

Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 6

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte). Welche der folgenden Reihen konvergieren?

Begründen Sie Ihre Entscheidungen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ *Quotientenkri.* (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n+1}}$ *keine Nullfolge* (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n(n^2)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ *alternierend, Nullfolge* (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$ *keine Nullfolge*

Aufgabe 2 (1+2+2+2 Punkte). Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

- (a) Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen.
- (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k -te Partialsumme gleich $1 - \frac{1}{k+1}$ ist.
- (c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
- (d) Rechnen Sie nach, dass die obige Reihe auch in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ geschrieben werden kann. Warum erleichtert diese Beobachtung den Beweis von (b)?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Untersuchen Sie, für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a^n)$ konvergiert. *$1 - a^1 + 1 - a^2 + 1 - a^3 + \dots$*
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{2048} - \frac{1}{4096} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{8192} - \frac{1}{16384} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{32768} - \frac{1}{65536} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{131072} - \frac{1}{262144} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{524288} - \frac{1}{1048576} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{2097152} - \frac{1}{4194304} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{8388608} - \frac{1}{16777216} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{33554432} - \frac{1}{67108864} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{134217728} - \frac{1}{268435456} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{536870912} - \frac{1}{1073741824} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{2147483648} - \frac{1}{4294967296} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{8589934592} - \frac{1}{17179869184} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{34359738368} - \frac{1}{68719476736} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{137438953472} - \frac{1}{274877906944} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{549755813888} - \frac{1}{1099511627776} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{2199023255552} - \frac{1}{4398046511104} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{8796093022208} - \frac{1}{17592186044416} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{35184372088832} - \frac{1}{70368744177664} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{140737488355328} - \frac{1}{281474976710656} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{562949953421312} - \frac{1}{1125899906842624} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{2251799813685248} - \frac{1}{4503599627370496} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{9007199254740992} - \frac{1}{18014398509481984} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{36028797018963968} - \frac{1}{72057594037927936} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{144115188075855872} - \frac{1}{288230376151711744} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{576460752303423488} - \frac{1}{1152921504606846976} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{2305843009213693952} - \frac{1}{4611686018427387904} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{9223372036854775808} - \frac{1}{18446744073709551616} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{36893488147419103232} - \frac{1}{73786976294838206464} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{147573952589676412928} - \frac{1}{295147905179352825856} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{590295810358705651712} - \frac{1}{1180591620717411303424} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{2361183241434822606848} - \frac{1}{4722366482869645213696} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{9444732965739290427392} - \frac{1}{18889465931478580854784} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{37778931862957161709568} - \frac{1}{75557863725914323419136} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{151115727451828646838272} - \frac{1}{302231454903657293676544} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{604462909807314587353088} - \frac{1}{1208925819614629174706176} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{2417851639229258349412352} - \frac{1}{4835703278458516698824704} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{9671406556917033397649408} - \frac{1}{19342813113834066795298816} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{38685626227668133590597632} - \frac{1}{77371252455336267181195264} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{154742504910672534362390528} - \frac{1}{309485009821345068724781056} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{618970019642690137449562112} - \frac{1}{1237940039285380274899124224} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{2475880078570760549798248448} - \frac{1}{4951760157141521099596496896} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{9903520314283042199192993792} - \frac{1}{19807040628566084398385987584} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{39614081257132168796771975168} - \frac{1}{79228162514264337593543950336} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{158456325028528675187087900672} - \frac{1}{316912650057057350374175801344} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{633825300114114700748351602688} - \frac{1}{1267650600228229401496703205376} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{2535301200456458802993406410752} - \frac{1}{5070602400912917605986812821504} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{10141204801825835211973625643008} - \frac{1}{20282409603651670423947251286016} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{40564819207303340847894502572032} - \frac{1}{81129638414606681695789005144064} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{162259276829213363391578010288128} - \frac{1}{324518553658426726783156020576256} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{649037107316853453566312041152512} - \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} - \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} - \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} - \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} - \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} - \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} - \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} - \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} - \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} - \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} - \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} - \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} - \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} - \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} - \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} - \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} - \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} + \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} - \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} + \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} - \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} + \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} - \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} + \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} - \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} + \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} - \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} + \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} - \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} + \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} - \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} + \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} - \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} + \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} - \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} + \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} - \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} + \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} - \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} + \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} - \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} + \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} - \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} + \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} - \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} + \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} - \frac{1}{59863$

4.1

Aufgabe 6 (2 Punkte). Beweisen Sie, dass die Hintereinausführung von zwei stetigen Funktionen stetig ist: Für $M \subseteq \mathbb{C}$ und $N \subseteq \mathbb{C}$ seien $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : N \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige Funktionen, wobei $f[M] \subseteq N$. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, stetig.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle

Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 17. November, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.