

Einheiten:

SI - System:

m, kg, s

+ mol, Kelvin, Ampere, Candela

CSS

: cm, g, s  
SI : 100      SI : 1000

+ andere Systeme

Messen = Vergleichen mit Einheiten

Sollten reproduzierbar, genau, "einfach" zu realisieren

Alle Definitionen oft nicht "zeitstabil"

↳ Idee: Verknüpfung mit Naturkonstanten oder physikal. Systemen

Definition des Messes  $\Rightarrow$  fikt. Geduldigkeits

# Vorlesung 3

1 meter = Strecke die Licht im Vakuum in

$1/299\ 792\ 458$  s durchläuft

$\rightarrow$  Zeiten exakt messbar als Längen

$\rightarrow c = 299\ 792\ 458 \frac{m}{s}$   
 $\hat{c}_{\text{exakt}}$

Einheiten: 1 AE, LS, Parsec

astroph. Einheit:  $1.5 \cdot 10^{11}$  m  
(mittlere Distanz Erde-Sonne)

$$\frac{1 \text{ AE}}{1 \text{ Bogensek.}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ AE}$$
$$\approx 3.76 \text{ LS}$$

Zeitmauer  $\rightarrow$  Zählen per. Prozesse mit Frequenz  $\nu$   $[v] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$

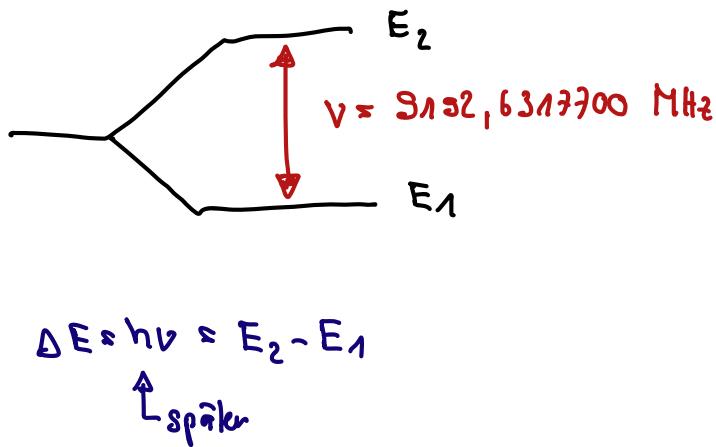
z.B. Schwingdauer eines Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\rightarrow$  Genauigkeit  $\approx 10^{-6}$   
aller Ortsabt. von g

## Definition Zeitnormale

$1_s = 9'132'631'770$  - Feste Schwingdauer  
von Cs-133-Atomen



## Merung langer Zeiten & rad. Zerfälle:

$$t=0 \quad N_0 \text{ Kerne}$$

$$t = T_{1/2} \quad \frac{1}{2} N_0$$

$$t = 2 \cdot T_{1/2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 N_0$$

$$t = 3 \cdot T_{1/2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 N_0$$

⋮

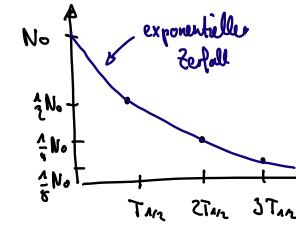
sog. Halbwertszeit  
 $T_{1/2}$   
(def. !)

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \quad \frac{1}{2} = e^{\ln \frac{1}{2}} = e^{-\ln 2} \\ &= N_0 \cdot e^{-\ln 2 / T_{1/2}} \\ &= N_0 \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \text{ Zerfallskonstante}$$

$[\lambda] = \text{s}^{-1}$



# Vorlesung 4

Definition Massennormale: Si-Kristallkugel  
(Gitterabstand, Spurzeit usw.)

Sele Näherung:  $1 \text{ kg} \approx 1 \text{ dm}^3$  Wasser bei  $4^\circ\text{C}$   
(Mw.  $-0.025 \text{ J}$ )

Atomare Masseeinheit:

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \text{ m}_{^{12}\text{C}} \approx 1.66056 \dots \times 10^{-29} \text{ kg}$$

Stoffmenge: 1 mol = Stoffmenge eines Systems, das aus elementaren Teilen wie  $12 \text{ g } ^{12}\text{C}$  besteht

Anzahl

$$N = n \cdot N_A \quad \text{Avogadro-Zahl: } N_A = 6.02249 \dots \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$\uparrow$  Stoffmenge [n] = mol  $1 \text{ mol} = 6.022 \dots \cdot 10^{23}$  Teilchen

E.B.: 1 mol  $^{12}\text{C} \approx 16 \text{ g}$

$^{14}\text{C}$  - Methode zum Datieren org. Materialien  
↑ instabile Kohlenstoff Isotope ( $T_{1/2} = 5700 \text{ a}$ )  
Entsteht in der Atmosphäre via



⇒ bindet sich zu  $\text{CO}_2$ , Konzentration konstant

⇒ lebende Organismen nehmen  $\text{CO}_2$  auf

⇒ führt zu einem Stoff-geo.  
in leb. Organismen  
( $^{14}\text{C}$  zerfällt aber nicht erneut)

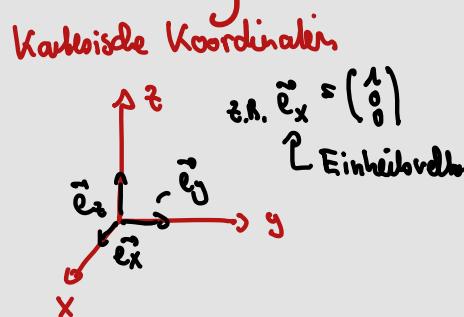
⇒ Nach dem Tod findet dieser Austausch  
nicht mehr statt →  $^{14}\text{C}$  Konzentration nimmt  
ab  
↳ ermöglicht Altersbestimmung

## Massenpunkt: (5P)

→ idealisierte Annahme  
(keine Ausdehnung, Reduktion auf Bewegung des Schwerpunkts, -)

Ortsvektor:  $\vec{r}$  beschreibt Ort eines MP zu Zeit  $t$ :  $\vec{r}(t)$   
bzgl. Koordinatensystems

$$\vec{r}(t) = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$$



## Schnelligkeit & Beschleunigung:



$$\text{mittl. Geschw.: } \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{(Fliehvektor) Geschw.: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$$

## Weitere Systeme:

### Zylinderkoordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

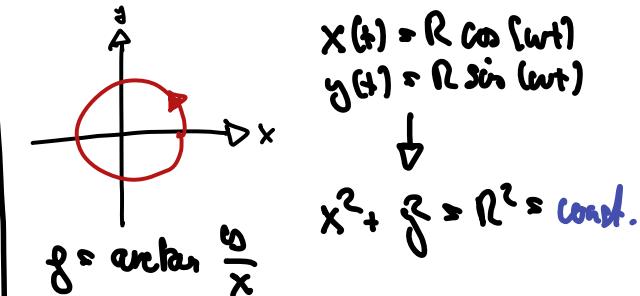
### Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{r} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

## Bahnkurve:

Abbildung von  $\vec{r}(t)$  im Ortsraum

z.B. Kreisbewegung



$$\text{Kreisfrequenz } \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

# Vorlesung 5

Analog:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \ddot{\vec{r}} = \vec{r}'' \rightarrow \text{Differentiellen Zusammenhang!} \end{aligned}$$

für  $\ddot{a}(t) = \text{const.}$  (z.B. Erdbesch.  $\vec{g}$ )

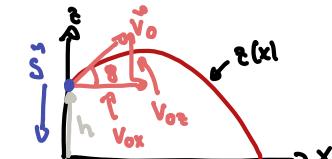
$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

## Schräger Wurf

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + h \end{aligned}$$

$$\text{Ersetze } t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\Rightarrow z(x) = -\frac{1}{2} g \int \frac{1}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + h$$



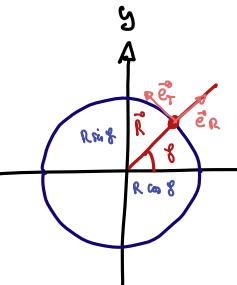
$$\begin{aligned} v_{0x} &= \cos \theta v_0 \\ v_{0y} &= \sin \theta v_0 \end{aligned}$$

Wurfpunkt!

