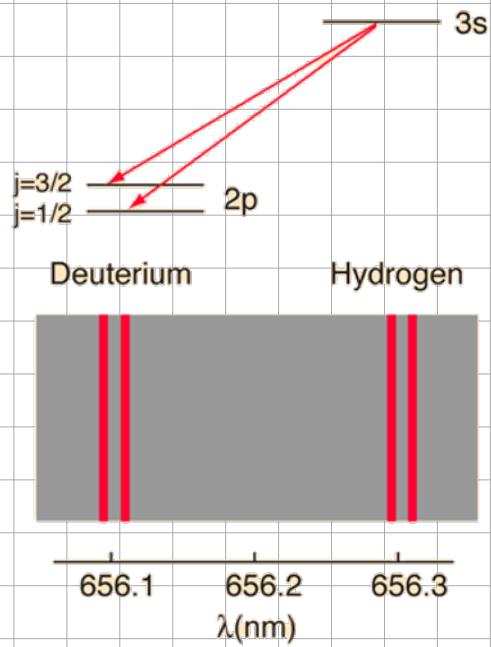
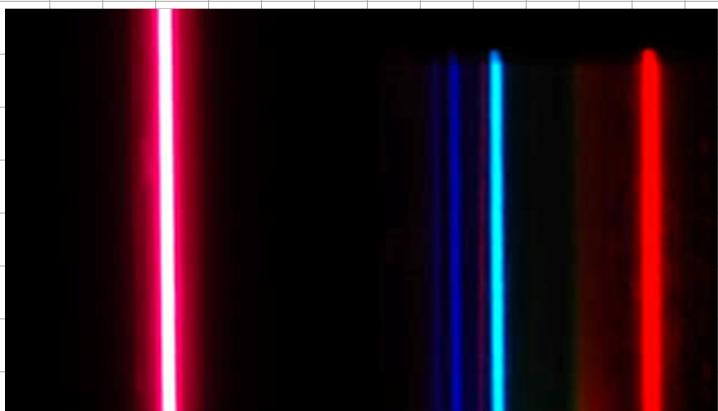


1.7 Elektronen - Spin

Experimentelle Beobachtungen:

1) "Hoch" auflösende Spektroskopie

Wasserstoff:

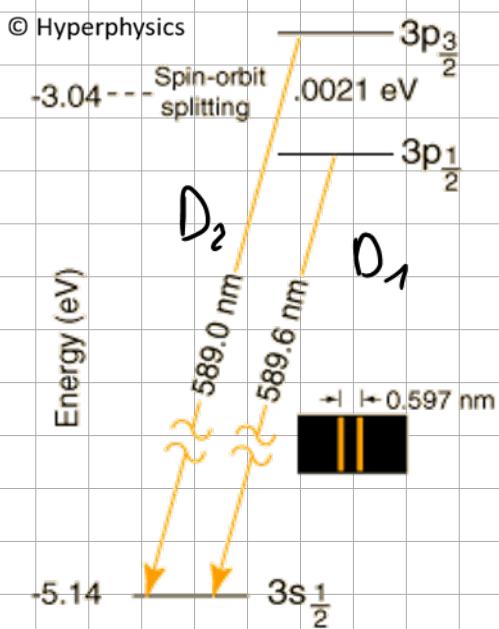


Energiedifferenz des

$$2p\text{-Niveaus: } \Delta E = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

$$\Delta E/h \approx 11 \text{ GHz}$$

Natrium: "D-Linien"

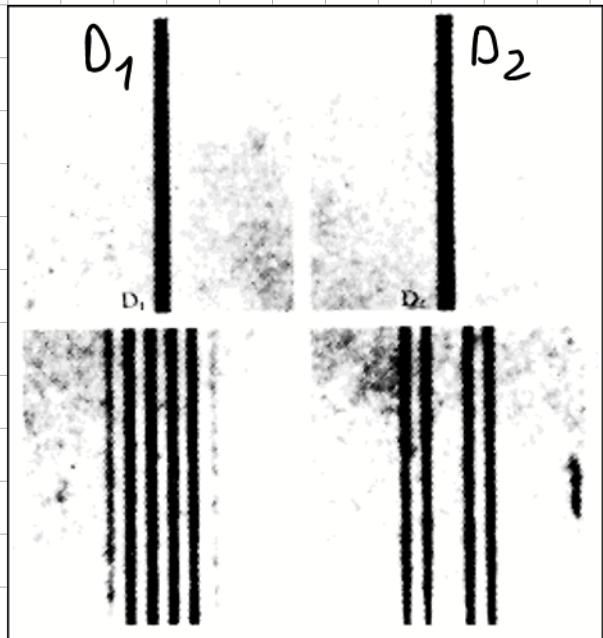


"Feinstruktur" → Kap. 1.8

(Mehrerelektronenatome

→ Kap. 1.9)

2) "anomaler" Zeeman - Effekt

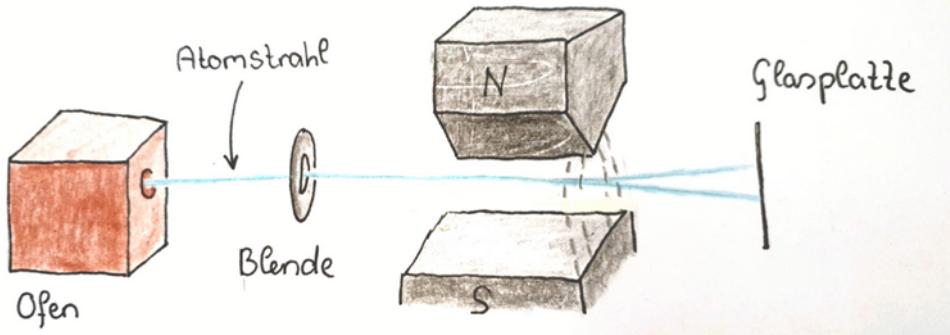


P. Zeeman; Nature, vol. 55, pg. 347 (1897)

Natrium D-Linien
mit Magnetfeld

- mehr Linien als normaler Zeeman - Effekt vorher sagt $(2l+1)$
- insbesondere: gerade Anzahl von Linien

3) Stern - Gerlach (1922)



Kollimiert

Silber (Ag)-
strahl fliegt
durch inhomogenes
 B -Feld

$$B \approx \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{smallmatrix} \right)$$

Ablenkende Kraft: $\vec{F} = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$

$$\sim \mu_2 \cdot G \cdot l_2$$

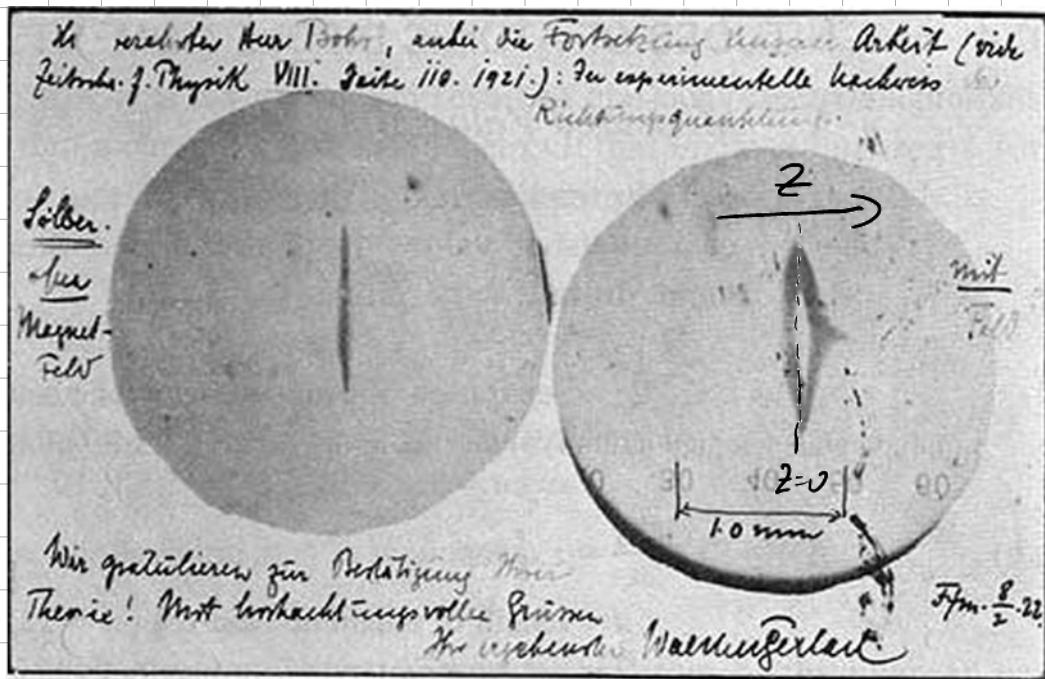
Silber: $Z = 47$

Schalenmodell (Kap. 19):

Gesamtbaudrehimpuls $L = 0$

$\Rightarrow (2L+1) = 1$ Niveau \Rightarrow keine Ablenkung

Experiment:



© Postkarte von Gerlach an Bohr

\Rightarrow Einführung eines neuen Freiheitsgrads des Elektrons: "Spin"

Gesamtwellfunktion:

$$\Psi = \psi(x, y, z) \cdot \chi(\sigma) \cdot e^{i \frac{E}{\hbar} t}$$

\nearrow

Ortskoordinaten

'lebt' im "Ortsraum"

$$\boxed{\psi(x, y, z)}$$

\downarrow

("Impulsraum") $\boxed{\psi(p_x, p_y, p_z)}$

\otimes

$$\boxed{\chi(\sigma)}$$

Spinkoordinaten

"Spiraum"

$$\boxed{\chi(\sigma)}$$

\otimes

$$\boxed{\chi(\sigma)}$$

$)$

Der QM - Operator zu dieser neuen Eigenschaft ist der Spin - Operator

$$\hat{\vec{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} \quad \text{Vektoroperator}$$

- Für die Komponenten gilt:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x \quad (\Leftrightarrow) \quad [\hat{S}, \hat{S}_z] = 0$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$$

- Eigenwerte und Eigenfunktionen

Spinraum

$$\hat{S}_z | \chi(\sigma) \rangle = \hbar m_s | \chi(\sigma) \rangle$$

$$\hat{\vec{S}}^2 | \chi(\sigma) \rangle = \hbar^2 s(s+1) | \chi(\sigma) \rangle$$

darstellungsfrei: $\hat{S}_z | s, m_s \rangle = \hbar m_s | s, m_s \rangle$

$$\hat{\vec{S}}^2 | s, m_s \rangle = \hbar^2 s(s+1) | s, m_s \rangle$$

- Die Spin - Quantenzahl s ist eine intrinsische Eigenschaft von Elementarteilchen.

Insbesondere: Elektronen $\Rightarrow s = \frac{1}{2}$

- Die Spinprojections - Quantenzahl m_s kann die Werte

$$m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

annehmen.

Elektron: $m_s = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{"spin up"} \\ -\frac{1}{2} & \text{"spin down"} \end{cases}$

- Mit dem Spin ist ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_s$ verbunden, welches im externen B -Feld doppelt:

$$U_{\text{spin}} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

homogenes Feld $\stackrel{\rightarrow}{=} -\mu_s^2 \cdot B_z$
 $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$

$$\text{mit } \mu_s^2 = g_0 \mu_B m_s$$

(Erinnerung: magn. Moment des Bahndrehimpuls

$$M_L^z = \mu_B m_s)$$

$$g_0 = 2,00231923 \quad \text{"gyromagnetischer Faktor"}$$

Analogie zum Bahndrehimpuls ist offensichtlich.
 ABER: für Spin gibt es kein klassisches Analogon

