$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{ec^2} (\vec{v} \wedge \vec{r}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

$$= -\frac{1}{ec^2} (\vec{r} \wedge \vec{p}) \frac{1}{rm} \frac{dV}{dr}$$

$$= -\frac{1}{Mec^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L}$$

$\rightsquigarrow$ Beitrag zur Energie

$$-\vec{m}_{int} \cdot \vec{B} = +\frac{g\hbar}{2M^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$$

$$\boxed{\hat{H} = \left(\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2M} + \hat{V}(\hat{r})\right) \mathbb{1} + W(\hat{r}) (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{L}})}$$

$$W(r) := \frac{g-1}{2} \frac{\hbar}{M^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

$-1$: Ergebnis einer relativistischen Rechnung

Der Term $W(r)(\vec{\sigma} \cdot \vec{L})$ ist die Spin-Orbit Kopplung, und beschreibt die Wechselwirkung des intrinsischen magnetischen Moment mit dem durch das Elektron erzeugten Magnetfeld.

Es gilt:

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}, \hat{L}_z \mathbb{1}\right] = \begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{L}_z & 0 \\ 0 & \hat{L}_z \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \hat{L}_z & 0 \\ 0 & \hat{L}_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{L}_z^2 & \hat{L}_x\hat{L}_z - i\hat{L}_y\hat{L}_z \\ \hat{L}_x\hat{L}_z + i\hat{L}_y\hat{L}_z & -\hat{L}_z^2 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \hat{L}_z^2 & \hat{L}_z\hat{L}_x - i\hat{L}_z\hat{L}_y \\ \hat{L}_z\hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & [\hat{L}_x, \hat{L}_z] - i[\hat{L}_y, \hat{L}_z] \\ [\hat{L}_x, \hat{L}_z] + i[\hat{L}_y, \hat{L}_z] & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{L}_y + \hat{L}_x \\ -i\hat{L}_y - \hat{L}_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0 \; !$$

Es gilt auch:

$$[\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}, \sigma_z]$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & -\hat{L}_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{L}_z & -\hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y & \hat{L}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{L}_z & \hat{L}_x - i\hat{L}_y \\ -\hat{L}_x - i\hat{L}_y & \hat{L}_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) \\ 2(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0$$

Es folgt:

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = W(r)\,[(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}), \hat{L}_z] \neq 0$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = W(r)\,[(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}), \hat{S}_z] \neq 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] &\neq 0 \\ [\hat{H}, \hat{\vec{S}}] &\neq 0\end{aligned}}$$

Weder der orbitale Drehimpuls $\hat{\vec{L}}$ noch der Spin sind erhalten !

**ABER:** Sei

$$\boxed{\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}}$$

Totaler / Gesamt Drehimpuls

Dann gilt

$$[\hat{H}, \hat{J}_z] = [\hat{H}, \hat{L}_z] + [\hat{H}, \hat{S}_z] = 0 \quad !$$

und allgemeiner

$$\boxed{[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = 0}$$

Der totale Drehimpuls ist erhalten.

Kommutations-Relationen:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z$$
$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x$$
$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y$$

Kommutations-Relationen des Drehimpulsoperators.

Es gilt: $[\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{L}}] = [\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{S}}] = [\hat{\vec{L}}, \hat{\vec{S}}] = 0$

aber: $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{L}}] \neq 0$

$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{S}}] \neq 0$

da z.b. $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{L}_z] = \underbrace{\cancel{[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z]}}_{=0} + \underbrace{\cancel{[\hat{\vec{S}}^2, \hat{L}_z]}}_{=0} + 2\underbrace{[\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}, \hat{L}_z]}_{\neq 0}$

Frage: Was ist das Spektrum von $\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$?

$$\hat{\vec{J}}^2 = (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})^2 = \hat{\vec{L}}^2 + 2\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} + \hat{\vec{S}}^2$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right)$$

Nehmen wir an wir kennen den $\ell$-Wert für $\hat{\vec{L}}$.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \hat{\vec{L}}^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1) \\ \hat{\vec{S}}^2 = \hbar^2 \frac{3}{4} \end{cases}$$

Was ist der Wert von $\hat{\vec{J}}^2$.

$\rightsquigarrow$ muss von der Form $\hbar^2 j(j+1)$ sein

$\rightsquigarrow$ Was ist $j$?

