

Einheiten:

SI - System:

m, kg, s

+ mol, Kelvin, Ampere, Candela

CSS

: cm, g, s
SI : 100 SI : 1000

+ andere Systeme

Messen = Vergleichen mit Einheiten

Sollten reproduzierbar, genau, "einfach" zu realisieren

Alle Definitionen oft nicht "zeitstabil"

↳ Idee: Verknüpfung mit Naturkonstanten oder physikal. Systemen

Definition des Messes \Rightarrow fikt. Geduldigkeits

Vorlesung 3

1 meter = Strecke die Licht im Vakuum in

$1/299\ 792\ 458$ s durchläuft

\rightarrow Zeiten exakt messbar als Längen

$\rightarrow c = 299\ 792\ 458 \frac{m}{s}$
 \hat{c}_{exakt}

Einheiten: 1 AE, LS, Parsec

astroph. Einheit: $1.5 \cdot 10^{11}$ m
(mittlere Distanz Erde-Sonne)

$$\frac{1 \text{ AE}}{1 \text{ Bogensek.}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ AE}$$
$$\approx 3.76 \text{ LS}$$

Zeitmauer \rightarrow Zählen per. Prozesse mit Frequenz ν $[v] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$

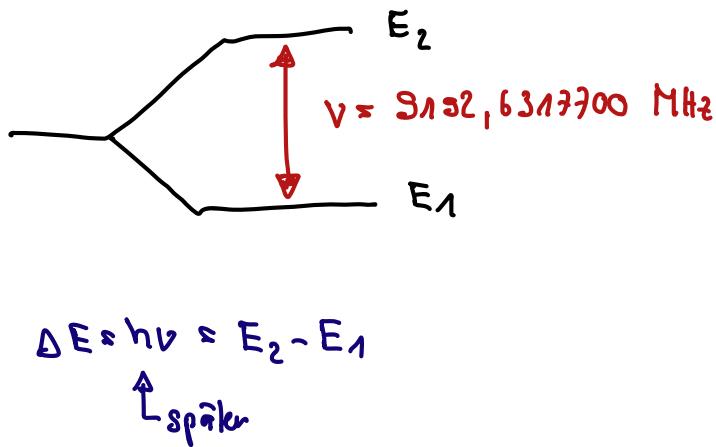
z.B. Schwingdauer eines Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

\rightarrow Genauigkeit $\approx 10^{-6}$
aller Ortsabt. von g

Definition Zeitnormale

$1_s = 9'132'631'770$ - Feste Schwingdauer
von Cs-133-Atomen



Merung langer Zeiten & rad. Zerfälle:

$$t=0 \quad N_0 \text{ Kerne}$$

$$t = T_{1/2} \quad \frac{1}{2} N_0$$

$$t = 2 \cdot T_{1/2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 N_0$$

$$t = 3 \cdot T_{1/2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 N_0$$

⋮

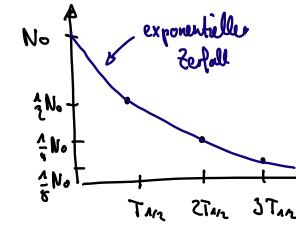
sog. Halbwertszeit
 $T_{1/2}$
(def. !)

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \quad \frac{1}{2} = e^{\ln \frac{1}{2}} = e^{-\ln 2} \\ &= N_0 \cdot e^{-\ln 2 / T_{1/2}} \\ &= N_0 \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \text{ Zerfallskonstante}$$

$[\lambda] = \text{s}^{-1}$



Vorlesung 4

Definition Massennormale: Si-Kristallkugel
(Gitterabstand, Spurzeit usw.)

Sele Näherung: $1 \text{ kg} \approx 1 \text{ dm}^3$ Wasser bei 4°C
(Mw. -0.025 J)

Atomare Masseeinheit:

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \text{ m}_{^{12}\text{C}} \approx 1.66056 \dots \times 10^{-29} \text{ kg}$$

Stoffmenge: 1 mol = Stoffmenge eines Systems, das aus elementaren Teilen wie $12 \text{ g } ^{12}\text{C}$ besteht

Anzahl

$$N = n \cdot N_A \quad \text{Avogadro-Zahl: } N_A = 6.02249 \dots \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

\uparrow Stoffmenge [n] = mol $1 \text{ mol} = 6.022 \dots \cdot 10^{23}$ Teilchen

E.B.: 1 mol $^{12}\text{C} \approx 16 \text{ g}$

^{14}C - Methode zum Datieren org. Materialien
↑ instabile Kohlenstoff Isotope ($T_{1/2} = 5700 \text{ a}$)
Entsteht in der Atmosphäre via



⇒ bindet sich zu CO_2 , Konzentration konstant

⇒ lebende Organismen nehmen CO_2 auf

⇒ führt zu einem Stoff-geo.
in leb. Organismen
(^{14}C zerfällt aber nicht erneut)

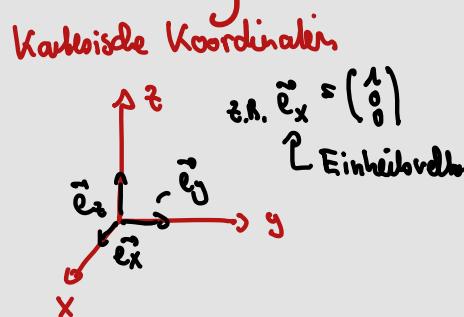
⇒ Nach dem Tod findet dieser Austausch
nicht mehr statt → ^{14}C Konzentration nimmt
ab
↳ ermöglicht Altersbestimmung

Massenpunkt: (5P)

→ idealisierte Annahme
(keine Ausdehnung, Reduktion auf Bewegung des Schwerpunkts, -)

Ortsvektor: \vec{r} beschreibt Ort eines MP zu Zeit t : $\vec{r}(t)$
bzgl. Koordinatensystems

$$\vec{r}(t) = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$$



Schnelligkeit & Beschleunigung:



$$\text{mittl. Gesch.: } \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{(Fliehzeiten) Geschw.: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$$

Weitere Systeme:

Zylinderkoordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

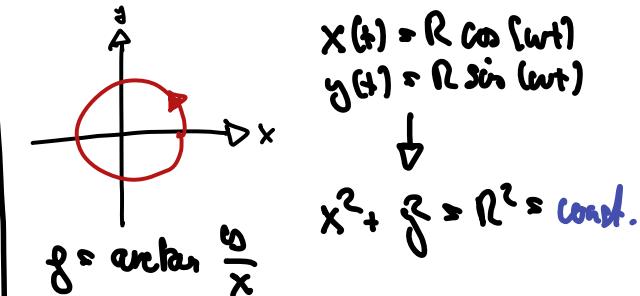
Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{r} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Bahnkurve:

Abbildung von $\vec{r}(t)$ im Ortsraum

z.B. Kreisbewegung



$$\text{Kreisfrequenz } \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Vorlesung 5

Analog:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Differentialen Zusammenhang!}$$

für $\ddot{a}(t) = \text{const.}$ (z.B. Erdgesell. \vec{g})

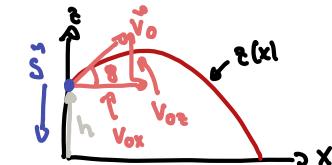
$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Schräger Wurf

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + h \end{aligned}$$

$$\text{Ersetze } t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\Rightarrow z(x) = -\frac{1}{2} g \int \frac{1}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + h$$



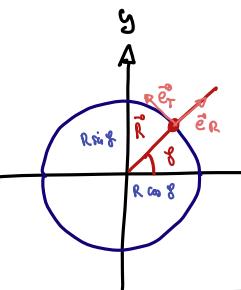
$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

Wurfpunkt!

Kreisbewegung:

gleichförmige Bewegung $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$

$|\vec{v}| = \text{const.}$ aber $\vec{v} \neq \text{const.}$
→ Beschleunigung



Definiere $w := \frac{d\varphi}{dt}$ Winkelgeschw.
(o. Kreisfrequenz) $[w] = \frac{1}{s}$

⇒ gleichförm. Kreisbewegung gilt
 $\varphi(t) = w \cdot t$

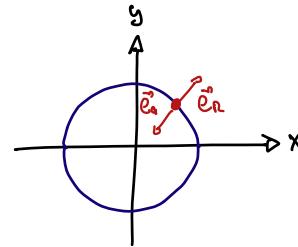
$$\text{Umlaufzeit } T = \frac{2\pi}{w} \quad \text{Umflofrequenz } v = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

(φ übersteigt 2π)

in x-y-Ebene:

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -wR \sin \omega t \\ wR \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = wR \vec{e}_T\end{aligned}$$

$\vec{v} \perp \vec{R}$
 $|\vec{v}| = v = wR = \frac{2\pi R}{T}$



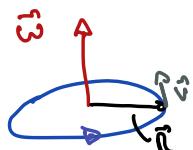
$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^2 R \cos(\omega t) \\ -w^2 R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -w^2 R \vec{e}_R = w^2 R \vec{e}_a \\ &= \frac{v^2}{R} \vec{e}_a \quad (\text{Beschleunigung zeigt zum Zentrum})\end{aligned}$$

Bewegung in x-y-Ebene:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ wR \cos \varphi \end{pmatrix} = v \vec{e}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = -w^2 \vec{R} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_a$$

Verallgemeinerung für led. Kreisbew.



