(stable outcomes in modified fractional hedonic games) RISULTATI STABILI NEI FRACTIONAL HEDONIC GAMES MODIFICATI

ABSTRACT (RIASSUNTO / SOMMARIO)

Nei **Coalition Formation Games**, le coalizioni auto-organizzate sono create come risultato delle interazioni strategiche di agenti indipendenti.

Per ciascuna coppia di agenti (i, j), il peso w(i, j) = w(j, i) riflette quanto gli agenti i e j beneficiano dall'appartenenza alla stessa coalizione.

Noi consideriamo il **Modified Fractional Hedonic Game**, che è un **Coalition Formation Game** in cui le utilità degli agenti sono tali che il beneficio totale dell'agente i appartenente ad una coalizione (dato dalla somma di w(i, j) su tutti gli altri agenti j appartenenti alla stessa coalizione) è una media su tutti gli altri membri di quella coalizione, cioè, escludendo se stesso.

I **Modified Fractional Hedonic Games** costituiscono una classe di **Hedonic Games** succintamente rappresentabile.

Siamo interessati allo scenario in cui gli agenti, individualmente o in modo congiunto, scelgono di formare una nuova coalizione o di unirsi ad una esistente, fino al raggiungimento di un risultato stabile.

A questo scopo, noi consideriamo nazioni comuni di Stabilità, che portano ai **Nash Stable Outcomes**, **Nash Stable Outcome** o **Core Stable Outcomes** : noi studiamo la loro esistenza, complessità e prestazione, sia nel caso di pesi generali sia in quello di pesi 0 - 1.

In particolare, noi caratterizziamo completamente l'esistenza dei risultati stabili considerati e mostriamo molti risultati stretti o asintoticamente stretti sulle prestazioni di questi **Natural Stable Outcomes** per i **Modified Fractional Hedonic Games**.
Inoltre evidenziamo le differenze rispetto al **Modello dei Fractional Hedonic Games**, nei quali il beneficio totale di un agente in un coalizione è la media su tutti i membri della coalizione, cioè, incluso se stesso.

KEYWORDS (PAROLE CHIAVE)

Coalition Formation Games ; Hedonic Games ; Modified Coalition Formation Games ; Nash Equilibrium; Core ; Price of Anarchy ; Price of Stability

INTRODUCTION (INTRODUZIONE)

Teamwork, raggruppamenti e formazioni di coalizioni sono state questioni importanti e ampiamente investigate nella ricerca in informatica.

Di fatto, in molte situazioni economiche, sociali e politiche, le persone svolgono attività in gruppi piuttosto che da sole.

In questi scenari, è di fondamentale importanza considerare la soddisfazione dei membri dei gruppi.

Gli **Hedonic Games** modellano la formazione di coalizioni di agenti.

Sono giochi in cui gli agenti hanno preferenze sull'insieme di tutte le possibili coalizioni di agenti e in cui l'utilità di un agente dipende dalla composizione del gruppo a cui appartiene.

Mentre il **Modello Standard degli Hedonic Games** presuppone che le preferenze degli agenti rispetto alle coalizioni siano ordinali, ci sono diverse classi importanti di **Hedonic Games** in cui gli agenti assegnano le utilità cardinali alle coalizioni.

Ad esempio, gli **Additively Separable Hedonic Games** costituiscono una classe naturale e succintamente rappresentabile di **Hedonic Games**.

[Additively Separable Hedonic Games]
In tale contesto ogni agente ha un valore per qualsiasi altro agente e l'utilità di una coalizione per un particolare agente è semplicemente la somma dei valori che assegna ai membri della sua coalizione.
(La **Separabilità Additiva** soddisfa un certo numero di proprietà assiomatiche desiderabili)

[Fraction Hedonic Games]
I **Fraction Hedonic Games** sono simili a quelli **Additively Separable**, con la differenza che l'utilità di un agente è divisa per la dimensione della coalizione.

Probabilmente, è più naturale calcolare il valore medio di tutti gli altri membri della coalizione.

Vari concetti di risoluzione, come il Core, lo Strict Core e vari tipi di stabilità individuale come l'equilibrio di Nash, sono stati proposti per analizzare questi giochi.

