HA 4

Freitag, 28. Oktober 2022 12:35

Lisa Peltzer, Angelo Brade

Auf 1 a) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b \cdot c)$

$a|b \Leftrightarrow b = a \cdot x_b$

$a|c \Leftrightarrow c = a \cdot x_c$

$a|(b \cdot c) \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot x_b \cdot a \cdot x_c$

$= a^2 \cdot x_b \cdot x_c$

Weil $a^2 \cdot x_b \cdot x_c$ teilbar ist durch a, gilt die Teilbarkeitsaussage

b) $a|(b \cdot c) \Rightarrow a|b \vee a|c$ $\qquad a,b,c \in \mathbb{Z}$

z.B. $4|(2 \cdot 2) \Rightarrow 4|2 \vee 4|2$

Da 4 kein Teiler von 2 ist, gibt es hier keine Teilbarkeit

also gilt die Teilbarkeitsaussage nicht

c) $a|b: \quad b = a \cdot k_b$
$b|c: \quad c = b \cdot k_c$
$\Big\} \quad c = a \cdot \underbrace{k_b \cdot k_c}_{k \in \mathbb{Z}} = a \cdot k$

$a|c: \quad \underline{c = a \cdot k}$

Die Teilbarkeitsaussage gild. $\square$

Auf 2 $\quad a \equiv b \mod n \qquad n \mid (a-b)$

Reflexivität

$a \equiv a \mod n \overset{Def}{\Rightarrow} \frac{a-a}{n} = \frac{0}{n}$

alles ist durch 0 teilbar also ist die Reflexivität überprüft

Symmetrie

Wenn $a \equiv b \mod n \Rightarrow \frac{a-b}{n} \qquad \frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$

dann $b \equiv a \mod n \Rightarrow \frac{b-a}{n}$

$\frac{a-b}{n} \mid \cdot (-1)$

$\frac{-(a-b)}{n} = \frac{b-a}{n}$

Die negierte Zahl (a-b) ist immernoch durch n teilbar, weil sich an der Teilbarkeit nichts ändert.

Transivitiät

Wenn $a \equiv b \mod n$ und $b \equiv c \mod n \quad$ z.z. $a \equiv c \mod n$

$\overset{Def}{\Rightarrow} \frac{a-b}{n} \wedge \frac{b-c}{n} \Rightarrow \frac{a-c}{n}$

$\frac{a-b}{n} \wedge \frac{b-c}{n} \rightarrow \frac{a-c}{n} \iff \frac{a-b}{n} + \frac{b-c}{n} = \frac{a-c}{n}$

$(a-b) = n \cdot y \qquad (b-c) = n \cdot z \qquad (a-c) = n \cdot x$

$(a-b) + (b-c) = n \cdot y + n \cdot z$

$a-b+b-c = n(y+z)$

$(a-c) = n \cdot (y+z)$

$x = (y+z)$

Auf 3 a)

$x, y \in \mathbb{K}$

$|xy| = |x||y|$

$|xy| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 \cdot y^2}$

$|x| \Leftrightarrow \sqrt{x^2}$

$|y| \Leftrightarrow \sqrt{y^2}$

$\sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} \quad | \square^2$

$x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2$

$|x| = \sqrt{x^2}$

(in der Vorlesung definiert worden)

b) $x^2 = x \cdot x$

$x \neq 0 \Rightarrow (x > 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0) \vee (x < 0 \Rightarrow x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0) \Rightarrow x^2 > 0$

Wenn x nicht Null ist, muss es größer oder kleiner sein als Null.

Wenn x größer als Null ist, wird das Produkt von x und x ebenfalls größer als Null sein.

Wenn x kleiner als Null ist:

$(-x)^2 = (-x)(-x) \overset{K6}{=} (-1 \cdot x) \cdot (-1 \cdot x) \overset{K5}{=} (-1)(-1) \cdot x \cdot x \overset{K5}{=} (-1 \cdot -1) \cdot x \cdot x = -(-1 \cdot 1) \cdot x \cdot x = \underbrace{-(-1)}_{\text{das Inverse des Inversen ist das Element selbst.}} \cdot x \cdot x = 1 \cdot x \cdot x \overset{K6}{=} x \cdot x = x^2$

(4)

a) $(x, y \in \mathbb{Q} \wedge n, m, a, b, c, d \in \mathbb{Z})$: $x = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, $y = \frac{c \cdot m}{d \cdot m}$: n und m werden benötigt, da der Bruch auch unedkürzt sein kann.

(4)

a) $(x, y \in \mathbb{Q} \wedge n, m, a, b, c, d \in \mathbb{Z})$: $x = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, $y = \frac{c \cdot m}{d \cdot m}$: n und m werden benötigt, da der Bruch auch ungekürzt sein kann.

$x = y \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$

z.z.: $x \leq_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow ad <_{\mathbb{Z}} c \cdot d$

$x <_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow \frac{a \cdot n}{b \cdot n} <_{\mathbb{Z}} \frac{c \cdot m}{b \cdot m}$

$\Leftrightarrow x <_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow a \cdot n \cdot (b \cdot n)^{-1} <_{\mathbb{Z}} c \cdot m \cdot (d \cdot m)^{-1}$

$\Leftrightarrow x <_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow (a \cdot n)(d \cdot m) <_{\mathbb{Z}} (c \cdot m) \cdot (b \cdot n)$

$\Leftrightarrow x <_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow a \cdot n \cdot d \cdot m <_{\mathbb{Z}} c \cdot m \cdot b \cdot n$

$\Leftrightarrow x <_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow a \cdot d <_{\mathbb{Z}} c \cdot b$ $\square$

b) Dass die Struktur $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ ein Körper und eine lineare Ordnung ist, wird geerbt, da die Menge $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und durch die Relation $<_{\mathbb{Q}}$ linear angeordnet wird.

