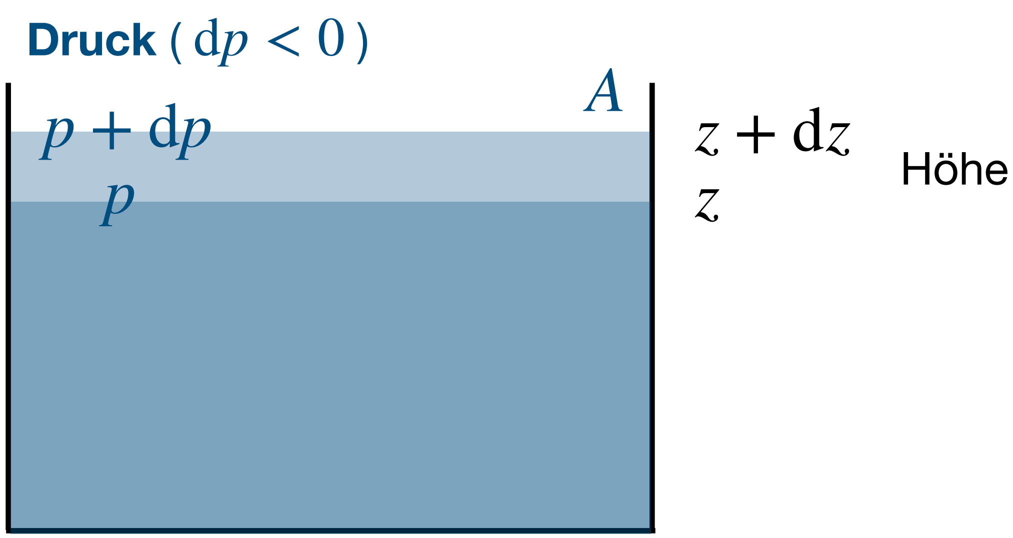
Vorlesung 27

9.2 Flüssigkeiten und Gase im Schwerefeld

Gravitation : externe Kraft F_{ext} auf Fl. / Gas → erzeugt Druck



$$\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}m \cdot g}{A} = -\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{g}{A}$$

$$\underset{\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z}{=} -g\,\rho(z)\,\mathrm{d}z$$

Unterschiedliche Effekte für **Gas** (Obere Schichten komprimieren untere Schichten)
und **Flüssigkeiten** ($\kappa \approx 0$)

aus Boyle-Mariotte, vgl. Folie 504

$$\boxed{\rho(z) \approx \rho = \text{const}\,.}$$

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \text{const}\,. = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho(z) = p(z) \cdot \frac{\rho_0}{p_0}}$$

Flüssigkeit

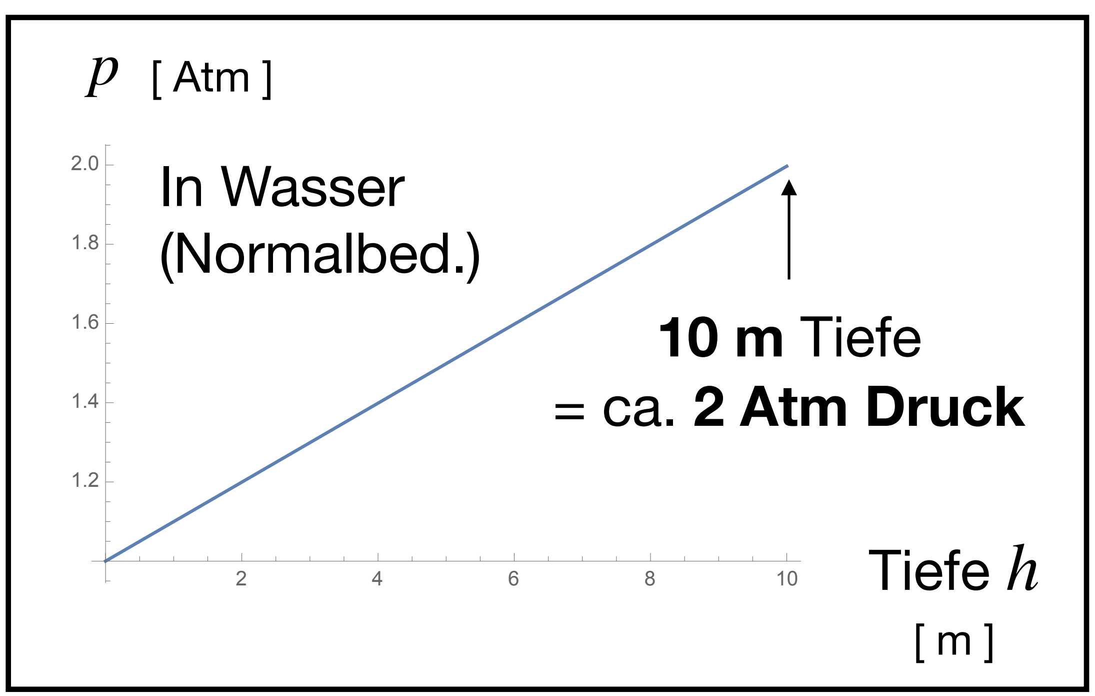
$$p(z_1) = p(z_2) - g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\rho(z) \approx \rho = \mathrm{const}\,.$$

$$= p(z_2) - g\,\rho\,(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(h) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h}$$

