Ex1 Blatt 7 Angelo Brade, Michael Vogt

①

a) ges.: v_1'

1. Impulserhaltung: $p = p'$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$\Leftrightarrow m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

2. Energieerhaltung: $W = W'$
$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$
$$\Leftrightarrow m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

$$\frac{2.}{1.}: \quad \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1 - v_1'} = \frac{v_2'^2 - v_2^2}{v_2' - v_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{v_1 - v_1'} = \frac{(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)}{v_2' - v_2}$$

$$\Leftrightarrow (v_1 + v_1') = (v_2 + v_2')$$

$$\Leftrightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

$$\Leftrightarrow v_2' = v_1 - v_2 + v_1'$$

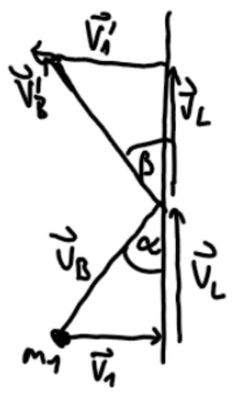
In 1. einsetzen:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1 - v_2 + v_1' - v_2)$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 - 2 m_2 v_2 + m_2 v_1'$$

$$\Leftrightarrow v_1'(m_1 + m_2) = v_1(m_1 - m_2) + 2 m_2 v_2$$

$$\Leftrightarrow v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2 m_2}{m_1 + m_2}$$



Beim Stoß ist nur die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand $(\vec{v}_1)$ relevant.

$v_1 = \sin\alpha \cdot v_B \qquad v_2 = 0$

m_2 ist die feste Wand, also gilt $m_2 \gg m_1$
(m_1 ist vernachlässigbar klein im Vergl. zu m_2)

$$v_1' = v_1 \frac{-m_2}{m_2} + v_2 \frac{2m_2}{m_2} = -v_1 \qquad v_B' = \sqrt{v_1'^2 + v_L^2} = \sqrt{v_1^2 + v_L^2} = v_B$$

$$\beta = \operatorname{asin}\left(\left|\frac{v_1'}{v_B'}\right|\right) = \operatorname{asin}\left(\frac{\sin\alpha \cdot v_B}{v_B}\right) = \operatorname{asin}(\sin\alpha) = \alpha = 50°$$

Impulsübertragung auf die Bande:

Impulsänderung d. Billard-Kugel senkrecht zur Bande:

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 = -2 m_1 v_1$$

D.h. der Impuls der Billardkugel ändert sich um $2 m_1 v_1$ nach links

Dies muss durch die Bande ausgeglichen werden, $\overleftarrow{\Delta p_1}$

damit die Impulserhaltung gegeben ist:

$$\Delta p_1 + \Delta p_{Bande} = 0 \Leftrightarrow \Delta p_{Bande} = -\Delta p_1 = 2 m_1 v_1 = 2 m_1 v_B \sin(\alpha) = 2 m_1 v_B \sin(50°)$$

Energieübertragung auf die Bande:

Die Bande nimmt zwischenzeitlich die Bew.energie der Billardkugel senkrecht zur Bande $W_{B_s} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 \sin^2(50°)$

Diese gibt sie jedoch vollständig wieder ab:

Es gilt $W_{B_s}' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = W_{B_s}$ d.h. die Energie der Billardkugel ist vorher u. nachher unverändert, also $\Delta W_B = 0$

nach Energieerhaltung gilt:

$$\Delta W_B + \Delta W_{Bande} \Leftrightarrow \Delta W_{Bande} = -\Delta W_B = 0$$

Im Endzustand ist also keine Energie mehr auf die Bande übertragen.