[Modified Fractional Hedonic Games]
In questo articolo ci occupiamo di **Modified Fractional Hedonic Games [MFHG]**.
Nei **MFHG** in modo leggermente differente rispetto ai **Fractional Hedonic Games** l’utilità di un agente i è divisa per la dimensione della coalizione alla quale i appartiene meno 1, ciò corrisponde effettivamente al valor medio di tutti gli altri membri della coalizione rispetto ad i.

Nonostante questa piccola differenza, mostreremo che i **Natural Stable Outcomes** in **MFHG** hanno prestazioni diverse rispetto a quelle dei **Fractional Hedonic Games**.

Nello specifico noi adottiamo **Nash Stable Outcomes**, **Strong Nash Stable Outcomes** e **Core Stable Outcomes**.

[Nash Stability - Nash Equilibrium]
In modo informale, un risultato è **Nash Stable** (o è un **Equilibrio di Nash**) se nessun agente può migliorare la propria utilità modificando unilateralmente la proprio coalizione.

[Strong Nash Stability]
Inoltre un risultato è **Strong Nash Stable** se nessun sottogruppo di agenti può deviare in maniera cooperativa in un modo che benefici a tutti loro.

[Core - Core Stability]
Infine, un risultato appartiene al **Core** o è **Core Stable**, se non vi è alcun sottoinsieme di agenti T, i cui membri preferiscono tutti T rispetto alla coalizione nel risultato.

Sottolineiamo che, (**Strong**) **Nash Stable Outcomes** sono resilienti a un gruppo di agenti che possono unirsi a qualsiasi coalizione e rappresentano quindi un potente concetto di soluzione.

Tuttavia, ci sono situazioni in cui non è consentito a uno o più agenti di unirsi a una coalizione esistente senza chiedere il permesso ai suoi membri : in queste situazioni la nozione di **Core**, dove, in un risultato non-stabile, un sottoinsieme di agenti T può solo formare una nuova coalizione e non può unirsi a una coalizione già non-vuota, sembra essere più realistico.

Il nostro obiettivo è studiare l'esistenza, le prestazioni e la computabilità di **Natural Stable Outcomes** per **MFHG**.

In particolare, valutiamo le prestazioni di **Nash**, **Strong Nash** e **Core Stable Outcomes** per **MFHG**, attraverso le nozioni largamente usate di **Price of Anarchy** (rispettivamente **Strong Price of Anarchy** e **Core Price of Anarchy**) e **Price of Stability** (rispettivamente **Strong Price of Stability** e **Core Price of Stability**), che sono definiti come il rapporto tra il valore sociale ottimale e il valore sociale del peggior (o miglior) risultato stabile.

Un'istanza di **MFHG** può essere modellato in modo efficace attraverso l'utilizzo di un grafo orientato pesato **G = (N, E, w)**, nel quale i nodi **N** rappresentano gli agenti e il peso **w (i, j)** di un arco **(i, j) ∈ E** rappresenta quanto gli agenti **i** e **j** beneficiano dall'appartenenza alla stessa coalizione.

RELATED WORKS (PUBBLICAZIONI / LAVORI CORRELATI)

[# read only]
[$ init]
Per quanto ne sappiamo, solo pochi articoli riguardavano risultati stabili per gli MFHG.

Olsen considera i Grafi non-orientati non-pesati e indaga sulle questioni computazionali relative al problema di calcolare un Nash Stable Outcomes diverso da quello banale in cui tutti gli agenti si trovano nella stessa coalizione.

L'autore dimostra che il problema è NP-hard quando richiediamo che una coalizione debba contenere un determinato sottoinsieme degli agenti e che è risolvibile polinomialmente per qualsiasi Grafo connesso contenente almeno quattro nodi.

Kaklamanis et al. mostrano che il Price of Stability è 1 per i Grafi non-pesati.

Infine, Elkind et al. studiano l'insieme dei Pareto Optimal Outcomes per gli MFHG.

I Fractional Hedonic Games sono stati introdotti da Aziz et al. .

Dimostrano che il Core può essere vuoto per i games giocati su grafi generici e che è non-vuoto per i games giocati su alcune classi di grafi non-orientati e non-pesati (cioè grafi con grado al massimo 2, grafi completi multipartiti, grafi bipartiti che ammettono un matching perfetto e grafi bipartiti regolari).

Brandl et al. , studiano l'esistenza della stabilità centrale e individuale nei Fractional Hedonic Games e la complessità computazionale di decidere se esiste una partizione stabile centrale e individuale in un dato Fractional Hedonic Game.

