Vektorgeometrie

Tobias Kohn

Kantonsschule Zürcher Oberland, Wetzikon

Herbstsemester 2012

Vorrede

Dieses Script enthält eine Einführung in die Vektorgeometrie und richtet sich an Schüler des 11. Schuljahres. Es wird vorausgesetzt, dass die Schüler bereits mit der Trigonometrie (incl. Cosinussatz) und dem Koordinatensystem in 2 und 3 Dimensionen vertraut sind.

Quizfragen Jeder Abschnitt endet mit einem kurzen Quiz. Bei diesen Quizfragen soll der Leser in der Regel eine oder mehrere (!) Antworten ankreuzen. Zur schnellen Kontrolle finden sich die Lösungen jeweils am Ende des Kapitels.

Aufgaben Die eingestreuten Aufgaben decken nur einen Grundstock ab und müssen durch ein zusätzliches Aufgabenbuch ergänzt werden. Zu den meisten Aufgaben finden sich ebenfalls die Lösungen am Ende des Kapitels.

Literatur

[1] Bachmann, Heinz: Vektorgeometrie. Theorie, Aufgaben, Ergebnisse, Oberentfelden 2006 (22. Auflage)

[2] Bigalke, Anton; Köhler, Norbert (Hrsg): Mathematik Band 2. Analytische Geometrie und Stochastik, Berlin 2007

[3] Buck, Norbert et al: Aufgabensammlung. Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Hannover 1998

[4] DMK (Deutschschweizerische Mathematikkomission) (Hrsg): Vektoren. Raumvorstellung – Kalkül – Anwendung, Zürich 2009

[5] Frommenwiler, Peter; Studer, Kurt: Mathematik für Mittelschulen. Geometrie, Aarau 2003

[6] Gubler, Gerhard; Kradolfer, Peter: Vektorgeometrie. Erweiterte Unterrichtsformen in der Mathematik, Aarau 1999

[7] Marthaler, Hans; Jakob, Benno; Schudel, Katharina: Mathematik II. Geometrie für Berufsmaturitätsschulen, Bern 2008

[8] Rhyn, Erhard: Trigonometrie und Vektorgeometrie, Basel 2008

[9] Schüpbach, Christine: Vektorgeometrie, Script KZO

[10] Siegerist, Fritz; Wirth, Karl: Vektorgeometrie. Skript für den Unterricht, Zürich 1997

Inhalt

1 Vektoren

Inhalte dieses Kapitels

Dieses Kapitel führt dich in die wichtigsten Grundbegriffe ein. Dazu gehören etwa *Vektor*, *Skalar*, *Betrag* und *Gegenvektor*. Du lernst auch, mit Vektoren konstruktiv (zeichnerisch) zu arbeiten.

Verschiedene Themen und Probleme, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, werden später wieder aufgegriffen und vertieft. Dazu gehören zum Beispiel das Arbeiten mit *Geraden* oder die *Projektion* eines Vektors auf eine Gerade.

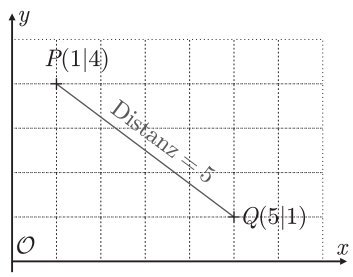
1.1 Einführung

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist ein *Vektor*?
- ⋆ Was ist der wesentliche Unterschied zwischen einem *Vektor* und einer *Zahl* bzw. einem *Punkt*?
- ⋆ Was bedeutet der Begriff *Skalar* und warum verwenden wir ihn?

Mit Hilfe des Koordinatensystems kannst du die Position von Punkten durch Zahlen ausdrücken. Du kannst dann auch Aussagen machen wie:

> *Die Distanz zwischen* $P(1|4)$ *und* $Q(5|1)$ *beträgt* 5 *Einheiten.*



Dank dem Koordinatensystem können wir Punkte mit Zahlen beschreiben.

Die Distanz ist aber ein recht grobes Mass. Schliesslich hat auch $R(-3|9)$ die Distanz 5 zu P, und daneben noch unendlich viele andere Punkte (sie liegen alle auf einem Kreis um P). Was der Distanz noch fehlt ist eine *Richtung*.

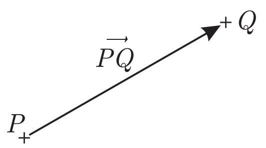
Genauer ist daher die folgende Aussage:

> *Der Unterschied zwischen $P(1|4)$ und $Q(5|1)$ beträgt* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Jetzt weisst du genau, dass du zu den Koordinaten von P 4 dazu- bzw. 3 abzählen musst, um auf Q zu kommen. Zwar kannst du die Distanz nicht mehr auf einen Blick ablesen. Aber der Satz des Pythagoras liefert recht schnell:

$$d = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Der obige „Unterschied" $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ein Beispiel für einen *Vektor*. Mit einer Zahl alleine kannst du nur den Abstand zwischen zwei Punkten angeben. Der Vektor gibt den Abstand *und die Richtung* an. Im zweidimensionalen braucht es dazu 2 Zahlen, um dreidimensionalen sind es 3 Zahlen. Du lernst in diesem Script, mit Vektoren zu arbeiten.

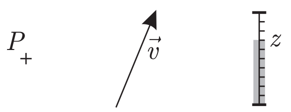


Ein Vektor $\overrightarrow{PQ}$ gibt genau an, wo ein Punkt Q relativ zu einem ersten Punkt P liegt.

Achtung: Vektoren sind keine Punkte! Schreibe deshalb die Zahlen eines Vektors immer übereinander – $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – und die Zahlen eines Punktes immer nebeneinander – $(a|b)$ oder (a, b). Wo liegt der Unterschied? Punkte geben einen festen *Ort* an, Vektoren eine *Richtung* und eine *Entfernung* bzw. *Distanz*. Vektoren geben also an, wie du von einem Punkt zu einem anderen kommst.

Ein zweiter Unterschied: Mit Vektoren kannst du rechnen (um das geht es in diesem Script ja), aber nicht mit Punkten. Wir betreiben hier Vektorgeometrie und nicht Punktgeometrie.

Vektoren und Skalare Du wirst im Zusammenhang mit Vektoren immer wieder auf den Begriff *Skalar* (Zahl) treffen. Im Unterschied zum Vektor (mit Richtung und Entfernung) ist ein Skalar „nur eine einfache Zahl." Für einen Vektor brauchst du immer mehrere Zahlen (2 oder 3), während ein Skalar wirklich nur eine Zahl ist. Wir verwenden den Begriff *Skalar*, um diese Unterscheidung deutlich zu machen.



Drei unterschiedliche Objekte: Punkt, Vektor und Skalar. Die Bezeichnung „Skalar" leitet sich von „Skala" ab.

Zum Beispiel legen wir in der Aussage „Du kannst einen Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar s multiplizieren" Wert darauf, dass s eine einzelne Zahl sein *muss* und *kein* Vektor sein darf.

Schreibweisen Um bei einer Variable deutlich zu machen, dass es sich um einen *Vektor* handelt, schreiben wir ein kleines Pfeilchen auf die Variable drauf: Zum Beispiel $\vec{v}$ für den Vektor „v“. Diese Pfeilchen verwenden wir auch, wenn der Vektor von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B führt: $\overrightarrow{AB}$.

Wenn wir mit der Länge eines Vektors rechnen wollen, dann brauchen wir Betragsstriche: $|\vec{v}|$ bezeichnet also die Länge des Vektors $\vec{v}$. Entsprechend hiesse dann $|\vec{a}| = 4.5$, dass der Vektor $\vec{a}$ eine Länge von 4.5 Einheiten hat.

Neben diesen Schreibweisen sind je nach Buch oder Script noch weitere üblich. Meistens gibt der Autor ganz am Anfang des Buches an, wie er Vektoren schreibt. Verbreitet ist etwa, Vektoren fett zu machen $\vec{a} = \mathbf{a}$.

$\vec{p}, \qquad \overrightarrow{PQ}$

Die Pfeilchen auf den Variablen zeigen immer nach rechts und sind nötig, um Vektoren von Skalaren und Strecken zu unterscheiden. Du darfst die Pfeilchen also nicht *weglassen.*

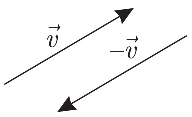
Quiz

1. Ein Vektor hat hat folgende Eigenschaften:
   - ☐ a. Richtung,
   - ☐ b. Ort,
   - ☐ c. Entfernung/Länge,
   - ☐ d. Krümmung.
2. Von einem Punkt A aus führt ein Vektor:
   - ☐ a. Zu unendlich vielen weiteren Punkten (auf einem Kreis um A),
   - ☐ b. Zu genau zwei Punkten B und B',
   - ☐ c. Zu genau einem Punkt B,
   - ☐ d. Keines der obigen ist richtig.
3. Richtig oder Falsch? Du kannst mit Vektoren und Punkten gleichermassen rechnen.

1.2 Strecken und Pfeile

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist ein *Gegenvektor*?
- ⋆ Worin unterscheiden sich *Vektoren* und *Strecken*?
- ⋆ Was ist ein *Repräsentant*?



Ein Minuszeichen kehrt die Richtung eines Vektors um.

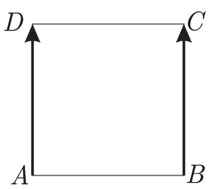
Wie eine Strecke verbindet ein Vektor zwei Punkte A und B. Im Unterschied zur Strecke hat der Vektor aber eine eindeutige Richtung. Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ von A *nach* B ist *nicht* der selbe Vektor wie $\overrightarrow{BA}$ von B *nach* A. Bei *Strecken* gilt dagegen $\overline{AB} = \overline{BA}$. Der Pfeil auf $\overrightarrow{AB}$ zeigt die Richtung eindeutig an.

Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ heisst der *Gegenvektor* zu $\overrightarrow{AB}$. Schliesslich geht $\overrightarrow{BA}$ genau in die entgegengesetzte Richtung. Natürlich ist $\overrightarrow{AB}$ auch der Gegenvektor von $\overrightarrow{BA}$. Wir schreiben das so:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Es gilt also: Ein Minuszeichen vor dem Vektor kehrt die Richtung des Vektors um.

Vektoren und Pfeile Du kannst dir einen Vektor zunächst als einen Pfeil vorstellen, der von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B führt. Dieser Pfeil gibt die Entfernung und die Richtung an, in der A und B voneinander liegen. Anstatt von der *Entfernung zwischen A und B* sprechen wir auch von der *Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$*. Der Fachbegriff für *Länge* lautet *Betrag*.



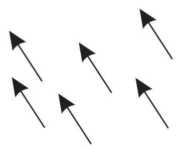
Im Quadrat gilt: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Wo ein Vektor sich dabei befindet, spielt keine Rolle: Vektoren sind wie Strecken *ortsunabhängig*. Das ist auch ein Unterschied zu Punkten (die an einen festen Ort gebunden sind). Im Quadrat $\square ABCD$ gilt also:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \qquad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Aber im Gegensatz zu den Strecken ist $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AB}$. Diese beiden Vektoren zeigen in unterschiedliche Richtungen.

Alle Pfeile mit der selben Länge und der selben Richtung entsprechen ein und demselben Vektor. Oder anders ausgedrückt: Ein Vektor besteht aus allen Pfeilen mit der gleichen Richtung und der gleichen Länge. In einem Mathematikbuch findest du etwa folgende Definitionen („Klasse“ ist ein anderes Wort für „Menge“):



Ein Vektor schliesst alle *Pfeile mit der gleichen Richtung und der gleichen Länge mitein.*

Definition (Siegerist, Wirth) *Die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung heisst ein* ***Vektor****. Die einzelnen Pfeile nennt man* ***Repräsentanten*** *des Vektors.*

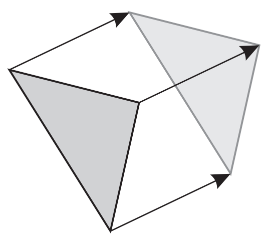
Definition (Bigalke, Köhler) *Wir fassen alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklasse bezeichnen wir als einen* ***Vektor*** *in der Ebene (im Raum).*

Definition (Marthaler, Jakob, Schudel) *Ein Vektor* $\vec{a}$ *ist eine Pfeilklasse, das heisst, die Menge aller paralleler, gleich gerichteter und gleich langer Pfeile.*

Ein Vektor kann durch einen Pfeil dargestellt werden, der beliebig parallel verschoben werden darf.

Definition (Gubler, Kradolfer) *Grössen, deren Werte durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, heissen* ***Skalare****. Beispiele sind: Masse, Temperatur, Arbeit. Die Grössen dagegen, die durch eine Zahlangabe und zusätzlich eine Richtung im Raum charakterisiert sind, nennt man* ***Vektoren****. Beispiele sind: Geschwindigkeitsvektoren oder Kräfte.*

Vektoren und Translationen Neben diesen Definitionen oben gibt es noch eine andere beliebte Möglichkeit, Vektoren zu definieren: Über Translationen.



Bei einer Translation werden alle Punkte um den gleichen Betrag und in die gleiche Richtung verschoben.

Eine Translation ist eine Verschiebung. Wird eine Figur verschoben, dann verschieben sich alle Punkte der Figur in die *gleiche Richtung* und um den *gleichen Betrag*. Damit lässt sich eine Translation bzw. Verschiebung hervorragend durch einen Vektor ausdrücken. Auch hier gilt wieder: Alle Verschiebungspfeile stellen denselben Vektor dar.

Quiz

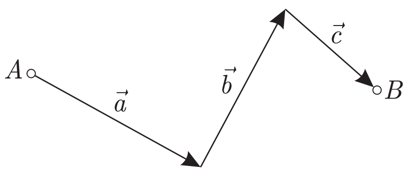
4. Welche Eigenschaften haben Strecken und Vektoren gemeinsam?
   - ☐ a. Länge,
   - ☐ b. Eindeutige Richtung,
   - ☐ c. Ortsunabhängigkeit,
   - ☐ d. Farbe,
   - ☐ e. Beide geben eine Entfernung an.
5. Der Gegenvektor zu $\overrightarrow{PQ}$:
   - ☐ a. Zeigt in die Gegenrichtung von $\overrightarrow{PQ}$,
   - ☐ b. Entspricht dem Vektor $\overrightarrow{QP}$,
   - ☐ c. Zeigt immer nach links.
6. Richtig oder Falsch? Der Betrag eines Vektors $\overrightarrow{PQ}$ gibt die Distanz zwischen den beiden Endpunkten P und Q an.
7. Ein Repräsentant ist:
   - ☐ a. Ein Pfeil eines Vektors,
   - ☐ b. Dasselbe wie ein Vektor,
   - ☐ c. Die Richtungsangabe eines Vektors,
   - ☐ d. Die Längenangabe eines Vektors.
8. Mit einem Vektor lässt sich besonders gut eine ______ darstellen.
   - ☐ a. Drehung,
   - ☐ b. Verschiebung,
   - ☐ c. Spiegelung,
   - ☐ d. Zentrische Streckung.

1.3 Rechnen mit Vektoren

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie *addierst* und *subtrahierst* du Vektoren konstruktiv?
- ⋆ Was besagen *Kommutativ-* und *Assoziativgesetz*?
- ⋆ Wann sind zwei Vektoren *kollinear* zueinander?

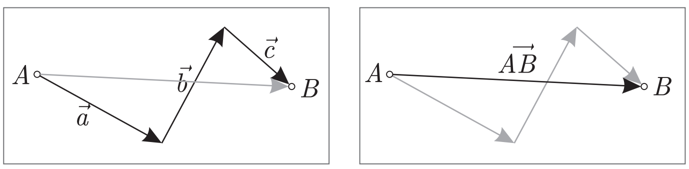
Vektoren sind ortsunabhängig. Das heisst: Du kannst sie beliebig verschieben. Genau das nutzen wir aus, um Vektoren zu *addieren*. Bei einer Addition von Vektoren hängen wir Vektoren zusammen, um einen Weg zu bilden.

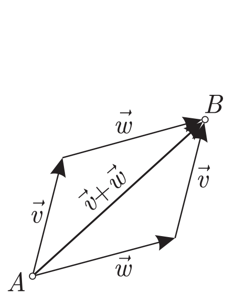


In diesem Fall haben wir die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zusammengehängt und sind damit vom Punkt A zum Punkt B gekommen. Damit gilt:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}.$$

Wir könnten die drei Vektoren auch durch einen einzigen *Summenvektor* $\overrightarrow{AB}$ ersetzen:



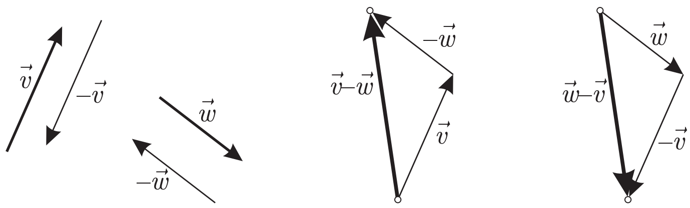


Mit zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kannst du ein Parallelogramm formen. Dann entspricht die Diagonale der Summe $\vec{v}+\vec{w}$.

Oft wird die Summe von zwei Vektoren mit einem Parallelogramm dargestellt. Die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bilden dann die Seiten und die Diagonale entspricht der Summe $\vec{v}+\vec{w}$.

Am Parallelogramm siehst du, dass die *Reihenfolge*, in der du Vektoren zusammensetzst, keine Rolle spielt: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$. Diese Gesetzmässigkeit heisst *Kommutativgesetz*.

Subtraktion Vektoren lassen sich auch *subtrahieren*. Und zwar weisst du bereits, dass ein Minuszeichen die Richtung eines Vektors umdreht (siehe *Gegenvektor*). Beim Subtrahieren verwenden wir daher den entsprechenden Gegenvektor. Ansonsten hängen wir Vektoren genauso zusammen wie bei der Addition.



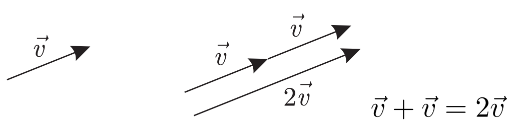
Du siehst hier auch, dass die Subtraktion *nicht kommutativ* ist: $\vec{v} - \vec{w} \neq \vec{w} - \vec{v}$. Es spielt also eine Rolle, welchen Vektor du umdrehst. Das Minuszeichen gehört immer zum Vektor rechts.

Mathematisch definieren wir die Subtraktion mit der Addition und dem Gegenvektor als:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}).$$

(Die Subtraktion $\vec{v} - \vec{w}$ entspricht der Summe von $\vec{v}$ und dem Gegenvektor von $\vec{w}$).

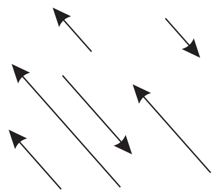
Streckungen und Kollinearität Indem du mehrmals den gleichen Vektor zusammenaddierst, kannst du einen Vektor auch *strecken*:



Kannst du dir vorstellen, was demnach $1.5\vec{v}$ bedeutet? Füge diesen Vektor oben hinzu, indem du ihn konstruierst.

Wenn du einen Vektor mit einem Skalar s (einer reellen Zahl) multiplizierst, dann wird der Vektor *gestreckt*. Ist der Skalar s negativ ($s < 0$), dann wird der Vektor auch noch gespiegelt: Er ändert seine Richtung (bzw. wird zum Gegenvektor).

Vektoren mit der gleichen Richtung heissen *kollinear*. Du kennst bereits einen anderen Begriff, der fast das gleiche bedeutet: *parallel*. Zwei kollineare Vektoren sind also im Prinzip „parallel" zueinander. Allerdings bezieht sich parallel eben auf Geraden und nicht auf Vektoren.



Vektoren, die in die gleiche Richtung zeigen, heissen kollinear. Dazu gehören auch Gegenvektoren.

Wenn zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind, dann kannst du immer den einen so strecken, dass er gleich wird wie der andere. Oder: Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann kollinear, wenn es eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{u} \cdot s = \vec{v}$ oder $\vec{u} = s \cdot \vec{v}$.

Assoziativgesetz Eine Summe von 3 Vektoren kannst du auf zwei Arten zusammenrechnen: Von links nach rechts oder von rechts nach links:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\underbrace{(\vec{a} + \vec{b})} + \vec{c} \qquad = \qquad \vec{a} + \underbrace{(\vec{b} + \vec{c})}$$

Egal, wie du's machst: Das Ergebnis ist das gleiche! Diese Gesetzmässigkeit heisst *Assoziativgesetz*.

Dank dem Assoziativgesetz kannst du in einer Summe beliebige Teilsummen zusammenfassen. Du darfst also zwei beliebige Vektoren zusammenrechnen und musst eben nicht stur von links nach rechts durchrechnen.

$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$
$$2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Die beiden Gesetze *Kommutativgesetz* und *Assoziativgesetz* stellen sicher, dass du mit Vektoren praktisch gleich rechnen kannst, wie du es dir von Variablen her gewohnt bist. Allerdings gilt das nur für Addition und Subtraktion! Zwar kannst du Vektoren auch mit einem Skalar multiplizieren (strecken), aber eben nur mit einem Skalar.

Quiz

9. Das Kommutativgesetz besagt:

   ☐ a. Dass du die Reihenfolge bei der Addition vertauschen darfst: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

   ☐ b. Dass du die Reihenfolge bei der Addition *nicht* vertauschen darfst: $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{b} + \vec{a}$,

   ☐ c. Dass Subtraktion und Addition nicht dasselbe sind,

   ☐ d. Keines der oben genannten.

10. Vektoren kannst du aneinanderhängen (addieren), weil sie:

    ☐ a. Eindeutig sind,

    ☐ b. Ortsunabhängig sind,

    ☐ c. Kommutativ sind.

11. Richtig oder Falsch? Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ ist immer länger als die einzelnen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

12. Welche Rechnungen haben das Ergebnis $\vec{a} + \vec{b}$?

    ☐ a. $5\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + 6\vec{b}$

    ☐ b. $\frac{1}{3} \cdot \left(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{a} + 4\vec{b}\right)$

    ☐ c. $2\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + 3\vec{a} - \vec{b}$

13. Kollinear bedeutet:

    ☐ a. Dass ein Vektor gestreckt wurde,

    ☐ b. Dass zwei Vektoren „parallel“ sind,

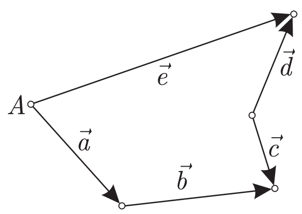
    ☐ c. Dass ein Vektor auf einer Linie liegt.

1.4 Linearkombinationen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist der *Nullvektor*?
- ⋆ Wie kannst du aus einer Figur eine *Linearkombination* für einen Vektor herauslesen?
- ⋆ Wann sind Vektoren *linear unabhängig*?

Manchmal können wir Vektoren so kombinieren, dass wir eine geschlossene Figur erhalten (geschlossen heisst, dass die Figur keine Lücken hat). Wir haben für das Beispiel fünf Vektoren so zusammengestellt, dass ein Vieleck entstanden ist:



Jetzt gehen wir von einem Anfangspunkt (A) aus im Kreis (z. B. gegen den Uhrzeigersinn) und zählen alle Vektoren zusammen, denen wir unterwegs begegnen. Aber Achtung: Wenn ein Vektor für unseren Weg in die falsche Richtung zeigt, dann müssen wir ihn zuerst umdrehen (Minuszeichen davorsetzen). Das ergibt für die Figur oben:

$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}-\vec{e}=\vec{0}.$$

Hier kommt wieder ein spezieller Vektor vor: Der Nullvektor $\vec{0}$. Er steht für „Keine Bewegung" und hat natürlich die Länge 0. In unserem Beispiel zeigt er an, dass wir am Schluss wieder beim Anfangspunkt sind (uns sozusagen nicht bewegt haben). Der Nullvektor ist der *einzige* Vektor, der keine feste Richtung hat. In Komponentenschreibweise sieht er so aus (je nachdem ob in 2 oder 3 Dimensionen):

$$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

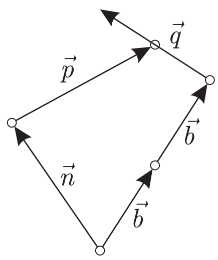
Wozu sind nun diese geschlossenen Figuren gut? Stell dir vor, du sollst in der Figur oben den Vektor $\vec{c}$ durch die anderen Vektoren ausdrücken. Dank unserer Gleichung geht das nun sehr einfach: Löse die Gleichung nach $\vec{c}$ auf (dabei kannst du ganz „normal“ rechnen, wie du's mit Variablen gewohnt bist):

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}-\vec{e} &= \vec{0}. \qquad |+\vec{c} \\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{d}-\vec{e} &= \vec{c}. \end{aligned}$$

Besonders bei komplexen Aufgaben ist diese Technik sehr nützlich.

Linearkombinationen Es kommt oft vor, dass wir einen Vektor durch andere Vektor ausdrücken. Im Beispiel oben haben wir $\vec{c}$ als eine *Kombination* der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ geschrieben. Der richtige Fachbegriff für eine solche Kombination ist *Linearkombination*.

