HA07

Lisa Peltzer und Angelo Brade

Sonntag, 20. November 2022 12:34

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ
11,5/12	0,5/3	1/3	0/4	2/2	3/4	2/2	20/25

Schaut trotzdem mal rein!

(1)

a) Gerne angeben, was ihr nutzt

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\cdot n!} = \frac{1}{2\cdot n!}\cdot z^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\cdot n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n!} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n!}}} \Rightarrow R \to \infty$ ✓ +2P

A.h. konvergiert für alle z.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n \Rightarrow a_n = \frac{n+2}{2^n} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+2}{2^n}}} \Rightarrow R = 2$ ✓ $\sqrt[n]{\frac{n+2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n+2}}{2} = \frac{(n+2)^{\frac{1}{n}}}{2} \stackrel{\lim}{=} \frac{(n+2)^0}{2} = \frac{1}{2}$

+2P ok

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} z^n \Rightarrow a_n = \frac{3^{n+2}}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{n+2}}{2^n}}} \Rightarrow R = \frac{2}{3}$ ✓ +2P

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{3^{n+2}}{2^n}} = \underset{3}{\sqrt[n]{3^n}}\cdot\underset{1}{3^{\frac{2}{n}}}\cdot\underset{\frac{1}{2}}{2^{-\frac{n}{n}}} \underset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{3}{2}}$$

Bitte immer sagen, wenn die Aufgabe woanders weiter geht

(4) sagen, welche Schritte ihr macht für Nachvollziehbarkeit, so kann ich Fehler nur schwer finden, dafür hab ich nicht die Zeit

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 3 & 1 & 0\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 3 & 0\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 24 & -3 & 0\end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \mid x_3 = \frac{x_4}{8},\ x_2 = -\frac{3x_4}{20},\ x_1 = -\frac{9x_4}{40})$ f +0P

b)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 16\\ -1 & 4 & 3 & 1 & -11\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 16\\ 0 & 6 & 1 & 3 & -18\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 16\\ 0 & 0 & 24 & -3 & 6\end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \mid x_3 = \frac{2+x_4}{8},\ x_2 = \frac{-122-5x_4}{40},\ x_1 = \frac{66+15x_4}{40}$ f +0P 0/4

(5)

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & 2z = 1-2a & \\ \text{II} & 3x+y = a & \text{II}+\text{III} \\ \text{III} & 4z-x-y = a+2 & \end{array}$$

II' $4z + 2x = 2a + 2 \quad | -4z$

$2x = 2a+2-4z \quad | :2$

$x = a+1-2z \quad | 2z \to 1-2a$

$x = 3a$

II $3x+y = a \quad |$

$9a + y = a \quad | -9a$

$y = -8a$

III $4z - x - y = a+2$

$4z - 3a + 8a = a+2 \quad | -5a$

$4z + 5a = a+2 \quad | -5a$

$4z+5a=a+2 \quad |-5a$

$4z=-4a+2 \,|:4$

$z=-a+\frac{1}{2}$

$\mathbb{L}=\{a,x,y,z\in\mathbb{R} \mid x=3a,\ y=-8a,\ z=-a+\frac{1}{2}\}$ ✓

Der Parameter a kann jede reelle Zahl $\mathbb{R}$ annehmen. ✓

2/2

(6)

b) in $\mathbb{Z}_5$

was ist $\frac{4}{3}$ in $\mathbb{Z}_5$? was ist "−" in $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
I & 1 & 2 & 0 & 2 \\
II & 2 & 3 & 1 & 2 \\
III & 3 & 3 & 3 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc|c}
I+\frac{4}{3}III & 0 & 1 & 4 & 2 \\
 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
III-II & 0 & 1 & 4 & 2
\end{array}$$

$y=2-4z=2+z$

$2x+3y+z=2 \Rightarrow 2x+3(2+z)+z=$

$2x+1+3z+z=2$

$\Leftrightarrow$

$2x+1+4z=2$

$2x+4z=1$

$2x=1+z \quad |\cdot 6$ $\quad 6\notin\mathbb{Z}_5$

$x=3+3z$

$\mathbb{L}=\{x,y,z\in\mathbb{Z}_5 \mid x=3+3z,\ y=2+z\}$ ✓ +1P

(3)

Da f eine stetige Funktion ist und im Intervall $x\in[a,b]$ ein $Bild(f)\subseteq[a,b]$ hat, muss f einen Punkt auf der Geraden haben, die von den Eckpunkten (a,a) bis (b,b) geht. Warum? Bild(f) könnte auch auf einem kleineren Teil sein, oder? Entsprechende Gerade ist die Funktion $g(x)=x$.