Bilò et al. ha avviato lo studio dei Nash Stable Outcomes per i Fractional Hedonic Games e ne studia l'esistenza, la complessità e le prestazioni per le topologie di grafo generali e specifiche.

In particolare mostrano che il Price of Anarchy è $\Theta(n)$, e che per i Grafi non-pesati, il problema di calcolare un Nash Stable Outcomes di massimo benessere sociale è NP-hard, così come il problema di calcolare un risultato ottimo (non necessariamente stabile).

Inoltre, gli stessi autori considerano Grafi non-orientati non-pesati e mostrano che i risultati di 2-Strong Nash, cioè un risultato tale che nessuna coppia di agenti può migliorare la loro utilità cambiando contemporaneamente la propria coalizione, non sono sempre garantiti.

Offrono anche limiti superiori e inferiori al Price of Stability per i games giocati su diverse topologie di Grafi non-pesati.

Infine, Aziz et al. considerano la complessità computazionale del calcolo del benessere massimizzando le partizioni (non necessariamente Nash Stable) per i Fractional Hedonic Games.

Indichiamo che i Fractional Hedonic Games giocati su grafi non-orientati non-pesati modellano scenari economici realistici come quelli di Baker e Miller.

Gli Hedonic Games sono stati introdotti da Dréze e Greenberg, che li hanno analizzati sotto una prospettiva cooperativa.

Proprietà che garantiscono l’esistenza di allocazioni core per giochi con utilità Additively Separable sono stati studiati da Banerjee, Konishi e Sönmez, mentre Bogomolnaia e Jackson [8] si occupano di diverse forme di risultati stabili come Core, Nash e Individual Stability.

Ballester considera le questioni di complessità computazionale legate agli Hedonic Games e mostra che il Core e i Nash Stable Outcomes hanno corrispondenti problemi decisionali

NP-completi per una varietà di situazioni, mentre Aziz et al. studia la complessità computazionale di raggruppamenti stabili (Stable Clustering) in Additively Separable Hedonic Games.

Inoltre, Olsen dimostra che il problema di decidere se un Nash Stable Clustering esiste in un Additively Separable Hedonic Game è NP-completo, così come quello di decidere se un Nash Stable Clustering non-banale esiste in un Additively Separable Hedonic Game con preferenze non-negative e simmetriche (cioè grafi non-orientati non-pesati).

Feldman et al. indagano su alcune sottoclassi interessanti di Hedonic Games dal punto di vista non-cooperativo, caratterizzando i Nash Equilibria e fornendo limiti superiori e inferiori sia sul Price of Stability che sul Price of Anarchy.

Vale la pena notare che nel loro modello non hanno un grafo sottostante, ma gli agenti giacciono in uno spazio metrico con una funzione di distanza che modella la loro lontananza o "somiglianza".

Peters considera i “graphical” Hedonic Games. in cui gli agenti formano i vertici di un grafo non-orientato e la funzione di utilità di ciascun agente dipende solo dalle azioni intraprese dai suoi vicini (con funzioni di valore generali).

È dimostrato che, quando i grafi con agenti hanno gradi e treewidth delimitati, il problema di trovare soluzioni stabili, cioè Nash Equilibria, può essere risolto in modo efficiente.

Infine, anche gli Hedonic Games sono stati considerati da Charikar et al. e da Demaine et al. da un punto di vista dell'ottimizzazione classica (vale a dire, senza richiedere stabilità per le soluzioni).

Peters et al. considera diverse classi di Hedonic Games e identifica semplici condizioni di espressività che sono sufficienti per il problema di controllare se un dato gioco ammetta che un risultato stabile sia computazionalmente difficile.

Da una prospettiva diversa, i meccanismi strategici per gli Additively Separable Hedonic Games e Fractional Hedonic Games sono stati proposti in [numbers].
[$ end]

OUR RESULTS (RISULTATI)

Iniziamo affrontando gli **Strong Nash Stable Outcomes**.

Per prima cosa proviamo che esiste un semplice Grafo stella con pesi sugli archi positivi che non ammette **Strong Nash Stable Outcomes**.

Pertanto ci concentriamo su grafici non-pesati i e presentiamo un algoritmo polinomiale che calcola un risultato ottimale che può essere trasformato in uno **Strong Nash Stable** con lo stesso benessere sociale, implicando che gli **Strong Nash Stable Outcomes** esistono sempre e che lo **Strong Price of Stability** è 1.