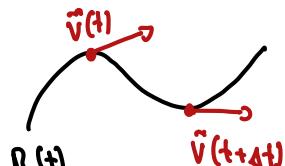
Winkelgeschw. als Vektor

$$\vec{\omega} \perp \vec{R} \quad \text{und} \quad \vec{\omega} \perp \vec{v}$$

Wählen $\vec{\omega}$ so, dass
 $\vec{R}, \vec{v}, \vec{\omega}$ Rechtssystem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (= -\vec{R} \times \vec{\omega})$$

Allgem. krümmende Bewegung



\vec{v} immer tangential zu
Bahnkurve \vec{R}

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v \vec{e}_T \\ \hookrightarrow \vec{a} &= \vec{v} = \dot{v} \vec{e}_T + v \vec{e}_T \\ &\text{Änderung} \quad \text{Änderung} \\ \text{Schnig} \quad v & \quad \text{Richtig} \quad \vec{v}\end{aligned}$$

$\vec{a}_N = 0$: geradlin. Bewegung
 $\vec{a}_T = 0$: $|v| = \text{const.} \Rightarrow$ Kreisbahnen

allg. Bewegung in x-y-Ebene

$$\vec{e}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\approx 1} \quad \vec{e}_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\approx 1}$$

$$\hookrightarrow \vec{e}_T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \vec{e}_N$$

?

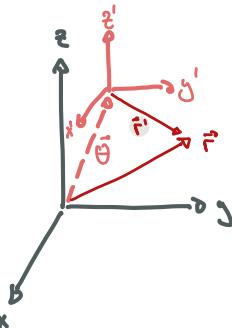
Idee: lokale Approximation
durch Kreisbögen

Galilei - Transformation:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\tilde{v}} \cdot t \quad (t' = t, \text{ Uhren gehen gleich})$$

Schnell

Schnell. $\vec{\tilde{v}} = \text{const}$



Längen: $\Delta r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\Delta r' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{\tilde{v}} \cdot t - \vec{r}_1 + \vec{\tilde{v}} \cdot t = \Delta r$$

$\rightarrow S\text{-invariant}$

Geschw.: $\vec{v}' = \vec{v}' = \frac{d}{dt'} (\vec{r} - \vec{\tilde{v}} \cdot t) = \vec{v} - \vec{\tilde{v}}$

\rightarrow null $S\text{-invariant}$

dann $\Delta \vec{v}' = \Delta \vec{v}$ $S\text{-invariant}$

Beschleunig.: $\vec{a}' = \vec{v}' = \vec{v} - \vec{\tilde{v}} \times \vec{\tilde{v}}$ $\vec{\tilde{v}} = \text{const}$ $\rightarrow S\text{-invariant}$

Grundgesetze der klassischen Physik sind $S\text{-invariant}$ \rightarrow es treten keine Orte oder als. Geschwindigkeiten auf.

Dynamik

Kraft einwirkung als Ursache von Bewegungsänderung

\hookrightarrow 3 Newton'schen Gesetze (NG): TS, AS, RS

1.NG Trägheitsgesetz (TG)

Wenn keine äußeren Kräfte auf einen Körper wirken, dann

- * bleibt er im Zustand der Ruhe, wenn er vorher in Ruhe war
- * \rightarrow - - -
- * gleichförmige Bewegung, wenn er vorher in Bew. war

"Ruhe" nur Spezialfall von $\vec{v} = 0$ TG ist $S\text{-invariant}$

\hookrightarrow Problem Bezugssystem: kein System ist wirklich in Ruhe

Definiere Inertial system ("Bezugssystem, das rel. zu den Fixsternen null")

\rightarrow existiert nur als Approximation

Inertialsystem := System in dem das TG gilt

Vorlesung 7

Aktionsgesetz (AS)

Definiere Kraft durch Masse \times Beschleunigung
Beschleunig., die Körper erfährt, ist

- * proportional zur Kraft, die auf ihm wirkt
- * umgekehrt proportional zu seiner Masse

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \rightarrow \vec{F} = m \vec{a} \quad [F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$$

Kraft ist vektorielle Größe:

mehrere angreifende Kräfte addieren sich

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_i$$

↑ gesamtkraft

Reaktionsgesetz (RS)

"actio = reactio"

Übt ein Körper auf ein. Gegenk. eine Kraft \vec{F}_{12} aus,
so übt dieser ebenfalls eine Kraft \vec{F}_{21} auf den ersten aus mit:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Der Impuls:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

(engl. momentum)

Verallgem. NS

$$1. \text{ NS} \quad \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

$$2. \text{ NS} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \dot{\vec{p}}$$

$$3. \text{ NS} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$$

Gesamtimpuls ist erhalten: $\sum \vec{p} = \sum \vec{p}' + \text{-n zu Zeit } t$
 Alle Impulse zur Zeit t

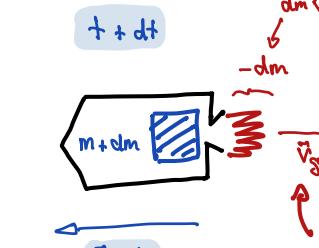
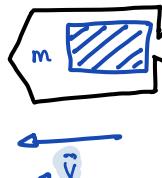
Systeme mit $m \neq 0$:

$$m = \frac{dm}{dt} < 0 \rightarrow \text{Rakete}$$

$> 0 \rightarrow \text{Flugzeug das beschleunigt wird}$
 rel. Teilchen ($v \approx c$)

Raketengleichung:

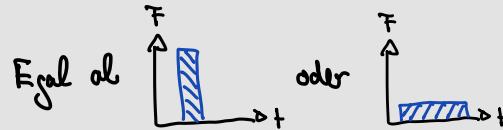
Zeitpunkt t



Geordn. der Rakete rel. zur Erde

Austritt geschw. rel. zu Rakete

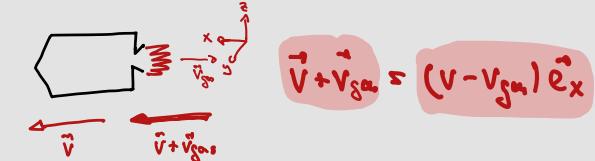
\hookrightarrow Impulsänderung $\Delta p = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$



$$\Delta p \text{ of Fläche} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Vorlesung 8

relativ zur Erde: Galilei Transformation



Impulshaltung:

$$+ : \vec{p}(t) = m \vec{v} = m v \hat{e}_x$$

$$++dt : \vec{p}(t+dt) = (m+dm)(v+dv) \hat{e}_x \quad \begin{matrix} \downarrow dm < 0 \\ -dm(v-v_{gas}) \hat{e}_x \end{matrix}$$

$$\text{Impulsh. } \vec{p}(t) - \vec{p}(t+dt) \stackrel{!}{=} 0 \approx m dv + dm v_{gas} + \underbrace{dm dv}_{=0} \text{ (sehr klein)}$$

$$dv = -v_{gas} \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{t_0}^t dv = v(t) - v_0 \approx -v_{gas} \int_{m(t_0)}^{m(t)} \frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + v_{gas} \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (\Delta p = -\vec{F} dt) \quad \rightarrow g \text{ in Schwerfeld}$$

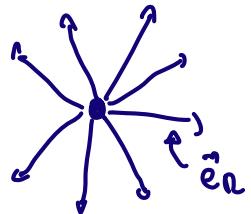
Nach Brenndauern T_s :

$$v(T_s) = v_0 + v_{gas} \ln \left(1 + \frac{M_f}{M_i} \right) - g T_s \quad \begin{matrix} \downarrow \text{Max. Treibstoff} \\ \downarrow \text{Max. Nutzlast} \end{matrix}$$

Kraftfelder \hat{f} $\hat{f} \in \text{Ortsabhängige Kraft}$

$$\hat{r} \mapsto \hat{f}(\hat{r}) \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Abbildung}$$

Beispiel Zentralkraft



$$\hat{f}(\hat{r}) = p(r) \cdot \hat{e}_r$$

Kugelsymmetrie

z.B. Gravitationskraft $\hat{f}(\hat{r}) = -\int \frac{m \cdot M_E}{r^2} \hat{e}_r$

Masse Erde
Masse
Abstand

Erhaltungsgrößen der Mechanik

Energie, Impuls, Drehimpuls

MP legt in Kraftfeld \hat{f} Wegstück $d\hat{r}$ zurück

$$\hat{f}(\hat{r}) \cdot d\hat{r} \approx |\hat{f}| |d\hat{r}| \cos \alpha := dW \text{ Arbeit}$$

$$d\hat{r} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \hat{f}(\hat{r}) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \Rightarrow \hat{f} \cdot d\hat{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Gesamtarbeit:



$$\int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} \approx \int dW = W \quad [W] = \text{Nm}$$

$$\int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(f_x \frac{dx}{dt} dt + f_y \frac{dy}{dt} dt + f_z \frac{dz}{dt} dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \hat{v} dt$$

Vorlesung 9

Vorteile der Arbeit:

$W > 0$: Bewegung in Richtung von \hat{f}

$W < 0$: \rightarrow entgegen \hat{f}

Wenn $\hat{f} \perp d\hat{r} \Rightarrow W = 0$
 $\hat{f} \cdot d\hat{r} = 0$

Lösung:

$p = \frac{dw}{dt} := \text{Arbeit pro Zeit}$

Gerontarkeit: $W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dw}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} p dt \Rightarrow \vec{p} = \hat{f} \cdot \hat{v}$

$$W = \int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \hat{v} dt$$

Konservative Kraftfelder:

Wenn Arbeit nicht vom gewählten Weg abhängt
 \hat{f} konservativ



$$\int \hat{f} \cdot d\hat{r} \approx 0$$

Integral über bel. geschlossenen Weg

Vektoranalysis und kons. Kraftfelder:

$$\vec{f} \text{ konservativ} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0} = \text{rot } \vec{f}$$

"Nabla-Operator" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

↑ partielle Ableitung

$$\text{rot } \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Wichtig: $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \vec{f} = 0$

Kons. Kraftfelder sind "Wirbelfrei"

Potentielle Energie

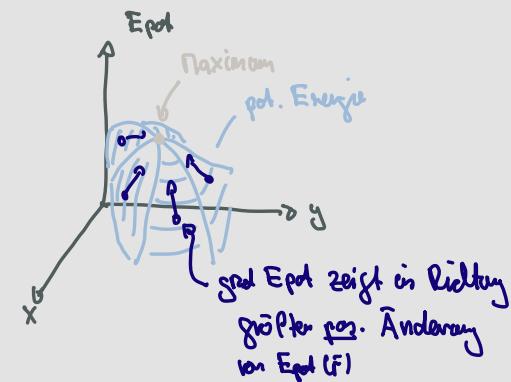
\vec{f} konservativ \Rightarrow gel. Arbeit unabhängig vom Weg zw. zwei Orten

$$(\Rightarrow W = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_A) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_B)) *$$

