Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 1.

Abgabe bis Mi, 25.10.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform:

(i) $(1+3i)^2$,

(ii) $\frac{1}{5+i}$,

(iii) $\frac{1+2i}{3+4i}$,

(iv) $\frac{1}{(2+i)(2+2i)}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Wir merken, dass $x+iy = r\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, wobei $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arg(x+iy)\in[0,2\pi)$. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten (i.e. finden Sie r,θ):

(i) 100,

(ii) $5i$,

(iii) $3+2i$,

(iv) $\frac{1}{6+i}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Finden Sie alle komplexwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^4=1$,

(ii) $z^4=-1$,

(iii) $z^2-z+1=0$,

(iv) $z^6+z^3+1=0$,

(v) $z^2=10i$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 2.

Abgabe bis Don, 2.11.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Polarkoordinaten:

(i) $\left(\frac{1}{4-4i}\right)^{20}$,

(ii) $(1+2i)^7$.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Finden Sie alle komplexwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 + (1+i)z + (1-i) = 0$,

(ii) $3iz^2 - iz + (1-i) = 0$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = z^2 - iz + 1$. Skizzieren Sie die Mengen

(i) $\{\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0\}$,

(ii) $\{\mathrm{Im}\,(f(z)) = 0\}$,

(iii) $\{\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0\} \cap \{\mathrm{Im}\,(f(z)) = 0\}$.

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Berechnen Sie $f'(z)$, $\mathrm{Re}\,(f'(z))$, $\mathrm{Im}\,(f'(z))$ für

(i) $f(z) = z^2 - iz + 1$,

(ii) $f(z) = e^{iz}$,

(iii) $f(z) = \sqrt{z}$.

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Finden Sie Komplexe Stammfunktion von

(i) $f(z) = z^2 + (1+i)z + (1-i)$,

(ii) $f(z) = e^{iz}$,

(iii) $f(z) = \sqrt{z}$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 3.

Abgabe bis Mi, 8.11.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}$,

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$. (Sie können die Stirling Formel verwenden: $n! \geq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$)

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ und

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!}$$

die Bessel Funktion der Ordnung p. Zeigen Sie:

(i) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $J_p(z)$ ist ∞.

(ii) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} J_p(z) + \frac{1}{z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} J_p(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) J_p(z) = 0.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (\log n)^2 z^n$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{1}{\log(1+1/n)}} z^n$.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei $F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(ii) Zeigen Sie, dass $F'(z) = \frac{1}{1-z}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $F(1 - e^z) = -z$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 4.

Abgabe bis Mi, 15.11.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} kz^k \times \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ und zeigen Sie, dass $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ mit dem Produkt von Cauchy.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Finden Sie f', f'', f''' von

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k$,

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Schreiben Sie als Potenzreihe mit Zentrum 0, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (i+z)^k$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Wir definieren $\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ und $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 5.

Abgabe bis Mi, 22.11.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (7.5 Punkte)
Wir definieren $z^a := e^{a\ln(z)}$:

(i) Ist $z^{a+b} = z^a z^b \ \forall z, a, b \in \mathbb{C}$?

(ii) Gilt $(z_1 z_2)^a = {z_1}^a {z_2}^a \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{Z}$?

(iii) Und Falls $z_1, z_2, a \in \mathbb{C}$?

Aufgabe 2. (7.5 Punkte)
Berechnen Sie

(i) $\ln(1+i)$,

(ii) $\ln\left(-e^{10}\right)$,

(iii) $(1+i)^{(1+i)}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Bestimmen Sie den Rand der folgenden Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$.

(i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

(ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (1,2)\}$,

(iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$,

(iv) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^z) > 0\}$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Es sei $R > 0$ und $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(i) $\int_\gamma \bar{z} dz$, wobei γ der Streckenzug bestehend aus den Segmenten $[0, i], [i, 1+i]$ ist,

(ii) $\int_\gamma \bar{z} dz$, wobei γ der Streckenzug bestehend aus den Segmenten $[0, 1], [1, 1+i]$ ist,

(iii) $\int_{\gamma_R} z^n \bar{z}^m \, dz$, für $n, m \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\int_{\gamma_R} \mathrm{Re}(z) dz$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 6.

