Vorlesung 6 – 27.10.2023

- Satz: Potenzreihe $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit Ableitung $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1}$. f' hat gleichen Konvergenzradius wie f.
- Corollar: Potenzreihen sind unendlich oft differenzierbar und haben eine Stammfunktion:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k z^{k-n}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} z^{k+1} + c$$

- Satz: Produkt von zwei Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j$ mit Konvergenzradien $R, R' \in [0,\infty]$ ist die folgende Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens $\min(R,R')$:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} z^n.$$

- Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$. Sei $|z_0| < R$. Definiere Taylorreihe $g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n$. Dann hat g Konvergenzradius mindestens $R - |z_0|$ und $f(z_0 + h) = g(h)$ falls $|h| < R - |z_0|$.