

В.М.Галицкий, Б. М.Карнаков, В.И.Коган
ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Учеб.пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1992. 880 с.

Содержит задачи по квантовой механике. Ко всем задачам даны решения. 1-е изд. — 1981 г.

Второе издание книги существенно переработано и дополнено новым материалом.

Для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | | |
|---|-----------|------------|
| Предисловие | | 6 |
| Принятые сокращения | | 8 |
| Наиболее часто используемые обозначения | | 8 |
| Универсальные константы | | 9 |
| | Задачи | Решения |
| Глава 1. Операторы в квантовой механике | 11 | 194 |
| § 1. Основные понятия теории линейных операторов | 13 | 194 |
| § 2. Собственные функции, собственные значения, средние | 15 | 197 |
| § 3. Проекционные операторы | 18 | 206 |
| § 4. Элементы теории представлений. Унитарные преобразования | 19 | 207 |
| Глава 2. Одномерное движение | 21 | 212 |
| § 1. Стационарные состояния дискретного спектра | 23 | 212 |
| § 2. Уравнение Шрёдингера в импульсном представлении. Функция Грина уравнения Шрёдингера. Интегральная форма уравнения Шрёдингера | 27 | 220 |
| § 3. Состояния непрерывного спектра. Прохождение через потенциальные барьеры | 30 | 228 |
| § 4. Системы с несколькими степенями свободы. Частица в периодическом потенциале | 33 | 241 |
| Глава 3. Момент импульса | 35 | 248 |
| § 1. Общие свойства момента | 37 | 248 |
| § 2. Момент $L=1$ | 40 | 253 |
| § 3. Сложение моментов | 41 | 257 |
| § 4. Тензорный формализм в теории момента | 44 | 264 |
| Глава 4. Движение в центральном поле | 46 | 268 |
| § 1. Состояния дискретного спектра в центральных полях | 47 | 268 |
| § 2. Состояния с малой энергией связи. Частица в совместном поле короткодействующего и дальнедействующего потенциалов | 52 | 285 |
| § 3. Системы с аксиальной симметрией | 55 | 293 |
| Глава 5. Спин | 56 | 299 |
| § 1. Спин $s=1/2$ | 58 | 299 |
| § 2. Спин-орбитальные состояния частицы со спином $s=1/2$. Высшие спины | 62 | 309 |

| | | |
|--|------------|------------|
| § 3. Спиновая (поляризационная) матрица плотности. Угловые распределения и корреляции в распадах | 64 | 318 |
| Глава 6. Изменение состояния во времени | 66 | 324 |
| § 1. Представление Шрёдингера. Движение волновых пакетов | 68 | 324 |
| § 2. Изменение во времени физических величин. Интегралы движения | 70 | 332 |
| § 3. Унитарные преобразования, зависящие от времени. Гейзенберговское представление | 72 | 337 |
| § 4. Временные функции Грина | 74 | 349 |
| § 5. Квазистационарные и квазиэнергетические состояния | 75 | 353 |
| Глава 7. Движение в магнитном поле | 77 | 363 |
| § 1. Стационарные состояния частицы в присутствии магнитного поля | 78 | 363 |
| § 2. Изменение состояний во времени | 81 | 376 |
| § 3. Магнитное поле орбитальных токов и спинового магнитного момента | 82 | 380 |
| Глава 8. Теория возмущений. Вариационный метод. Внезапные и адиабатические воздействия | 83 | 383 |
| § 1. Стационарная теория возмущений (дискретный спектр) | 85 | 383 |
| § 2. Вариационный метод | 88 | 397 |
| § 3. Стационарная теория возмущений (непрерывный спектр) | 89 | 405 |
| § 4. Нестационарная теория возмущений. Переходы в непрерывном спектре | 91 | 414 |
| § 5. Внезапные воздействия | 94 | 430 |
| § 6. Адиабатическое приближение | 95 | 434 |
| Глава 9. Квазиклассическое приближение | 97 | 449 |
| § 1. Квантование энергетического спектра | 100 | 449 |
| § 2. Квазиклассические волновые функции, вероятности и средние | 104 | 475 |
| § 3. Прохождение через потенциальные барьеры | 106 | 486 |
| Глава 10. Тожественность частиц. Вторичное квантование | 108 | 501 |
| § 1. Симметрия волновых функций | 110 | 501 |
| § 2. Основы формализма вторичного квантования (представление чисел заполнения) | 111 | 508 |
| § 3. Системы из большого числа $N \gg 1$ частиц | 115 | 521 |
| Глава 11. Атомы и молекулы | 117 | 532 |
| § 1. Стационарные состояния атомов с одним и двумя электронами | 118 | 532 |
| § 2. Многоэлектронные атомы. Статистическая модель атома | 121 | 554 |
| § 3. Основные представления теории молекул | 124 | 569 |
| § 4. Атомы и молекулы во внешних полях. Взаимодействие атомных систем | 126 | 580 |
| § 5. Нестационарные явления в атомных си-системах | 131 | 606 |
| Глава 12. Атомное ядро | 137 | 638 |