Wichtig: Für eine Linearkombination dürfen wir die Vektoren auch strecken, damit es aufgeht. Sieh dir die folgende Figur einmal an:



Der Vektor $\vec{b}$ kommt doppelt vor (wurde also im Prinzip mit dem Faktor 2 gestreckt). Dafür ist $\vec{q}$ eigentlich zu lang. Trotzdem gehen wir wieder im Kreis und stellen unsere Gleichung auf:

$$-\vec{n}+2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{q}-\vec{p}=\vec{0}.$$

Wenn du jetzt die Gleichung nach $\vec{q}$ auflöst, dann erhältst du zunächst:

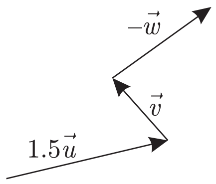
$$\frac{1}{2}\vec{q}=\vec{p}+\vec{n}-2\vec{b}.$$

Wie bei anderen Gleichungen auch multiplizierst du nun alles mit 2:

$$\vec{q}=2\vec{p}+2\vec{n}-4\vec{b}.$$

Und wieder hast du eine *Linearkombination*, dieses Mal für $\vec{q}$.

Formal definieren wir die Linearkombination folgendermassen (du wirst diese Definition vielleicht in anderen Büchern oder Scripten antreffen):



Eine „Linearkombination“ bezeichnet eine Summe von Vektoren. Dabei dürfen die Vektoren auch gestreckt oder gespiegelt werden.

Definition *Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$ und die Streckfaktoren $s_1, s_2, s_3, \ldots \in \mathbb{R}$. Dann heisst die Vektorsumme*

$$s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 + s_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots$$

*eine **Linearkombination** von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$*

In dieser Definition steht nichts von geschlossenen Figuren! Eine Linearkombination heisst nur, dass einige Vektoren zu einem neuen zusammengsetzt werden. Eigentlich ist also eine *Linearkombination* dasselbe wie eine *Vektorsumme* (leider haben sich im Laufe der Zeit verschiedene Begriffe für dasselbe entwickelt).

Lineare Unabhängigkeit Stell dir vor, wir hätten einige Vektoren vor uns liegen. Lassen sich diese Vektoren dann immer so kombinieren, dass wir einen geschlossenen Streckenzug erhalten? Oder anders gefragt: Gibt es zu den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ eine Linearkombination, für die gilt:

$$s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 + s_3 \cdot \vec{v}_3 + \ldots = \vec{0}?$$

Dabei dürfen die Streckfaktoren $s_1, s_2, \ldots$ natürlich nicht alle Null sein (sonst kommt ja automatisch der Nullvektor raus).

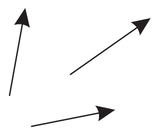
Die Antwort: Es kommt auf die Anzahl der Vektoren an. Im zweidimensionalen Fall lässt sich aus drei oder mehr Vektoren immer ein geschlossener Streckenzug basteln. Im dreidimensionalen Fall geht das immer ab vier Vektoren. Anders gesagt: In der Ebene können nur zwei Vektoren in völlig verschiedene Richtungen zeigen.

Vektoren, die sich nicht zu einem geschlossenen Streckenzug kombinieren lassen, heissen *linear unabhängig*. In diesem Fall gilt:

- Keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen schreiben,

- Eine Linearkombination dieser Vektoren ergibt nie den Nullvektor $\vec{0}$.

Übrigens heissen Vektoren, die eben nicht linear unabhängig sind *linear abhängig*. Vier dreidimensionale Vektoren sind z. B. immer linear abhängig: Mindestens einer lässt sich als Kombination der anderen schreiben. Es kann auch vorkommen, dass bereits zwei Vektoren linear abhängig sind. Nämlich dann, wenn sich der eine Vektor als eine Streckung des anderen schreiben lässt.



Bei drei Vektoren in der Ebene lässt sich mindestens einer als Linearkombination der beiden anderen schreiben: Die drei Vektoren sind linear abhängig.

Quiz

14. Der Nullvektor

    ☐ a. Geht immer vom Nullpunkt $\mathcal{O}$ aus,

    ☐ b. Hat den Betrag 0,

    ☐ c. Zeigt immer in die Richtung des Nullpunkts $\mathcal{O}$.

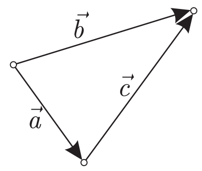
15. Drücke in dieser Figur $\vec{c}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

    ☐ a. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$,

    ☐ b. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$,

    ☐ c. $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$,

    ☐ d. Keines der oben genannten.



16. Eine Linearkombination liegt vor:

    ☐ a. Wenn alle Vektoren in einer Linie liegen,

    ☐ b. Wenn die Vektoren eine geschlossene Figur bilden,

    ☐ c. Immer wenn Vektoren addiert oder subtrahiert werden.

17. Zwei kollineare Vektoren sind:

    ☐ a. Immer linear unabhängig,

    ☐ b. Immer linear abhängig,

    ☐ c. Darüber lässt sich keine Aussage machen.

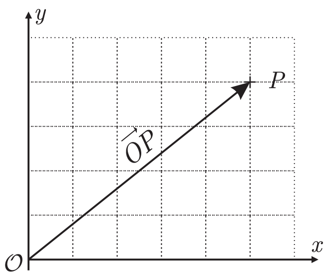
1.5 Ortsvektoren und Geraden

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist ein *Ortsvektor*?
- ⋆ Wozu brauchen wir Ortsvektoren?
- ⋆ Wie kannst du eine *Gerade* mit Vektoren beschreiben bzw. darstellen?

Die Ortsunabhängigkeit der Vektoren ist zwar eine gute und wichtige Eigenschaft. Hin und wieder ist sie uns aber auch im Weg und wir brauchen einen Vektor, der an einem genau vorgegebenen Punkt beginnt. Ein solcher festgemachter Vektor heisst *Ortsvektor*.

Die erste Anwendung von Ortsvektoren ist folgende: Wir brauchen einen Vektor, der vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ zu einem Punkt P führt. Im engeren Sinn werden sogar nur solche Vektoren $\overrightarrow{OP}$ als eigentliche Ortsvektoren bezeichnet.



Ein Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r_P}$ führt vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ zu einem Punkt P.

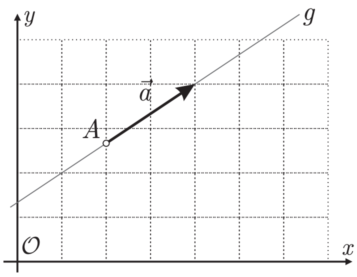
Wenn du den Ortsvektor mit Komponenten (Zahlen) schreibst, dann entsprechen die Komponenten von $\overrightarrow{OP}$ gerade den Koordinaten von P. Das macht es sehr einfach, zwischen Punkten und Vektoren hin- und herzuwechseln.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(5|4).$$

Zur Erinnerung: Mit Vektoren kannst du rechnen, mit Punkten nicht!

Die Schreibweise $\overrightarrow{OP}$ macht deutlich, dass der Ortsvektor vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ aus zum Punkt P geht. Daneben gibt es aber noch eine zweite Schreibweise, die oft praktischer ist: $\overrightarrow{r_P}$. Das r hat dabei keine spezielle Bedeutung (ist also keine Abkürzung für irgendetwas). Du wirst in diesem Script beiden Schreibweisen begegnen, allerdings verwenden wir meistens $\overrightarrow{r_P}$ anstatt $\overrightarrow{OP}$.

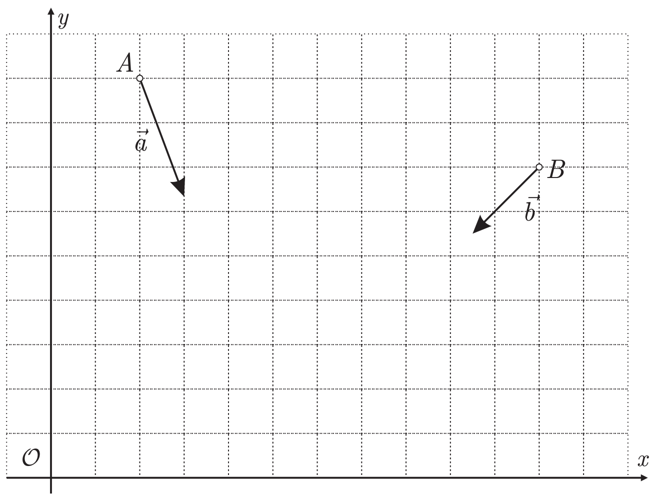
Geraden Ein Vektor mit einem festen Anfangspunkt kann auch sehr gut eine Gerade im Koordinatensystem beschreiben. Um die ganze Gerade darzustellen, musst du den Vektor



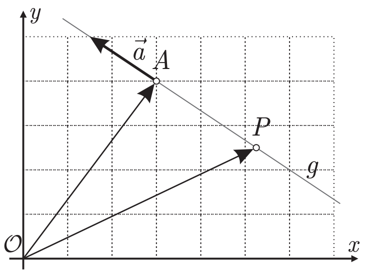
Wenn du einen Vektor $\vec{a}$ an einem Punkt A festmachst und dann beliebig streckst, kannst du damit auch eine Gerade im Koordinatensystem darstellen.

dann entsprechend strecken: Ein elastischer Vektor, den du beliebig in die Länge ziehen kannst. Dafür ist der Anfangspunkt fest.

In der folgenden Zeichnung deuten die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Geraden an. Zeichne die beiden Geraden ein, finde den Schnittpunkt und beantworte dann folgende Frage (gegebenenfalls mit Messen): Mit welchen Faktoren s und t musst du $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ strecken, um zum Schnittpunkt zu kommen?



Du weisst jetzt also: Du kannst mit Vektoren eine Gerade beschreiben. Dazu machst du den *Richtungsvektor* $\vec{a}$ an einem *Aufhängepunkt* A fest und streckst dann den Richtungsvektor je nach Bedarf wie ein Gummiband. Wenn du den Streckfaktor $s \in \mathbb{R}$ richtig wählst, dann erreichst du jeden Punkt P auf der Geraden mit dem Vektor.



Jeder Punkt $P \in g$ auf der Geraden lässt sich erreichen, indem du zuerst zu A gehst und dann den Richtungsvektor entsprechend streckst. In diesem Fall hier ist: $\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{r_A} - 1.5 \cdot \vec{a}$.

Übrigens: Für jede Gerade gibt es unendlich viele mögliche Anfangspunkte A und Richtungsvektoren $\vec{a}$. Weil du den Richtungsvektor sowieso streckst, spielt nur seine Richtung eine Rolle, nicht aber die Länge.

Zusammen mit den eigentlichen Ortsvektoren können wir folgende wichtige Gleichung für eine Gerade g aufstellen:

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}.$$

Das bedeutet: Vom Ursprung $\mathcal{O}$ aus kommen wir zu jedem Punkt $P \in g$, wenn wir zuerst zu A gehen und dann von dort aus $\vec{a}$ richtig strecken (mit der Zahl s). Zur Erinnerung: $\vec{r}$ und $\overrightarrow{r_A}$ sind Ortsvektoren. Sie geben an, wie du vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ zu P bzw. zu A kommst. Weil der Punkt P beliebig ist (P kann ja irgendein Punkt sein), schreiben wir nur $\vec{r}$ anstatt $\overrightarrow{r_P}$.

Quiz

18. Für einen Ortsvektor gilt:
    - ☐ a. Er ist ortsunabhängig,
    - ☐ b. Er führt vom Ursprung $\mathcal{O}$ zu einem Punkt P,
    - ☐ c. An ihm lassen sich die Koordinaten des Punkts P einfach ablesen.
19. Richtig oder Falsch? Wir verwenden Ortsvektoren, weil wir nicht mit Punkten, sondern nur mit Vektoren rechnen können.
20. Für eine Gerade gilt:
    - ☐ a. Der Richtungsvektor $\vec{a}$ ist eindeutig,
    - ☐ b. Der Aufhängepunkt A ist eindeutig,
    - ☐ c. Es gibt unendlich viele Kombinationen für A und $\vec{a}$.
21. Wenn sich zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schneidem, dann:
    - ☐ a. Musst du $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem gleichen Faktor strecken,
    - ☐ b. Darfst Du nur einen der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ strecken,
    - ☐ c. Sind die Streckfaktoren immer ganzzahlig,
    - ☐ d. Können $\vec{a}$ und $\vec{b}$ völlig unterschiedliche reelle Streckfaktoren haben.
22. Wenn sich zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *nicht* schneiden, dann:
    - ☐ a. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear,
    - ☐ b. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht,
    - ☐ c. Schaut $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ in die falsche Richtung,
    - ☐ d. Muss man die Aufhängepunkte verschieben.

2 Die Komponentendarstellung

Inhalte dieses Kapitels

Du bist bereits mit den Grundbegriffen vertraut und weisst, was ein Vektor ist. Jetzt geht es darum, Vektoren konsequent durch Zahlen (Komponenten) auszudrücken und damit zu rechnen. Der konstruktive (zeichnerische) Aspekt tritt etwas in den Hintergrund und macht Platz für die Algebra.

Auch dieses Kapitel enthält viele Grundlagen, auf die wir nachher aufbauen werden.

2.1 Komponenten

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist der Unterschied zwischen *Komponenten* und *Koordinaten*?
- ⋆ Wie berechnest du die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten der Punkte A und B?

Den Vektor, der von $P(7|1)$ nach $Q(3|6)$ führt, kannst du nicht nur als $\overrightarrow{PQ}$ schreiben, sondern auch mit konkreten Zahlen ausdrücken:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wenn du also beim Punkt P bist, musst du von der x-Koordinate 4 abzählen und zur y-Koordinate 5 dazuzählen, um auf Q zu kommen. Oder: Q liegt um 4 Einheiten links und 5 Einheiten höher als P.

Diese Darstellung eines Vektors mit Zahlen heisst *Komponentendarstellung*. *Komponente* ist der Fachbegriff für die Zahlen in der Vektordarstellung. Oben sind also -4 und 5 die beiden Komponenten des Vektors. Beachte die Unterscheidung: Punkte haben feste Koordinaten, Vektoren haben Komponenten. Koordinaten geben einen Ort an, Komponenten eine „Grösse."

Du kannst den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ von einem Punkt $P(3|8)$ zu einem anderen Punkt $Q(5|2)$ bestimmen, indem du die Koordinaten der Punkte voneinander subtrahierst:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Achte auf die richtige Reihenfolge! Hier passieren oft Fehler.

Noch einmal zur Erinnerung: Du kannst nicht mit Punkten rechnen. Es ist also falsch zu schreiben: $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. Auch wenn die Idee dahinter richtig sein mag. Wenn du eine solche Gleichung aufschreiben möchtest, dann verwende *Ortsvektoren*:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Quiz

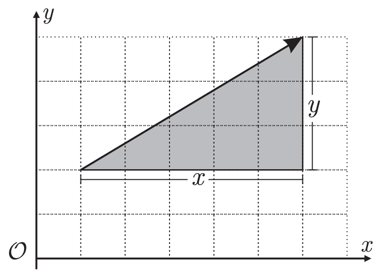
1. Wenn du einen Vektor mit Zahlen darstellst, dann heissen diese Zahlen
   - ☐ a. Beträge,
   - ☐ b. Koordinaten,
   - ☐ c. Repräsentanten,
   - ☐ d. Komponenten.
2. Um die Komponenten von $\overrightarrow{AB}$ zu berechnen, rechnest du
   - ☐ a. $\vec{r}_A - \vec{r}_B$
   - ☐ b. $\vec{r}_A + \vec{r}_B$
   - ☐ c. $\vec{r}_B - \vec{r}_A$
   - ☐ d. Keines der obigen ist richtig.

2.2 Die Länge eines Vektors

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du den *Betrag* eines Vektors aus den Komponenten?

Im Koordinatensystem kannst du die Komponenten eines Vektors in der Regel bequem ablesen. Besonders einfach wird's, wenn du den Vektor zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzst:



Jetzt stellen die beiden Katheten gerade die Komponenten (x und y) des Vektors dar.

Uns interessiert hier die *Länge* des Vektors $\vec{v}$. Siehst du am Dreieck oben bereits, wie du die Länge $|\vec{v}|$ aus den Komponenten berechnen kannst? Am einfachsten geht es wohl mit dem Satz des Pythagoras. Entsprechend definieren wir:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

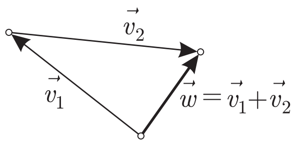
Die Länge eines Vektors hat noch einen weiteren Namen, den du kennen musst: *Betrag*.

Im dreidimensionalen sieht die Sache ganz ähnlich aus. Allerdings verwenden wir dann den räumlichen Satz des Pythagoras:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Also: Der *Betrag* $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v}$ gibt seine *Länge* an. Du kannst den Betrag aus den Komponenten x, y und z des Vektors verechnen. Dafür verwendest du die Formel des Pythagoras.

Rechnen Vorsicht beim Rechnen! Du hast z B. zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ mit den Längen ℓ_1 und ℓ_2 gegeben. Dann entspricht die Länge von $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ *nicht* einfach der Summe $\ell_1+\ell_2$. Die Vektorsumme $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ kann sogar kürzer sein als sowohl ℓ_1 als auch ℓ_2, wie in diesem Beispiel hier:



Mit mathematischen Formeln schreiben wir:

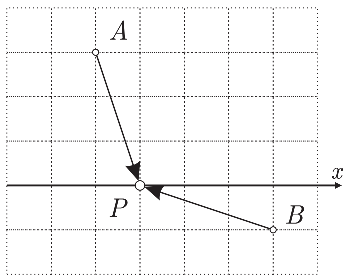
$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2| \neq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|\,.$$

Hingegen gilt für eine Streckung mit dem Faktor s:

$$|s\cdot\vec{v}| = |s|\cdot|\vec{v}|$$

Ob Du also zuerst den Vektor streckst und dann die Länge misst, oder ob du zuerst die Länge misst und dann mit dem Streckfaktor multiplizierst ist einerlei. Das Resultat ist dasselbe.

Eine typische Aufgabe Gegeben sind zwei Punkte $A(7|5)$ und $B(13.5|-1.5)$. Gesucht ist derjenige Punkt P auf der x-Achse, der von A und B den gleichen Abstand hat. Wie lauten also die Koordinaten von P?



Wir suchen einen Punkt P, der von A und B gleich weit entfernt ist: $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

Oft geht vergessen, dass wir vom gesuchten Punkte P bereits eine Koordinate kennen. Und zwar ist $y=0$, weil der Punkt ja auf der x-Achse liegt. Also ist $P(x|0)$ und wir müssen nur noch das richtige x finden.

Die Distanz zwischen zwei Punkten A und B kannst du ausrechnen, indem du die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnest. In unserem Fall also sollen also $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ gleich lang sein:

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|.$$

Auch wenn wir P noch nicht kennen, können wir doch die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ angeben:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-7 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x-13.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die folgende Gleichung, die wir dann auch gleich auflösen:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-7)^2+(-5)^2} &= \sqrt{(x-13.5)^2+1.5^2} \\ (x-7)^2+25 &= (x-13.5)^2+2.25 \\ x^2-14x+49+25 &= x^2-27x+182.25+2.25 \\ 13x &= 110.5 \\ x &= 8.5 \end{aligned}$$

Und damit haben wir die x-Koordinate vom Punkt P gefunden. Also ist $P(8.5|0)$.

Abstand zwischen Punkten Schliesslich kannst du mit dem Betrag auch den Abstand $d(P,Q)$ zwischen zwei Punkten P und Q berechnen (d steht für *Distanz*):

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$$

Diese Formel spielt nicht nur innerhalb der Vektorgeometrie eine Rolle. Auch in anderen Gebieten der Mathematik wirst du immer wieder den Abstand zwischen zwei Punkten berechnen müssen. Entsprechend solltest du dir diese Formel langfristig merken.

Beispiel 1: Wie gross ist der Abstand zwischen $A(1|5|-3)$ und $B(7|-1|4)$?

$$d(A,B) = \sqrt{(7-1)^2+(-1-5)^2+(4-(-3))^2} = \sqrt{121} = 11$$

◁

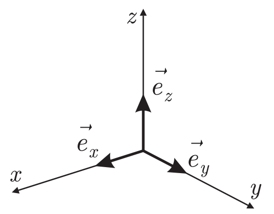
Quiz

3. Um den Betrag eines Vektors zu berechnen, verwendest du:
   - ☐ a. Trigonometrie (Sinus und Cosinus),
   - ☐ b. Den Satz des Pythagoras,
   - ☐ c. Einen sehr genauen Massstab,
   - ☐ d. Der Betrag lässt sich nicht berechnen.
4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ sind beliebige Vektoren. Welche Aussagen sind dann immer richtig?
   - ☐ a. Der Vektor $\vec{c}$ ist sicher kürzer als $\vec{a}$.
   - ☐ b. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ können alle gleich lang sein.
   - ☐ c. Der Vektor $\vec{c}$ ist nie länger als die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammen: $|\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
   - ☐ d. $\vec{c}$ ist immer länger als $\vec{a} - \vec{b}$.

2.3 Einheitsvektoren

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist ein *Einheitsvektor* und was bedeuten die Bezeichnungen $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$?
- ⋆ Wie findest du einen Einheitsvektor, der in eine vorgegebene Richtung zeigt?
- ⋆ Was haben die Komponenten eines Vektors mit den Einheitsvektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ zu tun?



Besonders wichtig sind die drei Einheitsvektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$.

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor, der gerade die Länge (den Betrag) 1 hat (also eine Einheit). Besonders wichtig sind dabei die Einheitsvektoren, die in die Richtung der Koordinatenachsen zeigen: $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und im dreidimensionalen noch $\vec{e_z}$. Du findest auch die gleichwertigen Bezeichnungen $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

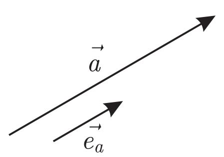
Die drei Einheitsvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$ haben die folgenden Komponentendarstellungen: Im zweidimensionalen:

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bzw. im dreidimensionalen:

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einheitsvektoren sind aber nicht nur $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$, sondern *alle* Vektoren $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$.



Ein häufiges Problem: Finde den Einheitsvektor $\vec{e_a}$ zu einem Vektor $\vec{a}$.

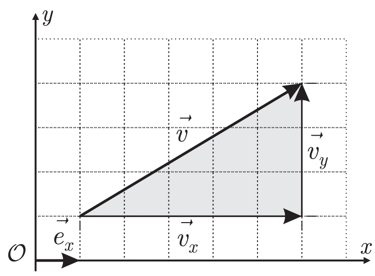
Oft hast du auch folgendes Problem: Du hast einen beliebigen Vektor $\vec{a}$. Nun brauchst du einen Einheitsvektor $\vec{e_a}$, der in die *gleiche Richtung* zeigt wie $\vec{a}$, aber den Betrag 1 hat.

Wenn du den Betrag vom Vektor $\vec{a}$ kennst, ist es nicht sehr schwierig, den Einheitsvektor dazu zu bestimmen. Stell dir vor, $\vec{a}$ habe den Betrag $|\vec{a}| = 3$. Dann streckst du $\vec{a}$ einfach auf einen Drittel und schon hast du den Einheitsvektor $\vec{e_a} = \frac{1}{3}\vec{a}$. Und wie sieht es aus für $\vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 5$ oder $\vec{c}$ mit $|\vec{c}| = \frac{1}{2}$?

Allgemein gilt folgendes: Wenn du einen Vektor $\vec{v}$ mit dem Betrag $|\vec{v}|$ mit $\frac{1}{|\vec{v}|}$ streckst, dann entsteht ein Einheitsvektor $\vec{e_v}$. Dieser zeigt in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$. Also:

$$\vec{e_v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Zerlegungen Wir ergänzen einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ noch einmal zu einem rechtwinkligen Dreieck. Allerdings zeichnen wir die Katheten dieses Mal auch als Vektoren:



Damit haben wir den Vektor $\vec{v}$ zerlegt in $\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y}$. Weil $\vec{v_x}$ und $\vec{v_y}$ in die Richtung der Koordinatenachsen zeigen, gilt hier: $\vec{v_x} = 5 \cdot \vec{e_x}$ und $\vec{v_y} = 3 \cdot \vec{e_y}$. Oder:

$$\vec{v} = 5\vec{e_x} + 3\vec{e_y}.$$

Das ist eine eindeutige Zerlegung, wie wir sie noch einige Male anwenden werden. Denn: *Jeder* Vektor lässt sich eindeutig in die Einheitsvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und (in 3D) $\vec{e_z}$ zerlegen. Dabei treten die Komponenten von $\vec{v}$ als Streckfaktoren von $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$ auf.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

und in drei Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y} + z \cdot \vec{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Eine andere Art der Zerlegung Vektoren $\vec{v}$ haben eine Richtung und eine Länge. Die Länge entspricht dem Betrag $|\vec{v}|$ des Vektors. Entsprechend gibt der Einheitsvektor $\vec{e_v}$ die *Richtung* von $\vec{v}$ an.

