Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 3: Parität und der endliche Potentialtopf

<u>Deadline:</u> Mittwoch 08.05.2024 18.00 via eCampus

Der Paritätsoperator

Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine quadrat-integrable Funktion. Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist definiert durch

$$(\hat{P}\psi)(x) = \psi(-x)\,.$$

1. (2 Punkte) Zeigen Sie dass $\hat{P}$ ein hermitischer linearer Operator of dem Hilbertraum der quadrat-integrablen Funktionen ist, mit der Eigenschaft, dass $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$.
2. (2 Punkte) Zeigen Sie dass die Eigenwerte von $\hat{P}$ ± 1 sind, und dass die entsprechenden Eigenfunktionen die geraden und ungeraden Funktionen sind.
3. (1 Punkt) Es sei $\hat{H}$ ein hermitischer Operator auf dem Raum der quadrat-integrablen Funktionen der mit $\hat{P}$ kommutiert. Zeigen Sie dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenfuntkionen für $\hat{H}$ gibt, die alle entweder gerade oder ungerade sind.

Der endliche Potentialtopf

Ein freies Teilchen der Masse m und Energie E befindet sich in einem Potentialtopf der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0\,, & |x| \geq L\,, \\ 0\,, & |x| < L\,, \end{cases}$$

Dies ist ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung gebundener Zustände (z.B. Nukleonen innerhalb eines Atomkerns).

Ziel ist es, die Eigenfunktionen und Eigenwerte zu bestimmen als Funktion von L und $V_0 > E$, d.h., alle Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\hat{H}\psi = E\,\psi\,, \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,.$$

1. (1 Punkt) Zeigen Sie dass es eine Basis an Eigenfunktionen für $\hat{H}$ gibt, deren Elemente alle gerade oder ungerade Funktionen sind (Benutzen Sie die Ergebnisse aus Frage 1!).

Es folgt dass wir getrennt die geraden und die ungeraden Eigenfunktionen bestimmen können. Wir beginnen mit der Bestimmung der geraden Eigenfunktionen, und bestimmen in einem zweiten Schritt die ungeraden Eigenfunktionen.

2. (3 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeiner Form aller geraden Eigenfunktionen. Zeigen Sie dass die entsprechenden Eigenwerte E Lösung der folgenden Gleichung sind:

$$\tan z = \frac{\sqrt{\zeta^2 - z^2}}{z}\,, \qquad z = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mE}\,, \qquad \zeta = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV_0}\,. \tag{1}$$

3. (2 Punkte) Gleichung (1) kann nicht in geschlossener Form gelöst werden. Indem die rechte und linke Seite graphisch als Funktion von z dargestellt werden, lassen sich dennoch die Haupteigenschaften ablesen. Bestimmen Sie auf diese Weise die Anzahl der Lösungen als Funktion von z und ζ.

4. (3 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeiner Form aller ungeraden Eigenfunktionen. Zeigen Sie dass die entsprechenden Eigenwerte E Lösung der folgenden Gleichung sind:

$$-\cot z = \frac{\sqrt{\zeta^2 - z^2}}{z}\,, \qquad z = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mE}\,, \qquad \zeta = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV_0}\,. \tag{2}$$

4. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen als Funktion von z und ζ anhand einer ähnlichen graphischen Darstellung wie im geraden Fall.

5. (1 Punkt) Indem Sie die graphischen Darstellungen für den geraden und ungeraden Fall vergleichen, zeigen Sie dass die Eigenfunktion mit dem kleinsten Eigenwert (der sogenannte *Grundzustand*) immer eine gerade Funktion ist. Alle anderen Lösungen nennt man *angeregte Zustände*.

6. (1 Punkt) Bestimmen Sie die Gesamtanzahl N an Lösungen als Funktion von z und ζ.

7. (1 Punkt) Wir bezeichnen die Lösungen im Folgenden mit $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_{N-1}$, und die entsprechenden Eigenfunktionen mit $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_{N-1}(x)$ (also $\hat{H}\phi_k(x) = E_k\phi_k(x)$. Zeigen Sie dass $\phi_k(-x) = (-1)^k\,\phi_k(x)$.

8. (1 Punkt) Bestimmen Sie eine Bedingung zwischen L und V_0 so dass es maximal 5 Eigenfuntkionen mit Eigenwert $E < V_0$ gibt.