(generalized graph k-coloring games)
K-COLORING GAMES SU GRAFI GENERALI

ABSTRACT (RIASSUNTO / SOMMARIO)

Esaminiamo i **Pure Nash Equilibria** nei **Generalized Graph K-Coloring Games** in cui viene fornito un grafo orientato pesato e a un insieme di k colori.

I nodi rappresentano giocatori e gli archi catturano i loro reciproci interessi.

La strategia di ciascun giocatore è composta da k colori.

L'utilità di un giocatore v in un dato stato o colorazione è data dalla somma dei pesi degli archi {v, u} incidenti a v tale che il colore scelto da v sia diverso da quello scelto da u, più il profitto guadagnato usando il colore scelto.

Tali giochi formano alcune delle strutture base di payoff nella teoria dei giochi, modellano un sacco di scenari del mondo reale con giocatori egoisti e si estendono o sono legati a diverse classi fondamentali di giochi.

Per prima cosa dimostriamo che i **Generalized Graph K-Coloring Games** sono potenziali giochi. In particolare, sono convergenti e quindi i **Nash Equilibria** esistono sempre.

Valutiamo quindi le loro prestazioni per mezzo delle nozioni largamente usate del **Price of Anarchy** e del **Price of Stability** e forniamo limiti stretti per due tipi di benessere sociale naturali e ampiamente usati, cioè l'**Utilitarian Social Welfare** e l'**Egalitarian Social Welfare**..

INTRODUCTION (INTRODUZIONE)

Consideriamo i **Generalized Graph K-Coloring Games**.

Questi sono giocati su grafi non-orientati pesati in cui i nodi corrispondono ai giocatori e gli archi identificano le connessioni sociali o le relazioni tra i giocatori.

Il set di strategia di ciascun giocatore è un insieme di k colori disponibili (assumiamo che i colori siano gli stessi per ogni giocatore).

Quando i giocatori selezionano un colore inducono una colorazione k o semplicemente una colorazione.

Ogni giocatore ha una funzione di profitto che esprime quanto un giocatore apprezza un colore.

Data una colorazione, l'utilità (o il guadagno) di un giocatore v colorato i è la somma dei pesi degli archi {v, u} incidenti a v, tale che il colore scelto da v è diverso da quello scelto da u, più il profitto derivante dalla scelta del colore i.

Questa classe di giochi forma alcune delle strutture di payoff di base nella teoria dei giochi e può modellare molti scenari di vita reale.

Si consideri, ad esempio, un insieme di aziende che devono decidere quale prodotto produrre per massimizzare le proprie entrate.

Ogni azienda ha i suoi concorrenti (ad esempio quelli che si trovano nella sua stessa regione) ed è ragionevole presumere che ogni azienda voglia minimizzare il numero di concorrenti che producono lo stesso prodotto.

Tuttavia, questa non è la loro unica preoccupazione.

In effetti, diversi prodotti possono garantire profitti diversi a una società in base a molti fattori economici come il profitto atteso, le entrate di sponsorizzazione e così via e così via.

Un altro scenario possibile è quello in cui i minatori decidono quale terreno utilizzare per le risorse.

Per un minatore è sicuramente importante scegliere la terra in cui il numero di rivali è ridotto al minimo, ma anche la terra stessa è importante: forse c'è una terra senza minatori che è molto povera di risorse, mentre un'altra terra che è stata scelta da molti minatori può essere molto ricca di risorse.

Pertanto, per un giocatore è importante trovare un compromesso tra le decisioni dei suoi vicini e la sua scelta strategica.

Poiché si presume che i giocatori siano egoisti, un concetto di soluzione ben noto per questo tipo di impostazione è il **Nash Equilibrium**.

Formalmente, una colorazione è un (**Pure**) **Nash Equilibrium** se nessun giocatore può migliorare la sua utilità deviando unilateralmente dalla sua strategia attuale.

Sottolineiamo che nelle nostre impostazioni non è richiesto che gli archi siano colorati correttamente, cioè in un **Nash Equilibrium**, possiamo avere archi i cui due endpoint usano lo stesso colore.

