Vorlesung 19

Weihnachtsvorlesung & Probeklausur

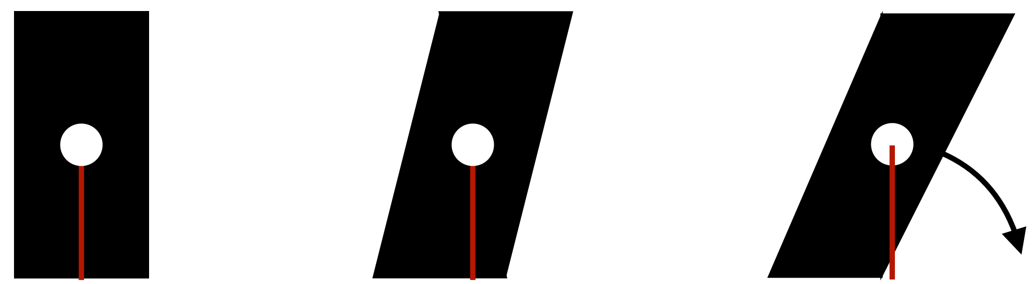
Nächste Woche : **21.12. Weihnachsvorlesung**

Zur Vorbereitung auf die Klausur werden wir am **23.12** eine **Probeklausur** auf ecampus hochladen

Die Lösungen zu den Aufgaben gibt es im neuen Jahr.

Beispiel **Kippen**:

Lot durch SP muss durch Auflagefläche (= Drehachse!) zeigen



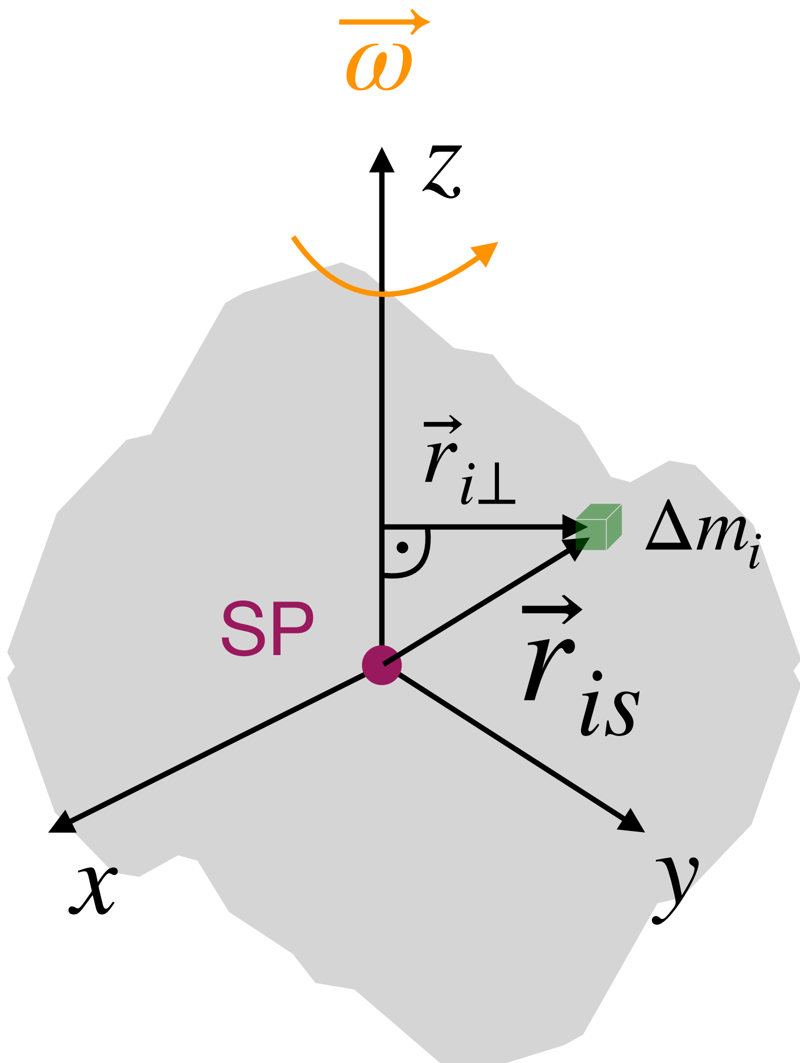
stabil stabil instabil

Nochmal Flaschenhalter

Schwerpunkt liegt **unter** der Auflagefläche, sonst ist das System instabil

6.5 Rotation : Trägheitsmoment + Rot.-Energie

Betrachte Rotation um **feste** Achse (keine Translation, nur ein Drehwinkel)