| | | |
|--|------------|------------|
| § 1. Основные представления о ядерных силах. Дейтрон | 140 | 638 |
| § 2. Модель оболочек | 143 | 648 |
| § 3. Изотопическая инвариантность | 146 | 660 |
| Глава 13. Столкновения частиц | 148 | 668 |
| § 1. Борновское приближение | 155 | 668 |
| § 2. Фазовая теория рассеяния | 159 | 686 |
| § 3. Низкоэнергетическое рассеяние. Резонансные явления при рассеянии | 160 | 696 |
| § 4. Рассеяние быстрых частиц. Приближение эйконала | 166 | 731 |
| § 5. Рассеяние частиц со спином | 167 | 744 |
| § 6. Аналитические свойства и унитарность амплитуды рассеяния | 170 | 754 |
| § 7. Рассеяние составных частиц. Неупругие столкновения | 172 | 762 |
| Глава 14. Квантовая теория излучения | 176 | 789 |
| § 1. Излучение фотонов | 180 | 789 |
| § 2. Рассеяние фотонов. Излучение фотонов | 182 | 799 |
| Глава 15. Релятивистские волновые уравнения | 183 | 818 |
| § 1. Уравнение Клейна — Гордона | 186 | 818 |
| § 2. Уравнение Дирака | 190 | 845 |
| Дополнение | 869 | |
| Список литературы | 878 | |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга, как и первое издание 1981 г., содержит задачи различной степени трудности в основном по нерелятивистской квантовой механике. Она адресована физикам — студентам и аспирантам, как экспериментаторам, так и теоретикам, изучающим квантовую механику по книгам Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Д. И. Блохинцева, А. С. Давыдова или по другим руководствам соответствующего уровня.

В задачах мы стремились уделить должное внимание как основам математического аппарата, физическим принципам и расчетным методам квантовой механики, так и иллюстрациям ее конкретных приложений — в основном к атомной физике, физике ядра и частиц — в той мере, в какой это можно сделать, не прибегая к специальным методам и представлениям этих областей физики. Ко всем задачам даны решения (при необходимости — достаточно подробные).

Для второго издания книга полностью переработана и дополнена новым материалом. Введено несколько новых разделов: частица в периодическом потенциале, квазистационарные и квазиэнергетические состояния, частица в совместном поле короткодействующего и дальнедействующего потенциалов, аналитические и унитарные свойства амплитуды рассеяния и др. Новые задачи включены и в остальные разделы. Часть из них связана с основополагающими вопросами теории адронных атомов, мезомолекулярных систем и μ -катализа, автоионизационных состояний, суперсимметрии в квантовой механике. Увеличено число более сложных — как в идейном, так и в вычислительном плане — задач, рассчитанных на

студентов, начинающих специализироваться по теоретической физике, с целью выработки у них профессиональных навыков. Для удобства пользования книгой каждой главе предпослано краткое введение, а также составлено небольшое математическое дополнение. Для высвобождения объема под новый материал нам пришлось опустить некоторые задачи из первого издания (в частности, исключен материал § 1 расформированной главы 16). И хотя мы старались сделать это за счет задач методического характера, такое сокращение в ряде случаев было сделано не без сожаления.