# Addition von Drehimpulsen

## Wiederholung: Eigenvektoren von $\hat{L}_z$ und $\hat{\vec{L}}^2$.

Sei $|l,m\rangle$ eine ONB aus Eigenvektoren für $\hat{L}_z$ und $\hat{\vec{L}}^2$:

$$\langle l,m|l',m'\rangle = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$$

$$\hat{L}_z\,|l,m\rangle = \hbar m\,|l,m\rangle$$

$$\hat{\vec{L}}^2\,|l,m\rangle = \hbar^2\,l(l+1)\,|l,m\rangle$$

Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\,\hat{L}_y = \hat{L}_\mp^+$$

$$[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm] = \pm\hbar\,\hat{L}_\pm$$

$$[\hat{L}_+,\hat{L}_-] = 2\hbar\,\hat{L}_z$$

$$\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

Genauso: Sei $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ eine ONB für $\hat{\vec{S}}$:

$$\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1, \quad \langle + | - \rangle = 0$$

$$\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2}\hbar$$

$$\hat{\vec{S}}^2 |\pm\rangle = \hbar^2 \frac{3}{4} |\pm\rangle$$

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y$$

$$[\hat{S}_\pm, \hat{S}_z] = \mp \hbar \hat{S}_z \qquad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hbar \hat{S}_z$$

$$\hat{S}_+ |+\rangle = \hat{S}_- |-\rangle = 0$$

$$\hat{S}_- |+\rangle = \hbar |-\rangle$$

$$\hat{S}_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle$$

# Setup für $\hat{\vec{J}}$:

* Unser Hilbertraum ist

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes L^2(S^2, d\Omega) \otimes \mathbb{C}^2$$

radial Anteil invariant unter $\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{S}}$

Hier agiert $\hat{\vec{L}}$, aber nicht $\hat{\vec{S}}$
ONB
$Y_\ell^m(\theta, \varphi) \leftrightarrow |\ell, m\rangle$

Hier agiert $\hat{\vec{S}}$, aber nicht $\hat{\vec{L}}$
ONB: $|+\rangle, |-\rangle$

* Für festes $\ell$ brauchen wir nur einen $2\ell+1$-dim Unterraum von $L^2(S^2, d\Omega)$; mit ONB $|\ell, m\rangle$.

* Es reicht dann für unsere Diskussion sich den Hilbertraum

$$\mathcal{H}' = \mathbb{C}^{2\ell+1} \otimes \mathbb{C}^2$$

anzuschauen

Hier agiert $\hat{\vec{L}}$, aber nicht $\hat{\vec{S}}$; ONB $|\ell, m\rangle$ $m = -\ell, \dots, \ell$

Hier agiert $\hat{\vec{S}}$, aber nicht $\hat{\vec{L}}$, ONB: $|+\rangle, |-\rangle$

* Eine ONB für $\mathcal{H}'$ ist

$$\left\{ |l,m\rangle \otimes |s\rangle : -l \leq m \leq l,\ s = \pm \right\}$$

Notation: $|l,m\rangle \otimes |s\rangle =: |l,m\rangle |s\rangle$

* $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ sind hermitische Operatoren auf $\mathcal{H}'$:

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{S}_z$$

* Da $[\hat{J}_z, \hat{L}_z] = [\hat{J}_z, \hat{S}_z] = 0$, $\hat{J}_z$ ist diagonal in der obigen ONB:

$$\hat{J}_z |l,m\rangle |s\rangle = \left(\hat{L}_z |l,m\rangle\right) |s\rangle + |l,m\rangle \left(\hat{S}_z |s\rangle\right)$$

$$= \hbar\left(m + \frac{s}{2}\right) |l,m\rangle |s\rangle$$

* Da $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{L}_z] \neq 0$ und $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{S}_z] \neq 0$, $\hat{\vec{J}}^2$ ist NICHT diagonal in dieser Basis!

$\rightsquigarrow$ Es gibt eine andere ONB in der $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ diagonal sind

$\rightsquigarrow$ Basiswechsel!

Notation: $|J,M\rangle \in \mathcal{H}'$

$$\hat{\vec{J}}^2 |J,M\rangle = \hbar^2 J(J+1)$$

$$\hat{J}_z |J,M\rangle = \hbar M |J,M\rangle$$

$\rightsquigarrow$ Wir können $|J,M\rangle$ in der ONB schreiben!

$\rightsquigarrow$ Aber: Welche Werte für $J$

(Für gegebenes $J$, $M = -J, \dots, J$.)

FAKT: • $\hat{J}_+ |J,J\rangle = \hat{J}_- |J,-J\rangle = 0$

• Falls $\hat{J}_+ |J,M\rangle = 0$ und $|J,M\rangle \neq 0$, dann $M = J$.

