HA12

Lisa Peltzer, Angelo Brade

Donnerstag, 22. Dezember 2022 16:01

(1)

a)

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{n+1}=A\cdot A^{n};\ A^{0}=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{1}=A^{1}\cdot A^{0}=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{2}=A^{1}\cdot A^{1}=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{3}=A^{1}\cdot A^{2}=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{8}=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 24\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$D^{1}=\begin{pmatrix}2^{1} & 0\\ 0 & 3^{1}\end{pmatrix}$

$D^{2}=\begin{pmatrix}2^{2} & 0\\ 0 & 3^{2}\end{pmatrix}$

$D^{3}=\begin{pmatrix}2^{3} & 0\\ 0 & 3^{3}\end{pmatrix}$

$D^{10}=\begin{pmatrix}2^{10} & 0\\ 0 & 3^{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1024 & 0\\ 0 & 59043\end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{array}{l|ccc|ccc|l} I & \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \\ II & 4 & \lambda+2 & \lambda & 0 & 1 & 0 & II\cdot 2-I \\ III & 1 & 2 & \lambda & 0 & 0 & 1 & III\cdot 8-I \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda & 1 & 0 & 0 & I-III \\ 4 & \lambda+2 & \lambda & 0 & 1 & 0 & I- \\ 1 & 2 & \lambda & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ccc|ccc|} I & \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ II & -\lambda & -2 & \lambda & -1 & 2 & 0 \\ III & -\lambda & -2\lambda+14 & 7\lambda & -1 & 0 & 8 \end{array}$$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda\\ 4 & \lambda+2 & \lambda\\ 1 & 2 & \lambda\end{pmatrix}$$

$=(\lambda+8)((\lambda+2)\cdot\lambda-2\lambda)-((2\lambda+2)((\lambda-1\lambda))+\lambda(8-(\lambda+2))$

$=(\lambda+8)(\lambda^{2}+2\lambda-2\lambda)-((2\lambda+2)\cdot 3\lambda)+\lambda(6-\lambda)$

$=(\lambda+8)\lambda^{2}-(6\lambda^{2}+6\lambda)+6\lambda-\lambda^{2}$

$=\lambda^{3}+8\lambda^{2}-6\lambda^{2}-6\lambda+\lambda 6-\lambda^{2}$

$=\lambda^{3}+\lambda^{2}$

$0=\lambda(\lambda^{2}+\lambda)$

$\lambda_{1}=0\ \wedge\ \lambda_{2}=-1$

Die Matrix ist für $\lambda=0$ und $\lambda=-1$ nicht invertierbar.

(5)

$$A-\lambda E=\left|\begin{array}{ccc}4-\lambda & 4 & 2\\ -5 & -8-\lambda & -13\\ 8 & 16 & 26-\lambda\end{array}\right| \begin{array}{l}4I-III\\ 2II+III\\ \ \end{array}$$

$$A\left|\begin{array}{ccc}8-4\lambda & 0 & -18+\lambda\\ \ldots\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{matrix} 8 & 16 & 26-\lambda \end{matrix}\right|$$

$$\frac{1}{8}\left|\begin{matrix} 8-4\lambda & 0 & -18+\lambda \\ -2 & -2\lambda & -\lambda \\ 8 & 16 & 26-\lambda \end{matrix}\right| \quad 8\mathrm{II}+\lambda\mathrm{III}$$

$$\frac{1}{64}\det\left(\left|\begin{matrix} 8-4\lambda & 0 & -18+\lambda \\ -16+8\lambda & 0 & 18\lambda-\lambda^2 \\ 8 & 16 & 26-\lambda \end{matrix}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{4}((8-4\lambda)(18\lambda-\lambda^2) - (-16+8\lambda)(-18+\lambda))$$
$$= \frac{1}{4}(144\lambda - 8\lambda^2 - 72\lambda^2 + 4\lambda^3) - (288 - 16\lambda - 144\lambda + 8\lambda^2))$$
$$= \frac{1}{4}(144\lambda - 8\lambda^2 - 72\lambda^2 + 4\lambda^3 - 288 + 16\lambda + 144\lambda - 8\lambda^2)$$
$$= 36\lambda - 2\lambda^2 - 18\lambda^2 + \lambda^3 - 72 + 4\lambda + 36\lambda - 2\lambda^2$$
$$= -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72$$

