Vorlesung 10 – 15.11.2023

- Letztes Mal: Cauchy-scher Integralsatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ einfache geschlossene Kurve mit $\mathrm{Int}(\gamma) \subset U$. Dann ist
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$
- Anwendungen für reelle Integrale
- Satz (Cauchy-sche Integral-Formel): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ einfache geschlossene positiv orientierte Kurve mit $\mathrm{Int}(\gamma) \subset U$. Dann ist für $\zeta \in \mathrm{Int}(\gamma)$
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz = 2\pi i f(\zeta).$$

Vorlesung 11 – 17.11.2023

- Satz: Holomorphe Funktionen sind unendlich oft differenzierbar und lokal Potenzreihen. Genauer:
- (i) Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $B(\bar{z}_0, r) \subset U$, dann ist für alle $\zeta \in B(z_0, r)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r) \circlearrowleft} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz.$$

- (ii) Für alle $\zeta \in B(z_0, r)$ gilt

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (\zeta - z_0)^k,$$

  mit Konvergenzradius $R \geq r$.
- Satz von Liouville: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Vorlesung 12 – 22.11.2023

- Fundamentalsatz der Algebra: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k$ ein Polynom mit $N \geq 1, \alpha_N \neq 0$. Dann hat f in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.
- Corollar: Wir können jedes kompleze Polynom faktorisieren: $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k = \alpha_N \prod_{k=1}^{N} (z - z_k)$, $z_k \in \mathbb{C}$ sind die Nullstellen (möglicherweise nicht alle verschieden).
- Residuensatz: Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf endlich viele Singularitäten. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ einfach, geschlossen, positiv orientiert. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_j), \quad \operatorname{Res}(f, z_j) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j, \varepsilon)\circlearrowleft} f(z)\, dz.$$

Vorlesung 1 – 11.10.2023

- Komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{x + yi \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$
- Multiplikation definiert durch $i^2 = -1$
- Kehrwert $\frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - yi)$
- Vektordarstellung $[x + yi]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Matrixdarstellung $[x + yi]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$
- Polarkoordinaten $x + yi = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$, $\theta = \arg(x + yi) \in [0, 2\pi)$
- Kurzform $e^{i\theta} := \cos(\theta) + \sin(\theta)i$

Vorlesung 13 – 24.11.2023

- Satz: Laurent-Reihen: Sei $f : B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (\zeta - z_0)^k, \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r) \circlearrowleft} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, dz.$$

Die Laurent-Reihe konvergiert absolut für $0 < |\zeta - z_0| < R$. Die Koeffizienten sind eindeutig, und $\operatorname{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1}$.

Vorlesung 14 – 29.11.2023

- Berechnen von Residuen:
- Methode 1: $\mathrm{Res})\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}, z_0\right) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.
- Methode 2: $\mathrm{Res})\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$ falls $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$.
- Methode 3: Berechne mit Rechenregeln den Vorfaktor α_{-1} der Laurentreihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$. Dann ist $\mathrm{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1}$. Bei Quotienten holomorpher Funktionen $f = \frac{g}{h}$ braucht man nur endlich viele der Koeffizienten von g und h.
- Kapitel 5: Fourier-Analysis

Vorlesung 15 – 1.12.2023

- Kapitel 5: Fourier-Analysis
- Zerlegung von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in einfache Wellen:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikx} \text{ oder } f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} \, dk.$$

- Diskrete Fourier-Transformation (DFT): $v \in \mathbb{C}^N$, dann ist

$$v_j = \sum_{k=1}^{N} \hat{v}_k e^{2\pi ikj}, \hat{v}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-2\pi ikj} v_j.$$

Vorlesung 16 – 7.12.2023

- Fourier-Reihen: Zerlegung von 2π-periodischen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in einfache Wellen:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikx}.$$

- Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) g(x) \, dx$, der die stetigen Funktionen enthält.
- Satz von Fischer-Riesz: Sei $f \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$. Definiere Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \, dx$. Dann ist

$$f = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} \text{ in } L^2 \text{ und } \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Vorlesung 17 – 13.12.2023

- Satz von Fischer-Riesz: Sei $f \in L^2([0,2\pi];\mathbb{C})$. Definiere Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx$. Dann ist

$$f = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} \text{ in } L^2 \text{ und } \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

- Falls $f \in C^1([0,2\pi];\mathbb{C})$ 2π-periodisch ist, ist $\hat{f'}_k = ik\hat{f}_k$.
- Falls $f \in L^2([0,2\pi];\mathbb{C})$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty$, ist f stetig und $f = \lim_{N\to infty} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx}$ gleichmässig.

Vorlesung 17 – 13.12.2023

- Lösen von partiellen Differentialgleichungen: Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Kreis

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x \partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \\ u \quad 2\pi\text{-periodisch in } x \end{cases}$$

  ist gegeben durch
  $u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} \hat{u^0}_k e^{ikx} = \int_0^{2\pi} H(t,x,y) u_0(y)\, dy$, mit
  $H(t,x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-y)}$ der Wärmeleitungskern auf dem Kreis.

