Evolución orbital de exoplanetas por fuerza de marea

Valeria Abraham
Física Computacional 2021
Facultad de Ciencias - UDELAR
valeriabraham@gmail.com

7 de diciembre de 2021

Resumen

En este proyecto presentamos un análisis de la evolución orbital de tres distintos sistemas planetarios, que consisten de dos planetas y una estrella respectivamente. Las tres situaciones describen características similares a sistemas exoplanetarios ya descubiertos, o situaciones ya estudiadas por autores previamente. El estudio de la evolución orbital fue centrado en el efecto de la fuerza de mareas actuando sobre la estrella y el planeta interno (más cercano). El modelo utilizado es el descrito por Ferraz - Mello et al. (2008) [1] con ecuaciones obtenidas de Mardling (2007) [2]. Las ecuaciones obtenidas de estos trabajos fueron integradas mediante el método Runge - Kutta de orden 4, implementado en Python. Para cada sistema obtuvimos la evolución media del semieje mayor y excentricidad de ambos planetas, y luego discutimos la evolución temporal en rasgos generales.

1. Introducción

1.1. Sobre exoplanetas

Para comenzar con el artículo primero nos planteamos ¿qué es un exoplaneta? y ¿por qué es importante estudiar su evolución orbital?.

Empezamos contestando la primera pregunta, un exoplaneta es un planeta que orbita una estrella que no es el Sol, para ser más específicos, puede ser una o varias estrellas. Pero la esencia de la definición es la misma. Para contestar la segunda pregunta debemos adentrarnos un poco más en la historia de su descubrimiento.

No fue hasta mediados de la década de 1990 que le existencia de los exoplanetas era meramente una especulación. En 1992 se detectó una anomalía en la señal de radio emitida desde el pulsar PSR 1257+12, llevando al descubrimiento de este nuevo tipo de planetas fuera del Sistema Solar. Sin embargo, este no es reconocido como el primer exoplaneta oficial, sino que ese título lo lleva 51 Pegasi b, siendo el primer planeta descubierto orbitando a una estrella de la secuencia principal, que además es muy similar al Sol.

Este gran descubrimiento tomó por sorpresa a los astrónomos de la época ya que las características observadas de este exoplaneta eran muy diferentes a las conocidas y estudiadas de los planetas del Sistema Solar. Lo más impactante fue que 51 Pegasi b se sitúa a solamente a 0.05 unidades astronómicas de su estrella hospedadora y tiene aproximadamente la mitad de la masa de Júpiter, lo que significa que es un planeta gigante muy cerca de su estrella, incluso más cerca que Mercurio del Sol.

Asimismo, se despertó un gran interés por descubrir y estudiar más sistemas con estas características, para poder entender mejor todo el proceso de formación planetaria. Ya que la teoría sostenida para el Sistema Solar ya no aplicaba para todos los sistemas planetarios conocidos.

Junto con este descubrimiento surgieron nuevas teorías de formación planetaria, lo que nos lleva, una vez formados todos los planetas, a estudiar la evolución de sus órbitas. Así nos adentramos en el propósito de este proyecto, donde nuestro objetivo es estudiar la evolución de la excentricidad y el semieje mayor de distintos sistemas planetarios, conformados por dos planetas y una estrella cada uno.

Para entender un poco más los términos utilizados más adelante destacamos las diferentes clasificaciones que pueden tener los exoplanetas:

- Júpiter caliente: planetas con masas y tamaños similares a Júpiter pero muy cerca de su estrella hospedadora. También existen clasificaciones como tibio y frío, dependiendo de su distancia a la estrella, pero no son relevantes para este trabajo.
- Neptuno // Sub-Neptuno: planetas con masas y tamaños similares o menores a Neptuno, no suelen estar tan cerca de la estrella como los júpiteres calientes.
- Super-Tierra: planetas con masas y tamaños mayores a los de la Tierra pero menores que los Sub-Neptuno, tampoco se encuentran tan cerca como los júpiteres calientes. La distinción entre estas y los Sub-Neptunos no es muy clara dentro de la comunidad científica.

1.2. Sistemas planetarios del trabajo

Ahora sí comenzamos ahora con la presentación de estos tres sistemas a estudiar. Los dos primeros surgen a partir de Rodríguez et al. (2011) [4], fueron elegidos para poder comparar los resultados obtenidos y tener una guía para formar el tercer sistema planetario. Todos los sistemas cuentan con la misma estrella hospedadora, con masa y radio igual a los del Sol. Además los sistemas se ubican completamente en un plano, es decir, la inclinación nunca es diferente de 0.

- Super-Tierra con Super-Tierra: ambos planetas seleccionados entran dentro de la categoría de Super-

Tierras y son reales, conformando el sistema CoRoT-7. Se encuentran orbitando una estrella un poco más pequeña que el Sol, pero aún así muy similar.

- Super-Tierra con Júpiter: en este caso, seguimos el segundo ejemplo propuesto en [4], un sistema completamente ficticio. El planeta más cercano a la estrella hospedadora es una Super-Tierra, mientras que el más lejano es similar a Júpiter.

- Júpiter caliente con Neptuno: por último, este sistema planetario también es completamente ficticio, pero basándose en el 51 Pegasi b, el cual ya mencionamos anteriormente. El planeta interior es igual a este, mientras que el exterior es similar a Neptuno.

Las características numéricas en cuanto a masa y radio de cada sistema se pueden observar en el cuadro 1

Sistema	m_*	R_*	m_p	R_p	m_c
1	$1M_{\rm Sol}$	$1R_{\rm Sol}$	$8M_{\rm T}$	$1{,}58R_{\rm T}$	$13{,}6M_{\rm T}$
2	$1M_{\rm Sol}$	$1R_{\rm Sol}$	$1M_{\rm T}$	$5^{1/3}R_{\rm T}$	$1M_{\rm J}$
3	$1M_{\rm Sol}$	$1R_{\rm Sol}$	$0{,}46M_{\rm J}$	$2R_{\rm J}$	$1M_{\rm N}$

Cuadro 1: Masa y radio de cada cuerpo de los sistemas propuestos.

donde, $*$ simboliza la estrella, p el planeta interior y c el planeta exterior. En cuanto a las unidades, Sol se refiere a las unidades solares, T a la Tierra, J a Júpiter y N a Neptuno.

Además, cada sistema tiene diferentes condiciones iniciales con respecto al semieje mayor de las órbitas planetarias, como podemos ver en el cuadro 2.

Sistema	a_p (UA)	a_c (UA)
1	0.017	0.046
2	0.04	1
3	0.05	0.5

Cuadro 2: Condiciones iniciales del semieje mayor de la órbita de ambos planetas para cada sistema.

Para estudiar la evolución de estos sistemas utilizamos el problema de tres cuerpos, pero enfocándonos en los efectos de marea entre la estrella y el planeta interior. Es por esta razón que en el cuadro 1 vemos el radio descrito solo para la estrella y el planeta interior. Nuestro objetivo recae en analizar qué efectos produce la fuerza de marea en la variación media del semieje mayor y de la excentricidad. Asimismo, destacamos la importancia de la variación media, ya que los elementos orbitales cambian periódicamente a lo largo del tiempo, siguiendo el desplazamiento alrededor del centro de masa del sistema.

2. Método

2.1. Fuerza de marea

Comenzando con el modelo utilizado en este trabajo tenemos que presentar el fenómeno en el cual nos enfocamos, la fuerza de marea. Esta fuerza surge como efecto secundario de la fuerza gravitacional de atracción entre dos cuerpos masivos no puntuales. Primero supongamos un cuerpo extenso y una masa puntual que lo perturba:

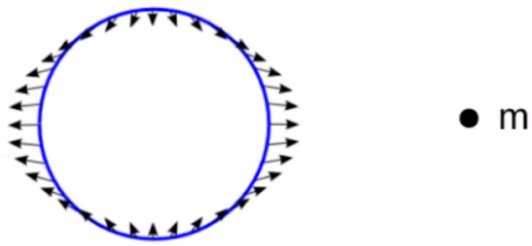

Figura 1: Efecto de marea para un cuerpo extenso perturbado por una masa puntual

Como vemos en la figura 1, las partes del cuerpo extenso más cercanas a la masa sufren una fuerza gravitacional mayor que las partes más lejanas, diametralmente opuestas. Debido a esto, el cuerpo extenso tiende a deformarse, ensanchándose.

Dado el potencial de marea se puede calcular la fuerza correspondiente, calculando su gradiente. En el trabajo de Ferraz - Mello et al. (2008) [1] realizan una expansión del potencial y la fuerza. Aprovechando las coordenadas esféricas podemos escribir de manera general el punto de partida de dicho trabajo:

$$\vec{F} = -M^* \frac{\partial U}{\partial r^*}\hat{r^*} - \frac{M^*}{r^*}\frac{U}{\theta}\hat{\theta^*} - \frac{M^*}{r^* \sin\theta^*}\frac{\partial U}{\partial \varphi^*}\hat{\varphi^*} \qquad (1)$$

y el potencial de marea a expandir es

$$U = -\frac{Gm}{r^*} - \frac{k_f G M R^5}{2r^3 r^{*3}}\left(\cos^2\Psi - 1\right) \qquad (2)$$

en ambas ecuaciones tenemos los puntos con $*$, estos simbolizan un punto arbitrario del espacio donde estamos calculando estas cantidades.