Vorzeichen von W : $\vec{f} \uparrow b d\vec{r}$ dann ist

$\Delta E = E_{\text{pot}}(\vec{r}_B) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_A)$ positiv
(und W negativ)

\Rightarrow Nullpunkt von E_{pot} willkürlich



Vorlesung 10

Kin. Energie

$$\text{Arbeit } W = \int_0^t \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt = \frac{1}{2} m [V^2 - V_0^2] \\ = E_{\text{kin}}(B) - E_{\text{kin}}(A)$$

(\Rightarrow Kombiniert mit * $E_{\text{pot}}(A) + E_{\text{kin}}(A) = E_{\text{pot}}(B) + E_{\text{kin}}(B)$)

$\Rightarrow E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ erhalten! Energiesatz d. Mechanik

Potenziale: Kraft $\propto m$ oder q

\Rightarrow Potenzial = pot. Energie pw Prolemme

\Rightarrow Eigenschaft der Masse, die das Feld erzeugt

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Abbildung } \vec{f} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right)$$

\Rightarrow Kraftfeld = zeigt entgegen den Gradienten der pot. Energie

Schwerpunkt & Stoße im SP-System:

$$\text{Definiere } \vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{R}) = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Schwerpunkt (Center-of-Mass)

Setzrule z.B. 2 Kp in ihrem Gravitationsfeld



$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1^x \quad \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a}_2^x \Rightarrow \vec{a}_2^x - \vec{a}_1^x = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{v}_{12}$$

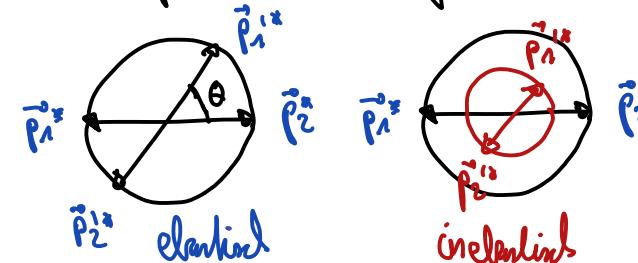
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ mit } \vec{F}_{12} = \mu \cdot \vec{v}_{12}$$

$\frac{1}{\mu}$ reduzierte Masse

im SP-System

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^* &= \vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i - \vec{v} t \\ \vec{v}_i^* &= \vec{v}_i - \vec{v} \quad \text{gleiche. des SP-Systems} \\ \vec{a}_i^* &= \vec{a}_i \quad \text{gegen Laborsystem}\end{aligned}$$

2-Körper Stoß im SP-System



\vec{p}^x elastisch

\vec{p}^x inelastisch

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = 0 = \vec{p}_1'^x + \vec{p}_2'^x$$

↑
im SP-System

bei elast. Stößen

Vorlesung 12

1-dim Stoßgesetz

a) elastisch

$$\text{Impulsatz: } m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (1)$$

$$\text{Energiesatz: } m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (2)$$

$$(2) : (1) \Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (3) \Rightarrow (3) \text{ in (1)}$$

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



$$E_{kin}^1 + E_{kin}^2 = E_{kin}^{1'} + E_{kin}^{2'} \quad (\text{König } \frac{1}{2} \text{ Faktor})$$

$$\begin{aligned}v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2\end{aligned}$$

2/3 dim Stoßgesetz

- * 1 (2) unbekannte Stoßwinkel in 2 (3) D
- * Bei Kugelsymm. Potenzial \rightarrow 1 Stoßwinkel in 3D

Spezialfall: $v_2 \approx 0 \quad m \approx m_1 \approx m_2$

dann $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'$

Pythagoras $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$ (am vi. Energie)

Schwerpunkt & Stoße im SP-System:

$$\text{Definiere } \vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{R}) = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Schwerpunkt (Center-of-Mass)

Setzrule z.B. 2 Kp in ihrem Gravitationsfeld



$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1^x \quad \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a}_2^x \Rightarrow \vec{a}_2^x - \vec{a}_1^x = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{v}_{12}$$

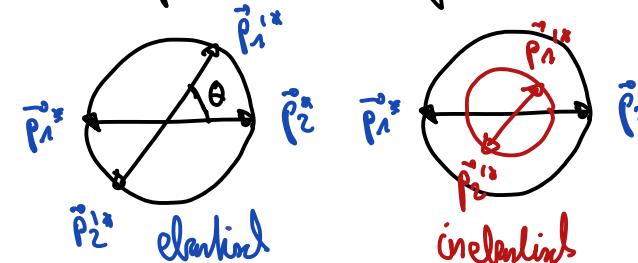
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ mit } \vec{F}_{12} = \mu \cdot \vec{v}_{12}$$

$\frac{1}{\mu}$ reduzierte Masse

im SP-System

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^* &= \vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i - \vec{v} t \\ \vec{v}_i^* &= \vec{v}_i - \vec{v} \quad \text{gleiche. des SP-Systems} \\ \vec{a}_i^* &= \vec{a}_i \quad \text{gegen Laborsystem}\end{aligned}$$

2-Körper Stoß im SP-System



\vec{p}^x elastisch

\vec{p}^x inelastisch

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = 0 = \vec{p}_1'^x + \vec{p}_2'^x$$

↑
im SP-System

bei elast. Stößen

Vorlesung 12

1-dim Stoßgesetz

a) elastisch

$$\text{Impulsatz: } m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (1)$$

$$\text{Energiesatz: } m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (2)$$

$$(2) : (1) \Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (3) \Rightarrow (3) \text{ in (1)}$$

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



$$E_{kin}^1 + E_{kin}^2 = E_{kin}^{1'} + E_{kin}^{2'} \quad (\text{König } \frac{1}{2} \text{ Faktor})$$

$$\begin{aligned}v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2\end{aligned}$$

2/3 dim Stoßgesetz

- * 1 (2) unbekannte Stoßwinkel in 2 (3) D
- * Bei Kugelsymm. Potenzial \rightarrow 1 Stoßwinkel in 3D

Spezialfall: $v_2 \approx 0 \quad m \approx m_1 \approx m_2$

dann $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1$

Pythagoras $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$ (am vi. Energie)

Drehimpuls & Drehmoment

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} \perp \vec{r}, \vec{L} \perp \vec{p}$$

$$\hookrightarrow |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv \sin(\angle(\vec{r}, \vec{v}))$$

Definition zu fixem \vec{r} \rightarrow hängt vom Ursprung ab

Kreisbew. um Ursprung: $\vec{v} = \tilde{\omega} \times \vec{r}$

$$\rightarrow \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\underbrace{\vec{r} \times (\tilde{\omega} \times \vec{r})}_{\tilde{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\tilde{\omega} \cdot \vec{r})}) \\ = m\tilde{\omega}r^2 *$$

$$|\vec{L}| = mvr$$

$$|\vec{L}| = mvr$$

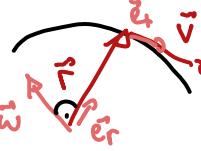
$$|\vec{L}| = mvr$$

Allg. Bewegung:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \cdot \vec{e}_r(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

$$= \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r$$



$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{e}}_r &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \hat{\phi} = \vec{e}_\phi \cdot \hat{\phi} \\ \vec{e}_\phi &= \tilde{\omega} \times \vec{e}_r \text{ (vgl. Skizze)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a) \hat{\phi} &\approx \omega \quad (!) \\ b) \vec{r} \vec{e}_\phi \omega &= \tilde{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \underbrace{\dot{r}(\vec{r} \times \vec{e}_r)}_{=0} + m \underbrace{\vec{r} \times (\tilde{\omega} \times \vec{r})}_{m r^2 \tilde{\omega}} \quad \text{(vgl. *)}$$

mom. Wirkungslinie der Kreisbewegung

Betrachte \vec{L} :

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \times \dot{\vec{p}}}_{\sim \vec{r} \times \vec{v}}$$

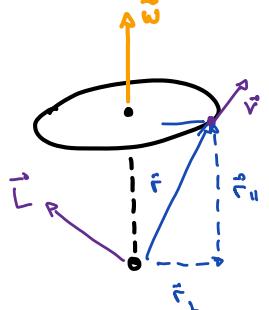
$$\text{Drehmoment: } \vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Um \vec{L} zu ändern benötigt man \vec{M} .

Wirkt auf ein System
kein Drehmoment $\rightarrow \vec{L} = \text{const}$
 $\dot{\vec{L}} = 0$

Vorlesung 13

Drehimpuls im Ursprung verschafft entlang $\tilde{\omega}$ -Achse



$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= (\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}) \times \vec{p} \\ &= m \vec{r}_{||} \times \vec{v} + m \vec{r}_{\perp} \times \vec{v} \\ &\vec{L}_{||} \approx \vec{L}_{\perp} \quad \vec{L}_{\perp} \approx \tilde{\omega} \\ &\vec{M} \neq 0 \quad \vec{M} = 0 \\ &\text{Ändert Richtung von } \vec{L} \quad (\vec{F} \parallel \vec{r}_{\perp}) \quad \hookrightarrow \vec{r} \times \vec{p} = 0 \end{aligned}$$

Erhaltungssätze der Mechanik:

In einem abgeschlossenen System gilt

$$\frac{d}{dt} E_{\text{ges.}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{ges.}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{ges.}} = 0$$

\rightarrow Gesamtenergie
Gesamtimpuls
Drehimpuls
ist erhalten

Sonderrichtige Bezugssysteme:

bisher Inertialsysteme: $\ddot{a}_v = 0 \rightarrow \text{TS}: \vec{F} = 0$



Was passiert wenn wir in ein besch. Bezugssystem wechseln? Setzt das TS nach?



