$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{b+c}{d}$$

Dividend

$$\underbrace{\frac{a}{b}} = \underbrace{a : b}$$

Divisor

Quotient
(Bruch)

Leitprogramm

Brüche

Stufe:	Berufsfachschule, Richtung Informatiker/in 1. Semester
Vorkenntnisse:	Mathematische Grundoperationen Faktorisieren=Ausklammern Ausmultiplizieren Einstiegskenntnisse der Algebra
Bearbeitungsdauer:	4 Lektionen (à 45 Minuten)
Hilfsmittel:	Schreibstift und Hirn

Inhaltsverzeichnis

1. Wie gehe ich vor?

Vielleicht ist dies Ihr erstes Leitprogramm. Deshalb erlaube ich mir Ihnen an dieser Stelle einige Verhaltensweisen im Umgang mit einem Leitprogramm zu geben.

- Sie bearbeiten dieses Leitprogramm **selbständig.**
- In jedem Kapitel gibt es **Übungsaufgaben**, welche von ihnen zu lösen sind. Die Lösungen sind am Ende des Leitprogramms aufgelistet.
- Am Ende des Kapitels folgt eine **Lernkontrolle**. Damit können Sie feststellen, ob Ihre Kenntnisse ausreichend sind. Die Lösungen der Lernkontrolle werden Ihnen zu gegebener Zeit zur Verfügung gestellt.
- Fühlen Sie sich nach der Lernkontrolle sicher, dann sind Sie gut Vorbereitet auf den entsprechenden **Semestertest**.
- Versuchen Sie auf alle Fälle die Texte im Leitprogramm **sorgfältig durchzulesen.** Lassen Sie sich nicht entmutigen, wenn Sie eine Aufgabe nicht sogleich lösen können. Vielleicht genügt es Ihnen, wenn Sie im Leitprogramm wieder zwei, drei Schritte zurückgehen und dann die Lösung der Aufgabe noch einmal versuchen.

Zu guter Letzt:

- Behalten Sie den Spass an der Sache!

- Auch wenn Ihnen das Eine oder Andere im Moment unnötig erscheint, bedenken Sie bitte, dass es sich bei den Brüchen um wichtige Grundbausteine der Mathematik handelt, ohne deren Kenntnisse Sie im späteren Verlauf des Mathematik-Unterrichts Probleme bekommen werden.

2. Verwendete Symbole

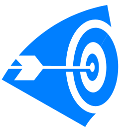
In diesem Leitprogramm werden unterschiedliche Symbole verwendet um Ihnen den Umgang mit dem Leitprogramm zu vereinfachen. Die Bedeutung der Symbole ist im Folgenden aufgeführt.

Aufgabe

Sie sind an der Reihe. Lösen Sie die gestellte Aufgabe. Die Lösungen finden Sie am Ende des Leitprogrammes.

Information

Hier werden Sie auf eine Besonderheit aufmerksam gemacht, die Ihnen die Bearbeitung des Stoffes oder das Lösen von Aufgaben erleichtern sollen.



Lernziele

Sie zeigen Ihnen an, was Sie nach dem Durcharbeiten des Kapitels beherrschen müssen.

Wichtig

Hier müssen Sie besonders genau lesen. Die beschriebene Information kann im Moment oder später sehr wichtig sein.

Definition

Es ist die Eigenart des Menschen Sachverhalte so kurz und bündig wie möglich zu beschreiben. Definitionen können in Worten oder mit Formeln
(z.B. für Ihre Formelsammlung) abgefasst sein.

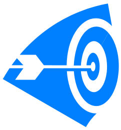
Lernkontrolle

Nach dem Durcharbeiten eines Kapitels haben Sie die Möglichkeit Ihr erarbeitetes Wissen zu überprüfen. Die Resultate werden Ihnen zu gegebener Zeit von der Lehrperson zur Verfügung gestellt. Mit der Lernkontrolle schätzen Sie selber ab, ob Sie bereit sind für den Semestertest.

Semestertest

Dieses Symbol zeigt an, dass an dieser Stelle ein Semestertest folgt. Bereiten Sie sich mit Hilfe der Aufgaben sowie der Lernkontrolle auf den entsprechenden Semestertest vor.

3. Was sind Brüche?



In diesem Kapitel lernen Sie die wichtigen Begriffe in der Welt der Brüche und die grundsätzlichen Definitionen.

In der Mathematik ist die Umkehrung der Multiplikation (des "Malrechnens") die sogenannte Division (das "Durchrechnen").

Die Division lässt sich auf zwei Arten darstellen. Einerseits mit dem Doppelpunkt ":" oder mit einem horizontalen Strich dem so-genannten Bruchstrich. Folgendes Beispiel soll dies erläutern.

$6 : 2 = 3$ ODER: $\frac{6}{2} = 3$

Das Dividieren (und damit die Brüche) ist die Umkehrung der Multiplikation.

3.1. Begriffe

Wie immer, versucht der Mensch zur Kommunikation möglichst eindeutige Begriffe zu verwenden, damit es nicht zu Verwechslungen und damit zu Verwirrungen kommt. So auch in der Welt der Brüche.