2.2. Ecuaciones de variación media

No alcanza con tener la expresión de la fuerza de marea, sino que necesitamos las variaciones medias del semieje (a) y la excentricidad (e), para eso introducimos las ecuaciones de Gauss

$$< \dot{a} >= \frac{1}{\sqrt{\mu a}(1-e^2)\pi} \int_0^{2\pi} \left[eR\sin f + T(1+e\cos f)\right] r^2 \, df \qquad (3)$$

$$< \dot{e} >= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu a^3}} \int_0^{2\pi} \left[R\sin f + T\left(\cos f + \frac{1}{e}\left(1 - \frac{r}{a}\right)\right)\right] r^2 \, df \qquad (4)$$

integramos en uno de los ángulos rápidos, en este caso la anomalía verdadera.

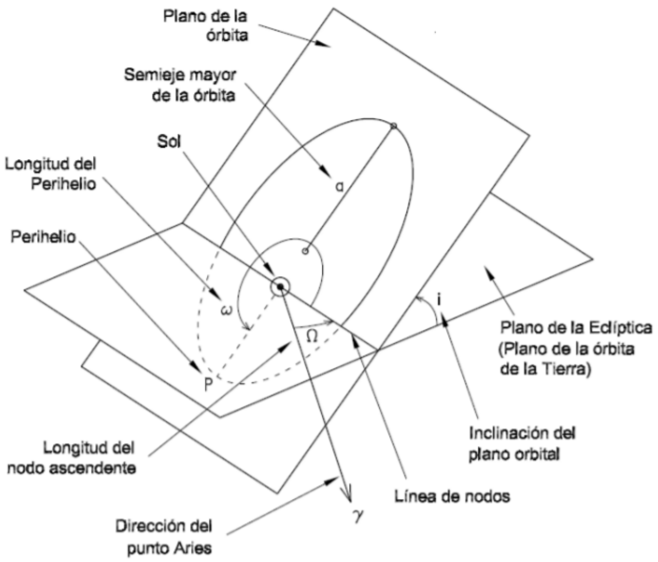

Figura 2: Elementos orbitales

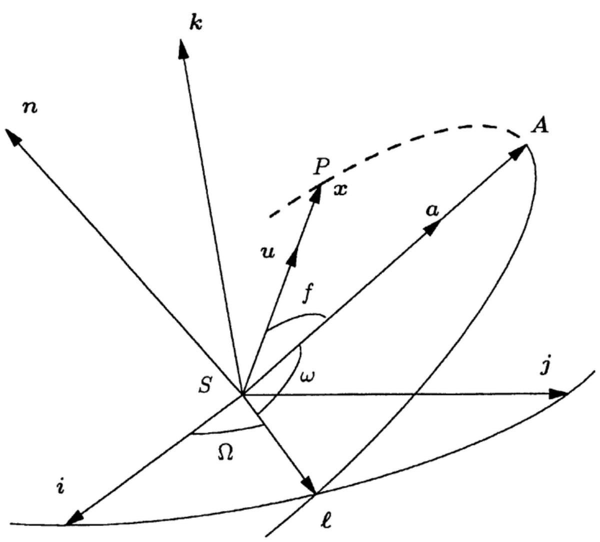

Figura 3: Ángulos de los elementos orbitales

Recordamos en la figura 2 los elementos orbitales mencionados. Mientras que en la figura 3 destacamos los ángulos de los elementos orbitales que mencionamos en este trabajo, f la anomalía verdadera y ω o ϖ la longitud del perihelio.

Los resultados de estas integraciones, que son parte de las ecuaciones a usar fueron dados por [1] y Rodríguez y Ferraz - Mello (2010) [3]

$$<\dot{a}>= -\frac{2}{3}na^{-4}[(2+46e^2)\hat{s}+7e^2\hat{p}] \tag{5}$$

$$<\dot{e}>= -\frac{1}{3}nea^{-5}(18\hat{s}+7\hat{p}) \tag{6}$$

con n el movimiento medio del planeta, a el semieje mayor, e la excentricidad, $\hat{s}$ el efecto de marea sobre la estrella y $\hat{p}$ el efecto de marea sobre el planeta.

En [3] también se definen las cantidades $\hat{s}$ y $\hat{p}$ como

$$\hat{s} = \frac{9}{4}\frac{k_{d*}}{Q_*}\frac{m_p}{m_*}R_*^5 \quad , \quad \hat{p} = \frac{9}{2}\frac{k_{dp}}{Q_p}\frac{m_*}{m_p}R_p^5 \tag{7}$$

con ambas k y Q constantes referentes a la capacidad de disipación de energía del cuerpo afectado. En particular, el coeficiente Q describe la disipación de manera tal que cuánto más alto es, menos disipación hay, lo que significa que el cuerpo es más propenso a deformarse. Los valores de ambas constantes son poco conocidos pero existe un rango aceptado, en este trabajo tomamos $Q_* = 10^7$ para estrellas como el Sol, $Q_p = 10^3$ para planetas rocosos (Super-Tierras) y $Q_p = 10^5$ para planetas gaseosos (Júpiteres).

2.3. Sistemas de dos planetas y una estrella

Llegamos a la situación de este trabajo, ahora con dos planetas se genera una nueva perturbación sobre el sistema. Esta perturbación genera una evolución secular. Recurrimos ahora al trabajo de Mardling (2007) [2], donde realiza una expansión de Legendre con el cociente $\frac{a_p}{a_c}$, correspondiente al problema de tres cuerpos a partir de las ecuaciones de Newton. Hasta primer orden para la excentricidad del planeta interior, las variaciones medias de e_p y e_c

$$\frac{de_p}{dt} = -\frac{15}{16}n_p e_c \frac{m_c}{m_*}\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^4 \frac{\sin\eta}{(1-e_c^2)^{5/2}} \tag{8}$$

$$\frac{de_c}{dt} = \frac{15}{16}n_c e_p \frac{m_p}{m_*}\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^3 \frac{\sin\eta}{(1-e_c^2)^{2}} \tag{9}$$

con $\eta = \varpi_p - \varpi_c$, donde ϖ es la longitud del perihelio del planeta. Estos últimos elementos orbitales también tienen una variación media que debemos calcular, sus ecuaciones son

$$\frac{d\varpi_p}{dt} = \frac{3}{4}n_p \frac{m_c}{m_*}\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^3 (1-e_c^2)^{-3/2} \left[1 - \frac{5}{4}\frac{a_p}{a_c}\frac{e_c}{e_p}\frac{\cos\eta}{1-e_c^2}\right] \tag{10}$$

$$\frac{d\varpi_c}{dt} = \frac{3}{4}n_c \frac{m_p}{m_*}\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^2 (1-e_c^2)^{-2} \left[1 - \frac{5}{4}\frac{a_p}{a_c}\frac{e_p}{e_c}\frac{1+4e_c^2}{1-e_c^2}\cos\eta\right] \tag{11}$$

Ahora sí introducimos la disipación de energía por el efecto de marea, que afecta solo al planeta interior. Siguiendo el trabajo descrito en [2], las nuevas ecuaciones a integrar son

$$\dot{e_p} = -W_o e_c \sin\eta - W_T e_p \tag{12}$$

$$\dot{e_c} = W_c e_p \sin\eta \tag{13}$$

$$\dot{\eta} = \bar{W_q} - W_o\frac{e_c}{e_p}\cos\eta \tag{14}$$

donde las nuevas constantes son

$$W_o = \frac{15}{16}n_p\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^4 \frac{m_c}{m_*}\epsilon_c^{-5} \tag{15}$$

$$\bar{W_q} = \frac{3}{4}n_p\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^3 \frac{m_c}{m_*}\varepsilon_c^{-3}\left[1 - \sqrt{\frac{a_p}{a_c}}\frac{m_p}{m_c}\varepsilon_c^{-1} + \gamma\varepsilon_c^3\right] \tag{16}$$

$$W_T = \frac{21}{2}n_p\frac{k_p}{Q_p}\frac{m_*}{m_p}\left(\frac{R_p}{a_p}\right)^{-5} \tag{17}$$

$$W_c = \frac{15}{16}n_c\frac{m_p}{m_*}\left(\frac{a_p}{a_c}\right)^3 \varepsilon_c^{-4} \tag{18}$$

con $\varepsilon_c = \sqrt{1-e_c^2}$. Ahora sí, podemos notar que la estructura de $\dot{e_p}$ contiene un primer término conservativo, que oscila en el tiempo y un segundo término que causa la disipación, tal cual un sistema amortiguado. Esta disipación se encuentra contenida dentro de la constante W_T. También podemos destacar que el planeta compañero solo tiene un término referente a la variación conservativa, que oscila en el tiempo.

Además, volviendo a las constantes W, podemos destacar a $\bar{W_q}$ que contiene un término referente a efectos relativistas. Aunque estudiar dichos efectos se encuentra fuera del objetivo del trabajo, por lo que el coeficiente relativista γ es nulo para todos los casos a analizar.

Interpretando este sistema de ecuaciones llegamos a que todas las órbitas decaen hasta la circularización, donde $e = 0$.