Il **Nash Equilibrium** è uno dei concetti più importanti nella teoria dei giochi e fornisce una soluzione stabile che è robusta alle deviazioni dei singoli giocatori.

Tuttavia, l'egoismo può causare perdita di benessere sociale, cioè una soluzione stabile non è sempre buona rispetto al benessere della società.

Consideriamo due nozioni di benessere, naturali e ampiamente utilizzate.

Data una colorazione, l’**Utilitarian Social Welfare** è definito come la somma delle utilità dei giocatori nella colorazione, mentre l’**Egalitarian Social Welfare** è definito come l'utilità minima tra tutti i giocatori nella colorazione.

Due metodi usati per misurare la bontà di un **Nash Equilibrium** rispetto a un benessere sociale sono il **Price of Anarchy** e il **Price of Stability**.

Adottiamo tali misure e studiamo la qualità del peggiore (o migliore) **Nash Stable Outcome** e ci riferiamo al rapporto tra il suo benessere sociale e quello socialmente ottimale rispetto al **Price of Anarchy** (rispettivamente **Stability**).

In parole povere, il **Price of Anarchy** descrive, nel peggiore dei casi, come l'efficienza di un sistema degrada a causa del comportamento egoistico dei suoi giocatori, mentre il **Price of Stability** ha un naturale significato di stabilità, poiché è la soluzione ottimale tra quelle che possono essere accettate da giocatori egoisti.

Il nostro scopo è studiare l'esistenza e la performance dei **Nash Equilibrium** in **Generalized Graph K-Coloring Games**.

Ci concentriamo solo sui grafi non-orientati poiché per i grafi orientati anche il problema di decidere se un'istanza ammette un **Nash Equilibria** è un problema difficile, e esistono casi per i quali un **Nash Equilibrium** non esiste affatto.

OUR RESULTS (RISULTATI)

Per prima cosa dimostriamo che i **Generalized Graph K-Coloring Games** sono potenziali giochi.

In particolare, sono giochi convergenti e quindi i **Nash Equilibria** esistono sempre.

Inoltre, se il grafo non è pesato, è possibile calcolare un **Nash Equilibrium** in tempo polinomiale.

Questo è diverso dal grafo pesato non-orientato, per il quale il problema di calcolare un **Nash Equilibrium** è PLS-completo anche per k = 2, dal momento che il gioco del taglio massimo è un caso speciale del nostro gioco.

Valutiamo poi la bontà dei **Nash Equilibria** per mezzo delle nozioni largamente usate di **Price of Anarchy** e **Price of Stability** e mostriamo limiti stretti per due benesseri sociali naturali e largamente usati, ovvero l’**Utilitarian Social Welfare** e l’**Egalitarian Social Welfare**.

Inoltre, forniamo risultati rigorosi per l’**Egalitarian Social Welfare** relativi al caso in cui i giocatori non hanno preferenze personali sui colori, cioè, tutti i profitti di colore sono impostati su 0.

I nostri risultati sono illustrati nella Tabella 1 (i nostri risultati originali sono contrassegnati con *).

	Utilitarian SW	Utilitarian SW	Egalitarian SW	Egalitarian SW
	PoA	**Pos**	**PoA**	**PoS**
Graph k-coloring without profits	k / (k-1)	1	k / (k-1)	k / (k-1) *
Generalized graph k-coloring	2 *	3/2 *	2 *	2 *

RELATED WORKS (PUBBLICAZIONI / LAVORI CORRELATI)

I **Graph K-Coloring Games** (chiamati anche **Max K-Cut games** e **Anticoordination Games**), sono un caso speciale di **Generalized Graph K-Coloring Games** in cui i profitti dei colori sono impostati a zero.

Considerano il gioco applicato a entrambi i grafi orientati e non-orientati (nell'ultimo caso, ciascun giocatore è interessato solo ai suoi vicini uscenti).

