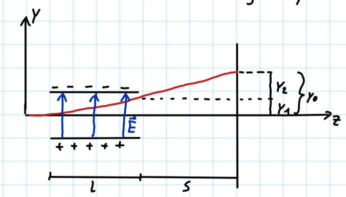
Angelo Brade, Dominik Wawrzinek

Nr. 1

Zuerst wird die Ablenkung in y-Richtung durch das E-Feld berechnet:



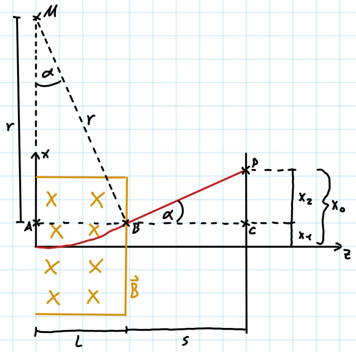
$\Rightarrow$ Im E-Feld: $t_1 = \frac{l}{v_z}$, $v_y = a_y \cdot t_1$, $y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2$

Hinter dem E-Feld: $t_2 = \frac{s}{v_z}$, $y_2 = v_y \cdot t_2 = a_y \cdot t_1 \cdot t_2$

$\Rightarrow y_0 = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 + a_y t_1 t_2 = a_y t_1 \left(\frac{1}{2} t_1 + t_2\right)$

Mit $a_y = \frac{F_{el}}{m} = \frac{qE}{m}$ folgt:

$$y_0 = \frac{qE}{m} \cdot \frac{l}{v_z} \left(\frac{1}{2}\frac{l}{v_z} + \frac{s}{v_z}\right) = \frac{qEl}{mv_z^2}\left(\frac{l}{2} + s\right)$$



$\Rightarrow$ Im Dreieck MAB gilt: $(r - x_1)^2 + l^2 = r^2 \iff -2rx_1 + x_1^2 + l^2 = 0$ $\quad | x_1^2 \ll 2rx_1, \ll l^2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{l^2}{2r}$

sowie: $\sin\alpha = \frac{l}{r}$

Im Dreieck BCP gilt: $\tan\alpha = \frac{x_2}{s}$ $\quad | \sin\alpha \approx \tan\alpha$ für kleine α

$\Rightarrow \frac{l}{r} = \frac{x_2}{s} \iff x_2 = \frac{ls}{r}$

$\Rightarrow x_0 = x_1 + x_2 = \frac{l^2}{2r} + \frac{ls}{r} = \frac{l}{r}\left(\frac{1}{2} + s\right)$ $\quad | r = \frac{mv_z}{qB}$, hierbei wir die Lorentzkraft aufgrand des Hinweises als konstant angenommen

$\iff x_0 = \frac{l}{\frac{mv_z}{q \cdot B}} \cdot \left(\frac{l}{2} + s\right) = \frac{q \cdot B \cdot l}{m \cdot v_z} \cdot \left(\frac{l}{2} + s\right)$

Mit den hergeleiteten Größen lässt sich nun die parabelförmige Projektion zeigen:

$$y_0 = \frac{qEl}{mv_z^2} \cdot \left(\frac{l}{2} + s\right) \quad | \text{Mit } 1 \text{ erweitern}$$

$$= \frac{mqB^2 l\left(\frac{l}{2}+s\right)}{mqB^2 l\left(\frac{l}{2}+s\right)} \cdot \frac{qEl}{mv_z^2}\left(\frac{l}{2}+s\right)$$

$$= \frac{mE}{qB^2 l\left(\frac{l}{2}+s\right)} \cdot \frac{q^2B^2l^2}{m^2v_z^2}\left(\frac{l}{2}+s\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{mE}{qB^2 l\left(\frac{l}{2}+s\right)}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{x_0^2}_{\text{Parabel}}$$

Für den unabgelenkten Strahl gilt $E = B = 0$, woraus $y_0 = x_0 = 0$ für den Durchstoßpunkt folgt. Auch für die Parabel gilt $y_0(x_0 = 0) = 0$, ihr Ursprung ist also im Durchstoßpunkt.

Nr. 2

Bindungsenergie: $E_B = (Z \cdot (m_p + m_e) + N \cdot m_n - m_K)$ mit Z: Protonenzahl, N: Neutronenzahl

E_B pro Nukleon: $= \frac{E_B}{A}$ mit A: Nukleonenzahl

Gegeben: $m_p = 938{,}27\,MeV$, $m_e = 0{,}511\,MeV$, $m_n = 939{,}56\,MeV$, $m_{Deuterium} = 1876{,}14\,MeV$, $m_{He} = 3728{,}39\,MeV$, $m_{Li} = 5603{,}05\,MeV$, $m_{Fe} = 52\,102{,}10\,MeV$

$E_B(\text{Deuterium}) = (m_p + m_e + m_n - m_{Deuterium}) \approx 2{,}201\,MeV$

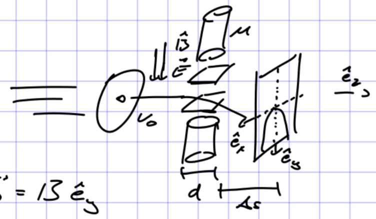
$E_B(He) = (2(m_p + m_e + m_n) - m_{He}) \approx 28{,}292\,MeV$

$E_B(Li) = (3(m_p + m_e + m_n) - m_{Li}) \approx 31{,}973\,MeV$

$E_B(Fe) = (26(m_p + m_e) + 30\,m_n - m_{Fe}) \approx 493{,}006\,MeV$

Ex 5; Dominik Wawrzinek, Angelo Brade; 31.10.2024

Aufgabe 1:



$F = q(\vec E + \vec v \times \vec B)$

$\Rightarrow \vec a = \frac{q}{m}(\vec E + \vec v \times \vec B)$ | $\vec E = E\hat e_y$, $\vec B = B\hat e_y$

$= \frac{q}{m}(E\hat e_y + \vec v \times \hat e_y B)$

Länge in z-Richtung der Feldbereiche (Kondensatorplatten)

$\vec v(d) = \vec v_0 + \vec a \cdot \Delta t_1$ | $\frac{d}{v_0} = \Delta t_1 :=$ Flugzeit durch den homogenen Feldbereich

$= \vec v_0 + \frac{q}{m}(E\hat e_y + \vec v \times \hat e_y B)\frac{d}{v_0}$ | $\vec v \times \hat e_y = v_0 \hat e_x$, $\vec v_0 = v_0 \hat e_z$

$= v_0 \hat e_z + \frac{q}{m}(E\hat e_y + v_0 B \hat e_x) \cdot \frac{d}{v_0}$

$= v_0 \hat e_z + \frac{q}{m}\begin{pmatrix} B \\ E/v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d$

Abstand zwischen Feldbereich und Schirm.

$\vec s = \vec v(d) \cdot \Delta t_2$ | $\frac{\Delta s}{v_0} = \Delta t_2 :=$ Flugzeit zum Schirm

$= \Delta s \hat e_z + \frac{q}{m}\begin{pmatrix} B/v_0 \\ E/v_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} d \cdot \Delta s$

$\Rightarrow s_x = \frac{q}{m} B/v_0 \cdot d \cdot \Delta s \Leftrightarrow v_0 = \frac{q}{m} B/s_x \cdot d \cdot \Delta s$

$\Rightarrow s_y = \frac{q}{m} E/v_0^2 \cdot d \cdot \Delta s$

$= \frac{mE}{qB} s_x^2 \cdot \frac{1}{d \cdot \Delta s}$

$s_y(s_x)$ ist unabhängig von v_0, aber wird durch q und m, sowie durch die konstruktionsspezifischen Parameter d und Δs bestimmt.

Aufgabe 2:

Mit $E_B = (Z \cdot m_p + (A-Z)m_n - m(A,Z)) \cdot c^2$ folgt:

Atom	E_B	E_B/A
^2H	1,72 MeV	0,86 MeV
^4He	27,33 MeV	6,83 MeV
^6Li	30,53 MeV	5,09 MeV
^{56}Fe	480,62 MeV	8,28 MeV

$m_p = 938,27$ MeV

$m_n = 939,56$ MeV

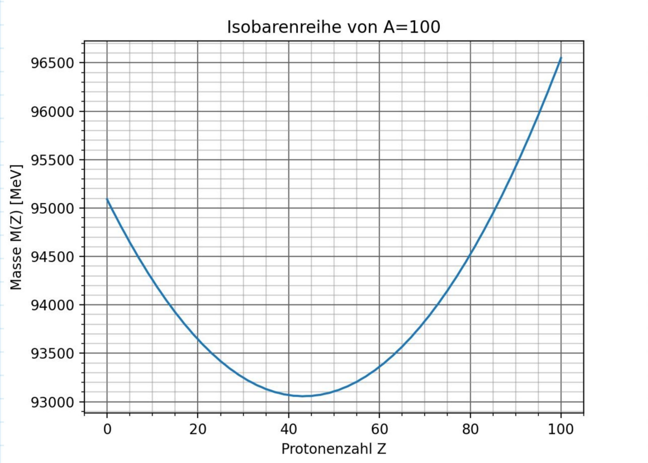
$m(A,Z)$ wurde der gegebenen Tabelle entnommen.

Nr.3

1.)

$$M(Z)=(Nm_n+Zm_p+Zm_e)-a_v\cdot A+a_o\cdot A^{\frac{2}{3}}+a_c\cdot\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}+a_s\cdot\frac{(N-Z)^2}{4A}+a_p\frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

Gegeben: $m_p=938{,}27\,MeV$, $m_e=0{,}511\,MeV$, $m_n=939{,}56\,MeV$, $a_v=15{,}67\,MeV$, $a_o=17{,}23\,MeV$, $a_c=0{,}714\,MeV$, $a_s=93{,}15\,MeV$, $a_p=11{,}2\,MeV$



Bei der Kurvenform handelt es sich um eine Parabel.

2.)

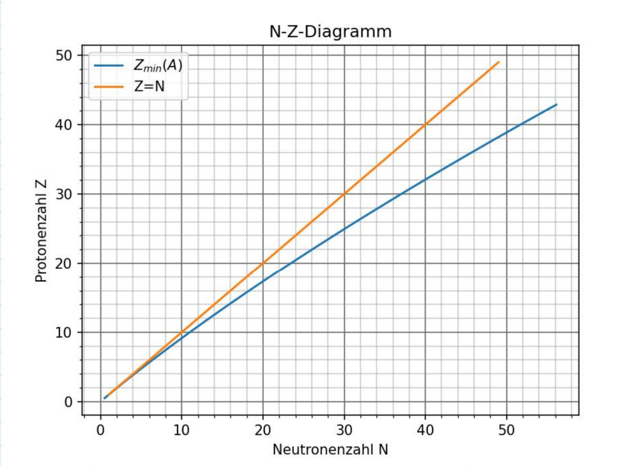
a) Für ungerade A tritt nur eine Parabelkurve auf, da der Paarungsterm wegfällt.

b) Für gerade A entstehen zwei sehr leicht vertikal versetzte Parabelkurven, da das Vorzeichen des Paarungsterms alterniert.

3.)

$$M'(Z)\overset{N=A-Z}{=}-m_n+m_p+m_e+2a_c\frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}}+a_s\frac{2Z-A}{A}\overset{!}{=}0$$

$$\Longleftrightarrow Z_{min}(A)=(m_n-m_p-m_e+a_s)\Big/\left(\frac{2a_c}{A^{\frac{1}{3}}}+\frac{2a_s}{A}\right)$$



Wie in obiger Abbildung zu sehen ist, tendiert das Verhältnis von Z_{min} und N für größere A zu einem größeren Anteil von N. Dies lässt sich durch den wachsenden Abstand der Z_{min} Kurve von der $Z=N$ Kurve für größere N beobachten, wobei die Z_{min} Kurve unterhalb der $Z=N$ Kurve verläuft.

4.)

ug-Kerne können nur bei Isobarenreihen mit ungeraden Nukleonenzahlen A auftreten. Wie in Aufgabenteil 2.) beschrieben, beschreibt die Isobarenreihe von diesen eine Parabel. Der Kern im Minimum dieser Parabel ist dabei der einzige stabile Kern, also derjenige mit der geringsten Masse $M(Z)$.

