### Experimentell: Magische Zahlen

- **größere Bindungsenergien als im Tröpfchenmodell erwartet**
- **besonders hohe Anregungsenergien,**
- **besonders viele stabile und langlebige Isotope**

$\Leftrightarrow$ **Schalen** (besonders stabile Kern-Konfigurationen)

- **Schalen-Modell:**
  - **Zentralsym. “mean-field”-Potential (Näherung)**
  - **Teilchen werden als unabhängig behandelt**

  $\Leftrightarrow$ **Lösen der Schrödingergleichung**

  1) H.O.-Potential, 2) Woods-Saxon-Potential

  $\Rightarrow$ Nur die ersten 3 magischen Zahlen (2,8,20) werden reproduziert

$\Leftrightarrow$ **Ganz entscheidend: Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung** ($\neq$ Atom)

$\Rightarrow$ **Erklärt die Magischen Zahlen $\leftrightarrow$ Schalenabschlüsse**

- **Ein-Teilchen-, Ein-Lochzustände**

$\Rightarrow$ **Bestimmung der Quantenzahlen $\mathrm{J^P}$ der Kern-Grundzustände**

(Drehimpulse von vollständig gefüllten Schalen koppeln zu null!)



## Magnetische Momente im Schalenmodell

**Schalenmodell:** **Nukleonen wird Spin und Bahndrehimpuls zugeordnet**
$\Rightarrow$ **berechnen der magnetischen Momente**
**- Bahndrehimpuls- und Spinanteil**

$$\vec{\mu}_{Kern} = \mu_N \cdot \frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{A}\left(\vec{\ell}_i g_\ell + \vec{s}_i g_s\right)$$

$g_\ell = 1$ für Protonen
$g_\ell = 0$ für Neutronen
$g_s = +5.58$ für Protonen
$g_s = -3.83$ für Neutronen

$^{16}_{8}O_8$: **magnetisches Moment = 0**

$$\vec{\mu}_{Kern} = \frac{1}{\hbar}\langle \Psi_{Kern}|g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s}|\Psi_{Kern}\rangle \cdot \mu_N$$

**für Ein-Teilchen-, Ein-Loch-Zustände:**
**Magnetisches Moment wird durch**
**das Valenz-Nukleon, -Loch bestimmt**

**Wigner Eckart-Theorem:**

**Erwartungswert eines Vektors = Erwartungswert der Projektion dieser Größe auf den Gesamtdrehimpuls (hier Kernspin $J$)**

$$g_{Kern} = \frac{\langle JM_J|g_\ell \vec{\ell}\vec{J} + g_s \vec{s}\vec{J}|JM_J\rangle}{\langle JM_J|\vec{J}^2|JM_J\rangle}$$

# Magnetische Momente im Schalenmodell

**Wigner Eckart-Theorem:**

**Erwartungswert eines Vektors = Erwartungswert der Projektion dieser Größe auf den Gesamtdrehimpuls (hier Kernspin $J$)**

$$g_{Kern} = \frac{\langle JM_J | g_\ell \vec{\ell}\vec{J} + g_s \vec{s}\vec{J} | JM_J \rangle}{\langle JM_J | \vec{J}^2 | JM_J \rangle}$$

**Im Modell: $J$ (Kern) = $j$ des einzelnen Nukleons:**

( mit: $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$, $\vec{j} - \vec{l} = \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{j}^2 + \vec{\ell}^2 - 2\vec{\ell}\vec{j} = \vec{s}^2$ , ...)

$$g_{Kern} = \frac{g_\ell\,[j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)] + g_s\,[j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)]}{2j(j+1)}$$

$$\vec{\mu}_{Kern} = g_{Kern} \cdot \mu_N \cdot \frac{\langle \vec{J} \rangle}{\hbar}$$

**Magnetisches Moment des Kernes: Wert, der bei maximaler Ausrichtung des Kernspins gemessen wird:** $|M_J| = J \Rightarrow \langle \vec{J} \rangle = J\hbar$

$$\frac{\mu_{Kern}}{\mu_N} = g_{Kern} \cdot J = \left( g_\ell \pm \frac{g_s - g_\ell}{2\ell + 1} \right) \cdot J$$

**für $J = j = \ell \pm 1/2$**



# Magnetische Momente im Schalenmodell

| Nuclei | State | $J^P$ | $\mu/\mu_N$-model | $\mu/\mu_N$-exp. |
|---|---|---|---|---|
| $^{15}N$ | p-$1p_{1/2}^{-1}$ | $1/2^-$ | -0.264 | -0.283 |
| $^{15}O$ | n-$1p_{1/2}^{-1}$ | $1/2^-$ | +0.638 | +0.719 |
| $^{17}O$ | n-$1d_{5/2}$ | $5/2^+$ | -1.913 | -1.894 |
| $^{17}F$ | p-$1d_{5/2}$ | $5/2^+$ | +4.722 | +4.793 |

**Beispiel mit guter Übereinstimmung**

**( doppelt magische Kerne +/- 1, kleine A**
**$\Rightarrow$ Effekt der Polarisation des Kernes durch das Valenznukleon klein )**

**Nicht der Fall für schwerere Kerne:**
**Annahme, dass das magnetische Moment nur durch die Valenznukleonen bestimmt wird, vereinfacht die Situation zu stark.**
**In schweren Kernen polarisieren die Valenznukleonen den Kernrumpf**

# Deformierte Kerne

**Bisher: Ein-Teilchen-, Ein-Loch-Zustände in einem kugelsym. Potential**
**⇔ gut für Kerne nahe an doppelt magischen Kernen**
**⇔ schlecht für Kerne mit halb gefüllten Schalen**

**Deformierte Kerne:**
**- Potential nicht mehr kugelsymmetrisch**

**Idee: Mehrere Nukleonen in halb gefüllten Schalen**
**=> Nukleonen können verschiedene Zustände einnehmen (Ort, Spin)**

**Atom: => Hund'sche Regel**

**Kern: Anziehung zwischen den Nukleonen:**
**Nukleonen bevorzugen eine Ordnung in Paaren mit der gleichen räumlichen Wellenfinktion und Drehimpuls null.**