Drei einleitende Begriffe sind Ihnen vielleicht noch aus der Zeit des Dividierens in der Primar- bzw. Sekundarschule bekannt. Es sind dies der **Dividend**, der **Divisor** und der **Quotient**. In folgender Darstellung sind diese mit den Variablen a und b bzw. deren Kombination beschrieben:

Dividend

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Quotient (Bruch)}} = \underbrace{a : b}_{\text{Quotient (Bruch)}}$$

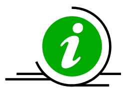
Divisor

Als Ergänzung zum gewohnten Dividieren mit dem Doppelpunkt gibt es in der Welt der Brüche zwei zusätzliche, oft gebrauchte Begriffe. So wird der ganze Ausdruck, welcher oberhalb des Bruchstriches steht **Zähler** genannt. Im Gegensatz dazu der ganze Ausdruck, welcher unterhalb des Bruchstriches steht, **Nenner**.

Zähler

$$\frac{a}{b}$$

Nenner



Mit Ausdruck (oft auch Term genannt) meint man in der Mathematik eine Zahl oder eine Kombination von Zahlen und Operationszeichen, also z.B. einen Ausdruck wie:

a - 3 oder auch "kompliziertere" wie: $\sqrt{3} - 2 \cdot (a - b)$

Der Ausdruck über dem Bruchstrich heisst Zähler. Der Ausdruck unter dem Bruchstrich heisst Nenner.

Hat man Brüche nur mit Zahlen in Zähler und Nenner vor sich, so unterscheidet man je nach Grösse des Zählers gegenüber der Grösse des Nenners zwischen **echten** und **unechten** Brüchen:

Echte Brüche:	Unechte Brüche:
$\frac{2}{20}$ $\frac{120}{230}$ $\frac{3}{19}$ $\frac{0.5}{13}$	$\frac{0.5}{0.2}$ $\frac{12}{3}$ $\frac{40}{20}$ $\frac{13}{12}$

Haben Sie gemerkt was ein echter und was ein unechter Bruch ist? Versuchen Sie folgende Aufgabe zu lösen.

Welche der folgenden Brüche sind (mit Sicherheit) echte Brüche?
Umkreisen Sie die echten Brüche.

A 3-1

$\frac{1}{9}$ $\frac{27}{6}$ $\frac{a}{10}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{0.3}{0.33}$ $\frac{9}{c}$ $\frac{12}{11.9}$ $\frac{0.3}{9}$ $\frac{111}{110}$

3.2. Sonderfälle

Im Gegensatz zu den Sprachen arbeitet die Mathematik nicht mit Regeln, von denen es immer wieder Ausnahmen gibt, sondern mit Definitionen. Aus einigen Definitionen lassen sich Situationen ableiten, welche bemerkenswert sind. So auch die Folgenden bei den Brüchen.

☞ Ist nur der Zähler Null, dann ist das Resultat des Bruchs auch Null

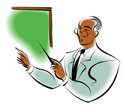
$$\boxed{\frac{0}{a} = 0}$$

☞ Ist in einem Bruch der Nenner 1, dann ist das Resultat des Bruchs gleich dem Zähler

$$\boxed{\frac{a}{1} = a}$$

☞ Ist in einem Bruch der Nenner gleich 0, dann gibt es kein Resultat für diesen Bruch.

$$\boxed{\frac{a}{0} \text{ ist nicht erlaubt}}$$



3.3. Vorzeichen

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Deshalb gelten sinngemäss die gleichen Vorzeichenregeln wie für die Multiplikation.

	Beispiele
$\frac{a}{b} = +\frac{a}{b}$	$\frac{8}{4} = 2$
$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-8}{-4} = 2$
$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{8}{-4} = -2$
$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-8}{4} = -2$

Der Quotient zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv, der Quotient zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

Immer wieder bereitet es beim Rechnen mit Brüchen Mühe das Vorzeichen eines Bruches, vor allem das Minuszeichen, richtig zuzuordnen. Gehört es nun in den Zähler, den Nenner oder vielleicht sogar vor den Bruch?

Es gilt, dass die Vorzeichen von Zähler und Nenner vertauscht werden können. Ein Vorzeichen vor dem Bruchstrich kann in den Zähler **oder** in den Nenner gebracht werden.

3.4. Lernkontrolle

So, nun ist es an der Zeit eine Lernkontrolle über dieses erste Kapitel durchzuführen.

Gehen Sie wie folgt vor:

- Lesen Sie alle Aufgaben zuerst richtig durch.
- Die Lösungen werden Ihnen von der Lehrperson zu gegebener Zeit abgegeben.

Aufgabe 1

Ergänzen Sie folgenden Text:

Die Division ist die ……………………… der Multiplikation. Dividiert man den Dividend durch den ……………………., dann spricht man von einem ……………………… (= Resultat)

Aufgabe 2

Welche beiden Begriffe werden bei Brüchen für den Ausdruck oberhalb bzw. unterhalb des Bruchstriches verwendet. Setzen Sie die Begriffe auf gepunktete Linie.

……….. → a

$\frac{a}{b}$

………. → b

Aufgabe 3

Umkreisen Sie die (mit Sicherheit) unechten Brüche!