Folgedessen muss es ein x geben, sodass $\tilde{f}=f(x)-g(x)=f(x)-x$: $\tilde{f}=0$ ist.

Da bei $\tilde{f}=0$, $f(x)=x$ ist, gibt es einen Fixpunkt (x,x), den f schneidet.

richtige Richtung

1/3

1.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} \cdot (z-1)^{2n}$

Konvergenzradius r

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1 \checkmark$$

$\underset{\to 1}{}$

+2P

weil $(z-1)^{2n}$: $\sqrt{1} = \pm 1$

für $|z-1| < 1$ konvergiert die Reihe

Betrag!

$-1 < |z-1| < 1 \quad |+1$

$0 < z < 2$ ok

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z+2)^n$

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n} = 0 \checkmark$$

geht nicht!

für $|z+2| < 0$ konvergiert die Reihe

$|z+2| < 0 \quad |-2$

$z < -2$ Betrag! +1,5P

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{(2+\frac{1}{n})^n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n} \cdot (2+z)^{2n}$

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\underset{\to 2 \ \to 0}{}$

weil $(2+z)^{2n}$: $r = \sqrt{2}$ ✓ +2P

für $|2+z| < \sqrt{2}$ ist die Reihe konvergent

$-\sqrt{2} < 2+z < \sqrt{2} \quad |-2$

$-\sqrt{2}-2 < z < \sqrt{2}-2$ Betrag

11,5/12

Auf 2.

a) surjektiv: $\forall y \in N \quad \exists x \in M : y = f(x)$

injektiv $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Definition 4.21:

Seien X, Y beliebige Mengen. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt

(a) **injektiv**, falls gilt: $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$,
(b) **surjektiv**, falls es für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$, und
(c) **bijektiv**, falls sie surjektiv und injektiv ist.

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan(x_1) < \tan(x_2)$

warum?

weil tangens im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend ist gilt:

$\tan(x_1) < \tan(x_2)$ und das impliziert $\tan(x_1) \neq \tan(x_2)$. Daher ist der tangens injektiv

Zwischenwertsatz:

$u \in (\tan(x_1), \tan(x_2))$ (falls $\tan(x_1) < \tan(x_2)$) existiert ein $c \in (x_1, x_2)$ min $\tan(c) = u$

also ist tangens surjektiv

Weil der tangens sowohl surjektiv als auch injektiv ist, ist er bijektiv

+0P

Sin und cos stetig. $\forall \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\cos x \neq 0$
$\Rightarrow$ tan ist stetig
$x, y \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $x < y$
(Satz: 4.28/28)
sin in Intervall streng monoton wachsend $\quad 0 \leq \sin x < \sin(y)$
cos in Intervall streng monoton fallend $\quad \cos x > \sin x > 0$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y}$ für $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$
Ungerade
$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
$\Rightarrow$ tan wächst auch streng monoton in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$
Nach Satz 4.23 a) ist der tan bijektiv

b) Nach Satz 4.23 ist $\tan^{-1}$ dann stetig, da tan stetig und streng monoton wachsend.

b) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

tangens ist für $x_0 = 0$ als $\tan(0) = 0$ definiert

$\lim_{x \to 0^+} \tan(x) = \lim_{x \to 0^+} \tan(0) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \tan(x) = \lim_{x \to 0^-} \tan(0) = 0$

$\tan(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tan(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tan(x_0)$ ⟸ was soll das zeigen, dass ist nur eine Behauptung

tangens ist also stetig nicht gezeigt

Satz 4.23: bijektiv

Seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a < b$ und $c < d$. Sei die Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$a \leq u < v \leq b \Rightarrow f(u) < f(v)$$

mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

(a) f ist bijektiv,
(b) f besitzt eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$, sodass für alle $x \in [a,b]$: $f^{-1}(f(x)) = x$, und sodass für alle $y \in [c,d]$: $f(f^{-1}(y)) = y$;
(c) f^{-1} ist bijektiv und streng monoton wachsend;
(d) f^{-1} ist stetig.

