A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ
1/2	2,5/3	4/6	3,5/4	2/3	4,5/6	17,5/20

①

Man muss die Karte „E" umdrehen,
um die Implikation „Vokal" → „Bild"
zu beweisen, und die Karte „Kreuz 7"
umdrehen, um ¬„Bild" → ¬„Vokal"
zu beweisen.
„Vokal" → „Bild" ⟺ ¬„Bild" → ¬„Vokal".
Warum sind die anderen egal?

1/2

②

(1) $\forall_x E(x) \iff \neg(\exists_x \neg E(x))$: Wahr

$E(x)$ hat keinen Wahrheitswert!

E(x)	$\forall_x E(x)$	$\neg(\exists_x \neg E(x))$	⟺
1	1	1	1
0	0	0	1

ok

(2) $\exists_x(E_1(x) \land E_2(x)) \Rightarrow \exists_x E_1(x) \land \exists_x E_2(x)$. Wahr

$E_1(x)$	$E_2(x)$	$\exists_x(E_1(x) \land E_2(x))$	$\exists_x E_1(x) \land \exists_x E_2(x)$		⟹
1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
0	1	0	0	1	
0	0	0	0	1	

immer mit ∀ oder ∃
Quantoren haben Wahrheitswert

ok

Gegenbeispiel: $E_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \land E = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(3) $\forall_x(E_1(x) \lor E_2(x)) \Rightarrow \exists_x E_1(x) \land \exists_x E_2(x)$: Falsch

$E_1(x)$	$E_2(x)$	$\forall_x(E_1(x) \lor E_2(x))$	$\exists_x E_1(x) \land \exists_x E_2(x)$		⟹
1	1	1	1	1	
1	0	1	0	0	⅄
0	1	1	0	0	⅄
0	0	0	0	1	

ok

2,5/3

③

(1) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

<u>Induktionsanfang:</u>

$n \geq 1$

$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2$

$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$

$1 = 1$ ✓

Induktionsschritt:

<u>Induktionsschritt:</u>

$n \rightarrow (n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

Wie? $\quad n^2 + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2 \quad \square \quad \checkmark \qquad +1P$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

<u>Induktionsanfang:</u>

$n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^{1+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$$

$$3 = 3 \qquad \checkmark$$

<u>Induktionsschritt:</u>

$n \rightarrow (n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Wie? $\checkmark$

$$2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1 \quad \square \qquad +1P$$

(3) $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$n^3 - n = 3k$$

<u>Induktionsanfang:</u>

$n = 10$

$$10^3 - 10 = 3k$$

$$0 = 3k$$

$$0 = 3k$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = k \qquad \checkmark$$

__Induktionsschritt:__

$$n \to n+1$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3k$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \ - n - 1 = 3k$$

$$3(n^2 + n) + n^3 - n = 3k$$

$$\Longleftrightarrow \quad n^2 + n + \frac{n^3 - n}{3} = k \qquad \square$$

$\in \mathbb{Z}$, nach I.V. Warum ist das $\in \mathbb{Z}$?

$+ 1P$

(4) $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$$5^n - 1 = 4k$$

__Induktionsanfang:__

$$n \overset{=}{\cancel{>}} \cancel{1} \, 0$$

$$5^{\overset{0}{\cancel{1}}} - 1 = 4k$$

$$0\cancel{1} = 4k$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{\color{red}{$0\cancel{1} = k$}} \qquad \checkmark$$

__Induktionsschritt:__

$$n \to n+1$$

$$5^{(n+1)} - 1 = 4k$$

$$(5 \cdot 5^n) - 1 = 4k$$

$$(5 \cdot (5^n - 1) + 5) - 1 = 4k$$

$$5 \cdot (5^n - 1) + 5 - 1 = 4k$$

$$5 \cdot (5^n - 1) + 4 = 4k$$

$$\Longleftrightarrow \quad 5 \left(\frac{(5^n - 1)}{4} \right) + 1 = k \qquad \square \qquad \checkmark$$

