

# Calcolo e performance di equilibri di Nash per il gioco della $k$ -colorazione generalizzata

Valentino Di Giosaffatte

Prof. Gianpiero Monaco

Università degli Studi dell'Aquila

Anno Accademico 2017/2018

# Obiettivi della sperimentazione

- ▶ Calcolo degli equilibri di Nash per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata
- ▶ Analisi delle performance dell'algoritmo per il calcolo delle soluzioni Nash-stabili effettuata attraverso la determinazione del numero di step relativi alle dinamiche di miglioramento
- ▶ Valutazione del benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni Nash-stabili in relazione con il benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni ottime, utilizzando le definizioni di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario [descrive il prezzo dell'anarchia nel caso medio]

# Teoria dei giochi e giochi non-cooperativi

La **teoria dei giochi** è la disciplina scientifica che si occupa dello studio del comportamento e dei processi decisionali di soggetti razionali in un contesto di interdipendenza strategica. L'analisi è incentrata sugli scenari caratterizzati dalla presenza di situazioni di conflitto nelle quali gli attori sono costretti ad intraprendere strategie di cooperazione o competizione.

I **giochi non-cooperativi** definiscono una specifica classe di giochi nella quale i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti di cooperazione, anche normativamente.

Il criterio di comportamento razionale adottato nei giochi non-cooperativi è di carattere individuale ed è denominato **strategia del massimo**. Tale definizione di razionalità va modellare il comportamento di un individuo intelligente e ottimista che si prefigge l'obiettivo di prendere sempre la decisione più vantaggiosa per se stesso.

# Equilibri di Nash

L'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie nella quale ciascun giocatore effettua la migliore scelta possibile, seguendo cioè una **strategia dominante**, sulla base delle aspettative di scelta degli altri giocatori.

L'equilibrio di Nash rappresenta un **concetto di soluzione** robusto per i giochi non-cooperativi.

L'equilibrio di Nash rappresenta inoltre una **soluzione stabile**, poiché nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente modificando la propria strategia.

# Definizione formale I

- ▶ Sia  $G$  l'insieme dei **giocatori**, che indicheremo con  $i = 1, \dots, N$
- ▶ Sia  $S$  l'insieme delle **strategie**, costituito da un set di  $M$  vettori  $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,j}, \dots, s_{i,M_i})$ , ciascuno dei quali contiene l'insieme delle strategie che il giocatore  $i$ -esimo ha a disposizione, cioè l'insieme delle azioni che esso può compiere (indichiamo con  $s_i$  la strategia scelta dal giocatore  $i$ )
- ▶ Sia  $U$  l'insieme delle **funzioni**  $u_i = U_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N)$  che associano ad ogni giocatore  $i$  il guadagno (detto anche payoff)  $u_i$  derivante da una data combinazione di strategie (il guadagno di un giocatore in generale non dipende solo dalla propria strategia ma anche dalle strategie scelte dagli avversari)

# Definizione formale II

- Un **equilibrio di Nash** per un dato gioco è una combinazione di strategie (che indichiamo con l'apice  $e$ )

$$s_1^e, s_2^e, \dots, s_N^e$$

tale che

$$U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i^e, \dots, s_N^e) \geq U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i, \dots, s_N^e)$$

$\forall i$  e  $\forall s_i$  scelta dal giocatore  $i$ -esimo.

# Descrizione del modello I

- ▶ Un'istanza di gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è una tupla  $(G, K, P)$
- ▶  $G = (V, E, w)$  è un grafo non-orientato pesato (senza self-loops e parallelismo degli archi), dove  $|V| = n$ ,  $|E| = m$  e  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  è la funzione che associa un peso intero positivo a ciascun arco [ogni  $v \in V$  è un giocatore egoista]
- ▶  $K$  è un insieme di  $k$  colori disponibili (strategie), assumiamo  $k \geq 2$  [ciascun giocatore ha il medesimo set di azioni disponibili]
- ▶ Sia  $P : V \times K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  la funzione che associa un profitto a ciascun colore per ciascun giocatore [se il giocatore  $v$  sceglie di usare il colore  $i$  allora guadagna  $P_v(i)$ ]
- ▶ Uno stato del gioco è una  $k$ -colorazione  $c = \{c_1, \dots, c_n\}$  [ $c_v$ , con  $1 \leq c_v \leq k$ , è il colore scelto dal giocatore  $v$  in  $c$ ]

