Theorie 3: Quantenmechanik

Übungsblatt 7: Der harmonische Oszillator

<u>Deadline:</u> Mittwoch 12.06.2024 18.00 via eCampus

Der 1D harmonische Oszillator

Wir betrachten den harmonischen Oszillator in einer Dimension, mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \,.$$

Wir nehmen an, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem Zustand $|\phi_0\rangle$ befindet, dessen Wellenfunktion im Ortsraum gegeben ist durch

$$\langle x|\phi_0\rangle = N\, e^{-\alpha x^2/2}(1 - x\sqrt{2\alpha})\,,$$

wobei $\alpha := \frac{m\omega}{\hbar}$.

1. (1 Punkt) Bestimmen Sie N so dass $\|\phi_0\| = 1$.
2. (2 Punkte) Bestimmen Sie den Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ (wir nehmen an dass zwischen $t = 0$ und t keine Messung vorgenommen wird).
3. (4 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Messung der Energie zum Zeitpunkt t.
4. (5 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Messung der Position zum Zeitpunkt t.
5. (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses zum Zeitpunkt t mit Hilfe des Ehrenfest Theorems.

Der 2D harmonische Oszillator

Der Hamilton-Operator eines harmonisches Oszillators in 2 Dimensionen ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\,.$$

1. (3 Punkte) Zeigen Sie dass eine Orthonormalbasis an Eigenfunktionen im Ortsraum gegeben ist durch:
$$\phi_{n_1,n_2}(x,y) = \phi_{n_1}(x)\,\phi_{n_2}(y)\,,$$
wobei $\phi_n(x)$ die Eigenfunktionen des 1D harmonischen Oszillators sind.

2. (2 Punkte) Zeigen Sie dass die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ gegeben sind durch $E_N = (1 + N)\hbar\omega$, mit $N \geq 0$.

3. (1 Punkt) Zeigen Sie dass der Energieeigenwert E_N entartet ist für $N \geq 1$, und der Grad der Entartung (also, die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren mit diesem Eigenwert) genau $N + 1$ ist.