Lsg.: a)

x', y'

• Energieerhaltung $\quad E_k + E_w = E_k' + E_w'$

$$\frac{p_k^2}{2m_k} + \cancel{\frac{p_w^2}{2m_w}} = \frac{p_k'^2}{2m_k} + \cancel{\frac{p_w'^2}{2m_w}}$$

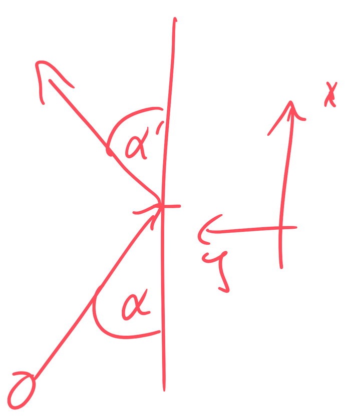
$$\boxed{p_k^2 = p_k'^2}$$

„$\lim_{n\to\infty} n \cdot 0 = 0$"
$m_w \gg m_k$
$m_w \to \infty$

Impulserhaltung

$\vec{p}_{Ges} = \vec{p}_{Ges}'$

$$\vec{p}_k + \vec{p}_w = \vec{p}_k' + \vec{p}_w' \quad \Big| \text{ Wand bewegt sich nicht} \Rightarrow \vec{p}_w = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{p}_k + \vec{p}_w' = \begin{pmatrix}p_{kx}\\p_{ky}\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}p_{kx}'\\p_{ky}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p_{wx}'\\p_{wy}'\end{pmatrix}\Big\}0$$



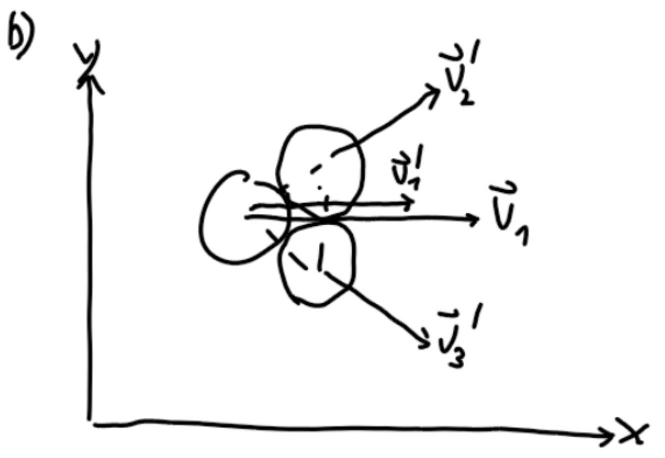
$$\underbrace{\cancel{p_k^2 \cos^2(\alpha)}}_{p_{kx}} + \underbrace{p_k^2 \sin^2(\alpha)}_{p_{ky}} = p_{k_y}'^2 + \underbrace{\cancel{p_k^2 \cos^2\alpha}}_{p_{kx}}$$

$$p_{ky}' = \pm p_k \sin\alpha$$

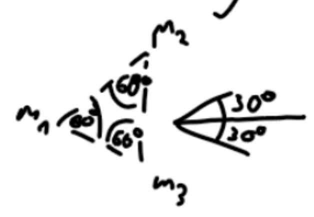
• $p_k \sin\alpha = \pm p_k \sin\alpha + p_{wy}'$

$$p_{w,y}' = p_k \sin\alpha \mp p_k \sin\alpha$$

b)



gleichschenkliges Dreieck:

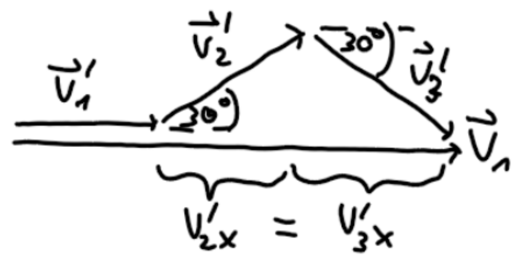


$m_1 = m_2 = m_3 = m$, daher wird Impulserhaltung zu Geschwindigkeitserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + m_3\vec{v}_3' \quad \Big| m_1 = m_2 = m_3 = m;\ \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0};\ \underbrace{v_2' = v_3'}_{\text{wegen Symmetrie}}$$

$$m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_1' + \vec{v}_2' + \vec{v}_3')$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' + \vec{v}_3'$$



$$v_1 = v_1' + v_{2x}' + v_{3x}' = v_1' + 2v_{2x}'$$

$$v_1 = v_1' + 2\cos(30°)\, v_2'$$

$$\Leftrightarrow v_1' = v_1 - 2\cos(30°)\, v_2'$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 + m_3 v_3'^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad m v_1^2 = m\left(v_1'^2 + 2v_2'^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1' = \sqrt{v_1^2 - 2v_2'^2}$$

