Theo 4; Zettel 9: Marc Haue, Franka Weronek, Angelo Brade; 12.12.24

Aufgabe 1:

a) I: $E_n = \sum_i^N \varepsilon_{i,n}$ mit $\varepsilon_i \in \{\varepsilon_-, \varepsilon_+\}$ und $l_i \in \{l_-, l_+\}$

II: Fester $L \Rightarrow \left(\forall n: L = \sum_i l_{i,n}\right) \Rightarrow \left(\forall n: \mathcal{E} = \sum_i \varepsilon_{i,n}\right) \Rightarrow E_i = E_j$

$\Rightarrow$ Normierung mit $\frac{1}{N!}$ (α_n von $\{- - 1 - -\}$ = α_n von $\{- 1 - - -\}$)

(I) & (II):

$$\Rightarrow Z_c(T, L, N) = \frac{1}{N!} \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_n e^{-\beta \sum_i^N \varepsilon_{i,n}}$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_n \prod_i^N e^{-\beta \varepsilon_{i,n}} \quad | \text{Unabhängiges zwei Zustandssystem}$$

$$= \frac{1}{N!} \left[e^{-\beta \varepsilon_+} + e^{-\beta \varepsilon_-}\right]^N \quad \square$$

b) Differential der Freien Energie: $dF = -SdT - pdV + \mu dN$

Die Freie Energie ist abhängig von der Inneren Energie, wobei diese die Energie $\mathcal{E} = \sum_i^N \varepsilon_i$ enthält, wobei $\varepsilon_i = \varepsilon_i(l_i)$ mit $l_i = l_i(L)$ da $L = \sum_i^N l_i$.

Also: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(L)$. $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial L}$ ist eine Ableitung einer Energie nach dem Weg, also die Kraft: $K = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{N,T}$ mit „-" als Konvention

c) Da $L = \sum_i^N l_i = N \frac{1}{N} \sum_i^N l_i = N \langle l_i \rangle$ folgt:

$$\Rightarrow K = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{N,T}$$

$$= -\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial L}\right)$$

Mit $F = -k_B T \ln(Z_c(N))$ erhalten wir:

$$K = k_B T \left[\ln\left(e^{-\beta \varepsilon_+} + e^{-\beta \varepsilon_-}\right) - \frac{\partial}{\partial N} \ln(N!)\right] \frac{1}{\langle l_i \rangle} \quad | N \gg 1: \ln(N!) \approx N \ln(N)$$

$$= k_B T \left[\ln\left(e^{-\beta \varepsilon_+} + e^{-\beta \varepsilon_-}\right) - \ln(N) - 1\right] \frac{N}{L}$$

$\square$