Zu zeigen sei, dass $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ die Axiome (AK1) und (AK2) erfüllt:

AK1:

$x, y, z \in \mathbb{Q} \wedge a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$: $x = \frac{a}{b} \wedge y = \frac{c}{d} \wedge z = \frac{e}{f}$

z.z.: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

$x + z < y + z$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + (-\frac{e}{f})$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} + \underbrace{\left(\frac{e}{f} + (-\frac{e}{f})\right)}_{\in \mathbb{Q}}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} + 0$

$\Leftrightarrow x < y$

K3: $x + (-x) = 0$: Ein Element additiv verknüpft mit dem entsprechenden inversen Element ergibt das additive neutrale Element. K3 gilt, da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist.

$\square$

AK2:

z.z.: $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

$\overset{\text{inv. Ele.}}{\Leftrightarrow} x \cdot x^{-1} > 0 \cdot x^{-1} \wedge y \cdot y^{-1} > 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} > 0$

$\overset{K7}{\Leftrightarrow} 1 > 0 \wedge 1 > 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 > 0$

$\square$

(5) $z_1 = 3 + i$ $z_2 = 1 + 2i$

$z_1 + z_2$: $3 + i + 1 + 2i = 4 + i3$

$z_1 - z_2$: $3 + i - 1 + 2i = 2 - i1$

$z_1 \cdot z_2$: $3 + i \cdot 1 + 2i = 1 + i7$

$z_1 \cdot z_2^{-1}$: $3 + i \cdot (1 + 2i)^{-1} = (3 + i) \cdot \left(\frac{1}{1+4} - \frac{2}{1+4} i\right) = (3 + i) \cdot \left(\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}\right) = 1 - i1$

z_1^{-1}: $(3 + i)^{-1} = \frac{3}{10} + i\frac{1}{10}$

(6)

a) $z_1 = (1 + i)^6 = (0 + i2)^3 = (-4 + i0) \cdot (0 + i2) = 0 - i8$

$$z_2 = \frac{(1+2i)(3+4i)}{2 + \frac{1+i}{2-3i}} = \frac{(-5 + i10)}{\frac{3+i}{2-3i}} = \frac{-5 + i10}{\frac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}} = \frac{-5 + i10}{\frac{3 + 11i}{4 - 9i^2}} = \frac{-5 + i10}{\frac{3 + 11i}{13}} = \frac{-5 + i10}{\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i} = -1,5 + 5,5i$$

b) $z^4 = 16$; $\mathrm{Im}(16) = 0$

$\Rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{16}{16}\right) = 0$

$z^4 = 16 \cdot e^{i0}$

$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i(\frac{0}{4} + \frac{2\pi}{4})k} = 2e^{i\frac{k\pi}{2}}$ $k = 1, 2, 3, 4$

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_2 = 2e^{i\pi}$ $z_4 = 2$

c) $z = 1 - i$ $z = re^{i\phi}$

$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$r = \sqrt{2}$

$\mathrm{Im}(1 - i) = -1 < 0 \Rightarrow 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{r}\right) = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi$

$\phi = \frac{7}{4}\pi$

$\Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{7}{4}\pi}$

$z^{10} = 2^5 e^{i\frac{35}{2}\pi}$

d)

$p(z) = z^3 - 1$

$z^3 - 1 = 0 \quad | + 1$

$z^3 = 1 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$z = \sqrt[3]{1} = 1$

$(1z^3 - 1) : (z - 1) = \underline{1} z^2 + \underline{1} z^1 + \underline{1} z^0 = z^2 + z + 1$
$-(z^3 - z^2)$
$\quad 1z^2 - 1$
$\quad -(z^2 - z)$
$\quad\quad 1z - 1$
$\quad\quad -(z - 1)$
$\quad\quad\quad 0$

$z^2 + z + 1 = 0 \quad |$ PQ Formel

$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$

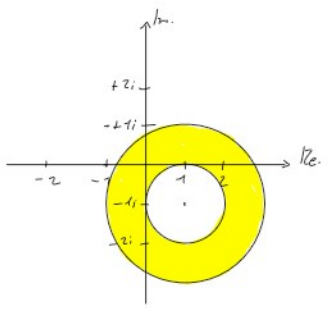
Nullstellen: $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$\left.\begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ x_4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} \end{array}\right\}$ nicht reell

(2)

a) $\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1 + i| < 2 \}$:

Der Radius ist zwischen 1 und 2.
Der Kreis muss um $1 - i$ verschoben werden.
Die Werte auf den Linien sind ausgeschlossen.



b) $\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z - i| \}$

$|z - 1| < |z - i|$

$\Leftrightarrow \quad |(a-1) + ib| < |a + i(b-1)|$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 + b^2 < a^2 + b^2 - 2b + 1$

$\Leftrightarrow \quad -2a < -2b$

$\Leftrightarrow \quad a > b$

Die Werte auf der Linie sind ausgeschlossen.