$$(-\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72) : (-\lambda + 2) = \lambda^2 - 20\lambda + 36$$
$$-(-\lambda^3 + 2\lambda^2)$$
$$20\lambda^2 - 76\lambda$$
$$-(20\lambda^2 - 40\lambda)$$
$$-36\lambda + 72$$
$$-(-36\lambda + 72)$$
$$0$$

$\lambda^2 - 20\lambda + 36$ | pq-Formel $\quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$10 \pm \sqrt{100 - 36}$

10 ± 8

$\lambda_1 = 18 \wedge \lambda_2 = 2$

$-\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72$

$18^m \cdot 2^n = 72$, $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m = 1 \wedge n = 2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 18 \wedge \lambda_2 = 2 \wedge \lambda_3 = 2$

$$A - \lambda E = \left|\begin{matrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ -5 & -8-\lambda & -13 \\ 8 & 16 & 26-\lambda \end{matrix}\right| \quad | \, \lambda = 2$$

$$\begin{matrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ -5 & -8-\lambda & -13 \\ 8 & 16 & 26-\lambda \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 4-2 & 4 & 2 \\ -5 & -8-2 & -13 \\ 8 & 16 & 26-2 \end{matrix}\right|$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -10 & -13 \\ 8 & 16 & 24 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ 2\mathrm{II}+5\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-4\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 16 \end{matrix}\right| \quad \mathrm{II}+\mathrm{III}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \underline{\text{nicht diagonalisierbar}}$$

(6)

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Eigenwerte $:= \{-1, 3, t\}$

$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$:

$\begin{vmatrix} 1+1 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ I − III

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$(t+1)y = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge t \neq -1$

$2x + 2z = 0 \Rightarrow z = -x$

$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \wedge$ z.B. $x = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$:

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ I − III

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$(t-3)y = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge t \neq 3$

$2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z$

$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \wedge$ z.B. $x=1 \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = t$:

$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$

für $t \neq 3 \wedge t = -1$ Eigenvektor

z.B. $t = 1 \wedge y = 1$

$2z = 0 \wedge 2x = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $P := Pol_5 \wedge F := Pol_5$

$F(p)(t) := p(0) + p'(1)t^2 - 2p''(2)t^5$

Vektoraddition: $p_1, p_2 \in Pol_5 \wedge t \in \mathbb{R}$

$F(p_1+p_2)(t) = F(p_1)(t) + F(p_2)(t)$

$= p_1(0) + p_1'(1)t^2 - 2p_1''(2)t^5 + p_2(0) + p_2'(1)t^2 - 2p_2''(2)t^5$

$= (p_1+p_2)(0) + (p_1'+p_2')(1)t^2 - 2(p_1''+p_2'')(2)t^5$

$= (p_1+p_2)(0) + (p_1+p_2)'(1)t^2 - 2(p_1+p_2)''(2)t^5$

$F(p_1+p_2)(t) = F(p_1+p_2)(t)$ ☐

Da p_1 und p_2 aus dem selben Vektorraum kommen und Vektorräume linear sind gilt folgendes
$p_1(x) + p_2(x) = (p_1+p_2)(x)$
Außerdem kommt $\frac{d}{dx}$ auch aus einem lin. Vektorraum:
$(p_1'+p_2')(x) = (p_1+p_2)'(x)$

$p_1'(1)t^2 + p_2'(1)t^2 = p_1'(1)t^2 + p_2'(1)t^2 \quad | : t^2$

$p_1'(1) + p_2'(1) = (p_1'+p_2')(1) \quad | \cdot t^2$

$p_1'(1)t^2 + p_2'(1)t^2 = (p_1'+p_2')(1)t^2$

Skalarmultiplikation: $p \in Pol_5 \wedge t, a \in \mathbb{R}$

$a F(p)(t) = F(a \cdot p)(t)$

$= (ap)(0) + (a \cdot p)'(1)t^2 - 2(a \cdot p)''(2)t^5 \mid Pol_5$ ist lin. $\wedge \frac{d}{dx}$ ist lin.