Gleichsetzen:

$$v_1 - 2\cos(30°)\, v_2' = \sqrt{v_1^2 - 2v_2'^2} \quad \Big| (\,)^2$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 - v_1 4\cos(30°)\, v_2' + 4\cos^2(30°)\, v_2'^2 = v_1^2 - 2v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2(30°) + 2\right) v_2'^2 = 4\cos(30°)\, v_1 v_2'$$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2(30°) + 2\right) v_2' = 4\cos(30°)\, v_1$$

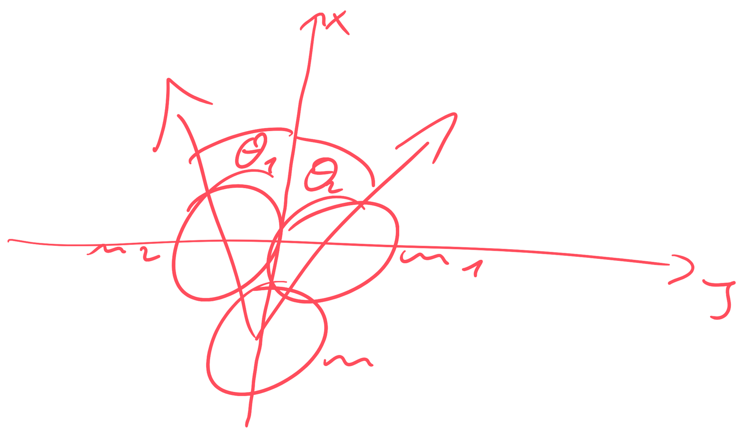
$$\Leftrightarrow v_2' = v_3' = \frac{4\cos(30°)\, v_1}{4\cos^2(30°) + 2} = \frac{2\sqrt{3}}{5} v_1 \approx 0{,}69\, v_1$$

$$\vec{v}_2' = \begin{pmatrix} \cos(30°)\, v_2' \\ \sin(30°)\, v_2' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5\ v_1 \\ \sqrt{3}/5\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 3/5 \\ \sqrt{3}/5 \\ 0 \end{pmatrix} \approx v_1 \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3' = v_1 \begin{pmatrix} 3/5 \\ -\sqrt{3}/5 \\ 0 \end{pmatrix} \approx v_1 \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1' = |v_1 - 2v_{2x}'| = \left|1\left(2 \cdot \tfrac{3}{5}\right) v_1\right| = |-0{,}2 v_1| = 0{,}2\, v_1$$

$$\vec{v}_1' = v_1 \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$y: m v_{k_y} = m_1 v_1' \sin\theta_1 + m_2 v_2' \sin\theta_2 + m v_k'$

$v_1' = v_2' \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad v_{k,y} = v_{k,y}' = 0$

$0 = m_1 v \sin\theta + m v \sin\theta$

$\boxed{0 = 2 m v \sin\theta}$

$E' = E'$

$$\frac{m}{2} v_k^2 + \underbrace{\quad}_{0} + \underbrace{\quad}_{0} = \cancel{\tfrac{m}{2}} v_k'^2 + \cancel{\tfrac{m_1}{2}} v_1'^2 + \cancel{\tfrac{m}{2}} v_2'^2$$