Переработка книги выполнена после безвременной кончины В. М. Галицкого. Однако идеи значительного числа новых задач, включенных во второе издание, обсуждались совместно всеми авторами еще в процессе работы над рукописью первого издания книги.

Мы хотели бы выразить искреннюю благодарность С. Т. Беляеву и В. Г. Соловьеву за доброжелательные замечания по рукописи книги, а также В. Д. Муру и В. С. Попову за полезные дискуссии по разнообразным вопросам квантовой теории. Мы признательны многочисленным друзьям-коллегам по кафедре теоретической физики МИФИ.

*Б. М. Карнаков
В. И. Коган*

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

у. Ш. — уравнение Шрёдингера

в. ф. — волновая функция

с. ф. — собственная функция

с. з. — собственное значение

д. с. — дискретный спектр

с. ц. и. — система центра инерции

$\hat{}$ — символ оператора (матрицы), однако над операторами умножения он, как правило, не ставится

\propto — знак пропорциональности

\sim — знак порядка величины

$\langle m | \hat{f} | n \rangle \equiv f_{mn} \equiv f_n^m \equiv \int \Psi_m^* \hat{f} \Psi_n d\tau$ — матричный элемент оператора \hat{f}

\bar{f} , $\langle f \rangle$ — среднее значение величины f

$[\hat{f}, \hat{g}]$ — коммутатор операторов \hat{f} и \hat{g}

По двум одинаковым («немым») векторным или спинорным индексам подразумевается выполнение суммирования.

НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Смысл используемых обозначений поясняется либо в условии либо в решении каждой задачи. Однако имеется ряд величин встречающихся во многих задачах, для которых мы старались придерживаться стандартных обозначений. Обозначения таких величин во всех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, в тексте не поясняются.

$\Psi_f(q)$ — при такой записи волновой функции q обозначает совокупность переменных используемого представления, а f — собственные значения соответствующих физических величин или квантовые числа рассматриваемого состояния

$\Psi_n^{\text{осц}}$ — с. ф. линейного осциллятора, см. (II.2)

- e — заряд частицы¹⁾
 c — скорость света
 \hat{H} — гамильтониан
 E, ε — энергия
 \mathcal{E}, \mathcal{H} — напряженности электрического и магнитного полей
 A — векторный потенциал
 U — потенциальная энергия
 \hat{V} — оператор возмущения
 d, d — дипольный момент
 φ, A_0 — скалярный потенциал
 a_0, a_B — боровский радиус
 δ_l — фазовый сдвиг
 $\hat{\sigma}$ — матрицы Паули
 w, W — вероятность перехода, вероятность перехода в единицу времени
 Z, Ze — заряд ядра
 R — радиус потенциала
 m, M — масса, магнитное квантовое число
 μ — масса, магнитный момент
 p, P — импульс
 k — волновой вектор
 A — массовое число ядра
 ω — частота
 l, L, j, J — момент (орбитальный и полный)
 s, S — спин
 $J_\nu(z)$ — функция Бесселя
 $H_n(x)$ — полином Эрмита
 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — шаровая функция
 $\Gamma(z)$ — гамма-функция
 $\delta(x), \delta(r)$ — δ -функция Дирака
 δ_{ik} — единичный тензор, символ Кронекера
 ε_{ikl} — антисимметричный единичный псевдотензор

Формулы теоретических введений в начале каждой главы нумеруются римскими цифрами.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

Решение ряда задач предполагает проведение числовых расчетов. Для удобства вычислений ниже приведены значения некоторых физических величин.

Постоянная Планка $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-27}$ эрг · с

Элементарный заряд $e = 4,80 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ

¹⁾ Но если речь идет о конкретной реальной частице (электроне, протоне, атомном ядре и т. д.), то e обозначает элементарный заряд $e \approx 4,80 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ (так что заряд электрона равен $-e$, протона $+e$, ядра Ze и т. д.).

Масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-28}$ г

Скорость света $c = 3,00 \cdot 10^{10}$ см/с

Боровский радиус (ат. ед. длины) $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см

Атомная единица энергии $m_e e^4 / \hbar^2 = 4,36 \cdot 10^{-11}$ эрг =
= 27,21 эВ

Атомная единица частоты $m_e e^4 / \hbar^3 = 4,13 \cdot 10^{16}$ с⁻¹

Атомная единица напряженности электрического поля $e/a_0^2 =$
= $5,14 \cdot 10^9$ В/см

Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2 / \hbar c = 1/137$

Масса протона $m_p = 1836 m_e = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г

Разность масс нейтрона и протона $m_n - m_p \approx 2,5 m_e$

Энергия покоя электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ ,
1 эВ = $1,60 \cdot 10^{-12}$ эрг

Математический аппарат квантовой механики тесно связан с теорией линейных операторов. Одно из ее положений состоит в сопоставлении физическим величинам (*наблюдаемым*) эрмитовых, или самосопряженных, операторов, действующих в пространстве волновых функций (*векторов состояний*) Ψ , описывающих состояния физической системы.

В общем случае произвольному линейному оператору \hat{L} , задающему соответствие между функциями, $\Phi(q) = \hat{L}\Psi(q)$, можно сопоставить оператор \hat{L}^+ эрмитово сопряженный \hat{L} , определяемый соотношением

$$\begin{aligned} \langle \Psi_2 | \hat{L} | \Psi_1 \rangle &\equiv \int \Psi_2^*(q) \hat{L} \Psi_1(q) d\tau_q = \\ &= \int (\hat{L}^+ \Psi_2(q))^* \Psi_1(q) d\tau_q \equiv \langle \hat{L}^+ \Psi_2 | \Psi_1 \rangle \quad (I. 1) \end{aligned}$$

(при некоторых ограничениях на функции $\Psi_{1,2}$). Если $\hat{L}^+ = \hat{L}$, то оператор называют *эрмитовым* (*самосопряженным*)¹⁾.

В вопросах сопоставления свойств физической величины f и соответствующего ей самосопряженного квантовомеханического оператора \hat{f} важную роль играют понятия, связанные с уравнением на собственные функции и собственные значения этого

¹⁾ Строго говоря, понятия эрмитовости и самосопряженности не совпадают, см. по этому поводу 1.29.

оператора:

$$\hat{f}\Psi_{f_n} = f_n\Psi_{f_n}. \quad (I. 2)$$

Спектр собственных значений f_n , являющихся вещественными, определяет те значения величины f , которые она только и может принимать. При этом собственные функции Ψ_{f_n} описывают состояния системы с определенным, равным f_n значением физической величины f (в случае произвольного состояния она не имеет определенного значения). Эти функции, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны и образуют полную систему. Последнее свойство обеспечивает возможность разложения волновой функции $\Psi(q)$ произвольного состояния в ряд по собственным функциям:

$$\Psi = \sum_n c(f_n) \Psi_{f_n}, \quad (I. 3)$$

где

$$c(f_n) = \langle \Psi_{f_n} | \Psi \rangle \equiv \int \Psi_{f_n}^*(q) \Psi(q) d\tau_q. \quad (I. 4)$$

Здесь²⁾ (как и часто специально не оговариваясь в дальнейшем), предполагается, что с. ф. Ψ_{f_n} выбраны ортонормированными, причем они нормированы на единицу для дискретных с. з. и на δ -функцию — $\delta(f - f')$ — в непрерывной части спектра. Если волновая функция рассматриваемого состояния также выбрана нормированной на 1³⁾, т. е. $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$, то коэффициенты $c(f_n)$ непосредственно определяют вероятности $w(f_n) = |c(f_n)|^2$ значений f_n величины f в этом состоянии (плотность вероятности — в непрерывной части спектра с. з.). При этом среднее зна-

²⁾ Ради краткости разложение по с. ф. записано в виде суммы. В общем случае его следовало бы писать в виде двух «слагаемых»: суммы по с. ф., отвечающим дискретным с. з., и интеграла по с. з. непрерывного спектра. Аналогично говорится о полной системе с. ф. Ψ_{f_n} , хотя более точно следовало бы говорить о собственных функциях совокупности операторов, образующих полный набор.