## Kreisbewegung:

gleichförmige Bewegung  $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$

$|\vec{v}| = \text{const.}$  aber  $\vec{v} \neq \text{const.}$   
→ Beschleunigung



Definiere  $w := \frac{d\varphi}{dt}$  Winkelgeschw.  
(o. Kreisfrequenz)  $[w] = \frac{1}{s}$

⇒ gleichförm. Kreisbewegung gilt  
 $\varphi(t) = w \cdot t$

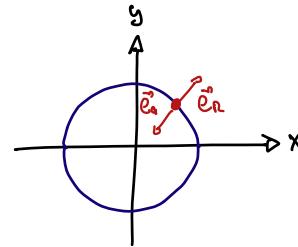
$$\text{Umlaufzeit } T = \frac{2\pi}{w} \quad \text{Umflofrequenz } v = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

( $\varphi$  übersteigt  $2\pi$ )

in x-y-Ebene:

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -wR \sin \omega t \\ wR \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = wR \vec{e}_T\end{aligned}$$

$\vec{v} \perp \vec{R}$   
 $|\vec{v}| = v = wR = \frac{2\pi R}{T}$



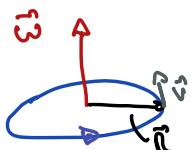
$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^2 R \cos(\omega t) \\ -w^2 R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -w^2 R \vec{e}_R = w^2 R \vec{e}_a \\ &= \frac{v^2}{R} \vec{e}_a \quad (\text{Beschleunigung zeigt zum Zentrum})\end{aligned}$$

Bewegung in x-y-Ebene:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ wR \cos \varphi \end{pmatrix} = v \vec{e}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = -w^2 \vec{R} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_a$$

Verallgemeinerung für led. Kreisbew.



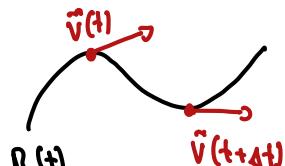
Winkelgeschw. als Vektor

$$\vec{\omega} \perp \vec{R} \quad \text{und} \quad \vec{\omega} \perp \vec{v}$$

Wählen  $\vec{\omega}$  so, dass  
 $\vec{R}, \vec{v}, \vec{\omega}$  Rechtssystem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (= -\vec{R} \times \vec{\omega})$$

Allgem. krümmende Bewegung



$\vec{v}$  immer tangential zu  
Bahnkurve  $\vec{R}$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v \vec{e}_T \\ \hookrightarrow \vec{a} &= \vec{v} = \dot{v} \vec{e}_T + v \vec{e}_T \\ &\text{Änderung} \quad \text{Änderung} \\ &\text{Schnig} v \quad \text{Richtig} \vec{v}\end{aligned}$$

$\vec{a}_N = 0$ : geradlin. Bewegung  
 $\vec{a}_T = 0$ :  $|v| = \text{const.} \Rightarrow$  Kreisbew.

allg. Bewegung in x-y-Ebene

$$\vec{e}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\approx 1} \quad \vec{e}_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\approx 1}$$

$$\hookrightarrow \vec{e}_T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \vec{e}_N$$

?

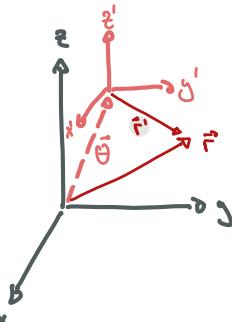
Idee: lokale Approximation  
durch Kreisbogen

## Galilei - Transformation:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\tilde{v}} \cdot t \quad (t' = t, \text{ Uhren gehen gleich})$$

Schnell

Schnell.  $\vec{\tilde{v}} = \text{const}$



Längen:  $\Delta r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\Delta r' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{\tilde{v}} \cdot t - \vec{r}_1 + \vec{\tilde{v}} \cdot t \\ = \Delta r$$

$\rightarrow S\text{-invariant}$

$$\text{Geschw.: } \vec{v}' = \vec{r}' = \frac{d}{dt'} (\vec{r} - \vec{\tilde{v}} \cdot t) = \vec{v} - \vec{\tilde{v}}$$

$\rightarrow \text{nicht } S\text{-invariant}$

denn  $\Delta \vec{v}' = \Delta \vec{v}$   $S\text{-invariant}$

$$\text{Beschleunig.: } \vec{a}' = \vec{v}' = \vec{v} - \vec{\tilde{v}} \times \vec{\tilde{v}} \quad (\vec{\tilde{v}} = \text{const}) \quad \rightarrow S\text{-invariant}$$

Grundgesetze der klassischen Physik sind  $S\text{-invariant} \rightarrow$  es treten keine Orte oder abs. Geschwindigkeiten auf.

## Dynamik

Kraft einwirkung als Ursache von Bewegungsänderung

$\hookrightarrow$  3 Newton'schen Gesetze (NG): TS, AS, RS

### 1.NG Trägheitsgesetz (TG)

Wenn keine äußeren Kräfte auf einen Körper wirken, dann

- \* bleibt er im Zustand der Ruhe, wenn er vorher in Ruhe war
- \*  $\rightarrow$   $\rightarrow$   $\rightarrow$  gleichförmige Bewegung, wenn er vorher in Bew. war

"Ruhe" nur Spezialfall von  $\vec{v} = 0$       TG ist  $S\text{-invariant}$

$\hookrightarrow$  Problem Bezugssystem: Kein System ist wirklich in Ruhe

Definiere Inertial system ("Bezugssystem, das rel. zu den Fixsternen ruht")

$\rightarrow$  existiert nur als Approximation

Inertialsystem := System in dem das TG gilt

# Vorlesung 7

## 2.NG Aktionsgesetz (AS)

Definiere Kraft durch Masse  $\times$  Beschleunigung  
Beschleunig., die Körper erfährt, ist

- \* proportional zur Kraft, die auf ihm wirkt
- \* umgekehrt proportional zu seiner Masse

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad \rightarrow \vec{F} = m \vec{a} \quad [F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$$

Kraft ist vektorielle Größe:

mehrere angreifende Kräfte addieren sich

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_i$$

↑ gesamtkraft

## 3.NG Reaktionsgesetz (RS)

"actio = reactio"

Übt ein Körper auf ein. Gegenk. eine Kraft  $\vec{F}_{12}$  aus,  
so übt dieser ebenfalls eine Kraft  $\vec{F}_{21}$  auf den ersten aus mit:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

## Der Impuls:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

(engl. momentum)

Verallgem. NS

$$1. \text{ NS} \quad \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

$$2. \text{ NS} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \dot{\vec{p}}$$

$$3. \text{ NS} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$$

Gesamtimpuls ist erhalten:  $\sum \vec{p} = \sum \vec{p}' + \text{-n zu Zeit } t$   
 Alle Impulse zur Zeit  $t$

