Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 5.

Präsenzaufgabe 1. Sei $\hat{\gamma} : [a;b] \to \mathbb{C}$ ein einfacher und geschlossener Integrationsweg und sei $\gamma : [a,b] \to \mathrm{Int}\hat{\gamma}$ ein anderer einfache und geschlossener Integrationsweg.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ext}\hat{\gamma} \subseteq \mathrm{Ext}\gamma$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Int}\gamma \cup \mathrm{Sp}\gamma \subseteq \mathrm{Int}\hat{\gamma} \cup \mathrm{Sp}\hat{\gamma}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Int}\gamma \subseteq \mathrm{Int}\hat{\gamma}$.

Präsenzaufgabe 2. Berechnen Sie das folgende Wegintegral:

(i) $\int_\gamma z^3 + 2z^2 dz$, wobei $\gamma(t) = it^3 + 3t^2, t \in [0,1]$.

(ii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} dz$, wobei $\gamma(t) = \cos(t)^3 + 3i\sin(t)^3, t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} dz$, wobei $\gamma(t) = \cos(t) + 3i\sin(t), t \in [0, 4\pi]$.

Präsenzaufgabe 3. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(i) $\left|\int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1} dz\right| \leq \frac{2\pi R(R+1)}{|R-1|}$, wobei $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ für $R \neq 1$.

(ii) $\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^4} dz\right| \leq \frac{\pi}{R^3}$, wobei $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$ für $R \neq 0$.

(iii) $\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2+1} dz\right| \leq \sqrt{2}$ wobei $\gamma(t) = t(1+i), t \in [0,1]$.