

# Übungen zu Physik V: Kerne und Teilchen (4)

Abgabetermin: bis 12.11.2024, 10:00 Uhr

## Aufgabe 1: Radiocarbonmethode

[LA: komplette Aufgabe] (6 Punkte)

Das radioaktive Isotop  $^{14}\text{C}$  wird durch Höhenstrahlung über die Reaktion  $^{14}\text{N} + n \rightarrow ^{14}\text{C} + p$  in der Atmosphäre ständig nachgebildet, wodurch sich in der Atmosphäre und allen organischen Stoffen ein näherungsweise konstantes Isotopenverhältnis von  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1,5 \cdot 10^{-12}$  bildet, solange ein Austausch mit der Atmosphäre stattfindet.

1. Vergleichen Sie die Aktivität von 50 mg Kohlenstoff aus frisch geschlagenem Holz mit einem Stück Holz das 2000 a alt ist. Wie ist das Verhältnis  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  nach 2000 a? (3 Punkte)
2. Die Untersuchung einer Probe des Turiner Grabtuchs ergab ein  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ -Verhältnis von  $(1,373 \pm 0,005) \cdot 10^{-12}$ . Berechnen Sie das Alter der Probe, und berücksichtigen Sie dabei den angegebenen Fehler. (3 Punkte)

Hinweis:  $^{14}\text{C}$  hat eine Halbwertszeit von  $T_{1/2} = 5730$  a.

## Aufgabe 2: Sequentielle Kernzerfälle

(8 Punkte)

Das radioaktive Isotop  $^{210}_{83}\text{Bi}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $T_{1/2}^{\text{Bi}} = 5,013$  d durch  $\beta^-$ -Zerfall in  $^{210}_{84}\text{Po}$ . Auch  $^{210}_{84}\text{Po}$  ist radioaktiv und zerfällt durch Emission eines  $\alpha$ -Teilchens mit einer Halbwertszeit von  $T_{1/2}^{\text{Po}} = 128,376$  d in das stabile  $^{206}_{82}\text{Pb}$ .

1. Betrachten Sie eine Probe, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  ausschließlich  $^{210}_{83}\text{Bi}$  enthält. Stellen Sie die Differentialgleichungen für die Anzahl der Kerne  $N_{\text{Bi}}(t)$ ,  $N_{\text{Po}}(t)$  und  $N_{\text{Pb}}(t)$  auf, und lösen Sie diese. (4 Punkte)
2. Nach welcher Zeit ist die  $\alpha$ -Zerfallsrate maximal? (1 Punkt)
3. Tragen Sie die Anzahl der Kerne  $N_{\text{Bi}}(t)$ ,  $N_{\text{Po}}(t)$  und  $N_{\text{Pb}}(t)$ , sowie die Aktivitäten der beiden radioaktiven Isotope  $A_{\text{Bi}}(t)$  und  $A_{\text{Po}}(t)$  als Funktion der Zeit auf. (1 Punkt)
4. Wie ändert sich der Plot, wenn das Verhältnis der Halbwertszeiten anders ist als im vorherigen Beispiel? Betrachten Sie hierzu den sequentiellen Zerfall  $A \rightarrow B \rightarrow C$  mit folgenden Verhältnissen der Halbwertszeiten:

a)  $\frac{T_{1/2}^A}{T_{1/2}^B} = \frac{T_{1/2}^{\text{Po}}}{T_{1/2}^{\text{Bi}}}$       b)  $\frac{T_{1/2}^A}{T_{1/2}^B} \gg 1$       c)  $\frac{T_{1/2}^A}{T_{1/2}^B} \ll 1$  (2 Punkte)

**Aufgabe 3: Parität****[LA: nur Teilaufgaben 1–4&7] (7 Punkte)**

Wie verhalten sich die folgenden Größen unter Raumspiegelungen?

1. Ortsvektor  $\vec{r}$  (1 Punkt)
2. Impuls  $\vec{p}$  (1 Punkt)
3. Drehimpuls  $\vec{L}$  (1 Punkt)
4. Spin  $\vec{S}$  (1 Punkt)
5. Elektrisches Feld  $\vec{E}$  (1 Punkt)
6. Magnetfeld  $\vec{B}$  (1 Punkt)
7. Helizität  $h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{S}| |\vec{p}|}$  (1 Punkt)

**Aufgabe 4: Wiederholung zu Drehimpulsen****[LA: nur Teilaufgaben 1&2] (6 Punkte)**

Für ein Teilchen mit Spin  $J$  und Parität  $P$  werden die Quantenzahlen typischerweise in der Form  $J^P$  angegeben.

