Vorlesung 24

7.3 Gedämpfte harmonische Schwingung

Bewegung für harm. Oszillator ist häufig idealisiert :

→ zusätzliche Kräfte

→ speziell (geschw. abhängige) Reibung $\vec{F} = -\beta\,\vec{v}$

* Energie geht “verloren”
* Schwingung klingt ab, Amplitude nimmt ab

Versuch : **Federschwingung** **Pohlsches Drehpendel**

$\Rightarrow m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = 0$

↑ neue Reibungskomponente

→ $\ddot{z} + 2\delta\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = 0$

$\delta = \dfrac{\beta}{2m} \qquad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

→ **Lösungsansatz:**

$z(t) = z_0\,e^{i\,\omega t}$

$\omega \in \mathbb{C}$

(Herleitung: 2. NG $F = ma = m\ddot{z} = -kz - \beta\dot{z}$)

$$\ddot{z} + 2\delta\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = 0$$

$$\Rightarrow \left((i\omega)^2 \quad + \quad 2\delta\,(i\omega) \quad + \quad \omega_0^2\right)\,z_0\,e^{i\omega\,t} = 0$$

$z_0 \neq 0$

(triviale Lösung)

$$\Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta = 0$$

Addition von $i^2\delta^2$ auf beiden Seiten, umsortieren

$$(\omega^2 - 2i\omega\delta + i^2\delta^2) = \omega_0^2 + i^2\delta^2$$

$$(\omega - i\delta)^2 = \omega_0^2 + i^2\delta^2$$

$$\rightarrow \omega = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 \cdot \boxed{e^{-\delta t}} \cdot \boxed{e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$$

Dämpfung Schwingung

allg. Lösung als **Linearkombination** :

$$z(t) = e^{-\delta t} \left\{ z_{01} \cdot e^{+i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t} + z_{02} \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t} \right\}$$

$$\omega = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad := i\delta \pm \hat{\omega}$$

z.B. Feder-konst. Reibung

mit $\hat{\omega} < \omega_0$

<u>3 Fälle :</u>

1. $\delta < \omega_0 : \sqrt{\ldots} > 0$ “schwache” Dämpfung

2. $\delta = \omega_0 : \sqrt{\ldots} = 0$ kritische Dämpfung

3. $\delta > \omega_0 : \sqrt{\ldots} \in \mathbb{C}$ (imaginäre) starke Dämpfung

1. $\delta < \omega_0 : \sqrt{\ldots} > 0$ "schwache" Dämpfung = **Schwingfall**

$$z(t) = e^{-\delta t}\left\{z_{01} \cdot e^{+i\hat{\omega}} + z_{02} \cdot e^{-i\hat{\omega}}\right\}$$

Anfangsbedingungen **ballistisch** :

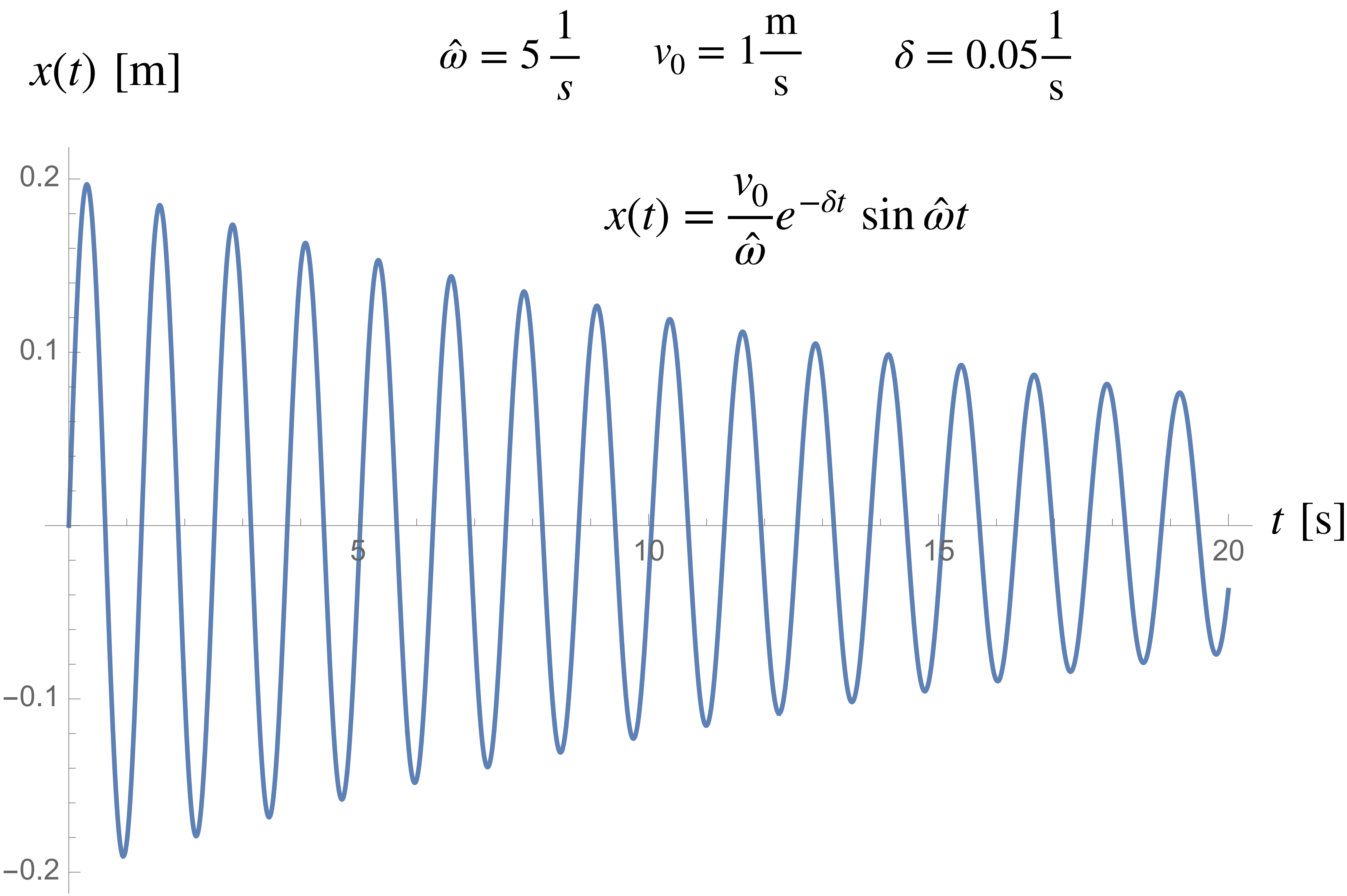
Auslenkung aus Minimum

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{01} + z_{02} = 0$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad z_{01} i\hat{\omega} - z_{02} i\hat{\omega} = v_0$$