$\frac{2}{93}$ $\frac{a}{11}$ $\frac{8}{d}$ $\frac{25}{8}$ $\frac{87}{2}$ $\frac{0.4}{0.41}$

$\frac{12}{34}$ $\frac{0.2}{10}$ $\frac{222}{111}$

Aufgabe 4

Welches Vorzeichen setzen Sie vor den Bruch
(auf die gepunktete Linie)?

$\frac{-222}{-111} = \ldots\ldots \frac{222}{111}$ | $\frac{-4}{5} = \ldots\ldots \frac{4}{5}$ | $\frac{5}{-9} = \ldots\ldots \frac{5}{9}$ | $\frac{2}{3} = \ldots\ldots \frac{2}{3}$

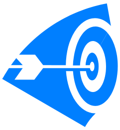
Aufgabe 5

Der Bruch $\frac{2}{3}$ *ist negativ.*

Welche Möglichkeiten das Minuszeichen zu setzen sind richtig.
Setzen Sie bei jeder Möglichkeit, die Sie für richtig halten, ein Kreuz.

☐ Das Minuszeichen kann vor die 2 gesetzt werden.
☐ Das Minuszeichen kann vor die 3 gesetzt werden.
☐ Das Minuszeichen kann vor den Bruchstrich gesetzt werden.

4. Kürzen und Erweitern



In diesem Kapitel lernen Sie zwei wichtige Techniken, diese Voraussetzungen sind für einen spielerisch einfachen Umgang mit Brüchen und deren Operationen wie Addieren und Subtrahieren.

Es wird in der Mathematik immer angestrebt einen Ausdruck (Term), so kompakt wie möglich zu halten. Einerseits aus Gründen der Übersichtlichkeit andererseits auch, um evtl. weitere Lösungsschritte sichtbar zu machen. Die Technik des Kürzen bzw. Erweiterns von Brüchen dient genau dieser Zielsetzung.

4.1. Unechte Brüche / Ganze Zahl mit Bruch

Auch wenn das Bilden von echten Brüchen aus unechten Brüchen und umgekehrt nicht als Kürzen bzw. Erweitern angesehen werden kann, ist diese Technik hier richtig angesiedelt. Sie dient ebenfalls dazu einen Bruch übersichtlicher darzustellen und ermöglicht manchmal das unkomplizierte Weiterrechnen.

4.1.1. Unechte in echte Brüche umwandeln

Bei unechten Brüchen ist der Zähler grösser als der Nenner. Um sie in echte Brüche umzuwandeln wird ermittelt, wie oft der Nenner im Zähler "Platz" hat.

$\frac{222}{111}$ 111 hat **zweimal** (2) im Zähler **ohne** Rest "Platz". Damit ergibt sich hier der unechte Bruch: $\frac{2}{1}$

Ein Bruch mit einem Nenner von 1 wird aber als einfache Zahl dargestellt: 2

$\frac{111}{110}$ 110 hat **einmal** (1) im Zähler **mit** einem Rest von 1 "Platz". Aus dem Rest ergibt sich der echte Bruch: $\frac{1}{110}$

Der ganzzahlige Anteil fällt aber nicht einfach weg, sondern wird vor den Bruch angefügt: $1\frac{1}{110}$

Was denken Sie, was für ein Operationszeichen steht zwischen der Eins und dem Bruch?

Es steht ein "+" dazwischen, welches aber nicht geschrieben wird.
Hätten Sie das gedacht? Wenn nicht, dann überlegen Sie sich mal folgendes:

In einer Konditorei sind noch 9 Viertelstücke einer Schwarzwälder-torte in der Auslage. Stellt man die Stücke zusammen, so ergeben sich 2 ganze Schwarzwälder Torten und ein einzelnes Viertelstück.
In der Sprache der Mathematik: $2\frac{1}{4}$

D.h. 2 ganze Schwarzwälder Torten **und** ein Viertelstück.

Vielleicht haben Sie vermutet, dass ein Malzeichen "·" zwischen Zahl und Bruch steht. Dies muss falsch sein, wie dieses Beispiel mit den Schwarzwälder Torten zeigt.

$2 \cdot \frac{1}{4}$ ergäbe ja $\frac{2}{4}$ und damit weniger als die ursprünglichen 9 Viertelstücke. Das kann ja nicht sein!!

Ist direkt vor einem Bruch eine Zahl, so ist zwischen der Zahl und dem Bruch ein Additionszeichen "+", welches nicht geschrieben wird!

A 4-1

"Wandeln" Sie die folgenden unechten Brüche in echte Brüche um:

a) $\frac{9}{3} =$ b) $\frac{17}{10} =$

c) $\frac{25}{6} =$ d) $\frac{8}{2} =$

4.1.2. Brüche mit ganzzahligem Anteil

Sie können sich denken, dass das Umwandeln eines Bruches mit einem ganzzahligen Anteil in einen unechten Bruch, einfach umgekehrt verläuft:

Die Zahl vor dem Bruch wird mit dem Nenner des Bruches multipliziert **und** zum Zähler des Bruches dazu gezählt (addiert). Versuchen Sie es doch gleich selber.

