Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

13.12.2024
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 10

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 20.12.2024)

Quickies

a) Warum kann der Grundzustand in bosonischen Systemen makroskopisch besetzt werden?

b) Geben Sie die Teilchenzahl eines freien Bosegases bei der Temperatur T an.

c) Wie verhält sich die Teilchenzahl im Grundzustand N_0 bzw. in angeregten Zuständen N_{ex} im Grenzfall $T \to 0$? Was trägt sich zu für $T \to \infty$?

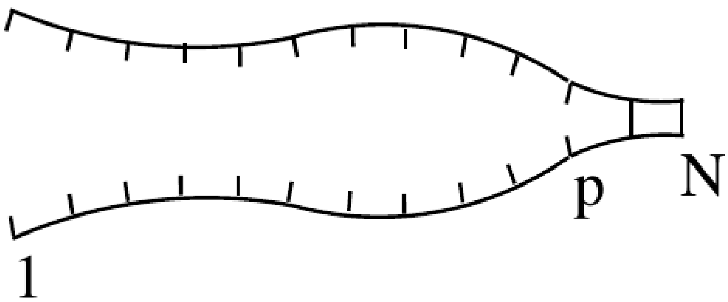
d) Warum verschwindet die Entropie für $T = 0$ für ein Bose-Gas?

e) Durch welche Parameter kann die makroskopische Wellenfunktion ψ_0 eines Bose-Einstein-Kondensats beschrieben werden? Kondensieren Sie den entsprechenden Ausdruck für ψ_0 auf Papier.

f) Warum gibt es keine Bose-Einstein-Kondensation in Systemen ohne Teilchenzahlerhaltung?

10.1 Reißverschlussmodell für DNS-Moleküle **10 Punkte**

Die Mikrozustände eines doppelstrangigen Polymers (z.B. DNS) werden in einem einfachen Modell wie folgt festgelegt: Die beiden Stränge können an den Stellen $1, 2, \ldots, N$ Bindungen miteinander eingehen. Eine geschlossene Bindung hat dabei die Energie $\epsilon_0 = 0$, eine geöffnete Bindung die Energie $\epsilon \neq 0$. Die p-te Bindung kann nur offen sein, wenn alle Bindungen $1, 2, \ldots, p-1$ ebenfalls offen sind. Die N-te Bindung kann nicht geöffnet werden.



a) (3P) Begünden Sie, warum hier der kanonische Formalismus angewendet werden kann. Bestimmen Sie dann die kanonische Zustandssumme $Z_C(T)$.

b) (4P) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ der offenen Bindungen als Funktion von $x = e^{-\beta\epsilon}$.

c) (3P) Bestimmen Sie anschließend den Anteil $\langle n \rangle / N$ der offenen Bindungen im Limes $N \to \infty$ für $x < 1$ und $x > 1$. Skizzieren Sie $\langle n \rangle / N$ für $N \to \infty$ als Funktion von x.

10.2 Fermigas bei endlicher Temperatur — 15 Punkte

In dieser Aufgabe möchten wir thermodynamische Eigenschaften des Fermigases bei endlichen Temperaturen berechnen. Dabei wollen wir jeweils entsprechende Näherungen im Limit kleiner Temperaturen bzw. großer Temperaturen ($k_B T \gg \varepsilon_f$) verwenden.

Tieftemperaturverhalten

Sie haben mittels der Sommerfeldentwicklung gezeigt, dass für kleine Temperaturen ($k_B T \ll \varepsilon_f$) in führender Ordnung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, f(\varepsilon) H(\varepsilon) \approx \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon H(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 H'(\mu)\,, \tag{1}$$

wobei $H(\varepsilon)$ eine Funktion ist, die für $\varepsilon \to -\infty$ verschwindet und für $\varepsilon \to \infty$ nicht schneller als polynomial wächst. $f(\varepsilon)$ ist die Fermi-Funktion.

a) (4P) Berechnen Sie die innere Energie U und die spezifische Wärme $C_{V,N}$ in führender Ordnung für tiefe Temperaturen ($k_B T \ll \varepsilon_f$).

b) (3P) Berechnen Sie außerdem die Entropie S und den Druck p in dieser Näherung.