³⁾ В. ф. Ψ любого физически реализуемого состояния должна быть квадратично интегрируемой. Ненормируемые на 1 собственные функции непрерывной части спектра с. з. сами по себе не описывают реальных физических состояний (они описываются *волновыми пакетами*, составленными из таких с. ф.).

чение $\bar{f} = \sum_n f_n \omega(f_n)$ физической величины может быть рассчитано по квантовомеханической формуле

$$\bar{f} = \langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle \equiv \int \Psi^*(q) \hat{f} \Psi(q) d\tau_q, \quad (I. 5)$$

не требующей предварительного вычисления вероятностей.

Если эрмитов оператор $\hat{f}(\lambda)$ зависит от некоторого вещественного параметра λ , то для производной от с. з. $f_n(\lambda)$ в дискретной части спектра справедливо соотношение

$$\partial f_n(\lambda) / \partial \lambda = \langle \Psi_{f_n}(\lambda) | \partial \hat{f} / \partial \lambda | \Psi_{f_n}(\lambda) \rangle, \quad (I. 6)$$

имеющее многочисленные приложения.

§ 1. Основные понятия теории линейных операторов

1.1. Рассмотреть следующие операторы ($-\infty < x < +\infty$):

- 1) отражения \hat{I} : $\hat{I}\Psi(x) \equiv \Psi(-x)$;
- 2) сдвига \hat{T}_a : $\hat{T}_a\Psi(x) \equiv \Psi(x+a)$;
- 3) изменения масштаба \hat{M}_c : $\hat{M}_c\Psi(x) \equiv \sqrt{c} \Psi(cx)$, $c > 0$;
- 4) комплексного сопряжения \hat{K} : $\hat{K}\Psi(x) \equiv \Psi^*(x)$;
- 5) перестановки координат двух частиц \hat{P}_{12} :
 $\hat{P}_{12}\Psi(x_1, x_2) \equiv \Psi(x_2, x_1)$.

Являются ли эти операторы линейными? Найти вид операторов, которые по отношению к ним являются: а) эрмитово сопряженными, б) обратными.

1.2. Операторы \hat{A} и \hat{B} эрмитовы, \hat{L} — произвольный линейный оператор⁴⁾. Показать эрмитовость следующих операторов:

- 1) $\hat{L} + \hat{L}$ и $\hat{L}\hat{L}^+$; 2) $\hat{L} + \hat{L}^+$; 3) $i(\hat{L} - \hat{L}^+)$;
- 4) $\hat{L}\hat{A}\hat{L}^+$; 5) $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$; 6) $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$.

⁴⁾ В дальнейшем все рассматриваемые операторы предполагаются линейными и термин «линейный» для краткости опускается.

1.3. Показать, что произвольный оператор \hat{L} можно представить в виде $\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}$, где \hat{A} и \hat{B} — эрмитовы операторы.

1.4. Выразить коммутаторы $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ и $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$ через $[\hat{A}, \hat{B}]$, $[\hat{A}, \hat{C}]$, $[\hat{B}, \hat{C}]$.

1.5. Могут ли две матрицы \hat{P} и \hat{Q} конечного ранга удовлетворять каноническому коммутационному соотношению $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i\hbar \hat{I}$?

1.6. Предполагая λ малой величиной, найти разложение оператора $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$ по степеням λ .

