Теория 3

Валентин Стоянов

юни 2018

Задача 1.

Формулирайте теоремата за деление с частно и остатък за полиноми

Нека F е поле и $f, g \in F[x] : g \neq 0$. Тогава съществува единствена двойка полиноми $q, r \in F[x]$, такава че $f = qg + r$ и $deg(r) < deg(g)$.

Формулирайте схемата на Хорнер

Нека $F[x]$ е поле и $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, g = x - \alpha \in F[x]$. Нека $f = gq + r$, където $deg(r) < deg(g)$, т.е $r \in F$ и $q = b_0x^n - 1 + \ldots + b_{n-1}$. Тогава следните формули са в сила:

$$\begin{gathered} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + \alpha b_0, \\ \vdots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-1} \end{gathered}$$

Какъв е видът на идеалите в пръстена от полиноми с коефициенти от дадено поле

Главни идеали, породени от един елемент $f(x)$.

Колко най-много различни корени може да има ненулев полином от степен n с коефициенти от дадена област

n

Формулирайте принципа за сравняване на коефициентите на полиноми

Задача 2.

Напишете какво означава един полином да дели друг полином

Нека F е поле и $f, g \in F[x] : g \neq 0$. Ще казваме, че g дели $f (g \mid f)$, ако съществува полином q, такъв че $f = qg$. Това означава, че остатъкът при деление на f с g е 0.

Какво следва, ако даден полином дели произведението на два други полинома (всички полиноми са с коефициенти от дадено поле) и е взаимно прост с единия от тях

Нека F е поле и $f_1, f_2, g \in F[x]$. Ако $g \mid f_1 f_2$ и НОД$(g, f_1) = 1$, то $g \mid f_2$.

Напишете определението за най-голям общ делител на два полинома

Нека F е поле и $f, g \in F[x]$ и поне един от тях е ненулев. Ще казваме, че един полином d е най-голям общ делител(НОД) на f и g $(d = (f, g))$, ако d удовлетворява следните условия:

- $d \mid f, d \mid g$
- ако $d_1 \mid f, d_1 \mid g$, то $d_1 \mid d$.

Формулирайте тъждеството на Безу за два полинома

Нека F е поле и $f, g \in F[x]$ и $d = (f, g)$. Тогава съществуват полиноми u и v, такива че $d = uf + vg$.

Напишете определението за най-малко общо кратно на два полинома

Нека F е поле и $f, g \in F[x]$ и поне един от тях е ненулев. Ще казваме, че един полином k е най-малко общо кратно(НОК) на f и g $(k = (f, g))$, ако d удовлетворява следните условия:

- $f \mid k, g \mid k$
- ако $f \mid k_1, g \mid k_1$, то $k \mid k_1$.

Нека f и g са полиноми с коефициенти от дадено поле. Кой е пораждащият елемент на идеала $(f) + (g)$

Нека $d = (f, g)$. Тогава пораждащият елемент на идеала $(f) + (g)$ е d.

Нека f и g са полиноми с коефициенти от дадено поле. Кой е пораждащият елемент на идеала $(f) \cap (g)$

Напишете определението за неразложим полином над дадено поле

Нека F е поле и $f \in F[x] deg(f) > 0$. Ще казваме, че f е неразложим над F, ако не може да се представи като произведение на два полинома с коефициенти от $F[x]$, чиито степени са по-ниски от тази на f.

Какво следва, ако един неразложим полином дели произведението на два други полинома (всички полиноми са с коефициенти от дадено поле)

Нека F е поле, $f_1, f_2, g \in F[x]$ и g е неразложим полином. Ако $g \mid f_1 f_2$, то $g \mid f_1$ или $g \mid f_2$.

Формулирайте теоремата за разлагане на полином на неразложими множители

Нека F е поле. Всеки неконстантен полином $f \in F[x]$ се разлага на произведение на неразложими над F полиноми. Ако $f = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_s$ са две такива разлагания, то $k = s$ и, след евентуално преномериране на множителите, за всяко $i = 1, \dots, k$ е изпълнено $p_i = a_i q_i, 0 \neq a_i \in F$.

Задача 3.

Нека F е поле и f е неконстантен полином с коефициенти от F. Какъв е полиномът f, ако факторпръстенът $F[x]/(f)$ е поле

Полиномът f е неразложим над F.

Нека F е поле и f е неконстантен полином с коефициенти от F. Какъв вид пръстен е факторпръстенът $F[x]/(f)$, ако полиномът f е неразложим

Поле.

Напишете определението за поле на разлагане на полином над поле

Нека F е поле и $f \in F[x], deg(f) > 0$ и L е разширение на полето F, което съдържа всички корени на полинома f. Сечението на всички подполета на L, съдържащи полето F и всички корени на полинома f ще наричаме поле на разлагане на f над полето F.

