Решени задачи от въведение в теория на числата

Валентин Стоянов

март 2018

Задача 1.

Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $n^3 + 11n$ се дели на 6.
Доказателство по индукция:

1. База $n = 1$

$6 \mid 12$ да.

2. Индукционна хипотеза

Допускаме, че $6 \mid n^3 + 11n$

3. Индукционна стъпка

Проверяваме дали твърдението е вярно за $n + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 \mid (n + 1)^3 + 11(n + 1)$
$\Leftrightarrow 6 \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11$
$\Leftrightarrow 6 \mid 3n^2 + 3n$
$\Leftrightarrow 6 \mid 3n(n + 1)$
$\Leftrightarrow 2 \mid n(n + 1)$
Но $n(n+1)$ са две поредни числа $\Rightarrow$ винаги поне едно е четно $\Rightarrow 2 \mid n(n+1)$

Задача 2.

Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $3^{2^n} - 1$ се дели на 2^{n+2}.
Доказателство по индукция:

1. База $n = 1$

8 | 8 да.

2. Индукционна хипотеза

Допускаме, че $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$

3. Индукционна стъпка

Проверяваме дали твърдението е изпълнено за $n + 1 \Rightarrow$
$2^{(n+1)+2} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{(n+2)+1} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2^1 \mid 3^{2^n 2^1} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid 3^{2^n 2} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid (3^{2^n})^2 - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$
$\Leftrightarrow 2 \mid (3^{2^n} + 1)$
3^{2^n} е нечетно число $\Rightarrow 3^{2^n} + 1$ е четно $\Rightarrow$
$2 \mid (3^{2^n} + 1)$

Задача 3.

Да се намери d = НОД(a, b) и цели числа u, v, за които, au + bv = d, ако:

a) a = 315, b = 72;

Решение:
Намираме НОД чрез алгоритъма на Евклид $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ d = НОД(a, b) = НОД(315, 72)
315 : 72 = 4(остатък 27)
72 : 27 = 2(остатък 18)
27 : 18 = 1(остатък 9)
18 : 9 = 2(остатък 0)
НОД е последният ненулев остатък $\Rightarrow d = (315, 72) = 9$

б) a = 975, b = 308;

Решение: