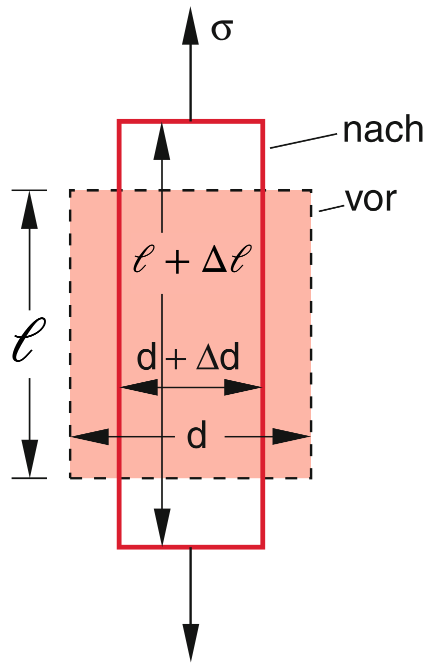
Vorlesung 26



Das Anlegen einer Zugspannung führt zu einer **Volumenänderung** des angegriffenen Körpers :

Z.B. für einen Stab der Länge ℓ mit quadratischem Querschnitt d^2 führt eine Längsdehnung zu einer Querkontraktion $\Delta d < 0$

↓

Volumenänderung : $\Delta V = (d + \Delta d)^2 \cdot (\ell + \Delta\ell) - d^2\ell$

$$\approx d^2 \cdot \Delta\ell + 2\ell \cdot d \cdot \Delta d \qquad (\Delta d)^2 \ \& \ \Delta d \cdot \Delta\ell \text{ klein}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\frac{\Delta d}{d}$$

Analog : **Kompression** ($\Delta d > 0, \Delta\ell < 0$) durch Druck p : $\frac{F}{A} = p = -\boxed{K} \cdot \frac{\Delta V}{V}$

Kompressionsmodul $[K] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

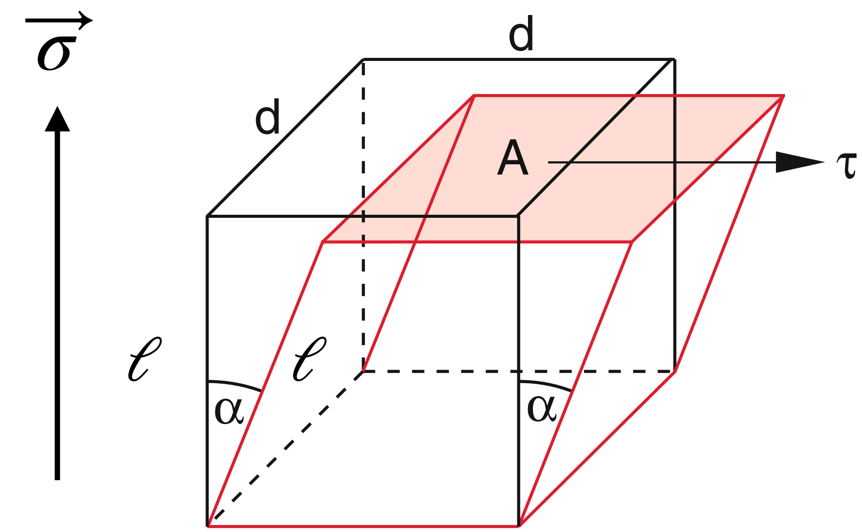
Bezug zu Elastizitätsmodul über die Querkontraktionszahl / Poissonzahl μ

$$\mu = -\frac{\Delta d}{d} / \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) \longrightarrow \frac{1}{K} = \frac{3}{E}\left(1 - 2\mu\right)$$

(Herleitung via $\sigma = E \cdot \varepsilon$, Druck $p = -\sigma$)

8.3 Mechanische Spannungen

Scherung und **Torsionsmodul** :



Als Scherungskräfte bezeichnet man **tangential** angreifende Kräfte

Schub-/Scherspannung: $\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A}$ (pro Flächeneinheit wirkende tangentiale Kraft)

Skalare Größe : $\tau = \boxed{G} \cdot \alpha$ ← Scherwinkel (vgl. Abbildung)