Mostrano che il **Graph K-Coloring Game** è un gioco potenziale nel caso di grafi non-orientati e quindi esiste sempre un **Nash Equilibrium**.

Considerano solo l'**Utilitarian Social Welfare** e forniscono un limite stretto al **Price of Anarchy**, che è k/k-1, e mostrano che ogni ottimo è un **Nash Equilibrium** (cioè, il **Price of Stability** è 1).

Al contrario, mostrano inoltre che decidere se un grafo orientato non-pesato ammette un **Nash Equilibrium** è NP-Hard, per qualsiasi numero di colori $k \geq 2$.

Per quanto riguarda i **Graph K-Coloring Games** nei grafi non-orientati con pesi sugli archi, il calcolo di un **Nash Equilibrium** è PLS-Complete, mentre per i grafi non-orientati non-pesati il problema diventa risolvibile polinomialmente.

Una funzione di payoff più complessa è considerata nel caso in cui l'utilità di un giocatore è uguale alla somma della distanza del suo colore rispetto al colore di ciascuno dei suoi vicini, applicando una funzione concava non-negativa con valori reali.

Apt et al. considera un **Coordination Game** in cui, dato un grafo, i giocatori sono nodi e ogni giocatore deve selezionare un colore in modo che il numero di vicini con il suo stesso colore sia massimizzato.

Qui, ogni giocatore ha il proprio set di colori.

Quando il grafo è non-orientato, il gioco converge in un **Nash Equilibria** in tempo polinomiale.

Invece, per i grafi orientati calcolare un **Nash Equilibria** è NP-Completo.

Feldman et al. studiano lo **Strong Price of Anarchy** dei **Graph K-Coloring Games**, cioè il rapporto tra l'ottimo sociale e il peggiore **strong equilibrium**, che è un **Nash Equilibrium** resiliente alle deviazioni per gruppo di giocatori.

Per ciò che conosciamo non esiste un documento che consideri il **Price of Anarchy** e il **Price of Stability** per i **Graph K-Coloring Games** sotto l'**Egalitarian Social Welfare**.

Tuttavia, sottolineiamo che l'**Egalitarian Social Welfare** è stato studiato in molti altri contesti, come ad es. **Congestion Games**, **Hedonic Games** e **Fair Division Problems**.

I **Graph K-Coloring Games** sono strettamente correlati a molti giochi fondamentali nella letteratura scientifica.

Ad esempio, sono strettamente correlati all'**Unfriendly Partition Problem**.

Inoltre, possono essere visti come un particolare **Hedonic Games** in cui i nodi con lo stesso colore appartengono alla stessa coalizione, e l'utilità di ciascun giocatore è uguale al suo grado meno il numero di vicini che sono nella sua stessa coalizione.

I **Nash Equilibria** negli **Hedonic Games** sono stati ampiamente studiati.

Infine, ci sono altri giochi correlati su grafi che implicano la colorazione.

Gli autori studiano un gioco in cui i giocatori sono nodi di un grafico.

Ogni giocatore deve scegliere un colore tra quelli disponibili, e la sua utilità è definita come segue : se nessun vicino ha scelto il suo stesso colore, la sua utilità è uguale al numero di giocatori (non tra i suoi vicini) che hanno scelto il suo stesso colore, altrimenti è zero.

Dimostrano che questo è un gioco potenziale e che i **Nash Equilibria** possono essere trovati in tempo polinomiale.

Inoltre, mostrano che ogni **pure equilibrium** è una colorazione corretta.

PRELIMINARIES (PRELIMINARI)

Ci viene dato un grafo semplice non-orientato $G = (V, E, w)$, dove $|V| = n$, $|E| = m$ e $w : E \rightarrow R_{\geq 0}$ è la funzione per i pesi sugli archi che associa un peso positivo a ciascun arco.

Quando si omettono i pesi, si presume che essi siano 1. Denotiamo con $\delta_v(G)$ la somma dei pesi di tutti gli archi incidenti a v.

