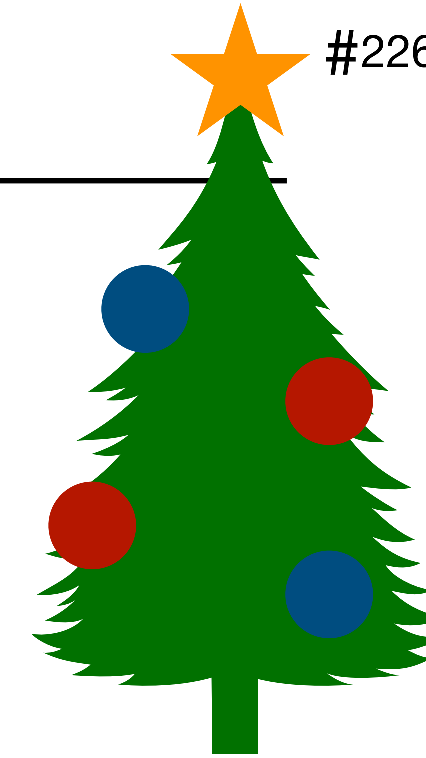
Vorlesung 17

Weihnachtsvorlesung & Probeklausur



Am **21.12.** findet die Physik 1 zur gewohnten Zeit als **Weihnachsvorlesung** statt.

Zur Vorbereitung auf die Klausur werden wir am **23.12** eine **Probeklausur** auf ecampus hochladen

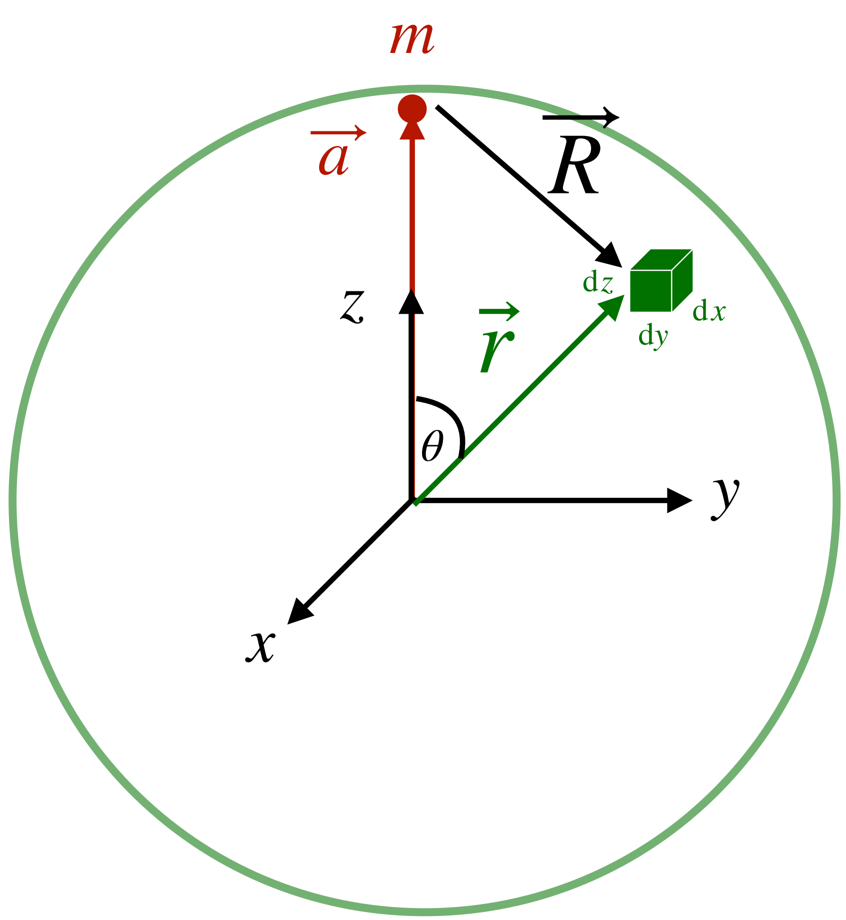
Die Lösungen zu den Aufgaben gibt es im neuen Jahr.