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L}$$

$$\vec{S} \rightarrow ?$$

Andererseum: Ein QM-Vektoroperator $\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{y}_x \\ \vec{y}_y \\ \vec{y}_z \end{pmatrix}$

$$\text{mit } [\vec{y}_i, \vec{y}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \vec{y}_k \quad (*)$$

heißt "Drehimpuls-Operator"

z.B.: Spin = Drehimpuls im Spinnraum

- Bahndrehimpuls ist nur ein (klass. verträglos) BSP
- Die Eigenwerte und Zustände folgen denstellungsfrei aus $(*)$ (siehe Übungen)
- Die Zustände des einzelnen Elektrons im Wasserstoff inkl. Elektronenspin sind

$$l, m_l, m_s, s = \frac{1}{2}, m_s$$

Alle fünf Quantenzahlen können scharf gemessen werden, da die Operatoren $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ kommutieren.

\Leftrightarrow Operatoren in verschiedenen Räumen vertauschen,
da sie auf verschiedene Teile der Wellenfunktion
wirken

- Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ des Elektrons ist gegeben durch $\vec{\mu} = \mu_B (\vec{L} + g_0 \vec{S})$
- Schrödinger - Formalismus: $\vec{S}, g_0 \approx 2$
empirisch hinzugefügt
- relativistische QM: Dirac - Gleichung
 $g_0 = 2$ und Spin folgt aus rel. Invarianz
 \Rightarrow festgeschr. AMO / AQT
- Quantenelektrodynamik \Rightarrow QM für Elektron und B - Feld

"anomaler g-Faktor"

$$g_0^{\text{theo}} = 2,002\ 319\ 304\ 363\ 22(46)$$

(2019)

$$g_0^{\text{exp}} = 2,002\ 319\ 304\ 362\ 56(35)$$

Experiment: Elektronenspinsonanz

\Leftrightarrow Elektron im Penning - Falle (Vorl. 2)

- Spin ist eine intrinsische Eigenschaft aller

Elementarteilchen : z.B.

Proton

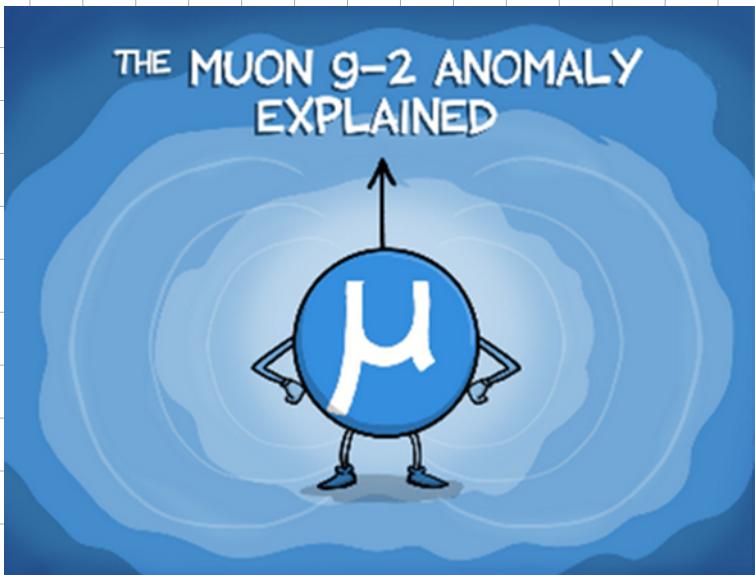
Spin = $\frac{1}{2}$

Neutron

$\frac{1}{2}$

Meson

$\frac{1}{2}$



THE MUON IS THE ELECTRON'S HEAVIER COUSIN.

JUST LIKE THE ELECTRON, IT HAS A MAGNETIC MOMENT THAT COMES FROM ITS CHARGE AND QUANTUM SPIN.



BY USING OUR CATALOG OF KNOWN PARTICLES, WE CAN PREDICT WHAT THIS CHANGE SHOULD BE...

...AND COMPARE IT TO EXPERIMENTAL MEASUREMENTS OF IT.



g?



g?

BUT WHAT IF THOSE TWO NUMBERS ARE NOT THE SAME?

