Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 1.

Präsenzaufgabe 1. Skizziere folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(i) $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$,

(ii) $U_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geq |z - i|\}$,

(iii) $U_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \geq 1, |z - 2| < |z - 3|\}$,

(iv) $U_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i|^2 + |z + i|^2 = 2\}$,

(v) $U_5 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z - (1 + i)) < \frac{\pi}{3}\}$.

Präsenzaufgabe 2. Schreiben Sie in Standardform:

(i) $e^{i\frac{\pi}{2}}$,

(ii) $\frac{1}{1+i}$,

(iii) $\frac{1+i}{2+i}$.

Präsenzaufgabe 3. Schreiben Sie in Polarkoordinaten:

(i) i,

(ii) $1 + i$,

(iii) $1 - 2i$.

Präsenzaufgabe 4. Finden Sie alle Lösungen von

(i) $z^n = 1$,

(ii) $z^2 - 2iz + 1 = 0$.

Präsenzaufgabe 5. Welche der Funktionen sind holomorph?

(i) $f(z) = |z|^2$,

(ii) $f(z) = iz$,

(iii) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$,

(iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = e^{x+iy} \overset{Def.}{=} e^x(\cos(y) + i\sin(y))$,

(v) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

Präsenzaufgabe 6. Finden Sie $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sodass $u + iv$ holomorph, wobei

(i) $u(x + yi) = x^3 - 3y^2x - 7$,

(ii) $u(x + yi) = x^2$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 2.

Präsenzaufgabe 1. Finden Sie alle komplexwertigen Lösungen folgender Gleichungen und Ungleichungen und skizieren Sie die entsprechenden Mengen.

(i) $\operatorname{Re} z > c$, $c \in \mathbb{R}$,

(ii) $\operatorname{Im} z = c$, $c \in \mathbb{R}$,

(iii) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$,

(iv) $\arg(1 + z^2) = 0$.

Präsenzaufgabe 2. Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ reell differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ die folgende Form annehmen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Präsenzaufgabe 3. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ für die

$$x + iy \mapsto x^2 + 2axy + by^2$$

Realteil einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion f ist, und bestimmen Sie für jedes solche Paar (a, b) all diese holomorphen Funktionen f.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 3.

Präsenzaufgabe 1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$.

Präsenzaufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ reel differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v, \quad \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v.$$

Wir definieren die Wirtinger Ableitungen durch

$$\partial_z f := \frac{1}{2}\left(\partial_x f - i\partial_y f\right), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\partial_x f + i\partial_y f\right).$$

(i) Zeigen Sie, dass $\partial_{\bar{z}} \bar{f} = \overline{\partial_z f}$ und dass die Operatoren $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ $\mathbb{C}$-linear sind, d.h. für $\alpha \in \mathbb{C}$ und f, g reell differenzierbar gilt

$$\partial_z(\alpha f + g) = \alpha\partial_z f + \partial_z g, \quad \partial_{\bar{z}}(\alpha f + g) = \alpha\partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{z}} g$$

(ii) Zeigen Sie, dass f holomorph in U ist genau dann wenn $\partial_{\bar{z}} f = 0$ in U und dass in diesem Fall $f' = \partial_z f$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass $\partial_z z = 1$, $\partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$, $\partial_z \bar{z} = 0$, $\partial_{\bar{z}} z = 0$ und berechnen Sie $\partial_z \left(\bar{z}^2 z + 3z^2 \bar{z}\right)$.

Präsenzaufgabe 3. Es sei $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kz^k$ konvergiert in keinem Punkt von $\mathbb{S}$.

(ii) Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ konvergiert in jedem Punkt von $\mathbb{S}$.

(iii) Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ konvergiert in $\mathbb{S} \setminus \{1\}$. Zeigen und benutzen Sie dafür die Identität $e^{ik\varphi} = (e^{i\varphi} - 1)^{-1}(e^{i(k+1)\varphi} - e^{ik\varphi})$ falls $e^{i\varphi} \neq 1$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 4.

Präsenzaufgabe 1. Es seien

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\},$$
$$M_2 := \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y = \sin(1/x)\}.$$

Wir definieren $M = M_1 \cup M_2$. Zeigen Sie, dass die Menge M zusammenhängend jedoch nicht wegzusammenhängend ist, indem sie wie folgt vorgehen.

(i) Nehmen Sie an, es gibt einen Pfad $\gamma \in C([0,1], M)$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1/\pi$. Zeigen Sie, dass es dann eine Folge $t_k \searrow 0, k \to \infty$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} \gamma(t_k) = i$ und folgern Sie, dass M nicht wegzusammenhängend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass M zusammenhängend ist, indem Sie annehmen, dass $M = A \cup B$ für zwei disjunkte, in M offene Mengen A, B. Argumentieren Sie, dass M_1 und M_2 wegzusammenhängend sind und demzufolge jeweils ganz in A oder B enthalten sein müssen. Zeigen Sie außerdem, dass in jeder offenen Umgebung eines Punktes von M_1 ein Punkt aus M_2 liegt und folgern Sie, dass entweder $A = M$ oder $B = M$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $R > 0$ und $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie das folgende Wegintegral:
$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$, wobei $|a| < R < |b|$.

Präsenzaufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, dz$$

im Allgemeinen nicht richtig ist, selbst wenn die rechte Seite reel ist.

Präsenzaufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit dem Betrag einfach zusammenhängende metrischen Räume sind.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 5.

Präsenzaufgabe 1. Sei $\hat{\gamma} : [a; b] \to \mathbb{C}$ ein einfacher und geschlossener Integrationsweg und sei $\gamma : [a, b] \to \mathrm{Int}\hat{\gamma}$ ein anderer einfache und geschlossener Integrationsweg.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ext}\hat{\gamma} \subseteq \mathrm{Ext}\gamma$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Int}\gamma \cup \mathrm{Sp}\gamma \subseteq \mathrm{Int}\hat{\gamma} \cup \mathrm{Sp}\hat{\gamma}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Int}\gamma \subseteq \mathrm{Int}\hat{\gamma}$.

Präsenzaufgabe 2. Berechnen Sie das folgende Wegintegral:

(i) $\int_\gamma z^3 + 2z^2 dz$, wobei $\gamma(t) = it^3 + 3t^2, t \in [0, 1]$.

(ii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} dz$, wobei $\gamma(t) = \cos(t)^3 + 3i\sin(t)^3, t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\int_\gamma e^{z^2 - iz} dz$, wobei $\gamma(t) = \cos(t) + 3i\sin(t), t \in [0, 4\pi]$.

Präsenzaufgabe 3. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(i) $\left|\int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1} dz\right| \leq \frac{2\pi R(R+1)}{|R-1|}$, wobei $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ für $R \neq 1$.

(ii) $\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^4} dz\right| \leq \frac{\pi}{R^3}$, wobei $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$ für $R \neq 0$.

(iii) $\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2+1} dz\right| \leq \sqrt{2}$ wobei $\gamma(t) = t(1+i), t \in [0, 1]$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 6.

Präsenzaufgabe 1. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z+1)}dz$ über den Weg $\gamma = \partial B_2(0)$ mit einer positiven Orientierung.

Präsenzaufgabe 2. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)}dz$ über den Weg $\gamma = \partial B_2(0)$ mit einer positiven Orientierung.

Präsenzaufgabe 3. (Satz von Morera): Es sei f stetig auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und es gelte für jeden geschlossenen Integrationsweg in G, dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Dann ist f holomorph in G.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 7.

Präsenzaufgabe 1. Es seien f und g zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet U. Es gebe $z_0 \in U$ und eine Folge (z_n) mit $z_n \to z_0$, aber $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f = g$ auf U.
betrachten Sie $f - g$ und schreiben Sie es als Potenzreihe und betrachten den Ersten Koeffizient, der nicht null ist.

Präsenzaufgabe 2. Berechnen Sie die Laurent-Reihe für $f(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$ in $A_{0,1}(0)$ und bestimmen Sie den ersten Hauptteilkoeffizient c_{-1} der Laurent-Reihe von $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{1/z}$ in $A_{0,1}(0)$.

Präsenzaufgabe 3. Sei $N \geq 1$ und $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ikx}$ for $\gamma_k \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Wann ist f eine reellwertige Funktion?

(ii) Wann ist f gerade? und ungerade?

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

Präsenzaufgabenblatt 8.

Präsenzaufgabe 1. Sei f holomorph auf $B(0,2)\setminus\{0\}$. Dann kann man f als Laurent-Reihe darstellen: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k z^k$. Sei $g(x) = f(e^{ix})$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty$,

(ii) $\hat{g}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \alpha_k$.

Präsenzaufgabe 2. Finden Sie eine Lösung $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0, \\ u(x,0) = \cos(x) + \cos(10x), \\ \partial_y u(x,0) = \sin(2x) + \cos(5x). \end{cases}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u(x,y) = f_1(y)\cos(x) + f_{10}(y)\cos(10x) + g_2(y)\sin(2x) + g_5(y)\cos(5x)$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24

Dr. Peter Gladbach
Dr. Adrien Schertzer

UNIVERSITÄT BONN

Präsenzaufgabenblatt 9.

Präsenzaufgabe 1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and f_α definiert als $f_\alpha(k) = f(\alpha k)$ für $k \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(f_\alpha)(k) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(f)(\frac{k}{\alpha})$,

(ii) Skizzieren Sie den Unterschied zwischen $\mathcal{F}(f_2)$ und $\mathcal{F}(f)$,

(iii) Skizzieren Sie den Unterschied zwischen $\mathcal{F}(f_{\frac{1}{2}})$ und $\mathcal{F}(f)$.

