UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA

Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Calcolo e performance di equilibri di Nash per il gioco della k-colorazione generalizzata

Relatore

Prof. Gianpiero Monaco

Laureando

Valentino Di Giosaffatte

ANNO ACCADEMICO 2017 - 2018

Indice

Parte I

Equilibri di Nash

Capitolo 1

Introduzione agli equilibri di Nash

1.1 Teoria dei giochi

La teoria dei giochi è la disciplina scientifica che si occupa dello studio e dell'analisi del comportamento e delle decisioni di soggetti razionali in un contesto di interdipendenza strategica.
Si definisce interdipendenza strategica, o interazione strategica, lo scenario in cui le decisioni di un individuo influenzano anche le scelte e gli scenari relativi agli altri individui.
Il principale oggetto di studio della teoria dei giochi sono le situazioni di conflitto nelle quali gli attori sono costretti ad intraprendere una strategia di competizione o cooperazione.
Tale scenario è definito gioco strategico e gli individui sono denominati giocatori.
Sulla base delle premesse e delle regole compositive del gioco in oggetto, viene costruito un modello matematico nel quale ciascun giocatore effettua le proprie decisioni (mosse migliorative) seguendo una strategia finalizzata ad aumentare il proprio vantaggio netto.
A ciascuna scelta positiva corrisponde un ritorno favorevole in termini di beneficio (payoff), il medesimo concetto vale in modo contrario in caso di scelta negativa, in tal caso il ritorno sarà sfavorevole.
In tali scenari le decisioni di un soggetto possono influire direttamente sui risultati conseguibili dagli altri e viceversa secondo un meccanismo di retroazione.
La teoria dei giochi è un concetto di soluzione applicabile ad un'ingente molteplicità di casi nei quali una pluralità di agenti decisionali possono operare in maniere competitiva, seguendo interessi contrastanti, o in maniera cooperativa, seguendo l'interesse comune.

1.1.1 Giochi non-cooperativi

In questo documento, la trattazione sarà incentrata sull'analisi di una particolare tipologia di giochi : i giochi non-cooperativi.
I giochi non-cooperativi, detti anche competitivi, rappresentano una specifica classe di giochi nella quale i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti di cooperazione (anche normativamente), indipendentemente dai loro obiettivi.
Il criterio di comportamento razionale adottato nei giochi non-cooperativi è di carattere individuale ed è denominato strategia del massimo.
La suddetta definizione di razionalità va a modellare il comportamento di un individuo intelligente e ottimista che si prefigge l'obiettivo di prendere sempre la decisione che consegue il massimo guadagno possibile, perseguendo di conseguenza sempre la strategia più vantaggiosa per se stesso.
Si parla dunque di punto di equilibrio qualora nel gioco esista una strategia che presenti il massimo guadagno per tutti i giocatori, ovvero uno stato stabile del gioco nel quale tutti gli attori ottengono il massimo profitto individuale e collettivo.

1.2 Equilibri di Nash

La precedente affermazione muove l'oggetto della trattazione verso l'argomento centrale di questo studio, ovvero gli equilibri di Nash.
L'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie nella quale ciascun giocatore effettua la migliore scelta possibile, seguendo cioè una strategia dominante, sulla base delle aspettative di scelta dell'altro giocatore.
L'equilibrio di Nash è la combinazione di mosse (m1, m2) in cui la mossa di ciascun giocatore è la migliore risposta alla mossa effettuata da un altro giocatore.
Ciascun giocatore formula delle aspettative sulla scelta dell'altro giocatore e in base a queste decide la propria strategia, con l'obiettivo di massimizzare il proprio profitto e di conseguenza quello degli altri. Un equilibrio di Nash è un equilibrio stabile, poiché nessun giocatore ha interesse a modificare la propria strategia.
Ciascun giocatore trae la massima utilità possibile dalle proprie scelte, tenendo conto della migliore scelta dell'altro giocatore, e dunque qualunque variazione alla propria strategia potrebbe soltanto peggiorare il proprio valore di tornaconto (payoff o utilità).
L'equilibrio di Nash è conosciuto anche con il nome di equilibrio non cooperativo poiché rappresenta una situazione di equilibrio ottimale per un gioco non-cooperativo.
L'equilibrio di Nash non deriva dall'accordo tra i giocatori, bensì dall'adozione di strategie dominanti perseguite da tutti i giocatori, tali da garantire

sia il miglior profitto possibile per ciascun giocatore (ottimo individuale), sia il miglior equilibrio collettivo (ottimo sociale).

