Physik I Probeklausur (Mechanik und Wärmelehre)

Prof. Dr. F. Bernlochner
Dr. Y. Dieter, PD Dr. T. Lenz

WS 2022/23
23.12.2022

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Tutor und Übungsgruppe: ....

Hinweis:

1. Beginnen Sie erst, wenn Sie dazu aufgefordert werden.
2. Keine Hilfsmittel, wie Mitschrift, Bücher, Nachbar, Laptop, eigene Taschenrechner oder Handy. Sie dürfen eine Formelsammlung (2 DIN A4 Seiten, doppelseitig handschriftlich beschrieben) benutzen. Wir werden ihnen auch einen Taschenrechner zur Verfügung stellen.
3. Zu einem richtigen Ergebnis gehört eine Herleitung und die richtige Einheit. Runden Sie so, dass Sie weiterrechnen können.
4. Bitte Lösungen auf Aufgabenzettel (evtl. Rückseite) schreiben.
5. Falls Sie zusätzlich Blätter mit Lösungen haben, achten Sie bitte darauf, dass Ihr **Name, Matrikelnummer** darauf steht, dass sie an die Klausur angeheftet werden und vermerken Sie auf dem Blatt der Aufgabenstellung, dass es zusätzliche Lösungen gibt.

Aufgabe	Max. Punktzahl	Davon erreicht
1	5	
2	5	
3	8	
4	6	
5	6	
6	7	
7	12	
8	8	
Summe:	57	

1. **Cessna 172**
Ein einmotoriges Sportflugzeug vom Typ Cessna 172 erreicht eine Reisegeschwindigkeit von 108 Knoten relativ zur Umgebungsluft. Ein Knoten entspricht einer Seemeile pro Stunde und eine Seemeile hat eine Länge von 1.852 km.

   (a) Wie lange (in Minuten) braucht die Cessna für die Strecke Augsburg - Garmisch-Partenkirchen bei Windstille? Garmisch-Partenkirchen liegt südlich von Augsburg in einer Entfernung von ca. 100 km. (2 P)

   > **Solution:** s = 105 km, v = 112 Knoten = 112 Seemeilen/Stunde = $108 \cdot 1.852$ km/h = 200 km/h. (1 Punkt)
   > $s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{100\,\text{km}}{200\,\text{km/h}}$ = 0.5 h = 30 min. (1 Punkt)

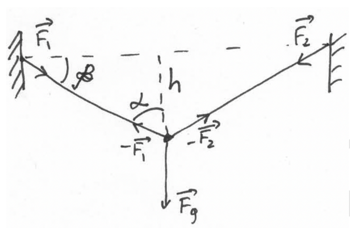
   (b) Berechnen Sie die Gesamtreisezeit der Cessna in Minuten, wenn ein Föhnwind von 15 Knoten aus südlicher Richtung herrscht, für die beiden Strecken Augsburg - Garmisch-Partenkirchen und Garmisch-Partenkirchen - Augsburg. Wie groß ist die Geschwindigkeit relativ zum Boden auf den beiden Streckenabschnitten? (3 P)

   > **Solution:** Hinweg - gegen den Wind: $v_H = 108 - 30$ Knoten = 78 Knoten = 144 km/h. (1 Punkt)
   > Rückweg - mit dem Wind: $v_R = 108 + 30$ Knoten = 138 Knoten = 256 km/h. (1 Punkt)
   > Gesamtzeit: $t = t_H + t_R = \frac{s}{v_H} + \frac{s}{v_R} = 100\,\text{km}(\frac{1}{144\,\text{km/h}} + \frac{1}{256\,\text{km/h}}) = 1.09\,\text{h} = 65$ min. (1 Punkt)

2. **Gespanntes Seil** (5 P)

Ein 10 m langes Seil, das zwischen zwei gleich hohen Punkten aufgespannt ist, soll exakt in seiner Mitte eine Last von 100 kg tragen. Um welche Distanz muss das Seil mindestens durchhängen, d.h. wieviel tiefer als die Aufhängepunkte muss die Last hängen, wenn das Seil eine maximale Belastbarkeit von 10 kN besitzt (mit der Wirkungslinie entlang der Seilrichtung). Machen Sie eine Zeichnung der relevanten Kräfte. Setzen Sie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Solution:



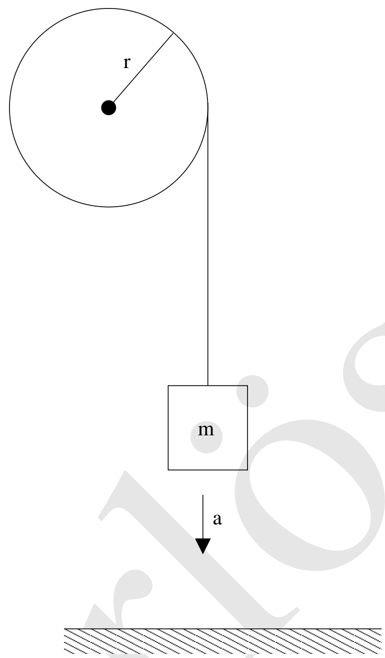
$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|, \quad \text{und} \quad 2|\vec{F}_1| \cos\alpha = |\vec{F}_g|$$

$$F_1 = \frac{F_g}{2\cos\alpha} = \frac{F_g}{2\left(\frac{h}{l/2}\right)} = \frac{F_g \cdot l}{4h}$$

$$h = \frac{F_g}{F_1} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10\,\mathrm{m}}{4} = 0.25\,\mathrm{m}.$$

Bewertung: Zeichnung: 2 Punkte, Rechnung: 3 Punkte

3. **Masse an rotierendem Vollzylinder**
Auf einem Vollzylinder mit Radius $r = 10\,\mathrm{cm}$ und der Masse $M = 10\,\mathrm{kg}$ ist ein Seil (gewichtslos) gewickelt. An dem Seil befinde sich eine Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ im Schwerefeld der Erde. Durch das Absinken der Masse wird der Vollzylinder über das Seil in Rotation um seine Symmetrieachse versetzt.



(a) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment (entlang der Symmetrieachse) eines Vollzylinders mit Radius r, Länge l und Masse M durch $I = \frac{1}{2}Mr^2$ gegeben ist. Nehmen Sie eine konstante Dichte ρ an. (2 P)

Solution: Definition Trägheitsmoment: $I = \rho \int r^2 dV$.
Mit $dV = r dr d\phi dz$ in Zylinderkoordinaten folgt:

$$I = \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^l r^3 dr d\phi dz \tag{1}$$

$$= 2\rho\pi l \int_0^r r^3 dr \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi l r^4 \tag{3}$$

Mit $V = \frac{M}{\rho} = \pi r^2 l$ folgt dann $I = \frac{1}{2}Mr^2$ (2 P).

(b) Wie weit muss die Masse nach unten fallen, damit die Trommel eine Winkelgeschwindigkeit von $100\,\mathrm{s}^{-1}$ hat? (6 P)

Solution: Energieerhaltung: $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$ (2 P)
Mit $v = \omega r$ folgt: $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = mgh$ (1 P)
Mit $I = \frac{1}{2}Mr^2$:

$$\frac{1}{4}Mr^2\omega^2 + \frac{m}{2}(\omega r)^2 = mgh$$

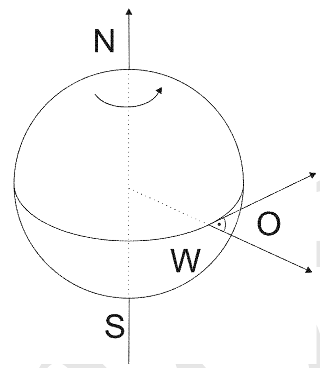
$$\Rightarrow h = \frac{(\omega r)^2}{2g}\left(\frac{M}{2m} + 1\right) \qquad (1\ \mathrm{P})$$

$$= 30\,\mathrm{m} \qquad (1\ \mathrm{P})$$

4. **Freier Fall mit Erdrotation**
Ein Körper der Masse m fällt am Äquator in einen senkrechten Schacht mit einer Tiefe von $h = 500$ m, unter Vernachlässigung der Luftreibung und mit konstanter Erdbeschleunigung g.

(a) Wohin zeigt die Coriolis-Kraft $\vec{F}_C$? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an. Berechnen Sie F_C als (1) Funktion der Zeit t und als (2) Funktion der Fallstrecke s. Bei $t = 0$ sei $s = 0$, $v = 0$. (3 P)

Solution: $\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$, $\vec{\omega}$ zeigt nach Norden, $\vec{F}_C$ zeigt horizontal nach Osten, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T \approx 86400$ s. Bewertung: 1 P für die Zeichnung.



