 Angelo Brade, Michael Vogt

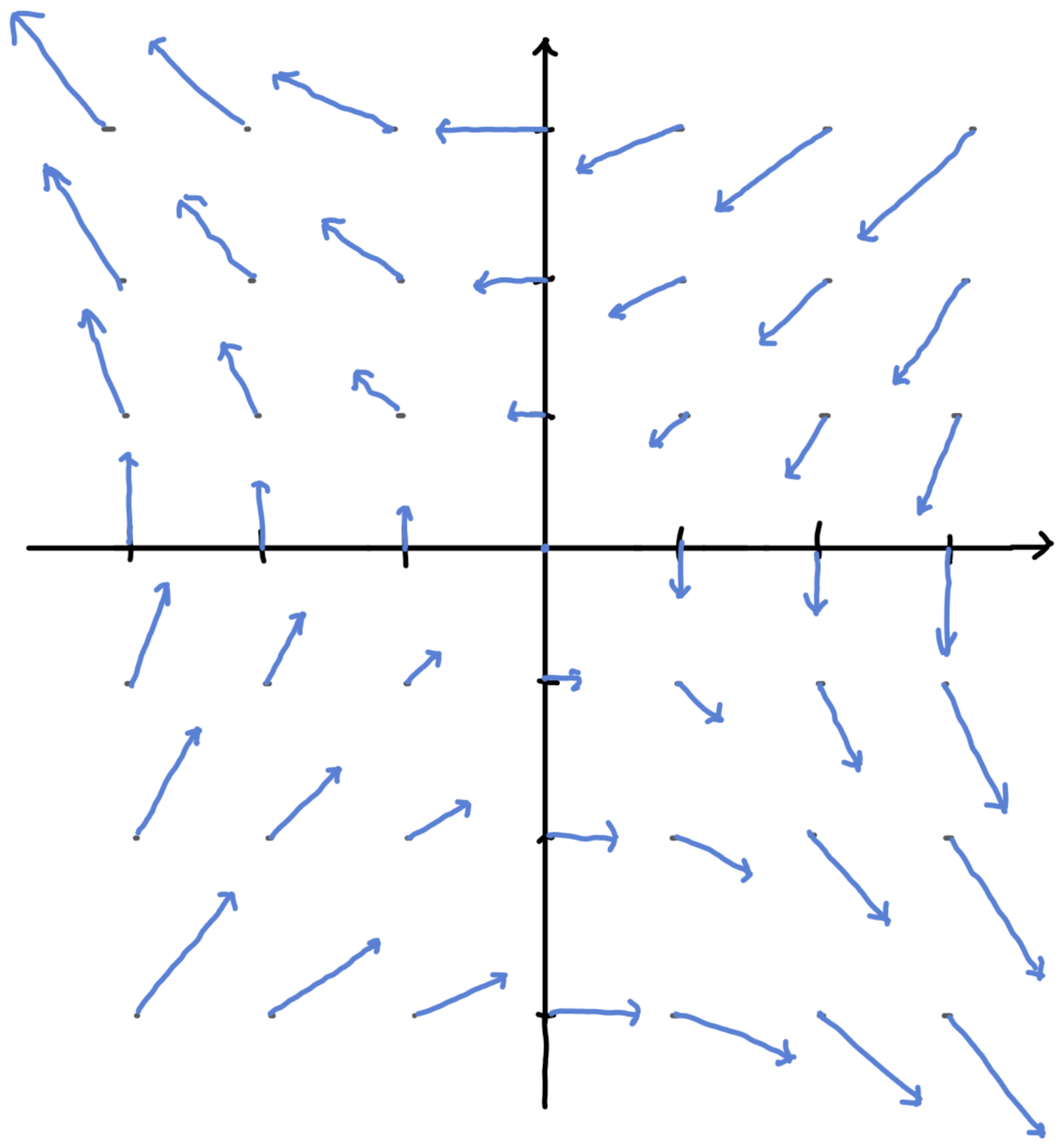
1 $\vec{F} = \begin{pmatrix} -ky \\ -kx \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Ein Kraftfeld $\vec{F}$ ist konservativ, wenn überall $\vec{rot}\,\vec{F} = 0$ ist

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ky \\ -kx \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(-kx)}{\partial z} \\ \frac{\partial(-ky)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \\ \frac{\partial(-kx)}{\partial x} - \frac{\partial(-ky)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-k-(-k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Das Kraftfeld ist konservativ

b)