Dimostriamo inoltre che lo **Strong Price of Anarchy** è esattamente 2.

In particolare, siamo in grado di dimostrare che, anche per deviazioni cooperative congiunte di almeno 2 agenti, lo **Strong Price of Anarchy** è al massimo 2 (sottolineiamo che, come descriveremo nel prossimo paragrafo, il **Price of Anarchy** per i **Nash Stable Outcomes** che sono resistenti alle deviazioni di un agente, crescono linearmente con il numero di agenti), mentre è almeno di 2 per le deviazioni cooperative congiunte di qualsiasi sottogruppo di agenti.

Successivamente rivolgiamo la nostra attenzione ai **Nash Stable Outcomes**.

Notiamo che i **Nash Stable Outcomes** sono garantiti solo se i pesi sugli archi sono non-negativi.

Proviamo che il **Price of Anarchy** è almeno $\Omega(n)$, dove n è il numero di agenti, anche per i percorsi non-pesati, e che è al massimo n - 1 per il caso più generale di grafi pesati con pesi sugli archi non-negativi, dando così una caratterizzazione asintoticamente stretta.

Dimostriamo anche un limite inferiore corrispondente di $\Omega(n)$ al **Price of Stability**.

Alla fine consideriamo i **Core Stable Outcomes** e mostriamo che questi ultimi esistono sempre, e in particolare che un risultato che è **Core Stable** può essere calcolato in tempo polinomiale, anche in presenza di pesi negativi, cioè per i grafi generali pesati non-orientati.

Quindi stabiliamo che il **Core Price of Stability** è 2.

Dimostriamo inoltre che il **Core Price of Anarchy** è al massimo 4.

Forniamo inoltre un’analisi rigorosa per i grafi non-pesati.

MAIN DIFFERENCES BETWEEN MFGHs AND FRACTIONAL HEDONIC GAMES (DIFFERENZE TRA MODIFIED FRACTIONAL HEDONIC GAMES E FRACTIONAL HEDONIC GAMES)

In parole povere, diciamo che un risultato è un **k-Strong Nash Equilibrium** se nessun sottogruppo di al più k agenti può cambiare le propria strategia congiuntamente in modo che tutti i k agenti migliorino strettamente la loro utilità.

È facile vedere che, per ogni k, k '≥ 2, tale che k' ≥ k, un **k’-Strong Nash Equilibrium** è anche un **k-Strong Nash Equilibrium**.

È noto che non è garantita l’esistenza di **2-Strong Nash Stable Outcomes** per i **Fractional Hedonic Games**, anche per grafi non-pesati.

In questo articolo mostriamo che per **MFHG** riprodotti su grafi non-pesati, un **k-Strong Nash Equilibrium** esiste sempre e può essere calcolato in tempo polinomiale per ogni $1 \leq k \leq n$, dove n è il numero di agenti e forniamo un'analisi stretta sui **Strong Price of Anarchy** e **Strong Price of Stability**.

Sia per **MFHG** che per i **Fractional Hedonic Games**, è garantita l'esistenza di **Nash Stable Outcomes** (o equivalenti a un **1-Strong Nash Stable**) per pesi positivi,ma non per quelli negativi ; inoltre, il **Price of Stability** cresce linearmente con il numero di agenti.

Per i **Fractional Hedonic Games** giocati su grafi non-pesati, è noto che il **Price of Stability** è maggiore di 1 anche per i grafi semplici e che il calcolo di un ottimo è NP-hard.

Per i **MFHG** mostriamo che è possibile calcolare in tempo polinomiale uno **Strong Nash Equilibrium** che sia anche ottimo.

Infine, è noto che il **Core** può essere vuoto anche per i **Fractional Hedonic Games** giocati su grafi non-pesati e che decidere la sua esistenza è un problema NP.hard.

In questo articolo mostriamo che per gli **MFHG** il **Core** non è vuoto per nessun grafo e che un **Core Stable Outcome** può essere calcolato in tempo polinomiale.

Forniamo inoltre un'analisi stretta e quasi rigorosa per il **Core Price of Stability** e per il **Core Price of Anarchy**, rispettivamente.