Du kannst also jeden Vektor in seine Länge und seine Richtung zerlegen:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e_v}$$

Quiz

5. Einheitsvektoren:
   - ☐ a. Zeigen alle in eine einheitliche Richtung,
   - ☐ b. Haben alle gleiche Länge und Richtung,
   - ☐ c. Haben die Länge 1.
6. Die Summe zweier Einheitsvektoren:
   - ☐ a. Ist wieder ein Einheitsvektor,
   - ☐ b. Ist nie ein Einheitsvektor,
   - ☐ c. Keines ist richtig.
7. Welche Bedingung muss ein Vektor erfüllen, damit er sich in die Einheitsvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und (in 3D) $\vec{e_z}$ zerlegen lässt?
   - ☐ a. Die Komponenten müssen natürliche Zahlen sein,
   - ☐ b. Der Vektor muss nach rechtsoben zeigen,
   - ☐ c. Keine Bedingung: Es geht immer.

2.4 Rechnen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie addierst/subtrahierst du zwei Vektoren algebraisch?
- ⋆ Warum kannst du Vektoren nicht genauso multiplizieren und dividieren wie addieren und subtrahieren?
- ⋆ Wie kannst du zu einem Vektor einen dazu senkrechten Vektor finden?

Wenn du Vektoren in der Komponentendarstellung vorliegen hast, dann ist es ausgesprochen einfach, damit zu rechnen. Zwei Vektoren werden einfach addiert (subtrahiert), indem du die entsprechenden Komponenten addierst (subtrahierst):

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm a_y \end{pmatrix}.$$

(Das Symbol $\pm$ bedeutet, dass diese Gleichung sowohl für die Addition $+$, als auch für die Subtraktion $-$ gilt). Oder mit einem Zahlenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die *geometrische* Addition aus dem letzten Kapitel entspricht tatsächlich einer *algebraischen* Addition. Genau dasselbe gilt für die Subtraktion. Diese Verbindung zwischen Geometrie und Algebra ist sehr wichtig: Sie macht die Stärke der Vektorgeometrie aus. Daher nützt uns z. B. auch eine algebraische Multiplikation nichts, solange wie keine geometrische Bedeutung dafür haben.

Streckung Schliesslich lässt sich ein Vektor auch strecken. Dazu multiplizierst du alle Komponenten mit dem Streckfaktor:

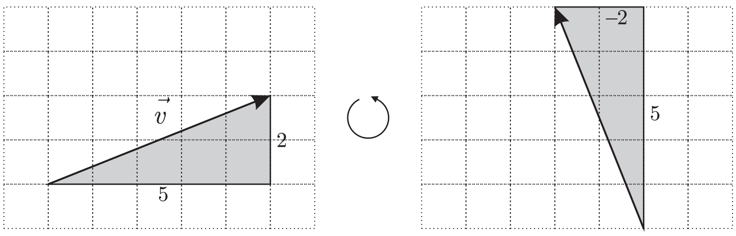
$$s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot x \\ s \cdot y \end{pmatrix}, \qquad -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Damit passt die Streckung auch mit der Addition zusammen: $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$.

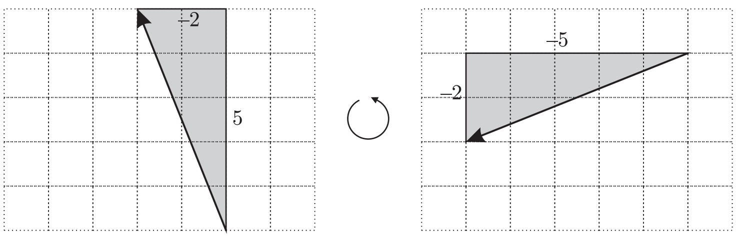
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a \\ b+b \\ c+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Drehungen Übrigens gibt es im Zweidimensionalen einen hübschen Trick, um einen Vektor um $90°$ zu drehen. Wenn du also irgendeinen Vektor $\vec{v}$ hast, dann kannst du damit sehr einfach einen dazu senkrechten Vektor basteln.

Hier haben wir z. B. den Vektor $\vec{v}$ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

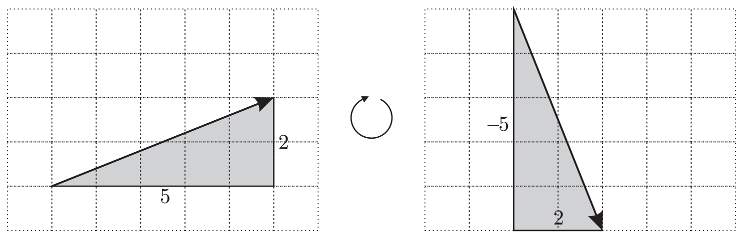


Siehst du, dass das Komponentendreieck im wesentlichen gleich bleibt? Aus dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ wurde $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Komponenten sind vertauscht und die x-Komponente ist nun negativ (weil der gedrehte Vektor nach links zeigt). Drehen wir $\vec{v}'$ noch einmal:



Dadurch entsteht $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, der *Gegenvektor* zu $\vec{v}$. Der Gegenvektor zu $\vec{v}$ entsteht ja sowieso durch eine Drehung um $180°$. Beim Gegenvektor wurden nun die Vorzeichen beider Komponenten gewechselt. Drehe $\vec{v}''$ noch einmal um $90°$! Welche Komponenten hat dann dieser Vektor $\vec{v}'''$?

Wir gehen noch einmal zum Anfang zurück und drehen $\vec{v}$ dieses Mal im Uhrzeigersinn:



Hier erhalten wir $\vec{v}''' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Wieder sind die Komponenten vertauscht mit einem Vorzeichenwechsel (dieses Mal bei der y-Komponente, weil $\vec{v}'''$ nach unten zeigt).

Das funktioniert im zweidimensionalen immer: Wenn du bei einem Vektor die x- und die y-Komponente vertauschst *und ein* Vorzeichen änderst (entweder x oder y), dann wird der Vektor um $90°$ gedreht. Je nachdem welches Vorzeichen du änderst, dreht such der Vektor im oder gegen den Uhrzeigersinn. Das spielt aber meistens keine Rolle. Wichtiger ist, dass $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}' = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ zueinander *senkrecht* sind.

Quiz

8. Wenn du von einem Vektor $\vec{v}$ seinen Gegenvektor $-\vec{v}$ subtrahierst, dann entsteht:

   - ☐ a. Der Nullvektor,
   - ☐ b. Ein Vektor der Länge 1,
   - ☐ c. Ein doppelt so langer Vektor,
   - ☐ d. Ein um $90°$ gedrehter Vektor.

9. Richtig oder Falsch? Weil die Multiplikationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

   nur algebraische und keine geometrische Bedeutung hat, hat sie für die Vektorgeometrie keinen Sinn.

10. Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Damit du $\vec{u} + \vec{v}$ berechnen kannst, musst du:

   - ☐ a. $\vec{u}$ um eine z-Komponente erweitern,
   - ☐ b. Die z-Komponente von $\vec{v}$ wegstreichen,
   - ☐ c. Die z-Komponente von $\vec{v}$ muss 0 sein,
   - ☐ d. $\vec{u} + \vec{v}$ lässt sich nicht berechnen.

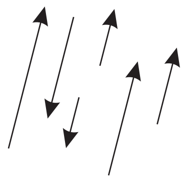
11. Wenn du die x- und die y-Komponente eines Vektors vertauschst, dann enstspricht das geometrisch:

   - ☐ a. Einer Drehung um $90°$,
   - ☐ b. Einer Spiegelung an der y-Achse,
   - ☐ c. Es entsteht der Gegenvektor,
   - ☐ d. Nichts davon.

2.5 Kollinearität

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie überprüfst du anhand der Komponenten, ob zwei Vektoren zueinander kollinear sind?
- ⋆ Wie findest du algebraisch heraus, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?



Kollineare Vektoren haben die gleiche Richtung.

Zwei kollineare Vektoren zeigen in die gleiche Richtung. Aber wie erkennst du anhand der *Komponenten*, ob zwei Vektoren kollinear sind?

Um dieses Problem zu lösen, hilft uns die folgende Formulierung von „kollinear“: Zwei Vektoren sind genau dann *kollinear*, wenn du den einen so strecken kannst, dass er dem anderen entspricht. Es gibt also eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{u} \cdot s = \vec{v} \qquad \text{oder} \qquad \vec{u} = s \cdot \vec{v}.$$

Schauen wir uns die folgenden drei Vektoren als Beispiel an:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Aus der x-Komponente siehst du, dass $\vec{a} \cdot 3 = \vec{b}$ sein müsste, also $s = 3$. Einsetzen ergibt:

$$3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

Wenn du also den Vektor $\vec{a}$ mit 3 streckst, dann erhältst du tatsächlich den Vektor $\vec{b}$. Die beiden sind also kollinear.

Schauen wir uns nun $\vec{a}$ und $\vec{c}$ an. Wiederum aus der x-Komponente schliessen wir, dass $\vec{a} \cdot 5 = \vec{c}$ sein müsste, also $s = 5$. Wieder einsetzen ergibt:

$$5 \cdot \vec{a} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die z-Komponente passt nicht. Also sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ nicht kollinear! Du darfst die Komponenten eines Vektors nie mit unterschiedlichen Faktoren strecken.

Geraden Auf eine ähnliche Weise prüfst du auch, ob ein Punkt P auf einer Geraden g liegt. Wenn nämlich P auf g liegt, dann erfüllt der Ortsvektor $\vec{r}_P$ die Gleichung

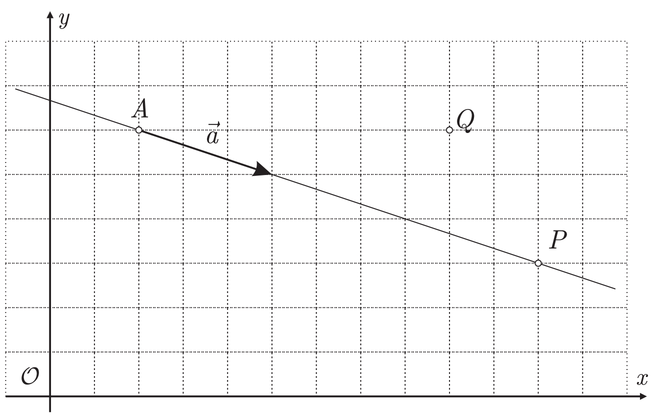
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + s \cdot \vec{a}.$$

Wiederum muss der Faktor s für alle Komponenten gleich sein. Sonst liegt P *nicht* auf der Geraden.

Beim folgenden Beispiel arbeiten wir mit der Geraden

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und den beiden Punkten $P(11|3)$ und $Q(9|6)$.



Du siehst bereits aus der Zeichnung, dass P auf g liegt, Q aber nicht. Uns geht es aber darum, dieses Resultat auch algebraisch noch nachzuvollziehen.

Da P also auf g liegt, sollte die Gleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{r}_P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=g}$$

aufgehen: Es sollte ein eindeutiges $s \in \mathbb{R}$ geben. Wenn du nur die x- oder nur die y-Komponente anschaust, dann bekommst du die beiden Gleichungen:

$$x : 11 = 2 + s \cdot 3, \qquad y : 3 = 6 + s \cdot (-1).$$

Tatsächlich ergibt das für beide Gleichungen die selbe Lösung $s = 3$. Also liegt P auf g.

Für Q erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit den beiden Gleichungen

$$x : 9 = 2 + 3s, \qquad y : 6 = 6 - s.$$

Das ergibt zwei unterschiedliche Lösungen: $s = \frac{7}{3}$ und $s = 0$. Also liegt Q *nicht* auf g.

Quiz

12. Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sind kollinear, wenn:
    - ☐ a. Die Differenzen $b_1 - a_1$ und $b_2 - a_2$ gleich sind,
    - ☐ b. Die Summen $a_1 + b_1$ und $a_2 + b_2$ gleich sind,
    - ☐ c. Die Quotienten $b_1 : a_1$ und $b_2 : a_2$ gleich sind (mit $a_1, a_2 \neq 0$),
    - ☐ d. Keines davon.
13. Richtig oder Falsch? Die Summe zweier kollinearer Vektoren ist wieder kollinear zu den ersten beiden.

2.6 Linearkombinationen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie kannst du einen Vektor $\vec{r}$ als Linearkombination von zwei anderen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben?

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht zueinander (Drehung um $90°$). Nun kommt ein dritter Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ hinzu. Die Aufgabe besteht darin, $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu schreiben.

Zur Erinnerung: Eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entsteht, wenn du $\vec{a}$ und $\vec{b}$ irgendwie streckst und dann addierst. Also:

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Die Schwierigkeit besteht darin, die Faktoren s und t richtig zu bestimmen.

Wir kennen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ja mit Komponenten. Damit können wir die Gleichung auch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ s+t \end{pmatrix}$$

Anders ausgedrückt muss also gelten:

$$s - t = 3 \qquad \text{und} \qquad s + t = 9.$$

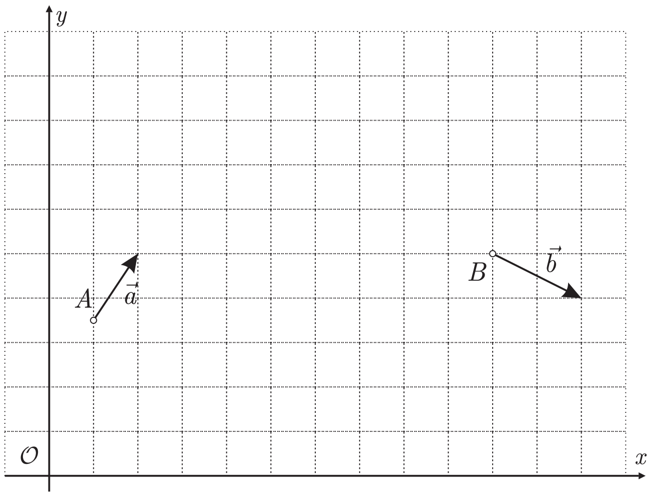
Das ist ein klassisches lineares 2×2-Gleichungssystem. Du kennst auch bereits Methoden, um die Lösungen eines Gleichungssystems zu bestimmen. Damit bekommst du schliesslich die gesuchten Faktoren:

$$\left| \begin{array}{rcl} s - t & = & 3 \\ s + t & = & 9 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \qquad (s = 6, t = 3).$$

Im dreidimensionalen ergibt sich bei der gleichen Aufgabenstellung ein 3×3-Gleichungssystem. Dort ginge es dann darum, drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zu einem vierten $\vec{d}$ zu kombinieren.

In der Vektorgeometrie wirst du sehr oft solche Gleichungssysteme lösen müssen; und zwar sowohl 2×2 als auch 3×3. Stelle daher sicher, dass du das auch gut kannst und übe nochmals, wenn nötig!

Geraden Eine verwandte Aufgabenstellung ergibt sich, wenn du den Schnittpunkt zweier Geraden ausrechnen sollst. Wir betrachten dazu wieder ein Beispiel.



Bestimme den Schnittpunkt S der beiden Geraden in der Zeichnung oben konstruktiv!

Die beiden Geraden g_a und g_b haben die Gleichungen:

$$g_a : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \qquad g_b : \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Weil ja nicht beide Geraden den selben Faktor haben müssen, haben wir ihn einmal s und einmal t genannt. Um den Schnittpunkt zu finden, setzen wir nun beide Geraden gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht dem Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} 1 + s & = & 10 + 2t \\ 3.5 + 1.5s & = & 5 - t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} s - 2t & = & 9 \\ 1.5s + t & = & 1.5 \end{array} \right|$$

Auflösen nach s und t ergibt: $s = 3$ und $t = -3$. Damit haben wir aber noch nicht den eigentlichen Schnittpunkt S, sondern erste die Faktoren für die Geraden. Also setzen wir die Faktoren ein:

$$g_a : \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 3.5+4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und:

$$g_b : \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es ist also egal, mit welcher Geradengleichung du dann den Schnittpunkt ausrechnest. Hier ist das Resultat $S(4|8)$.

Quiz

14. Im zweidimensionalen lässt sich ein Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination von $\vec{p}$ und $\vec{q}$ schreiben:
   - ☐ a. Nur wenn $\vec{p}$ und $\vec{q}$ zueinander senkrecht sind,
   - ☐ b. Immer wenn $\vec{p}$ und $\vec{q}$ zueinander kollinear sind,
   - ☐ c. Wenn $\vec{p}$ oder $\vec{q}$ zu $\vec{v}$ kollinear ist,
   - ☐ d. Immer wenn $\vec{p}$ und $\vec{q}$ linear unabhängig sind.
15. Zwei Geraden haben nur dann einen eindeutigen Schnittpunkt, wenn:
   - ☐ a. Die Richtungsvektoren kollinear sind,
   - ☐ b. Die Richtungsvektoren linear unabhängig sind,
   - ☐ c. Keines von beiden.

Kapiteltest

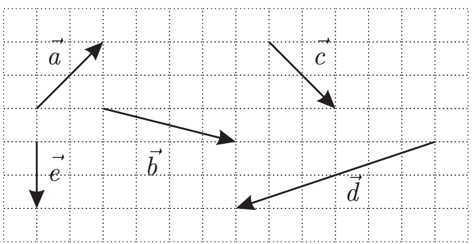
1. Können sich zwei Vektoren schneiden?
   - ☐ a. Ja, z. B. genau in der Mitte,
   - ☐ b. Nur wenn sie in verschiedene Richtungen zeigen,
   - ☐ c. Nein, weil sie ortsunabhängig sind,
   - ☐ d. Nein, weil sie vom gleichen Punkt ausgehen.

2. Welche Aussagen sind richtig?
   - ☐ a. Vektoren bestehen immer aus zwei Zahlen.
   - ☐ b. Vektoren haben eine feste Richtung.
   - ☐ c. Vektoren sind ortsunabhängig.
   - ☐ d. Vektoren gehen immer vom Nullpunkt aus.
   - ☐ e. Vektoren haben eine Länge.
   - ☐ f. Vektoren haben zwei oder drei Koordinaten.

3. Die Vektoren $\vec{a}, \dots, \vec{e}$ sind gegeben. Konstruiere daraus die folgenden Vektoren!

   (a) $2\vec{c} + \vec{d} - 3\vec{e}$ (c) $\vec{a} + 3\vec{e} - 2.5\vec{c}$

   (b) $(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{e})$ (d) $1.5(\vec{b} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{e})$



4. Schreibe die Vektoren $\vec{b}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

5. Das Dreieck ΔABC ist gegeben durch die Punkte:

$$A(4|-1|3), \quad B(8|3|-5), \quad C(12|7|-7).$$

   (a) Bestimme den Vektor $\overrightarrow{AM_a}$ und stelle die Geradengleichung für die Schwerelinie s_a auf.
   (b) Finde die Koordinaten des Schwerpunkts S.

6. (Siegerist, Wirth; p. 10) Gegeben sind die beiden Punkte $A(4|4|3)$ und $B(2|0|-1)$. Wo durchstösst die x-Achse die Kugel mit dem Durchmesser AB? Also: Welche Punkte der x-Achse liegen auf der Kugel?

   Hinweis: Die Kugel besteht aus allen Punkten, die vom Mittelpunkt M aus den gleichen Abstand haben!

7. Im Dreieck ΔABC liegt P in der Mitte von AC und Q in der Mitte von BC. Zeige, dass $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

8. Schreibe den Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ -7.9 \end{pmatrix}$$

9. Bestimme den Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h.

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3 Das Skalarprodukt

Inhalte dieses Kapitels

Neben der Addition und der Subtraktion von Vektoren lernst Du mit dem Skalarprodukt eine neue Operation kennen. Das Skalarprodukt ist eine erste Möglichkeit, um zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren und dient vor allem dazu, den *Winkel* zwischen den Vektoren zu bestimmen. Das Skalarprodukt wird Dir aber auch in weiteren Anwendungen immer wieder begegnen.

3.1 Einführung

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du das Skalarprodukt von zwei Vektoren aus deren Komponenten?
- ⋆ Welche Rechengesetze gelten für das Skalarprodukt?

Das Skalarprodukt ist die erste von zwei sinnvollen Möglichkeiten, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Der Name *Skalarprodukt* rührt daher, dass das *Ergebnis ein Skalar ist* (also eine Zahl) und *kein Vektor*! Das ist ein besonders wichtiger Punkt: Das Ergebnis des Skalarprodukts ist *immer* eine Zahl.

Weiter vorne haben wir gesagt, dass eine algebraische Multiplikation nur dann sinnvoll ist, wenn es dafür auch eine geometrische Anwendung gibt. Das Skalarprodukt hat eine solche Anwendung: Mit ihm lässt sich der *Zwischenwinkel* zwischen zwei Vektoren berechnen. Wie, das lernst du in diesem Kapitel. Zuerst schauen wir uns aber kurz das Skalarprodukt selber an.

Das Unerwartete dürfte sein, dass wir beim Skalarprodukt aufsummieren: Wir zählen die Multiplikationen zusammen:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3.$$

Durch dieses Aufsummieren bzw. Zusammenzählen entsteht am Schluss eben ein Skalar und nicht ein Vektor. Mit Zahlen sieht es so aus:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot(-1) + 1\cdot 5 + (-5)\cdot 3 = -13.$$

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren hier beträgt also -13.

Natürlich lässt sich das Skalarprodukt genauso gut für zweidimensionale Vektoren berechnen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 \\ -8 \end{pmatrix} = 4\cdot 1.5 + (-2)\cdot(-8) = 6 + 16 = 22.$$

Manchmal brauchen wir das Skalarprodukt ohne das Minuszeichen: Wir wollen also das Vorzeichen am Schluss wegmachen. Dazu verwenden wir Beträge. $|-13| = 13$, oder:

$$|\vec{p}\cdot\vec{q}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = |-13| = 13.$$

$$|\vec{p}\cdot\vec{q}| \neq |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$$

Ein kleiner aber wichtiger Unterschied: Auf der linken Seite steht der Betrag einer *Zahl* (weil das Skalarprodukt eine Zahl ergibt). Auf der rechten Seite sind es die Beträge von *Vektoren*, also das Produkt von zwei Längen.

Achtung: Diese Beträge hier haben nichts mit Längenberechnung zu tun! Unterscheide also zwischen dem Betrag einer Zahl (Minuszeichen wegschneiden) und dem Betrag eines Vektors (Länge berechnen). Besonders im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt passieren hier häufig Fehler.

Rechengesetze Es ist wichtig, dass du das Skalarprodukt klar von der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen unterscheidest. Dennoch gibt es zwei wichtige Rechengesetze, die auch für das Skalarprodukt gelten: Das (bereits bekannte) *Kommutativgesetz* und das (neue) *Distributivgesetz*.

Das *Kommutativgesetz* besagt auch hier, dass die Reihenfolge beim Skalarprodukt keine Rolle spielt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Das *Distributivgesetz* regelt das *Ausmultiplizieren* (Klammern auflösen):

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Achtung: Bei der Addition hatten wir noch das *Assoziativgesetz*. Das gilt hier aber *nicht*!

$$\underbrace{\overbrace{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}^{\text{Zahl}}\cdot\vec{c}}_{//\,\vec{c}}\neq\underbrace{\vec{a}\cdot\overbrace{\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)}^{\text{Zahl}}}_{//\,\vec{a}}.$$

Links steht ein Vektor, der kollinear zu $\vec{c}$ ist. Rechts ist ein zu $\vec{a}$ kollinearer Vektor ($\vec{a}\cdot\vec{b}$ bzw. $\vec{b}\cdot\vec{c}$ sind ja einfach Zahlen, die den Vektor ausserhalb der Klammer strecken). Dabei können $\vec{a}$ und $\vec{c}$ in völlig verschiedene Richtungen zeigen.

Definition *Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist:*

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+v_3\cdot w_3$$

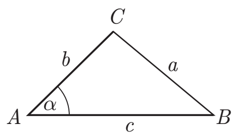
Quiz

1. Das Skalarprodukt trägt seinen Namen, weil:
   - ☐ a. Nur Skalare miteinander multipliziert werden,
   - ☐ b. Das Ergebnis immer ein Skalar ist,
   - ☐ c. Es der Multiplikation mit einem Skalar entspricht,
   - ☐ d. Keines von oben.
2. Wenn du zu einem Vektor $\vec{a}$ das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{a}$ berechnest, dann ist das Resultat:
   - ☐ a. $2\cdot\vec{a}$,
   - ☐ b. $2\cdot|\vec{a}|$,
   - ☐ c. $|\vec{a}|^2$,
   - ☐ d. 0.

3.2 Der Cosinussatz

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie kannst du den Winkel in einem Dreieck aus nur zwei Dreiecksseiten berechnen?
- ⋆ Wie berechnest du den Zwischenwinkel zwischen zwei Vektoren?



Mit dem Cosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ *kannst du aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel die dritte Dreiecksseite ausrechnen.*

Erinnerst du dich an den Cosinussatz? Er erlaubt dir, aus den drei Seitenlängen des Dreiecks einen Winkel im Dreieck auszurechnen. In der Version

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

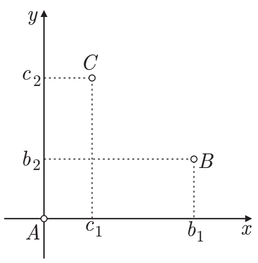
lässt sich z. B. der Winkel α ausrechnen. In diesem Abschnitt geht es darum, aus dem Cosinussatz eine neue Version herzuleiten, die auf Vektoren zugeschnitten ist.

