HA11

Samstag, 17. Dezember 2022 14:18

Lisa Peltzer, Angelo Brade

②

$$f_a(e_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}, \quad f_a(e_2) := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad f_a(e_3) := \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$DM(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kern:

$$(DM, 0) \Rightarrow \begin{array}{c|cccc|l} \text{I} & 1 & a & a^2 & 0 & \\ \text{II} & a^2 & 1 & a & 0 & \\ \text{III} & a & a^2 & 1 & 0 & \text{III} - a\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & a & a^2 & 0 & \\ a^2 & 1 & a & 0 & \text{II} - a^3\text{I} \\ 0 & 0 & 1-a^3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & a & a^2 & 0 & \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 & 0 & \text{II} - a\text{III} \\ 0 & 0 & 1-a^3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^3 & 0 \end{array}$$

$a \neq 1 \Rightarrow Df(f_a) = 0 \wedge Rg(f_a) = 3$

$a = 1 \Rightarrow Df(f_a) = 2 \wedge Rg(f_a) = 1$

⑤

$$S_{\frac{\varphi}{2}} \cdot S_{\frac{\psi}{2}} = D_{\varphi-\psi}$$

$$S_{\frac{\varphi}{2}} \cdot S_{\frac{\psi}{2}} = D_{\varphi} \cdot D_{-\psi}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) \end{pmatrix} \quad \Big| \; \sin(-\psi) = -\sin(\psi) \wedge \cos(-\psi) = \cos(\psi)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi)+\sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) & \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi)-\cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi)-\cos(\varphi)\cdot\sin(\psi) & \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi)+\cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi)+\sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) & \cos(\varphi)\cdot\sin(\psi)-\sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi)-\cos(\varphi)\cdot\sin(\psi) & \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi)+\cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) \end{pmatrix} \checkmark$$

Durch ausmultiplizieren wird die Gleichheit deutlich.

⑥

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{array}{c|ccccc|l} & \lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & & \\ \text{I} & -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & \\ \text{II} & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & \\ \text{III} & 1 & -3 & -7 & -1 & 0 & 7\text{III} + \text{IV} : 10 \\ \text{IV} & 3 & 1 & -1 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} \text{I} & -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & \text{I} + \text{III} \\ \text{II} & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & \\ \text{III} & 1 & -2 & -5 & 0 & 0 & \\ \text{IV} & 3 & 1 & -1 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} \text{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \text{II} & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & \\ \text{III} & 1 & -2 & -5 & 0 & 0 & \text{III} + 2\text{IV} \\ \text{IV} & 3 & 1 & -1 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} \text{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\text{II} - 2\text{III} \\ \text{II} & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & \\ \text{III} & 7 & 0 & -7 & 14 & 0 & \\ \text{IV} & 3 & 1 & -1 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} \text{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \text{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \text{III} & 7 & 0 & -7 & 14 & 0 & 3\text{III} - 7\text{IV} \\ \text{IV} & 3 & 1 & -1 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|} \text{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} \mathrm{III} & 7 & 0 & -7 & 14 & 0 & 3\mathrm{III}-7\,\mathrm{IV} \\ \mathrm{IV} & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{III} & 0 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ \mathrm{IV} & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \mathrm{II} & 0 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ \mathrm{III} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{IV} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 3\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 - 7\lambda_4 \quad \Rightarrow 21\lambda_1 = -14\lambda_3 + 7\lambda_4 + \lambda_3 - 49\lambda_4 = -13\lambda_3 - 42\lambda_4$

$\Rightarrow 7\lambda_2 = -14\lambda_3 + 7\lambda_4$

$\mathbb{L} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R} : 21\lambda_1 = -13\lambda_3 - 42\lambda_4,\ 7\lambda_2 = -14\lambda_3 + 7\lambda_4\}$

b) 2 Nullzeilen $\Rightarrow$ $\mathrm{Def}(A) = 2$

2 Pivotelement $\Rightarrow$ $\mathrm{Rg}(A) = 2$

c) Injektiv wird folgendermaßen definiert: für jedes y in der Zielmenge gibt es max. ein x. Aber $\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$ (auf 0 bilden mehr als ein x ab) $\Rightarrow$ nicht injektiv