A 4-2

"Wandeln" Sie die folgenden Brüche mit einem ganzzahligen Anteil in unechte Brüche um:

a) $3\frac{2}{3} =$

b) $8\frac{19}{21} =$

c) $5\frac{3}{10} =$

d) $11\frac{1}{6} =$

4.2. Kürzen

Betrachten Sie sich einmal folgende Beispiele:

$\frac{20}{10}=\frac{2}{1}$	$\frac{3ab}{3bc}=\frac{a}{c}$	$\frac{ab+ac}{ad}=\frac{b+c}{d}$

Was stellen Sie fest?

Genau, Zähler **und** Nenner werden beim Kürzen mit der gleichen Zahl (oder Variable) dividiert. Der Divisor ist identisch.

Der Divisor ist hier die Zahl 10	Der Divisor ist hier 3b	Der Divisor ist hier a

Was ist beim Kürzen in diesen Beispielen zu beachten?

Der Ausdruck im Zähler und Nenner ist jeweils eine Zahl. Es gilt, einen gemeinsamen Divisor zu finden.	Der Ausdruck im Zähler und Nenner ist jeweils ein **Produkt**. Es gilt, einen gemeinsamen Divisor zu finden.	Der Ausdruck im Zähler ist eine Summe. Es gilt **zuerst** aus der Summe einen **Faktor** auszuklammern, welcher mit dem gleichen Divisor dividiert werden kann wie der Nenner.

Ein Beispiel zur Verdeutlichung:

$$\frac{30ax}{150abx}=\frac{30\cdot a\cdot x}{5\cdot 30\cdot a\cdot b\cdot x}=\frac{\cancel{30}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{x}}{5\cdot\cancel{30}\cdot\cancel{a}\cdot b\cdot\cancel{x}}=\underline{\underline{\frac{1}{5b}}}$$

Einen Bruch kürzen heisst, Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren.

Der Wert des Bruchs ändert sich durch das Kürzen nicht.

Vor dem Kürzen einer Summe müssen zuerst Faktoren aus der Summe ausgeklammert werden. Denn nur Faktoren dürfen gekürzt werden.

A 4-3

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

a) $\frac{5ab}{15ac-20ab}=$

b) $\frac{7a\cdot 3b}{6b\cdot 14a}=$

4.2.1. Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

Es ist von Vorteil, wenn man beim Kürzen den grössten Divisor findet durch den sich der Zähler und der Nenner teilen lässt. Damit lässt sich der Bruch am wirkungsvollsten kürzen. Diesen Divisor nennt man den grössten gemeinsamen Teiler. Wie findet man diesen grössten gemeinsamen Teiler?

Man zerlegt den Zähler und den Nenner zuerst jeweils in seine Primfaktoren. Identische Primfaktoren ergeben miteinander multipliziert den ggT. Folgendes Beispiel soll dies erläutern:

$$\begin{array}{llllllllll}
\underline{48} & \rightarrow & 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 3 & & & \\
84 & \rightarrow & 2 & \cdot 2 & & & \cdot 3 & \cdot 7 & & \\
 & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
 & & \mathbf{2} & \cdot \mathbf{2} & & & \cdot \mathbf{3} & & & = \mathbf{12}
\end{array}$$

Primzahlen sind übrigens positive ganze Zahlen, welche nur durch sich selber und durch eins teilbar sind. Die erste Primzahl ist die 2.

Primzahlen:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, …

Dies funktioniert natürlich auch bei Zählern oder Nennern mit Variablen.

$$\begin{array}{lllllllllll}
\underline{60abcx} & \rightarrow & 2 & \cdot 2 & & \cdot 3 & \cdot 5 & \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot x & \\
120ax & \rightarrow & 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot 5 & \cdot a & & & \cdot x & \\
 & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & & \mathbf{2} & \cdot \mathbf{2} & & \cdot \mathbf{3} & \cdot \mathbf{5} & \cdot \mathbf{a} & & & \cdot \mathbf{x} & = \mathbf{60ax}
\end{array}$$

A 4-4

Welches ist der ggT folgender Zahlengruppen?

a) 70 / 42

b) $16x$ / $28cx^2$

c) $10a$ / $12b$ / $14c$

4.3. Erweitern

Das Gegenstück zum Kürzen ist das Erweitern.

Einen Bruch erweitern heisst, Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Faktor) multiplizieren.

Der Wert des Bruchs ändert sich durch das Erweitern nicht.

Einige Beispiele verdeutlichen die oben aufgeführte Definition:

$$\frac{3}{5} \text{ erweitern mit dem Faktor } 2 \;\; => \;\; \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{6}{10}}}$$

$$\frac{a}{b} \text{ erweitern mit dem Faktor } c \;\; => \;\; \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \underline{\underline{\frac{ac}{bc}}}$$

$$\frac{3b}{7a} \text{ erweitern mit dem Faktor } (-2x) \;\; => \;\; \frac{3b \cdot (-2x)}{7a \cdot (-2x)} = \frac{-6bx}{-14ax} = \underline{\underline{\frac{6bx}{14ax}}}$$

Wie Klammern ausmultipliziert werden ist nicht Bestandteil dieses Leitprogramms. Dies wird vorausgesetzt.