Und heute in der **Pause** : Verleihung des **Bachelorpreises der Physik 2022**

Jakob Dietl
Simon Mutke
Miriam Penners
Peter Schnorrenberg

Wählen Koordinatensystem mit **Ursprung** im **Zentrum der Kugel**

Punkt $\vec{a}$ mit Abstand a auf der z-Achse versetzt mit Probemasse m



Betrachten Volumenelement $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ am

mit Masse $\mathrm{d}M = \varrho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ am Ort $\vec{r}$ der Kugel

Dichte

Abstand zwischen Probemasse und Volumenelement:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad R(\theta) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\theta}$$

folg aus Kosinussatz

Winkel zw. $\vec{a}$ und $\vec{r}$

Das Potential aufgrund von $\mathrm{d}M$ am Ort $\vec{a}$ ist dann

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = -G\frac{\mathrm{d}M\,m}{R(\theta)} = -G\,m\,\varrho\frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z}{R(\theta)} = \boxed{-G\,m\,\varrho\frac{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{R(\theta)}}$$

Transformation in Kugelkoordinaten

Bei einer **symmetrischen Kugel** hängt die **Dichte ϱ nicht von φ** & θ ab.

Wir integrieren daher über beide Größen und erhalten so das Potential einer **Kugelschale** mit Radius r, Dicke $\mathrm{d}r$, und Masse $\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}} = \varrho\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r$.

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \left[-G\, m\, \varrho \frac{r^2 \sin\theta \mathrm{d}r}{R(\theta)} \right] = -\, G\, m\, \varrho\, r^2\, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\sin\theta}{R(\theta)}$$

Das Integral über $\mathrm{d}\theta$ findet man durch folgende Substitution:

$$\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ar\sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} = \frac{ar\sin\theta}{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{R\mathrm{d}R}{ar\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sin\theta}{R}\, \mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{ar}\, \mathrm{d}R = \frac{1}{ar} R$$

Integrationsgrenzen:

$$R(\theta = 0) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} = \sqrt{(a-r)^2} = |\, a - r\,|$$

$$R(\theta = \pi) = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} = \sqrt{(a+r)^2} = |\, a + r\,|$$

i.e. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{R}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{ar}(\,|\,a+r\,| - |\,a-r\,|\,)$$

Wir finden deshalb für das **Potential über einer Kugelschale :**

Radius r

Dicke $\mathrm{d}r$

Masse $\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}} = \varrho\, 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot\,KS}} = -\,G\,m\,\varrho\,r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\sin\theta}{R(\theta)} = -\,G\,m\,\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}} \frac{1}{2ar}\left(\,|\,a+r\,| - |\,a-r\,|\,\right)$$

Außerhalb der Kugelschale : d.h. $a \geq r > 0$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot\,KS}} = -\,G\frac{m\,\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}}}{a} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{F} = -\,\overrightarrow{\nabla}\,\mathrm{d}E_{\mathrm{pot\,KS}} \qquad F_z = -\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{d}E_{\mathrm{pot\,KS}} = -\,G\frac{m\,\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}}}{a^2}$$