L'insieme dei nodi con cui un nodo v ha un arco in comune è chiamato insieme dei vicini (**v's neighborhood**).

Eviteremo di specificare (G) quando quest'ultimo è chiaro dal contesto.

Un’istanza di **Generalized Graph K-Coloring Games** è una tupla (G,K,P). G = (V, E, w) è un grafo pesato non-orientato senza self loops, in cui ogni non $v \in V$ è un giocatore egoista (in seguito utilizzeremo il nodo e il giocatore in modo intercambiabile).

K è un insieme di colori disponibili (assumiamo che $k \geq 2$).

Il set di strategia di ciascun giocatore è dato dai k colori disponibili, cioè i giocatore hanno lo stesso insieme di azioni. Denotiamo con $P : V \times K \rightarrow R \geq 0$ la funzione di profitto del colore, che definisce quanto un giocatore apprezza un colore, cioè se il giocatore v sceglie di usare il colore i, allora guadagna PV(i).

Quando $Pv(i) = 0\ \forall v \in V$ e $\forall i \in k$, si ha il caso senza profitti per il colore scelto, quindi possiamo riferirci a questo gioco come a un **Graph K-Coloring Game**.

Uno stato del gioco c = {c1, . . . , cn} è un **k-coloring**, o semplicemente una colorazione, dove cv è il colore (cioè un numero da 1 a k) scelto dal giocatore v.

In una certa colorazione c, il payoff (o l’utilità) di un giocatore v è la somma dei pesi degli archi (v, u) incidenti a vm tali che il colore scelto da v è diverso da quello scelto da u, oltre al profitto ottenuto utilizzando il colore scelto.

D’ora in poi, quando un arco (v, u) fornisce utilità ai suoi endpoints in una colorazione c, cioè quando $cv \neq cu$ diciamo che tale margine è corretto.

Diciamo anche che un arco (v, u) è **monocromatico** in una colorazione c quando cv = cu.

Sia (c-v, c'v) la colorazione ottenuta da c cambiando la strategia del giocatore v da cv a c'v.

Data una colorazione c = {c1,. . . , cn}, una mossa migliorante (**improving move**) del giocatore v nella colorazione c è una strategia c'v tale che μ(c-v, c’v) (v) > μc (v).

Uno stato del gioco è un **Pure Nash** o uno **Stable Equilibrium** se e solo se nessun giocatore può effettuare una mossa migliorativa (**improving move**).

Una dinamica in miglioramento (**improving dynamics**) (o brevemente dinamica (**dynamics**)) è una sequenza di mosse migliorative. Si dice che un gioco sia convergente (**convergent**) se, dato qualsiasi stato iniziale c, qualsiasi sequenza di mosse migliorative porti ad un **Nash Equilibrium**.

Data una colorazione c, definiamo una funzione di **Utilitarian Social Welfare** come SWut(c) e una funzione di **Egalitarian Social Welfare** come SWeg(c). (vedi definizione formale delle funzioni)

Indichiamo con C l'insieme di tutte le possibili colorazioni e denotiamo con Q l'insieme di tutte le colorazioni stabili. Data una funzione di benessere sociale SW, definiamo il **Price of Anarchy** (**PoA**) del **Generalized Graph K-Coloring Games** come il rapporto tra il massimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni sul minimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni stabili.

Definiamo inoltre il **Price of Stability** (**PoS**) del **Generalized Graph K-Coloring Games** come il rapporto tra il massimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni sul minimo benessere sociale tra tutte le possibili colorazioni stabili.

Intuitivamente, il PoA (rispettivamente PoS) si dice quanto è peggiore il benessere sociale nel peggiore (migliore rispettivamente) **Nash Equilibrium**, relativo al benessere sociale di un **centralized enforced optimum**.

Ci riferiamo all'**Utilitarian Price of Anarchy** e all'**Egalitarian Price of Anarchy** quando, rispettivamente, abbiamo a che fare con l'**Utilitarian Price of Stability** e l'**Egalitarian Price of Stability**, lo stesso vale per l'**Utilitarian Price of Stability** e l'**Egalitarian Price of Stability**.