$$\Rightarrow z_{01} = \frac{v_0}{2i\hat{\omega}} = -z_{02}$$

Dann: $$z(t) = \underbrace{\frac{v_0}{\hat{\omega}}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\left\{\frac{e^{i\hat{\omega}t} - e^{-i\hat{\omega}t}}{2i}\right\}}_{\sin \hat{\omega}t} e^{-\delta t} \quad \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\delta t} \sin \hat{\omega}t}$$



$x(t)$ [m]
$\hat{\omega} = 5\,\frac{1}{s}$
$v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$\delta = 0.05\frac{1}{\mathrm{s}}$
$x(t) = \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\delta t} \sin \hat{\omega} t$
0.2
0.1
−0.1
−0.2
5
10
15
20
t [s]

2. $\delta = \omega_0 : \sqrt{\ldots} = 0$ kritische Dämpfung = **aperiodischer Grenzfall**

$$\delta = \omega_0 \Rightarrow \hat{\omega} = 0 \qquad \Rightarrow z(t) = e^{-\delta t} \underbrace{\{z_{01} + z_{02}\}}_{z_0 \in \mathbb{R}}$$

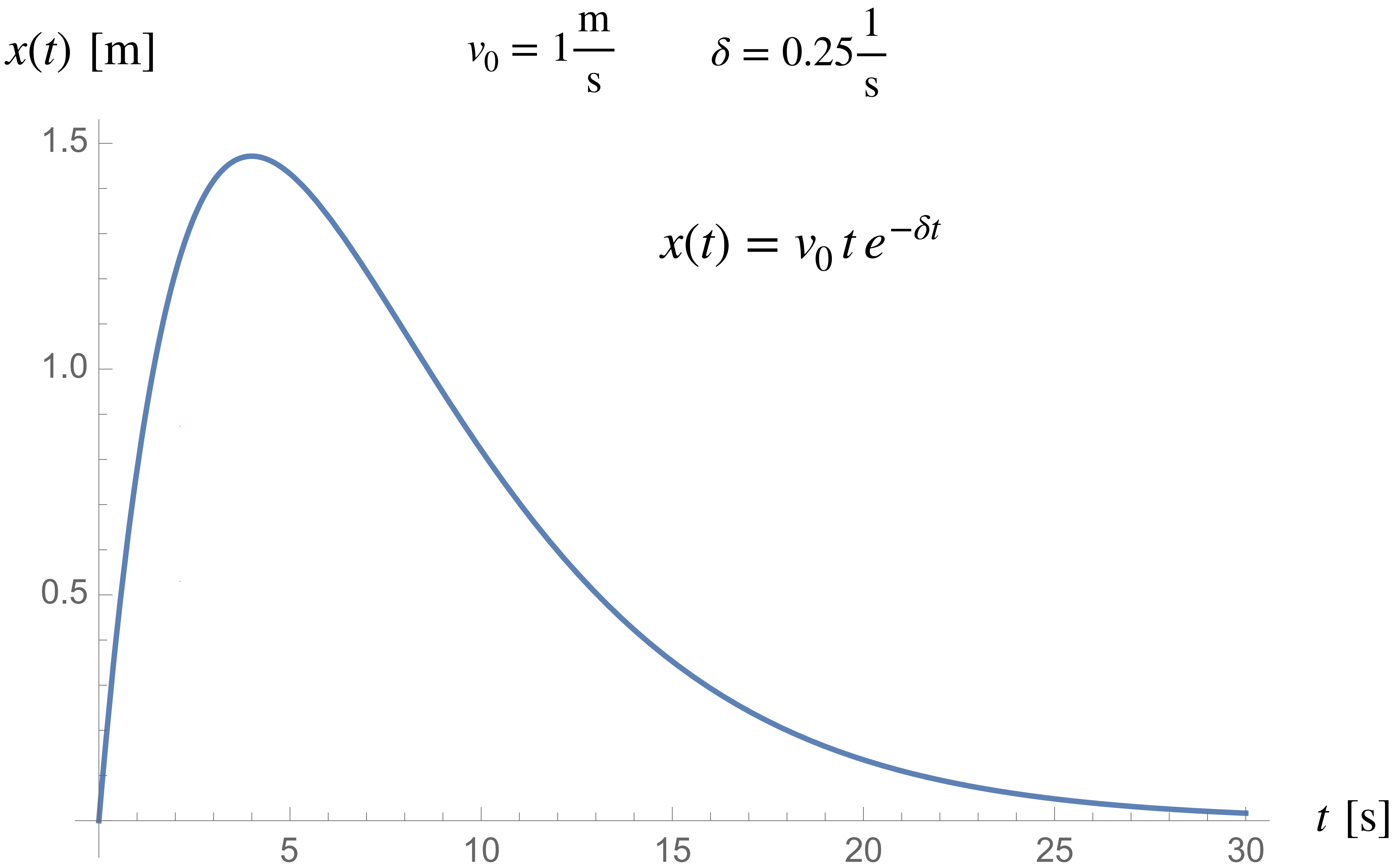
Nur **eine** Lösung ? (bei 2 Anfangsbedingungen) ?

auch $z(t) = \hat{z}_0 \, t \cdot e^{-\delta t}$ ist eine Lösung (Beweis d. Einsetzen)

$$\boxed{\Rightarrow \textbf{Allgemeine Lösung} : \quad z(t) = e^{-\delta t} \left(z_0 + \hat{z}_0 \, t \right)}$$

Anfangsbedingungen :

$$\left.\begin{array}{lll} z(0) = 0 & \Rightarrow & z_0 = 0 \\ \dot{z}(0) = v_0 & \Rightarrow & \hat{z}_0 = v_0 \end{array}\right\} \quad \boxed{x(t) = v_0 \, t \, e^{-\delta t}}$$



Auch keine Schwingung; entspricht **schnellstmöglicher** Dämpfung bei gegebenem $\omega_0 (= \delta)$ (z.B. Stoßdämpfer, Drehspulmessgeräte, ...)

