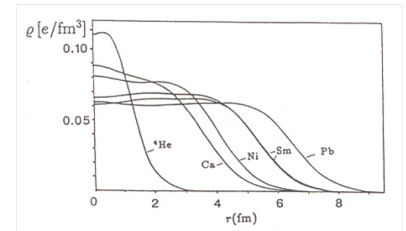


• Elastische Elektronen-Streuung

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an einem Atomkern mit Kernladungszahl Z (magn. Moment vernachlässigt)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2} \left[1 + \frac{2E}{M_A c^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right]} \cdot |F(\vec{q})|^2$$



Formfaktor: $F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}}/\hbar \cdot f(\vec{r})d^3r$

= Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung

Streuung eines Elektrons an einem (ausgedehntem) Nukleon

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right], \quad \tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

⇒ Rosenbluth Separation ⇒ Bestimmung der Q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren:

$$G_E^2(Q^2), G_M^2(Q^2)$$

Proton:

⇔ $G_E^2(Q^2), G_M^2(Q^2)$: Dipol-Formfaktor ⇒ Exponentielle Ladungsverteilung
(diffuses Objekt ↔ weder punktförmig noch homogen geladene Kugel)

209

Zusammenfassung: Fermi-Gas-Modell

(VL1, KW 48)

• Fermi-Gas-Modell

Überlagerung der WW aller Nukleonen kann als mittleres Kernpotential zusammengefasst werden

Protonen und Neutronen als unabhängige Systeme von Spin-1/2 Teilchen (Pauli-Prinzip)

Nukleonen bewegen sich im Potential ohne zu wechselwirken

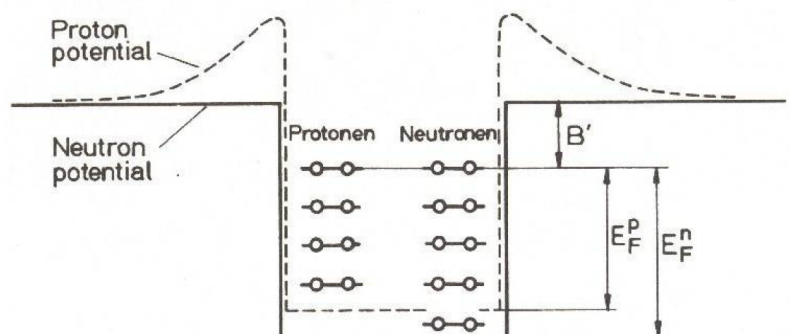
⇒ Für Kerne mit $Z=N=A/2$:

$p_F=250 \text{ MeV}/c$, $E_F=33 \text{ MeV}$ (kin. Energie),

mit $B' \approx 7-8 \text{ MeV} \Rightarrow \text{Potentialwall} \approx 40 \text{ MeV}$

⇒ Kerne sind relativ schwach gebundene

Systeme



210

Fermi-Gas-Modell

schwere Kerne: Neutronenüberschuss (Neutronen-Potentialtopf: tiefer)

Fermi-Gas-Modell → Abhängigkeit der Bindungsenergie vom Neutronenüberschuss

1) Mittlere kinetische Energie pro Nukleon:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_f} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_f} p^2 dp} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_f^2}{2M} = \frac{3}{10M} \cdot p_f^2 = 20 \text{ MeV}$$

2) Totale kinetische Energie des Kernes

$$E_{kin}(N, Z) = N \cdot \langle E_n \rangle + Z \cdot \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left(N \cdot (p_f^n)^2 + Z \cdot (p_f^p)^2 \right)$$

$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \cdot \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

mit $A = N + Z$, $N = A - Z \Rightarrow E_{kin}(N, Z)$ -Minimum für $N = Z \leftrightarrow B = \max$.

für $N \neq Z \rightarrow E_{kin}(N, Z)$ größer $\leftrightarrow B$ kleiner

Entwickeln nach N-Z:

$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \cdot \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right]$$

211

Fermi-Gas-Modell

$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \cdot \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right]$$

↓

Beitrag zum Volumenterm

↓

Asymmetrieterm:

damit auch quantitativ o.k. muss
die Änderung des Potentials für $N \neq Z$
berücksichtigt werden