Perspektive fahren: Kraft geht in Sitz
Zuschauer: Wagen beschleunigt sich

Scheinkräfte & beschleunigte Bezugssysteme:

In beschleunigten Bezugssystemen handeln

Scheinkräfte

Ä berl. von \vec{B} gegen B

im beschleunigten System (B') im Ruhesystem (B)

$$\ddot{\vec{a}}' = \ddot{\vec{a}} - \vec{A}$$

$$\ddot{\vec{v}}' = \ddot{\vec{v}} - \vec{A} +$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

(\Rightarrow spürt Kraft $\vec{F}' = -m\vec{A}$)

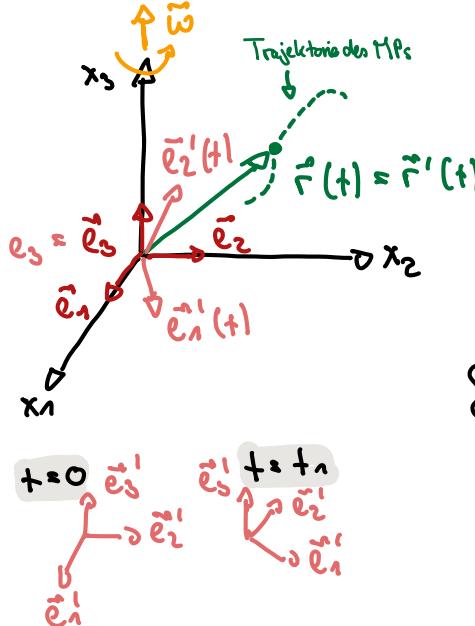
$$\ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{a}}' + \vec{A}$$

$$\ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{v}}' + \vec{A} +$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

$$\vec{F} = +m\vec{A}$$

gleichförmig rotierendes Bezugssystem:



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' \\ &= \sum x_i(t) \vec{e}_i \\ &= \sum x'_i(t) \vec{e}'_i \end{aligned}$$

Stellung der MPs:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \sum \dot{x}_i(t) \vec{e}_i \\ &= \dot{\vec{r}'} = \underbrace{\sum \dot{x}_i(t) \vec{e}'_i}_{\vec{v}'} + \underbrace{\sum x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i}_{\vec{\omega}} \end{aligned}$$

Beschleunigung der MPs:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{a}} &= \ddot{\vec{r}'} = \sum \ddot{x}_i(t) \vec{e}_i \\ &= \sum \ddot{x}'_i(t) \vec{e}'_i + \sum \dot{x}'_i \vec{e}'_i \\ &\quad + \sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}'_i + \sum x'_i \ddot{\vec{e}}'_i \\ &= \ddot{\vec{a}}' + \text{Scheinkräfte} \end{aligned}$$

Vorlesung 14

MP rotiert mit dem neuen
Koordinatensystem

\vec{r} auf einer Kreisbahn mit $\vec{\omega} = \text{const}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}_r)$$

$$\hookrightarrow \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}_r) = \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}'_r) ! (\vec{r} \neq \vec{r}')$$

Umwegung des B' Systems:

$$\vec{e}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i$$

$$\vec{e}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \quad (\vec{\omega} = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v} = \vec{v}' + \sum x'_i (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i) \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{a}} &= \ddot{\vec{a}}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \hookrightarrow \ddot{\vec{a}}' &= \ddot{\vec{a}} + 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) + \ddot{\vec{a}}_{\text{c}} + \ddot{\vec{a}}_{\text{zr}} \end{aligned} \right\}$$

Corioliskraft:

$$\vec{F}_C = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega})$$

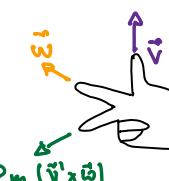
Zentrifugalkraft:

$$\vec{F}_{\text{ZT}} = m \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{\text{ZT}} = m \omega^2 \vec{r}_\perp = -\vec{r}_\perp \text{ Zentripetal}$$

Richtung von \vec{F}_C :

r. h. Regel



Erde als rot. Bezugssystem:

Erde kein Inertialsystem \rightarrow Trägheitskräfte hervorrufen

$$\vec{F}_{zF} = m \vec{\omega}_E \times (\vec{r} \times \vec{\omega}_E)$$

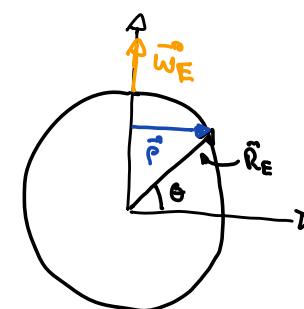
$$\vec{F}_c = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_E)$$

Winkelgeschw. der Erde

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_{\text{Tag}}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

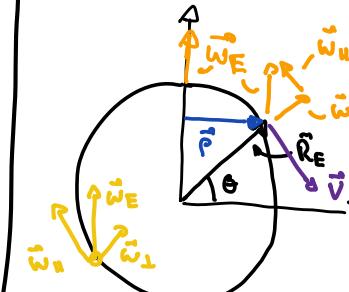
Rotationsgeschw. Äquator / Breitengrad θ

$$V_E = \omega_E \cdot R_E = 470 \text{ m/s}$$



$$V(\theta) = \omega_E r(\theta) = \omega_E R_E \cos \theta$$

Horizontale Corioliskräfte:



Horizontal ausger.

$$\vec{F}_c = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_E)$$

$$= 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp) \quad (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp \neq 0)$$

$\vec{\omega}_\parallel$ zeigt immer in N-S Richtung
wechselt Richtung am Äquator

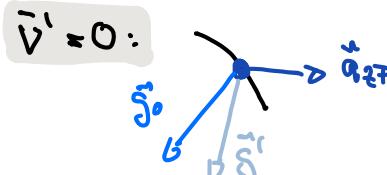
$\vec{F}_c \rightarrow -\vec{F}_c$ bei Übergang von
Nord-Hemisphäre zu Süd-Hemisphäre

Vorlesung 15

Schleierung auf der Erdoberfläche:

$$\vec{g}' = \vec{g}_0 - 2m (\vec{\omega}_E \times \vec{v}') - \vec{\omega}_E \times (\vec{\omega}_E \times \vec{r})$$

Schwerkraft Corioliskraft Zentrifugalkraft



Effekt am stärksten am Äquator:

$$|\vec{g}' - \vec{g}_0| = \omega_E^2 R_E \approx 0.35\% g_0$$

$$\vec{v}' \neq 0:$$

a) Bewegung an der Oberfläche

nur $\vec{\omega}_\perp$ relevant ($\vec{v}' \times \vec{\omega}_\parallel = 0$)

$$\begin{aligned} \text{NH: } \vec{F}_c &= 2m \sin \theta (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp) \\ \text{SH: } \vec{F}_c &= 2m \sin \theta (\vec{v}' \times (-\vec{\omega}_\perp)) \end{aligned}$$

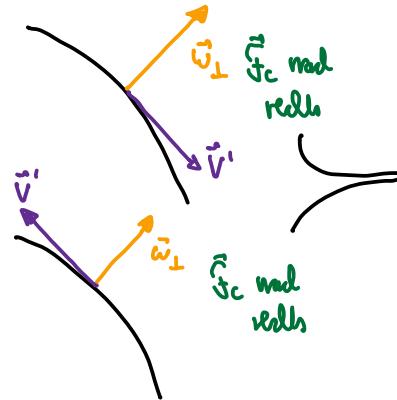
$$\vec{\omega}_\perp = \omega \sin \theta \hat{e}_r$$

$$\begin{aligned} \text{NH: } & \begin{array}{ccc} N & \vec{F}_c & \text{nach rechts} \\ \uparrow \vec{v}' & \rightarrow & \text{(in Bewegungsrichtung)} \\ S & & \end{array} \\ \text{SH: } & \begin{array}{ccc} N & \vec{F}_c & \text{nach links} \\ \uparrow \vec{v}' & \leftarrow & \text{(in Bewegungsrichtung)} \\ S & & \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NH: } & \begin{array}{ccc} N & \vec{F}_c & \text{nach rechts} \\ \uparrow \vec{v}' & \rightarrow & \text{(in Bewegungsrichtung)} \\ S & & \end{array} \\ \text{SH: } & \begin{array}{ccc} N & \vec{F}_c & \text{nach links} \\ \uparrow \vec{v}' & \leftarrow & \text{(in Bewegungsrichtung)} \\ S & & \end{array} \end{aligned}$$

Foucault-Pendel

Nur horizontale Coriolisbeschleunigung wichtig
(Auflösung in z klein)



initial Pendellinie
beginnt sich zu drehen

Am Nord/Südpol:
 $\Omega_{\text{pol}} = \frac{2\pi}{T_{\text{eq}}} = \omega_E$

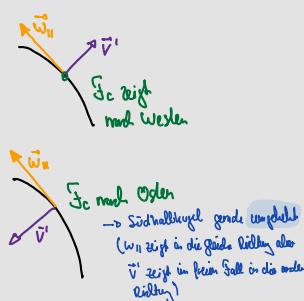
Am Äquator: $\omega_{\perp} = 0$

(In Born mit $\theta \approx 80.9^\circ$ (Breitengrad)):

$$\Omega_{\text{Born}} = \omega_{\perp} = \omega_E \cdot \sin(\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Born}}} \approx 51 \text{ h}$$

b) Schwerkraft \perp zur Erde:

betrachten nur F_c (Abweichung durch F_g klein)



Kepplersche Gesetze:

Folgen alle aus $\vec{\Gamma} = 0$

- ① Planeten auf einer Ebene auf Ellipsenbahnen
Sonne im Brennpunkt

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \quad \vec{\Gamma} \perp \vec{r} \quad \vec{\Gamma} \perp \vec{v} \quad \vec{\Gamma} =$$



