Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

22.11.2024
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 7

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 29.11.2024)

Quickies

a) Betrachten Sie ein System aus N Untersystemen, die nicht wechselwirken, d.h. die Gesamtenergie ist $E = \sum_i^N E^{(1)}_{m_i}$, wobei $E^{(1)}_{m_i}$ die Energie des i-ten Untersystems ist, dessen Zustand durch die Quantenzahl m_i charakterisiert wird. Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme dann faktorisiert wie $Z_c = \prod_i^N Z_{c,i}$.

b) Was ist die Bedeutung der thermischen de-Broglie-Wellenlänge λ_T? Geben Sie λ_T für ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m an.

c) Was ist das Gibbs'sche Paradoxon?

d) Wieso wird das Gibbs'sche Paradoxon durch die Einführung der Quantenstatistik entlarvt?

e) Was ist die Besetzungszahldarstellung der Viel-Teilchen-Zustände und warum ist sie in der Quantenstatistik hilfreich?

7.1 Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas **10 Punkte**

Betrachten Sie ein ideales Gas ununterscheidbarer Teilchen im kanonischen Formalismus. Die Zustandssumme ist in diesem Fall (klassisch) durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!} \int dx_1^3 ... dx_N^3 \int \frac{dp_1^3}{(2\pi\hbar)^3} ... \frac{dp_N^3}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}}, \tag{1}$$

wobei der Faktor $1/N!$ von den äquivalenten Permutationen der nummerierten Teilchen kommt.

a) (4P) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N, \tag{2}$$

wobei $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi m k_B T}$ die thermische Wellenlänge ist.

Um nun die Wahrscheinlichkeits*dichte* für den Betrag des Impules **eines** Teilchens j zu erhalten, müssen wir einfach den Erwartungswert von $\delta(p_j - p)$ berechnen: $w(p) = w_j(p) = \langle \delta(p_j - p) \rangle$. Um daraus die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Impuls zu erhalten, muss man noch mit der Impulsbreite dp multiplizieren.

b) (4P) Berechnen Sie $w(p)$, indem Sie die gleichen Schritte wie in Teilaufgabe a) ausführen, nun jedoch die Delta-Distribution in den Integranden schreiben und den gesamten Ausdruck durch Z_C teilen. Sie sollten folgenden Ausdruck erhalten:

$$w(p) = \frac{4\pi p^2}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \tag{3}$$

c) (2P) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine bestimmte Geschwindigkeit, wobei nun $\langle \delta(v_j - v) \rangle$ gebildet werden muss. Zeigen Sie, dass dies auf das gleiche Ergebnis führt wie die Transformation von $w(p)\mathrm{d}p \to w(v)\mathrm{d}v$.

Die gefundene Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die sogenannte Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

7.2 Ensemble quantenmechanischer harmonischer Oszillatoren **15 Punkte**

Gegeben sei ein kanonisches Ensemble von N identischen eindimensionalen harmonischen Oszillatoren. Der Hamiltonian des Systems ist gegeben als

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\hat{a}_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) , \tag{4}$$

wobei $a_i^\dagger$ und a_i die Auf- und Absteigeoperatoren sind.

a) (3P) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme für das System aus harmonischen Oszillatoren gegeben ist durch

$$Z_c = \left(\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \right)^N . \tag{5}$$

Warum faktorisiert die Zustandssumme?

b) (2P) Berechnen Sie die Freie Energie F und zeigen Sie, dass die Entropie S geschrieben werden kann als

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = N k_B \left(\ln\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) + 1 \right) . \tag{6}$$

c) (3P) Berechnen Sie die mittlere Oszillatoranregung $\langle n_i \rangle$ eines einzelnen Oszillators. Wie hängt der Energieerwartungswert $\langle E_i \rangle$ für einen Oszillator damit zusammen?

d) (2P) Berechnen Sie die Innere Energie U einmal über den Energieerwartungswert $\langle E_i \rangle$ eines einzelnen harmonischen Oszillators, und noch einmal aus der Freien Energie F des Ensembles. Skizzieren Sie U als Funktion der Temperatur.

e) (3P) Berechnen Sie die Wärmekapazität C und skizzieren Sie diese als Funktion der Temperatur. Wie sieht C im klassischen Limes $\hbar\omega << k_B T$ aus?

f) (2P) Wie ändert sich die Wärmekapazität C im klassischen Limes, wenn wir nun ein Ensemble aus N dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren betrachten?

Das Ergebnis aus f) ist ein Spezialfall des Äquipartitionstheorems, welches hier besagt, dass jeder Freiheitsgrad des Systems im klassischen Limes einen Beitrag $\frac{k_B}{2}$ zur Wärmekapazität C leistet.

7.3 Barometrische Höhenformel **15 Punkte**

Wir wollen hier die barometrische Höhenformel herleiten, welche den Druck in der Atmosphäre als Funktion der Höhe angibt. Betrachtet wird hierzu eine im Gleichgewicht mit der Umgebung stehende Luftschicht mit der infinitesimalen Dicke dh. Diese befinde sich in einer beliebigen Höhe h, in der die Luftdichte ρ betrage. In diesem Fall hat man es letztlich mit drei Kräften zu tun, die gemeinsam im Gleichgewicht stehen. Zum einen wirkt ein Druck p auf die Unterseite der Luftschicht. Auf Grund der abnehmenden Luftdichte wirkt an der Oberseite ein Druck, der um einen Betrag dp verschieden ist. Die entsprechenden Kräfte auf die beiden Seiten der Luftschicht lassen sich über das Produkt von Druck und Fläche A des Volumenelements ermitteln. Als dritte Kraft wirkt schließlich die Gewichtskraft F_G der Luftschicht.

a) (2P) Zeigen Sie hieraus, dass

$$dp = -\rho g dh \,. \tag{7}$$

b) (2P) Die Dichte ist hier eine Funktion des Drucks. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{dp}{p} = -mg\frac{dh}{k_B T(h)} \,. \tag{8}$$

Von hier an müssen wir eine Annahme über den Temperaturverlauf machen. Für kleine Höhenunterschiede ist die Temperaturänderung klein und man kann die Temperatur als konstant annehmen.

c) (2P) Berechnen Sie den Druck als Funktion der Höhe h für konstante Temperatur $T(h) = T$.

Um den Temperaturverlauf für große Höhenunterschiede besser zu modellieren, wird im Folgenden ein Luftpaket betrachtet, das nach oben steigt und sich auf Grund des geringer werdenden Druckes ausdehnt und dabei abkühlt. Vereinfachend wird dabei angenommen, dass das Luftpaket keine Wärme an die Umgebung abgibt und auch keine von dieser aufnimmt. Es handelt sich also um eine adiabatische Zustandsänderung.

d) (4P) Zeigen Sie, dass für ein ideales Gas bei diesem Prozess Folgendes gilt:

$$\frac{dT}{T}\left(\frac{f}{2}+1\right) = \frac{dp}{p} \,. \tag{9}$$

e) (2P) Folgern Sie damit, dass die Temperatur linear mit der Höhe h abfällt wie

$$T(h) = T_0 - h\Gamma \qquad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{mg}{k_B(f/2+1)} \,. \tag{10}$$

f) (3P) Bestimmen Sie den Druck als Funktion der Höhe für diesen Fall.