

Modelado, Análisis, Simulación y Control de un Fenómeno Vibratorio

Valeria María Serna Salazar, Valeria Edith Lugo Gutiérrez, Adalía Fernanda Aneiros Gutierrez

Abstract—Este trabajo aborda el estudio de los fenómenos vibratorios, específicamente aquellos provocados por sismos. Se presenta una revisión teórica sobre los sismos, sus causas, y los impactos que generan, destacando la necesidad de medidas de preparación y respuesta. Utilizando modelos matemáticos, se analizan las frecuencias naturales y los modos de vibración de un edificio de 68 pisos, simulando su respuesta ante eventos sísmicos. Los resultados muestran un desplazamiento máximo de 0.00045 metros y un ángulo de inclinación menor a 0.11 grados, lo que valida la precisión del modelo empleado. Estos hallazgos subrayan la importancia de diseñar infraestructuras que minimicen las pérdidas en regiones propensas a terremotos.

Index Terms—Sismos, desplazamiento, modelado matemático, análisis dinámico, controlador, simulación.

I. INTRODUCCIÓN

Los sismos, también conocidos como terremotos y temblores, son uno de los fenómenos más estudiados por sus causas, consecuencias, y principalmente por el temor que generan, pues son aquellos movimientos vibratorios que, en términos prácticos, modifican el estado de reposo de los cuerpos sobre la superficie de la tierra. Conocidos por sus consecuencias tanto directas como indirectas, han sido la principal razón para el nacimiento de la Sismología, la rama de la geofísica que se encarga de estudiar las ondas mecánicas y, por ende, todo este tipo de fenómenos. A finales del siglo XIX se idearon los primeros sismógrafos, ante la necesidad de medir la magnitud de los sismos, los cuales han tenido numerosas transformaciones y mejoras, pasando por péndulos y cintas de papel, hasta los digitales que conocemos hoy en día.

Es innegable que a lo largo del tiempo la humanidad ha adquirido una comprensión más clara de la amenaza que representa un terremoto en la sociedad. El devastador sismo de 1985 en México es un ejemplo emblemático de esta realidad; aunque las cifras oficiales reportaron 3,192 fallecidos, las estimaciones del Gobierno de México sugieren que las fatalidades podrían ascender a más de 20,000 [GobiernoMexicano, 2004]. Este evento no solo dejó el saldo humano, sino que también dejó a miles de personas sin hogar, además de ser una de las causas más significativas de la infraestructura de la Ciudad de México y áreas que la rodean. Este es sólo un ejemplo de la necesidad que hay para implementar medidas efectivas de preparación y respuesta ante desastres naturales, así como de promover la construcción de mejores infraestructuras que sean capaces de

evitar perder la mayor cantidad de pérdidas en las regiones propensas a terremotos.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

De acuerdo con [Sánchez, 1994] la mayoría de los sismos son de origen tectónico, gracias a las fricciones en las fallas y los desplazamientos que se originan, sin embargo, ésta no es la única razón que podría causar un sismo. Es por ello que una forma de clasificarlos es por sus características y origen. Por su origen están los debidos a causas naturales, como tectónicos, volcánicos, de colapso y los de impacto de meteorito, y los originados por causas antrópicas, como los inducidos por grandes embalses, por explosiones nucleares, por explosiones de minas y canteras y los originados por inyección o extracción de fluidos. Una segunda clasificación se hace según la profundidad de las ondas sísmicas. Existen aquellos superficiales, los cuales tienen un foco que puede alcanzar los 70 km de profundidad, los intermedios, entre 70 y 450 km, y, finalmente, los profundos, que son casi imperceptibles pues su foco se encuentra más allá de 450 km de profundidad.

Hablando de sus características físicas, un temblor ocurre, principalmente, en zonas donde hay fallas ocasionadas por contactos entre las diferentes placas tectónicas y por el desplazamiento que hay entre ellas, refiriéndonos a *fallas* como zonas de fracturas en el plano. El movimiento entre las placas se manifiesta, en la mayoría de los casos, en los bordes de las mismas, donde se genera una zona de deformación relativamente pequeña que da lugar a actividad sísmica. Los bordes sirven como referencia para saber el tipo de actividad sísmica que se originó en ellos; si se generan zonas de expansión, quiere decir que las placas se separaron, lo que dio lugar a nueva corteza y terremotos superficiales, si hubo zonas convergentes, las placas chocaron por su acercamiento entre ellas, y, finalmente, si hubo zonas de fallas transversales, quiere decir que el movimiento entre ellas fue lateral y que no existe creación ni destrucción de material.

A lo largo de los años se han puesto en práctica diferentes métodos para medir la actividad sísmica. Para medir la energía liberada, la escala más utilizada es la de Ritcher, escala con la que se considera que cuando un sismo tiene magnitud mayor o igual a 7, es terremoto. Esta escala recibe también el nombre de Magnitud Local, y es una escala que hace la comparación

entre un sismo registrado con referencia a un sismo patrón; su expresión es de la siguiente manera:

$$ML = \log[A(\Delta)/AO(\Delta)] = \log A(\Delta) - \log AO(\delta) \quad (1)$$

donde $\log A(\Delta)$ es el logaritmo de la amplitud máxima (en mm), y $\log AO(\Delta)$ es el logaritmo de la amplitud un sismo patrón, que es un sismo registrado a 100 kilómetros del Epicentro. Ambos logaritmos están en función de la distancia epicentral (Δ), que es la distancia del Epicentro al sitio de registro. [Astroza, 2012].

Finalmente, para medir el efecto local del terremoto, es decir, la forma en la que el sismo fue sentido por las personas y cómo afectó a los objetos y construcciones (conocido como Intensidad), se utiliza, principalmente, la escala de Mercalli Modificada.

Con el paso de los años, los terremotos de mayor magnitud han dejado una huella en la historia y memoria colectiva de las personas afectadas; estos eventos no solamente se destacan por su intensidad sísmica, sino también por las devastadoras consecuencias que han dejado a su paso. Si se hace un enfoque en los terremotos más intensos que se han vivido, se pondrá al sucedido en Chile cómo uno de los más catastróficos, ocurrido en Valdivia en 1960, que por su magnitud y duración, se considera el más poderoso registrado en el mundo. Tuvo una duración de entre 10 y 12 minutos y una magnitud de 9.5 Mw, cobró la vida de alrededor de 2000 personas y dejó al rededor de 2,000,000 de personas damnificadas [Paul, F., s.f.].