Gravitation

$$\text{Bahnkurve: } \vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_T \\ \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \cdot \vec{e}_T \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{r} \dot{\varphi} (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_T) \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + E_{\text{pot}}$$

$$\frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{mit } L = \text{const. für Zentralpotenzial}$$

$E_{\text{pot}}^{\text{eff}}$ da nur Abhängigkeit von r

$$E \gg 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 > E_{\text{pot}}^{\text{eff}}$$

↳ keine stab. Bahn

$$E < 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0 \text{ für } r_1 < r < r_2$$

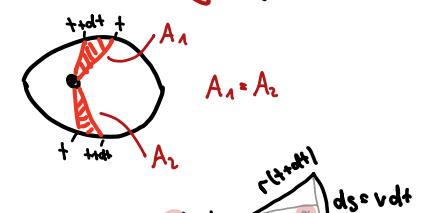
↳ Ellipse

$$E < 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = 0 \rightarrow \text{Kreisbahn (konstant)}$$

Vorlesung 16

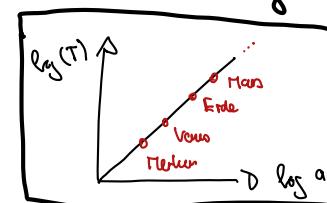
② Flächensatz

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$



$$\textcircled{3} \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

T: Umlaufzeit
 a : halbe Halbachse
 δ



3 KP gültig \rightarrow Newtongesetz folgt

$$\vec{F}_G = -\vec{F}_{TF} = m \omega^2 \vec{r} = m \frac{(2\pi)^2}{T^2} \vec{r}$$

$$\vec{F}_G = GMm \rho(r) \vec{r} \Rightarrow \rho(r) \sim \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r_s}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_G = -GM \frac{m}{r^2} \vec{e}_r$$

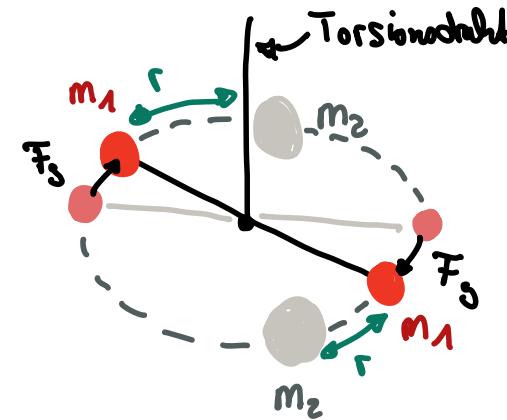
Herleitung über Newtongesetz

Experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstante: → Bestimmung mittels Drehschwinge

Ausgangsfrage: $\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{e}_r$

↑
Gravitationskonstante ($N \frac{m^2}{kg^2}$)

↳ Universelle Naturkonstante, muss experimentell bestimmt werden.



Nutze: $F = m_i \cdot a \approx G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Fließ a → $G = \frac{r^2 \cdot a}{m_2}$

3. Wechselt Position von m_2
→ Anziehungs Kraft
 $F_S + F_T = 2 \cdot F_S$
→ verdoppelte Kraft

Verdopplung der Bzgl.:

1. Torsionshebel entspannt

2. Torsionshebel übt $F_T = F_G$ aus

Vorlesung 17

→ Dann gilt:
(verdoppelte Beschleunigung)

$$G = \frac{r^2 \cdot a}{2 \cdot m_2}$$

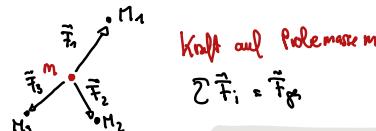
Äquivalenz schwer & träge Masse:

Schwere Masse := verursacht Gravitation
stellt in $F_G = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{e}_r$ m_S

Träge Masse := Widerstand in der Beschleunigung
stellt in $F = m \cdot a$ m_T

↳ experimentell $m_S = m_T = m$ (gelenkt auf $\frac{m_S - m_T}{m_T} < 10^{-15}$)

Gravitationsfeld ausgedehnten Massenquellen:



Kraft auf Punktmasse m
 $\sum \vec{F}_i = \vec{F}_G$

für ein Massenelement dM : $dE_{pot} = -G \frac{m \cdot dM}{r}$

Wir betrachten eine Kugel: Radius R_E
Abstand eines Punktes
zum Zentrum r

Zwei erstaunliche Eigenschaften:

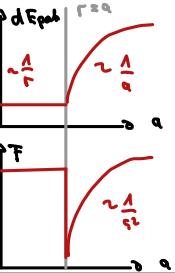
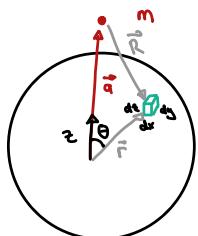
1 Außerhalb der Kugel hängt das Potenzial nur vom Abstand zum Zentrum ab

2 Innerhalb der Kugel nur vom Teil der Masse der näher am Zentrum liegt. Die Massenanteile außerhalb spielen keine Rolle!

Gravitationsfeld ausgedehnter Körper:

Kugelschale:

$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{dm}{r(\theta)} = -G m \rho \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta}{R(\theta)}$$



$$R(\theta) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$$

(Kosinussatz)

Radius Kugelschale

$$a > r: dE_{\text{pot}} = -G m \rho r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{R(\theta)} d\phi$$

$$dM_{\text{sch}} = \rho 4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow \quad dE_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{1}{2\pi r} (|a+r| - |a-r|)$$

$$r > a > 0: dE_{\text{pot}} = -G m \frac{dM_{\text{sch}}}{r} \Rightarrow F_t = -\frac{d}{dr} dE_{\text{pot}} = -G \frac{m dM_{\text{sch}}}{r^2}$$

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = \frac{ar \sin \theta}{R} \Rightarrow d\theta = dR \cdot 2 \cdot \frac{1}{ar \sin \theta}$$

$$\int \frac{d\theta}{R(\theta)} = \int \frac{1}{a+r} d\theta = \frac{1}{a+r}$$

$$R(\theta=0) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} = \sqrt{(a+r)^2} = |a+r|$$

$$R(\theta=\pi) = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} = \sqrt{(a-r)^2} = |a-r|$$

Vollkugel: \rightarrow Integration über Kugelvolumen

$a > R_0 > r:$

$$E_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_0} r^2 dr = -G m \rho \frac{4\pi}{3} R_0^3$$

$$\approx -G \frac{m M}{a} \rightarrow F_t = -\frac{d}{da} E_{\text{pot}} = -G \frac{m M}{a^2}$$

$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho 4\pi r^2 dr \frac{1}{2\pi r} (|a+r| - |a-r|) = -G m \rho 4\pi r^2 dr \frac{1}{a}$$

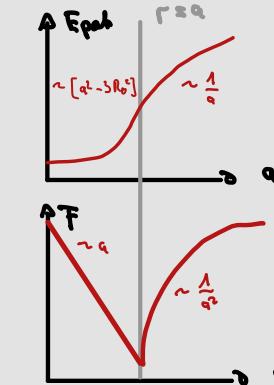
$$\Pi = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho$$

b

$r < a < R_0 \& a < r < R_0:$

$$E_{\text{pot}} = -G m \rho 4\pi \left[\int_0^a \frac{r^2}{a} dr + \int_a^{R_0} r dr \right] = -G m \rho 4\pi \left[\frac{a^2}{3} + \frac{R_0^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right]$$

$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho 4\pi r^2 dr \frac{1}{a} \rightarrow F_t = -G \frac{m M}{R_0^2}$$



$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho 4\pi r dr$$

b

Vorlesung 18

Merkwürdige Körper:

Modell: System von MP's mit fixem $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

\hookrightarrow Reduktion der Beziehungen gl.

3-Koordinaten des SP

Winkelorientierung (3 Rotationsfreiheit)

$$\text{Mass } M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{Dichte } \rho = \frac{M}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i \Delta V_i$$

$$\text{Volumen } V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i$$

Sphärische $N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0:$

$$V = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \int_V dV$$

$$M = \int_V \rho \text{ (Volumen)} dV = \int_V dm$$

Volumenintegral: dreidimensional

$$\text{Bsp. Quader: } V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dx dy dz$$

Kugel \rightarrow Polarkoordinaten

Volumenelement $dV = dx dy dz$

$$\rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Achtung: Welle freien Vektorraum den Körper \rightarrow Zerlegen in einfache Volumenkörper
Wahl der Koordinaten

Volumenintegrale:

Volumenelement in rel. Koordinaten u, v, w

$$dx dy dz = J du dw dw$$

\uparrow Jacobi Determinante

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right)$$

$$\text{mit } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

z.B. Polarkoordinaten: $dV = r^2 \sin \theta dr dg d\theta$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten: $dV = \rho dr dg dz$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

Schwerpunkt:

$$\text{Vorher mit MP: } \tilde{r}_s = \frac{1}{M} \sum_i^N \tilde{r}_i \rho_i (\tilde{r}_i) \Delta V_i$$

$$\downarrow \begin{array}{l} N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\tilde{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \tilde{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \tilde{r} \rho(\tilde{r}) dV$$

Notation (kein 1D Integral)

homogener Körper $\rho = \text{const}$

$$\rightarrow \tilde{r}_s = \frac{\rho}{M} \int_V \tilde{r} dm = \frac{1}{V} \int_V \tilde{r} dm$$

Drei Komponenten:

$$x_s = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\tilde{r}) dV \quad y_s = \frac{1}{M} \int_V y \rho(\tilde{r}) dV \quad z_s = \frac{1}{M} \int_V z \rho(\tilde{r}) dV$$

z.B. Hohlkugel: $x_s = y_s = 0$ $z_s = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\theta r^2 \sin \theta z dr d\theta dz [r^3 \cos \theta \sin \theta] = \frac{3}{8} R$