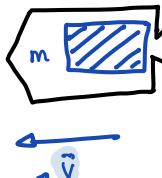
## Systeme mit $m \neq 0$ :

$$m = \frac{dm}{dt} < 0 \rightarrow \text{Rakete}$$

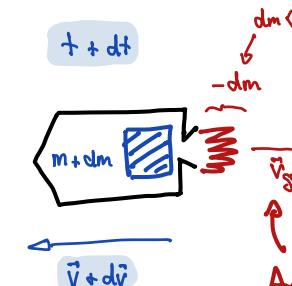
$> 0 \rightarrow \text{Flugzeug das beschleunigt wird}$   
 rel. Teilchen ( $v \approx c$ )

### Raketengleichung:

Zeitpunkt  $t$



$t + dt$



Geogr. der Rakete rel. zur Erde

$dm < 0$

$-dm$

$\vec{v}_{gas}$

$\vec{v}$

$\vec{v} + d\vec{v}$

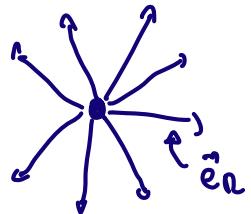
$\vec{v}_gas$

$\vec{v}$

Kraftfelder  $\hat{f}$   $\hat{f} \in \text{Ortsabhängige Kraft}$

$$\hat{r} \mapsto \hat{f}(\hat{r}) \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Abbildung}$$

Beispiel Zentralkraft



$$\hat{f}(\hat{r}) = p(r) \cdot \hat{e}_r$$

Kugelsymmetrie

z.B. Gravitationskraft  $\hat{f}(\hat{r}) = -\int \frac{m \cdot M_E}{r^2} \hat{e}_r$

Masse Erde  
Masse  
Abstand

Erhaltungsgrößen der Mechanik

Energie, Impuls, Drehimpuls

MP legt in Kraftfeld  $\hat{f}$  Wegstück  $d\hat{r}$  zurück

$$\hat{f}(\hat{r}) \cdot d\hat{r} \approx |\hat{f}| |d\hat{r}| \cos \alpha := dW \text{ Arbeit}$$

$$d\hat{r} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \hat{f}(\hat{r}) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \Rightarrow \hat{f} \cdot d\hat{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Gesamtarbeit:



$$\int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} \approx \int dW = W \quad [W] = \text{Nm}$$

$$\int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left( f_x \frac{dx}{dt} dt + f_y \frac{dy}{dt} dt + f_z \frac{dz}{dt} dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \hat{v} dt$$

# Vorlesung 9

Vorteile der Arbeit:

$W > 0$ : Bewegung in Richtung von  $\hat{f}$

$W < 0$ :  $\rightarrow$  entgegen  $\hat{f}$

Wenn  $\hat{f} \perp d\hat{r} \Rightarrow W = 0$   
 $\hat{f} \cdot d\hat{r} = 0$

Lösung:

$p = \frac{dw}{dt} := \text{Arbeit pro Zeit}$

Gerontarkeit:  $W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dw}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} p dt \Rightarrow \vec{p} = \hat{f} \cdot \hat{v}$

$$W = \int_A^B \hat{f} \cdot d\hat{r} = \int_{t_1}^{t_2} \hat{f} \cdot \hat{v} dt$$

Konservative Kraftfelder:

Wenn Arbeit nicht vom gewählten Weg abhängt  
 $\hat{f}$  konservativ



$$\int \hat{f} \cdot d\hat{r} \approx 0$$

Integral über bel. geschlossenen Weg

## Vektoranalysis und kons. Kraftfelder:

$$\vec{f} \text{ konservativ} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0} = \text{rot } \vec{f}$$

$$\text{"Nabla-Operator"} \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

↑ partielle Ableitung

$$\text{rot } \vec{f} = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Wichtig:  $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \vec{f} = 0$

Kons. Kraftfelder sind "Wirbelfrei"

## Potentielle Energie

$\vec{f}$  konservativ  $\Rightarrow$  gel. Arbeit unabhängig vom Weg zw. zwei Orten

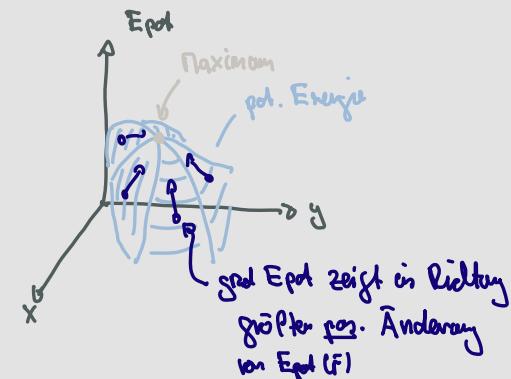
$$(\Rightarrow W = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_A) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_B) ) *$$

Vorzeichen von  $W$ :  $\vec{f} \uparrow b \, d\vec{r}$  dann ist

$\Delta E = E_{\text{pot}}(\vec{r}_B) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_A)$  positiv  
(und  $W$  negativ)

$\Rightarrow$  Nullpunkt von  $E_{\text{pot}}$  willkürlich

# Vorlesung 10



## Kin. Energie

$$\text{Arbeit } W = \int_0^t \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt = \frac{1}{2} m [V^2 - V_0^2] \\ = E_{\text{kin}}(B) - E_{\text{kin}}(A)$$

( $\Rightarrow$  Kombiniert mit \*  $E_{\text{pot}}(A) + E_{\text{kin}}(A) = E_{\text{pot}}(B) + E_{\text{kin}}(B)$ )  
 $\Rightarrow E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  erhalten! Energiesatz d. Mechanik

Potenziale: Kraft  $\propto m$  oder  $q$

$\Rightarrow$  Potenzial = pot. Energie pw Prolemme

$\Rightarrow$  Eigenschaft der Masse, die das Feld erzeugt

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Abbildung } \vec{f} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\left( \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right)$$

$\Rightarrow$  Kraftfeld = zeigt entgegen den Gradienten der pot. Energie

## Schwerpunkt & Stoße im SP-System:

$$\text{Definiere } \vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{R}) = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Schwerpunkt (Center-of-Mass)

Setzrule z.B. 2 Kp in ihrem Gravitationsfeld



$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1^x \quad \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a}_2^x \Rightarrow \vec{a}_2^x - \vec{a}_1^x = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{v}_{12}$$

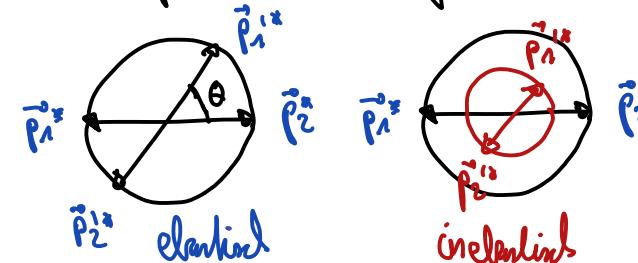
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ mit } \vec{F}_{12} = \mu \cdot \vec{v}_{12}$$

$\frac{1}{\mu}$  reduzierte Masse

im SP-System

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^* &= \vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i - \vec{v} t \\ \vec{v}_i^* &= \vec{v}_i - \vec{v} \quad \text{gleiche. des SP-Systems} \\ \vec{a}_i^* &= \vec{a}_i \quad \text{gegen Laborsystem}\end{aligned}$$

2-Körper Stoß im SP-System



$\vec{p}^x$  elastisch

$\vec{p}^x$  inelastisch

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = 0 = \vec{p}_1'^x + \vec{p}_2'^x$$

↑  
im SP-System

bei elast. Stößen

# Vorlesung 12

## 1-dim Stoßgesetz

a) elastisch

$$\text{Impulsatz: } m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \quad (1)$$

$$\text{Energiesatz: } m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (2)$$

$$(2) : (1) \Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (3) \Rightarrow (3) \text{ in (1)}$$