Напишете формулите на Виет за полином от четвърта степен

Нека $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ и $x_1, \ldots, x_4$ са корените на f. Тогава:

$$\begin{gathered}
x_1 + \ldots + x_4 = \tfrac{-b}{a}, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \tfrac{c}{a}, \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \tfrac{-d}{a}, \\
x_1x_2x_3x_4 = \tfrac{e}{a},
\end{gathered}$$

Напишете определението за k-кратен корен на полином

Нека F е поле, $charF = 0$ и $f \in F[x]$. K е разширение на F и $\alpha \in K$. Тогава α е k-кратен корен на f точно когато $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$ и $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Напишете необходимото и достатъчно условие полином с коефициенти от поле с характеристика нула да има k-кратен корен

Нека F е поле и $f \in F[x]$. f има k-кратен корен точно когато има общ корен с производната си.

Задача 4.

Формулирайте лемата за старшия едночлен за полиноми на много променливи

Нека A е област и $0 \neq f, g \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Тогава старшият едночлен на полинома fg е равен на произведението на старшите едночлени на f и g.

Напишете определението за лексикографска наредба на едночлени на n променливи

Нека A е област и $u = a{x_1}^{i_1} \ldots a{x_n}^{i_n}$ и $v = b{x_1}^{j_1} \ldots b{x_n}^{j_n}$ са два неподобни едночлена($= \neq a, b \in A$). Ще казваме, че едночленът u е по-голям от едночлена v и ще пишем $u > v$, ако съществува естествено число $k \leq n$, такова че $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$, но $i_k > j_k$.

Напишете определението за симетричен полином

Нека A е област и $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Ще казваме, че f е симетричен полином, ако за всяка пермитация σ от симетричната група S_n е изпълнено равенството $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

Напишете $\sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_3x_4$

Формулирайте основната теорема за симетричните полиноми

Нека A е област и $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$ е симетричен полином. Тогава съществува единствен полином g на n променливи с коефициенти от A, такъв че $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Напишете формулите на Нютон

$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0$

Задача 5.

Напишете определението за дискриминанта на полином

Елемента $D(f) = {a_0}^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ (при $n > 1$) на полето L ще наричаме дискриминанта на полинома f. Дискриминантата на полином от първа степен по определение е равна на 1.

Напишете формулата за дискриминанта на полином изразена чрез стойностите на производната на полинома за корените му

$D(f) = {a_0}^{n-2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n)$.

Напишете определението за резултанта на два полинома

Елемента $R(f, g) = {a_0}^s {b_0}^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (\alpha_i - \beta_j)$ на полето L ще наричаме резултанта на полиномите f и g.

Как се изразява резултантата на два полинома, ако знаем и корените на първия полином

$R(f, g) = {a_0}^s \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$.

Как се изразява резултантата на два полинома, ако знаем и корените на втория полином

$R(f, g) = {b_0}^n \prod_{i=1}^{s} g(\beta_i)$.

Как се изразява дискриминантата на даден полином чрез резултантата на полинома и производната му

$R(f, f') = a_0(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(f)$.

Задача 6.

Напишете определението за алгебрически затворено поле

Ще казваме, че едно поле F е алгебрически затворено, ако всеки неконстантен полином с коефициенти от F има корен в F.

Формулирайте лемата на Гаус за полиноми с реални коефициенти

Всеки неконстантен полином с реални коефициенти има поне един комплексен корен.

Формулирайте теоремата на Даламбер

Полето на комплексните числа е алгебрически затворено.

Формулирайте основната теорема на алгебрата

Какви могат да бъдат неразложимите полиноми с комплексни коефициенти

Какви могат да бъдат неразложимите полиноми с реални коефициенти

Задача 7.

Напишете определението за примитивен полином

Нека $f = a_0x^n + \ldots + a_n \in Z[x]$. Ще казваме, че f е примитивен полином, ако НОД$(a_0, \ldots, a_n)$ е равен на 1, т.е коефициентите му са взаимно прости.

Формулирайте лемата на Гаус за полиноми с цели коефициенти

Произведение на два примитивни полинома също е примитивен полином.

Формулирайте редукционния критерий за неразложимост на полиноми с цели коефициенти

Формулирайте критерия на Айзенщайн за неразложимост на полиноми с цели коефициенти

Нека $f = a_0x^n + \ldots + a_n \in Z[x]$ и съществува просто число p, удовлетворяващо следните условия:

- p не дели a_0
- $p \mid a_1, \ldots, a_n$
- p^2 не дели a_n