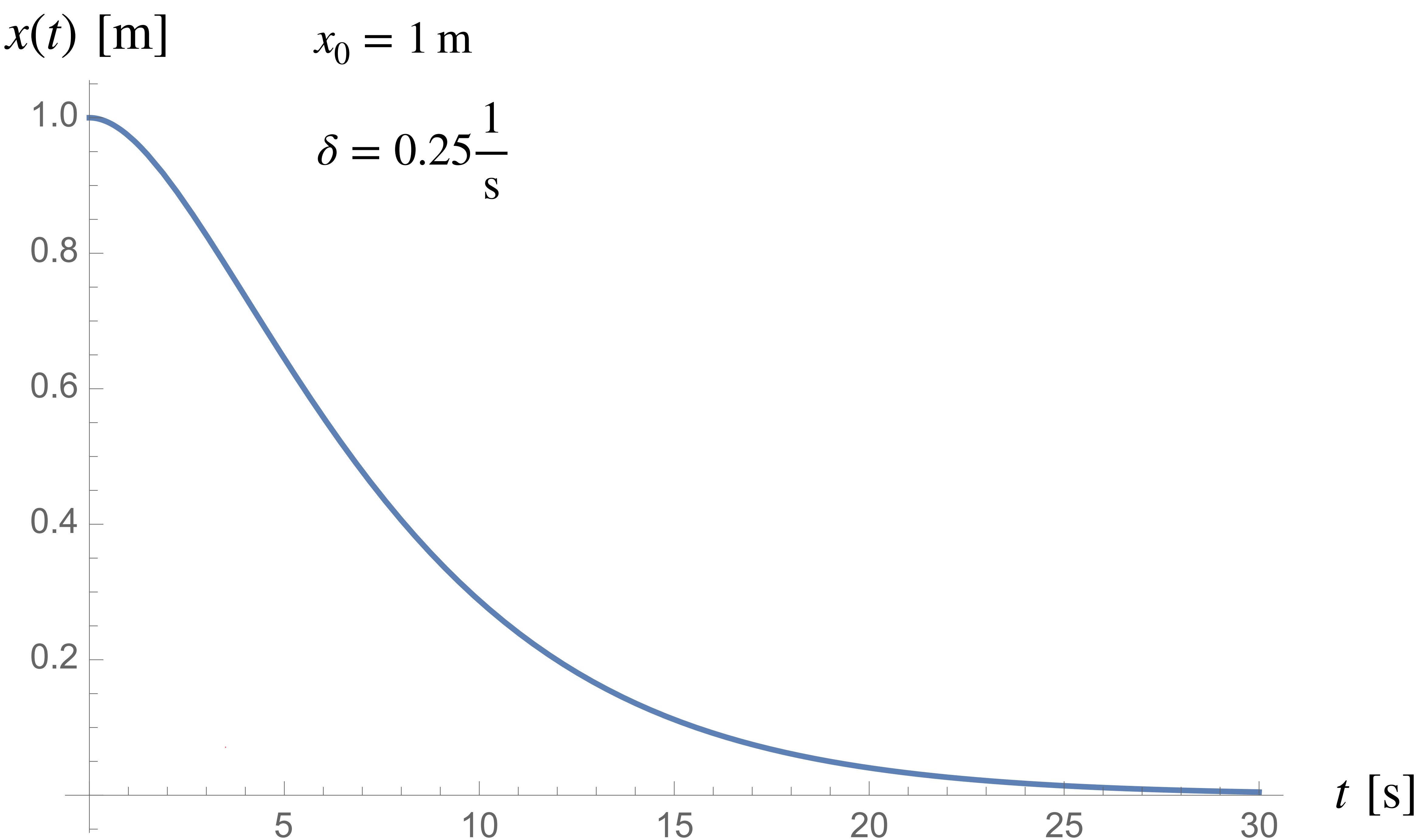
Alternative Anfangsbedingungen :

$$z(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = x_0$$

$$\dot{z}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{z}_0 = z_0\delta$$

$$\boxed{x(t) = x_0\, e^{-\delta t}\ (1 + \delta t)}$$

$\dot{z}(0) = \hat{z}_0 - z_0\delta = 0$



3. $\delta > \omega_0 : \sqrt{\ldots} \in \mathbb{C}$ (imaginäre) starke Dämpfung = **Kriechfall**

$$\delta > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{-\left(\delta^2 - \omega_0^2\right)} = \pm\, i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{i\hat{\omega}t} = e^{\mp\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t} \longrightarrow$$ **keine Schwingung**

$$\boxed{z(t) = e^{-\delta t} \left\{ z_{01}\, e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + z_{02}\, e^{+\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right\}}$$