↓

1 Freiheitsgrad

Wähle Rotationsachse als z-Achse

Kinetische Energie eines Massenelements Δm_i im senkrechten Abstand $\vec{r}_{i\perp}$:

$$\Delta E_{\mathrm{kin},i} = \frac{1}{2}\,\Delta m_i\, v_{i\perp}^2 = \frac{1}{2}\,\Delta m_i\, r_{i\perp}^2 \omega^2$$

↑

Kreisbewegung : $\vec{v}_{i\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp} \rightarrow v_{i\perp}^2 = \omega^2\, r_{i\perp}^2$

Gesamte kin. Energie : $E_{\mathrm{rot}} = \lim_{N\to\infty, \Delta V_i \to 0} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \, r_{i\perp}^2 \, \omega^2 \right)$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}m$$

→ **Trägheitsmoment :** $\boxed{I := \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}m = \int_V r_\perp^2 \, \varrho \, \mathrm{d}V}$ $[I] = \mathrm{kg\,m^2}$

TM des Körpers immer definiert bzgl. der Drehachse (Abstand $r_\perp$)

Damit ist die **Rotationsenergie** : $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

→ vgl. Translation $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

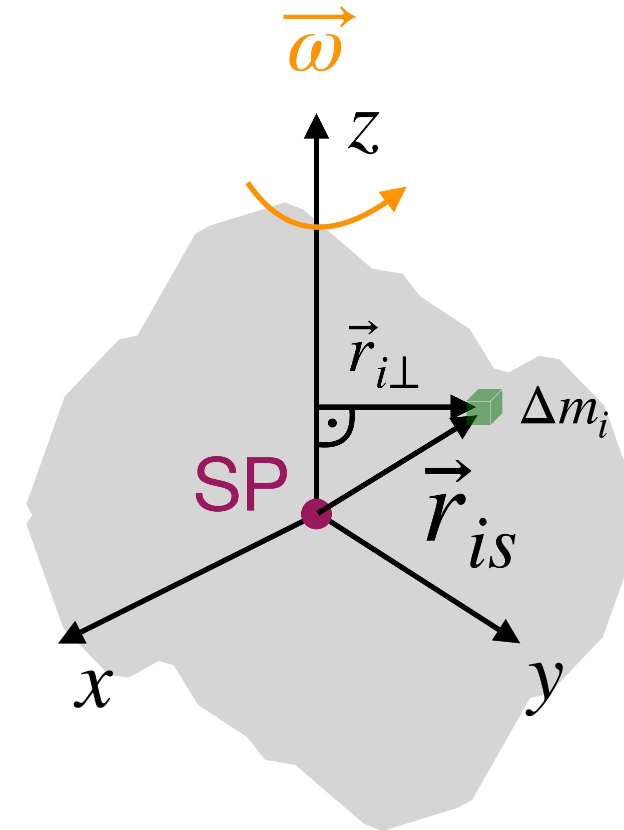
Vergleich Translation & Rotation :

Translation $\longleftrightarrow$ Rotation
$m \longleftrightarrow I$
$v \longleftrightarrow \omega$
$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \longleftrightarrow \overrightarrow{L} = I\,\overrightarrow{\omega}$
$\overrightarrow{p} \longleftrightarrow \overrightarrow{L}$
$E = \frac{p^2}{2m} \longleftrightarrow E = \frac{L^2}{2I}$

Drehimpuls des Massenelements Δm_i :

$$\overrightarrow{L}_i = \vec{r}_{i\perp} \times (\Delta m_i \overrightarrow{v}_{i\perp}) = r_{i\perp}^2 \, \Delta m_i \, \overrightarrow{\omega}$$

$$\Delta m_i \, \vec{r}_{i\perp} \times (\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}) = \Delta m_i \, r_{i\perp}^2 \, \overrightarrow{\omega} - \Delta m_i \, \vec{r}_{i\perp} \underbrace{(\vec{r}_{i\perp} \cdot \overrightarrow{\omega})}_{=0}$$



→ **Gesamtdrehimpuls** : ($\Delta m_i \rightarrow \mathrm{d}m$ & Integration über Volumen)

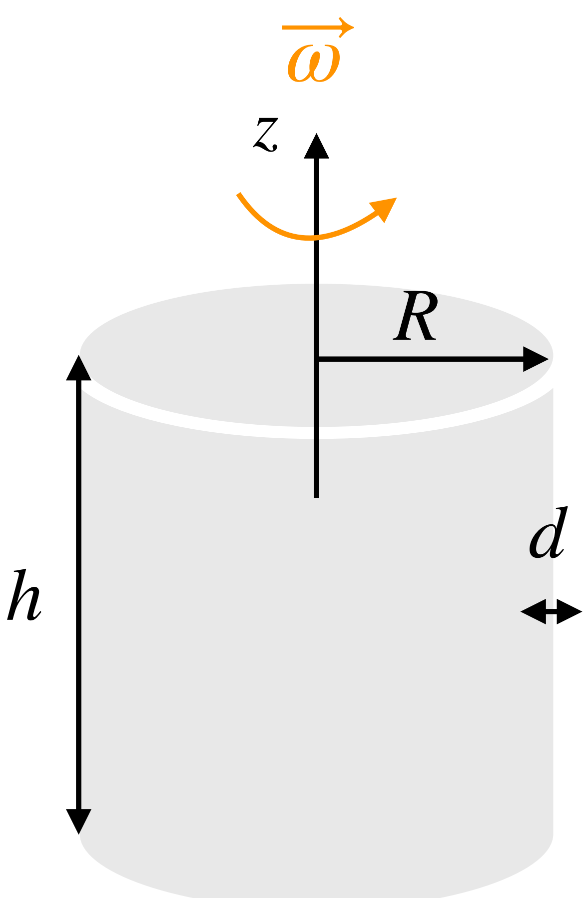
$$\overrightarrow{L}_{\text{ges}} = \int_V r_\perp^2 \, \overrightarrow{\omega} \, \mathrm{d}m = \overrightarrow{\omega} \int \vec{r}_\perp \, \mathrm{d}m = I \, \overrightarrow{\omega}$$

und $E_{\text{rot}} = \dfrac{L^2}{2I}$ (mit $\omega^2 = \dfrac{L^2}{I^2}$)

Berechnung von Trägheitsmomenten :

Möglichst für einfache Körper, alternativ direkte Bestimmung durch Messung

Hohlzylinder :



Rotation um die Symmetrieachse (z)

Wanddicke $d \ll R$:

Volumenelement in Zylinderkoordinaten ($\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$),

Integration über φ von $0 - 2\pi$; Integration über z von $0 - h$

$$I_z = \varrho \int_V r^2\,\mathrm{d}V = 2\pi\,\varrho\,h \int_{R-d}^{R} r^2\,\boxed{r\,\mathrm{d}r}$$

Wir wählen Koordinaten in denen R die Distanz

von der Achse bis zur äußeren Wand ist

$$\rightarrow \qquad I_z = \frac{\pi}{2}\varrho h\left[R^4 - (R-d)^4\right] = 2\pi\,\varrho h R^3\,d + \mathcal{O}(d^2)$$

$$-6d^2R^2 + 4d^3R - d^4$$

$$I_z \approx 2\pi\,\varrho\,h\,R^3\,d$$

$$d \ll R$$

Mit $M = 2\pi\,R\,d\,h\,\varrho$ $\quad\Rightarrow\quad \boxed{I_z = M\,R^2}$

(Hätte man auch raten können)