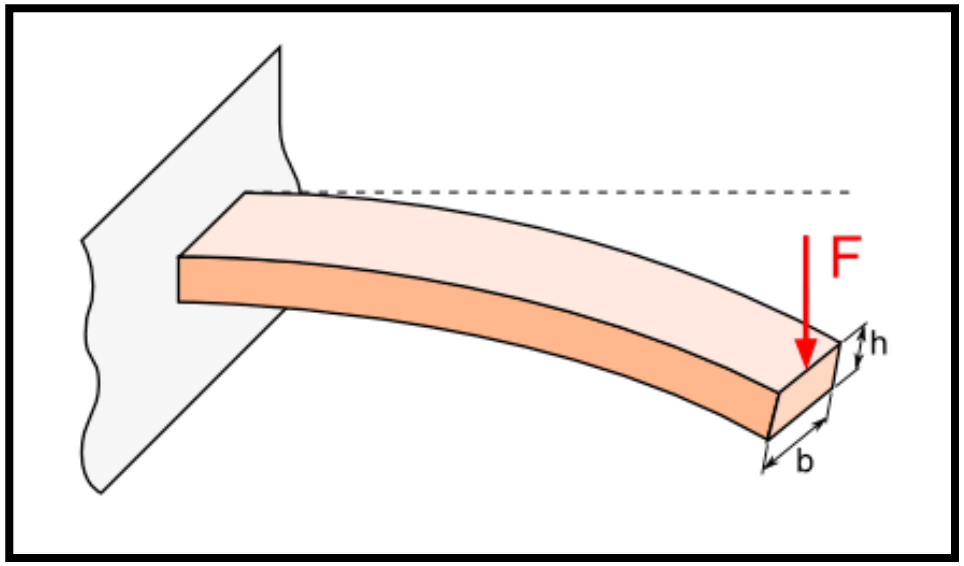
Schubmodul / Schermodul

Versuch : Modell Torsion

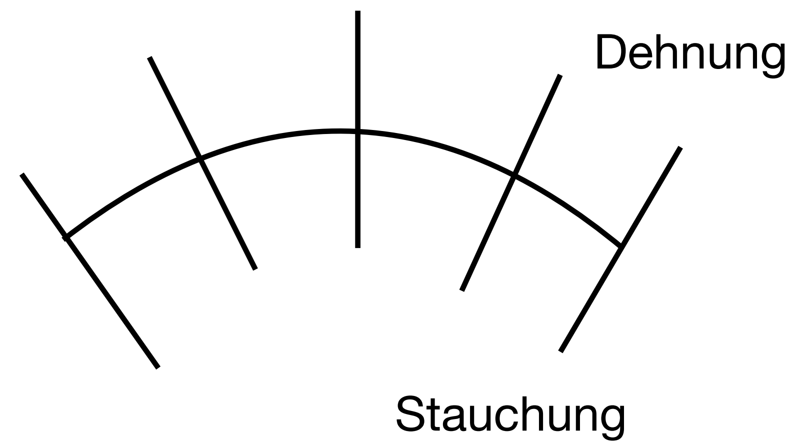
Einheiten : $[\sigma] = [\tau] = [p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

8.4 Beispiel: Biegung eines Balken

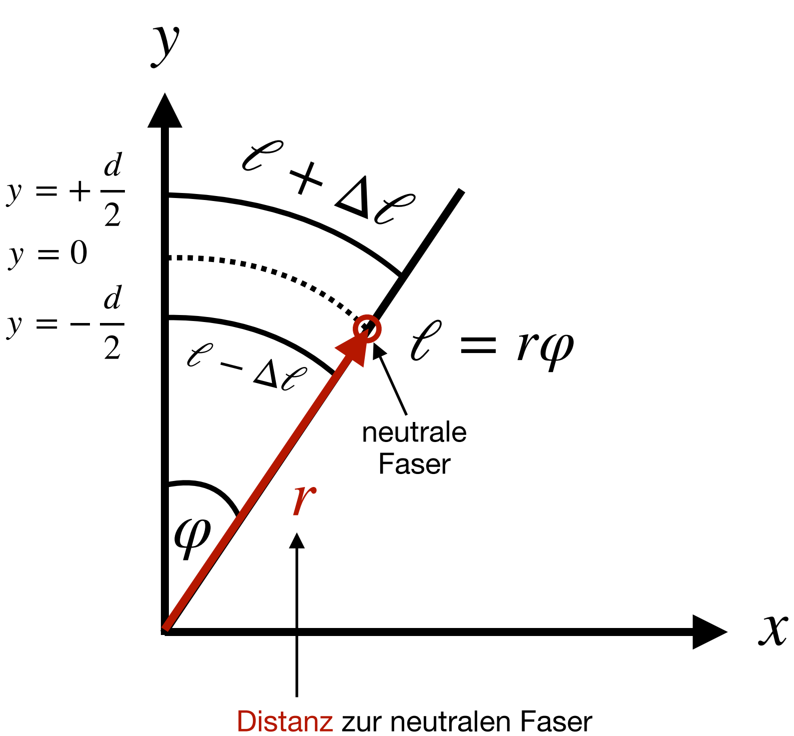
Situation:



