Nr. 1

Gegeben: Elektronen mit Energie E, E'; Kern mit Masse M, Impuls $\vec{q}$, Energie ν, vorher in Ruhe; $q^2 = \nu^2 - |\vec{q}|^2$; $\hbar = c = 1$

1.)

$p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad q = (\nu, \vec{q})$

$p_A' = p_A + q \implies p_A'^2 = p_A^2 + q^2 + 2 p_A q \qquad | \; p_A^2 = M^2, \; -q^2 = Q^2, \; p_A \cdot q = M\nu, \; p_A'^2 = M'^2$

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Bei inelastischer Streuung gilt $M' > M$, daraus folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 > 0$ $\qquad Q^2 = 4EE' \sin\frac{\theta}{2}$

2.)

Zunächst folgt analog zu 1.):

$M'^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

Nun gilt jedoch $M' = M$, daher folgt:

$M'^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 = 0 \iff 2M\nu = Q^2$

3.)

$p_e + p_A = p_e' + p_A'$

$\implies (p_e + p_A)^2 = (p_e' + p_A')^2$

$\iff p_e^2 + p_A^2 + 2 p_e p_A = p_e'^2 + p_A'^2 + 2 p_e' p_A' \qquad | \; p_e^2 = p_e'^2 = m_e^2 \quad p_A^2 = M^2 = M'^2 = p_A'^2 \quad | :2$

$\iff p_e p_A = p_e' \cdot p_A'$ korrigiert $\qquad | \; p_A' = p_e + p_A - p_e'$

$\iff p_e p_A = p_e' p_e + p_e' p_A - p_e'^2 \qquad | \; p_A = (M, 0) \quad p_A' = (M', \vec{q}) \quad p_e = (E, \vec{p}) \quad p_e' = (E', \vec{p}')$

$\iff E \cdot M = E' E - \vec{p}' \cdot \vec{p} + E' M - m_e^2 \qquad | \; \vec{p}' \cdot \vec{p} = |\vec{p}'||\vec{p}| \cos\theta$ mit $|\vec{p}'||\vec{p}| = E' \cdot E$ da m_e sehr klein ist

$\iff E \cdot M = E' E (1 - \cos\theta) + E' M - m_e^2$

$\iff E'(E(1-\cos\theta) + M) = E \cdot M + m_e^2$

$\iff E' = \frac{E \cdot M + m_e^2}{E(1-\cos\theta) + M} \approx \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M}$

4.)

Gegeben: $M = 12u = 12 \cdot 931\,\mathrm{MeV}$, $E = 495\,\mathrm{MeV}$, $\theta = 65{,}4°$

$E' = \frac{E \cdot M}{E(1-\cos\theta) + M} \approx 482{,}5\,\mathrm{MeV}$

Die berechnete Energie passt zum größten Peak im Spektrum.

5.)

Die anderen rühren daher dass nicht alle Elektronen elastisch gestreuut werden; manche werden auch inelastisch gestreut.

Da die kinetische Energie in Anregungsenergie von diskreten Energieniveaus übergeht, gibt es weitere Maxima.

Nr. 2

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}$ $\longrightarrow$ Annahmen: - Kerne sind punktförmig $\rightarrow$ jetzt mit Ausdehnung!
- Spinlose Teilchen
- Rückstoß vernachlässigt

$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot |F(\vec{q})|^2$
$\hookrightarrow$ Formfaktor $\hat{=}$ Fouriertrans. der Ladungsverteilung $\Rightarrow F(\vec{q}) = \frac{1}{Ze}\int_V e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \cdot \rho(r)\, d^3r$

1.)

Formfaktor für Punktladung:

$\rho(r) = Ze\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \rightsquigarrow F(\vec{q}) = e^{i\vec{q}\cdot\vec{0}} = 1$
↑ Dirac Delta

$\rho(\vec{r})$	$F(\vec{q})$	Beispiel
punktför.	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
hom. Kugel	Oszi.	–
dif. Kugel	Oszi.	^{40}Ca

2.)

$$\int_V d^3r = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{\infty} r^2 dr$$
$$F(\vec{q}) = \frac{2\pi}{Ze}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} r^2 \rho(r) e^{iqr\cos\theta}\, d\cos\theta\, dr$$
$$= \frac{2\pi}{Ze}\int_0^{\infty} r^2 \rho(r) \underbrace{\left[\frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\theta}\right]_{-1}^{1}}_{=2i\sin(qr)} dr$$
$$= \frac{4\pi}{Ze}\int_0^{\infty} r^2 \rho(r) \frac{\sin(qr)}{qr}\, dr$$

3.)