Erweitern Sie folgende Brüche mit dem vorgegebenen Faktor bzw. ergänzen Sie die gepunkteten Linien:

A 4-5

a)

$$\frac{4x}{3a} = \frac{.....}{21a}$$

Erweiterungsfaktor? …………….

b)

$$\frac{3c + 2d}{5a - 3b} = \frac{..........\ ....}{35axy - 21bxy}$$

Erweiterungsfaktor? ……….

c)

$$\frac{7a}{-3b} = \frac{..........\ ....}{..........\ ....}$$

Erweiterungsfaktor: 7c

4.3.1. Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Sollen zwei Brüche mit unterschiedlichem Nenner miteinander addiert werden, dann müssen die Nenner der beiden Brüche zuerst zu einem gemeinsamen Nenner erweitert werden.

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{9}=\frac{2\cdot 9}{4\cdot 9}+\frac{3\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{18}{36}+\frac{12}{36}=\frac{30}{36}$$

Es stellt sich die Frage, welches ist der geeignetste, d.h. kleinste gemeinsame Nenner für die Brüche?

Ein sehr ähnliches Vorgehen wie beim Kürzen ermöglicht es diesen gemeinsamen Nenner, das sogenannte kleinste gemeinsame Vielfache, zu ermitteln. Nehmen wir die beiden Nenner 18 und 6.

18	→	2	· 3	· 3	
6	→	2		· 3	
		↓	↓	↓	
		2	· **3**	· **3**	= **18**

Wiederum wird in die Primzahlen zerlegt. Von **jeder auftretenden** Primzahl wird nun die **Höchstzahl** zur Bildung des neuen Nenners herangezogen. Der Erweiterungsfaktor für jeden beteiligten Bruch wird ermittelt, indem das kgV durch den jeweilligen Nenner dividiert wird.
Das kgV kann auch bei Ausdrücken mit Variablen ermittelt werden.

8ab	→	2	· 2	· 2			· a	· b		
12bx	→	2	· 2		· 3			· b	· x	
14ax	→	2				· 7	· a		· x	
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
		2	· **2**	· **2**	· **3**	· **7**	· **a**	· **b**	· **x**	= 168 abx

A 4-6

Welches ist das kgV folgender Zahlengruppen?

a) 2 / 5 / 9

b) 10a / 12b / 14c

c) 5x / 35cx / 15c

4.4. Lernkontrolle

Nun haben Sie die Möglichkeit zu zeigen, was Sie in diesem Kapitel gelernt haben. Wenn Sie die Aufgaben im Kapitel lösen konnten, dann ist diese Lernkontrolle sicher auch kein Problem. Viel Spass!

Gehen Sie wie folgt vor:
- Lesen Sie alle Aufgaben zuerst richtig durch.
- Die Lösungen werden Ihnen von der Lehrperson zu gegebener Zeit abgegeben.

Aufgabe 1

Berechnen Sie von den folgenden Ausdrücken jeweils den ggT:

a) 60 / 84

b) 4x + 4y / 8a + 4b

c) 28abx / 112acx / 224adx / 336ax

Aufgabe 2

Berechnen Sie von den folgenden Ausdrücken jeweils das kgV:

a) 6 / 9 / 24

b) cd / a+b / d

Aufgabe 3

Kürzen Sie folgende Brüche

a) $\frac{60}{84} =$

b) $\frac{15a - 6ab}{20c - 8bc} =$

c) $-\frac{b-2}{2-b} =$

Aufgabe 4

Wandeln Sie die unechten Brüche in echte Brüche um

a) $\frac{37}{13} =$

b) $\frac{1234}{1233} =$

Aufgabe 5

Erweitern Sie folgende Brüche und geben Sie den Erweiterungsfaktor an

a) $\frac{5ab}{7xy} = \frac{.....}{35cxy}$ Erweiterungsfaktor? …………….

b) $\frac{7x}{a+n} = \frac{.....}{(a+n)(3b+c)}$ Erweiterungsfaktor? …………….

4.5. Semestertest 2

So, nun haben Sie die Lernkontrolle hinter sich. Was ergab der Vergleich Ihrer Resultate mit denjenigen der Lehrperson?

Bereiten Sie sich gut auf den zweiten Semestertest in Mathematik I vor, indem Sie die entsprechenden Aufgaben und Lernkontrollen nochmal durchgehen.

Folgendes wird im zweiten Semestertest auf Sie zukommen (Inhalt der Kapitel 3 und 4):

- Begriffe wie z.B. Dividend, Divisor, Quotient, Zähler und Nenner kennen und korrekt zuordnen
- Echte und unechte Brüchen kennen
- Vorzeichen von Brüchen korrekt setzen (aufgrund der Vorzeichen der Zähler und Nenner)
- Unechte Brüche in echte Brüche (mit ganzzahligem Anteil) umwandeln
- Echte Brüche (mit ganzzahligem Anteil) in unechte umwandeln
- ggT berechnen
- Brüche kürzen durch Teilen des Zählers und Nenners durch den ggT
- kgV Berechnen
- Brüche erweitern

Viel Erfolg!