1
c) $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_1} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$

i. $\int_{P_1}^{P_3} \vec{F}\,d\vec{s} + \int_{P_3}^{P_2} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_3} \vec{F}\,\frac{d\vec{s}}{dx}\,dx + \int_{P_3}^{P_2} \vec{F}\,\frac{d\vec{s}}{dy}\,dy = \int_{x_1}^{x_3} \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx + \int_{y_3}^{y_2} \vec{F} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dy = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_3}^{y_2} F_y\,dy$

$= \int_{-3}^{3} -k\underset{-3}{\underset{\shortparallel}{y}}\,dx + \int_{-3}^{1} -k\underset{3}{\underset{\shortparallel}{x}}\,dy = [3k]_{-3}^{3} + [-3k]_{-3}^{1} = 18k + (-3k - 9k) = 6k$

ii. $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{s})\,d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{P_1}^{P_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_{x_1}^{x_2} -ky\,dx + \int_{y_1}^{y_2} -kx\,dy + \cancel{\int_{z_1}^{z_2} 0\,dz}$

$= [-kxy]_{x_1}^{x_2} + [-kxy]_{y_1}^{y_2} \quad | \; y(x) = \frac{2}{3}x; \; x(y) = \frac{3}{2}y$

$= \left[-\frac{2}{3}kx^2\right]_{-3}^{3} + \left[-\frac{3}{2}ky^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{18}{3}k + \frac{18}{3}k - \frac{3}{2}k - \left(-\frac{27}{2}k\right) = 12k$

(Eigentlich sollte das Ergebnis identisch sein

iii. $x = ay^2 + by + c$ geht durch $(-3,-3)$ $(0,0)$ $(3,1)$

$-3 = 9a - 3b + c \overset{c=0}{\Rightarrow} -3 = 9a - 3b \overset{b=3-a}{\Rightarrow} -3 = 9a - 9 + 3a$

$\Leftrightarrow 12a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$0 = c$

$3 = a + b + c \overset{c=0}{\Rightarrow} 3 = a + b$

$\Leftrightarrow b = 3 - a$

$b = 3 - a = 2{,}5$

$x = 0{,}5y^2 + 2{,}5y$

$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}\,\frac{d\vec{s}}{dy}\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5y^2 + 2{,}5y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dy = \int_{y_1}^{y_2} -ky(0{,}5y^2 + 2{,}5y)\,dy + \int_{y_1}^{y_2} -kxy\,dy$

1. Integral $= \int_{-3}^{1} -0{,}5ky^3 - 2{,}5ky^2\,dx = \left[-\frac{1}{8}ky^4 - \frac{5}{6}ky^3\right]_{-3}^{1} = -\frac{1}{8}k - \frac{5}{6}k - \left(-\frac{1}{8} \cdot 81k + 27 \cdot \frac{5}{6}k\right) = \frac{80}{8}k - 28 \cdot \frac{5}{6}k = 10k - \frac{140}{6}k$

④

a) Am Ende des Falls wurde die potenzielle Gravitationsenergie zu kinetischer Energie umgewandelt.

$$W_{pot} = W_{kin}$$

$$\cancel{m} g h_0 = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 = 2 g h_0$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2 g h_0}$$

Am Höhepunkt ist die kin. Energie wieder in pot. En. umgewandelt

$$W_{pot} = W_{kin}$$

$$\cancel{m} g h_0' = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0'^2 \quad | : g$$

$$\Leftrightarrow h_0' = \frac{v_0'^2}{2g} \quad \Big| \text{ mit } \frac{v_0'}{v_0} = \varepsilon \Leftrightarrow v_0' = \varepsilon \cdot v_0$$

$$h_0' = \frac{(\varepsilon v_0)^2}{2g} = \frac{\varepsilon^2 v_0^2}{2g}$$

b) Geschw.keit von m_1 beim Hochspringen: $V_1 = \epsilon V_0$ Geschw.keit v. m_2 am Ende des Falls: $v_2 = v_0$

$$\epsilon = \frac{V_1' - V_2'}{V_1 - V_2} \Leftrightarrow v_1 \epsilon - v_2 \epsilon = V_1' - V_2' \Leftrightarrow V_1' = V_2' + (V_1 - V_2)\epsilon$$

Impulserhaltung (ohne Beachtung der Inelastizität)

mit Beachtung d. Inelastizität

$$(m_1 v_1 + m_2 V_2) = (m_1 V_1' + m_2 V_2')$$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_2' + m_1 \epsilon (V_1 - V_2) + m_2 V_2'$$

