_n < 0 \mid \square^2$ $\quad (\sqrt{2a_n-1} - a_n)^2 = 2a_n - 1 - 2a_n\sqrt{2a_n-1} + a_n^2$

$\Leftrightarrow 2a_n - 1 - a_n^2 < 0$ f

$\Leftrightarrow -(a_n - 1)^2 < 0$

a_{n+1} ist kleiner als a_n, also ist a_n monoton fallend ok

+0,5P

c) & d)

Wir haben in a) bewiesen, dass $1 \leq a_{n+1} \leq \sqrt{3}$ und $a_1 = \sqrt{3}$

In b) haben wir bewiesen, dass a_n monoton fällt.

a_n konvergiert also von $a_1 = \sqrt{3}$ monoton fallend gegen 1 ✓

+4P

5,5/6

Auf 6. $b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$

Der Teil $(a_0 + a_1 + \ldots a_n)$, der Folge, konvergiert gegen den Grenzwert a, F a_n konvergiert gegen a nicht $\sum_k a_k$

der andere Teil $(\frac{1}{n+1})$ konvergiert gegen 0. Da $\frac{1}{n+1}$ aber nicht gleich Null ist, steht niemals mal Null in der Folge. Da $\frac{1}{n+1}$ gegen Null konvergiert, je größer n wird desto kleiner ist die Auswirkung von $\frac{1}{n+1}$ und $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ hat die Hauptauswirkung auf die Konvergenz. $b_n := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ konvergiert also gegen a leider nicht korrekt