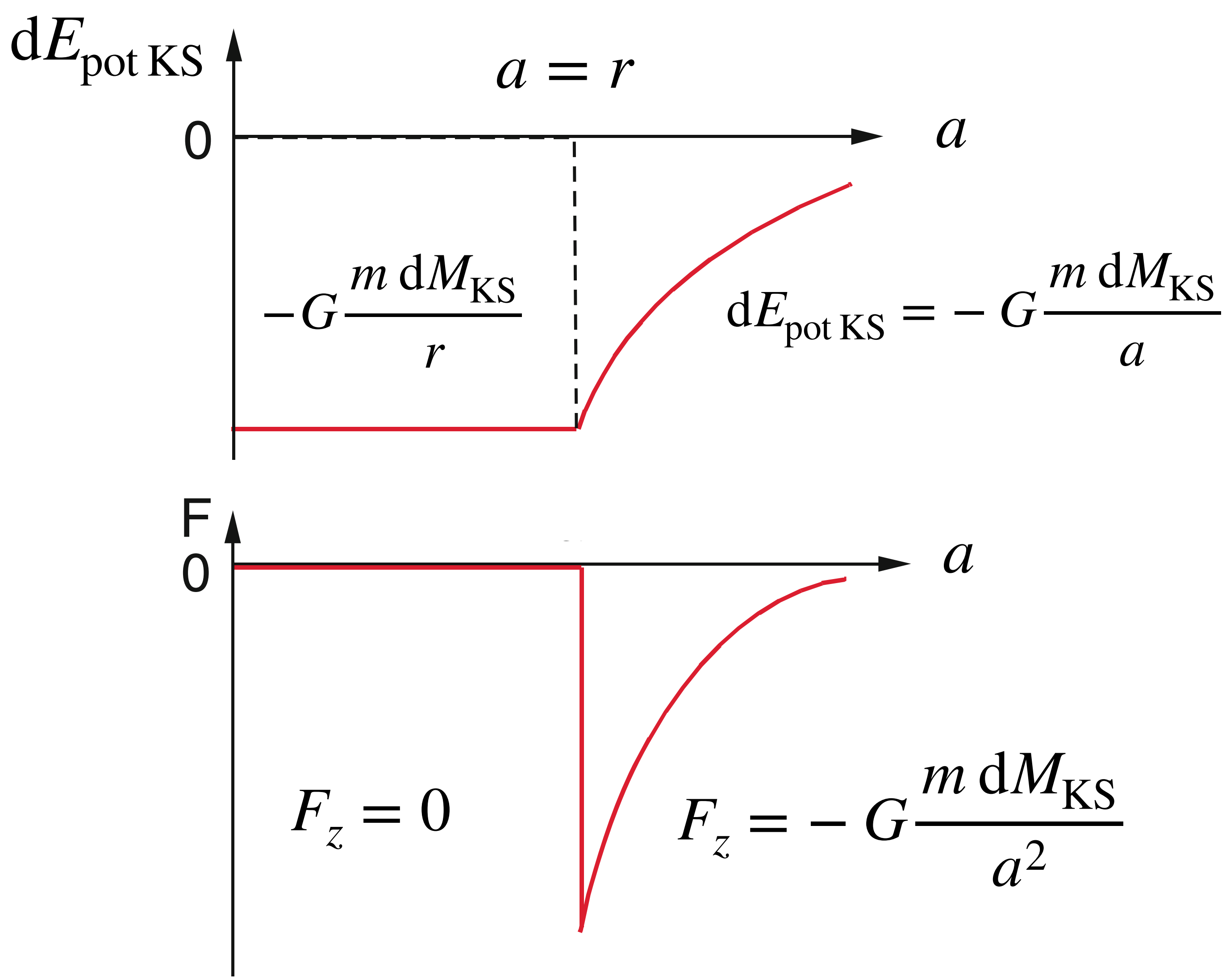
Das Potential hängt **nicht** von der **Größe** der **Kugelschale** ab, sondern nur vom Abstand des Punktes a zum Zentrum und $\mathrm{d}M_{\mathrm{KS}}$. Die Maße der Kugelschale scheint also komplett im Zentrum zu liegen (!)

Innerhalb der Kugelschale : d.h. $r > a > 0$

$$dE_{\text{pot KS}} = -G\frac{dM_{\text{KS}}}{r} \quad \Rightarrow \vec{F} = 0 \qquad F_z = -\frac{d}{da}dE_{\text{pot KS}} = 0$$

Die potentielle Energie hängt **nicht** mehr von der **Position** a **ab** ! D.h. **es wirkt keine Kraft mehr** (da konstantes Potential herrscht)

Hohlkugel :



Potential einer **Vollkugel mit Radius** R_0 und $a > R_0 \geq r$:

Integration über Kugelvolumen

Annahme an $\varrho = \varrho(r) = \text{const.}$

$$\mathrm{d}E_{\text{pot KS}} = -G\,m\,\varrho\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\frac{1}{2ar}\left(|a+r| - |a-r|\right) = -G\,m\,\varrho\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\frac{1}{a}$$

$$E_{\text{pot VK}} = -G\,m\,\varrho\,4\pi\,\frac{1}{a}\int_0^{R_0} r^2\,\mathrm{d}r = -G\,m\,\varrho\,\frac{4\pi}{3a}\,R_0^3$$

$$= -G\,\frac{m\,M}{a} \qquad \rightarrow F_z = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}E_{\text{pot VK}} = -G\frac{m\,M}{a^2}$$

Potential einer **Vollkugel mit Radius** R_0 und Testmasse in der Kugel mit

$r < a < R_0$ und $a < r < R_0$:

$r < a < R_0$:

$$\mathrm{d}E_{\text{pot KS}} = -G\,m\,\varrho\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\frac{1}{2ar}\left(|a+r| - |a-r|\right) = -G\,m\,\varrho\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\frac{1}{a}$$