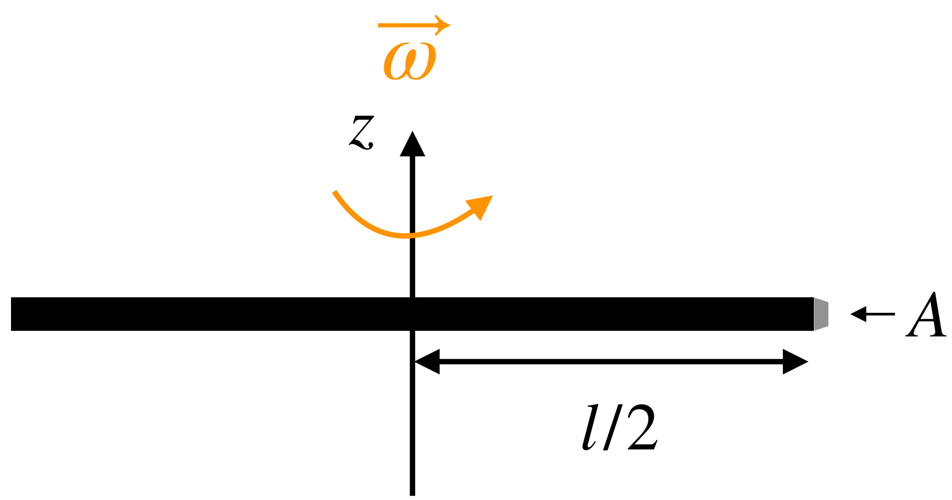
Vollzylinder :

$$I_z = 2\,\pi\,\varrho\,h \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,h\,\varrho\,R^4 = \frac{M}{2}\,R^2$$

Dünner Stab :

Mit Drehachse bei $l/2$

Volumenelement $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x$



$$I_z = \varrho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 A\,\mathrm{d}x = 2\varrho \int_0^{l/2} x^2 A\,\mathrm{d}x$$

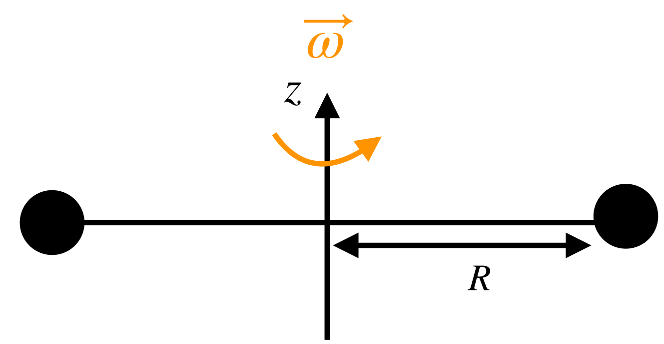
$$\rightarrow I_z = 2\,\varrho \int_0^{l/2} x^2 A\,\mathrm{d}x = 2\,\varrho\,A\,\frac{1}{3}(\frac{l}{2})^3 = \frac{1}{12}\,\underbrace{\varrho A\,l}_{M}\,l^2 = \frac{1}{12} M\,l^2$$

Weitere Fälle :