(Surjektiv: für jedes y in der Zielmenge gibt es mind. ein x) $\wedge$ $\dim(\text{Zielmenge}) \neq \mathrm{Rg}(A)$

$\Rightarrow$ zwei Dimensionen der Zielmenge werden nicht abgebildet,

womit es kein zugehörige x für die Elemente von ganzen

zwei Dimensionen nicht gibt: die Abbildung ist nicht surjektiv.

③

$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l} \mathrm{I} & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} - 2(\mathrm{III} - \mathrm{I}) \\ \mathrm{II} & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 9\mathrm{II} - 3(2\mathrm{III} - 3\mathrm{I}) \\ \mathrm{III} & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} - \mathrm{II} - \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l} \mathrm{I}' & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 & \\ \mathrm{II}' & 0 & -1 & 0 & 9 & 5 & 6 & \mathrm{II}' : -1 \\ \mathrm{III}' & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \end{array}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -9 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l} \mathrm{I} & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2\mathrm{I} - \mathrm{II} : 2 \\ \mathrm{II} & 7 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ \mathrm{III} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I}' & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 & \\ \mathrm{II} & 7 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ \mathrm{III} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} - \mathrm{I}' \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} \mathrm{I}' & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ \mathrm{II} & 7 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{III}' & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 1 \end{array}$$

Das System ist nicht weiter lösbar: A kann nicht invertiert werden.

$C := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I} & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3\mathrm{I} + \mathrm{II}' \\ \mathrm{II} & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1\mathrm{II} - 4\mathrm{III} \\ \mathrm{III} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3\mathrm{III} - 2\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I}' & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & \\ \mathrm{II}' & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -4 & \mathrm{II}' + 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}' & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 & \mathrm{III}' - (3\mathrm{I} + \mathrm{II}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I}' & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & \\ \mathrm{II}'' & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -4 & :3 \\ \mathrm{III}'' & 0 & 0 & 9 & -15 & -3 & 21 & :9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ \mathrm{II}'' & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \mathrm{III}'' & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$D := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I} & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \\ \mathrm{II} & 7 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2\mathrm{II} - 3\mathrm{III} \\ \mathrm{III} & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I}' & -11 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & \mathrm{I}' - 2\mathrm{III}' \\ \mathrm{II}' & 5 & -1 & 0 & 0 & 2 & -3 & \mathrm{II}' + 5(\mathrm{I} - 2\mathrm{III}) \\ \mathrm{III}' & -4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 11\mathrm{III}' - 4\mathrm{I}' \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|l} \mathrm{I}'' & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & :-3 \\ \mathrm{II}'' & 0 & -3 & 0 & 5 & 6 & 13 & :-3 \\ \mathrm{III}'' & 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & 11 & :-3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|rrrrrr|l}
II' & 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & -3 & II' + 3\,(2\,\cdot\,2III) \\
III' & -4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 11\,III' - 4\,I'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rrrrrr|l}
I'' & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & :-3 \\
II'' & 0 & -3 & 0 & 5 & 6 & 13 & :-3 \\
III'' & 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & 11 & :-3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
I''' & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
II''' & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -2 & \frac{13}{3} \\
III''' & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{11}{3}
\end{array}
$$

$$
D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -2 & \frac{13}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}
$$

Auf 1.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $f : V \to W$ für zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume V, W gegeben. Es gelte für beliebige $x, y \in V$ stets die Gleichung:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Beweisen Sie, dass dann f schon linear ist.