Abgabe bis Mi, 29.11.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sternförmig (eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt sternförmig, wenn es ein $u_0 \in U$ gibt, so dass für alle $u \in U$ die Strecke $[u_0, u] := \{u_0 + t(u - u_0),\, t \in [0,1]\}$ eine Teilmenge von U ist) und sei $\gamma : [a,b] \to U$ einfache geschlossene Kurve.

(i) Finden Sie ein nicht Sternförmiges Gebiet,

(ii) Skizzieren Sie $\gamma, \mathrm{Int}\ \gamma$ und U,

(iii) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Int}\gamma \subseteq U$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Wegintegrale über den Weg $\gamma = \partial B_2(0)$ mit einer positiven Orientierung.

(i) $\int_\gamma \frac{z^3+5}{z-i} dz$,

(ii) $\int_\gamma \frac{e^z}{i\pi - z} dz$,

(iii) $\int_\gamma \frac{z^3+5}{(z+3)(z-1)} dz$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta)) = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(\theta + \sin(\theta)) = 0$.
Hinweis: Summieren Sie das erste Integral mit dem zweiten Integral mal i.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 7.

Abgabe bis Do, 7.12.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Wegintegrale über den Weg $\Gamma = \partial B_2(0)$ mit Positivorientierung:

(i) $\int_\Gamma \frac{z}{(z-i)^3(z+3)} dz$,

(ii) $\int_\Gamma \frac{z^3+5}{(z+1)^3} dz$,

(iii) $\int_\Gamma e^z z^n dz$ wobei $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Aussage: f sei holomorph auf $\mathbb{C}$. Falls $K, R > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $|f(z)| \leq K |z|^m$ für $|z| \geq R$, dann ist f ein Polynom mit Grad höchstens m.
Hinweis: Gucken Sie die $m+1-$ erste Ableitung.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Wegintegrale über den Weg $\Gamma = \partial B_2(0)$ mit Positivorientierung:

(i) $\int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)} dz$,

(ii) $\int_\Gamma \frac{1}{z^3(z-1)} dz$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 8.

Abgabe bis Mi, 13.12.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es sei f holomorph auf $B_1(0)\backslash\{0\}$, beschränkt und besitze eine isolierte Singularität in 0. Zeigen Sie, dass es g holomorph auf $B_1(0)$ existiert, sodass $g(z) = f(z)$ für alle $z \in B_1(0)\backslash\{0\}$.
Hinweis: Laurent Reihe betrachten.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Laurent-Reihe in $z_0 = 0$ für $f(z) = e^{z+1/z}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(ii) Finden Sie alle Singularitäten und Residuen von $f(z) = \frac{\cos(z)}{z\sin(z)}$.

(iii) Finden Sie das Residuum von $f(z) = \frac{\cos(z)}{z\sin(z)^2}$ in 0.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$, mit $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$. Finden Sie Koeffiezienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $k = -N, \ldots, N$ mit $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ikx}$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Hausaufgabenblatt 9.

Abgabe bis Mi, 20.12.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Finden Sie eine Lösung $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0, \\ u(x, 0) = \cos(x) + \cos(100x), \\ \lim_{y \to \infty} u(x, y) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u(x, y) = f_1(y) \cos(x) + f_{100}(y) \cos(100x)$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = |sin(x)|, x \in [0, 2\pi]$.

(ii) Bestimmen Sie periodische Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' + u = |sinx|, x \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der Funktionen $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ auf $[0, 2\pi]$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 10.

Abgabe bis Mi, 10.01.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $\alpha > 0$,

(i) berechnen Sie die Fourier-Transformation von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

(ii) Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $g(k) = \frac{1}{(\alpha + ik)}$ L^1-integrierbar?