Ein erstes Beispiel Unser Dreieck ist zunächst nicht mit den Seitenlängen a, b und c gegeben, sondern durch die Punkte im Koordinatensystem:

$$A(2|-1), \qquad B(8|1), \qquad C(5|4).$$

Daraus kannst du aber recht schnell die Seitenlängen berechnen. Schliesslich gilt z. B. $c = |\overrightarrow{AB}|$. Berechne die drei Seitenlängen und vor allem die drei Winkel α, β und γ für das oben angegebene Dreieck!

Du solltest als Ergebnis $\alpha \approx 40.6°$ erhalten.



Wir setzen den Punkt A in den Urpsrung, um die Rechnungen zu vereinfachen.

Der Allgemeine Fall Nach diesem Beispiel rrechnen wir das ganze noch allgemein aus und versuchen, Formeln zu finden, die immer gelten. Damit die Sache nicht zu kompliziert wird, setzen wir den Punkt A in den Ursprung. Die zwei anderen Punkte sind aber allgemein gegeben: $B(b_1|b_2)$ und $C(c_1|c_2)$. Wiederum wollen wir aus diesen Koordinaten den Winkel α berechnen. Dieses Mal ist das Ergebnis aber eine Formel und keine Zahl mehr.

Wenn wir die Formel oben umstellen, erhalten wir:

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2.$$

Oder in Vektorenschreibweise:

$$2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos(\alpha) = \underbrace{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2}_{Ⓡ}$$

Mit den Punkten A, B und C erhalten wir die Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Auf der linken Seite ändern wir nichts. Berechne den Ausdruck auf der rechten Seite Ⓡ mit den angegebenen (allgemeinen) Vektoren. Dein Ergebnis sollte dann die folgende Form haben:

$$2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\alpha) = 2\,(\underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}).$$

Erkennst du den Ausdruck in der Klammer rechts? Es ist das Skalarprodukt aus dem letzten Abschnitt. Genauer $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$.

Zum Skalarprodukt Dank dem Cosinussatz kannst du in einem Dreieck ΔABC den Winkel α berechnen. Wenn du mit Vektoren arbeitest, dann genügen sogar *zwei Seiten*, um den Zwischenwinkel zu berechnen:

$$|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\alpha) = \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Beachte: Links werden nur die Beträge (Längen) der Vektoren miteinander multipliziert. Rechts steht das Skalarprodukt.

Diese Skalarprodukt-Formel ist enorm wichtig und wird ab jetzt immer wieder vorkommen. Natürlich funktioniert sie analog für andere Vektoren und Zwischenwinkel, etwa:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Hinweis: Den Cosinussatz haben wir verwendet, um die Skalarproduktformel herzuleiten. Ab jetzt wirst du den Cosinussatz praktisch nicht mehr direkt brauchen, sondern mit dieser neuen Formel arbeiten.

Der Zwischenwinkel zweier Vektoren In der Anwendung wirst du selten mit Dreiecken rechnen. Meistens hast du zwei Vektoren gegeben und sollst nun den Zwischenwinkel berechnen. Auch hier gilt die selbe Formel wie bei den Dreiecken.

Satz (Zwischenwinkel-Formel) *Den Zwischenwinkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnest du über:*

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel 1: Wie gross ist der Zwischenwinkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für die Formel brauchen wir das Skalarprodukt und die Beträge der beiden Vektoren. Also:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 12 \cdot 10 + 1 \cdot (-25) + (-12) \cdot 2 = 71 \\ |\vec{u}| &= \sqrt{12^2 + 1^2 + (-12)^2} = 17 \\ |\vec{v}| &= \sqrt{10^2 + (-25)^2 + 2^2} = 27 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Formel:

$$\cos(\varphi) = \frac{71}{17 \cdot 27} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx \arccos(0.155) \approx 81.1°.$$

◁

Schliesslich funktioniert die Formel auch umgekehrt: Du kannst das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zweier Vektoren berechnen, wenn du die Beträge (Längen) und den Zwischenwinkel φ der beiden Vektoren kennst.

Quiz

3. Für zwei Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ gilt gerade: $\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$. Wie gross ist dann der Zwischenwinkel?

   - ☐ a. $45°$
   - ☐ b. $60°$
   - ☐ c. $90°$
   - ☐ d. Das lässt sich nicht allgemein sagen.

4. Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier kollinearer Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist immer:

   - ☐ a. -1 oder 1,
   - ☐ b. 0,
   - ☐ c. Entweder $|\vec{a}|$ oder $|\vec{b}|$,
   - ☐ d. Gleich wie $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

3.3 Senkrechte Vektoren

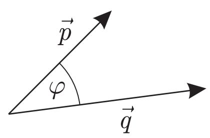
Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was bedeuten die Begriffe *orthogonal* und *normal*?
- ⋆ Wie findest du am einfachsten heraus, ob zwei Vektoren zueinander senkrecht sind?
- ⋆ Wie kannst du zu einem beliebigen Vektor einen dazu senkrechten Vektor angeben?

Im letzten Abschnitt haben wir folgende Formel aus dem Cosinussatz hergeleitet:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos(\varphi).$$

Wenn du zwei beliebige Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ gegeben hast, dann kannst du damit den Zwischenwinkel φ berechnen. Das funktioniert sowohl in 2 als auch in 3 Dimensionen.



Mit dem Skalarprodukt kannst du den Zwischenwinkel φ berechnen.

Ein besonders wichtiger Fall ist $\varphi = 90°$. Oder: Wann stehen zwei Vektoren senkrecht zueinander? Weil $\cos(90°) = 0$ ist, reduziert sich die Formel oben auf:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 90°.$$

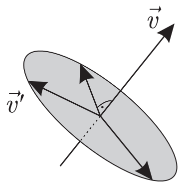
Also: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Neben *senkrecht* sind auch die gleichwertigen Bezeichnungen *orthogonal* und *normal* üblich. Besonders oft wirst du dem Begriff *Normalenvektor* für einen senkrechten Vektor begegnen.

Orthogonale Vektoren konstruieren Du hast bereits gelernt, einen Vektor um $90°$ zu drehen. Wir berechnen nun das Skalarprodukt zwischen einem Vektor $\vec{a}$ und dem gedrehten Vektor $\vec{a}'$:

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = x \cdot y + y \cdot (-x) = xy - xy = 0.$$

Damit haben wir das Resultat von vorhin nochmals bewiesen: Wenn du x und y miteinander vertauschst und *ein* Vorzeichen änderst, dann entsteht ein senkrechter Vektor.



Im Dreidimensionalen ist die Richtung eines orthogonalen Vektors $\vec{v}'$ nicht mehr festgelegt: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten. Drei sind hier eingezeichnet.

Funktioniert dieses Verfahren auch für dreidimensionale Vektoren? Kannst du auch im dreidimensionalen Raum zu einem gegebenen Vektor einen dazu senkrechten Vektor konstruieren? Im Prinzip würde das gehen. Aber: Es würde dir nichts bringen!

Im dreidimensionalen Fall gibt es nämlich unendlich viele Richtungen, die zu einer vorgegebenen Richtung senkrecht stehen. Welche ist nun die Richtige?

Quiz

5. Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren Null ist, dann sind die Vektoren:
   - ☐ a. Senkrecht,
   - ☐ b. Normal,
   - ☐ c. Kollinear,
   - ☐ d. Orthogonal.

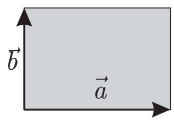
3.4 Projektionen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist der Unterschied zwischen einer Projektion und einer Drehung?
- ⋆ Was hat das Skalarprodukt mit Projektionen zu tun?
- ⋆ Wie kannst du mit dem Skalarprodukt einen Vektor in eine bestimmte Richtung projizieren?

Das Skalarprodukt ist ganz nützlich, um Zwischenwinkel zu berechnen. Aber was kannst du dir konkret unter dem Skalarprodukt vorstellen? Diese Frage lässt sich nicht mehr so einfach beantworten: Das Skalarprodukt ist etwas abstraktes und es gibt keine offensichtliche geometrische Interpretation dafür. In diesem Abschnitt wollen wir trotzdem versuchen, einen geometrischen Zugang zu finden.

Streckenlängen und Rechtecksflächen Aus der klassischen Geometrie weisst du: Wenn du zwei Strecken miteinander multiplizierst, dann erhältst du den Flächeninhalt des entsprechenden Rechtecks. Wäre es da nicht logisch, wenn das auch mit Vektoren so wäre?



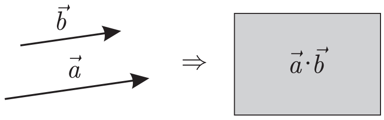
Wenn zwei Vektoren die Seiten eines Rechtecks bilden, kannst du mit den Beträgen die Fläche ausrechnen:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = A_{\square}$$

Mit dem Skalarprodukt geht das allerdings nicht. Warum?

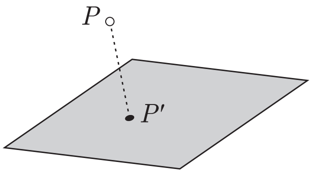
Mit dem Betrag kannst du von einem Vektor die Länge berechnen. Multiplizierst du dann die Längen zweier Vektoren, dann ergibt sich eine „Rechtecksfläche“ wie bei den Strecken. Was ändert sich nun beim Skalarprodukt? Was ist der Unterschied zwischen $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

Das Skalarprodukt kann die Fläche eines Rechtecks nur berechnen, wenn die beiden Vektoren in die gleiche Richtung zeigen. Das klingt zwar paradox, ist aber tatsächlich so:



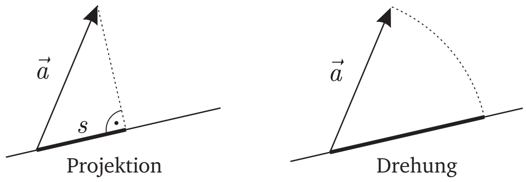
Für Vektoren mit der gleichen Richtung gilt also: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Und wenn die beiden Vektoren *nicht* in die gleiche Richtung zeigen? Dann ändert das Skalarprodukt einen Vektor so ab, dass die Richtung nachher gleich ist. Und zwar geschieht das mit einer *Projektion*.

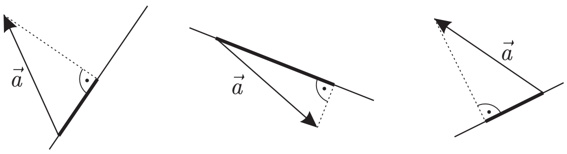


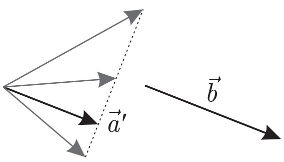
Projektionen kommen in den unterschiedlichsten Zusammenhängen vor und sind sehr wichtig. Hier wird ein Punkt P auf eine Ebene projiziert.

Projektionen Eine Projektion ist ein „Schattenwurf." Der Pfeil wird nicht auf die Grundlinie *gedreht*, sondern *rechtwinklig nach unten gezogen*. Stell dir vor, dass von links oben das Licht auf den Pfeil fällt. s ist dann der Schatten des Pfeils.



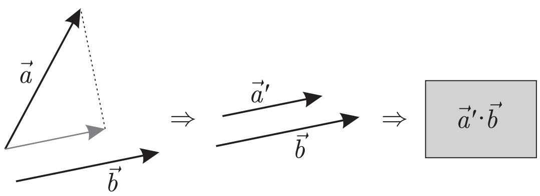
Ganz egal, wie der Pfeil und die Grundlinie liegen: Der Pfeil wirft seinen Schatten immer *senkrecht zur Grundlinie.*





Wie der Vektor $\vec{a}$ genau liegt, ist für das Skalarprodukt unerheblich: Er wird sowieso in die Richtung von $\vec{b}$ projiziert.

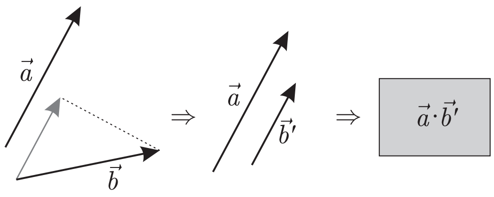
Die Projektion des Skalarprodukts Das Skalarprodukt hat im Prinzip zwei Schritte, die fest miteinander verbunden sind. Zuerst wird der Vektor $\vec{a}$ so projiziert, dass er in die Richtung von $\vec{b}$ zeigt. Dieser projizierte Vektor $\vec{a}'$ wird dann mit $\vec{b}$ zu einer Rechtecksfläche verrechnet.



Es ist nicht wirklich möglich, diese beiden Schritte zu trennen: Das Skalarprodukt macht beides in einem! Zudem gilt hier natürlich: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{b}$. Dem Skalarprodukt ist dabei egal, ob der Vektor $\vec{a}$ bereits projiziert wurde.

Woher aber weisst du, welcher der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ projiziert (und damit verkürzt) wird? Es spielt keine Rolle! Das Resultat am Schluss ist das gleiche.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}'$$



Wenn übrigens die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander senkrecht stehen, dann verschwindet die Projektion (der Schatten) von $\vec{a}$ (bzw. von $\vec{b}$). Damit ergibt sich dann auch wieder der wichtige Grundsatz:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

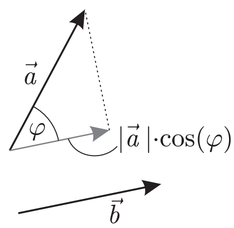
Ein Blick ins Skalarprodukt Mit der Winkelformel können wir sogar einen Blick „ins“ Skalarprodukt hineinwerfen und sehen, wie es arbeitet.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \underbrace{|\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)}_{=|\vec{a}'|}$$

Mit dem Cosinus wird zuerst die Schattenlänge von $\vec{a}$ berechnet. Dann werden die beiden Teile wie Strecken (d. h. eben nur die Längen) miteinander multipliziert.

Wenn du die Formel umstellst, dann wird zuerst $\vec{b}$ projiziert. Das Ergebnis ist aber das gleiche.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}_{=|\vec{b}'|}$$



Die Schattenlänge $|\vec{a}'|$ lässt sich auch mit dem Cosinus des Zwischenwinkels φ berechnen. Dazu braucht man allerdings diesen Zwischenwinkel φ. Das Skalarprodukt macht das automatisch.

Vektoren projizieren Für viele Aufgaben wäre es sehr praktisch, wenn wir einen Vektor auf eine Gerade bzw. in eine spezielle Richtung projizieren könnten. Aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wollen wir also nicht die Fläche des Rechtecks, sondern den Vektor $\vec{a}'$.

Weil das Skalarprodukt das Projizieren und das Multiplizieren in einem durchführt, können wir den projizierten Vektor

$\vec{a}'$ nicht so einfach herauslesen. Es gibt aber eine Möglichkeit, um immerhin herauszufinden, wie lang $\vec{a}'$ ist. Für das Skalarprodukt gilt ja:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}'\cdot\vec{b} = |\vec{a}'|\cdot|\vec{b}|$$

Die Länge von $\vec{a}'$ erhalten wir also, wenn wir das Skalarprodukt durch die Länge von $|\vec{b}|$ teilen. Anschaulich: Wenn wir die Rechteckfläche durch die Seite b teilen, dann erhalten wir die Länge der Seite a'. Zwar haben wir nicht den Vektor $\vec{a}'$ selber, aber immerhin seine Länge.

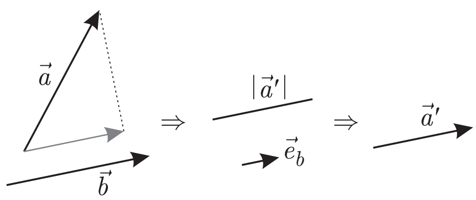
$|\vec{a}'| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Aus dem Skalarprodukt (der Rechtecksfläche) und der Seitenlänge $|\vec{b}|$ können wir die Länge von $\vec{a}'$ berechnen.

Jetzt kommt uns die Vektorzerlegung zu Hilfe. Erinnerst du dich, dass du jeden Vektor in seine Länge und seine Richtung zerlegen kannst? Umgekehrt kannst du aus einer Länge und einer Richtung auch wieder einen neuen Vektor basteln. Genau das tun wir jetzt mit der Länge $|\vec{a}'|$ und der Richtung $\vec{e_b}$:

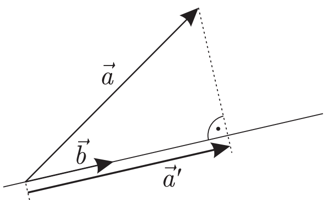
$$\vec{a}' = |\vec{a}'|\cdot\vec{e_b}.$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\vec{a}'$ und $\vec{b}$ in die selbe Richtung zeigen. Also können wir für $\vec{a}'$ einfach die Richtung von $\vec{b}$ verwenden.



Die einzelnen Schritte können wir auch zu einer einzigen Formel zusammenhängen:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\vec{e_b}$$



Hier ist $\vec{b}$ der Richtungsvektor einer Geraden. Dann kannst du jetzt den Vektor $\vec{a}$ auf diese Gerade projizieren und den Vektor $\vec{a}'$ ausrechnen.

Gelegentlich wird das $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ zu einem $\vec{e_b}$ zusammengefasst oder $\vec{e_b}$ wird umgekehrt erweitert.

$$\vec{a}' = (\vec{a}\cdot\vec{e_b})\cdot\vec{e_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Immer wenn du den Vektor $\vec{a}$ in die Richtung eines Vektors $\vec{b}$ projizieren willst, spielt ja nur die Richtung von $\vec{b}$ eine Rolle.

So kommt es, dass wir von $\vec{b}$ auch nur die Richtung (also den *Einheitsvektor*) benötigen: $\vec{e_b}$.

Zum Schluss noch eine Anmerkung: Wenn wir das Skalarprodukt als Fläche eines Rechtecks auffassen wie hier, dann wird auch klar, warum das Ergebnis immer eine Zahl sein muss und nicht ein Vektor! Flächeninhalte haben keine Richtung.

Zusammenfassung In der klassischen Geometrie wird mit der Multiplikation aus zwei Streckenlängen eine Rechteckfläche. In der Vektorgeometrie berechnet das Skalarprodukt aber nicht mehr nur eine Rechteckfläche. Das Skalarprodukt führt vor allem zuerst eine *Projektion* durch. Diese Projektion ist es dann auch, die das Skalarprodukt so nützlich macht.

Anstatt mit dem Skalarprodukt zu rechnen, könntest du auch überall zuerst die Winkel bestimmen und dann mit der Trigonometrie arbeiten. Das Skalarprodukt nimmt dir aber in vielen Fällen die Arbeit mit den Winkeln und der Trigonometrie ab. Konkret: Ohne das Skalarprodukt müsstest du immer zuerst die Beträge der Vektoren ausrechnen, Zwischenwinkel bestimmen und dann mit der Winkelformel arbeiten.

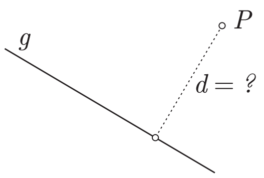
Quiz

6. Das Skalarprodukt $\vec{e_u} \cdot \vec{e_v}$ zweier Einheitsvektoren:
   - ☐ a. Entspricht dem Zwischenwinkel φ,
   - ☐ b. Entspricht dem Cosinus des Zwischenwinkels $\cos(\varphi)$,
   - ☐ c. Ist immer 0 oder 1,
   - ☐ d. Liegt immer zwischen 0 und 1.
7. Welche Aussagen sind richtig?
   - ☐ a. Projektionen erhalten die Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$.
   - ☐ b. Projektionen sind spezielle Drehungen.
   - ☐ c. Projektionen erfolgen immer rechtwinklig zur Grundlinie/-fläche.
   - ☐ d. Projektionen erhalten die Richtung eines Vektors: $\vec{e_a} = \vec{e_{a'}}$.

3.5 Abstandsprobleme

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Auf welche zwei Arten kannst du den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden berechnen?
- ⋆ Wie kannst du die Fläche eines Dreiecks berechnen?



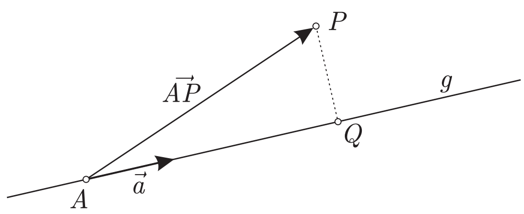
Wie weit sind der Punkt P und die Gerade g voneinander entfernt?

Die Idee der Projektion aus dem letzten Abschnitt machen wir uns jetzt zunutze, um folgendes Problem zu lösen:

Gegeben sind die Gerade g und der Punkt P. Wie gross ist der *Abstand* zwischen P und g? Oder: Welcher Punkt $Q \in g$ kommt P am nächsten?

Der Abstand entspricht immer der kürzesten Verbindung. Wenn du also Q kennst, dann ist es ein einfaches, den Abstand zwischen P und g auszurechnen. Unsere erste Lösung für das Problem zielt darauf ab, Q zu berechnen.

Zu einer Geraden gehört immer ein Aufhängepunkt A und ein Richtungsvektor $\vec{a}$. Wenn wir diese zusammen mit dem Vektor $\overrightarrow{AP}$ einzeichnen, ergibt sich folgendes Bild:



Kommt dir das Bild bekannt vor? Siehst du die Ähnlichkeit zur Projektion im letzten Abschnitt? Wir müssen eigentlich nur die „Schattenlänge“ von $\overrightarrow{AP}$ bestimmen und kommen dann fast automatisch auf Q.

Die Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf die Gerade g können wir mit dem Skalarprodukt berechnen. Aber Vorsicht! Wir projizieren $\overrightarrow{AP}$ auf „$\vec{a}$“ – im Skalarprodukt müssen wir $\vec{a}$ daher zuerst in einen Einheitsvektor verwandeln!

$$AQ = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{e_a} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Auf Q selber kommen wir mit $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$. Bisher haben wir erst die Länge von $\overrightarrow{AQ}$. Wir multiplizieren also nochmals mit $\vec{e_a}$:

$$\overrightarrow{AQ} = AQ \cdot \vec{e_a} = \frac{(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

Damit kannst du jetzt Q und anschliessend die gesuchte Distanz d berechnen.

Abstände Wenn wirklich nur die Distanz zwischen P und der Geraden g gesucht ist, interessiert uns der Punkt Q vielleicht gar nicht. Für diesen Fall suchen wir nun eine direktere Formel, die ohne Q auskommt.

Die kürzeste Verbindung zwischen dem Punkt P und der Geraden g steht senkrecht zu g: Das Dreieck ΔAQP hat also bei Q einen rechten Winkel. Daher gilt mit dem Pythagoras:

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2}.$$

Mit dem Skalarprodukt schreiben wir den Vektor $\overrightarrow{AQ}$ so um, dass Q nicht mehr vorkommt (siehe oben):

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{e_a}\right) \cdot \vec{e_a}.$$

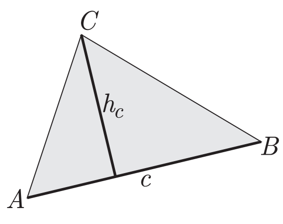
Wie lang ist dieser Vektor $\overrightarrow{AQ}$? Für den Pythagoras brauchen wir ja nur den Betrag des Vektors und der ist $|\overrightarrow{AQ}| = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{e_a}$. Damit bekommen wir folgende Formel für die Distanz:

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{e_a}\right)^2}$$

Dreiecksflächen berechnen Die Abstandsberechnungen verwenden wir jetzt, um die Fläche eines Dreiecks zu berechnen. Vom Dreieck ΔABC kennst du dabei die Koordinaten der Punkte A, B und C. Zudem magst du dich natürlich noch an die Formel für die Dreiecksfläche erinnern:

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}(g \cdot h),$$

wobei g die Grundlinie und h die entsprechende Höhe ist.



Die Dreiecksfläche berechnet sich aus einer Grundseite und der entsprechenden Höhe, z. B.: c und h_c.

Was hat aber die Dreiecksfläche mit Abständen zu tun? Die Höhe h_c in einem Dreieck gibt gerade den Abstand des Punktes C von der Gerade AB an. Genauso entspricht h_a dem Abstand von A zu BC. Die Höhe, die wir für die Flächenformel brauchen, können wir also mit der Abstandsformel oben berechnen:

$$h = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}.$$

Diese Höhe multiplizieren wir mit $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$, um die Fläche zu berechnen. Mit etwas umformen kommst du schliesslich auf die folgende Formel:

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Quiz

8. In einem Dreieck ΔABC ist $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Mit welchen Ausdrücken lässt sich dann die Fläche A berechnen?

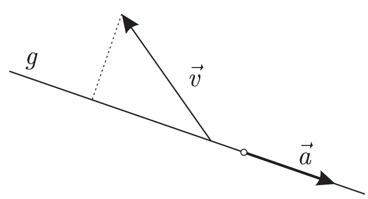
   ☐ a. $\frac{1}{2}|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\alpha)$,

   ☐ b. $\frac{1}{2}|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\alpha)$,

   ☐ c. $\frac{1}{2}|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$,

   ☐ d. $\frac{1}{2}|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{c}}$

9. Du möchtest den Vektor $\vec{v}$ auf die Gerade g projizieren. Bei der Geraden g zeigt der Richtungsvektor aber in die „falsche Richtung.“ Gibt dann $\vec{v} \cdot \vec{e_a}$ immernoch die Schattenlänge s an?



