Ex 5; Blatt 7; Dominik Wawrzinek, Angelo Brade; 02.12.2024

Ges. Σ 33

Aufgabe 2: Σ 14

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad \text{mit} \quad F(\vec{q}) = \frac{1}{Z \cdot e} \int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

1.) $\rho(\vec{r}) = Ze \cdot \delta^{(3)}(\vec{r})$

$$\Rightarrow F(\vec{q}) = \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_V Ze\cdot \delta^{(3)}(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= 1$$

✓ 2/2

2.) Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|) = \rho(r)$ mit $|\vec{r}| = r$

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(\vec{r})\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_V \rho(r)\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})} dr^3$$

$$= \frac{1}{Z\cdot e}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \cdot \rho(r)\, e^{i(r\cdot q\cdot\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\pi}{Z\cdot e}\int_0^{\infty} dr\, \rho(r)\, r^2\, \frac{\left(e^{irq} - e^{-irq}\right)}{irq}$$

$$= \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^{\infty} dr\, r^2 \rho(r)\, \frac{\sin(rq)}{rq} \qquad \square$$

✓ 5/5

3.) $\rho(r) = \frac{3Ze}{4\pi R^3}\Theta(R - r)$

$$F(q) = \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^{\infty} r^2 \rho(r)\, \frac{\sin(r\cdot q)}{rq}\, dr$$

$$= \frac{4\pi}{Z\cdot e}\int_0^{\infty} \frac{3Ze}{4\pi R^3}\Theta(R-r)\, r^2\, \frac{\sin(r\cdot q)}{rq}\, dr$$

$$= \frac{3}{R^3 q}\int_0^{R} r\sin(r\cdot q)\, dr \qquad \left| \int \sin(r\cdot q)\, dr \overset{\frac{du}{dr} = q}{=} \int \frac{1}{q}\sin(u)\, du = -\frac{\cos(r\cdot q)}{q}\right.$$

$$= \frac{3}{R^3 q}\left(\left[-\frac{r}{q}\cos(r\cdot q)\right]_0^R + \int_0^R \frac{\cos(r\cdot q)}{q}\, dr\right)$$

$$= \frac{3}{R^3\cdot q}\left(\frac{\sin(R\cdot q)}{q^2} - \frac{R}{q}\cos(R\cdot q)\right)$$

✓ 5/5

4.)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad \text{mit} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4 E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

$$I: \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4 E_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \cdot \left| \frac{3}{R^2 \cdot q} \left(\frac{R}{q} \cos(R\cdot q) - \frac{\sin(R\cdot q)}{q^2}\right)\right|^2$$

(I) nach R umstellen und $\theta = 65°$, $q = 2p\sin(\frac{\theta}{2})$, $p = \sqrt{2E\cdot m}$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = 12$, $E = 420\,MeV$, $E_0 = E_0({}^{12}C)$ und ε_0 einsetzen.

Irgendwie die Nullstelle der Besselfunktion benutzen, um nach R aufzulösen.

$$x = R\cdot q$$

$$\frac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x^2} = \frac{\sin(R\cdot q)}{R^2 q^2} - \frac{\cos(R\cdot q)}{R q}$$

$$R^2 \cdot \left(j_1(x)\Big|_{x=R\cdot q}\right) \sim F(q)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}\Bigg|_{\theta \approx 52°} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F(q)\Big|_{\theta=52°} = 0 \Rightarrow j_1(x)\Big|_{x = R\cdot q} = 0$$

$$\Rightarrow (R\cdot q)\Big|_{\theta\approx 52°} = R\cdot 2p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_{\theta\approx 52°} = 4{,}493 \quad ✓$$

Elektron?
S. 41
Siehe Bild

$$\Rightarrow R = \frac{4{,}493}{2\sqrt{2Em}\,\sin(\frac{52°}{2})} \quad f$$

$$= \frac{4{,}493}{2\sqrt{2\cdot 420\,MeV \cdot 12\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg}\,\sin(\frac{52°}{2})}$$

??

$=$

2/4

Nr. 1 Σ 12

Gegeben: Elektronen mit Energie E, E'; Kern mit Masse M, Impuls $\vec{q}$, Energie ν, vorher in Ruhe; $q^2 = \nu^2 - |\vec{q}|^2$; $\hbar = c = 1$

1.)

$p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad q = (\nu, \vec{q})$

$p_A' = p_A + q \Rightarrow p_A'^2 = p_A^2 + q^2 + 2 p_A q \quad | \; p_A^2 = M^2, \; -q^2 = Q^2, \; p_A \cdot q = M\nu, \; p_A'^2 = M'^2$

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Bei inelastischer Streuung gilt $M' > M$, daraus folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 > 0$

4/4

2.)

Zunächst folgt analog zu 1.):

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Nun gilt jedoch $M' = M$, daher folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 = 0 \iff 2M\nu = Q^2$

2/2

3.)