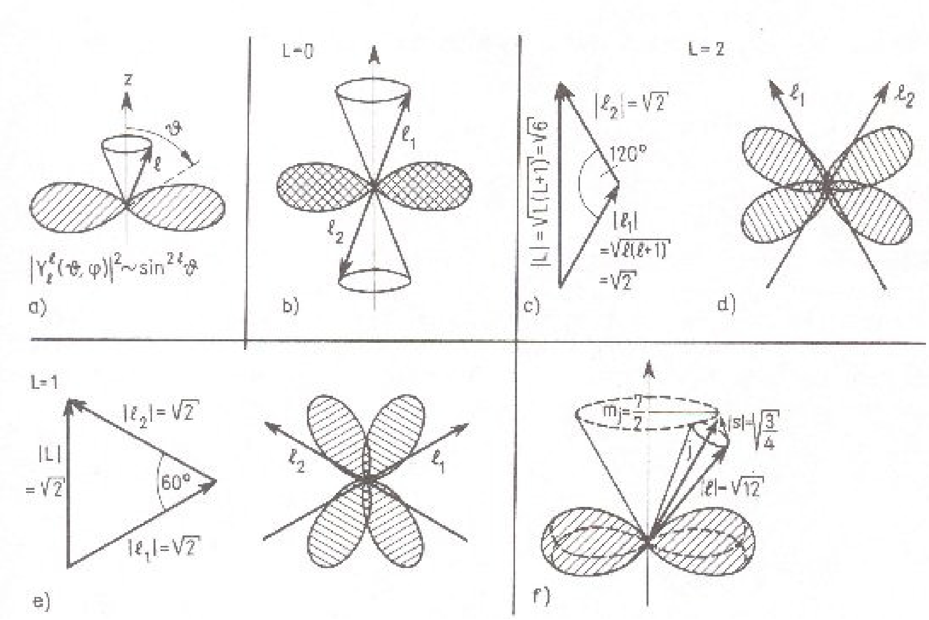
$l_1 = l_2, \quad m_1 = -m_2, \quad , \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0$ **Paarungsenergie**



# Rest-Wechselwirkung - Paarungskräfte

**Rest-Wechselwirkungen: kleiner Beitrag zur Gesamtbindungsenergie des Nukleons, aber wichtig für die Kopplung der Valenznukleonen**

$\Rightarrow$ **Kerneigenschaften, wie Spin, magn.Moment, oder das Quadrupolmoment**

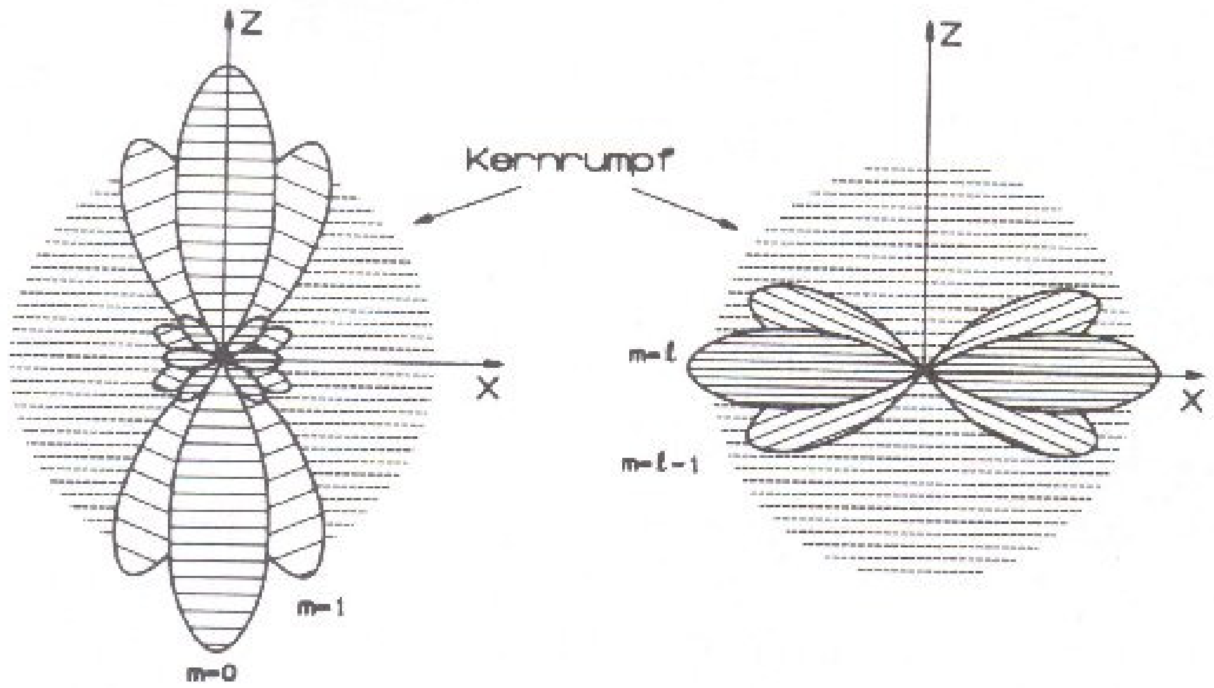



**Nukleonen bevorzugen benachbarte Orbits**
$\Rightarrow$ **Deformation**

**⇔ Größter Überlapp der Wellenfunktionen zweier Nukleonen bei antiparaller Einstellung der Bahn-drehimpulse (Kopplung zu 0)**

$l_1 = l_2, \quad m_1 = -m_2, \quad \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0$ **größere Stabilität der Kerne**

# Deformation

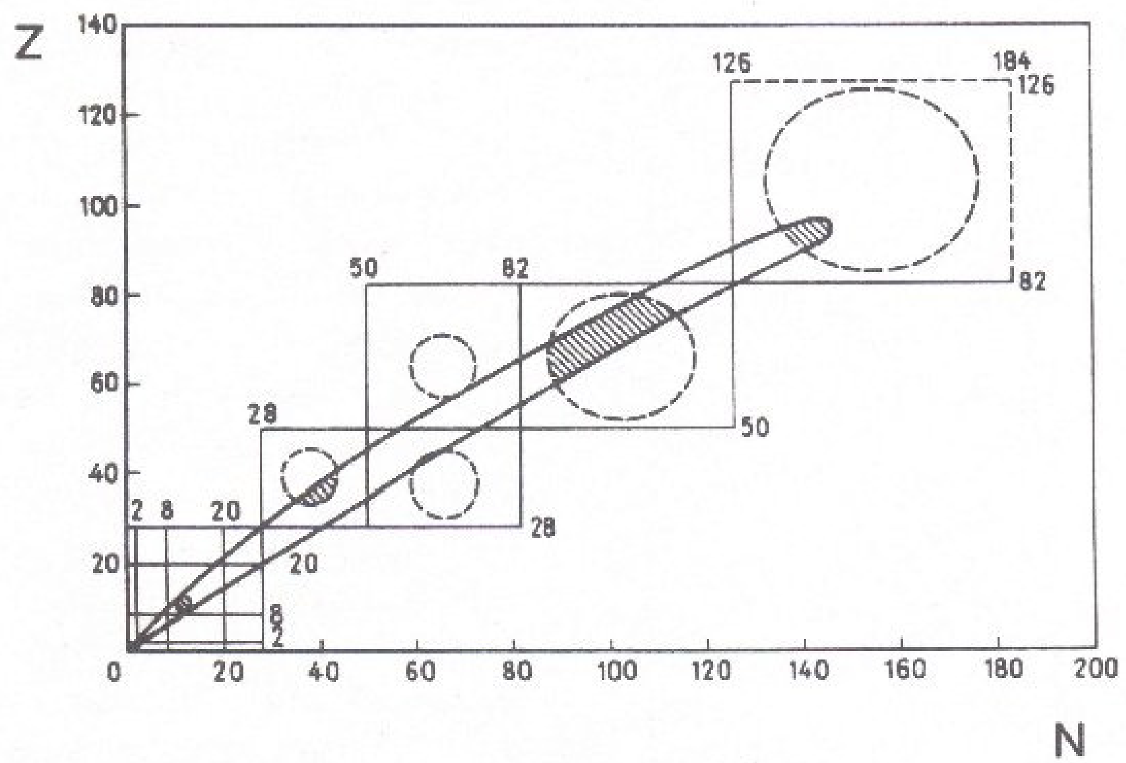



**Nukleonenpaare besetzen bevorzugt benachbarte Orbitale**
**=> bei halbgefüllten Schalen - Deformation**



# Deformation

**Deformation in N,Z-Bereichen weit entfernt von den magischen Zahlen**



# Kapitel 5 - Ein Blick ins Nukleon: Inelastische Streuung

**Ein Blick ins Nukleon**

- **Inelastische Streuung**
- **Tief inelastische Streuung**
  - Strukturfunktionen
  - Scaling
  - Partonen im Nukleon
  - Spin der Partonen
  - . . .



# Elastische Elektronenstreuung an Kernen / am Nukleon

**Zusammenfassung / Wiederholung:**

**Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an einem Atomkern mit Kernladungszahl Z (magn. Moment vernachlässigt)**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1+\frac{2E}{M_A c^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}\cdot\left|F\left(q^2\right)\right|^2 \qquad (\beta\to 1)$$

**<u>Rosenbluth-Formel:</u> Streuung eines $e^-$ am (ausgedehntem) Nukleon mit magnetischem Moment**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\cdot\left\{\frac{G_E^2(Q^2)+\tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau}+2\tau G_M^2(Q^2)\tan^2(\theta/2)\right\} \qquad \tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

# Inelastische Elektronenstreuung am Nukleon

a) Angeregte Zustände des Nukleons
b) Tiefinelastische Elektron-Nukleon Streuung ⇔ Struktur des Nukleons

**Wie bei Kernen werden auch in der Elektronenstreuung am Nukleon weitere Maxima zusätzlich zur elastischen Streuung beobachtet.**

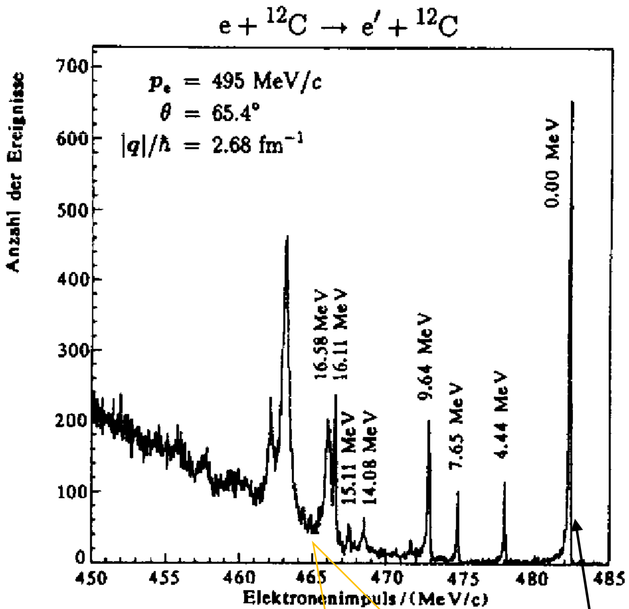
**bei Kernen:** Aussage über Struktur des aus Nukleonen zusammengesetzten Systems

**bei Nukleonen:** <u>Nukleon besitzt Substruktur</u>
→ kurzlebige angeregte Zustände: „Resonanzen“ $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$



# Inelastische Elektronenstreuung am Nukleon

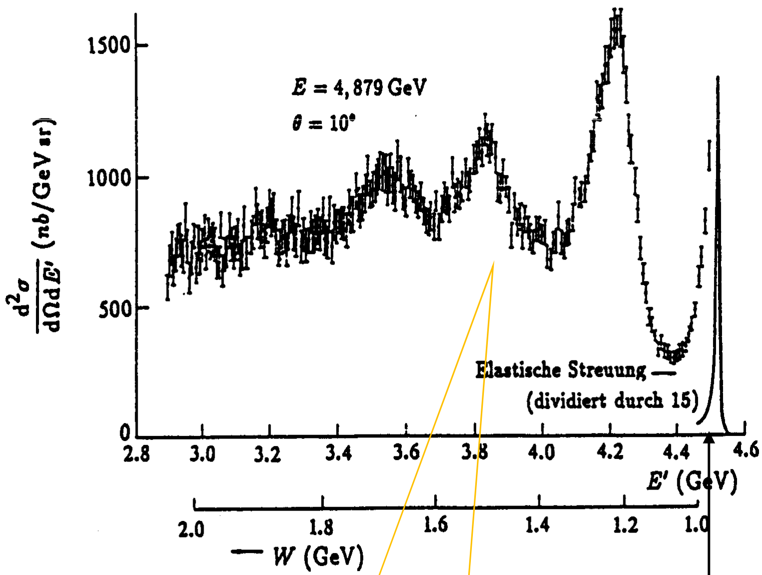
**<u>am Atomkern:</u>** $E_e = 0.495$ GeV
$\lambda_e = 2.5\text{fm} \leq R_A$