   ☐ a. Ja, die Formel funktioniert immer,

   ☐ b. Nein, die Formel gilt nicht mehr unbedingt,

   ☐ c. Im Prinzip ja, aber $\vec{v} \cdot \vec{e_a}$ wird negativ,

   ☐ d. Das lässt sich nicht allgemein sagen.

4 Geraden

Inhalte dieses Kapitels

Geraden sind nichts Neues: Du bist ihnen schon einige Male begegnet. In diesem Kapitel werfen wir einen genaueren Blick darauf. Dabei geht es insbesondere um die gegenseitige Lage zweier Geraden: Sind sie parallel oder schneiden sie sich in einem Punkt?

4.1 Darstellungsformen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

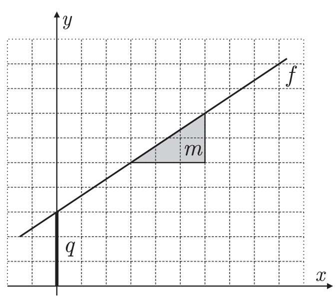
- ⋆ Welche zwei grundsätzlichen Möglichkeiten gibt es, um eine Gerade in der Ebene algebraisch zu beschreiben?
- ⋆ Wie kommst du von der Parameterform auf die Koordinatenform oder umgekehrt?

Es gibt zwei verschiedene Arten, im zweidimensionalen eine Gerade algebraisch zu beschreiben. Du kennst auch schon beide Arten: Mit Vektoren oder mit einer linearen Funktion.

Lineare Funktionen Wie ging das nochmals mit linearen Funktionen? (Hoffentlich magst du dich erinnern: Lineare Funktionen sind sehr wichtig). Für die Funktionsgleichung

$$y = mx + q$$

einer linearen Funktion brauchst du die *Steigung* m und den *y-Achsenabschnitt* q einer Geraden. Die Steigung m ist meistens ein Bruch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



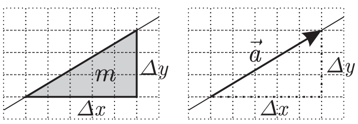
Bei der Funktionsgleichung beschreiben wir eine Gerade f durch die Steigung m und den y-Achsenabschnitt q.

Parameterform Der Punkt P liegt auf deiner Geraden. Wenn du von P bereits eine Koordinate hast (z. B. x), dann kannst du mit der Funktionsgleichung sehr einfach die andere Koordinate berechnen.

Mit Vektoren haben wir da einen anderen Ansatz: Wie berechnen beide Koordinaten gleichzeitig aus einem *Parameter* s:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{r_P}} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}.$$

Dabei ist A der Anfangs- oder *Stützpunkt* und $\vec{a}$ der *Richtungsvektor*. Den Vektor $\overrightarrow{r_P}$ bezeichnen wir oft auch mit $\vec{r}$. Hier musst du den Streckfaktor bzw. *Parameter* s kennen, um schliesslich auf den Punkt $P(x|y)$ zu kommen. Diese Form einer Gerade mit Vektoren heisst die *Parameterform* oder *Parametergleichung*.



Die selbe Gerade links mit der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}$ *und rechts mit dem Vektor* $\vec{a} = \binom{5}{3}$.

Umwandlungen Es ist nicht so schwer, die eine Form in die andere umzuwandeln. Wie du das machst, lernst du jetzt.

Am einfachsten ist es, den Richtungsvektor $\vec{a}$ in eine Steigung zu verwandeln und umgekehrt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Es sind die gleichen Zahlen – einmal als Vektor und einmal als Bruch aufgeschrieben. Natürlich kannst du noch kürzen oder erweitern.

Wenn du eine lineare Funktion gegeben hast, dann nimmst du einfach den Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|q)$ als Stützpunkt für die Parameterform.

Beispiel 1: Wir haben die lineare Funktion $y = \frac{2}{3}x - 5$. Dann ist die Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

◁

Um von der Parameterform auf die lineare Funktion zu kommen, musst du von der Parameterform den Stützpunkt A in die Funktionsgleichung einsetzen und q ausrechnen.

Beispiel 2: Aus der Parameterdarstellung

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Steigung $m = \frac{-5}{2}$. Wir setzen den Punkt $P(4|3)$ ein, um q auszurechnen:

$$y = -\frac{5}{2} \cdot x + q \quad \Rightarrow \quad 3 = -\frac{5}{2} \cdot 4 + q \quad \Rightarrow \quad q = 13.$$

Damit ergibt sich die Funktionsgleichung $y = -\frac{5}{2}x + 13$.

$\triangleleft$

In diesem Beispiel könnten wir die letzte Gleichung schliesslich noch in eine andere Form bringen:

$$5x + 2y - 26 = 0.$$

Diese Form heisst die *Koordinatenform* oder *Koordinatengleichung* der Geraden.

Die Koordinatengleichung Der Unterschied zwischen der Koordinatengleichung und der Funktionsgleichung ist folgender: Bei der Funktionsgleichung wird die Gleichung nach y aufgelöst. Bei der Koordinatengleichung wird alles auf eine Seite gebracht.

$$\underbrace{y = mx + q}_{\text{Funktionsgleichung}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{Koordinatengleichung}} .$$

Leider kann nicht jede Gerade mit einer Funktionsgleichung dargestellt werden: Eine Gerade, die parallel zur y-Achse (also senkrecht nach oben) verläuft, lässt sich nicht in die Form $y = \ldots$ bringen (Warum geht das nicht?).

Allerdings lässt sich jede Gerade in der Ebene mit einer Koordinatengleichung schreiben. Deshalb verwenden wir meistens die Form $ax + by + c = 0$ anstelle von $y = mx + q$. An sich sind aber beide Formen ziemlich gleichwertig (bis auf die oben angegebene Ausnahme).

Quiz

1. Die Gerade zur Koordinatengleichung $x + y = 0$:

   ☐ a. Geht durch den Ursprung,

   ☐ b. Hat die Steigung $m = 1$,

   ☐ c. Ist eine senkrechte Gerade nach oben,

   ☐ d. Lässt sich nicht mit Vektoren schreiben.

2. Welche Steigung m gehört zur Geraden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

   ☐ a. $m = -1$,

   ☐ b. $m = 0$,

   ☐ c. $m = 2$,

   ☐ d. m lässt sich nicht berechnen.

4.2 Gleichungssysteme

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Woran erkennst du, ob ein Gleichungssysteme keine oder unendlich viele Lösungen hat?
- ⋆ Was bedeutet es, wenn du für zwei Geraden keinen Schnittpunkt berechnen kannst?

Gleichungssysteme haben nicht immer eine eindeutige Lösung. Wenn du zum Beispiel die selbe Gleichung zweimal aufschreibst, dann hast du noch kein „echtes“ Gleichungssystem. Versuchst du trotzdem, dieses System zu lösen, so bekommst du als Resultat „$0 = 0$“, „$1 = 1$“ oder etwas ähnliches.

Wir könnten aber auch zwei Gleichungen haben, die sich widersprechen. Etwa:

$$\left| \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 4 \\ 3x + 2y & = & 5 \end{array} \right|$$

Beim Lösen dieses Systems stossen wir auf „$4 = 5$“ oder einen ähnlichen Unsinn.

Für 2×2-Gleichungssysteme gibt es also drei Fälle:

- Das Resultat ist ein eindeutiges Zahlenpaar (z. B. $(3, 1)$).
- Das Resultat ist immer richtig (z. B. $0 = 0$). Dann gibt es unendlich viele Lösungen.
- Das Resultat ist immer falsch (z. B. $0 = 1$). Dann gibt es keine Lösung.

Doch was haben Gleichungssysteme mit Geraden zu tun? Sie entstehen ganz automatisch, wenn du den *Schnittpunkt* zweier Geraden g und h berechnen möchtest. Und auch da gibt es im zweidimensionalen drei mögliche Fälle:

- g und h schneiden sich in einem eindeutigen Schnittpunkt.

- $g = h$. Dann ist jeder Punkt auf g bzw. h ein „Schnittpunkt“. Es gibt also unendlich viele Lösungen.
- g und h sind parallel zueinander. Dann gibt es keinen Schnittpunkt.

Diese drei Fälle passen genau zu den drei Fällen bei den Gleichungssystemen.

Beispiel 3: Du hast die beiden Geraden g und h vorgegeben:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achtung: Bei den beiden Parametern handelt es sich nicht um das gleiche s. Wenn du also den Schnittpunkt ausrechnest, musst du ein s durch ein t ersetzen!

Wir setzen die beiden Gleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und kommen so auf das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} 3 - 3s & = & 9 + 2t \\ 14 + 2s & = & 3 + t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} -3s - 2t & = & 6 \\ 2s - t & = & -11 \end{array} \right|$$

Auflösen ergibt die Lösung $(s = -4, t = 3)$. Achtung: Das ist noch nicht der Schnittpunkt! Der ergibt sich, wenn du nun s oder t in die Geradengleichung einsetzst:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(15|6).$$

Koordinatenform Die genau gleichen Geraden können wir auch in der Koordinatenform schreiben:

$$g : 2x + 3y - 48 = 0, \qquad h : x - 2y - 3 = 0$$

Wir suchen nun einen Punkt $S(x|y)$, der beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Damit lautet das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 48 \\ x - 2y & = & 3 \end{array} \right|$$

Mit der Lösung $(x = 15, y = 6)$. Hier entsprechen x und y gerade den Koordinaten des gesuchten Punkts, so dass $S(15|6)$ der Schnittpunkt ist.

◁

Beispiel 4: In diesem Beispiel schneiden wir die Gerade g von vorhin mit der neuen Geraden k:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k : \vec{r} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vielleicht siehst du bereits an den Richtungsvektoren, dass g und k parallel sind. Aber handelt es sich um ein und dieselbe Gerade oder sind sie wirklich parallel?

Wir schneiden:

$$\left| \begin{array}{rcl} 3 - 3s & = & 18 - 6t \\ 14 + 2s & = & 9 + 4t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} -3s + 6t & = & 15 \\ 2s - 4t & = & -5 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir mit $-\frac{2}{3}$ und erhalten damit das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2s - 4t & = & -10 \\ 2s - 4t & = & -5 \end{array} \right|$$

Auflösen ergibt dann z. B. $0 = 5$. Das heisst: Die beiden Geraden sind echt parallel und haben keinen einzigen gemeinsamen Punkt!

Koordinatenform Auch hier können wir mit der Koordinatenform arbeiten:

$$g : 2x + 3y - 48 = 0, \qquad k : 2x + 3y - 63 = 0.$$

Die Ähnlichkeit der beiden Geraden ist auch hier sichtbar. Wenn wir nun das Gleichungssystem für den Schnittpunkt aufsetzen, ergibt sich:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 48 \\ 2x + 3y & = & 63 \end{array} \right|$$

Offensichtlich ergibt sich auch hier etwas sinnloses wie $0 = 15$. Und damit haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt.

◁

Es kann durchaus vorkommen, dass sich für zwei Geraden kein Schnittpunkt berechnen lässt. Am Ergebnis kannst du jetzt sogar ablesen, ob die beiden Geraden echt parallel oder eher identisch sind. Trotzdem bist du gut beraten, auch noch die Richtungsvektoren (oder Steigungen) kurz miteinander zu vergleichen, um Rechnungsfehler auszuschliessen. An den Richtungsvektoren erkennst du schliesslich auch, ob zwei Geraden parallel zueinander sind.

Quiz

3. Parallele Geraden haben immer:
   - ☐ a. Den gleichen Richtungsvektor,
   - ☐ b. Kollineare Richtungsvektoren,
   - ☐ c. Den gleichen Stützvektor,
   - ☐ d. Sowohl die Stütz- als auch Richtungsvektoren sind kollinear.
4. Du versuchst, zwei parallele Geraden miteinander zu schneiden. Welches Resultat könnte dabei herauskommen?
   - ☐ a. $4 = 3$,
   - ☐ b. $-8 = -8$,
   - ☐ c. $(2, 5)$,
   - ☐ d. Keines davon.
5. Du schneidest zwei Geraden miteinander und erhältst als Lösung $(3, 4)$. Gibt dieses Zahlenpaar die Koordinaten des Schnittpunkts an?
   - ☐ a. Ja, immer.
   - ☐ b. Nur, wenn die Geraden in Parameterform vorliegen.
   - ☐ c. Nur, wenn die Geraden in Koordinatenform vorliegen.
   - ☐ d. Nein, nie.

4.3 Schnittwinkel

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du den Winkel, unter dem sich zwei Geraden schneiden?

Zwei Geraden g und h schneiden sich. Wie du den Schnittpunkt ausrechnest, weisst du bereits. Zusätzlich sollst du aber auch den Winkel berechnen können, unter dem sich die beiden Geraden schneiden. Dazu müssen wir für die Koordinatenform und die Parameterform zwei völlig verschiedene Wege gehen. Für die Vektorgeometrie ist vor allem die Methode mit der Parameterform wichtig. In anderen Gebieten wirst du aber oft mit Funktionen arbeiten und deshalb zeigen wir hier auch diese Methode kurz.

Parameterform – Mit Vektoren Für den Schnittwinkel ist völlig egal, *wo* der Schnittpunkt ist. Das einzige, was eine Rolle spielt, sind die Richtungen der Geraden. Weisst du noch, wie du den Zwischenwinkel zweier Vektoren berechnest?

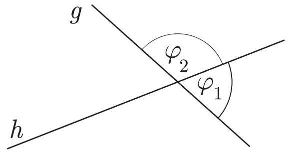
Du hast also zwei Geraden

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}, \qquad h : \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + s \cdot \vec{b}.$$

Dann ergibt sich der Zwischenwinkel φ durch die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Eine kleine Schikane kommt noch dazu. Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann gibt es zwei „Schnittwinkel.“ Wir suchen jeweils den *kleineren* der beiden Winkel. Wenn also φ grösser als $90°$ ist, dann musst du zuerst noch $180° - \varphi$ rechnen, um den gesuchten Winkel zu finden.



Zwei Geraden schneiden sich jeweils unter zwei sich ergänzenden Winkeln φ_1 und φ_2. Wir suchen meist den spitzen Winkel (hier φ_1).

Beispiel 5: Wir haben die beiden Geraden

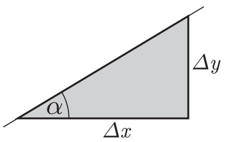
$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt liegt bei $S(9|5)$. Uns interessiert aber der Schnittwinkel φ:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4-9}{\sqrt{10} \cdot 5} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Für φ erhalten wir damit $\varphi \approx 108.435°$. Der gesuchte *kleinere* Zwischenwinkel ist also $180° - 108.435° = 71.656°$.

◁



Die Steigung m ist gerade der Tangens des Steigungswinkels α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Lineare Funktionen Die zweite Methode besprechen wir nicht für Koordinatengleichungen $ax + by + c = 0$, sondern für Funktionsgleichungen $y = mx + q$ (also so, wie du die Probleme meistens sowieso antriffst). Wandle dazu die Koordinatenform zuerst in die Funktionsgleichung um: Dadurch bekommst du vor allem auch die Steigung m. Aus der Steigung m lässt sich der *Steigungswinkel* α direkt berechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.$$

Nachdem du also die Steigunswinkel der beiden Geraden ausgerechnet hast, ergibt sich der Zwischenwinkel einfach als Differenz der beiden Winkel:

$$\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Auch hier bekommst du möglicherweise zuerst den grösseren Schnittwinkel und musst dann diesen in den kleineren umrechnen.

Beispiel 6: Die beiden Geraden sind hier in der Koordinatenform angegeben:

$$g : 3x - y - 22 = 0, \qquad h : 2x - 5y + 7 = 0.$$

Wir bringen sie daher zuerst in die Form $y = mx + q$, um die Steigung m ablesen zu können:

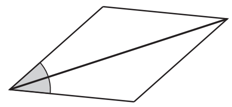
$$g : y = 3x - 22, \qquad h : y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}.$$

Für g erhalten wir mit $\tan(\alpha_1) = 3$ den Steigungswinkel $\alpha_1 \approx 71.57°$ und für h entsprechend $\alpha_2 \approx 21.80°$. Der Zwischenwinkel beträgt also $\varphi = 49.77°$.

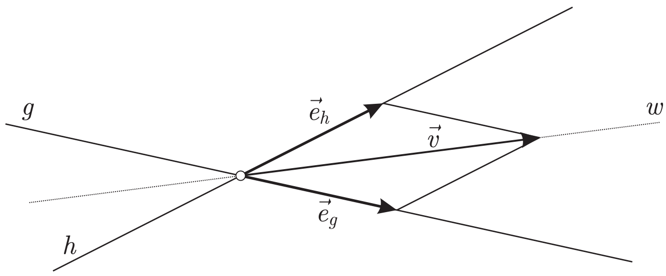
◁

Winkelhalbierende Zwei sich schneidende Geraden sind gegeben. Wir suchen dazu die Winkelhalbierende. Das erstaunliche dabei: Du kannst die Winkelhalbierende bestimmen, ohne einen einzigen Winkel auszurechnen oder gar zu halbieren!

Ein Rhombus ist ein spezielles Parallelogramm: Alle vier Seiten sind genau gleich lang. Gleichzeitig sind die Diagonalen des Rhombus auch die Winkelhalbierenden. Bei zwei Geraden müssen wir also aus den Richtungsvektoren einen solchen Rhombus basteln. Dazu müssen die beiden Richtungsvektoren gleich lang sein. Das erreichen wir zum Beispiel, indem wir Einheitsvektoren verwenden.



Im Rhombus entspricht eine Diagonale gerade der Winkelhalbierenden.



Wenn also $\vec{e_g}$ bzw. $\vec{e_h}$ die Einheits-Richtungsvektoren der beiden Geraden g und h sind, dann hat die eine Winkelhalbierende w den Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{e_g} + \vec{e_h}$. Als Stützpunkt für w verwendest du einfach den Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h.

Wichtig ist, dass die beiden Richtungsvektoren gleich lang sind! Dazu können sie aber irgendeine Länge haben und müssen nicht zwingend Einheitsvektoren sein. Wenn beide Richtungsvektoren schon von Anfang an die selbe Länge haben, dann hat es wenig Sinn, Einheitsvektoren daraus zu machen!

Übrigens gibt es immer noch eine zweite Winkelhalbierende, die rechtwinklig zur ersten Winkelhalbierenden steht. Auch diese zweite Winkelhalbierende lässt sich ziemlich einfach bestimmen.

Quiz

6. Welchen Winkel φ bilden die beiden Geraden

$$g : x = 3, \qquad h : x - y = 0?$$

- ☐ a. $\varphi = 0°$,
- ☐ b. $\varphi = 45°$,
- ☐ c. $\varphi = 90°$,
- ☐ d. φ lässt sich nicht berechnen, weil g keine Funktionsgleichung (und damit keine Steigung) hat.

7. Wenn zwei Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{e_g}$ und $\vec{e_h}$ sich schneiden, gibt es zwei Winkelhalbierende w und w'. Wie lässt sich der Richtungsvektor $\vec{v}'$ der zweiten Winkelhalbierenden w' bestimmen?

- ☐ a. $\vec{v}' = -(\vec{e_g} + \vec{e_h})$
- ☐ b. $\vec{v}' = \vec{e_g} - \vec{e_h}$
- ☐ c. $\vec{v}' = \vec{e_h} + \vec{e_g}$
- ☐ d. $\vec{v}' = \vec{e_h} - \vec{e_g}$

8. Welche Gerade steht senkrecht zu $4x - 7y + 1 = 0$?

- ☐ a. $7x - 4y + 1 = 0$,
- ☐ b. $4x + 7y + 1 = 0$,
- ☐ c. $7x + 4y + 1 = 0$,
- ☐ d. $\frac{4}{7}x - \frac{7}{4}y + 1 = 0$.

4.4 Punkte und Geraden

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie findest du heraus, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?
- ⋆ Wie spiegelst du einen Punkt an einer Geraden?

Zu einer Geraden g sind einige Punkte gegeben. Was wir wissen wollen: Liegen diese Punkte auf der Geraden g? Wie findest du das algebraisch heraus?

Du setzst die Koordinaten des Punktes $P(x|y)$ in die Geradengleichung ein. Wenn die Gleichung mit diesen Zahlen aufgeht, dann liegt der Punkt auf der Geraden, ansonsten nicht. Das funktioniert sowohl mit einer Koordinatengleichung als auch mit einer Parametergleichung.

Beispiel 7: Zu einer Geraden g gehören die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2x - 3y + 8 = 0.$$

Wir testen, ob die Punkte $P(11|10)$ bzw. $Q(8|6)$ auf g liegen. Mit einer Skizze siehst du schnell, dass P auf g liegt und Q nicht. Das sollte sich nun auch algebraisch bestätigen.

Parametergleichung Wir setzen die Koordinaten von P ein:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das gibt die beiden Gleichungen (x- bzw. y-Komponenten):

$$x : 11 = 2 + 3s, \qquad y : 10 = 4 + 2s.$$

Nach beiden Gleichungen ist $s = 3$. Sie vertragen sich also und damit liegt P auf g.

Nun zu $Q(8|6)$:

$$x : 8 = 2 + 3s, \qquad y : 6 = 4 + 2s.$$

Nach der ersten Gleichung ist $s = 2$, nach der zweiten $s = 1$. Die beiden Gleichungen vertragen sich also nicht und damit liegt Q auch nicht auf g!

Koordinatengleichung Auch bei der Koordinatengleichung setzen wir zunächst $P(11|10)$ ein:

$$\underbrace{2 \cdot 11 - 3 \cdot 10 + 8}_{=0} = 0.$$

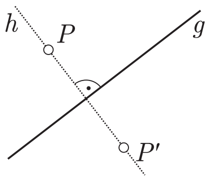
Auf beiden Seiten steht 0 – Die Gleichung geht auf und damit liegt P auf g.

Wir setzen $Q(8|6)$ ein:

$$\underbrace{2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 8}_{=6} = 0$$

Jetzt lautet die Gleichung $6 = 0$, was sicher nicht stimmt. Also liegt Q auch nicht auf g.

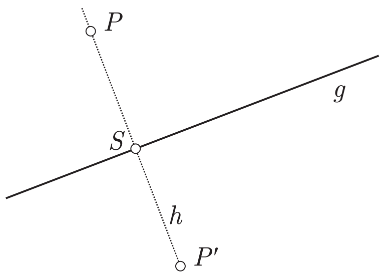
◁

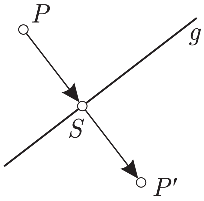


Um den Punkt P an der Geraden g zu spiegeln, zeichnest du eine senkrechte Gerade h, die durch P geht.

Spiegelungen Achsenspiegelungen liegen wohl schon eine ganze Weile zurück. Magst Du Dich erinnern, wie du einen Punkt an einer Geraden spiegelst? Die Grundidee lautet: Eine *senkrechte* Gerade zur Spiegelachse zeichnen!

Da wir mit Vektoren arbeiten, brauchen wir vor allem den Schnittpunkt S der Spiegelachse g mit der senkrechten Hilfsgeraden h.





Spiegeln mit Vektoren.

Wenn du den Punkt S hast, dann verschiebst du den Vektor $\overrightarrow{PS}$ von P nach S und kommst so ganz automatisch auf P'.

Beispiel 8: Wir spiegeln den Punkt $P(2|13)$ an der Geraden

$$g : 3x - 5y + 25 = 0.$$

1. Schritt: S bestimmen Die zu g senkrechte Gerade h hat die Koordinatengleichung

$$h : 5x + 3y + c = 0.$$

(Wie bei den Vektoren vertauschen wir die beiden Zahlen a und b, und ändern ein Vorzeichen). Diese Gerade h soll durch den Punkt P gehen: Damit bestimmen wir, wie gross das c sein muss.

$$h : 5 \cdot 2 + 3 \cdot 13 + c = 0 \qquad \Rightarrow c = -49.$$

S ist der Schnittpunkt von g und h. Damit ergibt sich $S(5|8)$.

2. Schritt: Spiegeln Die eigentliche Arbeit ist damit getan. Jetzt bestimmen wir noch den Vektor $\overrightarrow{PS}$ und damit P':

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir den gespiegelten Punkt $P'(8|3)$ gefunden.

◁

Das aufwändige ist also nicht das eigentliche Spiegeln, sondern den Punkt S zu finden. Es gibt im wesentlichen zwei Möglichkeiten, wie du auf S kommst. Zum einen kannst du eine Hilfsgerade h mit der Spiegelachse schneiden, wie im Beispiel vorhin. Oder du kannst den Punkt P auf die Gerade g projizieren. Wie das geht, hast du im Kapitel über das Skalarprodukt gesehen. Diese zweite Methode mit dem Skalarprodukt hat einen entscheidenden Vorteil: Sie funktioniert auch in drei Dimensionen!