1.7. Оператор вида $\hat{F} = F(\hat{f})$, где $F(z)$ — функция z , разложимая в ряд $F(z) = \sum_n c_n z^n$, следует понимать как оператор, равный $\hat{F} = \sum_n c_n \hat{f}^n$. Используя это определение, найти явный вид следующих операторов:

$$1) \exp(i a \hat{I});$$

$$2) \hat{T}_a \equiv \exp(ad/dx);$$

$$3) \hat{L}_a \equiv \exp(ax d/dx),$$

где a — вещественный параметр, \hat{I} — оператор отражения. В связи с данной задачей см. 1.24, а также 1.8 и 1.57.

1.8. Каков явный вид оператора $\hat{T}(g(x)) \equiv \exp(g(x)d/dx)$, где $g(x)$ — некоторая функция x ? Рассмотреть частные случаи: а) $g = ax$; б) $g = a^3/3x^2$.

1.9. Показать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \text{Sp}(\exp(\lambda \hat{A} + \hat{B})) = \text{Sp}(\hat{A} \exp(\lambda \hat{A} + \hat{B})),$$

где \hat{A} , \hat{B} — произвольные матрицы (одного и того же ранга). Существенно ли взятие следа матриц в этом соотношении?

1.10. Показать, что в случае, когда коммутатор операторов \hat{A} и \hat{B} является числом: $[\hat{A}, \hat{B}] = ic$, справедливо соотношение

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = (\exp \hat{A})(\exp \hat{B}) \exp(-ic/2).$$

1.11. В общем случае линейный оператор \hat{L} можно рассматривать как линейный интегральный оператор,

т. е.

$$\Phi(\xi) = \hat{L}\Psi(\xi) \equiv \int L(\xi, \xi') \Psi(\xi') d\xi',$$

где $L(\xi, \xi')$ — ядро оператора \hat{L} (ξ — совокупность переменных используемого представления). Как ядро $L^+(\xi, \xi')$ оператора \hat{L}^+ связано с ядром оператора \hat{L} ? Найти ядра операторов \hat{I} , \hat{T}_a , \hat{M}_c , $\hat{x} \equiv x$, $\hat{p} \equiv -i\hbar d/dx$ (по поводу \hat{I} , \hat{T}_a , \hat{M}_c см. 1.1).

1.12. Какой вид имеет ядро $L(x, x')$ оператора \hat{L} , если этот оператор коммутирует с оператором: а) координаты $\hat{x} \equiv x$, б) импульса $\hat{p} \equiv -i\hbar d/dx$?

Показать, что оператор \hat{L} , коммутирующий как с \hat{x} , так и с \hat{p} , кратен единичному, т. е. $\hat{L} \equiv L_0 \equiv \text{const}$.

§ 2. Собственные функции, собственные значения, средние

1.13. В состоянии частицы с волновой функцией

$$\Psi(x) = C \exp[ip_0 x/\hbar - (x - x_0)^2/2a^2],$$

где p_0 , x_0 , a — вещественные параметры, найти распределение вероятностей различных значений координаты. Определить средние значения и флуктуации координаты и импульса частицы.

1.14. Найти связь между средними значениями координаты и импульса частицы в двух состояниях, волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 которых связаны соотношением

$$\text{а) } \Psi_2(x) = \Psi_1(x + a); \quad \text{б) } \Psi_2(x) = \exp(ip_0 x/\hbar) \Psi_1(x).$$

1.15. Показать, что средние значения эрмитовых операторов $\hat{L}^+ \hat{L}$ и $\hat{L} \hat{L}^+$ в произвольном состоянии неотрицательны.

1.16. Показать, что среднее значение дипольного момента системы заряженных частиц в состоянии, характеризующемся определенной четностью, равно нулю.

1.17. Эрмитов оператор \hat{f} удовлетворяет соотношению

$$\text{а) } \hat{f}^2 = c^2; \quad \text{б) } \hat{f}^2 = c\hat{f}; \quad \text{в) } \hat{f}^3 = c^2\hat{f},$$

где c — вещественный параметр. Каковы собственные значения такого оператора?

1.18. Найти собственные функции и собственные значения физической величины, представляющей линейную комбинацию одноименных компонент импульса и координаты частицы: $\hat{f} = \alpha \hat{p} + \beta \hat{x}$. Убедиться в ортогональности полученных функций и нормировать их соответствующим образом.