EXISTENCE OF NASH EQUILIBRIA (ESISTENZA DI EQUILIBRI DI NASH)

Per prima cosa mostriamo che il **Generalized Graph K-Coloring Games** è convergente. Ciò implica chiaramente che i **Nash Equilibria** esistono sempre.

Proposizione 1.

> *Per ogni k, ogni **Generalized Graph K-Coloring Games** finito (G,K,P) è convergente.*

Notiamo che, da un lato, se il grafo non è pesato, la dinamica, partendo dalla colorazione in cui ogni giocatore v seleziona il colore in modo tale da ottenere il massimo profitto possibile, che è, il colore i tale che Pv(i) = PvM, converge ad un **Nash Equilibrium** in al massimo |E| mosse migliorative.

D'altra parte, se il grafo è pesato, il calcolo di un **Nash Equilibrium** è PLS-completo.

Ne consegue il fatto che, quando k = 2, il nostro gioco è una generalizzazione del **Cut Game** che è uno dei primi problemi che si sono dimostrati essere PLS-completi.

UTILITARIAN SOCIAL WELFARE (BENESSERE SOCIALE UTILITARIO)

In questa sezione ci concentriamo sull'**Utilitarian Social Welfare**. Mostriamo limiti stretti per l'**Ultilitarian Price of Anarchy** e per l'**Utilitarian Price of Stability**.

PRICE OF ANARCHY (PREZZO DELL'ANARCHIA)

Ricordiamo che nel caso senza profitti associati ai colori, l'**Utilitarian Price of Anarchy** è esattamente k / (k-1). Qui dimostriamo che per **Generalized Graph K-Coloring Games** l'**Utilitarian Price of Anarchy** è pari a 2, cioè è indipendente dal numero di colori,

Iniziamo dimostrando che l'**Utilitarian Price of Anarchy** è al massimo 2.

Teorema 2 [w/ proof on paper]

> *l'**Utilitarian Price of Anarchy** per **Generalized Graph K-Coloring Games** è al massimo 2.*

Mostriamo ora che l'**Utilitarian Price of Anarchy** è almeno 2 anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati.

Teorema 3

> *l'**Utilitarian Price of Anarchy** per **Generalized Graph K-Coloring Games** è almeno 2, anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati.*

PRICE OF STABILITY (PREZZO DELLA STABILITÀ)

Adesso rivolgiamo la nostra attenzione all'**Utilitarian Price of Stability**. Ricordiamo che nel caso in cui non ci siamo profitti associati ai colori, l'**Utilitaria Price of Stability** è 1.

Qui iniziamo mostrando che l'**Utilitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** è di almeno 3/2 − ε, per ogni ε > 0, anche nel caso speciale di grafi stella non-pesati.

Teorema 4

> *l'**Utilitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** è di almeno 3/2 − ε, per ogni ε > 0, anche nel caso speciale di grafi stella non-pesati.*

Ora dimostriamo che l'**Utilitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** è al massimo 3/2.

Teorema 5 [w/ proof on paper]

> *l'**Utilitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** è al massimo 3/2.*

EGALITARIAN SOCIAL WELFARE (BENESSERE SOCIALE EGUALITARIO)

In questa sezione ci concentriamo sull'**Egalitarian Social Welfare**. Mostriamo limiti stretti per l'**Egalitarian Price of Anarchy** e per l'**Egalitarian Price of Stability**.

PRICE OF ANARCHY (PREZZO DELL'ANARCHIA)

Per un **Graph K-Coloring Game** (ovvero senza profitti associati ai colori), un limite inferiore all'**Egalitarian Price of Anarchy** è fornito.

In tal caso, la soluzione ottimale è tale che ciascun giocatore v ha un'utilità uguale al suo grado δv, tuttavia esiste una colorazione stabile in cui ciascun giocatore v ha un'utilità pari a $((k - 1) / k)\ \delta v$, per qualsiasi numero di colori $k \geq 2$.