Resumiendo entonces, las ecuaciones de variaciones medias a integrar para estudiar la evolución orbital son

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= -\frac{2}{3}na^{-4}[(2+46e^2)\hat{s} + 7e^2\hat{p}] \\
\dot{e_p} &= -W_o e_c \sin\eta - W_T e_p \\
\dot{e_c} &= W_c e_p \sin\eta \\
\dot{\eta} &= \bar{W_q} - W_o\frac{e_c}{e_p}\cos\eta
\end{aligned}$$

2.4. Método de integración

Como ya fue mencionado anteriormente, este trabajo se centró en resolver las ecuaciones utilizando el lenguaje Python. Dentro del mismo elaboramos una rutina de Runge - Kutta de orden 4 para poder integrar las ecuaciones descritas.

Este método, en general, es utilizado para obtener aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, como las planteadas anteriormente.

Suponiendo una solución de la ecuación diferencial $x(t)$, junto con una condición inicial, entonces podemos escribir el valor de $x(t+h)$ usando una expansión de Taylor

$$\begin{aligned}
x(t+h) =& x(t) + h(\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots \quad (19) \\
=& x(t) + hf(x,t) + O(h^2) \quad (20)
\end{aligned}$$

Si h es pequeño entonces el error también lo es y podemos simplificar la solución a

$$x(t+h) = x(t) + hf(x,t) \quad (21)$$

De esta manera logramos integrar la ecuación diferencial propuesta, pero el método utilizado es un poco más complejo. Para calcular $x(t+h)$ usamos la expansión alrededor del punto $t + \frac{1}{2}h$, eliminando de esta manera el término de segundo orden, ya que no es posible siempre conocer la segunda derivada de $x(t)$.

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t+\frac{1}{2}h), t+\frac{1}{2}h) + O(h^3) \quad (22)$$

El nuevo error es de orden 3. Pero se nos presenta un problema, no conocemos $x(t+\frac{1}{2}h)$. Esto lo solucionamos usando la expansión en orden 1, también conocida como el método de Euler, donde

$$x(t+\frac{1}{2}h) = x(t) + \frac{1}{2}hf(x,t) \quad (23)$$

Siguiendo con este método de realizar expansiones de Taylor alrededor de varios puntos y haciendo combinaciones lineales de ellos podemos llegar a distintos órdenes más altos. Como ya mencionamos, utilizamos el método de orden 4, cuyas ecuaciones lucen de la siguiente manera

$$k_1 = hf(x,t) \quad (24)$$

$$k_2 = hf(x+\frac{1}{2}k_1, t+\frac{1}{2}h) \quad (25)$$

$$k_3 = hf(x+\frac{1}{2}k_2, t+\frac{1}{2}h) \quad (26)$$

$$k_4 = hf(x+k_3, t+h) \quad (27)$$

con el resultado final de

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (28)$$

El error a priori de este método es de $O(h^5)$, por lo que es bastante pequeño. Aunque a partir de los cálculos y las aproximaciones hechas, puede ser mayor. Aún así es menor que utilizar los otros métodos vistos.

Este método, en comparación con el de Euler y el mismo de segundo orden, es mucho más preciso y no implica tiempos mayores de integración, por lo que fue elegido como el método del trabajo.

3. Resultados

Estudiamos la evolución orbital para tres condiciones iniciales diferentes, estas condiciones iniciales difieren solamente en la excentricidad inicial del planeta interno, establecemos tres valores arbitrarios que son 0.2, 0.4 y 0.6. La condición inicial de η es la misma para todos los sistemas, tomando un valor de 0,01.

En todos los casos, el número de iteraciones fue 10^5, pero los tiempos de integración fueron cambiando según cómo funcionaba el código. Recordamos que la estrella en todos los sistemas es la misma, con las mismas características del Sol.

Vamos a ver la evolución de la excentricidad para ambos planetas, su comparación y la evolución del semieje mayor del planeta interno. Este último es solo para el planeta interno porque, como ya vimos, el semieje del planeta externo no es afectado, ya que no sufre los efectos de marea.

3.1. Sistema de dos Super-Tierras

Recordemos las características de este sistema:

m_p	m_c	R_p	a_p	a_c	e_c
8 M_T	13.6 M_T	1.58 R_T	0.017 UA	0.046 UA	0.4

Cuadro 3: Datos numéricos iniciales del sistema de dos Super-Tierras (similar al sistema CoRoT-7)

Para realizar la integración, en este caso, tomamos un intervalo temporal entre 0 y 2 millones de años. Elegimos este intervalo temporal porque nos alcanza para observar toda la evolución. En el trabajo que seguimos [4], también se integra en este orden temporal.

Primero veamos los resultados para la evolución de la excentricidad del planeta interior.

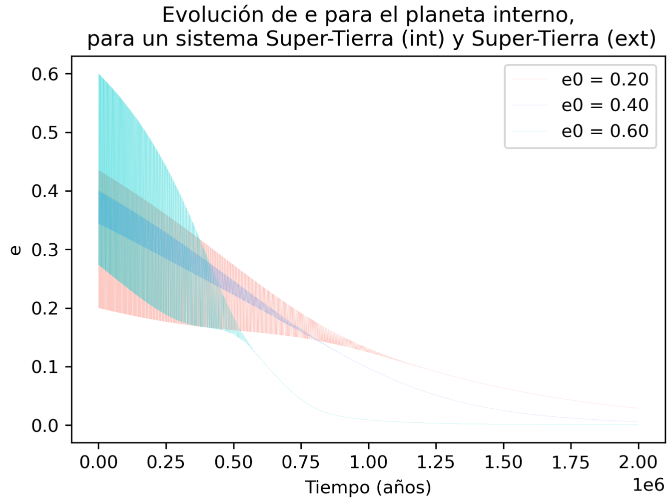

Figura 4: Evolución de la excentricidad del planeta interior en 2 millones de años

Podemos ver la naturaleza oscilatoria de la excentricidad, como predijimos al introducir las ecuaciones. Además, podemos ver que aunque tengan diferentes pendientes para cada excentricidad inicial todas se acercan a cero.

Seguimos con la evolución de la excentricidad del planeta externo.

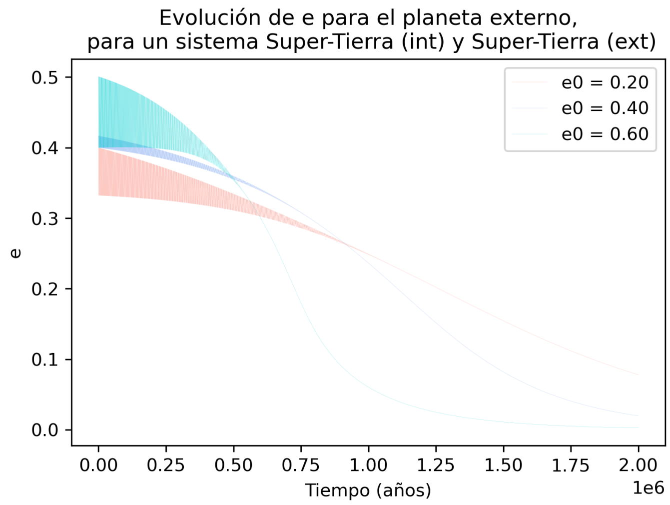

Figura 5: Evolución de la excentricidad del planeta exterior en 2 millones de años

Vemos una gráfica similar a la anterior, con la componente oscilatoria. También vemos que los valores caen hacia cero para las tres condiciones iniciales.

Ahora veamos una comparación de las excentricidades de ambos planetas.

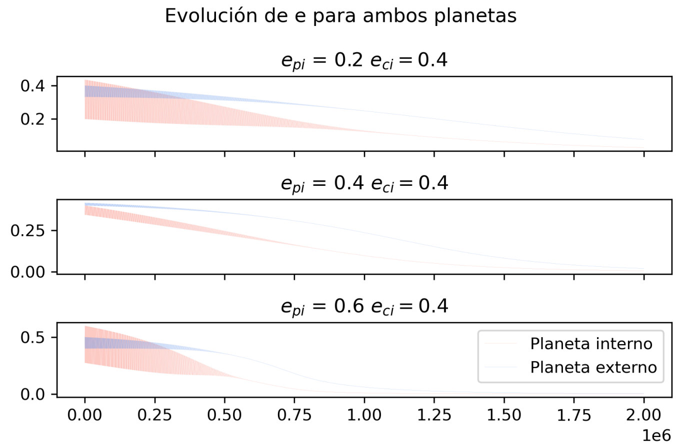

Figura 6: Evolución de la excentricidad de ambos planetas en 2 millones de años

A simple vista vemos que las oscilaciones para el planeta externo son mayores y el decaimiento es más rápido. Además, para la condición inicial $e_p = 0{,}4$, que es igual a la del planeta exterior, vemos que la amplitud de las oscilaciones es mucho menor que en los otros casos. Como último resultado a simple vista, obtenemos que cuanto más grande es la excentricidad inicial más rápida es la evolución.

Finalmente, vemos la evolución del semieje mayor para el planeta interno.

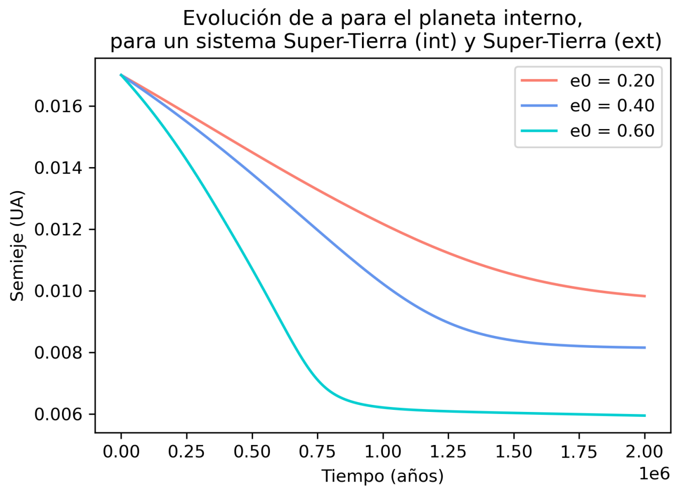

Figura 7: Evolución del semieje mayor del planeta interno en 2 millones de años

Podemos ver que en todos los casos el semieje decae, como esperábamos, y cuánto más grande es la excentricidad inicial más rápida es la evolución. Destacamos en este caso, que dentro del orden de millones de años, para la excentricidad inicial de 0.6 llega un momento en el cual el planeta atraviesa el límite de Roche de su estrella hospedadora. Esto significa que el planeta puede destrozarse y además termina cayendo en la estrella, cuando esto sucede, el programa comienza a obtener resultados sin sentido, por ejemplo excentricidades negativas.

3.2. Sistema de una Super-Tiera y un Júpiter

Recordemos las características de este sistema:

m_p	m_c	R_p	a_p	a_c	e_c
$5\ M_T$	$1\ M_J$	$5^{1/3}\ R_T$	0.04 UA	1 UA	0.4

Cuadro 4: Datos numéricos iniciales del sistema de una Super-Tierra (interno) y un Júpiter (externo)

Para realizar la integración, en este caso, tomamos un intervalo temporal entre 0 y 120 millones de años. A diferencia del sistema anterior, este intervalo temporal no nos permite observar toda la evolución orbital hasta la circularización, pero nos acerca bastante. Decidimos detenernos en 120 millones de años porque al aumentar más el tiempo de integración el método dejaba de funcionar. Además seguimos los rangos numéricos del [4].

Primero veamos los resultados para la evolución de la excentricidad del planeta interior.

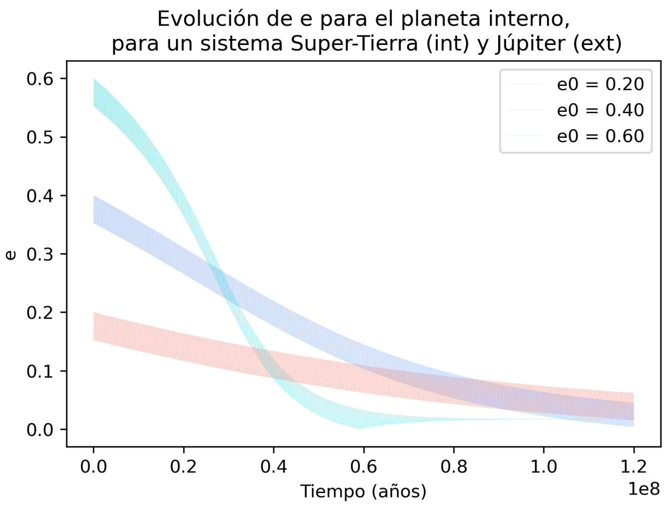

Figura 8: Evolución de la excentricidad del planeta interior en 120 millones de años

De nuevo vemos la naturaleza oscilatoria de la excentricidad, pero no vemos como llega a cero en el valor de equilibrio. Estas diferencias se deben principalmente a la masa, pero también son factores importantes las diferentes condiciones iniciales al ejemplo anterior. Lo que sí se mantiene es que aunque tengan diferentes pendientes para cada excentricidad inicial todas se acercan a cero, y cuánto más grande e_0 más rápida la evolución.

Seguimos con la evolución de la excentricidad del planeta externo.

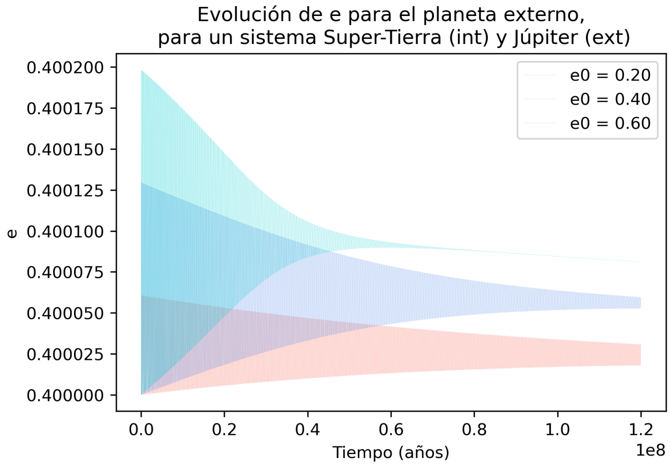

Figura 9: Evolución de la excentricidad del planeta exterior en 120 millones de años

Vemos una gráfica similar a la anterior, con la componente oscilatoria. También vemos que los valores caen hacia cero para las tres condiciones iniciales. Lo que vemos diferente del caso anterior es que oscila en torno a 0,4, y se ve muy levemente el decaimiento hacia 0. Para $e_0 = 0{,}6$ específicamente vemos que llega al valor de equilibrio donde no oscila más, y allí podemos ver claramente que sigue cayendo.

Ahora veamos una comparación de las excentricidades de ambos planetas.

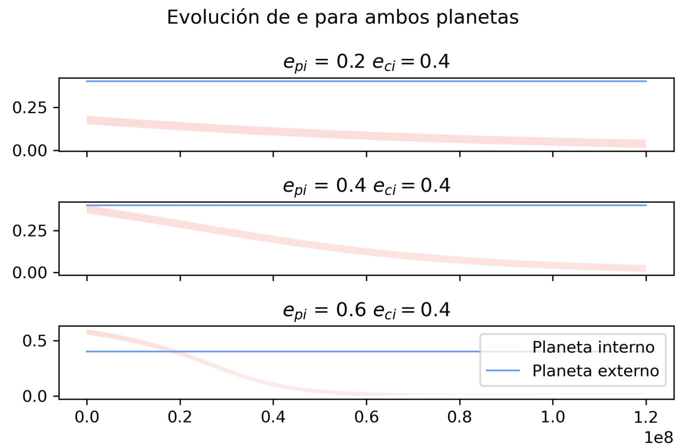

Figura 10: Evolución de la excentricidad de ambos planetas en 120 millones de años

La figura 10 nos permite observar la diferencia del decaimiento de ambas excentricidades, para las del planeta interno podemos apreciar la oscilación pero para el externo no es posible por el rango de valores recorrido. Lo que si logramos ver es que la excentricidad del planeta interno decae mucho más rápido que la del planeta externo.

Finalmente, vemos la evolución del semieje mayor para el planeta interno.

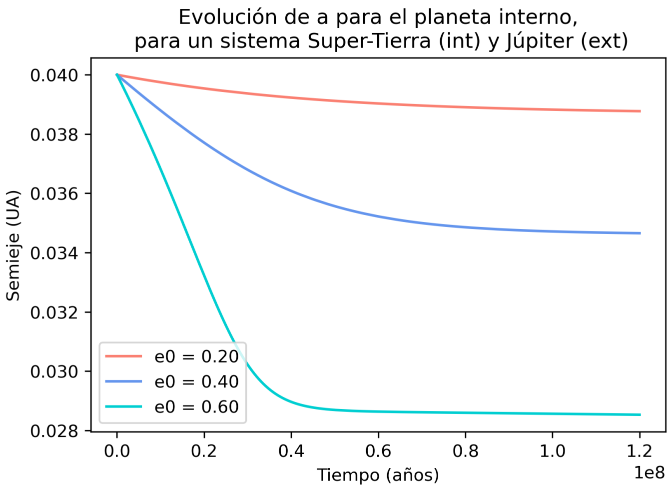

Figura 11: Evolución del semieje mayor del planeta interno en 2 millones de años

Podemos ver que en todos los casos el semieje decae, como esperábamos, y cuánto más grande es la excentricidad inicial más rápida es la evolución. Vemos también cómo para $e_0 = 0{,}6$ el valor del semieje es bastante más bajo que los demás.

3.3. Sistema de un Júpiter caliente y un Neptuno

Recordemos las características de este sistema:

m_p	m_c	R_p	a_p	a_c	e_c
0.46 M_J	1 M_N	2 R_J	0.05 UA	0.5 UA	0.4

Cuadro 5: Datos numéricos iniciales del sistema de un Júpiter caliente (interno, similar a 51 Pegasi b) y un Neptuno (externo)

Para realizar la integración, en este caso, tomamos diferentes intervalos temporales entre 0 y 1, 10 y 100 millones de años. Elegimos estos distintos intervalos para poder estudiar las diferentes formas de las gráficas más detenidamente. Recordamos que para todas las integraciones hechas se usó el mismo paso temporal.

