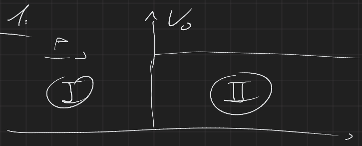
Theo 3 Blatt 2 Angelo Valentino Brade 25.04.2024

Aufgabe 1:

1.:



$$V(x)\begin{cases} V_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

I: $\hat{H}\psi = E\psi$ mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Die Welle kann in dieser Region als einfallende oder reflektierte ($\hat{=}$ umgekehrte Phase) Welle existieren:

$\Rightarrow \psi(x) = e^{i\frac{px}{\hbar}} + Re^{-i\frac{px}{\hbar}}$ mit $p^2 = 2mE$

II: $\hat{H}\psi = (E - V_0)\psi$

Die Welle kann mit reduzierter Energie in Region als transmitierte Welle existieren

$\Rightarrow \psi(x) = Te^{i\frac{q}{\hbar}x}$ mit $q^2 = 2m(E - V_0)$

Es gibt keinen negativen Exponenten, damit falls $q \in \mathbb{C}$, $\lim_{x\to\infty} \psi(x) \to 0$ erfüllt bleibt. Sonst divergiert ψ im unendlichen.

2.: ψ und ψ' müssen stetig sein, damit ψ und die Wahrscheinlichkeit ρ_ψ glatt sind. | vielleicht, idk

3.: Sei $E_p > V_0$, somit gilt für $x > 0$:

$\psi(x) = Te^{i\frac{q}{\hbar}x}$ mit $q^2 \overset{(I)}{=} 2m(E - V_0) > 0 \Rightarrow q \in \mathbb{R} \Rightarrow \psi(x>0) \in \mathbb{C}$.

(I) $\psi'' + 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}\psi = 0$

$\Rightarrow \omega_0^2 = 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow \frac{q^2}{\hbar^2} = 2m\frac{(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow q = \sqrt{2m(E - V_0)}$

Sei

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{p}{\hbar}x} + Re^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x < 0 \\ T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

somit folgt aus den Stetigkeiten bei $x = 0$:

$$e^{i\frac{p}{\hbar}x} + Re^{-i\frac{p}{\hbar}x}\Big|_{x=0} = T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}\Big|_{x=0} \Rightarrow \boxed{1 + R = T}$$

und

$$i\frac{p}{\hbar}e^{i\frac{p}{\hbar}x} - i\frac{p}{\hbar}e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\Big|_{x=0} = i\frac{q}{\hbar}T\cdot e^{i\frac{q}{\hbar}x}\Big|_{x=0} \Rightarrow \boxed{p(1 - R) = qT} \quad (II)$$

$\Rightarrow \frac{p}{q}(1 - R) = 1 + R$

$\Rightarrow \frac{p}{q} - \frac{p}{q}R - 1 = R$

$\Rightarrow \frac{p}{q} - 1 = R(1 + \frac{p}{q})$

$\Rightarrow \frac{p-q}{p+q} = R$, mit $q = \sqrt{2m(E - V_0)}$

$\overset{(II)}{\Rightarrow} T = \frac{p-q}{p+q} + 1$, $p = \sqrt{2mE}$

Das Ergebnis gibt Wahrscheinlichkeiten $|T|^2$ und $|R|^2$ an, die durch die Energie E und das Potential V_0 bestimmt werden.
Dies steht im Kontrast, zu den deterministischen Bewegungen in der klassischen Mechanik. Wobei diese ebenso durch E und V_0 bestimmt werden.

4: Sei $E_p \leq V_0$, somit gilt für $x<0$:

$\psi(x) = T e^{i \frac{q}{\hbar} x}$ mit $q^2 \overset{(I)}{=} 2m(E-V_0) < 0 \Rightarrow q \in \mathbb{C} \Rightarrow \psi(x>0) \in \mathbb{R}$ (J)

$\Rightarrow \psi(x) = T e^{\frac{\kappa}{\hbar} x}$ mit $\kappa = -\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{p}{\hbar}x} + R e^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x<0 \\ T \cdot e^{\frac{\kappa}{\hbar}x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$\psi'' + 2m \frac{(E-V_0)}{\hbar^2}\psi = 0$

$\Rightarrow \omega_0^2 = 2m \frac{(E-V_0)}{\hbar^2}$

$\Rightarrow \frac{q^2}{\hbar^2} = 2m \frac{(E-V_0)}{\hbar^2} \quad | \; V_0 > E$

$\Rightarrow q = i\sqrt{2m(E-V_0)}$

somit folgt aus den Stetigkeiten in $x=0$:

$\Rightarrow 1 + R = T$

und

$i\frac{p}{\hbar} - R i \frac{p}{\hbar} = \frac{\kappa}{\hbar} T \Rightarrow ip(1-R) = \kappa T.$

$\Rightarrow 1 + R = \frac{ip}{\kappa}(1-R)$

$\Rightarrow R\left(1 + \frac{ip}{\kappa}\right) = \frac{ip}{\kappa} - 1$

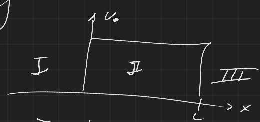
$\Rightarrow R = \frac{\kappa - ip}{\kappa + ip}$

$\Rightarrow T = 1 + \frac{\kappa - ip}{\kappa + ip}$ mit $\kappa = -\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$, $p = \sqrt{2mE}$

Der Vergleich zur klassischen Mechanik ist der gleiche, wie in der Voraufgabe.

Aufgabe 2:

1.:



I: In diesem Bereich kann die Welle Einfallen oder Reflektieren ($\hat{=}$ umgekehrte Phase):

$$\psi(x<0) = A e^{i\frac{p}{\hbar}x} + B e^{-i\frac{p}{\hbar}x}$$

II: In diesem Bereich kann die Welle Transmitieren:

$$\Rightarrow \psi(L>x>0) = C e^{-\frac{\kappa}{\hbar}x}.$$

Da mit $E_0 < V$ und $\kappa > 0$ alle Lösungen $\psi \in \mathbb{R}$ reell sind, müssen die Koeffizient von den Exponenten mit positiven Vorzeichen Null sein, da mit $P_\psi = 1$ $\lim_{x\to\infty} \psi(x) \to 0$ sein muss.

Da der Bereich II beschränkt ist dürfte doch eigentlich der „$e^{\frac{\kappa}{\hbar}x}$"-Term existieren, oder?

III: In diesem Bereich kann die Welle als einfache ausfallende Welle existieren:

$$\Rightarrow \psi(x>L) = D e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

2.: Aus Praktikanz werden die Koeffizienten folgendermaßen neudefiniert:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\frac{p}{\hbar}x} + A e^{-i\frac{p}{\hbar}x}, & x<0 \\ B e^{-\frac{\kappa}{\hbar}x}, & L>x>0 \\ \Gamma e^{i\frac{p}{\hbar}x}, & x>L \end{cases}$$

Aus der Stetigkeit folgt:

$$\psi(x=0) = 1 + A = B$$

$$\psi'(x=0) = ip(1-A) = -\kappa B$$

$$\Rightarrow ip - ipA = -\kappa - \kappa A$$

$$\Rightarrow \frac{ip+\kappa}{ip-\kappa} = A$$

$$\Rightarrow B = \frac{ip+\kappa}{ip-\kappa} + 1$$

$$\psi(x=L) = B = \Gamma = \frac{ip+\kappa}{ip-\kappa} + 1$$

$$\psi'(x=L) = -\frac{\kappa}{\hbar} B = i\frac{p}{\hbar}\Gamma$$

$$\Rightarrow (\kappa + ip)\underbrace{B}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = -ip \quad \text{mit } p = i\sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$\Rightarrow \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)} \quad \text{mit } E < V_0$$

hier bin ich mir nicht sicher

3.: Wahrscheinlichkeit $P(x>L)$ ist gegeben dadurch, dass die Welle ausfällt $|\Gamma|^2$:

$$P(x>L) = |\Gamma|^2$$

$$= \operatorname{Im}\Gamma + \operatorname{Re}\Gamma \quad \Big| \; \Gamma = \frac{ip+\kappa}{ip-\kappa} + 1$$

$$= \frac{p^2-\kappa^2}{p^2+\kappa^2} + 1 - \frac{2p\kappa}{p^2+\kappa^2}$$

$$= \frac{p^2-2p\kappa-\kappa^2}{p^2+\kappa^2} + 1$$

$$= 1 - \frac{\kappa^2+2p\kappa-p^2}{p^2+\kappa^2}$$

NR: $$\frac{(ip+\kappa)(-ip-\kappa)}{(ip-\kappa)(-ip-\kappa)} = \frac{-(i^2p^2+2ip\kappa+\kappa^2)}{-i^2p^2 - ip\kappa + ip\kappa + \kappa^2}$$

$$= \frac{p^2-2ip\kappa-\kappa^2}{p^2+\kappa^2}$$

$$= \frac{p^2-\kappa^2}{p^2+\kappa^2} - \frac{2p\kappa}{p^2+\kappa^2}\,i$$