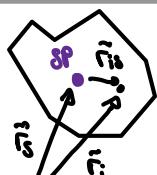
Vollkugel: $x_s = y_s = z_s = 0$

Vorlesung 19

Bewegung st. Körper

Bewegung eines rel. Punkts:

$$\tilde{r}_i = \tilde{r}_s + (\tilde{w} \times \tilde{r}_{is})$$



Translation

Aber Achtung:
 $\tilde{w} = \tilde{w}(t)$

Rotation um
Schwerpunkt

Kräfte & Kräftepaare:

Wichtig zu wissen wo eine Kraft an greift: $F_i(r_i)$

Kräftepaar

$$1. \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \leftarrow \tilde{F}_3$$

$$\tilde{F}_2 \perp \tilde{F}_3$$

$$2. \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 : \text{ Drehmoment leggen auf SP}$$

$$D_S = \tilde{r}_{is} \times \tilde{F}_1$$

(heutig SP nicht!)

$$2. \tilde{F}_2 : \text{ Beulkrift SP}$$

Angelpunkt

e.g. Gravitationskraft

(greift an jedem Punkt an)

Sesamt drehimpuls:

$$\tilde{D}_S = \int_V (\tilde{r}_{is} \times \tilde{g}) dm = -g \int_V \tilde{r}_{is} dm$$

$$= -\tilde{j} \times \tilde{r}_{is}$$

Bestimmung SP durch Lot

Wenn $\tilde{D}_S = 0$ dann $\tilde{r}_{is} \parallel \tilde{j}$

Auf hängt SP = Ursprung: $\tilde{r}_{is} = 0 \Rightarrow \tilde{D}_S = 0$

--- || SP: $\tilde{r}_{is} \parallel \tilde{j} \Rightarrow \tilde{D}_S = 0$

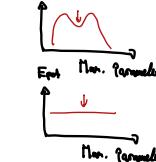
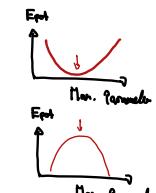
Sleichgewichtslagen:

stabil $E_{pot} \approx \min.$

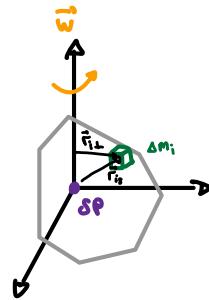
unstabil $E_{pot} \approx \max.$

metastabil $E_{pot} \approx \text{lok. min}$

indifferent $E_{pot} \approx \text{const}$



Trägheitsmoment für Rotationsenergie:



$$\Delta E_{kin,i} = \frac{1}{2} \Delta m; v_{i\perp}^2 = \frac{1}{2} \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}^2$$

Kreisbew.: $\vec{v}_{i\perp} = \bar{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}$
 $(v_{i\perp}^2 = \bar{\omega}^2 r_{i\perp}^2)$

Gesamte kin. Energie:

$$E_{tot} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sum_i^N \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}^2 \right) \Delta V_i \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \int_V r_{i\perp}^2 dm = \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 I$$

I: Trägheitsmoment

$$I = \int_V r_{i\perp}^2 \rho dV$$

Translation Rotation

$$\begin{array}{l|l} m & I \\ \hline v & \bar{\omega} \\ \vec{p} = m\vec{v} & \vec{L} = I\bar{\omega} \\ E = \frac{p^2}{2m} & E = \frac{L^2}{2I} \\ = \frac{1}{2}mv^2 & = \frac{1}{2}I\bar{\omega}^2 \end{array}$$

Translation Rotation

$$\begin{array}{l|l} m & I \\ \hline v & \bar{\omega} \\ \vec{p} = m\vec{v} & \vec{L} = I\bar{\omega} \\ E = \frac{p^2}{2m} & E = \frac{L^2}{2I} \\ = \frac{1}{2}mv^2 & = \frac{1}{2}I\bar{\omega}^2 \end{array}$$

Gesamtdecksimpuls:

Massenelement Δm_i : $\tilde{L}_i = \vec{r}_{i\perp} \times (\Delta m_i; \vec{v}_{i\perp})$

$$= r_{i\perp}^2 \Delta m_i; \bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \Delta m_i (\vec{r}_{i\perp} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}_{i\perp})) \\ = \Delta m_i (r_{i\perp}^2 \bar{\omega} - \vec{r}_{i\perp} (\vec{r}_{i\perp} \cdot \bar{\omega})) \end{aligned}$$

$$\tilde{L}_{ges} = \int_V r_{i\perp}^2 \bar{\omega} dm = \bar{\omega} \int_V r_{i\perp}^2 dm = \bar{\omega} I$$

$$\therefore \bar{\omega}^2 = \frac{L^2}{I^2} \quad \text{und} \quad E_{tot} = \frac{1}{2} I \bar{\omega}^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Beispiele:

Hohlerzylinder:

$$\begin{aligned} dV &= r dr d\theta dz \\ I &= \rho \int_V r^2 dr = \rho T_p h \int_{R-d}^R r^2 dr \\ &\approx 2T_p h R^3 d + O(d^4) \\ \Rightarrow I &= M R^2 \end{aligned}$$

Vollzylinder:

$$\begin{aligned} I &= 2T_p h \int_0^R r^2 dr = \frac{\pi}{2} h p R^4 \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi}{2} R^2 \end{aligned}$$

Dünner Stab:

$$\begin{aligned} \text{Drehachse bei } l/2 \text{ in } z\text{-Richt.} \\ l: \text{Länge}, A: \text{Endfläche}, \\ dv = A \cdot dx \\ \int_0^{l/2} A x^2 dx = 2 \int_0^{l/2} A x^2 dx \\ = 2p A \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{48} p A l^3 \\ \Rightarrow I = \frac{1}{48} M l^2 \end{aligned}$$

Homogene Kugel: $I = \frac{2}{5} M R^2$ Hohlkugel: $I = \frac{2}{3} M R^2$

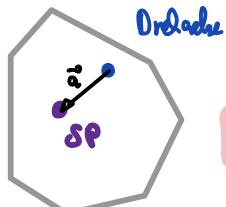
Hinkel: $I = 2\pi R^2$



Vorlesung 20

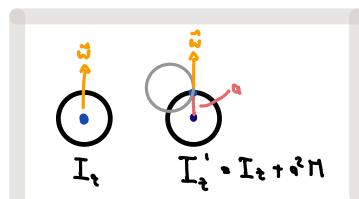
Satz von Steinier:

Trägheitsmoment bzgl. Achse, die nicht durch SP geht



$$I_z' = I_z + a^2 M$$

Absatz SP zu Drehachse
Trägheitsmoment bzgl. SP



Steinerzsgl. starrer Rotator:

Rotation um raumfeste Achse, bet. Massenelement Δm :

$$\tilde{L}_i = (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i) = \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}$$

$$\tilde{L}_i = \Delta m_i (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i) = \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_i = \vec{0};$$

Trägheitsmoment

$$0i = \Delta m_i r_{i\perp}^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{Volumen integral} \quad 0 = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\varphi}{dt} = I \ddot{\varphi}$$

Wenn nun $\Omega = \text{const}$

$$g(t) = \frac{0}{2I} t^2 + A t + B$$

Analog diff.gleich wie
freier Fall

Rotation um freie Achse:

bisher: Rotation um **freie** Achse $\rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L}$

neu: Rotation um **freie** Achse $\rightarrow \vec{\omega} \nparallel \vec{L}$

\hookrightarrow Mit oder ohne ext. Drehmoment
 \hookrightarrow Kreisel

Allg. Drehimpuls bei starrer Körper:

$$\vec{L} = \underbrace{\int_V r^2 \vec{\omega} dm}_{\parallel \vec{\omega}} - \underbrace{\int_V (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} dm}_{i.A. \nparallel \vec{\omega}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Betrachte L_x :

$$L_x = \int_V (r^2 \omega_x - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)) dm$$

$$= \omega_x \underbrace{\int_V (r^2 - x^2) dm}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V xy dm}_{-I_{xy}} \sim \omega_z \underbrace{\int_V xz dm}_{-I_{xz}}$$

$$I_{xx}$$

$$-I_{xy}$$

$$-I_{xz}$$

$$\text{und } L_y = I_{gx} \omega_x + I_{gy} \omega_y + I_{gz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{L} = \underline{I} \vec{\omega}}$$



mit

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor $\hat{=} \text{ Tensor 2. Stufe}$
 $\hat{=} \text{ Matrix}$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : Trägheitsmomente

\rightarrow Tragen bei, bei Rotation um x, y, z -Achse

I_{xy}, I_{xz}, \dots : Deviationsmomente

\rightarrow Tragen bei, wenn Körper nicht nur ausdrücklich um x -Achse dreh. rotiert

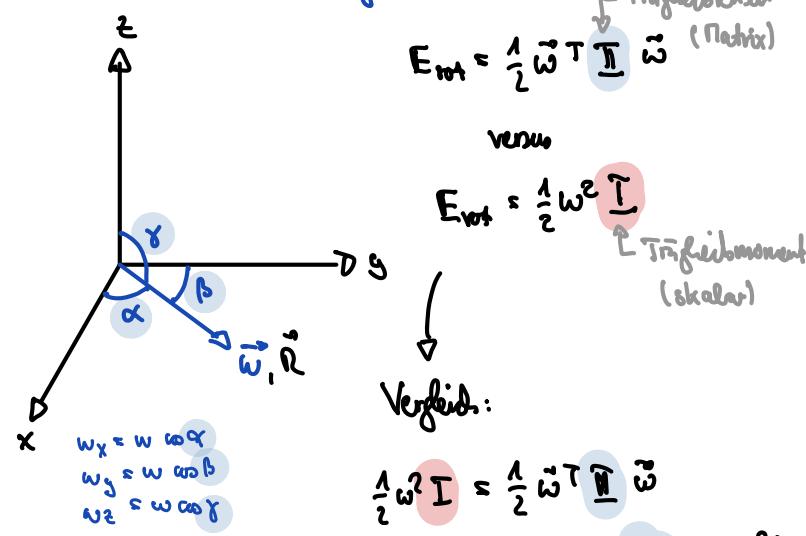
Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int_V (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) dm$$
$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{I} \vec{\omega}$$

\hookrightarrow Alle Elemente tragen zur Rotationsenergie bei!