1.2.1 Definizione formale

Definiamo ora alcuni concetti basilari e chiariamo alcuni aspetti matematici della teoria dei giochi al fine di delineare in modo più accurato il concetto di equilibrio di Nash.
Un gioco è caratterizzato da :

- un insieme G di giocatori, o agenti, che indicheremo con $i = 1, \ldots, N$
- un insieme S di strategie, costituito da un insieme di M vettori

  $$S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,j}, \ldots, s_{i,M_i})$$

  ciascuno dei quali contiene l'insieme l'insieme delle strategie che il giocatore i-esimo ha a disposizione, cioè l'insieme delle azioni che esso può compiere.
  (indichiamo con s_i la strategia scelta dal giocatore i)
- un insieme U di funzioni

  $$u_i = U_i\,(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_N)$$

  che associano ad ogni giocatore i il guadagno (detto anche payoff) u_i derivante da una data combinazione di strategie (il guadagno di un giocatore in generale non dipende solo dalla propria strategia ma anche dalle strategie scelte dagli avversari)

Un equilibrio di Nash per un dato gioco è una combinazione di strategie (che indichiamo con l'apice e)

$$s_1^e, s_2^e, ..., s_N^e$$

tale che

$$U_i\,(s_1^e, s_2^e, ..., s_i^e, ..., s_N^e) \geq U_i\,(s_1^e, s_2^e, ..., s_i, ..., s_N^e)$$

$\forall i$ e $\forall s_i$ scelta dal giocatore i-esimo.

Il significato di quest'ultima disuguaglianza è il seguente : se un gioco ammette almeno un equilibrio di Nash, ciascun agente ha a disposizione almeno una strategia s_i^e dalla quale non ha alcun interesse ad allontanarsi se tutti gli altri giocatori hanno giocato la propria strategia s_j^e.
Come si può facilmente desumere direttamente dalla suddetta disequazione, se il giocatore i gioca una qualunque strategia a sua disposizione diversa da s_i^e, mentre tutti gli altri giocatori hanno giocato la propria strategia s_j^e, può solo peggiorare il proprio guadagno o, al più, lasciarlo invariato.

Da qui si può dedurre quindi che se i giocatori raggiungono un equilibrio di Nash, nessuno può più migliorare il proprio risultato modificando solo la propria strategia, ed è quindi vincolato alle scelte degli altri.
Poiché questo vale per tutti i giocatori, è evidente che se esiste un equilibrio di Nash ed è unico, esso rappresenta la soluzione del gioco, in quanto nessuno dei giocatori ha interesse a cambiare strategia.

1.3 Nozioni di base

1.3.1 Rappresentazione con matrici di payoff e descrizione del procedimento decisionale

Nella seguente matrice di payoff è rappresentato un esempio di equilibrio di Nash in un gioco non-cooperativo a 2 giocatori (tale equilibrio può essere esteso a N giocatori).

		G2	
		S1	**S2**
G1	**S1**	A [2, 2]	B [2, 1]
	S2	C [1, 2]	D [1, 1]

Tabella 1.1: Matrice di payoff

Nella suddetta matrice ciascun giocatore può scegliere la strategia S1 o la strategia S2. Il giocatore 1 si aspetta che il giocatore 2 scelga S1 (strategia dominante) e, quindi, adotta anch'egli la strategia S1 in quanto gli consente di ottenere un payoff individuale pari a 2.
Anche il giocatore 2 formula delle aspettative sulle scelte dell'avversario e si attende che il giocatore 1 scelga S1, scegliendo a sua volta la strategia S1.
L'equilibrio del gioco converge verso la cella A della matrice nella quale entrambi i giocatori massimizzano il proprio payoff individuale (ottimo individuale) dopo aver scelto la propria strategia dominante. Entrambi i giocatori hanno formulato un'ipotesi sulla migliore scelta del giocatore avversario e, sulla base di questa, hanno scelto la propria strategia dominante.