PRELIMINARIES (PRELIMINARI)

Per un intero k > 0, denotiamo con [k] l'insieme { 1, … ., K }.

Modelliamo un **Coalition Formation Games** per mezzo di un grafo non-orientato.

Per un grafo non-orientato pesato G = (N, E, w), denotiamo con |N| il numero dei suoi nodi.

Adottiamo la notazione (i, j) e w(i, j) per indicare l'arco { i, j } e il suo peso w({ i, j }), rispettivamente.

Denotiamo con δ i (G), la somma di tutti i pesi degli archi incidenti ad i.

Denotiamo con max δ i (G), il massimo peso degli archi incidenti ad i.

Dato un sottoinsieme X di archi (X ⊆ E), denotiamo con W(X) il peso totale degli archi in X.

Dato un sottoinsieme S di nodi (S ⊆ N), Gs = (S, Es) è il sottografo di G indotto dall'insieme S.

Dato un grafo G = (N, E, w), il **MFHG** da G viene indicato come G(G) ed è il gioco in cui a ogni nodo i ⊆ N è associato un agente.

Assumiamo che gli agenti sono numerati da 1 a n, per ogni i ∈ [n], ogni agente sceglie di unirsi a una certa coalizione tra n candidati: la strategia dell'agente i è un intero j ∈ [n], che rappresenta che l'agente i sta selezionando la coalizione candidata Cj.

Una struttura di coalizione (chiamata anche outcome o partizione) è una partizione dell'insieme di agenti all'interno degli n che compongono la coalizione C = { C1, C2, … ., Cn } tale che Cj ⊆ N per ogni j ∈ [n], U j ∈ [n] Cj = N e Ci ∩ Cj = ∅ per ogni i, j ∈ [n] con i ≠ j. (Si noti che, poiché il numero di coalizioni candidate è uguale al numero di agenti (nodi), alcune coalizioni potrebbero essere vuote).

Se i ∈ Cj , noi diciamo che l'agente i è membro della coalizione Cj.

Denotiamo con C(i) la coalizione in C della quale l'agente i è membro.

In un outcomes C, l'utilità dell'agente i è definita come u i (C) e corrisponde alla somma di tutti i pesi degli archi dei nodi adiacenti ad i (appartenenti a C) meno i stesso.

Per ogni outcome C, u i (C) <= max δ i (sempre) (ciascun agente sceglie la coalizione alla quale appartenere con l'obiettivo di massimizzare la propria utilità).

Denotiamo con (C, i, j) una nuova coalizione ottenuta da C muovendo l'agente i da C(i) a Cj.

Un agente devia se cambia la coalizione alla quale appartiene.

Dato un risultato C, una mossa migliorativa (o semplicemente una mossa) per l'agente i è una deviazione verso una qualsiasi coalizione Cj che aumenta strettamente la sua utilità, cioè, ui ((C, i, j)) > ui (C).

Inoltre, l'agente i porta una best-response in un cluster C scegliendo un cluster che gli fornisca la massima utilità possibile (notare che una migliore risposta è anche una mossa quando esiste una coalizione Cj tale che ui ((C, i, j))> ui (C)).

Un agente è stabile se non può eseguire una mossa.

Un risultato è un **(puro) Nash Stable (o Nash Equilibrium)** se ogni agente è stabile.

Una dinamica di miglioramento, o semplicemente una dinamica, è una sequenza di mosse, mentre una dinamica di best-response è una sequenza di best-responses.

Un gioco ha la proprietà del percorso di miglioramento finito se non ammette una dinamica di miglioramento di lunghezza infinita.

Chiaramente, un gioco che possiede la proprietà del percorso di miglioramento finito ammette sempre un **Nash Stable Outcome.**

Denotiamo con N(G(G)) l'insieme dei **Nash Stable Outcomes** di G(G).

Un risultato C è un **k-Strong Nash Equilibrium** se, per ogni C' ottenuto da C, quanto un sottogruppo di al più k agenti K ⊆ N (con |K| ≤ k) cambiano congiuntamente (o deviano dalle) le proprie strategie (non necessariamente selezionando la stessa coalizione candidata), ui (C) ≥ ui (C′) per alcuni agenti i appartenenti a K, cioè, dopo la deviazione collettiva, esiste sempre un agente nell'insieme di quelli che deviano che non migliora la propria utilità.

Denotiamo con k-SN(G(G)) l'insieme dei **Nash Stable Outcomes** di G(G)

Diciamo semplicemente che un risultato C è uno **Strong Nash Equilibrium** se C è un **n-Strong Nash Equilibrium**.

È facile vedere che, per qualsiasi grafo G e qualsiasi $k \geq 2$, k-SN(G(G)) $\subseteq$ k-1-SN(G(G)), mentre viceversa non è in generale.

Chiaramente, 1-SN(G(G)) = N(G(G)).

In modo analogo alla nozione di **Nash Equilibrium**, anche per gli **Strong Nash Equilibria** è possibile determinare una dinamica come una sequenza di movimenti miglioranti, in cui ogni mossa eseguita da agenti in K che conduce dal risultato C al risultato C' è tale che tutti gli agenti migliorano la loro utilità, cioè $u_i(C') > u_i(C)$ per ogni $i \in K$.

Diciamo che una coalizione $T \subseteq N$ blocca fortemente un risultato C, se ogni agente $i \in T$ preferisce rigorosamente T, cioè migliora rigorosamente la propria utilità rispetto alla sua attuale coalizione C(i).

Un risultato che non ammette una coalizione fortemente bloccante è chiamato **Core Stable** e si dice essere nel **Core**.

Denotiamo con CR(G(G)) il **Core** di G(G).

Il benessere sociale di una struttura di coalizione C è la somma delle utilità degli agenti, SW(C). Sovraccarichiamo la funzione di benessere sociale applicandola anche ai singoli cluster per ottenere il loro contributo al benessere sociale.

Dato un gioco G(G), una struttura di coalizione ottimale C*(G(G)) è una struttura che massimizza il benessere sociale di G(G). Il **Price of Anarchy** (rispettivamente **Strong Price of Anarchy** e **Core Price of Anarchy**) di un **MFHG** G(G) è definito come il rapporto peggiore tra il benessere sociale di un risultato sociale ottimale e quello di un **Nash Equilibrium** (rispettivamente **Strong Nash Equilibrium** e **Core**).

In modo analogo, il **Price of Stability** (rispettivamente **Strong Price of Stability** e **Core Price of Stability**) fi G(G) è definito come il miglior rapporto tra il benessere sociale di un risultato sociale ottimale e quello di un **Nash Equilibrium** (rispettivamente **Strong Nash Equilibrium** e **Core**).

STRONG NASH STABLE OUTCOMES (FORTI RISULTATI NASH-STABILI)

In questa sezione consideriamo gli **Strong Nash Stable Outcomes**.

Iniziamo dimostrando che anche l'esistenza di **2-Strong Nash Equilibria** non è garantita per i grafi con pesi sugli archi non-negativi.

Teorema 3.1.

> *Esiste un grafo stella G contenente solo pesi sugli archi non-negativi in modo tale che {G (G)} non ammetta un **2-Strong Nash Stable Outcome**.*

Dato il risultato negativo sopra riportato, nel resto di questa sezione, ci concentriamo su grafi non-pesati.

Siano K1, K2 e K3 le cricche non-pesate con 1, 2 e 3 nodi, rispettivamente, cioè K1 è un nodo isolato, K2 ha 2 nodi e un arco univoco e K3 è un triangolo con 3 archi.

Chiamiamo basica una coalizione isomorfa a K1, K2 o K3.

STRONG PRICE OF STABILITY (FORTE PREZZO DI STABILITÀ)

In questa sottosezione mostriamo che, per i grafi non-pesati, è possibile calcolare in tempo polinomiale un risultato ottimale e anche uno **Strong Nash Outcome** con lo stesso valore sociale.

Di conseguenza otteniamo che lo **Strong Price of Stability** è 1.

Per mostrare come calcolare in tempo polinomiale una soluzione ottimale, abbiamo prima bisogno di alcuni lemmi aggiuntivi.

***Lemma 3.2.* [w/ proof on paper]**

> *Data una coalizione C con |C| ≥ 4. esiste un arco e=(i, j) appartenente a EC tale che SW({i, j}) + SW(C \ {i, j}) ≥ SW(C)*

Ora siamo pronti a dimostrare il seguente teorema, dimostrandolo è possibile considerare, senza diminuire il benessere sociale dei risultati, solo le strutture di coalizione formate da coalizioni di base.

