

# Zusammenfassung der Vorlesung

## Mathematik für Physiker\*innen III

Barbara Niethammer

Universität Bonn

Wintersemester 2020/21

### Vorwort

Der Hauptteil dieser Vorlesung beschäftigt sich mit der Theorie komplex differenzierbarer Funktionen. Wir werden sehen, dass der Begriff der komplexen Differenzierbarkeit, auch Holomorphie genannt, ein sehr viel stärkerer Begriff ist, als der der reellen Differenzierbarkeit. Genauer, eine Funktion von  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann komplex differenzierbar, wenn sie reell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Als Konsequenz erhalten wir, dass holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar und lokal in Potenzreihen entwickelbar sind. Die komplexe Analysis hat unzählige Anwendungen in verschiedensten Bereichen der Mathematik und Physik. So sind Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch, wodurch ein Bezug zum Beispiel zur Elektrostatisik oder der Strömungsmechanik gegeben ist. Sogenannte konforme Abbildungen erlauben, das Lösen von Differentialgleichungen auf komplizierten Gebieten auf den Fall einfacherer, explizit lösbarer Fälle zurückzuführen. Die komplexe Integration liefert Methoden zur Berechnung reeller Integrale, sowie Transformationsmethoden, die wiederum zur Lösung von Differential- oder Integralgleichungen eingesetzt werden können.

Es gibt eine sehr große Zahl von schönen Lehrbüchern zur komplexen Analysis, so dass jeder etwas nach seinem Geschmack finden kann. Beispiele sind die Bücher von Priestley [4], Ahlfors [1], Fischer und Lieb [3] und Remmert und Schumacher [6] oder, etwas knapper, Kapitel 6 und 7 des Buches von Arfken und Weber [2].

Zur Fourier-Transformation finden sich in den Büchern von Priestley [4] und Arfken und Weber [2] kürzere Kapitel, eine ausführliche und recht elementare Einführung gibt es im dem Buch von Stein und Shakarchi [7], ein Klassiker der Fourier-Analysis ist das Buch von Reed und Simon [5].

Die Laplace-Transformation, in dem Umfang, wie sie hier in der Vorlesung behandelt wird, wird ebenfalls in den Büchern von Priestley [4] und Arfken und Weber [2] besprochen.

### Literatur

- [1] L. Ahlfors, Complex Analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, McGraw-Hill, New York, 1978

- [2] G. B. Arfken and H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Elsevier, 2005
- [3] W. Fischer und I. Lieb, Funktionentheorie, *SpringerVieweg*, 1994
- [4] H.A. Priestley, An Introduction to Complex Analysis, *Oxford University Press*, 2003
- [5] M. Reed und B. Simon, Methods of modern mathematical physics II, Fourier Analysis, Self-Adjointness, *Academich Press*, 1975
- [6] R. Remmert und G. Schumacher, Funktionentheorie I, *Springer Lehrbuch*, 2002
- [7] E.M. Stein und R. Shakarchi, Fourier Analysis: an introduction, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Komplexe Zahlen . . . . .	5
1.2 Topologie der komplexen Ebene . . . . .	9
1.3 Komplexe Funktionen . . . . .	9
<b>2 Holomorphe Funktionen</b>	<b>10</b>
<b>3 Reihen und Potenzreihen</b>	<b>13</b>
3.1 Reihen . . . . .	13
3.2 Potenzreihen . . . . .	15
3.3 Potenzreihen als holomorphe Funktionen . . . . .	18
<b>4 Exponentialfunktion und Verwandte</b>	<b>20</b>
4.1 Exponentialfunktion . . . . .	20
4.2 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen . . . . .	21
4.3 Der Logarithmus . . . . .	21
<b>5 Der Cauchysche Integralsatz und Folgerungen</b>	<b>23</b>
5.1 Kurvenintegrale . . . . .	23
5.2 Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	28
5.3 Die Cauchysche Integralformel . . . . .	32
5.4 Stammfunktion . . . . .	35
5.5 Die Cauchysche Ungleichung . . . . .	36
5.6 Nullstellensatz und Identitätssatz . . . . .	37
<b>6 Singularitäten und Residuen</b>	<b>39</b>
6.1 Laurent-Reihen . . . . .	39
6.2 Isolierte Singularitäten . . . . .	43
6.3 Der Residuensatz . . . . .	45
6.4 Methoden der Residuenberechnung . . . . .	47
6.5 Residuensatz und reelle Integrale . . . . .	49
6.5.1 Integrale der Form $\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt$ . . . . .	49
6.5.2 Integrale der Form $\int_0^\infty Q(x) dx$ oder $\int_{-\infty}^\infty Q(x) dx$ . . . . .	49
6.5.3 Integrale mit langsamem Abklingverhalten und einer Singularität .	51
6.5.4 Integrale mit Logarithmen und Potenzfunktionen . . . . .	54
6.5.5 Reihenberechnung . . . . .	56
6.6 Das Argumentprinzip . . . . .	57
<b>7 Fourier-Transformation</b>	<b>59</b>
7.1 Beispiele partieller Differentialgleichungen . . . . .	59
7.1.1 Diffusion und Wärmeleitung . . . . .	59
7.1.2 Elektrodynamik . . . . .	60
7.2 Exkurs über temperierte Distributionen . . . . .	61
7.3 Definition und Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	64

7.4	Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen . . . . .	72
7.4.1	Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$ : . . . . .	72
7.4.2	Wellengleichung auf dem Gesamtraum: . . . . .	74
7.5	Abtastproblem in der Signalverarbeitung . . . . .	76
<b>8</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>80</b>
8.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	80
8.2	Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen . . . . .	85
8.2.1	Integralgleichungen: . . . . .	85
8.2.2	Harmonischer Oszillator: . . . . .	85
8.2.3	Die Wärmeleitungsgleichung auf dem Halbraum: . . . . .	86
<b>9</b>	<b>Harmonische Funktionen und die Poisson-Gleichung</b>	<b>88</b>
9.1	Harmonische Funktionen . . . . .	89
9.1.1	Komplexes Potential . . . . .	89
9.1.2	Komplexe Potentiale in der Strömungsmechanik . . . . .	90
9.1.3	Mittelwerteigenschaft und Maximumsprinzip . . . . .	92
9.2	Das Dirichlet-Problem . . . . .	95
9.2.1	Das Dirichlet-Problem auf dem Einheitskreis . . . . .	95
9.2.2	Das Dirichlet-Problem auf dem Halbraum . . . . .	96
9.3	Die Poisson-Gleichung . . . . .	97
9.3.1	Die Poisson-Gleichung im Ganzraum . . . . .	97
9.3.2	Das Randwertproblem . . . . .	99
<b>10</b>	<b>Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen</b>	<b>101</b>
10.1	Konforme und biholomorphe Abbildungen . . . . .	101
10.2	Möbius Transformationen . . . . .	104
10.3	Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern . . . . .	107
10.4	Joukowski-Transformation und Tragflächen . . . . .	109
<b>A</b>	<b>Grundlagen der Strömungsmechanik</b>	<b>112</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen sind die Menge

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit genannt wird und es gilt

$$i^2 = -1.$$

Auf  $\mathbb{C}$  sind Addition und Multiplikation wie folgt definiert. Für  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$  gilt

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + y_2 x_1). \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  heißt reell, falls  $y = 0$  und imaginär, falls  $x = 0$  und  $y \neq 0$ .

Zu  $z = x + iy$  bezeichnet  $x = \operatorname{Re} z$  den Realteil von  $z$  und  $y = \operatorname{Im} z$  den Imaginärteil von  $z$ .

**Bemerkung:** Die komplexen Zahlen bilden bezüglich Addition und Multiplikation einen Körper, insbesondere gelten die Distributivgesetze.

### Die komplexe Ebene:

$\mathbb{C}$  kann in natürlicher Weise mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert werden, indem wir  $z = x + iy$  mit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  identifizieren. Damit entspricht jede komplexe Zahl einem Punkt in  $\mathbb{R}^2$ , den wir in diesem Zusammenhang auch als komplexe Ebene bezeichnen.

Entsprechend bezeichnen wir mit

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Norm, oder den Betrag, von  $z$ . Dies entspricht der euklidischen Norm von  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Wir können den Betrag auch anders ausdrücken. Dazu bezeichnen wir mit

$$\bar{z} = x - iy$$

die komplex konjugierte Zahl zu  $z = x + iy$ . Damit gilt

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

**Bemerkung:** Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

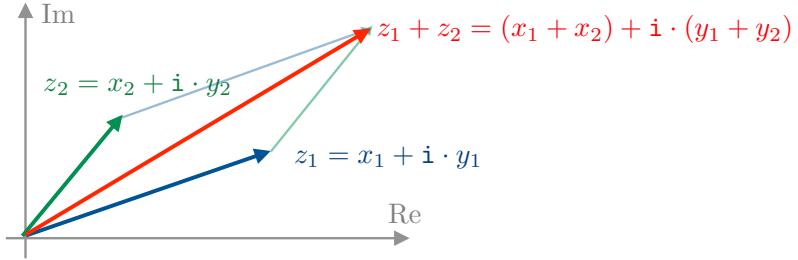


Abbildung 1: Addition

und somit

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**Eulersche Darstellung:** Oft ist es nützlich, in der Ebene Polarkoordinaten zu verwenden, also  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in der Form  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$  und  $\varphi$  für  $(x, y) \neq 0$  ein Winkel zwischen positiver  $x$ -Achse und dem Strahl von 0 durch  $(x, y)$ . Dies ergibt nach Identifikation von  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Zahlenebene eine Darstellung der Form

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad (1.1)$$

wobei wir hier die Euler-Formel

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

schon als bekannt voraussetzen. Sie ergibt sich aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen, die wir auch noch einmal später besprechen werden. Wir nennen (1.1) die Eulersche Darstellung von  $z$ .

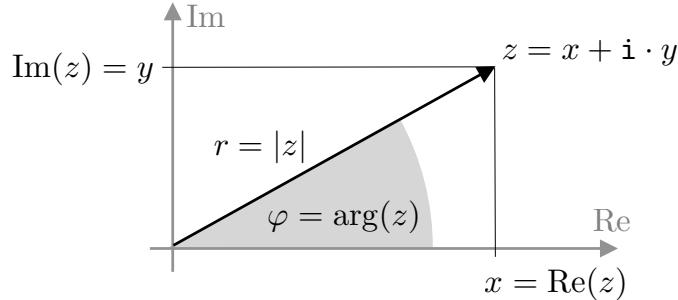


Abbildung 2: Polarkoordinaten

Für  $z \neq 0$  ist der Winkel  $\varphi$  nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  bestimmt. Jeder solcher Winkel wird ein Argument von  $z$  genannt,  $\varphi = \arg(z)$ . Das Argument ist also eine sogenannte mehrwertige Funktion von  $z$ . Oft wird das Argument normiert, typischerweise entweder durch die Bedingung  $\varphi \in [0, 2\pi)$  oder  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . Im restlichen Kapitel wählen wir  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , jedoch bevorzugen wir im Prinzip keine bestimmte Normierung, da sich je nach Anwendung die eine oder andere als praktischer

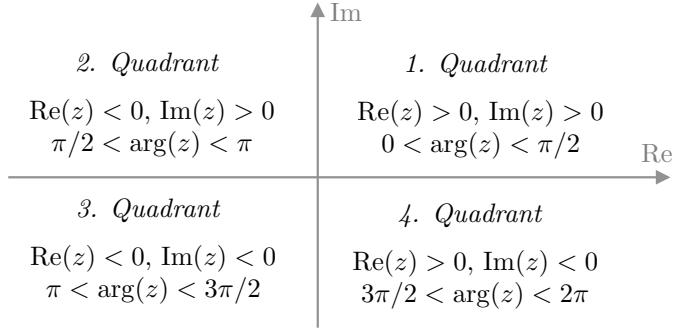


Abbildung 3: Aufteilung der komplexen Ebene

herausstellen wird. Dies wird später noch klarer werden, wenn wir den Logarithmus behandeln.

**Wichtige Identitäten:** Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} e^{i0} = 1 \quad &\text{und} \quad e^{i\varphi} = 1 \Leftrightarrow \varphi = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ e^{i\pi} = -1 \quad &\text{und} \quad e^{i\varphi} = -1 \Leftrightarrow \varphi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad &\text{und} \quad e^{i\varphi} = i \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{2}(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

**Multiplikation:** Die Darstellung in Polarkoordinaten ist besonders nützlich für Multiplikation und Division, denn es gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

D.h. bei Multiplikation/Division zweier komplexer Zahlen multiplizieren/dividieren sich die Beträge und addieren/subtrahieren sich die Winkel.

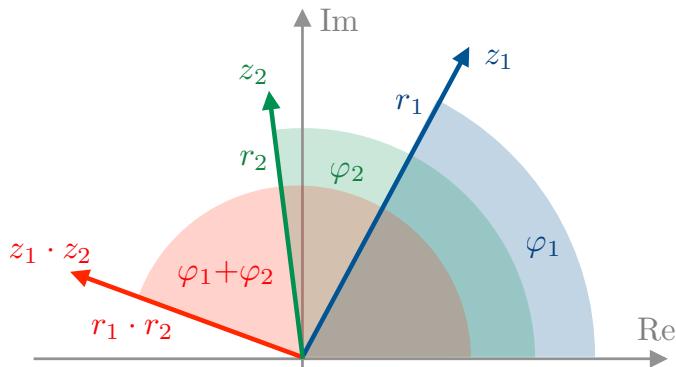


Abbildung 4: Multiplikation komplexer Zahlen

**Beispiel:** Es gilt

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{und daher} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Alternativ können wir auch rechnen

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2}$$

**Ganzzahlige Potenzen:** Induktiv ergibt sich für  $z = re^{i\varphi}$  und  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

### Wurzeln komplexer Zahlen:

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $z = re^{i\varphi}$  sind die  $n$  Lösungen von  $\zeta^n = z$  gegeben durch

$$\zeta_k = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zum Beispiel sind die  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $\zeta^4 = 1$  gegeben durch  $\cos \frac{0+2\pi k}{4} + i \sin \frac{0+2\pi k}{4}$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ .

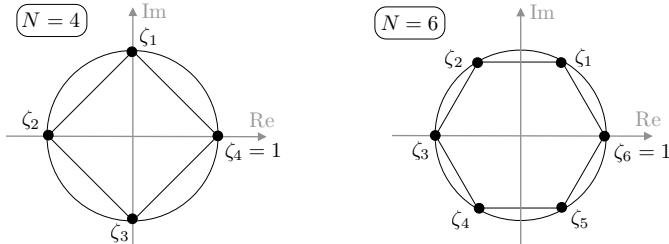


Abbildung 5: 4-te und 6-te Einheitswurzeln

### Beispiele:

(i). Wir suchen die Lösungen von  $z^2 = 1+i$ . Da  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  erhalten wir mit  $z = re^{i\varphi}$ , dass  $r = 2^{\frac{1}{4}}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$  gegeben sind.

(ii). Um Wurzeln zu berechnen ist oft die Identität

$$(1-z)(1+z+\cdots+z^k) = 1-z^{k+1}$$

nützlich. Suchen wir z.B. die Lösungen von  $1+z+z^2=0$ , so folgt aus

$$(1-z)(1+z+z^2) = 1-z^3$$

dass diese gegeben sind durch  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$  und  $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ .

## 1.2 Topologie der komplexen Ebene

Zu  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  definieren wir die offene Kreisscheibe mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $z_0$  über

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\},$$

die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\overline{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

und den Rand der Kreisscheibe, auch die Kreislinie genannt, durch

$$\partial B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}.$$

Wir werden später auch noch die punktierte offene Kreisscheibe

$$\dot{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

benötigen.

Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt offen, wenn für jedes  $z_0 \in U$  ein  $r > 0$  existiert, so dass  $B_r(z_0) \subset U$ . Eine Teilmenge  $V \subset \mathbb{C}$  heißt abgeschlossen falls  $\mathbb{C} \setminus V$  offen ist.

Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  heißt beschränkt, falls ein  $K > 0$  existiert, so dass  $|z| \leq K$  für alle  $z \in A$  gilt.

Eine Menge  $M \subset \mathbb{C}$  heißt zusammenhängend, falls sie nicht in zwei disjunkte, offene, nichtleere Mengen zerlegt werden kann. Eine Menge  $M$  heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Punkte in  $M$  durch einen Weg (eine stetige Kurve) verbunden werden können, der ganz in  $M$  liegt. Eine offene Menge ist zusammenhängend genau dann, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Eine offene, zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  heißt auch Gebiet.

Falls nichts anderes vereinbart ist, so bezeichnet  $U$  im folgenden immer ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

## 1.3 Komplexe Funktionen

Eine Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  können wir als

$$f = u + iv$$

schreiben, wobei  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  betrachtet werden können, d.h. es gilt

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

**Beispiel:**  $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ , also  $f = u + iv$  mit  $u(x, y) = x^2 - y^2$  und  $v(x, y) = 2xy$ .

**Definition 1.1** (Stetigkeit).  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt stetig im Punkt  $z_* \in U$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $z \in U$  mit  $|z - z_*| < \delta$  gilt  $|f(z) - f(z_*)| < \varepsilon$ .

$f$  heißt stetig auf der Menge  $V \subseteq U$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $z_* \in V$  stetig ist.

Die Funktion  $f$  heißt gleichmäßig stetig auf einer Menge  $M \subset U$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $z_0 \in M$  und  $z \in M$  mit  $|z - z_0| < \delta$  gilt  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Man sieht leicht, dass  $f = u + iv$  in einem Punkt  $z = x + iy$  genau dann stetig ist, wenn sowohl  $u$  als auch  $v$  stetig im Punkt  $(x, y)$  sind. Darüberhinaus sind die Summe, das Produkt, und die Superposition stetiger Funktionen stetig.

**Beispiel:** Die Funktion  $f : \dot{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ , mit  $f(z) = \frac{1}{z}$  ist in ihrem Definitionsbereich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

**Komplex-lineare Abbildung vs lineare Abbildung im  $\mathbb{R}^2$ :** Sei  $c = a + ib$  gegeben. Die komplex-lineare Abbildung  $f(z) = cz$  entspricht der reell-linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere kann die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

genau dann als Multiplikation mit einer komplexen Zahl interpretiert werden, wenn die reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $M$  eine Drehstreckung beschreibt, d.h. wenn  $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  für geeignete  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt.

## 2 Holomorphe Funktionen

**Definition 2.1** (Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie). Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (komplex) differenzierbar im Punkt  $z_0 \in U$ , sofern der Limes

$$f'(z) := \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert, wobei dieser Limes dann die Ableitung von  $f$  in  $z_0$  genannt wird.

Existiert  $f'(z)$  für jedes  $z \in V \subseteq U$ , für eine offene Menge  $V$ , so heißt  $f$  (komplex) differenzierbar auf  $V$  oder auch holomorph auf  $V$ .

**Elementare Eigenschaften:**

- (i). Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so ist  $f$  auch stetig in  $z_0$ .

- (ii). Es gelten die üblichen Regeln bzgl. Addition und Multiplikation von Funktionen:  
Sind  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g$  differenzierbar in  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so sind auch  $f + g$ ,  $fg$  und, falls  $g(z_0) \neq 0$ ,  $f/g$  differenzierbar in  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit

$$\begin{aligned}(f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0), \\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}.\end{aligned}$$

- (iii). Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f(U) \subset V$ . Die Funktion  $f$  sei in  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar und  $g$  sei komplex differenzierbar in  $f(z_0)$ . Dann ist  $(g \circ f) : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  komplex differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

- (iv).  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann in  $z_0$  differenzierbar, falls es ein  $c \in \mathbb{C}$  sowie ein sogenanntes Restglied  $t$  gibt, so dass

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ch + o(|h|)$$

für  $h \rightarrow 0$ . In diesem Fall gilt natürlich  $c = f'(z_0)$ .

### Beispiele:

- (i). Jedes Polynom ist holomorph (auf ganz  $\mathbb{C}$ ).
- (ii).  $z \mapsto z^{-1}$  ist holomorph (auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).
- (iii).  $f$  mit  $f(z) := \bar{z}$  ist nirgends holomorph, denn  $f'(z)$  existiert in keinem Punkt  $z$ . Dazu betrachte z.B.  $z_0 = 0$ , dann gilt

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{x - iy}{x + iy} \rightarrow \begin{cases} x = 0, y \rightarrow 0 & : = -1 \\ x \rightarrow 0, y = 0 & : = 1 \end{cases}$$

Wir haben also ein einfaches Beispiel einer stetigen Funktion gefunden, die nirgendwo komplex differenzierbar ist. Dieses Beispiel deutet schon an, dass komplexe Differenzierbarkeit ein sehr viel stärkerer Begriff ist als reelle Differenzierbarkeit.

### Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

Das letzte Beispiel verdeutlicht noch einmal, dass für die Existenz der Ableitung in einem Punkt, der Limes unabhängig davon sein muss, wie die Folge  $h$  gegen Null konvergiert. Mit derselben Strategie wie im obigen Beispiel erhalten wir eine wichtige Konsequenz. Dazu schreiben wir  $f = u + iv$  und  $z = x + iy$  und nehmen an, dass  $f$  in  $z$  differenzierbar ist. Zunächst betrachten wir die Nullfolge  $h = \delta + i0$  mit  $\delta \rightarrow 0$ . Dies ergibt

$$\begin{aligned}\frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x + \delta, y) - u(x, y)}{\delta} + i \frac{v(x + \delta, y) - v(x, y)}{\delta} \\ &\rightarrow \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y).\end{aligned}$$

Andererseits können wir die Nullfolge  $h = 0 + i\delta$  nehmen, was ergibt

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+\delta) - u(x, y+\delta)}{i\delta} + i \frac{v(x, y+\delta) - v(x, y)}{i\delta} \\ &\rightarrow -i\partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y).\end{aligned}$$

Da die Ableitung von  $f$  im Punkt  $z$  existiert, müssen die beiden Limiten übereinstimmen und wir erhalten, dass  $u$  und  $v$  die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen müssen, d.h.

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y). \quad (2.1)$$

Wir haben also gesehen, dass aus Holomorphie von  $f$  folgt, dass  $(u, v)$  die CR-Gleichungen (2.1) erfüllen.

Die Äquivalenz unter einer zusätzlichen Annahme erhalten wir, wenn wir komplexe Differenzierbarkeit mit reeller Differenzierbarkeit vergleichen.

**Erinnerung:**  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  wird reell-differenzierbar in  $z_0 = x_0 + iy_0$  genannt, falls  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  im Sinne der reellen Analysis differenzierbar ist, d.h. es existiert eine Matrix  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  so dass

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Jh + o(|h|) \quad (2.2)$$

für  $h \rightarrow 0$ . Die Jacobi-Matrix  $J$  muss dann aber nicht unbedingt eine Drehstreckung repräsentieren.

**Wichtig!** Also ist eine reell differenzierbare Funktion von  $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nur dann komplex differenzierbar in einem Punkt, wenn die Jacobimatrix eine Drehstreckung ist. Wiederum wird klar, dass komplexe Differenzierbarkeit ein sehr viel stärkerer Begriff ist, als reelle Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^2$ .

Wir fassen unsere Überlegungen in folgendem Satz zusammen.

**Satz 2.2** (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen). *Seien  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 = x_0 + iy_0$  gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i).  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.

(ii).  $(u, v)$  ist in  $(x_0, y_0)$  differenzierbar (im Sinne reeller Funktionen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) und die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}(x_0, y_0)$$

beschreibt eine Drehstreckung, d.h. im Punkt  $x_0$  gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen (2.1) in  $(x_0, y_0)$ .

**Beispiel:** Mit Hilfe des Kriteriums der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sieht man leicht, dass  $f(z) = \operatorname{Re} z$  und  $f(z) = \operatorname{Im} z$  nicht holomorph sind.

**Achtung:** Existieren nur die partiellen Ableitungen und erfüllen diese die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so kann man noch nicht darauf schließen, dass  $f$  holomorph ist. Dazu benötigt man die reelle Differenzierbarkeit im Sinne von (2.2). Diese folgt zum Beispiel, falls die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Für die Praxis ist jedoch ohnehin vor allem die andere Richtung von Satz 2.2 relevant, d.h. falls die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht erfüllen, dann ist  $f$  nicht komplex differenzierbar.

**Bemerkung:** Ist  $f$  nicht nur in einem Punkt  $z_0$  sondern sogar auf einer offenen Menge  $V$  differenzierbar, so besitzen  $f$  bzw.  $(u, v)$  (wir werden das später beweisen) schon unendlich viele Ableitungen, und die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen (2.1) implizieren

$$\Delta u(x_0, y_0) = \Delta v(x_0, y_0) = 0 \quad \text{für jedes } z_0 = x_0 + iy_0 \in V,$$

wobei  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  der Laplace-Operator ist. Insbesondere sind der Real- und der Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch.

### 3 Reihen und Potenzreihen

Als nächstes Beispiel holomorpher Funktionen werden wir Potenzreihen betrachten. Dazu erinnern wir uns zunächst einmal an einige Grundlagen zu Reihen.

#### 3.1 Reihen

Reihen komplexer Zahlen sind per Definition Grenzwerte von Partialsummenfolgen. D.h. zu einer Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  bilden wir die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$ . Falls die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Zahl  $s \in \mathbb{C}$  konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^\infty z_k$  konvergiert und setzen  $\sum_{k=0}^\infty z_k = s$ .

Die Reihe divergiert, wenn sie nicht konvergiert. Weiterhin sagen wir, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^\infty z_k$  absolut konvergiert, falls  $\sum_{k=0}^\infty |z_k|$  konvergiert.

**Lemma 3.1.** *Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.*

*Beweis.* Da  $\sum_{k=1}^\infty |z_k|$  konvergiert, bilden die Partialsummen  $\sigma_n := \sum_{k=0}^n |z_k|$  eine Cauchy-Folge, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für all  $n \geq n_0$  und  $m \geq 0$  gilt, dass  $|\sigma_n - \sigma_{n+m}| < \varepsilon$ . Da  $|\sum_{k=n+1}^{n+m} z_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_k| < \varepsilon$ , so bilden auch die Partialsummen  $s_n$  zu  $(z_k)$  eine Cauchy-Folge und da jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$  einen Grenzwert besitzt, konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^\infty z_k$ .  $\square$

**Bemerkung:** Falls die Reihe  $\sum_{k=0}^\infty z_k$  konvergiert, so folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$ . Falls  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge ist, so divergiert die Reihe.

Jedoch impliziert  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$  nicht, dass die Reihe konvergiert, wie man zum Beispiel an der harmonischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$  sieht. [Wir können die Partialsummen nach unten folgendermaßen abschätzen:  $s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$ .]

### Wichtige Beispiele:

- (i). **Geometrische Reihe:** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert, falls  $|q| < 1$ . Dies folgt aus der Rechnung  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  und damit gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .
- (ii). **Riemannsche Zetafunktion:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ , mit  $s \in \mathbb{R}$ , konvergiert für  $s > 1$  und divergiert für  $s \leq 1$ . [In der Tat gilt für  $s > 1$ , dass  $s_{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(n-1)s}} + \cdots + \frac{1}{2^{ns}}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}.$ ]

**Satz 3.2** (Majorantenkriterium). *Es seien  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  Folgen, mit  $a_k \geq 0$  und  $|z_k| \leq a_k$ . Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert, so konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  absolut.*

*Beweis.* Sei  $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$  und  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n |z_k|$ . Dann gilt

$$|\sigma_{n+m} - \sigma_n| = \sum_{k=n}^{n+m} |z_k| \leq \sum_{k=n}^{n+m} a_k = A_{n+m} - A_n.$$

Nach Voraussetzung ist  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ , daher ist auch  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und konvergiert.  $\square$

**Beispiel:** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i+2^k)^2}{5^k}$ . Es gilt  $|(i+2^k)^2| \leq (2^k + |i|)^2 \leq 4^k + 22^k + 1 \leq 3 \cdot 4^k$ . Also gilt

$$\left| \frac{(i+2^k)^2}{5^k} \right| \leq \frac{3 \cdot 4^k}{5^k} \leq 3 \left( \frac{4}{5} \right)^k$$

und damit konvergiert die Reihe nach Vergleich mit der geometrischen Reihe.

### Weitere Eigenschaften:

- (i). Sei  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $z_k = x_k + iy_k$ . Dann konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  in  $\mathbb{C}$  genau dann wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.
- (ii). Für konvergente Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu w_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} w_k.$$

- (iii). Für eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  und eine beschränkte Folge  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $|\lambda_k| \leq M$ , gilt  $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z_k \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ .

**Konvergenzkriterien:** Wir erinnern hier noch an die folgenden zwei Kriterien.

- (i). **Quotientenkriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  konvergiert absolut, falls es eine Konstante  $C \in [0, 1)$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $\left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| \leq C$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.  
[Es folgt  $|z_{k_0+m}| \leq |z_{k_0}|C^m$  und daher konvergiert die Reihe, nach Vergleich mit der geometrischen Reihe.]
- (ii). **Wurzelkriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  konvergiert absolut, falls es eine Konstante  $C \in [0, 1)$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $|z_k|^{1/k} \leq C$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.  
[Es gilt  $|z_k| \leq C^k$  für  $k \geq k_0$  und die Reihe konvergiert nach Vergleich mit der geometrischen Reihe.]

**Beispiel:** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert nach dem Quotientenkriterium für alle  $z \in \mathbb{C}$ , denn  $\frac{z^{k+1}k!}{z^k(k+1)!} = \frac{z}{k+1} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  für jedes feste  $z \in \mathbb{C}$ .

## 3.2 Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_k, z_k \in \mathbb{C},$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum (oder Entwickelpunkt)  $z_0$  und Koeffizienten  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Definition 3.3.** Wir sagen, die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  konvergiert im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  gegen die Zahl  $S(z) \in \mathbb{C}$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ , wobei  $S_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$  die  $n$ -te Partialsumme der Reihe ist.

Die Potenzreihe konvergiert absolut im Punkt  $z \in \mathbb{C}$ , falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z - z_0|^k$  konvergiert.

Für eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  heißt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  (absolut) konvergent in  $\Omega$ , falls die Reihe für jedes  $z \in \Omega$  (absolut) konvergiert.

**Beispiel:** Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  konvergiert absolut in  $B_1(0)$  und divergiert für  $|z| \geq 1$ .

**Definition 3.4.** Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in  $\Omega \subset \mathbb{C}$  gegen  $S(z)$ , falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$  und für alle  $z \in \Omega$  gilt  $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ .

**Wichtige Erinnerung!** Bei einer gleichmäßig konvergenten Reihe können Differentiation und Integration mit der Summenbildung vertauscht werden.

**Beispiel:** Die geometrische Reihe konvergiert nicht gleichmäßig in  $B_1(0)$ , aber in  $\overline{B}_{1-\delta}(0)$  für alle  $\delta > 0$ .

**Lemma 3.5.** Falls eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  für ein  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1 \neq z_0$  konvergiert, so gilt folgendes:

- (i). Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  absolut.
- (ii). Für jede kompakte Teilmenge der Scheibe  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$  konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  gleichmäßig.

*Beweis.* Wir beweisen zunächst (ii): Sei  $0 < r < |z_1 - z_0|$  fixiert und  $z \in \overline{B}_r(z_0)$  beliebig. Dann gilt

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| |z_1 - z_0|^n \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \leq C s^n$$

für  $s = r / |z_1 - z_0| < 1$  und eine geeignete Konstante  $C > 0$ , da die Folge  $|a_n| |z_1 - z_0|^n$  nach Voraussetzung eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt ist. Nach Vergleich mit der geometrischen Reihe konvergiert die Potenzreihe nun wegen des Majorantenkriteriums gleichmäßig auf  $\overline{B}_r(z_0)$ , und weil  $r$  beliebig im Intervall  $(0, |z_1 - z_0|)$  gewählt werden kann, folgt auch (i).  $\square$

**Konvergenzradius:** Aus den obigen Überlegungen folgt, dass für die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  nur die folgenden drei Fälle auftreten können.

- (i).  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- (ii).  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  konvergiert nur für  $z = z_0$ .
- (iii). Es gibt eine positive Zahl  $R \in \mathbb{R}$ , so dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < R$  absolut konvergiert und für  $|z - z_0| > R$  divergiert.

Die Zahl  $R$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe und  $B_R(z_0)$  die Konvergenzscheibe der Potenzreihe. In den Fällen (i) und (ii) oben, definieren wir der Einfachheit halber  $R = \infty$  bzw.  $R = 0$ .

Die folgenden beiden Sätze kann man wieder über den Vergleich mit der geometrischen Reihe beweisen.

**Satz 3.6** (Cauchy-Hadamard-Kriterium). *Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  ist durch*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

gegeben.

*Beweis.* Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < R$  gibt es ein  $\theta \in \mathbb{R}$  mit  $|z - z_0| < \theta < R$ . Dann gilt

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k| |z - z_0|^k = |a_k| \theta^k \left( \frac{|z - z_0|}{\theta} \right)^k.$$

Die Folge  $|a_k|\theta^k$  ist beschränkt, denn aus  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/k}} > \theta$  folgt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/k} < \frac{1}{\theta}$ . D.h. es existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k > n_0$  gilt  $\theta^k |a_k| < 1$ . Damit gilt

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k|\theta^k \left( \frac{|z - z_0|}{\theta} \right)^k \leq M q^k$$

mit  $q = \frac{|z - z_0|}{\theta} < 1$  und der Vergleich mit der geometrischen Reihe ergibt Konvergenz. Falls  $|z - z_0| > R$ , dann gilt für  $n \geq n_0$  mit hinreichend großem  $n_0$ , dass  $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z - z_0|}$  und damit  $|a_n||z - z_0|^n > 1$ , so dass  $a_n(z - z_0)^n$  keine Nullfolge ist, und damit die Reihe divergiert.  $\square$

Das folgende Kriterium ist oft, sofern es anwendbar ist, einfacher zu berechnen. Der Beweis ist ähnlich zu dem von Satz 3.6.

**Satz 3.7.** *Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  ist durch*

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

gegeben, falls dieser Grenzwert existiert. (Der Fall  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \infty$  ist mit eingeschlossen.)

### Bemerkung:

- (i). Im Fall  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$  ist  $R = \infty$  und im Fall  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$  ist  $R = 0$ .
- (ii). Es gibt Potenzreihen, bei denen das Kriterium aus Satz 3.7 versagt. Ein Beispiel ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  mit  $a_k = 2$ , falls  $k$  gerade ist, und  $a_k = 1$  sonst. Nach dem Cauchy-Hadamard-Kriterium ist der Konvergenzradius  $R = 1$ , aber die Folge  $|a_k/a_{k+1}|$  konvergiert nicht, denn sie oszilliert zwischen 2 und 1/2.