Bei Isobarenreihen von geraden Nukleonenzahlen treten gg- und uu-Kerne auf, welche jeweils auf einer eigenen Parabel liegen. Die der gg-Kerne verläuft dabei fast immer unter derjenigen der uu-Kerne, weshalb fast jeder uu-Kern einen benachbarten gg-Kern mit kleinerer Mass besitzt, wodurch fast alle uu-Kerne instabil sind. Bei den gg-Kernen ist wie bei den ug-Kernen derjenige mit der geringsten Masse stabil, aber zusätzlich sind diejenigen gg-Kerne stabil, die ein lokales Minimum bilden, deren benachbarte Kerne also eine höhere Masse besitzen als sie selbst. Dies kann aufgrund der nach oben versetzten Parabel der benachbarten uu-Kerne vorkommen, anders als bei den ug-Kernen.

5.)

Ja, es gibt einige wenige stabile uu-Kerne. Dies sind besonders leichte Kerne wie $^{2}_{1}H$ oder $^{6}_{3}Li$, bei denen sich durch einen β-Zerfall die Zunahme an Asymmetrieenergie stärker auswirken würde als die Abnahme an Paarungsenergie.

Nr. 4

1.)

$^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{235}_{92}U + {}^{4}_{2}He$

$M(A,Z) = (Nm_n + Zm_p + Zm_e) - a_v \cdot A + a_o \cdot A^{\frac{2}{3}} + a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_s \cdot \frac{(N-Z)^2}{4A} + a_p \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$

Gegeben: $m_p = 938{,}27\,MeV$, $m_e = 0{,}511\,MeV$, $m_n = 939{,}56\,MeV$, $a_v = 15{,}67\,MeV$, $a_o = 17{,}23\,MeV$, $a_c = 0{,}714\,MeV$, $a_s = 93{,}15\,MeV$, $a_p = 11{,}2\,MeV$

$\Rightarrow M(239,94) \approx 222{,}6701\,GeV$

$M(235,92) \approx 218{,}9357\,GeV$

Aus Aufgabe 2: $E_{B,\alpha} \approx 28{,}3\,MeV$, $m_{He} = 3728{,}4\,MeV$

$\Rightarrow M(235,92) + E_{B,\alpha} + m_{He} = 222{,}6924\,GeV$

$E_{kin,\alpha} = M(239,94) - 222{,}6924\,GeV = -0{,}0219\,GeV$

Laut dem Ergebnis besitzen die Zerfallsprodukte gemeinsam bereits eine höhere Energie als $^{239}_{94}Pu$, was jedoch die Energierhaltung verletzt.
Das fehlerhafte Ergebnis könnte daher rühren, dass es sich bei der Bethe-Weizsäcker-Formel nur um eine Näherung handelt. Insbesondere für leichte Atome wie He sollte man sie nicht verwenden.

2.)

β^--Zerfall: $\Delta E = M(239,94) - M(238,95) - m_{e^-} \approx 0{,}9316\,GeV$

β^+-Zerfall: $\Delta E = M(239,94) - M(240,93) - m_{e^+} \approx -0{,}9329\,GeV$

Elektroneneinfang: $\Delta E = M(239,94) + m_{e^-} - M({}^{239}_{94}Pu^-) \approx 0{,}11\,MeV$

Proton-Emission: $\Delta E = M(239,94) - M(238,93) - m_p \approx -0{,}0036\,GeV$

Neutron-Emission: $\Delta E = M(239,94) - M(238,94) - m_n \approx -0{,}0072\,GeV$

<u>Aufgabe 5:</u> $M_0({}^{239}Pu) = 200\,g$, $\rho({}^{239}Pu) = 19{,}84\,g/cm^3$, $\tau_{1/2} = 24110\,a$

$E_\alpha = 5{,}245\,MeV$

1.: $^{239}Pu \rightarrow {}^{235}U + \alpha$

$m({}^{239}Pu) = 44504{,}70\,MeV$

$N_0(200g; {}^{239}Pu) = \frac{M_0({}^{239}Pu)}{m({}^{239}Pu)} = \frac{200g}{44504{,}70\,MeV} = 2{,}13 \cdot 10^{24}$