hydrostatischer Druck



Gas

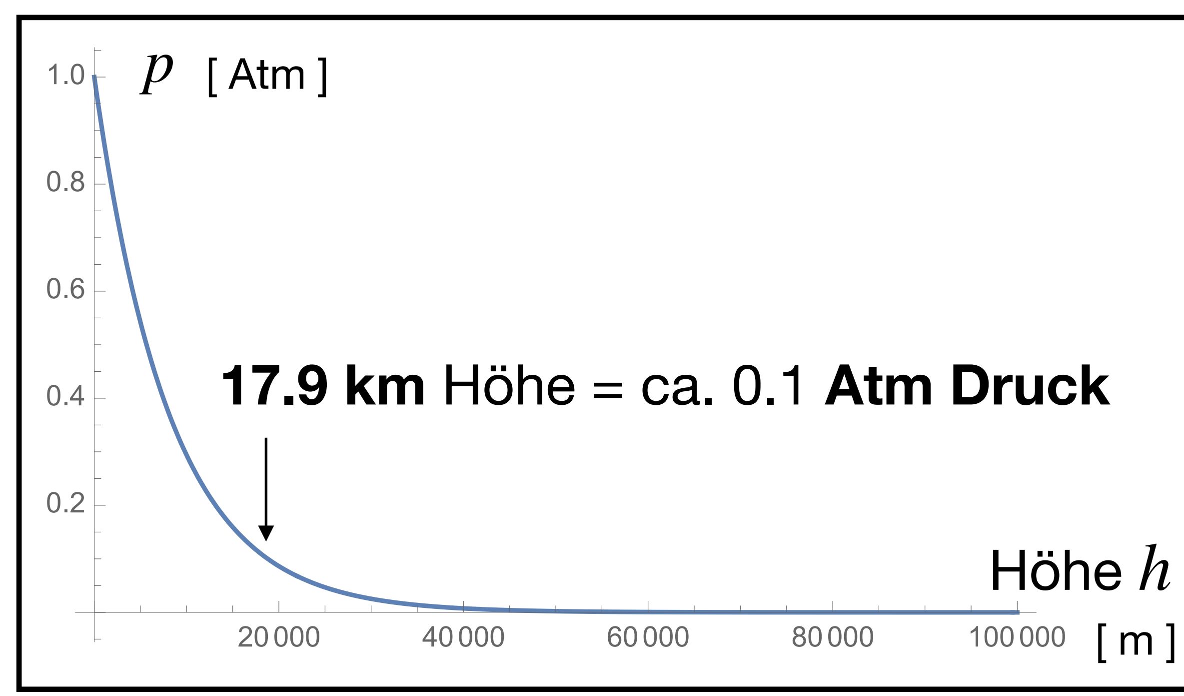
$$\mathrm{d}p = -\,g\,\frac{\rho_0}{p_0}\,p(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p'}{p'} = -\,g\,\frac{\rho_0}{p_0} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z'$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\,g\,\frac{\rho_0}{p_0}\,\underbrace{(z - z_0)}_{=h} \quad \Rightarrow \ln p = \ln p_0 + \ln\left(e^{-g\,\frac{\rho_0}{p_0}\,h}\right)$$

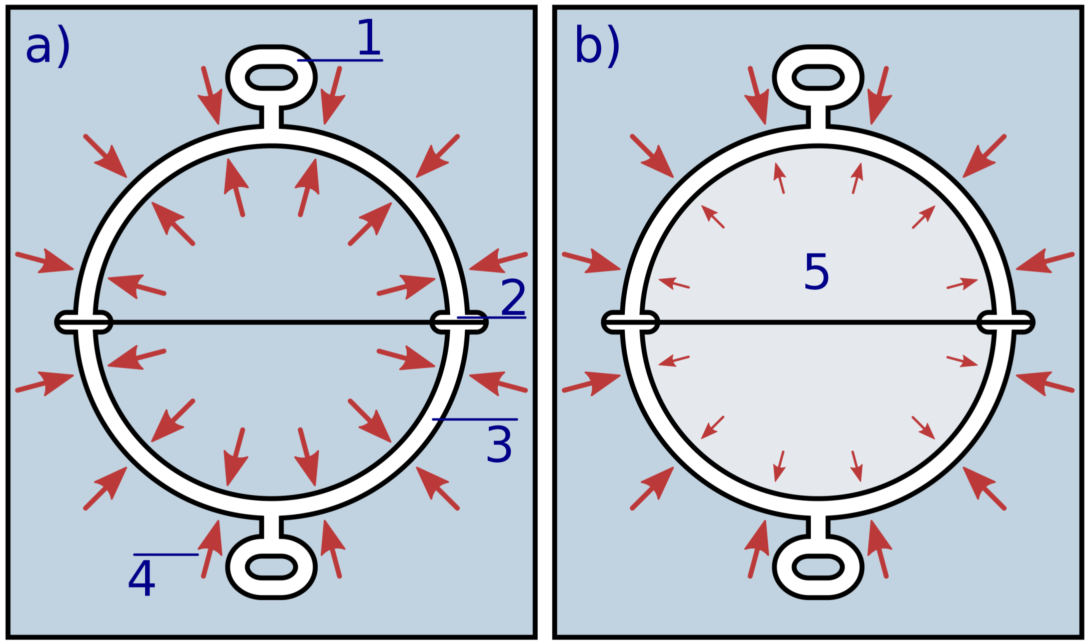
Barometrische Höhenformel

$$\Rightarrow \boxed{p(h) = p_0 \cdot e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}h}}$$



Versuch : Magdeburger Halbkugel

Radius $r = 10\,\mathrm{cm}$



Notwendige Kraft zur Trennung :

$$F = p \cdot A = 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot r^2\,\pi \approx 3000\,\mathrm{N}$$

Kreisoberfläche bei der Dichtung bei Kraftwirkung nach unten = “Stück der Kugel, welches wir öffnen wollen”

Versuch : Luftdruckunterschied im Hörsaal

Barometrische Höhenformel bei kleinen Höhenunterschieden

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}h} \approx p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{p_0} g\,h + \ldots\right) \approx \boxed{p_0 - \rho_0 g\,h}$$

wie bei Fl. !

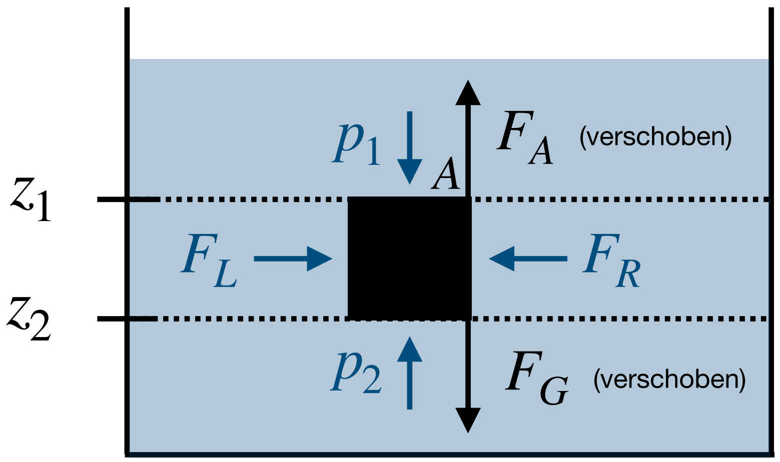
Höhe Hörsaal $h = 3.77\,\mathrm{m}$: **Erwarte** $\Delta p(h = 3.77\,\mathrm{m}) = \rho_{\mathrm{Luft}}\, g\, h = 1.204\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3.77\,\mathrm{m} = 44.5\,\mathrm{Pa}$