Beweis:
(a) Es ist f monoton wachsend und $f(u) < f(v)$ impliziert $f(u) \neq f(v)$. Daher ist f injektiv und aufgrund der Bemerkung nach dem Zwischenwertsatzes ist f surjektiv.

(c) f^{-1} ist injektiv: Seien $y, y' \in [c,d]$ und $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Dann ist

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(y')\right) = y'.$$

f^{-1} ist surjektiv: Sei $x \in [a,b]$. Dann ist $f^{-1}(f(x)) = x$, das bedeutet, dass x im *Bild* von f^{-1} liegt.

Stetigkeit zeigen ⟸ in einem Punkt!

Eine Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn sie 3 Bedingungen erfüllt:

1. Die Funktion ist an der Stelle x_0 definiert: $f(x_0)$ existiert.
2. Der rechts- und linksseitige Grenzwert sind an der Stelle x_0 gleich: Der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.
3. Der Grenzwert ist gleich dem Funktionswert: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist die Stetigkeit einer Funktion an jeder Stelle gegeben, handelt es sich um eine stetige Funktion.

Satz 4.23 sagt dass die Funktion f wenn sie stetig und streng monoton wachsend ist, eine eindeutig bestimmte Umkehrfunkt f^{-1} hat. f^{-1} ist bijektiv, streng monoton wachsend und stetig.

Da der tangens stetig und streng monoton wachsend ist, gilt der Satz 4.23.

Damit ist auch die Umkehrfunktion $\tan^{-1}$ stetig ok

+0,5P

0,5/3

Auf 6 a)

$$\begin{aligned} x + 2y \phantom{{}+ z} &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \\ - \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot 3 \\ - \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ - \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \{x, y, z \mid x = (-2) - 2z \;;\; y = 2 + z\}$ ✓

+2P

3/4

Auf 7

$$4x + 3y + z = a$$
$$2y + z = 3-a$$
$$x + 3y + z = 1+2a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & a-(1+2a) \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & a-1-2a \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \; |:3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 1 & 3 & 1 & 1+2a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 & 3-a \\ 0 & 3 & 1 & \frac{4}{3}+\frac{7a}{3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{10a}{3} \\ 0 & 3 & 1 & \frac{4}{3}+\frac{7a}{3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{10a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3}-\frac{23a}{3} \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}+\frac{10a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3}-\frac{23a}{3} \end{array}\right) \qquad x = -\frac{a}{3}-\frac{1}{3} \qquad y = -\frac{5}{3}+\frac{10a}{3} \qquad z = \frac{19}{3}-\frac{23a}{3}$$

$$4\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\right)+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right)+\left(\frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right) = a$$
$$-\frac{4a}{3}-\frac{4}{3}-\frac{15}{3}+\frac{30a}{3}+\frac{19}{3}-\frac{23a}{3} = a$$
$$a = a$$

$$\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\right)+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right)+\frac{19}{3}-\frac{23a}{3} = 1+2a$$
$$-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}-\frac{15}{3}+\frac{30a}{3}+\frac{19}{3}-\frac{23a}{3} = 1+2a$$
$$1+2a = 1+2a$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a$$

$$2\cdot\left(-\frac{5}{3}+\frac{10a}{3}\right)+\left(\frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right) = 3-a$$
$$-\frac{10}{3}+\frac{20a}{3}+\frac{19}{3}-\frac{23a}{3} = 3-a$$
$$3-a = 3-a$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a$$

$$\mathbb{L}\left\{x,y,z,a \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{a}{3}-\frac{1}{3},\ y = -\frac{5}{3}+\frac{10a}{3},\ z = \frac{19}{3}-\frac{23a}{3}\right\}$$ ✓

2/2