$p_e + p_A = p_e' + p_A'$

$\Rightarrow (p_e + p_A)^2 = (p_e' + p_A')^2$

$\iff p_e^2 + p_A^2 + 2 p_e p_A = p_e'^2 + p_A'^2 + 2 p_e' p_A' \quad | \; p_e^2 = p_e'^2 = m_e^2 \quad p_A^2 = M^2 = M'^2 = p_A'^2 \quad | : 2 m_e^2 M^2$

$\iff p_e p_A = p_e' + p_A' \quad | \; p_A' = p_e + p_A - p_e'$

$\iff p_e p_A = p_e' p_e + p_e' p_A - p_e'$ $+2\ell$ f

$\quad | \; p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad p_e = (E, \vec{p}) \quad p_e' = (E', \vec{p}\,')$

$\iff E \cdot M = E' \cdot E - \vec{p}\,' \cdot \vec{p} + E' \cdot M - m_e^2 \quad | \; \vec{p}\,' \cdot \vec{p} = |\vec{p}\,'||\vec{p}| \cos\theta$ mit $|\vec{p}\,'||\vec{p}| = E' \cdot E$ da m_e sehr klein ist

$\iff E \cdot M = E' E (1 - \cos\theta) + E' M - m_e^2$

$\iff E'(E(1-\cos\theta) + M) = E \cdot M + m_e^2$

$\iff E' = \frac{E \cdot M + m_e^2}{E(1-\cos\theta) + M} \approx \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M}$

3/4

4.)

Gegeben: $M = 12u = 12 \cdot 931 \, MeV$, $E = 495 \, MeV$, $\theta = 65{,}4°$

$E' = \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M} \approx 482{,}5 \, MeV$

Die berechnete Energie passt zum größten Peak im Spektrum.

2/2

5.)

Die anderen rühren daher dass nicht alle Elektronen elastisch gestreuut werden; manche werden auch inelastisch gestreut.

4. warum andere scharfe Maxima? 1/2

Nr.3 Σ 7

Gegeben: Schnelle Neutronen, $d_T = 10\,cm$, $\rho_T = 10^{21}$ pro cm^3 (^{53}Cr-Atome), 0,1% wird eingefangen $\longrightarrow$ ^{54}Cr mit $J^P = 0^+$

1.)

Die Wahrscheinlichkeit dw, dass ein einfallendes Teilchen mit dem Target wechselwirkt beträgt

$$dw = \sigma \cdot \rho_T \cdot dx$$

mit dem Wirkungsquerschnitt σ, der Teilchendichte ρ_T des Targets und der Dicke der Targetschicht dx.

Mit $dw = \frac{dN_{Reaktion}}{N}$, also dem Verhältnis aus reagierenden Projektilteilchen zu einfallenden Projektilteilchen, kann man die Gleichung nach $N_{Reaktion}$ auflösen und $-dN$ setzen, woraus die Differentialgleichung

$$-dN = N(x)\, \rho_T\, \sigma\, dx$$

folgt. Die Lösung von dieser ist

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\sigma \rho_T x}$$

wobei $N(x)$ die Anzahl an Projektilteilchen ist, die das Target unverändert (d.h. ohne Reaktion) durchlaufen, während N_0 die Anfangsmenge an Projektilteilchen ist.

Die lässt sich nun nach σ umstellen, wobei $x = d_T$ die Dicke des Targets ist:

$$\sigma = \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N(x)}\right) \qquad \left| N(x) = N_0 - N_{Reaktion}\right.$$

$$= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N_0 - N_{Reaktion}}\right) \qquad \left| N_{Reaktion} = 0{,}001\, N_0\right.$$

$$= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}999}\right)$$

$$\approx 1{,}0005 \cdot 10^{-25}\, cm^2$$

3/3

2.)

γ_2: E2 Übergang, da aus $|J_1 - J_2| \leq l \leq J_1 + J_2 \Rightarrow l = 2$ folgt, somit ist $El = E2$ und $P = (-1)^l = 1$

γ_3: E2 Übergang aus demselben Grund

1/1

3.)

γ_1: Die nächst-wahrscheinlichen Übergänge sind E2 und M1, die Wahrscheinlichkeit ist etwa gleich groß. Für E2 hat der 9,2 MeV-Zustand $J^P = 2^+$, für M1 hat er $J^P = 1^-$. f

γ_4: Für $2^+ \to 1^+$ folgt $l = 1,2,3$, woraus die möglichen Multipol-Übergänge (unter Beachtung der Parität) M1, E2 und M3 folgen, wobei M1 und E_2 etwa gleich Wahrscheinlich sind 2 und M3 deutlich unwahrscheinlicher.

Für $1^- \to 1^+$ gibt es keinen Übergang, da es keine Monopolstrahlung ($l=0$) gibt.

$1^+ \to 2^+$

3/6