Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

Probeklausur. Dauer 120 Minuten.

Aufgabe 1. Prüfen Sie jeweils für $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, an welchen Punkten die Funktion komplex differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung:

(a) $f(z) = |z|^2$,

(b) $g(z) = \exp(i \sin(z))$,

(c) $h(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$,

wobei jeweils $z = x + iy$.

Aufgabe 2. (a) Sei $\log : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ ein holomorpher Zweig des Logarithmus und $f(z) = z \log(z) - z$. Berechnen Sie $f'(z)$.

(b) Zeigen Sie, dass $g(z) = \exp(1/z)$ keine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat.
Hinweis: Berechnen sie das Residuum bei $z = 0$.

Aufgabe 3. Sei

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z - 3i)^2 (z + 2i)}$$

und definiere die Halbkreise $\gamma_R : [0, \pi]$ für $R > 0$ durch $\gamma_R(t) = Re^{it}$.

(a) Berechnen sie

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

(b) Berechnen sie alle Residuen von f.

(c) Finden sie

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx.$$

Aufgabe 4. Sei

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x - \pi)^2 \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die 2π-periodische Fortsetzung von f.

(b) Die N-te partielle Fouriersumme von f ist

$$f_N(x) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx}$$

Schreiben Sie $f_1(x) = \alpha + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x)$.

(c) Prüfen Sie, ob die Reihe f_N im Limes $N \to \infty$ gleichmäßig nach f konvergiert. Wie groß muss man N wählen, damit $\sup_x |f(x) - f_N(x)| \leq \frac{1}{100}$?

Aufgabe 5. (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(x) = e^{-|x|}$. Berechnen Sie $\mathcal{F}f(k)$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformation $\mathcal{F}T_f$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, im Sinne von temperierten Distributionen.

Aufgabe 6. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem für die Schwartz-Funktion $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von (1).

(b) Lösen Sie die Fourier-transformierten Gleichungen als gewöhnliche Differenzialgeleichung in t (für festes k).

(c) Lösen sie (1) als Faltung mit u_0.