- Fourier-Transformation: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist die Fouriertransformation $\mathcal{F} f = \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ definiert als
  $\mathcal{F} f(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx$ und die inverse Fourier-Transformation als $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} f(k)\, dk$.
  Hier ist $k \in \mathbb{R}^n$ die Frequenzvariable oder Fouriervariable.

Vorlesung 18 – 20.12.2023

- Fouriertransformation und Ableitungen:

$$\mathcal{F}(\nabla_x f)(k) = ik\mathcal{F}f(k), \quad \mathcal{F}(xf)(k) = i(\nabla_k \mathcal{F}f)(k)$$

- Faltung von zwei $L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ Funktionen:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

- Faltung und Ableitung: $f * \nabla g = \nabla(f * g)$.
- Fouriertransformation und Faltung:

$$\mathcal{F}(f * g)(k) = \mathcal{F}f(k)\mathcal{F}g(k)$$

Vorlesung 20 – 10.01.2024

- Faltung von zwei $L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ Funktionen:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

- Faltung und Ableitung: $f * \nabla g = \nabla(f * g)$.
- Fouriertransformation und Faltung:

$$\mathcal{F}(f * g)(k) = \mathcal{F}f(k)\mathcal{F}g(k)$$

- Satz: Inverse Fouriertransformation: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Sei f stetig in x. Dann ist

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x).$$

- Definition: Distributionen: Eine Distribution ist eine lineare stetige Abbildung $T : C_c^\infty \to \mathbb{C}$.
- Beispiele: (Lokal) integrierbare Funktionen, Dirac-δ, Ableitungen von Distributionen

Vorlesung 21 – 12.01.2024

- Distributionen: Lineare stetige Abbildungen $T : C_c^\infty \to \mathbb{C}$.
- Beispiel: (Lokal) integrierbare Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist Distribution $T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x)\, dx$
- Beispiel: Dirac-δ-Distribution in x: $\delta_x(\phi) := \phi(x)$.
- Ableitung eine Distribution: $\partial_i T(\phi) := T(-\partial_i \phi)$. Falls $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$.
- Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion ergibt glatte Funktion: $T * \phi(x) := T(\psi_x)$ mit $\psi_x(y) = \phi(x - y)$. Dann ist $T_f * \phi = T_{f*\phi}$ und $\partial^\alpha(T * \phi) = T * \partial^a lpha \phi$. Außerdem konvergiert $T_{T*\phi_\delta}(\psi) \to_{\delta \to 0} T(\psi)$ falls ϕ_δ Diracfolge.

Vorlesung 22 – 17.01.2024

- Ableitung eine Distribution: $\partial_i T(\phi) := T(-\partial_i \phi)$. Falls $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$.
- Faltung einer Distribution T mit einer Testfunktion ϕ: $T * \phi(x) = T(\phi(x - \cdot)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$
- Schwartz-Raum: $\mathcal{S} := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \,:\, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi(x)|(1 + |x|^N) < \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Testfunktionen, deren Ableitungen bei ∞ schneller abfallen als jede Potenz.
- Lemma: Sei $\phi \in \mathcal{S}$. Falls $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom ist, ist das Produkt $\phi P \in \mathcal{S}$ und $\partial_i \phi \in \mathcal{S}$. Außerdem ist $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}$.

Vorlesung 2 – 13.10.2023

- Polarkoordinaten $x + yi = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$, $\theta = \arg(x + yi) \in [0, 2\pi)$
- Kurzform $e^{i\theta} := \cos(\theta) + \sin(\theta)i$
- Multiplikation $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Potenzen $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- Wurzeln $z^n = re^{i\theta}$ genau dann wenn $z = se^{i\beta}$ mit $s = \sqrt[n]{r}$ und $n\beta - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$
- Wurzelfunktion $\sqrt[n]{re^{i\theta}} := \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$
- Lösung von quadratischer Gleichung: $z^2 + pz + q = 0$ genau dann wenn $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Vorlesung 22 – 17.01.2024

- Temperierte Distributionen: Lineare stetige Abbildungen $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$.
- $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ ist stetig, wenn für alle Folgen $\phi_k \in \mathcal{S}$ mit $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi$ gilt, dass $T(\phi_k) \to T(\phi)$.
- Fourier-Transformation einer temperierten Distribution: $\mathcal{F}_x T(\phi) = T(\mathcal{F}_k \phi)$. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist $\mathcal{F}(Tf) = T_{\mathcal{F}f}$.
- Satz: Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ hat die Eigenschaften $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T) = T$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j} T) = ik_j \mathcal{F}T$, $\partial_{k_j} \mathcal{F}T = \mathcal{F}(ix_j T)$, $\mathcal{F}(T * \phi) = \mathcal{F}T \mathcal{F}\phi$.
- Beispiele: $\mathcal{F}\delta_x = T_g$ mit $g(k) = e^{-ix \cdot k}$. Für $f(x) = e^{ik \cdot x}$ ist $\mathcal{F}(T_f) = (2\pi)^n \delta_k$. Für ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $P(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (ix)^k$ ist $\mathcal{F}(T_P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \partial^\alpha \delta_0$.