Die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{g}t$ steht senkrecht zu $\vec{\omega}$ und die Änderung der Fallbahn durch $\vec{F}_C$ ist so klein, dass Coriolis-Kräfte zweiter Ordnung vernachlässigt werden können, daher ist

$$F_C = |\vec{F}_C| = 2m\omega v \quad \text{(1 P)}$$
$$F_C(t) = 2m\omega g t$$
$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \Rightarrow F_C(s) = 2m\omega\sqrt{2sg}. \quad \text{(1 P)}$$

(b) Wie groß und in welche Richtung ist die Abweichung von der Vertikalen beim Aufprall auf den Boden des Schachts, wenn sie den Effekt der Corioliskraft mitberücksichtigen? (Die Vertikale sei hier definiert als die Richtung von g) (3 P)

Solution: Die Coriolis-Beschleunigung ist $a_C(t) = \frac{F_C(t)}{m} = 2\omega g t$ (0.5 P), durch Integration nach der Zeit erhält man:

$$v_C(t) = \int_0^t a_C(t')\mathrm{d}t' = g\omega t^2, \quad \text{(0.5 P)}$$
$$s_C(t) = \int_0^t v_C(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{3}g\omega t^3. \quad \text{(0.5 P)}$$

Mit der Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ erhält man

$$s_C = \frac{1}{3} g\omega \frac{2h}{g} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0.24\,\mathrm{m}. \quad (1\ \mathrm{P})$$

Die Abweichung s_C zeigt wie $\vec{F}_C$ horizontal nach Osten, d.h. der Körper trifft 24 cm östlich vom Lot auf (0.5 P für die Richtung).

5. **Zwei Schlittschuhläufer**
Zwei 70 kg schwere Schlittschuhläfer laufen geradeaus mit einer Geschwindigkeit von jeweils 0.6 m/s aufeinander zu. Ihre Trajektorie / Bahnkurven sind parallel und 10 m zueinander versetzt. Wenn sie auf gleicher Höhe sind, fassen beide das Ende eines 10 m langen Seils an.

(a) Welchen Drehimpuls hat jeder Läufer bezüglich des gemeinsamen Drehpunkts und wie groß ist das Trägheitsmoment des Systems? (2 P)

Solution: $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot mv = 5\,\text{m} \cdot 70\,\text{kg} \cdot 0.6\text{ m/s} = 210\text{ kg m}^2\text{/s}$. (1 P)
Trägheitsmoment zweier Massenpunkte im Abstand r vom Mittelpunkt: $I = 2mr^2 = 2 \cdot 70\,\text{kg} \cdot (5\,\text{m})^2 = 3500\text{ kg/m}^2$. (1 P)

(b) Wie ändert sich die Drehgeschwindigkeit, wenn sich jeder Läufer näher zum 2.5 m zum Drehpunkt hangelt? (1 P)

Solution: Drehimpuls L_{ges} bleibt konstant:
$L_{\text{ges}} = 2mr^2\omega_1 = 2m(\frac{r}{2})^2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 4\omega_1$

(c) Wie groß ist die Arbeit, die ein Läufer beim Hangeln verrichten muss? (3 P)

Solution:

$$E_1 = \frac{1}{2}I_{vor}\omega_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2}I_{nach}\omega_2^2, \quad \text{(1 P)}$$
$$E_1 = \frac{1}{2}mr^2\omega_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 4^2\omega_1^2 \quad \text{(1 P)}$$
$$A = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}\left(4mr^2\omega_1^2 - mr^2\omega_1^2\right) = 1.5mr^2\omega_1^2 = 1.5mv^2 = 37.8\,\text{J}. \quad \text{(1 P)}$$

6. **Asteroid**

(a) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F von einem kugelförmigen (nicht-rotierenden) Asteroiden mit einem Radius von $R = 500$ km und einer Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche von $g_A = 3.0$ m/s^2? (3 P)
Hinweis: Verwenden Sie die Energieerhaltung.