Por otro lado, hablar sobre los temblores de corta duración es más complicado porque no hay un registro histórico de los más pequeños que han existido. Estos eventos son llamados microsismos y para ser considerados como tales, su magnitud debe estar entre 0 y 2 en la escala de Richter. Liberan muy poca energía y ocurren con frecuencia en áreas sísmicas, y, de acuerdo con un artículo de EcologíaVerde, existen tres cinturones sísmicos en el mundo, el cinturón de Fuego del Pacífico, el cinturón tranasiático, y el cinturón situado en el centro del océano Atlántico. Ahí es donde se encuentran las principales zonas sísmicas del planeta.

Con la intención de hacer un análisis sobre las políticas de construcción actuales, se puede decir que al hacer un proyecto de construcción en México, hay diferentes pasos y procesos que considerar, que se encuentran dentro de la Normativa de Construcción, un conjunto de reglas y lineamientos establecidos por autoridades gubernamentales con el objetivo de regular y controlar el proceso de edificación de estructuras, de cualquier tipo. La normativa incluye disposiciones relacionadas con la seguridad estructural en caso de desastres naturales, como los sismos. Algunas de estas medidas son el uso de materiales y técnicas de construcción resistentes a los movimientos telúricos, diseño de estructuras con sistemas de amortiguamiento sísmico, ubicación adecuada de los edificios en función de la actividad sísmica e incluso menciona la necesidad de simulacros y planes de evacuación para preparar a la población ante posibles sismos que puedan llegar a

suceder. [El Financiero, 2022]

III. METODOLOGÍA

La capacidad para comprender y predecir el comportamiento de edificaciones es fundamental para garantizar la seguridad, eficiencia y funcionalidad de un edificio. En este contexto, la Torre Mitikah, un edificio ubicado en la Ciudad de México, representa un desafío intrigante y una oportunidad única para aplicar los principios de la teoría de control.

Con una altura de 267.3 metros, la Torre Mitikah cuenta con 68 pisos, lo que representa un complejo sistema que enfrenta diferentes perturbaciones a lo largo de su vida útil. Además, la Ciudad de México se encuentra en una zona de alta sismicidad debido a la subducción de la Placa de Cocos debajo de la Placa Norteamericana. Esto significa que la región está expuesta a sismos de moderada a gran magnitud.

De acuerdo con [Oviedo and del Pilar Duque, 2006], con el objetivo de hacer un modelo matemático que estudie la respuesta de la estructura ante una carga o deformación, por ejemplo un sismo, se realiza un análisis dinámico basado en la mecánica newtoniana. La estructura siempre responderá a las cargas o deformaciones a las que se enfrente, generando fuerzas iniciales que sean equivalentes a su masa por la aceleración ($F = ma$), que corresponde a la segunda Ley de Newton. De manera general, el modelo consiste de una masa m que es sostenida por un elemento de rigidez k , así como un coeficiente de amortiguamiento c propio del sistema. Gracias al sismo el sistema se someterá a un desplazamiento del suelo ($x_g(t)$), desplazamiento de la masa respecto a su posición inicial $x_t(t)$, así como una carga ($P(t)$). Estos 3 se relacionan de la siguiente manera:

$$x_t(t) = x_g(t) + x(t) \quad (2)$$

Para estas condiciones la ecuación de equilibrio dinámico se escribe como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g + p \quad (3)$$

donde:

$m\ddot{x}$: Fuerza inercial de la masa del edificio

$c\dot{x}$: Amortiguamiento inherente del sistema

kx : Fuerza elástica del sistema

El objetivo de plantear un modelo matemático que haga una predicción del comportamiento recae en simular el comportamiento del sistema bajo diversas condiciones, prever cómo será la respuesta de la estructura ante eventos futuros, evaluar la seguridad e integridad estructural en situaciones de riesgo, entender cuáles son los parámetros del sistema que tienen un mayor impacto en su respuesta, y, por último, probar diferentes estrategias de mitigación de riesgos mediante simulaciones, como la incorporación de dispositivos de amortiguamiento.

Con base en lo anterior, se puede asegurar el respeto a las políticas correspondientes para salvaguardar la seguridad de las personas que rodean el edificio analizado, así como el cumplimiento de los estándares de ingeniería establecidos.

De tal manera, se mejora la eficiencia y la seguridad de las edificaciones, así como contribuye al avance continuo con la optimización de recursos.

A. Modelación y análisis del sistema sin sismo

Tomando en cuenta las características antes definidas del edificio con el que trabajaremos, se puede construir un modelo que nos permita analizar la estabilidad del sistema, cuando este aún no está sujeto a un movimiento ocasionado por un sismo.

En general, de acuerdo con [Bagai et al., 2016], gracias a la ley de Hooke, para un edificio de n pisos se tienen m masas, cada una asociada a un piso diferente. Además, una variable x_i que representa el desplazamiento horizontal del i -ésimo piso desde su posición de equilibrio y una fuerza k que ayuda a restaurar el equilibrio después de que el sistema haya sido perturbado, fuerza que se mantiene constante entre el i -ésimo piso y el $(i+1)$ piso. Es decir, la fuerza de restauración se mide entre dos pisos de la siguiente forma:

$$F_r = k_i(x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

donde $x_{i+1} - x_i$ es el desplazamiento entre ambos pisos. Cuando existen estos desplazamientos y los pisos se encuentran desplazados respecto a los demás, cada conector presente en el edificio proporciona una fuerza de restauración. En general, todos estos elementos estructurales están hechos de acero pues incorporar estructuras de acero en las construcciones incrementa la resistencia a la tensión además de posibilitar el diseño de construcción de estructuras que sean más complejas y tengan mayores dimensiones. Es por esto que el acero, junto con las diferentes aleaciones que se pueden obtener gracias al hierro, se ha constituido como uno de los elementos metálicos más utilizados a partir del siglo 19 [Vargas et al., 2015]

Para analizar lo definido anteriormente, se mostrará el modelado del sistema para un edificio de dos pisos manejando variables. Si se aplica la Segunda Ley de Newton ($F = ma$) a los pisos del edificio con tal de obtener el sistema de ecuaciones de movimiento que representa el comportamiento del sistema, se obtiene lo siguiente:

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad (5)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones anterior es homogéneo, y para su análisis se puede escribir de la siguiente forma:

$$M\ddot{x} = Kx \quad (7)$$

donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$
 $K = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$, y $\ddot{x} = Ax$ con $A = M^{-1}K$.

