Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

11.10.2024
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 1

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 18.10.2024)

1.1 Wahrscheinlichkeitstheorie **25 Punkte**

In dieser Aufgabe möchten wir die für die statistische Physik grundlegenden Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholen. Hierbei betrachten wir sowohl eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Binomialverteilung*, als auch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Gaußverteilung*.
Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung, die einem Ereignis e aus der Ereignismenge E mit einer gewissen *Wahrscheinlichkeit* einen Wert x aus einer Menge Ω zuordnet

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow \Omega \\ e &\longmapsto x \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Anzahl $n(x)$, mit der das Ereignis x bei N-maliger Durchführung eines Zufallsexperiments eintritt, geteilt durch N heißt relative Häufigkeit $n(x)/N$ von x. Im Grenzfall $N \to \infty$ geht diese i.A. in eine feste Zahl über, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses x: $w(x) = \lim_{N\to\infty} n(x)/N$. Dies definiert eine Funktion $W(x)$, die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von x genannt wird,

$$\begin{aligned} W : \Omega &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto w(x) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei kann x diskrete oder kontinuierliche Werte annehmen. Aus der Definition der relativen Häufigkeit folgt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf 1 normiert ist[1]:

$$\int_\Omega w(x) \ \mathrm{d}x = 1 \ . \tag{3}$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\langle X \rangle := \int_\Omega w(x) \cdot x \ \mathrm{d}x \ . \tag{4}$$

Des Weiteren sind die n-ten Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert als

$$\mu_n := \langle X^n \rangle := \int_\Omega w(x) \cdot x^n \ \mathrm{d}x \ . \tag{5}$$

Ein Maß für die Schwankung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert ist gegeben durch das Schwankungsquadrat[2], auch Varianz genannt,

$$(\Delta x)^2 := \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \, . \tag{6}$$

[1]Für den Fall einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung muss das Integral durch eine entsprechende Summe ersetzt werden.

[2]Machen Sie sich klar, dass die zweite Gleichheit nicht gefordert werden muss, sondern aus der Linearität des Erwartungswertes folgt.

a) (9P) Als erste Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachten wir die diskrete *Binomialverteilung*. Diese gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Abfolge von N unabhängigen Versuchen, welche nur zwei Ergebnisse "Erfolg" oder "Misserfolg" zulassen, genau k-mal "Erfolg" zu erzielen. Hierbei ist die Reihenfolge der Ergebnisse nicht von Belang. Sei $0 \leqslant p \leqslant 1$ die Wahrscheinlichkeit für "Erfolg", dann lässt sich die *Binomialverteilung* ausdrücken als

$$B(k; p, N) = \binom{N}{k} \, p^k \, (1-p)^{N-k} \; , \tag{7}$$

wobei $0 \leqslant k \leqslant N$ ist, d.h. $\Omega = \{0, 1, \cdots, N\}$.

i) Zeigen Sie, dass die *Binomialverteilung* normiert ist.

ii) Berechnen Sie die ersten zwei Momente der *Binomialverteilung*, d.h. $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$.

iii) Bestimmen Sie das Schwankungsquadrat.

b) (9P) Eine der wichtigsten kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die *Gaußverteilung*. Hierbei kann die Zufallsvariable X jede reelle Zahl annehmen, d.h. $\Omega = \mathbb{R}$. Die *Gaußverteilung* wird beschrieben durch

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \; . \tag{8}$$

Wir möchten nun einige Momente dieser Verteilung berechnen.

i) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \; , \tag{9}$$

wobei $a > 0$ gilt.
<u>*Hinweis*:</u> Berechnen Sie zunächst das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe von (9) das Integral

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+Jx} \, \mathrm{d}x \; , \tag{10}$$

wobei J eine Hilfsgröße ist.

iii) Bestimme für die *Gaußverteilung* die Größen $\langle X \rangle \, , \; (\Delta x)^2 \, , \; \langle X^4 \rangle \, .$
<u>*Hinweis*:</u> Man kann diese berechnen, indem man $\frac{\partial^n}{\partial J^n} Z(J)\big|_{J=0}$ mit den Momenten der *Gaußverteilung* in Verbindung bringt. $Z(J)$ heißt deshalb erzeugende Funktion.

c) (7P) Eine weitere, sehr hilfreiche Methode zur Berechnung von Momenten der *Gaußverteilung* kann mithilfe der Gamma-Funktion

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \mathrm{d}x \tag{11}$$

hergeleitet werden, wobei wir hier nur die Fälle $n > 0$ betrachten.

i) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

ii) Zeigen Sie, dass

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \text{gerade}}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \left(2\sigma^2\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \tag{12}$$

<u>*Hinweis*</u>: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

1.2 Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen **15 Punkte**

In der klassischen Mechanik haben Sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren kennengelernt. Diese ermöglicht es, die Extrema eines Funktionals unter der Berücksichtigung von Nebenbedingungen zu berechnen. Diese Methode wird sich auch in der statistischen Physik als zentral nützlich erweisen. Hier wollen wir diese Methode jedoch zunächst an einem Beispiel aus der klassischen Mechanik in Erinnerung rufen.
Wir betrachten ein Seil mit konstanter (Linien-)Dichte ρ und Länge L, das an zwei Punkten $\boldsymbol{P} = (x_P, z_P)$ und $\boldsymbol{Q} = (x_Q, z_Q)$ aufgehängt sei (siehe Abb. 1). Auf das Seil wirke die Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\hat{e}_z$. Das Seil stellt sich dabei so ein, dass die potentielle Energie U minimal wird. Ein infinitesimales Wegelelement auf der Seilkurve sei mit $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ bezeichnet.

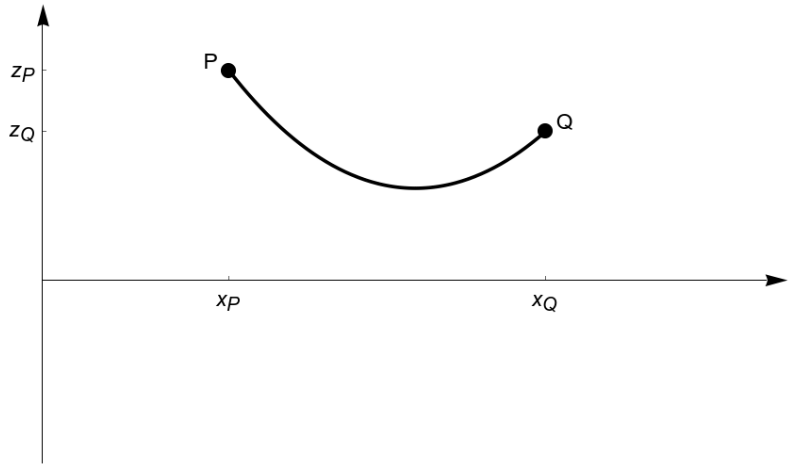

Abbildung 1: Hängendes Seil

a) (4P) Geben Sie einen Ausdruck für das Funktional der potentiellen Energie an, indem Sie das Linienelement $|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|$ durch $x, z(x)$ ausdrücken und die Zwangsbedingung konstanter Seillänge mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren implementieren. Zeigen Sie, dass das Funktional der potentiellen Energie dann geschrieben werden kann als

$$U = \rho g \int_{x_P}^{x_Q} dx\, \mathcal{F}(z, z', x)$$

wobei $\mathcal{F}(z, z', x) = (z - \lambda)\sqrt{1 + z'^2}$ und $z' = dz/dx$. λ ist der Lagrange-Multiplikator.

b) (4P) Das Funktional $\mathcal{F}$ aus Teil a) hängt nicht explizit von x ab. Verwenden Sie dies, um eine Differentialgleichung erster Ordnung für $z(x)$ zu finden.

c) (5P) Lösen Sie die Differentialgleichung mit den Randbedingungen $(x_P, z_P) = (-d, 0)$ und $(x_Q, z_Q) = (d, 0)$ um zu zeigen, dass diejenige Kurve, für die die potentielle Energie des hängenden Seils minimal wird, gegeben ist durch

$$z(x) = k \cosh \frac{x}{k} - k \cosh \frac{d}{k}$$

Hierbei ist $k \in \mathbb{R}$ eine Konstante.
(Hinweis: Die Substitution $u = \cosh(v)$ könnte hilfreich sein.)

d) (2P) Verwenden Sie die Zwangsbedingung konstanter Seillänge, um eine Beziehung zwischen k und L zu finden.