homogene Kugel : $I = \frac{2}{5} MR^2$

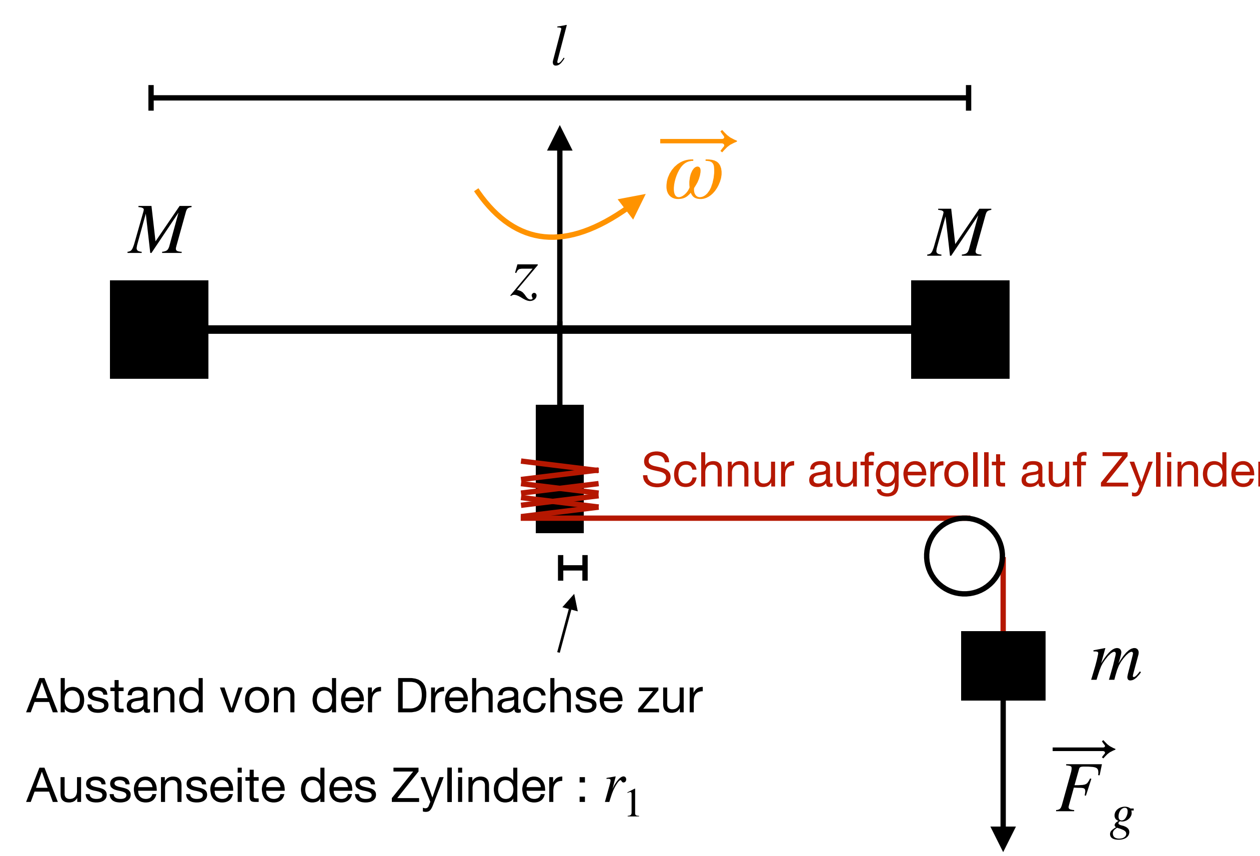
Hohlkugel : $I = \frac{2}{3} MR^2$

Hantel : $I_z = 2\,MR^2$



Messung des Trägheitsmoments :

Wie können wir experimentell das Trägheitsmoments eines Körpers bestimmen?



Versuch : **Drehapparat**

$$I_z = 2\,M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M\,l^2$$

$$\rightarrow L = I_z\,\omega\,, \quad \dot{L} = I_z\,\dot{\omega} = I_z\,\frac{\dot{v}}{r_1} = I_z\,\frac{a}{r_1}$$

Drehmoment durch $\overrightarrow{F}_g$: $\quad D = m\,g\,r_1 = \dot{L}$

$$\Rightarrow \quad I_z\,\frac{a}{r_1} = mg\,r_1 \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{mg\,r_1^2}{\boxed{a}}$$

Anzahl Umdrehungen

Messung von a : $\quad a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot(2\pi r_1)\,\cdot n}{t^2} \quad \Rightarrow$ **Messe** t für **festes** n