Donde A es la matriz asociada al sistema que representa la relación entre las masas y sus rigideces. Como un primer análisis real, se muestra el modelado del sistema para un

edificio de tres pisos. Para este caso, estamos trabajando con un edificio donde la masa es constante en cada piso gracias a su forma rectangular, es decir, $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_n$, sin embargo, en caso de que la estructura fuera diferente, habría que tomar en cuenta diferentes masas. De acuerdo con [Bagai et al., 2016], para un edificio rectangular, la masa de cada piso se puede considerar como de 1000 unidades, y los valores de la fuerza constante como de 10000 unidades, por lo que, el sistema con valores reales para las masas m_i y las constantes k_i (que también se mantienen constantes) es el siguiente:

$$1000x_1'' = -10000x_1 + 10000(x_2 - x_1) \quad (8)$$

$$10000x_2'' = -10000(x_2 - x_1) + 10000(x_3 - x_2) \quad (9)$$

$$10000x_3'' = -10000(x_3 - x_2) \quad (10)$$

La matriz A asociada al sistema representa la relación entre las masas y sus rigideces, y, obteniendo sus valores propios, se puede tener información importante sobre el comportamiento dinámico del sistema. Para este caso, se obtiene que $\lambda_1 = -32.470$, $\lambda_2 = -15.550$ y $\lambda_3 = -1.981$. Al estar modelando un sistema donde no se toma en cuenta el amortiguamiento, los valores propios de la matriz A deben ser negativos, reales y distintos, como es el caso del sistema anterior. Estos valores se relacionan con la estabilidad del sistema de forma que λ_1 tiene la tasa de decaimiento más rápida del sistema y λ_2 y λ_3 al ser valores menos negativos, decaerán más lentamente que λ_1 . Al ser los tres negativos, el sistema es estable, lo que significa que los movimientos fuertes disminuyen con el tiempo (con la tasa antes mencionada) y regresan al estado de equilibrio.

De acuerdo con [Li, 2018], las frecuencias naturales son aquellas vibraciones que se presentan cuando tenemos un sistema sin amortiguamiento (es decir, se toma en cuenta la capacidad de vibración del sistema únicamente), valores que proporcionan información importante a la hora de analizar el comportamiento del sistema. Aunado a esto, aparece el concepto de Periodo, que es el tiempo que necesita para completar un ciclo de oscilación. La forma en la que se relacionan estos conceptos, cuando se tienen los valores de λ_i de la matriz A es:

$$\omega_i = 2\pi f_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (11)$$

donde ω_i es la frecuencia natural circular, f_i la frecuencia natural y T_i el periodo. Considerando que $\omega_i = \sqrt{|\lambda_i|}$, [Seismic Consolidation, 2020] y los valores de los valores propios obtenidos con anterioridad tenemos que:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5.701} = 1.102 \text{ s} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{3.943} = 1.593 \text{ s} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{1.407} = 4.466 \text{ s} \end{aligned}$$

Aunque los valores anteriores no suelen ser suficientes para determinar cómo se comportaría una estructura frente a un sismo, se puede decir que la respuesta de una edificación en un sismo dependerá de la relación existente entre el periodo

de vibración natural y el de las ondas sísmicas. De forma general, si estos dos valores se aproximan, el edificio entra en resonancia, lo que aumenta las posibilidades de deformaciones de los elementos estructurales. [Caicedo, 2014]

B. Modelación inicial del sistema

El análisis previo fue considerando que el sistema no está sujeto a un sismo, sin embargo, y con el afán de simularlo, consideraremos que el edificio se ve afectado por un sismo, durante el cual la tierra se mueve horizontalmente con oscilaciones senoidales de periodo T (seg), considerando $0 < T < 5$ y una amplitud de E . Ahora, nuestro sistema de ecuaciones es no homogéneo y se puede ver de la siguiente forma:

$$\ddot{x} = Ax + F \quad (12)$$

donde f es el vector de fuerzas externas por unidad de masa. Cuando existe una oscilación sísmica horizontal del suelo con amplitud E tiene la forma:

$$a = -Ew^2 \cos(wt) \quad (13)$$

Lo anterior produce la siguiente fuerza de inercia:

$$F_i = ma = mEw^2 \cos(wt) \quad (14)$$

Finalmente, el sistema no homogéneo que resulta es:

$$\ddot{x} = Ax + Ew^2 \cos(wt)b \quad (15)$$

donde b el vector columna cuyos elementos son iguales a la unidad.

Para analizar de manera visual el comportamiento del edificio en su estado normal y cómo se comportaría al ser aplicada una perturbación, se tienen las siguientes gráficas:

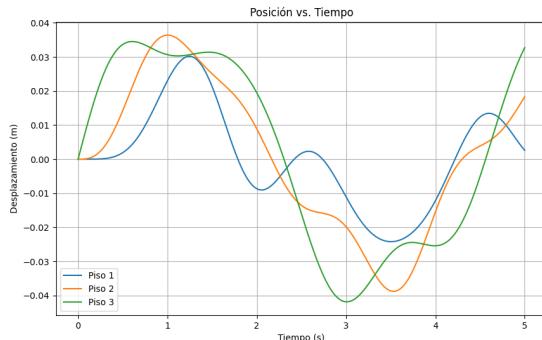


Fig. 1. Comportamiento del edificio sin perturbación

La figura 1 muestra el movimiento natural del edificio, es decir, cuando una fuerza externa aún no ha sido aplicada mientras que la figura 2 muestra la posición de cada piso en función del tiempo para los tres pisos del edificio considerando una perturbación externa. En este caso se simuló un terremoto con amplitud de 1.24 m, y su respectiva frecuencia angular. La amplitud se eligió debido a que como se menciona en [Mundo, 2022], este ha sido de los terremotos más fuertes que se ha

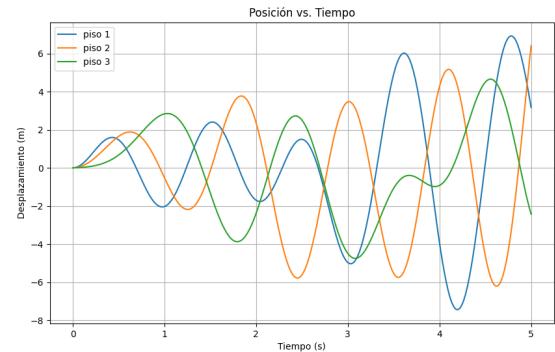


Fig. 2. Comportamiento del edificio con perturbación

vivido en CDMX, y de esta forma se tienen simulaciones más cercanas a la realidad.

