Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

06.12.2021
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 9

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 13.12.2024)

Quickies

a) Begründen Sie, dass das chemische Potential $\mu(T)$ eines Fermigases als Funktion der Temperatur abnehmen muss, wenn die Zustandsdichte $\rho(E)$ monoton wachsend ist.

b) Welche möglichen Besetzungszahlen n_{β_i} hat ein bosonischer Ein-Teilchen-Zustand $|\beta_i\rangle$?

c) Warum ist die Gesamtteilchenzahl im Fermigas erhalten, im Bosegas jedoch nicht notwendigerweise?

d) Nennen Sie Beispiele für bosonische und fermionische Teilchen.

e) Wie lautet die großkanonische Zustandssumme für ein freies Bosegas?

f) Bestimmen Sie die Bose-Verteilungsfunktion $b(E_{\beta_i})$ aus der mittleren Besetzungszahl eines Ein-Teilchen-Zustands $|\beta_i\rangle$. Skizzieren Sie $b(E)$.

9.1 Polymer-Modell **10 Punkte**

Gummi besteht aus parallel angeordneten langkettigen Polymermolekülen. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, welche Kraft von diesen Polymerketten bei gegebener Temperatur auf die Umgebung ausgeübt wird. Wir beschreiben ein Polymer hier idealisiert durch eine lineare Kette von N Gliedern, welche je einen knickbaren Abschnitt besitzen. Die mikroskopischen Eigenschaften der Kette seien dabei wie folgt charakterisiert:

$$\text{Energie eines Kettengliedes:} \quad \begin{cases} \epsilon_- & \text{(ungeknickt)} \\ \epsilon_\wedge & \text{(geknickt)} \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{Länge eines Kettengliedes:} \quad \begin{cases} \ell_- & \text{(ungeknickt)} \\ \ell_\wedge < \ell_- & \text{(geknickt)} \end{cases} . \tag{2}$$

a) (4P) Berechnen Sie für festgehaltene Länge L die kanonische Zustandssumme

$$Z_c(T, L, N) = \sum_{\text{Zustände } n} e^{-\beta E_n} . \tag{3}$$

b) (2P) Begründen Sie durch Betrachtung des Differentials der Freien Energie, dass die Kraft K, die die Kette auf die Umgebung ausübt, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$K = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} . \tag{4}$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit dem allgemeinen Ergebnis $\mathrm{d}F(T, V, N) = -S\ \mathrm{d}T - p\ \mathrm{d}V + \mu\ \mathrm{d}N$. Hier wird keine lange Rechnung erwartet.

c) (4P) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis (4) die Kraft $K(T, L, N)$. Gehen Sie dabei vom Grenzfall $N, n_\wedge \gg 1$ aus und schreiben Sie K als Funktion von T, L und N, wobei Sie alle Koeffizienten durch die mikroskopischen Parameter ausdrücken.
Hinweis: Verwenden Sie die grobe Näherung $\log x! \approx x \log x$ für $x \gg 1$.

9.2 Weißer Zwerg **15 Punkte**

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen Stern in einer der möglichen Endphasen der stellaren Evolution. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nicht wechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der nur für die Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sternes durch die Gravitation sorgt. Die Elektronendichte beträgt typischerweise $n = N/V = 10^{30}/\mathrm{cm}^3$ und die Masse $M = 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Teil der Elektronen relativistisch, es gilt also die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p) = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}$. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen ein solcher Stern stabil ist.

a) (4P) Berechnen Sie den Fermi-Impuls $p_F(n)$ des Elektronengases in Abhängigkeit der Elektronendichte n. Schätzen Sie numerisch ab, oberhalb welcher Dichte $n_{\mathrm{rel.}}$ sich die Elektronen an der Fermi-Kante relativistisch [1] bewegen.

b) (1P) Die Temperatur eines weißen Zwerges beträgt etwa 10^7 Kelvin. Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte n numerisch und zeigen Sie, dass $\epsilon_F \gg k_B T$ erfüllt ist. Deshalb wird in den folgenden Aufgabenteilen die Näherung $T = 0$ verwendet.

c) (4P) Berechnen Sie die innere Energie[2] $U(R)$ in Abhängigkeit des Radius[3] R des weißen Zwerges, zuerst für den nichtrelativistischen ($p_F \ll mc$) und anschließend für den ultrarelativistischen Fall ($p_F \gg mc$). Verwenden Sie dabei die folgenden Energie-Impuls-Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{nichtrelativistisch:} \quad & \epsilon(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ \text{ultrarelativistisch:} \quad & \epsilon(p) = cp\ . \end{aligned}$$

d) (2P) Berechnen Sie hieraus den Druck[4] $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ des Elektronensystems für die beiden Fälle. Dieser Druck wird auch Pauli-Druck oder Entartungsdruck genannt.