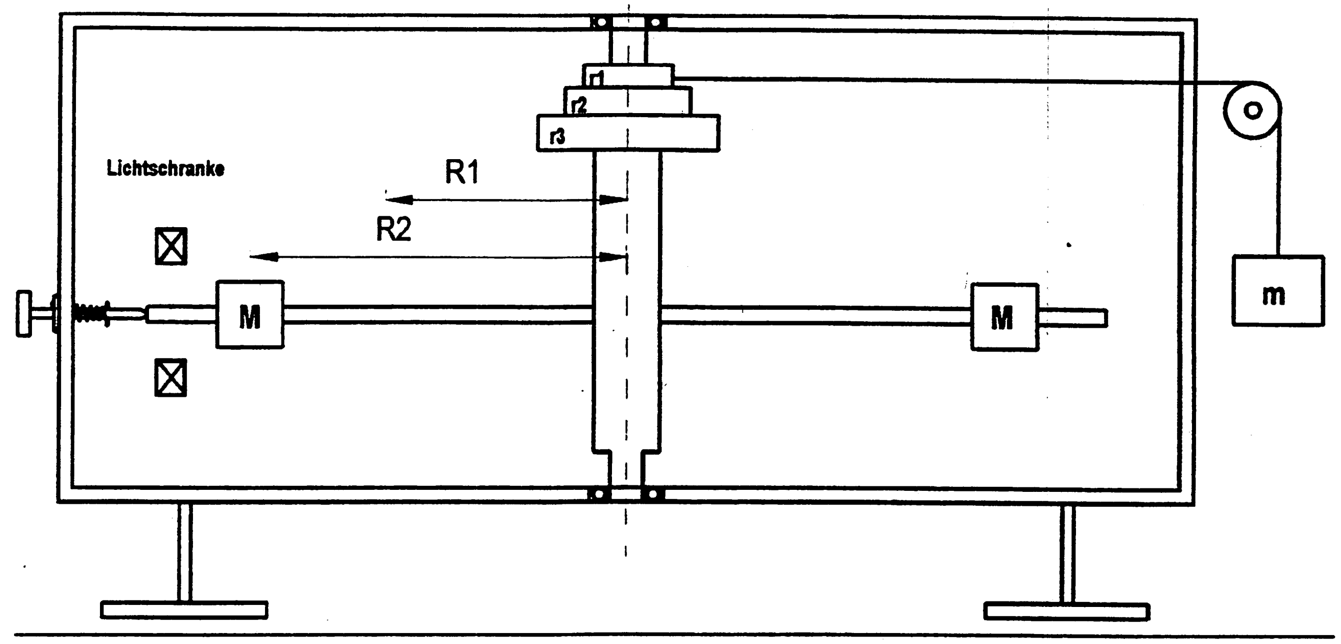
$$s = \frac{1}{2}a\,t^2$$

Experimenteller Aufbau:

1. Das Trägheitsmoment der Apparatur ohne weitere Gewichte wird gemessen

↓

Trägheitsmoment des Stabes



Daten :

Bezeichnung	Wert	Einheit
r1	15.0	mm
r2	22.5	mm
r3	30.0	mm
M1	397	g
M2	924	g
m	100	g
R1	130	mm
R2	260	mm

2. Gewichte M1 wird auf den Radius R1 (130 mm) angebracht und wir wiederholen die Messung

3. Gewichte M1 wird auf den Radius R2 (260 mm) angebracht und wir wiederholen die Messung

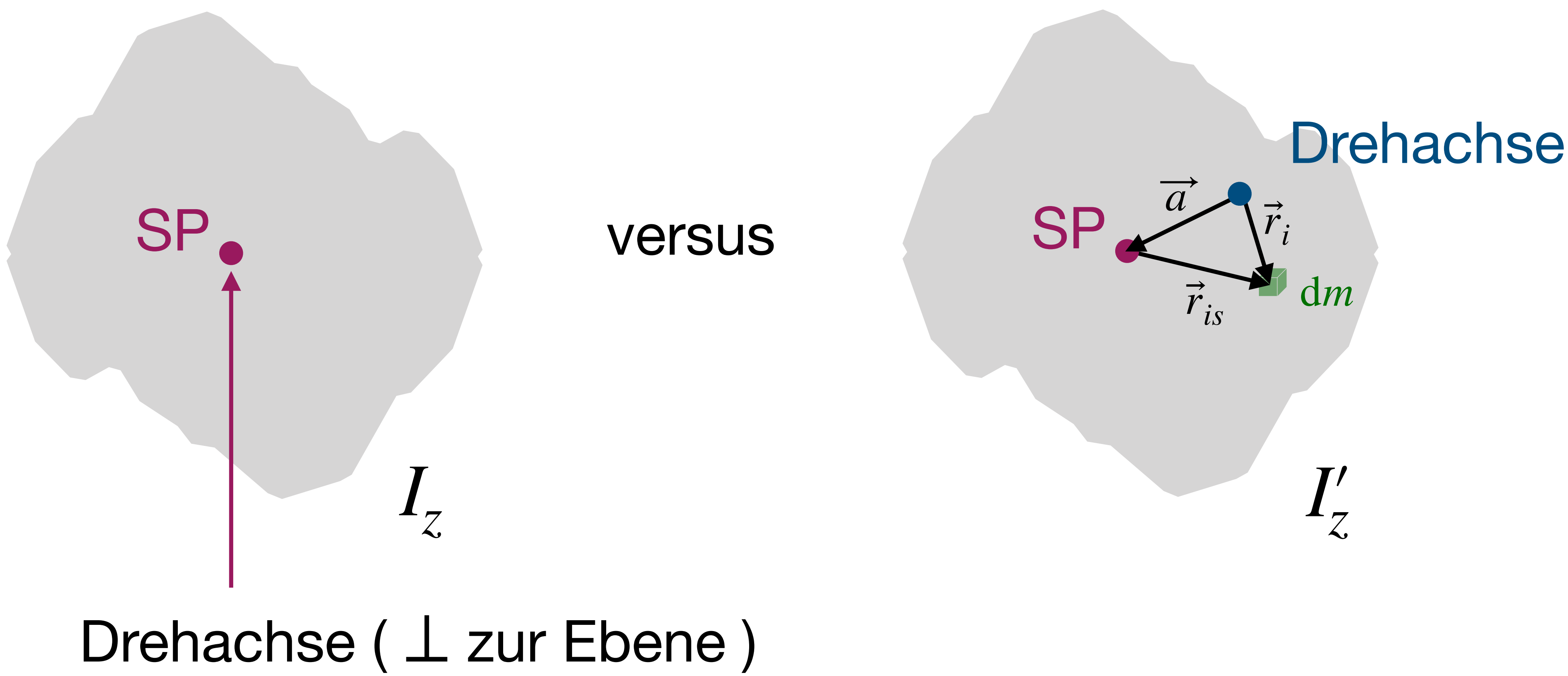
Das Trägheitsmoment der 1. Messung wird von der Messung 2 und 3 subtrahiert.