* Es gilt

$$\hat{J}_z |\ell,\ell\rangle|+\rangle = (\ell+\tfrac{1}{2})\hbar\, |\ell,\ell\rangle|+\rangle$$

und

$$\hat{J}_+ |\ell,\ell\rangle|+\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|\ell+\tfrac{1}{2},\ell+\tfrac{1}{2}\rangle = |\ell,\ell\rangle|+\rangle}$$

* $$\hat{J}_- |\ell+\tfrac{1}{2},\ell+\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2\ell+1}\, |\ell+\tfrac{1}{2},\ell-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\shortparallel$$

$$(\hat{L}_- |\ell,\ell\rangle)|+\rangle + |\ell,\ell\rangle(\hat{S}_-|+\rangle)$$

$$= \hbar\sqrt{2\ell}\, |\ell,\ell-1\rangle|+\rangle + \hbar\, |\ell,\ell\rangle|-\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\ell+\tfrac{1}{2},\ell-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell+1}}\, |\ell,\ell-1\rangle|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\, |\ell,\ell\rangle|-\rangle}$$

* Wir können so weitermachen, und $2(\ell+\frac{1}{2})+1 = 2\ell+2$ Vektoren $|\ell+\frac{1}{2},M\rangle$, mit $M = -\ell-\frac{1}{2},\dots,\ell+\frac{1}{2}$, finden.

* Es gibt eine 2te Linearkombination mot $\hat{J}_z$ Eigenwert $l-\frac{1}{2}$!

$$|v\rangle := \frac{-1}{\sqrt{2l+1}}|l,l-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}|l,l\rangle|-\rangle$$

$$\langle v|v\rangle = 1$$

$$\langle v|l+\tfrac{1}{2},l-\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$

$$\hat{J}_z|v\rangle = (l-\tfrac{1}{2})|v\rangle$$

$$\hat{\vec{J}}^2|v\rangle = \hbar^2(l-\tfrac{1}{2})(l+\tfrac{1}{2})|v\rangle$$

$$\Rightarrow |v\rangle = |l-\tfrac{1}{2},l-\tfrac{1}{2}\rangle \text{ !}$$

$$\boxed{|l-\tfrac{1}{2},l-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2l+1}}|l,l-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}|l,l\rangle|-\rangle}$$

* Wir können mit $\hat{J}_-$, $\hat{L}_-$, $\hat{S}_-$ $2(l-\frac{1}{2})+1=2l$ weitere Vektoren $|l-\frac{1}{2},M\rangle$, mit $-2l\le M\le 2l$ finden

* Wir haben nun $(2\ell+2)+(2\ell)=2(2\ell+1)$ linear unabhängige Vektoren (wieso?)

$$\boxed{\begin{matrix} |\ell+\frac{1}{2},\ell+\frac{1}{2}\rangle \\ |\ell+\frac{1}{2},\ell-\frac{1}{2}\rangle \\ \vdots \\ |\ell+\frac{1}{2},-\ell+\frac{1}{2}\rangle \\ |\ell+\frac{1}{2},-\ell-\frac{1}{2}\rangle \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} |\ell-\frac{1}{2},\ell-1/2\rangle \\ |\ell-\frac{1}{2},\ell-3/2\rangle \\ \vdots \\ |\ell-\frac{1}{2},-\ell+\frac{3}{2}\rangle \\ |\ell-\frac{1}{2},-\ell+\frac{1}{2}\rangle \end{matrix}}$$

$$J=\ell+\frac{1}{2} \qquad\qquad J=\ell-\frac{1}{2}$$

* Da $\dim \mathcal{H}'=2(2\ell+1)$ haben wir eine ONB. In dieser ONB sind $\hat{J}_z$ und $\hat{\vec{J}}^2$ diagonal (Nicht aber $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{\vec{S}}^2$!)

* Schlussfolgerung:

Für gegebenes $\ell$ sind die einzigen Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$ $\ell\pm\frac{1}{2}$!

## Allgemeine Lösung:

$$|J = \ell + \tfrac{1}{2}, M\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + M}{2\ell + 1}}\, |\ell, M - \tfrac{1}{2}\rangle |+\rangle + \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - M}{2\ell + 1}}\, |\ell, M + \tfrac{1}{2}\rangle |-\rangle$$

$$|J = \ell - \tfrac{1}{2}, M\rangle$$

$$= -\sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - M}{2\ell + 1}}\, |\ell, M - \tfrac{1}{2}\rangle |+\rangle + \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + M}{2\ell + 1}}\, |\ell, M + \tfrac{1}{2}\rangle |-\rangle$$