$V_1 = \epsilon V_0$; $V_2 = V_0$

$$m_1 V_0 \epsilon + m_2 v_0 = m_1 \epsilon (V_0 \epsilon - V_0) + V_2'(m_1 + m_2)$$

$$V_0 (m_1 \epsilon + m_2) = m_1 \epsilon V_0 (e - 1) + v_2'(m_1 + m_2)$$

$$V_0 (m_1 \epsilon + m_2) - V_0 \cdot m_1 \epsilon (\epsilon - 1) = V_2' (m_1 + m_2) \quad | : (m_1 + m_2)$$

$$V_0 \frac{m_1 \epsilon + m_2 - m_1 \epsilon^2 + m_1 \epsilon}{(m_1 + m_2)} = V_2'$$

$$V_2' = V_0 \frac{m_2 + 2 m_1 \epsilon + m_1 e^2}{m_1 + m_2}$$

(Vorzeichenfehler; eigentlich müsste $V_2 = -V_0$ sein)

c) Man kann die Formel für V_2' (mit anderen Variablen) wieder verwenden
V_2' aus b) wird nun als Ausgangsgeschw.keit V_2 gesehen

$$\epsilon = \frac{V_2' - V_3'}{V_2 - V_3} \Leftrightarrow V_2' = V_3' + (V_2 - V_3)\epsilon$$

Impulserhaltung: $m_2 v_2 + m_3 V_3 = m_2 V_2' + m_3 V_3' \quad | V_3 = V_0$

$$m_2 v_2 + m_3 v_0 = m_2 V_3' + m_2 \epsilon (V_2 - V_0) + m_3 V_3'$$

$$m_2 V_2 + m_3 V_0 = m_2 V_3' + m_2 v_2 \epsilon - m_2 V_0 \epsilon + m_3 V_3'$$

$$m_2 V_2 + m_3 V_0 - m_2 V_2 \epsilon + m_2 V_0 \epsilon = V_3'(m_2 + m_3)$$

$$V_2 m_2 (1 - \epsilon) - V_0 (m_3 + m_2 \epsilon) = V_3' (m_2 + m_3)$$

$$V_0 m_2 (1 - \epsilon) \frac{m_1(\epsilon^2 + 2\epsilon) - m_2}{m_1 + m_2} - V_0 (m_3 + m_2 \epsilon) = V_3'(m_2 + m_3)$$

$$\frac{V_0}{m_2 + m_3} \left(m_2 \left((1 - \epsilon) \frac{m_1(\epsilon^2 + 2\epsilon) - m_2}{m_1 + m_2} + \epsilon \right) + m_3 \right) = V_3'$$

$$\frac{V_0 / m_2}{1 + \frac{m_3}{m_2}} \left(m_2 \left((1 - \epsilon) \frac{m_1(\epsilon^2 + 2\epsilon) - m_2}{m_1 + m_2} + \epsilon \right) + m_3 \right) = V_3'$$

$$\frac{V_0}{1 + \frac{m_3}{m_2}} \left((1 - \epsilon) \frac{\frac{m_1}{m_1}(\epsilon^2 + 2\epsilon) - \frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} + \epsilon + \frac{m_3}{m_2} \right) = V_3'$$

$$V_3' = \frac{V_0}{1 + \frac{m_3}{m_2}} \left(\frac{(1 - \epsilon)(\epsilon^2 + 2\epsilon) - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \epsilon + \frac{m_3}{m_2} \right)$$

(Vorzeichenfehler; eigentlich müsste $V_2 = -V_0$ sein)

4

d) $m_1 = 3\,kg$ $m_2 = 2\,kg$ $m_3 = 1\,kg$ $h_0 = 1\,m$ $\epsilon = 0{,}9$

$$V_3' = \left(\frac{1{,}9 \left(0{,}9^2 + 1{,}8 - \frac{2}{3} \frac{kg}{kg}\right)}{1 + \frac{2\,kg}{3\,kg}} + 0{,}9 - \frac{1\,kg}{2\,kg} \right) \frac{V_0}{1 + \frac{1\,kg}{2\,kg}} = \left(\frac{\left(2{,}61 - \frac{2}{3}\right) \cdot 1{,}9}{\frac{5}{3}} + 0{,}4 \right) \frac{V_0}{\frac{3}{2}} = 1{,}7436\, V_0$$

