A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ
9,5/10	5,5/7	0,5/4	1/3	3/4	2/2	21,5/25

HA06 Lisa Peltzer, Angelo Brade

Dienstag, 15. November 2022 10:17

(6) Da $f[M] \subseteq N$ ist, kann $f: M$ auf eine Teilmenge von N abbilden. Außerdem kann g alle Teilmengen von N abbilden. Damit kann $g(f)$: abbilden. Somit kann die Wertemenge von f vollständig auf der Definitionsmenge von g abgebildet werden. Folgedessen gibt es keine Definitionslücken, womit, durch die Stetigkeit von $f(x)$ und $g(x)$, die Stetigkeit an allen Stellen von $g(f(x))$ gegeben ist. Hiebei ist insbesondere die Stetigkeit von f wichtig. ok 2/2

(4) Damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_{\pi(n)}$ divergiert, kann die Permutation π so angeordnet werden, dass so viele positive Glied addiert werden, dass sie in der Summe größer sind, als das vorherige negative Glied, welches addiert +1 wurde: $\pi(1, \underbrace{2, \underbrace{3, 5}_{<}}, \underbrace{4, \underbrace{7, 9}_{<}}, \dots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_{\pi(n)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} h_{\pi(n)} \to \infty$$

das reicht nicht ganz 1/3

(1) Addiere den ersten Term zu $S_{alt} = 1$
(2) Addiere das erste negative Folgenglied
(3) Addiere positive Terme bis $S_{neu} \geq S_{alt} + 1$
(4) Addiere das nächste neg. Folgenglied S_{neu}
(5) Setze $S_{alt} = S_{neu}$ und springe zu (3) und wiederhole die Schritte

Damit S_{neu} immer größer oder gleich $\frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\pi(n)+1} \frac{1}{\pi(n)} = \infty$$

(5)

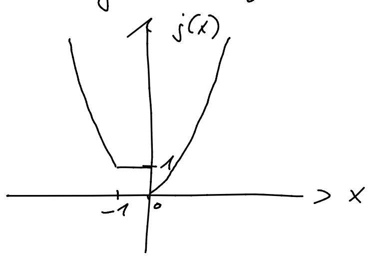
a) Die Funktion ist an allen Stellen stetig, da es sich um ein Polynom handelt. ✓ +1P

b) Die Funktion ist an allen Stellen stetig, da der Nenner in $\frac{1}{1+x^2}$ durch $1+x^2$ nicht negativ werden kann, da das x^2 minimal 0 ist und somit mit $x=0 \wedge 1+x^2 \Rightarrow 1+0^2 = 1 \neq 0$. ✓ +1P

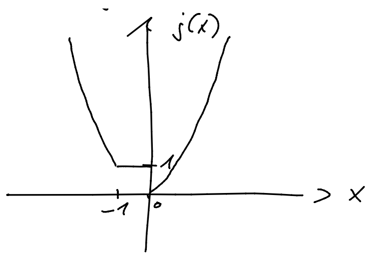
c) Laut Definition ist $|x|$ der Betrag von x und somit vollständig auf $\mathbb{R}$ definiert. Der Wertebereich liegt ebenso in $\mathbb{R}$ (genauer in $\mathbb{R}_0^+$).

Die Stelle 0 sollte untersucht werden +0,5P

d)



d)



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} j\left(\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} j\left(-\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} 1 \end{array}\right\} \text{↯}$$

j ist an der Stelle $x=0$ nicht stetig,
da die Funktion gegen verschiedene
Grenzwerte von links und rechts konvergiert.
Die Funktion j ist nicht stetig. +0,5P

3/4

Auf 1

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \Theta \qquad 0 \leq \Theta < 1$$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Angeben, was ihr für Kriterien nutzt

$$\left|\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right| = \left|\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right|$$

$$\left|\frac{2^n \cdot (n+1)}{2^{n+1} \cdot n}\right| = \left|\frac{n+1}{2n}\right| = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \Theta$$

$\hookrightarrow 2^n \cdot 2 \cdot n$ $\qquad \hookrightarrow n \in \mathbb{N}$ $\qquad \hookrightarrow$ Nullfolge ✓

Was folgt für die Reihe? $\qquad$ +1,5P

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n+1}}$

Der Zähler wächst schneller als der Nenner also geht die Reihe gegen unendlich und divergiert ✓ $\qquad$ +2P

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}$ $\qquad \alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \alpha < 1$ Reihe konvergiert ✓

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}\right|} = \left|\frac{2^{2n}}{n^{(n^2)}}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{2^2}{n^n} = \frac{4}{n^n}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^n} = 0 \qquad \alpha < 1 \checkmark$$

+2P

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ $\qquad$ wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ $\qquad$ Nullfolge ✓

$a_n \geq a_{n+1}$ $\qquad$ monoton fallend

$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+2n+2}$ ✓ da der Nenner von a_{n+1} größer ist als der von a_n, ist a_{n+1} kleiner als a_n

Da $\frac{1}{n^2+1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz Kriterium ✓ $\qquad$ +2P

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$

Der Zähler wächst schneller als der Nenner also geht die Reihe gegen unendlich und divergiert ✓ $\qquad$ +2P

9,5/10

Auf 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+n)^{-1}$

Brüche möglichst weit kürzen

$S_1 = (1^2+1)^{-1} = \frac{1}{2}$ ✓

$S_2 = \frac{1}{2} + (2^2+2)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ok

$S_3 = \frac{4}{6} + (3^2+3)^{-1} = \frac{4}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ok

$S_4 = \frac{9}{12} + (4^2+4)^{-1} = \frac{9}{12} + \frac{1}{20} = \frac{45}{60} + \frac{3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ ✓

$S_5 = \frac{4}{5} + (5^2+5)^{-1} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{24}{30} + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ ✓ +1P

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

Induktionsanker

$n=1$ $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

$S_1 = \frac{1}{(1^2+1)} = \frac{1}{2}$

$S_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓ ✓

Induktionsschritt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{(k+1)^2+(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2+(k+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k^2+2k+1+k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k^2+3k+2}$$

$$= 1 - \frac{n^2+3n+2}{(n+1)(n^2+3n+2)} + \frac{n+1}{(n+1)(n^2+3n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+2n+n^2+3n+2} = 1 - \frac{n^2+2n+1}{n^3+4n^2+5n+2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}(n+2)} = 1 - \frac{1}{(n+2)}$$ ✓

+2P

c) $\cancel{\sum_{n=1}^{k}} 1 - \frac{1}{(k+1)}$

$\lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} 1 - \lim \frac{1}{(k+1)} = 1 - \lim \underbrace{\frac{1}{(k+1)}}_{\text{konvergiert gegen } 0}$

$= 1 - 0 = 1$

Reihe konvergiert gegen 1

+1,5P

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$ ✓ ✓

Warum wird der Beweis leichter?

+1P

5,5/7

Auf 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a^n) \quad a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} (1-a^n) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

Nur für $a=1$ möglich

$\lim_{n\to\infty} 1 - a^n = 1 - \lim_{n\to\infty} a^n$

für $a=0$ konvergiert die Reihe gegen 1 f

für $a=1$ konvergiert die Reihe gegen 0 ok

Was ist ansonsten?

0,5/4