Quiz

9. Wenn der Punkt B auf der Geraden $g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}$ liegt, dann:

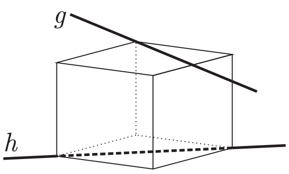
- ☐ a. Sind $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{a}$ kollinear,
- ☐ b. Sind $\overrightarrow{r_A}$ und $\overrightarrow{r_B}$ kollinear,
- ☐ c. Sind g und die Gerade $h : \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + t \cdot \vec{a}$ identisch,
- ☐ d. Schneiden sich $\overrightarrow{r_A}$ und $\overrightarrow{r_B}$.

4.5 Geraden im Raum

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist die einzige Möglichkeit, Geraden im Raum zu beschreiben?
- ⋆ Wann sind zwei Geraden zueinander *windschief*?
- ⋆ Nach welchem Schema bestimmst du die gegenseitige Lage zweier Geraden?

Nachdem wir die Geraden in der Ebene (also im zweidimensionalen) untersucht haben, schauen wir uns nun Geraden im Raum an. Dabei gibt es einen wesentlichen Unterschied: *Im Raum lässt sich eine Gerade nur mit Vektoren (Parameterform) beschreiben.* Es gibt keine Koordinatenform für Geraden im Raum!



Windschiefe Geraden sind weder parallel zueinander, noch schneiden sie sich.

Im Prinzip lassen sich der Schnittpunkt und der Zwischenwinkel zweier Geraden gleich berechnen wie im zweidimensionalen. Aber: Im Raum können zwei Geraden aneinander vorbeilaufen, ohne sich je zu schneiden und ohne parallel zu sein. Solche Geraden heissen *windschief* zueinander.

Ein einfaches Beispiel für zwei windschiefen Geraden g und h ist:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siehst du, dass sich die z-Komponente bei beiden Geraden nicht ändert? Bei g ist immer $z = 5$, bei h ist $z = 1$. Die Gerade g läuft also über h, ohne dass sich die beiden Geraden auch nur nahe kommen.

Übrigens: Da sich die z-Komponente nicht ändert, sind beide Geraden hier parallel zur xy-Ebene (Grundebene bzw. „Boden“). Mehr noch: h ist sogar parallel zur x-Achse, denn die y-Komponente von h ändert sich auch nicht. Achte auf solche Hinweise über die Lage einer Gerade – das kann dir viel Arbeit ersparen.

Beispiel 9: Wir haben zwei Geraden g und h gegeben und wollen wissen, ob sich diese Geraden schneiden oder ob sie parallel sind. Vielleicht können wir sogar einen Schnittpunkt und -Winkel berechnen.

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Richtungsvektoren sind offensichtlich nicht kollinear. Also sind die Geraden sicherlich nicht parallel.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, brauchen wir nur zwei Gleichungen. Wir haben aber drei zur Verfügung (für jede Komponente eine)! Also wählen wir zwei aus: Die y- und z-Komponenten sind in diesem Beispiel eine günstige Wahl.

$$\left| \begin{array}{rcl} 1 + 0 \cdot s & = & -5 + 3 \cdot t \\ -1 - 2 \cdot s & = & 5 + 0 \cdot t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad s = -3, t = 2.$$

Wir haben also eine Lösung gefunden. Das heisst aber noch nicht, dass sich die beiden Geraden wirklich schneiden! Zuerst müssen wir nachprüfen, ob sie auch in Bezug auf die x-Komponente gleich sind.

$$\underbrace{14 + 4 \cdot (-3)}_{=2} = \underbrace{0 + 1 \cdot 2}_{=2}.$$

Tatsächlich schneiden sich die beiden Geraden im Punkt $S(2|1|5)$.

Da sich die Geraden schneiden, können wir auch den Schnittwinkel φ berechnen.

$$\cos(\varphi) = \frac{4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Damit ergibt sich ein Winkel von $\varphi \approx 73.57°$.

◁

Wenn wir im letzten Beispiel den Stützvektor für g leicht ändern, schneiden sich die Geraden nicht mehr unbedingt:

Beispiel 10: Hier wurde die x-Komponente vom Stützvektor von g geändert:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lautet immernoch:

$$\left| \begin{array}{rcl} 1 + 0 \cdot s & = & -5 + 3 \cdot t \\ -1 - 2 \cdot s & = & 5 + 0 \cdot t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad s = -3, t = 2.$$

Wenn wir jetzt aber die x-Komponente überprüfen, wird es nicht mehr aufgehen.

$$\underbrace{15 + 4 \cdot (-3)}_{=3} = \underbrace{0 + 1 \cdot 2}_{=2}.$$

Die Geraden g und h schneiden sich hier also nicht mehr, sondern sind *windschief*!

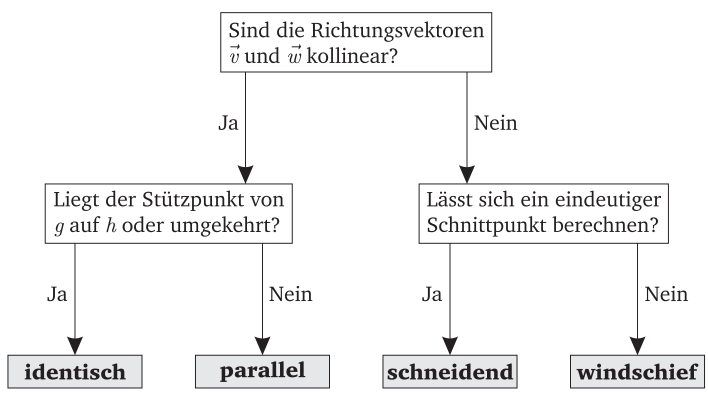
◁

Die gegenseitige Lage zweier Geraden Im dreidimensionalen gibt es vier Möglichkeiten, wie sich zwei Geraden g und h zueinander verhalten können:

- g und h sind *identisch*: $g = h$,
- g und h sind *parallel*: $g // h$,
- g und h *schneiden sich* in einem Punkt: $g \cap h = \{S\}$,
- g und h sind *windschief* zueinander.

Welcher der vier Fälle vorliegt, untersuchst du am einfachsten nach dem folgenden Schema mit

$$g : \vec{r} = \vec{a} + s \cdot \vec{v}, \qquad h : \vec{r} = \vec{b} + s \cdot \vec{w}.$$



Quiz

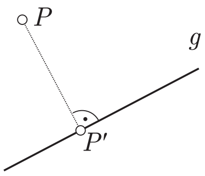
10. Mit welchen Methoden kannst du Geraden im Raum darstellen?
    - ☐ a. Als lineare Funktionen,
    - ☐ b. Mit Koordinatengleichungen,
    - ☐ c. Mit Parametergleichungen,
    - ☐ d. Das ist gleich wie in der Ebene.
11. Wenn zwei Geraden g und h mindestens zwei gemeinsame Punkte haben, dann sind sie:
    - ☐ a. Identisch,
    - ☐ b. Parallel,
    - ☐ c. Schneidend,
    - ☐ d. Windschief.
12. Wie erkennst du, dass zwei Geraden g und h windschief sind?
    - ☐ a. Die Richtungsvektoren sind kollinear zueinander,
    - ☐ b. Beim Schneiden ergibt das Gleichungssystem eine Lösung wie $0 = 1$,
    - ☐ c. Beim Schneiden ergibt das Gleichungssystem zwar eine Lösung für die Parameter s und t. Damit sind jedoch nur zwei der drei Komponenten von g und h gleich,
    - ☐ d. Wenn g und h windschief sind, dann sind beide Geraden parallel zur xy-Ebene (Grundebene).

4.6 Abstandsprobleme

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden?

Wir schauen uns in diesem Abschnitt zwei typische Abstandsprobleme an. Das erste ist nur eine kurze Wiederholung aus dem letzten Kapitel: Wie bestimmst du den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden? Beim zweiten Problem kehren wir die Fragestellung um: Welcher Punkt Q auf der Geraden g hat einen vorgegebenen Abstand zum Punkt P?



Um den Abstand zwischen P und g zu finden, projizierst du P senkrecht auf die Gerade g.

Abstand zwischen Punkt und Gerade Du kannst zwar den Abstand zwischen zwei Punkten direkt ausrechnen, nicht aber den Abstand zwischen einer Geraden g und einem Punkt P. Dazu musst du zuerst herausfinden, welcher Punkt Q auf g dem Punkt P am nächsten kommt. Diesen Punkt Q auf g findest du, indem du P senkrecht auf die Gerade projizierst.

Beispiel 11: Wir bestimmen den Abstand zwischen $P(11|0|18)$ und der Geraden

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit $A(27|24|17)$ bestimmen wir zuerst $\overrightarrow{AP}$ und bilden dann das Skalarprodukt $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{e_a}$ ($\vec{a}$ ist der Richtungsvektor von g).

$$\begin{pmatrix} -16 \\ -24 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{178}} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-356}{\sqrt{178}}.$$

Der Punkt Q, der P am nächsten liegt, ist dann:

$$\overrightarrow{r_Q} = \overrightarrow{r_A} + \frac{-356}{\sqrt{178}} \cdot \vec{e_a} = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} - \frac{356}{\sqrt{178}} \cdot \frac{1}{\sqrt{178}} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich $Q(9|6|9)$ und die Distanz $|\overrightarrow{PQ}| = 11$.

◁

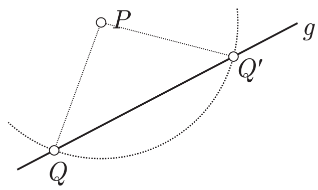
Gegebene Abstände Wenn nicht der kleinste Abstand gesucht ist, dann musst du einen ganz anderen Weg einschlagen. Die wichtige Idee dabei ist folgende: Wenn irgendein Punkt Q auf der Geraden g liegt, dann kannst du die Koordinaten von Q mit Hilfe des Parameters s schreiben. Für die Gerade

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich zum Beispiel $Q(1 + 4s|2 + 5s|3 + 6s)$. Diese Technik ist wichtig: Du wirst sie auch in anderem Zusammenhang anwenden können.

Beispiel 12: Welche Punkte auf der Geraden g haben den Abstand $d = 9$ zum Punkt $P(4|5|6)$?

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 17 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Im Allgemeinen gibt es zwei Punkte Q und Q' auf der Geraden g, die einen bestimmten Abstand zu P haben.

Wir suchen also Punkte Q, die auf der Geraden g liegen, mit $|\overrightarrow{PQ}| = 9$. Weil Q auf g liegt, können wir die Koordinaten von Q mit s beschreiben:

$$Q(17 + 3s|33 + 8s|10 - s).$$

Also ist $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 17 + 3s - 4 \\ 33 + 8s - 5 \\ 10 - s - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 + 3s \\ 28 + 8s \\ 4 - s \end{pmatrix}$$

Aus $|\overrightarrow{PQ}| = 9$ erhalten wir schliesslich die Gleichung:

$$\sqrt{(13 + 3s)^2 + (28 + 8s)^2 + (4 - s)^2} = 9.$$

Wenn du beide Seiten quadrierst und alles zusammenfasst, kommst du auf:

$$78s^2 + 518s^2 + 888 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 7s + 12 = 0.$$

Die Gleichung hat die beiden Lösungen $s_1 = 3$ und $s_2 = 4$. Setze s_1 bzw. s_2 in der Geradengleichung von g ein, so kommst du auf die beiden Punkte

$$Q(8|9|13) \quad \text{und} \quad Q'(5|1|14).$$

◁

Quiz

13. Zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt P gibt es nur einen Punkt Q auf g, der zu P den Abstand $d = 4$ hat. Das bedeutet:

    ☐ a. Die Gerade g ist parallel zur xy-Ebene,

    ☐ b. Der Punkt P liegt auf der Geraden g,

    ☐ c. Der Abstand zwischen g und P beträgt gerade 4,

    ☐ d. Darüber lässt sich keine allgemeine Aussage machen.

14. Du suchst den Punkt auf g, der von A und B den gleichen Abstand hat. Unter welchen Umständen gibt es keinen eindeutigen solchen Punkt?

    ☐ a. Wenn g parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist,

    ☐ b. Wenn g senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ steht,

    ☐ c. Wenn g zu weit weg ist,

    ☐ d. Es gibt immer zwei solche Punkte.

5 Das Vektorprodukt

Inhalte dieses Kapitels

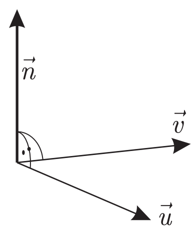
Das Vektorprodukt ist in mancher Hinsicht das Gegenstück zum Skalarprodukt. Wie der Name schon andeutet ist das Ergebnis des Vektorprodukts immmer ein Vektor. Und während du mit dem Skalarprodukt testen kannst, ob Vektoren orthogonal sind, hilft dir das Vektorprodukt, orthogonale Vektoren zu konstruieren.

5.1 Einführung

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

* ⋆ Für was kannst du das Vektorprodukt brauchen?
* ⋆ Lässt sich das Vektorprodukt für alle Vektoren ausrechnen?
* ⋆ Wo liegen die wichtigsten Unterschiede zwischen dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt?

In der Vektorgeometrie basieren verschiedene Lösungsstrategien darauf, dass du einen senkrechten Vektor konstruierst. Wie du in 2 Dimensionen zu einem gegebenen Vektor $\vec{v}$ den dazu senkrechten Vektor $\vec{v}^{\perp}$ konstruierst, hast du bereits gesehen: Du vertauschst die Komponenten und änderst *ein* Vorzeichen. Im dreidimensionalen Raum stellt sich jetzt ein neues Problem: Du hast zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben und suchst nun einen dritten Vektor $\vec{n}$, der zu beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht ist.



Der neue Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht zu den zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ($\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen aber nicht zueinander senkrecht sein).

Leider lässt sich dieser dritte senkrechte Vektor $\vec{n}$ nicht mehr ganz so einfach angeben. Immerhin gibt es eine Möglichkeit, den Vektor $\vec{n}$ zu berechnen: Mit dem *Vektorprodukt*. Die Formel dazu lautet:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt macht also aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen neuen Vektor $\vec{n}$. Dieser neue Vektor $\vec{n}$ ist immer senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Damit lässt sich das Vektorprodukt aber nur im dreidimensionalen Raum berechnen: Für den zweidimensionalen Fall gibt es keine Entsprechung.

Noch etwas weiteres ist wichtig. Wenn die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, dann wird das Vektorprodukt Null. Das hat auch Sinn: Zu nur einer Richtung kannst du im Raum keine eindeutige „senkrechte“ Richung angeben: Es gäbe unendlich viele Lösungen.

Vektor- und Skalarprodukt Mache dir den Unterschied zwischen dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt klar! Das Skalarprodukt hat als Ergebnis immer eine Zahl (Skalar). Das Vektorprodukt erzeugt immer einen dreidimensionalen Vektoren. Mit dem Skalarprodukt prüfst du unter anderem, ob zwei Vektoren orthogonal (senkrecht) sind, während du mit dem Vektorprodukt direkt orthogonale Vektoren konstruierst.

SKALARPRODUKT	VEKTORPRODUKT
Lässt sich in *jeder* Dimension berechnen.	Lässt sich nur im *Dreidimensionalen* berechnen.
Das Ergebnis ist ein *Skalar* (Zahl).	Das Ergebnis ist ein *Vektor*.
Prüft, ob zwei Vektoren zueinander senkrecht stehen.	Konstruiert aus zwei Vektoren einen dritten senkrechten Vektor.
Ist Null, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen und am grössten, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.	Ist Null, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind und am grössten, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen.

Quiz

1. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ erzeugt einen Vektor, der:
   - ☐ a. Kollinear zu $\vec{a}$ ist,
   - ☐ b. Kollinear zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist,
   - ☐ c. Senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht,
   - ☐ d. Die Länge 1 hat.
2. Das Vektorprodukt lässt sich nur für ______ berechnen.
   - ☐ a. Orthogonale Vektoren,
   - ☐ b. Dreidimensionale Vektoren,
   - ☐ c. Kollineare Vektoren,
   - ☐ d. Einheitsvektoren.
3. $\vec{p}$ und $\vec{q}$ sind zwei dreidimensionale Vektoren. Was ist dann das Ergebnis des folgenden Ausdrucks?
   $$\vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})$$
   - ☐ a. $\vec{q}$,
   - ☐ b. 0,
   - ☐ c. Ein Vielfaches von $\vec{p}$,
   - ☐ d. Das lässt sich nicht allgemein sagen.

5.2 Mit dem Vektorprodukt rechnen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du das Vektorprodukt?
- ⋆ Was bedeutet die *Anti-Kommutativität*?

Die Formel, um das Vektorprodukt zu berechnen, sieht ziemlich kompliziert aus. Um besser damit arbeiten zu können, haben sich einige Eselsbrücken und Schemata entwickelt. Das folgende Schema hat sich in der Praxis ziemlich bewährt:

Schreibe die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

je zweimal untereinander hin. Streiche die oberste und die unterste Zeile. Anschliessend rechnest du die restlichen Komponenten übers Kreuz zusammen.

$$\begin{array}{cc|l}
\cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \\
a_2 & b_2 & \} \quad a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\
a_3 & b_3 & \} \quad a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\
a_1 & b_1 & \} \quad a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \\
a_2 & b_2 & \\
\cancel{a_3} & \cancel{b_3} &
\end{array}$$

Das Vektorprodukt wird manchmal auch *Kreuzprodukt* genannt. Besonders im Englischen ist der Begriff *cross product* verbreitet. Mit diesen Schema ist auch klar, woher der Name kommt.

Beispiel 1: Wir berechnen das Vektorprodukt zu den beiden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dazu bringen wir die Vektoren ins Schema:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{4} \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\cdot 6 - 3\cdot 5 \\ 3\cdot 4 - 1\cdot 6 \\ 1\cdot 5 - 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Mit dem Skalarprodukt können wir nachprüfen, dass der neue Vektor tatsächlich orthogonal auf $\vec{a}$ steht:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Entsprechendes gilt auch für $\vec{b}$.

$\triangleleft$

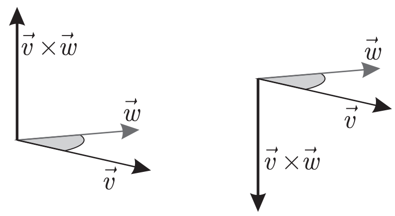
Möglicherweise hast du aber auch ein eigenes Schema, um das Vektorprodukt zu berechnen. Neben dem hier vorgestellten gibt es noch einige andere, die du natürlich verwenden kannst.

Anti-Kommutativität Für das Vektorprodukt gilt das Kommutativgesetz *nicht*. Du darfst also die Operanden nicht einfach vertauschen: Die Reihenfolge spielt eine Rolle.

Wenn du die beiden Vektoren in $\vec{a} \times \vec{b}$ vertauschst, dann bekommst du den Gegenvektor zu $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Diese Regel heisst *Anti-Kommutativität*.



Die Reihenfolge der Operanden spielt beim Vektorprodukt eine Rolle: $\vec{v} \times \vec{w}$ und $\vec{w} \times \vec{v}$ schauen in entgegengesetzte Richtungen.

Quiz

4. Welches Vektorprodukt erzeugt den Vektor $\vec{e_z}$?

   ☐ a. $\vec{e_x} \times \vec{e_z}$
   ☐ b. $\vec{e_z} \times \vec{e_x}$
   ☐ c. $\vec{e_x} \times \vec{e_y}$
   ☐ d. $\vec{e_y} \times \vec{e_y}$

5. Welche Aussagen sind für alle dreidimensionalen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ richtig?

   ☐ a. $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = 0$
   ☐ b. $\vec{a} \times b - \vec{b} \times a = 0$
   ☐ c. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 0$
   ☐ d. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

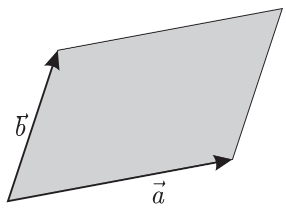
6. Richtig oder Falsch? Die *Anti-Kommutativität* bedeutet, dass sich das Ergebnis ändert, wenn man $\vec{p}$ und $\vec{q}$ in $\vec{p} \times \vec{q}$ vertauscht.

5.3 Flächenberechnung

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie kannst du mit dem Vektorprodukt einen Flächeninhalt berechnen?
- ⋆ Wie berechnest du mit dem Vektorprodukt den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden?

Mit dem Vektorprodukt kannst du also einen senkrechten Vektor konstruieren. Die Länge dieses Vektors scheint sich ziemlich zufällig zu ergeben. Interessanterweise lässt sich aber auch diese Länge geometrisch interpretieren: Als Fläche eines Parallelogramms (Parallelenvierecks, Rhomboids).



Zwei Vektoren spannen ein Parallelogramm auf.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ im Raum spannen ein Parallelogramm auf. Das heisst: Sie sind gerade die Seiten eines Parallelogramms. Wir haben bereits im Kapitel zum Skalarprodukt eine Formel angegeben, um die Fläche eines solchen Parallogramms zu berechnen (Seite 72 – allerdings ging es dort um die Fläche eines Dreiecks):

$$A = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Nun ergibt sich neu auch die Formel:

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Das wollen wir für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kurz nachrechnen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot 0 - 0 \cdot b_2 \\ 0 \cdot b_1 - a_1 \cdot 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Weil wir die z-Komponente in $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich Null gesetzt haben, liegen beide Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der xy-Ebene. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht dazu und hat daher nur eine z-Komponente.

Mit der neuen Formel lässt sich jetzt der Betrag (und damit die Fläche) sehr einfach ausrechnen:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Als nächstes rechnen wir mit der alten Formel die Fläche aus, lassen aber die Wurzel weg.

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + 0^2)(b_1^2 + b_2^2 + 0^2) \\
&\quad -(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + 0 \cdot 0)^2 \\
&= (a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2) \\
&\quad -(a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2) \\
&= a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
\end{aligned}$$

Ziehen wir die Wurzel davon, so erhalten wir auch hier:

$$A = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Die Länge des Vektorprodukts Die Skalarprodukt-Formel können wir auch mit dem Sinus des Zwischenwinkels φ schreiben:

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$$

Kombinieren wir nun diese Formel für die Fläche des Parallelogramms mit dem Vektorprodukt, dann erhalten wir:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

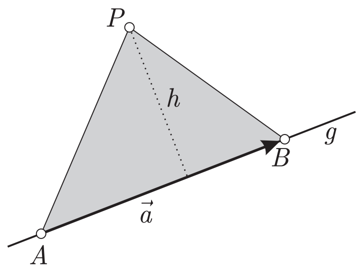
Auf den ersten Blick erinnert diese Formel an die Formel fürs Skalarprodukt ($\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$). Aber Vorsicht: Das Vektorprodukt ergibt einen Vektor und mit der obigen Formel kannst du nur die *Länge* ausrechnen.

Also: Mit dem Vektorprodukt kannst du nicht nur orthogonale Vektoren konstruieren, sondern auch die Fläche eines Parallelogramms berechnen. Wenn die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ allerdings kollinear sind, dann gibt es kein Parallelogramm und die Fläche ist dann Null.

Abstandsprobleme Du sollst den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g bestimmen. Natürlich weisst du längst, wie das geht. Im Prinzip berechnest du zuerst die Dreiecksfläche $A_{\Delta ABP}$. Dann gibt die Höhe $h = \frac{2 \cdot A}{|\overrightarrow{AB}|}$ gerade den gesuchten Abstand d an. Mit dem Vektorprodukt wird das zu:

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Achtung: Du kannst hier natürlich *nicht* kürzen!



Der Abstand des Punkts P von der Geraden g entspricht gerade der Höhe des Dreiecks ΔABP. A ist dabei der Stützvektor der Geraden und $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ gibt den Richtungsvektor an.

Längen und Flächen Die Länge vom Vektorprodukt ist also eine Fläche. Aber wie kann das sein? Eine Länge und eine Fläche sind doch zwei völlig verschiedene Dinge, die nicht zusammenpassen! Du hast recht: So gesehen ergibt das wirklich keinen Sinn. Das Vektorprodukt ist tatsächlich eine sehr merkwürdige Operation, wo du leider nicht alles durchschauen kannst. Dass die Länge hier auch eine Fläche ist, nehmen wir einfach hin, weil's halt praktisch ist.

Quiz

7. Im Viereck $ABCD$ sind AC und BD die Diagonalen. Von welchen Vierecken kannst du dann die Fläche mit der folgenden Formel berechnen?

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$$

   - ☐ a. Nur von Drachen-Vierecken,
   - ☐ b. Nur von Trepezen,
   - ☐ c. Nur von Parallelogrammen,
   - ☐ d. Es funktioniert in allen Vierecken.

8. $ABCDEF$ ist ein regelmässigen Sechseck (alle Seiten und Winkel sind gleich gross). Wie lässt sich dann die Fläche berechnen?
   - ☐ a. $3 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$
   - ☐ b. $6 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$
   - ☐ c. $6 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
   - ☐ d. $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

9. Welche Aussagen sind im Parallelogramm $ABCD$ korrekt?
   - ☐ a. $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$
   - ☐ b. $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right|$
   - ☐ c. $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right| = 0$
   - ☐ d. $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}\right| = 0$

5.4 Volumen berechnen

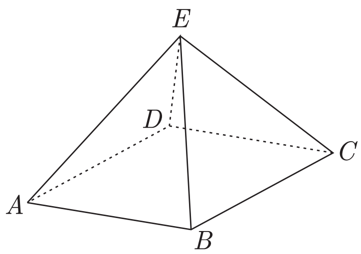
Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du das Volumen einer Pyramide?
- ⋆ Was ist ein *Spat*?
- ⋆ Wozu brauchst du das Spatprodukt?

