HA10

Sonntag, 11. Dezember 2022 12:44

Lisa Peltzer, Angelo Brade

(2)

a) Nicht leer: $f_3(x) = x^2 + x \in V \wedge f_3(-1) = 0 \Rightarrow f_3 \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

Additiv:

$f_1, f_2 \in V$

$f_1(-1) = 0 \wedge f_2(-1) = 0$

$f_1(-1) + f_2(-1) = 0$

$0 + 0 = 0$

$0 = 0 \in V$ ✓

Skalierung:

$\lambda_1 \in \mathbb{C} \wedge f \in V \wedge f(-1) = 0$

$\lambda_1 \cdot f(-1) = 0$

$\lambda_1 \cdot 0 = 0$

$0 = 0 \in V$ ✓

b)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \quad | f(-1) = 0$

$-a + b - c + d = 0$

$a = b - c + d$

$\mathbb{L} = \{a, b, c, d \in \mathbb{C} \mid a = b - c + d\}$

$\dim(W) = 4$

c)

$g(-1) = 6(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3(-1) - 1 = -6 + 4 + 3 - 1 = -7 + 7 = 0$

$\Rightarrow a = 6;\ b = 4;\ c = -3;\ d = -1$

Basis: $a = b - c + d \Rightarrow 6 = 4 + 3 - 1$

$6 = 7 - 1$

$6 = 6$ ✓

(8)

Falls f nur einen Fixpunkt, nämlich auf dem Ursprung, hat:

Nicht leer: Lin. Abb $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow Fix(f) \neq \emptyset$ ✓

Addition: $f(0) + f(0) = 0$

$\overset{Lin.}{\Rightarrow} f(0+0) = 0$

$f(0) = 0$

$0 = 0$ ✓

Skalierung: $\lambda \in V$

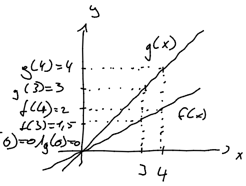
$\lambda \cdot f(0) = 0$

$\overset{Lin.}{\Rightarrow} f(\lambda \cdot 0) = 0$

$f(0) = 0$ ✓

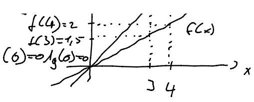
Skizze in $\mathbb{R}^2$:

(gilt für $\mathbb{K}^n$, wenn Funktion linear ist)



Falls f mehr Fixpunkte, als den auf dem Ursprung hat, muss durch die Linearität jeder $f(x) = x$ sein, womit alle x in Fix(f) sind und Fix(f) = V ist. Damit sind alle Bedingungen durch die Erfüllung von V gegeben.

Damit ist auch durch die Lin. der Funktion jeder Punkt durch Skalierung falls f mehr Fixpunkte, als den auf dem Ursprung hat, muss durch die Linearität jedes $f(x)=x$ sein, womit alle x in $Fix(f)$ sind und $Fix(f)=V$ ist. Damit sind alle Bedingungen durch die Erfüllung von V gegeben.



Damit ist auch durch die Lin. der Funktion jeder Punkt durch Skalierung und Addition auf $f(x)$ und somit in $Fix(f)$.

⑤

a) $f_1(x,y) = (0,0)$

$x+2y = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x+2y = 0 \quad | x=0$

$2y = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0$

$\Rightarrow \quad Kern(f_1) = \{(0,0)\} \Rightarrow Df(f_1) = 0 \Rightarrow Basis: v = \binom{0}{0}$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y \in \mathbb{R} \\ 3x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow Bild(f_1) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow Rg(f_1) = 2 \quad \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x \end{pmatrix} \Rightarrow Basis: v_1 = \binom{1}{3} \wedge v_2 = \binom{2}{0}$

b)

f ist lin. $\Rightarrow f(0) = 0$

$f_2(f) := f(0) \wedge f(0) = 0 \Rightarrow f_2(f) := 0 \Rightarrow \forall x \in f_2 : x \mapsto 0 \Rightarrow \underline{\underline{Kern(f_2) = \{(\forall x \in f_2)\}}} \wedge \underline{\underline{Bild(f_2) = \{0\}}}$

Da alle Elemente von f_2 den Kern bilden und alle Elemente von f reell sind, ist $Kern(f_2) = \mathbb{R}$, womit $dim(Kern(f_2)) = dim(\mathbb{R}) \wedge dim(\mathbb{R}) = 1$

$\Rightarrow dim(Kern(f_2)) = 1$

$\Rightarrow$ Basis: $v = \lambda \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ z.B.: $v = 1$