$= ap(0) + a \cdot p'(1)t^2 - 2ap''(2)t^5$

$= a(p(0) + p'(1)t^2 - 2p''(2)t^5)$

$a \cdot F(p)(t) = a F(p)(t)$ ☐

Die Abbildung ist linear.

$F(p)(t) := p(0) + p'(1)t^2 - 2p''(2)t^5$

Bestimmung der Basisvektoren:

$F(x^0)(t) = 1$

$F(x^1)(t) = 0 + t^2 - 2t^5$

$F(x^2)(t) = 0 + 2t^2 - 4t^5$

$F(x^3)(t) = 0 + 3t^2 - 24t^5$

$F(x^4)(t) = 0 + 4t^2 - 96t^5$

$F(x^5)(t) = 0 + 5t^2 - 320t^5$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 320 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow DM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 24 & 96 & 320 \end{pmatrix}$

Auf 2.

(1) $T_K^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad T_K^C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad DM(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$DM_B(f) = (T_K^B)^{-1} \cdot DM(f)$

$DM_C(f) = (T_K^C)^{-1} \cdot DM(f)$

$DM_{B,C}(f) = (T_K^C)^{-1} \cdot DM(f) \cdot T_K^B$

$DM_{C,B}(f) = (T_K^B)^{-1} \cdot DM(f) \cdot T_K^C$

$$(T_K^B)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{III} - \mathrm{I} : 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{III} - \mathrm{II} : 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \\ | \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \mathrm{I} + \mathrm{III} \cdot 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) | : 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \mathrm{II} - \mathrm{III} \cdot 3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(T_K^B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(T_K^C)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II} - \mathrm{I} : 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) | \cdot (-2) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{III} + \mathrm{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \\ | : (-5) \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \mathrm{I} - \mathrm{III} \cdot 8$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{matrix} | : 2 \\ \mathrm{II} + \mathrm{III} \cdot 8 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \quad (T_K^C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$T_C^B = (T_K^C)^{-1} \cdot T_K^B$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + bg & a f + b \cdot h \\ c \cdot e + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ \frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_C^B = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ \frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_B^C = (T_K^B)^{-1} \cdot T_K^C = \begin{pmatrix} -13 & -4 & -5 \\ 28 & 9 & 10 \\ -9 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DM_B(f) = (T_K^B)^{-1} \cdot DM(f) \qquad DM(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$DM_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(T_K^C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$DM_C(f) = (T_K^C)^{-1} \cdot DM(f)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{41}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

Auf 3

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda \\ 4 & \lambda+2 & \lambda \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

Satz 12.13:

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Die Determinante von A ist ungleich Null.
(b) Der Rang der Matrix ist maximal, nämlich gleich n.
(c) Der Kern von A ist trivial, nämlich gleich der Menge $\{0\}$.
(d) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
(e) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
(f) Die Inverse von A existiert.
(g) Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich den Nullvektor.
(h) Das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt für eine beliebige rechte Seite b eine eindeutige Lösung.

$$\begin{array}{ccccc} \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda & \lambda+8 & 2\lambda+2 \\ 4 & \lambda+2 & \lambda & 4 & \lambda+2 \\ 1 & 2 & \lambda & 1 & 2 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda+8 & 2\lambda+2 & \lambda \\ 4 & \lambda+2 & \lambda \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda+8) \cdot (\lambda+2) \cdot \lambda + (2\lambda+2) \cdot \lambda \cdot 1 + \lambda \cdot 4 \cdot 2 - (\lambda+2) \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda \cdot (\lambda+8) - \lambda \cdot 4 \cdot (2\lambda+2) =$$

$$(\lambda^2 + 10\lambda + 16) \cdot \lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda + 8\lambda - (\lambda^2 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 16\lambda) - (8\lambda^2 + 8\lambda) =$$

$$= \lambda^3 + 10\lambda^2 + 16\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda + 8\lambda - \lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda^2 - 16\lambda - 8\lambda^2 - 8\lambda$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2$$