1.19. То же, что и в предыдущей задаче, для эрмитова оператора \hat{F} , ядро которого имеет вид ⁵ $F(x, x') = f(x)f^*(x')$ (см. 1.11). Каковы кратности вырождения собственных значений?

1.20. Решить задачу на собственные функции и собственные значения оператора комплексного сопряжения \hat{K} (см. 1.1).

1.21. Эрмитов оператор (матрица) \hat{f} имеет N различных собственных значений. Показать, что оператор \hat{f}^N линейно выражается через операторы $\hat{1}, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{N-1}$. В качестве иллюстрации рассмотреть оператор отражения \hat{I} .

1.22. Найти вид оператора $\check{F} = F(\hat{f})$, где \hat{f} — эрмитов оператор, $F(z)$ — произвольная функция, в случае когда оператор \hat{f} имеет N различных собственных значений. Рассмотреть, в частности, случаи $N=2$ и $N=3$, причем в последнем считать спектр собственных значений состоящим из величин $0, \pm f_0$.

1.23. Доказать соотношение (1.6).

1.24. Какой смысл можно придать оператору вида $\hat{F} = F(\hat{f})$, где $F(z)$ — произвольная функция переменной z , \hat{f} — эрмитов оператор? Насколько существенно предположение об эрмитовости \hat{f} ? В качестве иллюстрации рассмотреть оператор $1/\sqrt{-\Delta}$, где Δ — лапласиан.

1.25. Эрмитовы операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{L}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям: $[\hat{A}, \hat{L}] = 0, [\hat{B}, \hat{L}] = 0, [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Показать, что среди собственных значений оператора \hat{L} обязательно есть *вырожденные*. Привести примеры.

⁵) Операторы такого вида используются в модельных задачах атомной и ядерной физики для описания взаимодействия частиц — так называемые *сепарабельные* потенциалы (см. задачи 2.19, 2.34, 4.12). Заметим, что, не конкретизируя представления, рассматриваемый оператор можно записать в виде $\hat{F} = |f\rangle\langle f|$.

1.26. Привести примеры такой ситуации, когда в некотором состоянии: а) две физические величины, операторы которых не коммутируют, имеют одновременно определенные значения; б) из двух физических величин, операторы которых коммутируют, определенное значение имеет лишь одна.

1.27. В состоянии, описываемом волновой функцией Ψ_{ab} , физические величины A и B имеют определенные значения. Что можно сказать о собственных значениях a , b этих величин, если операторы \hat{A} и \hat{B} антикоммутируют друг с другом? В качестве иллюстрации результата рассмотреть операторы \hat{x} и \hat{I} .

1.28. Найти оператор радиальной компоненты импульса \hat{p}_r (в сферических координатах). Убедиться в эрмитовости полученного оператора. Найти собственные функции и собственные значения. Вещественны ли с. з.? Ортогональны ли с. ф.? Объяснить полученные результаты. В связи с данной задачей см. также 1.29.

1.29. На примере оператора $-i\hbar d/dx$, действующего в пространстве функций, заданных на

а) всей оси $-\infty < x < \infty$;

б) конечном отрезке $a \leq x \leq b$;

в) полуоси $0 \leq x < \infty$,

обсудить вопрос о различии понятий эрмитова и самосопряженного операторов и о свойствах собственных значений и собственных функций таких операторов.

1.30. Коммутатор операторов \hat{A} и \hat{B} двух физических величин имеет вид $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, где \hat{C} — эрмитов оператор. Доказать (при некоторых ограничениях на волновые функции) справедливость соотношения неопределенности

$$(\overline{\hat{A} - \bar{A}})^2 \cdot (\overline{\hat{B} - \bar{B}})^2 \geq (\bar{C})^2/4,$$

где все средние значения относятся к одному и тому же состоянию системы.