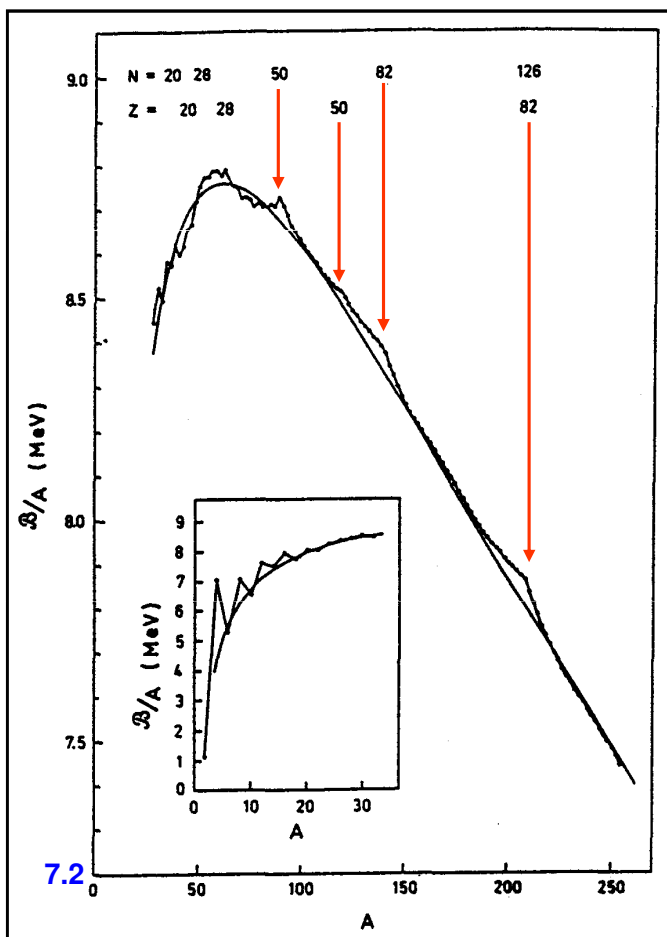
Viele Eigenschaften der Atomkerne noch nicht erklärt:

z.B. Magische Zahlen ...

⇒ Experimentelle Beobachtungen ...

213

Das Schalenmodell des Atomkerns



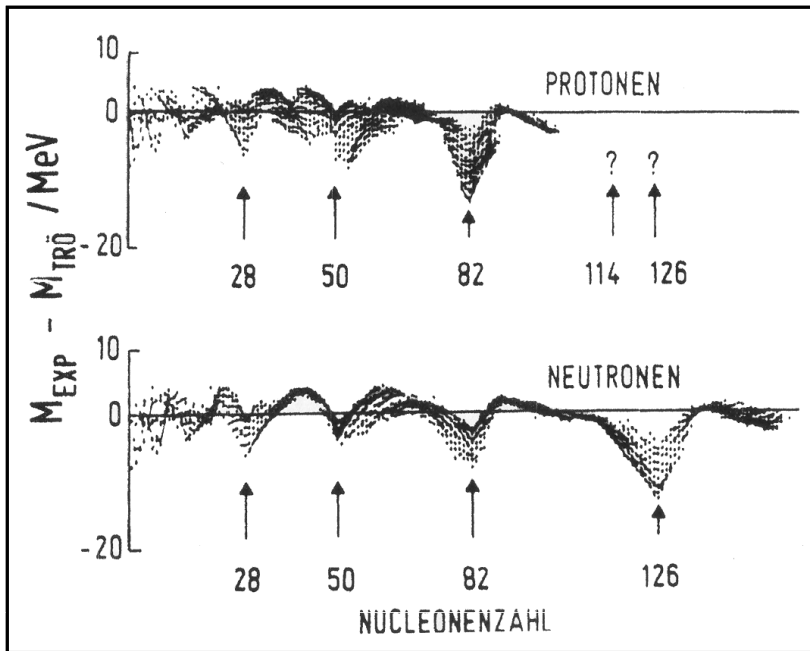
Viele Eigenschaften der Atomkerne werden durch das Tröpfchenmodell beschrieben.

Bei genauerer Messung gibt es jedoch Abweichungen bei bestimmten Nukleonenzahlen.

Bindungsenergien der Kerne sind für bestimmte Kernmassenzahlen A größer als vom Tröpfchenmodell erwartet.

214

Differenz zu Kernmassen im Tröpfchenmodell



$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, ?$$

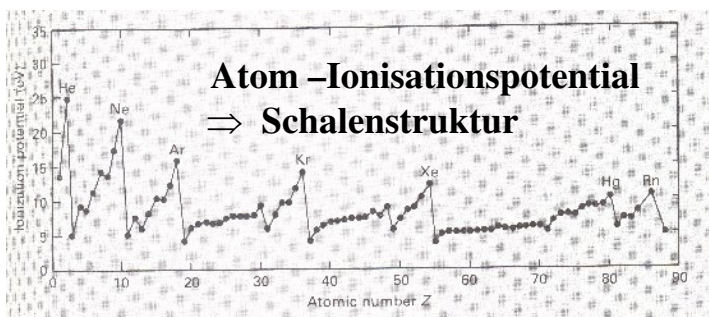
$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

magische Zahlen deuten auf Schalenstruktur hin, wie bei Atomen

besonders stabile Konfiguration (hohe Bindungsenergie) bei gefüllter Schale

Unterschied zur Atomphysik:

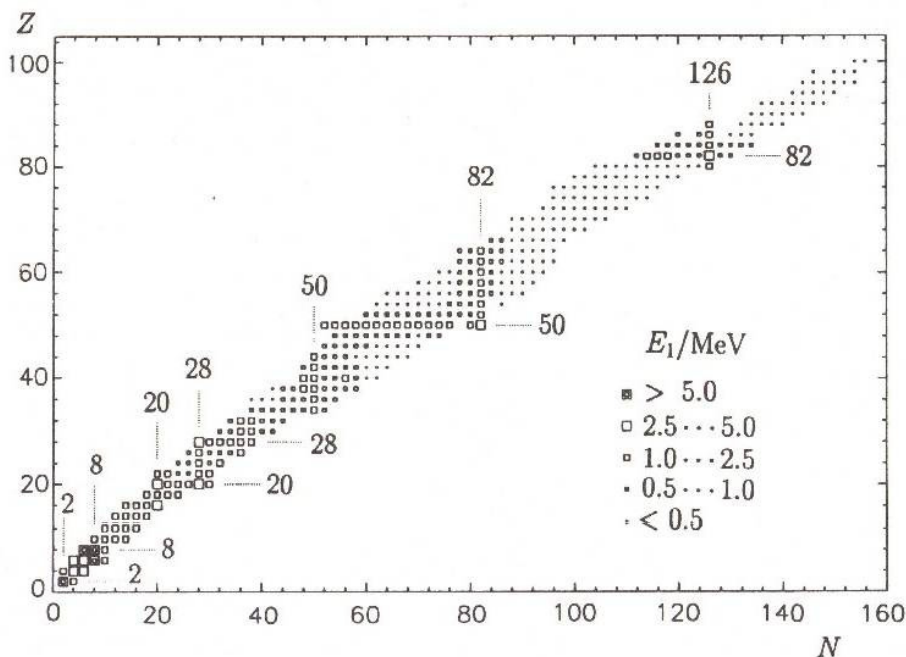
- kein Zentralpotential
- 2 Teilchensorten; Neutronen + Protonen



215

Magische Zahlen

Energie des ersten angeregten Zustands in gerade-gerade-Kernen :



- Kerne mit magischen Zahlen:
- ⇒ Besonders hohe Anregungsenergie
- ⇒ Besonders viele stabile und langlebige Nuklide

216

Das Schalenmodell des Atomkerns

Viele Eigenschaften der Atomkerne noch nicht erklärt :

Magische Zahlen:

Zum Vergleich: Atom

(Im Coulombpotential des Kernes füllen die Elektronen die Zustände niedrigster Energie)

⇒ Schalen:

K (l=0), L (l=0,1), M (l=0,1,2)

gefüllte Schalen => hohes Ionisationspotential

Im Kern: etwas ähnliches beobachtet: magische Zahlen

⇒ **Nukleonen im Kern befinden sich ebenfalls in definierten Energieniveaus
=> Schalen Struktur**

⇒ **Schalenmodell : Ein einzelnes Nukleon bewegt sich in einem Potential
was durch alle anderen Nukleonen erzeugt wird
(mittleres Feld)
- diskrete Energieniveaus**

217

Das Schalenmodell des Atomkerns - Magische Zahlen -

⇔ Erklärung der magischen Zahlen :

• Startpunkt (Näherung) :

Zentral-symmetrisches „mean-field“ – Potential

- Teilchen werden als unabhängig behandelt

- Wellenfunktion der Teilchen im Potential

$$\psi = \underset{\text{radial}}{R_{nl}}(r) \cdot \underset{\text{winkel-abhängigen Teil}}{Y_l^m}(\Theta, \varphi) \quad P = (-1)^l$$

- Quantenzahlen (spektroskopische Nomenklatur)

$$nl \text{ mit } \begin{cases} n=1,2,3,4 \dots\dots & = \text{Zahl der Knoten} + 1 \\ l = s,p,d,f,g, \dots\dots & = \text{Bahndrehimpuls} \end{cases}$$

n,l-Niveaus sind ursprünglich $2 \cdot (2l+1)$ -mal entartet

↑ ↑
Spin m = - l +l

218

Wie sieht das Potential aus ?

- kurze Reichweite der starken Wechselwirkung

=> Man würde eine Form erwarten, die der Dichteverteilung im Kern entspricht

=> Lösen der Schrödingergleichung für verschiedene Potentialformen

⇔ Vergleich mit dem Experiment

Spezialfall: Leichte Kerne ($\approx A \leq 7$) : gaußförmige Verteilung

=> Potential kann man durch das eines 3-dim. Harmon. Oszillators annähern

- Schrödingergleichung analytisch lösbar

$$E_{\text{H.O.}} = \left(N + \frac{3}{2}\right) \cdot \hbar\omega = (N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2}) \cdot \hbar\omega$$

$$N = 2(n-1) + 1$$

N : gerade → P = +, N : ungerade → P = -

219

Energieniveaus - harmonischer Oszillator

$$E_{\text{harm.oz.}} = (N + 3/2)\hbar\omega, \quad N = 2 \cdot (n - 1) + \ell$$

QN		number	Σ
N = 0	n = 1 , l = 0, m = 0	2	2
N = 1	n = 1 , l = 1, m = -1 ... +1	6	8
N = 2	n = 1 , l = 2, m = -2 ... +2 n = 2 , l = 0, m = 0	10 2	20
N = 3	n = 1 , l = 3, m = -3 ... +3 n = 2 , l = 1, m = -1 ... +1	14 6	40
N = 4		30	70