Vorlesung 21

Eulerwinkel & Rotationsenergie



Vergleich:

$$\frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T \tilde{I} \tilde{\omega}$$

$$= \cos^2 \alpha \omega^2 I_{xx} + \cos^2 \beta \omega^2 I_{yy} + \cos^2 \gamma I_{zz}$$

$$+ 2 \cos \alpha \cos \beta \omega^2 I_{xy} + 2 \cos \alpha \cos \gamma \omega^2 I_{xz} + 2 \cos \beta \cos \gamma \omega^2 I_{yz}$$

Trägheitsellipsoid wenn $K = M R_m^4$
→ mittlerer Radius
quad. Gleichung, welche mit $R^2 I = k = \text{const.}$
↑ Ellipsoiden darstellt

$$R^2 I = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz}$$

$$+ 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}$$

Führt neue Vektoren

$$\tilde{\omega} \parallel \tilde{\omega} \text{ ein mit: } x = R \cos \alpha \\ y = R \cos \beta \\ z = R \cos \gamma$$

Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse $\tilde{\omega}$:

$$I_{\tilde{\omega}} = \frac{k^2}{R^2}$$

Drehelpunkt TE

I klein entlang langgestreckte Achse!

Hauptträgheitsachsen (HTA): Finde neue Koordinatenachsen $\{a, b, c\}$ entlang der Symmetrie-Achsen

$$I = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

Trägheitsmomente diagonal

Konvention: $I_a \leq I_b \leq I_c$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c)$$

$$= \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c}$$

↑
($L_x = \omega_x I_x$)

Sind alle HTA unterschiedlich ($I_a \neq I_b \neq I_c$): asymmetrischer Kreisel

Sind mind. 2 HTA identisch: symm. Kreisel

- $I_a < I_b < I_c$: prolatärer Kreisel
- $I_a = I_b < I_c$: oblatärer Kreisel
- $I_a = I_b = I_c$: sphärischer Kreisel (Würfel, Kugel)

Da $E_{rot} = \frac{L}{2I}$ wollen Systeme

die Ausrichtung so ändern, dass I minimal wird → Rotation um kleinstes (oder mittleres) I instabil

Euler'sche Gleichungen:

$$\text{Lagrangesystem: } \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \tilde{\Omega}$$

$$\text{Um HAS: } \frac{d\tilde{\omega}'}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - (\tilde{\omega} \times \tilde{\omega}')$$

$$\hookrightarrow \tilde{\Omega} = \frac{d\tilde{\omega}'}{dt} + (\tilde{\omega} \times \tilde{\omega}')$$

$$\begin{aligned} D_a &= I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_b \omega_c \\ D_b &= I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c \\ D_c &= I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_a \omega_b \end{aligned}$$

3 gelöste DGL

z.B. Kreisfrequenz symm. Kreisel

$$I_a = I_b \neq I_c \quad \& \quad \tilde{\Omega} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 0 &= \dot{\omega}_a + \omega_b \omega_c \\ 0 &= \dot{\omega}_b - \omega_a \omega_c \\ 0 &= \dot{\omega}_c \end{aligned} \quad \int \Rightarrow \frac{I_c - I_a}{I_a} \omega_c$$

Lösung: $\omega_a = A \cos \vartheta t$
 $\omega_b = A \sin \vartheta t$
 $\omega_c = C$

Periodische Schwingungen:

↳ harmon. Schwingungen, z.B. Federschwingung

$$f = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$



Federkraft (rücktreibend)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$



ω_0^2 mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$* \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

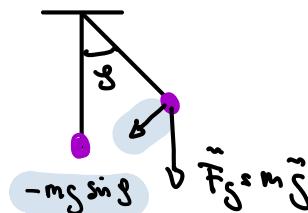
Lösungen: $x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \phi)$
 $x(t) = B(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$

A, B Anfangsbedingungen

Wann gilt *? lineares Kraftges.

Mathematische & Physikalische Pendel:

Math. Pendel



$$m \cdot \ddot{\theta} = -m g \sin \theta$$

Gl

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Lsg: $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$

Physik. Pendel

(Ang. Stab)



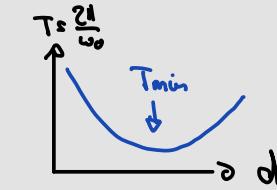
$$Drehmoment \quad \vec{M} = -\vec{d} \times m \vec{g}$$

$$\text{mit } \vec{d} = d \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$D = -dm g \sin \varphi \approx -dm g \varphi$$

$$\text{Und: } D = I_d \ddot{\varphi} = I_d \ddot{\varphi} \leftarrow I_d = I_{sp} + m d^2 \text{ (skew)} \quad \downarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m d^2}{I_d} \varphi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{m d^2}{I_d}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \rho^2 d^4 + d^2}{I_d}}$$



Vorlesung 23

NP-Linie: $I_d = m l^2$
 $\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \text{Math. Pendel}$

Bearbeitung mit komplexen Zahlen:

Periodische Schwingungsl. mit $z = x + iy$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\text{Ansatz: } z(t) = z_0 e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = i \omega \cdot z_0 e^{i \omega t} \quad \ddot{z} = -\omega^2 \cdot z_0 e^{i \omega t}$$

$$z(t) = z_0 e^{i \omega t} + z_0^* e^{-i \omega t} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ZLösung: } w_{1/2} = \pm \omega_0$$

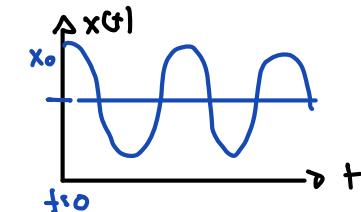
Anfangsbed. für anwenden & lösen:

$$z(t=0) = x_0 = z_0 + z_0^* \quad (1)$$

$$\dot{z}(t=0) = 0 = i \omega_0 z_0 - i \omega_0 z_0^* \quad (2)$$

$$(2): z_0 = z_0^* \in \mathbb{R}$$

$$(1): x_0 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z(t) \cdot x(t) = \frac{x_0}{2} \underbrace{(e^{i \omega t} + e^{-i \omega t})}_{2 \cos(\omega t)} = x_0 \cos(\omega t)$$



Überlagerungen von Schwingungen:

z.B. gekoppeltes Pendel

$$\text{Es gilt: } x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

mit

$$x_i(t) = a_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

Spezialfälle: $\omega_1 = \omega_2$: $a_1 = a_2$

$$g_1 = g_2$$

$$x(t) = 2a \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \omega_1 = \omega_2$$

$$y = g_1 = g_2$$

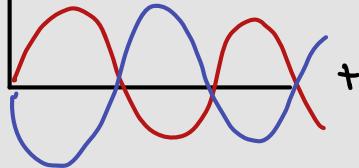
$$a_1 = a_2$$

$$g_1 \neq g_2$$

$$x(t) = a \sqrt{2+2\cos(g_1-g_2)} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \frac{g_1 - g_2}{2}$$

$$\text{e.g. } g_1 - g_2 = \pi \rightarrow \text{Auslöschung} (\sqrt{2+2 \cdot \cos(\pi)} = 0)$$

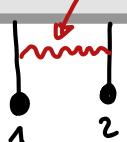


Vorlesung

Dgl. gekoppeltes Pendel:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k_{12}}{m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k_{12}}{m} (x_2 - x_1) = 0$$



$$\Rightarrow x_n(t) = \frac{1}{2} (\xi_+ + \xi_-) = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{g_1 - g_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{g_1 + g_2}{2}\right)$$

Schwingung wenn $2k/m \ll \omega_0$

Lösung durch Substitution:

$$\xi_+ = x_1 + x_2 \quad \xi_- = x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_+ = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) & \text{mit } \omega_1 = \omega_0 \\ \xi_- = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) & \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega_1 \neq \omega_2 : \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a \\ g_1 &= g_2 = 0 \end{aligned}$$

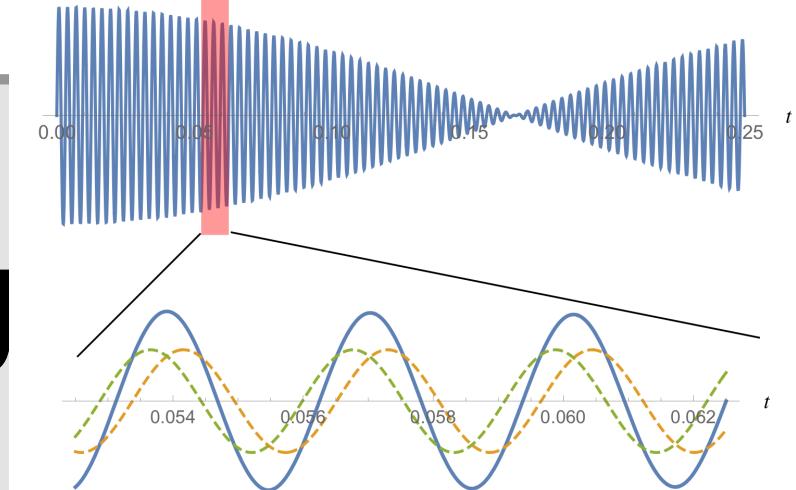
$$x(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Keine harmon. Schwingung

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$: Schwingung

$$\text{Amplitude} \approx \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Approx. harmon. Schwingung mit $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$



2D Überlagerung 3. Lissajous-Fig.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t)$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_2 t + \phi)$$

$\omega_1 = \omega_2$ kleine $(\phi = \frac{\pi}{2})$
Ellipse

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ geschlossene
Kurve

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}$ keine
gesch. Kurve gewundert

Schwingle harmon. Schwingung:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = 0$$