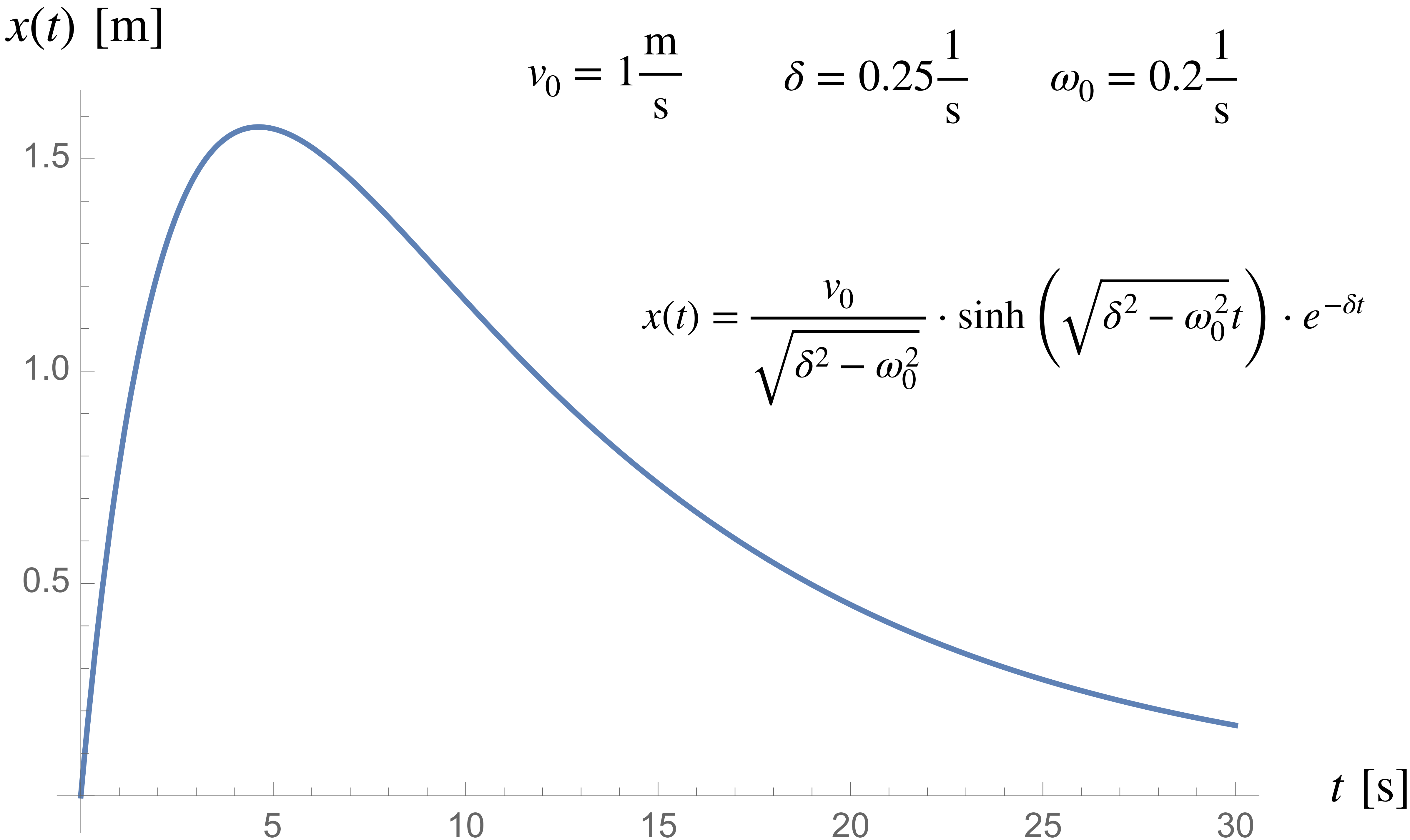
Anfangsbedingungen **ballistisch** :

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \; z_{02} = \frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} = -\, z_{01} \;\in \mathbb{R}$$

(ohne Bew.)

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{e^{+\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}}{2} \right\}}_{\sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right)} \cdot e^{-\delta t}$$



$$v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \delta = 0.25\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \omega_0 = 0.2\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t\right) \cdot e^{-\delta t}$$

für große t : $\quad \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t\right) \to \frac{1}{2} e^{+\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t} \to x(t) \sim e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t} = e^{-\tilde{\delta}\, t}$

mit $\tilde{\delta} = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \delta \longrightarrow$

Abklingzeit **langsamer** als im

krit. Dämpfung / Schwingungsfall

7.4 Erzwungene harm. Schwingung

Periodische anregende (externe) Kraft : $F_E(t) = F_0\, e^{i\,\omega_E\, t}$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = F_0\, e^{i\,\omega_E\, t} \quad \Rightarrow \ddot{z} + 2\,\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0\, e^{i\,\omega_E\, t}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$\neq 0$

Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung :

allg. Lösung = allg. Lösung der homogenen Dgl.

+ eine partikuläre Lösung der inhom. Gleichung

Erraten : $z_{\text{part}}(t) = z_0\, e^{i\,\omega t} \quad \Rightarrow \; \left(-\omega^2 + i\omega 2\delta + \omega_0^2\right)\, z_0\, e^{i\omega t} = f_0\, e^{i w_E t}$

$$\Rightarrow \omega = \omega_E$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + i\omega 2\delta + \omega_0^2\right) \underbrace{z_0}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{f_0}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + 2i\delta\omega_E} = f_0 \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_E^2 - 2i\delta\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

$$= |z_0| \cdot e^{i\,\varphi}$$

$$\boxed{\Re[z_0] = f_0\, \frac{\omega_0^2 - \omega_E^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2} \qquad \Im[z_0] = f_0\, \frac{-2\delta\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$$

Phase :

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\Im[z_0]}{\Re[z_0]} = -\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}}$$

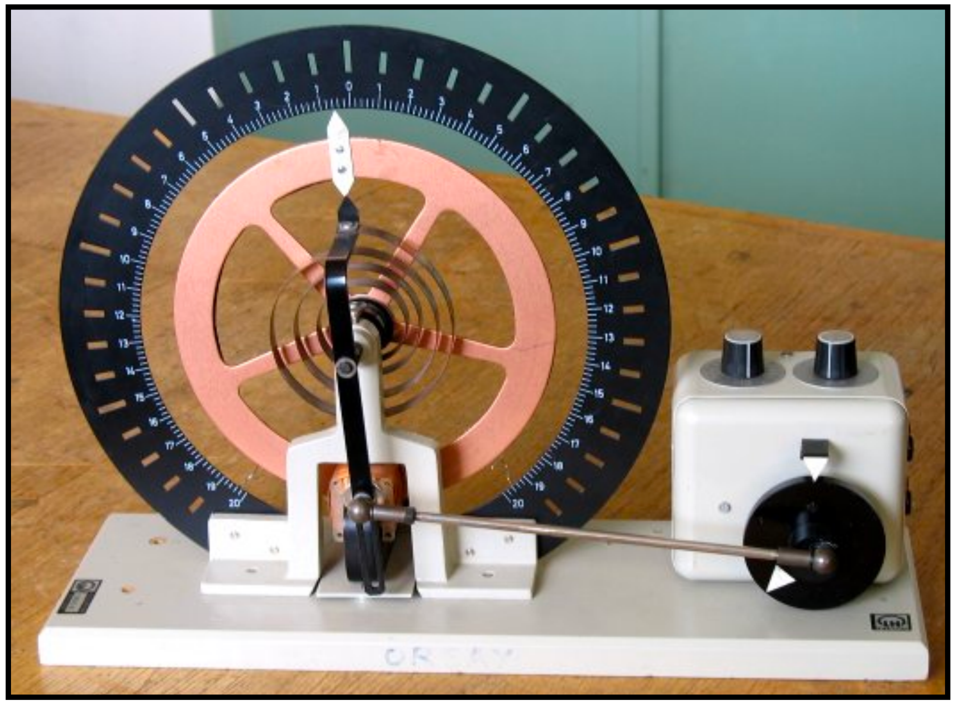
$\varphi =$ Erzeugt **Phase** zwischen ω und ω_E (nicht ω_0) !