### Beispiele:

- (i).  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ . ( $R = 1$ )
- (ii).  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^k}$ . ( $R = \infty$ )
- (iii).  $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$ . ( $R = 0$ )
- (iv).  $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ . ( $R = 1$ )
- (v).  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$ . ( $R = e$ )

**Bemerkung:** Für den Rand der Konvergenzscheibe kann im Allgemeinen keine Aussage gemacht werden. Zum Beispiel ist der Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  gleich  $R = 1$ . Für  $z = 1$  divergiert die Reihe, wohingegen sie für  $z = -1$  konvergiert.

### 3.3 Potenzreihen als holomorphe Funktionen

Wir werden später das tiefliegende Resultat zeigen, dass holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar sind und in jedem Punkt als konvergente Potenzreihe dargestellt werden können. Dies benötigt noch einige weitere Theoreme der Integration von komplexen Funktionen. Das umgekehrte Resultat können wir jedoch jetzt schon zeigen.

**Satz 3.8** (Potenzreihen sind holomorph). *Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  habe Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $f$  holomorph auf  $B_R(z_0)$  mit Ableitung*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n,$$

wobei  $R$  auch der Konvergenzradius der Reihe auf der rechten Seite ist.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/n} (n+1)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

d.h. die Funktion  $g$  ist durch

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

wohldefiniert auf  $B_R(z_0)$ . Außerdem können wir o.B.d.A.  $z_0 = 0$  annehmen und für gegebenes  $z \in B_R(0)$  sowie alle hinreichend kleinen  $h$  verifizieren wir durch direkte Rechnungen bzw. Indexverschiebungen die Formeln

$$\begin{aligned} r(z, h) &:= \frac{f(z+h) - f(z) - hg(z)}{h^2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n - hn z^{n-1}}{h^2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} z^{n-2-k} h^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+2} z^{n-k} h^k. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle hinreichend kleinen  $|h|$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|r(z, h)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| \sum_{k=0}^n \frac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| (n+2)^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| (n+2)^2 (|z| + |h|)^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^2 (|z| + |h|)^n.
\end{aligned}$$

Wir setzen  $\varrho := \frac{1}{2}(r + |z|)$ , so dass für alle hinreichend kleinen  $|h|$  die Abschätzungen

$$|r(z, h)| < \varrho < R$$

und

$$|r(z, h)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^2 \varrho^n$$

gelten. Die reelle Reihe auf der rechten Seite konvergiert aber auf Grund des Wurzelkriteriums für reelle Reihen und wegen  $\varrho < R$ , d.h. es gilt  $\limsup_{h \rightarrow 0} |r(z, h)| < \infty$  und dies impliziert

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq |h| |r(z, h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Insbesondere ist  $f$  holomorph in  $z$  und besitzt die Ableitung  $g(z)$ . Da  $z$  beliebig in  $B_R(0)$  gewählt werden kann, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Es folgt induktiv: Jede Potenzreihe besitzt auf ihrem Konvergenzkreis unendlich viele Ableitungen im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit und jede Ableitung kann durchgliedweise Differentiation berechnet werden.

**Definition 3.9.** Wir nennen eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch, falls sie in einer Umgebung jeden Punktes  $z \in U$  durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann.

**Bemerkung:** Wie schon oben erwähnt, werden wir später zeigen, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist.

## 4 Exponentialfunktion und Verwandte

### 4.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist definiert über die Reihe

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Da  $a_k/a_{k+1} = k + 1 \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , ist der Konvergenzradius der Reihe  $R = \infty$ . Nach Satz 3.8 ist  $e^z$  in ganz  $\mathbb{C}$  unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt

$$(e^z)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

In anderen Worten, die Exponentialfunktion ist Lösung der Differentialgleichung  $f'(z) = f(z)$ ,  $f(0) = 1$ .

**Eigenschaften:**

- (i). Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt  $e^{z+w} = e^z e^w$ . [Fixiere  $c \in \mathbb{C}$  und betrachte  $f(z) = e^z e^{c-z}$ . Damit gilt  $f'(z) = 0$ , also ist  $f(z) = C$  für eine Konstante  $C \in \mathbb{C}$ . Für  $z = c$  folgt, dass  $C = e^c e^{c-c}$ , also  $C = c^c$ . Damit folgt  $e^c = e^z e^{c-z}$ . Mit  $c = z + w$  folgt die Behauptung.]

- (ii). Für  $b \in \mathbb{R}$  gilt

$$|e^{ib}|^2 = e^{ib} \overline{e^{ib}} = e^{ib} e^{-ib} = e^0 = 1,$$

d.h. die Exponentialfunktion bildet die imaginäre Achse auf den Einheitskreis ab.

- (iii). Für  $z = a + ib$  gilt  $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$  und somit

$$|e^z| = |e^a| |e^{ib}| = e^a = e^{\operatorname{Re} z}.$$

- (iv). Es gilt die Eulersche Formel für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (4.1)$$

wobei

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} \quad \text{und} \quad \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}. \quad (4.2)$$

Gleichung (4.1) folgt aus

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

- (v). Die Exponentialfunktion ist  $2\pi$ -periodisch in imaginärer Richtung, d.h. es gilt  $e^{z+2\pi ik} = e^z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 4.2 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Die Potenzreihen in (4.2) haben ebenfalls Konvergenzradius  $R = \infty$  und definieren auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktionen.

**Eigenschaften:**

- (i).  $(\sin z)' = \cos z$ ,  $(\cos z)' = -\sin z$ .
- (ii).  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ,  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ .
- (iii).  $\sin(z_1 \mp z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \mp \cos z_1 \sin z_2$ ,  $\cos(z_1 \mp z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$ .
- (iv).  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .

Eigenschaft (i) ergibt sich aus dem Differenzieren der Reihen, (ii) aus der Euler-Formel 4.1 und die Eigenschaften (iii) und (iv) folgen aus (ii).

**Bemerkung:** In der komplexen Ebene sind sin und cos nicht beschränkt! In der Tat gilt z.B.  $|\cos(iy)| = \frac{1}{2}|e^{-y} + e^y| \rightarrow \infty$  für  $y \rightarrow \pm\infty$ . Ebenso gilt  $|\sin(iy)| = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^y| \rightarrow \infty$  für  $y \rightarrow \pm\infty$ .

Weiterhin definieren wir Tangens  $\tan(z)$  und Contangens  $\cot(z)$  durch

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \frac{\sin z}{\cos z} && \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \cot(z) &= \frac{\cos z}{\sin z} && \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{ \pi k, k \in \mathbb{Z} \},\end{aligned}$$

sowie die hyperbolischen Funktionen Sinus- und Cosinushyperbolicus über

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \text{und} \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

**Bemerkung:** Auch hier gibt es signifikante Unterschiede zu den entsprechenden reellen Funktionen. So gilt  $\cosh z = 0$ , falls  $z = \frac{1}{2}(2k+1)\pi i$  und  $\sinh z = 0$  falls  $z = k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 4.3 Der Logarithmus

Wir haben gesehen, dass die Funktion  $f(z) = e^z$  periodisch mit Periode  $2\pi i$  ist und somit nicht injektiv ist. Wenn wir jedoch  $e^z$  auf das Gebiet

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

einschränken, dann ist  $e^z$  injektiv und es gilt

$$\exp(G) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg(z) < \pi\} = \tilde{G}.$$

Das Bild von  $G$  unter der Exponentialfunktion ist also die auf der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene (siehe Abbildung 6).

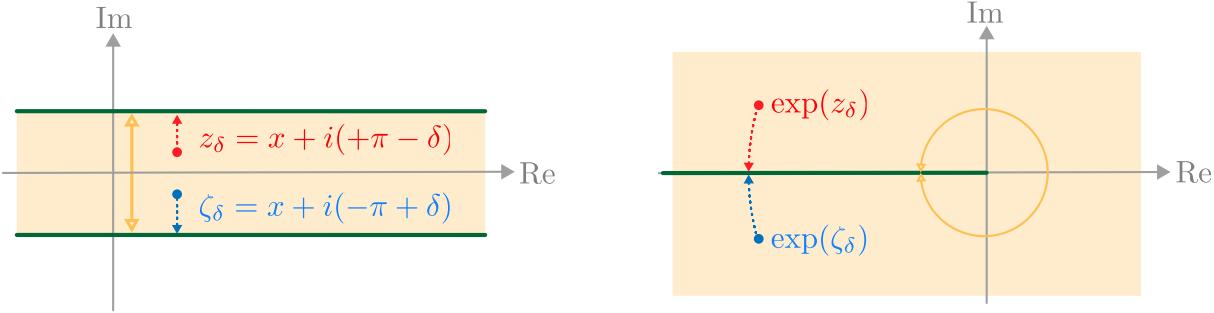


Abbildung 6: Bild der Exponentialabbildung von  $G$  auf  $\exp(G)$ .

Die inverse Funktion von  $e^z$  eingeschränkt auf  $G$  ist ein Zweig einer sogenannten Multi-funktion, die wir mit Logarithmus bezeichnen.

Ebenso können wir die Exponentialfunktion auf

$$G_\alpha := \{z \mid \alpha < \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$$

einschränken, so dass

$$\exp(G_\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi\} =: \tilde{G}_\alpha$$

also ist  $\tilde{G}_\alpha$  die längs des Strahls von 0 durch  $e^{i\alpha}$  geschlitzte Ebene. Die Exponentialfunktion bildet  $G_\alpha$  bijektiv auf  $\tilde{G}_\alpha$  ab und die inverse Funktion ist ein (anderer) Zweig des Logarithmus.

Wollen wir die Gleichung  $e^w = z$  für  $z \in \tilde{G}$  lösen, so erhalten wir mit  $z = re^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  und  $w = x + iy$ , dass  $e^x = r = |z|$  und  $y = \varphi$ . Also gilt  $x = \ln r$  und  $y = \varphi$ , also sind alle Werte

$$w = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Lösungen, wobei  $\ln$  hier der (eindeutig bestimmte) reelle Logarithmus ist.

Wir definieren also zu  $z \in \tilde{G}$  die mehrwertige Funktion

$$\ln z := \ln |z| + i \arg(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobei  $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$  das Argument von  $z$  ist. Damit gilt  $e^{\ln z} = z$ .

Falls wir die Gleichung  $e^w = z$  für  $z$  mit  $\arg(z) = \pi$  lösen wollen, wählen wir einen anderen Zweig des Logarithmus, z.B.  $\arg(z) \in (0, 2\pi)$ .

**Beispiel:** Wählen wir den Zweig  $\arg z \in (-\pi, \pi)$ , so gilt  $\ln i = i\frac{\pi}{2}$ ,  $\ln(-1)$  ist nicht definiert und  $\ln(-i) = -i\frac{\pi}{2}$ . Wählen wir stattdessen den Zweig  $\arg z \in (0, 2\pi)$ , so gilt  $\ln i = i\frac{\pi}{2}$ ,  $\ln(-1) = i\pi$  und  $\ln(-i) = i\frac{3\pi}{2}$ .

Als Hauptwert des Logarithmus definieren wir im folgenden

$$\operatorname{Ln}(z) := \ln |z| + i \arg(z), \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

**Bemerkung:** Es gilt im allgemeinen nicht, dass  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ , sondern nur, falls  $\varphi + \psi \in (-\pi, \pi)$  für  $\operatorname{Im} a = \varphi$  und  $\operatorname{Im} b = \psi$ .

**Definition 4.1.** Es sei  $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein offenes Gebiet. Eine holomorphe Funktion  $\lambda: U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Logarithmusfunktion in  $U$  falls  $e^{\lambda(z)} = z$  für alle  $z \in U$  gilt.

**Potenzen:** Für  $x, a \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  gilt  $x^a = e^{a \ln x}$ .

Jetzt seien  $z, a \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$ . Wir wählen einen Zweig des Logarithmus und setzen  $z^a := e^{a \ln z}$ . Wir nennen dies einen Zweig der Potenzfunktion  $z^a$ .

Falls  $a \in \mathbb{N}$ , dann hat  $z^a$  nur einen Wert, die übliche  $a$ -Potenz von  $z$ . Im allgemeinen ist die Potenzfunktion aber mehrwertig.

**Beispiele:**

- (i). Sei  $a = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $z = 1$ . Damit ist  $\ln(1) = 2\pi k i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ein Logarithmus von 1 und

$$1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

sind die verschiedenen Werte von  $1^{\frac{1}{n}}$ .

- (ii). Es gilt  $\ln i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ , also

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 5 Der Cauchysche Integralsatz und Folgerungen

Der Cauchysche Integralsatz ist das Kernstück der komplexen Analysis. Er besagt, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg (unter geeigneten Bedingungen an den Weg) verschwindet. Daraus können wir die Cauchysche Integralformel ableiten, aus der dann weitere wichtige Aussagen folgen. Zum Beispiel, dass holomorphe Funktionen analytisch sind, dass eine beschränkte holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  konstant sein muss (Liouvilles Theorem) und dass eine holomorphe Funktion, die in einem offenen Ball verschwindet, identisch verschwinden muss (Identitätssatz).

Zur Entwicklung dieser Theorie müssen wir zunächst einmal Kurvenintegrale einführen.

### 5.1 Kurvenintegrale

Auch für komplexwertige, stetige Funktionen  $p: [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ ,  $p = p_1 + i p_2$ ,  $p_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , können wir das Integral

$$\int_a^b p(t) dt = \int_a^b p_1(t) dt + i \int_a^b p_2(t) dt$$

definieren. Falls  $p(t) = \frac{d}{dt}q(t)$  für eine stetig differenzierbare Funktion  $q = q_1 + iq_2$  gilt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b p(t) dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}q(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}q_1(t) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt}q_2(t) dt \\ &= q_1(b) - q_1(a) + i(q_2(b) - q_2(a)) = q(b) - q(a),\end{aligned}$$

d.h. es gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch für komplexwertige Funktionen.

Falls  $p$  stetig differenzierbar ist, dann nennen wir  $p$  einen stetig differenzierbaren Weg.

**Definition 5.1.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg. Dann definieren wir das Integral von  $f$  entlang  $\gamma$  über

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Dieses Integral wird auch das Kurvenintegral oder Wegintegral von  $f$  über  $\gamma$  genannt.

Mit Hilfe der Ketten- und Transformationsregel ist leicht zu sehen, dass das Wegintegral unabhängig von der Parametrisierung ist, sofern die Orientierung erhalten bleibt. D.h. falls  $t: [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine stetig differenzierbare umkehrbare Funktion ist mit  $t(c) = a$  und  $t(d) = b$ , dann gilt

$$\int_c^b f(\gamma(t(s))) \frac{d}{ds} \gamma(t(s)) ds = \int_c^b f(\gamma(t(s))) \gamma'(t(s)) t'(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Wir erweitern die Definition des Wegintegrals auf stückweise stetig differenzierbare Wege: falls  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist und eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  existiert, so dass  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  stetig differenzierbar ist, dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}} f(z) dz.$$

Im folgenden nennen wir eine Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  Integrationsweg, wenn  $\gamma$  stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Wir nennen  $\gamma(a)$  den Anfangspunkt und  $\gamma(b)$  den Endpunkt und  $\text{sp } \gamma = \gamma([a, b]) \subset U$  die Spur von  $\gamma$ .

Der Integrationsweg heißt geschlossen, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  und er heißt einfach, wenn für alle  $t_1, t_2 \in [a, b]$  mit  $t_1 \neq t_2$  gilt, dass  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ .

**Beispiel:** Für  $\gamma: [0, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$  gilt folgendes: ist  $b = \pi$ , so ist die Spur von  $\gamma$  der Halbkreis mit Radius 1 und Endpunkten 1 und  $-1$ . Falls  $b = 2\pi$  ist die Spur von  $\gamma$  der

Einheitskreis.  $\gamma$  ist in diesem Fall geschlossen und einfach. Falls  $b = 4\pi$ , dann ist die Spur von  $\gamma$  wieder der Einheitskreis, aber  $\gamma$  ist nicht einfach - die Spur von  $\gamma$  wird zweimal durchlaufen.

### Bemerkung:

- (i). Integrationswege sind rektifizierbar und die Länge von  $\gamma$  ist gegeben durch  $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .
- (ii). Bei geschlossenen Kurven schreibt man manchmal auch  $\oint_{\gamma} f(z) dz$  statt  $\int_{\gamma} f(z) dz$ .

### Beispiele:

- (i). Das Integral des quadratischen Monoms entlang einer Strecke  $[z_1, z_2] := \{(1-t)z_1 + tz_2 \mid t \in [0, 1]\}$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_{[z_1, z_2]} z^2 dz &= \int_0^1 ((1-t)z_1 + tz_2)^2 (z_2 - z_1) dt \\ &= (z_2 - z_1) \left( z_1^2 \int_0^1 (1-t)^2 dt + z_1 z_2 \int_0^1 2t(1-t) dt + z_2^2 \int_0^1 t^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{3}(z_2 - z_1) (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) = \frac{1}{3}(z_2^3 - z_1^3). \end{aligned}$$

- (ii). Die vielleicht wichtigste Formel der komplexen Analysis ist die folgende. Sei  $\gamma(t) = r e^{ilt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ein Weg, dessen Bild der Kreis  $\partial B_r(0)$  ist, und der dieses Bild  $l$ -mal durchläuft. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^k dz &= \int_0^{2\pi} r^k e^{ilk t} (r i l e^{ilt}) dt = i l r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{il(k+1)t} dt \\ &= \begin{cases} 2\pi l i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gegebene Parameter sind. Beachte, dass für  $k = -1$  der Wert des Integrals von der sogenannten Umlaufzahl  $l$  aber nicht vom Radius abhängt.

### Weitere Eigenschaften des Wegintegrals:

- (i). Falls  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg ist und  $-\gamma(t) := \gamma(b + a - t)$ , dann gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$ .
- (ii). Es gilt stets die Ungleichung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq L(\gamma) \sup_{z \in \text{sp } \gamma} |f(z)|,$$

die wir im Folgenden Standardabschätzung für Wegintegrale nennen wollen.

**Beispiele:**

(a) Für  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  und  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  können wir abschätzen

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{R^4 e^{4it} + 1} iRe^{it} dt \right| \leq \frac{R\pi}{|R^4 - 1|}$$

(b) Für  $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  gilt

$$\left| \int_{B_2(1)} \frac{1}{z} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{1 + 2e^{it}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{2e^{it}}{1 + 2e^{it}} \right| dt \leq 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

(iii). **Warnung!** Beachte, dass im Allgemeinen

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \not\leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$$

gilt, d.h. es gibt *keine* “Dreiecksungleichung für Wegintegrale”.

**Beispiel:** Sei  $f(z) = \frac{1}{z}$  und  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Dann gilt  $|f(\gamma(t))| = 1$  und  $\gamma'(t) = ie^{it}$  und somit  $\int_{\gamma} |f(z)| dz = i \int_0^{2\pi} e^{it} dt = 0$ , aber andererseits  $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} idt \right| = 2\pi$ .

(iv). Das komplexe Kurvenintegral kann in natürlicher Weise auch für sogenannte Ketten von Kurven, d.h. für endliche Familien von Kurven, definiert werden, siehe Abbildung 7.

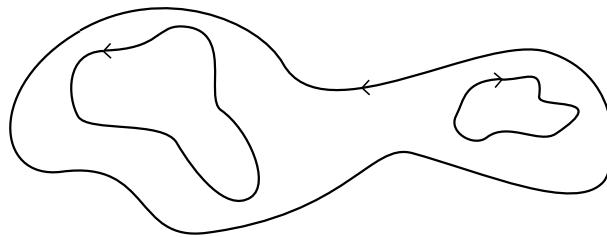


Abbildung 7: Beispiel für eine Kette von geschlossenen und orientierten Wegen. Das Kurvenintegral über einer Kette ist die Summe der Wegintegrale über die Einzelwege.

**Lemma 5.2** (Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung). *Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$  eine Kurve und besitzt  $f$  auf  $U$  eine Stammfunktion – d.h. gilt  $f = F'$  im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit auf ganz  $U$  – so gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Beweis.* Für stetig differenzierbare Kurven  $\gamma$  folgt dies aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  $f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}F(\gamma(t))$ , und für stückweise stetig differenzierbare Kurven mit einem einfachen Kompositionssatz.  $\square$

**Bemerkung:**

- (i).  $f(z) = 1/z$  besitzt keine Stammfunktion auf  $B_R(0)$ . (Wir werden später sehen, dass es aber eine Stammfunktion auf jeder Kugel gibt, die den Nullpunkt nicht enthält).
- (ii). Für jedes  $k \neq -1$  und jede geschlossene Kurve  $\gamma$  mit  $\text{sp } \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\int_{\gamma} z^k dz = 0,$$

denn für jedes ganzzahlige  $k \neq -1$  existiert auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Stammfunktion  $F(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$ .

- (iii). Die Funktion  $f$  sei auf dem Kreis  $B_R(z_0)$  durch eine Potenzreihe gegeben. Dann gilt

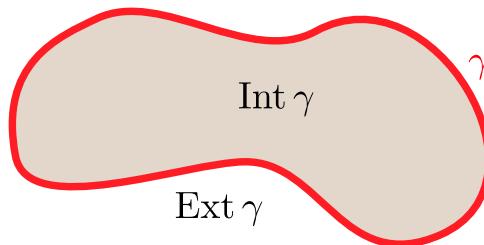
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow B_R(z_0)$ .

Dies gilt weil die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  auf ihrem Konvergenzkreis die Stammfunktion  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$  besitzt (siehe Theorem 3.8).

Für die folgenden Kapitel zitieren wir ohne Beweis das folgende intuitive Resultat.

**Satz 5.3** (Jordanscher Kurvensatz für einfache geschlossene Integrationswege). *Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein einfacher und geschlossener Integrationsweg. Dann ist  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  die disjunkte Vereinigung zweier offener zusammenhängender Mengen  $\text{Int}(\gamma)$ , das Innere von  $\gamma$ , und  $\text{Ext}(\gamma)$ , so dass  $\text{Int}(\gamma)$  beschränkt und  $\text{Ext}(\gamma)$  unbeschränkt ist.*



Mit Blick auf Satz 5.3 können wir nun noch folgende Vereinbarung treffen. Wir sagen, dass der Integrationsweg  $\gamma$  positiv orientiert ist, falls bei wachsendem  $t$ , also längs der Durchlaufrichtung,  $\text{Int}(\gamma)$  auf der linken Seite liegt. So ist zum Beispiel  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  positiv orientiert.

## 5.2 Der Cauchysche Integralsatz

**Satz 5.4.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ , gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Bemerkung:** Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Das Innere  $Int(\gamma)$  eines einfachen geschlossenen Integrationsweges ist immer einfach zusammenhängend in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung von  $f$  stetig ist, folgt der Cauchysche Integralsatz aus dem Satz von Gauß oder Stokes in der Ebene.

Es gilt nämlich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u\dot{\gamma}_1 - v\dot{\gamma}_2) dt + i \int_{\gamma} (v\dot{\gamma}_1 + u\dot{\gamma}_2) dt$$

und  $(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$  ist die Tangente an  $\partial Int(\gamma)$ , sowie  $\vec{n} = (\dot{\gamma}_2, -\dot{\gamma}_1)$  die äußere Normale an  $\partial Int(\gamma)$ , falls  $\gamma$  positiv orientiert ist. Damit gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial Int(\gamma)} (-v, -u) \cdot \vec{n} dS + i \int_{\partial Int(\gamma)} (u, -v) \cdot \vec{n} dS$$

und der Gauß'sche Satz ergibt nun

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{Int(\gamma)} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_{Int(\gamma)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

da die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nach Satz 2.1 erfüllt sind.  $\square$

Die Hauptidee für einen vollständigen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes beruht darauf, dass, wenn man ein Polynom über den Rand eines Dreiecks integriert, dieses Integral null ist, da ein Polynom eine Stammfunktion besitzt. Dann teilt man ein Dreieck in viele kleine Dreiecke auf. Die Summe der Integrale über den Rand der kleinen Dreiecke ist dasselbe wie das Integral über den Rand des großen Dreiecks, da sich die inneren Kanten doppelt durchlaufen werden, aber jeweils in anderer Richtung, so dass sich die Beiträge aufheben (vgl. Abbildung 8). Man approximiert nun  $f$  in jedem Dreieck durch ein Taylor-Polynom erster Ordnung. Man kann den Fehler, der durch diese Approximation entsteht, beliebig klein halten, indem man die Triangulierung hinreichend fein wählt. Dies ergibt den Cauchyschen Integralsatz für Dreiecke (Lemma von Goursat). Über die Konstruktion einer Stammfunktion zieht man den Beweis schließlich auf einfach zusammenhängende Gebiete hoch. Wir führen die Konstruktion hier nicht aus, sondern verweisen auf die Literatur (z.B. [3], Kapitel 3).

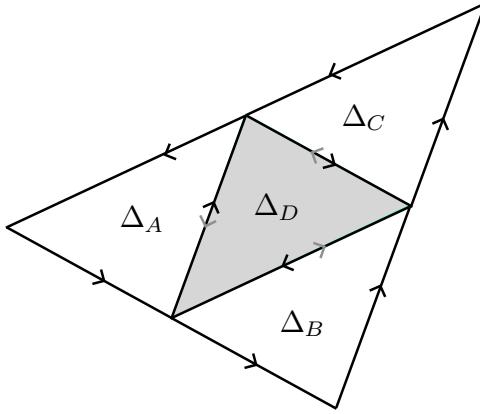


Abbildung 8: Dreieckskonstruktion

### Beispiele:

- (i). Die Voraussetzung, dass  $f$  holomorph ist, ist notwendig. Integriert man zum Beispiel die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  über den Rand des Einheitsquadrates, dann verschwindet dieses Integral nicht (vgl. Übungsaufgabe auf Blatt 3).
- (ii). Die Voraussetzung, dass  $U$  einfach zusammenhängend ist, ist notwendig: betrachte die Funktion  $f: U := \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Sei  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  eine Parametrisierung des Kreises mit Radius  $R$ . Dies ist eine geschlossene Kurve, die in  $U$  liegt, aber kein einfache zusammenhängendes Gebiet berandet. In der Tat gilt hier

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-Rit} Rie^{Rit} dt = 2\pi i \neq 0.$$

**Bemerkung:** Der Cauchysche Integralsatz lässt sich auch anders formulieren: Für jedes Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$ , dessen Rand so regulär ist, dass er durch einen Integrationsweg  $\gamma$  parametrisiert werden kann, und für Funktionen  $f$ , die in  $U$  und auf dem Rand  $\partial U$  holomorph sind, gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Ein solches Gebiet muss nicht einfach zusammenhängend sein, wenn die Orientierung von  $\gamma$  richtig gewählt wird, d.h. so, dass der Rand in derselben Orientierung durchlaufen wird. Dazu betrachten wir als Beispiel das Gebiet  $U$ , das in Abbildung 9 durch die blauen Wege eingegrenzt wird. Das Wegintegral einer holomorphen Funktion über den blauen Zyklus muss verschwinden, weil durch Einfügen des roten Wegstückes das Wegintegral über den blauen Zyklus als Wegintegral über den Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes dargestellt werden kann, wobei die Beiträge über die eingefügten Wege sich aufheben. Die Konstruktion funktioniert, da der Rand von  $U$  in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

Man kann nun das obige Beispiel des gelochten Kreises anders interpretieren. Man “approximiert” diesen durch einen Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < r < |z| < R\}$  und integriert über dessen Rand. Mit  $\gamma_R(t) := Re^{it}$  und  $-\gamma_r(t) := re^{-it}$  erhält man nach obiger Bemerkung dass  $\int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$  und daraus auch  $\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i$ ,

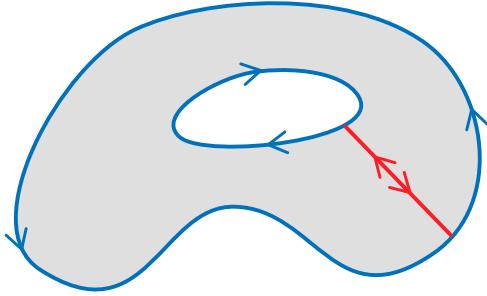


Abbildung 9: Beispiel eines nicht sternförmigen Gebietes

wobei das Ergebnis nicht von der Wahl von  $r$  abhängt, man kann also  $r$  beliebig klein wählen und so den gelochten Kreis approximieren.

Eine wichtige Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes und seinen Folgerungen ist die Berechnung von Integralen.

### Beispiele:

(i). Wir wollen für  $s \in \mathbb{R}$  die folgenden reellen Integrale

$$I_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(sx) dx \quad \text{und} \quad I_2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(sx) dx$$

berechnen. Wir definieren

$$\Phi(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + isx} dx = I_1 + iI_2$$

und es gilt

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} dx.$$

Das Integral können wir als komplexes Integral der Funktion  $e^{-\frac{z^2}{2}}$  längs der Kurve  $\gamma(t) := t - is$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , auffassen. Zudem ist  $\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$  bekannt. Wir versuchen nun, mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes  $\Phi(s)$  durch  $\Phi(0)$  auszudrücken. Dazu wählen wir als Integrationsweg den Rand des Rechtecks  $R_n$  mit Eckpunkten  $(-n, 0), (n, 0), (-n, -s), (n, -s)$  (vgl. Abbildung 10, dessen Rand wir in mathematisch positiver Richtung durchlaufen. Aus Satz 5.4, dass  $\int_{\partial R_n} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$ . Es sei nun oBdA  $s < 0$ , und wir schreiben

$$0 = \int_{\partial R_n} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-n}^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{+n}^{-n} e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} dx + \int_{-s}^0 e^{-\frac{(-n+iy)^2}{2}} dy + \int_0^{-s} e^{-\frac{(n+iy)^2}{2}} dy.$$

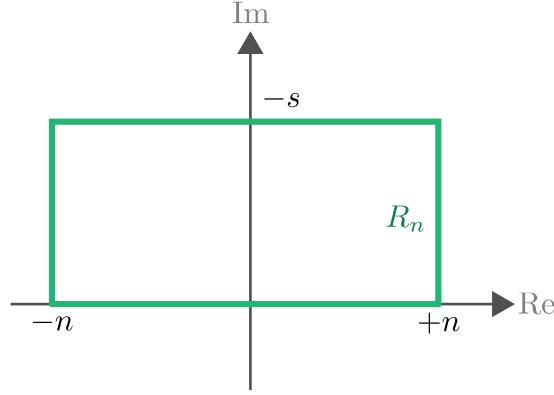


Abbildung 10: Rechteck  $R_n$

Durch das schnelle Abfallen von  $e^{-z^2}$  für  $\operatorname{Re}(z) \rightarrow \pm\infty$ , erwarten wir, dass die vertikalen Seiten des Rechtecks im Limes  $n \rightarrow \infty$  keinen Beitrag liefern. In der Tat gilt wegen

$$\left| e^{-\frac{(n+iy)^2}{2}} \right| = \left| e^{\frac{1}{2}(-n^2-2niy+y^2)} \right| = e^{\frac{-n^2+y^2}{2}}$$

dass

$$\left| \int_0^{-s} e^{-\frac{(n+iy)^2}{2}} dy \right| \leq \int_0^{-s} \left| e^{-\frac{(n+iy)^2}{2}} \right| dy \leq |s| e^{\frac{-n^2+|s|^2}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Ebenso finden wir

$$\left| \int_{-s}^{0} e^{-\frac{(-n+iy)^2}{2}} dy \right| \leq \int_0^{-s} \left| e^{-\frac{(-n+iy)^2}{2}} \right| dy \leq |s| e^{\frac{-n^2+|s|^2}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

und es gilt  $\Phi(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$  und  $I_1 = e^{-\frac{s^2}{2}}$ , sowie  $I_2 = 0$ .

(ii). Wir möchten zeigen, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dazu integrieren wir die Funktion  $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$  über den Rand des eingestanzten Halbkreises, parametrisiert durch  $\gamma_{R,\varepsilon}$  (siehe Abbildung 11).

Der Cauchysche Integralsatz ergibt mit  $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  und  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , dass

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz + \int_\varepsilon^R \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = 0.$$

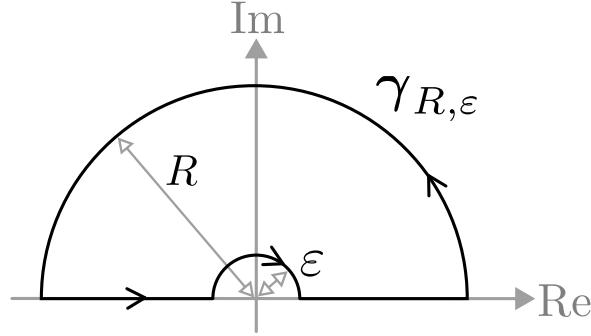


Abbildung 11: Eingestanzter Halbkreis

Da

$$\left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| \leq \frac{2}{|z|^2}$$

gilt, erhalten wir mit der Standardabschätzung für Wegintegrale, dass  $\int_{\gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ . Außerdem gilt  $f(z) = \frac{-iz}{z^2} + \Phi(z)$  mit beschränktem  $\Phi$  für  $z \rightarrow 0$ , so dass

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} -\frac{i}{z} dz + O(\varepsilon) = \pi + O(\varepsilon) \rightarrow \pi$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Insgesamt folgt mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$ , und nachdem wir den Realteil genommen haben, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \pi$ . Da der Integrand gerade ist, erhalten wir die gewünschte Aussage.

