Решени задачи от въведение в теория на числата

Валентин Стоянов

март 2018

Задача 1.

Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $n^3 + 11n$ се дели на 6.
Доказателство по индукция:

1. База $n = 1$

$6 \mid 12$ да.

2. Индукционна хипотеза

Допускаме, че $6 \mid n^3 + 11n$

3. Индукционна стъпка

Проверяваме дали твърдението е вярно за $n + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 + 11(n+1)$
$\Leftrightarrow 6 \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11$
$\Leftrightarrow 6 \mid 3n^2 + 3n$
$\Leftrightarrow 6 \mid 3n(n+1)$
$\Leftrightarrow 2 \mid n(n+1)$
Но $n(n+1)$ са две поредни числа $\Rightarrow$ винаги поне едно е четно $\Rightarrow 2 \mid n(n+1)$

Задача 2.

Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $3^{2^n} - 1$ се дели на 2^{n+2}.
Доказателство по индукция:

1. База $n = 1$

$8 \mid 8$ да.

2. Индукционна хипотеза

Допускаме, че $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$

3. Индукционна стъпка

Проверяваме дали твърдението е изпълнено за $n + 1 \Rightarrow$
$2^{(n+1)+2} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{(n+2)+1} \mid 3^{2^{n+1}} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2^1 \mid 3^{2^n 2^1} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid 3^{2^n 2} - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid (3^{2^n})^2 - 1$
$\Leftrightarrow 2^{n+2}2 \mid (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$
$\Leftrightarrow 2 \mid (3^{2^n} + 1)$
3^{2^n} е нечетно число $\Rightarrow 3^{2^n} + 1$ е четно $\Rightarrow$
$2 \mid (3^{2^n} + 1)$

Задача 3.

Да се докаже, че за всяко естествено число n
$55^2 \mid 81^{n+1} + (55n - 81)136^n$
Доказателство по индукция:

1. База $n = 0$

$55^2 \mid 0$ да.

2. Индукционна хипотеза

Допускаме, че $55^2 \mid 81^{n+1} + (55n - 81)136^n$

3. Индукционна стъпка

Проверяваме дали твърдението е изпълнено за $n + 1 \Rightarrow$
$55^2 \mid 81^{n+2} + (55(n + 1) - 81)136^{n+1}$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + (55n + 55 - 81)136^n136$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + (55n + 55 - 81)(81 + 55)136^n$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + (55n \times 81 + 55^2n + 55 \times 81 + 55^2 - 81^2 - 81 \times 55)136^n$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + (55n \times 81 + 55^2n + 55^2 - 81^2)136^n$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + ((55n - 81)81 + 55^2n + 55^2)136^n$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + ((55n - 81)81 + 55^2(n + 1))136^n$
$\Leftrightarrow 55^2 \mid 81^{n+1}81 + (55n - 81)136^n81 + 55^2(n + 1)136^n$
От индукционната хипотеза и свойствата за делимост $\Rightarrow$
$\Rightarrow 55^2 \mid 81^{n+2} + (55(n + 1) - 81)136^{n+1}$

Задача 4.

Да се намери d = НОД(a, b) и цели числа u, v, за които, au + bv = d, ако:

a) a = 315, b = 72;

Решение:
Намираме НОД чрез алгоритъма на Евклид $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ d = НОД(a, b) = НОД(315, 72)
315 : 72 = 4(остатък 27)
72 : 27 = 2(остатък 18)
27 : 18 = 1(остатък 9)
18 : 9 = 2(остатък 0)
НОД е последният ненулев остатък $\Rightarrow d = (315, 72) = 9$
От Безу знаем, че ако НОД(a, b) = d, то съществуват цели числа u и v, такива, че au + bv = d. $\Rightarrow$
$\Rightarrow 9 = 27 - 1 \times 18 =$
$= 27 - 1 \times (72 - 2 \times 27) =$
$= 27 - 72 + 3 \times 27 =$

$= 4 \times 27 - 72 =$
$= 4 \times (315 - 4 \times 72) =$
$= 315 \times 4 + 72 \times (-16)$
$\Rightarrow u = 4, v = -16$

б) a = 975, b = 308;

Решение:
Намираме НОД чрез алгоритъма на Евклид $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ d = НОД(a, b) = НОД(975, 308)
975 : 308 = 3(остатък 51)
308 : 51 = 6(остатък 2)
51 : 2 = 25(остатък 1)
25 : 1 = 25(остатък 0)
НОД е последният ненулев остатък $\Rightarrow d = (975, 308) = 1$
От Безу знаем, че ако НОД(a, b) = d, то съществуват цели числа u и v, такива, че au + bv = d.$\Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = 51 - 2 \times 25 =$
$= 51 - 25(308 - 6 \times 51) =$
$= 51 - 25 \times 308 + 150 \times 51 =$
$= 151 \times 51 - 25 \times 308 =$
$= 151 \times (975 - 3 \times 308) - 25 \times 308 =$
$= 975 \times 151 + 308 \times (-453) + 308 \times (-25) =$
$= 975 \times 151 + 308 \times (-478) \Rightarrow u = 151, v = -478$