e) (4P) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie $E(R) := U(R) + E_{\mathrm{Grav.}}(R)$ des Sterns, wobei $E_{\mathrm{Grav.}}(R) = -GM^2/R$ sei. Skizzieren Sie in einem Diagramm $E(R)$ für kleine und für große Sternradien (ultrarelativistisches bzw. nichtrelativistisches Regime).
Was ist die Bedingung an $E(R)$, dass ein Radius existiert, bei dem der Stern stabil ist (d. h. nicht kollabiert)? Zeigen Sie, dass der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Der Stern stürzt dann in sich zusammen. Bestimmen Sie diese Masse M_c.

[1] Hierbei können Sie vereinfachend $p_F > mc$ ansetzen.
[2] Wir reservieren das Symbol E in dieser Aufgabe für die Gesamtenergie inklusiver der Gravitationsenergie.
[3] Wir gehen von einer Kugelgestalt des Sterns aus. Substituieren Sie den üblichen Volumenfaktor $V = \frac{4\pi}{3}R^3$.
[4] Beachten Sie, dass wir $F = U - TS$ mit $T = 0$ nutzen.

9.3 Sommerfeld-Entwicklung **15 Punkte**

Oft sind wir am Verhalten fermionischer Systeme bei sehr tiefen (effektiven) Temperaturen interessiert. Dies ist bei Metallen z.B. dann realisiert, wenn die Fermi-Energie im Vergleich zur Raumtemperatur enorm groß ist: $\epsilon_F/k_B = T_F \approx 10^4$K. In so einem Fall haben wir einen kleinen Parameter k_BT/ϵ_F, um den wir physikalische Größen entwickeln können. Insbesondere wollen wir verwenden, dass sich die Fermi Funktion $f(\varepsilon)$ in diesem Fall nur leicht von einer Stufenfunktion unterscheidet.

Betrachten wir nun das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, f(\varepsilon) H(\varepsilon), \quad \text{mit der Fermi Funktion} \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}. \tag{5}$$

$H(\varepsilon)$ ist hier eine Funktion, die für $\varepsilon \to -\infty$ verschwindet und für $\varepsilon \to \infty$ nicht schneller als polynomial wächst. Diese Annahmen werden für die Konvergenz des Integrals benötigt. In der statistischen Physik ist dies gegeben, da die Funktion $H(\varepsilon)$ die Zustandsdichte enthält und damit das Integral bei negativem ε verschwindet.

a) (3P) Zeigen Sie, dass aus Gl. (5) folgender Ausdruck folgt:

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon f'(\varepsilon) K(\varepsilon) \quad \text{mit} \quad K(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon' H(\varepsilon')\,, \tag{6}$$

wobei $f'(\varepsilon)$ die Ableitung der Fermi-Funktion ist. Skizzieren Sie $f'(\varepsilon)$ und geben Sie die charakteristische Breite der Funktion an.

b) (6P) Da $f'(\varepsilon)$ stark um das chemische Potential lokalisiert ist, kann K in Potenzen von ε darum expandiert werden. Zeigen Sie, dass diese Entwicklung folgende Form annimmt:

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon H(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} (k_BT)^{2n} a_n H^{(2n-1)}(\mu), \tag{7}$$

wobei $H^{(2n-1)}(\mu)$ die bei $\varepsilon = \mu$ ausgewertete Ableitung der Ordnung $(2n-1)$ von $H(\varepsilon)$ ist. Die Konstanten a_n sind dann durch Integrale der Form $a_n = \frac{1}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^{2n}e^x}{(e^x+1)^2}$ gegeben.

Die Korrektur zur kleinsten Ordnung in T ist

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon H(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 H'(\mu)\,. \tag{8}$$

Wir wollen nun die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials zur kleinsten, nicht verschwindenden Ordnung in T bestimmen. Hierfür bestimmen wir die temperaturabhängige Teilchenzahl. Die Funktion $H(\epsilon)$ ist in diesem Fall also die Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$.

c) (6P) Bestimmen Sie $\mu(T)$ einschließlich Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(T^2)$. Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten

$$\mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 \frac{\rho'(\varepsilon_F)}{\rho(\varepsilon_F)}\,. \tag{9}$$