### 5.3 Die Cauchysche Integralformel

**Satz 5.5** (Cauchy-Formel, Version 1). *Sei  $\gamma$  ein einfacher, geschlossener und positiv orientierter Integrationsweg, sowie  $f$  holomorph in  $\text{Int}(\gamma)$  und auf  $\gamma$ . Dann gilt für alle  $\zeta \in \text{Int}(\gamma)$*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

*Beweis.* Für gegebenes  $\zeta \in \text{Int}(\gamma)$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(\zeta) \subset \text{Int}(\gamma)$ . Damit folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz 5.4 mit  $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , und dem folgenden Integrationsweg, der als schwarze Kurve in Abbildung 12 eingezeichnet ist, dass

dass

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (5.2)$$

Weiterhin gilt, da  $f(\zeta)$  konstant (als Funktion von  $z$ ) ist,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - \zeta} dz = 2\pi i f(\zeta).$$

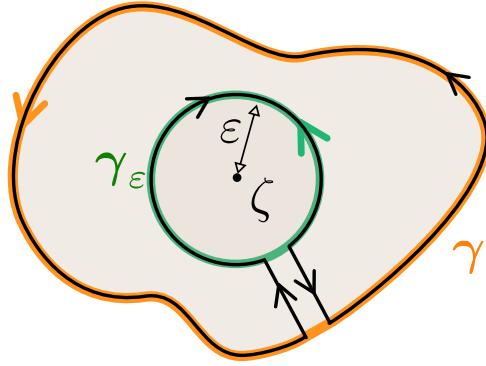


Abbildung 12: Integrationsweg für Cauchysche Integralformel

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - f(\zeta) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + \varepsilon e^{it}) - f(\zeta)}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt \right| \\
&\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(\zeta + \varepsilon e^{it}) - f(\zeta)| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da  $f$  insbesondere stetig ist. Somit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Die in obigem Beweis verwendete Strategie, die (5.2) ergibt, ist oft nützlich und wir formulieren sie deshalb noch einmal separat: Ist  $\gamma$  ein positiv orientierter Integrationsweg,  $\bar{B}_r(z_0) \subset \text{Int}(\gamma)$  und  $f$  eine Funktion die holomorph auf  $\gamma$  und in  $\text{Int}(\gamma) \setminus \{z_0\}$  ist. Dann gilt die auch als Deformationstheorem bekannte Identität

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz, \quad (5.3)$$

wobei mit der etwas saloppen Schreibweise  $\int_{\partial B_r(z_0)}$  gemeint ist, dass die Kreislinie  $\partial B_r(z_0)$  genau einmal in positiver Richtung durchlaufen wird. Wir verwenden diese Notation von nun an ohne weitere Erläuterung.

**Korollar 5.6** (Cauchy-Formel, Version 2). *Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

für jedes  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\bar{B}_r(\zeta) \subset U$ .

**Beispiel:** Nach Korollar 5.6 gilt

$$\int_{\partial B_1(i)} \frac{z^2}{z^2 + 1} dz = \int_{\partial B_1(i)} \frac{z^2}{(z + i)(z - i)} dz = 2\pi i \frac{z^2}{z + i}_{|z=i} = -\pi.$$

**Satz 5.7** (Holomorphe Funktionen sind analytisch (Taylors Theorem)). *Jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  kann lokal als Potenzreihe dargestellt werden. Genauer gesagt, für jedes  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\overline{B}_r(\zeta) \subset U$  gilt die Reihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k \quad \text{für alle } z \in B_r(\zeta),$$

wobei die Koeffizienten die verallgemeinerte Cauchy-Formel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z} \quad (5.4)$$

erfüllen. Insbesondere ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (bzgl. des Arguments  $z$ ) nicht kleiner als  $r$ .

*Beweis.* Wir fixieren  $\zeta$  und  $r$  wie angegeben und betrachten einen beliebigen Punkt  $z \in B_r(\zeta)$ . Die Cauchysche Integralformel 5.5 impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z}$$

und außerdem gilt

$$\frac{1}{\tilde{z} - z} = \frac{1}{(\tilde{z} - \zeta) - (z - \zeta)} = \frac{1}{\tilde{z} - \zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta}} = \frac{1}{\tilde{z} - \zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k.$$

Wir bemerken nun, dass die Reihe auf der rechten Seite wegen

$$\left| \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right| = \frac{|z - \zeta|}{r} < 1$$

als Funktion in  $\tilde{z} \in \partial B_r(\zeta)$  gleichmäßig konvergiert. Insbesondere gilt für die Reihenreste

$$\left| \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - \zeta} \sum_{k=K}^{\infty} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k d\tilde{z} \right| \leq C \sum_{k=K}^{\infty} \left( \frac{|z - \zeta|}{r} \right)^k \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

und wir können daher die Reihenbildung bzgl.  $k \in \mathbb{N}$  und die Wegintegration bzgl.  $\tilde{z}$  miteinander vertauschen. Mit anderen Worten: Es gilt

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - \zeta} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k d\tilde{z} = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

für jedes  $z \in B_r(\zeta)$ . □

**Korollar 5.8** (Holomorphe Funktionen sind unendlich glatt). *Jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt unendlich viele Ableitungen (im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit) und es gilt*

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z} = k! \alpha_k$$

für alle  $\zeta \in U$  und alle  $r > 0$  mit  $\overline{B}_r(\zeta) \subset U$ , wobei die  $\alpha_k$  wie in (5.4) gegeben sind.

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 5.7 und den Eigenschaften von Potenzreihen (siehe Satz 3.8 sowie die anschließende Bemerkung).  $\square$

**Beispiele:**

(i).

$$\int_{\partial B_1(0)} e^z z^{-3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} e^z|_{z=0} = \pi i.$$

(ii).

$$\int_{\partial B_{\frac{5}{2}}(-1)} \frac{1}{(z-4)(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \frac{1}{(z-4)}|_{z=-1} = -\frac{2\pi i}{5^4}.$$

## 5.4 Stammfunktion

**Satz 5.9** (Morera). *Es sei  $f$  stetig auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und es gelte für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\gamma$  in  $G$ , dass*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dann ist  $f$  holomorph in  $G$ .

*Beweis.* Für einen Punkt  $z_0 \in G$  und  $z \in G$  definieren wir  $F(z) := \int_{z_0}^z f(w) dw$ , wobei damit das Integral über irgendeinen Integrationsweg in  $G$  gemeint ist, der  $z_0$  und  $z$  verbindet. Nach der Voraussetzung hängt  $F(z)$  nicht vom Integrationsweg ab und somit ist  $F$  wohldefiniert.

Für jedes  $z \in G$  existiert  $B_\varepsilon(z) \subset G$ , da  $G$  offen ist. Für jedes  $w \in B_\varepsilon(z)$  mit  $w \neq z$  bezeichnen wir mit  $[z, w]$  das gerade Verbindungsstück von  $z$  zu  $w$ . Dann gilt

$$F(w) = \int_{z_0}^w f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta$$

so dass

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

und somit

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \leq \max_{\zeta \in B_\varepsilon(z)} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Damit gilt  $F'(z) = f(z)$  für jedes  $z \in G$ . Also ist  $F$  holomorph und somit auch  $f$  holomorph auf  $G$ .

□

**Korollar 5.10.** Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Falls  $f$  stetig in  $G$  ist und für jeden Integrationsweg  $\gamma$  in  $G$  gilt, dass  $\int_\gamma f(z) dz$  nur von den Endpunkten von  $\gamma$  abhängt, dann existiert eine holomorphe Funktion  $F$  auf  $G$ , mit  $F' = f$  auf  $G$ .

Insbesondere, falls  $f$  holomorph auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  ist, dann existiert eine Stammfunktion zu  $f$ , d.h. es existiert eine holomorphe Funktion  $F$  auf  $G$ , mit  $F' = f$  auf  $G$ .

**Beispiel:**  $f(z) = \frac{1}{z}$  hat keine Stammfunktion auf  $B_r(0) \setminus \{0\}$ , aber auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$ , das die Null nicht enthält ist ein Zweig des Logarithmus Stammfunktion von  $f$ .

Dies sieht man folgendermaßen ein: sei  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Mit der Kettenregel erhält man  $\frac{d}{dz}(ze^{-F(z)}) = e^{-F(z)} - zf(z)e^{-F(z)} = 0$ , also ist  $ze^{-F(z)} = C$  für eine Konstante  $C$ . Da  $F$  nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, kann man annehmen, dass  $C = 1$  gilt. Ist  $G$  eine weitere solche Funktion, folgt  $e^{F(z)-G(z)} = 1$ , also wiederum nach Differentiation  $F - G = C_2$  für eine weitere Konstante  $C_2$ . Da  $e^{C_2} = 1$ , gilt  $C_2 = 2\pi i k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , also ist  $F$  bis auf Vielfache von  $2\pi i$  eindeutig bestimmt. Zum Beispiel ist für  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  der Hauptwert des Logarithmus solch eine Stammfunktion.

**Bemerkung:** Dass der Logarithmus, wie in Kapitel 4.3 eingeführt, in seinem Definitionsbereich holomorph ist und die Ableitung  $1/z$  ist, folgt aus dem folgenden Satz über die Umkehrabbildung, den wir hier nicht beweisen. Die Formel für die Ableitung wurde auf dem Präsenzblatt 3 besprochen.

**Satz 5.11.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und bijektiv auf  $U$ . Dann ist  $f(U)$  offen,  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ ,  $f^{-1}$  ist holomorph auf  $f(U)$  und es gilt  $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ .

## 5.5 Die Cauchysche Ungleichung

**Proposition 5.12** (Cauchy-Ungleichung). Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$|f^{(k)}(\zeta)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{z \in \partial B_r(\zeta)} |f(z)|$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , alle  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\overline{B}_r(\zeta) \subset U$ .

*Beweis.* Nach Korollar 5.8 und der Standardabschätzung für Wegintegrale gilt

$$|f^{(k)}(\zeta)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(\zeta)} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} L(\partial B_r(\zeta)) \max_{z \in \partial B_r(\zeta)} \frac{|f(z)|}{|z - \zeta|^{k+1}}$$

und die Behauptung folgt sofort.  $\square$

Eine wichtige Konsequenz ist der folgende Satz.

**Lemma 5.13** (Satz von Liouville). *Jede holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist entweder konstant oder unbeschränkt.*

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit

$$M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty.$$

Die Cauchysche Ungleichung bzgl.  $B_r(z)$  liefert dann

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gilt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und damit auch

$$f(\zeta) = f(0) + \int_{[0, \zeta]} f'(z) dz = f(0)$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Korollar 5.14** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe, nicht-konstante Polynom hat mindestens eine Nullstelle.*

*Beweis.* Sei  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  mit  $a_i \neq 0$  für ein  $i \geq 1$ . Es gilt  $|P(z)| \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Nehmen wir an, dass  $P(z)$  keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  besitzt, dann ist  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  eine holomorphe Funktion mit  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Also ist  $f$  beschränkt auf  $\mathbb{C}$  und nach dem Satz von Liouville konstant, was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

## 5.6 Nullstellensatz und Identitätssatz

**Lemma 5.15** (Charakterisierung einer Nullstelle). *Für eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i).  $f$  besitzt in  $z_0 \in U$  eine Nullstelle der Ordnung  $K$ , d.h. es gilt

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(K-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(K)}(z_0) \neq 0.$$

(ii). Die ersten  $K$  Taylor-Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}$  von  $f$  verschwinden in  $z_0$ , d.h.

$$f(z) = \alpha_K(z - z_0)^K + \alpha_{K+1}(z - z_0)^{K+1} \dots, \quad \alpha_K \neq 0$$

gilt auf einer Kreisscheibe  $B_r(z_0) \subset U$  um  $z_0$ .

(iii). Die Funktion  $g$  mit  $g(z) = f(z)/(z - z_0)^K$  ist holomorph auf einer Kreisscheibe um  $z_0$  und erfüllt  $g(z_0) \neq 0$ .

*Beweis.* Die Aussagen folgen leicht aus Satz 5.7 und Korollar 5.8.  $\square$

**Satz 5.16** (Identitätssatz für eine Kugel). *Die Funktion  $f$  sei holomorph in  $B_r(z_0)$  für ein  $r > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $f(z_0) = 0$ . Dann gilt entweder  $f \equiv 0$  in  $B_r(z_0)$  oder die Nullstelle  $z_0$  von  $f$  ist isoliert, d.h. es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass in  $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  keine Nullstelle von  $f$  liegt.*

*Beweis.* Satz 5.7 impliziert, dass wir  $f$  in  $B_r(z_0)$  schreiben können als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k.$$

Falls  $\alpha_k = 0$  für alle  $k = 1, 2, \dots$ , dann gilt  $f \equiv 0$  in  $B_r(z_0)$ . Ansonsten existiert eine kleinste Zahl  $m \geq 0$  mit  $\alpha_m \neq 0$  und  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  und  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+m} (z - z_0)^k$ . Der Konvergenzradius von  $g$  ist mindestens  $r$ , damit ist  $g$  stetig in  $B_r(z_0)$ . Da  $g(z_0) = \alpha_m \neq 0$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $g(z) \neq 0$  in  $B_\varepsilon(z_0)$ . Also gibt es keine Nullstelle von  $f$  in  $B_\varepsilon(z_0)$  und die Nullstelle  $z_0$  ist isoliert.  $\square$

Mit einem topologischen Argument, das wir hier nicht ausführen, erhält man die allgemeine Version des Identitätssatzes.

**Satz 5.17** (Identitätssatz). *Es seien  $f$  und  $g$  zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet  $U$ . Es gebe  $z_0 \in U$  und eine Folge  $(z_n)$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ , aber  $z_n \neq z_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $f(z_n) = g(z_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f = g$  auf  $U$ .*

**Beispiele:**

- (i).  $f$  sei holomorph auf  $\mathbb{C}$  und  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ . Da  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  und  $f$  holomorph in 0 ist, folgt nach dem Identitätssatz  $f(z) = \sin z$  auf  $\mathbb{C}$ .
- (ii).  $f$  sei holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und es gelte  $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin n\pi = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Allerdings folgt nun nicht, dass  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist, da der Häufungspunkt der Folge  $\frac{1}{n\pi}$ , nämlich der Nullpunkt, nicht in dem Gebiet liegt, in dem  $f$  holomorph ist. In der Tat erfüllt hier die Nullfunktion auch die Bedingung.

- (iii). Es gibt keine holomorphe Funktion  $f$  auf  $B_1(0)$  mit  $f(x) = |x|^3$  für  $x \in (-1, 1)$ . Der Nullpunkt ist Häufungspunkt sowohl von  $[0, 1)$  als auch von  $(-1, 0]$ . Falls  $f(z) = z^3$  auf  $[0, 1)$ , dann folgt  $f(z) = z^3$  in  $B_1(0)$ . Andererseits folgt aus  $f(z) = -z^3$  auf  $(-1, 0]$  dass  $f(z) = -z^3$  in  $B_1(0)$  ist, ein Widerspruch.
- (iv). Der Identitätssatz erlaubt auch, den Gültigkeitsbereich gewisser Funktionalgleichungen auszuweiten. Zum Beispiel gilt  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$  auf  $\mathbb{R}$ . Da  $\cos^2 z$  und  $\sin^2 z$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  sind, folgt aus dem Identitätssatz, dass die Gleichung auch auf ganz  $\mathbb{C}$  gilt.

Eine weitere wichtige Anwendung des Identitätssatzes ist die analytische Fortsetzung von Funktionen. Hier möchte man eine gegebene in einem Gebiet  $U$  holomorphe Funktion  $f$  auf ein Gebiet  $V$  mit  $U \subset V$  fortsetzen, so dass  $f$  auch auf  $V$  holomorph ist. Falls eine solche Fortsetzung existiert, so ist sie notwendigerweise, nach dem Identitätssatz eindeutig. Eine Möglichkeit, eine solche Fortsetzung zu konstruieren, ist die folgende. Es sei eine Funktion  $f$  durch  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$  in  $B_r(a)$  gegeben. Für ein  $b \in B_r(a) \setminus \{a\}$  ist  $f$  durch die Taylorreihe  $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (z-b)^k$  gegeben, die in  $B_{r-|b-a|}(b)$  konvergiert. Jedoch kann diese Entwicklung auch in einer größeren Kreisscheibe  $B$  konvergieren. Setzen wir dann

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & : z \in B_r(a) \\ f_1(z) & : z \in B \end{cases}$$

dann erhalten wir eine holomorphe Funktion  $g$  in  $B_r(a) \cup B$ .

**Beispiel:** Die Funktion  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2}{2-z}$  definiert in  $B_2(0)$  eine holomorphe Funktion. Wir wollen nun um  $z = i$  entwickeln. Dazu berechnen wir  $f^{(k)}(i) = k! \frac{2}{(2-i)^{k+1}}$ . Die Reihe  $f_z(z) \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{(z-i)^k}{(2-i)^{k+1}}$  konvergiert für  $|z-i| < |2-i| = \sqrt{5}$  und liefert eine analytische Fortsetzung von  $f$  in  $B_{\sqrt{5}}(i)$ . Wir können dann wieder in einem anderen Punkt in  $B_{\sqrt{5}}(i)$  entwickeln und versuchen, die Prozedur immer weiter fortzusetzen.

## 6 Singularitäten und Residuen

### 6.1 Laurent-Reihen

Wir hatten gesehen, dass jede holomorphe Funktion lokal durch eine absolut konvergente Taylorreihe dargestellt werden kann, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - z_0)^{k+1}} d\tilde{z}.$$

Allerdings haben wir oft mit Funktionen zu tun, die zum Beispiel in isolierten Punkten nicht holomorph sind. Für solche Funktionen ist Laurents Therorem einen Ersatz zu Taylors Theorem.

Wir betrachten zuerst noch einmal folgendes Beispiel: für  $|z| < 1$  können wir  $\frac{1}{1-z}$  um den Nullpunkt entwickeln:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Für  $|z| > 1$  divergiert die geometrische Reihe, allerdings können wir für  $|z| > 1$  folgendermaßen entwickeln:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n.$$

Ähnlich wie in diesem Beispiel kann man eine Darstellung einer holomorphen Funktion auf einem Kreisring

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$$

finden. Wir werden zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} (z - z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} \quad (6.1)$$

gibt. Eine solche Reihendarstellung nennt man Laurent-Reihe.

**Satz 6.1.** [Laurents Theorem] Sei  $f$  im Kreisring  $A_{r,R}(z_0)$  holomorph. Dann gilt

- (i).  $f(z)$  lässt sich für alle  $z \in A_{r,R}(z_0)$  als Laurent-Reihe darstellen.
- (ii). Beide Reihen, Haupt- und Nebenteil, konvergieren absolut in  $A_{r,R}(z_0)$  und lokal gleichmäßig, d.h. in jedem  $\overline{A}_{r_1,r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2 < R\}$ .
- (iii). Die Koeffizienten der Laurent-Reihe  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sind eindeutig bestimmt durch

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z}, r < \rho < R. \quad (6.2)$$

*Beweis.* OBdA sei  $z_0 = 0$ . Weiterhin sei nun  $z \in A_{r,R}(0)$  und  $r < R_1 < R_2 < R$  mit  $R_1 < |z| < R_2$  und wir integrieren entlang des folgenden Weges  $\gamma$ .

Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel, Satz 5.5, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

woraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_2}(0)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_1}(0)} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

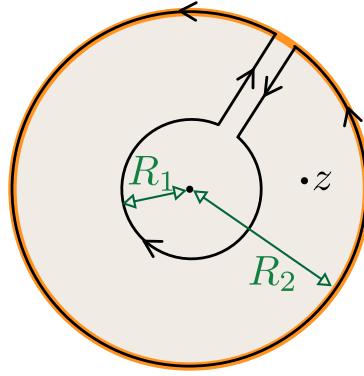


Abbildung 13: Integrationsweg für die Laurent-Entwicklung

Nun gilt auf  $\partial B_{R_2}(0)$ , dass  $|z| < |\eta|$ , sowie auf  $\partial B_{R_1}(0)$ , dass  $|\eta| < |z|$ . Wir können also folgendermaßen entwickeln

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_2}(0)} \frac{f(\eta)}{\eta \left(1 - \frac{z}{\eta}\right)} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_1}(0)} \frac{f(\eta)}{z \left(1 - \frac{\eta}{z}\right)} d\eta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_2}(0)} \frac{f(\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\eta}\right)^k d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R_1}(0)} \frac{f(\eta)}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{z}\right)^k d\eta \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k \frac{1}{z^k}.
 \end{aligned}$$

Weiterhin wissen wir aus (5.3), dass wir die Integrale über  $\partial B_{R_1}(0)$  und  $\partial B_{R_2}(0)$  für beliebiges  $\rho \in (r, R)$  durch Integrale über  $\partial B_\rho(0)$  ersetzen können. Sei nun  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ . Dann gilt mit  $r < \rho < R$ , dass

$$\begin{aligned}
 2\pi i b_k &= \int_{\partial B_\rho(0)} f(w) w^{-(k+1)} dw \\
 &= \int_{\partial B_\rho(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^{n-(k+1)} dw \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\partial B_\rho(0)} w^{n-(k+1)} dw = 2\pi i c_k
 \end{aligned}$$

und damit gilt die Eindeutigkeit der Koeffizienten.  $\square$

Im folgenden berechnen wir die Laurent-Reihe für einige Beispiele. Generell ist es hierbei wichtig, wann immer möglich, auf bekannte Entwicklungen zurückzugreifen, da eine Berechnung mittels der Integralformel mühsam bis hin zu unmöglich ist.

## Beispiele:

(i). Wir berechnen die Laurent-Reihe für  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{1}{z-1} \right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(z-1)^k}.$$

(ii). Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$  ist holomorph in  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Entsprechend können wir um den Nullpunkt folgendermaßen entwickeln:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad 0 < |z| < 1 \\ f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}}, \quad 1 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

Man kann nun aber auch um  $z_0 = -1$  entwickeln. Dazu beobachten wir, dass  $f$  holomorph in  $B_1(z_0)$  ist, hier erwarten wir also keinen Hauptteil. In der Tat, mit  $z+1 = w$ , berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1} = \frac{1}{1-w} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{w}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{w}{2} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{-(k+1)}) w^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2^{-(k+1)}) (z+1)^k \quad \text{für } |z+1| < 1. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist auch holomorph im Kreisring  $A_{1,2}(-1)$  und hier erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1} &= -\frac{1}{w} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{w}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\frac{w}{2}} \right) = -\frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{w} \right)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{w}{2} \right)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (z+1)^k. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Eine Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$  kann auf dem Kreisring  $A_{r,R}(z_0)$  geschrieben werden als  $f(z) = g(\frac{1}{z-z_0}) + h(z - z_0)$  mit den Potenzreihen

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} y^k \quad \text{und} \quad h(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k.$$

Die Konvergenzradien dieser Reihen können nach dem Cauchy-Hadamard Kriterium geschrieben werden als

$$R_g = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |\alpha_{-k}|^{1/k}} \quad \text{und} \quad R_h = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k|^{1/k}},$$

d.h. die Reihen konvergieren für  $|y| = |z - z_0|^{-1} < R_g$  und  $|z - z_0| < R_h$ . Daraus folgt, dass der maximale Konvergenzring  $A_{r,R}(z_0)$  der Laurent-Reihe durch  $r = \frac{1}{R_g}$  und  $R = R_h$  gegeben ist.

**Beispiel:** Für die Laurent-Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2-i)^k}{2^{|k|}}$  erhalten wir  $r = \limsup_{k \rightarrow \infty} |2^{-k}|^{1/k} = \frac{1}{2}$  und  $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |2^{-k}|^{1/k}} = 2$ .

## 6.2 Isolierte Singularitäten

**Definition 6.2.** Eine Funktion  $f$  hat in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität, falls  $f$  in einem Kreisring  $A_{0,r}(z_0)$  für ein  $r > 0$  definiert ist, aber nicht im Punkt  $z_0$ .

### Beispiele

- (i).  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  besitzt in  $z_0 = 0$  eine isolierte Singularität.
- (ii).  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  besitzt in  $z_0 = \pm i$  isolierte Singularitäten
- (iii).  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$  besitzt in  $z_0 = 1$  eine isolierte Singularität.
- (iv).  $f(z) = \ln z$  hat in  $z_0 = 0$  keine isolierte Singularität.

**Bemerkung:** Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $f$  holomorph in  $A_{0,r}(z_0)$ , d.h.  $f$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0$ , dann kann man  $f$  in  $A_{0,r}(z_0)$  in eine Laurent-Reihe um  $z_0$  entwickeln.

Wir unterscheiden drei Typen von Singularitäten:

**Definition 6.3.** Die in  $A_{0,r}(z_0)$  holomorphe Funktion  $f$  besitze in  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität. Dann heißt  $z_0$

- (i). hebbare Singularität, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ , verschwinden.
- (ii). ein Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ , falls in der Laurent-Reihe nur endliche viele Koeffizienten  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ , nicht verschwinden und  $m$  die größte Zahl ist, mit  $b_{-m} \neq 0$ .
- (iii). eine wesentliche Singularität, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k < 0$ , nicht verschwinden.

**Bemerkung:** Aus der Definition eines Pols ergibt sich direkt Folgendes: falls die Funktion  $f$  in  $A_{0,r}(z_0)$  holomorph ist, dann hat  $f$  in  $z_0$  genau dann einen Pol der Ordnung  $m$ , falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_0 \quad \text{für eine Konstante } c_0 \neq 0. \quad (6.3)$$

### Beispiele:

- (i).  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  hat in  $z_0 = 0$  eine hebbare Singularität:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

(ii).  $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$  hat in  $z_0 = i$  und in  $z_0 = -i$  einen Pol erster Ordnung.

Dies sieht man, z.B. für  $z_0 = i$ , über die Rechnung

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \left( -\frac{z-i}{2i} \right)} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{z-i}{2i} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}} (z-i)^k$$

für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\left| \frac{z-i}{2i} \right| < 1$ , d.h. für  $|z-i| < 2$ . Daher gilt

$$f(z) = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+2}} (z-i)^k \quad \text{für } 0 < |z-i| < 2.$$

(iii).  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$  hat in  $z_0 = 1$  eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(z-1)^k}, \quad \text{für } 0 < |z-1| < \infty.$$

**Bemerkung:** Eine Funktion, die in einem Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$  außer an isolierten Polstellen holomorph ist, nennt man meromorph.

**Satz 6.4.** Sei  $f$  holomorph auf  $A_{0,r}(z_0)$  und sei  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ . Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =: c_0$ . Definiert man  $\tilde{f}(z) = f(z)$  für  $z \neq z_0$  und  $\tilde{f}(z) = c_0$ , dann ist  $\tilde{f}$  in  $B_r(z_0)$  holomorph.

*Beweis.* Es gilt nach Definition  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$  in  $A_{0,r}(z_0)$ . Damit gilt  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b_0 = c_0$  und man erhält die Existenz von  $\tilde{f}'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)}{z - z_0}$ .  $\square$

**Satz 6.5** (Satz von Riemann). Es sei  $f$  holomorph in  $A_{0,r}(z_0)$  und besitze in  $z_0$  eine isolierte Singularität. Ist  $f$  in  $A_{0,r}(z_0)$  für ein  $r > 0$  beschränkt, so ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ .

*Beweis.* Sei  $M = \sup_{z \in A_{0,r}(z_0)} |f(z)| < \infty$ . Weiterhin hat  $f$  die Laurent-Darstellung  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ . Dann sieht man, dass für alle  $\rho \in (0, r)$  und  $k < 0$  gilt

$$\begin{aligned} |b_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it}) \rho i e^{it}}{(\rho e^{it})^{k+1}} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it}) i}{\rho^k e^{itk}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^k} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq M \frac{1}{\rho^k} = M \rho^{|k|}. \end{aligned}$$

Da dies für alle  $\rho > 0$  gilt, folgt  $b_k = 0$  für alle  $k < 0$ .  $\square$

**Korollar 6.6.** Ist eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  nicht hebbbar, so ist  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $z_0$  nicht beschränkt.

Aus Satz 5.15 und (6.3) erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen Nullstellen von  $f$  und Polen von  $\frac{1}{f}$ .

**Satz 6.7.** Es sei  $f$  holomorph in  $B_r(z_0)$  für ein  $r > 0$  und nicht konstant. Dann hat  $f$  genau dann eine Nullstelle der Ordnung  $m$  in  $z_0$  falls  $\frac{1}{f}$  einen Pol der Ordnung  $m$  in  $z_0$  hat.

Ähnlich zu in Aufgabe 1 von Übungsblatt 5 ergeben sich zudem folgende Regeln.

**Lemma 6.8.** Die Funktion  $f$  habe einen Pol der Ordnung  $m$  in  $z_0$ .

Es sei  $g$  holomorph in  $B_r(z_0)$  für ein  $r > 0$ . Dann hat die Funktion  $gf$  in  $z_0$

(i). einen Pol der Ordnung  $m$ , falls  $g(z_0) \neq 0$ ,

(ii). einen Pol der Ordnung  $m - n$ , falls  $g$  eine Nullstelle der Ordnung  $n < m$  in  $z_0$  hat,

(iii). eine hebbare Singularität, falls  $g$  eine Nullstelle der Ordnung  $n \geq m$  hat.

Falls  $g$  einen Pol der Ordnung  $n$  in  $z_0$  hat, dann hat  $fg$  einen Pol der Ordnung  $m + n$  in  $z_0$ .

### 6.3 Der Residuensatz

Der zentrale Begriff für das Hauptresultat dieses Abschnittes ist der folgende.

**Definition 6.9** (Residuum). Seien  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann wird

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz \quad (6.4)$$

das Residuum von  $f$  in  $z_0$  genannt, wobei der Radius  $r > 0$  so klein gewählt werden muss, dass die punktierte abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$ .

**Bemerkung:**

- (i). Der Wert des Residuums in (6.4) hängt nicht von der Wahl des Radius  $r$  ab (solange  $\overline{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\} \in U$  gilt, d.h. solange  $\overline{B}_r(z_0)$  neben  $z_0$  keine weiteren Löcher des Definitionsbereiches  $U$  enthält).

(ii). Ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$$

die lokale Laurent-Entwicklung von  $f$  in  $A_{0,r}(z_0)$ , dann gilt

$$b_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Es gilt also insbesondere  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$  für jede hebbare Singularität  $z_0$ .

**Beispiel:** Die Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4}$  hat einen Pol der Ordnung 4 in  $z = 0$ . Da

$$\frac{e^{iz}}{z^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} z^{k-4}$$

erhalten wir  $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{(i)^3}{3!} = -\frac{i}{6}$ .

Die Berechnung des Residuums über die Laurent-Reihe ist oft mühsam – wir werden im folgenden Kapitel noch weitere Methoden der Residuenberechnung kennenlernen.

Das folgende Resultat kann als Hauptsatz dieses Kapitels sowie als eine der zentralen Aussagen der gesamten Komplexen Analysis betrachtet werden.

**Satz 6.10** (Residuensatz). *Sei  $U$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f$  bis auf isolierte Singularitäten in  $U$  holomorph. Weiter sei  $\gamma$  ein einfacher geschlossener positiv orientierter Integrationsweg in  $U$ , der endlich viele Singularitäten  $z_1, z_2, \dots, z_N$  von  $f$  umschließt, aber selbst keine Singularität enthält.*

Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (6.5)$$

*Beweis.* OBdA nehmen wir  $N = 2$  an. Wir betrachten den Integrationsweg in Abbildung 14.

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial B_{\rho_1}(z_1)} f(z) dz - \int_{\partial B_{\rho_2}(z_2)} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) - 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2). \end{aligned}$$

□

**Beispiel:** Für  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4}$  gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) dz = 2\pi i \left( -\frac{i}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

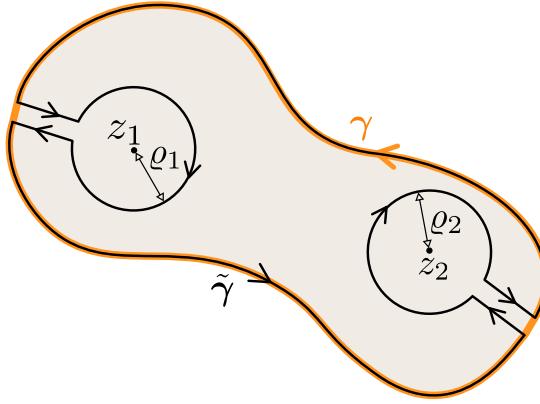


Abbildung 14: Integrationsweg

## 6.4 Methoden der Residuenberechnung

- (i). In einem einfachen Pol gilt  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ . [Dies folgt aus der Laurent-Darstellung.]

**Beispiel:** Die Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(iz)}{z^2 + 1}$$

besitzt wegen  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$  in  $\pm i$  jeweils eine Pol der Ordnung +1. Damit gilt, z.B

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\exp(iz)}{z + i} = -\frac{1}{2}e^{-1}i.$$

Ebenso erhält man  $\text{Res}(f, -i) = \frac{1}{2}e^i$ .

- (ii). Falls  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  mit holomorphen Funktionen  $g$  und  $h$  in der Umgebung eines Punktes  $z_0$ , mit  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0$ , dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

und damit  $\text{Res}(g/h, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ .

**Beispiel:** Die Kotangensfunktion

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

besitzt in jedem Punkt  $z_0 \in \pi\mathbb{Z}$  jeweils einen Pol der Ordnung 1 und es gilt

$$\text{Res}(\cot, m\pi) = \lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = 1.$$

(iii). Das Residuum in einem Pol der Ordnung  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , berechnet sich via

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} [(z - z_0)^m f(z)] \right). \quad (6.6)$$

Dies folgt aus der Entwicklung

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k}_{=: \Phi(z)}$$

mit einer Funktion  $\Phi$ , die holomorph in einer Umgebung von  $z_0$  ist. Deswegen gilt

$$(z - z_0)^m f(z) = b_{-m} + b_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + b_{-1}(z - z_0)^{m-1} + (z - z_0)^m \Phi(z)$$

und wir erhalten

$$\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} (f(z)(z - z_0)^m) = (m-1)! b_{-1} + \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \Phi(z)),$$

woraus die Behauptung folgt.

**Beispiel:** Die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$$

hat bei  $z = 1$  eine Polstelle der Ordnung 3 und bei  $z = -1$  einen Pol der Ordnung 1. So können wir

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z^2(z-1)^3}{(z-1)^3(z+1)} \right)'' = \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{z+1} \right)''|_{z=1} = \frac{1}{8}$$

berechnen und es gilt

$$\int_{\partial B_1(1)} f(z) dz = \frac{\pi i}{4}.$$

Außerdem erhalten wir

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{8}.$$

(iv). Wie bei der Berechnung der Laurent-Reihen kann es manchmal auch am einfachsten sein, die entsprechenden Terme in Taylor-Reihen zu entwickeln. Zum Beispiel hat  $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$  in  $z_0 = 0$  einen Pol dritter Ordnung. Wir berechnen

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^2(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5))} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4))} = \frac{1}{z^3} \left( 1 + \frac{z^2}{6} + O(z^4) \right)$$

und lesen ab, dass  $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}$ .

Weiter hat  $f(z)$  in  $z_k = k\pi$  Pole erster Ordnung und es gilt

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{z^2 \sin z} = \frac{1}{(k\pi)^2 \cos k\pi} = \frac{(-1)^k}{(\pi k)^2}.$$

## 6.5 Residuensatz und reelle Integrale

Eine sehr nützliche Anwendung des Residuentheorems ist die Berechnung reeller Integrale durch Argumente im Komplexen. Die entsprechende Theorie kann hier allerdings nur ansatzweise durch die Untersuchung einiger Integralklassen entwickelt werden.