Messe Höhendifferenz Alkoholsäule bei Transport von $h = 3.77\,\mathrm{m}$ ($\rho_{\mathrm{Alk}} = 789\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) : ca 6 mm $\Delta p(h = 5\,\mathrm{mm}) = \rho_{\mathrm{Alk}}\, g\, h = 46.4\,\mathrm{Pa}$

9.3 Auftrieb

Anstieg des hyd. Druckes in der Tiefe erzeugt **Auftrieb**

Kraftrichtung : ↓ ↑



$$F_L = -F_R \rightarrow \quad F_{ges} = F_G + F_A$$

$$= -mg + A(p_2 - p_1) \quad \text{Vgl. Folie 506}$$

$$= -\rho_K V_K g + A\rho_{\mathrm{Fl}}\, g\, (z_2 - z_1)$$

$$= (\rho_{\mathrm{Fl}} - \rho_{\mathrm{K}}) \cdot V_k \cdot g$$

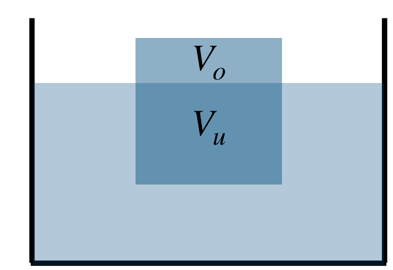
$$\Rightarrow \boxed{F_A = \rho_{\mathrm{Fl}} \cdot V_k \cdot g}$$

"Gewicht der verdrängten Flüssigkeit" - **Archimedes Prinzip**

Gilt für beliebige Formen / Volumen

$F_A > F_G$	:	schwimmt
$F_A = F_G$	:	schwebt
$F_A < F_G$	:	sinkt

Eisberg : $\rho_{\mathrm{Eis}} = 0.95\,\mathrm{g/cm^3}$ $\quad \rho_{\mathrm{H_2O}} = 1.03\,\mathrm{g/cm^3}$



Stabil bei $F_A = F_G$: $\rho_{\mathrm{Fl}} V_u\, g = \rho_K (V_u + V_o)\, g$

$$\rightarrow \quad \frac{\rho_{\mathrm{K}}}{\rho_{\mathrm{Fl}}} = \frac{V_u}{V_u + V_o} = 0.92 \quad \Rightarrow$$

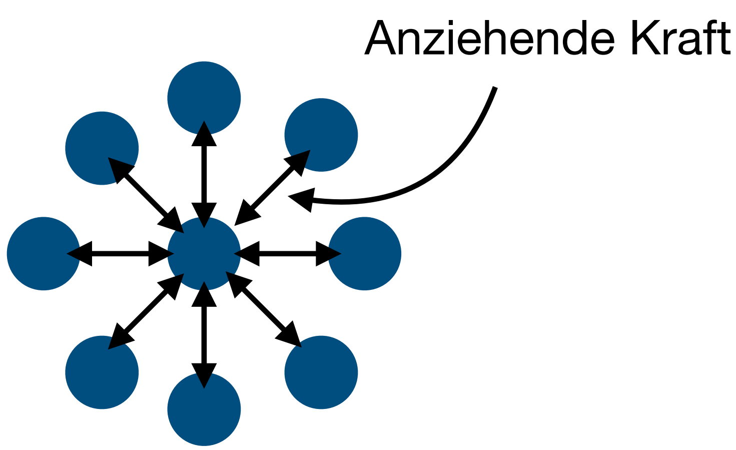
Nur 8% oberhalb der Oberfläche (!)

9.4 Oberflächeneffekte bei Flüssigkeiten

Verhältnisse an Oberflächen in Fl. **anders** als im Inneren

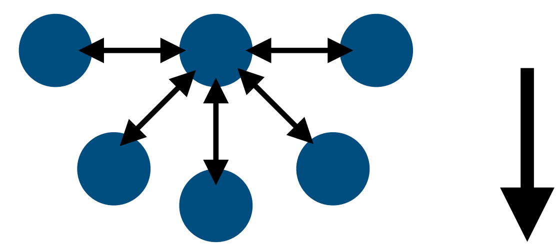
→ Moleküle / Atome “dicht an dicht”, ziehen sich an

Innen :



$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i = 0$$

Oberfläche :



$\vec{F}_{\text{ges}}$ Netto Anziehende Kraft $\neq 0$

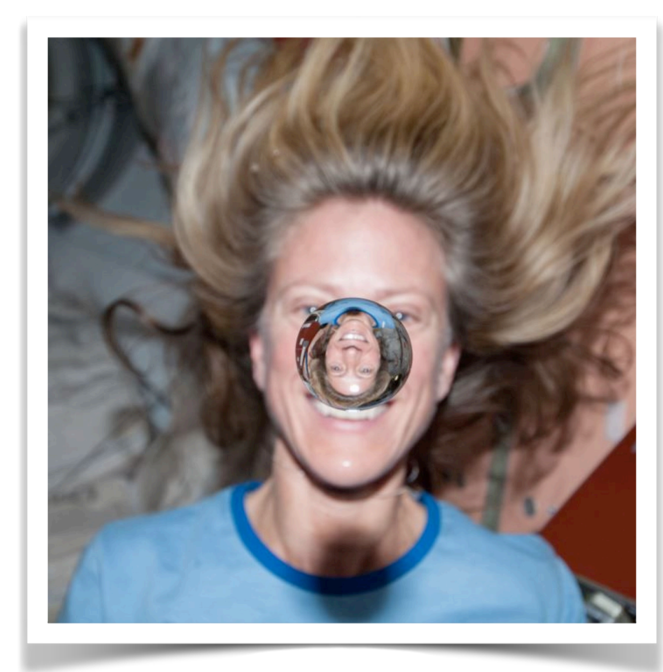
$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i \neq 0$$

→ Energie **nötig** um Moleküle / Atome an Oberfläche zu bringen :

$$E_{\text{pot}}(\text{Oberfl.}) > E_{\text{pot}}(\text{Innen})$$

→ Flüssigkeiten versuchen ihre Oberfläche zu **minimieren**

→ Schwerelose Flüssigkeiten nehmen **Kugelform** an



→ Um Oberfläche zu **vergrößern** müssen Moleküle / Atome aus dem innern an die **Oberfläche** gebracht werden → **Arbeit, Kraft nötig**

