Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, U. Pohl, R. Kramer

01.11.2024
Wintersemester 2024/25

Theoretische Physik IV: Statistische Physik
Übungsblatt 4

(Abgaben auf eCampus hochladbar bis 13 Uhr am 08.11.2024)

In den kommenden Wochen enthalten die Übungszettel zusätzlich zu den Hausaufgaben die "Quickies". Diese sollen an die Vorlesungsinhalte erinnern und deren Verständnis manifestieren. Die Quickies werden in der Übung diskutiert, jedoch nicht bewertet.

Quickies

a) Wie lautet die Fundamentalbeziehung der Thermodynamik und wie unterscheidet sie sich vom ersten Hauptsatz?

b) Wann bezeichnet man eine thermodynamische Zustandsgröße als extensiv bzw. intensiv? Geben Sie Beispiele für extensive und intensive Größen.

c) Was ist eine Legendre-Transformation? Führen Sie eine geeignete Transformation von der freien Energie $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{M}$ zum elektromagnetischen Potential $\mathrm{d}\Upsilon = T\mathrm{d}S + \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{B}$ durch.

d) Schreiben Sie die Maxwell-Relation für das Potential $\Upsilon(S, B)$ aus c) nieder.

e) Welche Bedeutung haben die sog. Response-Funktionen? Nennen Sie Beispiele für solche Response-Funktionen.

f) Erklären Sie, warum die isobare Wärmekapazität c_p nie kleiner als die isochore Wärmekapazität c_V sein kann.

4.1 Response-Funktionen in der Thermodynamik **15 Punkte**

In dieser Aufgabe wollen wir einige Relationen zwischen wichtigen Response-Funktionen berechnen. Im thermodynamischen Kontext mit zeitlich konstanten externen Parametern definieren wir die Response-Funktion wie folgt. Betrachten Sie ein Potential $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, hier abhängig von externen Parametern X_1, X_2,..., X_n . Eine Response-Funktion r ist dann gegeben durch

$$r = \left(\frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial F(X_1, ...X_n)}{\partial X_j} \right)_{X_l \neq X_j} \right)_{X_k \neq X_i}, \tag{1}$$

d.h. r ist gegeben durch die zweite Ableitung eines thermodynamischen Potentials F.
In dieser Aufgabe wollen wir zwei Relationen zwischen magnetischen Response-Funktionen zeigen. Das totale Differential der inneren Energie U ist

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N - B\mathrm{d}M. \tag{2}$$

Wir definieren nun die magnetische Suszeptibilität bei konstanter Temperatur χ_T bzw. konstanter Entropie χ_S als

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T, \qquad \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_S, \tag{3}$$

und weiterhin die spezifische Wärme bei konstantem Magnetfeld c_B bzw. konstanter Magnetisierung c_M, sowie die Wärmeausdehnung bei konstantem Magnetfeld α_B als

$$c_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B, \qquad c_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M, \qquad \alpha_B = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_B. \tag{4}$$

a) (6P) Schreiben Sie die Response-Funktionen χ_T, χ_S, c_B, c_M und α_B jeweils als zweite Ableitung eines geeigneten Potentials A. Geben Sie auch jeweils das totale Differential $\mathrm{d}A$ an.

b) (9P) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\frac{c_B}{c_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S}, \qquad c_B - c_M = -TV^2 \frac{\alpha_B^2}{\chi_T} \tag{5}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Relationen, die Sie in Aufgabe 2.2 für die Ableitungen von exakten Differentialen gezeigt haben. Auch Kapitel 2.7.4 im Vorlesungsskript kann helfen.