### 6.5.1 Integrale der Form $\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt$ .

Integrale der Form  $\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  mit einer rationalen Funktion  $Q$  können wir als komplexes Integral über den Einheitskreis schreiben. Wir parametrisieren diesen via  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  und schreiben  $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ,  $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ . (Auf dem Einheitskreis gilt  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ .)

**Beispiel:**

Für  $\mu > 1$  bzw.  $\mu < -1$  und mit  $z = e^{it}$  gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos t} = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\mu + \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{z_0 \in B_1(0)} \text{Res}(f, z_0),$$

wobei die Funktion  $f$  mit

$$f(z) = -\frac{2i}{z^2 + 2\mu z + 1} = -\frac{2i}{(z - z_0^-)(z - z_0^+)}, \quad z_0^\pm = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$$

die beiden einfachen Polstellen  $z_0^\pm$  besitzt, von denen  $z_0^+$  innerhalb und  $z_0^-$  außerhalb von  $B_1(0)$  liegt. Wegen

$$\text{Res}(f, z_0^+) = \lim_{z \rightarrow z_0^+} (z - z_0^+) f(z) = -\frac{2i}{z_0^+ - z_0^-} = -\frac{i}{\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

erhalten wir schließlich

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

### 6.5.2 Integrale der Form $\int_0^\infty Q(x) dx$ oder $\int_{-\infty}^\infty Q(x) dx$ .

**Lemma 6.11.** Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit <sup>1</sup>  $\deg(q) \geq 2 + \deg(p)$ , wobei  $q$  keine reelle Nullstelle besitzt. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } (\zeta) > 0} \text{Res}(f, \zeta)$$

für  $f := p/q$ .

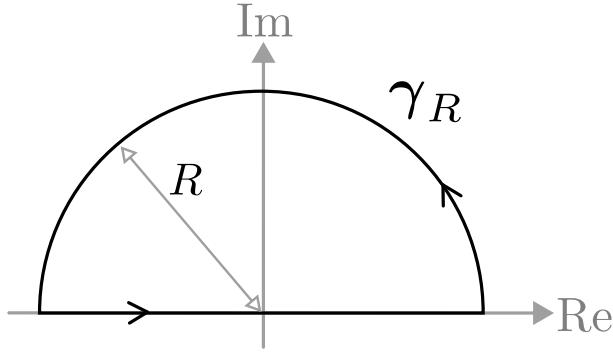


Abbildung 15: Halbkreis mit Radius  $R$

*Beweis.* Wir wählen den Integrationsweg  $\gamma_R$  wie in Abbildung 15, wobei der Radius  $0 < R < \infty$  so groß gewählt ist, dass alle Nullstellen von  $q$  und damit alle Singularitäten von  $f$  in  $\text{Int}(\gamma_R)$  enthalten sind.

Nach Voraussetzung und Theorem 6.10 gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_0) > 0} \text{Res}(f, z_0).$$

Die Voraussetzungen an  $p$  und  $q$  garantieren

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{C}{|z|^2}$$

für eine Konstante  $C$ , und die Standardabschätzung für Wegintegrale liefert

$$\left| \int_{\gamma_R \setminus (-R, R)} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{C}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Darüberhinaus gilt

$$\int_{(-R, R)} f(z) dz = \int_{(-R, R)} f(x) dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

und die Behauptung folgt unmittelbar. □

**Beispiel:** Die Pole von

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4}$$

sind alle einfach und durch

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{i3\pi/4}, \quad z_3 = e^{i5\pi/4}, \quad z_4 = e^{i7\pi/4}$$

---

<sup>1</sup>Die Größe  $\deg(p)$  bezeichnet den Grad des Polynoms  $p$ .

gegeben, wobei nur  $z_1$  und  $z_2$  in der oberen Halbebene liegen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= \frac{e^{+i\pi/4}}{(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/3}) \cdot (e^{i\pi/4} - e^{i\pi/5}) \cdot (e^{i\pi/4} - e^{i\pi/7})} \\ &= \frac{+e^{-i\pi/4}}{(1-i) \cdot (2) \cdot (1+i)} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, z_2) &= \frac{z_2^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} \\ &= \frac{e^{+i\pi/6}}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi/4}) \cdot (e^{i\pi/3} - e^{i\pi/5}) \cdot (e^{i\pi/3} - e^{i\pi/7})} \\ &= \frac{e^{-i\pi/3}}{(1+i) \cdot (1-i) \cdot (2)} = \frac{e^{-i\pi/3}}{4}\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi/4} + e^{-i\pi/3}}{4} = \frac{2\pi i}{4} \cdot \left( -\frac{i-1}{\sqrt{2}} - \frac{i+1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

### 6.5.3 Integrale mit langsamem Abklingverhalten und einer Singularität.

**Lemma 6.12.** [Jordan-Ungleichung] Für  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  gilt

$$\frac{2}{\pi} \theta < \sin \theta < \theta.$$

*Beweis.* Es gilt  $\sin \theta / \theta \rightarrow 1$  für  $\theta \rightarrow 0$  und  $\sin \theta / \theta \rightarrow \frac{2}{\pi}$  für  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . So folgt die Aussage, wenn wir zeigen können dass  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  monoton fallend ist auf  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Es gilt

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right) = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$$

und

$$\frac{d}{d\theta} (\theta \cos \theta - \sin \theta) = \cos \theta - \theta \sin \theta - \cos \theta = -\theta \sin \theta \leq 0$$

für  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Also ist  $\theta \cos \theta - \sin \theta$  monoton fallend. Da  $(\theta \cos \theta - \sin \theta)|_{\theta=0} = 0$ , folgt die Aussage.  $\square$

**Vorsicht:** Die Jordan-Ungleichung ist auf  $(0, \pi)$  nicht richtig!

**Lemma 6.13.** [Jordan-Lemma] Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

*Beweis.* Mit Hilfe von Lemma 6.12 berechnen wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2}{\pi} t} dt = (1 - e^{-R}) \frac{\pi}{2R} \leq \frac{C}{R}.$$

□

**Beispiele:**

(i). Wir wollen das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{4 + x^2} dx$$

berechnen. (Dieses existiert nur im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin x}{4 + x^2} dx$ .) Dazu bemerken wir, dass  $I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{4 + x^2} dx$  gilt. Im folgenden sei  $\gamma_R$  wieder wie in Abbildung 15. Weiterhin hat  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{4 + z^2}$  eine einfachen Pol bei  $2i$  und es gilt  $\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{2ie^{-2}}{22i} = \frac{e^{-2}}{2}$ . Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{4 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = \pi ie^{-2}.$$

Weiterhin gilt für das Wegintegral entlang des Halbkreises, den wir mittels  $z = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , parametrisieren, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{Re^{it} e^{iRe^{it}}}{4 + (Re^{it})^2} Re^{it} dt \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{R^2 e^{it} e^{iR(\cos t + i \sin t)} ie^{2it}}{4 + Re^{it})^2} Re^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R^2 e^{-R \sin t}}{R^2 - 4} dt \\ &= \frac{R^2}{R^2 - 4} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq \frac{C}{R} \end{aligned}$$

nach dem Jordan Lemma. Daher folgt  $I = \pi e^{-2}$ .

(ii). Im folgenden wollen wir ein Integral berechnen, bei dem der Integrand eine Singularität auf dem Integrationsweg besitzt. Als Beispiel betrachten wir

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Wir beweisen zuerst das folgende Hilfslemma.

**Lemma 6.14.** *Die Funktion  $f$  habe einen einfachen Pol im Punkt  $z_0$ . Der Integrationsweg  $\gamma_\varepsilon: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$  sei gegeben durch  $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ . Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = (\theta_2 - \theta_1)i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

*Beweis.* Es gilt  $f(z) = \frac{b_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ , wobei  $g$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$  ist. Damit gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{b_{-1}}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz.$$

Da  $g$  in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt ist, gilt  $|\int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz| \leq CL(\gamma_\varepsilon) = C\varepsilon$ , also verschwindet der Beitrag im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Damit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{b_{-1}}{z-1} dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b_{-1}}{z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0} \varepsilon i e^{it} dt = i b_{-1} (\theta_2 - \theta_1).$$

□

**Bemerkung:** Falls  $f$  in  $z_0$  einen Pol höherer Ordnung hat, existiert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$  in der Regel nicht. Wir können nur einfache Pole auf dem Integrationsweg entsprechend behandeln.

Um  $I$  zu berechnen, sei  $\gamma_{\varepsilon,R}$  wieder der eingestanzte Halbkreis (vgl. Abbildung 11). Damit erhalten wir

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

da der Integrand keine Singularität im Inneren des Integrationsweges besitzt. Weiter schätzen wir ab

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} R i e^{it} dt \right| = \left| \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq \frac{C}{R},$$

wobei wir wieder das Jordan Lemma 6.13 benutzt haben. Damit und mit Lemma 6.14 erhalten wir

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i$$

also  $I = \frac{\pi}{2}$ .

**Bemerkung:** Der Versuch, die gesuchten Integrale mit Hilfe von  $\sin z$  anstatt mit  $e^{iz}$  zu berechnen, funktioniert nicht, da  $\sin z$ , wenn man die reelle Achse verlässt, zu schnell wächst, und der Beitrag über den Halbkreis mit Radius  $R$  im Limes  $R \rightarrow \infty$  nicht verschwindet.

### 6.5.4 Integrale mit Logarithmen und Potenzfunktionen

Beispiele:

(i). Wir wollen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2} dx$$

für  $a \in (0, 1)$  berechnen und definieren dafür  $z^a = e^{a(\log z)}$ , wobei wir den Zweig  $\log z = \log|z| + i\arg z$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$  benutzen. Damit ist  $z^a = |z|^a e^{ia(\arg z)}$  und das Definitionsgebiet ist  $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$ . Der Grund für diese Wahl ist, dass der Nenner des Integranden eine gerade Funktion ist, so wollen wir das Integral als eines über ganz  $\mathbb{R}$  schreiben und so enthält unsere Wahl des Definitionsgebietes den ganzen Integrationsbereich bis auf den Nullpunkt.

Wir benutzen als Integrationsweg wieder  $\gamma_{\varepsilon, R}$  wie in Abbildung 11. Der Integrand hat doppelte Pole bei  $z = \pm i$  ( $-i$  liegt nicht im Definitionsbereich, das spielt im folgenden keine Rolle, da nur der Pol in  $i$  relevant ist), so dass gilt

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} \frac{z^a}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{z^a}{(1+z^2)^2}, i \right).$$

Wir müssen also das Residuum von

$$\frac{z^a}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{z^a}{(z+i)^2}$$

in  $z = i$  finden. Nach der Formel (6.6) ist dieses gegeben durch

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z^a}{(z+i)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(z+i)^2 \frac{d}{dz} z^a - 2(z+i)z^a}{(z+i)^4} \Big|_{z=i}$$

Da  $\frac{d}{z} z^a = az^{a-1}$  folgt, dass das Residuum in  $z = i$  durch

$$\frac{(z+i)^2 az^{a-1} - 2(z+i)z^a}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} = \frac{(2i)^2 a (e^{i\frac{\pi}{2}})^{a-1} - 4i (e^{i\frac{\pi}{2}})^a}{(2i)^4} = \frac{(a-1)(e^{i\frac{\pi}{2}})^a}{-4i}$$

gegeben ist und somit erhalten wir

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} \frac{z^a}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \frac{(a-1)(e^{i\frac{\pi}{2}})^a}{-4i} = \frac{\pi}{2} (1-a) e^{i\frac{\pi a}{2}}.$$

Der Beitrag des Halbkreises mit Radius  $R$  verschwindet im Limes  $R \rightarrow \infty$ , da

$$\left| \int_0^\pi \frac{(Re^{it})^a}{((Re^{it})^2 + 1)^2} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R^{1+a}}{(R^2 - 1)^2} dt \leq \frac{C}{R^{3-a}}.$$

Ähnlich gilt für den Halbkreis mit Radius  $\varepsilon$ , dass

$$\left| \int_0^\pi \frac{(\varepsilon e^{it})^a}{((\varepsilon e^{it})^2 + 1)^2} \varepsilon ie^{it} dt \right| \leq C \frac{\varepsilon^{1+a}}{(1-\varepsilon^2)^2},$$

und wir erhalten

$$\frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi a}{2}} (1-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{z^a}{(z^2+1)^2} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{z^a}{(z^2+1)^2} dz + \int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2} dx.$$

Auf der negativen reellen Achse setzen wir  $z = xe^{i\pi} = -x$  für  $x \in (0, \infty)$ , womit folgt  $z^a = x^a e^{i\pi a}$  und

$$\int_{-\infty}^0 \frac{z^a}{(z^2+1)^2} dz = \int_0^\infty \frac{x^a e^{i\pi a}}{(1+x^2)^2} dx$$

und somit

$$(1 + e^{i\pi a}) \int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi a}{2}} (1-a).$$

Damit berechnet sich der Wert des Integrals schließlich als

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} (1-a) \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{1+e^{i\pi a}} = \frac{\pi}{2} (1-a) \frac{1}{e^{-i\frac{\pi a}{2}} + e^{i\frac{\pi a}{2}}} = \frac{\pi}{4} \frac{1-a}{\cos \frac{\pi a}{2}}.$$

(ii). Wir wollen

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

berechnen. Wir bemerken zunächst, dass der Nenner nicht gerade ist, und die Funktion  $\frac{1}{1+z^3}$  einen einfachen Pole bei  $-1$  (und bei  $e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ) hat. Daher bietet es sich hier nicht an, den Integrationsweg auf der negativen reellen Achse entlangzuführen. Wir nehmen stattdessen als Integrationsweg das sogenannte Schlüsselloch  $K_{\varepsilon,R}$  (vgl. Abbildung 16). Dies ist so zu verstehen, dass die horizontalen Linien einen beliebig kleinen Abstand  $\delta > 0$  von der positiven Achse haben. Wählen wir für die Wurzelfunktion den Zweig  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ , dann ist  $f$  holomorph auf  $K_{\varepsilon,R}$  und im Inneren, bis auf die drei Polstellen.

Wir lassen nun die beiden horizontalen Linien von oben bzw. unten an die positive reelle Achse konvergieren. Wenn wir uns dem Schnitt auf der positiven reellen Achse von oben nähern gilt  $\sqrt{z} = \sqrt{x}$ , wohingegen wenn wir uns von unten nähern  $\sqrt{z} = \sqrt{x} e^{i\pi} = -\sqrt{x}$ . So erhalten wir nach Limesbildung für die jeweiligen Integrale  $\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$  und  $-\int_R^\varepsilon \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$ . Wir interpretieren die Integration entlang des Schlüssellochweges also so, dass wir direkt entlang des Schlitzes des Definitionsbereites integrieren.

Um die Rechnung abzuschließen, müssen wir noch die Residuen von  $f$  in den drei Polen berechnen. Wir erhalten

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{i}{3}, \quad \text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) = -\frac{i}{3}, \quad \text{Res}(f, e^{-i\frac{\pi}{3}}) = -\frac{i}{3}.$$

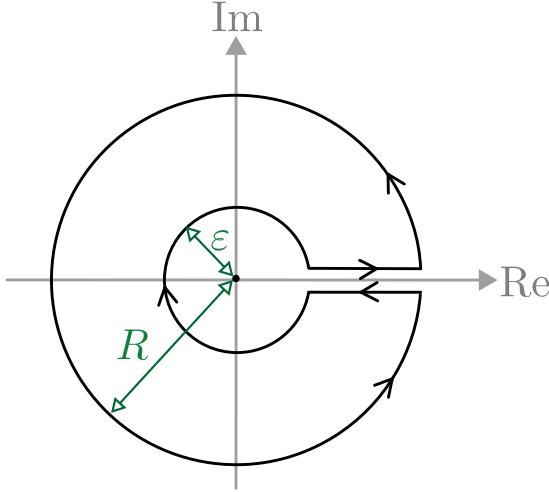


Abbildung 16: Schlüsselloch  $K_{\varepsilon,R}$

wie wir z.B. für  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  folgendermaßen sehen

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}}} (z - e^{i\frac{\pi}{3}}) f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})} \\ &= \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}})(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}2i\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{i}{3}.\end{aligned}$$

Die anderen beiden Residuen berechnen sich ähnlich. Weiterhin sieht man leicht, wie im vorigen Beispiel, dass die Beiträge auf dem kleinen und großen Kreis im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  verschwinden. Damit gilt

$$2\pi i \left( \frac{i}{3} - \frac{i}{3} - \frac{i}{3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx,$$

also  $I = \frac{\pi}{3}$ .

### 6.5.5 Reihenberechnung

Oft kann man durch Konvergenztests für Reihen zeigen, dass diese konvergieren, jedoch kann man den Wert der Reihe so nicht bestimmen. Falls es jedoch möglich ist, eine Reihe als Summe von Residuen meromorpher Funktionen zu identifizieren, so hat man eine Chance, den Wert der Reihe mittels komplexer Integration zu berechnen.

**Beispiel:** Wir wollen zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dazu erinnern wir uns zunächst (Kapitel 6.4), dass die Funktion  $\cot z$  in  $z_k = k\pi$  einfache Pole besitzt mit  $\text{Res}(\cot, z_k) = 1$ . Damit hat  $f(z) = \frac{\pi^2 \cot z}{z^2}$  einfache Pole für  $z_k = k\pi$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$  mit  $\text{Res}(f, k) = \frac{1}{k^2}$ . In  $z = 0$  hat  $f$  einen dreifachen Pol mit  $\text{Res}(f, 0) = -\frac{\pi^2}{3}$ . Dies folgt aus der folgenden Entwicklung um den Punkt  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \cos z}{z^2 \sin z} &= \frac{\pi^2}{z^2} \frac{1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)}{z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)} \\ &= \frac{\pi^3}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\right) \left(1 + \frac{z^2}{6} + O(z^5)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{z^3} \left(1 - \frac{1}{3}z^2 + O(z^4)\right). \end{aligned}$$

Nun integrieren wir die Funktion  $f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$  über den Rand des Rechtecks  $R_N$  mit Ecken in  $(\pm 1 \pm i)\pi(N + \frac{1}{2})$  und erhalten mit dem Residuensatz 6.10, dass

$$\int_{\gamma_N} f(z) dz = 2\pi i \left(2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}\right),$$

wobei  $\gamma_N$  den Rand des Rechtecks parametrisiert. Wir müssen nun nur noch zeigen, dass  $\int_{\gamma_N} f(z) dz \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$ . Dies folgt aus

$$\left| \int_{\gamma_N} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \partial R_N} \left| \frac{\pi^2 \cot z}{z^2} \right| 4\pi(2N+1) \leq \sup_{z \in \partial R_N} |\cot z| \frac{4\pi(2N+1)}{(N+\frac{1}{2})^2}$$

und der Tatsache, dass  $\cot$  auf  $\partial R_N$  gleichmäßig beschränkt ist. Für die Ober- und Unterseite des Rechteckrandes gilt  $z = x \pm i\pi(N + \frac{1}{2})$ ,  $x \in (-\pi(N + \frac{1}{2}), \pi(N + \frac{1}{2}))$  und somit

$$|\cot z| = \left| \frac{e^{i(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))} + e^{-i(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))}}{e^{i(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))} - e^{-i(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))}} \right| = \frac{e^{\pi(N + \frac{1}{2})} + e^{-\pi(N + \frac{1}{2})}}{e^{\pi(N + \frac{1}{2})} - e^{-\pi(N + \frac{1}{2})}} \leq C.$$

Auf den vertikalen Seiten ist folgt die Abschätzung ähnlich und wir erhalten das gewünschte Resultat.

## 6.6 Das Argumentprinzip

Zum Abschluß besprechen wir noch eine weitere Anwendung des Residuensatzes.

Hat die holomorphe Funktion  $f$  in  $B_r(z_0)$  eine  $k$ -fache Nullstelle in  $z_0$ , dann gilt die Darstellung  $f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$  für alle  $z \in B_r(z_0)$  und  $f_k(z)$  is holomorph in  $B_r(z_0)$  mit  $f_k(z_0) \neq 0$ . Da  $f_k$  stetig ist, gilt auch  $f_k(z) \neq 0$  für alle  $z \in B_\delta(z_0)$  für hinreichend kleines  $\delta > 0$ . Wir finden in  $B_\delta(z_0)$ , dass  $f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} f_k(z) + (z - z_0)^k f'_k(z)$  und somit in  $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{f'_k(z)}{f_k(z)}.$$

Da  $\frac{f'_k(z)}{f_k(z)}$  holomorph in  $B_\delta(z_0)$  ist, folgt

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k.$$

In ähnlicher Form findet man für den Fall eines Pols der Ordnung  $m$  in  $z_0 \in \mathbb{C}$ , dass  $f(z) = \frac{g_m(z)}{(z-z_0)^m}$  mit  $g_m(z) \neq 0$  in  $B_\delta(z_0)$  und holomorph in  $B_\delta(z_0)$ . Damit erhalten wir

$$f'(z) = -\frac{m}{(z-z_0)^{n+1}}g_m(z) + \frac{g'_m(z)}{(z-z_0)^m}$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-z_0} + \frac{g'_m(z)}{g_m(z)},$$

woraus  $\text{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = -m$  folgt.

Insgesamt erhalten wir aus diesen Überlegungen das

**Argumentprinzip:** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph bis auf Pol-Singularitäten. Es sei  $\gamma$  ein einfacher, geschlossener Integrationsweg in  $U$ , der keine Pole und Nullstellen von  $f$  enthält. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_{\gamma} - P_{\gamma},$$

wobei  $N_{\gamma}$  die Anzahl der Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) und  $P_{\gamma}$  die Anzahl der Polstellen (einschließlich Vielfachheit) von  $f$  in  $\text{Int}(\gamma)$  bezeichnet.

Eine wichtige Konsequenz ist der folgende Satz.

**Satz 6.15** (Satz von Rouché). *Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $\gamma$  ein einfacher, geschlossener Integrationsweg und  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Gilt  $|f(z)| > |g(z)|$  auf  $\gamma$ , dann haben  $f$  und  $f-g$  im Inneren von  $\gamma$  die gleiche Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheit).*

*Beweis.* Es sei  $\lambda \in [-1, 1]$ . Dann sind  $f$  und  $f+\lambda g$  holomorph im Inneren von  $\gamma$ . Außerdem hat die Funktion  $f + \lambda g$  keine Nullstellen auf  $\gamma$ , denn falls gilt  $f(z_0) + \lambda g(z_0) = 0$ , dann folgt  $|g(z_0)| < |f(z_0)| = |\lambda||g(z_0)|$ , also  $|g(z_0)|(|\lambda| - 1) > 0$ , ein Widerspruch zu  $|\lambda| \leq 1$ .

Daher ist

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz$$

gleich der Anzahl der Nullstellen von  $f(z) + \lambda g(z)$  in  $\text{Int}(\gamma)$ . Insbesondere ist  $N(\lambda)$  eine ganze Zahl für jedes  $\lambda \in [-1, 1]$  und wegen Stetigkeit damit konstant. Es gilt also  $N(-1) = N(0)$  und damit folgt die Behauptung.  $\square$

### Beispiele:

(i). Die Gleichung  $e^z = 5z^n$  hat im Einheitskreis genau  $n$  Lösungen.

Um dies zu sehen, wählt man  $f(z) = 5z^n$ , also hat  $f$  eine  $n$ -fache Nullstelle in  $z = 0$ . Es sei  $g(z) = e^z$ . Wir zeigen nun, dass  $f$  und  $f-g$  die gleiche Anzahl von Nullstellen in  $B_1(0)$  haben. Es gilt  $|f(z)| = 5 > e \geq |g(z)|$  für  $|z| = 1$ . Wir können also den Satz von Rouché anwenden und erhalten das gewünschte Resultat.

(ii). Die Gleichung  $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0$  hat genau  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$ . Dazu wähle  $f(z) = z^n$  und  $g(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$  und wähle  $R > 0$  so groß, dass  $|f(z)| > |g(z)|$  für alle  $z$  mit  $|z| = R$ .

## 7 Fourier-Transformation

In den nachfolgenden Kapiteln werden wir einige Methoden kennenlernen, die unter anderem mittels komplexer Analysis ermöglichen, einige fundamentale partielle Differentialgleichungen zu lösen. Als Motivation werden zunächst einige der wichtigsten linearen partiellen Differentialgleichungen und ihre möglichen Anwendungsfelder kurz vorgestellt.

### 7.1 Beispiele partieller Differentialgleichungen

#### 7.1.1 Diffusion und Wärmeleitung

Die Diffusionsgleichung ist die einfachste Gleichung, welche die Ausbreitung von Stoffen durch Diffusion beschreibt. Für ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei  $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  die Massendichte eines Stoffes (d.h.  $u(x, t)$  ist die Dichte im Raumpunkt  $x \in \Omega$  zur Zeit  $t$ ) und  $j: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Flussdichte des Stoffes, d.h. der Gesamtfluss des Stoffes durch eine Hyperfläche  $A$  mit Normale  $\nu$  ist durch  $\int_A j \cdot \nu \, dS$  gegeben. Wenn wir mit  $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  die Produktionsrate des Stoffes bezeichnen, dann gilt für jede Kugel mit  $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{B_r(x)} u \, dy}_{\text{Gesamtmasse in } B_r(x)} = - \underbrace{\int_{\partial B_r(x)} j \cdot \nu \, dS}_{\text{Massenabfluss aus } B_r(x)} + \underbrace{\int_{B_r(x)} f \, dy}_{\text{Massenproduktion in } B_r(x)}. \quad (7.1)$$

Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\int_{B_r(x)} \partial_t u \, dy = \int_{B_r(x)} (-\operatorname{div} j + f) \, dy. \quad (7.2)$$

Da dies für alle Kugeln  $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$  gilt, folgt (unter der Annahme, dass  $u, j$  und  $f$  glatte Funktionen sind), dass

$$\partial_t u + \operatorname{div} j - f = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \quad (7.3)$$

Diese Gleichung heißt Bilanzgleichung oder Erhaltungssatz, weil sie die Erhaltung der Masse bzw. die Massebilanz beschreibt. Diese Bilanzgleichung gilt unabhängig von dem konkreten Stoff, den wir betrachten.

Um eine Gleichung für  $u$  zu gewinnen, fehlt noch eine Beziehung zwischen  $j$  und  $u$ , eine sogenannte konstitutive Gleichung, die vom konkreten Stoff abhängt. Im einfachsten Fall nimmt man an, dass  $j$  zu  $\nabla u$  proportional ist, d.h.

$$j = -D \nabla u. \quad (7.4)$$

Die Konstante  $D$  heißt Diffusionskoeffizient. Es gilt  $D > 0$ , da der Fluss von Gebieten hoher Massedichte zu solchen niedriger Massedichte erfolgt. Setzt man der Einfachheit halber  $D = 1$  so ergibt sich die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad (7.5)$$

Hängt  $f$  nur von  $x$  ab, d.h.  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dann entsprechen Lösungen  $v = v(x)$  der Gleichung

$$-\Delta v = f \quad (7.6)$$

stationären Masseverteilungen, d.h.  $u(x, t) = v(x)$  ist eine Lösung von (7.5), die in der Zeit konstant ist. Gleichung (7.6) ist auch als Poisson-Gleichung bekannt.

Statt der Diffusion von Stoffen kann man auch die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem Material betrachten. In diesem Fall ist  $u$  die Temperatur,  $j$  der Wärmefluss und  $f$  die Wärmezufuhr. Die in der Kugel  $B_r(x)$  gespeicherte Energie ist  $\int_{B_r(x)} cu \, dy$ , wobei die Konstante  $c$  die spezifische Wärmekapazität (Energie/ Temperatur x Volumen) des Stoffes ist. Die zugehörige Bilanzgleichung ist

$$\partial_t(cu) = -\operatorname{div} j + f \quad (7.7)$$

und mit  $j = -K\nabla u$ , wobei ein  $K$  Wärmeleitkoeffizient ist, erhält man (mit  $c = 1, K = 1$ ) wieder (7.5), welche daher auch als Wärmeleitungsgleichung bekannt ist.

### 7.1.2 Elektrodynamik

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik, die Maxwellschen Gleichungen, (siehe Vorlesung Elektrodynamik) sind partielle Differentialgleichungen für das elektrische Feld  $E: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das magnetische Feld  $B: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Sie sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \partial_t B &= 0, & \operatorname{div} B &= 0, \\ \operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \partial_t E &= \frac{4\pi}{c} j, & \operatorname{div} E &= 4\pi\rho, \end{aligned}$$

wobei  $j$  die Stromdichte und  $\rho$  die Ladungsdichte beschreibt, sowie  $c$  die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert.

Als einen Spezialfall erhalten wir die Gleichungen der Elektrostatik, wenn wir annehmen, dass die Felder zeitunabhängig sind. Dann folgt für das elektrische Feld

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} E = 0.$$

In einfach zusammenhängenden Gebieten existiert also ein elektrostatisches Potential  $u$  mit  $E = -\nabla u$  und  $u$  löst wiederum das Poisson-Problem (7.6) mit  $f = 4\pi\rho$ .

Im Falle  $j = 0$  und  $\rho = 0$  erhalten wir die Gleichungen für elektrostatische Wellen. Durch Anwenden der Rotation auf  $\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \partial_t B = 0$  und Ableiten von  $\operatorname{rot} B - \frac{1}{c} \partial_t E = 0$  erhält man nach einigen elementaren Umformungen die sogenannte Wellengleichung

$$\partial_t^2 E - c^2 \Delta E = 0. \quad (7.8)$$

Diese Gleichung hat zum Beispiel Lösungen der Form  $E(x, t) = E_0 \sin(k \cdot x - t)$ , mit konstantem Feld  $E_0$  und dem Wellenvektor  $k$  mit  $|k| = \frac{1}{c}$ . Das zugehörige magnetische

Feld ist dann durch  $B(x, t) = k \times E_0 \sin(k \cdot x - t)$  gegeben, steht also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des elektrischen Feldes.

**Allgemeine Bemerkung:** Um eindeutige Lösungen der oben genannten Differentialgleichungen zu finden, müssen diese noch mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen versehen werden. Wir werden dies später noch für einige Fälle genauer diskutieren.

## 7.2 Exkurs über temperierte Distributionen

Eine umfassende Theorie der Fourier-Transformation kann nur innerhalb der Theorie der temperierten Distributionen entwickelt werden. Wir können hier die mathematischen Details nicht alle diskutieren, wollen aber kurz trotzdem kurz erklären, was eine temperierte Distribution ist.

Dazu führen wir den sogenannten Schwartz-Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^m D^\alpha \varphi(x)| < \infty \text{ für alle } m, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\},$$

wobei wir hier die Notation mit Multiindizes nutzen: für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $m \in \mathbb{N}_0^n$  ist  $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$  und  $D^\alpha \varphi(x) = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \varphi(x)$  mit  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ .

Beispiele für Schwartz-Funktionen sind  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger oder  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ .

Wir sagen, eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , falls

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^m D^\alpha \varphi_k(x) - x^m D^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } m, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Eine temperierte Distribution  $T$  ist eine lineare und stetige Abbildung  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei Linearität von  $T$  wie üblich bedeutet, dass

$$T(\zeta_1 \varphi_1 + \zeta_2 \varphi_2) = \zeta_1 T(\varphi_1) + \zeta_2 T(\varphi_2)$$

für alle  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$  und alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , und  $T$  heißt stetig, falls

$$\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi \text{ in } \mathcal{S} \implies T(\varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(\varphi) \text{ in } \mathbb{C}.$$

Die Menge aller temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. Außerdem konvergiert eine Folge  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  von temperierten Distributionen gegen einen Grenzwert  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , sofern

$$T_k(\varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

gilt. In diesem Fall spricht auch von distributioneller Konvergenz.

Man kann nun Distributionen als verallgemeinerte Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  betrachten. Die erste wichtige Beobachtung ist, dass jede hinreichend reguläre Funktionen  $w$ , z.B.  $w$  ist

stückweise stetig und wächst höchstens polynomial, auch eine temperierte Distribution  $T_w$  repräsentiert via

$$T_w(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\varphi(x) dx$$

Darüberhinaus gibt es auch Distributionen, die nicht durch Funktionen erzeugt werden. Prominentestes Beispiel ist die Diracsche Delta-Distribution in Punkt  $x_0$ , die durch

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0)$$

definiert wird.

Die zweite wichtige Idee ist, dass man jede Distribution entweder als Funktion oder als singulären Grenzwert einer geeigneten Familie von Funktionen betrachten kann.

**Beispiel:** Sei  $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nicht-negativ und integrierbar mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) dx = 1$ , so kann man für jedes  $\varepsilon > 0$  die reskalierte Funktion

$$\varrho_{\varepsilon,x_0}(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varrho\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$$

betrachten. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_{\varepsilon,x_0}(x) dx = 1$$

für alle  $\varepsilon > 0$  sowie

$$T_{\varrho_{\varepsilon,x_0}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_{\varepsilon,x_0}(x)\varphi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (vgl. auch Abbildung 17 für den Fall  $n = 1$ ). Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_{\varepsilon,x_0}(x)\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \varrho\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(\tilde{x}) \varphi(x_0 + \varepsilon \tilde{x}) d\tilde{x} \rightarrow \varphi(x_0) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Dirac-Distribution  $\delta_{x_0}$  kann also im distributionellen Sinne als Grenzwert von  $\varrho_{\varepsilon,x_0}$  betrachtet werden. Im folgenden nennen wir daher auch insbesondere  $\rho_\varepsilon := \varrho_{\varepsilon,0}$  eine Dirac-Folge.

Basierend auf dieser Approximationsidee kann man viele der bekannten mathematischen Operationen auch für Distributionen definieren. Wir betrachten zunächst einmal den Fall  $n = 1$ . Auf Grund der partiellen Integration gilt zum Beispiel

$$\int_{\mathbb{R}} \varrho'_{\varepsilon,x_0}(x)\varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \varrho_{\varepsilon,x_0}(x)\varphi'(x) dx \rightarrow \delta_{x_0}(\varphi')(x) dx$$

also gilt in diesem Sinne

$$\delta'_{x_0}(\varphi) = -\delta_{x_0}(\varphi')$$

aber  $\delta'_{x_0}$  existiert nicht im klassischen Sinne sondern nur im distributionellen Sinne.

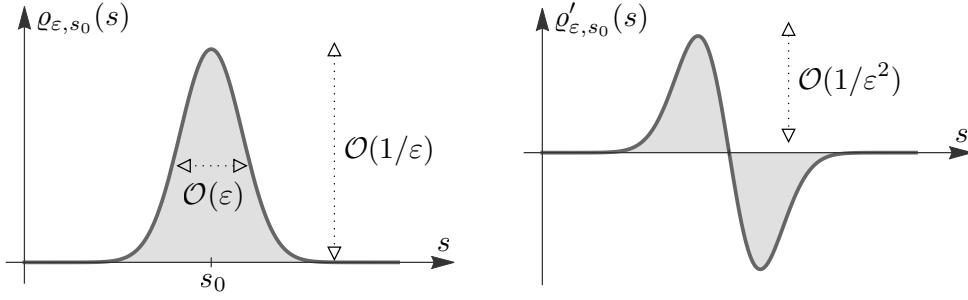


Abbildung 17: Die Funktion  $\varrho_{\varepsilon,x_0}$  und ihre Ableitung, wobei  $\int_{\mathbb{R}} \varrho_{\varepsilon,x_0}(x) dx = 1$ . Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergieren  $\varrho_{\varepsilon}$  bzw.  $\varrho'_{\varepsilon}$  im Sinne der Distributionen gegen die Dirac-Distribution  $\delta_{x_0}$  bzw. die Ableitung  $\delta'_{x_0}$  derselben.

**Definition 7.1** (Ableitung einer Distribution in  $\mathbb{R}$ ). *Für jede temperierte Distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  wird durch*

$$T'(\varphi) := -T(\varphi') \quad (7.9)$$

*eine weitere temperierte Distribution  $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  definiert, die man die distributionelle Ableitung von  $T$  nennt.*

**Bemerkung:**

- (i). Für jede stetig differenzierbare Funktion  $w$  ist die klassische Ableitung auch die distributionelle Ableitung, d.h. es gilt  $T'_w = T_{w'}$ .
- (ii). Gilt  $T_{w_k} \rightarrow T$  im Sinne der temperierten Distribution, so gilt auch  $T_{w'_k} \rightarrow T'$  im Sinne der temperierten Distributionen.

Insbesondere gilt mit (7.9) immer die Formel der partiellen Integration in einem verallgemeinerten Sinne.

**Beispiel:** Sei  $f(x) = \text{sgn}(x)$  die Signums-Funktion, die nicht stetig in 0 und daher nicht im klassischen Sinne differenzierbar ist. Sie ist aber auch Distribution mit

$$T_{\text{sgn}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi(x) dx$$

und wir rechnen leicht nach, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = -2\varphi(0)$$

für jedes  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  erfüllt ist. Es gilt also

$$T_{\text{sgn}}(\varphi') = -2\delta_0(\varphi)$$

und daher  $T'_{\text{sgn}} = 2\delta_0$  im Sinne distributioneller Ableitungen.

Entsprechend zu Definition 7.1 kann man auch höhere Ableitungen definieren. Wir gehen dazu nun auch gleichzeitig zu höheren Raumdimensionen über.

**Definition 7.2** (Höhere Ableitungen einer Distribution). Für jede temperierte Distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  wird durch

$$T^\alpha(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad (7.10)$$

eine weitere temperierte Distribution  $T^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definiert, die man die  $\alpha$ -te distributionelle Ableitung von  $T$  nennt.

**Bemerkung:** Die Definition der Ableitung einer Distribution erlaubt auch, Differentialgleichungen in einem sogenannten schwachen oder distributionellen Sinne zu formulieren. So kann man z.B. für eine integrierbare, aber nicht notwendig differenzierbare Funktion  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x)$ , sagen, dass sie die Poissons-Gleichung  $-\Delta u = f$  im distributionellen Sinne löst, falls

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\Delta \varphi + f) dx = 0$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt.

### 7.3 Definition und Eigenschaften der Fourier-Transformation

Mathematisch gesehen, sind die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  sowie ihre Inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  (verallgemeinerte) Integraltransformationen, die jeweils für eine große Klasse von Funktionen definiert sind.

Die physikalische Sicht ist jedoch etwas anders: Es gibt neben der *Ortsvariablen*  $x \in \mathbb{R}$  noch eine konjugierte Variable, die mit  $\xi$  bezeichnet und *Impulskoordinate* genannt wird. Die Idee ist dabei, dass jeder Wert von  $\xi$  der ebenen Welle

$$e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x)$$

entspricht. Eine ausgesprochen wichtige und weitreichende Erkenntnis der Physik ist nun, dass sehr viele Funktionen  $u$  (in der Variablen  $x$ ) in eindeutiger Weise als unendliche Superposition von ebenen Wellen dargestellt werden kann, wobei die entsprechenden Koeffizienten durch eine Funktion  $\hat{u}$  (in der Variablen  $\xi$ ) ausgedrückt werden können.

Mit diesen Vorbemerkungen führen wir nun die Fourier-Transformation formal wie folgt ein.

**Definition 7.3.** Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  einer Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert als

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad (7.11)$$

für alle hinreichend regulären Funktionen  $u$ .

Die inverse Fourier-Transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  einer Funktion  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert als

$$\mathcal{F}^{-1}[v](x) = \check{v}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} v(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (7.12)$$

für alle hinreichend regulären Funktionen  $v$ .

Zunächst ist zu bemerken, dass die Fourier-Transformation in der Literatur unterschiedlich definiert wird, z.B. mit  $e^{i\xi x}$  statt  $e^{-i\xi x}$ , oder mit  $e^{2\pi i \xi x}$  oder mit einem anderen Normierungsfaktor. z.B.  $\frac{1}{2\pi}$  (dann erhält die inverse Fourier-Transformtion den Vorfaktor 1) oder  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  (dann erhält die inverse FT auch den Vorfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ).

Dass die inverse Fourier-Transformation tatsächlich die Inverse zu  $\mathcal{F}$  ist, werden wir später sehen.

Eine Frage ist zunächst, für welche Funktionen die Fourier-Transformation definiert ist.

Dazu nennen wir  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar über  $\mathbb{R}$ , falls  $u$  für jedes  $R > 0$  auf  $[-R, R]$  Riemann-integrierbar ist und

$$\|u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |u| dx < \infty.$$

Für eine absolut integrierbare Funktion  $u$  ist die Fourier-Transformierte definiert und beschränkt, da

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx.$$

Allerdings ist eine beschränkte Funktion im allgemeinen nicht Riemann-integrierbar auf  $\mathbb{R}$  und so können wir nicht unbedingt wieder die inverse Fourier-Transformation auf  $\hat{u}$  anwenden.

**Beispiel:** Sei  $u(x) = \chi_{[-1,1]}$ , also  $u(x) = 1$  für  $x \in [-1, 1]$  und  $u = 0$  sonst. Es gilt

$$\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i0x} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx = 2.$$

Für  $\xi \neq 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x) dx = \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = -\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{i\xi} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion  $\hat{u}$  stetig (also auch in  $\xi = 0$ ). Wir sehen aber auch, dass  $\hat{u}$  nicht absolut integrierbar ist.

Wir werden im Folgenden sehen, dass für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt, dass  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und dasselbe gilt für die inverse Fourier-Transformation, daher ist der Schwartz-Raum für die Fourier-Transformation besonders gut geeignet.

**(Fundamentals) Beispiel:** Wir berechnen nun als eines der wichtigsten Beispiele die Fourier-Transformation der Gauß-Verteilung, wobei wir Methoden der komplexen Analy-

sis einsetzen können. Für  $v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  berechnen wir

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \hat{v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2 - \frac{\xi^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}},\end{aligned}$$

also gilt

$$\hat{v}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Bei der Berechnung haben wir im letzten Schritt das Resultat benutzt, dass für eine Funktion  $f$  mit  $|f(x)| \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  gilt, dass  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x + i\xi) dx$  gilt. Dies folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 1(ii)). Dort wurde  $\xi \in (-1, 1)$  vorausgesetzt, der Beweis funktioniert aber genauso für alle  $\xi$ .) Dieses ist also ein Beispiel, dafür dass für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  auch  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt.

Bevor wir Fragen der Regularität der Fourier-Transformierten weiter beleuchten, leiten wir zuerst einige Eigenschaften der Fourier-Transformation her und nehmen im Folgenden immer an, dass die jeweiligen Integrale und gegebenenfalls Ableitungen existieren. Dies ist insbesondere immer für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  der Fall. Die Idee ist, dass sich mittels Approximation alle Rechenregeln auch in geeignetem Sinne auf weniger reguläre Funktionen oder auch Distributionen übertragen lassen.

**Lemma 7.4.** *Es gilt*

$$\mathcal{F}[au + bv] = a\mathcal{F}[u] + b\mathcal{F}[v] \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{C}, \quad (7.13)$$

$$\mathcal{F}\left[u\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right] = a\hat{u}(a\cdot) \quad \text{für alle } a > 0, \quad (7.14)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-ia\cdot} u(\cdot)\right] = \hat{u}(\cdot + a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}, \quad (7.15)$$

$$\mathcal{F}\left[u(\cdot - a)\right] = e^{-ia\cdot} \hat{u} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

*Beweis.* Die Linearität der Fourier-Transformation ist klar. Das Nachrechnen der anderen Eigenschaften ist eine Übungsaufgabe.  $\square$

Als nächstes untersuchen wir die Fourier-Transformation der Ableitung einer Funktion, sowie die Ableitung der Fourier-Transformation.

**Lemma 7.5** (Fourier Transformation der Ableitung). *Es gilt für  $k \in \mathbb{N}$  dass*

$$\mathcal{F}[u^{(k)}](\xi) = (\mathrm{i}\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

*Beweis.* Dies folgt mittels partieller Integration. Zum Beispiel gilt

$$\mathcal{F}[u'](\xi) = \int_{\mathbb{R}} u'(x) e^{-i\xi x} dx = -(-i\xi) \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \hat{u}(\xi)$$

und die Formel für höhere Ableitungen folgt induktiv.  $\square$

**Lemma 7.6** (Ableitung der Fourier-Transformierten). *Es gilt für  $k \in \mathbb{N}$  dass*

$$\mathcal{F}[(\cdot)^k u](\xi) = i^k \hat{u}^{(k)}(\xi)$$

*Beweis.* Wir rechnen leicht nach, dass

$$\hat{u}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixu(x) e^{-i\xi x} dx = -i\mathcal{F}[(\cdot)u](\xi)$$

und die höheren Ableitungen folgen induktiv.  $\square$

**Bemerkung:** Mit Hilfe der letzten beiden Lemmata beobachten wir insbesondere Folgendes. Falls  $x^k u(x)$  integrierbar ist, so ist  $\hat{u}$   $k$ -mal differenzierbar, d.h. je schneller  $u$  abfällt, umso glatter ist  $\hat{u}$ . Aus Lemma 7.5 folgt wiederum, dass je glatter  $u$  ist, umso schneller fällt die Fourier-Transformierte ab. Insbesondere folgt aus diesen Beobachtungen, das oben angekündigte Resultat, dass für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt, dass  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , es gilt also  $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Man kann sich außerdem klar machen, dass die Fourier-Transformierte stetig auf dem Schwartz-Raum ist, d.h. Konvergiert  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dann konvergiert auch  $\hat{\varphi}_k \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dies folgt, da z.B. gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi \hat{\varphi}_k(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \varphi_k(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi'_k(x)| \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi'_k(x)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und ähnlich kann man für alle Terme der Form  $\xi^m \hat{\varphi}^{(l)}(\xi)$  argumentieren.

Für Anwendungen ist noch eine weitere Eigenschaft der Fourier-Transformation wichtig, nämlich ihr Verhalten bei Faltungen.

**Definition 7.7** (Faltung). *Für  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  definieren wir die Faltung  $u * v$  als*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y) dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y) dy .$$

**Lemma 7.8.** Es gilt für  $u, v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $k \in \mathbb{N}$  dass

$$u * v = v * u \quad (7.17)$$

$$u * (v * w) = (u * v) * w \quad (7.18)$$

$$D^k(u * v) = (D^k u) * v = u * (D^k v). \quad (7.19)$$

Der Beweis dieses Lemmas ist eine einfache Übungsaufgabe.

**Lemma 7.9.** Es gilt für  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dass

$$\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\hat{v}, \quad (7.20)$$

d.h. die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist das Produkt der jeweiligen Fourier-Transformationen.

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u * v](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)e^{-ix} dy dx = \int_{\mathbb{R}} v(y) \int_{\mathbb{R}} u(x-y)e^{-ix} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(y) \int_{\mathbb{R}} u(z)e^{i\xi(y+z)} dz dy = \int_{\mathbb{R}} v(y)e^{-iy\xi} \int_{\mathbb{R}} u(z)e^{iz\xi} dz dy \\ &= \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Die Faltung kann auch für weit weniger reguläre Funktionen definiert werden. Wir wollen hier nicht weiter in die Details einsteigen, halten aber fest, dass man z.B. eine Dirac-Distribution mit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  falten kann, mit

$$\delta_0 * \varphi = \varphi * \delta_0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\delta_0(x-y) dy = \varphi(x),$$

Die Dirac-Distribution in  $x_0 = 0$  ist also das neutrale Element bezüglich der Faltung. In Lemma 7.9 ist es wichtig, dass die Funktionen (bzw. Distributionen)  $u$  und  $v$  hinreichend schnell abklingen, so dass das Integral noch definiert ist. So kann man zum Beispiel nicht zwei konstante Funktionen falten. In diesem Fall macht auch die linke Seite von (7.20) keinen Sinn, da das Produkt zweier Dirac-Distributionen nicht definiert.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Faltung, die regularisierende Eigenschaft, sieht man an (7.19). Ist z.B. nur  $u$  differenzierbar, aber nicht  $v$ , so ist dennoch  $u * v$  differenzierbar (falls die Funktionen so abklingen, dass die jeweiligen Integrale existieren).

**(Einfaches) Beispiel:** Wir wollen die Differentialgleichung  $y'(x) + y(x) = g(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  lösen. Dazu wenden wir die Fourier-Transformation auf die Gleichung an und erhalten mit Lemma 7.5 dass  $(i\xi + 1)\hat{y}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ , also  $\hat{y}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{1+i\xi}$ . Wir bemerken, dass für  $h(x) = e^{-x}\chi_{(0,\infty)}$  gilt, dass  $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi}$ . Mit Lemma 7.9 folgt  $y(x) = (g * h)(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)}g(y) dy$ . Für dieses einfache Beispiel erhalten wir die Lösung natürlich auch

ebenso mit elementaren Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es soll hier nur die prinzipielle Vorgehensweise mittels Fourier-Transformation kurz vorgestellt werden, die es ermöglicht, eine Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung umzuwandeln.

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass tatsächlich  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = u$  gilt. Als Vorbereitung sehen wir uns reskalierte Gauß-Verteilungen an.

**Beispiel:** Für jedes  $\varepsilon > 0$  rechnen wir, wie im fundamentalen Beispiel sowie unter Anwendung von (7.14), leicht nach, dass jeweils gilt

$$u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right), \quad \hat{u}_\varepsilon(\xi) := \exp\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right) \quad (7.21)$$

und

$$\check{v}_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon x^2}{2}\right), \quad v_\varepsilon(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\varepsilon}\right), \quad (7.22)$$

sowie  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}_\varepsilon] = u_\varepsilon$  und  $\mathcal{F}[\check{v}_\varepsilon] = v_\varepsilon$ . Insbesondere erhalten wir

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0, \quad \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

und

$$\check{v}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi}, \quad v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0$$

im Sinne temperierter Distributionen.

Die konkreten Beispiele in (7.21) und (7.22) illustrieren das folgende allgemeine Prinzip: Ist  $u$  (bzw.  $\hat{u}$ ) sehr lokalisiert, so ist  $\hat{u}$  (bzw.  $u$ ) nicht lokalisiert sondern „ausgeschmiert“ (vgl. auch Abbildung 18). In der Quantenmechanik wird dieses Prinzip die *Heisenbergsche Unschärferelation* genannt, welches besagt, dass zwei komplementäre Eigenschaften eines Teilchens, wie Ort und Impuls, nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar sind.

Mit dem fundamentalen Beispiel (7.22) können wir nun auch allgemein sehen, dass die inverse Fourier-Transformation tatsächlich der inverse Operator zu  $\mathcal{F}$  ist.

**Satz 7.10.** Für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = u(x).$$

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass  $u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x_0} \hat{u}(\xi) d\xi$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt. Definieren wir  $v(x) := u(x + x_0)$ , so gilt  $u(x_0) = v(0)$  und nach (7.16)  $e^{i\xi x_0} \hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$ . Es genügt also die Behauptung für  $x_0 = 0$  zu zeigen, d.h.  $2\pi u(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) d\xi$ . Dazu sei  $\check{v}_\varepsilon$  wie in (7.22) und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) \check{v}_\varepsilon(y) dy \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) dy \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

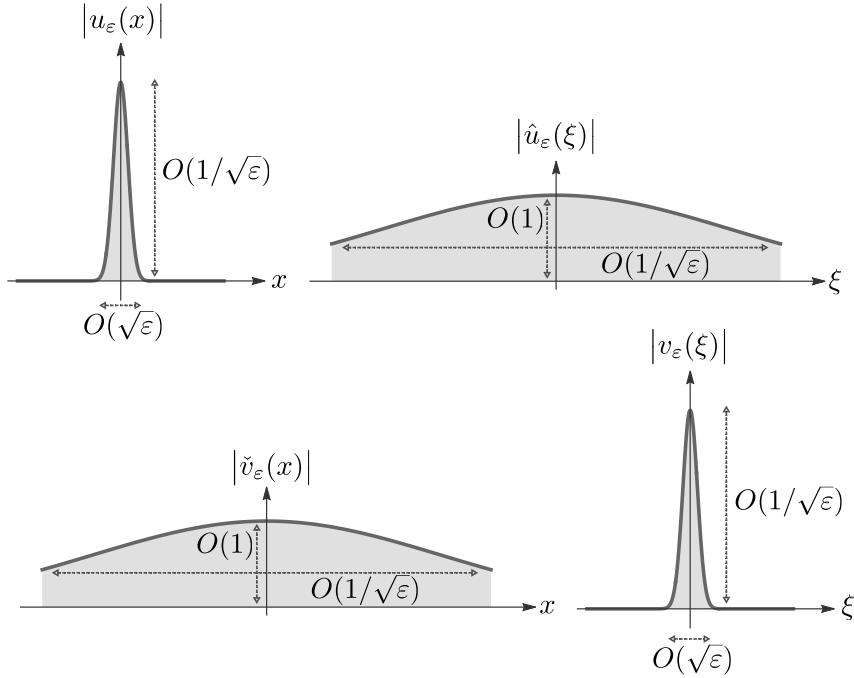


Abbildung 18: Die Funktionen aus (7.21) und (7.22) für kleine Werte von  $\varepsilon$ . Beachte, dass die Identitäten  $\int_{\mathbb{R}} u_{\varepsilon}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} v_{\varepsilon}(\xi) d\xi = 1$  sowie  $\hat{u}_{\varepsilon}(0) = 1$  und  $\check{v}_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi}$  gelten.

Andererseits gilt, da  $\mathcal{F}[\check{v}_{\varepsilon}] = v_{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) \check{v}_{\varepsilon}(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ixy} dx \check{v}_{\varepsilon}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \check{v}_{\varepsilon}(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) v_{\varepsilon}(x) dx \rightarrow u(0). \end{aligned}$$

da  $v_{\varepsilon}$  eine Dirac-Folge ist.  $\square$

**Bemerkung:** Analog erhalten wir, indem wir z.B. die Folge  $u_{\varepsilon}$  nutzen, dass für  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathcal{F}[\check{v}](\xi) = v(\xi).$$

Wir haben also über Approximation in Satz 7.10 gesehen, dass für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} u(y) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} d\xi dy.$$

In anderen Worten, es gilt im distributionellen Sinne, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} d\xi = \delta_x(y) \quad (7.23)$$

und damit auch insbesondere

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} d\xi = \delta_0(y). \quad (7.24)$$

Wir halten also fest, dass wir mittels Approximation gezeigt haben,  $\mathcal{F}[\delta_0] = 1$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta_0$ , sowie  $\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}] = \delta_0$  und  $\mathcal{F}^{-1}[\delta_0] = \frac{1}{2\pi}$ , wobei die Identitäten im distributionellen Sinn zu verstehen sind.

Wir können nun auch allgemein die Fourier-Transformation von Distributionen definieren.

**Definition 7.11** (Fourier-Transformation einer Distribution). *Sei  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Dann definieren wir  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  über*

$$\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

**Bemerkung:** Man muß sich klar machen, dass  $\hat{T}$  in der Tat wieder eine Distribution ist, d.h. ein lineares und stetiges Funktional auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass die Fourier-Transformation linear und stetig auf dem Schwartz-Raum ist.

Wir halten also fest, dass die Fourier-Transformation einer Distribution wieder eine Distribution ist. In diesem Sinne kann man auch weit weniger reguläre Funktionen Fourier-transformieren. Man muß jedoch im Auge behalten, dass die Fourier-Transformierte in der Regel nur wieder eine Distribution ist und andere Eigenschaften als die Funktion hat. Weiter bemerken wir noch, dass falls eine Distribution durch eine hinreichend reguläre Funktion gegeben ist, also falls  $T_w(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} w(x)\varphi(x) dx$ , dann gilt auch  $\hat{T}_w = T_{\hat{w}}$ . Dies folgt aus der Symmetrie der Fourier-Transformation, denn

$$\hat{T}_w(\varphi) = T_w(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} w(\xi)\hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\hat{w}(x) dx = T_{\hat{w}}(\varphi).$$

### Beispiele:

(i). Wir berechnen die Fourier-Transformation für  $T = \delta_a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) = \delta_a \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-iax} dx$$

also wird die Fourier-Transformierte von  $\delta_a$  durch die Funktion  $e^{-iax}$  erzeugt. Insbesondere ist in diesem Sinne die Fourier-Transformierte von  $\delta_0$  gleich der konstanten Funktion 1, wie wir auch oben schon gesehen haben.

(ii). Nun berechnen wir die Fourier-Transformation von  $\delta'_a$ :

$$\hat{T}(\varphi) = \delta'_a(\hat{\varphi}) = \delta_a \left( -\frac{d}{d\xi} \hat{\varphi} \right) = \delta_a \left( \int_{\mathbb{R}} ix\varphi(x)e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)ixe^{-iax} dx,$$

also ist diese gegeben durch die Funktion  $ixe^{-iax}$ . Insbesondere sehen wir, dass Lemma 7.5 (so wie auch die anderen Rechenregeln) auch für die Fourier-Transformation von Distributionen gilt.

## 7.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Fourier-Transformation benutzen, um einfache partielle Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen umzuwandeln. Die Fourier-Methode kann im Allgemeinen unter den folgenden Voraussetzungen angewendet werden:

- (i). Es gibt eine Ortsvariable  $x$ , die Werte in ganz  $\mathbb{R}$  annimmt (*Ganzraumlösung*).
- (ii). Es gibt eine weitere skalare Variable  $t$  (meist die Zeit, es kann aber auch eine weitere Ortsvariable sein).
- (iii). Die Gleichung ist linear und homogen und enthält nur Ableitungen nach  $x$  und  $t$ .
- (iv). Die Koeffizienten in der Gleichung sind entweder konstant oder hängen höchstens von  $t$  ab.

### 7.4.1 Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$ :

Unser erstes Beispiel ist das Anfangswertproblem für die lineare Wärmeleitungsgleichung, d.h. wir suchen eine Funktion  $u = u(x, t)$ , so dass

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad u(0, x) = g(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.25)$$

wobei wir annehmen, dass die gegebene Funktion  $g$  absolut integrierbar über  $\mathbb{R}$  ist.

Die wesentliche Idee ist, für jede Zeit  $t$  die Fourier-Transformierte von  $u$  als Funktion in  $x$  zu betrachten. Im folgenden ignorieren wir alle technischen Schwierigkeiten und argumentieren formal, z.B. vertauschen wir Integration und Differentiation. Alle Argumente können aber im Rahmen der Distributionentheorie rigoros begründet werden.

Durch Anwenden der Fourier-Transformation auf die partielle Differentialgleichung in (7.25) erhalten wir die parametrisierte gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad (7.26)$$

bei der  $\xi \in \mathbb{R}$  die Rolle eines Parameters spielt. Aus einer partiellen Differentialgleichung im Ortsraum wird also eine gewöhnliche Differentialgleichung im Impulsraum.

Wir können die Differentialgleichung (7.26) für jedes  $\xi$  lösen und erhalten

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \hat{u}(\xi, 0),$$

wobei

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi)$$

auf Grund der Anfangsbedingung in (7.25) gilt. Durch Anwenden des Faltungslemmas 7.9

$$u(\cdot, t) = g * K(\cdot, t) \quad \text{wobei} \quad \mathcal{F}[K(\cdot, t)](\xi) = e^{-\xi^2 t}.$$

Wir haben schon gesehen, wie man aus der (inversen) Fourier-Transformation der Gauß-Verteilung und (7.14) die Funktion  $K$  berechnet, machen dies aber noch einmal zu Fuß:

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\xi\sqrt{2t} - \frac{ix}{\sqrt{2t}})^2 - \frac{x^2}{4t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\xi\sqrt{2t} - \frac{ix}{\sqrt{2t}})^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$K(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (7.27)$$

wird auch Wärmeleitungskern bzw. die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung genannt.

Damit ist also durch

$$u(\cdot, t) = g * K(\cdot, t) \quad (7.28)$$

eine Lösung zum Anfangswertproblem (7.25) gegeben. Insbesondere ist  $u$  immer reellwertig sofern  $g$  reell-wertig ist.

Wir wollen nun die Eigenschaften der Lösung  $u$  untersuchen. Dazu bemerken wir zuerst, dass  $K$  unendlich oft differenzierbar ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$ . Nach Konstruktion ist  $K$  auch selbst Lösung der Wärmeleitungsgleichung, d.h. es gilt

$$\partial_t K(x, t) - \partial_x^2 K(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Weiterhin ist  $K(\cdot, t)$  eine Diracfolge für  $t \rightarrow 0$ . Dies folgt aus

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy = 1 \quad (7.29)$$

sowie, falls  $g$  auch stetig ist,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) K(x_0 - x, t) dx &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x_0 - y\sqrt{t}) e^{-y^2} dy \\ &\rightarrow g(x_0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = g(x_0) \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Insbesondere sieht man daran, dass die Funktion  $u$  aus (7.28) tatsächlich auch  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = g(x)$  erfüllt, falls  $g$  zusätzlich stetig ist.

Weiterhin gelten die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 7.12.** *Es gilt*

- (i). (Regularisierung) Es gilt  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ .
- (ii). (Monotonie) Falls  $a \leq g(x) \leq b$  für alle  $x$ , dann gilt  $a \leq u(x, t) \leq b$  für alle  $x, t$ .
- (iii). (Mascherhaltung) Die Funktion  $u(\cdot, t)$  ist absolut integrierbar für alle  $t > 0$  mit

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

- (iv). (unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) Falls  $g \geq 0$ , und ein  $x_* \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $g(x_*) > 0$ , dann gilt  $u(x, t) > 0$  für alle  $x$  und alle  $t > 0$ .

*Beweis.* (i) Dies folgt aus den Eigenschaften von  $K$  und der Faltung.

(ii): Aus  $g \leq b$  folgt:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) g(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) b dy = b.$$

Analog wird die andere Aussage bewiesen.

(iii): Wir berechnen für festes  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) g(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(z, t) g(y) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(z, t) dz \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) dy. \end{aligned}$$

(iv): Falls ein  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  existiert, so dass  $u(x, t) = 0$ , dann folgt aus

$$\int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) g(y) dy = 0$$

und  $K(x - y, t) g(y) \geq 0$ , dass  $K(x - y, t) g(y) = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Da  $K(x - y, t) > 0$  für alle  $y$ , folgt  $g = 0$  überall, was der Annahme widerspricht.  $\square$

#### 7.4.2 Wellengleichung auf dem Gesamtraum:

Unser zweites Beispiel ist das Anfangswertproblem für die Wellengleichung, d.h. wir suchen  $u = u(x, t)$  als Lösung von

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad u(\cdot, 0) = g, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = h, \quad (7.30)$$

wobei  $g$  und  $h$  zwei gegebene Funktionen sind und wieder  $x \in \mathbb{R}$  sowie  $t \geq 0$  gelten soll. Analog zu oben können wir die entsprechende Gleichung im Impulsraum ableiten und erhalten die parametrisierte gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t^2 \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = 0.$$

Deren allgemeine Lösung ist durch

$$\hat{u}(\xi, t) = \exp(-i\xi t)v_1(\xi) + \exp(i\xi t)v_2(\xi) \quad (7.31)$$

gegeben, wobei die Anfangsbedingungen aus (7.30) die Identitäten

$$\hat{g}(\xi) = v_1(\xi) + v_2(\xi), \quad \hat{h}(\xi) = -i\xi v_1(\xi) + i\xi v_2(\xi)$$

implizieren. Bezuglich der Ortsvariablen  $x$  bedeutet dies (siehe Lemma 7.5)

$$g(x) = \check{v}_1(x) + \check{v}_2(x), \quad h(x) = -\check{v}'_1(x) + \check{v}'_2(x)$$

und eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \check{v}_1(x) &= \frac{1}{2} \left( g(x) - \int_0^x h(y) dy \right) + C, \\ \check{v}_2(x) &= \frac{1}{2} \left( g(x) + \int_0^x h(y) dy \right) - C \end{aligned} \quad (7.32)$$

mit einer Integrationskonstanten  $C$ , die aber am Ende herausfallen wird.

Wir können nun alle bisherigen Teilresultate wie folgt zusammensetzen: Mit der inversen Fourier-Transformation wird (7.31) in die Formel

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} v_1(\xi) e^{-i\xi t + i\xi x} d\xi + \int_{\mathbb{R}} v_2(\xi) e^{i\xi t + i\xi x} d\xi \\ &= \check{v}_1(x-t) + \check{v}_2(x+t) \end{aligned}$$

ergibt. Mit (7.32) erhalten wir schließlich das folgende klassische Ergebnis.

**Satz 7.13 (d'Alembert-Formel** für die Lösung der Wellengleichung in  $\mathbb{R}$ ). Für  $g \in C^2(\mathbb{R})$  und  $h \in C^1(\mathbb{R})$  ist durch

$$u(x, t) = \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad (7.33)$$

eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  des Anfangswertproblems (7.30) gegeben.

### Bemerkungen:

- (i). Im allgemeinen ist  $u \in C^2$  (nicht besser). Im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung haben wir hier also keinen Glättungseffekt.
- (ii). Die allgemeine Lösung besteht aus zwei Wellen, die sich nach links bzw. rechts mit Geschwindigkeit 1 ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Informationen, die von den Daten kommen, ist also hier endlich.
- (iii). Der Wert von  $u$  an der Stelle  $(x_0, t_0)$  hängt von den Werten von  $g$  in  $x_0 - t_0$  und  $x_0 + t_0$  ab, sowie von den Werten von  $h$  in  $(x_0 - t_0, x_0 + t_0)$  ab.
- (iv). Der Einflußbereich von  $(x_0, t_0)$  ist der Kegel  $\{(x, t) \mid |x - x_0| \leq (t - t_0), t > t_0\}$ .
- (v). Die d'Alembertsche Formel gilt auch für nur stetige  $g, h$ . Man erhält eine Lösung im Distributionssinne.

## 7.5 Abtastproblem in der Signalverarbeitung

Wir formulieren abschließend noch ein berühmtes mathematisches Theorem, das in der Nachrichtentechnik und in der ingenieurwissenschaftlichen Informationstheorie sehr wichtig ist und zahlreiche Anwendungen besitzt.

In dieser Anwendung ist die Interpretation von  $u(t)$  ein Signalwert zur Zeit  $t$ , während  $\hat{u}(\xi)$  das Signal im Frequenzbereich darstellt. Das Shannonsche Abtasttheorem besagt, dass ein Signal mit endlicher Bandbreite eindeutig durch eine Reihe von Funktionswerten bestimmt ist, sofern die Abtastrate  $\frac{1}{\Delta t}$  hinreichend groß verglichen mit der Bandbreite ist.

**Satz 7.14** (Abtasttheorem von Kotelnikov-Nyquist-Shannon-Whittaker). *Es sei  $u$  eine Funktion,  $\hat{u}$  ihre Fourier-Transformierte und  $\Delta t, N > 0$ , so dass*

- (i).  $\hat{u}$  verschwindet außerhalb des Intervalls  $[-2\pi N, 2\pi N]$ , d.h.  $\hat{u}(\xi) = 0$  für  $|\xi| > 2\pi N$ ,
- (ii).  $\Delta t$  ist hinreichend klein im Sinne von  $0 < \Delta t \leq 1/(2N)$ .

Dann gilt die Interpolationsformel

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(t_m) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-t_m}{\Delta t}\right), \quad t_m = m\Delta t$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , wobei der Sinus cardinalis definiert ist durch  $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ . Insbesondere ist die Funktion  $u$  bereits eindeutig durch die Werte bestimmt, die sie auf den Punkten  $t_m$  annimmt.

