Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 12

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Für quadratische Matrizen sind Potenzen rekursiv wie folgt definiert: A^0 ist die Einheitsmatrix, $A^{n+1} = A \cdot A^n$. Berechnen Sie A^8 sowie B^{10} für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Vielleicht geht es ja einfacher, als Sie denken?

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Vektoren:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Tripel $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ bilden Basen von $\mathbb{R}^3$. (Das müssen Sie nicht nachrechnen – überlegen Sie sich aber, wie Sie dies machten.)

(1) Geben Sie die Transformationsmatrizen T_B^C und T_C^B.

(2) Es sei f die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 ; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 2x + 2y - z \\ -2x - y + 4z \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die darstellenden Matrizen: $\mathtt{DM}_B(f)$, $\mathtt{DM}_C(f)$, $\mathtt{DM}_{B,C}(f)$ und $\mathtt{DM}_{C,B}(f)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$\begin{pmatrix} \lambda + 8 & 2\lambda + 2 & \lambda \\ 4 & \lambda + 2 & \lambda \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte)**.** Berechnen Sie zunächst (a) die Determinante, (b) das charakteristische Polynom und (c) alle Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 & -8 \\ -10 & -18 & 19 \\ -6 & -12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Entscheiden und begründen Sie, ob die folgende Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -5 & -8 & -13 \\ 8 & 16 & 26 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils eine der Eigenräume der folgenden Matrix und entscheiden Sie, ob diese diagonalisierbar ist – im Falle von Diagonalisierbarkeit bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge der Eigenwerte von A ist $\{-1, 3, t\}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Es seien A und B zwei invertierbare $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildungen f und g die gleichen Eigenwerte haben, wobei die Abbildungen jeweils für $v, w \in \mathbb{R}^n$ definiert sein mögen als $f(v) := AB \cdot v$ und $g(w) = BA \cdot w$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für einen gegebenen Körper $\mathbb{K}$. Weiterhin sei f ein Endomorphismus über V. Zeigen Sie: Hat die lineare Abbildung $f^2 + f$ den Eigenwert -1, so hat die lineare Abbildung f^3 den Eigenwert 1. (Hierbei handelt es sich bei f^2 um die Komposition von f mit sich selbst, also um $f \circ f$.)

Aufgabe 9 (2+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathtt{Pol}_5$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 5 mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die durch

$$F(p)(t) := p(0) + p'(1)t^2 - 2p''(2)t^5$$

definierte Abbildung F von $\mathtt{Pol}_5$ nach $\mathtt{Pol}_5$ linear ist und beschreiben Sie diese durch Angabe ihrer Werte auf der Basis der Monome $B = (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$. Wie sieht die darstellende Matrix dieser Abbildung aus, wenn Sie $\mathtt{Pol}_5$ als isomorphe Kopie des $\mathbb{R}^6$ mittels der Basiszuordnung $1 \mapsto e_1$, $x \mapsto e_2$, $\ldots$, $x^5 \mapsto e_6$ interpretieren?

Sie können hier insgesamt **42 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 12. Januar, bis 12:00 Uhr
bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.

Das Vorlesungsteam wünscht Ihnen ein frohes und erholsames Weihnachtsfest.

Guten Rutsch! Mögen Sie gesund & mathematisch motiviert ins Jahr 2023 kommen!