La curva azul representa el desplazamiento del piso 1. Comienza desde una posición de reposo y después oscila periódicamente debido a la fuerza externa, es decir debido al movimiento de las placas tectónicas. La curva naranja representa el desplazamiento del piso 2. Similar al piso 1, comienza en reposo y con el avance del tiempo también oscila debido al terremoto. La curva verde representa el desplazamiento del piso 3. Se puede ver que la amplitud de sus oscilaciones es menor que la de los otros dos pisos, esto debido a su frecuencia angular.

Es posible observar que conforme pasa el tiempo, el desplazamiento del edificio es mayor, por lo que si este movimiento es prolongado, el edificio está en riesgo de sufrir daños estructurales, lo que haría llegar a la conclusión incial de que el edificio entra en resonancia y puede ser afectado.

C. Modelación y análisis del sistema con sismo

El edificio del presente análisis fue diseñado bajo lo que se conoce como Diseño Estructural por Desempeño [SALVIA, 2023]. Éste, sigue una metodología de diseño estructural específica para casos de sismos que permite establecer el desempeño del edificio en caso de sismo y tener un grado de certidumbre y eficiencia. Parte de este diseño enfocado en sismos se basa en la utilización de amortiguadores, así como en la evaluación del proyecto utilizando diferentes amortiguadores sísmicos, para saber cuál es o son los tipos de diseño más recomendados [S.A, 2014].

Tomando en cuenta lo anterior, el modelo matemático que representa el comportamiento del sistema completo del edificio, es decir, que representa el efecto que tiene el terremoto en el mismo, es el siguiente:

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1(x'_1 - x'_2) + m_1 E w^2 \cos(wt)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) - c_1(x'_2 - x'_1) - c_2(x'_2 - x'_3) + m_2 E w^2 \cos(wt)$$

$$m_3 x_3'' = -k_3(x_3 - x_2) + k_4(x_4 - x_3) - c_2(x'_3 - x'_2) - c_3(x'_3 - x'_4) + m_3 E w^2 \cos(wt)$$

$$\vdots \\ m_{68}x''_{68} = -k_n(x_{68} - x_{67}) - c_{67}(x'_{68} - x'_{67}) + m_{68}Ew^2\cos(wt)$$

Aunque no fue posible encontrar información directa sobre el valor de amortiguamiento para esta torre en específico, según [Smith and Willford, 2008], en el diseño de altos edificios el amortiguamiento es clave, pues determinará de forma esencial la respuesta dinámica del sistema. Aunque existen diferentes criterios para decidir el valor apropiado y normalmente se toma como base mediciones previas, sobre estimar este valor podría traer consecuencias importantes, como daños, principalmente. Para edificios de más de 250 m (la Torre Mítikah tiene una altura de 263.7 m), es excepcional que el valor amortiguamiento supere el 1% del crítico por lo que será el valor con el que en este caso se estará trabajando.

Para el cálculo de los valores correspondientes a la rigidez, existen diferentes formas de calcularlos de acuerdo a la estructura del edificio. Al no contar con información exacta del tema, se tomarán como referencia valores que han sido puestos en análisis con edificios del mismo tipo. De acuerdo con [Fujita and Takewaki, 2018], de acuerdo con diferentes modelos que se han llevado a cabo, los posibles valores para k_i van de 10^8 a 10^{11} N/m con margen a variación por lo que, después de probar con diferentes valores, para este análisis utilizaremos un k_i de 10^7 N/m. Para la masa (m), se considera que cada piso pesa 633000 kg de acuerdo con cálculos en base a valores reales y aproximados para un edificio como el aquí tratado; una constante de amortiguamiento (c) de 50319 Ns/m debido a que, como se mencionó con anterioridad, se trabaja con el 1% del amortiguamiento crítico ($2\sqrt{km}$, [Espinoza, 2018]), una amplitud E de 0.1 m (100 mm) pues, de acuerdo con [?], es la amplitud máxima con la que trabaja la escala de Richter, además de ser el valor con los mejores resultados obtenidos, y un valor de la frecuencia (w) de π pues $w = 2\pi f$, con $f = 0.5$ Hz con base en [Astroza, 2012], en donde estudian el efecto de ondas de baja frecuencia, las cuales han sido responsables de daños a grandes distancias epicentrales, como es el caso de los terremotos de México 1985 [Beck J.L. y Hall, 1986]. Considerando lo anterior, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$633000x''_1 = -(10^7)x_1 + (10^7)(x_2 - x_1) - 50319(x'_1 - x'_2) + 63300\pi^2\cos(\pi)t$$

$$633000x''_2 = -(10^7)(x_2 - x_1) + (10^7)(x_3 - x_2) - 50319(x'_2 - x'_1) - 50319(x'_2 - x'_3) + 63300\pi^2\cos(\pi)t$$

$$633000x''_3 = -(10^7)(x_3 - x_2) + (10^7)(x_4 - x_3) - 50319(x'_3 - x'_2) - 50319(x'_3 - x'_4) + 63300\pi^2\cos(\pi)t$$

$$\vdots \\ 633000x''_{68} = -(10^7)(x_{68} - x_{67}) - 50319(x'_{68} - x'_{67}) + 63300\pi^2\cos(\pi)t$$

Para calcular los valores propios del sistema, se debe obtener la matriz de bloques D dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & P \end{pmatrix}, \text{ donde } A = M^{-1}K, \text{ y } P = M^{-1}C$$

Dicho esto, y tomando en cuenta los valores reales del sistema, se obtienen los valores propios utilizando Python como herramienta tecnológica, teniendo como resultado 68 pares de valores propios complejos, en donde la parte real está asociada con la tasa de amortiguamiento del sistema. Si esta parte es negativa, el sistema es estable y las oscilaciones se amortiguan con el tiempo. Cuanto más negativa sea la parte real, más rápido se van a amortiguar las oscilaciones. La parte imaginaria, por el otro lado, está relacionada con las frecuencias naturales de oscilación del sistema, mismas que son cruciales para entender cómo vibrará el edificio bajo excitación dinámica. La frecuencia en radianes por segundo ω puede convertirse a Hz (ciclos por segundo dividiendo por 2π). En general, cada valor propio complejo corresponde a un modo de vibración del sistema. En este caso, se encargan de indicar cómo es que se van a mover los pisos del edificio en respuesta a fuerzas dinámicas que sucedan.