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\Delta t N = \frac{1}{2}$$

annehmen, da wir andernfalls  $N$  durch den größeren Wert  $\tilde{N} = 1/(2\Delta t)$  ersetzen können. In der Vorlesung Mathematik II wurde besprochen, dass jede Funktion auf einem Intervall in Form einer Fourier-Reihe geschrieben werden kann. Wir wollen dies nun auf die Funktion  $\hat{u}$  anwenden, die wir dazu zu einer  $4\pi N$ -periodischen Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Wir erhalten die Darstellungsformel

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \exp\left(\frac{i\xi k}{2N}\right)$$

für alle  $\xi \in [-2\pi N, 2\pi N]$ , wobei jeder der harmonischen Bausteine wegen

$$\exp\left(\frac{i k (\xi + 4\pi N)}{2N}\right) = \exp\left(\frac{i k \xi}{2N}\right)$$

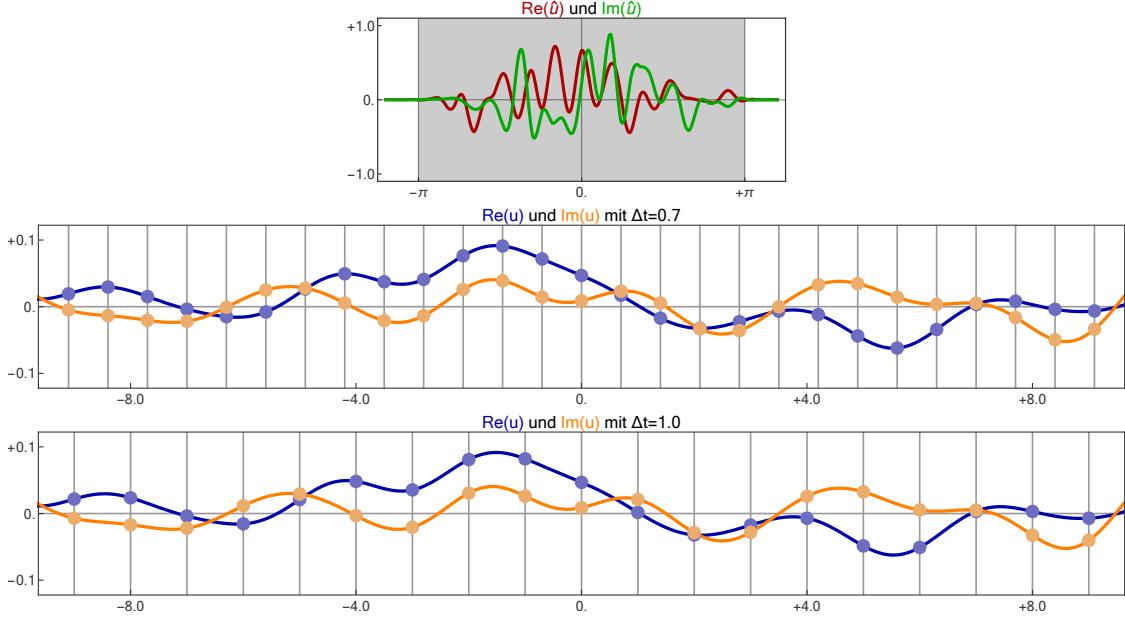


Abbildung 19: Erstes Beispiel für das Abtasttheorem mit Bandbreite  $N = 0.5$ . Die Fourier-Transformierte  $\hat{u}$  des Signals  $u$  ist oben dargestellt und die Signalabtastung wird in den anderen Zeilen für  $\Delta t = 0.7$  und  $\Delta t = 1.0$  illustriert, wobei der zweite Wert gerade dem maximalen Zeitabstand (bzw. der minimalen Abtastfrequenz) für eine fehlerfreie Rekonstruktion entspricht.

$4\pi N$ -periodisch in der Variablen  $\xi$  ist. Die entsprechenden Fourier-Koeffizienten sind (nach Reskalierung auf das Intervall  $(-2\pi N, 2\pi N)$ ) durch

$$\eta_k = \frac{1}{4\pi N} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \hat{u}(z) \exp\left(-\frac{i k z}{2N}\right) dz$$

gegeben und mit Hilfe der Funktion  $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(z) e^{izt} dz$  können wir diese Gleichung auch als

$$\eta_k = \frac{u(-k\Delta t)}{2N} = \frac{u(-t_k)}{2N}$$

schreiben. Im nächsten Schritt kombinieren wir die Reihendarstellung von  $\hat{u}$  mit der For-

mel der inversen Fourier-Transformation und erhalten

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \hat{u}(\xi) \exp(i\xi t) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \exp\left(\frac{ik\xi}{2N}\right) \exp(i\xi t) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \exp\left(i\xi\left(t + \frac{k}{2N}\right)\right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_k}{i\left(t + \frac{k}{2N}\right)} \left[ \exp\left(i\xi\left(t + \frac{k}{2N}\right)\right) \right]_{\xi=-2\pi N}^{\xi=2\pi N} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_k}{i\left(t + \frac{k}{2N}\right)} 2i \sin\left(2\pi N\left(t + \frac{k}{2N}\right)\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(-t_k)}{2\pi N(t + t_k)} \sin(2\pi N(t + t_k)) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(-t_k) \text{sinc}(2N(t + t_k)) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(-t_k) \text{sinc}\left((t + t_k)/\Delta t\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass wir Summation und Integration vertauschen dürfen (was streng genommen eine Annahme an die Güte von  $u$  bzw.  $\hat{u}$  ist). Die Behauptung folgt nun direkt nach Substitution  $k = -m$ .  $\square$

### Bemerkungen:

- (i). Die beiden Bedingungen im Theorem werden Nyquist-Bedingungen genannt, wobei die erste bedeutet, dass das *Signal*  $u$  nur eine *endliche Bandbreite* besitzt. Die Zeiten  $t_m$  sind die sogenannten *Abtastzeiten*, an denen das Signal (zum Beispiel durch Messungen) bekannt ist. Natürlich sind in der Praxis die Messdaten fehlerbehaftet, aber dies wird im Theorem nicht berücksichtigt.
- (ii). Das Theorem besagt, dass jedes Signal eindeutig aus Messdaten rekonstruiert werden kann, sofern die Abtastfrequenz  $1/\Delta t$  größer als die doppelte Bandbreite des Signals ist (zweite Bedingung). Ist die Abtastfrequenz kleiner, so muss die Formel im Theorem um *Interpolationsfehler* ergänzt werden, die man aber nicht aus den Daten berechnen, sondern bestenfalls abschätzen kann. Insbesondere kann es dann zu einem gegebenen Satz von Messdaten mehrere entsprechende Signale geben. Dasselbe gilt im Fall von  $N = \infty$ , d.h. wenn die Bandbreite des Signals unendlich ist.
- (iii). In der Praxis kann die Reihe in der Interpolationsformel nicht exakt berechnet werden und man summiert nur über die Indizes  $m = -M, \dots, +M$ , wobei der

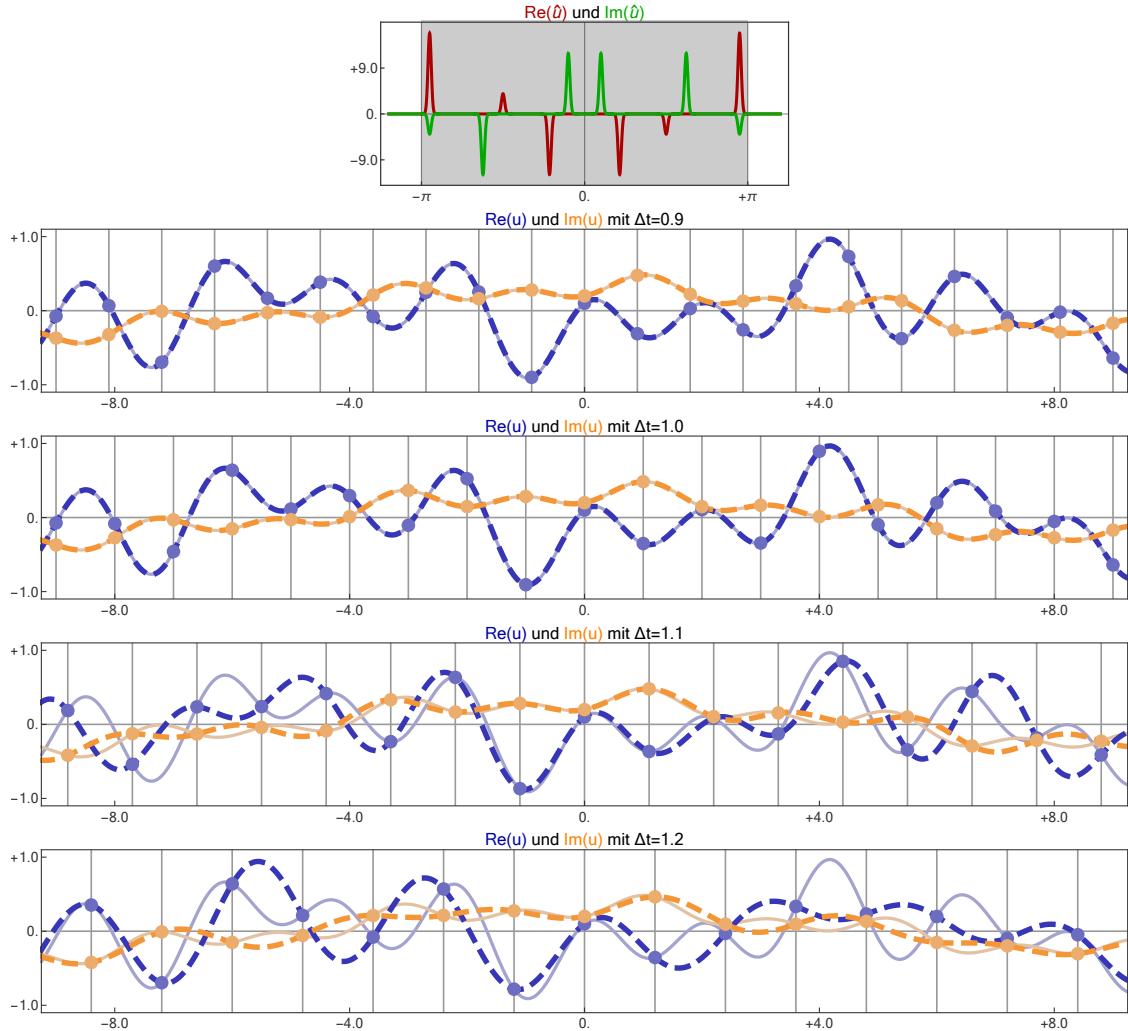


Abbildung 20: Zweites Beispiel für das Abtasttheorem, wobei die Bandbreite wieder  $N = 0.5$  ist und für drei Werte von  $\Delta t$  jeweils das Ursprungssignal  $u$  (blasse Linien) sowie das Ergebnis der Interpolationsformel (gestrichelte Linien) dargestellt werden. In der zweiten und in der dritten Zeile ist die zweite Nyquist-Bedingung  $\Delta t \leq 1$  verletzt, d.h.  $u$  kann nicht vollständig aus Messungen in den Abtastzeiten (Punkte) rekonstruiert werden.

Abschneideparameter  $M$  hinreichend groß sein sollte. Dadurch entstehen natürlich neue bzw. weitere Fehlerterme.

- (iv). Die genaue Formulierung des Abtasttheorems hängt immer davon ab, welche Variante der Fourier-Transformation benutzt wird. Sie sollten beim Arbeiten mit verschiedenen Literaturquellen daher immer aufpassen und jede Formel gegebenenfalls anpassen. Meist müssen aber nur Vorzeichen geändert, Variablen substituiert und Potenzen von  $2\pi$  eingefügt oder entfernt werden.

# 8 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine weitere wichtige Integraltransformation, die vor allem bei der Behandlung von Integralgleichungen, Anfangswertproblemen und generell für Gleichungen, die auf der positiven reellen Halbachse gestellt sind, sehr nützlich ist.

## 8.1 Definition und Eigenschaften

**Definition 8.1.** Die Laplace-Transformation einer Funktion  $u: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert als

$$\mathcal{L}[u](p) = \tilde{u}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Zunächst überlegen wir uns wieder, für welche Funktionen die Laplace-Transformation definiert ist. Durch das schnelle Abklingenverhalten von  $e^{-pt}$  falls  $\operatorname{Re} p > 0$  kann man insbesondere Funktionen zulassen, die auch bei unendlich wachsen, solange dies nicht schneller als exponentiell ist.

Genauer, falls  $u: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar ist, d.h. auf allen kompakten Intervallen in  $(0, \infty)$  und falls  $|u(t)| \leq M e^{ct}$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\mathcal{L}(u)$  definiert für alle  $p \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} p > c$ .

Wir berechnen leicht die Laplace-Transformierte für die folgenden elementaren Beispiele.

**Beispiele:**

- (i). Für  $u(t) = 1$ , ist  $\tilde{u}(p) = \frac{1}{p}$  mit Definitionsbereich  $\operatorname{Re} p > 0$ .
- (ii). Für  $u(t) = t^n$ , ist  $\tilde{u}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$  mit Definitionsbereich  $\operatorname{Re} p > 0$ .
- (iii). Für  $u(t) = e^{-at}$ , ist  $\tilde{u}(p) = \frac{1}{p+a}$  mit Definitionsbereich  $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$ .
- (iv). Für  $u(t) = \cos \omega t$ , ist  $\tilde{u}(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$  mit Definitionsbereich  $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$ .
- (v). Für  $u(t) = \sin \omega t$ , ist  $\tilde{u}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$  mit Definitionsbereich  $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$ .

Ähnlich wie in den Lemmata 7.4 und 7.5 erhalten wir die folgenden Eigenschaften für die Laplace-Transformation.

**Lemma 8.2.** Es gilt, sofern die jeweiligen Ausdrücke existieren,

$$\mathcal{L}[au + bv] = a\mathcal{L}[u] + b\mathcal{L}[v], \quad a, b \in \mathbb{C}, \tag{8.1}$$

$$\mathcal{L}\left[u\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right] = a\mathcal{L}[u](\cdot a), \quad a > 0, \tag{8.2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\cdot} u\right] = \mathcal{L}[u](\cdot + a), \quad a \in \mathbb{C}, \tag{8.3}$$

$$\mathcal{L}\left[u(\cdot - a)\chi_{[0, \infty]}(\cdot - a)\right] = e^{-a\cdot} \mathcal{L}[u], \quad a \in \mathbb{C}, \tag{8.4}$$

$$\mathcal{L}\left[u^{(n)}\right](p) = p^n \mathcal{L}[u](p) - p^{(n-1)} u(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.5}$$

Das folgende Lemma zur Ableitung der Laplace-Transformierten ist das Analogon zu Lemma 7.6.

**Lemma 8.3.** *Es existiere  $\mathcal{L}[u](p)$  für alle  $p$  mit  $\operatorname{Re} p > c$ . Dann ist  $\mathcal{L}[u]$  holomorph für  $\operatorname{Re} p > c$  und es gilt*

$$\mathcal{L}[(\cdot)^n u](p) = (-1)^n \tilde{u}^{(n)}(p).$$

*Beweis.* Zu gegebenem  $p \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} p > c$  und hinreichend kleinem  $\varepsilon > 0$  sei  $h \in \mathbb{C}$  mit  $|h| < \frac{\operatorname{Re} p - (c + \varepsilon)}{2} =: \eta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{u}(p+h) - \tilde{u}(p)}{h} + \int_0^\infty t u(t) e^{-pt} dt \right| &= \left| \int_0^\infty u(t) e^{-pt} \left( \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) dt \right| \\ &\leq |h| \int_0^\infty |u(t) e^{-pt}| t^2 e^{|h|t} dt \\ &\leq C|h| \int_0^\infty |u(t) e^{-(c+\varepsilon)t}| t^2 e^{-\eta t} dt \\ &\leq C|h| \int_0^\infty |u(t) e^{-(c+\varepsilon)t}| dt \leq C|h| \end{aligned}$$

und die Aussage folgt für  $n = 1$ , wenn wir  $h$  gegen null konvergieren lassen. Die Aussage für die höheren Ableitungen ergibt sich analog.  $\square$

### Bemerkung:

Insbesondere erhalten wir aus Lemma 8.3, dass

$$M_k := \int_0^\infty t^k u(t) dt = (-1)^k \tilde{u}^{(k)}(0),$$

d.h. das Abklingverhalten von  $u$  für  $t \rightarrow \infty$  bestimmt die Regularität von  $\tilde{u}$  für  $p \rightarrow 0$  und umgekehrt.

**Lemma 8.4.** *Falls für Funktionen  $u$  und  $v$  die jeweiligen Laplacetransformierten für  $\operatorname{Re} p > c$  existieren, dann existiert auch die Laplacetransformierte von*

$$w(t) = (u * v)(t) = \int_0^t u(s) v(t-s) ds$$

für  $\operatorname{Re} p > c$  und es gilt

$$\mathcal{L}[w] = \mathcal{L}[u * v] = \mathcal{L}[u] \mathcal{L}[v].$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}[u] \mathcal{L}[v])(p) &= \int_0^\infty \int_0^\infty v(t) u(s) e^{-p(t+s)} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty v(s-t) e^{-pt} dt u(s) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t u(s) v(t-s) ds dt \\ &= \mathcal{L}[w](p). \end{aligned}$$

$\square$

Um die Laplace-Transformation in Anwendungen einsetzen zu können, müssen wir sie invertieren können. In einfacheren Beispielen können wir dies mittels der elementaren Beispiele und den Regeln aus den Lemmata 8.2-8.4 berechnen.

**Beispiel:** Wir wollen  $\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$  invertieren. Wir können zum Beispiel rechnen

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} &= \frac{1}{4i\omega} \left( \frac{1}{(p - i\omega)^2} - \frac{1}{(p + i\omega)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4i\omega} \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p + i\omega} - \frac{1}{p - i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{4i\omega} \frac{d}{dp} \left( \mathcal{L}[e^{-i\omega \cdot}](p) - \mathcal{L}[e^{i\omega \cdot}](p) \right) \\ &= \frac{1}{4i\omega} \left( \mathcal{L}[te^{i\omega \cdot}](p) - \mathcal{L}[te^{-i\omega \cdot}](p) \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \mathcal{L}[\cdot \sin(\omega \cdot)](p), \end{aligned}$$

also gilt  $u(t) = \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$ . Alternativ erhalten wir das Resultat auch über

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left( -\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\omega} \frac{d}{dp} \mathcal{L}[\sin(\omega \cdot)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{\cdot \sin(\omega \cdot)}{2\omega}\right](p). \end{aligned}$$

Für komplexere Anwendungen genügt diese Strategie allerdings in der Regel nicht aus und wir benötigen, wie bei der Fourier-Transformation, ein Inversionstheorem. Die entsprechende Formel ist etwas komplizierter als bei der Fourier-Transformation, die Techniken, die wir in der komplexen Analysis erlernt haben, unterstützen uns aber bei der Berechnung der Inversen.

**Satz 8.5.** Es sei  $u \in C^0((0, \infty))$  und  $\mathcal{L}[u]$  existiere für  $\operatorname{Re} p > c \geq 0$ . Dann gilt

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{u}(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} \tilde{u}(p) e^{pt} dp \quad \text{wobei } \sigma > c.$$

*Beweis.* Wir definieren  $v(t) = e^{-\sigma t} u(t) \chi_{(0, \infty)}$  und bemerken, dass diese Funktion absolut integrierbar ist, da  $\tilde{u}(p)$  für  $p$  mit  $\operatorname{Re} p > c$  existiert und  $\sigma > c$  gewählt ist. Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion  $v(t)$

$$\hat{v}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} v(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\xi)t} u(t) dt = \tilde{u}(\sigma + i\xi),$$

welche existiert da  $\tilde{u}(\sigma + i\xi)$  laut Voraussetzung wohldefiniert ist für  $\sigma > c$ . Wir benutzen nun die Inversionsformel für die Fourier-Transformierte, auch wenn wir diese, strikt gesprochen, nur für Schwartz-Funktionen bewiesen haben. Damit erhalten wir

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\sigma + i\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

und somit

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\xi)t} \tilde{u}(\sigma + i\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \tilde{u}(p) dp,$$

wobei wir im letzten Schritt die Variablentransformation  $p = \sigma + i\xi$  vorgenommen haben.

□

### Beispiele:

- (i). Als eine Anwendung von Satz 8.5 berechnen wir die Inverse von  $\tilde{u}(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ . Wir definieren dazu die Wurzelfunktion für  $p = re^{it}$  über  $\sqrt{p} = \sqrt{r}e^{it/2}$  mit  $t \in (-\pi, \pi)$ . Wir integrieren nun die Funktion  $g(z) = e^{zt} \frac{1}{\sqrt{z}}$  über den Integrationsweg  $\Gamma$  aus Abbildung 21. Damit gilt  $\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$ .

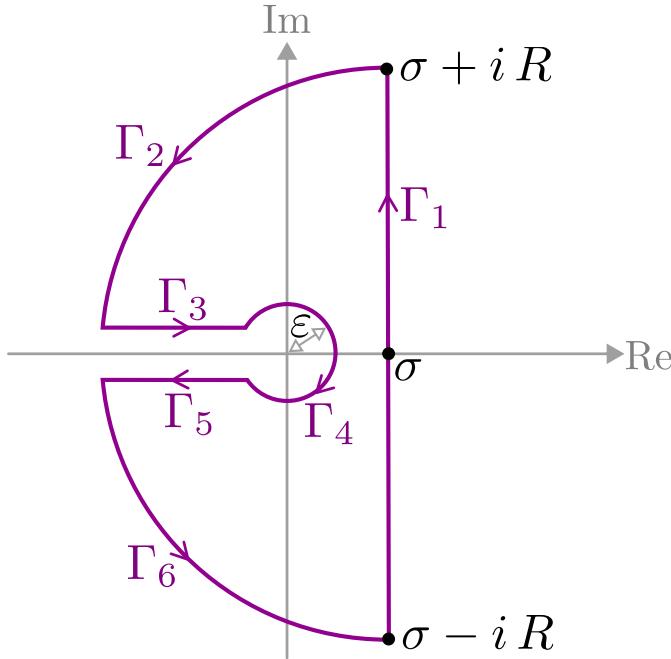


Abbildung 21: Integrationsweg zur Inversion von  $\frac{1}{\sqrt{p}}$

Der Beitrag auf  $\Gamma_2$  verschwindet im Limes  $R \rightarrow \infty$ , denn mit der Parametrisierung  $\gamma(t) = \sigma + Re^{is}$ ,  $s \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{pt} dp \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(\sigma^2 + R^2)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{is}{2}}} e^{t(\sigma + Re^{is})} Rie^{is} ds \right| \\ &\leq \sqrt{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{t(\sigma + R \cos s)} ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $R \rightarrow \infty$  mit dem Jordan Lemma 6.13. Ähnlich folgt die Aussage für  $\Gamma_6$ .

Mit der Standardabschätzung für Wegintegrale erhalten wir

$$\left| \int_{\Gamma_4} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{pt} dp \right| \leq C\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Um das Integral über  $\Gamma_3$  zu berechnen, bemerken wir, dass für  $p = re^{i\pi} = -r$  gilt  $\sqrt{p} = \sqrt{re^{i\pi/2}} = i\sqrt{r}$ , womit folgt

$$\int_{\Gamma_3} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{pt} dp = \int_{-R+\sigma}^{-\varepsilon} \frac{1}{i\sqrt{|y|}} e^{yt} dy = \int_{\varepsilon}^{R-\sigma} \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-xt} dx \rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-xt} dx$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$ .

Da für  $p = re^{-i\pi}$  gilt  $\sqrt{p} = -i\sqrt{r}$ , erhalten wir analog

$$\int_{\Gamma_5} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{pt} dp = - \int_{-\varepsilon}^{-R+\sigma} \frac{1}{i\sqrt{|y|}} e^{yt} dt = \int_{\varepsilon}^{R-\sigma} \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-xt} dt \rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-xt} dx$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  und somit insgesamt

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} g(z) dz &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-xt} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{s} e^{-s^2} \frac{2s}{t} ds \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}\pi} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \end{aligned}$$

(ii). Es sei  $\tilde{u}(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$ . Über Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\tilde{u}(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

und mit den elementaren Beispielen, die wir schon kennen, sowie Lemma 8.2, schließen wir

$$u(t) = -1 - t + e^t.$$

Alternativ können wir die Invertierungsformel aus Satz 8.5 benutzen. Dazu betrachten wir die Funktion  $g(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z-1)}$ , die einen einfachen Pol bei  $z_1 = 1$  hat, sowie einen doppelten Pol bei  $z_2 = 0$ . Wir berechnen  $\text{res}(g, z_1) = e^t$ , sowie  $\text{res}(g, z_2) = -(1+t)$ . Dann integrieren wir  $g$  über die Kurve, die das Geradenstück  $[\sigma-iR, \sigma+iR]$ , für  $\sigma > 1$ , über einen Halbkreis nach links schließt. Der Residuensatz ergibt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) dz = e^t - (1+t)$$

und da der Beitrag über den Halbkreis im Limes  $R \rightarrow \infty$  verschwindet, erhalten wir die schon bekannte Formel für  $u$ .

## 8.2 Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen

### 8.2.1 Integralgleichungen:

Wir suchen eine Lösung der Integralgleichung

$$u(t) = (1 - e^{-\lambda t}) + \lambda \int_0^t u(t-s) e^{-\lambda s} ds.$$

Wenden wir die Laplacetransformation auf diese Gleichung an, so erhalten wir

$$\tilde{u}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\lambda} + \lambda \frac{\tilde{u}}{\lambda+p}$$

und somit folgt  $\tilde{u}(p) = \frac{\lambda}{p^2}$ , sowie  $u(t) = \lambda t$ .

### 8.2.2 Harmonischer Oszillator:

Wir betrachten ein Feder-Pendel, also einen Körper mit Masse  $m$  mit Auslenkung  $x = x(t)$  zur Zeit  $t$ , wobei  $x = 0$  die Ruhelage ist. Die Kraft, die auf den Körper einwirkt ist durch  $-kx$  gegeben, wobei  $k$  die Federkonstante bezeichnet.

- a) Unter Vernachlässigung von Reibung ergibt Newtons zweites Gesetz die Gleichung

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0,$$

wobei die beiden Anfangsbedingungen bedeuten, dass die Masse ausgelenkt ist, aber nicht angestoßen wird.

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichung ergibt mit (8.5) für die Laplace-Transformierte  $\tilde{x}$  die Gleichung

$$m(p^2\tilde{x} - px_0) + k\tilde{x} = 0, \quad \text{also} \quad \tilde{x} = x_0 \frac{p}{p^2 + \frac{k}{m}}.$$

Mit Hilfe unserer elementaren Beispiele können wir die Lösung ablesen:

$$x(t) = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

- b) Nehmen wir Reibungseffekte hinzu, erhalten wir das Anfangswertproblem

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0,$$

mit einer Reibungskonstante  $b > 0$ . Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$m(p^2\tilde{x} - px_0) + b(p\tilde{x} - x_0) + k\tilde{x} = 0,$$

also

$$\tilde{x} = x_0 \frac{p + \frac{b}{m}}{p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m}}.$$

Wir schreiben

$$p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m} = \left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right).$$

Wir nehmen an, dass die Reibung hinreichend klein ist, so dass

$$\omega_1^2 := \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) > 0$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\tilde{x}(p) = x_0 \frac{p + \frac{b}{m}}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2} = x_0 \frac{p + \frac{b}{2m}}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2} + x_0 \frac{\frac{b}{2m}}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2}$$

Mit Hilfe der elementaren Beispiele und (8.3) erhalten wir die Lösung

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_1 t) + x_0 \frac{b}{2m\omega_1} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_1 t).$$

- c) Schließlich erlauben wir noch treibende Kräfte, repräsentiert durch eine Funktion  $f = f(t)$ . Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, dass  $x_0 = 0$  gilt. Dies ergibt die Gleichung

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

und für die Laplace-Transformierte

$$mp^2 \tilde{x} + bm\tilde{x} + k\tilde{x} = \tilde{f}.$$

Dies ergibt

$$\tilde{x}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{m} \frac{1}{\left(p + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2}$$

und mit Hilfe von Lemma 8.4 erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t f(t-s) e^{-\frac{b}{2m}s} \sin(\omega_1 s) ds.$$

Falls zum Beispiel die treibende Kraft ein Impuls zur Zeit  $t = 0$  der Stärke  $P$  ist, also  $f = P\delta_0(t)$ , so erhalten wir

$$x(t) = \frac{P}{m\omega_1} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_1 t).$$

### 8.2.3 Die Wärmeleitungsgleichung auf dem Halbraum:

Wir suchen eine Lösung  $u = u(x, t)$ ,  $x \geq 0, t \geq 0$  des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \kappa \partial_{xx}^2 u &= 0, \\ u(x, 0) &= 0 \quad \text{für } x \geq 0, \\ u(0, t) &= U \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) &\quad \text{bleibt beschränkt für } x \rightarrow \infty \text{ für jedes } t \geq 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen die Laplace-Transformation in der Variablen  $t$ , so dass

$$\tilde{u}(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Da  $p\tilde{u}(x, p) = \int_0^\infty \partial_t u(x, t) e^{-pt} dt$ , erhalten wir

$$p\tilde{u}(x, p) = \kappa \partial_x^2 \tilde{u}(x, p).$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}(x, p) = \alpha(p) e^{x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} + \beta(p) e^{-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}.$$

Bei der Definition der Wurzelfunktion nehmen wir wieder den Zweig  $\sqrt{p} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  mit  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Mit dieser Definition gilt  $\operatorname{Re} \sqrt{p} \geq 0$ .

Aufgrund der Bedingung, dass  $u$  beschränkt bleibt, folgt  $\alpha(p) = 0$  und  $\beta(p)$  ergibt sich aus der Randbedingung  $u(0, t) = U$ , was impliziert

$$\tilde{u}(0, p) = \frac{U}{p}.$$

Also erhalten wir

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{U}{p} e^{-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}, \quad \operatorname{Re} p \geq 0.$$

Die Inversionsformel aus Satz 8.5 ergibt

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{U}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp, \quad \sigma > 0.$$

Wir berechnen dieses Integral ähnlich wie in dem Beispiel nach Satz 8.5, d.h. wir benutzen den Integrationsweg aus Abbildung 21. Wir erhalten wieder, dass die Beiträge von  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_6$  im Limes  $R \rightarrow \infty$  verschwinden. Auf dem kleinen Kreis vom Radius  $\varepsilon$  gilt

$$\frac{1}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} = \frac{1}{p} (1 + O(\sqrt{p})) = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

also ergibt sich, da wir den Kreis in negativer Orientierung durchlaufen,

$$\int_{\Gamma_4} \frac{1}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp = -2\pi i + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Ebenso analog zum Beispiel nach Satz 8.5 erhalten wir

$$\int_{\Gamma_3} \frac{1}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp \rightarrow - \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-rt-ix\sqrt{\frac{r}{\kappa}}} dr$$

und

$$\int_{\Gamma_5} \frac{1}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp \rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-rt+ix\sqrt{\frac{r}{\kappa}}} dr.$$

Also gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{U}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{U}{p} e^{pt-x\sqrt{\frac{p}{\kappa}}} dp - U + \frac{U}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-rt+ix\sqrt{\frac{r}{\kappa}}} dr - \frac{U}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-rt-ix\sqrt{\frac{r}{\kappa}}} dr,$$

und somit

$$u(x, t) = U - \frac{U}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(x\sqrt{\frac{r}{\kappa}}\right) e^{-rt} \frac{1}{r} dr$$

$$= U - \frac{2U}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{2\kappa t}}\right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{y} dy,$$

wobei wir im letzten Schritt die Variablentransformtion  $y^2 = 2rt$  vorgenommen haben. Wie bei der Berechnung der Fourier-Transformierten der Gauß-Verteilung können wir, indem wir  $\cos(vy) = \operatorname{Re} e^{ivy}$  benutzen, berechnen, dass

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(vy) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}v^2}.$$

Wir integrieren diese letzte Identität bezüglich  $v$  über  $[0, \frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}]$  und erhalten so

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}} \cos(vy) dv dy = \int_0^\infty \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{2\kappa t}}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{y} dy.$$

Da  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-z^2} dz$  ergibt sich insgesamt die Lösung

$$u(x, t) = U \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right)$$

mit der *error-function*  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ .

## 9 Harmonische Funktionen und die Poisson-Gleichung

Wir haben schon gesehen, dass die partielle Differentialgleichung  $-\Delta u = \rho$  fundamental ist und in zahlreichen Anwendungen vorkommt, wie z.B. als stationäre Wärmeleitungsgleichung oder in der Elektrostatik. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall  $\rho = 0$ , also mit harmonischen Funktionen.

**Definition 9.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^2(\Omega)$ . Die Funktion  $u$  heißt *harmonisch* in  $\Omega$  wenn  $\Delta u = 0$  auf  $\Omega$ . Dabei ist  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$ .

Wir bleiben im Folgenden in zwei Raumdimensionen, also  $n = 2$ , da ein direkter Zusammenhang zu holomorphen Funktionen besteht und wir zum Teil Methoden der komplexen Analysis nutzen können. Insbesondere können wir mittels konformer Abbildungen,

dies sind holomorphe Abbildungen deren Ableitung nirgends verschwindet, den Fall komplizierter Gebiete auf den Fall einfacher Geometrien, wie z.B. die Kreisscheibe, zurücktransformieren. Die entsprechenden Techniken werden wir im folgenden Kapitel 10 noch besprechen.

Einige zentrale Eigenschaften harmonischer Funktionen, wie die Mittelwerteigenschaft und das Maximumprinzip gelten auch in höheren Raumdimensionen, wir werden jeweils darauf hinweisen, was speziell in zwei Raumdimensionen gilt und welche Aussagen sich auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern lassen.

## 9.1 Harmonische Funktionen

### 9.1.1 Komplexes Potential

Wir haben schon in Kapitel 2 gesehen, dass Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch sind. Umgekehrt stellt sich die Frage, ob wir zu einer harmonischen Funktion  $u$  in einem Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^2$  auch eine holomorphe Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  finden können, so dass  $\operatorname{Re} f = u$  gilt.

**Satz 9.2.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert für jede harmonische Funktion  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine holomorphe Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f = u + iv$ , wobei  $v: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion ist.*

Man nennt  $f$  ein  $u$  zugeordnetes komplexes Potential und  $v$  harmonisch konjugiert zu  $u$ .

*Beweis.* Falls ein komplexes Potential  $f$  existiert, dann gilt  $f' = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_x u - i\partial_y u$ , da die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt sein müssen. Nach Korollar 5.10 zum Satz von Morera 5.9 existiert zu  $g = \partial_x u - i\partial_y u$  eine Stammfunktion  $G$ , da  $U$  einfach zusammenhängend ist. Genauer: es sei  $z_0 \in U$  ein fester Punkt und zu  $z \in U$  sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg, der  $z_0$  und  $z$  verbindet. Wir definieren die Stammfunktion

$$G(z) - G(z_0) = \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta,$$

die, da  $U$  einfach zusammenhängend ist, unabhängig von der Wahl von  $\gamma$  ist. Für den Imaginärteil von  $G$  gilt

$$v(x, y) = v(z) := \operatorname{Im}(G(z) - G(z_0)) = \int_a^b (-\partial_y u(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \partial_x u(\gamma(t))\gamma'_2(t)) dt,$$

also gilt  $\partial_x v = -\partial_y u$  und  $\partial_y v = \partial_x u$ . [Eine andere Notation für das Integral auf der rechten Seite ist auch  $v(x, y) = \int_{\gamma} -\partial_y u dx + \partial_x u dy$ .] Insbesondere ist  $v \in C^2(U)$  und es gelten die Cauchy-Riemannschen Gleichungen. Damit ist  $v$  harmonisch konjugiert zu  $u$  und  $f = u + iv$  ein komplexes Potential zu  $u$ .  $\square$

#### Bemerkungen:

- (i). Ist  $U$  nicht einfach zusammenhängend, so gilt Satz 9.2 nur auf einfach zusammenhängenden Teilgebieten von  $U$ .

