Präsenzaufgabenblatt 5

(i) wir haben, dass $Sp(\gamma) \subset Int(\tilde{\gamma}) = (Ext(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma}))^c$

$\Rightarrow \quad Sp(\gamma)^c \supset Int(\tilde{\gamma})^c = Ext(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma})$

$\Leftrightarrow \quad Ext(\gamma) \cup Int(\gamma) \supset Ext(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma})$

$\Rightarrow \quad Ext(\tilde{\gamma}) \subset Ext(\gamma) \cup Int(\gamma)$

. $Ext(\tilde{\gamma})$ ist offen und eine zusammenhängende Menge.

$Ext(\tilde{\gamma}) \subset Ext(\gamma)$ oder $Ext(\tilde{\gamma}) \subset Int(\gamma)$. Sonst man könnte $Ext(\tilde{\gamma}) = \underset{\text{offen}}{A} \cup \underset{\text{offen}}{B}$ schreiben mit $A \subset Ext(\gamma)$ und $B \subset Int(\gamma)$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow Ext(\tilde{\gamma})$ nicht zusammenhängende Menge.

$$\Rightarrow \begin{cases} Ext(\tilde{\gamma}) \subset Ext(\gamma) \\ \underbrace{Ext(\tilde{\gamma})}_{\text{Unbeschränkt}} \subset \underbrace{Int(\gamma)}_{\text{beschränkt}} \end{cases} \Rightarrow Ext(\tilde{\gamma}) \subset Ext(\gamma)$$

(ii) $Ext(\tilde{\gamma}) \subset Ext(\gamma) \Rightarrow Ext(\gamma)^c \subset Ext(\tilde{\gamma})^c$

$\Leftrightarrow Int(\gamma) \cup Sp(\gamma) \subset Int(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma})$ (1)

(iii) $\overset{(1)}{\Rightarrow} Int(\gamma) \subset Int(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma})$

$\overset{Int(\gamma)\text{ offen}}{\Rightarrow} Int(\gamma) \subset \underbrace{Int(Int(\tilde{\gamma}) \cup Sp(\tilde{\gamma}))}_{= Int(\tilde{\gamma})}$

$\Rightarrow Int(\gamma) \subset Int(\tilde{\gamma})$

Präsenzaufgabe 2)

(i) $\int_\gamma z^3 + 2z^2 \, dz \overset{\text{Hauptsatzes der Integralrechnung}}{=} \left[\frac{1}{4} z^4 + \frac{2}{3} z^3\right]_0^{i+3} = \frac{1}{4}(i+3)^4 + \frac{2}{3}(i+3)^3.$

(ii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} \, dz = 0$ weil $z \mapsto e^{z^2 - iz}$ ist eine holomorphe Funktion und γ ist geschlossen.

(iii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} \, dz = 0$ weil $z \mapsto e^{z^2 - iz}$ ist eine holomorphe Funktion und γ ist geschlossen (Aber nicht einfach).

Präsenzaufgabe 3)

(i) $\left| \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1} \, dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{it} - 1)}{(Re^{it} + 1)} Rie^{it} \, dt \right|$

$\overset{\text{2te D.Ungleichung}}{\leq} \int_0^{2\pi} \frac{R(|Re^{it}| + |1|)}{|Re^{it} + 1|} \, dt$

und $|Re^{it} + 1| \overset{\text{D.Ungleichung}}{\geq} \big| |Re^{it}| - |-1| \big| = |R-1|$

$\Longrightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1} \, dz \right| \leq \frac{R(R+1)}{|R-1|}$

(ii) $$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^4 e^{i4t}} Rie^{it}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iRe^{it}}\right|}{R^3}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iR\cos(t) - R\sin(t)}\right|}{R^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{R^3}\int_0^{\pi} \underbrace{e^{-\underbrace{R\sin(t)}_{\ge 0}}}_{\le 1}\,dt \le \frac{\pi}{R^3}$$

(iii) $$\left|\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1}\,dz\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1+i)}{t^2(1+i)^2+1}\,dt\right| \le \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{|t^2(1+i)^2+1|}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{|t^2(1+(-1)+2i)+1|}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{|2it^2+1|}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{4t^2+1}}_{\ge 1}}\,dt \le \sqrt{2}$$