Los primeros 5 pares de valores propios obtenidos son:

$$\begin{array}{ll} -2.51240706e-01+25.13008098j, & -2.51240706e-01- \\ 25.13008098j, & \\ -2.50827641e-01+25.11054628j, & -2.50827641e-01- \\ 25.11054628j, & \\ -2.50140304e-01+25.0779997j, & -2.50140304e-01- \\ 25.0779997j, & \\ -2.49180354e-01+25.0324581j, & -2.49180354e-01-25.0324581 \end{array}$$

Se utiliza la matriz D planteada con anterioridad, que permite describir el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del edificio:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Se calcularon los valores y vectores propios con el objetivo de encontrar las frecuencias naturales y los modos de vibración del sistema, resultando en

$$Dv = \lambda v$$

En donde λ son los valores propios (complejos) y v son los vectores propios asociados. Las frecuencias pseudo-naturales se calculan como $\omega/2\pi$ y la respuesta temporal del edificio se obtiene superponiendo las contribuciones de cada modo de vibración. Esto se logra a través de la siguiente expresión:

$$x(t) = \sum_i e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) \cdot \lambda_i$$

Terminando eso, se calcula el desplazamiento máximo del piso superior (x_{max}) y se ajusta usando un factor de escala para representar condiciones reales. La altura total del edificio

(h_{total}) se calcula como la altura por piso multiplicada por el número de pisos:

$$h_{total} = \text{altura por piso} \cdot n = 3.93 \cdot 68$$

Por último, se obtiene el ángulo de inclinación máximo usando la relación trigonométrica correspondiente:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_{max}}{h_{total}}\right)$$

El resultado obtenido del análisis dinámico del edificio de 68 pisos ante sismos muestra un desplazamiento máximo del piso superior de 0.3 metros y un ángulo de inclinación de 0.0643 grados. Comparando estos resultados con los procesos y cálculos que se harán a continuación, se observa una gran similitud y cercanía en los valores, lo que indica que los cálculos y el modelo matemático empleado son correctos y precisos.

Con lo anterior, es posible graficar los resultados obtenidos para ilustrar la solución construida por medio de la solución al sistema antes mencionado:

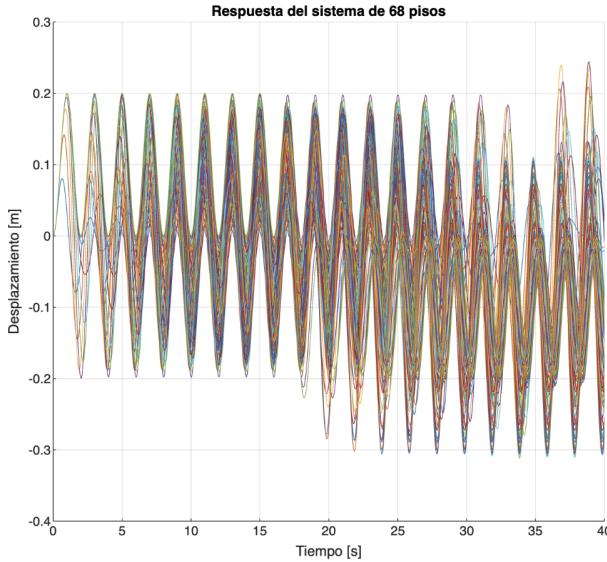


Fig. 3. Desplazamiento de pisos vs tiempo

Como será posible observar, cada línea trazada representa el desplazamiento de cada uno de los pisos a lo largo del tiempo del sismo. Cabe recalcar que aunque en la gráfica no se incluyen las leyendas (pues son 68), conforme el piso avanza, el desplazamiento va creciendo sobre el eje y , es decir que, como sería de esperarse, los pisos de mayor altura son los que presentan más desplazamiento frente a un sismo. Para una mayor apreciación y entendimiento, se graficó el sistema incluyendo exclusivamente los primeros 5 pisos, 5 pisos intermedio, y los 5 pisos finales.

Aquí es más fácil observar cómo todos los pisos iniciales presentan un desplazamiento inicial a lo largo del tiempo, y los últimos pisos son los que, en cambio, presentan un desplazamiento unos segundos después. Esto sucede pues,

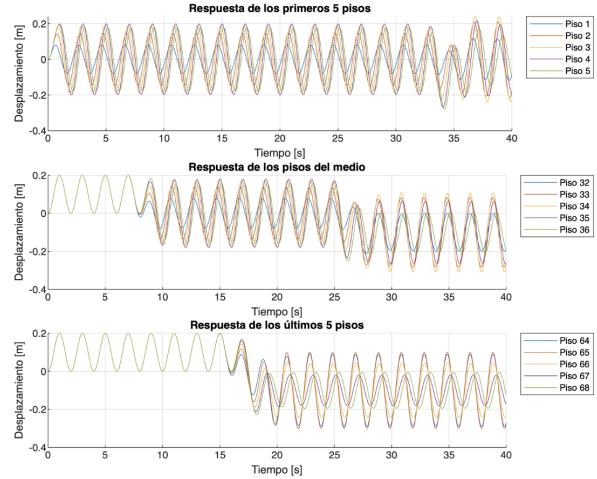


Fig. 4. Desplazamiento de pisos vs tiempo

los pisos de arriba reciben la fuerza después que los pisos de abajo. Además, se puede observar cómo todos los pisos presentan un desplazamiento menor al principio del sismo, el cual va cambiando y aumentando a la par del tiempo, esto pues, cuando esta fuerza acaba de ser aplicada, las estructuras aún no tienen suficiente tiempo para alcanzar su máximo movimiento, además de que con el paso del mismo, la energía que provoca el sismo se va acumulando, lo que provoca un mayor movimiento, y de forma gradual. Además, condiciones secundarias como el tipo de suelo o características muy específicas del edificio pueden provocar que se formen ciertas vibraciones y respuestas.