$$v_k^2 = v_k'^2 + v_1'^2 + v_2'^2$$

$$\boxed{v_k^2 = v_k'^2 + 2v'^2} \quad (*)$$

$X: m v_{k_x} = m v_{k,x}' + m v_1 \cos\theta + m v_2 \cos\theta$

$\cancel{m} v_{k,x} = \cancel{m} v_{k,x}' + 2\cancel{m} v \cos\theta$

$\boxed{v_{k,x} = v_{k,x}' + 2 v\cos(\theta)} \quad (**)$

$v_k \qquad v_k'$

$(**)$ im $(*)$ $\quad v_k^2 = v_k^2 - 4v'\cos\theta\, v_k + 4v'^2\cos^2\theta + 2v'^2$

$$\boxed{v' = \frac{2 v_k \cos\theta}{1 + 2\cos^2\theta}} \quad (***)$$

Teil I

$$\boxed{v_k' = \frac{v_k(1 - 2\cos^2\theta)}{1 + 2\cos^2\theta^2}}$$

Teil II

3

$$r_1 = d\,\frac{\mu}{m+\mu}$$

$$F_Z = m\,\omega^2 r_1$$

$$F_G = G\,\frac{\mu m}{d^2}$$

$$F_G = F_Z$$

$$r_1 m \omega^2 = G\,\frac{\mu m}{d^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1 \cdot \omega^2 = G\,\frac{\mu}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\,\frac{\mu}{r_1 d^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{G\,\frac{\mu}{r d^2}} \quad \Big| \quad r = d\,\frac{\mu}{m+\mu}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(m+\mu)}}}}$$

$$\mu = \frac{m\mu}{m+\mu} \qquad m\,\omega^2 \cdot r$$

$$\mu \cdot \omega^2 d = m \cdot \omega^2 \cdot d \cdot \frac{\mu}{m+\mu}$$

$$\frac{m\mu}{m+\mu}\,\omega^2 d = m \cdot \omega^2 \cdot d \cdot \frac{\mu}{m+\mu}$$

$$m\,\cancel{\frac{\mu}{m+\mu}}\,\omega^2 d = m\,\omega^2 d \cdot \cancel{\frac{\mu}{m+\mu}}$$

2 Drehimpulserhaltung

a) $L_0 = L$

$$m\omega_0 r_0^2 = m\,\omega\, r^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}}$$

b) Auf dem Seil wirkt nahe der Masse die Zentrifugalkraft der Masse

$$\boxed{F_s} = F_{ZF} = m\omega^2 r = m\,\omega_0^2\,\frac{r_0^4}{r^4}\,r = \boxed{m\,\omega_0^2\,\frac{r_0^4}{r^3}}$$

c) $$\boxed{W} = -\int_{r_0}^{r}(F - F_{ZF})\,dr = -\int_{r_0}^{r} F\,dr + \int_{r_0}^{r} F_{ZF}\,dr = F_{r_0} - F_r + \int_{r_0}^{r} m\omega_0^2 r_0^4 \frac{1}{r^3}\,dr = F_{r_0} - F_r + m\omega_0^2 r_0^4 \left[-\frac{1}{2r^2}\right]_{r_0}^{r}$$

$$= F(r_0 - r) + m\omega_0^2 r_0^4 \left(\frac{1}{2r_0^2} - \frac{1}{2r^2}\right) = \boxed{F(r_0 - r) - \frac{1}{2} m\omega_0^2 r_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)}$$

Die verrichtebe Arbeit ergibt sich durch das Wegintegral über die Differenz der Zugkraft F (Die als const. betrachtet werden kann) u. der Zentrifugalkraft F_{ZF}.

d) $$E_{kin}(r) = \frac{1}{2} m v(r)^2 = \frac{1}{2}(\omega(r) r)^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_0 \frac{r_0^2}{r}\right)^2 = \omega_0^2 \frac{r_0^4}{2r^2}$$

$$\boxed{E_{kin}(r) - E_{kin}(r_0)} = \omega_0^2 \frac{r_0^4}{2r^2} - \omega_0^2 \frac{r_0^4}{2r_0^2} = \frac{1}{2}\omega_0^2\left(\frac{r_0^4}{r^2} - r_0^2\right) = \boxed{\frac{1}{2}\omega_0^2 r_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)}$$