$$|z_0| = f_0 \cdot \frac{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_E\right)^2}}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

Amplitude :

$$\boxed{|z_0| = f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_E\right)^2}}}$$

Versuch : **Pohlsches Drehpendel** mit F_E



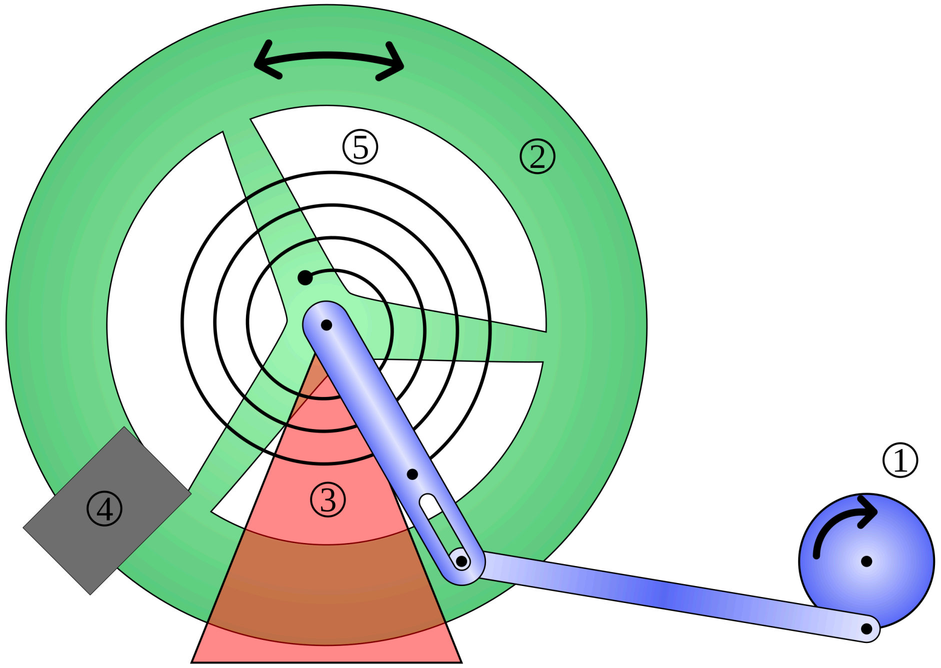
Üben **periodische Kraft** aus, mit **schwacher** Dämpfung ($\delta < \omega_0$)

- Nach **kurzer Einschwingzeit** stellt sich seine **stationäre stabile Schwingung** auf der **Frequenz** ω_E **des Erregers ein**

- Die Amplitude der **stationären Schwingung** erreicht ein **Maximum** in der Nähe der **Schwingungsfrequenz** ω_0 der **freien ungedämpften Schwingung**

