Решение на домашно 2

Валентин Стоянов

март 2018

Задача 1.

Нека $R = \{a, b, c, d\}$ е пръстен с таблици за събиране и умножение, съответно,

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

и

∗	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	•	a	b
c	a	•	•	c
d	a	d	•	•

Да се определят отбелязаните с кръгче елементи в таблицата за умножение и да се намерят идеалите на пръстена R.

Решение:

$dd = (b + c)d = bd + cd = b + c = d$
$dc = d(d + b) = dd + db = d + d = a$
$bb = b(c + d) = bc + bd = a + b = b$
$cb = (b + d)b = bb + db = b + d = c$
$cc = c(b + d) = cb + cd = c + c = a$

След попълване, таблицата за умножение изглежда така:

∗	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	c	a	c
d	a	d	a	d

Идеалите в пръстена са: $\{a\}$, $\{a, b, c, d\}$ и $\{a, c\}$.

Задача 2.

Разглеждаме множествата

$$A = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{Q}[x]\,;\, g(45466) \neq 0\} \quad \text{и} \quad M = \{\frac{f}{g} \in A \mid f(45466) = 0\}.$$

Да се докаже, че A е пръстен (относно обичайните операции: събиране и умножение на рационални функции), M е идеал на A, който съдържа всеки собствен идеал на A и $A/M \cong \mathbb{Q}$

Решение:

Нека $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in A$. Ще проверим дали $\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} \in A$ и $\frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2} \in A$.

- $\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{g_1 g_2}$, тъй като $\mathbb{Q}[x]$ е пръстен и $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$, то следва, че $g_1 g_2 \in \mathbb{Q}[x]$ и $f_1 g_2 - f_2 g_1 \in \mathbb{Q}[x]$. Следователно $\frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{g_1 g_2} \in A$.
- Тъй като $\mathbb{Q}[x]$ е пръстен следва, че $f_1 f_2 \in \mathbb{Q}[x]$ и $g_1 g_2 \in \mathbb{Q}[x]$. Следователно $\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} \in A$

$\Rightarrow A$ е пръстен.

M съдържа необратимите елементи на A
$A \backslash M$ съдържа обратимите на A.
I е идеал. Ако съществува $a \in I$, който е обратим, то $I = A$. Следователно всеки собствен идеал на A се съдържа в M.

Нека $\varphi : A \to \mathbb{Q}$ такова, че $\varphi(\frac{f}{g}) = (\frac{f}{g})(45466)$.
Ще проверим дали φ е хомоморфизъм на пръстени. Нека $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in A$.

- $\varphi(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}) = \varphi(\frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}) = (\frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2})(45466) = (\frac{f_1}{g_1})(45466) + (\frac{f_2}{g_2})(45466) =$

  $= \varphi(\frac{f_1}{g_1}) + \varphi(\frac{f_2}{g_2})$
- $\varphi(\frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2}) = \varphi(\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}) = (\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2})(45466) = (\frac{f_1}{g_1})(45466)(\frac{f_2}{g_2})(45466) = \varphi(\frac{f_1}{g_1})\varphi(\frac{f_2}{g_2})$

$\Rightarrow \varphi$ е хомоморфизъм.
От начина, по който е зададено следва, че $Ker\varphi = M$.
Съгласно Теоремата за хомоморфизми на пръстени: $A/M \cong \mathbb{Q}$

Задача 3.

Нека $I = (3 - 2\sqrt{-2}) \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Да се докаже, че $I = \{a + b\sqrt{-2} \mid 17 \mid b - 5a\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]/I \cong \mathbb{Z}_{17}$.

Решение:

За произволни $x, y \in \mathbb{Z}$ имаме

$$(3 - 2\sqrt{-2})(x + y\sqrt{-2}) = (3x + 4y) + (3y - 2x)\sqrt{-2}$$
$$17 \mid (3y - 2x) - 5(3x + 4y) \Leftrightarrow 17 \mid (-17x - 17y) \Leftrightarrow 17 \mid 17(-x - y)$$

Следователно $I \subseteq \{a+b\sqrt{-2} \mid 17 \mid b-5a\}$. Обратно, ако $a, b \in \mathbb{Z} : \quad 17 \mid b-5a$, системата уравнения

$$3x + 4y = a \tag{1}$$

$$-2x + 3y = b \tag{2}$$

Има решение

$$x = \frac{-4b+3a}{17}, y = \frac{3b+2a}{17} \in \mathbb{Z},$$

откъдето $\{a + b\sqrt{-2} \mid 17 \mid b - 5a\} \subseteq I$. Следователно $I = \{a + b\sqrt{-2} \mid 17 \mid b - 5a\}$.

Нека изображението $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{Z}_{17}$ е такова, че $\varphi(a + b\sqrt{-2}) = b - 5a \pmod{17}$. φ е хомоморфизъм на пръстени, тъй като:

- $\varphi((a_1 + b_1\sqrt{-2}) + (a_2 + b_2\sqrt{-2})) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-2}) = [(b_1 + b_2) - 5(a_1 + a_2) \pmod{17}] = [b_1 - 5a_1 \pmod{17}] + [b_2 - 5a_2 \pmod{17}] = \varphi((a_1 + b_1\sqrt{-2})) + \varphi((a_2 + b_2\sqrt{-2}))$
- $\varphi((a_1 + b_1\sqrt{-2})(a_2 + b_2\sqrt{-2})) = \varphi((a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-2}) = [(a_1a_2 + 2b_1b_2) - 5(a_1b_2 + a_2b_1) \pmod{17}] = [b_1 - 5a_1 \pmod{17}] + [b_2 - 5a_2 \pmod{17}] = \varphi((a_1 + b_1\sqrt{-2})) + \varphi((a_2 + b_2\sqrt{-2}))$

Задача 4.

