

Calcolo e performance di equilibri di Nash per il gioco della k -colorazione generalizzata

Valentino Di Giosaffatte

Prof. Gianpiero Monaco

Università degli Studi dell'Aquila

Anno Accademico 2017/2018

Obiettivi della sperimentazione

- ▶ Calcolo degli equilibri di Nash per il gioco della k -colorazione generalizzata
- ▶ Analisi delle performance dell'algoritmo per il calcolo delle soluzioni Nash-stabili effettuata attraverso la determinazione del numero di step relativi alle dinamiche di miglioramento
- ▶ Valutazione del benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni Nash-stabili in relazione con il benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni ottime, utilizzando le definizioni di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario [descrive il prezzo dell'anarchia nel caso medio]

Teoria dei giochi e giochi non-cooperativi

La **teoria dei giochi** è la disciplina scientifica che si occupa dello studio del comportamento e dei processi decisionali di soggetti razionali in un contesto di interdipendenza strategica. L'analisi è incentrata sugli scenari caratterizzati dalla presenza di situazioni di conflitto nelle quali gli attori sono costretti ad intraprendere strategie di cooperazione o competizione.

I **giochi non-cooperativi** definiscono una specifica classe di giochi nella quale i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti di cooperazione, anche normativamente.

Il criterio di comportamento razionale adottato nei giochi non-cooperativi è di carattere individuale ed è denominato **strategia del massimo**. Tale definizione di razionalità va modellare il comportamento di un individuo intelligente e ottimista che si prefigge l'obiettivo di prendere sempre la decisione più vantaggiosa per se stesso.

Equilibri di Nash

L'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie nella quale ciascun giocatore effettua la migliore scelta possibile, seguendo cioè una **strategia dominante**, sulla base delle aspettative di scelta degli altri giocatori.

L'equilibrio di Nash rappresenta un **concetto di soluzione** robusto per i giochi non-cooperativi.

L'equilibrio di Nash rappresenta inoltre una **soluzione stabile**, poiché nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente modificando la propria strategia.

Definizione formale I

- ▶ Sia G l'insieme dei **giocatori**, che indicheremo con $i = 1, \dots, N$
- ▶ Sia S l'insieme delle **strategie**, costituito da un set di M vettori $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,j}, \dots, s_{i,M_i})$, ciascuno dei quali contiene l'insieme delle strategie che il giocatore i -esimo ha a disposizione, cioè l'insieme delle azioni che esso può compiere (indichiamo con s_i la strategia scelta dal giocatore i)
- ▶ Sia U l'insieme delle **funzioni** $u_i = U_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N)$ che associano ad ogni giocatore i il guadagno (detto anche payoff) u_i derivante da una data combinazione di strategie (il guadagno di un giocatore in generale non dipende solo dalla propria strategia ma anche dalle strategie scelte dagli avversari)

Definizione formale II

- Un **equilibrio di Nash** per un dato gioco è una combinazione di strategie (che indichiamo con l'apice e)

$$s_1^e, s_2^e, \dots, s_N^e$$

tale che

$$U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i^e, \dots, s_N^e) \geq U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i, \dots, s_N^e)$$

$\forall i$ e $\forall s_i$ scelta dal giocatore i -esimo.

Descrizione del modello I

- ▶ Un'istanza di gioco della k -colorazione generalizzata è una tupla (G, K, P)
- ▶ $G = (V, E, w)$ è un grafo non-orientato pesato (senza self-loops e parallelismo degli archi), dove $|V| = n$, $|E| = m$ e $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ è la funzione che associa un peso intero positivo a ciascun arco [ogni $v \in V$ è un giocatore egoista]
- ▶ K è un insieme di k colori disponibili (strategie), assumiamo $k \geq 2$ [ciascun giocatore ha il medesimo set di azioni disponibili]
- ▶ Sia $P : V \times K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la funzione che associa un profitto a ciascun colore per ciascun giocatore [se il giocatore v sceglie di usare il colore i allora guadagna $P_v(i)$]
- ▶ Uno stato del gioco è una k -colorazione $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ [c_v , con $1 \leq c_v \leq k$, è il colore scelto dal giocatore v in c]