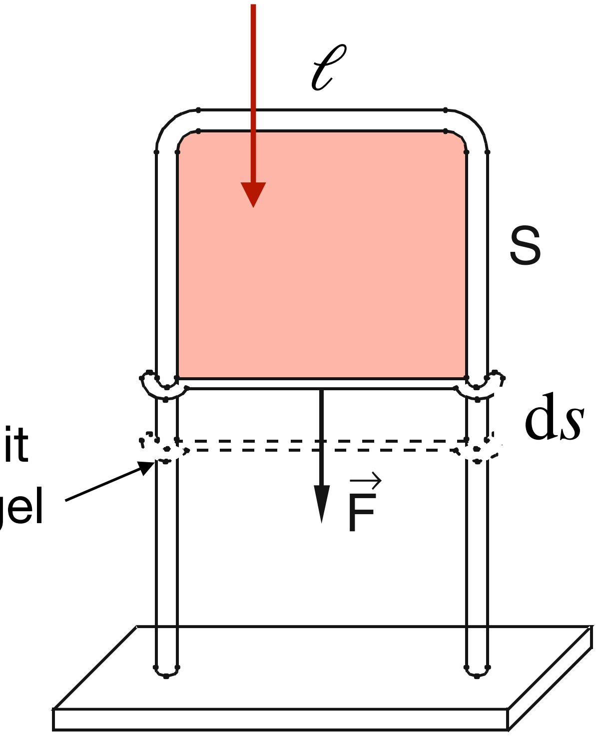
Zur **Vergrößerung** der **Oberfläche** um den Betrag ΔA muss die Arbeit ΔW geleistet werden = **Energiezunahme**.

Definieren **spezifische Oberflächenenergie:**

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} \qquad [\varepsilon] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$$

(Materialeigenschaft, hängt von den Bindungskräften ab)

Tauche U-förmigen Draht in Flüssigkeit; erzeugt **Flüssigkeitslamelle**



Bestimmbar mit sog. **Bügelmethode** :

U-förmig gebogener Draht mit frei verschiebbarem Querbügel

Geleistete Arbeit beim verschieben des Querbügels um Strecke $\mathrm{d}s$:

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s = \varepsilon\,\mathrm{d}A = \varepsilon\,\ell\,\mathrm{d}s \cdot 2 \longleftarrow$$

2 Seiten (vorne und hinten)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{F}{2\ell} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A} =: \sigma}$$

Energieeinheit um Oberflächenelement $\mathrm{d}A$ zu erhalten

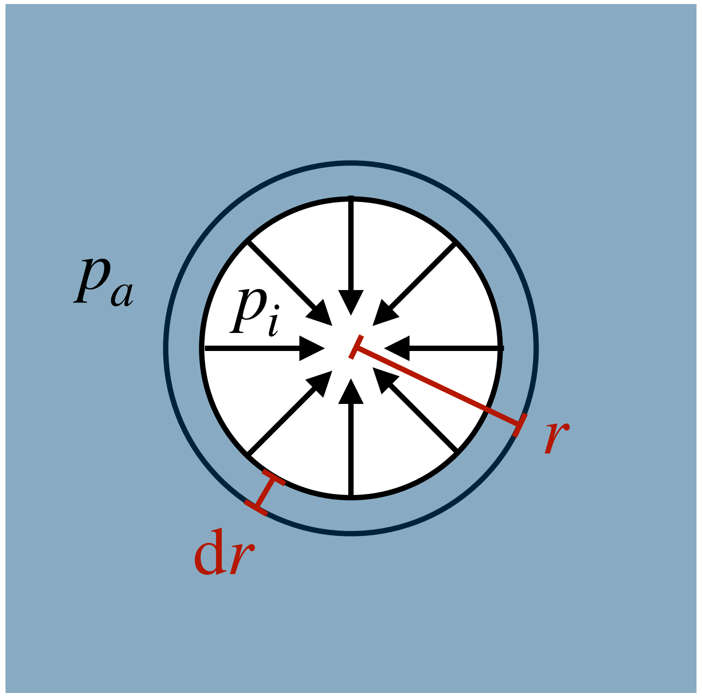
Oberflächenspannung

$[\sigma] = \mathrm{N/m} = \mathrm{J/m^2}$

Beispielswerte für σ in N/m

H_2O	0.078
Benzol	0.03
Hg	0.465
fl. He (-269°C)	0.0001

Betrachten wir nun eine **Luftblase** in einer Flüssigkeit :



Presst die Flüssigkeit die Gasblase vom Radius r um $\mathrm{d}r$ zusammen, so leistet sie gegen die Druckdifferenz $p = p_i - p_a$ **Arbeit :**

$$\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V = pA\,\mathrm{d}r = p4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

Die Arbeit wird aus dem Verlust der Oberflächenenergie bezahlt :

$$\mathrm{d}E_p = \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \sigma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(4\pi r^2)\,\mathrm{d}r = \sigma 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

Die Kontraktion kommt zum **Stillstand** wenn

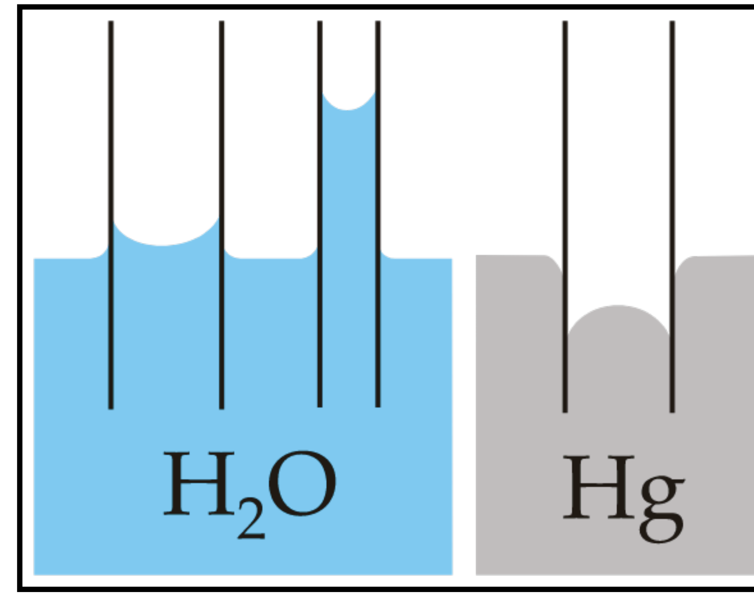
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_p \;\rightarrow\; \boxed{p = \frac{2\sigma}{r}} \;\longrightarrow$$

Kleine Blase, **großer** Druck !