Hochtemperaturverhalten

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Fermi-Verteilung für hohe Temperaturen ($k_B T \gg \varepsilon_f$) angenähert werden kann als

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \approx \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\,, \tag{2}$$

d.h. die mittlere Besetzungszahl der Mikrozustände wird zu einem Boltzmannfaktor bei hohen Temperaturen.

c) (5P) Berechnen Sie das chemische Potential μ, die innere Energie U und die spezifische Wärme $C_{V,N}$ in führender Ordnung für hohe Temperaturen ($k_B T \gg \varepsilon_f$) in $d = 3$ Dimensionen.

d) (3P) Berechnen Sie außerdem die Entropie S und den Druck p in dieser Näherung in $d = 3$ Dimensionen.

10.3 Bose-Einstein-Kondensation in zwei Dimensionen **15 Punkte**

Wir wollen in dieser Aufgabe untersuchen, unter welchen Bedingungen Bosegase in 2D bei tiefen Temperaturen kondensieren können. Dazu betrachten wir zuerst ein freies Gas mit Teilchendichte $n = N/V$ aus bosonischen Teilchen der Masse m, und daraufhin ebenjenes Bosegas in einer harmonischen Falle. Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass die Gesamtteilchendichte im Kontinuumlimit geschrieben wird als

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_0(T)}{V} + \frac{1}{V}\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \rho(\varepsilon) b(\varepsilon) \tag{3}$$

wobei der zweite Summand die Dichte der Teilchen in angeregten Zuständen N_{ex}/V beschreibt. Wenn die Grundzustandsbesetzung $N_0(T)$ mit dem Volumen skaliert, handelt es sich um ein Bose-Einstein-Kondensat.

a) (3P) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen in angeregten Zuständen N_{ex} in d Dimensionen und bestimmen Sie deren Verhalten für $T \to 0$.

   Hinweis: Erinnern Sie sich an die Riemann'sche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x \tag{4}$$

b) (1P) In welchen Dimensionen ist dem Ergebnis aus a) zufolge Kondensation möglich? Was gilt insbesondere für $d = 2$?

Jetzt betrachten wir das Bosegas in einem harmonischen Fallenpotential. Die Bewegung eines Teilchens der Masse m in der Falle wird beschrieben durch den zweidimensionalen Oszillator

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

mit Eigenfrequenz ω_0. Das Fallenpotential beeinflusst die Zustandsdichte und damit die Kondensationstemperatur T_C bzw. in diesem Fall ermöglicht es erst die Kondensation.

c) (1P) Berechnen Sie den Entartungsgrad $\Omega(n)$, d.h. die Zahl der Eigenzustände mit Energie $E_n = \hbar\omega(n+1)$ und zeigen Sie, dass die daraus resultierende Zustandsdichte geschrieben werden kann als

$$\rho(\varepsilon) = \sum_n \Omega(n)\delta\left(\varepsilon - E(n)\right) \tag{5}$$

Im thermodynamischen Limes wird der Abstand $\Delta E_n = \hbar\omega$ zwischen zwei Anregungsniveaus klein, sodass die Summe in Gleichung 5 als ein Integral über die Anregungsenergien $E(n)$ ausgedrückt werden kann. Die Zustandsdichte ist dann eine kontinuierliche Funktion.

d) (3P) Zeigen, Sie dass dann gilt

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega)^2}(\epsilon - \hbar\omega)\Theta(\epsilon - \hbar\omega) \tag{6}$$

e) (3P) Berechnen Sie N_{ex} wie in a) für ein zweidimensionales Bosegas in einer harmonischen Falle. Was gilt für das chemische Potential $\mu(T \to 0)$?

f) (2P) Ist Bose-Einstein-Kondensation hier möglich? Falls ja, berechnen Sie die kritische Temperatur T_c als Funktion der Teilchendichte n und der Oszillatorfrequenz ω.

g) (2P) Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$ unterhalb der kritischen Temperatur T_c, indem Sie die Entropie aus dem großkanonischen Potential ableiten.