Calcolo e performance di equilibri di Nash per il gioco della k-colorazione generalizzata

Valentino Di Giosaffatte Prof. Gianpiero Monaco

Università degli Studi dell'Aquila

Anno Accademico 2017/2018

Obiettivi della sperimentazione

- Calcolo degli equilibri di Nash per il gioco della k-colorazione generalizzata
- Analisi delle performance dell'algoritmo per il calcolo delle soluzioni Nash-stabili effettuata attraverso la determinazione del numero di step relativi alle dinamiche di miglioramento
- Valutazione del benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni Nash-stabili in relazione con il benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni ottime, utilizzando le definizioni di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario [descrive il prezzo dell'anarchia nel caso medio]

Teoria dei giochi e giochi non-cooperativi

La teoria dei giochi è la disciplina scientifica che si occupa dello studio del comportamento e dei processi decisionali di soggetti razionali in un contesto di interdipendenza strategica. L'analisi è incentrata sugli scenari caratterizzati dalla presenza di situazioni di conflitto nelle quali gli attori sono costretti ad intraprendere strategie di cooperazione o competizione.

I giochi non-cooperativi definiscono una specifica classe di giochi nella quale i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti di cooperazione, anche normativamente.

Il criterio di comportamento razionale adottato nei giochi non-cooperativi è di carattere individuale ed è denominato strategia del massimo. Tale definizione di razionalità va modellare il comportamento di un individuo intelligente e ottimista che si prefigge l'obiettivo di prendere sempre la decisione più vantaggiosa per se stesso.

Equilibri di Nash

L'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie nella quale ciascun giocatore effettua la migliore scelta possibile, seguendo cioè una strategia dominante, sulla base delle aspettative di scelta degli altri giocatori.

L'equilibrio di Nash rappresenta un concetto di soluzione robusto per i giochi non-cooperativi.

L'equilibrio di Nash rappresenta inoltre una soluzione stabile, poiché nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente modificando la propria strategia.

Definizione formale I

- Sia G l'insieme dei giocatori, che indicheremo con $i = 1, \ldots, N$
- Sia S l'insieme delle strategie, costituito da un set di M vettori $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,j}, \ldots, s_{i,M_i})$, ciascuno dei quali contiene l'insieme delle strategie che il giocatore *i-esimo* ha a disposizione, cioè l'insieme delle azioni che esso può compiere (indichiamo con s_i la strategia scelta dal giocatore i)
- Sia U l'insieme delle funzioni $u_i = U_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_N)$ che associano ad ogni giocatore i il guadagno (detto anche payoff) u_i derivante da una data combinazione di strategie (il guadagno di un giocatore in generale non dipende solo dalla propria strategia ma anche dalle strategie scelte dagli avversari)

Definizione formale II

- Un equilibrio di Nash per un dato gioco è una combinazione di strategie (che indichiamo con l'apice e)

$$s_1^e, s_2^e, ..., s_N^e$$

tale che

$$U_i\left(s_1^e, s_2^e, ..., s_i^e, ..., s_N^e\right) \geq U_i\left(s_1^e, s_2^e, ..., s_i, ..., s_N^e\right)$$

$\forall i$ e $\forall s_i$ scelta dal giocatore *i-esimo*.

Descrizione del modello I

- Un'istanza di gioco della k-colorazione generalizzata è una tupla (G, K, P)
- $G = (V, E, w)$ è un grafo non-orientato pesato (senza self-loops e parallelismo degli archi), dove $|V| = n$, $|E| = m$ e $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è la funzione che associa un peso intero positivo a ciascun arco [ogni $v \in V$ è un giocatore egoista]
- K è un insieme di k colori disponibili (strategie), assumiamo $k \geq 2$ [ciascun giocatore hai il medesimo set di azioni disponibili]
- Sia $P : V \times K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la funzione che associa un profitto a ciascun colore per ciascun giocatore [se il giocatore v sceglie di usare il colore i allora guadagna $P_v(i)$]
- Uno stato del gioco è una k-colorazione $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ [c_v, con $1 \leq c_v \leq k$, è il colore scelto dal giocatore v in c