Cerchiamo ora di comprendere al meglio il funzionamento del processo decisionale alla base dell'equilibrio di Nash.

		G2	
		S1	**S2**
G1	**S1**	A [2, 2]	B [1, 1]
	S2	C [1, 2]	D [2, 1]

Tabella 1.2: Processo decisionale

Il giocatore 1 potrebbe scegliere sia S1 che S2, in entrambi i casi potrebbe sperare di ottenere per sé il payoff più alto (2) nelle celle A e D. Il giocatore 1 sa bene però che se scegliesse S2, il giocatore 2 sceglierebbe in seguito S1 e l'equilibrio finale si collocherebbe nella cella C, nella quale egli otterrebbe il payoff più basso (1).
Qualora scegliesse invece S1, il giocatore 1 sarebbe consapevole che anche il giocatore 2 sceglierebbe S1 e l'equilibrio finale in questo caso si collocherebbe nella cella A, nella quale il giocatore 1 otterrebbe il payoff più alto (2).
Seguendo il medesimo ragionamento, qualora spettasse al giocatore 2 scegliere per primo, questi sarebbe consapevole che scegliendo S1 anche il giocatore 1 sceglierebbe S1. Dunque anche il questo caso l'equilibrio strategico si collocherebbe nella cella A.
Il giocatore 2 non sceglierebbe mai S2 in quanto in ogni caso avrebbe il payoff più basso (1).
La cella A è un equilibrio di Nash, tutte le altre non lo sono.

1.3.2 Equilibri di Nash e ottimo sociale

		G2	
		S1	**S2**
G1	**S1**	A [2, 2]	B [2, 1]
	S2	C [1, 2]	D [1, 1]

Tabella 1.3: Ottimo sociale

Nell'esempio 1.1 appena trattato possiamo inoltre constatare facilmente che l'equilibrio di Nash trovato (cella A della matrice) è anche un ottimo sociale. Nel suddetto equilibrio coesistono una situazione ottimale per entrambi i giocatori (entrambi i giocatori possiedono un payoff massimo) e una situazione ottimale per l'intera collettività (in quanto la somma dei valori di payoff di entrambi i giocatori è uguale 4, il valore maggiore all'interno della matrice)

1.3.3 Equilibri di Nash multipli

Specifichiamo inoltre che un gioco non-cooperativo può presentare più equilibri di Nash. Anche il presenza di equilibri multipli, ciascun equilibrio è comunque stabile, poiché dalla propria posizione di equilibrio locale qualsiasi scelta è peggiorativa per ogni giocatore.
Al fine di verificare quest'ultima affermazione viene presentata la seguente matrice di payoff nella quale sono presenti 2 equilibri di Nash simmetrici (nelle celle A e D).

		G2	
		S1	**S2**
G1	**S1**	A [2, 2]	B [2, 1]
	S2	C [1, 2]	D [2, 2]

Tabella 1.4: Equilibri di Nash multipli

1.3.4 Assenza di equilibri di Nash

In alcuni casi possono essere del tutto assenti le condizioni per determinare un equilibrio di Nash e di conseguenza molti giochi sono privi di equilibrio. Per verificare tale asserzione mostriamo la matrice di payoff relativa ad un gioco nel quale non è possibile trovare un equilibrio di Nash.