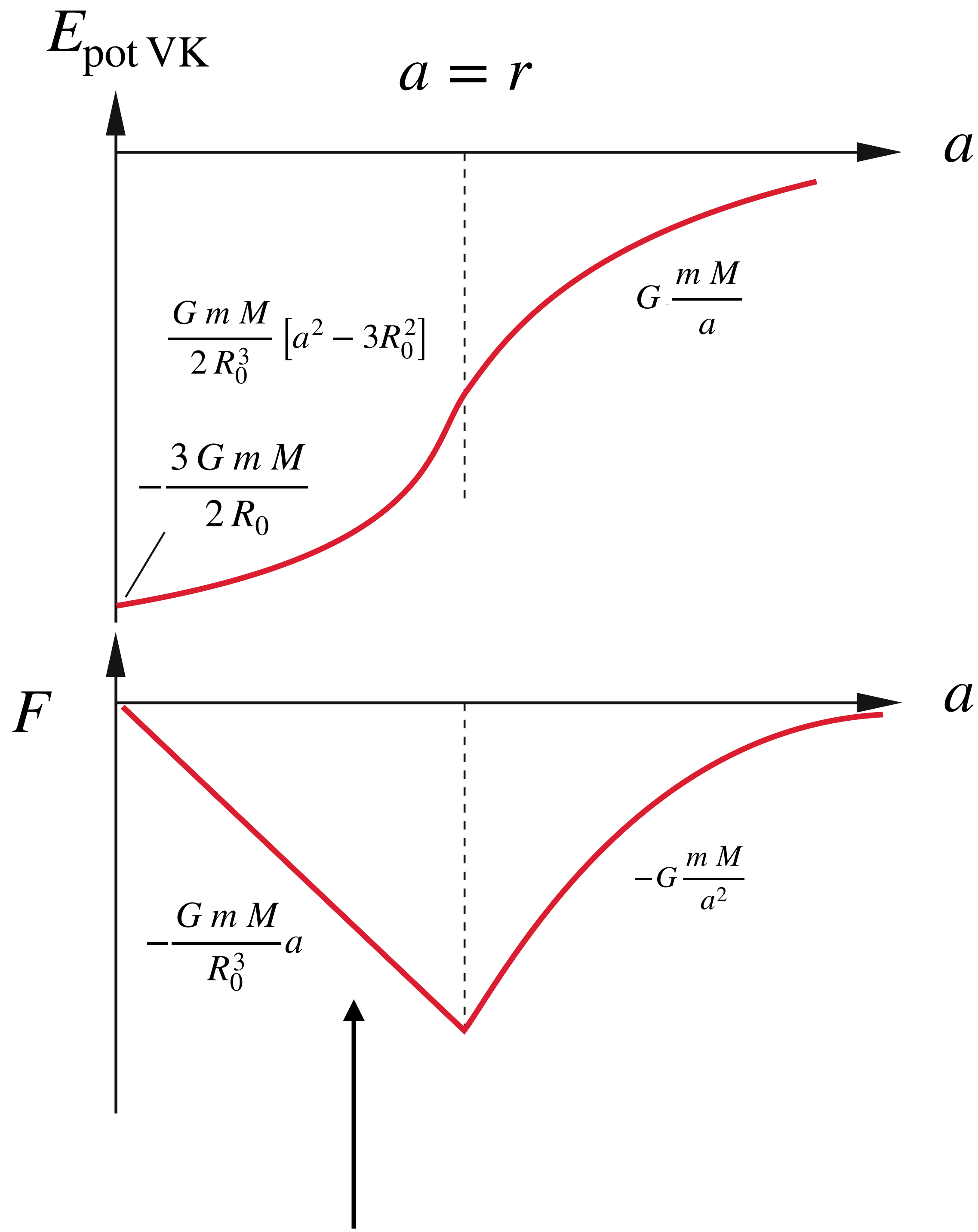
$a < r < R_0$:

$$\mathrm{d}E_{\text{pot KS}} = -G\,m\,\varrho\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\frac{1}{2ar}\left(|a+r| - |a-r|\right) = -G\,m\,\varrho\,4\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$E_{\text{pot VK}} = -G\,m\,\varrho\,4\pi\left[\int_0^a \frac{r^2}{a}\,\mathrm{d}r + \int_a^{R_0} r\,\mathrm{d}r\right] = -G\,m\,\varrho\,4\pi\left[\frac{a^2}{3} + \frac{R_0^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{G\,m\,M}{2\,R_0^3}\left[a^2 - 3R_0^2\right] \qquad \rightarrow F_z = -\frac{G\,m\,M}{R_0^3}a$$