- (ii). Sind  $v_1$  und  $v_2$  harmonisch konjugiert zu  $u$ , dann unterscheiden sich  $v_1$  und  $v_2$  höchstens um eine Konstante. Dies folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, denn es gilt  $\partial_x v_1 = -\partial_y u = \partial_x v_2$  und ebenso  $\partial_y v_1 = \partial_y v_2$ .
- (iii). Ist  $v$  harmonisch konjugiert zu  $u$ , dann ist  $u$  harmonisch konjugiert zu  $-v$ , denn falls  $f = u + iv$ , dann gilt  $if = -v + iu$ .

**Beispiel:** Es sei  $u(x, y) = x(1 - y)$ . Wir rechnen leicht nach, dass  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  und harmonisch ist mit  $\partial_x u = 1 - y$  und  $\partial_y u = -x$ . Damit gilt also  $\partial_y v = 1 - y$  und  $\partial_x v = x$ . Also folgt  $v(x, y) = y - \frac{1}{2}y^2 + c(x)$  und aus der zweiten Gleichung folgt  $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$  mit einer irrelevanten Konstante  $C$ , die wir oBdA null setzen. Also gilt  $v(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y - \frac{1}{2}y^2$ . Wir sehen leicht, dass  $v$  in der Tat harmonisch ist und dass die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind.

Wir wollen noch das komplexe Potential als Funktion von  $z$  angeben. Mit  $z = x + iy$  und  $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  erhalten wir

$$f(z) = x(1 - y) + i\left(\frac{1}{2}x^2 + y - \frac{1}{2}y^2\right) = z + i\frac{1}{2}z^2.$$

### 9.1.2 Komplexe Potentiale in der Strömungsmechanik

Eine klassische Anwendung komplexer Potentiale ist die Beschreibung zwei-dimensionaler Strömungen.

Ist  $F = \varphi + i\psi$  eine holomorphe Funktion, dann kann man  $\varphi$  als das Potential des Geschwindigkeitsfeldes einer Strömung interpretieren. D.h. mit  $\vec{u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} := \nabla\varphi$  gilt aufgrund der Cauchy-Riemannschen Gleichungen  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  und  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ . Damit beschreibt  $\vec{u}$  eine stationäre, wirbelfreie, inkompressible ebene Strömung. (Zur Motivation ist der Hintergrund in Anhang A beschrieben.)

$F$  nennt man in diesem Zusammenhang auch komplexes Strömungspotential und  $f = F'$  die komplexe Geschwindigkeit. Aufgrund von  $f = F'(z) = \partial_x \varphi + i\partial_x \psi = \partial_x \varphi - i\partial_y \varphi$  sieht man auch, dass gilt  $\vec{u} = \nabla\varphi = (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)$ .

Haben wir also umgekehrt eine durch  $\vec{u}$  gegebene ebene, inkompressible und wirbelfreie Strömung, so können wir durch  $f := \vec{u}_1 - i\vec{u}_2$  eine komplexe Geschwindigkeit konstruieren und im Falle eines einfach zusammenhängenden Gebietes existiert die Stammfunktion  $F$ , das komplexe Strömungspotential. Oftmals lassen sich über das Strömungspotential einfacher Aussagen über die Strömung treffen.

Um eine Strömung zu visualisieren sind Stromlinien wichtig. Diese sind definiert als Lösungen der Differentialgleichung  $(x, y)'(t) = \vec{u}((x, y)(t))$  und beschreiben die Kurven, die Teilchen mit der Zeit durchlaufen, die sich mit der Strömung bewegen. Die Stromlinien können auch mit dem Imaginärteil  $\psi$  von  $F$ , der sogenannten Stromfunktion, beschrieben werden, denn die Höhenlinien von  $\psi$  sind gerade die Stromlinien von  $\vec{u}$ . Ist  $(x, y)(t)$  nämlich eine Stromlinie, dann gilt mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t), y(t)) = \partial_x \psi x' + \partial_y \psi y' = -\partial_y \varphi x' + \partial_x \varphi y' = (\vec{u})^\perp \cdot \vec{u} = 0.$$

Ebenso sieht man, dass die Höhenlinien von  $\psi$  senkrecht zu den Höhenlinien von  $\varphi$  stehen.

### Beispiele:

(i). Für konstantes  $V \in \mathbb{R}$  ist  $F(z) = Vz$  das komplexe Potential für eine gleichmäßige Strömung  $V$ , die parallel zur reellen Achse verläuft. Es gilt also  $F(z) = V(x+iy)$ , also  $\varphi(x, y) = V(x, 0)$ ,  $\vec{u}(x, y) = \nabla\varphi(x, y) = (V, 0)$  und  $\psi(x, y) = Vy$ . Die Höhenlinien von  $\psi$  sind also die Kurven mit konstantem  $y$ , also die Geraden parallel zu der  $x$ -Achse. Die Höhenlinien von  $\varphi$  sind die mit konstantem  $x$ , also Geraden senkrecht zur  $x$ -Achse.

(ii). Für  $V \in \mathbb{R}$  betrachte

$$F(z) = V \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad |z| > a$$

mit

$$f(z) = F'(z) = V \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right), \quad |z| > a.$$

Hier ist  $F$  das komplexe Potential einer Strömung um einen Kreis mit Radius  $a$ . Dies simuliert eine drei-dimensionale Strömung um einen (unendlich langen) Zylinder senkrecht zur  $(x, y)$ -Ebene mit Radius  $a$ .

Die Strömung nähert sich weit draußen der gleichmäßigen Strömung an. Am Rand  $\partial B_a(0)$  ist die Strömung tangential, denn es gilt mit Polarkoordinaten

$$F = Vr \cos \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + iVr \sin \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Wir sehen also, dass der Imaginärteil von  $F$ , die Stromfunktion, auf  $\partial B_a(0)$  verschwindet. Zudem verschwindet das Geschwindigkeitsfeld  $f$  für  $z = \pm a$ , dies sind sogenannte Stagnationspunkte.

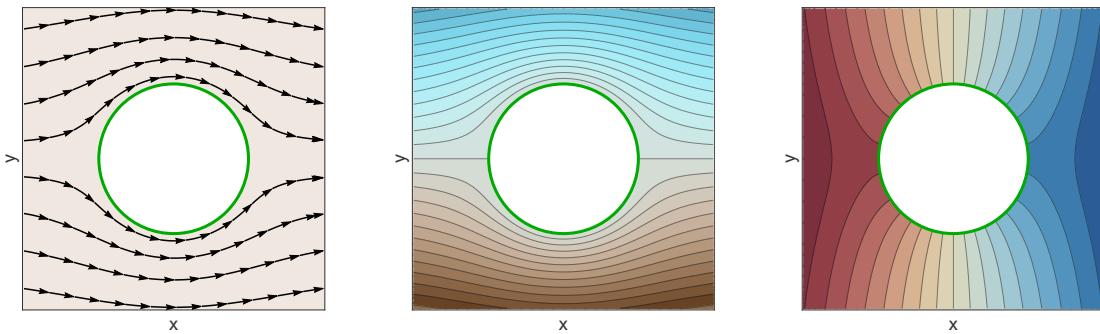


Abbildung 22: Geschwindigkeitsfeld (links), Stromlinien (Mitte) und Höhenlinien des Potentials (rechts) einer Strömung um einen Zylinder

Dies ist natürlich ein Spezialfall, welcher aber besonders wichtig ist, da wir, wie wir später im nächsten Kapitel sehen, werden, mit Hilfe konformer Abbildungen (holomorphe Funktionen, deren Ableitung nirgends verschwindet), komplizierte Fälle auf diesen einfachen Fall zurücktransformieren können.

(iii). Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Wirbellinie, gegeben durch  $F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ ,  $z \neq 0$ , wobei  $\Gamma \in \mathbb{R}$  die Zirkulation beschreibt. Wir ignorieren erst einmal, dass wir eigentlich einen Zweig des Logarithmus wählen müssen und schreiben in Polarkoordinaten  $F = \frac{\Gamma}{2\pi}(\theta - i \ln r)$ . Wir sehen also, dass die Stromlinien durch Kreise gegeben sind, und die Höhenlinien von  $\varphi$  sind die vom Ursprung startenden Halbgeraden.

### 9.1.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumsprinzip

Zentrale Eigenschaften harmonischer Funktionen, auch in höheren Raumdimensionen, sind die Mittelwerteigenschaft und das Maximumsprinzip. Wir sehen uns erst einmal an, was direkt aus der Cauchyschen Integralformel folgt.

**Lemma 9.3** (Sphärische Mittelwerteigenschaft). *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{it}) dt$$

für jede Kugel  $\overline{B}_r(\zeta) \subset U$ , d.h.  $f(\zeta)$  gleicht dem sphärischen Mittel von  $f$  über den Rand der Kugel vom Radius  $r$  mit Mittelpunkt  $\zeta$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus der Umformulierung der Cauchy-Formel 5.6.  $\square$

Als Korollar erhalten wir das folgende Maximumsprinzip.

**Korollar 9.4** (Schwaches Maximumsprinzip). *Unter den Voraussetzungen von Lemma 9.3 gilt*

$$|f(\zeta)| \leq \max_{z \in \partial B_r(\zeta)} |f(z)|$$

Es ergibt sich direkt, dass die Aussagen aus Lemma 9.3 und Korollar auch für harmonische Funktionen gelten, da diese als Real- oder Imaginärteil holomorpher Funktionen betrachtet werden können. Wir beweisen diese und stärkere Aussagen im Folgenden separat. Die Beweise stützen sich nicht auf Argumente der komplexen Analysis und können leicht auf höhere Raumdimensionen übertragen werden.

**Satz 9.5** (Mittelwerteigenschaft). *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $u \in C^2(U)$ ,  $\overline{B_r(x)} \subset U$ .*

*Falls  $-\Delta u \leq 0$  in  $U$ , dann gilt*

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} u dS \tag{9.1}$$

*und*

$$u(x) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} u dy. \tag{9.2}$$

*Beweis.* Für  $\rho \in (0, r]$  gilt

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} u(x + \rho z) dS_z.$$

Sei  $\varphi: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} u(x + \rho z) dS_z$$

definiert. Die Funktion  $\varphi$  ist stetig und  $\varphi(0) = u(x)$ .

Es reicht daher zu zeigen, dass  $\varphi$  in  $(0, r)$  differenzierbar ist und  $\varphi' \geq 0$  gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \varphi(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + \rho z) \cdot \nu dS_z \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \int_{B_1(0)} \Delta u(x + \rho z) dz \geq 0. \end{aligned}$$

Hier wurde der Satz von Gauß benutzt, und die Rechnung (mit  $y = x + \rho z$ )

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial y_i} u(x + \rho z) = \sum_i \rho \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} u(x + \rho z) = \rho \Delta u(x + \rho z)$$

Daher gilt  $\varphi' \geq 0$  in  $(0, r)$  und (9.1) ist bewiesen.

Um (9.2) zu beweisen, schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u dy &= \int_{(0,r)} \left( \int_{\partial B(x,\rho)} u dS \right) d\rho \\ &\geq \int_{[0,r]} 2\pi\rho u(x) d\rho = u(x)\pi r^2. \end{aligned} \tag{9.3}$$

□

**Bemerkung:** Eine Funktion  $u \in C^2(U)$  für die  $-\Delta u \leq 0$  ( $-\Delta u \geq 0$ ) in  $U$  gilt, heißt subharmonisch (superharmonisch). Es ist klar, dass für superharmonische Funktionen die Ungleichungen (9.1) und (9.2) mit umgekehrten Vorzeichen gelten, sowie für harmonische Funktionen als Gleichungen. Dass die erste Eigenschaft, die sphärische Mittelwerteigenschaft, gilt, haben wir schon in Lemma 9.3 gesehen.

**Satz 9.6** (Schwaches Maximumprinzip). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt,  $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$  und*

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{in } U.$$

*Dann gilt*

$$\max u(\overline{U}) = \max u(\partial U).$$

*Beweis.* (i): Sei  $-\Delta u < 0$  in  $U$ , und  $x_0 \in U$  mit  $u(x_0) = \max u(\bar{U})$ . Dann gilt  $Du(x_0) = 0$  und  $D^2u(x_0) \leq 0$  (als symmetrische Matrix bzw. als bilineare Abbildung). Es folgt, dass  $\Delta u(x_0) = \text{Tr } D^2u(x_0) \leq 0$ , was einen Widerspruch zur Annahme ergibt.

(ii): Sei  $-\Delta u \leq 0$  in  $U$  und  $v: U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $v(x) = |x|^2$  definiert. Dann  $-\Delta(u + \varepsilon v) = -\Delta u - 4\varepsilon < 0$  in  $U$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Aus (i) folgt, dass

$$\max(u + \varepsilon v)(\bar{U}) = \max(u + \varepsilon v)(\partial U).$$

Es folgt, dass

$$\max u(\bar{U}) + \varepsilon \min v(\bar{U}) \leq \max u(\partial U) + \varepsilon \max v(\partial U).$$

Da  $U$  beschränkt ist  $\max v(\partial U) < \infty$  und da  $v \geq 0$  ist  $\min v(\partial U) \geq 0$ . Damit folgt für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Aussage.  $\square$

**Bemerkung:** Falls  $u$  harmonisch ist, dann gilt auch

$$\min u(\bar{U}) = \min u(\partial U).$$

**Satz 9.7** (Eindeutigkeit). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt,  $u, v \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ , so dass*

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta v && \text{in } U \\ u &= v && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann gilt  $u = v$ .

*Beweis.* Die Funktion  $w = u - v$  ist harmonisch, und gleich null auf  $\partial U$ . Deshalb gilt nach Satz 9.6 und anschließender Bemerkung

$$0 = \min w(\partial U) = \min w(\bar{U}) \leq \max w(\bar{U}) = \max w(\partial U) = 0,$$

womit  $w = 0$  in  $U$ .  $\square$

Das folgende sogenannte starke Maximumsprinzip ergibt eine noch stärkere Aussage. Es folgt daraus, dass eine nichtkonstante harmonische Funktion kein lokales Maximum oder Minimum im Innern des Gebietes hat.

**Satz 9.8** (Starkes Maximumprinzip). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen, beschränkt, zusammenhängend. Sei  $u \in C^0(\bar{U})$ , so dass*

$$u(x) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} u \, dy \quad \text{für alle } B_r(x) \subset U. \quad (9.4)$$

Dann gilt entweder

(i).  $u(x) < \max u(\partial U)$  für alle  $x \in U$

oder

(ii). Die Funktion  $u$  ist konstant auf  $U$ .

*Beweis.* Wir benutzen ein topologisches Argument. Dazu erinnern wir uns daran, dass eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  zusammenhängend ist, falls sie sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen darstellen lässt.

Sei  $M = \max u(\bar{U})$ ,  $V = \Omega \cap u^{-1}(M) = \{x \in U : u(x) = M\}$ .

Sei  $x \in V$ ,  $B_r(x) \subset U$ . Aus (9.4) folgt

$$M = u(x) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} u \, dy \leq M,$$

womit  $u \equiv M$  auf  $B_r(x)$  und damit  $B_r(x) \subset V$ . Deshalb ist  $V$  offen.

Da  $u$  stetig ist, ist auch die Menge  $U \setminus V = \{x \in U : u(x) \neq M\}$  offen. Da  $U$  zusammenhängend ist, gilt  $V = \emptyset$  (Option (i)) oder  $V = U$  (Option (ii)).  $\square$

## 9.2 Das Dirichlet-Problem

Nachdem wir in Satz 9.7 gesehen haben, dass harmonische Funktionen durch ihre Werte auf dem Rand eines Gebietes eindeutig bestimmt sind, stellt sich die Frage, ob man zu gegebenen Randdaten eine harmonische Funktion findet, die die Randdaten stetig annimmt. Diese Fragestellung ist auch als Dirichlet-Problem bekannt.

**Fragestellung:** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $g: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Gesucht ist eine Funktion  $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ , so dass  $u = g$  auf  $\partial U$  und  $-\Delta u = 0$  in  $U$  gilt.

Wie wir schon gesehen haben, taucht dieses Problem zum Beispiel in der Elektrostatik auf. Man sucht ein elektrostatisches Potential ohne Ladungsverteilung im Inneren, aber mit einer vorgegebenen Spannung auf dem Rand des Gebietes. Eine andere Interpretation ist die Temperaturverteilung in einem Gebiet, mit einer vorgegebenen Temperatur auf dem Rand und ohne Wärmequellen im Inneren des Gebiets.

Im allgemeinen ist es nicht einfach, eine Lösung des Dirichlet-Problems zu finden und dessen Existenz hängt von den Eigenschaften des Gebietes  $U$  und der Randdaten  $g$  ab. Wir diskutieren hier kurz zwei Spezialfälle, den Einheitskreis und den Halbraum. Diese Spezialfälle lassen sich auch in höheren Raumdimensionen ähnlich lösen. Das Besondere am zweidimensionalen Fall ist allerdings, wie schon im Zusammenhang mit Strömungen erwähnt, dass sich mittels konformer Abbildungen das Dirichlet-Problem auf komplizierteren Gebieten mittels konformer Abbildungen wie wir sie im nächsten Kapitel 10 diskutieren werden auf diese einfachen Fälle zurückführen lässt.

### 9.2.1 Das Dirichlet-Problem auf dem Einheitskreis

Im Folgenden betrachten wir das Dirichlet-Problem für den Fall der Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$ . Die Grundlagen für die Lösung dieses Problems hatten wir schon mittels komplexer

Analysis gelegt. In Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 wurde gezeigt, dass für eine holomorphe Funktion auf  $\overline{B}_1(0)$  die Poissonsche Integralformel

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it}) dt,$$

d.h. wir haben  $f$  durch Werte auf dem Einheitskreis auf der ganzen Kreisscheibe dargestellt. Die entsprechende Formel gilt dann auch für Real- und Imaginärteil von  $f$ .

Diese Überlegungen motivieren den folgenden Ansatz für die Lösung des Dirichlet-Problems auf der Einheitsskreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 9.9** (Lösung des Dirichlet-Problems auf der Kreisscheibe). *Es sei  $g: \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist durch*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} g(e^{it}) dt = (P_r * g)(\theta),$$

also durch die Faltung von  $g$  mit dem Poisson-Kern  $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ , die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems gegeben.

Der Beweis dieses Satzes wurde schon in Mathe 2 ausführlich besprochen, wo die Lösungsformel mit Hilfe von Fourier-Reihen hergeleitet wurde und die Eigenschaften des Poisson-Kerns besprochen wurden. Insbesondere gilt, dass  $P_r$  eine Dirac-Folge bildet für  $r \rightarrow 1$ , woraus folgt, dass  $u$  tatsächlich die Randdaten stetig annimmt.

### 9.2.2 Das Dirichlet-Problem auf dem Halbraum

Das Dirichlet-Problem auf dem Halbraum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ u(x, 0) &= g(x), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &= 0 && \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dieses Problem haben wir in Aufgabe 2 von Übungsblatt 10 mittels Fourier-Transformation gelöst. (Eine Lösung mittels komplexer Analysis ist auch möglich, die Methode der Fourier-Transformation funktioniert aber auch in höheren Raumdimensionen.) Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} g(\tilde{x}) K(x - \tilde{x}, y) d\tilde{x} = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\tilde{x})}{|x - \tilde{x}|^2 + y^2} d\tilde{x}, \quad (9.5)$$

also durch die Faltung in der  $x$ -Variablen der Randdaten mit dem Poisson-Kern des Halbraumes

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Man rechnet recht leicht nach, dass dies tatsächlich eine Lösung des Dirichlet-Problems definiert (Übungsaufgabe). Die Lösung ist auch eindeutig, dies folgt hier jedoch nicht direkt aus dem Maximum-Prinzip, da das Gebiet nicht beschränkt ist.

## 9.3 Die Poisson-Gleichung

### 9.3.1 Die Poisson-Gleichung im Ganzraum

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = \rho \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Eine Interpretation dieser Gleichung ist, dass (bis auf Konstanten)  $u$  das elektrostatische Potential zu einer Ladungsverteilung  $\rho$  beschreibt.

Im folgenden bezeichnen wir, anders als im vorigen Abschnitt, mit  $x$  immer einen Punkt im  $\mathbb{R}^2$  und ebenso  $y \in \mathbb{R}^2$ , da ansonsten die Notation zu kompliziert werden würde.

**Definition 9.10** (Fundamentallösung). *Wir definieren  $\Phi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|.$$

**Bemerkung:** Man rechnet leicht nach, dass

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

**Satz 9.11.** *Sei  $\rho \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ <sup>2</sup> und  $u = \rho * \Phi$ , d.h.,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) \rho(y) dy. \tag{9.6}$$

Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  und

$$-\Delta u = \rho \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass für alle  $r > 0$  gilt

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi dS = -1. \tag{9.7}$$

Man rechnet

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2},$$

also

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi dS = - \int_{\partial B_r(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} dS = -1.$$

Es gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  mit

$$Du = \Phi * D\rho \quad \text{und} \quad D^2u = \Phi * D^2\rho.$$

---

<sup>2</sup>Notation:  $C_c^2(\mathbb{R}^2) = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R}^2), f \text{ hat kompakten Träger}\}$

also auch  $\Delta u = \Phi * \Delta \rho$ .

Sei  $x \in \mathbb{R}^2$  und sei  $R$  so groß, dass  $R > |x|$  und  $\text{supp } \rho \in B_R(0)$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy \\ &= \int_{B_R(x)} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy \\ &= \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy + \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy.\end{aligned}$$

Es gilt  $\int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| dy \leq C\varepsilon^2 \log 1/\varepsilon$  und da  $f \in C^2$ , folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy = 0.$$

Auf das erste Integral wenden wir den Satz von Gauß an und erhalten, da  $\partial_\nu \rho = 0$  auf  $\partial B_R(x)$  gilt,

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta \rho(x - y) dy &= - \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla \rho(x - y) dy \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_\nu \rho(x - y) dS_y.\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\nu$  die äußere Normale an  $\partial B_\varepsilon(0)$ . Es gilt nun wiederum

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_\nu \rho(x - y) dS_y = 0.$$

Eine weitere Anwendung des Satzes von Gauß, sowie die Tatsache, dass  $\rho = 0$  auf  $\partial B_R(x)$  und  $\Delta \Phi = 0$  in  $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$ , ergibt

$$-\int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla \rho(x - y) dy = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho(x - y) \partial_\nu \Phi(y) dS_y.$$

Insgesamt haben wir nun hergeleitet, dass

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho(x - y) \partial_\nu \Phi(y) dS_y$$

gilt. Wir benutzen nun (9.7) und die Stetigkeit von  $\rho$ , um zu schreiben

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho(x - y) \partial_\nu \Phi(y) dS_y \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(0)} \rho(x - \varepsilon z) \partial_\nu \Phi(z) dS_z \\ &= -\rho(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(0)} (\rho(x - \varepsilon z) - \rho(x)) \partial_\nu \Phi(z) dS_z \\ &= -\rho(x),\end{aligned}$$

und dies ist gerade die Behauptung.  $\square$

### Bemerkungen:

(i). Das obige Argument zeigt, dass

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) \Delta \varphi(y) dy = \varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$$

und analog

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y-x) \Delta \varphi(y) dy = \varphi(x) \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2). \quad (9.8)$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass diese Identitäten auch für alle Schwartz-Funktionen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  gelten, es gilt also insbesondere

$$-\Delta \Phi = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Die Interpretation in der Elektrostatik ist, dass  $\Phi$  das durch die Punktladung  $\delta_0$  erzeugte elektrostatische Potential ist und  $E = -\nabla \Phi = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}$  das durch die Punktladung erzeugte elektrische Feld.

(ii). In Raumdimension  $n = 3$  ist die Fundamentallösung des Laplace-Operators durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

gegeben. Die Aussagen aus Satz 9.11, sowie (9.8) lassen sich völlig analog nachrechnen.

#### 9.3.2 Das Randwertproblem

In diesem Kapitel diskutieren wir kurz, wie man die Poisson-Gleichung in beschränkten Gebieten mit Dirichlet-Randwerten lösen kann. D.h. für beschränktes  $U \subset \mathbb{R}^2$  mit glattem Rand und vorgegebenen Daten  $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  sucht man Lösungen von

$$-\Delta u = \rho \quad \text{in } U, \quad (9.9)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U. \quad (9.10)$$

In der Theorie Partieller Differentialgleichungen gibt es verschiedene Ansätze, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachzuweisen, sowie deren Eigenschaften zu untersuchen. Bei einfachen Gebieten kann man manchmal explizite Lösungen mit Hilfe der sogenannten Greenschen Funktion angeben. Wir wollen hier kurz die Strategie erläutern.

Wir bemerken zunächst, dass die Gauß-Green Formel ( $\int_U (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial U} (u \partial_\nu v - v \partial_\nu u)$ ) ergibt

$$\int_U (\Phi(y-x) \Delta u(y) - u(y) \Delta \Phi(y-x)) dy = \int_{\partial U} (\Phi(y-x) \partial_\nu u - u(y) \partial_\nu \Phi(y-x)) dS_y.$$

Wenn man nun  $-\Delta\Phi$  als Diracdistribution interpretiert, d.h.  $-\int_U u(y)\Delta\Phi(y-x)dy = u(x)$ , so ergibt sich die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\partial U} (\Phi(y-x)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu\Phi(y-x)) dS_y - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y) dy.$$

Diese Formel drückt nun  $u$  durch  $\Delta u$  und die Randwerte von  $u$  und  $\partial_\nu u$  aus. Wir wissen aber schon aus dem Maximumprinzip, dass die Lösung von  $-\Delta u = \rho$  (wenn sie existiert) schon eindeutig durch die Randwerte von  $u$  gegeben ist.

Um eine Formel zu gewinnen, welche nur die Randwerte von  $u$  enthält, benötigen wir die sogenannte Greensche Funktion, eine Verallgemeinerung der Fundamentallösung. Dazu sucht man eine Funktion  $G: U \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} -\Delta_y G(x, y) &= \delta_x && \text{in } \mathcal{S}', \text{ für alle festen } x \in U \\ G(x, \cdot) &= 0 && \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

Hat man eine solche Greensche Funktion zur Verfügung, dann ist eine Lösung von (9.9)-(9.10) durch

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y)\partial_\nu G(x, y)dS_y + \int_U G(x, y)\rho(y)dy. \quad (9.11)$$

gegeben. Dies folgt wieder aus dem Satz von Gauß

$$\int_U (u\Delta G - G\Delta u) dy = \int_{\partial U} (u\partial_\nu G - G\partial_\nu u)dS_y,$$

und  $-\Delta G(x, \cdot) = \delta_x$  und  $G = 0$  auf dem Rand.

Im allgemeinen ist die Existenz einer Greenschen Funktion genauso schwer zu zeigen, wie die Existenz einer Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Für einfache Gebiete, wie zum Beispiel den Halbraum, können wir die Greensche Funktion explizit angeben, indem wir ein Spiegelungsprinzip nutzen.

**Halbraum:** Die Greensche Funktion für das Gebiet

$$\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

ist

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - Px),$$

wobei  $Px = (x_1, -x_2)$ .

Man nennt  $K: \mathbb{R}_+^2 \times \partial\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K = -\partial_\nu G$ ,

$$K(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} = \frac{x_2}{\pi} \frac{1}{|x - y|^2}$$

den Poisson-Kern des Halbraumes, welchen wir schon in Kapitel 9.2 gesehen haben. Im Falle  $\rho = 0$  ergibt sich somit wieder die Lösungsformel (9.5).

# 10 Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Wir kehren in diesem Kapitel noch einmal zu Eigenschaften holomorpher Funktionen zurück, insbesondere zu deren Abbildungseigenschaften. Diese sind bei einigen Randwertproblemen im  $\mathbb{R}^2$  sehr hilfreich, da sie erlauben, Probleme in einfachere zu transformieren. Wie wir gesehen haben, lässt sich zum Beispiel das Dirichlet-Problem auf dem Einheitskreis oder dem Halbraum, explizit lösen. Auf komplizierteren Gebieten können wir im  $\mathbb{R}^2$  konforme Abbildungen, wie sie in diesem Kapitel diskutiert werden, nutzen, um das Problem auf den Fall eines einfachen Gebietes zu transformieren.

## 10.1 Konforme und biholomorphe Abbildungen

**Definition 10.1.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine (reell) differenzierbare Funktion. Die Funktion  $f$  heißt konform, falls sie Winkel erhält.

Winkelerhaltend bedeutet das Folgende: es seien  $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbare Wege mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\gamma'_1(0) \neq 0, \gamma'_2(0) \neq 0$ . Dann ist der Winkel zwischen  $\gamma'_1(0)$  und  $\gamma'_2(0)$  derselbe, wie der zwischen  $(f \circ \gamma_1)'(0)$  und  $(f \circ \gamma_2)'(0)$ .

Wenn wir nun wie üblich  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  identifizieren und  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$  setzen, dann bedeutet dies  $\arg \gamma'_1(0) - \arg \gamma'_2(0) = \arg(f \circ \gamma_1)'(0) - \arg(f \circ \gamma_2)'(0)$ , oder auch

$$\arg\left(\frac{\gamma'_1(0)}{\gamma'_2(0)}\right) = \arg\left(\frac{(f \circ \gamma_1)'(0)}{(f \circ \gamma_2)'(0)}\right).$$

**Lemma 10.2.** Falls  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist und  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ , dann ist  $f$  konform.

*Beweis.* Es seien  $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  stetig differenzierbar und so, dass  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\gamma'_1(0) \neq 0, \gamma'_2(0) \neq 0$ . Dann gilt

$$\arg\left(\frac{(f \circ \gamma_1)'(0)}{(f \circ \gamma_2)'(0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(\gamma_1(0))\gamma'_1(0)}{f'(\gamma_2(0))\gamma'_2(0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma'_1(0)}{\gamma'_2(0)}\right).$$

□

### Bemerkungen:

- (i). Nach der Kettenregel ist die Verknüpfung konformer Abbildungen wieder konform.
- (ii). Lemma 10.2 besagt, dass jede holomorphe Funktion  $f$  konform ist, sofern ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet. Man kann auch zeigen, dass jede konforme Abbildung auf  $U$  schon holomorph sein muss, wobei wir das wesentliche Argument schon beim Studium der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen kennen gelernt hatten: eine im Reellen differenzierbare Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann winkel- und orientationstreu, wenn ihre Jacobi-Matrix in jedem Punkt eine Drehstreckung beschreibt.

(iii). Gilt  $f'(z_*) = 0$  in einem Punkt  $z_* \in D$ , so ist  $f$  nicht mehr konform. Wir können dies beispielhaft an dem Monom  $f(z) = z^n$  mit  $n > 1$  verstehen (siehe Abbildung 23). Da es außerdem für jedes  $\tilde{z} \in B_1(0)$  mit  $\tilde{z} \neq 0$  genau  $n$  Punkte  $z \in B_1(0)$  mit  $z^n = \tilde{z}$  gibt (nämlich die  $n$ -ten komplexen Wurzeln von  $\tilde{z}$ ), schließen wir insgesamt, dass jedes Monom vom Grad größer 1 die Einheitskreisscheibe zwar holomorph und surjektiv, aber weder injektiv noch konform auf sich abbildet.

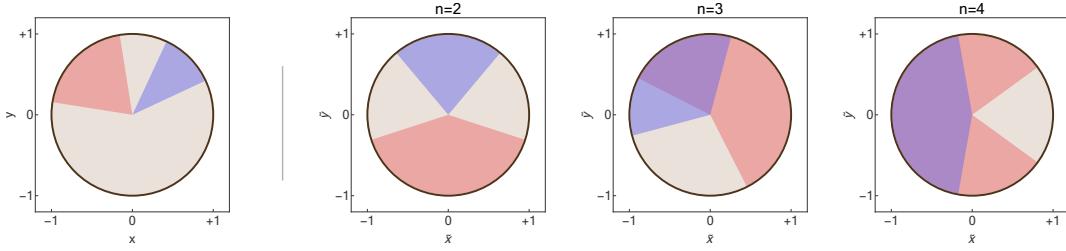


Abbildung 23: Das  $n$ -te Monom ist für  $n > 1$  nicht konform im Koordinatenursprung, da jedes Tortenstück im Urbildbereich (ganz links) auf ein Tortenstück mit *größerem* Öffnungswinkel (und gedrehter Mittellinie) abgebildet wird.

Wir beweisen nun das schon angekündigte Resultat, dass harmonische Funktionen durch holomorphe Abbildungen wieder auf harmonische Funktionen abgebildet werden.

**Lemma 10.3.** Es seien  $U$  und  $\tilde{U}$  offene Mengen in  $\mathbb{R}^2$ ,  $f: U \rightarrow \tilde{U}$  holomorph und  $\tilde{u}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, d.h. es gilt  $\Delta \tilde{u} = 0$  in  $\tilde{U}$ . Dann ist  $u := \tilde{u} \circ f$  harmonisch in  $U$ .

*Beweis.* Mit der Notation  $f(x+iy) = \xi + i\eta$  und  $u(x, y) = \tilde{u}(\xi, \eta)$  folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\Delta u &= \partial_\xi^2 \tilde{u}((\partial_x \xi)^2 + (\partial_y \xi)^2) + \partial_\eta^2 \tilde{u}((\partial_x \eta)^2 + (\partial_y \eta)^2) \\ &\quad + \partial_\xi \tilde{u} \Delta \xi + \partial_\eta \tilde{u} \Delta \eta + 2\partial_\xi \partial_\eta \tilde{u}(\partial_x \xi \partial_x \eta + \partial_y \xi \partial_y \eta)\end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemann Gleichungen gilt  $\partial_x \xi \partial_x \eta + \partial_y \xi \partial_y \eta = 0$ , sowie  $\Delta \xi = \Delta \eta = 0$ . Weiterhin ist  $|f'(x+iy)|^2 = (\partial_x \xi)^2 + (\partial_y \xi)^2 = (\partial_x \eta)^2 + (\partial_y \eta)^2$  und es ergibt sich insgesamt

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = |f'(x+iy)|^2(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)\tilde{u},$$

also insbesondere die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Definition 10.4.** Eine komplex differenzierbare Funktion  $f$  mit Urbildbereich  $U$  und Bildbereich  $\tilde{U} = f(U)$  wird *biholomorph* genannt, falls  $f$  die Menge  $U$  bijektiv auf  $\tilde{U}$  abbildet und falls  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  gilt.

Insbesondere existiert zu einer biholomorphen Funktion  $f$  die Umkehrfunktion  $\tilde{f} = f^{-1}$ , die nach Satz 5.11 auch holomorph ist, und für die  $\tilde{f}'(\tilde{z}) \neq 0$  für alle  $\tilde{z} \in \tilde{U}$  gilt.