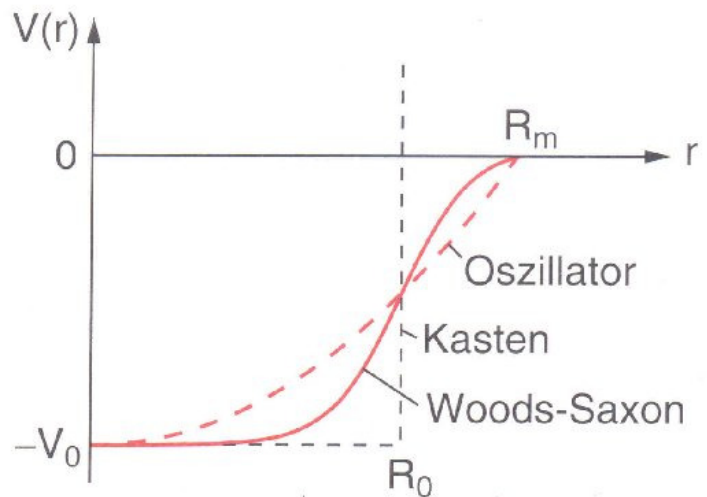
**Reproduziert
nur die ersten
drei magischen
Zahlen**

Schwere Kerne: Dichteverteilung \approx Fermi-Verteilung

\Rightarrow Woods-Saxon-Potential

$$V_{\text{Zentral}}(\mathbf{r}) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

(Zustände mit gleichem N aber unterschiedlichen nl sind nicht mehr entartet)



Reproduziert auch nur die ersten drei magischen Zahlen (2, 8, 20)

221

Spektrum der Nukleonenniveaus

Zusätzlich zum Zentralpotential

- Spin-Bahn-Wechselwirkung $\sim \vec{l} \cdot \vec{s}$ benötigt

Kopplung von

$$\vec{l}, \vec{s} \text{ zu } \vec{j} \quad \text{mit } j = l \pm \frac{1}{2}$$

Potential:

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{Zentral}}(\mathbf{r}) + V_{\text{ls}}(\mathbf{r}) \frac{\langle \vec{l} \vec{s} \rangle}{\hbar^2} \quad \longrightarrow \text{.... Tafel}$$

\Rightarrow **Magische Zahlen**

Bezeichnung der Einteilchenzustände wie in Atomphysik: n, l, j

n, l, j -Niveaus: $(2j+1)$ -fach entartet

222

Spektrum der Nukleonenniveaus

Zusätzlich zum Zentralpotential

- Spin-Bahn-Wechselwirkung $\sim \vec{l} \cdot \vec{s}$ benötigt

Kopplung von

\vec{l}, \vec{s} zu \vec{j} mit $j = l \pm \frac{1}{2}$

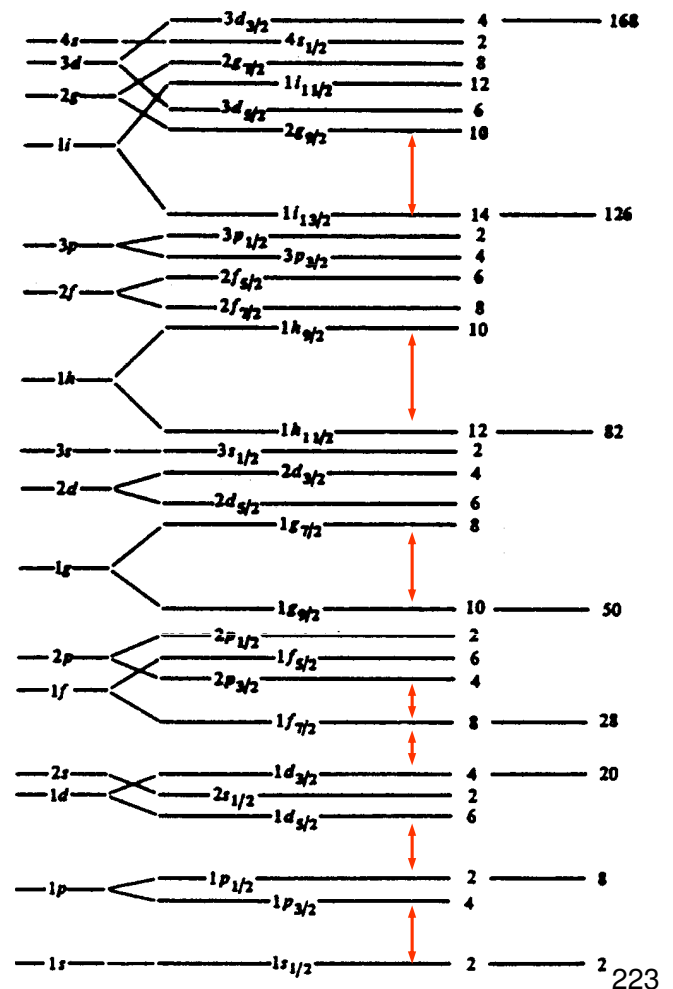
Potential:

$$V(r) = V_{\text{Zentral}}(r) + V_{\text{ls}}(r) \frac{\langle \vec{l} \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

=> Magische Zahlen

Bezeichnung der Einteilchenzustände wie in Atomphysik: n, l, j

n, l, j -Niveaus: $(2j+1)$ -fach entartet



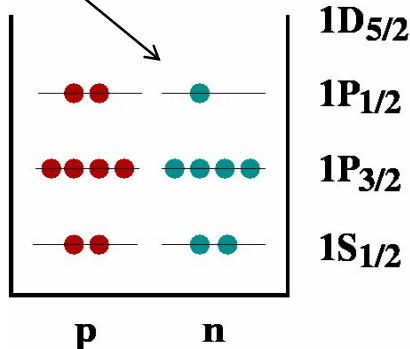
Ein-Teilchen- und Ein-Lochzustände im Schalenmodell

Idee: Die Eigenschaften der Kerne (Quantenzahlen) werden durch die Eigenschaften einzelner überzähliger Nukleonen bestimmt

=> Nur Valenz-Nukleonen und Valenz-Löcher tragen zu den Quantenzahlen bei

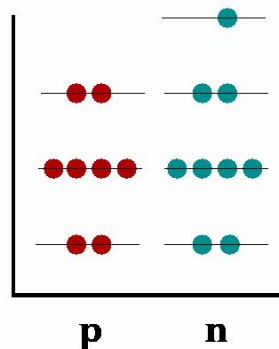
Ein-Loch-Zustand

$^{15}_8\text{O}_7$



$J^P = ?$

$^{17}_8\text{O}_9$



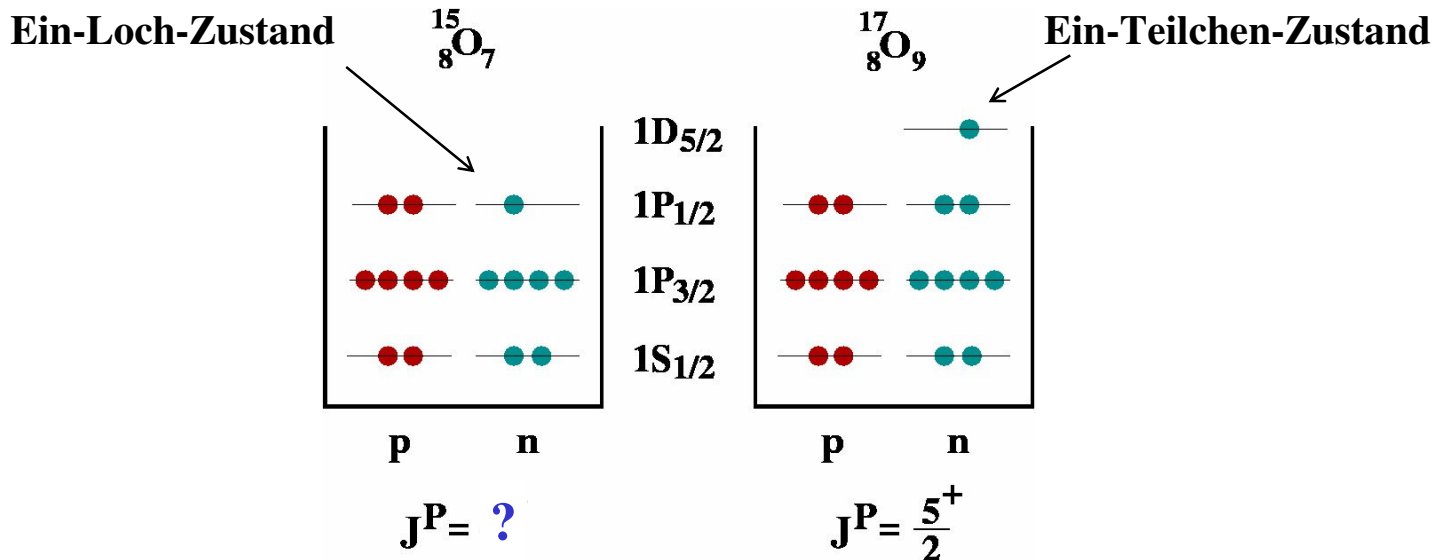
$J^P = ?$

- wie in Atomphysik koppeln die Drehimpulse einer voll besetzten Schale zu 0
- 2n oder 2p in der gleichen Schale: kein Beitrag zum Kernspin

