Mathematatik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 13

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)**.** Begründen Sie, welche der folgenden Matrizen über den Körper $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Wir fassen die komplexen Zahlen als Gaußsche Zahlenebene im $\mathbb{R}^2$ auf. Skizzieren Sie die folgenden Mengen und begründen Sie jeweils, ob die Menge abgeschlossen, offen oder kompakt ist.

(a) $A = \{ (x, y) \,:\, x^2 + y^2 < 1 \}$

(b) $B = \{ (x, y) \,:\, x^2 + y^2 > 2 \}$

(c) $C = \{ (x, y) \,:\, x^2 < y < x \}$

(d) $D = \{ (x, y) \,:\, \max(|x|, |y|) < 1 \}$

(e) $E = \{ (x, y) \,:\, |x| + |y| \geq 2 \}$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)**.** Die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind alle beliebig oft differenzierbar. Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung:

$$f(x) = x^3 \exp(5x) + 7 \qquad g(x) = \exp(\exp(x))$$

$$h(x) = \sin(\cos(x)) \qquad k(x) = \log(\log(x^2 + 2)).$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) := \frac{\exp(\sin(t)^2)}{2 + \cos(t)}.$$

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathtt{Pol}_n$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich n mit reellen Koeffizienten und der Unbekannten t. Für $f \in \mathtt{Pol}_n$ definieren wir eine Abbildung

$$G(f) := \frac{d}{dt}(tf) - 2f,$$

wobei $\frac{d}{dt}g$ die Ableitung der Funktion g nach der Variablen t bezeichnet. Zeigen Sie, dass dies eine *lineare* Abbildung von $\mathtt{Pol}_n$ nach $\mathtt{Pol}_n$ definiert. Geben Sie eine Basis für den Kern und das Bild von G an.

Aufgabe 6 (2+1+2 Punkte)**.** Sei $\texttt{Pol}_5$ der Vektorraum der Polynome vom Grade kleiner gleich 5. Geben Sie die darstellende Matrix des folgenden Endomorphismus

$$f(t) \mapsto (t \cdot f(t))'$$

über dem Vektorraum $\texttt{Pol}_5$ bezüglich einer Basis ihrer Wahl an. Ist diese Abbildung invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die darstellende Matrix der inversen Abbildung bezüglich derselben Basis.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte – machen Sie sich insbesondere klar, ob der Satz von l'Hospital anwendbar ist:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(\sin(x)) - 1}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1 + \exp(x))}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\exp(x) - 1} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin(x))}{\log(\sin(2x))}$$

Sie können hier insgesamt **34 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **27 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 19. Januar, bis 12:00 Uhr
bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.

Achtung! Es handelt sich hierbei um die letzte *zulassungsrelevante* Serie.

Es ist **nicht** die letzte *klausurrelevante* Serie