Die Oberflächenspannung bewirkt, dass sich eine Flüssigkeit an einer senkrecht stehenden Wand ein wenig **hochzieht** oder sich vor ihr **absenkt**

benetzende Flüssigkeit

nicht benetzende Flüssigkeit



Genau genommen sind **drei** Medien in Konkurrenz:
die Luft, die Flüssigkeit und die Wand

Sie alle wollen ihre gemeinsame Oberfläche verkleinern : 3 Oberflächenspannungen

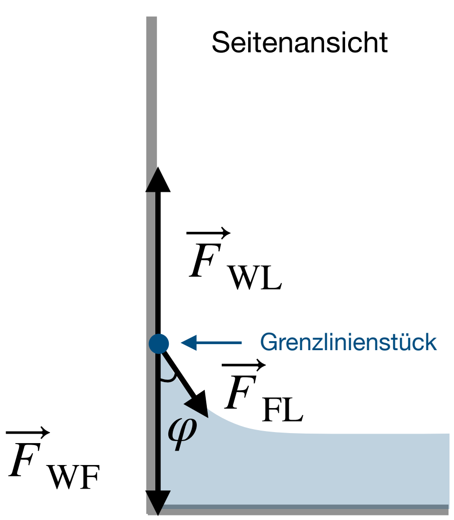
σ_{WF} : Flüssigkeit - Wand

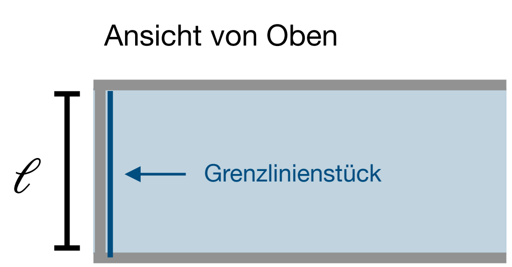
σ_{WL} : Wand - Luft

σ_{FL} : Flüssigkeit - Luft

Es wirken folgende Kräfte auf ein **Grenzlinienstück** ℓ

$$F_{WF} = \sigma_{WF} \cdot \ell$$
$$F_{WL} = \sigma_{WL} \cdot \ell$$
$$F_{FL} = \sigma_{FL} \cdot \ell$$





Für F_{FL} nur Normalkomponente zur Wand relevant : $F_{FL} \cos \varphi$

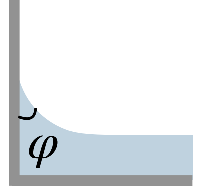
Im Gleichgewicht gilt dann: $\rightarrow F_{WL} = F_{WF} + F_{FL} \cos \varphi$

sog. Grenzwinkel

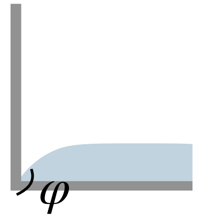
$$\boxed{\text{d.h.} \quad \cos \varphi = \frac{\sigma_{WL} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FL}}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sigma_{\mathrm{WL}} - \sigma_{\mathrm{WF}}}{\sigma_{\mathrm{FL}}} \rightarrow$$

$$\sigma_{\mathrm{WL}} > \sigma_{\mathrm{WF}} \rightarrow \cos\varphi > 0 \rightarrow \varphi < \frac{\pi}{2}$$ Konkav



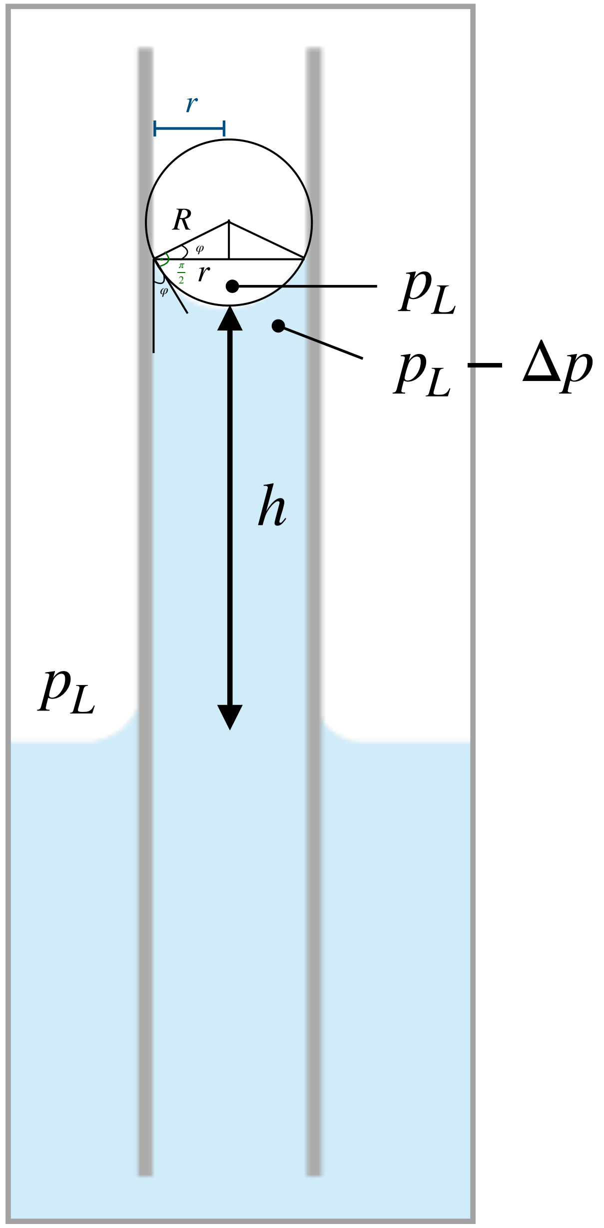
$$\sigma_{\mathrm{WL}} < \sigma_{\mathrm{WF}} \rightarrow \cos\varphi < 0 \rightarrow \varphi > \frac{\pi}{2}$$ Konvex



Kapillare Steighöhe

In einem engen Rohr (Kapillare) vom Radius r führt der Grenzwinkel φ dazu, dass die **Flüssigkeitsoberfläche** eine **Minimalfläche** bildet, die Näherungsweise durch eine **Kugel** mit **Radius**

$$R = \frac{r}{\cos\varphi}$$ beschrieben wird.



Beim Übergang von Luft in Flüssigkeit muss der Druck um

$$\Delta p = \frac{2\sigma_{\mathrm{FL}}}{R} = \frac{2\sigma_{\mathrm{FL}}\cos\varphi}{r}$$ abnehmen .