Vamos a ver la evolución de la excentricidad y el semieje mayor para los tres intervalos temporales, que graficamos juntas para compararlas directamente.

Primero veamos los resultados para la evolución de la excentricidad del planeta interior.

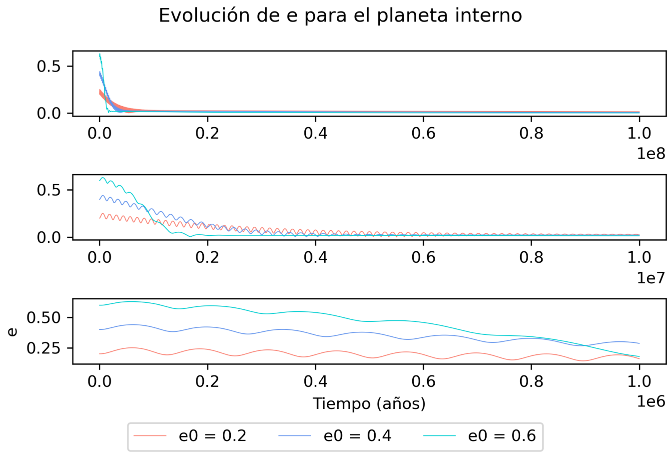

Figura 12: Evolución de la excentricidad del planeta interior

En los tres intervalos temporales podemos observar cómo decae la excentricidad. Como era nuestro objetivo integrando en tiempos tan diferentes, logramos observar las oscilaciones con más detalle. Vemos primero, que en el intervalo más grande, de 100 millones de años las órbitas logran circularizarse y no notamos la oscilación. Para el intervalo de 10 millones de años, llegamos a ver la oscilación y a su vez, logramos observar la circularización de las órbitas. Finalmente, para el intervalo más pequeño, de 1 millón de años, solo logramos ver las oscilaciones y que decaen, pero no la circularización. En las tres podemos apreciar la mayor velocidad de decaimiento para la excentricidad inicial más grande.

Seguimos con la evolución de las excentricidades del planeta externo.

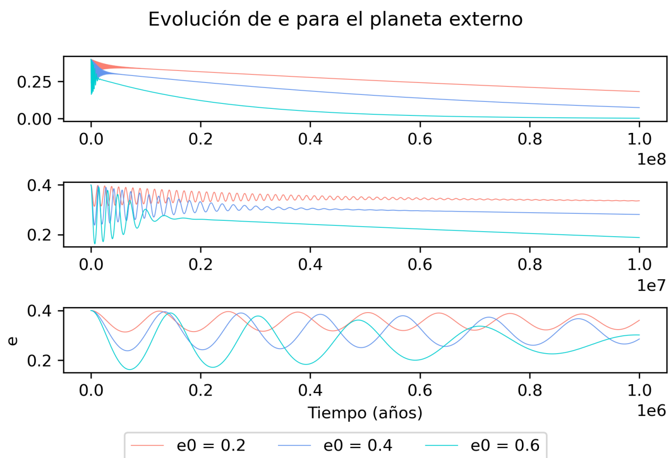

Figura 13: Evolución de la excentricidad del planeta exterior

En este caso, seguimos observando el decaimiento pero no llegamos a la circularización de todas las condiciones iniciales. Solo logramos observar la circularización en el intervalo más grande, de 100 millones de años, para la mayor excentricidad. La forma de la oscilación en el intervalo de 10 millones de años es similar a la de la evolución de la excentricidad del planeta externo para el segundo sistema, donde oscila en torno a su excentricidad inicial por millones de años hasta que llega al valor de equilibrio y decae a 0.

Para el intervalo más pequeño, de 1 millón de años, podemos observar la gran amplitud de las oscilaciones, que va disminuyendo, lo que no se logra discernir completamente es el decaimiento general.

Ahora veamos una comparación de las excentricidades de ambos planetas.

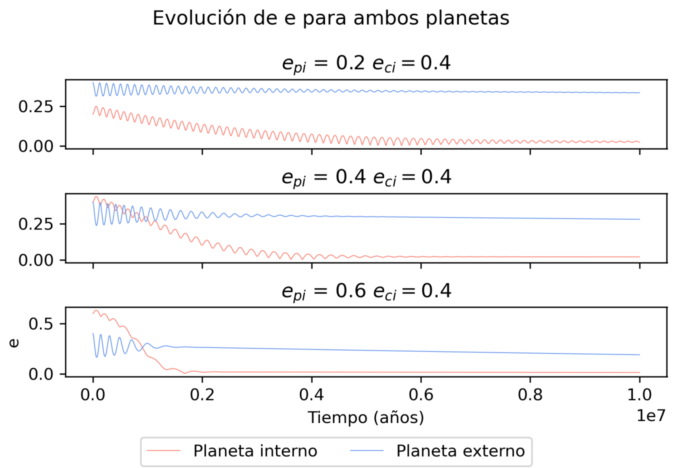

Figura 14: Evolución de la excentricidad de ambos planetas para 10 millones de años

Para comparar el decaimiento de la excentricidad de ambos planetas elegimos centrarnos solamente en un intervalo temporal, más específicamente, el de 10 millones de años. Esto es porque se aprecia mejor la diferencia entre las evoluciones y además, como ya mencionamos, podemos ver, no solo el camino hacia la circularización de ambas órbitas, sino que su oscilación.

Entonces, en este conjunto de gráficas podemos observar cómo la evolución del planeta interno es más rápida que la del externo y que llega a la circularización en todos los casos mucho antes. También notamos que para los tres casos el planeta externo llega más rápido a su excentricidad de equilibrio.

Finalmente, vemos la evolución del semieje mayor para el planeta interno.

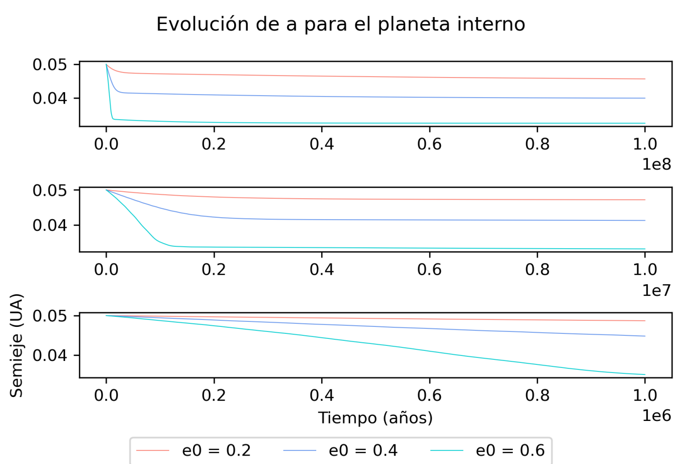

Figura 15: Evolución del semieje mayor del planeta interno en 2 millones de años

Volvemos a las gráficas con los diferentes tiempos, en todas ellas vemos el decaimiento del semieje, aunque para la de 1 millón de años parece lineal, para las otras dos vemos un decaimiento más rápido al principio, que se enlentece. Como ya vimos en los otros ejemplos, cuánto más grande es la excentricidad inicial, más chico es el semieje final.

4. Conclusiones

4.1. Sistema de dos Super-Tierras

Para este sistema en particular concluimos que el trabajo estuvo bien realizado, ya que los resultados son similares a los obtenidos en [4]. Podemos establecer que el sistema termina su evolución en el orden de pocos millones de años. Con el término terminar nos referimos a que la órbita logra circularizarse para ambos planetas en ese período de tiempo.

4.2. Sistema de una Super-Tierra y un Júpiter

En este caso, también concluimos que el trabajo estuvo bien realizado, ya que los resultados son similares a los obtenidos en [4]. Aunque se encontraron algunas discrepancias. En particular no podemos establecer que en el rango de tiempo estudiado se llega a la circularización de ambas órbitas, porque la evolución del externo es muy lenta, capaz que mayor a la edad del universo. Esto no se pudo lograr en el trabajo ya que con tiempos mayores dejaba de funcionar el integrador.

4.3. Sistema de un Júpiter caliente y un Neptuno

Para este último sistema completamente ficticio y sin ninguna base en un artículo real podemos decir que llegamos a la circularización de las dos órbitas para al menos un caso en los 100 millones de años integrados. Aunque podemos decir que para las otras dos condiciones iniciales no se encontraban muy lejos.

También podemos destacar que el planeta interno circularizó su órbita en un intervalo temporal de un orden de magnitud menor que el externo.

En este caso particular podemos destacar el buen funcionamiento del método de integración, que permitió estudiar las diferentes escalas temporales sin ningún problema.

4.4. Generales

La primera conclusión a partir de los tres sistemas es que cuánto mayor es la excentricidad inicial, más rápida y exagerada es la evolución tanto para la excentricidad como para el semieje mayor, llegando incluso hasta la caída del planeta dentro de la estrella hospedadora.

Además, por lo general, la excentricidad del planeta interior decae más rápido que la del exterior, aunque no se puede establecer una conclusión de cuándo cada una llega a la excentricidad de equilibrio respecto a la otra.