angeregte Zustände des Atomkerns

elastische Ereignisse

**<u>am Nukleon:</u>** $E_e = 4.879$ GeV
$\lambda_e = 0.25 \text{ fm} < R_N$




angeregte Zustände des Nukleons

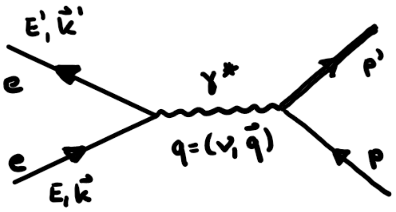
elastische Ereignisse

Strukturen bei: W = 1.232 GeV; 1.52 GeV ; 1.68 GeV;

Nukleon lässt sich anregen → Nukleon besitzt Substruktur

## zur Erinnerung:

$\hbar = c = 1$




$p' = p + q$

$p'^2 = p^2 + q^2 + 2pq$

$W^2 = M^2 - Q^2 + 2M\nu$

z.B. Masse des angeregten Zustands

$p \cdot q \underset{\text{Lab}}{=} \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu \\ \vec{q} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{p \cdot q}{M} = \nu$

elast. Streuung:

$W^2 = M^2$

$\Rightarrow x = \frac{Q^2}{2M\nu} = 1$

größere Masse

$W^2 > M^2$

$\Rightarrow W^2 - M^2 = 2M\nu - Q^2 > 0$

$2M\nu > Q^2$

$\Leftrightarrow 1 > \underbrace{\frac{Q^2}{2M\nu}}_{=x} > 0$ für $Q^2 > 0$



## Elastische / inelastische Streuung ⇔ Strukturfunktionen

$W^2c^2 = M^2c^2 + 2M\nu - Q^2$

| |
|---|
| einlaufende Teilchen = auslaufende Teilchen |

für W = M (elastische Streuung) → $2M\nu - Q^2 = 0$

→ nur ein freier Parameter, alle anderen Größen festgelegt

**Anders im inelastischen Fall :**

| |
|---|
| einlaufende Teilchen ≠ auslaufende Teilchen |

W > M → $2M\nu - Q^2 > 0$

=> 2 unabhängige Parameter $(E',\theta)$ oder $(Q^2,\nu)$

Erzeugung von Hadronen (über Resonanz oder direkt)

**Formfaktoren bei inelastischer Streuung: Strukturfunktionen $W_1$, $W_2$**

anstelle der Rosenbluth-Formel:

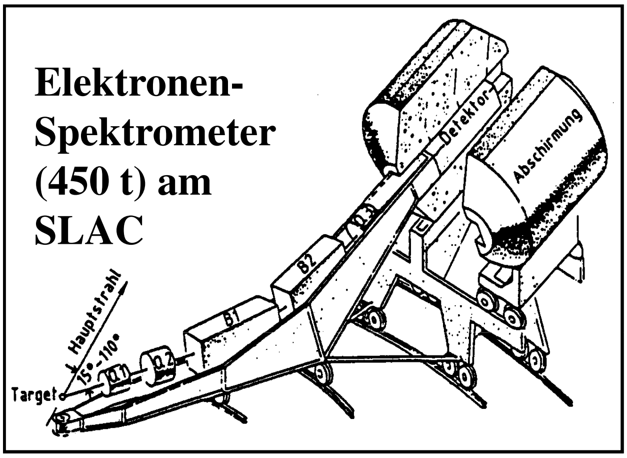
$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \cdot \left\{ W_2(Q^2,\nu) + 2W_1(Q^2,\nu)\tan^2(\theta/2) \right\}$$

# Inelastische Elektron-Proton-Streuung

**$e + p \rightarrow e' + X$ bei $E_e = 20$ GeV**

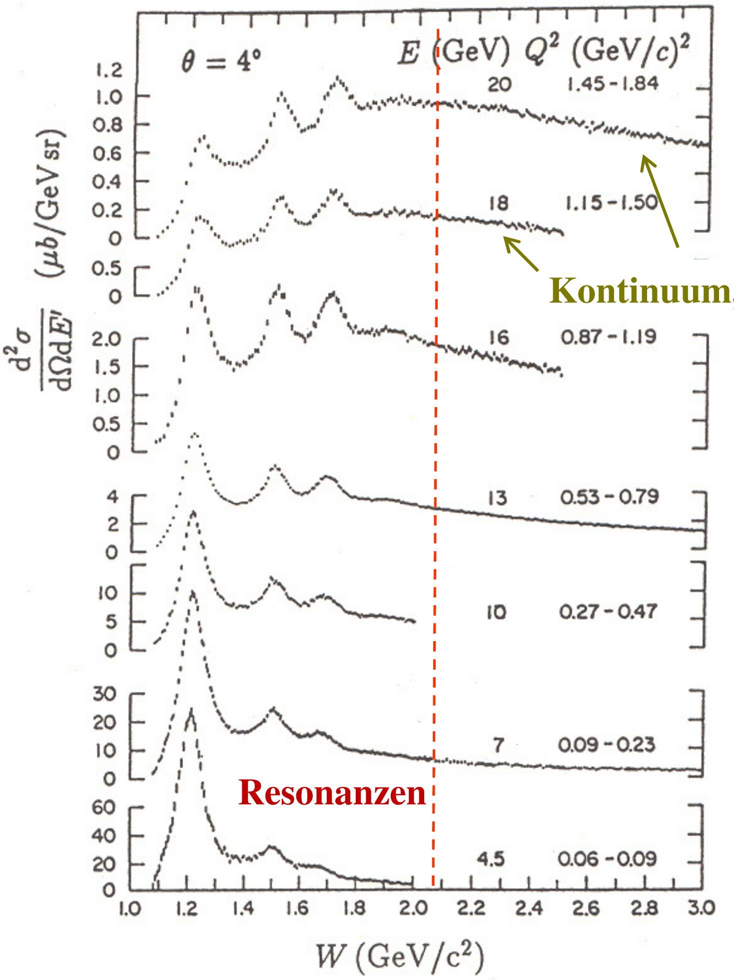
**Freedman, Kendall, Taylor : Nobelpreis 1990**

