Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 9

Aufgabe 1 (2 Punkte). Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2a+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1+a \end{pmatrix}$$

aus der reellen Ebene linear unabhängig?

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte). Betrachten Sie die folgenden fünf Vektoren aus dem reellen Raum:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Dünnen Sie die Menge dieser fünf Vektoren zu einer Basis aus.

(c) Stellen Sie die verbleibenen Vektoren als Linearkombination der gefundenen Basis dar.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte). Betrachten Sie die folgenden vier Vektoren in $\mathbb{C}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

(a) Fassen Sie $\mathbb{C}^2$ in der üblichen Weise als $\mathbb{C}$-Vektorraum auf. Zeigen Sie in diesem Raum die lineare Abhängigkeit der obigen vier Vektoren.

(b) Fassen Sie $\mathbb{C}^2$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Zeigen Sie in diesem Raum die lineare *Un*abhängigkeit der obigen vier Vektoren.

(c) Fassen Sie $\mathbb{C}^2$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Zeigen Sie in diesem Raum, dass obigen vier Vektoren eine Basis bilden.

Aufgabe 4 (1+2+1 Punkte). Gegeben seien die Polynome $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ und $p_2(x) = (x-2)(x-3)$ im Vektorraum der Polynome bis zum zweiten Grad.

(a) Stellen Sie das Polynom $p_3(x) = 5x$ als Linearkombination von p_1, p_2 dar.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Polynome p_1 und p_2 linear unabhängig sind.

(c) Bilden die beiden Polynome eine Basis des oben genannten Vektorraums?

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**.** Geben Sie für den folgenden Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ die Dimension an, wobei (a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und (b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 + x_3 \}$$

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**.** Welche Dimensionen haben die Unterräume des $\mathbb{R}^5$?

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ s-t \\ t+\pi s \\ t-2t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \} \quad \text{und} \quad U_2 = \mathcal{L}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \}$$

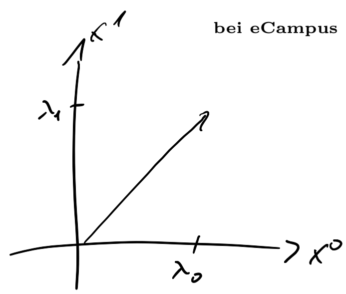
$$\begin{pmatrix} 2t \\ s-t \\ t+\pi s \\ t-2t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ \pi \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie die Menge U aller reellen Polynome im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 5, die durch den Koordinatenurspung gehen. Beweisen oder widerlegen Sie, dass U ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie ggf. die Dimension von U.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe am Donnerstag, den 08. Dezember, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.



$\lambda_1 x^1 + \cancel{\lambda_2 x^0}$

$u(x), v(x); \; (u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$