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



$$E_{kin}^1 + E_{kin}^2 = E_{kin}^{1'} + E_{kin}^{2'} \quad (\text{König } \frac{1}{2} \text{ Faktor})$$

$$\begin{aligned}v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2\end{aligned}$$

## 2/3 dim Stoßgesetz

- \* 1 (2) unbekannte Stoßwinkel in 2 (3) D
- \* Bei Kugelsymm. Potenzial  $\rightarrow$  1 Stoßwinkel in 3D

Spezialfall:  $v_2 \approx 0 \quad m \approx m_1 \approx m_2$

dann  $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'$

Pythagoras  $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$  (am vi. Energie)

## Schwerpunkt & Stoße im SP-System:

$$\text{Definiere } \vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{R}) = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Schwerpunkt (Center-of-Mass)

Setzrule z.B. 2 Kp in ihrem Gravitationsfeld



$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1^x \quad \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a}_2^x \Rightarrow \vec{a}_2^x - \vec{a}_1^x = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{v}_{12}$$

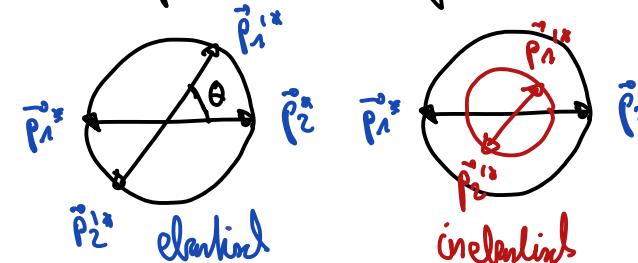
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ mit } \vec{F}_{12} = \mu \cdot \vec{v}_{12}$$

$\frac{1}{\mu}$  reduzierte Masse

im SP-System

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^* &= \vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i - \vec{v} t \\ \vec{v}_i^* &= \vec{v}_i - \vec{v} \quad \text{gleiche. des SP-Systems} \\ \vec{a}_i^* &= \vec{a}_i \quad \text{gegen Laborsystem}\end{aligned}$$

2-Körper Stoß im SP-System



$\vec{p}^x$  elastisch

$\vec{p}^x$  inelastisch

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = 0 = \vec{p}_1'^x + \vec{p}_2'^x$$

↑  
im SP-System

bei elast. Stößen

# Vorlesung 12

## 1-dim Stoßgesetz

a) elastisch

$$\text{Impulsatz: } m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (1)$$

$$\text{Energiesatz: } m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (2)$$

$$(2) : (1) \Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (3) \Rightarrow (3) \text{ in (1)}$$

$$\vec{p}_1^x + \vec{p}_2^x = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



$$E_{kin}^1 + E_{kin}^2 = E_{kin}^{1'} + E_{kin}^{2'} \quad (\text{König } \frac{1}{2} \text{ Faktor})$$

$$\begin{aligned}v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2\end{aligned}$$

## 2/3 dim Stoßgesetz

- \* 1 (2) unbekannte Stoßwinkel in 2 (3) D
- \* Bei Kugelsymm. Potenzial  $\rightarrow$  1 Stoßwinkel in 3D

Spezialfall:  $v_2 \approx 0 \quad m \approx m_1 \approx m_2$

dann  $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'$

Pythagoras  $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$  (am vi. Energie)



## Scheinkräfte & beschleunigte Bezugssysteme:

In beschleunigten Bezugssystemen handeln

**Scheinkräfte**

Ä berl. von  $\vec{B}$  gegen  $B$

im beschleunigten System ( $B'$ ) im Ruhesystem ( $B$ )

$$\ddot{\vec{a}}' = \ddot{\vec{a}} - \vec{A}$$

$$\ddot{\vec{v}}' = \ddot{\vec{v}} - \vec{A} +$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

( $\Rightarrow$  spürt Kraft  $\vec{F}' = -m\vec{A}$ )

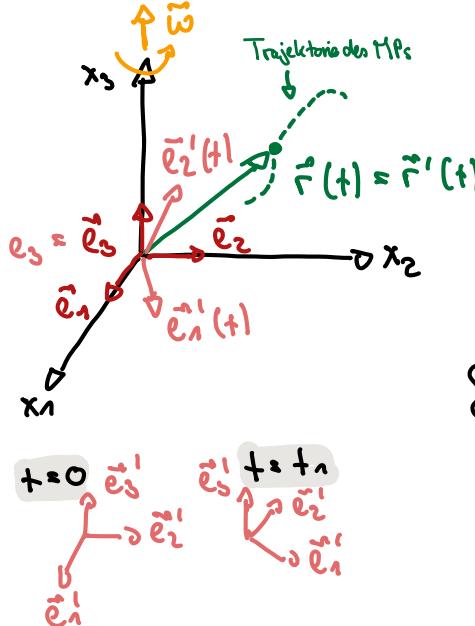
$$\ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{a}}' + \vec{A}$$

$$\ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{v}}' + \vec{A} +$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

$$\vec{F} = +m\vec{A}$$

## gleichförmig rotierendes Bezugssystem:



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' \\ &= \sum x_i(t) \vec{e}_i \\ &= \sum x'_i(t) \vec{e}'_i \end{aligned}$$

Stellung der MPs:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \sum \dot{x}_i(t) \vec{e}_i \\ &= \dot{\vec{r}'} = \underbrace{\sum \dot{x}_i(t) \vec{e}'_i}_{\vec{v}'} + \underbrace{\sum x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i}_{\vec{\omega}} \end{aligned}$$

Beschleunigung der MPs:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{a}} &= \ddot{\vec{r}'} = \sum \ddot{x}_i(t) \vec{e}_i \\ &= \sum \ddot{x}'_i(t) \vec{e}'_i + \sum \dot{x}'_i \vec{e}'_i \\ &\quad + \sum \dot{x}_i \dot{\vec{e}}'_i + \sum x'_i \ddot{\vec{e}}'_i \\ &= \ddot{\vec{a}}' + \text{Scheinkräfte} \end{aligned}$$

# Vorlesung 14

MP rotiert mit dem neuen  
Koordinatensystem

$\vec{r}$  auf einer Kreisbahn mit  $\vec{\omega} = \text{const}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}_r)$$

$$\hookrightarrow \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}_r) = \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{e}'_r) ! (\vec{r} \neq \vec{r}')$$

Umwegung des  $B'$  Systems:

$$\vec{e}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i$$

$$\vec{e}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \quad (\vec{\omega} = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v} = \vec{v}' + \sum x'_i (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i) \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

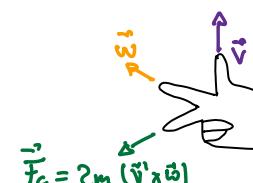
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{a}} &= \ddot{\vec{a}}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \hookrightarrow \ddot{\vec{a}}' &= \ddot{\vec{a}} + 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \end{aligned} \right\}$$

**Corioliskraft:**  $\vec{F}_C = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega})$

**Zentrifugalkraft:**  $\vec{F}_{ZT} = m \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{ZT} = m \omega^2 \vec{r}_\perp = -\vec{r} \text{ Zentripetal}$$

**Richtung von  $\vec{F}_C$ :**  
r. h. Regel



## Erde als rot. Bezugssystem:

Erde kein Inertialsystem  $\rightarrow$  Trägheitskräfte hervorrufen

$$\vec{F}_{zF} = m \vec{\omega}_E \times (\vec{r} \times \vec{\omega}_E)$$

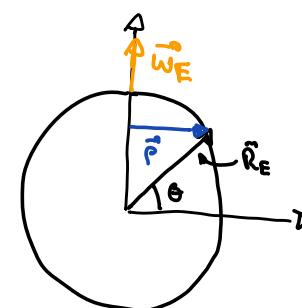
$$\vec{F}_c = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_E)$$