Descrizione del modello II

- Il payoff (utilità) del giocatore v nella colorazione c è $\mu_c(v) = \sum_{u \in V : \{v,u\} \in E \wedge c_v \neq c_u} w(\{v,u\}) + P_v(c_v)$
- Data una colorazione c, una mossa migliorativa del giocatore v è una strategia c'_v tale che $\mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v) > \mu_c(v)$
- Una dinamica di miglioramento è una sequenza di mosse migliorative
- Una colorazione c è un equilibrio di Nash se $\mu_c(v) \geq \mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v)$
- Funzione di benessere sociale utilitario : $SW_{UT}(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{v \in V} P_v(c_v) + \sum_{\{v,u\} \in E : c_v \neq c_u} 2w(\{v,u\})$
- Funzione di benessere sociale egalitario : $SW_{EG}(c) = min_{v \in V} \mu_c(v)$
- Prezzo dell'anarchia : $PoA = \frac{max_{c \in C} SW(c)}{min_{c' \in Q} SW(c')}$

Nozioni sul problema

- Il problema di calcolare un equilibrio di Nash su grafi non-orientati pesati è PLS-Completo, anche per $k = 2$, dato che il gioco del taglio massimo [Max-Cut Game] è un caso speciale del nostro gioco
- Se $k = 2$ e i profitti sono impostati a 0, otteniamo il gioco del taglio massimo, celebre gioco PLS-Completo ampiamente trattato in letteratura
- Se i profitti sono impostati a 0, otteniamo il gioco della k-colorazione

Risultati teorici

Proposizione 1

$\forall k$, ogni gioco della k-colorazione generalizzata (G, K, P) finito è convergente

Teorema 1

Il prezzo dell'anarchia per il gioco della k-colorazione generalizzata è al più 2

Teorema 2

Il prezzo dell'anarchia utilitario per il gioco della k-colorazione generalizzata è almeno 2, anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati

Teorema 3

Il prezzo dell'anarchia egalitario per il gioco della k-colorazione generalizzata è 2

Implementazione I

- Utilizzo del linguaggio Python [Standard Library]
- Utilizzo della libreria di creazione e manipolazione di grafi NetworkX [e altre minori]
- Costruzione dei moduli per la generazione e per la lettura asincrona di grafi [*generator.py*, *reader.py*]
- Utilizzo di strutture dati efficienti come *liste* e *dizionari* sia in forma singola che innestata [*single or nested list and dictionary comprehension*]
- Implementazione degli algoritmi per il calcolo dell'ottimo con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario utilizzando una strategia incentrata sulla forza bruta [privi di tecniche di ottimizzazione delle iterazioni]

Implementazione II

- Implementazione dell'algoritmo per il calcolo della colorazione stabile seguendo la definizione di equilbrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- Strategia per il calcolo della *best move* per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- Doppia strategia per il salto delle iterazioni basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

Assunzioni generali

Sperimentazione effettuata su grafi randomici di tipo *gnp_random_graph* (detti grafi di Erdős-Rényi o grafi binomiali) fissando il parametro n [numero di nodi] e fissando o facendo oscillare randomicamente i 2 parametri k [numero di colori, $2 \geq k \geq n$] e p [probabilità di generare archi tra le coppie di nodi, $0 \geq p \geq 1$]

- Tipologia I : calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario, calcolo dell'equilibrio di Nash, definizione del valore di benessere sociale utilitario e egalitario della colorazione stabile, definizione dei valori di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario (su istanze piccole, con limitatore temporale t)
- Tipologia II : calcolo dell'equilibrio di Nash, definizione del valore di benessere sociale utilitario e egalitario della colorazione stabile (su istanze medio-grandi, con limitatore temporale t)

Tipologia I [$n = 5$, oscillazione random di k e p]

			opt		nash			poa		
k	**p**	**a**	**util**	**egal**	**step**	**util**	**egal**	**util**	**egal**	**t**
5	0.90	9	314	45	5	314	41	1	1.0975	1
4	0.27	5	485	94	4	485	94	1	1	1
3	0.82	9	410	45	4	410	40	1	1.1250	1
4	0.14	4	394	40	4	394	40	1	1	1
2	0.79	7	420	37	5	420	37	1	1	1
5	0.65	9	497	86	6	497	86	1	1	2
3	0.40	6	805	120	5	766	120	1.0509	1	1
3	0.52	5	932	85	4	932	85	1	1	1
5	1	10	913	149	3	913	149	1	1	2
2	0.24	3	590	64	3	566	64	1.0402	1	1