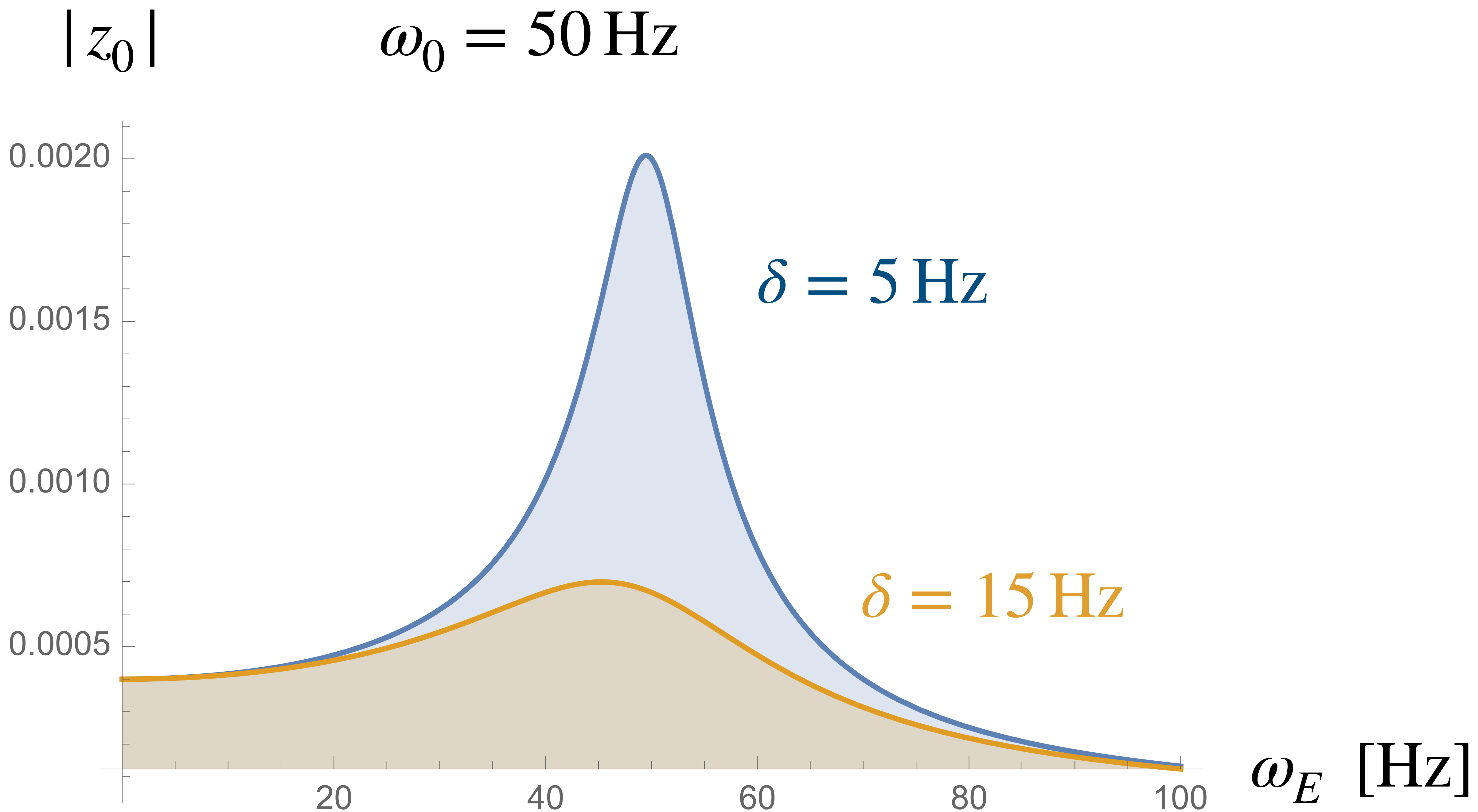
$\downarrow$

sog. Resonanz



(1) Antrieb, (2) Drehpendel, (3) Lagerbock,
(4) Wirbelstrombremse, (5) Spiralfeder

Illustration



Die Resonanzamplitude ist umso **höher**, je **schwächer** die **Dämpfung** ist. Das leuchtet ein, denn je schwächer die Dämpfung, umso mehr Energie wird dem System zugeführt.

Je mehr die Resonanzamplitude wächst, umso **schärfer (= schmaler)** wird sie, d.h. ihre charakteristische Breite nimmt ab

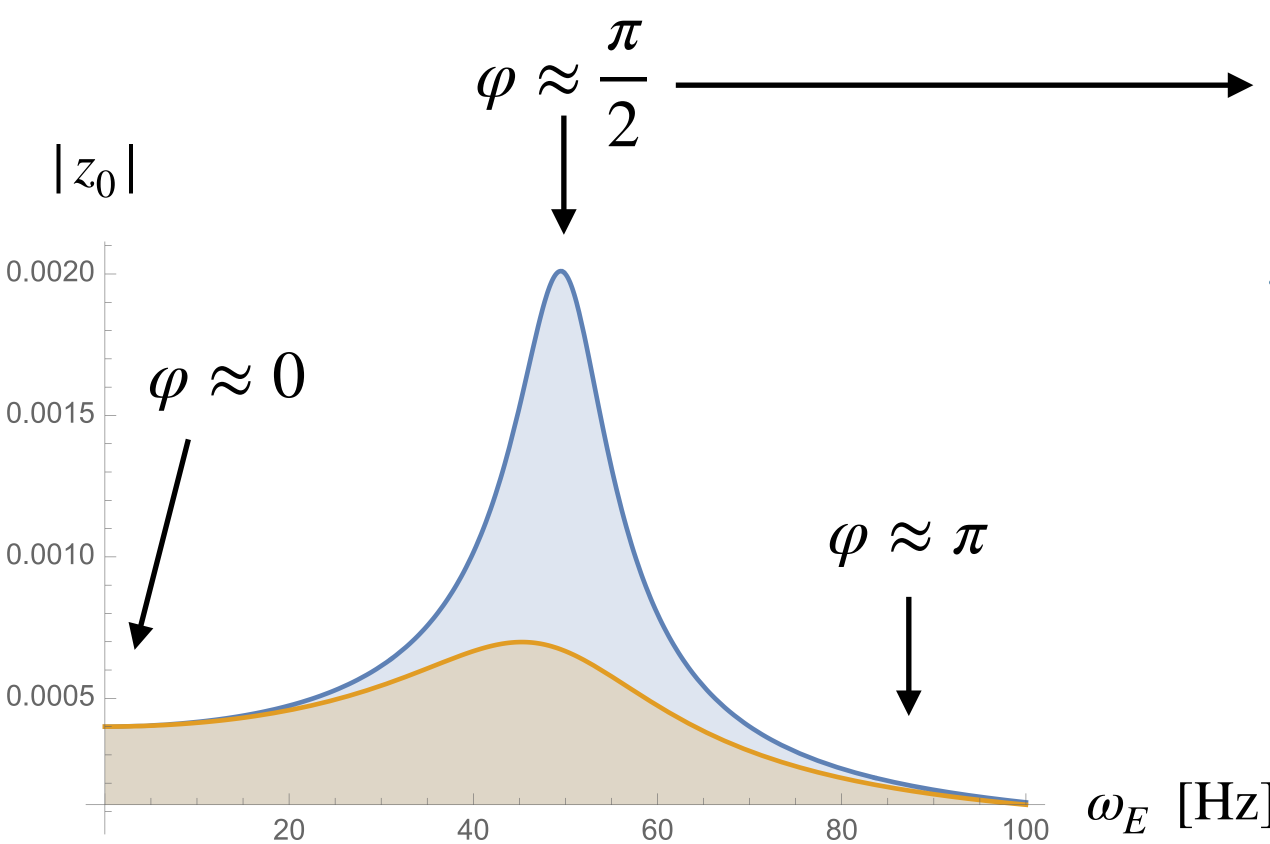
Reduktion der Dämpfung auf $\delta = 0.1\,\mathrm{Hz}$