Basis: $v_1 = 0$

④

$f(2,0) = (0,2)$

$f(1,1) = (10,4)$

$f(1,2) = (4,6)$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x + \lambda_2 y \\ \lambda_3 x + \lambda_4 y \end{pmatrix}$$

$f(2,0) = (0,2)$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix} \Rightarrow f(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_2 y \\ x + \lambda_4 y \end{pmatrix}$$

$$f(1,1) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot 1 \\ 1 + \lambda_4 \cdot 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_2 = 10 \\ \lambda_4 = 3 \end{matrix} \Rightarrow f(x,y) = \begin{pmatrix} 10y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

$$f(1,2) = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 \\ 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\lightning$$

Es gibt keine Lin. Abb. für die gegebenen Funktionswerte.

Auf 1.

$$p(x) = 2x^3 + x - 5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Definition 5.1:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein $v \in V$ ist eine Linearkombination (kurz: LK) von $v_1, \ldots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Die Körperelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißen Koeffizienten dieser Linearkombination.
Die Menge $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) := \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\} \subseteq V$ aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ heißt Lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_n$.
Im Fall $n = 0$ setzen wir $\mathcal{L}(\emptyset) := \{0\}$.

¿

$2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\quad 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$q_1(x) = 2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$q_2(x) = x^2 + x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$q_3(x) = 4x^3 - 7 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\0\\0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$q_4(x) = 3x^2 + 4 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$q_5(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 + \lambda_4 q_4 + \lambda_5 q_5 = p$$

$$7 \cdot \lambda_1 + \ldots\ldots = -7$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ - \\ \downarrow \\ \\ 2:| \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ 3:| \\ + \\ 3\cdot| \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ 4:| \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ + \\ \\ 7\cdot| \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -7 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ - \\ 4\cdot| \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 2:| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$- \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{12}$ $\quad \lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = \frac{1}{2}$ $\quad \lambda_4 = -\frac{1}{3}$

$\lambda_5 = 0$

Auf 3.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad f_1(x,y) := (x+2y, 3x)$
(b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f_2(f) := f(\pi)$
(c) $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad f_3(z) = \bar{z} \cdot z$

Definition 6.1:

Seien V und W zwei $\mathbb{K}$- Vektorräume und $f : V \to W$. Dann ist die Abbildung f linear oder ein Homomorphismus von V nach W, wenn

(a) für alle $x, y \in V$ gilt:

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

(b) für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Satz 6.2:

Seien V, W, X drei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ und $g : W \to X$ zwei lineare Abbildungen. Dann sind die beiden Abbildungen $g \circ f : V \to X$ und $\mathrm{id}_V : V \to V$ linear.

a) $f_1(x,y) := (x+2y, 3x)$

z.z. $f(x) + f(y) = f(x+y)$

$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

selbe definition, nur für mich besser nachvollziehbar:

(1) $f(v) + f(v') = f(v+v')$

(2) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

$v = (x, y) \qquad v' = (x', y')$

(1)

$f(x,y) + f(x',y') = f(x,y + x',y')$

$\Leftrightarrow \underbrace{f(x,y)} + f(x',y') = f(x+x', y+y')$ | einsetzen

$\Leftrightarrow (x+2y, 3x) + (x'+2y', 3x') = (x+x'+2y+2y', 3x+3x')$

$\Leftrightarrow (x+x'+2y+2y', 3x+3x') = (x+x'+2y+2y', 3x+3x')$ ✓

(2) $f(\lambda \cdot (x,y)) = \lambda \cdot f(x,y)$

$\Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda \cdot (x+2y, 3x)$

$\Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x)$

$\Leftrightarrow (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x) = (\lambda x + \lambda 2y, \lambda 3x)$ ✓

Beide Vorraussetzungen sind erfüllt, also ist es linear

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad f_1(x,y) := (x+2y, 3x)$
(b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f_2(f) := f(\pi)$
(c) $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f_3(z) = \bar{z} \cdot z$

b)

(1) $f_2(f) + f_2(g) = f_2(f+g)$

$\Leftrightarrow f(\pi) + g(\pi) = (f+g)(\pi) \quad \Big| \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow f(\pi) + g(\pi) = f(\pi) + g(\pi)$

(2) $f_2(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot f_2(f)$

$\Leftrightarrow (\lambda \cdot f)(\pi) = \lambda \cdot f(\pi)$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot f(\pi) = \lambda \cdot f(\pi)$