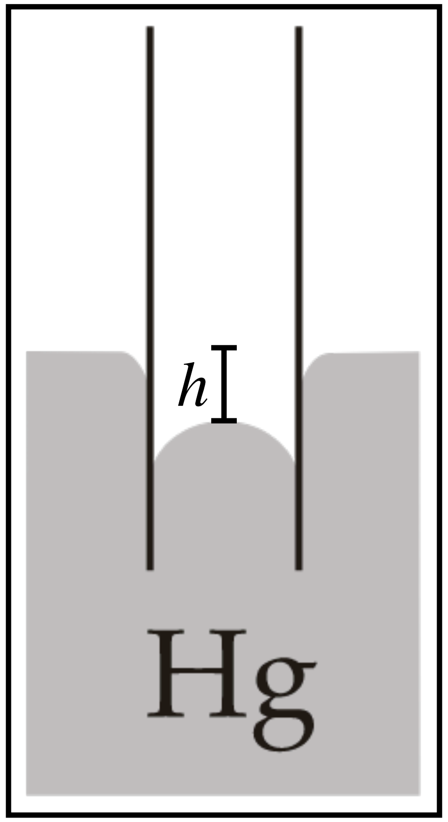
Da aber der gleiche Luftdruck p_L herrscht ist dies nur möglich, indem die **Flüssigkeit** in der **Kapillare hochsteigt** bis sich ein **neg. hydrostatischer Druck** aufgebaut hat :

$$\Delta p = \rho\, g\, h$$

In anderen Worten **trägt** die **konkave** Verformung das **Gewicht** der **Wassersäule**.

Auflösen nach der Höhe : $$h = \frac{2\sigma_{\mathrm{FL}} \cos\varphi}{\rho g r}$$

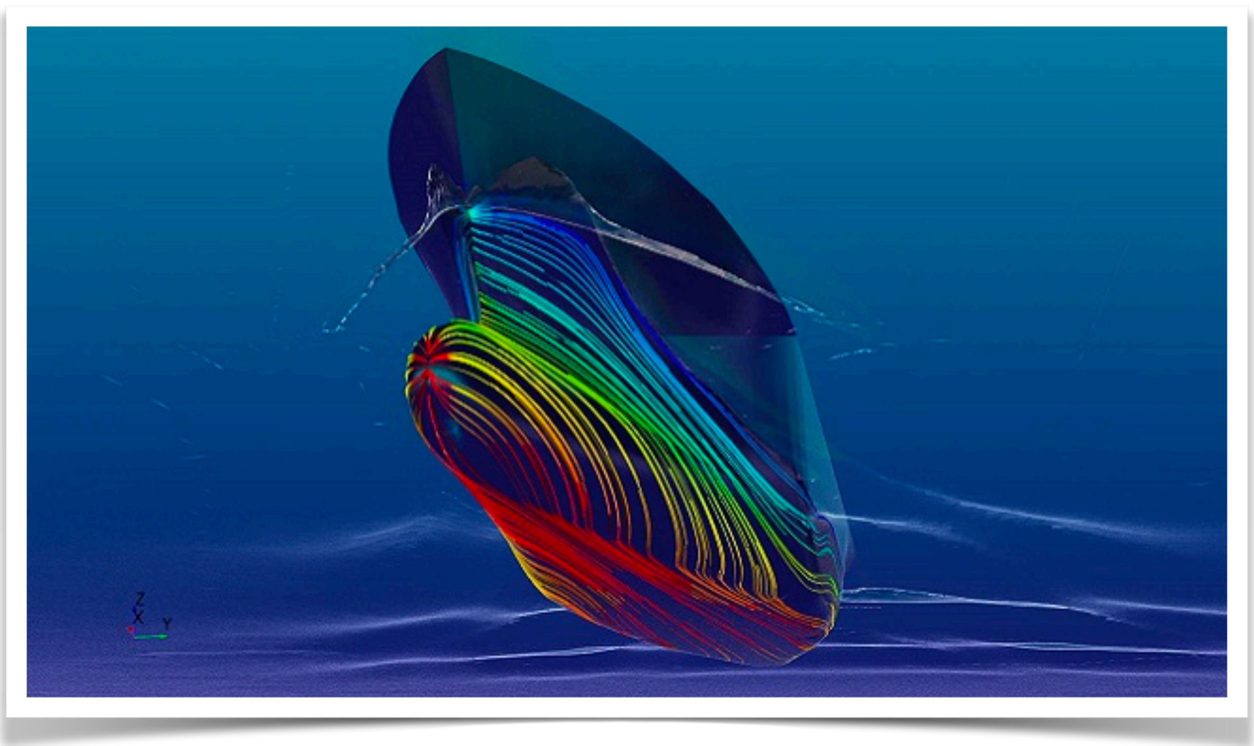
Bei einer **nicht-benetzenden** Flüssigkeit bildet sich eine Depression der Tiefe $-h$



10. Strömende Flüssigkeiten und Gase

(Hydro-/Aerodynamik)

Sehr komplex : Versuch : Strömung um Hindernisse im Wasser



Gesucht ist :

Strömungsgeschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$

als Funktion des Drucks $p = p(\vec{r}, t)$

als Funktion des Dichte $\rho = \rho(\vec{r}, t)$

Kräfte auf ein Volumenelement $\mathrm{d}V$:

Reibungskraft $\vec{F}_R = \eta\, \Delta \vec{v}\, \mathrm{d}V$

sog. Viskosität

$\Delta = \nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$

Druckkraft $\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p \; \mathrm{d}V$

Schwerkraft $\vec{F}_G = \rho\, \vec{g}\, \mathrm{d}V$

Navier Stokes Gleichung :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} p(\vec{r},t) + \eta\,\Delta\,\vec{v} + \rho\,\vec{g}}$$

$$\text{“}\,ma\,\text{”} \quad = \quad \text{“}\sum \vec{F}_i\,\text{”}$$

→ sehr **kompliziert**, oft **nur numerisch lösbar** (wenn überhaupt)