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3Ze}{4\pi R^3} &, r \le R \\ 0 &, r > R \end{cases}$$

In Gleichung aus 2.) einsetzen: $(Q = Ze)$

$$F(q) = \frac{4\pi}{Q}\int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} r^2 \frac{\sin(qr)}{qr}\, dr$$
$$= \frac{3}{qR^3}\int_0^R r\cdot\sin(qr)\, dr \qquad |\text{partielle Int.}$$
$$= \frac{3}{qR^3}\left(\left[\frac{-r\cos(qr)}{q}\right]_0^R - \int_0^R \frac{-\cos(qr)}{q}\, dr\right)$$
$$= \frac{3}{qR^3}\underbrace{\left(\frac{\sin(qr) - qR\cos(qr)}{(qR)^2}\right)}_{j_1(qR) \rightarrow \text{sphä. Bessel Fkt.}}$$

4.)

$j_1(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$ hat Nullstelle bei $x = 4{,}493$

$\rightsquigarrow x = q\cdot R \iff R = \frac{4{,}493}{q} \rightarrow q$ bei Minimum bestimmen $(\theta = 52°)$

$|q|^2 = |p' - p|^2 = |p|^2 + |p'|^2 - 2|p||p'|\cos\theta$ | Vernachlässigen Rückstoß $(|\vec{p}| = |\vec{p}'|)$

$= 2|p|^2(1 - \cos\theta)$ | Annahme: vernachlässigen m_e $(|p|^2 = |p'|^2 = m_e^2)$

$= 2E^2(1-\cos\theta) = 4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{4{,}433}{368\,MeV} = 0{,}0122\,\frac{1}{MeV} \overset{\text{mit } 200\,MeV\cdot fm = \hbar c = 1}{=} 2{,}4\,fm$

Nr. 3

Gegeben: Schnelle Neutronen, $d_T = 10\,cm$, $\rho_T = 10^{21}$ pro cm^3 (^{53}Cr-Atome), 0,1% wird eingefangen $\longrightarrow$ ^{54}Cr mit $J^P = 0^+$

1.)

Die Wahrscheinlichkeit dw, dass ein einfallendes Teilchen mit dem Target wechselwirkt beträgt

$$dw = \sigma \cdot \rho_T \cdot dx$$

mit dem Wirkungsquerschnitt σ, der Teilchendichte ρ_T des Targets und der Dicke der Targetschicht dx.

Mit $dw = \frac{dN_{Reaktion}}{N}$, also dem Verhältnis aus reagierenden Projektilteilchen zu einfallenden Projektilteilchen, kann man die Gleichung nach $N_{Reaktion}$ auflösen und $-dN$ setzen, woraus die Differentialgleichung

$$-dN = N(x)\, \rho_T\, \sigma\, dx$$

folgt. Die Lösung von dieser ist

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\sigma \rho_T x}$$

wobei $N(x)$ die Anzahl an Projektilteilchen ist, die das Target unverändert (d.h. ohne Reaktion) durchlaufen, während N_0 die Anfangsmenge an Projektilteilchen ist.

Die lässt sich nun nach σ umstellen, wobei $x = d_T$ die Dicke des Targets ist:

$$\sigma = \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N(x)}\right) \qquad \Big| N(x) = N_0 - N_{Reaktion}$$

$$= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{N_0}{N_0 - N_{Reaktion}}\right) \qquad \Big| N_{Reaktion} = 0{,}001\, N_0$$

$$= \frac{1}{d_T \cdot \rho_T} \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}999}\right)$$

$$\approx 1{,}0005 \cdot 10^{-25}\, cm^2$$

✓

2.)

γ_2: E2 Übergang, da aus $|J_1 - J_2| \leq l \leq J_1 + J_2 \Rightarrow l = 2$ folgt, somit ist $El = E2$ und $P = (-1)^l = 1$

γ_3: E2 Übergang aus demselben Grund

✓

3.)

γ_1: Die nächst-wahrscheinlichen Übergänge sind E2 und M1, die Wahrscheinlichkeit ist etwa gleich groß. Für E2 hat der 3,2 MeV-Zustand $J^P = 2^+$,
für M1 hat er $J^P = 1^-$. +

γ_4: Für $1^+ \rightarrow 2^+$ folgt $l = 1, 2, 3$, woraus die möglichen Multipol-Übergänge (unter Beachtung der Parität) M1, E2 und M3 folgen,
wobei M1 und E_2 etwa gleich wahrscheinlich sind und M3 deutlich unwahrscheinlicher.
Für $\cancel{1^- \rightarrow 1^+}$ gibt es keinen Übergang, da es keine Monopolstrahlung ($l = 0$) gibt.
$2^+ \rightarrow 2^+ \Rightarrow l = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow M1, E2, M3, E4$

✓

Zu 2.):

Regeln für EM-Strahlung:

$P = (-1)^l \Rightarrow E$

$P = (-1)^{l+1} \Rightarrow M$

$|J_i - J_f| \leq l \leq J_i + J_f$

Zu 3.):