sog. **Resonanzkatastrophe**,

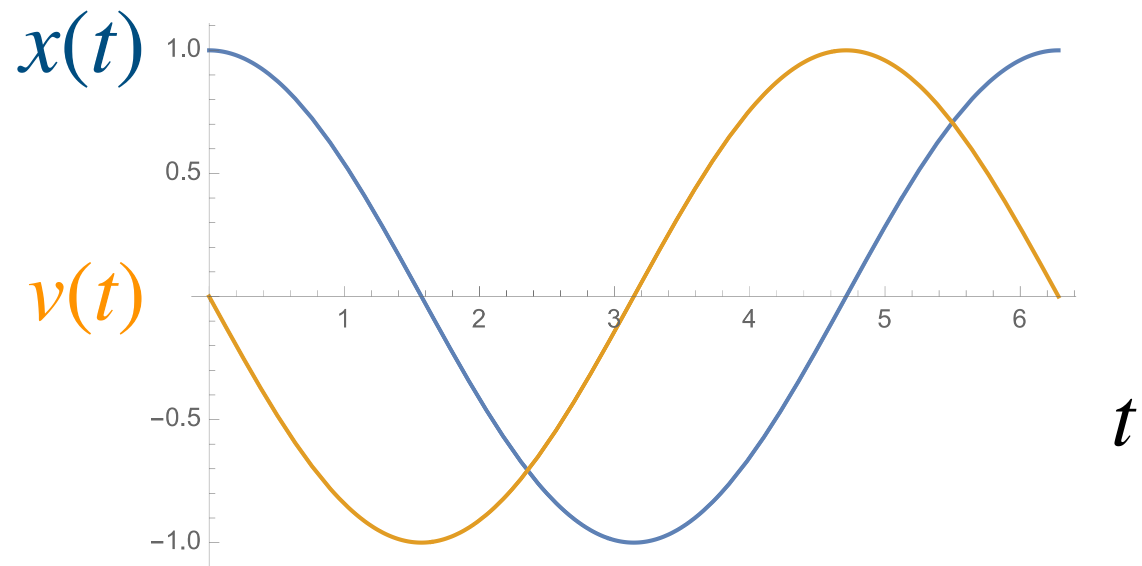
dazu gleich mehr…

Die **Schwingung** hat eine **Phasenverschiebung** gegenüber dem Erreger

Qualitativ können wir das verstehen: das System hat eine **gewisse Trägheit gegenüber** der **Anregung**



Auch die **Phasenverschiebung** in der **Resonanzregion** können wir verstehen:



Da die **Erregung** der **Schwingung** um $\pi/2$ vorauseilt, ist sie dort **exakt in Phase** mit **der Geschwindigkeit** (z.B. wenn der Erreger sein Maximum hat, ist die Schwingung im Nulldurchgang)

Folglich schiebt die **Erregung** den Schwinger **optimal** an, **während** sie weit **außerhalb** der **Resonanz** gegenüber der **Geschwindigkeit Phasenverschoben** ist und dort **kaum Energie zugeführt wird**.

Zurück zur **Lösung** der **Differentialgleichung**:

1. $\delta < \omega_0 : \sqrt{\ldots} > 0$ "schwache" Dämpfung = **Schwingfall**

$$z(t) = e^{-\delta t}\left\{z_{01} \cdot e^{+i\hat{\omega}} + z_{02} \cdot e^{-i\hat{\omega}}\right\}$$

Anfangsbedingungen **ballistisch** : $z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{01} + z_{02} = 0$

Auslenkung aus Minimum $\dot{z}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad z_{01} i\hat{\omega} - z_{02} i\hat{\omega} = v_0$

$$\Rightarrow z_{01} = \frac{v_0}{2i\hat{\omega}} = -\, z_{02}$$

Dann: $z(t) = \underbrace{\frac{v_0}{\hat{\omega}}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\left\{\frac{e^{i\hat{\omega}t} - e^{-i\hat{\omega}t}}{2i}\right\}}_{\sin \hat{\omega}t} e^{-\delta t} \quad \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\delta t} \sin \hat{\omega} t}$

vgl. Folie 458

allg. Lösung = allg. Lösung der homogenen Dgl.

\+

eine partikuläre Lösung der inhom. Gleichung

$$\Rightarrow \; z_{\text{part}}(t) = z_0\, e^{i\,\omega_E\, t} = |\,z_0\,|\, e^{i\omega_E\, t + i\varphi}$$

Zerlege $|\,z_0\,|\, e^{i\omega_E\, t + i\varphi} = |\,z_0\,| \cos\left(\omega_E\, t + \varphi\right) + i\,|\,z_0\,| \sin\left(\omega_E\, t + \varphi\right)$

Selektiere **reelle Lösung**

Für **ballistische** Anfangsbedingungen + **schwache** Dämpfung :

$$x(t) = \frac{f_0 \cos\left(\omega_E t + \varphi\right)}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + 2i\delta\omega_E} + \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right) \cdot e^{-\delta t}$$