$+ 1P$

Warum ist das $\in \mathbb{Z}$

$^4/_6$

④

(1)

$$\text{I} \quad 5x = 5x + 2 \qquad | - 5x$$

$$0 \neq 2$$

$$\text{II} \quad 3y = 7 \qquad | : 3$$

$$y = \frac{7}{3}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

$$y = \frac{\cdot}{3}$$

$$\mathbb{L} = \{\ \} \quad \checkmark \qquad +1P$$

(2) $\quad 3x + 2y = 4 \ | -3x \ | : 2$

$$y = 4 - \frac{3}{2}x$$

$$\mathbb{L} = \{\ x \ ; \ 4 - \frac{3}{2}x\ \} \quad \checkmark \quad x,y \in ? \qquad +0{,}5P$$

(3)

$$\text{I} \quad x + y = 3$$
$$\text{II} \quad x - y = 7 \qquad \text{I} + \text{II}$$
$$\text{I}' \quad 2x = 10 \ | : 2$$
$$x = 5$$

$$\text{II} \quad 5 - y = 7 \quad | -5 | \cdot(-1)$$
$$y = -2$$

$$\mathbb{L} = \{\ 5 ; -2\ \} \qquad \text{Was ist } x, \text{ was } y? \qquad +1P$$

$$\mathbb{L} = \{\ x, y \in \mathbb{R} \mid x = 5; \ y = -2\ \}$$

(4)

$$\text{I} \quad 4x - 6y = 0$$
$$\text{II} \quad 2x - 3y = 15 \qquad \text{I} - 2\text{II}$$

$$\text{I}' \quad 0 \neq -30$$

$$\mathbb{L} = \{\ \} \qquad \checkmark \qquad\qquad +1P \qquad\qquad 3{,}5/4$$

⑤

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

__Induktionsanfang:__
$$n \geq 1$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$$

$$2 = 2 \qquad \checkmark$$

__Induktionsschritt:__

$$n \to n+1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

$$F: n \geq 1 \implies n = 1$$

$$W: n \to n+1$$

$$k=0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} + 1 = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + 1 = 2^{n+1}$$

Woher $\sum^n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = 2^{n+1}$$

Wie?

Wie?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} + 2^n + 1 \overset{\color{red}{i.V.}}{=} 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{n} + 2^n + 1 = 2^{n+1}$$

$$2^n - \binom{n}{n} + 2^n + 1 \overset{\color{red}{i.V.}}{=} 2^{n+1}$$

$$2^n - 1 + 2^n + 1 = 2^{n+1}$$

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

$$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} = 2^{n+1} \quad \square \quad \checkmark \qquad \color{green}{2/3}$$

⑥

(a) $\quad \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{4} \geq ab$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq ab$

$\Leftrightarrow a^{(a-b)^2} + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \color{green}{?} \quad \geq 0$

Da der komplette Term
quadriert wird, bleibt dieser
immer größer oder gleich 0. $\square$ ok $\qquad$ +1P

warum genau?

(b) $\quad \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$\Longrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{ab}} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{4}{ab} \leq \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2$ $\Big\}$ *gerne einen Zwischenschritt*

$\Longleftrightarrow 0 \leq \left(\dfrac{1}{a}\right)^2 - 2\dfrac{1}{ab} - \left(\dfrac{1}{b}\right)^2$

$\Longleftrightarrow 0 \leq \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 \;\square$ *ok* *+1,5P*

(c) $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{4} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

$\Longleftrightarrow 0 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{(a+b)^2}{4}$

$\Longleftrightarrow 0 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$\Longleftrightarrow 0 \leq \dfrac{-2ab}{-2}$ f

$\Longleftrightarrow 0 \leq ab$

Da nur positiv reelle Zahlen eingesetzt werden, *+0,5P*
ist ab immer größer oder gleich 0. $\square$

(d) $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

$\Longleftrightarrow \dfrac{a^2}{a} + \dfrac{1}{a}\dfrac{a}{a} \geq 2\dfrac{a}{a}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1+a^2}{a} \geq 2\dfrac{a}{a}$

$\Longleftrightarrow 1+a^2 \geq 2a$

$\Longleftrightarrow 1+a^2-2a \geq 0$

$\Longleftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

Da der Term quadriert wird, erhällt man
nur positive reelle Zahlen auf der linken Seite. $\square$ ✓ *+1,5P*

4,5/6