COULD WE BE WRONG ABOUT WHICH PARTICLES THE MUON CAN CREATE? OR IS OUR WHOLE FORMULATION OF PHYSICS INCORRECT?

$g = 2.00000!$

$g = 2.000002!$

You're wrong!

No, you're wrong!



COULD IT BE THAT THE MUON IS CREATING PARTICLES WE DON'T KNOW ANYTHING ABOUT, BUT WHICH MIGHT SOLVE OTHER MYSTERIES IN PHYSICS?

IT'S ALL PART OF OUR SEARCH TO DISCOVER HOW THE UNIVERSE WORKS.



DARK MATTER?



WE ALL LOOK AROUND AND WONDER: HOW CAN THIS ALL BE? WHY DO WE EXIST?



NEW FORCES?

ONE THING IS FOR SURE: THE HUNT IS ON, AND NEW DISCOVERIES ARE ON THE HORIZON.



© Jorge Cham, PhD Comics (2021)

Full version:

<https://physics.aps.org/articles/v14/47>

Stern - Gerlach - Exp. mit Silber

$^{47}\text{Ag} \Rightarrow 47$ Elektronen jeweils mit Spin $\frac{1}{2}$

Dreihimpsaddition (Kap. Mehrelectronenatome)

Gesamtbaudrehimpuls $L=0$

Gesamtspin $S=\frac{1}{2}$

- was ist mit 47 Protonen und
(je nach Isotop) 58 - 64 Neutronen \Rightarrow Kernspin

Kernmagneton

$$\mu_n \approx \mu_p = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx \frac{\mu_0}{2000}$$

Ag-Atom \approx Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen im Magnetfeld

1.7.1 Pauli-Matrizen

Für $s=\frac{1}{2}$ sind die Spineigenfunktionen von

$$\hat{S}_z |+\frac{1}{2}\rangle = \hbar \cdot \frac{1}{2} |+\frac{1}{2}\rangle$$

$$\hat{S}_z |-\frac{1}{2}\rangle = \hbar \cdot \frac{1}{2} |-\frac{1}{2}\rangle$$

darstellungsfrei: $\hat{S}_z |1\rangle = \frac{\hbar}{2} |1\rangle$ "spin up"

$$\hat{S}_z |0\rangle = \frac{\hbar}{2} |0\rangle$$
 "spin down"

Jeder beliebige Spinzustand lässt sich schreiben als Linearkombination

$$|\alpha\rangle = \alpha | \uparrow \rangle + \beta | \downarrow \rangle$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\Leftrightarrow | \uparrow \rangle, | \downarrow \rangle$ sind (Orthonormal) - Basis des 2-dimensionalen Spin- $\frac{1}{2}$ - Raums

- $\langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1$
- $\langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0$

\Rightarrow Zustände = 2D - Vektoren

$$| \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad | \downarrow \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Operatoren = 2x2 Matrizen

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

$$\text{BSP: } \hat{s}_x |1\rangle \rightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\hbar}{2} |1\rangle$$

$$\hat{s}_z |0\rangle \rightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{\hbar}{2} (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)$$

Vektoroperator:

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\hat{s}^2 \rightarrow \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{BSP: } \hat{s} |1\rangle \rightarrow \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \hbar^2 s(s+1) |1\rangle$$

1.7. 2 Qubits

Ein klassisches Logik-Bit hat 2 mögliche Werte

$$\begin{array}{rcl} \text{"ein"} & \stackrel{1}{=} & \text{true} & \stackrel{1}{=} 1 \\ \text{"aus"} & \stackrel{1}{=} & \text{false} & \stackrel{1}{=} 0 \end{array}$$