Descrizione del modello II

- ▶ Il **payoff** (utilità) del giocatore v nella colorazione c è
$$\mu_c(v) = \sum_{u \in V: \{v,u\} \in E \wedge c_v \neq c_u} w(\{v,u\}) + P_v(c_v)$$
- ▶ Data una colorazione c , una **mossa migliorativa** del giocatore v è una strategia c'_v tale che $\mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v) > \mu_c(v)$
- ▶ Una **dinamica di miglioramento** è una sequenza di mosse migliorative
- ▶ Una colorazione c è un **equilibrio di Nash** se
$$\mu_c(v) \geq \mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v)$$
- ▶ **Funzione di benessere sociale utilitario** : $SW_{UT}(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{v \in V} P_v(c_v) + \sum_{\{v,u\} \in E: c_v \neq c_u} 2w(\{v,u\})$
- ▶ **Funzione di benessere sociale egalitario** :
$$SW_{EG}(c) = \min_{v \in V} \mu_c(v)$$
- ▶ **Prezzo dell'anarchia** : $PoA = \frac{\max_{c \in C} SW(c)}{\min_{c' \in Q} SW(c')}$

Nozioni sul problema

- ▶ Il problema di calcolare un equilibrio di Nash su grafi non-orientati pesati è **PLS-Completo**, anche per $k = 2$, dato che il gioco del taglio massimo [Max-Cut Game] è un caso speciale del nostro gioco
- ▶ Se $k = 2$ e i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco del taglio massimo**, celebre gioco PLS-Completo ampiamente trattato in letteratura
- ▶ Se i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco della k -colorazione**

Risultati teorici

Proposizione 1

$\forall k$, ogni gioco della k -colorazione generalizzata (G, K, P) finito è convergente

Teorema 1

Il prezzo dell'anarchia per il gioco della k -colorazione generalizzata è al più 2

Teorema 2

Il prezzo dell'anarchia utilitario per il gioco della k -colorazione generalizzata è almeno 2, anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati

Teorema 3

Il prezzo dell'anarchia egalitario per il gioco della k -colorazione generalizzata è 2

Implementazione I

- ▶ Utilizzo del linguaggio **Python** [Standard Library]
- ▶ Utilizzo della libreria di creazione e manipolazione di grafi **NetworkX** [e altre minori]
- ▶ Costruzione dei moduli per la generazione e per la lettura asincrona di grafi [*generator.py*, *reader.py*]
- ▶ Utilizzo di **strutture dati** efficienti come *liste* e *dizionari* sia in forma singola che innestata [*single or nested list and dictionary comprehension*]
- ▶ Implementazione degli **algoritmi per il calcolo dell'ottimo** con funzioni di benessere sociale utilitaristico e egualitario utilizzando una strategia incentrata sulla forza bruta [privi di tecniche di ottimizzazione delle iterazioni]

Implementazione II

- ▶ Implementazione dell'**algoritmo per il calcolo della colorazione stabile** seguendo la definizione di equilibrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- ▶ Strategia per il calcolo della **best move** per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- ▶ Doppia strategia per il salto delle iterazioni basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

Implementazione II

- ▶ Implementazione dell'**algoritmo per il calcolo della colorazione stabile** seguendo la definizione di equilibrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- ▶ Strategia per il calcolo della **best move** per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- ▶ Doppia strategia per il salto delle iterazioni basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

Implementazione II

- ▶ Implementazione dell'**algoritmo per il calcolo della colorazione stabile** seguendo la definizione di equilibrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- ▶ Strategia per il calcolo della **best move** per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- ▶ Doppia strategia per il salto delle iterazioni basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

- ▶ Sviluppo di implementazioni più efficaci per ciò che concerne il calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario
- ▶ Potrebbero essere utilizzate tecniche di ricerca operativa (ad esempio, mirate a ridurre lo spazio di ricerca dell'ottimo) per abbattere la complessità computazionale derivante dall'approccio a forza bruta
- ▶ Tale miglioria garantirebbe la possibilità di effettuare uno studio più approfondito riguardante la variazione del prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario per istanze maggiori di quelle analizzate, con esecuzioni effettuate in tempi ragionevoli