		G2	
		S1	**S2**
G1	**S1**	A [1, 1]	B [1, 0]
	S2	C [2, 1]	D [0, 2]

Tabella 1.5: Assenza di equilibri di Nash

Nell'esempio appena descritto, se il giocatore 1 sceglie la strategia S2 (tentando di ottenere il payoff 2), il giocatore 2 sceglierà la strategia S2 (payoff 2) e l'equilibrio si posiziona nella cella D della matrice.
Se al contrario è il giocatore 2 a scegliere la strategia S2 (tentando a sua volta di ottenere il payoff 2), il giocatore 1 sceglierà la strategia S1 (payoff 1) e l'equilibrio si posiziona nella cella B della matrice. Nel suddetto esempio non esiste dunque un equilibrio di Nash.

1.3.5 Il dilemma del prigioniero : sub-ottimalità individuale e sociale

L'adozione di strategie dominanti non assicura sempre un equilibrio di ottimo sociale. In assenza di informazioni, un gioco non-cooperativo potrebbe convergere verso un equilibrio stabile ma non ottimale.
L'ipotesi è dimostrata nel problema del "dilemma del prigioniero" in cui due attori, pur formulando delle aspettative razionali sul comportamento dell'avversario e adottando strategie dominanti, determinano un equilibrio sub-ottimale (D) sia dal punto individuale che sociale.
La seguente matrice payoff evidenzia il tipico caso del dilemma del prigioniero : vi sono 2 giocatori separati in stanze differenti, senza che abbiano la possibilità di comunicare (informazione imperfetta) ; i 2 giocatori sono accusati di un reato e interrogati contemporaneamente.

- il giocatore che confessa il reato accusando l'altro ottiene la scarcerazione (utilità 9), mentre il giocatore accusato subisce il massimo della pena (utilità 0)
- se entrambi i giocatori evitano di confessare, ai 2 viene applicata un pena molto lieve (utilità 5)
- se entrambi i giocatori confessano, vengono condannati alla pena ordinaria (utilità 2)

		G2	
		non confessa	**confessa**
G1	**non confessa**	A [5, 5]	B [0, 9]
	confessa	C [9, 0]	D [2, 2]

Tabella 1.6: Il dilemma del prigioniero

Nell'esempio il giocatore 1 si aspetta che il giocatore 2 confessi, poiché la strategia dominante del giocatore 2 è confessare, grazie alla confessione quest'ultimo otterrebbe la libertà (payoff 9).
Sulla base di questa aspettativa il giocatore 1 sceglie la propria strategia dominante tra B e D, scegliendo a sua volta di confessare per ottenere un payoff uguale a 2. Lo stesso ragionamento viene adottato, in modo inverso, dal giocatore 2.
L'equilibrio D è un equilibrio di Nash ed è un equilibrio stabile poiché nessuno dei 2 giocatori ha interessa a modificare le proprie scelte. In tale equilibrio però entrambi i giocatori ottengono un payoff sub-ottimale pari a 2 rispetto a quello che avrebbero se decidessero entrambi di non confessare (payoff 5 - equilibrio A) e in più l'equilibrio D presenta un valore di ottimo sociale (4) inferiore rispetto a quello che si potrebbe ottenere dall'equilibrio A (10) che rappresenta l'ottimo individuale e sociale del gioco.

In conclusione, il dilemma del prigioniero rappresenta una situazione in cui le scelte individuali del giocatori, pur essendo strategie dominanti, determinano un equilibrio inefficiente. Nel dilemma del prigioniero l'equilibrio del gioco non è né un ottimo individuale né un ottimo sociale.

Parte II

Gioco della K-Colorazione Generalizzata

Capitolo 2

Gioco della k-colorazione generalizzata

Esaminiamo ora gli equilibri di Nash puri per il gioco della k-colorazione generalizzata nel quale viene fornito un grafo orientato e un insieme di k colori.
I nodi rappresentano i giocatori e gli archi catturano i loro reciproci interessi.
La strategia di ciascun giocatore è composta da k colori.
L'utilità di un giocatore v in un dato stato o colorazione è data dalla somma dei pesi degli archi (v, u) incidenti a v tale che il colore scelto da v sia diverso da quello scelto da u, più il profitto guadagnato dall'utilizzo del colore scelto.
Per prima cosa dimostriamo che il gioco della k-colorazione generalizzata è convergente e dunque esiste sempre almeno un equilibrio di Nash per ogni istanza del gioco in questione.
Valutiamo dunque in seguito una descrizione delle prestazioni dei giochi della k-colorazione generalizzata per mezzo delle nozioni largamente utilizzate di prezzo dell'anarchia (price of anarchy) e prezzo della stabilità (price of stability).
Forniamo inoltre limiti stretti per 2 tipi di benessere sociale ampiamente utilizzati, il benessere sociale utilitario (utilitarian social welfare) e il benessere sociale egalitario (egalitarian social welfare).

