Vorlesung 16 – 7.12.2023

- Fourier-Reihen: Zerlegung von 2π-periodischen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in einfache Wellen:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikx}.$$

- Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) g(x)\, dx$, der die stetigen Funktionen enthält.
- Satz von Fischer-Riesz: Sei $f \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$. Definiere Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx$. Dann ist

$$f = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} \text{ in } L^2 \text{ und } \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$