Ein-Teilchen- und Ein-Lochzustände im Schalenmodell

Idee: Die Eigenschaften der Kerne (Quantenzahlen) werden durch die Eigenschaften einzelner überzähliger Nukleonen bestimmt

=> Nur Valenz-Nukleonen und Valenz-Löcher tragen zu den Quantenzahlen bei



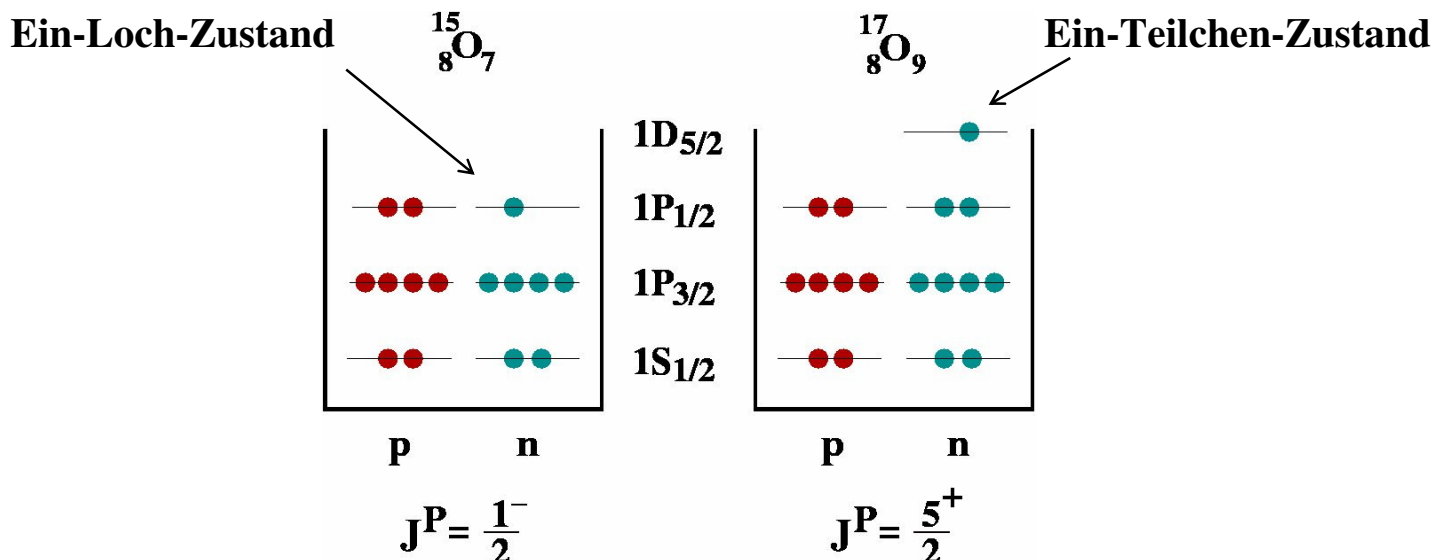
- wie in Atomphysik koppeln die Drehimpulse einer voll besetzten Schale zu 0
- 2n oder 2p in der gleichen Schale: kein Beitrag zum Kernspin