***Teorema 3.3.* [w/ proof on paper]**

> *Per qualsiasi struttura di coalizione C, esiste una struttura di coalizione C' contenente solo le coalizioni di base e quindi quella SW(C') ≥ SW(C).*

Per il Teorema 3.3, al fine di calcolare una soluzione ottimale per il problema di generazione della struttura di coalizione (cioè, un risultato che massimizza il benessere sociale), è possibile sfruttare un risultato del

Teorema 3.4.

Dato un grafi G non-pesato, è possibile calcolare in tempo polinomiale una partizione dei nodi di G in insiemi che inducono sottografi isomorfi a K1, K2 oK3 (cioè una struttura di coalizione composta da coalizioni di base) massimizzando il numero di nodi appartenenti a insiemi che inducono sottografi isomorfi a K2 o K3.

Infatti, combinando i Teoremi 3.3 e 3.4 è possibile provare il seguente risultato.

Teorema 3.5. **[w/ proof on paper]**

Dato un grafi G non-pesato, esiste un algoritmo polinomiale per calcolare una struttura di coalizione C massimizzando il benessere sociale.*

Teorema 3.6. **[w/ proof on paper]**

Dato un grafi G non-pesato, esiste un risultato C ∈ n−SN e tale che SW(C) = SW(C).*

Come conseguenza diretta del Teorema 3.6, vale il seguente corollario :

Corollario 3.7.

Per qualsiasi grafo non-pesato G e qualsiasi k = 1, … ., n, k-SPoS(G(G)) = 1.

STRONG PRICE OF ANARCHY (FORTE PREZZO DI ANARCHIA)

In questa sezione studiamo lo **Strong Price of Anarchy** per grafi non-pesati.

Teorema 3.8.

Dato qualsiasi $\epsilon > 0$, esiste un grafo non-pesato G tale che n-SPoA(G(G)) ≥ $2 - \epsilon$.

Teorema 3.9. **[w/ proof on paper]**

Per ogni grafo non-pesato G, 2-SPoA(G(G)) ≤ 2.

Dai Teoremi 3.8 e 3.9, otteniamo immediatamente il seguente risultato :

Corollario 3.10.

*Lo **Strong Price of Anarchy** per grafi non-pesati è 2.*

NASH STABLE OUTCOMES (RISULTATI NASH-STABILI)

In questa sezione consideriamo i **Nash Stable Outcomes**. Iniziamo mostrando che esiste un grafo G contenente archi con pesi negativi tale che il gioco indotto da G non ammette **Nash Stable Outcomes**.

Teorema 4.1.

> *Esiste un grafo G contenente archi con pesi negativi tale che G(G) non ammette **Nash Stable Outcomes**.*

Mostriamo inoltre che esiste una dinamica di lunghezza infinita per i games giocati su grafi non-pesati.

***Teorema 4.2.* [w/ proof on paper]**

> *Esiste un grafo non-pesato G tale che G(G) non possiede la proprietà del percorso di miglioramente finito, anche nelle dinamiche di best-response.*

Nonostante i risultati negativi dei Teoremi precedenti, è facile vedere che, se a il grafo G non contiene pesi negativi, quindi il gioco indotto da G ammette un **Nash Equilibrium**, che è il risultato in cui tutti gli agenti si trovano nella stessa coalizione.

Pertanto, nelle sottosezioni seguenti, caratterizziamo l'efficienza dei **Nash Stable Outcomes** nei **MFHG** giocati su grafi generali con pesi sugli archi non-negativi.

Per definizione, abbiamo $1 \leq PoS \leq PoA$.

PRICE OF ANARCHY (PREZZO DI ANARCHIA)

Per prima cosa dimostriamo che il **Price of Anarchy** cresce in modo lineare con il numero di agenti, anche per il caso speciale di percorsi non-pesati.

Teorema 4.3.

> *Esiste un cammino non-pesato G tale che $PoA(G(G)) = \Omega(n)$.*

Siamo in grado di mostrare un limite superiore asintoticamente corrispondente, utilizzando grafi pesati (positivi).

Teorema 4.4.

Per ogni grafo pesato G con pesi sugli archi non-negativi, $PoA(G(G)) \leq n - 1$.