neutrale Faser = Keine Längenänderung



Kreisnäherung



sog. **Krümmungsradius :**

r groß ↔ kleine Krümmung

r klein ↔ große Krümmung

$$\ell \pm \Delta\ell = (r \pm y)\cdot\varphi \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = y\,\varphi = y\,\frac{\ell}{r}$$

vgl. Folie 489

Zug / Druckspannung : $\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\cdot\frac{y}{r}$

vgl. Folie 489

Druck : $p = -E\cdot\frac{y}{r}$

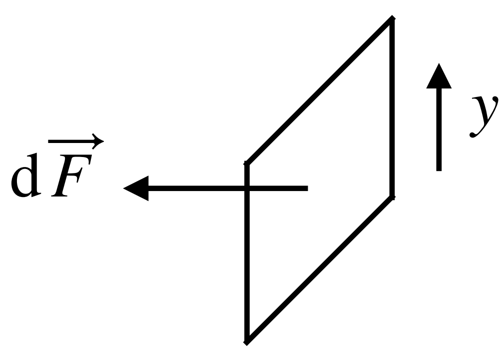
Kraft am Flächenelement $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}F = \sigma \cdot \mathrm{d}A = E\,\frac{y}{r}\,\mathrm{d}A$$

Drehmoment :

$$\mathrm{d}M_y = y\,\mathrm{d}F = \frac{Ey^2}{r}\,\mathrm{d}A$$

$|\,\mathrm{d}\vec{M}_y| = |\,y \times \mathrm{d}F\,| = y\,\mathrm{d}F$



Querschnitt durch Balken

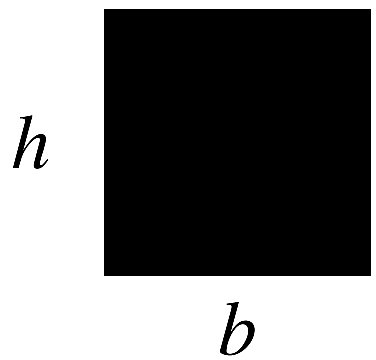
$$\rightarrow M_y = \underbrace{\int y^2\,\mathrm{d}A}_{B} \cdot \frac{E}{r}$$

B : Biegemoment

$$\boxed{\textbf{Krümmungsradius :} \quad r = B \cdot E \cdot \frac{1}{M_y}}$$

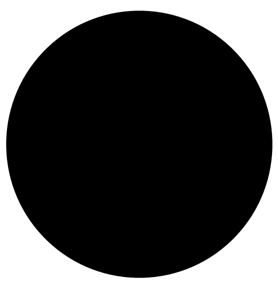
Weitere **Biegemomente** :

Gleiches B bei A =



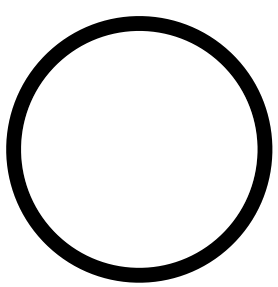
$$B = 2b\int_0^{h/2} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}b\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}h^3 b$$

