Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

UNIVERSITÄT BONN

Präsenzaufgabenblatt 11.

Präsenzaufgabe 1. Finde die Fourier-Transformation folgender temperierter Distributionen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

(i) $\partial\partial\delta_0$ (die zweite distributionelle Ableitung),

(ii) T_{x^n} für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) T_P wobei $P(x) = \sum_{n=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom n-ten Grades ist.

Präsenzaufgabe 2. In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation um das Anfangswertproblem der Wellengleichung zu lösen:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

g ist eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Randwerte der Funktion bestimmt. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variablen x. Gebe auch die Randwerte an.

(ii) Löse für jedes feste $k \in \mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung in t, die in (i) berechnet wurde.

(iii) Löse die Wellengleichung (1). *Hinweis:* Die Fourier-Transformation von δ_0 ist 1.

Präsenzaufgabe 3. Wir definieren die Indikatorfunktion einer Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als

$$\begin{aligned} \chi_U : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Berechne beide partiellen distributionellen Ableitung der Indikatorfunktion χ_Q.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet. Zeige, dass die partielle distributionelle Ableitung von χ_U gegeben ist durch

$$\partial_i T_{\chi_U}(\varphi) = -\int_{\partial U} \varphi(x) n_i(x) dS^{n-1}(x),$$

wobei $n : \partial U \to \mathbb{R}^n$ das nach außen zeigende Einheitsnormalenvektorfeld auf ∂U ist. Hinweis: Benutze den Gauß-schen Divergenzsatz $\int_U \partial_i \varphi(x)\,dx = \int_{\partial U} \varphi(x) n_i(x)\,dS^{n-1}(x)$.

(iii) Sei $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dreiecksfunktion

$$D(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die erste und zweite distributionelle Ableitung von T_D.