**Elektronen-Spektrometer (450 t) am SLAC**






# Tief-inelastische Streuung

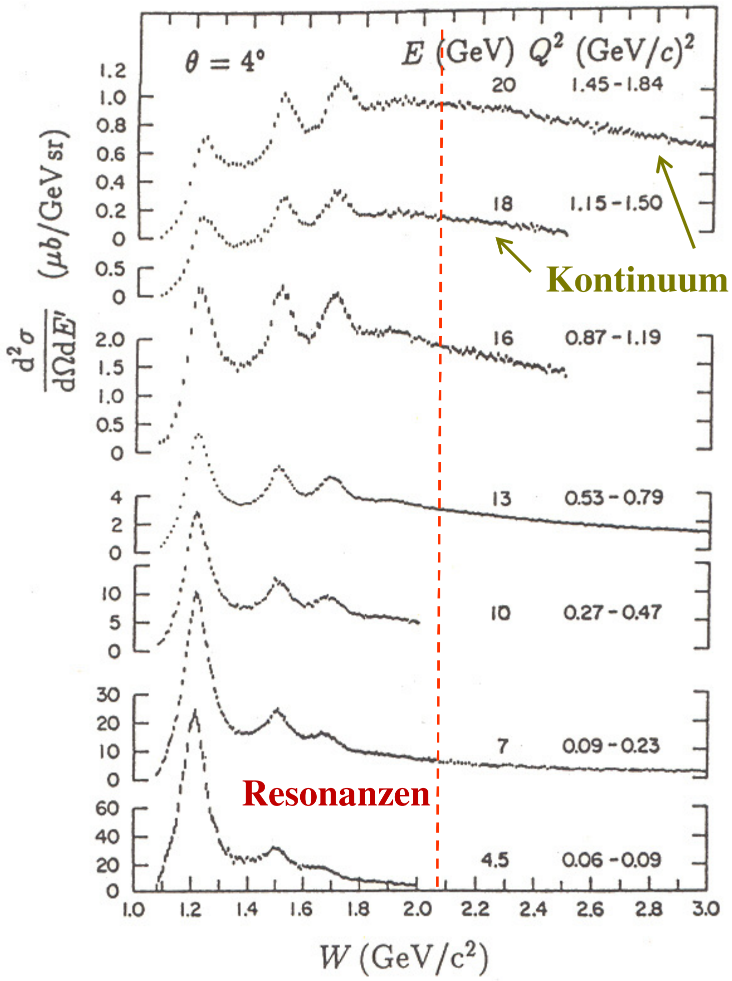


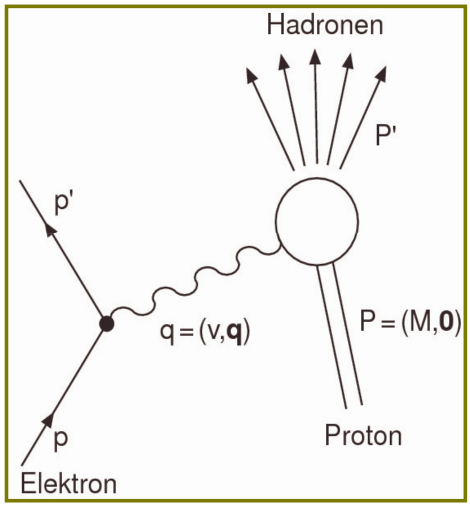

$e + p \rightarrow e' + X$

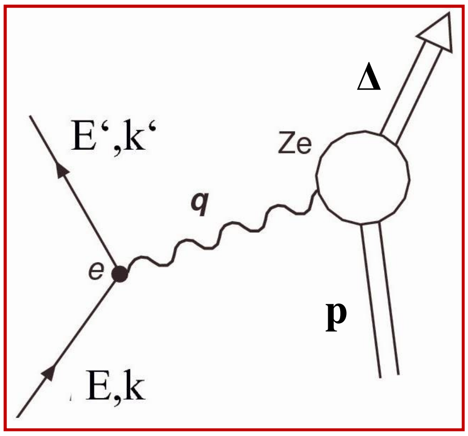
**=> Keine starke $Q^2$ -Abhängigkeit**

**=> Wirkungsquerschnitt zeigt starken Abfall mit $Q^2$ im Resonanzbereich ($Wc^2 < 2$ GeV)**

# Tief-inelastische Streuung

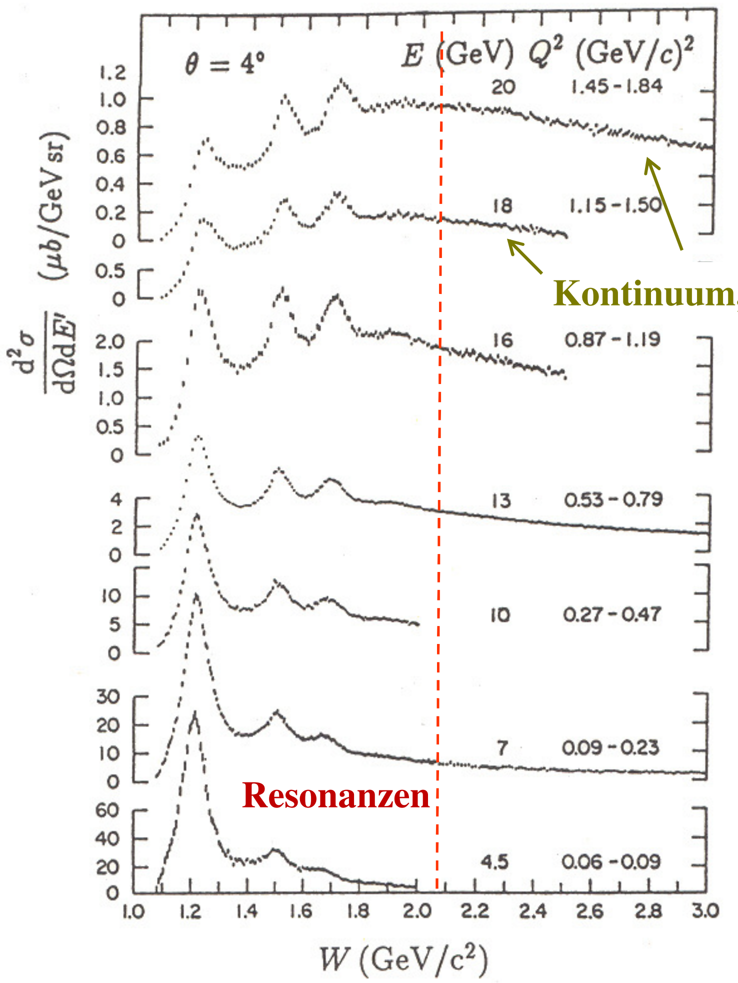





# Tief-inelastische Streuung

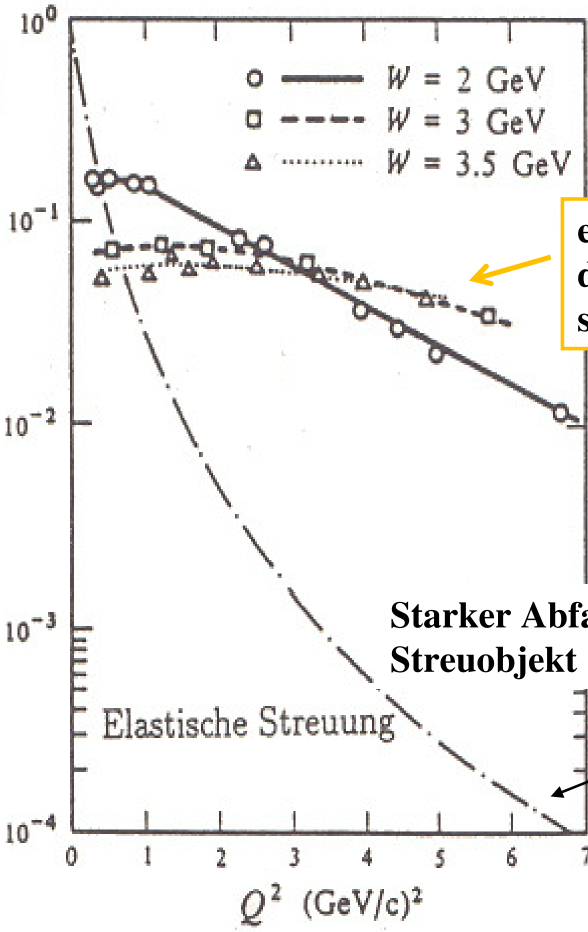


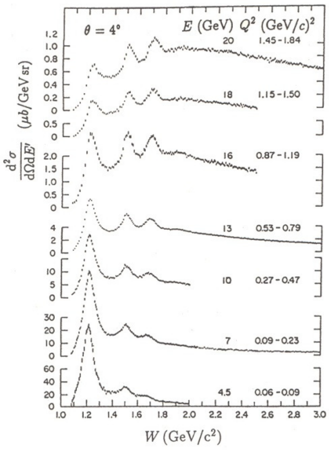

$e + p \rightarrow e' + X$

