Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 8: Der sphärische unendliche Potentialtopf

<u>Deadline:</u> Mittwoch 19.06.2024 18.00 via eCampus

Wir schauen uns ein freies Teilchen in 3 Dimension an, welches sich in einem sphärischen unendlichen Potentialtopf bewegt. Der Hamilton-Operator is gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{x})\,, \qquad V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0\,, & |\mathbf{x}| < R\,, \\ \infty & |\mathbf{x}| \geq R\,. \end{cases}$$

Ziel ist es, die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Hamilton-Operators zu bestimmen. Sie benötigen hierzu sphärische Besselfunktionen, deren Eigenschaften im Appendix zusammengefasst sind. Im Folgenden arbeiten wir in sphärischen Koordinaten (r, θ, φ).

1. (5 Punkte) Zeigen Sie durch Separieren der Variablen, dass es Eigenfunktion der Form $R_l(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$ gibt, wobei Y_l^m die Kugelflächenfunktionen sind, und die Radialfunktion R_l die folgende Gleichung erfüllen muss:
$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} R_l(r)\right) - \left(E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}\right) R_l(r) = 0\,.$$

2. (5 Punkte) Zeigen Sie dass $R_l(r) = N_l\, j_l(kr)$ gelten muss, wobei N_l eine Integrationskonstante ist, $k = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$, und $j_l(z)$ ist die l-te sphärische Besselfunktion.

3. (2 Punkte) Zeigen Sie dass die Energie-Eigenwerte gegeben sind durch die Nullstellen der sphärischen Besselfunktion. Genauer, zeigen Sie dass die Energie-Eigenwerte gegeben sind druch
$$E_{l,n} = \frac{\hbar^2 z_{l,n}^2}{2MR^2}\,,$$
wobei $z_{l,n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Nullstellen von $j_l(z)$ sind (siehe Appendix).

4. (8 Punkte) Ziegen Sie dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ gibt mit
$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{R^3}}\, \frac{j_l\left(z_{l,n}\frac{r}{R}\right)}{j_{l+1}(z_{l,n})}\, Y_l^m(\theta, \varphi)\,, \qquad r \leq R\,.$$
Zeigen Sie durch explizite Rechnung die Beziehung
$$\int_0^R \mathrm{d}r \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^2\, \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)^* \psi_{n',l',m'}(r, \theta, \varphi) = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,.$$
Sind die Eigenwerte entartet? Begründen Sie Ihre Antwort!

Appendix: Sphärische Besselfunktionen

Die sphärischen Besselfunktionen der ersten Art $j_l(z)$ und der zweiten Art $y_l(z)$ sind die linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung

$$z^2\, f''(z) + 2z\, f'(z) + \big(z^2 - l(l+1)\big) f(z) = 0\,, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Explizite Ausdrücke sind gegeben durch

$$\begin{aligned} j_l(z) &= \quad (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^l \frac{\sin z}{z}\,, \\ y_l(z) &= -(-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^l \frac{\cos z}{z}\,. \end{aligned}$$

Die sphärischen Besselfunktionen erster Art sind regulär bei $z = 0$, wohingegen die zweiter Art singulär bei $z = 0$ sind.

Die sphärische Besselfunktion $j_l(z)$ erster Art hat unendlich viele Nullstellen, welche wir mit $z_{l,n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ bezeichen. Man kann diese Nullstellen nicht explizit durch Wurzeln Darstellen. Ihre Werte können in einer Näherung bestimmt, und liegen tabelliert vor. Man kann zeigen dass alle $z_{l,n}$ verschieden sind, und wir nehmen an $z_{l,1} < z_{l,2} < z_{l,3} < \ldots$.

Die sphärischen Besselfunktionen erster Art erfüllen die Bedingung:

$$\int_0^1 \mathrm{d}z\, z^2\, j_l(z_{l,n} z)\, j_l(z_{l,n'} z) = \frac{1}{2}\, j_{l+1}(z_{l,n})^2\, \delta_{nn'}\,.$$