Solution: Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_F^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \quad (*) \quad (1\text{ P})$$

Gravitationsbeschleunigung des Asteroiden (an der Oberfläche):

$$F = G\frac{mM}{R^2} = mg_A \quad (\Rightarrow\ g_A = G\frac{M}{R^2})$$
$$\Rightarrow G\frac{mM}{R} = mg_AR \quad (**) \quad (1\text{ P})$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$\frac{1}{2}mv_F^2 - mg_AR = 0$$
$$\Rightarrow v_F = \sqrt{2g_AR} = \sqrt{2\cdot 3.0\,\text{m/s}^2\cdot 5\cdot 10^5\,\text{m}} = 1.7\,\text{km/s}. \quad (1\text{ P})$$

(b) Wie weit wird sich ein Objekt von der Oberfläche des Asteroiden entfernen, wenn es die Oberfläche mit einer Radialgeschwindigkeit von $v = 1000$ m/s verlässt? (4 P)

Solution: Energieerhaltung:

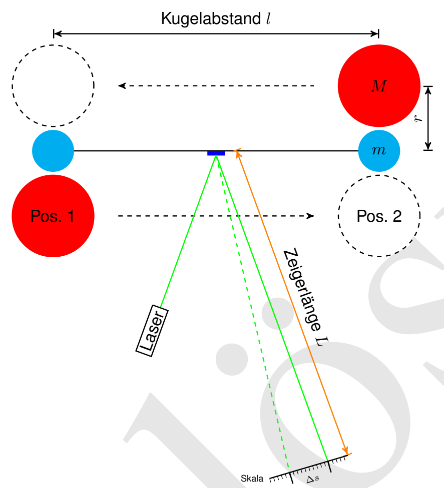
$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{R+h} \quad (1\text{ P})$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - mg_AR = -mg_AR\frac{R}{R+h} \quad ((**)\text{ eingesetzt}) \quad (1\text{ P})$$
$$(R+h)(\frac{1}{2}v^2 - g_AR) = -g_AR^2$$
$$h(\frac{1}{2}v^2 - g_AR) = -g_AR^2 - \frac{1}{2}Rv^2 + g_AR^2$$
$$h = -\frac{1/2Rv^2}{1/2v^2 - g_AR} = \frac{Rv^2}{2g_AR - v^2} \quad (1\text{ P})$$
$$h = 5\cdot 10^5\,\text{m}\cdot\frac{(1000\,\text{m/s})^2}{2\cdot 3\,\text{m/s}^2\cdot 5\cdot 10^5\,\text{m} - (1000\,\text{m/s})^2} = 250\,\text{km}. \quad (1\text{ P})$$

7. **Richtig oder Falsch?** (12 P)

Richtige Antworten (✓) geben +**1 Punkt**, falsche Antworten (×) −**1 Punkt**. Die Gesamtsumme der Punkte kann aber nicht negativ werden.

- **<u>Richtig</u>** Wenn die Arbeit, $W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$ **nicht** von gewählten Weg von $A \to B$ abhängt, dann ist das Kraftfeld **konservativ**
- **<u>Falsch</u>, inel. Stöße** Bei Stößen ist die kinetische Energie **immer** erhalten.
- **<u>Falsch</u>, $m_1 \leftrightarrow m_2$ im Zähler vertauscht** Der Schwerpunkt von zwei Massenpunkten mit $m_{1/2}$ mit Ortsvektoren $\vec{r}_{1/2}$ ist gegeben aus $\vec{R} = \frac{m_2\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_2}{m_1+m_2}$
- **<u>Richtig</u>** Bei 2-Körper Stößen im Schwerpunktsystem gilt, dass $\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = 0 = \vec{p}_1^{\,*\prime} + \vec{p}_2^{\,*\prime}$ mit $\vec{p}_i^{\,*}$ und $\vec{p}_i^{\,*\prime}$ den Impulsen vor und nach dem Stoß
- **<u>Falsch</u> Zentrifugalbeschleunigung, die Coriolisbeschleunigung spürt man nur, wenn man sich selber bewegt ($\vec{a}_c = 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega})$).**
  Ein ruhendes Objekt auf der Erdoberfläche spürt zwei Beschleunigungen: seine eigene und die Coriolisbeschleunigung
- **<u>Richtig</u>** Ein Objekt, welches sich auf der Nordhalbkugel von Süden nach Norden mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wird durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt
- **<u>Falsch</u> Die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft sorgt dafür, dass die Gesamtbeschleunigung unter den Erdmittelpunkt zeigt.**
  In Bonn zeigt die Gravitationsbeschleunigung exakt zum Zentrum der Erde (falls die Erde genau als Kugel approximiert wird)
- **<u>Richtig</u>** Die Periode eines Foucault-Pendel am Pol ist 24 Stunden
- **<u>Falsch</u>,** $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \text{const}$ Das 2. Keplersche Gesetz besagt, dass in gleichen Zeiten eine zum Abstand zur Sonne proportionale Fläche überstrichen wird
- **<u>Richtig</u>** Die Gravitationskräfte im Innern einer Hohlkugel heben sich exakt auf
- **<u>Falsch</u>, 3 Raumkoordinaten und 3 Drehwinkel** Ein starrer Körper hat genau immer 3 Freiheitsgrade
- **<u>Richtig</u>** Bei einem stabilen Zustand stellt sich nach einer Auslenkung immer eine rücktreibende Kraft ein, egal wie groß die Auslenkung ist

