Präsenzaufgabenblatt 7.

1) Sei $h := f - g$

h ist holomorph auf $U \Rightarrow h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$

$\forall z \in B_r(z_0) \subset U$.

Falls $\alpha_k = 0 \quad \forall k$, dann $h \equiv 0$ in $B_r(z_0)$ und wir sind fertig.

Ansonsten existiert eine kleinste Zahl $m > 0$ mit $\alpha_m \neq 0$ und

$$h(z) = (z - z_0)^m \mathcal{L}(z)$$

wobei $\mathcal{L}(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \alpha_k (z - z_0)^{k-m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+m} (z - z_0)^k$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(z_0) = 0 \text{ und} \\ \mathcal{L} \text{ ist auch holomorph auf } \overline{B_r(z_0)} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ stetig} \\ \text{und } \mathcal{L}(z_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \mathcal{L}(z) \neq 0 \text{ in } B_\varepsilon(z_0)$

Aber $h(z_m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ mit $z_m \to z_0$, $z_m \neq z_0$ $\lightning$

$\Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow h \equiv 0$ in $B_r(z_0) \Rightarrow h \equiv 0$ in U

$) \cdot f(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$

$z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ ist holomorph auf $A_{0,1}(0)$

$z \longmapsto e^{1/z}$ " " "

$\Rightarrow$ f ist holomorph auf $A_{0,1}(0)$

$\Rightarrow$ f lässt sich für alle $z \in A_{0,1}$ als Laurent-Reihe darstellen.

und $$f(z) = \sum_{k_1=0}^{+\infty} z^{k_1} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{z^{-k_2}}{k_2!}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} z^{k_1} \frac{z^{-k_2}}{k_2!} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{n = k_1 - k_2\}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{1}{(k_1-n)!} \mathbb{1}_{\{k_2 = k_1 - n\}} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 = \max(0,n)}^{+\infty} \frac{1}{(k_1-n)!} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=n}^{+\infty} \frac{1}{(k_1-n)!} \right) z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{1}{(k_1-n)!} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{1}{k_1!} \right)}_{=e} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{1}{(k_1+n)!} \right) z^{-n}$$

$$= e \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{1}{(k_1+n)!} \right) z^{-n}$$

$$\cdot\ f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{1/z} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right)^2 \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z^{-l}}{l!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k_1=0}^{+\infty} z^{k_1} \sum_{k_2=0}^{+\infty} z^{k_2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z^{-l}}{l!}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} z^k z^{m-k} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z^{-l}}{l!}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) z^m}_{= 1 + 2z + 3z^2 + \dots} \underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{z^{-l}}{l!}}_{= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_{-1}}{z} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!}\right) \frac{1}{z} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}\right) \frac{1}{z} = \frac{e}{z}$$

3) (i) $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ikx}$

Wir merken, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ik't}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} \gamma_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-k')t}\, dt$$

$$= \gamma_{k'}.$$

Falls f reellwertige Funktion, dann

$$\overline{\gamma_{k'}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)\, e^{-ik't}\, dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{ik't}\, dt$$

$$= \gamma_{-k'}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=-N}^{-1} \gamma_k e^{ikx} + \gamma_0 + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \gamma_{-k} e^{-ikx} + \gamma_0 + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\overline{\gamma_k e^{ikx}} + \gamma_k e^{ikx}\right)}_{\in \mathbb{R}} + \gamma_0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 \in \mathbb{R} \\ \text{und } \gamma_{-k} = \overline{\gamma_k} \end{cases}$$

- Falls $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ und $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}$, dann sieht man mit (1), dass f eine reellwertige Funktion ist

(ii) Wir haben gesehen, dass

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

- Falls f gerade

(change of variable)

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-t)\, e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(t)\, e^{ikt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{0} f(t)\, e^{ikt}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Periodizität)}}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt}\, dt$$

$$= \gamma_{-k}$$

und falls $\gamma_k = +\gamma_{-k} \Rightarrow f(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cos(kx)$ ist gerade.

- Falls f ungerade, man sieht leicht, dass

$$\gamma_k = -\gamma_{-k} \quad \text{(wie oben)} \quad (\text{und} \Rightarrow \gamma_0 = 0)$$

Und falls $\gamma_k = -\gamma_{-k}$ $\Rightarrow f(x) = \cancel{\gamma_0} + 2\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \sin(kx)$ ist ungerade

$\gamma_0 = 0$