Überlagerungen von Schwingungen:

z.B. gekoppelte Pendel

Es gilt: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

mit

$x_i(t) = a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Spezialfälle: $\omega_1 = \omega_2$: $a_1 = a_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$: $x(t) = 2a\cos(\omega t + \varphi)$; $\omega = \omega_1 = \omega_2$; $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$

$a_1 = a_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$: $x(t) = a\sqrt{2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,\cos(\omega t + \varphi)$; $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

$\omega_1 \neq \omega_2$: $a_1 = a_2 = a$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$x(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

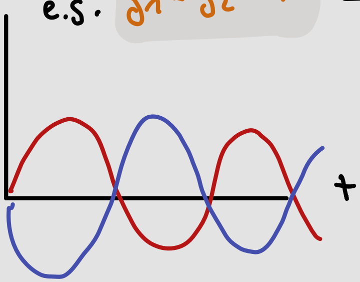
Keine harmon. Schwingung

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$: Schwebung

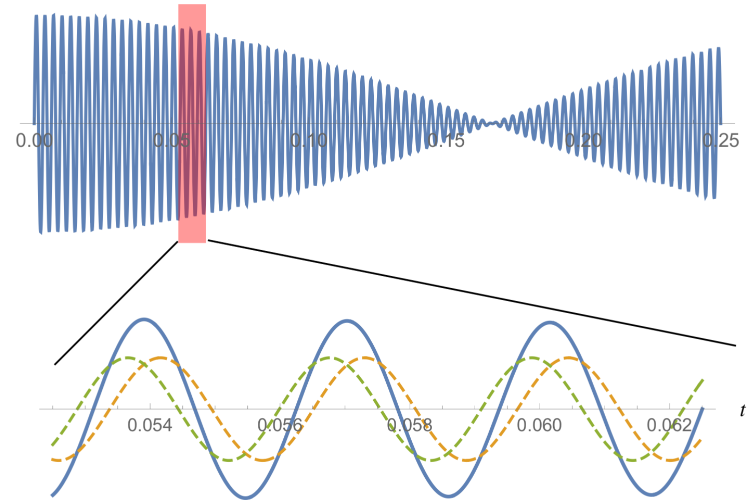
Amplitude $\sim \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$

Approx. harmon. Schwingung mit $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

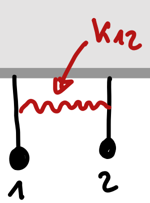
z.B. $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ → Auslöschung ($\sqrt{2 + 2\cdot\cos(\pi)} = 0$)



Vorlesung



DGL gekoppeltes Pendel:



$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k_{12}}{m}(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k_{12}}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

Lösung durch Substitution:

$\xi_+ = x_1 + x_2$ $\quad$ $\xi_- = x_1 - x_2$ $\Rightarrow$ $\xi_+ = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ mit $\omega_1 = \omega_0$

$\xi_- = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ mit $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k_{12}}{m}}$

$$\rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}(\xi_+ + \xi_-) = A\cos\underbrace{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{Schwebung wenn } 2k_{12}/m \ll \omega_0}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

2D Überlagerungen & Lissajous-Fig.

$x(t) = x_0\cos(\omega_1 t)$

$y(t) = y_0\cos(\omega_2 t + \varphi)$

$\omega_1 = \omega_2$	Kreis ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) Ellipse	$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}$ keine geschl. Kurve gesamtes
$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$	geschlossene Kurve	