Präsenzblatt 9 - Musterlösung

12.01.2024

Präsenzaufgabe 1. In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation um die Wärmeleitgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u(x,0) = g(x)$ zu lösen. Die Lösung soll eine Funktion $u(x,t)$ mit $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variable x.

(ii) Die transformierte Differenzialgleichung aus (i) ist für festes ξ eine Differenzialgleichung in der Variable t mit den Anfangswerten $\hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi)$. Löse diese Differenzialgeleichung.

(iii) Löse die Wärmeleitgleichung (1). *Hinweis:* Nutze das Faltungslemma $\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\hat{v}$ und die inverse Fourier-Transformation der Funktion $e^{-\xi^2 t}$ für festes t.

i) $\mathcal{F}[\partial_t u - \partial_x^2 u] = \partial_t \hat{u} + \xi^2 \hat{u}$

$\mathcal{F}[0] = 0$

$\Rightarrow$ Die transformierte Gleichung ist

$\partial_t \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = 0$

ii) $\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\,\hat{g}(\xi)$

iii) $\mathcal{F}^{-1}[e^{\xi^2 t}\,\hat{g}(\xi)] = g * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$

Da

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t} e^{\mathrm{i}\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\xi\sqrt{2t} - \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{2t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\xi\sqrt{2t} - \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{2t}}\right)^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,.$$

Siehe auch Kapitel 7.4.1 im Skript.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass $-\Delta\ell_\Phi = \delta_0$, wobei δ_0 die Dirac-Distribution, definiert durch $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$, ist.

(i) Zeige, dass $\nabla\Phi(x) = -\frac{x}{4\pi|x|^3}$ und $\Delta\Phi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Sei $\varepsilon > 0$, teilen das integral $(-\Delta\ell_\Phi)(\varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit supp$\varphi \subset B_R(0)$, $\mathbb{R} > \varepsilon$, wie folgt auf:

$$(-\Delta\ell_\Phi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x)\Delta\varphi(x)dx = \int_{B_R(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(x)\Delta\varphi(x)dx + \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x)\Delta\varphi(x)dx$$

(ii) Zeige, dass das Integral über $B_\varepsilon(0)$ nach 0 konvergiert im Limes $\varepsilon \to 0$.

(iii) Zeige, dass das Integral über $B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ im Limes $\varepsilon \to 0$ gleich

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (\partial_\nu \Phi(x))\varphi(x)dS$$

ist, wobei ∂_ν die Ableitung in Richtung der Normalen ist. *Hinweis: Wende den Satz von Gauss zweifach an. Der Randterm* $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(x)\nabla\varphi(x)\cancel{dy}$ $\cdot dS$ *im Limes* $\varepsilon \to 0$ *verschwindet ähnlich wie in (ii).*

(iv) Für stetige φ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_1(0)} \varphi(\varepsilon x)dS = 4\pi\varphi(0)$. Nutze dies um die Aufgabe zu Ende zu rechnen.

Bemerkung: $\Phi(x)$ heißt Fundamentallösung für die 3-dimensionalen Laplace Gleichung. Das Lösungsstrategie dieser Aufgabe ist analog zur Herleitung der Fundementallösung der 2-dimensionalen Laplace Gleichung, siehe Satz 9.11 im Skript.

i) $$\partial_{x_i} \frac{1}{4\pi|x|} = \partial_{x_i} \frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = -\frac{1}{2}\frac{2x_i}{4\pi(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{x_i}{4\pi|x|^3}$$

$$\Rightarrow \nabla\Phi = -\frac{x}{4\pi|x|^3}$$

ii) $$\int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(x)\Delta\varphi(x)|dx \leq \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(x)|dx$$

$$= \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{4\pi|x|}dx = \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\frac{1}{4\pi}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{1}{r}dSdr$$

$$= \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\frac{1}{4\pi}\int_0^\varepsilon \frac{1}{r}(4\pi r^2)dr$$

$$= \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\int_0^\varepsilon r\,dr = \left(\max_{x\in B_\varepsilon(0)}|\Delta\varphi(x)|\right)\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$\longrightarrow 0$ im Limes $\varepsilon \to 0$

iii)

$$\int_{B_R \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx$$

(Gauss)

$$= -\int_{B_R \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x)\, \nabla\varphi(x)\, dx \quad \underbrace{-\int_{\partial B_\varepsilon} \Phi\, \nabla\varphi(x) \cdot dS}_{\longrightarrow 0 \text{ im Limes } \varepsilon \to 0}$$

(da $\varphi \equiv 0$ auf $\partial B_R(0)$)

da gleich

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi \langle \nabla\varphi, x \rangle dS$$

$$\leq \left(\max_{x \in \partial B_\varepsilon} |\langle \nabla\varphi, x\rangle|\right) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi\, dS$$

$$= \left(\max_{x \in \partial B_\varepsilon} |\langle \nabla\varphi, x\rangle|\right) \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} dS$$

$$= \left(\max_{x \in \partial B_\varepsilon} |\langle \nabla\varphi, x\rangle|\right) \varepsilon \longrightarrow 0$$

Auf den anderen Term wenden wir erneut Gauss an;

$$-\int_{B_R \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x) \nabla \varphi(x) \, dx$$

$$= \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \underbrace{\Delta \Phi(x)}_{=0} \varphi(x) \, dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x) \nabla \Phi \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (\partial_\nu \Phi) \varphi(x) \, dS$$

iv)

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \langle \nabla \Phi, x \rangle \varphi(x) \, dS$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{|x|^2}{|x|^4} \varphi(x) \, dS \quad \text{da } \frac{x}{|x|} \text{ der Normalenvektor ist.}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(x) \, dS = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \varphi(\varepsilon x) \, dS$$

$$\to -\frac{1}{4\pi} 4\pi \varphi(0) = -\varphi(0) \quad \text{im Limes } \varepsilon \to 0$$

Insgesammt haben wir somit gezeigt, dass

$(\Delta l_\Phi)(\varphi) = -\varphi(0)$, also $-\Delta l_\Phi = \delta_0$.

Präsenzaufgabe 3. Sei für $a > 0$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-a, a]$ definiert durch

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-a, a] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \end{cases}$$

(i) Berechne die Fourier-Transformation von $\chi_{[-a,a]}$.

(ii) Drücke das Ergebnis aus (i) mittels der Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ aus.

(iii) Beschreiben Sie die Faltung von einer Funktion $f(x)$ mit dem Ergebnis aus (i). Stellen sie sich dazu $f(x)$ z.B. als Audiosignal vor, wobei x die Zeit ist und $f(x)$ die Amplitude.

i) $\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\,dx = \left[-\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x} dx \right]_{x=-a}^{x=a} = -\frac{e^{-ia\xi}}{i\xi} + \frac{e^{ia\xi}}{i\xi}$

ii) $\operatorname{sinc}(x) = 2\,\dfrac{\sin(a\xi)}{\xi} = 2a\operatorname{sinc}(a\xi)$

iii) Die Faltung mit $2a\operatorname{sinc}(a\xi)$ ist ein "low-pass filter", d.h. sie entfernt Frequenzen aus $f(x)$, die höher als a sind.