Ex 5; Blatt 7; Dominik Wawrzinek, Angelo Brade; 02.12.2024

Aufgabe 2:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad \text{mit} \quad F(\vec{q}) = \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

1.) $\rho(\vec{r}) = Ze\cdot \delta^{(3)}(\vec{r})$

$$\Rightarrow F(\vec{q}) = \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_V Ze\cdot \delta^{(3)}(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= 1$$

2.) Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|) = \rho(r)$ mit $|\vec{r}| = r$

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(r)\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^\infty dr\cdot r^2\cdot \rho(r)\, e^{i(r\cdot q\cdot \cos\theta)}$$

$$= \frac{2\pi}{Z\cdot e}\int_0^\infty dr\, \rho(r)\, r^2 \frac{(e^{irq} - e^{-irq})}{irq}$$

$$= \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^\infty dr\, r^2 \rho(r)\, \frac{\sin(rq)}{rq} \qquad \square$$

3) $\rho(r) = \frac{3Ze}{4\pi R^3}\Theta(R-r)$

$$F(q) = \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^\infty r^2 \rho(r)\, \frac{\sin(r\cdot q)}{rq}\, dr$$

$$= \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^\infty \frac{3Ze}{4\pi R^3}\Theta(R-r)\, r^2 \frac{\sin(r\cdot q)}{rq}\, dr$$

$$= \frac{3}{R^3 q}\int_0^R r\sin(r\cdot q)\, dr \qquad \Big|\ \int \sin(r\cdot q)\, dr \overset{\frac{du}{dr}=q}{=} \int \frac{1}{q}\sin(u)\, du = -\frac{\cos(r\cdot q)}{q}$$

$$= \frac{3}{R^3 q}\left(\left[-\frac{r}{q}\cos(r\cdot q)\right]_0^R + \int_0^R \frac{\cos(r\cdot q)}{q}\, dr\right)$$

$$= \frac{3}{R^3\cdot q}\left(\frac{\sin(R\cdot q)}{q^2} - \frac{R}{q}\cos(R\cdot q)\right)$$

4.)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad \text{mit} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

$$\text{I:} \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4E_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \cdot \left| \frac{3}{R^3 \cdot q} \left(\frac{R}{q} \cos(R \cdot q) - \frac{\sin(R \cdot q)}{q^2} \right) \right|^2$$

(I) nach R umstellen und $\theta = 65°$, $q = 2p\sin(\frac{\theta}{2})$, $p = \sqrt{2E \cdot m}$, $z_1 = 1$, $z_2 = 12$, $E = 420\,MeV$, $E_0 = E_0(^{12}C)$ und ε_0 einsetzen.

Irgendwie die Nullstelle der Besselfunktion benutzen, um nach R aufzulösen.

$$x = R \cdot q$$

$$\frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{x^2} = \frac{\sin(R \cdot q)}{R^2 q^2} - \frac{\cos(R \cdot q)}{R q}$$

$$R^2 \cdot \left(j_1(x) \Big|_{x = R \cdot q} \right) \sim F(q)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} \Bigg|_{\theta = 52°} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F(q) \Big|_{\theta = 52°} = 0 \Rightarrow j_1(x) \Big|_{x = R \cdot q} = 0$$

$$\Rightarrow (R \cdot q) \Big|_{\theta = 52°} = R \cdot 2p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_{\theta = 52°} = 4{,}493$$

$$\Rightarrow R = \frac{4{,}493}{2\sqrt{2Em}\,\sin(\frac{52°}{2})}$$

$$= \frac{4{,}493}{2\sqrt{2 \cdot 420\,MeV \cdot 12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}\,\sin(\frac{52°}{2})}$$

$$=$$

Nr. 1

Gegeben: Elektronen mit Energie E, E'; Kern mit Masse M, Impuls $\vec{q}$, Energie ν, vorher in Ruhe; $q^2 = \nu^2 - |\vec{q}|^2$; $\hbar = c = 1$

1.)

$p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad q = (\nu, \vec{q})$

$p_A' = p_A + q \Rightarrow p_A'^2 = p_A^2 + q^2 + 2p_A q \qquad | \; p_A^2 = M^2, \; -q^2 = Q^2, \; p_A \cdot q = M\nu, \; p_A'^2 = M'^2$

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Bei inelastischer Streuung gilt $M' > M$, daraus folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 > 0$

2.)

Zunächst folgt analog zu 1.):

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Nun gilt jedoch $M' = M$, daher folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 = 0 \iff 2M\nu = Q^2$

3.)