Das Volumen einer Pyramide kannst du mit folgender Formel berechnen:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

G bezeichnet die Grundfläche und h die Höhe. Natürlich muss h senkrecht auf der Grundfläche stehen.

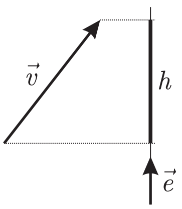


Unsere Pyramide hat eine Quadratische Grundfläche. Wie gross ist dann das Volumen?

Nehmen wir an, unsere Pyramide habe eine quadratische Grundfläche mit den Eckpunkten A, B, C, D und die Spitze E. Du kennst also die Koordinaten aller fünf Punkte. Die Aufgabe: Berechne das Volumen dieser Pyramide. Wie geht das?

Die Grundfläche hättest du sicher schnell berechnet (sie ist ja quadratisch). Die Höhe ist vielleicht schon etwas schwieriger. Hast du eine Idee, wie es gehen könnte? Magst du dich an die Projektionen aus dem Kapitel *Skalarprodukt* erinnern? Wenn wir einen *Normalenvektor* $\vec{n}$ hätten – also einen Vektor, der senkrecht zur Grundfläche steht – dann könnten wir mit einer Kante (z. B. AE) die Höhe h ausrechnen:

$$h = \overrightarrow{AE} \cdot \vec{e_n} = \overrightarrow{AE} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$



Mit dem Skalarprodukt aus $\vec{v}$ und einem Einheitsvektor $\vec{e}$ nach oben können wir berechnen, wie „hoch“ der Vektor $\vec{v}$ ist: Das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{e}$ ist ja die Projektion von $\vec{v}$ in die Richtung von $\vec{e}$.

Diesen Normalenvektor $\vec{n}$ können wir sogar berechnen: Und zwar mit dem Vektorprodukt:

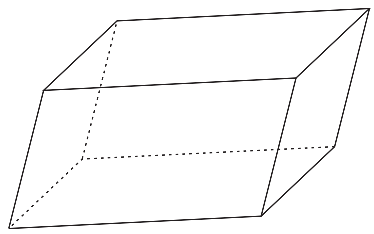
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$$

Es kommt aber noch besser: Die Länge $|\vec{n}|$ gibt auch noch gerade den Inhalt der Grundfläche an. Das Volumen der Pyramide bekommen wir also mit:

$$V = \frac{1}{3} \cdot |\vec{n}| \cdot \left(\overrightarrow{AE} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}$$

Wir ersetzen $\vec{n}$ durch das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. Und weil das Skalarprodukt $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}$ negativ werden kann, machen wir noch Betragsstriche hin; das Volumen soll ja positiv sein. Das ergibt dann:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left| \overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right) \right| .$$



Beim Spat *ist jede Seitenfläche ein Parallelogrammm.*

Das Spat-Produkt Der Ausdruck $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ heisst auch *Spat-Produkt*. Ein *Spat* entspricht in etwa einem dreidimensionalen Parallelogramm. Ein Spat ist also ein „schiefgedrückter Quader.“

Mit dem Spat-Produkt kannst du das Volumen eines Spats berechnen. Es handelt sich nicht eigentlich um eine neue Operation, sondern um eine Verbindung vom Skalar- und dem Vektorprodukt.

Das Spat-Produkt zeigt auf schöne Weise, wie du das Vektorprodukt sinnvoll einsetzen kannst. Auch wenn es kompliziert ist, das Vektorprodukt auszurechnen, so erleichtert es dir doch manchmal die Arbeit ganz erheblich. Allerdings wirst du nur selten Volumina berechnen müssen – und damit ist das Spatprodukt bei weitem nicht so wichtig wie das Vektorprodukt oder das Skalarprodukt.

Quiz

10. Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze E. Mit welchen Formeln kannst du dann das Volumen der Pyramide berechnen?

   ☐ a. $\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$

   ☐ b. $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$

   ☐ c. $\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\right)\right|$

   ☐ d. $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right)\right|$

11. Welche Ausdrücke ergeben dasselbe wie $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$?

   ☐ a. $\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$

   ☐ b. $-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$

   ☐ c. $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$

   ☐ d. $-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$

6 Ebenen

Inhalte dieses Kapitels

Im dreidimensionalen Raum können wir neben Geraden auch Ebenen beschreiben. Viele Überlegungen, die wir bei den Geraden angestellt haben, werden wir hier wieder aufnehmen und vertiefen. Einen Schwerpunkt bilden wiederum Abstands- und Schnittprobleme.

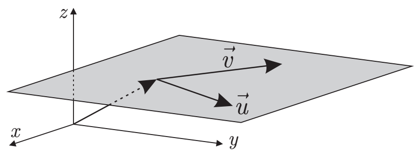
6.1 Die Parameterform der Ebene

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ändert sich, wenn du eine Ebene anstelle einer Geraden mit Vektoren darstellen möchtest?
- ⋆ Wie sieht die allgemeine *Parameterform* einer Ebene aus?
- ⋆ Welche Rolle spielt ein *Normalenvektor*?

Wenn du zwei Punkte gegeben hast, dann kannst du durch diese beiden Punkte eine Gerade ziehen. In der Vektorgeometrie sagen wir uns auch: Eigentlich genügt schon ein Punkt, wenn wir dazu noch einen Vektor haben, der die Richtung der Geraden angibt. So sind wir auf die Parameterform einer Geraden gekommen:

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}.$$



Eine Ebene ist zweidimensional und hat entsprechend zwei *Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.*

Jetzt machen wir eine ähnliche Überlegung für die *Ebene im Raum*. Zwei Punkte genügen noch nicht, um eine Ebene festzumachen. Wir brauchen noch einen dritten Punkt. Dieser dritte Punkt darf aber nicht auf einer Linie mit den zwei anderen Punkten liegen. Anstelle der drei Punkte können wir wieder sagen: Eigentlich genügt ein Punkt, wenn wir dazu *zwei* Vektoren haben, die die Richtungen der Ebene angeben. Diese zwei Vektoren dürfen natürlich nicht kollinear sein.

Auf diese Weise kommen wir zur *Parameterform der Ebene*:

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}.$$

Beachte: Eine Ebene braucht immer zwei unabhängige Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beispiel 1: Wir suchen die Ebene E, die durch die drei Punkte $A(4|9|-1)$, $B(2|3|12)$ und $C(6|0|4)$ geht. Als Richtungsvektoren können wir z. B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ verwenden:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit sich wirklich die Parameterform einer Ebene ergibt, dürfen die beiden Richtungsvektoren nicht kollinear sein. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ erfüllen diese Bedingung.

Schliesslich verwenden wir A als Stützpunkt:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

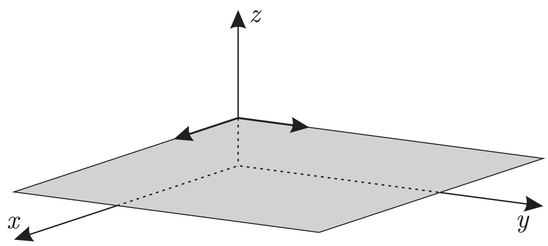
◁

Verschiedene Parametrisierungen Die Parameterdarstellung einer *Geraden* ist nicht eindeutig. Neben dem Stützpunkt (Aufhängepunkt) kannst du auch den Richtungsvektor beliebig strecken, ohne dass sich die Gerade selber ändert. Bei Ebenen kommt es noch schlimmer: Die Richtungsvektoren können sogar teilweise ihre Richtung ändern, und doch ist es noch die gleiche Ebene.

Beispiel 2: Die Ebene E ist parallel zur xy-Ebene (Grundebene) und hat folgende Parameterform:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit den beiden Richtungsvektoren kann sich ein Punkt von $A(0|0|4)$ aus beliebig in x- oder y-Richtung bewegen – nur nach oben oder unten kann er nicht (die z-Koordinaten bleibt immer 4).



Die gleiche Ebene wird aber auch durch die folgende Parameterform beschrieben:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind hier im Prinzip um $45°$ gedreht. Noch immer kann sich ein Punkt frei in x- und y-Richtung bewegen, die z-Richtung bleibt ihm verwehrt.

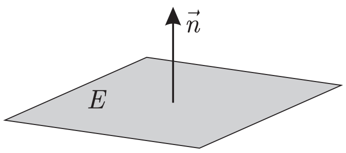
Sogar diese letzte Gleichung ist eine Parametrisierung von E (stellt also die gleiche Ebene E dar):

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

Wie aber erkennst du bei so vielen Möglichkeiten, ob zwei Gleichungen die selbe Ebene beschreiben? Die Antwort haben wir im Prinzip schon im Beispiel angedeutet. Anstatt zu überlegen, in welche Richtungen ein Punkt sich bewegen kann, findest du heraus, in welche Richtung der Punkt sicher *nicht* kann. Oben war die z-Richtung versperrt.

Die „verbotene“ oder „unmögliche“ Richtung einer Ebene gibt der *Normalenvektor* $\vec{n}$ an. Ein Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene steht. Dieser Normalenvektor ist zwar auch nicht eindeutig – seine Richtung aber schon! Das heisst: Nur die Länge bzw. der Betrag kann sich ändern.



Ein Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene.

Wie kommst du zu diesem Normalenvektor? Lass uns nochmals überlegen, was du gegeben hast: Einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren. Der Normalenvektor soll senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren stehen. Siehst du, auf was das hinausläuft? Im letzten Kapitel hast du das Vektorprodukt kennengelernt. Also eine Möglichkeit, um aus zwei Vektoren einen dritten senkrechten zu basteln.

Beispiel 3: Wir greifen nochmals das Beispiel von vorhin auf und bestimmen zu jeder Parameterform den entsprechenden Normalenvektor $\vec{n}$.

Zu

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben wir also

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 93 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich sind alle drei Normalenvektoren kollinear. Das entspricht auch unserer Erwartung: Schliesslich beschreiben alle drei Gleichungen dieselbe Ebene E.

◁

Achtung: Wenn die Normalenvektoren zweier Parametergleichungen kollinear sind (wie oben), dann heisst das noch nicht, dass es sich um die gleiche Ebene handelt! Es könnte sich auch um zwei parallele Ebenen handeln. Den Unterschied erkennst du erst, wenn du überprüfst, ob die Stützvektoren auch zur gleichen Ebene zeigen. Das Vorgehen ist also gleich wie bei den Geraden.

Wir schliessen den Abschnitt mit einer Beispielaufgabe, wo wir nochmals Gebrauch vom Normalenvektor machen.

Beispiel 4: Liegt die Gerade g in der Ebene E?

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Im Unterschied zu Ebenen hat die Gerade nur einen Richtungsvektor. Wenn die Gerade aber in der Ebene liegt oder parallel dazu ist, dann muss dieser Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor stehen!

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Wenn zwei Vektoren zueinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt Null:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -20 - 30 + 50 = 0.$$

Also: Die Gerade g liegt entweder in der Ebene E oder ist parallel zu ihr.

Wenn g in der Ebene E liegt, dann auch der Stützpunkt $A(12|11|13)$ von g. Wir prüfen also, ob A in E liegt:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nach der x- und der y-Komponente müssten $s = 4$ und $t = 2$ sein. Das geht tatsächlich auch für die z-Komponente auf. A liegt also in E und damit liegt auch die Gerade g in der Ebene E.

◁

Quiz

1. Welche Bedignung(en) müssen die beiden Richtungsvektoren einer Ebene erfüllen?
   - ☐ a. Sie müssen kollinear sein,
   - ☐ b. Sie müssen zueinander senkrecht sein,
   - ☐ c. Sie müssen die Länge/den Betrag 1 haben,
   - ☐ d. Sie dürfen nicht kollinear sein.
2. Zwei Ebenen können, müssen aber nicht, in einer gemeinsamen Ebene liegen. Wann liegen die beiden Geraden sich in einer gemeinsamen Ebene?
   - ☐ a. Wenn sie echt parallel zueinander sind,
   - ☐ b. Wenn sie sich in einem Punkt schneiden,
   - ☐ c. Wenn sie windschief sind,
   - ☐ d. Das geht nie.
3. Woran erkennst du, dass zwei Parameterformen die gleiche Ebene beschreiben?
   - ☐ a. Die Normalenvektoren sind kollinear,
   - ☐ b. Die Stützvektoren sind gleich,
   - ☐ c. Die Normalenvektoren sind kollinear und die Stützvektoren sind gleich,
   - ☐ d. Die entsprechenden Richtungsvektoren sind kollinear.

6.2 Die Koordinatengleichung

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Was ist die Koordinatengleichung einer Ebene?
- ⋆ Ist die Koordinatengleichung einer Ebene eindeutig?
- ⋆ Wie prüfst du, ob ein Punkt P in der Ebene liegt?
- ⋆ Wie hängt ein Normalenvektor $\vec{n}$ mit der Koordinatenform einer Ebene zusammen?

Neben der Parameterform mit den drei Vektoren gibt es eine zweite (wichtigere) Möglichkeit, Ebenen zu beschreiben. Mit der *Koordinatengleichung*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Darin sind a, b, c und d reelle Zahlen, die die Ebene beschreiben. Die Zahlen sind nicht eindeutig – du kannst die ganze Gleichung mit einer Zahl multiplizieren, ohne dass sich etwas ändert. Die folgenden beiden Gleichungen beschreiben z. B. die gleiche Ebene:

$$5x - 3y + 2z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15x - 9y + 6z + 21 = 0$$

Du kennst Koordinatengleichungen bereits aus dem Kapitel über Geraden. Allerdings lässt sich eine Gerade nur im zweidimensionalen mit einer Koordinatengleichung schreiben. Im dreidimensionalen beschreibt eine Koordinatengleichung eben eine Ebene.

Wie kommst du nun auf die konkrete Koordinatengleichung einer Ebene? Von den vielen Möglichkeiten greifen wir hier die einfachste Idee heraus: Du rechnest die Parameterform in die Koordinatengleichung um. Um das zu tun, nutzen wir eine wichtige Idee aus:

Satz *Die Ebene E wird durch die Koordinatengleichung*

$$E : ax + by + cz + d = 0$$

beschrieben. Dann bilden die drei Zahlen a, b und c zusammen einen Normalenvektor $\vec{n}$ zu E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \perp \quad E.$$

Der Vektor $\vec{n}$ steht also senkrecht auf der Ebene E.

Aus den beiden Richtungsvektoren der Parameterform gewinnst du mit dem Vektorprodukt sehr einfach einen Normalenvektor $\vec{n}$. Und damit hast du bereits die drei Zahlen a, b und c. Es fehlt noch d. Dafür setzst du die Koordinaten eines beliebigen Punkts in die Koordinatenform ein und berechnest damit d. Für diesen beliebigen Punkt eignet sich der Stützpunkt der Parameterform natürlich besonders gut.

Beispiel 5: Unsere Ebene E ist durch die folgende Parameterform gegeben:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Vektorprodukt bilden wir zuerst einen Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Koordinatengleichung

$$4x - y + 2z + d = 0.$$

Wir nehmen den Punkt $P(4|2|1)$ und setzen ihn ein, um d auszurechnen:

$$4 \cdot 4 - 2 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -16.$$

Also ergibt sich die Lösung:

$$E : 4x - y + 2z - 16 = 0.$$

◁

Übrigens funktioniert das Verfahren auch, wenn du drei Punkte oder eine Gerade und einen Punkt gegeben hast. Allerdings musst dann zuerst die Parameterform bestimmen, was aber nicht besonders schwer ist.

Die drei Zahlen a, b und c geben im Prinzip die „Richtung“ der Ebene an (*wie* sie liegt). Die Zahl d bestimmt dafür den „Ort“ (*wo* sie liegt). Deshalb lassen sich a, b und c auch aus dem Normalenvektor ablesen, d aber nur aus einem festen Punkt.

Quiz

4. Ist die Koordinatenform einer Ebene eindeutig?

   ☐ a. Ja,

   ☐ b. Nein, man darf a, b und c beliebig vertauschen,

   ☐ c. Nein, man darf d immer beliebig wählen,

   ☐ d. Nein, man darf alle Zahlen mit einem Faktor multiplizieren.

5. Kommen in einer Koordinatenform immer alle drei Variablen x, y und z vor?

   ☐ a. Ja,

   ☐ b. Nein, aber mindestens zwei,

   ☐ c. Nein, aber mindestens eine,

   ☐ d. x muss immer vorhanden sein.

6. Die Koordinatengleichungen zweier Ebenen unterscheiden sich nur in d. Dann gilt:

   ☐ a. Die beiden Ebenen sind parallel,

   ☐ b. Die beiden Ebenen schneiden sich,

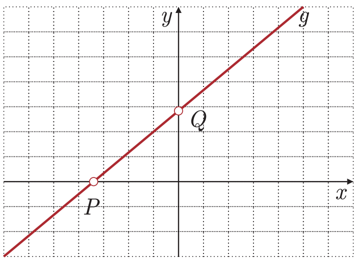
   ☐ c. Die beiden Ebenen stehen senkrecht zueinander,

   ☐ d. Die beiden Ebenen sind identisch.

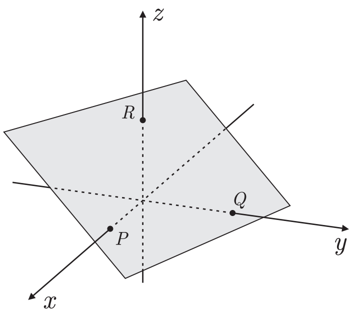
6.3 Die Lage einer Ebene

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie berechnest du die *Achsenabschnitte* und die *Achsenabschnittsform* einer Ebene?
- ⋆ Was ist eine Spurgerade?
- ⋆ Welche spezielle Lage kann eine Ebene haben? Wie erkennst du solche spezielle Lagen an der Ebenengleichung?



Die Gerade g schneidet in den Punkten P und Q die x- bzw. y-Achse.



Eine Ebene hat in der Regel drei Achsenabschnitte P, Q und R, wo die Koordinatenachsen durch die Ebene gehen.

Wo schneidet eine Ebene die Koordinatenachsen? Bevor wir zu den Ebenen im Raum gehen, rufen wir uns nochmals kurz die Situation im zweidimensionalen in Erinnerung. Wenn wir von Spezialfällen absehen, dann schneidet jede Gerade einmal die x- und einmal die y-Achse. Diese beiden Schnittpunkte heissen *Achsenabschnittspunkte* (den *y-Achsenabschnitt* kennst du bereits von den linearen Funktionen).

Wenn die Gerade g parallel zur x- oder zur y-Achse ist, dann gibt es entsprechend nur einen Schnittpunkt. Das wären die beiden Spezialfälle. Auch bei den Ebenen wird es solche Spezialfälle geben.

Im dreidimensionalen Raum schneidet eine Ebene jede Koordinatenachse in jeweils einem Punkt. Es gibt also neben dem x- und dem y- auch einen z-Achsenabschnitt. Weil die *Achsenabschnittspunkte* auf den Koordinatenachsen liegen, sind immer zwei der drei Koordinaten Null. Im Bild auf der Seite könnten P, Q und R zum Beispiel die folgenden Koordinaten haben:

$$P(1|0|0), \quad Q(0|2|0), \quad R(0|0|2)$$

Oder allgemein:

$$P(p|0|0), \quad Q(0|q|0), \quad R(0|0|r)$$

Die Zahlen p, q und r heissen *Achsenabschnitte* der Ebene E (anstelle von p, q und r findest du auch z. B. die Bezeichnungen a, b und c).

Es ist sehr einfach, die Achsenabschnitte einer Ebene auszurechnen – zumindest wenn die Ebene als Koordinatengleichung gegeben ist. Für den Punkt $P(p|0|0)$ weisst du ja bereits, dass die y- und die z-Koordinate Null sind. Das kannst du einsetzen und dann p ausrechnen. Entsprechendes gilt für die anderen beiden Koordinaten.

Beispiel 6: Die Ebene

$$6x - 4y + 8z - 24 = 0$$

hat die Achsenabschnitte:

$$p = 4, \quad q = -6, \quad r = 3.$$

p haben wir z. B. aus der Koordinatengleichung berechnen über:

$$6 \cdot p - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 24 = 0$$

◁

Umgekehrt kommst du von den drei Achsenabschnitten p, q, r sehr schnell auf die Koordinatengleichung. Dividiere im letzten Beispiel einmal alles durch 24, so dass $d = -1$ wird. Das Ergebnis ist:

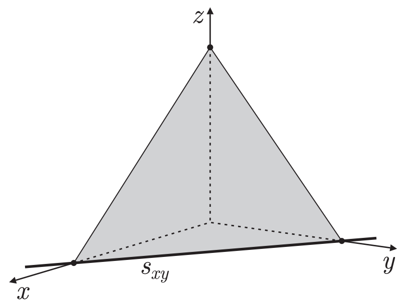
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} - 1 = 0.$$

Siehst du den Zusammenhang zwischen dieser Koordinatengleichung und den Achsenabschnitten? Allgemein heisst die Form

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0$$

die *Achsenabschnittsform* einer Koordinatengleichung. Wenn du eine Koordinatengleichung in diese Form bringst (also $d = -1$ ist), dann kannst du die drei Achsenabschnitte wiederum direkt ablesen.

Spurgeraden Neben den Achsenabschnitten begegnest du manchmal auch den *Spurgeraden* oder *Spuren* einer Ebene. Eine Spurgerade entsteht dort, wo die Ebene eine Koordinatenebene schneidet.



Von dieser Ebene ist nur das Dreieck zwischen den Achsenabschnitten eingezeichnet. Unten ist die Spurgerade s_{xy} angedeutet.

Wenn du bereits die Achsenabschnitte hast, kannst du einfach durch zwei Achsenabschnitte eine Gerade legen und kommst so automatisch auf die entsprechende Spurgerade.

Beispiel 7: Wir suchen die Spurgerade in der xy-Ebene (Grundebene) zur Ebene:

$$E : 3x + 5y + z - 2 = 0.$$

Dazu wandeln wir die Gleichung zuerst in die Achsenabschnittsform um:

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0.$$

Die Achsenabschnitte sind also $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{5}$ und $r = 2$.

Für die Spurgerade in der xy-Ebene brauchen wir p und q, bzw. $P(\frac{2}{3}|0|0)$ und $Q(0|\frac{2}{5}|0)$. Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung:

$$s_{xy} : \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

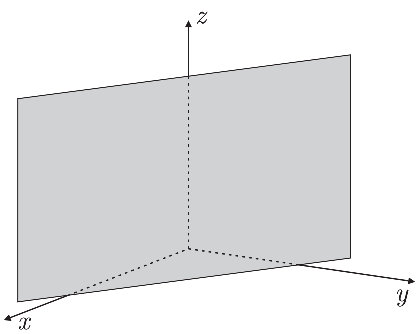
◁

Die Spezialfälle Nicht jede Ebene hat auch drei Achsenabschnitte. Eine Ebene, die parallel zur x-Achse verläuft, wird die x-Achse nie schneiden und hat daher keinen y-Achsenabschnitt p. Für die Koordinatengleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

heisst das, dass $a = 0$ ist – das x kommt in der Gleichung gar nicht vor.

Allgemein gilt: *Fehlt in der Koordinatengleichung eine Variable (x, y oder z), dann ist die Ebene parallel zu der entsprechenden Koordinatenachse.*



Diese Ebene verläuft parallel zur z-Achse und hat daher keinen z-Achsenabschnitt.

Beispiel 8: Die Ebene E mit der Koordinatengleichung

$$E : 2x + 3y - 6 = 0$$

ist parallel zur z-Achse, wie in der Zeichnung angedeutet.

◁

Übrigens können in einer Koordinatengleichung auch mal zwei Variablen fehlen – dann ist die Ebene sogar parallel zur einer Koordinatenebene.

Quiz

7. Lässt sich jede Ebene in die Achsenabschnittsform bringen?

   ☐ a. Ja, das geht immer.

   ☐ b. Nur wenn die Ebene nicht parallel zu einer Koordinatenachse verläuft.

   ☐ c. Nur wenn die Achsenabschnitte natürliche Zahlen sind.

   ☐ d. Nur wenn die Ebene nicht durch den Nullpunkt $\mathcal{O}(0|0|0)$ geht.

8. Richtig oder Falsch? Zwei parallele Ebenen haben dieselben Achsenabschnitte.

9. Schneidet jede Ebene jeweils alle drei Koordinatenachsen?

   ☐ a. Ja, sie schneidet alle drei Achsen.

   ☐ b. Nein, aber mindestens zwei.

   ☐ c. Nein, aber mindestens eine.

   ☐ d. Nein, eine Ebene muss keine Koordinatenachse schneiden.

6.4 Geraden und Ebenen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie findest du den Durchstosspunkt einer Geraden durch die Ebene?
- ⋆ Wie berechnest du den Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene?
- ⋆ Welche Rolle spielt der Normalenvektor beim Schnittwinkel?