Vorlesung 25 – 26.01.2024

- Nachtrag: Falls $T \in \mathcal{S}'$ und $\psi \in \mathcal{S}$, dann ist $\mathcal{F}(T * \psi) = \mathcal{F}T\mathcal{F}\psi$.
- Lösung der Schrödinger-Gleichung
- Abtastsatz von Nyquist-Shannon-Whittaker: Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $\mathcal{F}u(k) = 0$ für $|k| > 2\pi N$. Sei $0 < \Delta \leq \frac{1}{2N}$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta)\mathrm{sinc}(\frac{x - k\Delta}{\Delta}) \quad \text{wobei } \mathrm{sinc}(y) = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

Vorlesung 3 – 18.10.2023

- Komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
- Interpretation als Verformung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- f komplex differenzierbar wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$ existiert
- f komplex differenzierbar $\iff DF \in [\mathbb{C}]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \iff \partial_1 F_1 = \partial_2 F_2$, $\partial_1 F_2 = -\partial_2 F_1$
- Beispiele für komplex differenzierbare Funktionen: Polynome $f(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$.

Vorlesung 4 – 20.10.2023

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z \in \mathbb{C}$ wenn $f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$ existiert
- f heißt holomorph wenn f überall komplex differenzierbar
- Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel
- Reihen: Sei $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Folge. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergiert, falls die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ bilden. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \lim_{n \to \infty} s_n$.
- Reihe heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.
- Satz: Absolut konvergente Reihen konvergieren.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert, aber nicht absolut.
- Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_0^k$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert absolut gegen $\frac{1}{1-z_0}$, falls $|z_0| < 1$. Sie divergiert, falls $|z_0| \geq 1$.

Vorlesung 5 – 25.10.2023

- Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{C}$
- Satz: Potenzreihe konvergiert absolut falls $|z| < R$ und divergiert falls $|z| > R$ für Konvergenzradius $R := (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha_k})^{-1}$
- Satz: Potenzreihe $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit Ableitung $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1}$. f' hat gleichen Konvergenzradius wie f.

Vorlesung 6 – 27.10.2023

- Satz: Potenzreihe $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit Ableitung $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1}$. f' hat gleichen Konvergenzradius wie f.
- Corollar: Potenzreihen sind unendlich oft differenzierbar und haben eine Stammfunktion:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k z^{k-n}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} z^{k+1} + c$$

- Satz: Produkt von zwei Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j$ mit Konvergenzradien $R, R' \in [0,\infty]$ ist die folgende Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens $\min(R,R')$:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} z^n.$$

- Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$. Sei $|z_0| < R$. Definiere Taylorreihe $g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n$. Dann hat g Konvergenzradius mindestens $R - |z_0|$ und $f(z_0 + h) = g(h)$ falls $|h| < R - |z_0|$.

Vorlesung 7 – 03.11.2023

- Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Sei $|z_0| < R$. Definiere Taylorreihe $g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n$. Dann hat g Konvergenzradius mindestens $R - |z_0|$ und $f(z_0 + h) = g(h)$ falls $|h| < R - |z_0|$.
- Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$.
- Lemma: $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
- $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, $\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$
- Lemma: $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$
- Lemma: $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- Lemma: Für $y \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(iy)| = 1$.

Vorlesung 8 – 08.11.2023

- Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$.
- Lemma: $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
- Logarithmus als Umkehrfunktion von $\exp$:
  $\mathrm{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} + [0, 2\pi)i \subset \mathbb{C}$
  $\mathrm{Ln}(z) := \ln(|z|) + \arg(z)i$.
- Lemma: $\mathrm{Ln}'(z) = \frac{1}{z}$.
- Kurven: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, differenzierbar bis auf endlich viele Punkte, Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t) \in \mathbb{C}$
- Kurvenintegral: $\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt$.
- Lemma: Sei $\phi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbare Reparametrisierung mit $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. Dann ist $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$.
- Satz: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$. Dann ist $\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Vorlesung 9 – 10.11.2023

- Lemma: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ einfache geschlossene Kurve. Dann gibt es zwei offene wegzusammenhängende Mengen $\mathrm{Int}(\gamma), \mathrm{Ext}(\gamma) \subset \mathbb{C}$, die von γ begrenzt werden. $\mathrm{Int}(\gamma)$ ist beschränkt.
- Satz (Cauchy-scher Integralsatz): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ einfache geschlosssene Kurve mit $\mathrm{Int}(\gamma) \subset U$. Dann ist
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$