# Descrizione del modello II

- ▶ Il **payoff** (utilità) del giocatore  $v$  nella colorazione  $c$  è
$$\mu_c(v) = \sum_{u \in V: \{v,u\} \in E \wedge c_v \neq c_u} w(\{v,u\}) + P_v(c_v)$$
- ▶ Data una colorazione  $c$ , una **mossa migliorativa** del giocatore  $v$  è una strategia  $c'_v$  tale che  $\mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v) > \mu_c(v)$
- ▶ Una **dinamica di miglioramento** è una sequenza di mosse migliorative
- ▶ Una colorazione  $c$  è un **equilibrio di Nash** se
$$\mu_c(v) \geq \mu_{(c_{-v}, c'_v)}(v)$$
- ▶ **Funzione di benessere sociale utilitario** :  $SW_{UT}(c) = \sum_{v \in V} \mu_c(v) = \sum_{v \in V} P_v(c_v) + \sum_{\{v,u\} \in E: c_v \neq c_u} 2w(\{v,u\})$
- ▶ **Funzione di benessere sociale egalitario** :
$$SW_{EG}(c) = \min_{v \in V} \mu_c(v)$$
- ▶ **Prezzo dell'anarchia** :  $PoA = \frac{\max_{c \in C} SW(c)}{\min_{c' \in Q} SW(c')}$



# Nozioni sul problema

- ▶ Il problema di calcolare un equilibrio di Nash su grafi non-orientati pesati è **PLS-Completo**, anche per  $k = 2$ , dato che il gioco del taglio massimo [Max-Cut Game] è un caso speciale del nostro gioco
- ▶ Se  $k = 2$  e i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco del taglio massimo**, celebre gioco PLS-Completo ampiamente trattato in letteratura
- ▶ Se i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco della  $k$ -colorazione**

# Risultati teorici

## Proposizione 1

$\forall k$ , ogni gioco della  $k$ -colorazione generalizzata  $(G, K, P)$  finito è convergente

## Teorema 1

Il prezzo dell'anarchia per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è al più 2

## Teorema 2

Il prezzo dell'anarchia utilitario per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è almeno 2, anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati

## Teorema 3

Il prezzo dell'anarchia egalitario per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è 2

# Implementazione I

- ▶ Utilizzo del linguaggio **Python** [Standard Library]
- ▶ Utilizzo della libreria di creazione e manipolazione di grafi **NetworkX** [e altre minori]
- ▶ Costruzione dei moduli per la generazione e per la lettura asincrona di grafi [*generator.py*, *reader.py*]
- ▶ Utilizzo di **strutture dati** efficienti come *liste* e *dizionari* sia in forma singola che innestata [*single or nested list and dictionary comprehension*]
- ▶ Implementazione degli **algoritmi per il calcolo dell'ottimo** con funzioni di benessere sociale utilitaro e egalitario utilizzando una strategia incentrata sulla forza bruta [privi di tecniche di ottimizzazione delle iterazioni]

# Implementazione II

- ▶ Implementazione dell'**algoritmo per il calcolo della colorazione stabile** seguendo la definizione di equilibrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- ▶ **Strategia** per il calcolo della **best move** per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- ▶ **Doppia strategia** per il **salto delle iterazioni** basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

# Assunzioni generali

Sperimentazione effettuata su **grafi randomici** di tipo *gnp\_random\_graph* (detti grafi di Erdős-Rényi o grafi binomiali) fissando il parametro  **$n$**  [**numero di nodi**] e fissando o facendo oscillare randomicamente i 2 parametri  **$k$**  [**numero di colori**,  $2 \geq k \geq n$ ] e  **$p$**  [**probabilità di generare archi tra le coppie di nodi**,  $0 \leq p \leq 1$ ]

- ▶ **Tipologia I** : calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario, calcolo dell'equilibrio di Nash, definizione del valore di benessere sociale utilitario e egalitario della colorazione stabile, definizione dei valori di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario (su istanze piccole, con limitatore temporale  $t$ )
- ▶ **Tipologia II** : calcolo dell'equilibrio di Nash, definizione del valore di benessere sociale utilitario e egalitario della colorazione stabile (su istanze medio-grandi, con limitatore temporale  $t$ )

# Tipologia I [ $n = 5$ , oscillazione random di $k$ e $p$ ]

			opt		nash			poa		
k	p	a	util	egal	step	util	egal	util	egal	t
5	0.90	9	314	45	5	314	41	1	1.0975	1
4	0.27	5	485	94	4	485	94	1	1	1
3	0.82	9	410	45	4	410	40	1	1.1250	1
4	0.14	4	394	40	4	394	40	1	1	1
2	0.79	7	420	37	5	420	37	1	1	1
5	0.65	9	497	86	6	497	86	1	1	2
3	0.40	6	805	120	5	766	120	1.0509	1	1
3	0.52	5	932	85	4	932	85	1	1	1
5	1	10	913	149	3	913	149	1	1	2
2	0.24	3	590	64	3	566	64	1.0402	1	1

