Решение на домашно 2

Валентин Стоянов

март 2018

Задача 1.

Нека $R = \{a, b, c, d\}$ е пръстен с таблици за събиране и умножение, съответно,

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

и

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	•	a	b
c	a	•	•	c
d	a	d	•	•

Да се определят отбелязаните с кръгче елементи в таблицата за умножение и да се намерят идеалите на пръстена R.

Решение:

$dd = (b + c)d = bd + cd = b + c = d$
$dc = d(d + b) = dd + db = d + d = a$
$bb = b(c + d) = bc + bd = a + b = b$
$cb = (b + d)b = bb + db = b + d = c$
$cc = c(b + d) = cb + cd = c + c = a$

След попълване, таблицата за умножение изглежда така:

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	c	a	c
d	a	d	a	d

Идеалите в пръстена са: $\{a\}$, $\{a, b, c, d\}$ и $\{a, c\}$.

Задача 2.

Разглеждаме множествата

$$A = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{Q}[x]\,;\, g(45466) \neq 0\} \quad \text{и} \quad M = \{\frac{f}{g} \in A \mid f(45466) = 0\}.$$

Да се докаже, че A е пръстен (относно обичайните операции: събиране и умножение на рационални функции), M е идеал на A, който съдържа всеки собствен идеал на A и $A/M \cong \mathbb{Q}$

Решение:

Нека $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in A$. Ще проверим дали $\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} \in A$ и $\frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2} \in A$.

- $\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{g_1g_2}$, тъй като $\mathbb{Q}[x]$ е пръстен и $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$, то следва, че $g_1g_2 \in \mathbb{Q}[x]$ и $f_1g_2 - f_2g_1 \in \mathbb{Q}[x]$. Следователно $\frac{f_1g_2 - f_2g_1}{g_1g_2} \in A$.
- Тъй като $\mathbb{Q}[x]$ е пръстен следва, че $f_1f_2 \in \mathbb{Q}[x]$ и $g_1g_2 \in \mathbb{Q}[x]$. Следователно $\frac{f_1f_2}{g_1g_2} \in A$

$\Rightarrow A$ е пръстен.

Нека $\varphi : A \to \mathbb{Q}$ такова, че $\varphi(\frac{f}{g}) = (\frac{f}{g})(x)$.
Ще проверим дали φ е хомоморфизъм на пръстени. Нека $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in A$.

- $\varphi(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}) = \varphi(\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}) = (\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2})(x) = (\frac{f_1}{g_1})(x) + (\frac{f_2}{g_2})(x) =$
$= \varphi(\frac{f_1}{g_1}) + \varphi(\frac{f_2}{g_2})$
- $\varphi(\frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2}) = \varphi(\frac{f_1f_2}{g_1g_2}) = (\frac{f_1f_2}{g_1g_2})(x) = (\frac{f_1}{g_1})(x)(\frac{f_2}{g_2})(x) = \varphi(\frac{f_1}{g_1})\varphi(\frac{f_2}{g_2})$

$\Rightarrow \varphi$ е хомоморфизъм.
От начина, по който е зададено следва, че $Ker\varphi = M$.
Съгласно Теоремата за хомоморфизми на пръстени: $A/M \cong \mathbb{Q}$