Winkelgeschw. der Erde

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_{\text{Tag}}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

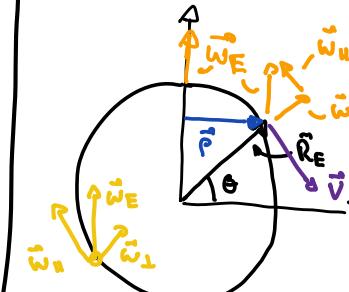
Rotationsgeschw. Äquator / Breitengrad  $\theta$

$$V_E = \omega_E \cdot R_E = 470 \text{ m/s}$$



$$V(\theta) = \omega_E r(\theta) = \omega_E R_E \cos \theta$$

## Horizontale Corioliskräftebeschleunigung:



Horizontal ausger.

$$\vec{F}_c = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_E)$$

$$= 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp) \quad (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp \neq 0)$$

$\vec{\omega}_\parallel$  zeigt immer in N-S Richtung  
wechselt Richtung am Äquator

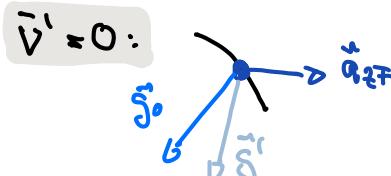
$\vec{F}_c \rightarrow -\vec{F}_c$  bei Übergang von  
Nord-Hemisphäre zu Süd-Hemisphäre

# Vorlesung 15

## Schleunigung auf der Erdoberfläche:

$$\ddot{g}' = \ddot{g}_0 - 2m (\vec{\omega}_E \times \vec{v}') - \vec{\omega}_E \times (\vec{\omega}_E \times \vec{r})$$

Schnellkraft      Corioliskraft      Zentrifugalkraft



Effekt am Äquator:

$$|\ddot{g}' - \ddot{g}_0| = \omega_E^2 R_E \approx 0.35\% g_0$$

$$\vec{v}' \neq 0:$$

### a) Bewegung an der Oberfläche

nur  $\vec{\omega}_\perp$  relevant ( $\vec{v}' \times \vec{\omega}_\parallel = 0$ )

$$\begin{aligned} \text{NH: } \vec{F}_c &= 2m \sin \theta (\vec{v}' \times \vec{\omega}_\perp) \\ \text{SH: } \vec{F}_c &= 2m \sin \theta (\vec{v}' \times (-\vec{\omega}_\perp)) \end{aligned}$$

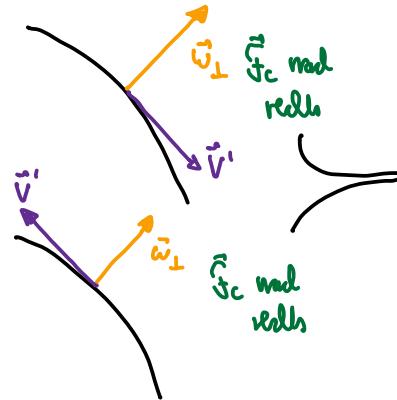
$$\vec{\omega}_\perp = \omega \sin \theta \hat{e}_r$$

$$\begin{array}{ll} \text{NH: } & \begin{array}{l} \text{N} \xrightarrow{\vec{v}'} \vec{F}_c \text{ nach rechts} \\ \text{S} \end{array} \\ \text{SH: } & \begin{array}{l} \text{N} \xleftarrow{\vec{v}'} \vec{F}_c \text{ nach links} \\ \text{S} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{NH: } & \begin{array}{l} \text{N} \xrightarrow{\vec{v}'} \vec{F}_c \text{ nach rechts} \\ \text{S} \end{array} \\ \text{SH: } & \begin{array}{l} \text{N} \xleftarrow{\vec{v}'} \vec{F}_c \text{ nach links} \\ \text{S} \end{array} \end{array}$$

## Foucault-Pendel

Nur horizontale Coriolisbeschleunigung wichtig  
(Auflösung in z klein)



initial Pendellinie  
beginnt sich zu drehen

Am Nord/Südpol:  
 $\omega_{\text{pol}} = \frac{2\pi}{T_{\text{eq}}} = \omega_E$

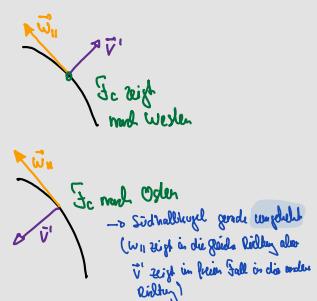
Am Äquator:  $\omega_{\perp} = 0$

(In Born mit  $\theta \approx 80.9^\circ$  (Breitengrad)):

$$\omega_{\text{Born}} = \omega_{\perp} = \omega_E \cdot \sin(\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{Born}}} \approx 51 \text{ h}$$

## b) Schwerkraft $\perp$ zur Erde:

betrachten nur  $F_c$  (Abweichung durch  $F_g$  klein)



## Kepplersche Gesetze:

Folgen alle aus  $\vec{L} = 0$

- ① Planeten auf einer Ebene auf Ellipsenbahnen  
Sonne im Brennpunkt

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \quad \vec{L} \perp \vec{r} \quad \vec{L} \perp \vec{v} \quad \vec{L} +$$



## Gravitation

$$\text{Bahnkurve: } \vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_T \\ \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\dot{r}}{l^2}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \cdot \vec{e}_T \frac{\dot{r}}{l^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2r\dot{r}\dot{\varphi} (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_T) \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + E_{\text{pot}}$$

$$\frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{mit } L = \text{const. für Zentralpotenzial}$$

$E_{\text{pot}}^{\text{eff}}$  da nur Abhängigkeit von  $r$

$$E \gg 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 > E_{\text{pot}}^{\text{eff}}$$

↳ keine stab. Bahn

$$E < 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0 \text{ für } r_1 < r < r_2$$

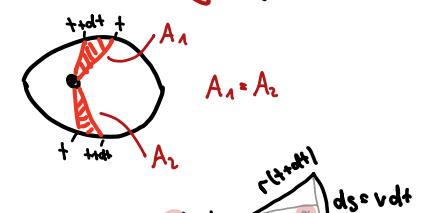
↳ Ellipse

$$E < 0: \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = 0 \rightarrow \text{Kreisbahn (konstant)}$$

# Vorlesung 16

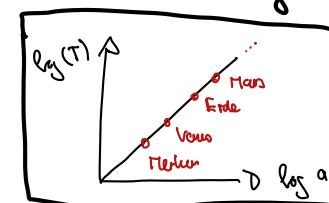
## ② Flächensatz

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$



$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

T: Umlaufzeit  
 $a$ : halbe Halbachse  
 $\delta$



3 KP gültig  $\rightarrow$  Newtongesetz folgt

$$\vec{F}_S = -\vec{F}_{TF} = m \omega^2 \vec{r} = m \frac{(2\pi)^2}{T^2} \vec{r}$$

$$\vec{F}_S = GMm \rho(r) \vec{r} \Rightarrow \rho(r) \sim \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r_s}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_S = -GM \frac{m}{r^2} \vec{e}_r$$

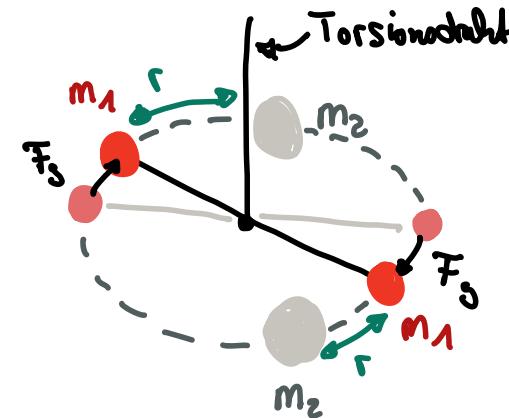
Herleitung über Newtongesetz

# Experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstante: → Bestimmung mittels Drehschwinge

Ausgangsfrage:  $\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{e}_r$

↑  
Gravitationskonstante ( $N \frac{m^2}{kg^2}$ )

↳ Universelle Naturkonstante, muss experimentell bestimmt werden.



