

# Calcolo e performance di equilibri di Nash per il gioco della $k$ -colorazione generalizzata

Valentino Di Giosaffatte

Prof. Gianpiero Monaco

Università degli Studi dell'Aquila

Anno Accademico 2017/2018

# Obiettivi della sperimentazione

- ▶ Calcolo degli equilibri di Nash per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata
- ▶ Analisi delle performance dell'algoritmo per il calcolo delle soluzioni Nash-stabili effettuata attraverso la determinazione del numero di step relativi alle dinamiche di miglioramento
- ▶ Valutazione del benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni Nash-stabili in relazione con il benessere sociale utilitario e egalitario delle soluzioni ottime, utilizzando le definizioni di prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario

# Teoria dei giochi e giochi non-cooperativi

La **teoria dei giochi** è la disciplina scientifica che si occupa dello studio del comportamento e dei processi decisionali di soggetti razionali in un contesto di interdipendenza strategica. L'analisi è incentrata sugli scenari caratterizzati dalla presenza di situazioni di conflitto nelle quali gli attori sono costretti ad intraprendere strategie di cooperazione o competizione.

I **giochi non-cooperativi** definiscono una specifica classe di giochi nella quale i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti di cooperazione, anche normativamente.

Il criterio di comportamento razionale adottato nei giochi non-cooperativi è di carattere individuale ed è denominato **strategia del massimo**. Tale definizione di razionalità va modellare il comportamento di un individuo intelligente e ottimista che si prefigge l'obiettivo di prendere sempre la decisione più vantaggiosa per se stesso.

# Equilibri di Nash

L'equilibrio di Nash è una combinazione di strategie nella quale ciascun giocatore effettua la migliore scelta possibile, seguendo cioè una **strategia dominante**, sulla base delle aspettative di scelta degli altri giocatori.

L'equilibrio di Nash rappresenta un **concetto di soluzione** robusto per i giochi non-cooperativi.

L'equilibrio di Nash rappresenta inoltre una **soluzione stabile**, poiché nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente modificando la propria strategia.

# Definizione formale I

- ▶ Sia  $G$  l'insieme dei **giocatori**, che indicheremo con  $i = 1, \dots, N$
- ▶ Sia  $S$  l'insieme delle **strategie**, costituito da un set di  $M$  vettori  $S_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,j}, \dots, s_{i,M_i})$ , ciascuno dei quali contiene l'insieme delle strategie che il giocatore  $i$ -esimo ha a disposizione, cioè l'insieme delle azioni che esso può compiere (indichiamo con  $s_i$  la strategia scelta dal giocatore  $i$ )
- ▶ Sia  $U$  l'insieme delle **funzioni**  $u_i = U_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N)$  che associano ad ogni giocatore  $i$  il guadagno (detto anche payoff)  $u_i$  derivante da una data combinazione di strategie (il guadagno di un giocatore in generale non dipende solo dalla propria strategia ma anche dalle strategie scelte dagli avversari)

# Definizione formale II

- Un **equilibrio di Nash** per un dato gioco è una combinazione di strategie (che indichiamo con l'apice  $e$ )

$$s_1^e, s_2^e, \dots, s_N^e$$

tale che

$$U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i^e, \dots, s_N^e) \geq U_i(s_1^e, s_2^e, \dots, s_i, \dots, s_N^e)$$

$\forall i$  e  $\forall s_i$  scelta dal giocatore  $i$ -esimo.

# Descrizione del modello



# Nozioni sul problema

- ▶ Il problema di calcolare un equilibrio di Nash su grafi non-orientati pesati è **PLS-Completo**, anche per  $k = 2$ , dato che il gioco del taglio massimo [Max-Cut Game] è un caso speciale del nostro gioco
- ▶ Se  $k = 2$  e i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco del taglio massimo**, celebre gioco PLS-Completo ampiamente trattato in letteratura
- ▶ Se i profitti sono impostati a 0, otteniamo il **gioco della  $k$ -colorazione**



# Risultati teorici

## Proposizione 1

$\forall k$ , ogni gioco della  $k$ -colorazione generalizzata  $(G, K, P)$  finito è convergente

## Teorema 1

Il prezzo dell'anarchia per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è al più 2

## Teorema 2

Il prezzo dell'anarchia utilitario per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è almeno 2, anche per il caso speciale di grafi stella non-pesati

## Teorema 3

Il prezzo dell'anarchia egalitario per il gioco della  $k$ -colorazione generalizzata è 2

# Implementazione I

- ▶ Utilizzo del linguaggio **Python** [Standard Library]
- ▶ Utilizzo della libreria di creazione e manipolazione di grafi **NetworkX** [e altre minori]
- ▶ Costruzione dei moduli per la generazione e per la lettura asincrona di grafi [*generator.py*, *reader.py*]
- ▶ Utilizzo di **strutture dati** efficienti come *liste* e *dizionari* sia in forma singola che innestata [*single or nested list and dictionary comprehension*]
- ▶ Implementazione degli **algoritmi per il calcolo dell'ottimo** con funzioni di benessere sociale utilitaristico e egualitario utilizzando una strategia incentrata sulla forza bruta [privi di tecniche di ottimizzazione delle iterazioni]

# Implementazione II

- ▶ Implementazione dell'**algoritmo per il calcolo della colorazione stabile** seguendo la definizione di equilibrio di Nash utilizzando 3 importanti strategie di ottimizzazione
- ▶ Strategia per il calcolo della **best move** per ciascun nodo, in modo da minimizzare il valore relativo agli step totali effettuati dall'algoritmo durante la ricerca della dinamica [incremento della complessità computazionale]
- ▶ Doppia strategia per il salto delle iterazioni basata sul controllo dei colori e dei miglioramenti effettuati [abbattimento della complessità computazionale]

- ▶ Sviluppo di implementazioni più efficaci per ciò che concerne il calcolo degli ottimi con funzioni di benessere sociale utilitario e egalitario
- ▶ Potrebbero essere utilizzate tecniche di ricerca operativa (ad esempio, mirate a ridurre lo spazio di ricerca dell'ottimo) per abbattere la complessità computazionale derivante dall'approccio a forza bruta
- ▶ Tale miglioria garantirebbe la possibilità di effettuare uno studio più approfondito riguardante la variazione del prezzo dell'anarchia sperimentale utilitario e egalitario per istanze maggiori di quelle analizzate, con esecuzioni effettuate in tempi ragionevoli