HA06 Lisa Peltzer, Angelo Brade

Dienstag, 15. November 2022 10:17

(6) Da $f[M] \subseteq N$ ist, kann f: M auf eine Teilmenge von N abbilden. Außerdem kann g alle Teilmengen von N abbilden. Damit kann g(f): abbilden. Somit kann die Wertemenge von f vollständig auf der Definitionsmenge von g abgebildet werden. Folgedessen gibt es keine Definitionslücken, womit, durch die Stetigkeit von f(x) und g(x), die Stetigkeit an allen Stellen von g(f(x)) gegeben ist. Hierbei ist insbesondere die Stetigkeit von f wichtig.

(4) Damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_{\pi(n)}$ divergiert, kann die Permutation π so angeordnet werden, dass so viele positive Glied addiert werden, dass sie in der Summe größer sind, als das vorherige negative Glied, welches addiert wurde: $\pi(1, \underbrace{2, 3, 5}_{<}, \underbrace{4, 7, 9}_{<}, \ldots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n = \overset{1}{1} - \overset{2}{\frac{1}{2}} + \overset{3}{\frac{1}{3}} - \overset{4}{\frac{1}{4}} + \overset{5}{\frac{1}{5}} - \overset{6}{\frac{1}{6}} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_{\pi(n)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} h_{\pi(n)} \to \infty$$

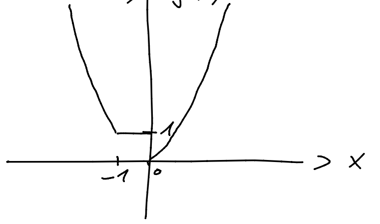
(5)

a) Die Funktion ist an allen Stellen stetig, da es sich um ein Polynom handelt.

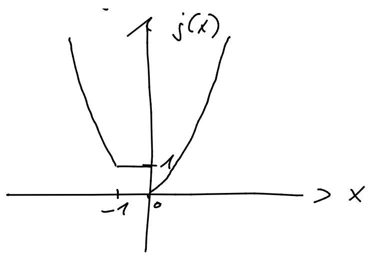
b) Die Funktion ist an allen Stellen stetig, da der Nenner in $\frac{1}{1+x^2}$ durch $1+x^2$ nicht negativ werden kann, da das x^2 minimal 0 ist und somit mit $x=0 \wedge 1+x^2 \Rightarrow 1+0^2 = 1 \neq 0$.

c) Laut Definition ist $|x|$ der Betrag von x und somit vollständig auf $\mathbb{R}$ definiert. Der Wertebereich liegt ebenso in $\mathbb{R}$ (genauer in $\mathbb{R}_0^+$).

d)



d)



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} j\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} j\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 \end{array}\right\} ↯$$

j ist an der Stelle $x=0$ nicht stetig, da die Funktion gegen verschiedene Grenzwerte von links und rechts konvergiert.

Die Funktion j ist nicht stetig.

Auf 1

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \Theta \qquad 0 \leq \Theta < 1$$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\left|\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right| = \left|\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right|$$

$$\left|\frac{2^n \cdot (n+1)}{2^{n+1} \cdot n}\right| = \left|\frac{n+1}{2n}\right| = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \Theta$$

$\hookrightarrow 2^n \cdot 2 \cdot n$ $\qquad \hookrightarrow n \in \mathbb{N}$ $\qquad \hookrightarrow$ Nullfolge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n+1}}$

Der Zähler wächst schneller als der Nenner also geht die Reihe gegen unendlich und divergiert

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}$ $\qquad \alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \alpha < 1$ Reihe konvergiert

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}\right|} = \left|\frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{2^2}{n^n} = \frac{4}{n^n}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^n} = 0 \qquad \alpha < 1 \checkmark$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ $\qquad$ Wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ $\quad$ Nullfolge ✓

$a_n \geq a_{n+1}$ $\quad$ monoton fallend

$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+2n+2}$ ✓ da der Nenner von a_{n+1} größer ist als der von a_n, ist a_{n+1} kleiner als a_n

Da $\frac{1}{n^2+1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz Kriterium

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$

Der Zähler wächst schneller als der Nenner also geht die Reihe gegen unendlich und divergiert

Auf 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+n)^{-1}$

$S_1 = (1^2+1)^{-1} = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + (2^2+2)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$S_3 = \frac{4}{6} + (3^2+3)^{-1} = \frac{4}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$

$S_4 = \frac{9}{12} + (4^2+4)^{-1} = \frac{9}{12} + \frac{1}{20} = \frac{45}{60} + \frac{3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

$S_5 = \frac{4}{5} + (5^2+5)^{-1} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{24}{30} + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

Induktionsanker

$n=1$ $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

$S_1 = \frac{1}{(1^2+1)} = \frac{1}{2}$

$S_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓

Induktionsschritt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{(k+1)^2+(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2+(k+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k^2+2k+1+k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k^2+3k+2}$$

$$= 1 - \frac{n^2+3n+2}{(n+1)(n^2+3n+2)} + \frac{n+1}{(n+1)(n^2+3n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+2n+n^2+3n+2} = 1 - \frac{n^2+2n+1}{n^3+4n^2+5n+2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}(n+2)} = 1 - \frac{1}{(n+2)}$$

c) $\sum_{n=1}^{k} 1 - \frac{1}{(k+1)}$

$\lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} 1 - \lim \frac{1}{(k+1)} = 1 - \underbrace{\lim \frac{1}{(k+1)}}_{\text{konvergiert gegen } 0}$

$= 1 - 0 = 1$

Reihe konvergiert gegen 1

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longleftrightarrow \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$ ✓

Auf 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a^n) \qquad a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} 1 - a^n = 1 - \lim_{n\to\infty} a^n$

für $a = 0$ konvergiert die Reihe gegen 1

für $a = 1$ konvergiert die Reihe gegen 0