Es sind bereits fast alle Voraussetzungen für eine lineare Abbildung gegeben. Nur $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ fehlt noch

z.z. $\lambda f(x) = f(\lambda x)$

Danke für den Tipp :)

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

z.z. $\lambda f(x+y) = f(\lambda(x+y))$

$$\lambda f(x+y) = \underbrace{f(x+y) + f(x+y) + f(x+y) + \dots}_{\lambda\text{-mal}}$$

kann man zusammenfassen, wie in $f(x) + f(y) = f(x+y)$ vorgegeben, zu:

$$f(\underbrace{(x+y) + (x+y) + (x+y) + \dots}_{\lambda\text{-mal}})$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda \cdot (x+y))$$

Es gilt auch bei $f(x) + f(y)$:

$$\lambda f(x) + \lambda f(y) = (\underbrace{f(x) + f(x) + \dots}_{\lambda\text{-mal}}) + (\underbrace{f(y) + f(y) + \dots}_{\lambda\text{-mal}})$$

$$\Leftrightarrow f(\underbrace{x + x + \dots}_{\lambda\text{-mal}}) + f(\underbrace{y + y + \dots}_{\lambda\text{-mal}})$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x) + f(\lambda y)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x + \lambda y)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda(x+y))$$

Damit ist gezeigt das auch $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ hier gilt und damit ist f eine lineare Abbildung.

lineare Abbildungen sind immer linear

Aufgabe 4 (3 Punkte). Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ an, so dass für beliebige Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ das Matrizenprodukt $T \cdot A$ aus A durch zyklische Permutation der Zeilen entsteht: Das heißt die erste Zeile wird zur zweiten, die zweite zur dritten, ..., und schließlich die m-te zur ersten Zeile.
Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung der Matrix $C(r, s)$. $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \end{pmatrix}$

Auf 4.

Darstellung des Vorgehens mit Mat(3x3)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & c \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{matrix} a \cdot j + b \cdot m + c \cdot p & a \cdot k + b \cdot n + c \cdot q & a \cdot l + b \cdot o + c \cdot r \\ d \cdot j + e \cdot m + f \cdot p & d \cdot k + e \cdot n + f \cdot q & d \cdot l + e \cdot o + f \cdot r \\ g \cdot j + h \cdot m + i \cdot p & g \cdot k + h \cdot n + i \cdot q & g \cdot l + h \cdot o + i \cdot r \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & c \\ p & q & r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p & q & r \\ j & k & l \\ m & n & o \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vorgehen nach Aufgabenstellung $T \in \mathrm{Mat}(m \times m)$ $A \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ wenn $n \leq m$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte). Üben Sie das Aufstellen von darstellenden Matrizen bei Abbildungen, die Sie geometrisch kennen:

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
die jedem Vektor der Ebene den um 90 Grad (im mathematisch positiven Sinne) gedrehten und auf die doppelte Länge gestreckten Vektor zuordnet.

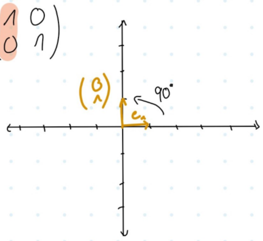
(b) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
die jedem Vektor der Ebene sein x-Achsen-Spiegelbild der y-Achsen-Projektion zuordnet.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
die jedem Vektor das auf die halbe Länge reduzierte Spiegelbild an der Ebene, aufgespannt durch die Winkelhalbierende der x-y-Ebene und der z-Achse, zuordnet.

Auf 7

a)

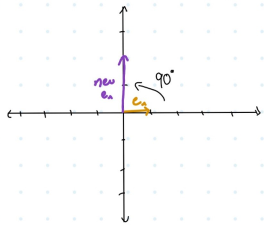
$$E_2 = \begin{array}{cc} e_1 & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



E_2 und 90° gedreht wäre: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Da wir aber eine darstellende Matrix bestimmen sollen die die Vektoren nicht nur dreht sondern auch streckt ist die hier gesuchte DM:

$$DM(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



b) $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

gespiegelte $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

→ mit y-Achsen-Projektion haben wir $DM(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

auf halbe Länge reduziert $H_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

an der Winkelhalbierende der x,y-Ebene und der z-Achse spiegeln

$$DM(h) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$