* Addition von Drehimpulsen : Allgemeine Fall

Genau dieselben Schritte können gemacht werden für den allgemeineren Fall

$$\mathcal{H}' = \mathbb{C}^{2j_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2j_2+1}$$

ONB : $|j_1, m_1\rangle$ ONB : $|j_2, m_2\rangle$

Drehimpuls-op. $\hat{\vec{J}}_1$ Drehimpuls-op. $\hat{\vec{J}}_2$

$$m_i = -j_i, \dots, j_i$$

$$\langle j_i, m_i | j_k, m_k \rangle = \delta_{j_i j_k} \delta_{m_i m_k}$$

$$[\hat{J}_{kx}, \hat{J}_{ky}] = i \hat{J}_{kz} \quad \text{etc.}$$

$$[\hat{J}_{1,x}, \hat{J}_{2x}] = 0 \quad \text{etc.}$$

* ONB für $\mathcal{H}'$: $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$

Drehimpuls-op. auf $\mathcal{H}'$

$$\hat{\vec{J}} := \hat{\vec{J}}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{\vec{J}}_2$$

* $\hat{J}_z$ ist diagonal in dieser Basis, $\hat{\vec{J}}^2$ ist es nicht.

$\rightsquigarrow$ Es gibt eine ONB $\{|J,M\rangle\}$ von $\mathcal{H}'$ so dass

$$\hat{\vec{J}}^2 |J,M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J,M\rangle$$
$$\hat{J}_z |J,M\rangle = \hbar M |J,M\rangle$$

Frage: • Welche Werte von J?

• Basiswechsel?

Theorem (Clebsch-Gordan Zerlegung):

$$J = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2.$$

Anders gesagt: Die ONB in welcher $\hat{J}_z$ und $\hat{\vec{J}}^2$ diagonal sind ist

$$\{|J,M\rangle : |j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2, -J \le M \le J\}$$

Basiswechsel:

$$|J,M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M\rangle$$

Clebsch-Gordan coefficient

Das Wasserstoff atom

Es gilt

$$\hat{H} = \hat{H}_{no\text{-}spin}\, \mathbb{1} + w(r)\, \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{L}}$$

* Der Zustand des Elektron ist festgelegt durch

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$m = -\ell, \ldots, \ell$$
$$s = \pm 1/2$$
$$J = \ell \pm 1/2$$

* $H_{no\text{-}spin}$: Energie-Level Rängen nur von n ab:

$$E_n \simeq - \frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$$

* ONB für das Wasserstoff-Atom mit Spin

$$\Psi_{nlms}(r,\theta,\varphi) = \varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi)\,|s\rangle$$

$$\varphi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$\rightarrow$ Eigenfunktionen von $\hat{H}_{no\text{-}spin}$

$\Psi_{nlms}(r,\theta,\varphi)$: Eigenvektoren von

$\hat{H}_{no\text{-}spin}\mathbb{1}$, $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\vec{S}}^2$, $\hat{S}_z$

* Neue Basis

$$\Phi_{nl+M}(r,\theta,\varphi) =$$

$$= \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}\,\Psi_{nl(M-\frac{1}{2})+}(r,\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}\,\Psi_{nl(M+\frac{1}{2})-}(r,\theta,\varphi)$$

$$\Phi_{nl-M}(r,\theta,\varphi)$$

$$= -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}\,\Psi_{nl(M-\frac{1}{2})+}(r,\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}\,\Psi_{nl(M+\frac{1}{2})-}(r,\theta,\varphi)$$

Eigenvektoren von $\hat{H}_{no\text{-}spin}\,\mathbb{1}$, $\hat{\vec{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{\vec{S}}^2$

$$\hat{\vec{J}}^2\, \Phi_{nem\pm} = \left(l \pm \tfrac{1}{2}\right)\left(l \pm \tfrac{1}{2} + 1\right)\hbar^2\, \Phi_{nem\pm}$$

$$\hat{J}_z\, \Phi_{nem\pm} = m\hbar\, \Phi_{nem\pm}$$

$$\hat{\vec{L}}^2\, \Phi_{nem\pm} = l(l+1)\hbar^2\, \Phi_{nem\pm}$$

$$\hat{\vec{S}}^2\, \Phi_{nem\pm} = \tfrac{3}{4}\hbar^2\, \Phi_{nem\pm}$$

$\rightsquigarrow$ Da $\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right)$

$$\left(\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}\right)\Phi_{nem\pm} = \hbar^2\left(\tfrac{1}{2} \pm \left(l + \tfrac{1}{2}\right)\right)\Phi_{nem\pm}$$

$\uparrow$

l, für $+$

$-(l+1)$, für $-$

ABER: $\Phi_{nem\pm}$ ist KEIN Eigenvektor von $\hat{H}$!

N.B: Es gilt:

$$\Phi_{nlsM}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\,\tilde{Y}_{lMs}(\theta,\varphi)$$

mit

$$\tilde{Y}_{lM+}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}\,Y_l^{M-1/2}(\theta,\varphi)\,|+\rangle + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}\,Y_l^{M+1/2}(\theta,\varphi)\,|-\rangle$$

$$\tilde{Y}_{lM+}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-M}{2l+1}}\,Y_l^{M-1/2}(\theta,\varphi)\,|+\rangle + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+M}{2l+1}}\,Y_l^{M+1/2}(\theta,\varphi)\,|-\rangle$$

und $\tilde{Y}_{lM+}(\theta,\varphi)$ sind Eigenfunktionen von $\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{S}}^2$.