I_z von **Messung 2** ist $\frac{1}{4}$ der **Messung 3**, da sich der Radius verdoppelt hat , denn $I_z = \frac{1}{2} M\, l^2$

Trägheitsmoment	Drehmoment	Zeit [s]	$a = 1 / t^2$	1/a	1/a - 1/aRest
IRest r1	r1 * mg	2,35	,181	5,52	0
I(13) + IRest r1	r1 * mg	4,42	,051	19,61	14,09
I(26) + IRest r1	r1 * mg	7,86	,016	62,5	56,98
IRest r2	r2 * mg	3,33	,09	11,11	0
I(13) + IRest r2	r2 * mg	6,36	,025	40	28,89
I(26) + IRest r2	r2 * mg	11,3	,008	125	113,89
		I(26) / I(13) bei r1*mg			4
		I(26) / I(13) bei r2*mg			3.9

6.6 Steinerscher Satz

Trägheitsmoment bezüglich Achse, die nicht durch SP geht.



Wir legen den Ursprung unseres Koordinatensystems in den SP : $\vec{r}_s = 0$

$$\frac{1}{M}\int_V \vec{r}_{is}\,\mathrm{d}m = \vec{r}_s = 0$$

$$\rightarrow \qquad I'_z = \int_V r_i^2 \,\mathrm{d}m = \int_V (\overrightarrow{a} + \vec{r}_{is})^2 \,\mathrm{d}m$$