Questo risultato insieme al fatto che secondo il **pidgehole principle**, per qualsiasi colorazione stabile ogni giocatore v raggiunge almeno un'utilità pari a $((k - 1) / k)\ \delta v$, implica che l'**Egalitarian Price of Anarchy** è esattamente $(k - 1) / k$ per i **Graph K-Coloring Games**.

Pertanto, ora consideriamo i **Generalized Graph K-Coloring Games**. Per prima cosa notate che l'istanza definita nel Teorema 3 fornisce un limite inferiore di 2 all'**Egalitarian Price of Anarchy**.

In effetti, nella colorazione ottimale l'utilità minima è 2, e esiste una colorazione stabile in cui l'utilità minima è 1.

Inoltre, si sottolinea che la dimostrazione del Teorema 2 mostra sostanzialmente che per ogni giocatore i, la sua utilità in un qualsiasi risultato stabile è almeno la metà del profitto che ha nell'ottimo.

Quindi otteniamo facilmente il seguente teorema che dice che l'**Egalitarian Price of Anarchy** dei **Generalized Graph K-Coloring Games** é 2.

Teorema 6

> *l'**Egalitarian Price of Anarchy** dei **Generalized Graph K-Coloring Games** é 2.*

PRICE OF STABILITY (PREZZO DELLA STABILITÀ)

Rivolgiamo ora la nostra attenzione all'**Egalitarian Price of Stability**. Iniziamo mostrando che per il **Graph K-Coloring Game** (ovvero senza profitti associati ai colori), l'**Egalitarian Price of Stability** è esattamente $k / (k - 1)$.

Teorema 7 [w/ proof on paper]

*l'**Egalitarian Price of Stability** per il **Graph K-Coloring Games** è esattamente k / (k - 1).*

Consideriamo ora l'**Egalitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** e mostriamo un limite stretto di 2.

Teorema 8

*l'**Egalitarian Price of Stability** per i **Generalized Graph K-Coloring Games** è 2.*

FUTURE WORK (LAVORO FUTURO)

Una possibile direzione di ricerca futura è lo studio di altri tipo di **equilibria** per i **Generalized Graph K-Coloring Games**.

Ad esempio, Feldman et al. [14] prova che quando esistono **Strong Nash Equilibria**, lo **Strong Price of Anarchy** di un **Graph K-Coloring Games** senza profitti dipende dal numero di colori e il suo valore massimo è 3 / 2 quando k = 2.

Sarebbe interessante studiare quanto peggiore sia lo **Strong Price of Anarchy** che si ottiene per i **Generalized Graph K-Coloring Games**.

Crediamo che domande relative alla complessità computazione di **Nash Equilibria** (approssimata) per i **Generalized Graph K-Coloring Games** meritano di essere investigati.

Infatti già per i **Graph K-Coloring Games**, se il grafo è non-pesato e orientato il problema di decidere se un'istanza ammette un **Nash Equilibrium** è NP-hard, e esistono casi per i quali un **Nash Equilibrium** non esiste affatto.

Inoltre nel caso dei grafi pesati non-orientati, anche se i **Nash Equilibria** esistono sempre, il loro calcolo è PLS-Completo anche per k = 2, poichè il **Max-Cut Game** è un caso speciale.

Un **γ-Nash Equilibrium** è una colorazione tale che nessun giocatore può migliorare il proprio profitto di un fattore (moltiplicativo) di γ cambiando colore.

Per quanto ne sappiamo, ci sono pochi documenti che trattano il problema del calcolo dei **Nash Equilibria** (approssimativi) per i **Graph K-Coloring Games**.

Gli autori mostrano che è possibile calcolare in tempo polinomiale un **(3 + ε)-Nash Equilibrium**, per ogni ε > 0, per i **Max-Cut Games**.

Gli autori inoltre presentano un algoritmo che calcola in tempo polinomiale randomizzato un **constant approximate Nash Equilibrium** per un'ampia classe di grafi non-pesati orientati.