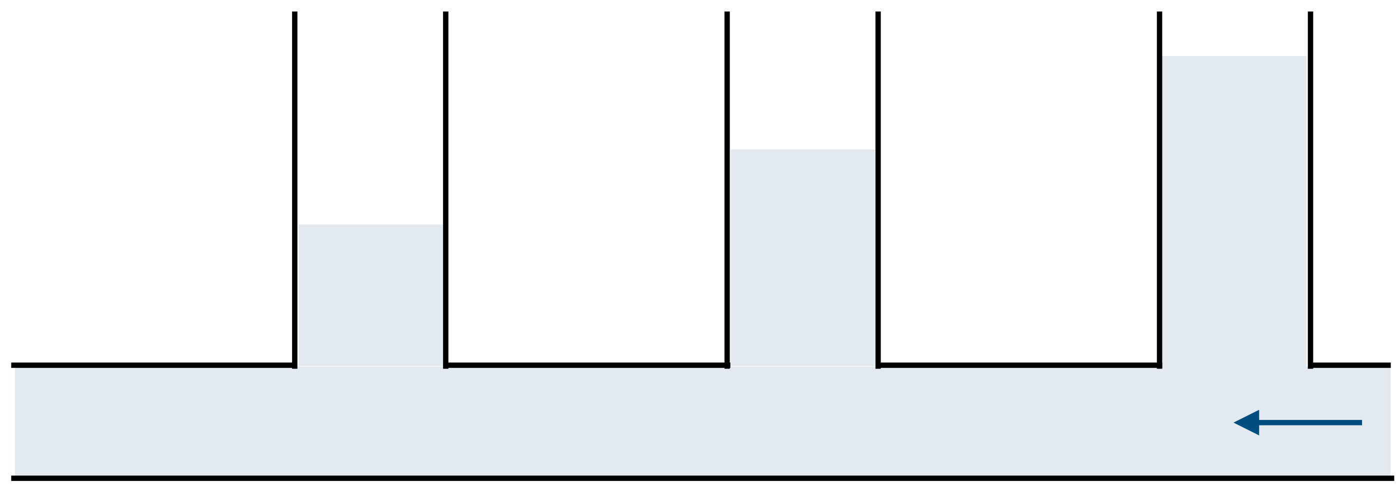
→ vereinfachende Annahme :

1. $\rho = \mathrm{const}\,.$
2. keine innere Reibung $\eta = 0$

$\Big\}$ **ideale Flüssigkeit** ($\sigma = 0$)

3. $\vec{v}$ klein $\Rightarrow$ stationäre, laminare Strömung, $\vec{v}(t) = \mathrm{const}\,.$

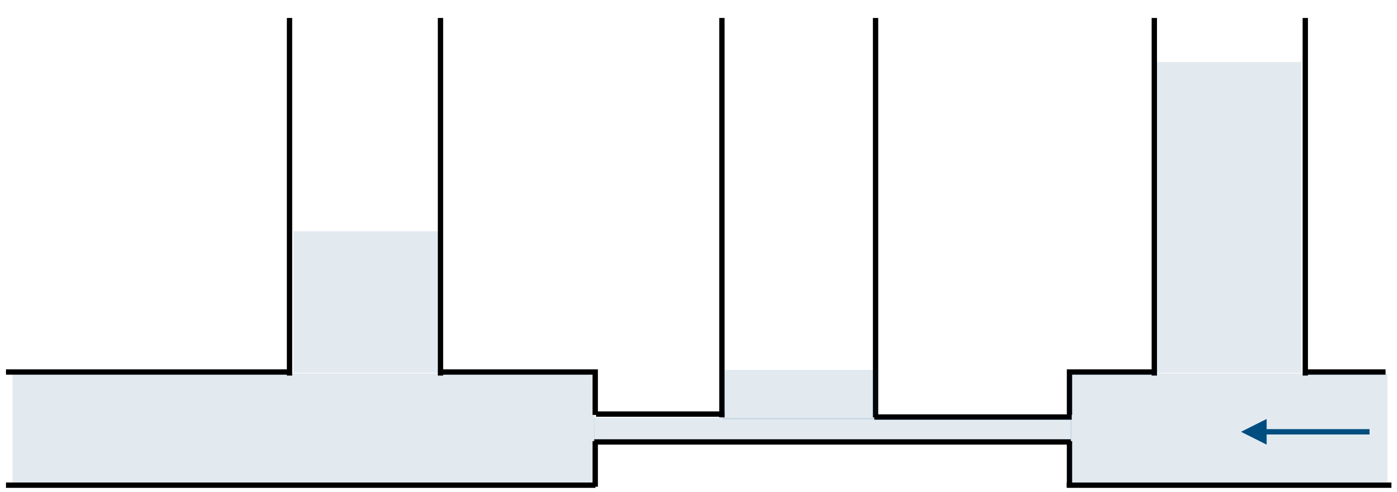
Versuch : linearer Druckabfall bei Strömung



$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{A} = \text{const}\,.$$

Flussrichtung

Ursache : **Reibung** der Flüssigkeit am Rand



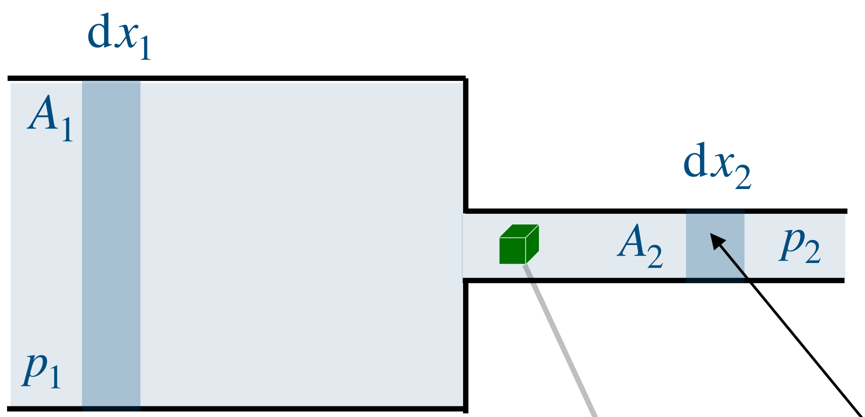
p_3 $\quad p_2 < \dfrac{p_1 + p_3}{2}$ $\quad p_1$

Was ist passiert ?

10.1 Bernoullische Gleichung

Durchfluss :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \varrho A_1 \underbrace{\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}}_{v_1} = \varrho A_2 \underbrace{\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}}_{v_2}$$



$$\rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \boxed{\Rightarrow v \cdot A = \mathrm{const}\,.}$$

