## Mathematik I für PhysikerInnen

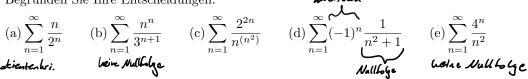
AOR Dr. Thoralf Räsch Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben, Serie 6

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte). Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$(b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n+1}}$$

Begründen Sie Ihre Entscheidungen:



**Aufgabe 2** (1+2+2+2 Punkte). Betrachten Sie die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n}}$ 

- (a) Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen.
- (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Partialsumme gleich  $1 - \frac{1}{k+1}$  ist.
- (c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
- (d) Rechnen Sie nach, dass die obige Reihe auch in der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \right)$ gechrieben werden kann. Warum erleichtert diese Beobachtung den Beweis von (b)?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Untersuchen Sie, für welche Parameter  $a \in \mathbb{R}$  die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-a^n) \text{ konvergiert.}$   $1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{4} | > | -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} - \frac{7}{4}|$   $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{4} + \frac{1}{3} - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} - \frac{7}{6}$   $\pi(n) = 2n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} h_{\pi(n)} \to \infty$ 

Aufgabe 4 (3 Punkte). Betrachten Sie die alternierende harmonische Reihe, also  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ , wobei  $h_n := (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ . Geben Sie entsprechend des Umordnungssatzes eine Umordnungsfunktion  $\pi:\mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ an, für die die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty h_{\pi(n)}$ divergiert.

Hinweis: Sie müssen keine explizite Funktionsvorschrift für die Umordnungsfunktion  $\pi$  angeben.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils, an welchen Punkten von  $\mathbb{R}$  sie stetig sind und an welchen nicht. (Begründen Sie!)

- (a)  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ;  $x \mapsto x^3 2x^2 + x 5$
- (b)  $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- (c)  $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|$
- (d)  $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$

4.1

**Aufgabe 6** (2 Punkte). Beweisen Sie, dass die Hintereinausführung von zwei stetigen Funktionen stetig ist: Für  $M \subseteq \mathbb{C}$  und  $N \subseteq \mathbb{C}$  seien  $f: M \to \mathbb{C}$  und  $g: N \to \mathbb{C}$  zwei stetige Funktionen, wobei  $f[M] \subseteq N$ . Dann ist auch die Verkettung  $g \circ f: M \to \mathbb{C}$ , definiert durch  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , stetig.

Sie können hier insgesamt 30 Punkte erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit 25 Punkten in die offizielle

Wertung ein, so dass Sie hier den Rest als Bonuspunkte erreichen können.

Abgabe am Donnerstag, den 17. November, bis 12:00 Uhr

bei eCampus innerhalb Ihrer Tutoriumsgruppe.