5. Addieren und Subtrahieren

Dieses Kapitel behandelt die ersten beiden Grundoperationen der Mathematik angewendet an den Brüchen.

5.1. Gleichnamig "machen"

Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt, können Brüche nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Nenner aufweisen.

Diese Tatsache lässt sich wieder mit einem Tortenbeispiel einsehen:

In einer Konditorei-Auslage sehen Sie drei Viertelstücke (1/4-Stücke) einer Torte und gleich daneben vier Achtelstücke (1/8-Stücke). Sie haben den Auftrag zwei dieser Torten nach Hause zu bringen. Leider hat es keine ganzen Torten mehr nur noch diese Stücke. Sie fragen sich, ob diese Stücke zusammen (addiert) zwei Torten ergeben würden. Einfach zusammen zählen können Sie die Stücke nicht, sie sind ja nicht gleich gross.

Die drei Viertelstücke lassen sich als 3/4-Bruch und die vier Achtelstücke als 4/8-Bruch darstellen.

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{8}$$

Gemäss der Aussage zu Beginn dieses Kapitels können nur Brüche mit gleichem Nenner addiert werden. Wie lautet für diese beiden Brüche der gemeinsame Nenner?

Antwort: Es gibt mehrere gemeinsame Nenner. Meistens interessiert aber der sogenannte Hauptnenner

Der Hauptnenner ist das kgV der Einzelnenner.

Sollten Sie einmal "zu faul" sein, das kgV zu ermitteln, dann können Sie auch das Produkt aller Nenner als gemeinsamen Nenner wählen. In diesem Beispiel wäre dies 32. Der Nachteil ist allerdings, dass die Beträge der Zähler und Nenner grösser sind als wenn Sie den kleinsten gemeinsamen Nenner gewählt hätten.

In unserem Tortenbeispiel ist der Hauptnenner 8: $\frac{6}{8}+\frac{4}{8}$

Die beiden Brüche sind nun **gleichnamig**.

Aber wie lassen sich jetzt die Brüche addieren?

5.2. Addition / Subtraktion

> **Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man <u>nur</u> die Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält**

Betrachten wir unser Beispiel von 5.1., dann kommen wir zu folgender Lösung:

$$\frac{6}{8}+\frac{4}{8}=\frac{6+4}{8}=\underline{\underline{\frac{10}{8}}}$$

Wird dieser Bruch noch in einen echten Bruch verwandelt, ist klar ersichtlich, dass alle Stücke zusammen eine ganze Torte und ein Viertelstück ergeben. Damit ist die Frage von 5.1. beantwortet.

$$\frac{10}{8}=\underline{\underline{1\frac{1}{4}}}$$

Verfolgen Sie aufmerksam die folgenden Additionen und Subtraktionen von Brüchen. Achten Sie darauf, wie die Brüche gleichnamig gemacht werden. Speziell zu beachten sind die Vorzeichen. Versuchen Sie die Beispiele nachzuvollziehen und lösen Sie anschliessend die Übungsbeispiele.

$$\frac{5a}{12}+\frac{7a}{12}-\frac{4a}{12}=\frac{5a+7a-4a}{12}=\frac{8a}{12}=\underline{\underline{\frac{2a}{3}}}$$

Ist soweit alles klar? Sehr gut, dann lösen Sie jetzt die folgenden Aufgaben. Die Lösungen dazu finden sie wieder am Ende des Leitprogramms. Viel Spass!

Addieren und subtrahieren Sie folgende Brüche:

A 5-1

a)

$$\frac{3a+5b}{2c}-\frac{2-2b+8a}{2c}+\frac{7a-3b+6}{2c}=$$

b)

$$\frac{2x+5n}{2x}-\frac{2x-3n}{6x}+\frac{n}{12x}=$$

5.3. Lernkontrolle

Und schon wieder haben Sie ein Kapitel bewältigt. Sind Sie bereit für die Lernkontrolle? Denken Sie daran, Sie bestimmen das Lerntempo!

Auch hier gilt wieder:
- Lesen Sie alle Aufgaben zuerst richtig durch.
- Die Lösungen werden Ihnen von der Lehrperson zu gegebener Zeit abgegeben.

Aufgabe

Lösen Sie die Additionen und Subtraktionen folgender Brüche:

a) $\frac{2}{15} - \frac{1}{12} + \frac{11}{20} =$

b) $\frac{x-y}{x+1} + \frac{x-y}{3x+3} - \frac{x+y}{9x+9} =$

6. Multiplizieren und Dividieren

Nach den Grundoperationen der Addition/Subtraktion folgen nun die Multiplikation und Division.

In diesem Kapitel werden Sie das Kürzen brauchen. Vielleicht schauen Sie noch einmal im Kapitel 4 nach, wie das geht!

6.1. Multiplikation

Nehmen wir für den Einstieg noch einmal das Tortenbeispiel aus den vergangenen Kapiteln.

Wenn Sie in der Konditorei drei ganze Torten kaufen wollen, dann lässt sich das ausdrücken mit:

3 • 1 (gemeint ist eine Torte), also gesamthaft 3 Torten.