1



$$B = \frac{\pi}{4}R^4$$

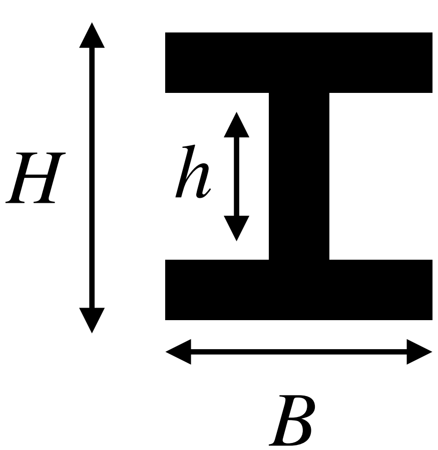
1.03



Wand Dicke

$$B = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

0.25



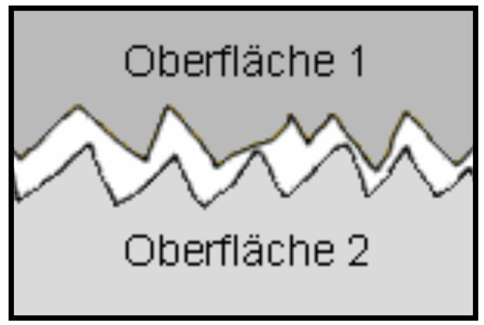
$$B = \frac{1}{12}(H^3 B - h^3 B)$$

0.39

8.5 Reibung

Nicht vorhanden für MP und ideale starre Körper (mit glatter Oberfläche)

realer Körper :

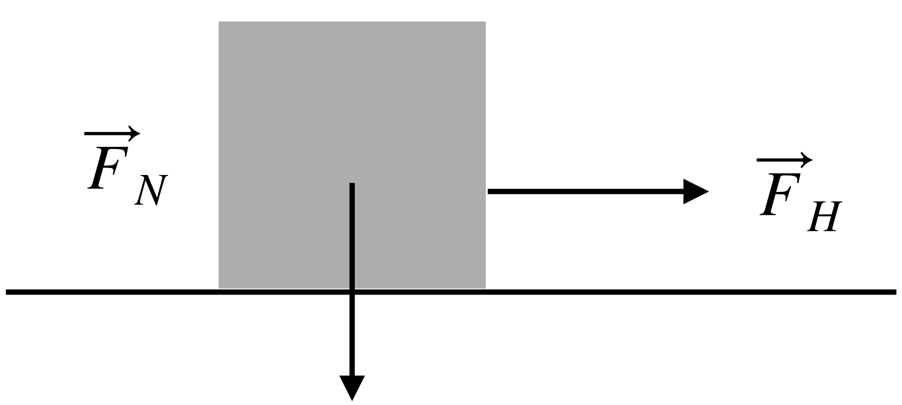


Bewegung in x-Richtung : “y-Verkantung”

→ Berge müssen überwunden werden durch :

- Verformung
- Bruch
- Überwindung

Haftreibung : $|\vec{F}_H| \sim |\vec{F}_N|$



Es gilt : $F_H = \boxed{\mu_H} \cdot F_N$

Haftreibungskoeffizient
(Materialeigenschaft)

Achtung: nur Normalkomponente relevant

Schiefe Ebene mit Winkel α : $F_H = \mu_H F_N \cos\alpha$

Gleitreibung : Wenn ein Körper mal in Bewegung ist → oft Reduktion der Reibung

Aber wieder $|\vec{F}_G| \sim |\vec{F}_N|$ und es gilt : $F_G = \boxed{\mu_G} \cdot F_N$

Gleitreibungskoeffizient
(Materialeigenschaft)

Rollreibung : Analog bei Abrollen eines Rades gibt es Reibung

$\mu_R \ll \mu_G \ll \mu_H$

$F_R = \boxed{\mu_R} \cdot F_N$

Rollreibungskoeffizient
(Materialeigenschaft)

	μ_H	μ_G	μ_R
Stahl	0.5-0.8	0.4	0.05
Stahl + Ölfilm	0.08	0.06	0.03
Diamant	0.1	0.08	

9. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

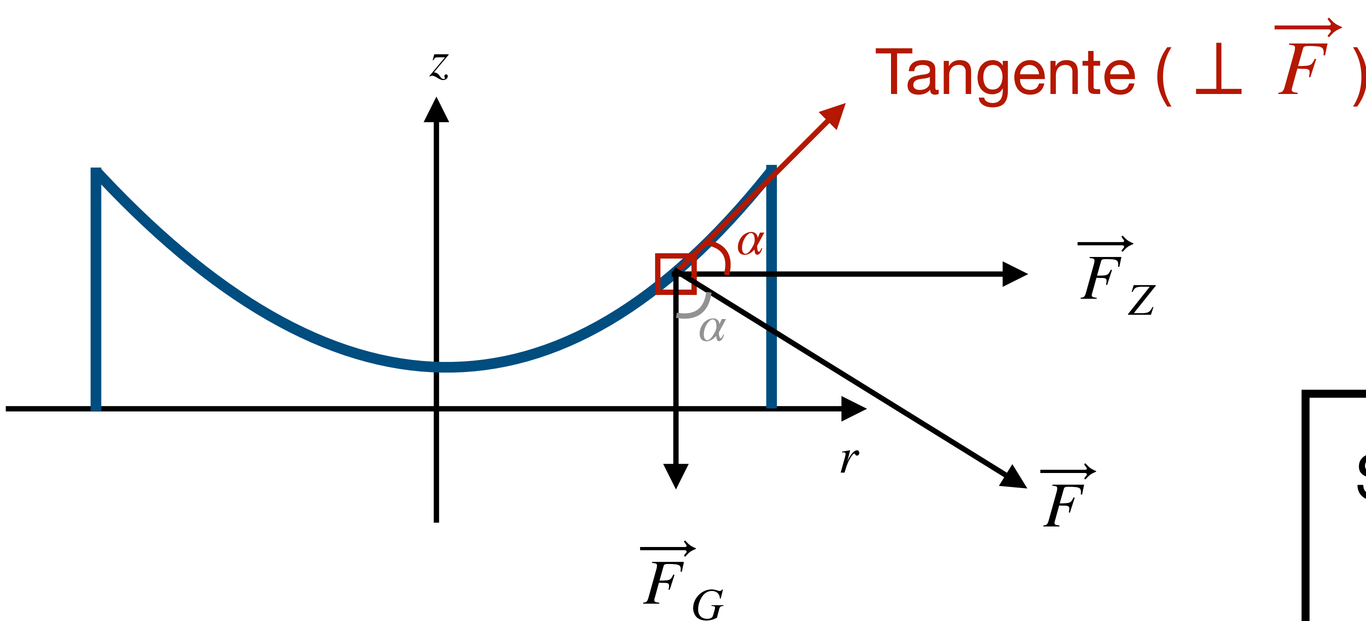
(Hydro-/Aerostatik)

Flüssigkeiten : **frei querverschiebbar** (Schermodul $G = 0$)

ruhende FL $\leftrightarrow$ **keine** Tangentialkraft

Versuch : Wasserzentrifuge

$F_Z = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ $\qquad \tan\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$

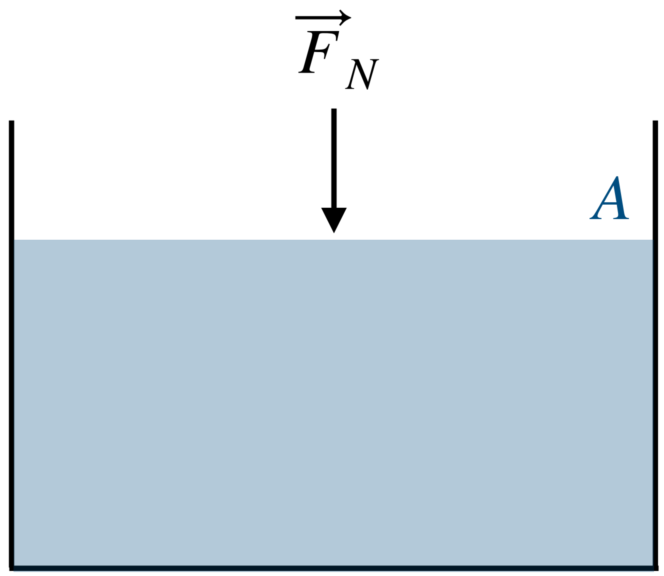


$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

Steigung d. Einhüllenden

$$\Rightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r r'\mathrm{d}r' = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

9.1 Kompression und Druck



Definition **Druck** : Normalkraft / Fläche $\quad p = \dfrac{F_N}{A}$

Volumenänderung durch Druck : $\quad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = -\kappa\, \mathrm{d}p}$

Kompressibilität

Relation zum **Kompressionsmodul** $\kappa = K^{-1}$ (vgl. Folie 494)

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \qquad [\kappa] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} = \mathrm{Pa}^{-1}$$

Beispielswerte bei **Normalbedingungen** $\quad (\,20^\circ\,\mathrm{C}\,,\ 10^5 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 10^5\,\mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{Atm}\,)$