(iii) Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformation von g für $x \neq 0$.
Das heißt, berechnen Sie

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{ikx} g(k)\, dk.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen der Halbkreise $\partial\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, |z| < R\}$ *oder* $\partial\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0, |z| < R\}$, *und benutzen Sie den Residuensatz..*

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Transformation von

(i) f definiert als $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(ii) g definiert als $g(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Faltung $f_1 * f_2$ und die Fourier-Transformation von $f_1 * f_2$ für f_1, f_2 definiert als

(i) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ und $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ (*Hinweis: Quadratische Ergänzung*)

(ii)

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

(iii) $f_1(x) = f_2(x) = 1_{[0,1]}(x)$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

Hausaufgabenblatt 11.

Abgabe bis Mi, 17.01.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sei $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$e^{-\frac{1}{2}x\cdot Ax}.$$

Sei A zunächst eine Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ auf der Diagonalen.

(i) Zeigen Sie, dass f_A auf $\mathbb{R}^n$ absolut integrierbar ist.

(ii) Berechnen Sie die n-dimensionale Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}f_A(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)e^{-ik\cdot x}dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Staz von Fubini, um das Integral in n eindimensionale Integrale zu zerlegen.

(iii) Sei nun A eine symmetrische positiv definite Matrix. Was ist dann $\mathcal{F}f_A$ (ohne Beweis)?

(iv) Was ist, wenn A nur positiv semidefinit ist?

Bemerkung: f_A beschreibt bis auf einen Vorfaktor eine Gaussverteilung in mehreren Variablen mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix A.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Überprüfen sie, ob die folgenden Abbildungen $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ Distributionen sind.

(i) $T(\varphi) := (\varphi(0))^2$,

(ii) $T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx$,

(iii) $T(\varphi) := \int_{[0,1]} \frac{d^j}{dx^j}\varphi(x)\; dx$, $j \in \mathbb{N}$,

(iv) $T(\varphi) = \varphi(1) - \varphi(0)$,

(v) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-x^2}dx$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Löse die Wärmegleichung mit Konvektion, also finde $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das das Anfangswertproblem löst

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

mithilfe der Fourier-Transformation in x. *Hinweis:* Schreibe $u(t,x) = \mathcal{F}_k^{-1}(\mathcal{F}_x u)(t,x)$ und finde eine entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung für $\mathcal{F}_x u(t,k)$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

UNIVERSITÄT BONN

Hausaufgabenblatt 12.

Abgabe bis Mi, 24.01.

Für die Klausurzulassung müssen insgesammt 50 % der Punkte erreicht werden. Die Aufgaben dürfen in Gruppen von maximal 3 Personen abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkte)
In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation, um das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{1}$$

zu lösen. Hier ist $h \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variablen x. Gebe auch die Randwerte an.

(ii) Löse die gewöhnliche Differentialgleichung aus (i) für jedes $k \in \mathbb{R}$. Schreibe dann die Lösung mit Fouriermultiplikatoren $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f_t \mathcal{F} h)$.

(iii) Nutze (i) und (ii) um die Lösung der Wellengleichung (1) herzuleiten. *Hinweis:* Gehe wie bei vorherigen Übungsaufgaben dieser Art vor. Das Endergebnis lautet

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ **temperierte** Distributionen sind.

(i) $T(\varphi) := \int_{[0,1]} \frac{d^j}{dx^j}\varphi(x)\, dx$, $j \in \mathbb{N}$,

(ii) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-x^2} dx$,

(iii) $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{x^2} dx$,

(iv) $T = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \delta_x$.

Aufgabe 3 befindet sich auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechne die Faltung $g(x) = \delta_a * \varphi(x)$ und beschreibe das Ergebnis.

(ii) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 : x < 0 \\ 1 : x \geq 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Step-Funktion. Berechne die Faltung $T_f * \varphi$ und beschreibe das Ergebnis.

(iii) Zeige, dass die Faltung von $T = \sum_{t \in 2\pi\mathbb{Z}} \delta_t$ mit φ eine 2π-periodische Funktion ist. Berechne die Koeffizienten von $T * \varphi$ als Fourier-Reihe.