2.1 Descrizione generale

Le istanze appartenenti al gioco della k-colorazione generalizzata sono giocati su grafi non-orientati pesati in cui i nodi corrispondono ai giocati e in cui gli archi identificano le connessioni sociali o le relazioni tra i giocatori.
Il set di strategie di ciascun giocatore è un insieme di k colori disponibili

(assumiamo che i colori siano gli stessi per ogni giocatore).
Quando i giocatori selezionano un colore inducono una colorazione k (o semplicemente una colorazione).
Ciascun giocatore possiede una funzione di profitto legata all'apprezzamento da parte di quest'ultimo del colore scelto (vale per tutti i colori disponibili per il giocatore).
Data una colorazione, l'utilità (o il guadagno) di un giocatore v colorato con il colore i è la somma dei pesi degli archi (v, u) incidenti a v, tale che il colore scelto da v è diverso da quello scelto da u, più il profitto derivante dalla scelta del colore i da parte del giocatore v.
Assumiamo che i giocatori siano egoisti, dunque un concetto di soluzione ben noto per questo tipo di impostazione è l'equilibrio di Nash.
L'equilibrio di Nash è uno dei concetti più importanti nella teoria dei giochi e fornisce una soluzione stabile che è robusta alle deviazioni dei singoli giocatori.
Formalmente, una colorazione è un equilibrio di Nash puro se nessun giocatore può migliorare la propria utilità deviando unilateralmente dalla propria strategia attuale.
L'egoismo dei giocatori può causare in molti casi la perdita di benessere sociale e quindi una soluzione stabile non è sempre buona rispetto al benessere della società.

Consideriamo ora 2 nozioni di benessere sociale, naturali e ampiamente utilizzate.
Data una colorazione k, il benessere sociale utilitario (utilitarian social welfare) è definito come la somma delle utilità dei giocatori nella colorazione k, mentre il benessere sociale egalitario (egalitarian sociale welfare) è definito come l'utilità minima tra tutti i giocatori nella colorazione k.

Utilizziamo inoltre 2 metodi per misurare la bontà di un equilibrio di Nash rispetto a un benessere sociale, il prezzo dell'anarchia (price of anarchy) e il prezzo della stabilità (price of stability).
Il prezzo dell'anarchia descrive, nel peggiore dei casi, come l'efficienza di un sistema degrada a causa del comportamento egoistico dei suoi giocatori, mentre il prezzo della stabilità ha un naturale significato di stabilità, poiché è la soluzione ottimale tra quelle che possono essere accettate da giocatori egoisti.
Studiamo ora l'esistenza e le performance degli equilibri di Nash nei giochi della k-colorazione generalizzata.
Ci concentriamo solo sui grafi non-orientati poiché per i grafi orientati anche il problema di decidere se un'istanza ammetta un equilibrio di Nash è un problema difficile (NP-Hard), inoltre esistono casi per i quali un equilibrio di Nash non esiste affatto.

2.1.1 Nozioni sul problema

Sappiamo che in caso di grafi non-orientati non-pesati è possibile calcolare un equilibrio di Nash in tempo polinomiale.
Nel nostro caso, il problema di calcolare un equilibrio di Nash su grafi non-orientati pesati è PLS-Completo anche per $k = 2$, dato che il gioco del taglio massimo (Max-cut game) è un caso speciale del nostro gioco.
Proprio riguardo questo aspetto è bene delineare la relazione che esiste tra il gioco della k-colorazione generalizzata e il gioco del taglio massimo, un problema molto importante e ampiamente trattato in letteratura.
Il gioco della k-colorazione generalizzata è un estensione del gioco del taglio massimo, infatti quest'ultimo può essere ottenuto ponendo a 0 i profitti relativi ai colori e ponendo a 2 il numero di colori presenti nel set disponibile per ciascun giocatore.
Inoltre il gioco della k-colorazione generalizzata è un'estensione del gioco della k-colorazione nel quale vi sono k-colori ma i profitti relativi ai colori sono impostati a 0.