Finalmente, y con el fin de comparar resultados, se tomará en cuenta el valor obtenido del máximo desplazamiento del edificio durante el sismo. Éste, como se mencionó con anterioridad fue de 0.3 metros y si observamos la Figura 3, y comparando con el valor obtenido mediante el análisis, se puede confirmar que son muy similares. Este valor está sujeto a ciertas condiciones que lo podrían influenciar, sin embargo, se demuestra que lo obtenido es certero.

De acuerdo con [Caicedo, 2014], una forma de determinar el comportamiento de una estructura frente a un sismo es considerando la relación existente entre el periodo de vibraciones naturales y de las ondas. En caso de que dichos valores se aproximen, el edificio entra en resonancia, lo que indica una gran posibilidad de deformación de los elementos estructurales. Tomando esto en cuenta, si la duración del sismo es de 4 segundos y el periodo también, podríamos concluir que el edificio entraría en resonancia, y que, por ende, no estaría a salvo, sin embargo, este es un análisis inicial y sin considerar condiciones extras, que podrían alterar el resultado.

D. Síntesis del sistema de control

Con el fin de analizar el movimiento de una planta, se plantea un modelo que debe proporcionar un comportamiento lo más parecido posible al proceso a controlar. Para describir el

sistema físico mediante una representación matemática se hace en términos de sus variables de estados, pues es una forma útil de analizar sistemas dinámicos complejos, como, en este caso, un edificio sometido a un sismo. Este sistema se conforma del conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden antes descritas con los valores que, de forma aproximada, pertenecen a un escenario real correspondiente a este edificio y que modelan el movimiento del edificio después de haber sido aplicado un fenómeno vibratorio.

A fin de determinar, junto con la entrada, el comportamiento del sistema, se define un espacio de estados. A partir de las variables, que son las que, en función de ellas se expresa la energía almacenada en el sistema, se forma un espacio n-dimensional cuyos ejes de coordenadas corresponden a las n variables del estado. Para definirlo, se modelan las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde $x(t)$ es el vector de estado, $u(t)$ es el vector de entrada, $y(t)$ es el vector de salida y A, B, C y D son las matrices que describen el sistema. A es la matriz ($n*n$) de estados, B es la matriz ($n * 1$) de entrada, C es la matriz ($1 * n$) de salida y D es la matriz que indica un acoplamiento directo entrada-salida que se calculan tomando en cuenta los valores pertenecientes a las ecuaciones que modelan el sistema antes descrito [Ángel Valera Fernández, 2016].

Para continuar con el análisis se considerarán tanto la señal de referencia como la de perturbación. La de referencia, que es la señal deseada que sigue el edificio, cuenta con una amplitud de 0.0000776 m, pues es el valor absoluto del primer valor real correspondiente a los valores propios del sistema, y una frecuencia de 7.9472 Hz, siendo éste el valor absoluto del primer valor de la parte compleja de los mismos valores propios. En cambio, para el caso de la señal de perturbación, que es la representación del sismo y de sus características, se modela con base en una onda sinusoidal. La amplitud es de 0.1 m (100 mm) y la frecuencia de 0.5 Hz, valores que han sido explicados con anterioridad.

Finalmente, y con el fin de encontrar respuestas para nuestro sistema, se espera que el desplazamiento máximo sea menor a 0.53 m, esto considerando la cota H/500, donde H es la altura del edificio (267.3 m), que indica el desplazamiento máximo permisible en edificios altos [?] antes de que se caigan por el sismo. Así mismo, el ángulo máximo de inclinación al que se puede someter el edificio sin derrumbarse se puede calcular como $\theta = \tan^{-1}(\frac{\max_desplazamiento}{H})$, resultando en 0.0019 radianes o 0.11 grados.

Para tener una representación visual clara de la estructura y los componentes que debe tener un sistema de control, se llevan a cabo diagramas de bloques. Éstos, facilitan la comprensión del flujo de señales y sus interacciones en el sistema. De manera específica, para el presente caso, se

utiliza un análisis de lazo cerrado pues responde a diferentes entradas y evalúa la estabilidad y el rendimiento del sistema y, principalmente, depende de la retroalimentación que llega al controlador. Por su parte, el controlador es otro de los elementos clave a la hora de estructurar esta representación. En particular, y de acuerdo con [Almidon-Elescano and Julain-Laime, 2019], éste tiene la función de proporcionar excitación a la planta, así como controlar el comportamiento del sistema. Para este caso, se definen diagramas de bloques con controlador, P, PD, PI, y PID.

Cuando se implementa un controlador proporcional (K_p), se reduce el tiempo de salida pero no se elimina el error en régimen permanente, el controlador integral (K_i) elimina el error del régimen permanente pero empeora la respuesta transitoria y, finalmente, el controlador derivativo (K_d) incrementa la estabilidad del sistema, reduce el sobreimpulso y mejora la respuesta transitoria. Dicho lo anterior, se probaron los diferentes controladores antes mencionados variando los valores de (K_p), (K_i) y (K_d) con el objetivo de encontrar el que mejor simulaba el comportamiento del edificio que enfrenta el sismo, llegando a la conclusión de que el controlador PID es el óptimo para garantizar la estabilidad y seguridad del edificio. Su diagrama es el siguiente:

Diagrama de bloques con controlador PID:

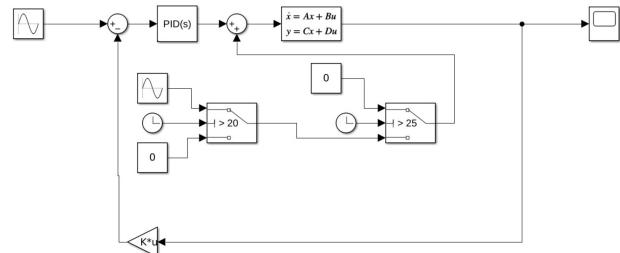


Fig. 5. Diagrama de bloques con PID

Los valores probados para K_p , K_i y K_d del controlador, junto al desplazamiento máximo obtenido, fueron los siguientes:

Prueba	K_p	K_i	K_d	Coeficiente de filtro	Desplazamiento máximo (m)	Tiempo de asentamiento (s)
1	1.5	1	1.3	85	$1.4e^{-3}$	36
2	5	3	2.6	100	$0.45e^{-3}$	38
3	10	3	0.8	100	$0.27e^{-3}$	62

Fig. 6. Valores tabulados con controlador PID

Tras realizar un análisis de los tiempos de asentamiento y desplazamiento máximo del edificio variando los parámetros, se hace una elección de la combinación óptima. Estos resultan en:

- Valor de K_p : 5, K_i : 3, K_d : 2.6, coeficiente de filtro 100
- Desplazamiento máximo: .0045 m
- Tiempo de asentamiento: 38 segundos

Al final, el resultado obtenido es el siguiente:

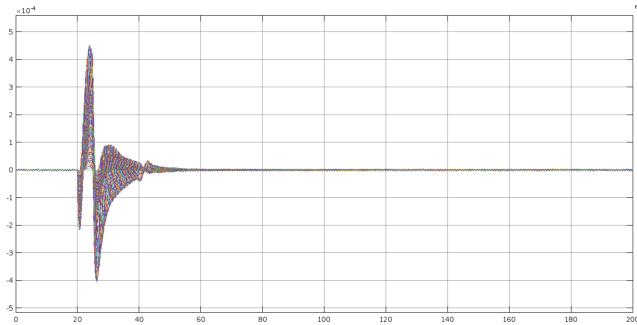


Fig. 7. Resultado con controlador PID

Este controlador muestra un desplazamiento máximo de 0.00045 m, un tiempo de 38 segundos y un overshoot, obtenido directamente de Simulink, de 6.1%. Al tener un sobreimpulso de entre el 5% y 10%, significa que hay una estabilidad en el sistema y por lo tanto, actúa de manera correcta. Finalmente, y considerando en ángulo máximo de inclinación mencionado anteriormente (0.11 grados) según la cota de $H/500$, se puede decir que, al calcular el ángulo de inclinación correspondiente a cada piso, éste no lo sobrepasa, indicando una buena seguridad estructural.

IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La elección del controlador PID es importante pues la Torre Mitikah es uno de los edificios más altos de Ciudad de México, y su diseño estructural debe considerar la alta actividad sísmica de la región. La implementación de un sistema de control efectivo es muy importante para lograr garantizar la integridad estructural y la seguridad de las personas que se encuentran sobre el edificio durante y después de un sismo. Para esto, se consideran varios factores:

- Con un desplazamiento máximo de 0.00045 m, el controlador PID asegura que las oscilaciones del edificio se mantengan en niveles mínimos, reduciendo significativamente el riesgo de daños estructurales. Esto es particularmente importante para un rascacielos como la Torre Mitikah, donde incluso pequeños desplazamientos pueden tener consecuencias graves. También, considerando la norma H/500, garantiza que el edificio no se cae durante el sismo y se asegura seguridad para todas las partes involucradas durante el sismo.
- El tiempo de estabilización de 38 segundos es el más corto entre todos los controladores probados. Esto significa que la Torre Mitikah puede volver a un estado estable rápidamente después de un sismo, lo cual es esencial para la seguridad continua del edificio y para permitir una rápida evaluación de posibles daños.

- Un sobreimpulso del 6.1% indica que las oscilaciones adicionales después del evento sísmico son mínimas. Esto no solo ayuda a mantener la estabilidad del edificio, sino que también reduce el estrés adicional en la estructura, previniendo daños acumulativos.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una vez realizado el análisis del edificio y habiendo hecho pruebas con diferentes controladores para averiguar su impacto en el movimiento del edificio durante el sismo, se encontró que un PID era el que mejor trabajo hacía, pues disminuía notoriamente el desplazamiento máximo y tiempo de amortiguamiento. La investigación realizada sobre el modelado, análisis, simulación e incluso control de fenómenos vibratorios se mostró crucial y fundamental para mejorar la seguridad y la resistencia de la infraestructura que se tiene, pues hay personas dentro del edificio cuya seguridad puede ser afectada si no se analiza correctamente el sistema. Además, es importante considerar que la Torre Mitikah está ubicada en Ciudad de México, que, por ser una zona de alta sismicidad, resalta aún más la importancia del correcto análisis y modelado de la respuesta ante un sismo. Además, los resultados mostraron cómo la implementación de un PID puede mitigar los efectos del sismo, obteniendo desplazamientos y ángulos de inclinación menores a los límites permitidos, validando así la precisión del modelo empleado y dejando en claro la importancia de diseñar infraestructuras sólidas que minimicen las pérdidas humanas y materiales en regiones que son propensas a terremotos.

La investigación que se realizó a lo largo del proyecto y los resultados obtenidos contribuyen directamente a la disminución de los efectos y daños que pueden haber ante un temblor. En primer lugar, la modelación matemática se mostró clave para prever cómo se va a comportar el edificio ante la entrada de un sismo, permitiéndonos identificar y reforzar puntos débiles antes de que ocurra un desastre. De hecho, al variar los valores de amortiguamiento, masa del edificio, constante de rigidez, etc, pudimos ver cómo estos parámetros afectan directamente el desplazamiento máximo y tiempo de asentamiento de la torre Mitikah, variando así su estabilidad en el siniestro. Además, la implementación de controladores redujo exponencialmente las oscilaciones y el desplazamiento del edificio, manteniendo las estructuras dentro de los límites seguros. Finalmente, queda claro que el diseño de una infraestructura resistente guiada por los hallazgos de la investigación puede mejorar la capacidad de soportar movimientos sísmicos, protegiendo a todas las partes que lo rodean.

Al final de cuentas, las soluciones propuestas incluyen el uso de un controlador PID para minimizar el desplazamiento y la inclinación durante un sismo, asegurando así que las oscilaciones se mantengan dentro de niveles seguros. Adicionalmente, se propone la incorporación de algunos dispositivos de amortiguamiento que ayuden a disipar aún más la energía que se libera a partir de las ondas sísmicas, reduciendo las fuerzas que el edificio recibe y por las que actúa. Se

encontró además que el uso de materiales como el concreto reforzado y el acero estructural es fundamental para mejorar la capacidad de los edificios y soportar movimientos sísmicos. El primero, combina la resistencia de la compresión del concreto con la resistencia a la tracción del acero, lo que hace que pueda soportar las cargas dinámicas impuestas por un sismo. El acero, junto con sus aleaciones, es fundamental porque tiene una alta resistencia a la tensión y por su capacidad para diseñar estructuras complejas y de grandes dimensiones. Estas estrategias, unidas a la modelación matemática y simulación, ofrecen una defensa bastante buena para evitar ser víctimas de un daño irreparable durante un sismo.