Tipologia I [$n = 5$, $k = 3$, random $0.40 \geq p \geq 1$] e [$n = 5$, $p = 0.70$, random di $2 \geq k \geq 5$]

		opt		nash			poa		
p	**a**	**util**	**egal**	**step**	**util**	**egal**	**util**	**egail**	**t**
0.40	5	1064	148	6	1064	126	1	1.1746	1
0.50	7	1113	100	3	1019	76	1.0922	1.3157	1
0.60	6	1253	163	8	1121	163	1.1177	1	1
0.70	5	862	95	7	862	95	1	1	1
0.80	9	1104	166	9	1061	125	1.0405	1.328	1
0.90	9	1249	210	7	1249	173	1	1.1475	1
1	10	1564	261	3	1451	246	1.0778	1.0609	1

		opt		nash			poa		
k	**a**	**util**	**egal**	**step**	**util**	**egal**	**util**	**egail**	**t**
2	6	794	118	3	778	77	1.0205	1.5324	1
3	6	930	148	6	912	120	1.0197	1.2333	1
4	6	1015	152	6	1015	152	1	1	1
5	6	1063	149	4	1063	149	1	1	1

Tipologia II [$n = 15$, oscillazione random di k e p]

			nash			
k	p	a	step	utilitarian	egalitarian	t
7	0.75	78	9	9398	365	1
7	0.84	83	19	9664	457	1
13	0.49	50	17	6837	176	1
5	0.30	35	7	5226	133	1
9	0.87	90	19	10747	586	1
5	0.49	41	15	5206	174	1
9	0.89	97	14	10937	451	1
10	0.79	84	19	10437	582	1
4	0.88	87	9	9295	473	1
13	0.38	34	14	4185	161	1

Tipologia II [$n = 15$, $k = 8$, random $0.40 \geq p \geq 1$]

			nash		
p	a	step	utilitarian	egalitarian	t
0.40	53	18	6199	213	1
0.50	54	25	7243	338	1
0.60	69	22	8747	459	1
0.70	82	21	9376	414	1
0.80	86	16	10292	556	1
0.90	93	22	11063	569	1
1	105	17	12055	604	1

Tipologia II [$n = 15$, $p = 0.70$, random $2 \geq k \geq 15$]

		nash			
k	a	step	utilitarian	egalitarian	t
2	82	7	5929	267	1
3	82	14	7648	340	1
4	82	15	8677	375	1
5	82	21	8742	394	1
6	82	21	9072	414	1
7	82	22	9219	402	1
8	82	11	9093	398	1
9	82	16	9340	420	1
10	82	21	9361	430	1
11	82	18	9475	444	1
12	82	19	9510	413	1
13	82	14	9561	436	1
14	82	20	9631	444	1
15	82	19	9581	443	1

Conclusioni I

- La complessità computazionale relativa al calcolo degli ottimi cresce in modo esponenziale al crescere del valore di k (fissato n), poiché il numero di colorazioni (permutazioni) da analizzare è uguale a k^n, evidenziando così l'appartenenza di questo problema all'insieme NP
- Quest'ultima è influenzata inoltre dal valore del parametro p, infatti un alto valore di densità del grafo genera un forte grado di connessione che produce un aumento significativo del numero delle iterazioni innestate
- Le sperimentazioni su istanze di dimensioni modeste hanno prodotto, in misura maggiore, risultati ottimi $[= 1]$ relativi al prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario
- Il limitatore temporale t relativo alle esecuzioni è influenzato in modo significativo e diretto dal crescere del numero di nodi n, l'oscillazione di k e p non causa variazioni degne di nota dunque è sufficiente assegnare un set omogeneo di valori per t

Conclusioni II

- La complessità computazionale relativa all'algoritmo per il calcolo degli equilibri di Nash è influenzata direttamente dal crescere del parametro k e dal parametro p che generano un aumento significativo delle iterazioni innestate
- Riguardo le sperimentazioni con doppio parametro fisso (n e k o n e p) notiamo, la crescere dei valori randomici di p e k rispettivamente, un generale e progressivo aumento di tutti i valori relativi al calcolo degli ottimi e degli equilibri, in particolare del parametro *step*, ovvero il numero di passi che compongono le dinamiche
- In generale si evidenzia un aumento dei valori legati al benessere sociale utilitario al crescere di n
- Inoltre si evidenzia un aumento dei valori legati al benessere sociale egalitario al crescere di p [risultato puramente connesso alla sperimentazione in oggetto poiché le variabili sono molteplici]

Lavori futuri

- Sviluppo di implementazioni più efficaci per ciò che concerne il calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario
- Potrebbero essere utilizzate tecniche di ricerca operativa (ad esempio, mirate a ridurre lo spazio di ricerca dell'ottimo) per abbattere la complessità computazionale derivante dall'approccio a forza bruta
- Tale miglioria garantirebbe la possibilità di effettuare uno studio più approfondito riguardante la variazione del prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario per istanze maggiori di quelle analizzate, con esecuzioni effettuate in tempi ragionevoli