Nach Satz 12.13. a), f) ist die Matrix invertiebar wenn die Determinante nicht Null ist. Also für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ ist die Matrix nicht invertiebar, ansonsten schon.

ist die Matrix nicht invertierbar, ansonsten schon.

Auf 4.

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 & -8 \\ -10 & -18 & 19 \\ -6 & -12 & 13 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 6 & 8 & -8 & 6 & 8 \\ -10 & -18 & 19 & -10 & -18 \\ -6 & -12 & 13 & -6 & -12 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 8 & -8 \\ -10 & -18 & 19 \\ -6 & -12 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$6 \cdot (-18) \cdot 13 + 8 \cdot 19 \cdot (-6) + (-8) \cdot (-10) \cdot (-12) - (-6) \cdot (-18) \cdot (-8) - (-12) \cdot 19 \cdot 6 - 13 \cdot (-10) \cdot 8$$

$$(-1404) + (-912) + (-960) + 864 + 1368 + 1040 = -4$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 8 & -8 \\ -10 & -18 & 19 \\ -6 & -12 & 13 \end{pmatrix} = -4$$

b)

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 8 & -8 \\ -10 & -18-\lambda & 19 \\ -6 & -12 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 6-\lambda & 8 & -8 & 6-\lambda & 8 \\ -10 & -18-\lambda & 19 & -10 & -18-\lambda \\ -6 & -12 & 13-\lambda & -6 & -12 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$(6-\lambda) \cdot (-18-\lambda) \cdot (13-\lambda) + 8 \cdot 19 \cdot (-6) + (-8) \cdot (-10) \cdot (-12) - (-6) \cdot (-18-\lambda) \cdot (-8) - (-12) \cdot 19 \cdot (6-\lambda) - (13-\lambda) \cdot (-10) \cdot 8$$

$$= (-108 + 12\lambda + \lambda^2) \cdot (13-\lambda) + (-912) + (-960) - (-864 - 48\lambda) - (-1368 + 228\lambda) - (-1040 + 80\lambda)$$

$$= -1404 + 108\lambda + 156\lambda - 12\lambda^2 + 13\lambda^2 - \lambda^3 - 1872 + 864 + 48\lambda + 1368 - 228\lambda + 1040 - 80\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4$$

Charakteristisches Polynom: $-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4$

c) $-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

$$(-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 4$$
$$-(-\lambda^3 + \lambda^2)$$
$$0 + 4\lambda$$
$$-(4\lambda - 4)$$
$$0$$

$-\lambda^2 + 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$\lambda^2 - 4 = 0 \quad |$ PQ-Formel

$\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{4}$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -2$

Nullstellen $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 1$

Also sind die Eigenwerte der Matrix $2; -2; 1$

Auf 5.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -5 & -8 & -13 \\ 8 & 16 & 26 \end{pmatrix}$$

Schritt (1)

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4-\lambda & 4 & 2 & 4-\lambda & 4 \\ -5 & -8-\lambda & -13 & -5 & -8-\lambda \\ 8 & 16 & 26-\lambda & 8 & 16 \end{array}\right.$$

$$= (4-\lambda)\cdot(-8-\lambda)\cdot(26-\lambda) + 4\cdot(-13)\cdot 8 + 2\cdot(-5)\cdot 16 - 8\cdot(-8-\lambda)\cdot 2 - 16\cdot(-13)\cdot(4-\lambda) - (26-\lambda)\cdot(-5)\cdot 4$$

$$= (-32 \underbrace{-4\lambda + 8\lambda}_{+4\lambda} + \lambda^2)\cdot(26-\lambda) - 416 - 160 + 128 + 16\lambda - (-208)\cdot(4-\lambda) - (\cdot 20)\cdot(26-\lambda)$$

$$= -832 + \underbrace{32\lambda + 104\lambda}_{136\lambda} \underbrace{- 4\lambda^2 + 26\lambda^2}_{+22\lambda^2} - \lambda^3 - 576 + 128 + 16\lambda + 832 - 208\lambda + 520 - 20\lambda$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72$$