**Kontinuum, keine Resonanzen**

**=> Keine starke $Q^2$ -Abhängigkeit**

**=> Wirkungsquerschnitt zeigt starken Abfall mit $Q^2$ im Resonanzbereich ($Wc^2 < 2$ GeV)**



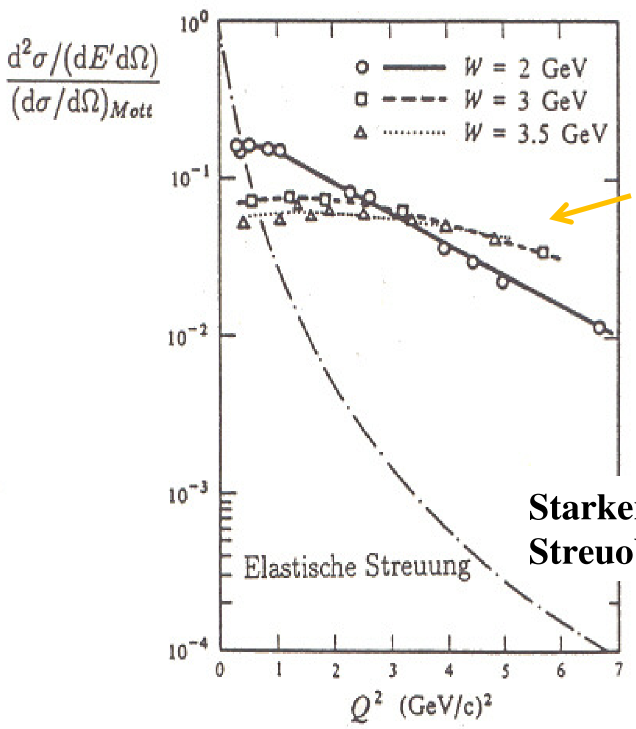

**entgegen aller Erwartungen fällt der Wirkungsquerschnitt nur schwach ab mit $Q^2$**

**Starker Abfall, großes Streuobjekt (Proton)**

$$|G_{Dipol}|^2 \sim \frac{1}{Q^8}$$








**entgegen aller Erwartungen fällt der Wirkungsquerschnitt nur schwach ab mit $Q^2$**

**Starker Abfall, großes Streuobjekt (Proton)**

**Strukturfunktionen kaum abhängig von $Q^2$ :konstanter FF ⇔ punktförmiges Streuobjekt**

**= Scaling**

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} \cdot \left\{ W_2(Q^2,\nu) + 2W_1(Q^2,\nu)\tan^2(\theta/2) \right\}$$

