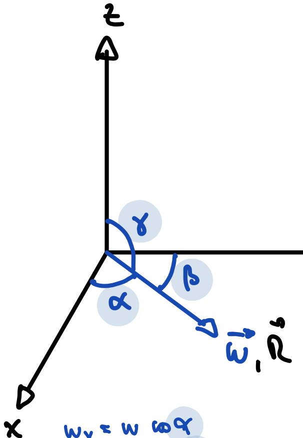
Eulerwinkel & Rotationsenergie



$\omega_x = \omega \cos\alpha$
$\omega_y = \omega \cos\beta$
$\omega_z = \omega \cos\gamma$

$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{I}} \vec{\omega}$ ← Trägheitstensor (Matrix)

versus

$E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 I$ ← Trägheitsmoment (skalar)

Vergleich:

$$\frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \underline{\underline{I}} \vec{\omega}$$
$$= \cos^2\alpha\, \omega^2 I_{xx} + \cos^2\beta\, \omega^2 I_{yy} + \cos^2\gamma\, I_{zz}$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\beta\, \omega^2 I_{xy} + 2\cos\alpha\cos\gamma\, \omega^2 I_{xz} + 2\cos\beta\cos\gamma\, \omega^2 I_{yz}$$

Führe neuen Vektor $\vec{R} \parallel \vec{\omega}$ ein mit: $x = R\cos\alpha$, $y = R\cos\beta$, $z = R\cos\gamma$

$$R^2 I = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}$$

Trägheitsellipsoid wenn $k = M R_m^4$ ← mittlerer Radius

⇕

quad. Gleichung, welche mit $R^2 I = k = const.$ Ellipsoiden darstellt

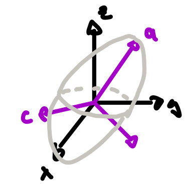
Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse $\vec{\omega}$:

$$I_\omega = \frac{k^2}{R^2}$$

↑ Durchstoßpunkt TE

I klein entlang langgestreckter Achsen!

Hauptträgheitsachsen: (HTA) Finde neues Koordinatensystem $\{a, b, c\}$ entlang der Symmetrie-Achsen



$$\rightsquigarrow \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor diagonal

Konvention: $I_a \leq I_b \leq I_c$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c)$$
$$= \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c}$$

$(L_x = \omega_x I_x)$

Vorlesung 22

Sind alle HTA unterschiedlich $(I_a \neq I_b \neq I_c)$: asymmetrischer Kreisel

Sind mind. 2 HTA identisch: symm. Kreisel

- $I_a < I_b = I_c$: prolater Kreisel
- $I_a = I_b < I_c$: oblater Kreisel
- $I_a = I_b = I_c$: sphärischer Kreisel (Würfel, Kugel)

→ Da $E_{rot} = \frac{L}{2I}$ wollen Systeme ohne Auslenkung so ändern, dass I minimal wird ⇝ Rotation um kleinstes (oder mittleres) I instabil

Eulersche Gleichungen:

Laborsystem: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$

im HAS: $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{dL}{dt} - (\vec{\omega} \times \vec{L})$

↳ $\vec{D} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})$

$$\boxed{\begin{aligned} D_a &= I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b)\omega_c\omega_b \\ D_b &= I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c)\omega_a\omega_c \\ D_c &= I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_a - I_c)\omega_b\omega_a \end{aligned}}$$ } 3 gekopp. DGL

z. B. Kräftefreier symm. Kreisel

$I_a = I_b \neq I_c$ & $\vec{D} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 0 &= \dot{\omega}_a + \Omega\omega_b \\ 0 &= \dot{\omega}_b - \Omega\omega_a \\ 0 &= \dot{\omega}_c \end{aligned}} \quad \Omega = \frac{I_c - I_a}{I_a}\omega_c$$

Lösung: $\omega_a = A\cos\Omega t$
$\omega_b = A\sin\Omega t$
$\omega_c = C$