2.2 Dettagli sul modello

Dato un grafo semplice non-orientato $G = (V, E, w)$, dove $|V| = n$, $|E| = m$ e $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è la funzione per i pesi sugli archi che associa un peso positivo a ciascun arco.
Denotiamo con $\delta^v(G) = \sum_{u \in V : \{v,u\} \in E} w(\{v, u\})$ la somma dei pesi di tutti gli archi incidenti a v.
L'insieme dei nodi con cui un nodo v ha un arco in comune è chiamato insieme dei vicini di v (insieme dei nodi adiacenti a v).
Un'istanza di gioco della k-colorazione generalizzata è un tupla (G, K, P).
$G = (V, E, w)$ è un grafo pesato non-orientato senza self loops, in cui ogni $v \in V$ è un giocatore egoista.
K è un insieme di colori disponibili (assumiamo $K \geq 0$).
Il set di strategia di ciascun giocatore è dato dai k colori disponibili, ovvero i giocatori hanno lo stesso insieme di azioni.
Denotiamo con $P : V \times K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la funzione di profitto del colore, che definisce quanto un giocatore apprezza un colore, ovvero se il giocatore v scegli di usare il colore i, allora guadagna $P_v(i)$.
Per ciascun giocatore v, definiamo P_v^M come il massimo profitto che v può guadagnare da un colore, formalmente $P_v^M = max_{i=1,\ldots,k} P_v(i)$.
Quando $P_v(i) = 0 \forall v \in V$ e $\forall i \in k$, si ha il caso in cui non vi sono profitti associati ai colori scelti, quindi possiamo riferirci a questo gioco come a un gioco della k-colorazione (graph k-coloring game).
Uno stato del gioco $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ è una k-colorazione, o semplicemente una colorazione, dove c_v è il colore (cioè un numero $1 \leq c_v \leq k$) scelto dal

giocatore v.
In una determinata colorazione c, il payoff (o l'utilità) di un giocatore v è la somma dei pesi degli archi (v, u) incidenti a v, tale che il colore scelto da v è diverso da quello scelto da u, oltre al profitto ottenuto dall'utilizzo il colore scelto.
In modo formale, per una colorazione c, il payoff di un giocatore v è $\mu_c(v) = \sum_{u \in V: \{v,u\} \in E \wedge c_v \neq c_u} w(\{v, u\}) + P_v(c_v)$.
Quando un arco (v, u) fornisce utilità ai suoi endpoints in una colorazione c, cioè quando $c_v \neq c_u$ diciamo che tale arco è corretto.
diciamo anche che un arco (v, u) è monocromatico in una colorazione c quanto $c_v = c_u$.
Sia c_{-v}, c'_u la colorazione ottenuta da c cambiando la strategia del giocatore v da c_v a c'_v.
Data una colorazione $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$, una mossa migliorativa (improving move) del giocatore v nella colorazione c è una strategia c'_v tale che $\mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v) > \mu_c(v)$.
Uno stato del gioco è un equilibrio di Nash puro o equilibrio stabile se e so se nessun giocatore può effettuare una mossa migliorativa.
In modo formale, $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ è un equilibrio di Nash se $\mu_c(v) \geq \mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v)$ per ogni possibile colorazione c'_v e per ogni giocatore $v \in V$.
Una dinamica di miglioramento (improving dynamic), o brevemente dinamica (dynamic), è una sequenza di mosse migliorative. Si dice che un gioco sia convergente se, dato un qualsiasi stato iniziale c, qualsiasi sequenza di mosse migliorative porta a un equilibrio di Nash.
Data una colorazione c, definiamo una funzione di benessere sociale utilitario (utilitarian social welfare) $SW_{UT}(c)$ e una funzione di benessere sociale egalitario (egalitarian sociale welfare) $SW_{EG}(c)$ come segue :

$$SW_{UT}(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{v \in V} P_v(c_v) + \sum_{\{v,u\} \in E: c_v \neq c_u} 2w(\{v, u\})$$

$$SW_{EG}(c) = min_{v \in V} \mu_c(v)$$

Indichiamo con C l'insieme di tutte le possibili colorazioni e denotiamo con Q l'insieme di tutte le colorazioni stabili. Data una funzione di benessere sociale SW, definiamo il prezzo dell'anarchia (price of anarchy) (PoA) per il gioco della k-colorazione generalizzata come il rapporto tra il massimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni sul minimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni stabili.
In modo formale, $PoA = \frac{max_{c \in C} SW(c)}{min_{c' \in Q} SW(c')}$.
Definiamo inoltre il prezzo della stabilità (price of stability) (PoS) per il gioco della k-colorazione generalizzata come il rapporto tra il massimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni sul massimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni stabili.
In modo formale, $PoS = \frac{max_{c \in C} SW(c)}{max_{c' \in Q} SW(c')}$.

Intuitivamente, il PoA (rispettivamente PoS) ci dice quanto è peggiore il benessere sociale nel peggiore (rispettivamente migliore) equilibrio di Nash, relativo al benessere sociale dell'ottimo.

2.2.1 Convergenza ed esistenza degli equilibri di Nash

Per prima cosa mostriamo che il gioco della k-colorazione generalizzata è convergente. Ciò implica chiaramente che gli equilibri di Nash esistono sempre.

$theorem)\forall k$, ogni gioco della k-colorazione generalizzata finito (G, K, P) è convergente theorem)

Notiamo che, da un lato, se il grafo non è pesato, la dinamica, partendo dalla colorazione in cui ogni giocatore v selezione il colore in modo tale da ottenere il massimo profitto possibile, che è, il colore i tale che $P_v(i) = P_v^M$, converge ad un equilibrio di Nash in al massimo $|E|$ mosse migliorative.
D'altra parte, se il grafo è pesato, il calcolo di un equilibrio di Nash è PLS-Completo.
Ne consegue il fatto che, quando $k = 2$, il nostro gioco è una generalizzazione del gioco del taglio (cut game) che è uno dei primi problemi che si sono dimostrati essere PLS-Completi.

2.3 Benessere sociale utilitario (utilitarian social welfare)

In questa sezione ci concentreremo sul benessere sociale utilitario. Mostriamo limiti stretti per il prezzo dell'anarchia utilitario e tralasciamo quelli per il prezzo della stabilità utilitario.

2.3.1 Prezzo dell'anarchia utilitario (utilitarian price of anarchy)

Ricordiamo che nel caso senza profitti associati ai colori, il prezzo dell'anarchia utilitario è esattamente $\frac{k}{(k-1)}$.
Qui dimostriamo che il gioco della k-colorazione generalizzata il prezzo dell'anarchia utilitario è pari a 2, cioè indipendente dal numero di colori.
Iniziamo dimostrando che il prezzo dell'anarchia utilitario è al più 2.

$theorem)Ilprezzodell'anarchiaperilgiocodellak-colorazionegeneralizzataèalpiù2.$theorem)

Mostriamo ora che il prezzo dell'anarchia utilitario è almeno 2 anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati.

*theorem)Ilprezzodell′anarchiautilitarioperilgiocodellak−colorazionegeneralizzataèalmeno*2, *a*
pesati.theorem)

2.4 (Benessere sociale egalitario (egalitarian social welfare))

In questa sezione ci concentriamo sul benessere sociale egalitario. Mostriamo limiti stretti per il prezzo dell'anarchia egalitario e tralasciamo quelli per il prezzo della stabilità egalitario.

2.4.1 Prezzo dell'anarchia egalitario (egalitarian price of anarchy)