Mathematik I für PhysikerInnen

AOR Dr. Thoralf Räsch

Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 7

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\cdot n!}$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^n}$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z+2)^n$
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{(2+\frac{1}{n})^n}$	(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} z^n$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Betrachten Sie die Tangensfunktion auf dem offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion tan bijektiv ist.

(b) Folgern Sie (etwa mithilfe des geeigneten Satzes aus der Vorlesung), dass die Umkehrfunktion der Tangensfunktion, allgemein bezeichnet als *Arcustangens* $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, stetig ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\mathrm{Bild}(f) \subseteq [a, b].$$

Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, also es existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - x$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Betrachten Sie folgendes Gleichungssystem über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= -11 \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie das zugehörige homogene Gleichungssystem, indem Sie die rechte Seite jeweils auf Null setzen.

(b) Lösen Sie nun das angegebene Gleichungssystem.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{aligned} 2z &= 1 - 2a \\ 3x + y &= a \\ 4z - x - y &= a + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**.** Lösen Sie nun das folgende lineare Gleichungssystem samt Angabe der Lösungsmenge über dem Körper

(a) ... reellen Zahlen $\mathbb{R}$,

(b) ... $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)**.** Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{aligned} 4x + 3y + z &= a \\ 2y + z &= 3 - a \\ x + 3y + z &= 1 + 2a \end{aligned}$$

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als **Bonuspunkte** erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 24. November, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.