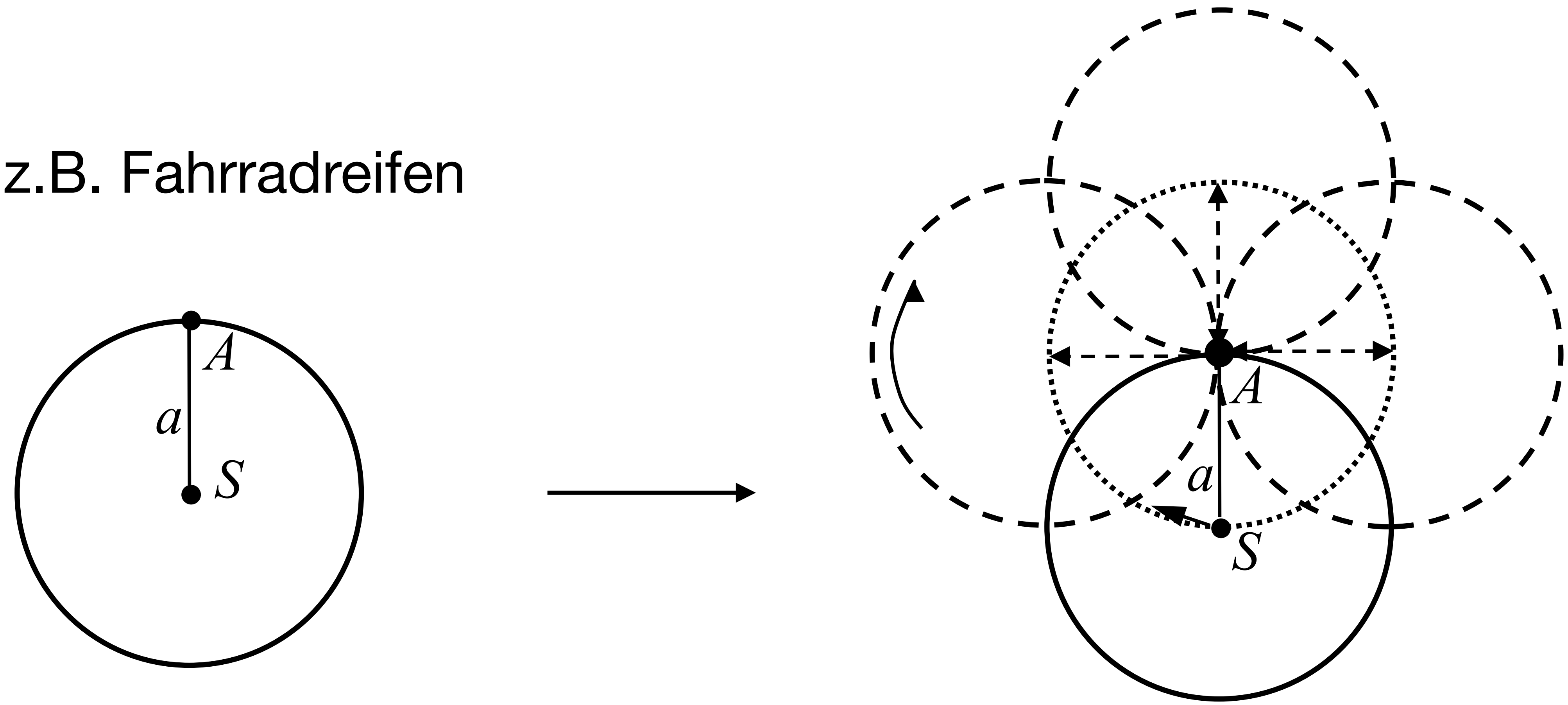
$$= \underbrace{a^2 \int_V \mathrm{d}m}_{a^2 M} + \underbrace{\int_V r_{is}^2 \,\mathrm{d}m}_{I_z} + 2\,\overrightarrow{a} \cdot \underbrace{\int_V \vec{r}_{is} \,\mathrm{d}m}_{0}$$

$$\int_V \vec{r}_{is} \,\mathrm{d}m = M\,\vec{r}_s = 0$$

Steinerscher Satz : $\boxed{I'_z = I_z + a^2 M}$

Wichtig: Achse von I'_z ist **parallel** zu I_z !

z.B. Fahrradreifen



Bei Rotation um Schwerpunkt

Bei Rotation um Achse A

$$I_z$$

$$I_z' = I_z + a^2 M$$

6.7 Bewegungsgleichung des starren Rotators

Rotation um **raumfeste Achse**, betrachten Masseelement Δm_i :

$$\vec{L}_i = (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i) = \Delta m_i \left(\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i\right) = \Delta m_i \, r_{i\perp}^2 \, \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i}{r_{i\perp}^2}$$

$$\rightarrow \dot{\vec{L}}_i = \Delta m_i \left(\vec{r}_{i\perp} \times \dot{\vec{v}}_i\right) = \left(\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_i\right) = \vec{D}_{i\,||}$$

$D_i = |\,\vec{D}_{i\,||}\,|$: Komponente des äußeren Drehmoments, das an Δm_i angreift **parallel** zur Drehachse.

Andere Komponenten werden von den Lagern der Drehachse abgefangen → **Umwuchtung** (später)

$$\Rightarrow D_i = \Delta m_i \, r_{i\perp}^2 \, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

Volumenintegral: $D = I \, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = I \, \ddot{\varphi}$

(vgl. $F = m \, \ddot{x}$)

Spezialfall : **konstantes Drehmoment** $D \neq D(t) = \mathrm{const}$

Gleiche Differentialgleichung wie freier Fall :

$\varphi(t) = \frac{D}{2I} \, t^2 + A \, t + B$ Integrationskonstanten A, B