Nutze:  $F = m_i \cdot a \approx G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Fließ a →  $G = \frac{r^2 \cdot a}{m_2}$

3. Wechselt Position von  $m_2$   
→ Anziehungs Kraft  
 $F_S + F_T = 2 \cdot F_S$   
→ verdoppelte Kraft

# Vorlesung 17

Verdopplung der Bzgl.:

1. Torsionsfaden entspannt

2. Torsionsfaden übt  $F_T = F_S$  auf

→ Dann gilt:  
(verdoppelte Beschleunigung)

$$G = \frac{r^2 \cdot a}{2m_2}$$

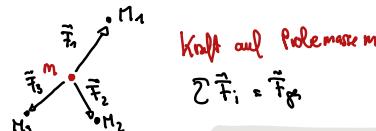
Äquivalenz schwer & träge Masse:

Schwere Masse := verursacht Gravitation  
stellt in  $F_G = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} m_3$

Träge Masse := Widerstand in der Beschleunigung  
stellt in  $F = m \cdot a$

↳ experimentell  $m_g = m_T = m$  (gelenkt auf  $\frac{m_g - m_T}{m_T} < 10^{-15}$ )

Gravitationsfeld ausgedehnten Massenpunkte:



Kraft auf Punktmasse m  
 $\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{G,i}$

für ein Massenelement dM:  $dE_{pot} = -G \frac{m \cdot dM}{r}$

Wir betrachten eine Kugel: Radius R\_E  
Abstand eines Punktes zum Zentrum a  
Massenanteile außerhalb spielen keine Rolle!

Zwei erstaunliche Eigenschaften:

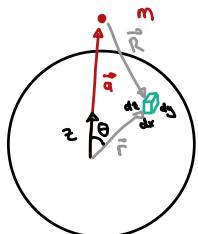
1 Außerhalb der Kugel hängt das Potenzial nur vom Abstand zum Zentrum ab

2 Innerhalb der Kugel nur vom Teil der Masse der näher am Zentrum liegt. Die Massenanteile außerhalb spielen keine Rolle!

## Gravitationsfeld ausgedehnter Körper:

Kugelschale:

$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{dm}{r(\theta)} = -G m \rho \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{R(\theta)}$$



$$R(\theta) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$$

(Kosinussatz)

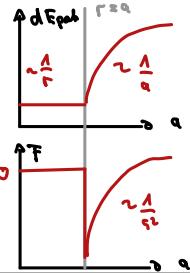
Radius Kugelschale

$a > r$ :

$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{R(\theta)} d\phi = -G m \rho \frac{1}{2\pi r} (|a+r| - |a-r|)$$

$r > a > 0$ :

$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{1}{r}$$



# Vorlesung 18

## Merkwürdiger Körper:

Modell: System von MP's mit fixem  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

↳ Reduktion der Beziehungen gl.

3-Koordinaten des SP

Winkelorientierung (3 Rotationsfreiheit)

$$\text{Mass } M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{Dichte } \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \sum_{i=1}^N \rho_i \Delta V_i$$

$$\text{Volumen } V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i$$

Sphärische  $N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0$ :

$$V = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \int_V dV$$

$$M = \int_V \rho \text{ (konst)} dV = \int_V dm$$

Vollkugel:  $\rightarrow$  Integration über Kugelvolumen

$a > R_0 > r$ :

$$\Pi = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho$$

$$E_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_0} r^2 dr = -G m \rho \frac{4\pi}{3} R_0^3 = -G m \frac{M}{a} \rightarrow F_t = -\frac{d}{da} E_{\text{pot}} = -\frac{mM}{a^2}$$

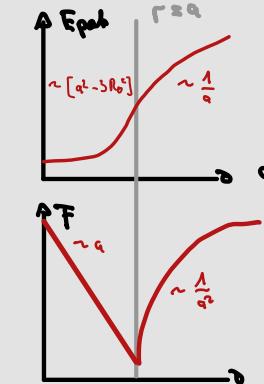
$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{4\pi r^2 dr}{2\pi r} \left( \frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r} \right) = -G m \rho \frac{4\pi r^2 dr}{2a} \frac{1}{a^2 - r^2}$$

$r < a < R_0 \& a < r < R_0$ :

$$E_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{4\pi}{3} \left[ \int_0^a \frac{r^2}{a} dr + \int_a^{R_0} r dr \right] = -G m \rho \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{a^3}{3} + \frac{R_0^3 - a^3}{2} \right]$$

$$dE_{\text{pot}} = -G m \rho \frac{4\pi r^2 dr}{2a} \frac{1}{a^2 - r^2}$$

$$\rightarrow F_t = -\frac{mM}{R_0^3}$$



Volumenintegral: dreidimensional

$$\text{Bsp. Quader: } V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dx dy dz$$

Kugel  $\rightarrow$  Polarkoordinaten

Volumenelement  $dV = dr d\phi d\theta$

$$\rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Achtung: Welle freien Vektorraum den Körper  $\rightarrow$  Zerlegen in einfache Volumen  
Wahl der Koordinaten

## Volumenintegrale:

Volumenelement in rel. Koordinaten  $u, v, w$

$$dx dy dz = J du dw dw$$

$\uparrow$  Jacobi Determinante

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right)$$

$$\text{mit } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

z.B. Polarkoordinaten:  $dV = r^2 \sin \theta dr dg d\theta$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:  $dV = \rho dr dg dz$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

## Schwerpunkt:

$$\text{Vorher mit MP: } \tilde{r}_s = \frac{1}{M} \sum_i^N \tilde{r}_i \rho_i (\tilde{r}_i) \Delta V_i$$

$$\downarrow \begin{array}{l} N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\tilde{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \tilde{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \tilde{r} \rho(\tilde{r}) dV$$

Notation (kein 1D Integral)

homogener Körper  $\rho = \text{const}$

$$\rightarrow \tilde{r}_s = \frac{\rho}{M} \int_V \tilde{r} dm = \frac{1}{V} \int_V \tilde{r} dm$$

Drei Komponenten:

$$x_s = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\tilde{r}) dV \quad y_s = \frac{1}{M} \int_V y \rho(\tilde{r}) dV \quad z_s = \frac{1}{M} \int_V z \rho(\tilde{r}) dV$$

z.B. Hohlkugel:  $x_s = y_s = 0$      $z_s = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\theta r^2 \sin \theta z dr d\theta dz [r^3 \cos \theta \sin \theta] = \frac{3}{8} R$

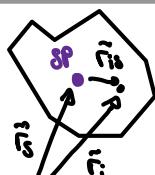
Vollkugel:  $x_s = y_s = z_s = 0$

# Vorlesung 19

## Bewegung st. Körper

Bewegung eines rel. Punkts:

$$\tilde{r}_i = \tilde{r}_s + (\tilde{w} \times \tilde{r}_{is})$$



Aber Achtung:  
 $\tilde{w} = \tilde{w}(t)$

Translation

Rotation um  
Schwerpunkt

## Kräfte & Kräftepaare:

Wichtig zu wissen wo eine Kraft an greift:  $F_i(r_i)$

Kräftepaar  
 $|F_1| = |F_2|$   
 $F_2 \perp F_1$

$F_1, F_2$ : Drehmoment leggen auf SP  
 $D_S = F_{is} \times \tilde{r}_i$

1.  $F_1, F_2$ : Drehmoment leggen auf SP  
 $D_S = F_{is} \times \tilde{r}_i$   
(heutig SP nicht!)