Finalmente, se puede decir que esta investigación aporta valor al conocimiento para la ingeniería sísmica, ofreciendo soluciones efectivas para la construcción de infraestructuras más seguras y duraderas en zonas propensas a tener actividad sísmica.

REFERENCES

- [Almidon-Elescano and Julain-Laime, 2019] Almidon-Elescano, A. and Julain-Laime, E. (2019). Sistemas de control automático i.
- [Araizaga and Vargas, 2019] Araizaga, J. C. and Vargas, J. C. C. (2019). Mitikah, un gigante que impone su ley en la ciudad de México.
- [Astroza, 2012] Astroza, R. Kovacevic, N. (2012). Efecto de ondas de baja frecuencia en la respuesta sísmica de edificios.
- [Bagai et al., 2016] Bagai, S., Madaan, P., and Khajuria, T. (2016). A mathematical model for the effect of earthquake on high rise buildings of different shapes.
- [Beck J.L. y Hall, 1986] Beck J.L. y Hall, J. (1986). Factors contributing to the catastrophe in Mexico City during the earthquake of September 19, 1985.
- [Caicedo, 2014] Caicedo, M. D. (2014). Períodos de vibración de las edificaciones.
- [Castro and Campos, 2018] Castro, V. H. E. and Campos, X. P. (2018). ¿Qué son los sismos, dónde ocurren y cómo se miden?
- [CEO, 2023] CEO, P. (2023). ¿Cuánto costó construir Mitikah?
- [de la Colina Martínez and de Alba, 1998] de la Colina Martínez, J. and de Alba, H. M. (1998). Características de los sismos y sus efectos en las construcciones.
- [Espinoza, 2018] Espinoza, V. T. (2018). Coeficiente o relación de amortiguamiento en sistemas estructurales.
- [EstadoArgentino, 2016] EstadoArgentino (2016). Terremotos y su impacto en el mundo.
- [Fujita and Takewaki, 2018] Fujita, K. and Takewaki, I. (2018). Stiffness identification of high-rise buildings based on statistical model-updating approach. *Front. Built Environ.*
- [Global, 2022] Global, S. (2022). Cómo rigen las normas en la construcción y su importancia [2021].
- [GobiernoMexicano, 2004] GobiernoMexicano (2004). Norma técnica complementaria sobre criterios y acciones para el diseño estructural de las edificaciones.
- [González, 2022] González, B. (2022). Regiones volcánicas y sísmicas del mundo - nombres, países y más.
- [Konkretes,] Konkretes. Peso específico del concreto.
- [Leija et al., 2023] Leija, L., Montejano, E., and Milo, A. (2023). Qué son los microsismos, por qué ocurren y cuáles son sus implicaciones para la vida cotidiana.
- [Li, 2018] Li, H. (2018). Natural frequencies and mode shapes.
- [López, 2023] López, A. I. (2023). Microsismos: Qué son, cómo se producen y cuál es el riesgo de los temblores con epicentro en Ciudad de México.
- [Milo et al., 2023] Milo, A., Geographic, N., Montejano, E., and Leija, L. (2023). Cuáles son las zonas más sísmicas del mundo.
- [Mundo, 2022] Mundo, B. N. (2022). Un fuerte terremoto de magnitud 7,7 sacude el centro de México en el aniversario de dos grandes sismos.
- [Oviedo and del Pilar Duque, 2006] Oviedo, J. A. and del Pilar Duque, M. (2006). Sistemas de control de respuesta sísmica en edificaciones.
- [Pappas, 2024] Pappas, S. (2024). The longest known earthquake lasted 32 years.
- [Partners, 2021] Partners, P. C. . (2021). An iconic landmark for a world capital.
- [Paúl, 2017] Paúl, F. (2017). Chile — terremoto de Valdivia: Cómo fue el poderoso sismo de 1960, el mayor registrado en la historia.
- [Pennington et al., 2023] Pennington, C. N., Wu, Q., Chen, X., and Abercrombie, R. E. (2023). Quantifying rupture characteristics of microearthquakes in the Parkfield Area using a high-resolution borehole network. *Geophysical Journal International*, 233(3):1772–1785.
- [Pererira, 2021] Pererira, M. (2021). Tipos de losas de hormigón: ventajas y desventajas.
- [Redacción, 2022] Redacción (2022). ¡No metas la pata! estas son las multas en CDMX por construir o remodelar tu casa sin permiso.
- [RedacciónEC, 2020] RedacciónEC (2020). Terremoto en México: así se vivió el potente sismo en el piso 56 de un rascacielos en construcción.
- [S.A, 2014] S.A (2014). Alto desempeño, alta tecnología en ingeniería.
- [SALVIA, 2023] SALVIA, M. (2023). Torre Mítikah.
- [Seismic Consolidation, 2020] Seismic Consolidation (2020). Real eigenvalue analysis.
- [Smith and Willford, 2008] Smith, R. and Willford, M. (2008). Damping in tall buildings – uncertainties and solutions.
- [Sánchez, 1994] Sánchez, F. V. (1994). Los terremotos y sus causas.
- [TORICES, 2022] TORICES, G. (2022). Torre Mítikah: ¿qué es y cómo se construyó el nuevo edificio más alto de la Ciudad de México?
- [Vargas et al., 2015] Vargas, J. C., Ángel Ernesto García Abajo, Guerrero, G. P., and Arriaga, I. M. L. (2015). Hierro y acero en sistemas constructivos. caracterización y alteraciones.
- [Villegas, 2013] Villegas, J. A. V. (2013). ¿Qué es la escala de magnitud Ritcher.
- [Villegas, 2018] Villegas, R. (2018). Sismos y terremotos, cuando se nos mueve el piso.
- [Ángel Valera Fernández, 2016] Ángel Valera Fernández (2016). Modelado y control en el espacio de estados.