### Beispiele:

- (i). Die Abbildung  $f(z) = z^{1/2}$  bildet die obere Halbebene  $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  biholomorph auf den rechten oberen Quadranten  $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 0\}$  ab.
- (ii). Die Logarithmusfunktion  $f(z) = \ln z$  bildet  $\mathcal{H}^+$  biholomorph auf den Streifen  $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$  ab, sowie den oberen Halbkreis  $\{z \in \mathcal{H}^+ \mid |z| < 1\}$  auf den Halbstreifen  $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{Re} w < 0\}$ .

**Bemerkung:** Eine biholomorphe Funktion muss in Randpunkten nicht unbedingt definiert oder differenzierbar sein. Oft wird zwar  $\partial U$  auf  $\partial \tilde{U}$  abgebildet, aber die Randabbildung ist nicht unbedingt bijektiv.

Ein ganz zentraler, bemerkenswerter Satz ist das folgende Theorem, das wir hier nur zitieren wollen.

**Satz 10.5** (Riemannscher Abbildungssatz). *Jede offene, einfach zusammenhängende und echte Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  kann biholomorph auf die Einheitskreisscheibe  $B_1(0)$  abgebildet werden.*

### Bemerkungen:

- (i). Dieser Satz gilt auch, wenn der Rand von  $U$  fraktal ist.
- (ii). Es ist essentiell, dass  $U$  eine echte und einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist. Die Ebene  $\mathbb{C}$  kann nämlich aufgrund des Satzes von Liouville nicht biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden. Genauso wenig können Gebiete mit Löchern biholomorph auf  $B_1(0)$  abgebildet werden.
- (iii). Die Abbildung aus dem Satz von Riemann ist nicht eindeutig. Die Mehrdeutigkeit kann jedoch eliminiert werden, indem man  $f(z_0) = 0$  und  $f'(z_0) \in \mathbb{R}$  für einen festen Punkt  $z_0 \in U$  fordert.
- (iv). Sind  $U, V \subset \mathbb{C}$  zwei offene, einfach zusammenhängende, echte Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , so kann  $U$  biholomorph auf  $V$  abgebildet werden und umgekehrt. Diese Verallgemeinerung des Satzes von Riemann ergibt sich unmittelbar aus einfachen Kompositionssargumenten, denn wenn  $f : U \rightarrow B_1(0)$  und  $g : V \rightarrow B_1(0)$  biholomorph sind, dann sind auch  $g^{-1} \circ f : U \rightarrow V$  und  $f^{-1} \circ g : V \rightarrow U$  biholomorph.

Im folgenden wollen wir uns darauf konzentrieren, insbesondere Gebiete, deren Rand durch Geraden oder Geradenstücke, sowie Kreislinien gegeben ist, ineinander zu transformieren, da dies für Anwendungen besonders relevant ist. Neben den Potenzfunktionen ist die Exponentialabbildung nützlich, die wir schon in einer Übungsaufgabe etwas besprochen hatten, sowie die Möbius-Transformationen. Letztere diskutieren wir nun im folgenden Kapitel.

## 10.2 Möbius Transformationen

Ein besonders einfache und wichtige Klasse konformer Abbildungen sind die sogenannten Möbiustransformationen. Diese sind Abbildungen der Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

Diese Abbildung ist definiert auf  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  und es gilt

$$f'(z) = \frac{(cz + d)a - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

### Eigenschaften von Möbius Transformationen

- (i). Eine Möbius-Transformation kann zu einer Bijektion auf der erweiterten komplexen Ebene  $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (die man mit der Riemannschen Sphäre identifizieren kann) erweitert werden, indem man setzt  $f(-d/c) = \infty$  und  $f(\infty) = a/c$ .
- (ii). Die Hintereinanderschaltung zweier Möbius-Transformationen ist wieder eine Möbius-Transformation.
- (iii). Die Inverse einer Möbius-Transformation ist wieder eine Möbius Transformation: für  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  erhalten wir nach Auflösen  $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ .
- (iv). Jede Möbius Transformation kann man durch die Hintereinanderschaltung elementarer Möbius Transformationen erhalten, nämlich Translation  $z \mapsto z + z_0$ , Multiplikation  $z \mapsto wz$  und Inversion  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Dies sieht man folgendermaßen: Sei  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  eine Möbius Transformation. Falls  $c = 0$  ist die Aussage klar. Falls  $c \neq 0$  können wir schreiben

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}$$

und damit erhalten wir  $f$  aus Hintereinanderschalten von

$$z \rightarrow cz \rightarrow cz + d \rightarrow c(cz + d) \rightarrow \frac{1}{c(cz + d)} \rightarrow -\frac{ad - bc}{c(cz + d)} \rightarrow \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

- (v). Eine Möbius-Transformation bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise und Geraden ab, wobei eine Gerade auf einen Kreis abgebildet werden kann und umgekehrt. Geraden kann man in diesem Zusammenhang als Kreise mit unendlich großem Radius interpretieren. Wir sagen auch, eine Möbius-Transformation bildet Kreisgeraden auf Kreisgeraden ab.

Die Aussage ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

- (a) Das Bild eines Kreises bzw. einer Gerade unter Translation bleibt ein Kreis bzw. eine Gerade

- (b) Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht einer Drehstreckung. Es ist klar, dass ein Kreis bzw. eine Gerade unter einer Drehstreckung ein Kreis bzw. eine Gerade bleibt.
- (c) Wir betrachten nun die inverse Abbildung. Sei dazu der Kreis  $|z - z_0| = r$  gegeben. Wir nehmen zunächst an, dass  $|z_0| \neq r$ , d.h. der Nullpunkt liegt nicht auf dem Kreis. Dann gilt für  $z$  mit  $|z - z_0| = r$ , dass

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{r^2 - |z_0|^2} \right|^2 = \frac{r^2}{(r^2 - |z_0|^2)^2},$$

also ist das Bild der Inversion wieder ein Kreis.

Falls nun  $|z_0| = r$ , dann erhalten wir als Bild eine Gerade. Dies können wir folgendermaßen sehen: Wir nehmen oBdA an, dass  $r = 1$  und  $z_0 = 1$ . Dann ist die Kurve parametrisiert durch  $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ,  $t \in (-\pi, \pi]$  (für  $t = \pi$  gilt  $\gamma(t) = 0$  und die Inverse ist nicht definiert). Wir finden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(t)} &= \frac{1}{1 + e^{it}} = \frac{1}{(1 + \cos t) + i \sin t} = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= \frac{1 + \cos t - i \sin t}{2 + 2 \cos t} = \frac{1}{2} \left( 1 - i \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass der Term  $\alpha(t) := \frac{\sin t}{1 + \cos t}$  auf  $(-\pi, \pi)$  streng monoton wachsend ist mit  $\alpha(t) \rightarrow -\infty$  für  $t \rightarrow -\pi$  und  $\alpha(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \pi$ . Damit erhalten wir als Bild die vertikale Gerade  $\{x = \frac{1}{2}\}$ .

Für Geraden können wir ähnlich argumentieren.

- (d) Zu jeweils verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  in  $\mathbb{C} \cup \infty$  gibt es genau eine Möbiustransformation  $f$  mit  $w_i = f(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Diese ist durch die Formel

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (10.1)$$

bestimmt. Falls für einen der Punkte gilt  $z_i = \infty$  oder  $w_i = \infty$ , also z.B.  $z_1 = \infty$ , dann ist der Faktor  $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = 1$  zu setzen.

Dazu bemerken wir, dass die Abbildung

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

die Punkte  $z_1, z_2, z_3$  auf  $0, 1, \infty$  abbildet. Ebenso bildet

$$h(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

die Punkte  $w_1, w_2, w_3$  auf  $0, 1, \infty$  ab. Dann ist  $f := h^{-1} \circ g$  eine Möbiustransformation mit der gewünschten Eigenschaft. (Die Bedingung, dass die jeweiligen

Ableitungen ungleich null sind ist gerade äquivalent dazu, dass die Punkte jeweils verschieden sind.)

Um die Eindeutigkeit nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass die einzige Möbiustransformation, die  $0, 1, \infty$  auf  $0, 1, \infty$  abbildet, die Identität  $f(z) = z$  ist. In der Tat folgt aus der Bedingung  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  und  $f(\infty) = \infty$ , dass  $b = 0$ ,  $c = 0$  und  $a = d$  gelten muss, also gilt  $f(z) = z$ .

Es ist nicht unbedingt immer zu empfehlen, die Formel (10.1) zur Berechnung einer Möbiustransformation zu benutzen, da man sich schnell verrechnen kann.

**Beispiel:** Wir suchen eine Möbius-Transformation, die die obere offene Halbebene  $\mathcal{H}^+ : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  auf den offenen Einheitskreis abbildet.

$\mathcal{H}^+$  ist charakterisiert durch die Punkte  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - i| < |z + i|$ , daher sieht man direkt, dass  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  eine solche Abbildung ist.

Alternativ versuchen wir, drei Randpunkte von  $\mathcal{H}^+$  auf den Einheitskreis abzubilden. Dazu nehmen wir  $\infty$ ,  $0$  und  $1$  und bilden diese auf  $1$ ,  $-1$  und  $i$  ab. Wir erhalten

$$\infty \mapsto 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = 1, \quad 0 \mapsto -1 \Rightarrow \frac{b}{d} = -1, \quad 1 \mapsto i \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = i,$$

also folgt  $\frac{c-d}{c+d} = i$ . Da die Koeffizienten nur bis auf Multiplikation mit einer Konstanten bestimmt sind, wählen wir  $c = 1$ , erhalten so  $a = 1$ ,  $d = -i$  und  $b = i$ , also insgesamt  $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ . Nun sehen wir aber, dass  $i$  auf  $\infty$  abgebildet wird, wir haben also  $\mathcal{H}^+$  auf das Äußere des Einheitskreises abgebildet. Wir verknüpfen die Abbildung nun noch mit der Inversen und erhalten schließlich  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ . (Damit gilt  $f(1) = -i$ .) Diese Abbildung ist auch als Cayley-Abbildung bekannt (siehe Abbildung 24).

### Beispiel zur Verknüpfung von Abbildungen:

Wir suchen eine Abbildung die den Viertelkreis  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  biholomorph auf die Einheitskreisscheibe  $B_1(0)$  abbildet. Dazu wollen wir elementare Abbildungen verknüpfen und suchen dazu holomorphe Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(i).  $f_1$  bildet den Viertelkreis biholomorph auf den Halbkreis  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  ab. Dies wird durch  $w = f_1(z) = z^2$  erreicht.

(ii).  $f_2$  bildet den Halbkreis biholomorph auf den oberen rechten Quadranten  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  ab.

Dazu suchen wir wieder eine geeignete Möbiustransformation, also  $f_2(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Zunächst setzen wir wieder oBdA  $c = 1$  und suchen drei Punkte aus dem Rand des Halbkreises, die wir auf den Rand des Quadranten abbilden wollen. Mit

$$\begin{aligned} 1 \mapsto \infty &\Rightarrow d = -1 \\ -1 \mapsto 0 &\Rightarrow a = b \\ 0 \mapsto 1 &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

folgt, dass  $f_2(z) = -\frac{z+1}{z-1}$  eine mögliche solche Abbildung ist.

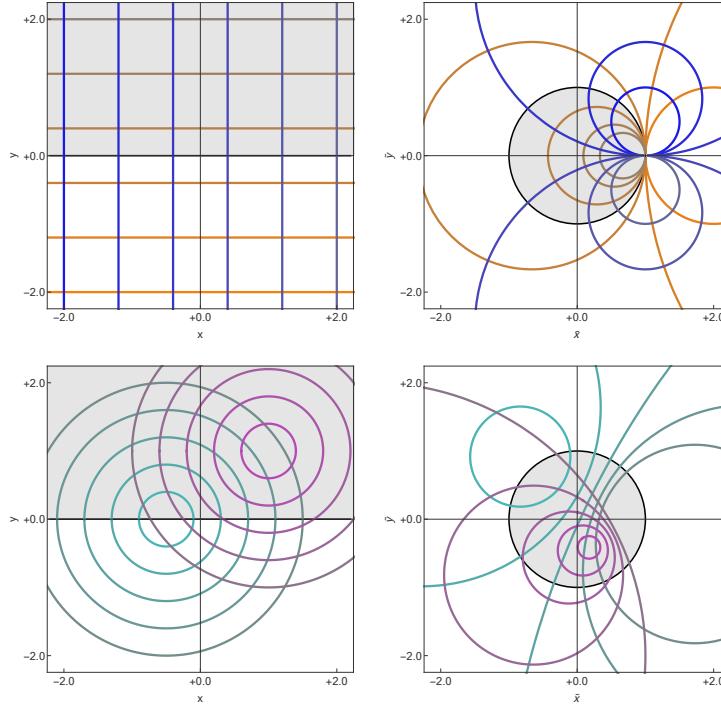


Abbildung 24: Die Cayley-Abbildung bildet die obere Halbebene auf die Einheitskreisscheibe ab. Die Abbildung zeigt auch, wie Geraden (oben links) auf Kreise (oben rechts) abbildet, sowie Kreise (unten links) auf andere Kreise (unten rechts). (Kreise durch den Nullpunkt, die auf Geraden abgebildet werden, sind nicht eingezeichnet.)

- (iii).  $f_3$  bildet den oberen rechten Quadranten biholomorph auf die obere Halbebene  $\mathcal{H}^+$  ab. Dies wird wieder durch  $f_3(z) = z^2$  erreicht.
- (iv).  $f_4$  bildet die obere Halbebene biholomorph auf die offene Kreisscheibe ab. Wir haben schon gesehen, dass die Cayley-Abbildung  $f_4(z) = \frac{z-i}{z+i}$  dies erreicht.

Die gesuchte Abbildung ist nun die Hintereinanderschaltung  $f := f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ . Wir erhalten als Endergebnis

$$f(z) = \frac{\left(\frac{z^2+1}{1-z^2}\right)^2 - i}{\left(\frac{z^2+1}{1-z^2}\right)^2 + i} = \frac{(z^2+1)^2 - i(1-z^2)^2}{(z^2+1)^2 + i(1-z^2)^2} = i \frac{z^4 + 2iz^2 + 1}{z^4 - 2iz^2 + 1}.$$

### 10.3 Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Als eine Anwendung wollen wir das Dirichlet-Problem im Außengebiet zweier unendlich langer Leiter berechnen, die senkrecht zur  $xy$ -Ebene verlaufen. Die Querschnitte beider Leiter werden durch zwei Kreisscheiben mit Radius  $\rho > 0$  beschrieben, die Kreismittelpunkte sind durch  $\pm d$  mit  $d > \rho$  gegeben. Sie liegen also auf der  $x$ -Achse und sind symmetrisch zur  $y$ -Achse.

Wir suchen nun eine harmonische Funktion  $u$  auf der Menge

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - d| > \rho, |z + d| > \rho\}$$

mit Randbedingung

$$u = \pm\mu \quad \text{für } z \in \partial B_\rho(\mp d)$$

für eine gegebene Konstante  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dies bedeutet, dass die Leiter gleich große, aber ungleichnamige Ladungen tragen.

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass die Möbius-Transformation

$$\tilde{z} = f(z) = \frac{\eta + z}{\eta - z} \quad \text{mit } \eta := \sqrt{d^2 - \rho^2}$$

das Gebiet  $U$  auf den Kreisring

$$\tilde{U} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} \mid \tilde{\rho}_1 < |\tilde{z}| < \tilde{\rho}_2\}, \quad \tilde{\rho}_1 = \frac{1}{\tilde{\rho}_2}, \quad \tilde{\rho}_2 = \frac{d + \eta}{\rho}$$

abbildet. Hierbei werden die Randkreislinien  $|z + d| = \rho$  bzw.  $|z - d| = \rho$  auf  $|\tilde{z}| = \tilde{\rho}_1$ , also den Innenkreis, bzw.  $|\tilde{z}| = \tilde{\rho}_2$ , also den Außenkreis abgebildet.

Damit haben wir unser Problem dahingehend transformiert, dass wir nun eine harmonische Funktion  $\tilde{u}$  auf dem Kreisring  $\tilde{U}$  finden müssen, die auf dem Innenkreis  $-\mu$  und auf dem Außenkreis  $\mu$  annimmt.

Aufgrund der Geometrie und den konstanten Randbedingungen ist anzunehmen, dass die Lösung radialsymmetrisch ist. Man rechnet recht einfach nach (Aufintegrieren des Laplace-Operators in Polarkoordinaten), dass eine Lösung durch

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\mu}{\ln \tilde{\rho}_2} \ln |\tilde{z}|$$

gegeben ist. Wir hatten außerdem gesehen, dass eine Lösung des Dirichlet-Problems auf einem beschränkten Gebiet eindeutig ist, also ist dies die gesuchte Lösung. Die Lösung auf dem Außenbereich der zwei Leiter ist dann durch  $u = \tilde{u} \circ f$  gegeben.

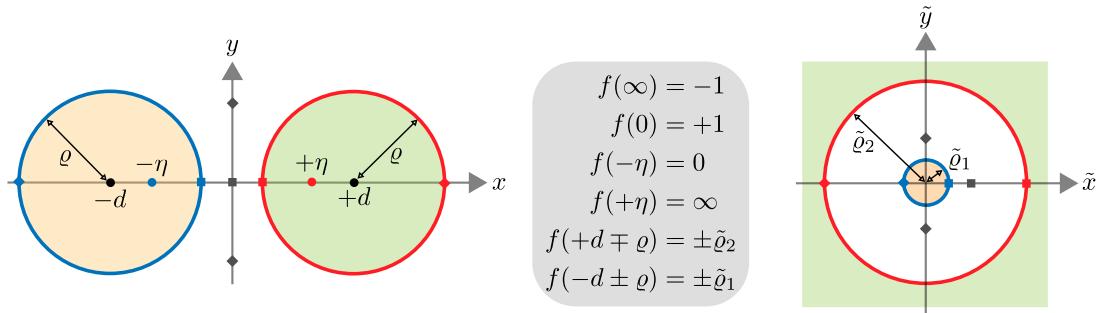


Abbildung 25: *Links:* Die Querschnitte der beiden Leiter als Kreisscheiben in der Ebene sowie die beiden Punkte  $-\eta$  und  $+\eta$ , die symmetrisch bzgl. beider Randkreislinien liegen. *Rechts:* Das Außenbereich der beiden Kreisscheiben wird durch die angegebene Möbius-Transformation  $f$  auf einen Kreisring im Bildbereich abgebildet (jeweils weiß), wobei  $0 < \tilde{\rho}_1 < 1 < \tilde{\rho}_2 < \infty$  für die Radien gilt. *Mitte:* Die Bilder ausgewählter Punkte unter  $f$ .

Wir diskutieren nun noch kurz die elektrischen Feldlinien. Diese sind, analog zu den Stromlinien in der Strömungsmechanik gegeben durch Lösungen der Gleichung  $(x, y)'(t) =$

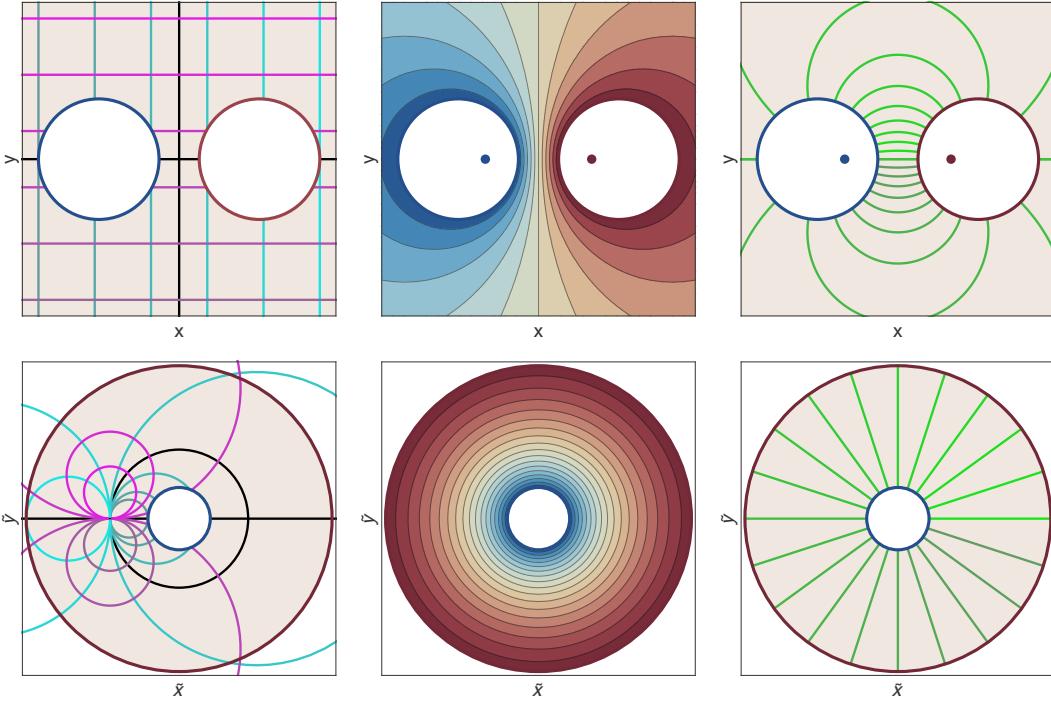


Abbildung 26: *Links:* Darstellung der Möbius-Transformation  $f$ , wobei die horizontale bzw. vertikale Achse im Urbildbereich auf die horizontale Achse bzw. die Einheitskreislinie im Bildbereich abgebildet wird (jeweils schwarz) und das Außengebiet der Leiter nun braun gezeichnet wurde. *Mitte:* Konturplot des elektrischen Potentials  $u$  (oben) bzw.  $\tilde{u}$  (unten) als harmonische Funktion auf  $U$  bzw.  $\tilde{U}$  mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen, wobei alle Niveaumarkierungen sowohl in  $U$  als auch in  $\tilde{U}$  Kreislinien sind. *Rechts:* Die elektrischen Feldlinien sind Integralkurven an das elektrische Feld und stehen immer senkrecht auf den Potentiallinien. Beachte, dass jede Feld- bzw. Potentiallinie oben durch die Transformation  $f$  auf eine entsprechende Kurve unten abgebildet wird und umgekehrt. Insbesondere sind die Feldlinien in  $U$  Segmente von Kreislinien, die die Punkte  $-\eta$  und  $+\eta$  enthalten (farbige Punkte).

$-\nabla u((x, y)(t))$  und stehen senkrecht zu den Potentiallinien, den Höhenlinien von  $u$ . Im Gebiet  $\tilde{U}$  sind die Feldlinien einfach zu identifizieren. Da  $u$  radialsymmetrisch ist, sind die Potentiallinien Kreise und die Feldlinien Segmente von Halbgeraden. Die Halbgeraden werden durch  $f^{-1}$  auf Kreislinien abgebildet, die die Punkte  $f^{-1}(0) = -\eta$  und  $f^{-1}(\infty) = \eta$  verbinden. Die Feldlinien in  $U$  sind somit Segmente solcher Kreislinien. Analog ist jede Potentiallinie in  $U$  eine Kreislinie.

## 10.4 Joukowski-Transformation und Tragflächen

Zuletzt besprechen wir noch die Joukowski-Transformation, die zum Beispiel in der klassischen Strömungsmechanik eine große Rolle spielt. Sie ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad z \neq 0.$$

Die Abbildung ist konform außer bei  $z = \pm 1$ .

Um einige Eigenschaften zu verstehen, ist es nützlich, im Urbildbereich Polarkoordinaten zu benutzen. So gilt mit  $z = re^{i\theta}$ , dass

$$z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta.$$

Schreiben wir  $f(z) = w = u + iv$ , so erhalten wir

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \quad (10.2)$$

Insbesondere gilt für  $|z| = \rho$  und  $\rho \neq 1$ , dass

$$1 = \frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2},$$

also bildet die Joukowski-Transformation einen Kreis mit Radius  $\rho \neq 1$  auf eine Ellipse ab.

Weiter sehen wir, dass wir aus (10.2) erhalten, dass

$$1 = \frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta}$$

gilt. Also werden Halbgeraden mit  $\theta = \theta_*$ ,  $\theta_* \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  auf Hyperbeln abgebildet. Falls  $\theta_* = 0$  ( $\theta_* = \pi$ ), so erhalten wir als Bild die doppelt durchlaufene horizontale Halbachse  $v = 0, u \geq 1$  ( $v = 0, u \leq -1$ ). Falls  $\theta_* = \frac{\pi}{2}$  und  $\theta_* = \frac{3\pi}{2}$  ergibt sich als Bild die vertikale Achse  $u = 0$ .

Der Einheitskreis wiederum wird, wie wir an (10.2) sehen, surjektiv, aber nicht injektiv, auf das Intervall  $[-1, 1]$  abgebildet und das Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$  wird biholomorph auf die geschlitzte Ebene  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  abgebildet.

Wir sehen hier auch, wie man aus der gleichmäßigen Strömung mit Potential  $F(z) = Vz$  in der geschlitzten Ebene mittels der Joukowski-Transformation die Strömung um den Einheitskreis  $F(z) = V\left(z + \frac{1}{z}\right)$  gewinnt (vgl. Kapitel 9.1.2).

Es ist nicht ganz einfach zu sehen, wie das Bild eines nicht im Ursprung konzentrierten Kreises unter der Joukowski-Transformation aussieht. Abbildung 28 zeigt einige Kreise, die auf Tragfächenkontouren abgebildet werden. Die Bedeutung der Joukowski-Transformation zu Beginn des 20. Jahrhunderts ergibt sich daraus, dass man auch die Stromlinien einer Strömung um die Tragfläche, sowie die einwirkenden Kräfte mittels der Joukowski-Transformation berechnen kann, da man, wie schon beschrieben, die Strömung um die Einheitskreisscheibe, auf die Strömung um die Tragfläche transformieren kann. Jedoch ist das zugrundeliegende Strömungsmodell, die stationären, inkompressiblen und wirbelfreien Euler-Gleichungen, zu stark vereinfacht, so dass man in vielen Fällen keine realistischen Strömungen erhält. So benutzt man heute sehr viel komplexere, drei-dimensionale Modelle und berechnet die Lösungen mittels numerischer Verfahren.

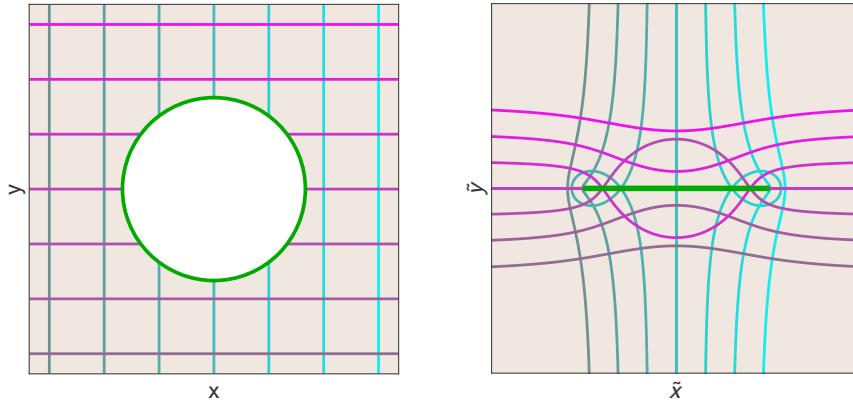


Abbildung 27: Das offene Außengebiet der Einheitskreisscheibe wird durch die Joukowski-Transformation biholomorph auf die im Intervall  $[-1, 1]$  geschlitzte Ebene abgebildet. Der abgeschlossene Schlitz ist dabei das Bild des Einheitskreises (jeweils grün). Hier wird also der Rand des Gebietes wieder auf den Rand des Bildgebietes abgebildet, jedoch nicht injektiv.

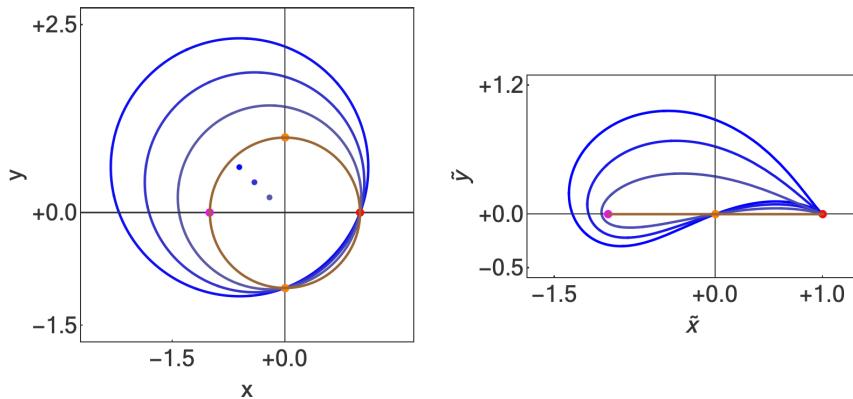


Abbildung 28: Die Bilder einiger Kreise unter der Joukowski-Transformation. So erhält man einfache Modelle für Tragfächen.

Unter den Links

<https://www.wolframcloud.com/obj/cf3c6af2-2a41-42ce-b96f-75213c444588>  
oder <https://www.geogebra.org/m/XwmqSR49>

können Sie selbst ausprobieren, welche Bilder sich bei Veränderung der Radien und Koordinaten bei der Joukowski-Transformation ergeben.

# A Grundlagen der Strömungsmechanik

Wir beschreiben hier kurz als Hintergrundinformation die fundamentalen Gleichungen der Strömungsmechanik und den Zusammenhang zwischen ebenen Strömungen und holomorphen Funktionen.

**Grundgleichungen der Strömungsmechanik:** Wir betrachten die folgende Situation: ein Körper  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , wird durch ein Fluid (Gas oder Flüssigkeit) umströmt. Das Geschwindigkeitsfeld des Fluides ist durch  $\vec{u} = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  gegeben.

Die Prinzipien der Erhaltung von Masse und Impuls ergeben zusammen mit einigen konstitutiven Annahmen an das Fluid die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned}\rho_0 (\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) &= -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

in  $(\mathbb{R}^n \setminus K) \times (0, T)$ . Hierbei bezeichnet  $\rho_0$  die konstante Massendichte,  $\eta$  die sogenannte dynamische Viskosität und  $p = p(x, t)$  den Druck. (Hierbei ist  $((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u})_i = \sum_{j=1}^n \vec{u}_j \partial_j \vec{u}_i$ .) Der Term  $\eta \Delta \vec{u}$  in (A.1) repräsentiert Reibungskräfte, die insbesondere für Flüssigkeiten relevant sind. Für Gase wird der Term oft vernachlässigt und man erhält die sogenannten (inkompressiblen) Euler-Gleichungen der Gasdynamik

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Umgekehrt kann in anderen Situation, z.B. für sehr zähe Fluide oder bei sehr großen Ausdehnungen und langsamen Geschwindigkeiten (z.B. Gletscher), der Transportterm  $\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  vernachlässigt werden und man erhält die Stokesschen Gleichungen

$$-\nu \Delta \vec{u} = -\nabla p \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

## Stationäre, rotationsfreie Potentialströmungen:

Man nennt eine Strömung eine Potentialströmung, falls eine skalare Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, mit  $\nabla \varphi = \vec{u}$ . Eine Strömung heißt rotationsfrei, falls  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ .

Mit den Resultaten aus Mathe II ergibt sich, dass eine Potentialströmung rotationsfrei ist, und in einfach zusammenhängenden Gebieten eine rotationsfreie Strömung auch eine Potentialströmung ist.

Falls nun  $\vec{u}$  eine stationäre, inkompressible und rotationsfreie Strömung ist, also falls gilt  $\vec{u} = \vec{u}(x)$ ,  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  und  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ , dann löst  $\vec{u}$  automatisch die stationären homogenen Euler-Gleichungen

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p, \quad \text{mit } p = -\frac{|\vec{u}|^2}{2}.$$

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  existiert zudem ein Potential  $\varphi$  mit  $\nabla \varphi = \vec{u}$  und  $\varphi$  löst das sogenannte Neumann-Problem

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } G, \tag{A.2}$$

$$\nabla \varphi \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{auf } \partial G, \tag{A.3}$$

wobei  $\vec{n}$  die äußere Normale an  $\partial G$  bezeichnet. Das Potential ist also harmonisch in  $G$ .

### Ebene Potentialströmungen:

Im Falle ebener Strömungen, also  $n = 2$ , können wir wieder einen Zusammenhang zu holomorphen Funktionen herstellen und Methoden der komplexen Analysis nutzen.

Denn dann gilt für  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , dass

$$0 = \operatorname{div} \vec{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 \quad \text{und} \quad 0 = \operatorname{rot} \vec{u} = \partial_y u_1 - \partial_x u_2,$$

also erfüllen  $(u_1, -u_2)$  die Cauchy-Riemannschen Gleichungen. Wir nennen

$$f = u_1 - iu_2 \quad \text{die komplexe Geschwindigkeit.}$$

Umgekehrt, ist  $f = u + iv$  eine holomorphe Funktion, dann definiert  $\vec{u} = (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f) = (u, -v)$  eine stationäre, inkompressible, rotationsfreie Strömung.

Existiert noch eine Stammfunktion  $F$ , also  $F' = f$ , dann nennt man  $F$  auch komplexes Strömungspotential. Mit Hilfe dieses Strömungspotentials lassen sich ebene Strömungen gut beschreiben. Insbesondere besteht folgender Zusammenhang. Es sei  $F = \varphi + i\psi$ , dann gilt

$$u = \operatorname{Re} f = \partial_x \varphi = \partial_y \psi, \quad v = \operatorname{Re} f = -\partial_y \varphi = \partial_x \psi,$$

also gilt  $\nabla \varphi = (u, -v) = \vec{u}$  und  $\psi$  ist eine Stromfunktion, d.h. eine Funktion, die konstant entlang Stromlinien ist. Stromlinien sind definiert als Lösungen der Differentialgleichung  $(x, y)'(t) = \vec{u}((x, y)(t))$ . Die Lösungen beschreiben die Kurven, die Teilchen durchlaufen, die sich mit der Strömung bewegen. Die Stromlinien stehen senkrecht zu den Höhenlinien von  $\varphi$ , denn falls gilt  $\operatorname{const.} = \varphi((\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ , dann gilt

$$0 = \partial_x \varphi \tilde{x}' + \partial_y \varphi \tilde{y}' = \vec{u} \cdot (\tilde{x}', \tilde{y}').$$