PRICE OF STABILITY (PREZZO DI STABILITÀ)

Da un lato, avendo dimostrato nel Corollario 3.7 che, per lo scenario di grafi non-pesati, lo **Strong Price of Stability** è 1, ne consegue direttamente che anche il **Price of Stability** è 1 in questo scenario, perché ciascun **Strong Nash Equilibrium** è anche un **Nash Equilibrium**.

D'altra parte, nel caso pesato, dato il limite superiore al **Price of Anarchy** fornito nel Teorema 4.4, il seguente Teorema mostra un connesso limite inferiore asintotico al **Price of Stability**.

Questo risultato integra quello presentato in [20], in cui gli autori mostrano che il **Price of Stability** è 1 (senza considerare i problemi di complessità).

In particolare, rispetto al risultato in [20], la diversa caratterizzazione dell'ottimo fatto nel Teorema 3.3 ci consente di calcolare prima un risultato che massimizza il benessere sociale e quindi di trasformare questo risultato ottimale in uno **Nash Stable** senza peggiorare il suo benessere sociale.

Teorema 4.5.

Esiste un grafo stella pesato G con pesi sugli archi non-negativi tale che $PoS(G(G)) = \Omega(n)$.

CORE STABLE OUTCOMES (RISULTATI CORE-STABILI)

In questa sezione consideriamo il **Core** di **MFHG**. Per prima cosa mostriamo che per ogni grafo G, il **Core** del gioco G(G) non è vuoto, e che un **Core Stable Outcome** che si avvicina al benessere sociale ottimale di un fattore 2 può essere calcolato in tempo polinomiale.

Teorema 5.1. **[w/ proof on paper]**

*Dato un qualsiasi grafo G = (N, E, w), esiste un algoritmo che permetta di calcolare in tempo polinomiale una struttura di coalizione **Core Stable** C tale che $SW(C) \geq \frac{1}{2} SW(C^*(G(G)))$ e che tutte le coalizioni in C abbiano cardinalità di al massimo 2.*

Come conseguenza diretta del Teorema 5.1, si ottiene il seguente corollario :

Corollario 5.2.

Per ogni grafo G. $CPoS(G(G)) \leq 2$.

Ora mostriamo un limite inferiore corrispondente sul CPoS per il caso di grafi pesati.

Teorema 5.3. **[w/ proof on paper]**

Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un grafo pesato G tale che CPoS(G(G)) ≥ 2 − ϵ.

Per i grafi non-pesati, è facile vedere che il risultato ottimale prodotto nel Teorema 3.6. è anche **Core Stable**, e quindi vale la seguente proposizione :

Proposizione 5.4.

Dato qualsiasi grafo non-pesato G, CPoS(G(G)) = 1.

Siamo inoltre in grado di dimostrare un limite superiore costante al **Core Price of Anarchy**.

Teorema 5.5. **[w/ proof on paper]**

Per ogni grafo G, CPoA(G(G)) ≤ 4.

Per i grafi non-pesati otteniamo la seguente caratterizzazione stretta sul **Core Price of Anarchy**.

Teorema 5.6. **[w/ proof on paper]**

Dato qualsiasi grafo non-pesato G, CPoA(G(G)) = 2.

CONCLUSIONS (CONCLUSIONI)

Notiamo che si potrebbero considerare i **Relaxed Strong Nash Stable Outcomes** e gli **Strict Core Outcomes**, dove tra gli agenti che si allontanano in modo cooperativo, non tutti peggiorano la propria utilità, e almeno uno di essi ottiene un'utilità strettamente migliore.

Tuttavia, questi risultati stabili non esistono nemmeno per istanze molto semplici. In effetti, se G è un percorso non-pesato di 3 nodi, (G (G)) non ammette **Relaxed Strong Nash Stable Outcomes** così come non ammette **Strict Core Outcomes**.

Ci sono alcuni problemi aperti suggeriti dal nostro lavoro. Prima di tutto, sarebbe bello colmare il divario tra il limite inferiore di 2 per il **Core Price of Stability** e il limite superiore di 4 per il **Core Price of Anarchy**, e studiare la complessità del calcolo di un risultato ottimale quando il grafo è ponderato.

Un'altra direzione di ricerca potrebbe essere quella di progettare meccanismi veritieri per **MFHG** che si comportano bene rispetto alla somma delle utilità degli agenti.

Infine, sarebbe interessante adottare un benessere sociale diverso da quello considerato in questo documento. Un esempio potrebbe essere quello di massimizzare l'utilità minima tra gli agenti.