# Tief-inelastische Streuung

**Zur weiteren Diskussion, einführen von:**

- **Bjorkensche Skalenvariable (lorentzinvariant)**

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2Pq}$$

**= dimensionslose Größe**

**Elastische Streuung W = M**
**⇒ x = 1**
**Inelasische Streuung W>M**
**⇒ 0 < x < 1**

- **bisher : Strukturfunktionen** $W_1(Q^2, \nu),\ W_2(Q^2, \nu)$

**in** $$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \cdot \left\{W_2(Q^2,\nu) + 2W_1(Q^2,\nu)\tan^2(\theta/2)\right\}$$

**ersetzen durch dimensionslose Strukturfunktionen**

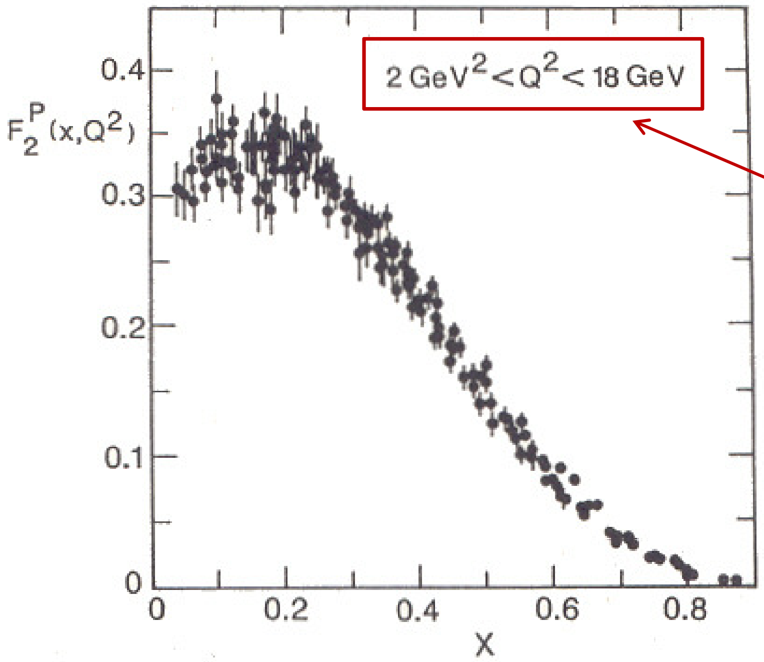
$$F_1(x,Q^2) = Mc^2 \cdot W_1(Q^2,\nu)$$

$$F_2(x,Q^2) = \nu \cdot W_2(Q^2,\nu)$$



# Tief-inelastische Streuung

$$F_2(x,Q^2) = \nu \cdot W_2(Q^2,\nu)$$




**Großer $Q^2$ –Bereich**
**⇒ Praktisch keine**
**$Q^2$ –Abhängigkeit !!!!**

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2Pq}$$

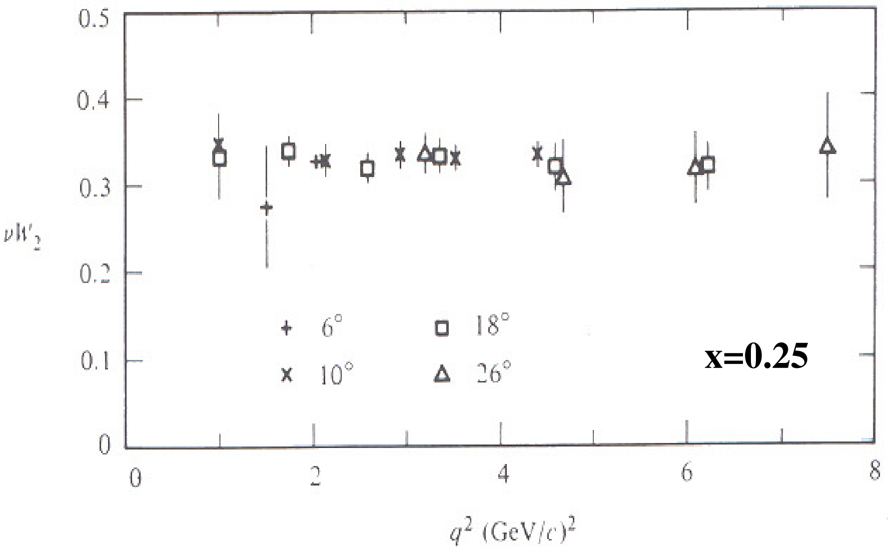
**$F_2(x,Q^2) \approx F_2(x)$ nur geringfügige Abhängigkeit von $Q^2$; d.h. trotz besserer Auflösung mit steigendem $Q^2$ bleibt die Strukturfunktion (Formfaktor) ≈ konstant.......**

## Tief-inelastische Streuung - Scaling -

$$F_2(x,Q^2) = \nu \cdot W_2(Q^2,\nu)$$

**Beobachtung : Praktisch keine $Q^2$ –Abhängigkeit über großen - $Q^2$ Bereich**

**⇔ ≈ konstante Strukturfunktion !!!**
**( ⇔ Formfaktor )**




$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2Pq}$$

**Nukleon besitzt eine Struktur aus punktförmigen Konstituenten !!!!**

**⇔ Was sind das für Konstituenten ???**

**- Spin = ?**



## Tief-inelastische Streuung - Spin der Konstituenten = ?

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}\cdot\cos^2(\theta/2)\cdot\frac{1}{x}\left\{F_2(x) + \frac{Q^2}{2M^2x^2}\cdot 2x\cdot F_1(x)\tan^2(\theta/2)\right\}$$

$$(\hbar = c = 1)$$

• **Was ist der Spin der punktförmigen Konstituenten?**

**Vergleich mit Streuung an punktförmigen Teilchen mit S=1/2**

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ^2}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\cdot\left(\frac{E'}{E}\right)\cos^2(\theta/2)\cdot\left\{1+2\tau\tan^2(\theta/2)\right\}$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\cdot\left(\frac{E'}{E}\right)\cos^2(\theta/2)\cdot\left\{1+\frac{Q^2}{2m^2}\tan^2(\theta/2)\right\}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{Q^2}{4m^2}$$