224

Ein-Teilchen- und Ein-Lochzustände im Schalenmodell

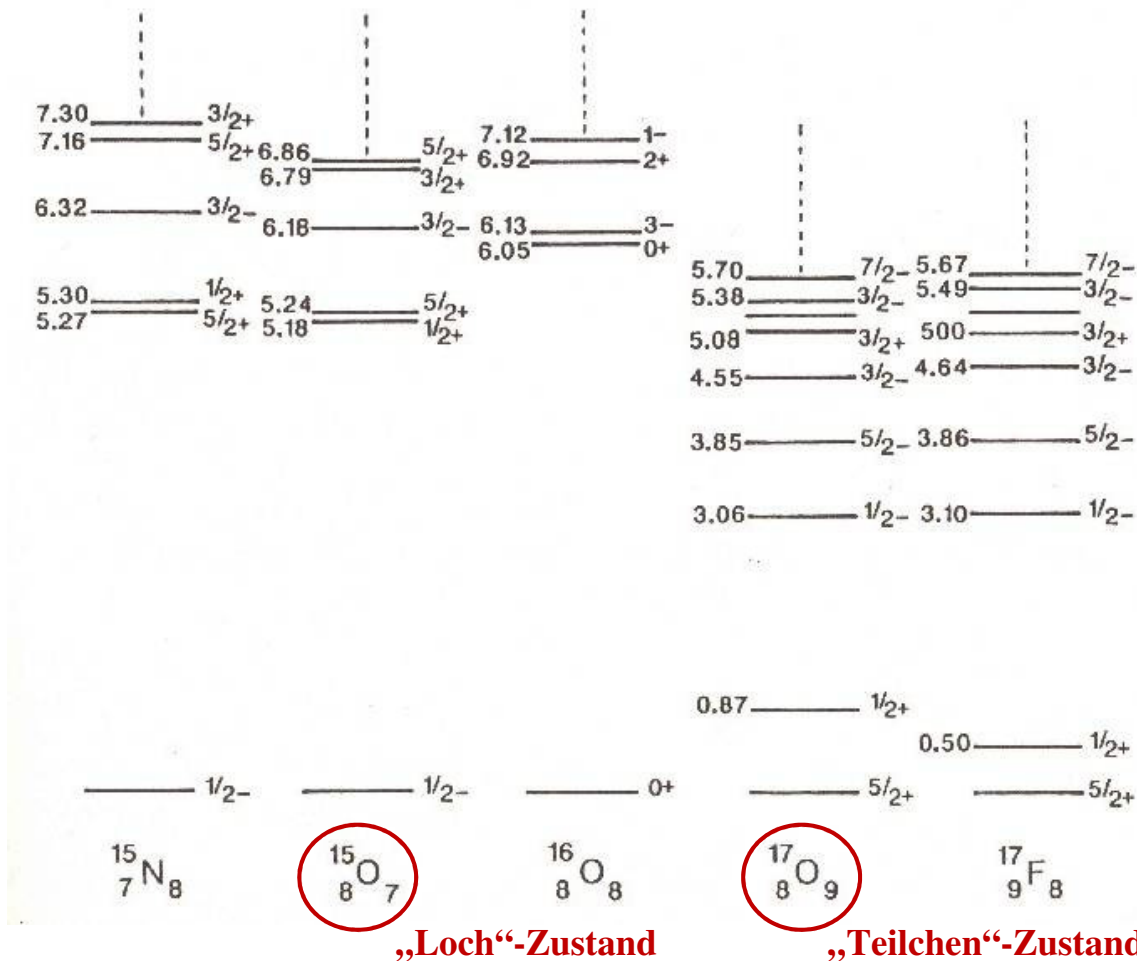
Idee: Die Eigenschaften der Kerne (Quantenzahlen) werden durch die Eigenschaften einzelner überzähliger Nukleonen bestimmt

=> Nur Valenz-Nukleonen und Valenz-Löcher tragen zu den Quantenzahlen bei



- wie in Atomphysik koppeln die Drehimpulse einer voll besetzten Schale zu 0
- 2n oder 2p in der gleichen Schale: kein Beitrag zum Kernspin