Schritt (3):

Nullstellen vom charakteristisches Polynom ; Eigenwerte der Matrix

$$-\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72 = 0$$

$$(-\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 20\lambda - 36$$

$$\begin{array}{l} -(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ \quad 20\lambda^2 - 76\lambda \\ \quad -(20\lambda^2 - 40\lambda) \\ \qquad -36\lambda + 72 \\ \qquad -(-36\lambda + 72) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 20\lambda - 36 = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$\lambda^2 - 20\lambda + 36 = 0 \quad | PQ$$

$$-\frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 36} \qquad \lambda_2 = 18$$

$$10 \pm \sqrt{64} \qquad \lambda_3 = 2$$

$18^n + 2^m = 22 \qquad n, m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = 1 \quad m = 2$

$(-\lambda+2)(-\lambda+2)(-\lambda+18)$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda + 4 \cdot (-\lambda + 18)$

$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 2\lambda^2 - 36\lambda + 2\lambda^2 - 36\lambda - 4\lambda + 72$

$= -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 76\lambda + 72$

Schritt (3).2

$(A - \lambda E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -5 & -8 & -13 \\ 8 & 16 & 26 \end{pmatrix}$

$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -10 & -13 \\ 8 & 16 & 22 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -10 & -13 \\ 8 & 16 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 4 \\ \\ - \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid : 2 \\ \\ \mid : 14 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \mid \cdot 13 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid : (-5) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

damit ist $z = 0$, $y = \frac{1}{2}x$ und x beliebig wählbar

$A \cdot v = \lambda \cdot v$

wähle $x = 2$ dann ist der Eigenvektor

$A \cdot v - \lambda E_n \cdot v = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar da es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Auf 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (5 Punkte). Bestimmen Sie jeweils eine der Eigenräume der folgenden Matrix und entscheiden Sie, ob diese diagonalisierbar ist – im Falle von Diagonalisierbarkeit bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge der Eigenwerte von A ist $\{-1, 3, t\}$.

$$\det = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & t-\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(t-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 0\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot(t-\lambda)\cdot 2 - 0\cdot 0\cdot 1 - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0$$

$$= t-\lambda-t\lambda+\lambda^2\cdot(1-\lambda)+0+0-4t+4\lambda-0-0$$

$$= t-\lambda-t\lambda+\lambda^2-t\lambda+\lambda^2+t\lambda^2-\lambda^3-4t+4\lambda$$

$$= -\lambda^3+2\lambda^2+t\lambda^2-2t\lambda+3\lambda-3t$$

$$= (-\lambda-1)\ (-\lambda+3)\ (-\lambda+t)$$

Schritt (3):

$$(A-\lambda E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = -1}$

$$(A + 1 E_n) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |:2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

damit ist $y = 0$; $x = -z$ und z ist frei wählbar

wenn $z = 2$ dann ist das Eigenvektor

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(A-3E_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{III+I} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {\scriptstyle I:2} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

damit ist $z = x$; $y = 0$ und z ist frei wählbar

wähle z.B $z = 1$

$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - tE_3) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$

Es ist auf den ersten Blick zu erkennen, dass y frei wählbar ist

$(1-t)x + 2z = 0$

$x - tx + 2z = 0$

$2x + (1-t)z = 0$

$2x + z - tz = 0 \quad | -2x$

$z - tz = -2x \quad | :(-2)$

$-\frac{z}{2} + \frac{tz}{2} = x$