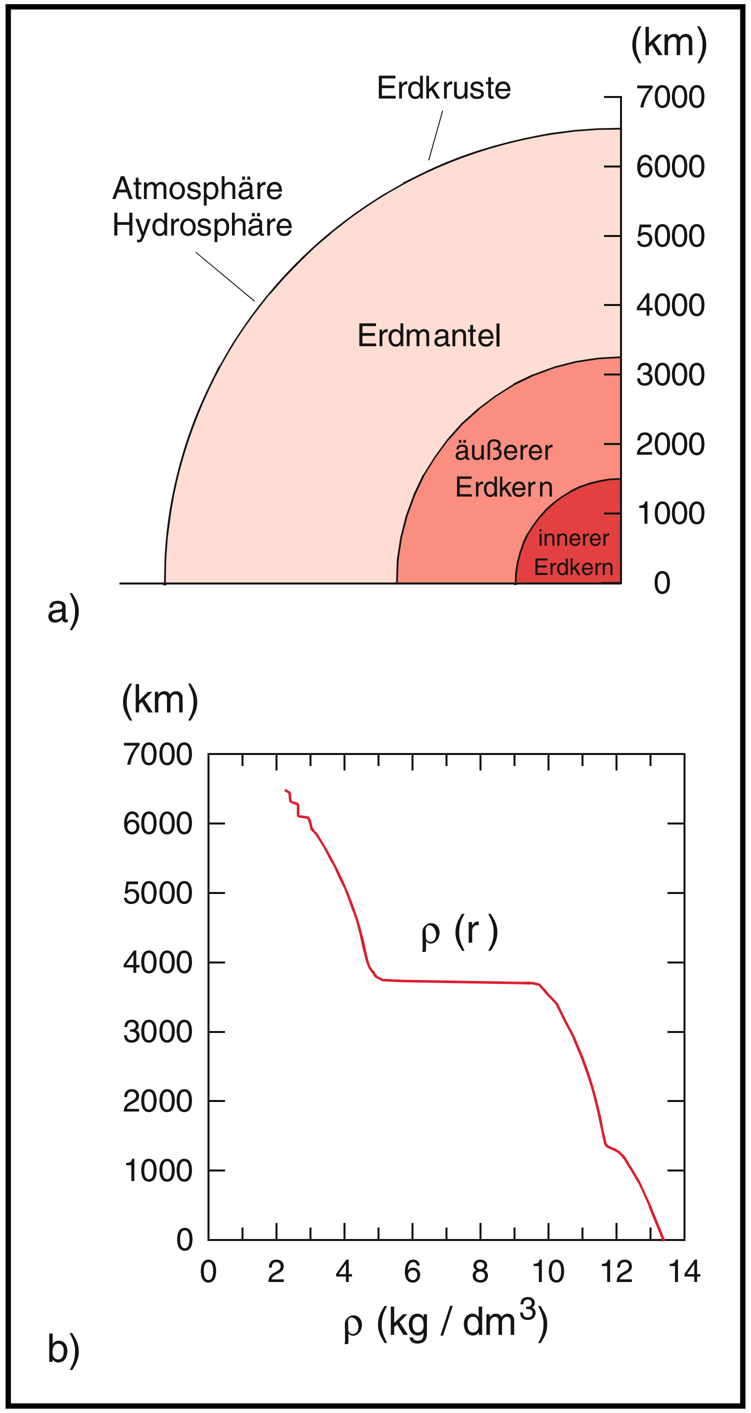
Vollkugel :



Kann man anschaulich verstehen:

Äußere Kugelschale ergibt $F = 0$

Innere Kugelschale hat Kraft $F = -\,G\dfrac{mM'(a)}{a^2} \sim a$ denn $M'(a) \sim a^3$



Für die Erde **komplizierter**, denn dort ist

$\varrho = \varrho(r) \neq \mathrm{const}$ bzw. es gilt sogar eigentlich

$\varrho = \varrho(\vec{r})$

6. Mechanik starrer Körper

6.1 Modell starrer Körper

bisher : (idealisierte) Massenpunkte

jetzt : räumlich ausgedehnte Körper aber nicht verformbar

Modell : System von MPs mit $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$

$\Rightarrow$ Reduktion der Bewegungsgleichungen

- 3 Koordinaten des Schwerpunkts
- Winkelorientierung (3 Rotationswinkel)

Masse $M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$ Dichte $\varrho = \dfrac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow M = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \Delta V_i$

Volumen $V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i$

Grenzfall $N \to \infty, \Delta V_i \to 0$:

$$V = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i =: \int_V \mathrm{d}V$$ Volumenintegral

$$M = \int_V \varrho(x, y, z)\, \mathrm{d}V =: \int_V \mathrm{d}m$$ Schreibweise (kein 1D-Integral)

Volumenintegral: dreifach-Integral

Bsp. Quader : $V = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

Bsp. Kugel → Polarkoordinaten

Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

$$= r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

Achtung: Wahl der Grenzen beschreiben den Körper

- Zerlegen in einfache Koordinaten
- Wahl der Koordinaten