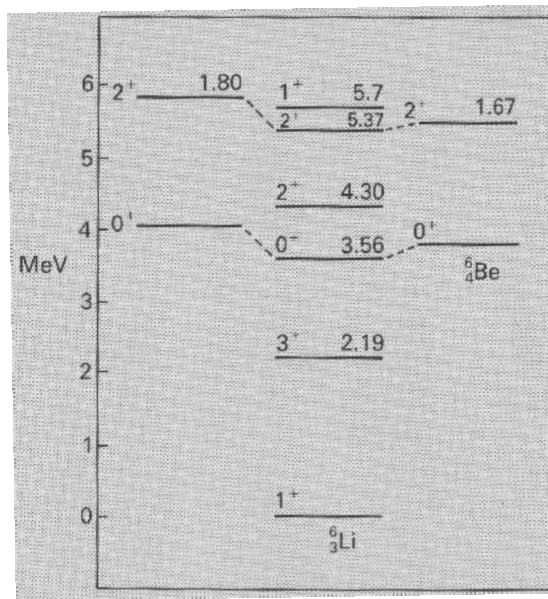
Bestimmen Sie für folgende Systeme aus zwei Teilchen mit  $J_1^{P_1}$  und  $J_2^{P_2}$  und relativem Bahndrehimpuls  $L$  die möglichen Gesamtdrehimpulse und Paritäten  $J^P$ :

1.  $J_1^{P_1} = \frac{3}{2}^+$ ,  $J_2^{P_2} = \frac{1}{2}^-$ , mit  $L = 0$  (2 Punkte)
2.  $J_1^{P_1} = \frac{1}{2}^+$ ,  $J_2^{P_2} = \frac{1}{2}^+$ , mit  $L = 1$  (2 Punkte)
3.  $J_1^{P_1} = 1^+$ ,  $J_2^{P_2} = 0^+$ , mit  $L = 2$  (2 Punkte)

**Aufgabe 5: Das Deuteron****[LA: nur Teilaufgaben 1&3] (4 Punkte)**

In der starken Wechselwirkung gilt die Isospinsymmetrie, d.h. die starke Wechselwirkung unterscheidet nicht zwischen Proton und Neutron (Ladungsunabhängigkeit der Kernkraft). Die Kopplung zweier Isospins erfolgt nach dem gleichen Formalismus wie die Kopplung von Drehimpulsen/Spins.

1. Welche Isospins  $I, I_3$  kann ein  $|nn\rangle$ -Zustand, welche ein  $|pp\rangle$ -Zustand und welche ein  $|pn\rangle$ -Zustand annehmen? (1 Punkt)
2. Nach dem Pauliprinzip muss die Wellenfunktion ununterscheidbarer Fermionen antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Fermionen sein. Erläutern Sie, was man daraus für die Isospinwellenfunktion des Deuterons schlussfolgern kann.  
Hinweis: Betrachten Sie das Deuteron als nicht angeregten Kern mit Spin  $S = 1$ . (2 Punkte)
3. Ist das Deuteron besonders stark oder besonders schwach gebunden? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)



Die im Bild gezeigten Energieniveaus sind auf den Grundzustand des Lithiums bezogen (Masse des  ${}^6\text{Li}$ -Grundzustandes entspricht  $E = 0$ ). Links sind die Energieniveaus des Spiegelkerns zu  ${}^6\text{Be}$  aufgetragen.

1. Wie heißt der Spiegelkern zu  ${}^6\text{Be}$ ? (1 Punkt)
2. Wie erklären Sie sich die in  ${}^6\text{Li}$  im Vergleich zu den beiden anderen Kernen auftretenden Zustände? (1 Punkt)
3. Warum liegen die in allen Kernen auftretenden Energieniveaus mit gleicher Quantenzahl nicht auf gleichem Energieniveau? (1 Punkt)
4. Bei den in der Vorlesung vorgestellten Kernen  ${}^{14}\text{C}$ ,  ${}^{14}\text{N}$  und  ${}^{14}\text{O}$  liegen die Niveaus mit gleicher Quantenzahl am tiefsten beim Kern mit dem kleinstem  $Z$ . Wie erklären Sie diesen Unterschied zu den hier gezeigten Kernen? (2 Punkte)
5. Die atomare Massendifferenz der beiden Spiegelkern-Isobare  ${}^{14}\text{C}$  und  ${}^{14}\text{O}$  beträgt

$$\Delta M = M({}^{14}\text{O}) - M({}^{14}\text{C}) = 4,99 \text{ MeV}/c^2.$$

Nehmen Sie an, dass sich die Bindungsenergie von  ${}^{14}\text{C}$  und  ${}^{14}\text{O}$  nur durch die elektrostatische Energie  $E_C$  der Protonen unterscheidet. Diese beträgt für homogen in einem sphärischen Kern verteilte Protonen

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z(Z-1)}{R} \quad \text{mit } R = r_0 \cdot A^{1/3}.$$

Berechnen Sie den Radius  $R$  der Spiegelkerne, sowie den Wert von  $r_0$ . (4 Punkte)