Präsenzaufgabenblatt 3.

(1)(i) $$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3^3 = 27$$

(ii) $$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{\text{Stirling}}{\leq} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi n})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n^n}{e^n}\right)^{1/n}} = 0$$

$$\Rightarrow R = +\infty.$$

(3)(i) $$\lim_{k\to+\infty} |kz^k| = \lim_{k\to+\infty} k|z|^k = \lim_{k\to+\infty} k = +\infty \neq 0.$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{k^2} z^k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

sehe $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist steigend und $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2.$$

Absolut Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

(iii) wir haben $e^{ik\varphi}(e^{i\varphi} - 1) = e^{i(k+1)\varphi} - e^{ik\varphi}$

und für $e^{i\varphi} \neq 1$, $e^{ik\varphi} = \dfrac{e^{i(k+1)\varphi} - e^{ik\varphi}}{(e^{i\varphi} - 1)}$

So für $z \in S\setminus\{1\}$, $z = e^{i\varphi}$ und wir haben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{i\varphi k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{e^{i(k+1)\varphi}-e^{ik\varphi}}{(e^{i\varphi}-1)}$$

$$= \frac{1}{(e^{i\varphi}-1)}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i(k+1)\varphi}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\varphi k}}{k}\right]$$

$$= \frac{1}{(e^{i\varphi}-1)}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i(k+1)\varphi}}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i\varphi(k+1)}}{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(e^{i\varphi}-1)}\left[\sum_{k=1}^{n-1} e^{i\varphi(k+1)} \underbrace{\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]}_{=\frac{1}{k(k+1)}} + \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{n} - e^{i\varphi}\right]$$

Aber $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{e^{i\varphi(k+1)}}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$ Konvergiert (schon gesehen)

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k$ Konvergiert für $z$ in $S\setminus\{1\}$

und für $z = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

2) (i) $\partial_{\bar z} \bar f = \frac{1}{2}\left(\partial_x \bar f + i\, \partial_y \bar f\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x u - i\,\partial_x v + i\left(\partial_y u - i\,\partial_y v\right)\right)$$

$$= \overline{\frac{1}{2}\left(\overline{\partial_x u + i\,\partial_x v} + i\,\overline{\left(\partial_y u + i\,\partial_y v\right)}\right)}$$

$$= \overline{\partial_z f}$$

Die Linearität folgt aus Linearität von $\partial_x, \partial_y$.

(ii) $\partial_{\bar z} f = 0 \iff \frac{1}{2}\left(\partial_x f + i\,\partial_y f\right) = 0$

$$\iff \frac{1}{2}\left(\partial_x u + i\,\partial_x v + i\,\partial_y u - \partial_y v\right)$$

$$\iff \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

Aber $f$ ist reell differenzierbar: Holomorph $\iff$ Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

und $\partial_z f = \frac{1}{2}\left(\partial_x u + i\,\partial_x v\right) - \frac{i}{2}\left(\partial_y u + i\,\partial_y v\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v\right) + \frac{i}{2}\left(\partial_x v - \partial_y u\right)$$

$$\overset{C.R}{=} \partial_x u + i\,\partial_x v = f' \quad \text{(Vorlesung)}$$