a: $V_0 = \sqrt{2 g h_0}$

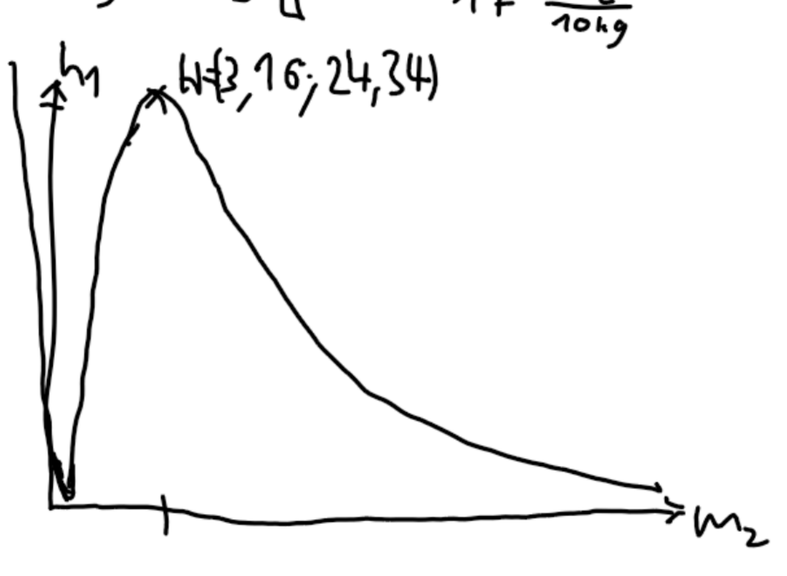
$$W_{pot} = W_{kin}$$

$$\cancel{m} g h_1 = \frac{1}{2} \cancel{m} V_3'^2$$

$$\Leftrightarrow h_1 = \frac{V_3'^2}{2g} = \frac{(1{,}7436\, V_0)^2}{2g} = \frac{1{,}7436^2 \cdot \cancel{2g} h_0}{\cancel{2g}} = 1{,}7436^2 h_0 \approx 3{,}04\,m$$

e) $m_1 = 10\,kg$ $m_3 = 1\,kg$ $h_0 = 1\,m$ $\epsilon = 0{,}9$

$$h_1 = \frac{V_3'^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{1{,}9 \left(0{,}81 + 1{,}8 - \frac{m_2}{10\,kg}\right)}{1 + \frac{m_2}{10\,kg}} + 0{,}9 - \frac{1\,kg}{m_2} \right) \frac{\sqrt{2g \cdot 1\,m}}{1 + \frac{1\,kg}{m_2}} \right]^2 = \frac{1}{19{,}62 \frac{m}{s^2}} \left[\left(\frac{8{,}379 - 0{,}19 \frac{m_2}{kg}}{1 + 0{,}1 \frac{m_2}{kg}} + 0{,}9 - \frac{1\,kg}{m_2} \right) \frac{\sqrt{19{,}62} \frac{m}{s}}{1 + \frac{1\,kg}{m_2}} \right]^2$$



Das Maximum von $h_1 = 24{,}34\,m$
liegt bei: $m_2 = 3{,}16\,kg$

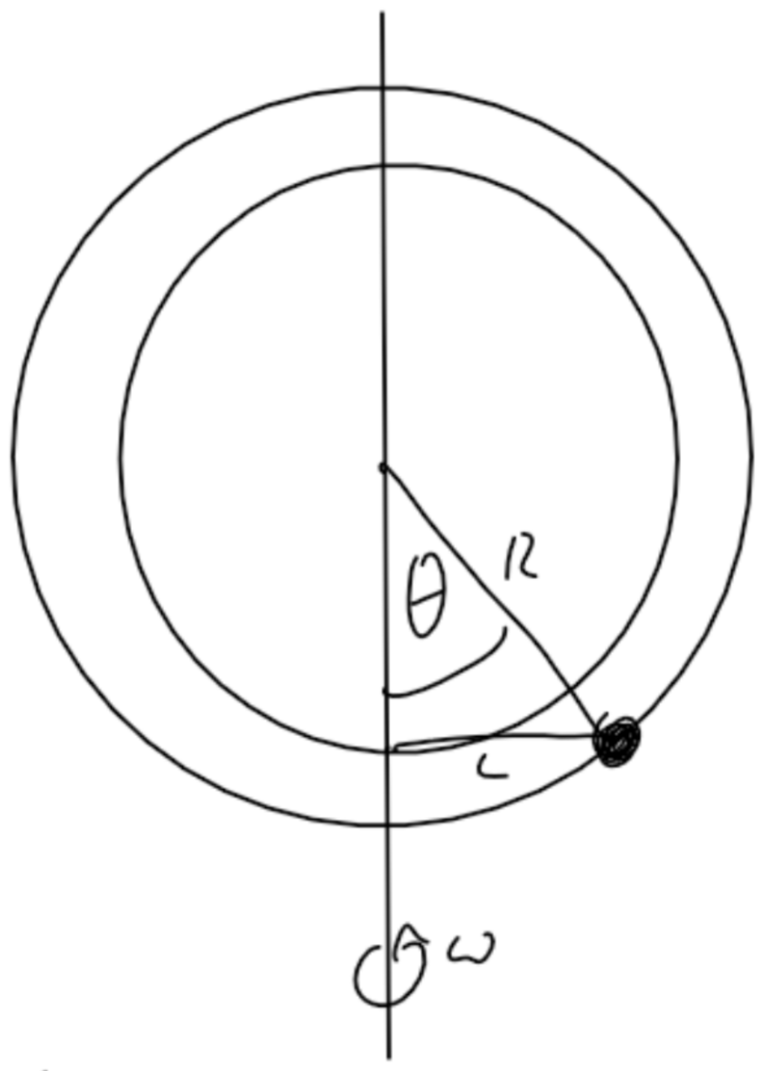
(2)