**Streuung wie an punktförmigen Teilchen mit S = ½, falls $2xF_1(x) = F_2(x)$ und Masse $m = x\cdot M$**

# Tief-inelastische Streuung - Spin der Konstituenten = ?

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}\cdot\cos^2(\theta/2)\cdot\frac{1}{x}\left\{F_2(x) + \boxed{\frac{Q^2}{2M^2x^2}}\cdot 2x\cdot F_1(x)\tan^2(\theta/2)\right\}$$

$(\hbar = c = 1)$

- **Was ist der Spin der punktförmigen Konstituenten?**

**Vergleich mit Streuung an punktförmigen Teilchen mit S=1/2**

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ^2}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\cdot\left(\frac{E'}{E}\right)\cos^2(\theta/2)\cdot\left\{1 + 2\tau\tan^2(\theta/2)\right\}$$

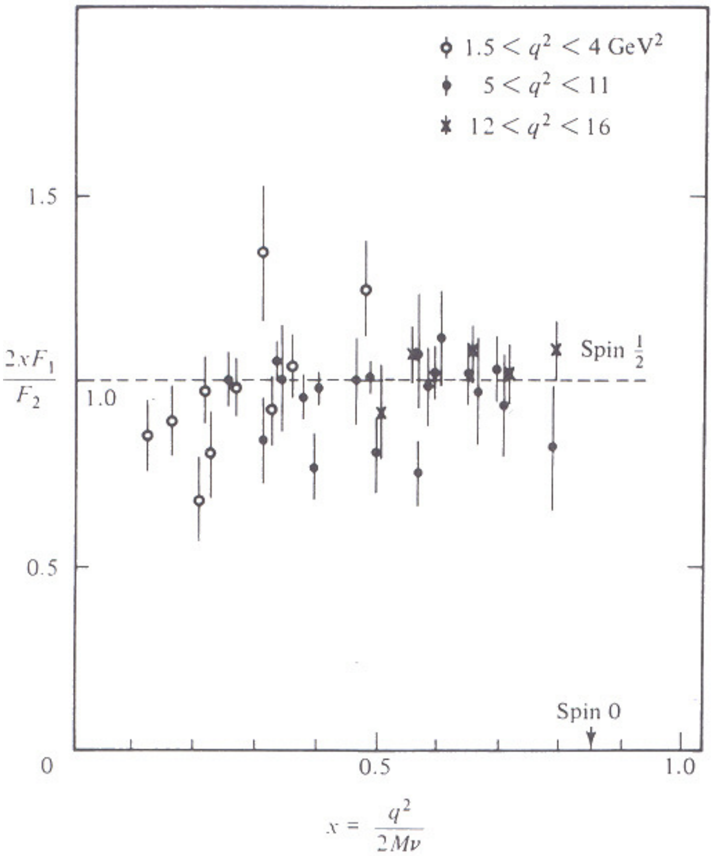
$$= \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\cdot\left(\frac{E'}{E}\right)\cos^2(\theta/2)\cdot\left\{1 + \boxed{\frac{Q^2}{2m^2}}\tan^2(\theta/2)\right\}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{Q^2}{4m^2}$$

**Streuung wie an punktförmigen Teilchen mit S = ½, falls $2xF_1(x) = F_2(x)$ und Masse $m = x\cdot M$**



# Callan-Gross-Relation: experimentelle Überprüfung




**Experiment ergibt:**

$$\frac{2xF_1}{F_2} = 1 \quad \textbf{unabhängig von } Q^2$$

→ **Die punktförmigen Konstituenten des Nukleons haben Spin ½ !**

**wäre z.B. der Spin des Partons = 0 :**
→ **kein $\tan^2(\theta/2)$ Term, da keine magnetische WW** $(F_1 = 0)$

# Tief-inelastische Streuung - Partonen -

**tiefinelastische Streuung am Parton = inkohärente Summe der WW des virtuellen Photons mit individuellen Partonen (elastische Streuung an Konstituenten des Protons); Partonmodell (Feynman 1969)**

**Solange die Konstituenten (im Rahmen der Auflösung) punktförmig sind, besitzen sie keine Substruktur und können daher nicht angeregt werden**
**→ nur elastische Streuung möglich, bei der die Identität der Streupartner nicht geändert wird**

**Wirkungsquerschnitt abhängig von einer Zahl x**
**(dimensionslos; keine Massen-, Längen- oder Energieskalen involviert!)**

**Skaleninvarianz!**

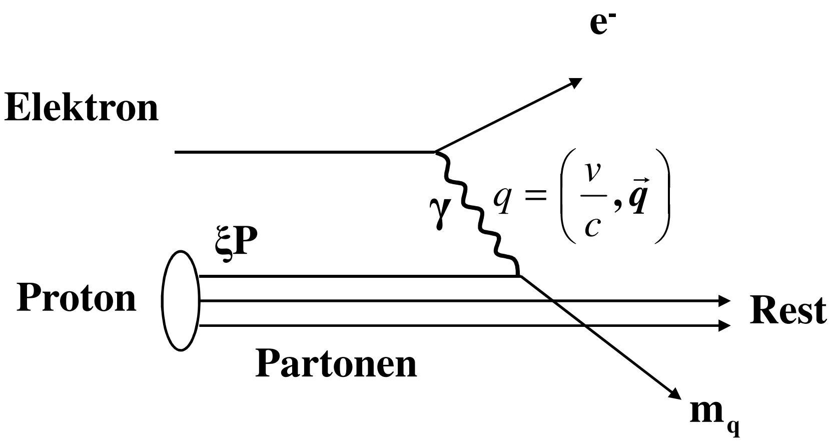
**Partonen werden heute mit den Quarks identifiziert**

**Erste Evidenz für Quarks: Aus der Beobachtung von Mesonen und Baryonen (Bindungszustände der starken WW)** ... etwas später in der VL ....



# Tief-inelastische Streuung - Partonmodell -

**Interpretation im Partonmodell: Was ist die Bedeutung von x ?**




**Betrachtung im „infinit momentum frame“ d.h. schnell bewegtes Nukleon, Transversalbewegung der Protonen vernachlässigbar**

**Parton hat den Anteil $\xi P$ des 4-Impulses des Partons**

| | | |
|---|---|---|
| **Wechselwirkung des Elektrons mit dem Proton** | **=** | **inkohärente Summe der Wechselwirkung mit den Partonen (elastische Streuung)** |

**(Stoßnäherung )**