Dabei kann es Ihnen egal sein, ob die drei Torten bereits in Viertelstücke vorgeschnitten sind. Jede Torte besteht aus vier solchen Stücken, gesamthaft bleibt es aber bei drei Torten:

$$3 \cdot \frac{4}{4} = \underline{\underline{3}}$$

Da sich der zweite Bruch auf 1 kürzen lässt ergibt das Resultat wieder 3.

Nun haben Sie beinahe schon zwei Brüche miteinander multipliziert. Beinahe, weil die Zahl 3 in diesem Beispiel kein Bruch ist. Es hindert uns aber niemand daran die Zahl 3 als Bruch zu schreiben, nämlich als 3/1:

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{4} = \underline{\underline{3}}$$

Natürlich muss wieder die Zahl 3 als Resultat herauskommen. Aber wie kommt man von den Brüchen auf der linken Seite zur Zahl 3 auf der rechten Seite?

Brüche werden multipliziert, indem das Produkt der Zähler und das Produkt der Nenner gebildet wird.

Für unser Beispiel heisst das:

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{4}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 4}=\frac{12}{4}=\underline{\underline{3}}$$

Vom zweitletzten zum letzten Schritt wird der unechte Bruch umgewandelt. Als Resultat kommt die 3 heraus.

Brüche lassen sich also auf einfache Art und Weise multiplizieren:

$$\frac{7a}{3}\cdot\frac{48}{14}=\frac{7a\cdot 48}{3\cdot 14}=\frac{336a}{42}=\underline{\underline{8a}}$$

Diese Aufgabe lässt sich noch eleganter lösen, wenn vor dem Multiplizieren gekürzt wird:

$$\frac{7a}{3}\cdot\frac{48}{14}=\frac{\cancel{7}\cdot a\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 8}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{7}}=\frac{8a}{1}=\underline{\underline{8a}}$$

Zu beachten ist, dass beim Kürzen eigentlich immer eine eins "entsteht".

Multiplizieren Sie folgende Brüche:

A 6-1

a)

$$10bz \cdot \frac{8ax}{30by} =$$

b)

$$\frac{10abc}{6} \cdot \frac{12}{abc} =$$

6.2. Division

Die Regel für die Division von Brüchen ist einfach:

Brüche werden dividiert, indem man vom 2. Bruch den Kehrwert bildet und die Brüche dann miteinander multipliziert.

Soweit so gut, nur verständlich ist diese Regel nicht auf Anhieb. Vielleicht aber, wenn man von folgender Situation ausgeht:

Es soll der Bruch ½ durch 2 geteilt werden. Man kann nachvollziehen, dass dabei die Hälfte von ½ resultieren muss. Teilt man in Gedanken ein halbes Kuchenstück dann entstehen zwei Viertelstücke. Irgendwie muss auch auf dem mathematischen Weg der Wert ¼ resultieren. Versuchen wir es mit der oben beschriebenen Regel. Zuerst müssen wir allerdings zwei Brüche haben. Wir bedienen uns desselben "Tricks" wie bereits bei der Multiplikation und verwandeln die 2 in einen Bruch, dann wenden wir die obige Regel an:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Siehe da, die Regel funktioniert. Wir können sie also beruhigt für weitere Beispiele anwenden.

In der Welt der Brüche wird die Division zweier Brüche nicht mit einem Doppelpunkt geschrieben, sondern ebenfalls mit einem Bruchstrich. Dieser wird in der Regel dicker oder länger dargestellt als die anderen beiden, um zu verdeutlichen, wo welcher Bruch beginnt bzw. aufhört.

Bsp.

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{\;\frac{1}{2}\;}{\;\frac{2}{1}\;}$$

VORSICHT!: Es ist vor dem Kehren des 2. Bruches immer darauf zu achten, dass wirklich zwei Brüche vorliegen.

$$\frac{16ax}{5b} : \frac{4a}{15bc} = \frac{16ax}{5b} \cdot \frac{15bc}{4a} = \frac{4 \cdot \cancel{4a} \cdot x \cdot 3 \cdot \cancel{5b} \cdot c}{\cancel{5b} \cdot \cancel{4a}} = 4x \cdot 3c = \underline{\underline{12cx}}$$

$$\frac{\frac{6m}{5a}}{\frac{18n}{10a}} = \frac{6m}{5\cancel{a}} \cdot \frac{10\cancel{a}}{18n} = \frac{\cancel{6} \cdot m \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{6} \cdot n} = \underline{\underline{\frac{2m}{3n}}}$$

A 6-2

Dividieren Sie folgende Brüche:

a) $4\frac{1}{3}ab : 2\frac{1}{4}ac =$

b) $\frac{9a}{8b} : \frac{a}{b} =$

6.3. Lernkontrolle

Jede Division von Brüchen lässt sich in eine Multiplikation umformen. Das haben Sie jetzt ein paar Mal geübt. Es ist an der Zeit Ihr neues Wissen zu kontrollieren.

- Lesen Sie alle Aufgaben zuerst richtig durch.
- Die Lösungen werden Ihnen von der Lehrperson zu gegebener Zeit abgegeben.