En cuanto a los semiejes vemos que en todos los casos decaen a distintos valores, según la condición inicial. Por lo que concluimos que la evolución del semieje mayor depende fuertemente de la condición inicial de excentricidad y tiene dos intervalos de decaimiento, uno más pronunciado al principio y uno más lento después.

Para comparar entre los tres sistemas, vemos que el que menos tiempo le lleva en general es al primero, constituido por dos Super-Tierras. Pero concluir algo más sobre esto se escapa de los objetivos del trabajo, ya que hay que estudiar la evolución temporal en diferentes términos, es decir, no en años.

Como resumen de las conclusiones, decimos que todas las órbitas llegan a la circularización y se da la migración del planeta interno hacia la estrella. La velocidad de la evolución depende fuertemente de las condiciones iniciales, más específicamente de la excentricidad inicial del planeta interno, que fue lo estudiado en este trabajo.

Finalmente, podemos decir que el método de integración Runge - Kutta 4 dentro de nuestro programa puede reproducir resultados obtenidos por otros autores previamente y nuevos resultados que, al ser analizados, parecen ser correctos. Además, el cálculo se hace rápido y no es necesario un gran poder computacional. La única desventaja encontrada para que este método en este código particular funcione bien es que hubo que encontrar el par ideal de tiempo de integración con número de iteraciones, pero al resolver eso a partir de prueba y error no hubo mayores inconvenientes.

Referencias

[1] Sylvio Ferraz-Mello, Adrián Rodríguez y Hauke Hussmann. «Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The Darwin theory re-visited». En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 101.1-2 (mayo de 2008), págs. 171-201. DOI: 10.1007/s10569-008-9133-x. arXiv: 0712.1156 [astro-ph].

[2] Rosemary A. Mardling. «Long-term tidal evolution of short-period planets with companions». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 382.4 (dic. de 2007), págs. 1768-1790. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2007.12500.x. arXiv: 0706.0224 [astro-ph].

[3] A. Rodríguez y S. Ferraz-Mello. «Tidal decay and circularization of the orbits of short-period planets». En: *EAS Publications Series*. Ed. por K. Goździewski, A. Niedzielski y J. Schneider. Vol. 42. EAS Publications Series. Abr. de 2010, págs. 411-418. DOI: 10.1051/eas/1042044. arXiv: 0903.0763 [astro-ph.EP].

[4] A. Rodríguez y col. «Tidal decay and orbital circularization in close-in two-planet systems». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 415.3 (ago. de 2011), págs. 2349-2358. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.18861.x. arXiv: 1104.0964 [astro-ph.EP].

5. Apéndice

En algunas de las gráficas no es posible visualizar la oscilación de la línea y cómo sigue al dejar de oscilar, por lo que dejamos a continuación las mismas gráficas para visualizarlas mejor.

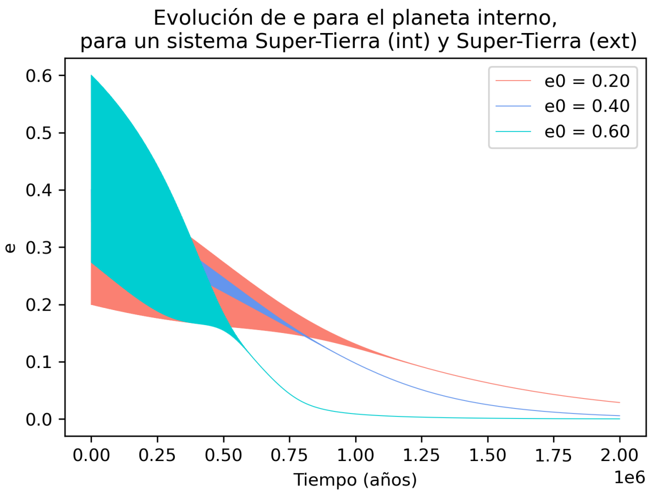

Figura 16: Evolución de la excentricidad para el planeta interior del sistema Super-Tierra - Super-Tierra

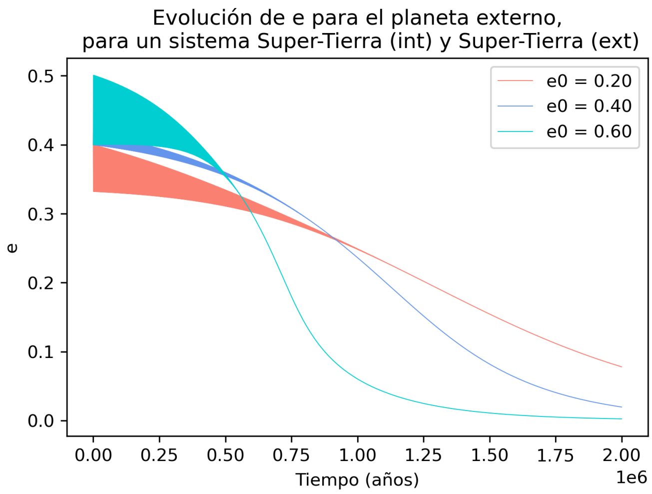

Figura 17: Evolución de la excentricidad para el planeta exterior del sistema Super-Tierra - Super-Tierra

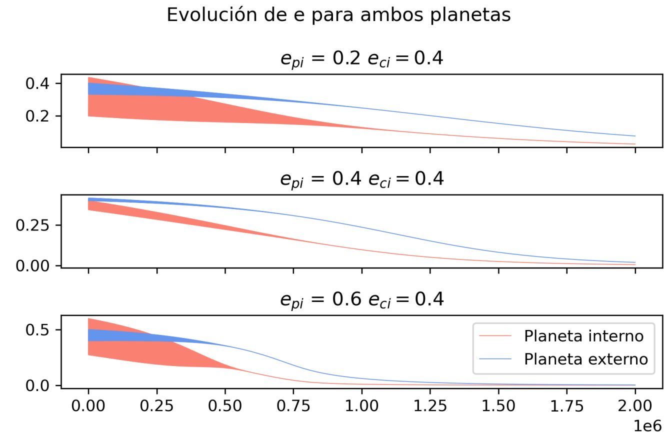

Figura 18: Evolución de la excentricidad para ambos planetas del sistema Super-Tierra - Super-Tierra

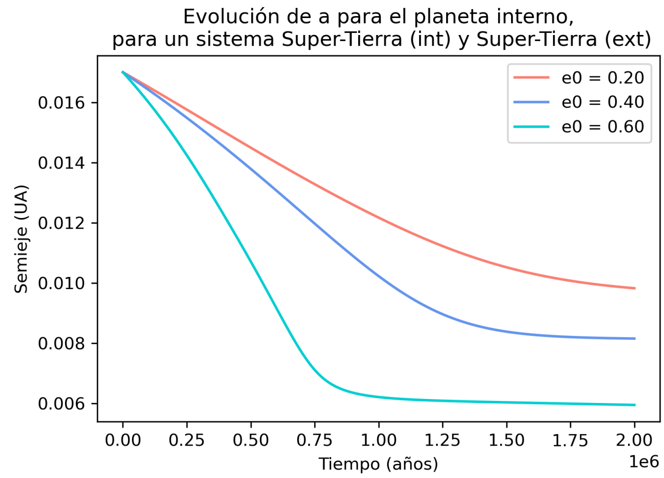

Figura 19: Evolución del semieje mayor para el planeta interior del sistema Super-Tierra - Super-Tierra

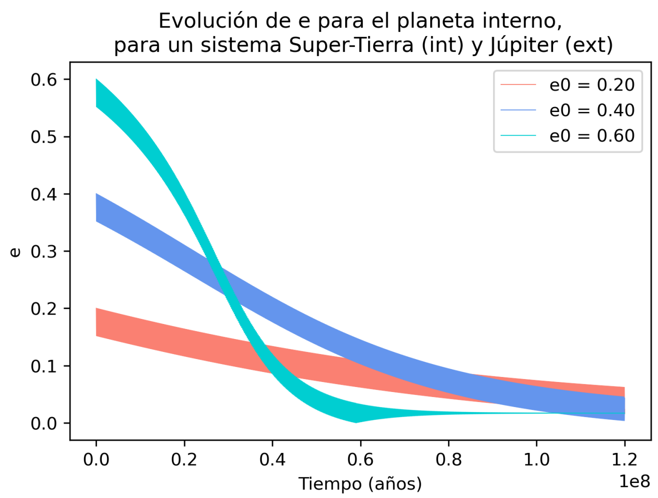

Figura 20: Evolución de la excentricidad para el planeta interior del sistema Super-Tierra - Júpiter

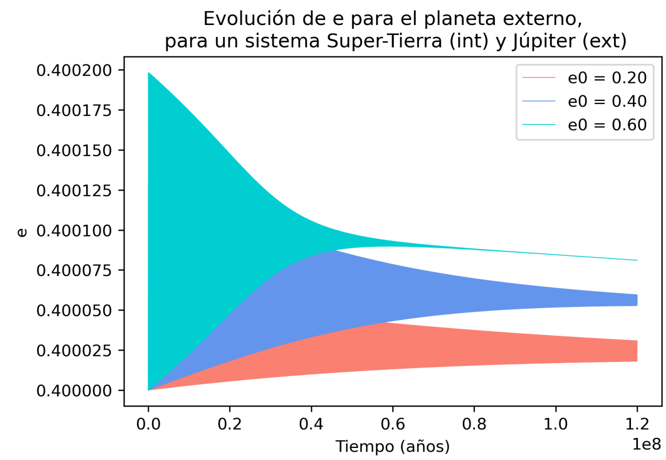

Figura 21: Evolución de la excentricidad para el planeta exterior del sistema Super-Tierra - Júpiter