↓
neue Rückgangskomponente

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\delta = \frac{\beta}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow z(t) = e^{-\delta t} \left\{ z_{01} \cdot e^{i\tilde{\omega}t} + z_{02} \cdot e^{-i\tilde{\omega}t} \right\}$$

$$\text{mit } \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Lösungsansatz:

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

- 3 Fälle:
- $\tilde{\omega} > 0 \quad (\delta < \omega_0) \rightarrow \text{schn. Dämpfung}$
 - $\tilde{\omega} = 0 \quad (\delta = \omega_0) \rightarrow \text{krit. --}$
 - $\tilde{\omega} < 0 \quad (\delta > \omega_0) \rightarrow \text{imaginäre --}$

↓
Schwingfall

↓
Schnellst mög. Dämpfung

↓
Langsamere Dämpfung

ballistische Lsg.

$$\begin{aligned} \dot{z}(0) &= V_0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{V_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \sin(\tilde{\omega}t)$$

$$x(t) = V_0 t e^{-\delta t}$$

$$x(t) = \frac{V_0}{\tilde{\omega}_p} e^{-\delta t} \sinh(\tilde{\omega}_p t)$$

$$\text{mit } \tilde{\omega}_p = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Vorlesung 25

Erzwungene harm. Schwingung:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = F_0 e^{i\omega_E t}$$

↓
per. Anregung mit Frequenz ω_E , Kraft F_0

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = F_0 e^{i\omega_E t} \quad \Rightarrow \text{inhom. Ogl.}$$

$\Rightarrow \text{Lsg.} = \text{hom. Lsg.} + \text{part. Lsg.}$

Ansatz: $z_p(t) = z_0 e^{i\omega t}$

$$z_0 \in \mathbb{C}: z_0 = 1|z_0| \cdot e^{i\gamma}$$

$$= P_0 \frac{\omega_0^2 - \omega_E^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

Realteil

$$= P_0 \frac{-2i\delta\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

Imaginärteil

Phase

$$\gamma: \tan \gamma = \frac{1 m(z_0)}{P_0(z_0)} = -\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

Ampl.

$$|z_0|: P_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \rightarrow$$

Max. bei $\omega_E^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$$\delta \gg 0 \Rightarrow |z_0| \rightarrow \infty \text{ wenn } \omega_E \approx \omega_0$$

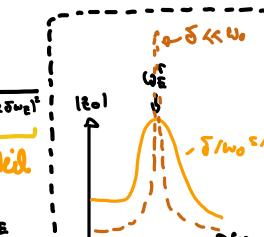
bal. Anfangsbed.: Lsg.

$$x(t) = \frac{V_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \sin(\tilde{\omega}t) + \frac{P_0 \cos(\omega_E t + \gamma)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$$

↓

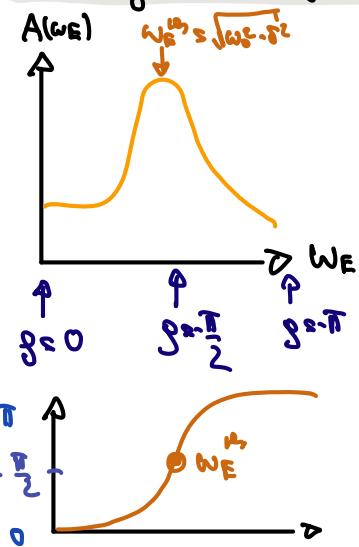
Einschwingung
klug mit $e^{i\omega t}$

↓
Ergebnis:
dominiert für
Größe $t \gg \frac{1}{\delta}$



Phasenfrequenz & Güte:

Phasenfrequenz zw. Erreger & System:



$$\text{Güte: } Q = \frac{A(\omega_E = \omega_0)}{A(\omega_E = 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad \text{Dämpfung}$$

Energiebilanz:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle \approx \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} \langle E_{\text{gr}} \rangle$$

$$\langle E_{\text{gr}} \rangle = \frac{1}{2} m \omega_E^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega_E^2 \frac{P_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}$$

→ E_{max} bei $\omega_E = \omega_0$ (nicht ω_E^*)

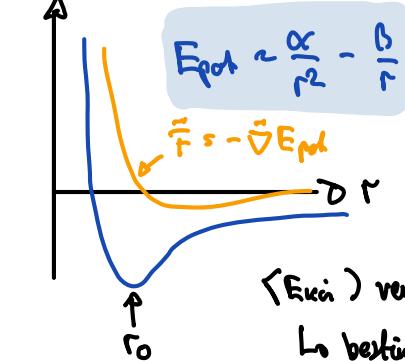
Maximale Systemenergie nicht bei Amor., aber kurz darunter

Deformierbare Körper:

Theorie Realismus: TIP → steifen Körper → def. K.

fest - flüssig - gasförmig

Epot



$\langle E_{\text{kin}} \rangle$ versus $\langle E_{\text{pot}} \rangle$

↳ bestimmt Aggregatzustand

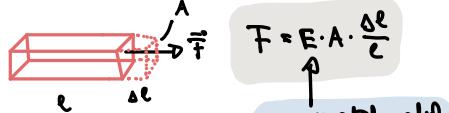
falls Minimum vorhanden können
sind Sphären bilden

$$\tilde{r}_{ij} = n_{ij}^a \hat{a} + n_{ij}^b \hat{b} + n_{ij}^c \hat{c}$$

Vorlesung 26

Verformung fester Körper

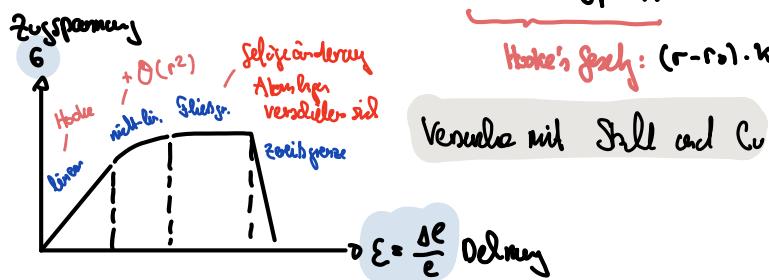
Verformung eines elast. Körpers



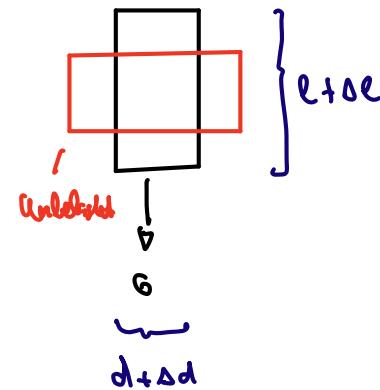
$$\text{Zugspannung: } \sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \epsilon \quad \text{Defin.: } \Delta l/l$$

$$\text{Ausdehnung: } E_{\text{pot}}(r) = 0 + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} + \dots$$

$$\hookrightarrow \tilde{F}(r) = \partial r E_{\text{pot}}(r) = (r - r_0) \cdot \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} + \dots$$



Volumenänderung:



$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta d}{d}$$

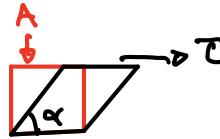
Kompression ($\Delta l < 0, \Delta d > 0$)

$$p = \frac{F}{A} = -K \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Kompressionsmodul

$$K = \frac{E}{3} (1 - 2\beta)^{-1} \text{ mit } \beta = -\frac{\Delta d}{d} / \left(\frac{\Delta l}{l}\right)$$

Mechanische Spannungen



Tangential angeleert

$$\tau = \frac{F}{A}$$

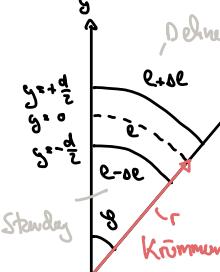
$$\tau = G \cdot \alpha$$

Schubmodul

Biegung eines Balkens

$$\ell \pm \Delta \ell = (r \pm y) s$$

$$\sim \Delta \ell = s \cdot \dot{s} = s \cdot \frac{\ell}{r}$$



$$\text{Druckspannung } \sigma = E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} = E \cdot \frac{y}{r}$$

Neutraler Faser: $\ell = r \cdot s$

Kraft am Flächenelement dA:

$$dF = G \cdot dA = E \cdot \frac{y}{r} \cdot dA$$

$$\text{Drehmoment: } dM_y = g \cdot dF \cdot E \frac{s^2}{r} dA$$

$$\hookrightarrow M_y = \int y^2 dA \frac{E}{r}$$

Biegemoment B

$$\text{Krümmungsradius: } r = B \cdot E \cdot \frac{1}{M_y}$$

Vorlesung 27

Reibung:

$$\text{Haltreibzug: } T_H = \mu_H \cdot F_N$$

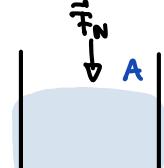
↑ Normalkraft

$$\text{gleitreib.: } T_S = \mu_S \cdot F_N$$

$$\text{Rollenreibung: } T_R = \mu_R \cdot F_N$$

Auflende Flüssigkeiten & Gas:

Flüssigkeiten bei querend. Druck ($\sigma = 0$)



$$\text{Druck: } p = \frac{F_N}{A}$$

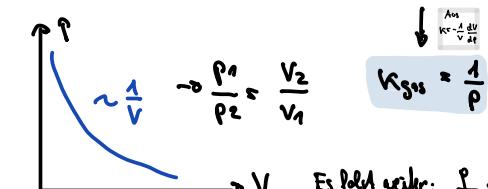
$$\text{Volumenänder. } \frac{dV}{V} = -\nu dp$$

$$K(S_{\text{gas}}) \approx 10^5 \cdot \nu (\text{Blasenfüll})$$

Kompatibilität

Bogé-Mariotte-Gesetz:

$$T = \text{const} \Rightarrow p = \frac{1}{V} \Rightarrow p \cdot V = \text{const.}$$



$$K_{\text{gas}} = \frac{1}{p}$$

Es folgt weiter: $\frac{p}{\nu} = \text{const.}$