Hausaufgabeblatt 3

1) (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$

wobei $u := z^2$.

Die Potenzreihe konvergiert für $|u| < R$
〃 〃 divergiert für $|u| > R$

$\Leftrightarrow$ Die Potenzreihe konvergiert für $|z| < \sqrt{R}$
〃 〃 divergiert für $|z| > \sqrt{R}$

$\Leftrightarrow$ der Konvergenzradius ist $\sqrt{R}$

(ii) Der Konvergenzradius ist gleich

$$S = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n^2|^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}\right)^2 = R^2$$

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 u^n$ wobei $u = z^2$

(ii) $\Rightarrow$ Die Potenzreihe kovergiert für $|u| < R^2$
〃 〃 divergiert für $|u| > R^2$

$\Leftrightarrow$ Die Potenzreihe konvergiert für $|z| < R$
Die 〃 divergiert für $|z| > R$

$\Leftrightarrow$ der Konvergenzradius ist R.

(iv) $\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}}_{=\frac{1}{R}} \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(*)} \frac{1}{R}\times 0 \underset{R>0}{=} 0$

(*) aber $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi n})^{\frac{1}{n}}\frac{n}{e}} = \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2\pi n})}}_{=e^{2\frac{1}{n}\ln(n)+\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2\pi})}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}\cdot\frac{n}{e}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $+\infty$.

Aufgabe 2)

i) $\left|\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!}\right| \leq |z|^p\left(\frac{|z|}{k!}\right)^{2k}$

Aber $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2k}}{k!}$ hat $R=\sqrt{+\infty}=+\infty$

$\Rightarrow$ Der Konvergenzradius von $J_p(z)$ ist $+\infty$.

(ii) Da $J_p(z)$ überall konvergiert, können wir gliedweise differenzieren, multiplizieren und addieren. Falls $p \geq 2$, wir haben

$$\frac{d}{dz} J_p(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} (p+2k) \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k-1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_p(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} (p+2k)(p+2k-1) \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k-2}$$

Sei jetzt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Das Koeffizient a_k von $\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k-2}$ in der Potenzreihe von $\frac{d^2}{dz^2} J_p(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_p(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) J_p(z)$

ist gegeben durch

$$a_k \overset{k \geq 1}{=} \frac{1}{4} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} (p+2k)(p+2k-1) + \frac{1}{4} \frac{(-1)^k (p+2k)}{k!\,(p+k)!}$$

$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(p+k-1)!}^{\text{Verschiebung}(+1)} - \frac{p^2}{4} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} \Big((p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - 4k(p+k) - p^2 \Big) = 0$$

und $a_0 = \frac{1}{4} \frac{1}{p!} [p(p-1) + p - p^2] = 0$ (~~Für $p=0$, $p=1$ gleiches Prinzip~~)

Aufgabe 3)

(i) $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} (\log(n))^{2/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}\log\log n}} = 1$

(ii) $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n}} = 2$

(iii) $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{\log(1+\frac{1}{n})n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n)}{\log(1+\frac{1}{n})n}}} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n)}{\frac{1}{n}\times n}}} = 0$

(*) siehe $\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

$\Big[f(x) = \log(1+x) - x, \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \square \Big]$

Aufgabe 4)

(i) $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln(n)}} = 1$

(ii) $F'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

(iii) $\left(F(1-e^{z})\right)' = F'(1-e^{z})\,(-e^{z})$

$$\overset{(ii)}{=} \frac{1}{1-(1-e^{z})}\,(-e^{z}) = -1$$

$\Rightarrow F(1-e^{z}) = -z + C$

Aber $F(1-e^{0}) = F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$