Immer wenn eine Gerade g nicht parallel zur Ebene E verläuft oder sogar ganz in der Ebene liegt, dann gibt es einen *Durchstosspunkt,* wo die Gerade durch die Ebene hindurchgeht. Wir schauen uns in diesem Abschnitt an, wie du diesen Durchstosspunkt findest. Dazu gibt es zwei Verfahren: Eines für Parameterformen und eines für Koordinatengleichungen.

Durchstosspunkt bei der Parameterform Wie beim schneiden von zwei Geraden kannst du die Parametergleichung der Ebene und die Parametergleichung der Geraden gleichsetzen. Achte darauf, dass du für die Parameter drei verschiedene Variablen verwendest – etwa s, t und u.

Wenn die Gerade parallel zur Ebene oder sogar in der Ebene liegt, dann gibt es natürlich keinen (eindeutigen) Durchstosspunkt. Das Gleichungssystem wird dann nicht aufgehen.

Beispiel 9: Zur Ebene

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben wir die Gerade

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die beiden Parameter s haben nichts miteinander zu tun! Daher müssen wir beim Gleichsetzen darauf achten, verschiedene Variablen zu verwenden.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für die drei Parameter s, t und u ergibt das dann das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} s + 2t - 4u & = & 0 \\ s + 4u & = & -6 \\ -s + t + 3u & = & -2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow (s = -2, t = -1, u = -1)$$

Am schnellsten lässt sich jetzt der Durchstosspunkt mit der Geradengleichung bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + -1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung $D(-2|4|6)$.

◁

Durchstosspunkt bei der Koordinatenform Wenn du mit der Koordinatengleichung der Ebene startest, dann bekommst du nur eine einzelne Gleichung anstelle des Gleichungssystems. Die Idee ist folgende: Der Durchstosspunkt D liegt auf der Geraden g. Damit kannst du die Koordinaten von D allgemein durch die Gerade g ausdrücken. Diese allgemeinen Koordinaten setzst du dann in die Koordinatengleichung der Ebene ein.

Beispiel 10: Wir haben die Gerade

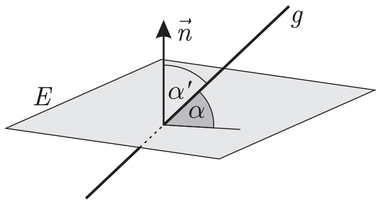
$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die Ebene $E : x + 3y + 2z - 10 = 0$ vorgegeben. Weil der Durchstosspunkt D auf der Geraden g liegt, hat D die Koordinaten $D(3|3 + s|6 + 2s)$. Diese setzen wir in die Koordinatengleichung der Ebene ein:

$$3 + 3 \cdot (3 + s) + 2 \cdot (6 + 2s) - 10 = 0$$

Das ergibt $s = -2$. Damit ist $D(3|3 - 2|6 - 4) = D(3|1|2)$.

◁



Anstelle des Zwischenwinkels α berechnen wir den Komplementärwinkel α', was viel einfacher geht.

Winkel Neben dem Durchstosspunkt brauchst du noch den Winkel zwischen der Geraden und der Ebene. Von all den möglichen Winkeln (je nachdem, in welcher Richtung du misst) ist der *kleinste Zwischenwinkel* gesucht.

Wieder bedienen wir uns dem gleichen Trick wie schon ein paar Mal zuvor. Es ist viel einfacher, den Winkel zwischen der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ zu berechnen. Und der Normalenvektor steht natürlich senkrecht zur Ebene.

Beispiel 11: Im letzten Beispiel haben wir bereits den Durchstosspunkt D der Geraden

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

durch die Ebene $E : x + 3y + 2z - 10 = 0$ berechnet.

Für den Zwischenwinkel nehmen wir den Richtungsvektor von g und einen Normalenvektor von E. Dann verwenden wir die Zwischenwinkel-Formel mit dem Skalarprodukt:

$$\cos(\alpha') = \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}}$$

Damit ist $\alpha' \approx 33.21°$ und $\alpha = 90° - \alpha' \approx 56.79°$.

◁

Es gibt noch eine kleine Abkürzung. Wegen der Beziehung $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$ lässt sich die Formel auch ohne α' schreiben:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

Diese Variante findest du manchmal in Formelsammlungen. Allerdings lässt sich der Zwischenwinkel α genausogut mit der „alten“ Zwischenwinkelformel ohne den Sinus berechnen.

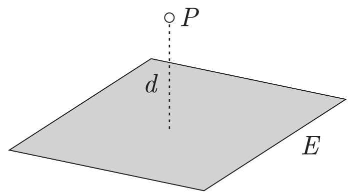
Quiz

10. In welchem Bereich liegt der Zwischenwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene?
    - ☐ a. $0°$ bis $180°$,
    - ☐ b. $0°$ bis $90°$,
    - ☐ c. $0°$ bis $45°$,
    - ☐ d. $90°$ bis $180°$.
11. Der Richtungsvektor der Geraden g ist auch ein Richtungsvektor der Ebene E. Dann gilt:
    - ☐ a. Gerade g und Ebene E stehen senkrecht zueinander,
    - ☐ b. Gerade g und Ebene E sind echt parallel,
    - ☐ c. Die Gerade g liegt in der Ebene E,
    - ☐ d. Die Gerade g ist entweder parallel zur Ebene E oder liegt in der Ebene E.

6.5 Punkte und Ebenen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wir bildest du die Hessesche Normalform einer Koordinatengleichung?
- ⋆ Wie kannst du den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene bestimmen?



Der Abstand d zwischen einem Punkt P und der Ebene E steht senkrecht auf der Ebene E.

Wie weit ist ein Punkt von der Ebene E entfernt? Du magst dich sicher erinnern, dass diese Entfernung senkrecht zur Ebene E stehen muss. Damit hat sie fast automatisch etwas mit den Normalenvektoren der Ebene zu tun.

Eine erste Idee: Lege durch den Punkt P eine Gerade g, die senkrecht zur Ebene E steht (dazu nimmst du als Richtungsvektor einen Normalenvektor der Ebene). Anschliessend berechnest du den Durchstosspunkt D von g durch E. Die Entfernung zwischen Punkt und Geraden entspricht dann $|\overrightarrow{PD}|$.

Zum Glück geht's einfacher! Dazu brauchst du aber die *Hessesche Normalform*.

Die Hessesche Normalform Die Hessesche Normalform (HNF) ist eine spezielle Form der Koordinatengleichung. Und zwar bilden bei jeder Koordinatengleichung $ax+by+cz+d = 0$ die Zahlen a, b und c zusammen einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene. In der Hesseschen Normalform soll dieser Normalenvektor $\vec{n}$ ein Einheitsvektor sein (also die Länge 1 haben).

Beispiel 12: Wir machen aus der Koordinatengleichung

$$2x + 2y - z + 16 = 0$$

eine HNF. Hier ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{16}{3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2x + 2y - z + 16}{3} = 0.$$

◁

Beachte, dass wir auch d entsprechend angepasst haben, obwohl d ja eigentlich nicht Bestandteil des Normalenvektors $\vec{n}$ ist. Aber damit die Koordinatengleichung immer noch die gleiche Ebene repräsentiert, müssen wir alle Zahlen a, b, c, d durch den gleichen Faktor teilen. Übrigens: In der HNF gibt d dann gerade den Abstand der Ebene zum Nullpunkt an (beim letzten Beispiel wäre dieser Abstand zum Nullpunkt also $d = \frac{16}{3}$).

Distanzen berechnen Der Punkt $P(1|0|18)$ liegt in der Ebene

$$E : 2x + 2y - z + 16 = 0.$$

Wenn du nämlich die Koordinaten von P in E einsetzst, dann geht die Gleichung auf und auf der linken Seite ergibt sich Null.

Würde P nicht in der Ebene liegen, dann ergäbe sich auf der linken Seite irgendeine andere Zahl (nicht Null). Das spezielle an der HNF ist nun: Diese linke Seite gibt immer die Entfernung zwischen Punkt und Ebene an.

Beispiel 13: Wie gross ist die Distanz D zwischen $P(5|6|2)$ und der Ebene

$$E : 2x + 2y - z + 16 = 0\,?$$

Wir nehmen die HNF von E und bezeichnen die linke Seite mit D für Distanz:

$$E : \underbrace{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{16}{3}}_{=D} = 0$$

Jetzt setzen wir die Koordinaten von P ein und berechnen D:

$$D = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{16}{3} = \frac{10 + 12 - 2 + 16}{3} = 12.$$

Die Distanz (Entfernung) zwischen dem Punkt P und der Ebene E beträgt also 12 Einheiten.

◁

Die Distanzformel mit der linken Seite der Hesseschen Normalform können wir auch so schreiben:

$$D = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Die Idee hinter dieser Formel ist, dass der Nenner $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ gerade dem Betrag des Normalvektors mit a, b und c entspricht. Achtung: Die Zahl d gibt zwar den Ort der Ebene an, gehört aber nicht zum Normalenvektor. Damit gehört d auch nie in die Wurzel im Nenner!

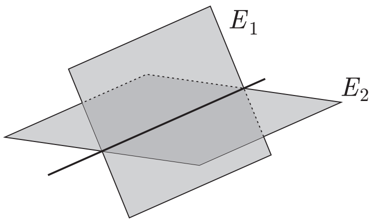
Quiz

12. Ist die Hessesche Normalform einer Ebene eindeutig?
    - ☐ a. Ja,
    - ☐ b. Nein, es gibt zwei Varianten, die sich durch ein Vorzeichen unterscheiden,
    - ☐ c. Nein, es gibt unendlich viele Varianten, weil d nicht zum Normalenvektor gehört,
    - ☐ d. Keine der obigen Antworten ist richtig.
13. Hat jede Ebene eine Hessesche Normalform?
    - ☐ a. Ja,
    - ☐ b. Nur wenn sowohl a, b als auch c von Null verschieden sind,
    - ☐ c. Nur wenn der Betrag $|\vec{n}|$ eine natürliche Zahl ist,
    - ☐ d. Nein, z. B. die xy-Ebene hat keine HNF.
14. Für welche Ebene(n) stimmen die Hessesche Normalform und die Achsenabschnittsform überein?
    - ☐ a. $E: x = 1$,
    - ☐ b. $E: x + y + z - 1 = 0$,
    - ☐ c. $E: \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$,
    - ☐ d. $E: x - y + z - \sqrt{3} = 0$.

6.6 Zwei Ebenen

Lernziele: Beantworte beim Lesen die folgenden Fragen!

- ⋆ Wie findest du die Schnittgerade zweier Ebenen?
- ⋆ Wie berechnest du den Abstand von parallelen Ebenen?
- ⋆ Wie berechnest du den Abstand windschiefer Geraden?

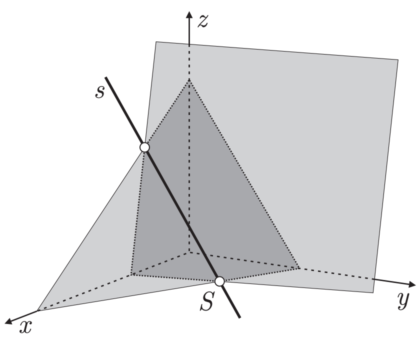


Zwei Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich entlang einer Geraden.

Zwei voneinander verschiedene Ebenen sind entweder parallel zueinander oder sie schneiden sich in einer Geraden. In diesem Abschnitt schauen wir uns zuerst an, wie du die Schnittgerade und den Zwischenwinkel zwischen zwei Ebenen berechnen kannst. Danach wenden wir uns den parallelen Ebenen zu.

Für die Schnittgerade brauchst du einen Stützvektor (bzw. Stützpunkt) und einen Richtungsvektor. Um den Richtungsvektor zu berechnen, verwenden wir einmal mehr die Normalenvektoren. Die Schnittgerade liegt ja in beiden Ebenen. Damit steht ihr Richtungsvektor senkrecht zu den Normalenvektoren beider Ebenen. Der Richtungsvektor $\vec{a}$ lässt sich also direkt mit dem Vektorprodukt berechnen:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$



Für die Schnittgerade s brauchen wir einen Stützpunkt. Indem wir $z = 0$ setzen, versuchen wir S in der Grundebene zu finden. Falls das nicht klappt, setzen wir z. B. $y = 0$ und suchen damit den Punkt in der Seitenebene (xz).

Unter all den möglichen Stützpunkten wählen wir denjenigen aus, der in der xy-Ebene (Grundebene) liegt. Dann ist nämlich $z = 0$. Falls die Schnittgerade aber parallel zur xy-Ebene verläuft, dann funktioniert das leider nicht. In dem Fall versuchen wir den Ansatz $y = 0$ oder $x = 0$.

Beispiel 14: Wir suchen die Schnittgerade s der Ebenen

$$E_1 : x - 2y + z - 14 = 0, \quad E_2 : 4x + y - 5z + 2 = 0$$

Für den Richtungsvektor berechnen wir das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Für den Stützpunkt A versuchen wir den Ansatz $z = 0$. Zudem muss A ja in beiden Ebenen liegen. Also gilt:

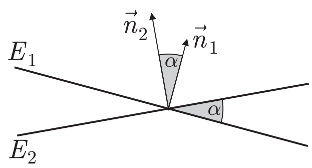
$$\begin{array}{c|rcl|l} E_1 & x - 2y + 0 - 14 & = & 0 & \multirow{2}{*}{$\Rightarrow (x = 2, y = -6)$} \\ E_2 & 4x + y - 5 \cdot 0 - 2 & = & 0 & \end{array}$$

Wir haben also als Stützpunkt $A(2|-6|0)$. Damit erhalten wir schliesslich die Schnittgerade:

$$s : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◁

Übrigens: Der Zwischenwinkel zwischen zwei Ebenen ist auch der Zwischenwinkel zwischen den beiden Normalenvektoren.



Den Schnittwinkel α zweier Ebenen berechnest du über den Zwischenwinkel der beiden Normalenvektoren.

Der Abstand paralleler Ebenen Nicht immer haben zwei Ebenen eine Schnittgerade: Die Ebenen können ja auch parallel sein. In dem Fall kannst du den Abstand zweischen beiden Ebenen berechnen.

Mit der Hesseschen Normalform einer Ebene kannst du bereits den Abstand zu einem Punkt ausrechnen. Wenn E_1 und E_2 parallel sind, dann sind alle Punkte von E_2 gleich weit entfernt von E_1. Wir wählen daher irgendeinen Punkt $P \in E_2$ und setzen ihn in die Distanzformel von E_1 ein. Günstig sind hier Punkte, wo alle Koordinaten bis auf eine Null sind.

Beispiel 15: Wir suchen den Abstand der beiden parallelen Ebenen

$$E_1 : x + 2y + 2z + 15 = 0, \quad E_2 : x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

Dazu bringen wie die Ebene E_1 in die Hessesche Normalform HNF:

$$E_1 : \frac{x + 2y + 2z + 15}{3} = 0.$$

Schliesslich brauchen wir noch einen Punkt P, der in E_2 liegt. Dazu setzen wir $y = 0$, $z = 0$ und lösen E_2 nach x auf:

$$x + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

Also setzen wir den Punkt $P(9|0|0) \in E_2$ in die Distanzform von E_1 ein:

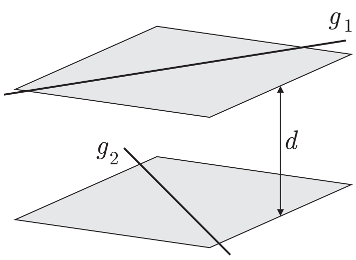
$$D = \frac{9 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 15}{3} = 8.$$

◁

Aus der Hesseschen Normalform kannst du ja die Entfernung zum Nullpunkt ablesen. Für die beiden Ebenen E_1 und E_2 im vorigen Beispiel ergäben sich die beiden Entfernungen $d_1 = \frac{15}{3} = 5$ und $d_2 = \frac{9}{3} = 3$. Weil die beiden Ebenen in unserem Fall auf verschiedenen „Seiten" des Nullspunkts liegen, ist die Entfernung $d(E_1, E_2) = 5 + 3 = 8$. Lägen E_1 und E_2 auf der gleichen „Seite" des Nullpunkts, dann wäre $d(E_1, E_2) = 5 - 3 = 2$. Mit diesen Überlegungen kannst du relativ einfach deine Rechnungen überprüfen oder manchmal sogar dierekt den Abstand der beiden Ebenen zueinander berechnen.

Der Abstand windschiefer Geraden Bei windschiefen Geraden besteht das Problem darin, dass der Abstand zwischen den Geraden überall anders ist. Natürlich brauchen wir von all den möglichen Abständen den kürzesten. Wie aber finden wir den?

Wenn zwei Geraden windschief sind, dann kannst du dir vorstellen, dass die eine im Boden und die andere im Deckel eines Würfels liegt (vergleiche mit dem Bild auf Seite 94). Um also die Entfernung zwischen den beiden Geraden zu finden, berechnen wir einfach die Entfernung zwischen der Boden- und der Deckfläche, wo die Geraden drin liegen.



Um den Abstand zwischen den beiden windschiefen Geraden g_1 und g_2 zu finden, stellen wir uns zwei parallele Ebenen vor, in denen sich die Geraden befinden.

Anders gesagt: Wir suchen zwei parallele Ebenen, wo die beiden Geraden drin liegen. Dann berechnen wir den Abstand zwischen diesen beiden Ebenen und schon haben wir auch den Abstand zwischen den Geraden.

Beispiel 16: Wir sollen den Abstand d zwischen den beiden windschiefen Geraden g_1 und g_2 bestimmen:

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Ebenen sollen so liegen, dass sie sowohl zu g_1 als auch zu g_2 parallel sind. Damit können wir aus den beiden Richtungsvektoren einen Normalenvektor der Ebenen bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g_1 soll in E_1 liegen, g_2 in E_2. Mit dem Stützpunkten $A_1(3|5|3)$ führt das auf:

$$E_1 : 2x + 2y + z - 19 = 0 \quad \text{bzw.} \quad E_1 : \frac{2x + 2y + z - 19}{3} = 0.$$

Der Punkt $A_2(4|1|0)$ liegt in E_2. Setzen wir diesen Punkt in die HNF von E_1 ein, so bekommen wir gerade den gesuchten Abstand:

$$D = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 - 19}{3} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Der gesuchte Abstand ist also $d = 3$.

◁

Quiz

15. Haben drei (nicht parallele) Ebenen immer einen eindeutigen gemeinsamen Schnittpunkt S?

   ☐ a. Ja, den Schnittpunkt S der Schnittgeraden.

   ☐ b. Nein, sie können sich auch in einer gemeinsamen Schnittgerade treffen,

   ☐ c. Nein, sie können auch gar keinen gemeinsamen Punkt haben,

   ☐ d. Drei Ebenen schneiden sich nie in einem gemeinsamen Punkt.

16. Um den Schnittwinkel zweier Ebenen E_1, E_2 zu berechnen, nimmst du:

   ☐ a. Den Zwischenwinkel zwischen den Normalenvektoren,

   ☐ b. Den Zwischenwinkel zwischen einem Richtungsvektor von E_1 und einem Richtungsvektor von E_2,

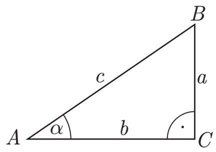
   ☐ c. Den Zwischenwinkel zwischen einem Richtungsvektor von E_1 und einem Normalenvektor von E_2,

   ☐ d. Dieser Schnittwinkel lässt sich nicht berechnen.

Anhang: Die wichtigsten Formeln

Trigonometrie

Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c gilt:



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Allgemeine Dreiecke In allgemeinen Dreiecken gelten der Sinussatz und der Cosinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Vektoren

Betrag Der Betrag gibt die Länge eines Vektors an.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Einheitsvektor Einheitsvektoren sind Vektoren mit dem Betrag/der Länge 1.

$$\vec{e_v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e_v}$$

Jeder Vektor $\vec{v}$ lässt sich in seinen Betrag und den Einheitsvektor zerlegen. Der Betrag gibt die Länge an, der Einheitsvektor die Richtung.

Skalarprodukt

Definition Das Ergebnis des Skalarprodukts ist immer eine Zahl:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Winkelformel Für den Zwischenwinkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{e_a} \cdot \vec{e_b}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Für orthogonale/rechtwinklige Vektoren ist das Skalarprodukt immer Null.

Geraden

Koordinatenform Geraden haben nur im zweidimensionalen eine Koordinatenform. Diese kann (meistens) entweder nach y aufgelöst werden (lineare Funktion) oder dann werden alle Terme auf eine Seite genommen.

$$y = mx + q, \quad \Leftrightarrow \quad mx - y + q = 0, \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

Parameterform Alle Geraden in jeder Dimensionen lassen sich mit der Parameterform darstellen. Dabei ist A der *Stützpunkt* ($\overrightarrow{r_A}$ der Stützvektor) und $\vec{a}$ der *Richtungsvektor*.

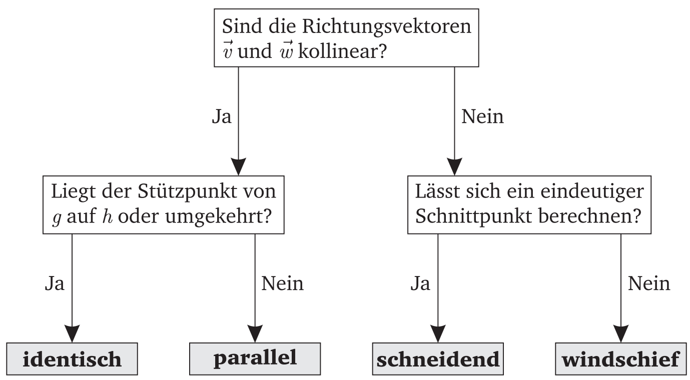
$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}.$$

Abstand Punkt–Gerade

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2}$$

Gegenseitige Lage zweier Geraden Welcher der vier Fälle vorliegt, untersuchst du nach dem folgenden Schema mit

$$g : \vec{r} = \vec{a} + s \cdot \vec{v}, \qquad h : \vec{r} = \vec{b} + s \cdot \vec{w}.$$



Winkelhalbierende Zwei Geraden g und h haben die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Schittpunkt S. Dann ergeben sie die beiden Winkelhalbierenden über:

$$w_{1,2} : \vec{r} = \overrightarrow{r_S} + s \cdot \vec{v}, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{e_a} \pm \overrightarrow{e_b}$$

Vektorprodukt

Definition Das Vektorprodukt lässt sich nur im Dreidimensionalen berechnen. Das Resultat ist ein neuer Vektor, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht steht.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Fläche eines Parallelogramms Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Seiten eines Parallelogramms sind, dann lässt sich mit dem Vektorprodukt die Fläche A dieses Parallelogramms berechnen:

$$A = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

Spatprodukt Mit einer Kombination von Vektor- und Skalarprodukt lässt sich das Volumen eines Spats (V_S) bzw. einer Pyramide (V_P) mit rechteckigem Grundriss berechnen:

$$V_S = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|, \qquad V_P = \frac{1}{3} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|,$$

Abstand Punkt – Gerade Diese Formel vereinfacht sich zu:

$$g : \vec{r} = \vec{r_A} + s \cdot \vec{a}, \qquad d(g, P) = \frac{\left| \overrightarrow{AP} \times \vec{a} \right|}{|\vec{a}|}$$

Ebenen

Koordinatenform Die drei Zahlen a, b und c in einer Koordinatenform der Ebene $\mathcal{E}$ bilden auch gleich einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene.

$$\mathcal{E} : ax + by + cz + d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \mathcal{E}$$

In der *Hesseschen Normalform (HNF)* hat dieser Einheitsvektor gerade die Länge 1:

$$\mathcal{E} : \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{n}| = 1$$

Parameterform Eine Ebene hat in der Parameterform *zwei* Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Diese beiden Vektoren dürfen *nicht kollinear* sein. Mit dem Vektorprodukt lässt sich aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wiederum ein Normalenvektor $\vec{n}$ berechnen.

$$\vec{r} = \vec{r_A} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Abstand Punkt–Ebene Hier hilft die HNF weiter:

$$d(\mathcal{E}, P) = \left| \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Gerade und Ebene Eine Gerade g durchstösst die Ebene $\mathcal{E}$ im Punkt D. Dann lässt sich D berechnen, indem du die allgemeinen Koordinaten von D in die Koordinatengleichung von $\mathcal{E}$ einsetzt (dann auflösen nach s).

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E} : ax + by + cz + d = 0$$

$$a \cdot (x_A + s \cdot x_g) + b \cdot (y_A + s \cdot y_g) + c \cdot (z_A + s \cdot z_g) + d = 0.$$

Für den Zwischenwinkel φ zwischen der Ebene (mit dem Normalenvektor $\vec{n}$) und der Geraden g (mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$) gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

Windschiefe Geraden Mit Hilfe von Ebenen lässt sich auch der Abstand zwischen windschiefen Geraden bestimmen (der Abstand ist immer die kleinste Entfernung).

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}, \qquad h : \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + s \cdot \vec{b}.$$

Dann ist der Abstand:

$$d(g, h) = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|}, \qquad \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$