$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\ln 2 \cdot \frac{t}{\tau_{1/2}})$

$= 2{,}13 \cdot 10^{24} \cdot \exp(-\ln 2 \cdot \frac{t}{24110a})$

2.:

$$E(t) = N(t) \cdot E_\alpha$$

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

$$= \dot{N}(t) E_\alpha$$

$$= \frac{d}{dt}\left(N_0 \cdot \exp(-\ln 2 \cdot \frac{t}{\tau_{1/2}}) \right) \cdot E_\alpha$$

$$= -\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} N_0 \exp(-\ln 2 \cdot \frac{t}{\tau_{1/2}}) \cdot E_\alpha \quad | \text{ Taylorentwicklung bis } \mathcal{O}(t^1)$$

$$\approx -\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} N_0 \cdot E_\alpha$$

$$= -\frac{\ln 2 \cdot 2{,}19 \cdot 10^{24}}{24110 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 5{,}245 \, MeV$$

$$\approx -1{,}674 \, W$$

$$\Rightarrow |P| = 1{,}674 \, W$$

3.: $V = \frac{m}{\rho} = 10{,}08 \, cm^3 = 10{,}08 \cdot 10^{-6} \, m^3$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}01341 \, m$$

$$A = 4\pi r^2 = 0{,}002259 \, m^2$$

$$P = \sigma A T^4$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma A}}$$

$$= 338{,}115 \, K$$

$$= 64{,}37 \, ^\circ C$$

Im 3. Praktikum habe ich mit bloßen Händen einen 80°C warmen Metallwürfel gedreht. Außgehend von diesen Erfahrungen würde ich die Kugel in ein Handtuch einwickeln. Der Taschenwärmer wäre dennoch sehr warm, aber verwendbar.

Nr. 5

Gegeben: $m = 0{,}2\,kg$, ^{239}Pu mit $\rho = 19{,}84\,g/cm^3$, $\tau_{1/2} = 24110\,a$, $E_\alpha = 5{,}245\,MeV$, $m_{Pu} \approx 4 \cdot 10^{25}\,kg$)

1.)

$N_0 = \frac{m}{m_{Pu}} \approx 5 \cdot 10^{25}$ $\quad$ $A = \lambda N = N_A \cdot \frac{m}{m_{mol}} \cdot \frac{Ln(2)}{\tau_{1/2}} = 4{,}6\,{}^{11}\,\frac{1}{s}$

$\lambda \approx \frac{0{,}693}{\tau_{1/2}} \approx 9{,}1 \cdot 10^{-13}\,\frac{1}{s}$

$A_0 = \lambda \cdot N_0 = 4{,}55 \cdot 10^{13}\,\frac{1}{s}$

2.)

$^{233}_{94}Pu$ zerfällt hauptsächlich unter Aussendung von α-Strahlung zu $^{235}_{92}U$. Die dabei frei werdende Energie ist mit $E_\alpha = 5{,}245\,MeV = 8{,}4 \cdot 10^{-13}\,J$ angegeben.

$\Rightarrow P = A_0 \cdot E_\alpha \approx 38{,}22\,\frac{J}{s}$ $\quad$ $P = \frac{E_{tot}}{\Delta t} = A \cdot E_\alpha = 0{,}4\,W$

3.)

Gegeben: $P = \sigma \cdot A \cdot T^4$ mit $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,W/m^2/K^4$, $T_{Umgebung} = 278\,K$

$V_{Kugel} = \frac{m}{\rho} \approx 10{,}08\,cm^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V_{Kugel}}{\pi}} \approx 1{,}34\,cm \approx 0{,}0134\,m$

$A = 4\pi r^2 \approx 0{,}00226\,m^2$ $\quad$ $P = \sigma A (T_{HW}^4 - T_{Umgebung}^4) \Rightarrow T = 36\,°C$

$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma A}} \approx 739\,K$ $\quad$ Zerfallsprodukte sind gefährlich (γ-Strahlung)

$T_{Ges} = T_{Umgebung} + T = 1017\,K$