Vorlesung 17 – 13.12.2023

- Lösen von partiellen Differentialgleichungen: Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Kreis

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x \partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \\ u \quad 2\pi\text{-periodisch in } x \end{cases}$$

  ist gegeben durch
  $u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} \hat{u^0}_k e^{ikx} = \int_0^{2\pi} H(t,x,y) u_0(y)\, dy$, mit
  $H(t,x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-y)}$ der Wärmeleitungskern auf dem Kreis.

- Fourier-Transformation: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}f = \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ definiert als
  $\mathcal{F}f(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx$ und die inverse Fourier-Transformation als $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} f(k)\, dk$.
  Hier ist $k \in \mathbb{R}^n$ die Frequenzvariable oder Fouriervariable.