$p_e + p_A = p_e' + p_A'$

$\Rightarrow (p_e + p_A)^2 = (p_e' + p_A')^2$

$\iff p_e^2 + p_A^2 + 2p_e p_A = p_e'^2 + p_A'^2 + 2p_e' p_A' \qquad | \; p_e^2 = p_e'^2 = m_e^2 \quad p_A^2 = M^2 = M'^2 = p_A'^2 \quad | :2m_e^2 M^2$

$\iff p_e p_A = p_e' + p_A' \qquad | \; p_A' = p_e + p_A - p_e'$

$\iff p_e p_A = p_e' p_e + p_e' p_A - p_e' \qquad | \; p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad p_e = (E, \vec{p}) \quad p_e' = (E', \vec{p}\,')$

$\iff E \cdot M = E' \cdot E - \vec{p}\,' \cdot \vec{p} + E' \cdot M - m_e^2 \qquad | \; \vec{p}\,' \cdot \vec{p} = |\vec{p}\,'||\vec{p}|\cos\theta$ mit $|\vec{p}\,'||\vec{p}| = E' \cdot E$ da m_e sehr klein ist

$\iff E \cdot M = E' E(1 - \cos\theta) + E' M - m_e^2$

$\iff E'(E(1 - \cos\theta) + M = E \cdot M + m_e^2$

$\iff E' = \frac{E \cdot M + m_e^2}{E(1-\cos\theta) + M} \approx \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M}$

4.)

Gegeben: $M = 12u = 12 \cdot 931\,\text{MeV}$, $E = 495\,\text{MeV}$, $\theta = 65{,}4°$

$E' = \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M} \approx 482{,}5\,\text{MeV}$

Die berechnete Energie passt zum größten Peak im Spektrum.

5.)

Die anderen rühren daher dass nicht alle Elektronen elastisch gestreuut werden; manche werden auch inelastisch gestreut.

Nr.3

Gegeben: Schnelle Neutronen, $d_T = 10\,\text{cm}$, $\rho_T = 10^{21}$ pro cm^3 (^{53}Cr-Atome), 0,1% wird eingefangen $\longrightarrow$ ^{54}Cr mit $J^P = 0^+$

1.)

Die Wahrscheinlichkeit dw, dass ein einfallendes Teilchen mit dem Target wechselwirkt beträgt

$$dw = \sigma \cdot \rho_T \cdot dx$$

mit dem Wirkungsquerschnitt σ, der Teilchendichte ρ_T des Targets und der Dicke der Targetschicht dx.

Mit $dw = \frac{dN_{Reaktion}}{N}$, also dem Verhältnis aus reagierenden Projektilteilchen zu einfallenden Projektilteilchen, kann man die Gleichung nach $N_{Reaktion}$ auflösen und $-dN$ setzen, woraus die Differentialgleichung

$$-dN = N(x)\,\rho_T\,\sigma\,dx$$

folgt. Die Lösung von dieser ist

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\sigma \rho_T x}$$

wobei $N(x)$ die Anzahl an Projektilteilchen ist, die das Target unverändert (d.h. ohne Reaktion) durchlaufen, während N_0 die Anfangsmenge an Projektilteilchen ist.

Die lässt sich nun nach σ umstellen, wobei $x = d_T$ die Dicke des Targets ist:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N(x)}\right) && \Big| N(x) = N_0 - N_{Reaktion} \\
&= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N_0 - N_{Reaktion}}\right) && \Big| N_{Reaktion} = 0{,}001\,N_0 \\
&= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}999}\right) \\
&\approx 1{,}0005 \cdot 10^{-25}\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

2.)

γ_2: E2 Übergang, da aus $|J_1 - J_2| \leq l \leq J_1 + J_2 \Rightarrow l = 2$ folgt, somit ist $El = E2$ und $P = (-1)^l = 1$

γ_3: E2 Übergang aus demselben Grund

3.)

γ_1: Die nächst-wahrscheinlichen Übergänge sind E2 und M1, die Wahrscheinlichkeit ist etwa gleich groß. Für E2 hat der 9,2 MeV-Zustand $J^P = 2^+$, für M1 hat er $J^P = 1^-$.

γ_4: Für $2^+ \rightarrow 1^+$ folgt $l = 1,2,3$, woraus die möglichen Multipol-Übergänge (unter Beachtung der Parität) M1, E2 und M3 folgen, wobei M1 und E_2 etwa gleich wahrscheinlich sind und M3 deutlich unwahrscheinlicher.

Für $1^- \Rightarrow 1^+$ gibt es keinen Übergang, da es keine Monopolstrahlung ($l=0$) gibt.