Al	1.4×10^{-11}
H_2O	5×10^{-10}
Benzol	1×10^{-9}
Luft	10^{-5}

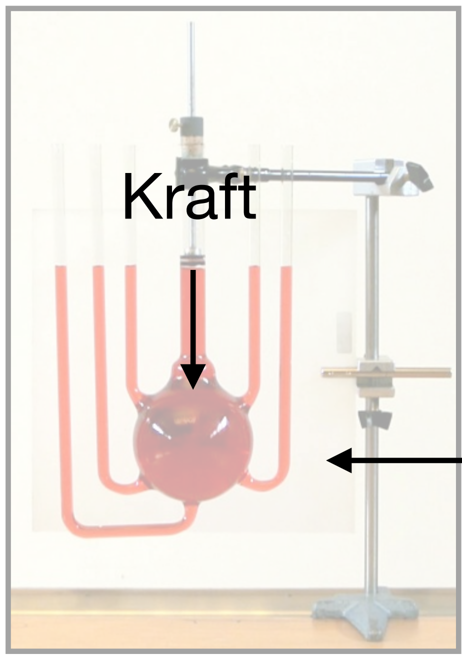
$\longrightarrow$ Um z.B. Wasser bei Normalbedingungen um 1% seines Volumens zu komprimieren muss ein Druck von $2 \times 10^7\,\mathrm{Pa} = 200\ \mathrm{Atm}$ aufgebracht werden (!)

Druck wirkt von **allen Seiten** → überall in der Flüssigkeit / Gas konstant

↓

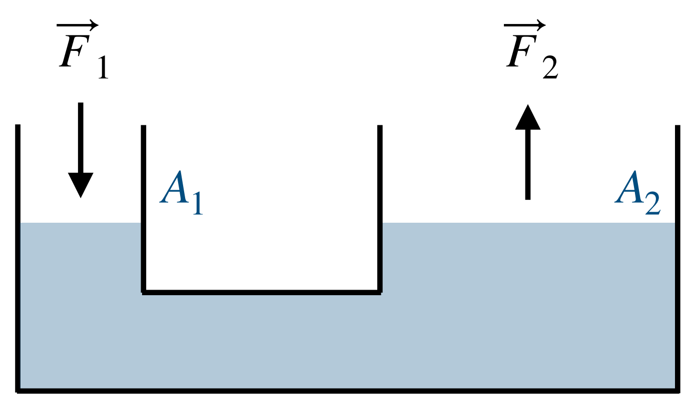
bis auf Gravitationseffekte
(dazu gleich mehr)

Versuch : Allseitigkeit



Alle Säulen haben die gleiche Höhe, i.e. es wirkt der gleiche Druck

→ Anwendung : **hydraulische Presse**



$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

→ große Kräfte

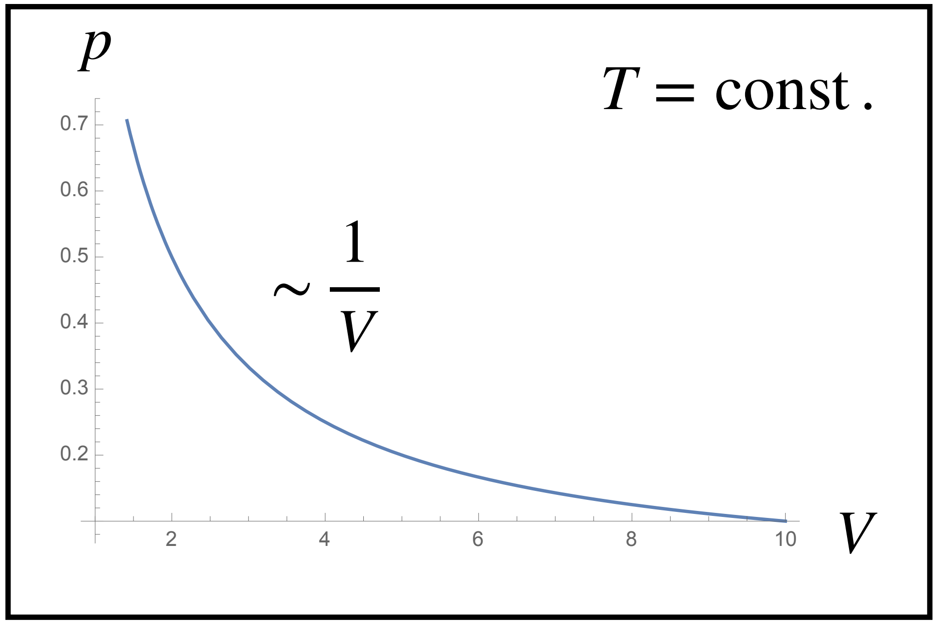
Versuch : Schuss auf Melone

$$\mathrm{d}p = -\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-10}} \cdot \frac{0.1}{1000}\,\mathrm{Pa} = 0.2 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Pa} = 2\,\mathrm{atm}$$

