HA07

Lisa Peltzer und Angelo Brade

Sonntag, 20. November 2022 12:34

(1)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2 \cdot n!} = \frac{1}{2 \cdot n!} \cdot z^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2 \cdot n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!}}} \Rightarrow R \to \infty$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n \Rightarrow a_n = \frac{n+2}{2^n} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{2^n}}} \Rightarrow R = 2$ $\quad \sqrt[n]{\frac{n+2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n+2}}{2} = \frac{(n+2)^{\frac{1}{n}}}{2} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{(n+2)^0}{2} = \frac{1}{2}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} z^n \Rightarrow a_n = \frac{3^{n+2}}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+2}}{2^n}}} \Rightarrow R = \frac{2}{3}$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{3^{n+2}}{2^n}} = \underset{3}{\sqrt[n]{3^n}} \cdot \underset{1}{3^{\frac{2}{n}}} \cdot \underset{\frac{1}{2}}{2^{-\frac{n}{n}}} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{3}{2}}$$

(4)

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \mid x_3 = \frac{x_4}{8}, \; x_2 = -\frac{3x_4}{20}, \; x_1 = -\frac{9x_4}{40})$

b)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & -11 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 16 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -18 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 16 \\ 0 & 0 & 24 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \mid x_3 = \frac{2 + x_4}{8}, \; x_2 = \frac{-122 - 5x_4}{40}, \; x_1 = \frac{66 + 15x_4}{40}$

(5)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 2z = 1 - 2a \\ \text{II} & 3x + y = a \\ \text{III} & 4z - x - y = a + 2 \end{array}\right| \; \text{II} + \text{III}$$

II' $\quad 4z + 2x = 2a + 2 \quad | -4z$

$2x = 2a + 2 - 4z \quad | :2$

$x = a + 1 - 2z \quad | \, 2z \to 1 - 2a$

$x = 3a$

II $\quad 3x + y = a \quad |$

$9a + y = a \quad | -9a$

$y = -8a$

III $\quad 4z - x - y = a + 2$

$4z - 3a + 8a = a + 2 \quad | -5a$

$4z + 5a = a + 2 \quad | -5a$

[illegible]

$$4z+5a=a+2 \quad |-5a$$

$$4z=-4a+2 \quad |:4$$

$$z=-a+\frac{1}{2}$$

$\mathbb{L}=\{a,x,y,z\in\mathbb{R} \mid x=3a,\ y=-8a,\ z=-a+\frac{1}{2})$

Der Parameter a kann jede reelle Zahl $\mathbb{R}$ annehmen.

(6)

b) in $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{c|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 2 & 0 & 2 \\ \mathrm{II} & 2 & 3 & 1 & 2 \\ \mathrm{III} & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathrm{I}+\frac{4}{3}\mathrm{II} \\ \\ \mathrm{II}+\mathrm{II} \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$y=2-4z=2+z$

$2x+3y+z=2 \Rightarrow 2x+3(2+z)+z=$

$2x+1+3z+z=2$

$\Leftrightarrow$

$2x+1+4z=2$

$2x+4z=1$

$2x=1+z \quad |\cdot 6$

$x=3+3z$

$\mathbb{L}=\{x,y,z\in\mathbb{Z}_5 \mid x=3+3z,\ y=2+z\}$

(3)

Da f eine stetige Funktion ist und im Intervall $x\in[a,b]$ ein $Bild(f)\subseteq[a,b]$ hat, muss f einen Punkt auf der Geraden haben, die von den Eckpunkten (a,a) bis (b,b) geht. Entsprechende Gerade ist die Funktion $g(x)=x$.
Folgedessen muss es ein x geben, sodass $\tilde{f}=f(x)-g(x)=f(x)-x:\ \tilde{f}=0$ ist.
Da bei $\tilde{f}=0$, $f(x)=x$ ist, gibt es einen Fixpunkt (x,x), den f schneidet.

1.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} \cdot (z-1)^{2n}$

Konvergenzradius r

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

$\to 1$

weil $(z-1)^{2n}$: $\sqrt{1} = \pm 1$

für $|z-1| < 1$ konvergiert die Reihe

$-1 < |z-1| < 1 \quad | +1$

$0 < z < 2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z+2)^n$

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} n} = 0$$

für $|z+2| < 0$ konvergiert die Reihe

$|z+2| < 0 \quad | -2$

$z < -2$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{(2+\frac{1}{n})^n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n} \cdot (2+z)^{2n}$

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\to 2 \quad \to 0$

weil $(2+z)^{2n}$: $r = \sqrt{2}$

für $|2+z| < \sqrt{2}$ ist die Reihe konvergent

$-\sqrt{2} < 2+z < \sqrt{2} \quad | -2$

$-\sqrt{2}-2 < z < \sqrt{2}-2$

Auf 2.

a)

surjektiv: $\forall y \in N \quad \exists x \in M : y = f(x)$

injektiv $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Definition 4.21:
Seien X, Y beliebige Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt
(a) **injektiv**, falls gilt: $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$,
(b) **surjektiv**, falls es für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$, und
(c) **bijektiv**, falls sie surjektiv und injektiv ist.