Präsenzaufgabe 2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ and f_α definiert als $f_\alpha(x) = f(\alpha + x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(f_\alpha)(k) = e^{ik\alpha}\mathcal{F}(f)(k)$.

Präsenzaufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Fourier-transformation von f, die 'Dreieck' Funktion mit einer Höhe $1/a$ und eine Basis $2a$ zentriert in x_0 (i.e. $f(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x - x_0|)$ für $-a < x - x_0 < a$ and 0 sonst) ist $\mathcal{F}(f)(k) = e^{-ix_0k}\text{sinc}\left(\frac{ak}{2}\right)^2$.

Mathematik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Dr. Sid Maibach

Präsenzaufgabenblatt 10.

Präsenzaufgabe 1. In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation um die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x)$ zu lösen. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variable x.

(ii) Die transformierte Differentialgleichung aus (i) ist für festes k eine gewöhnliche Differenzialgleichung in der Variable t mit den Anfangswerten $\mathcal{F}_x u(0,k) = \mathcal{F}u_0(k)$. Löse diese Differentialgeleichung.

(iii) Löse die Wärmeleitungsgleichung (1). *Hinweis:* Nutze das Faltungslemma $\mathcal{F}[u * v] = \mathcal{F}u\mathcal{F}v$ und die inverse Fourier-Transformation der Funktion $e^{-k^2 t}$ für festes $t > 0$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$. Zeigen Sie, dass $-\Delta T_\Phi = \delta_0$, wobei δ_0 die Dirac-Distribution, definiert durch $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$, ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie dass $-\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, und dass $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ ist.

(ii) Berechnen Sie für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ den Grenzwert $-\Delta T_\Phi(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} -\Phi(x)\Delta\varphi(x)\,dx$ mit zweifacher partieller Integration. Hinweis: Es bleibt nur ein Oberflächenintegral $\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \dots dS^2$ übrig.

Präsenzaufgabe 3. Sei für $a > 0$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-a,a]$ definiert durch

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-a,a] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-a,a]. \end{cases}$$

(i) Berechne die Fourier-Transformation von $\chi_{[-a,a]}$.

(ii) Drücke das Ergebnis aus (i) mittels der Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ aus.

(iii) Beschreiben Sie die Faltung von einer Funktion $f(x)$ mit dem Ergebnis aus (i). Stellen sie sich dazu $f(x)$ z.B. als Audiosignal vor, wobei x die Zeit ist und $f(x)$ die Amplitude.

Mathematatik 3 für Physikstudierende

Winter 2023/24
Dr. Peter Gladbach
Sid Maibach

Präsenzaufgabenblatt 11.

Präsenzaufgabe 1. Finde die Fourier-Transformation folgender temperierter Distributionen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

(i) $\partial\partial\delta_0$ (die zweite distributionelle Ableitung),

(ii) T_{x^n} für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) T_P wobei $P(x) = \sum_{n=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom n-ten Grades ist.

Präsenzaufgabe 2. In dieser Aufgabe nutzen wir die Fourier-Transformation um das Anfangswertproblem der Wellengleichung zu lösen:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

g ist eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Randwerte der Funktion bestimmt. Die Lösung soll eine Funktion $u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein.

(i) Berechne für festes t die Fourier-Transformation der Gleichung (1) in der Variablen x. Gebe auch die Randwerte an.

(ii) Löse für jedes feste $k \in \mathbb{R}$ die gewöhnliche Differentialgleichung in t, die in (i) berechnet wurde.

(iii) Löse die Wellengleichung (1). *Hinweis:* Die Fourier-Transformation von δ_0 ist 1.

Präsenzaufgabe 3. Wir definieren die Indikatorfunktion einer Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als

$$\begin{aligned} \chi_U : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Berechne beide partiellen distributionellen Ableitung der Indikatorfunktion χ_Q.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet. Zeige, dass die partielle distributionelle Ableitung von χ_U gegeben ist durch

$$\partial_i T_{\chi_U}(\varphi) = -\int_{\partial U} \varphi(x) n_i(x) dS^{n-1}(x),$$

wobei $n : \partial U \to \mathbb{R}^n$ das nach außen zeigende Einheitsnormalenvektorfeld auf ∂U ist. Hinweis: Benutze den Gauß-schen Divergenzsatz $\int_U \partial_i \varphi(x)\,dx = \int_{\partial U} \varphi(x) n_i(x)\,dS^{n-1}(x)$.

(iii) Sei $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dreiecksfunktion

$$D(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die erste und zweite distributionelle Ableitung von T_D.