Folgerungen

* Das Teilchen ist zu jedem Zeitpunkt irgendwo im Raum:

$$P_t(A=\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, |\psi(\vec{x},t)|^2 = 1 \,, \quad \forall t.$$

⇝ $\psi(\vec{x},t)$ ist eine quadrat-integrable Funktion!

$$\psi(\cdot,t) \in L^2(A,d\mu) := \left\{ f: A \to \mathbb{C} : \int_A d\mu \, |f|^2 < \infty \right\}$$

$L^2(A,d\mu)$ ist ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt:

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_A d\mu \; \psi^*(\vec{x}) \, \phi(\vec{x})$$

$$\rightsquigarrow \; P_t(A=\mathbb{R}^3) = \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1$$

⇝ Die Wellenfunktion ist normiert!

N.B.: $\psi(\vec{x},t)$ ist nur bis auf eine Phase festgelegt.

N.B.: Notwendige Bedingung für $\int_A d\mu \, |\psi|^2 < \infty$

$$\lim_{\vec{x} \to \infty} \psi(\vec{x},t) = 0 \;!$$

* Lösung der Schrödinger-Gleichung.

Gleichung ist linear

⇝ Ansatz: Separation der Variablen:

$$\psi(\vec{x},t) = \phi(\vec{x})\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\,\phi(\vec{x})\,\dot{T}(t) = T(t)\,\hat{H}\phi(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\,\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\hat{H}\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{x})} = E$$

↳ Konstante

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t) = e^{-iEt/\hbar} \\ \hat{H}\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x}) \end{cases}$$

← Eigenwertgleichung für $\hat{H}$

"Zeitunabhängige Schrödingergleichung"

⇝ Allgemeine Lösung.

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_E c(E)\,\underbrace{\phi_E(\vec{x})}\,e^{-iEt/\hbar}$$

↳ Eigenwert

↳ Eigenfunktion

Wir werden in Kürze sehen:
Es gibt immer eine orthonormale Basis (ONB) von $L^2(A, d_\Gamma)$ an Eigenfunktionen von $\hat{H}$.

$$\rightsquigarrow \quad \langle \phi_E | \phi_{E'} \rangle = \delta_{EE'}$$

$$\Rightarrow \quad \|\psi\|^2 = 1 = \sum_E |c_E|^2$$

Wie kann man die c_E bestimmen?

Randbedingung: $\psi(\vec{x}, t=0) = \psi_0(\vec{x}) \in L^2(A, d\mu)$

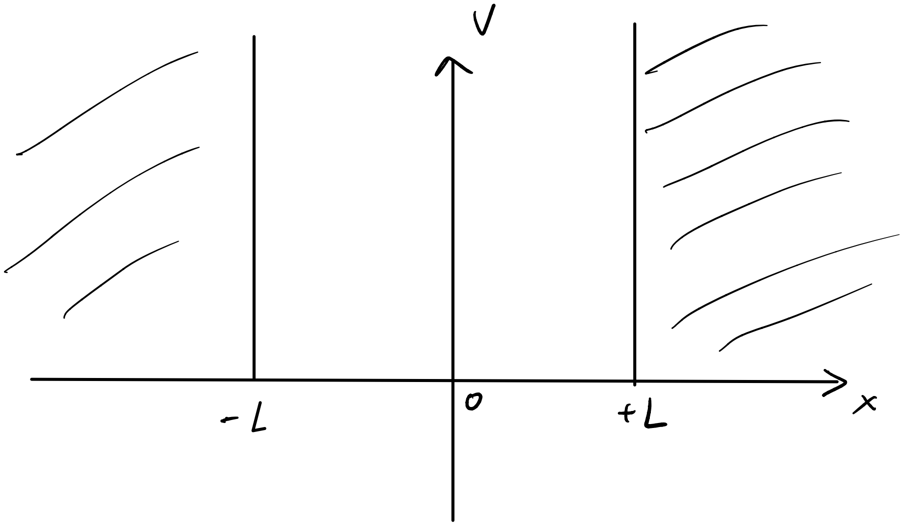
$\rightsquigarrow$ ψ_0 kann in Basis ϕ_E zerlegt werden:

$$\begin{cases} \psi_0(\vec{x}) = \sum_E \alpha_E \, \phi_E(\vec{x}) \\ \psi(\vec{x}, t=0) = \sum_E c_E \, \phi_E(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_E = \alpha_E \; !$$

Beispiel: Kastenpotential:

$A = \mathbb{R}^1$



$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < L \\ \infty, & |x| \geq L \end{cases}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

$$\psi(x,t) = 0 \quad , \quad |x| \geq L$$

Zeitunabhängige SG:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) = E\,\phi(x) \quad , \quad \phi(x) = 0 \, , \; |x| \geq L$$

Ansatz: $\phi(x) = A e^{ipx/\hbar} + B e^{-ipx/\hbar}$

$$\Rightarrow \quad \phi''(x) = -\frac{p^2}{\hbar^2}\phi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m}\phi(x) = E\phi(x)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightsquigarrow \quad \phi(-L) = \phi(+L) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A e^{ipL/\hbar} + B e^{-ipL/\hbar} = 0 \\ A e^{-ipL/\hbar} + B e^{+ipL/\hbar} = 0 \end{cases}$$

* Falls $A=0$, $B=0$ $\rightsquigarrow$ triviale Lösung
* Falls $A \neq 0$, $e^{-ipL/\hbar} = -\frac{B}{A} e^{ipL/\hbar}$

$$\Rightarrow \left(A - \frac{B^2}{A}\right) e^{ipL/\hbar} = 0$$

$$\Rightarrow A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \text{ oder } A = -B$$

* $A=B$: $\phi(x) = A\left(e^{ipx/\hbar} + e^{-ipx/\hbar}\right)$

$$= \underbrace{2A}_{=:A'} \cos\frac{px}{\hbar}$$

und

$$e^{-ipL/\hbar} = -e^{ipL/\hbar}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{pL}{\hbar} = 0 \Rightarrow \frac{pL}{\hbar} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{(2n+1)\pi\hbar}{2L} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Normierung: $\|\phi\|^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} dx \quad |A'|^2 \cos^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2L} = 1$$

$$\Rightarrow L|A'|^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} dx \quad \cos^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2}}_{= \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1}{2}\left(1 - \cos (2n+1)\pi x\right) = 1} = 1$$

$$\Rightarrow |A'| = 1/\sqrt{L}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{L}}$$

$$\rightsquigarrow \phi(x) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{L}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

$*$ $A = -B$: $\phi(x) = \underbrace{2iA}_{=:A'} \sin \frac{px}{\hbar}$

und $$e^{-ipL/\hbar} = + e^{ipL/\hbar}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{pL}{\hbar} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{pL}{\hbar} = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2n\pi\hbar}{2L} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Normierung: $\|\phi\|^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} dx \, |A'|^2 \sin^2 \frac{2n\pi x}{2L} = 1$$

$$\Rightarrow A' = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{L}}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{L}} \sin \frac{2n\pi x}{2L}$$

Schlussfolgerung:

Eigenwerte von $\hat{H}$:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m L^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$p_n = \frac{n\pi\hbar}{L}$$

Eigenfunktionen:

$$\phi_n(x) = \frac{e^{i\alpha_n}}{\sqrt{L}} \times \begin{cases} \cos \frac{n\pi x}{2L} & , n \text{ ungerade} \\ \sin \frac{n\pi x}{2L} & , n \text{ gerade} \end{cases}$$

wir können $e^{i\alpha_n} = 1$ wählen!

Deutung:

* $\phi_n(-x) = (-1)^{n+1}\phi_n(x)$

$\Rightarrow |\phi_n(x)|^2$ immer gerade

* $\langle x\rangle_n = \int_{-L}^{L} dx \; x \; |\phi_n(x)|^2 = 0$

* $(\Delta x)_n^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle = \int_{-L}^{L} dx \; x^2 \, |\phi_n(x)|^2$

$$= L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2 n^2}\right)^2$$

n	1	2	3	...	∞
$(\Delta x)_n/L$	0,36...	0,53..	0,56..	...	$1/\sqrt{3}$

Deutung der Eigenwerte E_n

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Potential, dimension einer Energie !

* Die Energie des Teilchens kann nur die Werte E_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ annehmen.
* Falls Wellenfunktion $\psi(x,t)$, dann

$$P(E = E_n, t) = |\langle\phi_n(x)|\psi(x,t)\rangle|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L}^{L} dx \; \phi_n(x)\,\psi(x,t)\right|^2$$

* $\phi_n(x)$ ist Wellenfunktion eines Teilchens mit Energie E_n. ("Gebundener Zustand")

* Impuls? Für ein freies Teilchen:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

⇝ Mögliche Werte für den Impuls: p_n

p_n sind Eigenwerte des Impulsoperators:

$$\hat{p}\,\phi_n(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\phi_n(x) = p_n\,\phi_n(x)$$

* $P(p = p_n, t) = \left| \langle \phi_n(x) | \Psi(x,t) \rangle \right|^2$