4.2 Heizen eines Raumes **15 Punkte**

Ein Raum, der ein Volumen V besitzt, soll von der Temperatur T_1 auf die Temperatur $T_2 > T_1$ erwärmt werden. Es wird angenommen, dass die Luft in dem Raum durch ein ideales Gas beschrieben werden kann. In der Aufgabe 4.2 haben Sie gezeigt, dass für die isobare und isochore spezifische Wärme des idealen Gases gilt

$$c_p = \frac{f+2}{2} N k_B \quad \text{und} \quad c_V = \frac{f}{2} N k_B, \tag{6}$$

wobei N die Teilchenzahl ist und f die Anzahl der Freiheitsgrade pro Teilchen. Wir betrachten nun zunächst eine isobare Erwärmung, d.h. der Druck innerhalb des Raumes entspricht dem atmosphärischen Außendruck P_0.

a) (2P) Zeigen Sie die Gleichungen aus (6) für das ideale Gas. Warum gilt für Luft bei Raumtemperatur $f = 5$?

b) (3P) Berechnen Sie die nötige Wärmemenge $\Delta Q_P(T_1, T_2)$, um den Raum isobar von T_1 auf T_2 zu erwärmen.

c) (2P) Zeigen Sie, dass die nötige Wärmemenge ΔQ_P für kleine Temperaturdifferenzen $\frac{T_2 - T_1}{T_1} \ll 1$ näherungsweise geschrieben werden kann, als

$$\Delta Q_P(T_1, T_2) = \frac{7}{2} N_1 k_B (T_2 - T_1) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)^2\right). \tag{7}$$

d) (2P) Betrachten Sie nun einen hermetisch abgeschlossenen Raum, d.h. die Teilchenzahl $N = N_1$ bleibt hier konstant. Berechnen Sie die nötige Wärmemenge $\Delta Q_N(T_1, T_2)$ für diesen Fall.

e) (2P) Betrachten Sie das Verhältnis $q(t) = \frac{\Delta Q_P - \Delta Q_N}{Q_0}$ mit $Q_0 = N_1 k_B T_1$ und $t = T_2/T_1$. Stellen Sie $q(t)$ graphisch dar, und berechnen Sie jenes t_0, für das gilt $q(t_0) = 0$.

f) (2P) Ist es energiesparender isobar oder isoliert zu heizen?

Benutzen Sie als Beispiel $T_1 = 0°\text{C}$ und $T_2 = 20°\text{C}$. Nehmen Sie außerdem einen Außendruck von $P_0 = 10^5\,\text{Nm}^{-2}$ an, und ein Raumvolumen von $V = vV_0$, mit $V_0 = 1\,\text{m}^3$.

g) (2P) Wie viel Energie pro Kubikmeter spart man, wenn man isoliert erwärmt? Was ist die relative Druckerhöhung im Raum dabei?

4.3 Stirlingsche Näherung **10 Punkte**

In dieser Aufgabe leiten wir die Stirlingsche Formel für die Fakultätsfunktion ab:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad \text{für } N \gg 1 \tag{8}$$

Da die Stirling-Formel die in der Physik häufig benutzte Fakultät durch elementare Funktionen im thermodynamischen Limes asymptotisch annähert, wird sie besonders bei der Berechnung von extensiven Zustandsgrößen hilfreich sein. Um diese Näherung zu zeigen, muss zunächst die sogenannte Sattelpunktmethode durchgeführt werden, die Integrale der Form

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{N f(x)\} \, \mathrm{d}x \tag{9}$$

für große N vereinfacht.

a) (5P) Sei $f(x)$ eine analytische Funktion mit einem globalen Maximum bei x_0. Zeigen Sie, dass für große N, $(N \gg 1)$, folgendes gilt:

$$I = e^{N f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N|f''(x_0)|}}, \qquad \text{mit } f''(x_0) = \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}. \tag{10}$$

b) (5P) Zeigen Sie mit Hilfe der Sattelpunktmethode die Stirlingsche Formel in Gl. (8). Erinnern Sie sich dazu an die Integraldarstellung der Fakultätsfunktion über die Gammafunktion $n! = \Gamma(n+1)$ aus Aufgabe 1.1 c).