$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan(x_1) < \tan(x_2)$

weil tangens im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend ist gilt:

$\tan(x_1) < \tan(x_2)$ und das impliziert $\tan(x_1) \neq \tan(x_2)$. Daher ist der tangens injektiv

Zwischenwertsatz:

$u \in (\tan(x_1), \tan(x_2))$ (falls $\tan(x_1) < \tan(x_2)$) existiert ein $c \in (x_1, x_2)$ min $\tan(c) = u$

also ist tangens surjektiv

Weil der tangens sowohl surjektiv als auch injektiv ist, ist er bijektiv

b) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

tangens ist für $x_0 = 0$ als $\tan(0) = 0$ definiert

$$\lim_{x \to 0^+} \tan(x) = \lim_{x \to 0^+} \tan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \tan(x) = \lim_{x \to 0^-} \tan(0) = 0$$

$$\tan(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tan(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tan(x_0)$$

tangens ist also stetig

Satz 4.23: bijektiv

Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a < b$ und $c < d$. Sei die Funktion $f\colon [a, b] \to [c, d]$ stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$a \leq u < v \leq b \Rightarrow f(u) < f(v)$$

mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

(a) f ist bijektiv,
(b) f besitzt eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c, d] \to [a, b]$, sodass für alle $x \in [a, b]$: $f^{-1}(f(x)) = x$, und sodass für alle $y \in [c, d]$: $f(f^{-1}(y)) = y$;
(c) f^{-1} ist bijektiv und streng monoton wachsend;
(d) f^{-1} ist stetig.

Beweis:
(a) Es ist f monoton wachsend und $f(u) < f(v)$ impliziert $f(u) \neq f(v)$. Daher ist f injektiv und aufgrund der Bemerkung nach dem Zwischenwertsatzes ist f surjektiv.

(c) f^{-1} ist injektiv: Seien $y, y' \in [c, d]$ und $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Dann ist

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(y')\right) = y'.$$

f^{-1} ist surjektiv: Sei $x \in [a, b]$. Dann ist $f^{-1}(f(x)) = x$, das bedeutet, dass x im *Bild* von f^{-1} liegt.

Stetigkeit zeigen

Eine Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn sie 3 Bedingungen erfüllt:

1. Die Funktion ist an der Stelle x_0 definiert: $f(x_0)$ existiert.
2. Der rechts- und linksseitige Grenzwert sind an der Stelle x_0 gleich: Der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.
3. Der Grenzwert ist gleich dem Funktionswert: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist die Stetigkeit einer Funktion an jeder Stelle gegeben, handelt es sich um eine stetige Funktion.

Satz 4.23 sagt dass die Funktion f wenn sie stetig und streng monoton wachsend ist, eine eindeutig bestimmte Umkehrfunkt f^{-1} hat. f^{-1} ist bijektiv, streng monoton wachsend und stetig.

Da der tangens stetig und streng monoton wachsend ist, gilt der Satz 4.23.

Damit ist auch die Umkehrfunktion $\tan^{-1}$ stetig

Auf 6 a)

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\;\; &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \cdot 2 \\ - \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \cdot 3 \\ - \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \cdot 3 \\ - \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} + \\ \cdot 2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mid \cdot(-1) \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{L} = \{x, y, z \mid x = (-2) - 2z \;;\; y = 2 + z\}$$

Auf 7

$$4x + 3y + z = a$$
$$2y + z = 3 - a$$
$$x + 3y + z = 1 + 2a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & a-(1+2a) \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & a-1-2a \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \; | :3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 0 & 3 & 1 & \frac{4}{3}+\frac{7a}{3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{10a}{3} \\ 0 & 3 & 1 & \frac{4}{3}+\frac{7a}{3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{10a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3}-\frac{23a}{3} \end{array}\right) | \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}+\frac{10a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3}-\frac{23a}{3} \end{array}\right)$$

$x = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}$ $\quad y = -\frac{5}{3} + \frac{10a}{3}$ $\quad z = \frac{19}{3} - \frac{23a}{3}$

$$4\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\right) + 3\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right) + \left(\frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right) = a$$
$$-\frac{4a}{3} - \frac{4}{3} - \frac{15}{3} + \frac{30a}{3} + \frac{19}{3} - \frac{23a}{3} = a$$
$$a = a$$

$$\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\right) + 3\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right) + \frac{19}{3} - \frac{23a}{3} = 1+2a$$
$$-\frac{a}{3} - \frac{1}{3} - \frac{15}{3} + \frac{30a}{3} + \frac{19}{3} - \frac{23a}{3} = 1+2a$$
$$1+2a = 1+2a$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a$$

$$2\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right) + \left(\frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right) = 3-a$$
$$-\frac{10}{3} + \frac{20a}{3} + \frac{19}{3} - \frac{23a}{3} = 3-a$$
$$3-a = 3-a$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a$$

$$\mathbb{L}\left\{x,y,z,a \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{a}{3}-\frac{1}{3},\; y = -\frac{5}{3}+\frac{10a}{3},\; z = \frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right\}$$