Beide Vorraussetzungen sind erfüllt, also ist es linear

c) $f_3(z) + f_3(z') = f_3(z+z')$

komplex konjugiert

$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = f_3(z+z')$

$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (\overline{z+z'}) \cdot (z+z')$

$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (x - iy + x' - iy') \cdot (z+z')$

$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = (\bar{z} + \bar{z}') \cdot (z+z')$

$\Leftrightarrow (\bar{z} \cdot z) + (\bar{z}' \cdot z') = \bar{z} \cdot z + \bar{z} \cdot z' + \bar{z}' \cdot z + \bar{z}' \cdot z'$

$2 \cdot f_3(z) = f_3(2 \cdot z)$

$2 \cdot \bar{z} \cdot z = f_3(2) \cdot \bar{z} \cdot z$

$2 \cdot f_3(z) = f_3(z') \qquad z' = 2 \cdot z$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \bar{z} \cdot z = \bar{z}' \cdot z'$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \bar{z} \cdot z = \bar{z}' \cdot 2 \cdot z$

$\Leftrightarrow (\overline{2 \cdot z}) \cdot 2 \cdot z = (2x - 2iy) \cdot 2 \cdot (x + iy) \qquad (\overline{2 \cdot z}) = \overline{2x + 2iy} = 2x - 2iy$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x - iy) \cdot (x + iy) = (2x - 2iy) \cdot (2x + 2iy)$

$\Leftrightarrow (2x - 2iy) \cdot (x + iy) = (2x - 2iy) \cdot (2x + 2iy)$ ↯ nicht linear

$\lambda = 2$

Auf 6.

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte). Betrachten Sie die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass alle solche Abbildungen an der Stelle v den gleichen Wert annehmen – um welchen Wert handelt es sich?

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 + hx_4 \end{pmatrix}$$

$$f(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c-d \\ e+2f+3g-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(V_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+4d \\ 2e+f+4h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l|l} a+2b+3c-d & 1 \\ 2a+b+4d & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |-a & |+d \\ |-2a & |-4d \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l|l} 3c+2b & 1-a+d \\ b & 1-2a-4d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l|l} 3c+2\cdot(1-2a-4d) & 1-a+d \\ b & 1-2a-4d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l|l} 3c+2-4a-8d & 1-a+d \\ b & 1-2a-4d \end{array}\right) \quad |-2 \quad |+4a \quad |+8d$$

$$\left(\begin{array}{l|l} 3c & -1+3a+9d \\ b & 1-2a-4d \end{array}\right) \quad |:3$$

$$\left(\begin{array}{l|l} c & -\frac{1}{3}+a+3d \\ b & 1-2a-4d \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} \{(a,b,c,d) \; a,d \in \mathbb{R} \mid c = -\tfrac{1}{3}+a+3d \;,\; b = 1-2a-4d\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} e+2f+3g-h & 1 \\ 2e+f+4h & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -e \ \mid +h \\ \mid -2e \ \mid -4h \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 2f+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 2\cdot(2-2e-4h)+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 4-4e-8h+3g & 1-e+h \\ f & 2-2e-4h \end{array}\right) \mid -4 \ \mid +4e \ \mid +8h$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 3g & -3+3e+9h \\ f & 2-2e-4h \end{array}\right) \mid :3$$

$$\left(\begin{array}{c|c} g & -1+1e+3h \\ f & 2-2e-4h \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} = \{(e,f,g,h) \ e,h \in \mathbb{R} \mid g=-1+e+3h \ , f=2-2e-4h\}$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2-4a-8d-1+3a+9d-d \\ e+4-4e-8h-3+3e+9h-h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a+3a-4a-8d+9d-d \\ 1+\underbrace{e+3e-4e-8h+9h-h}_{\text{kürzt sich weg}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1-2a-4d+0+4d \\ 2e+2-2e-4h+0+4h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a-2a-4d+4d \\ 2+\underbrace{2e-2e-4h+4h}_{\text{kürzt sich weg}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$$f(v) = \begin{pmatrix} a & 1-2a-4d & -\frac{1}{3}+a+3d & d \\ e & 2-2e-4h & -1+e+3h & h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1-2a-4d-\frac{1}{3}+a+3d+d \\ e+2-2e-4h-1+e+3h+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf 7.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathtt{DM}(f)$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$DM(f) = \begin{pmatrix}8 & -4 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(DM(f) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -4 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 8 + (-4)\cdot 0 + 1\cdot 0\\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0\\ 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 2\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix} \right)$$