224

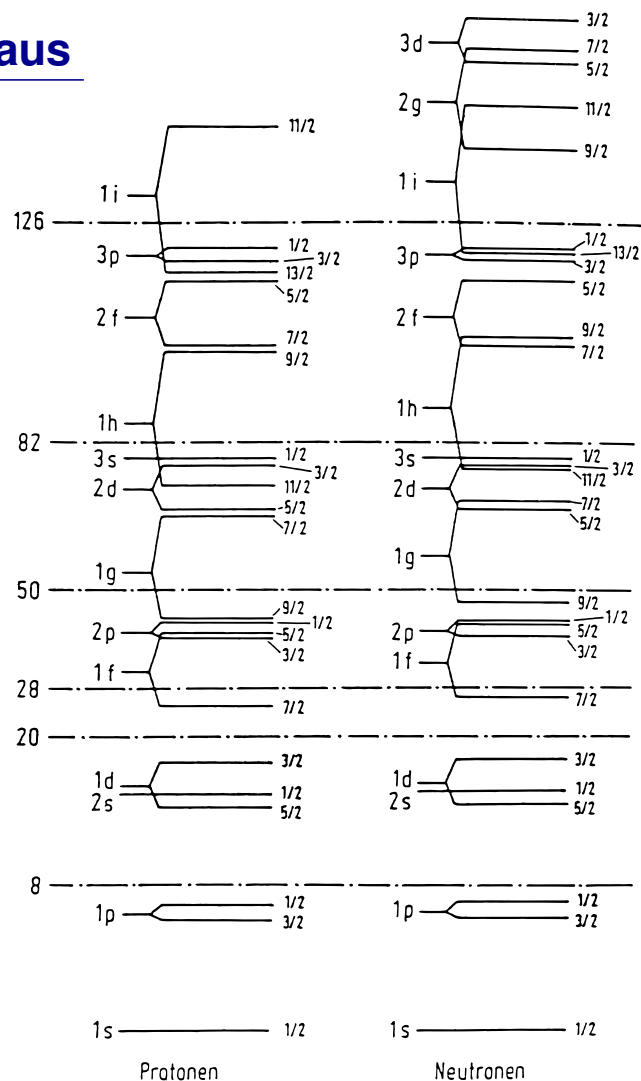


225

Spektrum der Nukleonenniveaus

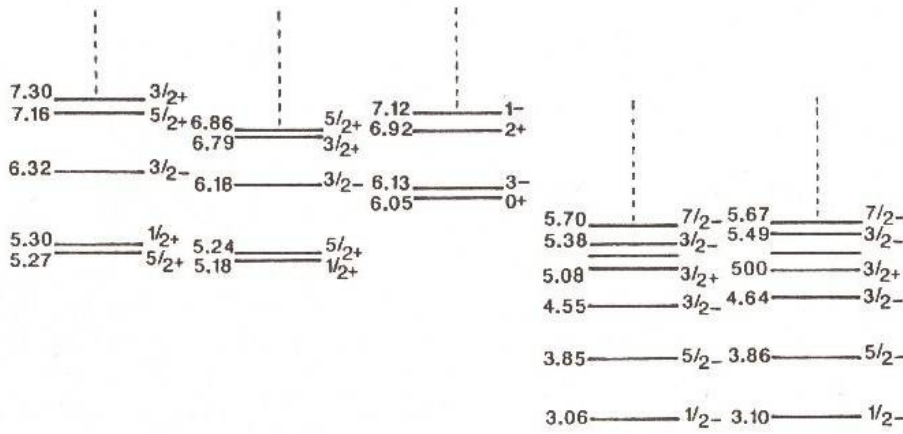
$5/2^+ \rightarrow$

$1/2^- \rightarrow$



226

Ein-Teilchen- und Ein-Lochzustände im Schalenmodell



Beobachtung:

- ähnliche Anregungs-spektren für Spiegelkerne
- Energie des ersten angeregten Zustande für $A=15, 16$ viel größer als für $A=17$

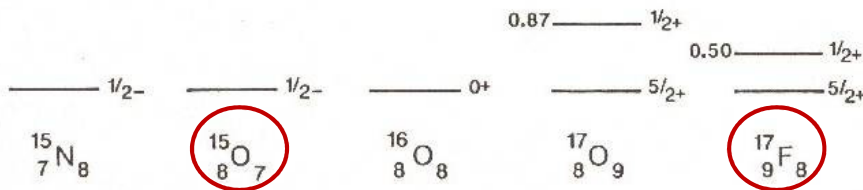
$$\Rightarrow {}^{16}_8\text{O}_8 \quad 8p, 8n$$

$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}$$

Niveaus für p, n
vollständig gefüllt

$$1d_{5/2} \text{ leer}$$

Drehimpulse von komplett gefüllten Schalen koppeln zu 0 wie im Atom $J^P = 0^+$



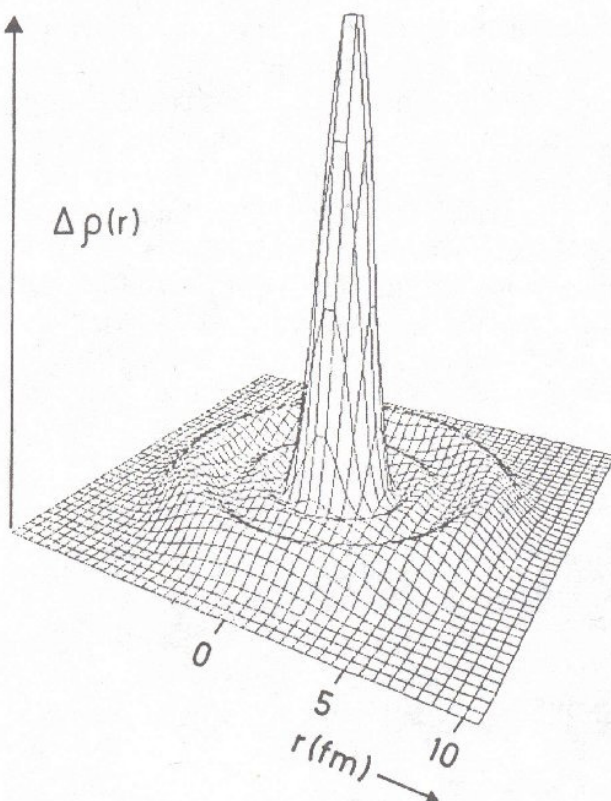
„Loch“-
Zustand

„Teilchen“-
Zustand

227

Ein-Teilchen- und Ein-Lochzustände im Schalenmodell

$${}^{206}_{82}\text{Pb} - {}^{205}_{81}\text{Tl} \quad (\pi 3s_{1/2})^{-1}$$



Aus Elektron-Streuexperimenten:

Unterschied in der Ladungsverteilung
der beiden Kerne

Unterschied = 82. Proton in Pb

228