Der Drehimpuls

In der klassischen Mechanik:

$$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$$

⇝ Korrespondenzprinzip:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \wedge \hat{\vec{p}}$$

oder in Koordinaten:

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$$

N.B.: $\hat{L}_i^\dagger = \hat{L}_i$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

Kommutationsrelationen

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y \end{aligned}}$$

Sei $\quad \hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

Es gilt:

$$\boxed{[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0}$$

z.B.:

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$$

$$= 0 + \hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x]\hat{L}_y$$

$$+ \hat{L}_z[\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x]\hat{L}_z$$

$$= \cancel{\hat{L}_y(-i\hbar\hat{L}_z)} + \cancel{(-i\hbar\hat{L}_z)\hat{L}_y} + \cancel{\hat{L}_z(i\hbar\hat{L}_y)}$$

$$+ \cancel{(i\hbar\hat{L}_y)\hat{L}_z}$$

$$= 0$$

Konsequenz: • $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ können nicht simultan diagonalisiert werden.

• Wir können z.B. $\hat{L}_z$ und $\hat{\vec{L}}^2$ diagonalisieren, aber dann sind $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ nicht diagonal.

Theorem: Es seien $\hat{\vec{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ hermitische Operatoren welche die vorherigen Kommutationsrelationen erfüllen. Dann gilt

- Eigenwerte von $\hat{\vec{L}}^2$: $\ell(\ell+1)\hbar^2$, $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$
- Eigenwerte von $\hat{L}_z$: $m\hbar$, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, \ell-1, \ell$

Beweis: Benötigt Gruppentheorie

$\rightarrow$ Vorlesung im Master.

$\rightarrow$ "Irreduzible Darstellungen der Gruppen $SO(3)$ & $SU(2)$".

Sei $\{|\ell, m\rangle : m = -\ell, \dots, \ell\}$, $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, eine ONB aus Eigenvektoren:

$$\langle \ell, m | \ell', m' \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

$$\hat{\vec{L}}^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle$$

$$\hat{L}_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

Frage: Wie agieren $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ in der Basis $\{|\ell, m\rangle\}$?

Def: Auf- und Absteigeoperatoren:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y = \hat{L}_\mp^+$$

Kommutationsrelationen

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \pm i [\hat{L}_z, \hat{L}_y]$$

$$= i\hbar \hat{L}_y \pm i (-i\hbar \hat{L}_x)$$

$$= \pm\hbar (\hat{L}_x \pm i \hat{L}_y)$$

$$= \pm\hbar \hat{L}_\pm$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = [\hat{L}_x, \hat{L}_y](-i) + i [\hat{L}_y, \hat{L}_x]$$

$$= 2\hbar \hat{L}_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] &= \pm\hbar \hat{L}_\pm \\ [\hat{L}_+, \hat{L}_-] &= 2\hbar \hat{L}_z \end{aligned}}$$

Konsequenz Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{L}_z$ mit Eigenwert $m\hbar$ ist, dann sind $\hat{L}_\pm|\psi\rangle$ Eigenvektoren mit Eigenwert $(m\pm 1)\hbar$

Beweis:

$$\hat{L}_z\hat{L}_\pm|\psi\rangle = \hat{L}_\pm\hat{L}_z|\psi\rangle + [\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]|\psi\rangle$$
$$= m\hbar\,\hat{L}_\pm|\psi\rangle \pm \hbar\,\hat{L}_\pm|\psi\rangle$$
$$= (m\pm 1)\hbar\,|\psi\rangle$$

$\boxtimes$

Also muss gelten

$$\hat{L}_\pm|l,m\rangle \propto |l,m\pm 1\rangle$$

Aber was ist mit $m=\pm l$?

$$\begin{cases} \hat{L}_+|l,l\rangle \propto |l,l+1\rangle \\ \hat{L}_-|l,-l\rangle \propto |l,l-1\rangle \end{cases}$$

Da $|m|\leq l$, ist die einzige Möglichkeit

$$\hat{L}_\pm|l,\pm l\rangle = 0$$

Daraus ergibt sich folgendes Bild:

Nehmen wir an wir kennen $|l,l\rangle$

$$0 \xleftarrow{\hat{L}_+} |l,l\rangle$$

$$\xrightarrow{\hat{L}_-} N_l\,|l,l-1\rangle$$

$$\xrightarrow{\hat{L}_-} N_{l-1}N_l\,|l,l-2\rangle$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow * \,|l,-l+1\rangle$$

$$\longrightarrow * \,|l,-l\rangle$$

$$\longrightarrow 0$$

Normierung N_i?

$$|N_1|^2 = |N_1|^2\langle l,l-1|l,l-1\rangle = \langle l,l|\hat{L}_-^{\dagger}\hat{L}_-|l,l\rangle$$

$$= \langle l,l|\hat{L}_+\hat{L}_-|l,l\rangle$$

$$= \langle l,l|\cancel{\hat{L}_-\hat{L}_+}|l,l\rangle + \langle l,l|[\hat{L}_+,\hat{L}_-]|l,l\rangle$$

da $\hat{L}_+|l,l\rangle = 0$

$$= 2\hbar\,\langle l,l|\hat{L}_z|l,l\rangle$$

$$= 2l\hbar^2\langle l,l|l,l\rangle$$

$$= 2l\hbar^2$$

$$\Rightarrow \quad |N_1| = 2\hbar l$$

$$\rightsquigarrow \quad \hat{L}_- |l,l\rangle = \hbar\sqrt{2l}\, |l,l-1\rangle$$

Auf diese Weise können alle Normierungsfaktoren bestimmt werden

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{L}_\pm |l,m\rangle &= \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\, |l,m\pm 1\rangle \\ \hat{L}_z |l,m\rangle &= \hbar m\, |l,m\rangle \\ \hat{\vec{L}}^2 |l,m\rangle &= \hbar^2 l(l+1)\, |l,m\rangle \end{aligned}}$$

Beziehung Drehimpuls $\longleftrightarrow$ Rotationsgruppe

$\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Es gilt:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} = -i\hbar\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial z}}\right)$$

$$= -i\hbar\left(r\sin\theta\,(-\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

$$= \hat{L}_z$$

$$\boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}}$$

Rotation um z-Axe:

$$(r,\varphi,\theta) \longrightarrow (r,\varphi+\alpha,\theta)$$

$$\rightsquigarrow \psi(r,\varphi,\theta) \longrightarrow \psi(r,\varphi+\alpha,\theta)$$

Falls α infinitesimal:

$$f(r,\varphi+\alpha,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\varphi^n} f(r,\varphi,\theta)$$

$$= e^{-i\alpha\hat{L}_z/\hbar} f(r,\varphi,\theta)$$

$\rightsquigarrow$ cf. Beziehung Translationsoperator $\longleftrightarrow$ Impulsoperator

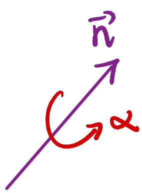
- $\hat{\vec{P}}$ ist der Erzeuger der infinitesimalen Translationen:

$$\hat{T}(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{P}}/\hbar}$$

- $\hat{H}$ ist der Erzeuger der infinitesimalen Zeittranslationen

$$\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$$

- $\hat{\vec{L}}$ ist der Erzeuger der infinitesimalen Rotationen



$$\hat{R}(\alpha,\vec{n}) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}/\hbar}$$

mit $\|\vec{n}\| = 1$, und $\hat{R}(\alpha,\vec{n})$ ist eine Rotation mit Winkel α um die Axe $\vec{n}$.

Sei $f(r, \varphi, \theta)$ eine Eigenfunktion mit

$$\hat{L}_z f = m\hbar f$$

$$\hat{L}^2 f = \ell(\ell+1)\hbar^2 f$$

$$\rightsquigarrow R_z(\alpha) f = e^{-i\alpha \hat{L}_z/\hbar} f = e^{-im\alpha} f$$

Rotation um z-Axe

Aber: $R_z(2\pi) f = f \Rightarrow e^{-2\pi i m} f = f$

$$\Rightarrow e^{-2\pi i m} = 1$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Für Rotationen im Raum kann $\hat{L}_z/\hbar$ nur ganzzahlige Eigenwerte haben: $m \in \mathbb{Z}$