8. **Berechnung der Gravitationskonstante**
Mit einer Drehwaage soll die Gravitationskonstante G bestimmt werden. Dazu werden nachdem das System erstmal in Ruhe war zwei Massen (M) von Position 1 zu Position 2 verschoben. Die Testmassen sind an einem Torsionsfaden aufgehängt, welcher eine Rückstellkraft auswirkt, welche mit der Verdrehung zunimmt bis sie die Anziehungskraft der Massen M vollständig kompensiert. Die Bewegung der Drehwaage wird mit einem Laser an einer Wand mit Abstand L vermessen.

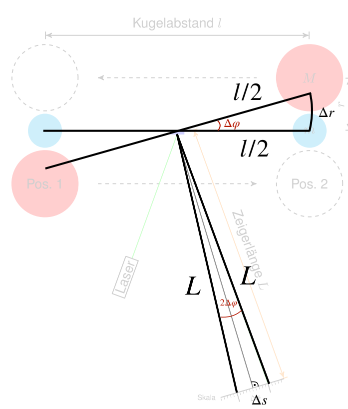


(a) Welche Kräfte wirken auf die Testmasse m nachdem die Massen M von Position 1 auf 2 verschoben wurden? (1 P)

> **Solution:** $F = 2 \times G \frac{M m}{r^2}$, der Faktor zwei kommt von der Entspannung des Torsionsfadens

(b) Zeigen sie, dass für die Drehung des Spiegels gilt: $\Delta r = \frac{l}{2} \frac{\Delta s}{2L}$ mit l der Distanz zwischen der beiden Probemassen m und Δr der Distanz, um welche die Testmasse m sich zur Masse M bewegt hat. (3 P)

> **Solution:** Winkelsituation:



Drehung des Spiegels ergibt: $\frac{\Delta s}{2L} = \sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Die radiale Distanz ist $\frac{l}{2}\Delta\varphi = \frac{l}{2}\frac{\Delta s}{2L}$.

(c) Sie messen nach 60 Sekunden einen Wert von $\Delta s = 0.156\,\text{m}$. Leiten Sie hieraus einen Wert für die Gravitationskonstante G her. Vernachlässigen Sie, dass die Rückstellkraft als eine Funktion der Zeit abnimmt. *Hinweis: Nutzen sie, dass $F = ma$ ist* (4 P)
Numerische Werte: $t = 60\,\text{s}$, $M = 1.485\,\text{kg}$, $L = 27.5\,\text{m}$, $l = 0.1\,\text{m}$, $r = 0.05\,\text{m}$

Solution: Die in 60 s zurückgelegte Distanz $\Delta r = \frac{1}{2}at^2$. Mit dem Ausdruck aus Teilaufgabe b) finden wir: $a = \frac{2}{t^2}\frac{l}{2}\frac{\Delta s}{2L}$. Es gilt aber auch $F = ma = 2 \times G\,\frac{M\,m}{r^2}$, und wir finden folgenden Zusammenhang $G = \frac{r^2}{2M}\frac{1}{2L}\frac{l}{t^2}\Delta s$. Numerisch erhalten wir mit den Zahlenwerten $G = 6.63198 \times 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kgs}}$.