Aufgabe

Lösen Sie die Divisionen folgender Brüche:

a) $$\frac{-9x}{10y} : \frac{3x}{-10y} =$$

b) $$\frac{\mathrm{am}+\mathrm{an}}{\mathrm{m}} : \frac{\mathrm{ax}+\mathrm{ay}}{\mathrm{x}} =$$

c) $$\frac{\;\frac{ax}{b}\;}{\;\frac{ab}{x}\;} =$$

6.4. Semestertest 3

Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sind die vier Grundrechenarten der Mathematik. Es ist deshalb auch sinnvoll diese vier Rechenoperationen in einem grösseren Test abzuhandeln.

Bereiten Sie sich gut auf den dritten Semestertest in Mathematik I vor, indem Sie die entsprechenden Aufgaben und Lernkontrollen nochmal durchgehen.

Folgendes wird im zweiten Semestertest auf Sie zukommen (Inhalt der Kapitel 3, 4, 5 und 6):

- Begriffe wie z.B. Dividend, Divisor, Quotient, Zähler und Nenner kennen und korrekt zuordnen
- Echte und unechte Brüchen kennen
- Vorzeichen von Brüchen korrekt setzen (aufgrund der Vorzeichen der Zähler und Nenner)
- Unechte Brüche in echte Brüche (mit ganzzahligem Anteil) umwandeln
- Echte Brüche (mit ganzzahligem Anteil) in unechte umwandeln
- ggT berechnen
- Brüche kürzen durch Teilen des Zählers und Nenners durch den ggT
- kgV Berechnen
- Brüche erweitern
- Brüche addieren/subtrahieren durch gleichnamig machen d.h. alle Brüche so erweitern, dass jeder Nenner gleich dem kgV aller Nenner ist
- Brüche multiplizieren durch Multiplizieren des Zählers mit dem Zähler und des Nenners mit dem Nenner
- Brüche dividieren durch Multiplikation mit dem Umkehrbruch

Viel Erfolg!

7. Lösungen

7.1. Aufgaben

Welche der folgenden Brüche sind (mit Sicherheit) echte Brüche?
Umkreisen Sie die echten Brüche:

A 3-1

$\frac{1}{9}$ $\frac{a}{10}$ $\frac{27}{6}$

$\frac{9}{20}$

$\frac{9}{c}$ $\frac{0.3}{0.33}$ $\frac{12}{11.9}$

$\frac{0.3}{9}$ $\frac{111}{110}$

"Wandeln" Sie die folgenden unechten Brüche in echte Brüche um:

A 4-1

a) $\frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3$

b) $\frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$

c) $\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

d) $\frac{8}{2} = \frac{4}{1} = 4$

A 4-2

"Wandeln" Sie die folgenden Brüche mit einem ganzzahligen Anteil in unechte Brüche um:

a) $3\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{3}}}$

b) $8\frac{19}{21} = \underline{\underline{\frac{187}{21}}}$

c) $5\frac{3}{10} = \underline{\underline{\frac{53}{10}}}$

d) $11\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{67}{6}}}$

A 4-3

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

a) $\frac{5ab}{15ac - 20ab} = \underline{\underline{\frac{b}{3c - 4b}}}$

b) $\frac{7a \cdot 3b}{6b \cdot 14a} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

A 4-4

Welches ist der ggT folgender Zahlengruppen?

a) 70 / 42 => 14

b) $16x$ / $28cx^2$ => $4x$

c) $10a$ / $12b$ / $14c$ => 2

A 4-5

Erweitern Sie folgende Brüche mit dem vorgegebenen Faktor bzw. ergänzen Sie die gepunkteten Linien:

a) $\frac{4x}{3a} = \frac{28x}{21a}$ Erweiterungsfaktor: 7

b) $\frac{3c + 2d}{5a - 3b} = \frac{21cxy + 14dxy}{35axy - 21bxy}$ Erweiterungsfaktor: 7xy

c) $\frac{7a}{-3b} = \frac{49ac}{-21bc}$ Erweiterungsfaktor: 7c

A 4-6

Welches ist das kgV folgender Zahlengruppen?

a) 2 / 5 / 9 => 90

b) 10a / 12b / 14c => 420abc

c) 5x / 35cx / 15c => 105cx

A 5-1

Addieren und subtrahieren Sie folgende Brüche:

a) $$\frac{3a+5b}{2c}-\frac{2-2b+8a}{2c}+\frac{7a-3b+6}{2c}=\underline{\underline{\frac{a+2b+2}{c}}}$$

b) $$\frac{2x+5n}{2x}-\frac{2x-3n}{6x}+\frac{n}{12x}=\underline{\underline{\frac{37n+8x}{12x}}}$$

Multiplizieren Sie folgende Brüche:

A 6-1

a) $10bz \cdot \frac{8ax}{30by} = \underline{\underline{\frac{8axz}{3y}}}$

b) $\frac{10abc}{6} \cdot \frac{12}{abc} = \underline{\underline{20}}$

Dividieren Sie folgende Brüche:

A 6-2

a) $4\frac{1}{3}ab : 2\frac{1}{4}ac = \underline{\underline{\frac{52b}{27c}}}$

b) $\frac{9a}{8b} : \frac{a}{b} = \frac{9}{8} = \underline{\underline{1\frac{1}{8}}}$