Да се докаже, че факторпръстенът $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + \bar{2}x + \bar{1})$ е поле. Намерете обратния елемент на $\bar{2}x^2 + x + \bar{1}$.

Решение:

Нека $f = x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$.
$\mathbb{Z}_3[x]/(f)$ е поле, ако f е неразложим над $\mathbb{Z}_3$.
Понеже $deg(f) = 3$, то f е неразложим $\Leftrightarrow$ f няма корен в $\mathbb{Z}_3$.
$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$; $\quad f(\bar{0}) = \bar{1} \neq 0 \quad f(\bar{1}) = \bar{1} \neq 0 \quad f(\bar{2}) = \bar{1} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ няма корени в $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow f$ е неразложим над $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ е поле.

Нека $g = \bar{2}x^2 + x + \bar{1}$. Искаме да намерим обратния елемент на g в $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$, т.е търсим такъв полином h, че $gh \equiv 1 \pmod f$.
$gh \equiv 1 \pmod f \Leftrightarrow gh + kf = 1$, за някое $k \in \mathbb{Z}_3[x]$.
$f = g(\bar{2}x + \bar{2}) + (x + \bar{2})$
$g = (x + \bar{2})\bar{2}x + \bar{1}$
$x + \bar{2} = \bar{1}(x + \bar{2}) + \bar{0}$
$\Rightarrow g(x^2 + x + \bar{1}) + fx = 1$
$\Rightarrow h = x^2 + x + \bar{1}$

Задача 5.

Нека K е комутативен пръстен с единица. Да се докаже, че
а) Ако $I \trianglelefteq K$, то $M_n(I) \trianglelefteq M_n(K)$ и $M_n(K)/M_n(I) \cong M_n(K/I)$;
б) Всеки идеал $J \trianglelefteq M_n(K)$ е от вида $J = M_n(I)$, където $I \trianglelefteq K$.

Решение:

а)

- Нека $(a_{ij})_{n\times n}, (b_{ij})_{n\times n} \in M_n(I) \quad ?\Rightarrow \quad (a_{ij})_{n\times n} - (b_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$
  $(a_{ij})_{n\times n} - (b_{ij})_{n\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{n\times n}$, I е идеал $\Rightarrow a_{ij} - b_{ij} \in I \Rightarrow (a_{ij})_{n\times n} - (b_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$
- Нека $(a_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$ и $(k_{ij})_{n\times n} \in M_n(K) \quad ?\Rightarrow \quad (a_{ij})_{n\times n}(k_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$
  $(a_{ij})_{n\times n}(k_{ij})_{n\times n} = (a_{ij}k_{ij})_{n\times n}$, I е идеал $\Rightarrow a_{ij}k_{ij} \in I \Rightarrow (a_{ij})_{n\times n}(k_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$

$\Rightarrow M_n(I) \trianglelefteq M_n(K)$

С помощта на хомоморфизма $\psi : K \to K/I$ такъв, че $\psi(a) = \bar{a} = a + I$, дефинираме изображение $\varphi : M_n(K) \to M_n(K/I)$, действащо по правилото $\varphi((a_{ij})_{n\times n}) = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$. От това, че ψ е хомоморфизъм на пръстени следва, че φ е хомоморфизъм. Ясно е, че $Ker\varphi = M_n(I)$. От теоремата за хомоморфизмите на пръстени следва, че $M_n(K)/M_n(I) \cong M_n(K/I)$.

б) Нека $J \trianglelefteq M_n(K)$ и I да е подмножество на K, състоящо се от всички елементи на всички матрици на J. Ще докажем, че $I \trianglelefteq K$ и $J = M_n(I)$.
Нека $a, b \in I$. Следователно съществуват матрици $A, B \in J$ такива, че a и b са съответно техни елементи. Нека a е на (i,j)-то място в A и b е на (p,q)-то място в B. Нека e_{ij} е матрицата с, която има единица на (i,j)-то място. Понеже $J \trianglelefteq M_n(K)$, то $e_{1i}Ae_{j1}, e_{1p}Be_{q1} \in J$, откъдето следва, че и $e_{1i}Ae_{j1} - e_{1p}Be_{q1} \in J$. $e_{1i}Ae_{j1} = ae_{11}$, $e_{1p}Be_{q1} = be_{11} \Rightarrow ae_{11} - be_{11} = (a-b)e_{11} \in J \Rightarrow a - b \in I$. Нека $k \in K$. Тогава $(kE)A \in J$ и на (i,j)-то място в $(kE)A$ стои ka, следователно $ka = ak \in I$. Следователно $I \trianglelefteq K$.

Нека $(c_{ij})_{n\times n} \in M_n(I)$. За всеки 2 индекса (i,j) съществува матрица $A \in J$, за която c_{ij} е елемент на A. Ако c_{ij} стои на (s,t)-то място в A, то получаваме, че $c_{ij}e_{ij} = e_{is}Ae_{tj} \in J$. Тогава $(c_{ij})_{n\times n} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}e_{ij} \in J$. Следователно $M_n(I) \subseteq J$. Лесно се проверява и че $J \subseteq M_n(I)$. Откъдето следва, че $J = M_n(I)$.