2.  $F_2$ : Beulkrift SP

## Angelpunkt

z.B. Gravitationalkraft  
(greift an jedem Punkt an)

Sesamt drehimpuls:

$$\tilde{D}_S = \int_V (\tilde{r}_{is} \times \tilde{J}) dm = -g \int_V \tilde{r}_{is} dm$$

$$\text{Auf hängt SP = Ursprung: } \tilde{r}_{is} = 0 \Rightarrow \tilde{D}_S = 0$$

$\tilde{J} = \Delta m \cdot \tilde{r}$   
Bestimmen SP durch Lot  
Wenn  $\tilde{D}_S = 0$  dann  $\tilde{r}_{is} \parallel \tilde{J}$

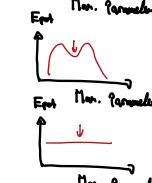
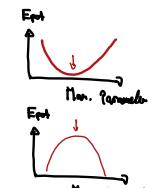
## Sleichgewichtslagen:

stabil  $E_{pot} \approx \min.$

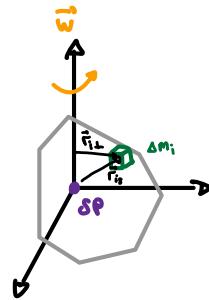
unstabil  $E_{pot} \approx \max.$

metastabil  $E_{pot} \approx \text{lok. min.}$

indifferent  $E_{pot} \approx \text{const.}$



## Trägheitsmoment für Rotationsenergie:



$$\Delta E_{kin,i} = \frac{1}{2} \Delta m; v_{i\perp}^2 = \frac{1}{2} \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}^2$$

Kreisbew.:  $\vec{v}_{i\perp} = \bar{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}$   
 $(v_{i\perp}^2 = \bar{\omega}^2 r_{i\perp}^2)$

Gesamte kin. Energie:

$$E_{tot} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sum_i^N \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}^2 \right) \Delta V_i \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \int_V r_{i\perp}^2 dm = \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 I$$

I: Trägheitsmoment

$$I = \int_V r_{i\perp}^2 \rho dV$$

### Translation      Rotation

$$\begin{array}{l|l} m & I \\ \hline v & w \\ \vec{p} = m\vec{v} & \vec{L} = I\vec{\omega} \\ E = \frac{p^2}{2m} & E = \frac{L^2}{2I} \\ = \frac{1}{2}mv^2 & = \frac{1}{2}I\omega^2 \end{array}$$

## Gesamtdecksimpuls:

Massenelement  $\Delta m_i$ :  $\tilde{L}_i = \vec{r}_{i\perp} \times (\Delta m_i; \vec{v}_{i\perp})$

$$= r_{i\perp}^2 \Delta m_i; \bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \Delta m_i (\vec{r}_{i\perp} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}_{i\perp})) \\ = \Delta m_i (r_{i\perp}^2 \bar{\omega} - \vec{r}_{i\perp} (\vec{r}_{i\perp} \cdot \bar{\omega})) \end{aligned}$$

$$\tilde{L}_{ges} = \int_V r_{i\perp}^2 \bar{\omega} dm = \bar{\omega} \int_V r_{i\perp}^2 dm = \bar{\omega} I$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{L^2}{I^2} \quad \text{und} \quad E_{tot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

## Beispiele:

Hohlerzylinder:

$$\begin{aligned} dV &= r dr d\theta dz \\ I &= \rho \int_V r^2 dr = \rho T_p h \int_{R-d}^R r^2 dr \\ &\approx 2T_p h R^3 d + O(d^4) \\ \Rightarrow I &= M R^2 \end{aligned}$$

Vollzylinder:

$$\begin{aligned} I &= 2T_p h \int_0^R r^2 dr = \frac{\pi}{2} h p R^4 \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi}{2} R^2 \end{aligned}$$

Dünner Stab:

$$\begin{aligned} \text{Drehachse bei } l/2 \text{ in } z\text{-Richt.} \\ l: \text{Länge}, A: \text{Endfläche}, \\ dv = A \cdot dx \\ \int_0^{l/2} A x^2 dx = 2 \int_0^{l/2} A x^2 dx \\ = 2p A \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} p A l^3 \\ \Rightarrow I = \frac{1}{12} M l^2 \end{aligned}$$

Homogene Kugel:  $I = \frac{2}{5} M R^2$       Hohlkugel:  $I = \frac{2}{3} M R^2$

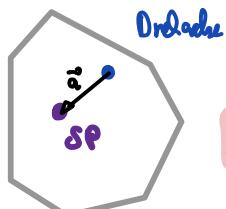
Hinkel:  $I = 2\pi a^2$



# Vorlesung 20

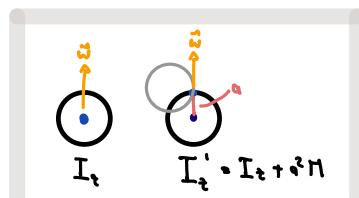
## Satz von Steinier:

Trägheitsmoment bzgl. Achse, die nicht durch SP geht



$$I_z' = I_z + a^2 M$$

Absatz SP zu Ortsachse  
Trägheitsmoment bzgl. SP



## Steinerzsgl. starrer Rotator:

Rotation um raumfeste Achse, bet. Massenelement  $\Delta m$ :

$$\tilde{L}_i = (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i) = \Delta m; r_{i\perp}^2 \bar{\omega}$$

$$\tilde{L}_i = \Delta m_i (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i) = \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_i = \vec{0};$$

Drehmoment

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta m_i r_{i\perp}^2 \frac{dw}{dt} \\ \text{Volumen integriert} \quad \Rightarrow 0 &= I \frac{dw}{dt} + I \frac{d\dot{\omega}}{dt} + I \ddot{\omega} \end{aligned}$$

Wenn nun  $\Omega = \text{const}$

$$g(t) = \frac{0}{2I} t^2 + A t + B$$

Analog diff.gleich wie  
freier Fall

## Rotation um freie Achse:

bisher: Rotation um **freie** Achse  $\rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L}$

neu: Rotation um **freie** Achse  $\rightarrow \vec{\omega} \nparallel \vec{L}$

$\hookrightarrow$  Mit oder ohne ext. Drehmoment  
 $\hookrightarrow$  Kreisel

Allg. Drehimpuls bei starrer Körper:

$$\vec{L} = \underbrace{\int_V r^2 \vec{\omega} dm}_{\parallel \vec{\omega}} - \underbrace{\int_V (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} dm}_{i.A. \nparallel \vec{\omega}}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Betrachte  $L_x$ :

$$L_x = \int_V (r^2 \omega_x - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)) dm$$

$$= \omega_x \underbrace{\int_V (r^2 - x^2) dm}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V xy dm}_{-I_{xy}} \sim \omega_z \underbrace{\int_V xz dm}_{-I_{xz}}$$

$$I_{xx}$$

$$-I_{xy}$$

$$-I_{xz}$$

$$\text{und } L_y = I_{gx} \omega_x + I_{gy} \omega_y + I_{gz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{L} = \underline{I} \vec{\omega}}$$



mit

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor  $\hat{=} \text{ Tensor 2. Stufe}$   
 $\hat{=} \text{ Matrix}$

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ : Trägheitsmomente

$\rightarrow$  Tragen bei, bei Rotation um  $x, y, z$ -Achse

$I_{xy}, I_{xz}, \dots$ : Deviationsmomente

$\rightarrow$  Tragen bei, wenn Körper nicht nur ausdrücklich um  $x$ -Achse dreh. rotiert