a) $F_G = m \cdot g$

$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot L$

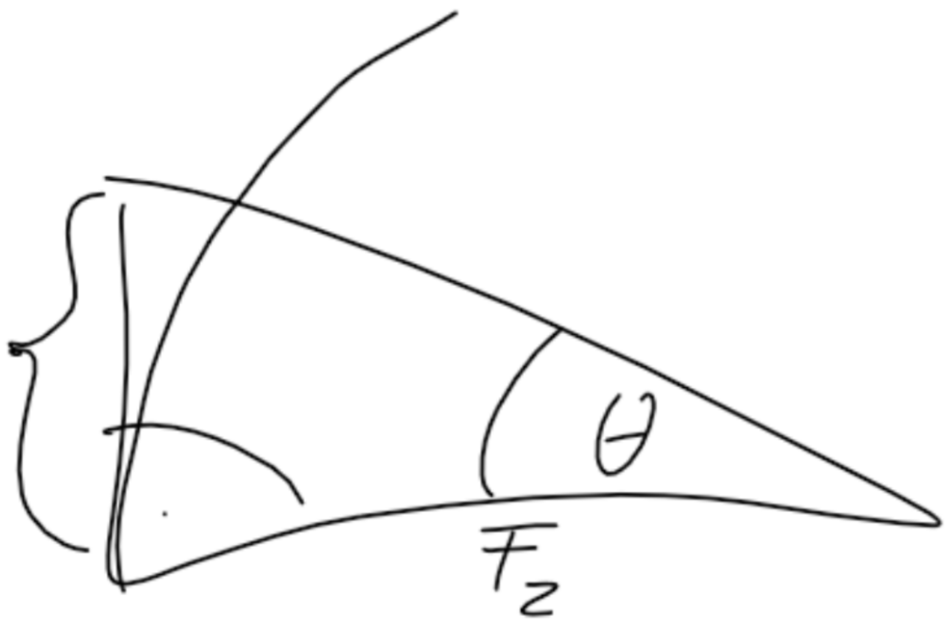
$$\tan(\theta) = \frac{F_Z}{F_G}$$

$$\tan(\theta) = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot L}{m \cdot g}$$



$R \cdot \sin(\theta) = L$

$$\tan(\theta) = \frac{\omega^2 \cdot L}{g} = \frac{4\pi \cdot L}{g\, T^2}$$



$L = R \cdot \sin(\theta)$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{4\pi \cdot \sin(\theta) \cdot R}{g \cdot T^2}$$

$F_Z = \tan(\theta) \cdot F_G$

$$\cos(\theta) = \frac{g \cdot T^2}{4\pi \cdot R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g \cdot T^2}{4\pi \cdot R}\right)$$

b) $T = 0{,}45\,s \wedge R = 0{,}15\,m$

$\Rightarrow \theta \approx 70°$

c) $T = 0{,}85\,s \wedge R = 0{,}15\,m$

$\Rightarrow$ Der Winkel θ ist undefiniert in den reellen Zahlen.

(3)

Benötigt: $E_{kin} > E_{pot.L.}$

Wenn $E_{kin} = E_{pot.L.}$, fällt der Ball beim Höhepunkt des Loopings nach unten.

Wenn: $E_{kin} < E_{pot.L.}$, kommt der Ball nicht bis zum Höhepunkt.

Damit $E_{kin} > E_{pot.L.}$, muss der Ball in einer Höhe losgelassen werden, in der er genug $E_{pot.B.}$, um E_{kin} aufzubauen, um $E_{pot.L.}$ zu überwinden.

Aus $E_{pot.B.} > E_{pot.L.}$ folgt, dass der Ball höher losgelassen werden muss als der Loopin groß ist: $h > 2R$.

Die Äquivalenz von $E_{pot.B.}$ zu E_{kin} ist durch die Reibungslosigkeit gegeben.