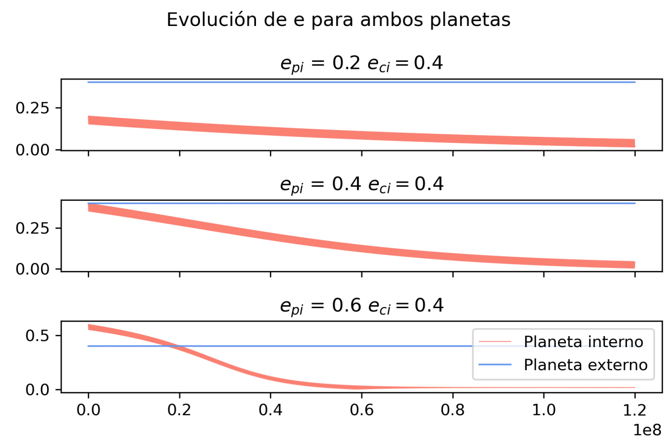

Figura 22: Evolución de la excentricidad para ambos planetas del sistema Super-Tierra - Júpiter

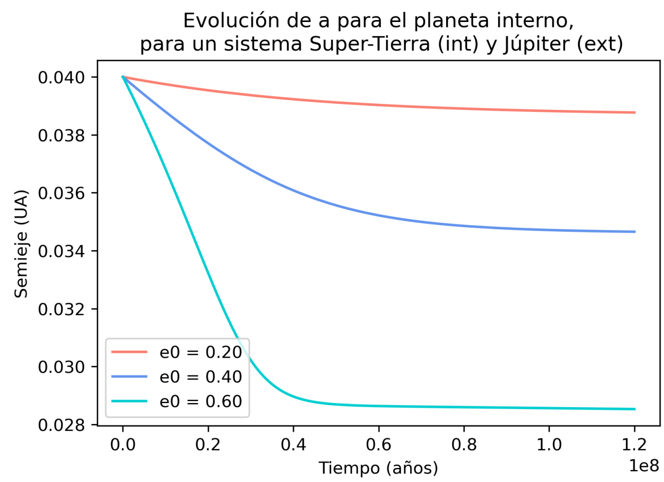

Figura 23: Evolución del semieje mayor para el planeta interior del sistema Super-Tierra - Júpiter

Además adjuntamos el código utilizado para realizar este proyecto.

```python

from matplotlib.pyplot import figure, plot, legend, show, xlabel, ylabel, title, ticklabel_format, subplots
from numpy import sin, cos, pi, arange, sqrt, array

########################### Definición de funciones ###########################

def evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp):

    # Función que calcula la evolución orbital de un sistema planetario de dos planetas y una estrella
    # teniendo en cuenta el efecto de marea sobre la estrella y el planeta más cercano
    # a y b: extremos de integración
    # N: cantidad de pasos
    # x: vector con las condiciones iniciales
    # mp y mc: masas del planeta interno y externo respectivamente
    # Rp: radio del planeta interno
    # ac: semieje mayor del planeta externo
    # Qp: constante de disipación del planeta interno (afectado por marea)

    # Masa reducida del planeta principal y del compañero
    mu = G * (ms + mp)
    muc = G * (ms + mc)

    nc = sqrt(muc/ac**3) # Movimiento medio del compañero

    s = 9/4 * kds/Qs * mp/ms * Rs**5 # Efecto de marea sobre la estrella
    p = 9/2 * kdp/Qp * ms/mp * Rp**5 # Efecto de marea sobre el planeta

    def rk4(a,b,N,x): # Rutina de Runge-Kutta 4
        h = (b-a)/N # Definimos el espaciado temporal
        tp = arange(a,b,h) # Definimos el vector con todos los tiempos utilizados para luego graficar

        # Definimos las diferentes listas para guardar los resultados de la integración
        epp = []
        ecp = []
        etap = []
        app = []

        def f(x): # Función a integrar
            # A partir del parámetro x tomamos las diferentes variables del problema
            ep = x[0] # Excentricidad del planeta interior
            ec = x[1] # Excentricidad del planeta exterior
            eta = x[2] # Diferencia entre las longitudes del periihelio de ambos planetas (w2 - w1)
            ap = x[3] # Semieje del planeta interior

            np = sqrt(mu/ap**3) # Movimiento medio del planeta interior
            epsilonc = sqrt(1 - ec**2) # Lo definimos para simplificar la escritura de las siguientes ecuaciones

            # Constantes que surgen a partir de las aproximaciones hechas
            Wo = 15/16 * np * (ap/ac)**4 * (mc/ms) * epsilonc**-5
            Wc = 15/16 * nc * (ap/ac)**3 * (mp/ms) * epsilonc**-4
            Wt = 21/2 * np * (kp/Qp) * (ms/mp) * (Rp/ap)**5
            Wq = 3/4 * np * (ap/ac)**3 * mc/ms * epsilonc**-3 * (1 - sqrt(ap/ac) * mp/mc * epsilonc**-1 + gamma * epsilonc**3)

            # Las diferentes ecuaciones diferenciales a integrar
            dep = -Wo * ec * sin(eta) - Wt * ep
            dec = Wc * ep * sin(eta)
            deta = Wq - Wo * ec/ep * cos(eta)
            dap = -(2/3) * np * (ap**-4) * ((2 + 46 * ep**2) * s + 7 * ep**2 *p)

            return array([dep,dec,deta,dap],float) # Devolvemos los valores de las ecuaciones diferenciales (derivadas)

        # Comenzamos a integrar utilizando el método propuesto (rk4)
        for t in tp:
            epp.append(x[0])
            ecp.append(x[1])
            etap.append(x[2])
            app.append(x[3])

            k1 = h * f(x)
            k2 = h * f(x + 0.5 * k1)
            k3 = h * f(x + 0.5 * k2)
```

```python
            k4 = h * f(x + k3)
            x += (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

        return array([epp,ecp,app,tp],float) # Devolvemos las listas que nos interesan para el posterior análisis y gráficas

    epp, ecp, app, tp = rk4(a,b,N,x) # Llamamos a la función que integra

    return epp, ecp, app, tp # Devolvemos las listas que nos interesan

def ev_e(e,tp,titulo,color,e0):

    # Función que grafica la evolución de la excentricidad
    # e: lista de excentricidades para un sistema dado
    # tp: array con los tiempos correspondientes a la excentricidad
    # titulo: título de la gráfica
    # color: color de la gráfica

    plot(tp,e,label='e0 = %.2f'%e0, color = color, linewidth=0.05)
    title(titulo)
    xlabel('Tiempo (años)')
    ylabel('e')
    legend()
    ticklabel_format(useOffset=False)

def ev_a(a,tp,titulo,color,e):

    # Función que grafica la evolución del semieje mayor
    # a: lista de semiejes para un sistema dado
    # tp: array con los tiempos correspondientes a la excentricidad
    # titulo: título de la gráfica
    # color: color de la gráfica
    # e: condición inicial de la excentricidad

    plot(tp,a,label = 'e0 = %.2f'%e, color = color)
    xlabel('Tiempo (años)')
    ylabel('Semieje (UA)')
    title(titulo)
    legend()
    ticklabel_format(useOffset=False)

########################## Definición de constantes ###########################

# Trabajamos con unidades solares para masa, unidades astronómicas para distancia y años para tiempo

# Masas en masas solares
ms = 1
mj = ms * 9.547919 * 1e-4 # datos de Júpiter
mt = ms * 1/333000 # datos de la Tierra

# Radios en unidades astronómicas
Rs = 0.00465047
Rj = 0.10045 * Rs # datos de Júpiter
Rt = 0.00914927 * Rs # datos de la Tierra

G = 4*pi**2 # Constante de gravitación en ua, años y masas solares

# Constantes referentes a la disipación
kp = 1
kds = 1
kdp = 1
Qs = 1e7 # Constante de disipación para una estrella como el Sol

gamma = 0 # Constante referente a la relatividad, no asumo efectos relativistas

a = 0 # Tiempo incial de integración, es el mismo para todos los casos

#################### Definición los diferentes sistemas ######################

# Vamos a tomar diferentes condiciones iniciales de la excentricidad del planeta interior
# Tomamos 0.2, 0.4 y 0.6
# Recordamos la forma del vector con condiciones iniciales x:
# x = array([ep, ec, eta, ac],float)

# Estas funciones reciben como parámetros el tiempo final y la cantidad de iteraciones deseadas