Tipologia I [ $n = 5$ ,  $k = 3$ , random  $0.40 \geq p \geq 1$ ] e [ $n = 5$ ,  $p = 0.70$ , random di  $2 \geq k \geq 5$ ]

		opt		nash			poa		
<b>p</b>	<b>a</b>	util	egal	step	util	egal	util	egail	<b>t</b>
0.40	5	1064	148	6	1064	126	1	1.1746	1
0.50	7	1113	100	3	1019	76	1.0922	1.3157	1
0.60	6	1253	163	8	1121	163	1.1177	1	1
0.70	5	862	95	7	862	95	1	1	1
0.80	9	1104	166	9	1061	125	1.0405	1.328	1
0.90	9	1249	210	7	1249	173	1	1.1475	1
1	10	1564	261	3	1451	246	1.0778	1.0609	1

		opt		nash			poa		
<b>k</b>	<b>a</b>	util	egal	step	util	egal	util	egail	<b>t</b>
2	6	794	118	3	778	77	1.0205	1.5324	1
3	6	930	148	6	912	120	1.0197	1.2333	1
4	6	1015	152	6	1015	152	1	1	1
5	6	1063	149	4	1063	149	1	1	1

## Tipologia II [ $n = 15$ , oscillazione random di $k$ e $p$ ]

			nash			
k	p	a	step	utilitarian	egalitarian	t
7	0.75	78	9	9398	365	1
7	0.84	83	19	9664	457	1
13	0.49	50	17	6837	176	1
5	0.30	35	7	5226	133	1
9	0.87	90	19	10747	586	1
5	0.49	41	15	5206	174	1
9	0.89	97	14	10937	451	1
10	0.79	84	19	10437	582	1
4	0.88	87	9	9295	473	1
13	0.38	34	14	4185	161	1



# Tipologia II [ $n = 15$ , $k = 8$ , random $0.40 \geq p \geq 1$ ]

			nash		
p	a	step	utilitarian	egalitarian	t
0.40	53	18	6199	213	1
0.50	54	25	7243	338	1
0.60	69	22	8747	459	1
0.70	82	21	9376	414	1
0.80	86	16	10292	556	1
0.90	93	22	11063	569	1
1	105	17	12055	604	1

# Tipologia II [ $n = 15$ , $p = 0.70$ , random $2 \geq k \geq 15$ ]

		nash			
k	a	step	utilitarian	egalitarian	t
2	82	7	5929	267	1
3	82	14	7648	340	1
4	82	15	8677	375	1
5	82	21	8742	394	1
6	82	21	9072	414	1
7	82	22	9219	402	1
8	82	11	9093	398	1
9	82	16	9340	420	1
10	82	21	9361	430	1
11	82	18	9475	444	1
12	82	19	9510	413	1
13	82	14	9561	436	1
14	82	20	9631	444	1
15	82	19	9581	443	1

# Conclusioni I

- ▶ La **complessità computazionale** relativa al calcolo degli **ottimi** cresce in modo esponenziale al **crescere** del valore di  $k$  (fissato  $n$ ), poiché il numero di colorazioni (permutazioni) da analizzare è uguale a  $k^n$ , evidenziando così l'appartenenza di questo problema all'insieme NP
- ▶ Quest'ultima è influenzata inoltre dal valore del **parametro  $p$** , infatti un alto valore di **densità** del grafo genera un forte grado di connessione che produce un aumento significativo del numero delle **iterazioni innestate**
- ▶ Le sperimentazioni su **istanze** di dimensioni **modeste** hanno prodotto, in misura maggiore, **risultati ottimi** [= 1] relativi al **prezzo dell'anarchia sperimentale** utilitario e egalarario
- ▶ Il **limitatore temporale  $t$**  relativo alle esecuzioni è influenzato in modo significativo e diretto dal **crescere** del **numero di nodi  $n$** , l'oscillazione di  $k$  e  $p$  non causa variazioni degne di nota dunque è sufficiente assegnare un **set omogeneo** di valori per  $t$

# Conclusioni II

- ▶ La **complessità computazionale** relativa all'algoritmo per il calcolo degli **equilibri di Nash** è influenzata direttamente dal crescere del **parametro  $k$**  e dal **parametro  $p$**  che generano un aumento significativo delle iterazioni innestate
- ▶ Riguardo le sperimentazioni con **doppio parametro fisso** ( $n$  e  $k$  o  $n$  e  $p$ ) notiamo, la **crescere** dei valori randomici di  $p$  e  $k$  rispettivamente, un generale e progressivo aumento di tutti i valori relativi al calcolo degli **ottimi** e degli **equilibri**, in particolare del parametro **step**, ovvero il numero di passi che compongono le dinamiche
- ▶ In generale si evidenzia un **aumento** dei valori legati al benessere sociale **utilitario** al crescere di  $n$
- ▶ Inoltre si evidenzia un **aumento** dei valori legati al benessere sociale **egualitario** al crescere di  $p$  [risultato puramente connesso alla sperimentazione in oggetto poiché le variabili sono molteplici]

- ▶ Sviluppo di implementazioni più efficaci per ciò che concerne il calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario
- ▶ Potrebbero essere utilizzate tecniche di ricerca operativa (ad esempio, mirate a ridurre lo spazio di ricerca dell'ottimo) per abbattere la complessità computazionale derivante dall'approccio a forza bruta
- ▶ Tale miglioria garantirebbe la possibilità di effettuare uno studio più approfondito riguardante la variazione del prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario per istanze maggiori di quelle analizzate, con esecuzioni effettuate in tempi ragionevoli