Idee: Quantenlogik

Benutzt einen 2d-Raum als Qubit

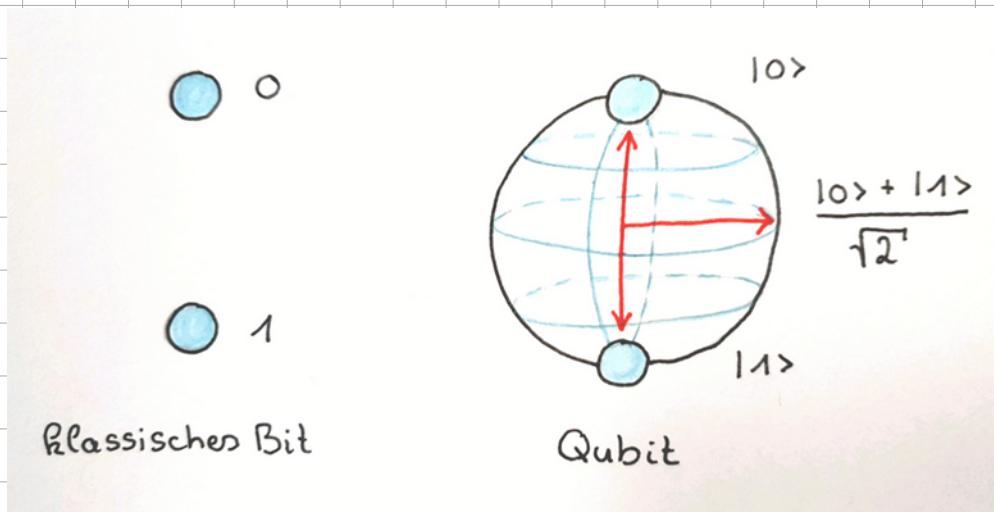
$$\text{z.B. Spin-}\frac{1}{2} \quad |1\rangle \stackrel{1}{=} |1\rangle$$

$$|0\rangle \stackrel{1}{=} |0\rangle$$

Ein einzelner Qubit hat unendlich viele Einstellungsmöglichkeiten:

$$|1\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad \text{Superposition}$$

α, β komplexe Zahlen, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

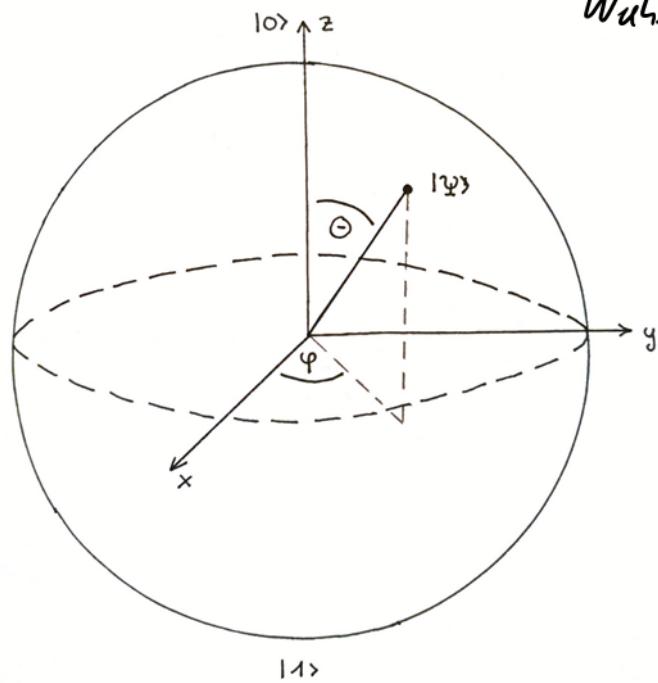


Visualisierung: Bloch - Kugel

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

$$\rightarrow \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

Wahl der Spin - Koord.



Alle Zustände eines Quubits liegen auf einer Einheitskugel "Bloch - Kugel"

Vergl. Polarisierung von Licht: "Pointcarre - Kugel"

Qubit = QM - Zwei-Level-System

- BSP:
- Elektronenspin \rightarrow Quantenpunkte
 - Kernspin \rightarrow NMR
 - Polarisierung eines Photons \rightarrow photomischer Qubits
 - 2 Level in Atomen und Ionen
 - Quantensensor Stromfluss in Supraleitern
"superconducting qubits"

Quantum - Computing

Input : Processing Output \rightarrow Messungen