```

```python
# Sistema de Super - Tierra y Super - Tierra

def stst(b,N):

    ac = 0.046 # Semieje del planeta compañero

    Rp = 1.58 * Rt # Definimos el radio del planeta interior
    mp = mt * 8  # Definimos la masa del planeta interior
    mc = mt * 13.6 # Definimos la masa del planeta compañero
    Qp = 1e3 # Para Super Tierras

    x = array([0.2,0.4,0.01,0.017],float) # Condiciones iniciales para el primer caso, ep = 0.2
    epp, ecp, app, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # Calculamos toda la evolución

    x = array([0.4,0.4,0.01,0.017],float) # Condiciones iniciales para el segundo caso, ep = 0.4
    epp2, ecp2, app2, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)
    x = array([0.6,0.4,0.01,0.017],float) # Condiciones iniciales para el tercer caso, ep = 0.5

    epp3, ecp3, app3, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    figure(dpi=300)
    ev_e(epp, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_e(epp2, tp, '', 'cornflowerblue', epp2[0])
    ev_e(epp3, tp, 'Evolución de e para el planeta interno,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Super-Tierra (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    figure(dpi=300)
    ev_e(ecp, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_e(ecp2, tp, '', 'cornflowerblue', epp2[0])
    ev_e(ecp3, tp, 'Evolución de e para el planeta externo,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Super-Tierra (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    figure(dpi=300)
    ev_a(app, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_a(app2, tp, '','cornflowerblue', epp2[0])
    ev_a(app3, tp, 'Evolución de a para el planeta interno,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Super-Tierra (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300, sharex=True)
    fig.suptitle('Evolución de e para ambos planetas')
    ax1.plot(tp, epp, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax1.plot(tp,ecp, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=0.05)
    ax1.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.2 $e_{ci} = 0.4$')
    ax2.plot(tp, epp2, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax2.plot(tp,ecp2, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=0.05)
    ax2.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.4 $e_{ci} = 0.4$')
    ax3.plot(tp, epp3, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax3.plot(tp,ecp3, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=0.05)
    ax3.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.6 $e_{ci} = 0.4$')
    legend()
    fig.tight_layout()

# Sistema de Super - Tierra y Júpiter

def stj(b,N):

    ac = 1 # Semieje del planeta compañero

    Rp = 5**(1/3) * Rt # Definimos el radio del planeta interior
    mp = mt * 5 # Definimos la masa del planeta interior
    mc = mj # Definimos la masa del planeta compañero
    Qp = 1e3 # Para Super Tierras

    x = array([0.2,0.4,0.01,0.04],float) # Condiciones iniciales para el primer caso, ep = 0.2
    epp, ecp, app, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # Calculamos toda la evolución

    x = array([0.4,0.4,0.01,0.04],float) # Condiciones iniciales para el segundo caso, ep = 0.4
    epp2, ecp2, app2, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    x = array([0.6,0.4,0.01,0.04],float) # Condiciones iniciales para el tercer caso, ep = 0.5
    epp3, ecp3, app3, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    figure(dpi=300)
```

```python
    ev_e(epp, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_e(epp2, tp, '', 'cornflowerblue', epp2[0])
    ev_e(epp3, tp, 'Evolución de e para el planeta interno,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Júpiter (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    figure(dpi=300)
    ev_e(ecp, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_e(ecp2, tp, '', 'cornflowerblue', epp2[0])
    ev_e(ecp3, tp, 'Evolución de e para el planeta externo,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Júpiter (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    figure(dpi=300)
    ev_a(app, tp, '', 'salmon', epp[0])
    ev_a(app2, tp, '', 'cornflowerblue', epp2[0])
    ev_a(app3, tp, 'Evolución de a para el planeta interno,\n para un sistema Super-Tierra (int) y Júpiter (ext)', 'turquoise', epp3[0])
    show()

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300, sharex=True)
    fig.suptitle('Evolución de e para ambos planetas')
    ax1.plot(tp, epp, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax1.plot(tp,ecp, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=1)
    ax1.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.2 $e_{ci} = 0.4$')
    ax2.plot(tp, epp2, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax2.plot(tp,ecp2, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=1)
    ax2.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.4 $e_{ci} = 0.4$')
    ax3.plot(tp, epp3, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.05)
    ax3.plot(tp,ecp3, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=1)
    ax3.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.6 $e_{ci} = 0.4$')
    legend()
    fig.tight_layout()

# Sistema de Júpiter y Neptuno

def jn(N): # Dentro de la función tratamos con diferentes límites temporales, entonces solo recibe como parámetro la cantidad de iteraciones N

    ac = 0.5 # Semieje del planeta compañero

    Rp = Rj * 2
    mc = 0.0539531012 * mj # Masa de Neptuno (compañero)
    mp = mj * 0.46 # Masa de 51 Pegasi b (planeta interior)
    Qp = 1e5 # Para júpiteres

    b = 1e8 # 100 millones de años

    x = array([0.2,0.4,0.01,0.05],float) # Condiciones iniciales para el primer caso, ep = 0.2
    epp, ecp, app, tp1 = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    x = array([0.4,0.4,0.01,0.05],float) # Condiciones iniciales para el segundo caso, ep = 0.4
    epp2, ecp2, app2, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    x = array([0.6,0.4,0.01,0.05],float) # Condiciones iniciales para el tercer caso, ep = 0.6
    epp3, ecp3, app3, tp1 = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp)

    b=1e7 # 10 millones de años

    x = array([0.2,0.4,0.01,0.05],float)
    epp4, ecp4, app4, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.2

    x = array([0.4,0.4,0.01,0.05],float)
    epp5, ecp5, app5, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.4

    x = array([0.6,0.4,0.01,0.05],float)
    epp6, ecp6, app6, tp2 = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.6

    b=1e6 # 1 millón de años

    x = array([0.2,0.4,0.01,0.05],float)
    epp7, ecp7, app7, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.2

    x = array([0.4,0.4,0.01,0.05],float)
    epp8, ecp8, app8, tp = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.4

```

```python
    x = array([0.6,0.4,0.01,0.05],float)
    epp9, ecp9, app9, tp3 = evolucion(a,b,N,x,mp,mc,Rp,ac,Qp) # ep = 0.6

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300)
    fig.suptitle('Evolución de e para el planeta interno')
    ax1.plot(tp1, epp, color = 'salmon',  linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,epp2, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,epp3, color = 'turquoise',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2, epp4, color = 'salmon', linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,epp5, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,epp6, color = 'turquoise',  linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3, epp7, color = 'salmon', label='e0 = 0.2', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,epp8, color = 'cornflowerblue', label = 'e0 = 0.4', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,epp9, color = 'turquoise', label = 'e0 = 0.6', linewidth=0.5)
    ylabel('e')
    xlabel('Tiempo (años)')
    fig.tight_layout()
    fig.subplots_adjust(bottom=0.2)
    fig.legend( loc="lower center", ncol=3)

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300)
    fig.suptitle('Evolución de e para el planeta externo')
    ax1.plot(tp1, ecp, color = 'salmon', linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,ecp2, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,ecp3, color = 'turquoise',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2, ecp4, color = 'salmon',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,ecp5, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,ecp6, color = 'turquoise',  linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3, ecp7, color = 'salmon', label='e0 = 0.2', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,ecp8, color = 'cornflowerblue', label = 'e0 = 0.4', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,ecp9, color = 'turquoise', label = 'e0 = 0.6', linewidth=0.5)
    ylabel('e')
    xlabel('Tiempo (años)')
    fig.tight_layout()
    fig.subplots_adjust(bottom=0.2)
    fig.legend( loc="lower center", ncol=3)

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300)
    fig.suptitle('Evolución de a para el planeta interno')
    ax1.plot(tp1, app, color = 'salmon', linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,app2, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp1,app3, color = 'turquoise', linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2, app4, color = 'salmon',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,app5, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,app6, color = 'turquoise',  linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3, app7, color = 'salmon', label='e0 = 0.2', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,app8, color = 'cornflowerblue', label = 'e0 = 0.4', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp3,app9, color = 'turquoise', label = 'e0 = 0.6', linewidth=0.5)
    ylabel('Semieje (UA)')
    xlabel('Tiempo (años)')
    fig.tight_layout()
    fig.subplots_adjust(bottom=0.2)
    fig.legend( loc="lower center", ncol=3)

    fig, (ax1, ax2, ax3) = subplots(3, 1, dpi=300, sharex = True)
    fig.suptitle('Evolución de e para ambos planetas')
    ax1.plot(tp2, epp4, color = 'salmon', linewidth=0.5)
    ax1.plot(tp2,ecp4, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax1.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.2 $e_{ci} = 0.4$')
    ax2.plot(tp2, epp5, color = 'salmon',  linewidth=0.5)
    ax2.plot(tp2,ecp5, color = 'cornflowerblue',  linewidth=0.5)
    ax2.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.4 $e_{ci} = 0.4$')
    ax3.plot(tp2, epp6, color = 'salmon', label='Planeta interno', linewidth=0.5)
    ax3.plot(tp2,ecp6, color = 'cornflowerblue', label = 'Planeta externo', linewidth=0.5)
    ax3.set_title(r'$e_{pi}$ = 0.6 $e_{ci} = 0.4$')
    ylabel('e')
    xlabel('Tiempo (años)')
    fig.tight_layout()
    fig.subplots_adjust(bottom=0.2)
    fig.legend( loc="lower center", ncol=3)

##################### Graficamos los distintos sistemas ######################

stst(2e6, 1e5)
stj(1.2e8, 1e5)
jn(1e5)
```