Vorlesung 19

Volumenintegrale:

Volumenelement in bel. Koordinaten u, v, w

$$dx\,dy\,dz = J\,du\,dv\,dw$$

↑ Jacobi Determinante

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec r}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec r}{\partial v} \times \frac{\partial \vec r}{\partial w} \right)$$

mit $\frac{\partial \vec r}{\partial k} = \left(\frac{\partial x}{\partial k}, \frac{\partial y}{\partial k}, \frac{\partial z}{\partial k} \right)$

z.B. Polarkoordinaten: $dV = r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$

$x = r \sin\theta \cos\varphi$
$y = r \sin\theta \sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

Zylinderkoordinaten: $dV = \rho \, d\rho\, d\varphi\, dz$

$x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho \sin\varphi$
$z = z$

Schwerpunkt:

Vorher mit MP: $\vec r_s = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec r_i \, \rho_i(\vec r_i)\, \Delta V_i$

$N \to \infty$
$\Delta V_i \to 0$

$$\vec r_s = \frac{1}{M} \int_V \vec r\, dm = \frac{1}{M} \int_V \vec r \, \rho(\vec r)\, dV$$

Notation (kein 1D Integral)

homogener Körper $\rho = \text{const}$ → $\vec r_s = \frac{\rho}{M} \int \vec r\, dm = \frac{1}{V} \int \vec r\, dm$

Drei Komponenten:

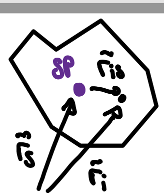
$$x_s = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\vec r)\, dV \quad y_s = \frac{1}{M} \int y \rho(\vec r)\, dV \quad z_s = \frac{1}{M} \int z \rho(\vec r)\, dV$$

z.B. Halbkugel: $x_s = y_s = 0$ $\quad z_s = \frac{1}{V} \int z\, dV = \frac{1}{V} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[r^3 \cos\theta \sin\theta \right] = \frac{3}{8} R$

$\frac{1}{V}$: $\frac{2}{3} R^3 \pi$

Vollkugel: $x_s = y_s = z_s = 0$

Bewegung st. Körper



Bewegung eines bel. Punkts:

$$\vec v_i = \vec v_s + (\vec\omega \times \vec r_{is})$$

Translation

Rotation um Schwerpunkt

Aber Achtung: $\vec\omega = \vec\omega(t)$

Kräfte & Kräftepaare:

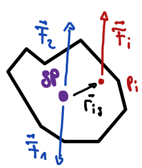
Wichtig zu wissen wo eine Kraft angreift: $\vec F_i(P_i)$

Angriffspunkt

Kräftepaar

$|\vec F_1| = |\vec F_2| = |\vec F_3|$

$\vec F_2 \uparrow\downarrow \vec F_3$



1. $\vec F_i + \vec F_1$: Drehmoment bezogen auf SP $D_s = \vec r_{is} \times \vec F_i$ (bewegt SP nicht!)
2. $\vec F_2$: beschleunigt SP

z.B. Gravitationskraft (greift an jedem Punkt an)

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec D_s = \int_V (\vec r_{is} \times \vec g)\, dm = -\vec g \times \underbrace{\int \vec r_{is}\, dm}_{\text{bel. SP!}} = -\vec g \times \vec r_s$$

$\vec F_{gi} = \Delta m_i \cdot \vec g$

Aufhängpkt = SP = Ursprung: $\vec r_s = 0 \Rightarrow \vec D_s = 0$
— " — $\parallel$ SP: $\vec r_s \parallel \vec g \Rightarrow \vec D_s = 0$

→ Bestimmung SP durch Lot

Wenn $\vec D_s = 0$ dann $\vec r_s \parallel \vec g$

Gleichgewichtslagen:

stabil $\quad E_{pot} = \text{min.}$

labil $\quad E_{pot} = \text{max.}$

metastabil $\quad E_{pot} = \text{lok. min}$

indifferent $\quad E_{pot} = \text{const}$