Kontinuitätsgleichung

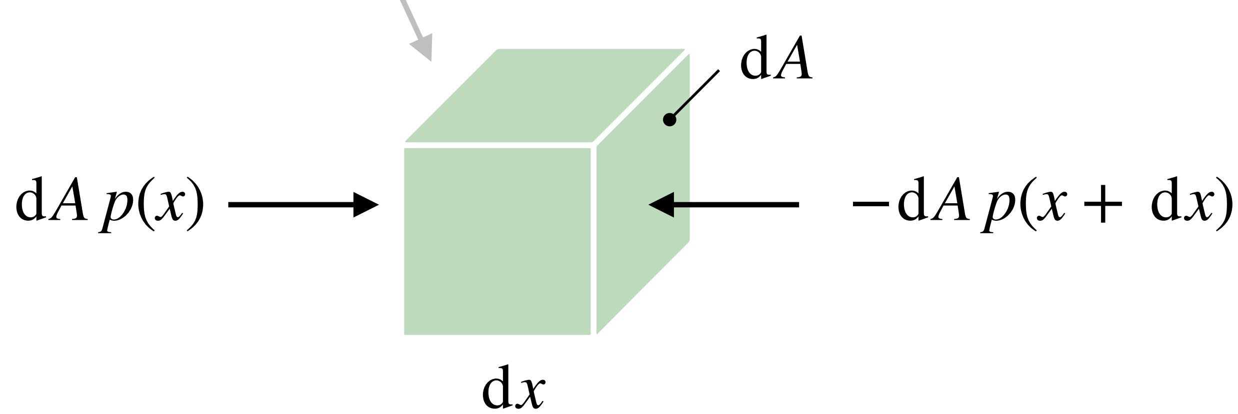
(für inkompressible Flüssigkeiten)

Die Flüssigkeit ist schneller geworden ($v_2 = \dfrac{A_1}{A_2} v_1$) aber

warum reduziert sich der Druck? $p_1 > p_2$

Um die Geschwindigkeit zu reduzieren, muss die Flüssigkeit **beschleunigt** werden.

Betrachte **Volumenelement :**



Kraftunterschied:

Nutze Definition der Ableitung $\frac{p(x+\mathrm{d}x)-p(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

$$\mathrm{d}F_x = (p(x) - p(x+\mathrm{d}x))\,\mathrm{d}A \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}V$$

Die im Volumenelement enthaltene Masse $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ beschleunigt sich zufolge

$$\mathrm{d}F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}m\, v\right) = \left(\dot{\varrho}\, v + \dot{v}\varrho\right)\,\mathrm{d}V$$

Nehmen konstante Dichte an $\dot{\varrho} = 0$

Gegenüberstellung resultiert dann in der Gleichung :

Division durch $\mathrm{d}V$

$$\dot{v}\varrho\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{v}\varrho = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}} \longrightarrow \; -\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = p_1 - p_2$$

Nutze $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$

und $\mathrm{d}v = \dot{v}\,\mathrm{d}t$

$$\int_{x_1}^{x_2}\dot{v}\varrho\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\dot{v}v\varrho\,\mathrm{d}t == \int_{v_1}^{v_2}v\varrho\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\varrho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Bernoullische Gleichung

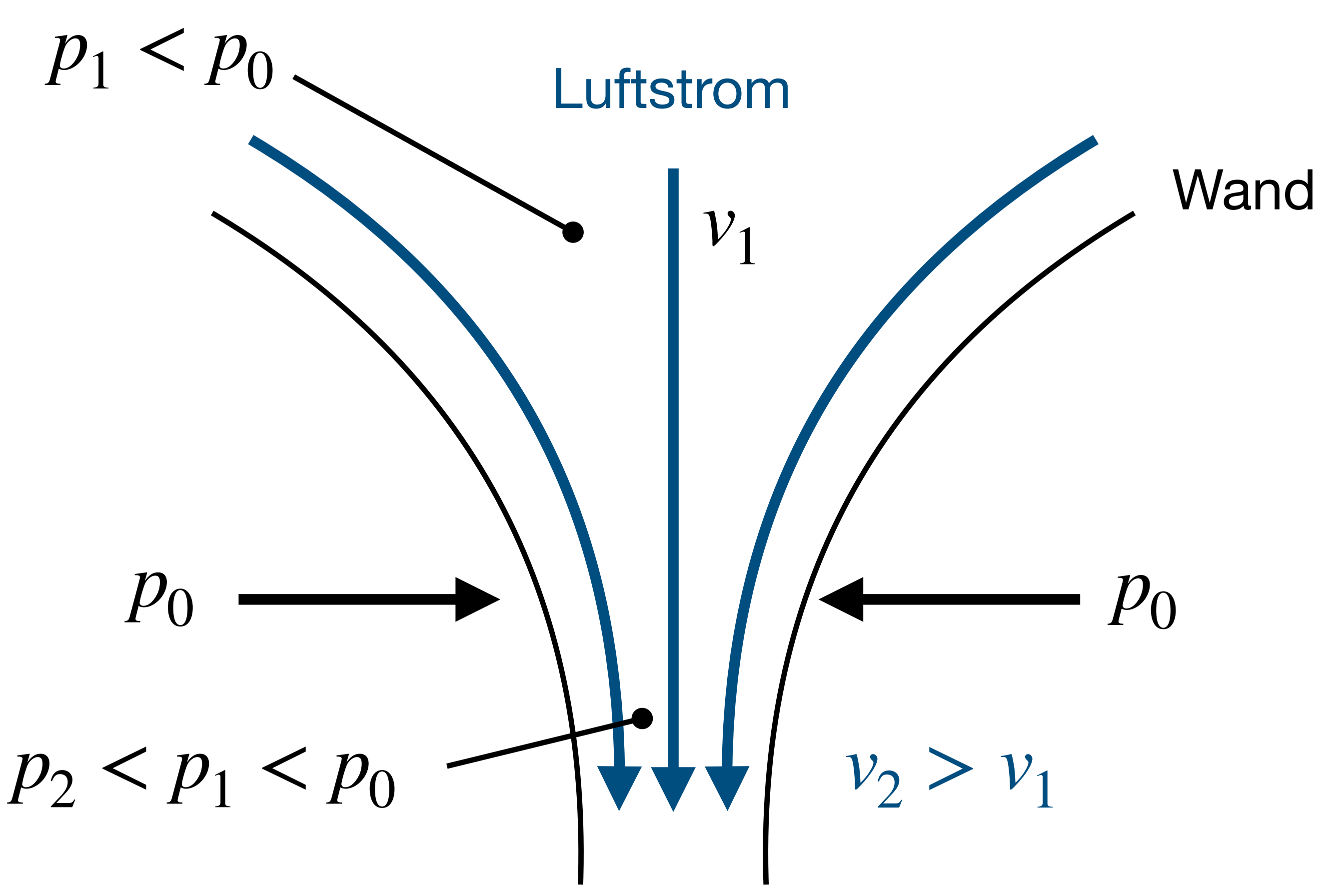
(für inkompressible Flüssigkeiten)

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 = \text{const}\,.$$

$$\rightarrow p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 - \frac{1}{2}\varrho v_2^2$$

Wenn $v_2 > v_1$ **reduziert** sich der **Druck** !

Dies führt zu vielen lustigen Paradoxen :-)



Druckunterschied führt zu einer Kraft welche die Wand nach **innen** drückt