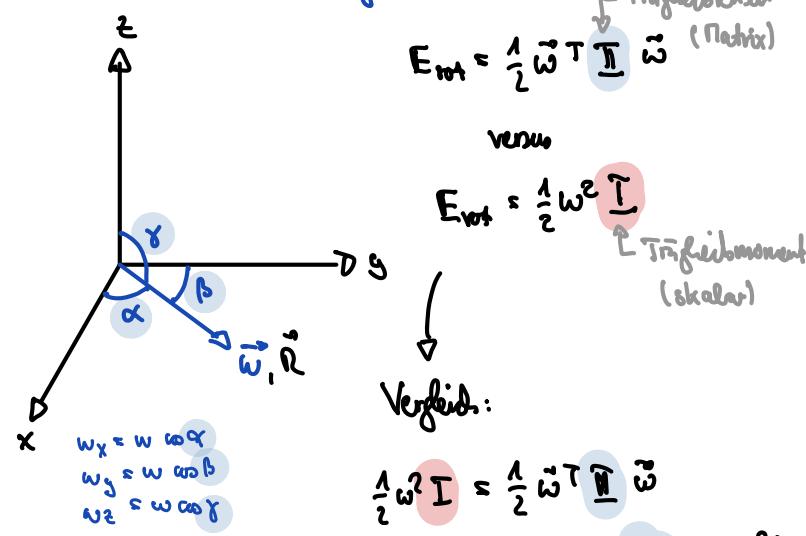
Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int_V (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) dm$$
$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{I} \vec{\omega}$$

$\hookrightarrow$  Alle Elemente tragen zur Rotationsenergie bei!

# Vorlesung 21

## Eulerwinkel & Rotationsenergie



Vergleich:

$$\frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T \tilde{I} \tilde{\omega}$$

$$= \cos^2 \alpha \omega^2 I_{xx} + \cos^2 \beta \omega^2 I_{yy} + \cos^2 \gamma I_{zz}$$

$$+ 2 \cos \alpha \cos \beta \omega^2 I_{xy} + 2 \cos \alpha \cos \gamma \omega^2 I_{xz} + 2 \cos \beta \cos \gamma \omega^2 I_{yz}$$

**Trägheitsellipsoid** wenn  $K = M R_m^4$   
⇒  $R^2 I = k = \text{const.}$   
quad. Gleichung, welche mit  $R^2 I = k = \text{const.}$   
↑ Ellipsoiden darstellt

$$R^2 I = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz}$$

$$+ 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}$$

Führe neue Vektoren

$$\vec{\Omega} \parallel \tilde{\omega} \text{ ein mit: } x = R \cos \alpha \\ y = R \cos \beta \\ z = R \cos \gamma$$

Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse  $\tilde{\omega}$ :

$$I_{\tilde{\omega}} = \frac{k^2}{R^2}$$

Drehelpunkt TE

$I$  klein entlang langgestreckte Achse!

**Hauptträgheitsachsen (HTA)**: Finde neue Koordinatenachsen  $\{a, b, c\}$  entlang der Symmetrie-Achsen

$$I = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

Trägheitsmomente diagonal

Konvention:  $I_a \leq I_b \leq I_c$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c)$$

$$= \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c}$$

↑  
( $L_x = \omega_x I_x$ )

Sind alle HTA unterschiedlich ( $I_a \neq I_b \neq I_c$ ): asymmetrischer Kreisel

Sind mind. 2 HTA identisch: symm. Kreisel

- $I_a < I_b < I_c$ : prolatärer Kreisel
- $I_a > I_b > I_c$ : oblatärer Kreisel
- $I_a = I_b = I_c$ : sphärischer Kreisel (Würfel, Kugel)

Da  $E_{rot} = \frac{L}{2I}$  wollen Systeme

die Ausrichtung so ändern, dass  $I$  minimal wird → Rotation um kleinstes (oder mittleres)  $I$  instabil

Euler'sche Gleichungen:

$$\text{Lagrangesystem: } \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

$$\text{Um HAS: } \frac{d\tilde{\omega}'}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - (\tilde{\omega} \times \tilde{\omega}')$$

$$\hookrightarrow \vec{0} = \frac{d\tilde{\omega}'}{dt} + (\tilde{\omega} \times \tilde{\omega}')$$

$$\begin{aligned} 0_a &= I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_b \omega_c \\ 0_b &= I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c \\ 0_c &= I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_a \omega_b \end{aligned}$$

3 gekopplte DGL

z.B. Kreisfrequenz symm. Kreisel

$$I_a = I_b \neq I_c \quad \& \quad \vec{0} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 0 &= \omega_a + \partial_t \omega_b \\ 0 &= \omega_b - \partial_t \omega_a \\ 0 &= \omega_c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_a &= A \cos \vartheta t \\ \omega_b &= A \sin \vartheta t \\ \omega_c &= C \end{aligned}$$

Lösung:  $\omega_a = A \cos \vartheta t$   
 $\omega_b = A \sin \vartheta t$   
 $\omega_c = C$

# Vorlesung 22

## Periodische Schwingungen:

↳ harmon. Schwingungen, z.B. Federschwingung

$$f = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$



Federkraft (rücktreibend)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$



$\omega_0^2$  mit Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$* \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

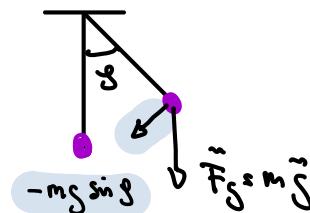
Lösungen:  $x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$   
 $x(t) = B(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A, B Anfangsbedingungen

Wann gilt \*? lineares Kraftges.

## Mathematische & Physikalische Pendel:

### Math. Pendel



$$m \cdot \ddot{\theta} = -m g \sin \theta$$

Gl

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Lsg:  $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

### Physik. Pendel

(Ang. Stab)



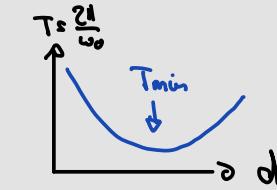
$$Drehmoment \quad \vec{M} = -\vec{d} \times m \vec{g}$$

$$\text{mit } \vec{d} = d \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$D = -dm g \sin \varphi \approx -dm g \varphi$$

$$\text{Und: } D = I_d \ddot{\varphi} = I_d \ddot{\varphi} \leftarrow I_d = I_{sp} + m d^2 \quad (\text{skew})$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m d^2}{I_d} \varphi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{m d^2}{I_d}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \rho^2 d^4 + d^2}{I_d}}$$



# Vorlesung 23

NP-Linie:  $I_d = m l^2$   
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \text{Math. Pendel}$

## Bearbeitung mit komplexen Zahlen:

Periodische Schwingungsl. mit  $z = x + iy$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\text{Ansatz: } z(t) = z_0 e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = i \omega \cdot z_0 e^{i \omega t} \quad \ddot{z} = -\omega^2 \cdot z_0 e^{i \omega t}$$

$$z(t) = z_0 e^{i \omega t} + z_0^* e^{-i \omega t} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ZLösung: } z_0 = \pm i \omega$$

## Anfangsbed. für auswerten & lösen:

$$z(t=0) = x_0 = z_0 + z_0^* \quad (1)$$

$$\dot{z}(t=0) = 0 = i \omega_0 z_0 - i \omega_0 z_0^* \quad (2)$$

$$(2): z_0 = z_0^* \in \mathbb{R}$$

$$(1): x_0 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z(t) \cdot x(t) = \frac{x_0}{2} \underbrace{(e^{i \omega t} + e^{-i \omega t})}_{2 \cos(\omega t)} = x_0 \cos(\omega t)$$