Erregerschwingung

dominant für große

$$t \gg \frac{1}{\delta}$$

Einschwingvorgang

klingt mit $e^{-\delta t}$ ab

7.5 Resonanzen

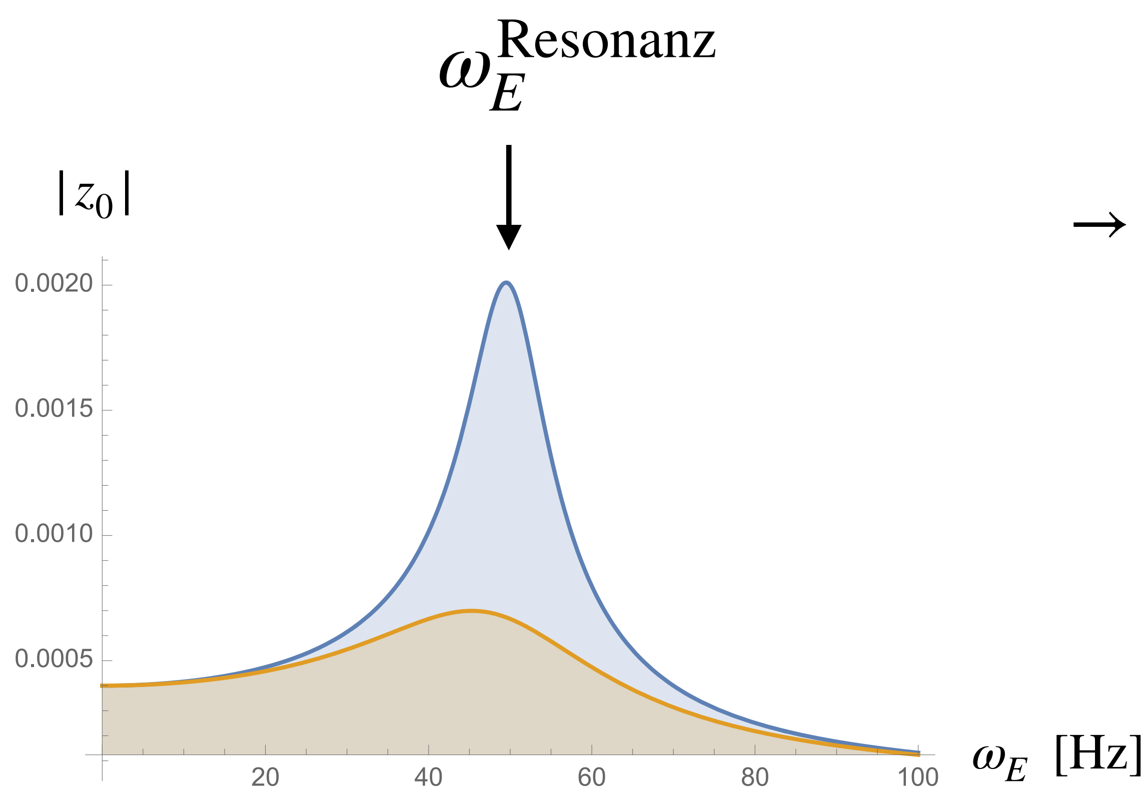
Lorentzkurve / Breit-Wigner / Cauchy

Amplitude der erzwungenen Schwingung :

(nach Abklingen des Einschwingvorganges)

$$|z_0| = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_E\right)^2}} = A(\omega_E)$$

Suche **Maximum** von $A(\omega_E)$ → liegt bei **Minimum** von $\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_E\right)^2}$



$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_E}\left[\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_E\right)^2}\right] \overset{!}{=} 0$$

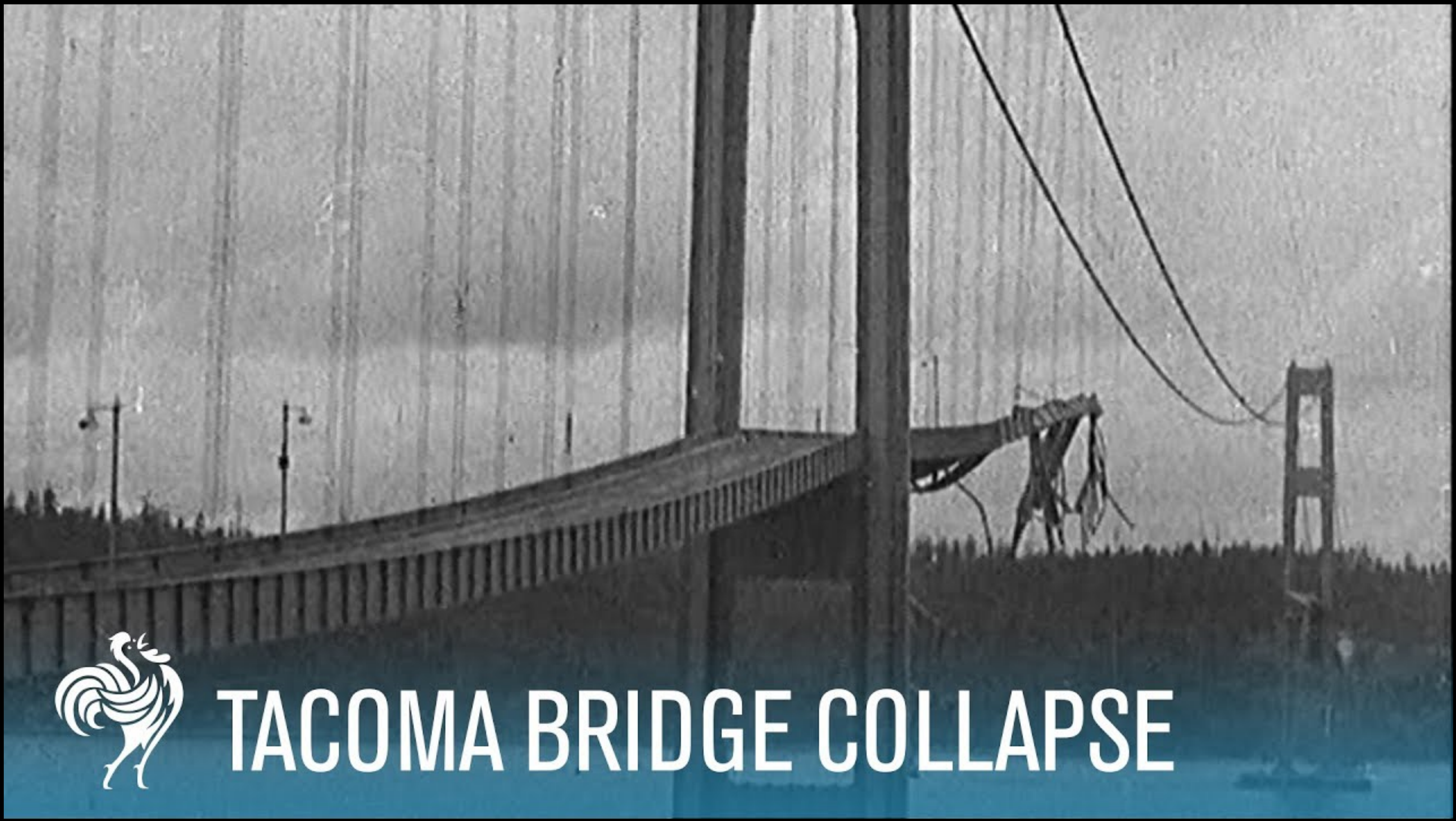
$$= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot \left(2\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)\left(-2\omega_E\right) + 4\delta^2\left(2\omega_E\right)\right) = 0$$

$$\rightarrow -\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right) + 2\delta^2 = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega_E^{\text{Resonanz}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

Resonanzkatastrophe:

$\delta \approx 0 \rightarrow A \rightarrow \infty$ wenn $\omega_E = \omega_0$



https://youtu.be/XggxeuFDaDU