$$V_{\mathrm{H_2O}} = 1\,\ell = 1000\,\mathrm{cm}^3 \qquad V_{\mathrm{Kugel}} = 0.1\,\mathrm{cm}^3$$

Kompression von **Gasen** : $\kappa(\text{Gas}) \approx 10^5 \cdot \kappa(\text{Fluessigkeiten})$

Boyle-Mariotte-Gesetz : bei $T = \text{const.}$ $p \sim \frac{1}{V}$ $\rightarrow$ $p \cdot V = \text{const.}$



$$\rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Kompressibilität von Gasen : $$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = -\frac{p}{\cancel{\text{const}}.} \cdot \frac{-\cancel{\text{const}}.}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{\Rightarrow \kappa_{\text{gas}} = \frac{1}{p} \quad \text{bei } T = \text{const.}}$$

Hoher Druck : kleine Kompression $\leftarrow \frac{dV}{V} = -\kappa\, dp$

Niedr. Druck : große Kompression

$m = \rho V \Rightarrow$ aus $p \cdot V = p \cdot \frac{m}{\rho} = \text{const.}$

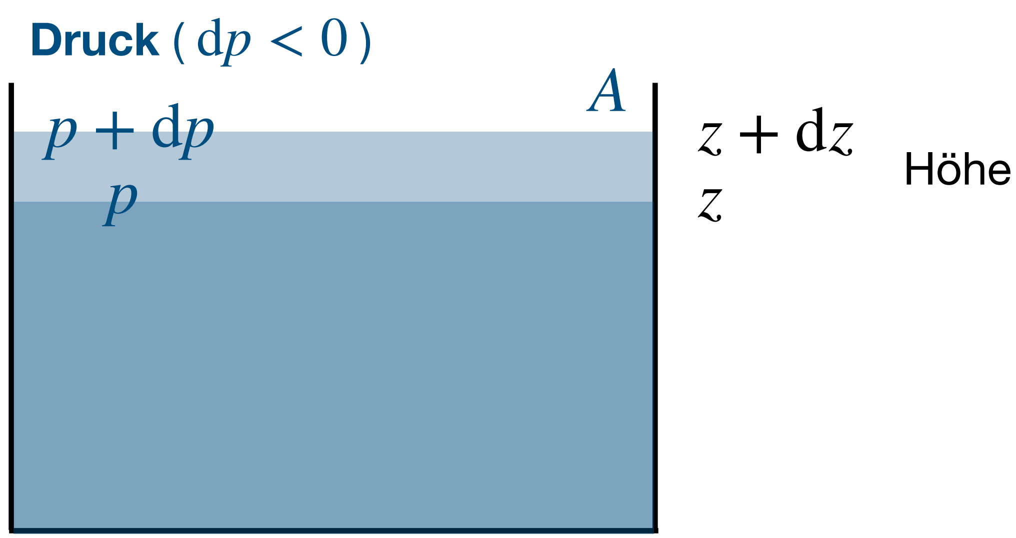
Masse, Dichte

$\Rightarrow p \sim \rho$ Bei $T = \text{const.}$: Gasdruck ~ Gasdichte

bzw. $\frac{p}{\rho} = \text{const.}$

9.2 Flüssigkeiten und Gase im Schwerefeld

Gravitation : externe Kraft F_{ext} auf Fl. / Gas → erzeugt Druck



$$\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}m \cdot g}{A} = -\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{g}{A}$$

$$\underset{\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z}{=} -g\,\rho(z)\,\mathrm{d}z$$

Unterschiedliche Effekte für **Gas** (Obere Schichten komprimieren untere Schichten)
und **Flüssigkeiten** ($\kappa \approx 0$)

aus Boyle-Mariotte, vgl. Folie 504

$$\boxed{\rho(z) \approx \rho = \text{const}\,.}$$

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \text{const}\,. = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho(z) = p(z) \cdot \frac{\rho_0}{p_0}}$$