Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 12.

Abgabe bis Mi, 24.01.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation, um das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{1}$$

zu lösen. Hier ist $h \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variablen x. Gebe auch die Randwerte an.

(ii) Löse die gewöhnliche Differentialgleichung aus (i) für jedes $k \in \mathbb{R}$. Schreibe dann die Lösung mit Fouriermultiplikatoren $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f_t \mathcal{F} h)$.

(iii) Nutze (i) und (ii) um die Lösung der Wellengleichung (1) herzuleiten. *Hinweis:* Gehe wie bei vorherigen Übungsaufgaben dieser Art vor. Das Endergebnis lautet

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ **temperierte** Distributionen sind.

(i) $T(\varphi) := \int_{[0,1]} \frac{d^j}{dx^j} \varphi(x)\ dx$, $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-x^2} dx$,

(iii) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{x^2} dx$,

(iv) $T = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \delta_x$.

Aufgabe 3 befindet sich auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechne die Faltung $g(x) = \delta_a * \varphi(x)$ und beschreibe das Ergebnis.

(ii) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 : x < 0 \\ 1 : x \geq 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Step-Funktion. Berechne die Faltung $T_f * \varphi$ und beschreibe das Ergebnis.

(iii) Zeige, dass die Faltung von $T = \sum_{t \in 2\pi\mathbb{Z}} \delta_t$ mit φ eine 2π-periodische Funktion ist. Berechne die Koeffizienten von $T * \varphi$ als Fourier-Reihe.