Рассмотреть, в частности, операторы \hat{x} и \hat{p} и найти для них явный вид волновых функций состояний, в которых произведение неопределенностей принимает минимальное значение.

Обсудить также случай операторов \hat{l}_z и $\hat{\phi}$.

§ 3. Проекционные операторы

1.31. Проекционным называют эрмитов оператор \hat{P} , удовлетворяющий соотношению ⁶⁾ $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Показать, что оператор $\hat{P}(f_i)$, действие которого на собственные функции оператора физической величины \hat{f} состоит в следующем ⁷⁾:

$$\hat{P}(f_i) \Psi_{f_k} = \delta_{f_i, f_k} \Psi_{f_i} = \begin{cases} \Psi_{f_i}, & f_i = f_k, \\ 0, & f_i \neq f_k, \end{cases}$$

является проекционным (так как система с. ф. Ψ_{f_k} является полной, то приведенные соотношения определяют и результат воздействия $\hat{P}(f_i)$ на произвольную функцию Ψ).

На какие состояния проектирует этот оператор? Какой физический смысл имеет среднее значение $\hat{P}(f_i)$ в произвольном состоянии, описываемом волновой функцией Ψ ?

Как выражается через $P(f_i)$ проекционный оператор $\hat{P}(\{f\})$, проектирующий на состояния, в которых физическая величина f принимает какое-либо значение из некоторой совокупности с. з. $\{f\} = \{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_N}\}$? Убедиться, что при этом $\hat{P}^2(\{f\}) = \hat{P}(\{f\})$.

Какой вид имеет проекционный оператор $\hat{P}(f_i, g_k, \dots, t_l)$, проектирующий на состояния с опре-

⁶⁾ У такого оператора с.з. равны 0 и 1. С его помощью все пространство векторов $|\Psi\rangle$ может быть «разбито» на два взаимно ортогональных подпространства: $\hat{P} \Psi$ и $(1 - \hat{P}) \Psi$. При этом под действием \hat{P} составляющая (проекция) любого вектора в первом из них не изменяется, а во втором обращается в нуль, что и определяет название его как проекционного. При этом оператор $\hat{P}' = 1 - \hat{P}$ также является проекционным и проектирует на второе из указанных подпространств.

⁷⁾ Приведенное выше соотношение относится к дискретной части спектра с.з. Обобщение на непрерывную часть спектра состоит в проектировании на некоторый конечный интервал $(f, f + \Delta f)$ с.з. согласно соотношению

$$\hat{P}(f, \Delta f) \Psi_{f'} = \begin{cases} \Psi_{f'}, & f < f' < f + \Delta f, \\ 0, & f' < f, f' > f + \Delta f. \end{cases}$$

При этом $\hat{P}(f, \Delta f)$ определяет вероятность того, что значение f заключено в рассматриваемом интервале, см. 1.32.

деленными значениями f_i, g_k, \dots, t_l физических величин, входящих в полный набор (т. е. как он связан с операторами $\hat{P}(f_i), \hat{P}(g_k), \dots$)?

1.32. Указать вид оператора, проектирующего на состояния, в которых значения координаты частицы удовлетворяют условию $x_0 \geq a$.

1.33. Найти проекционные операторы \hat{P}_{\pm} , проектирующие на четные \hat{P}_{+} и нечетные \hat{P}_{-} относительно инверсии координат состояния частицы (выразить их через оператор отражения \hat{I}).

1.34. Показать, что эрмитов оператор \hat{F} , рассмотренный в задаче 1.19, может быть превращен в проекционный оператор $\hat{P} = c\hat{F}$ умножением на некоторую постоянную величину c . На какое состояние проектирует этот оператор?

1.35. Эрмитов оператор \hat{f} имеет лишь N различных собственных значений. Найти вид проекционного оператора $\hat{P}(f_i)$ для состояний с заданным значением f_i величины f .

§ 4. Элементы теории представлений.

Унитарные преобразования

1.36. Указать нормированные соответствующим образом собственные функции радиуса-вектора $\Psi_{\mathbf{r}_0}$ и импульса $\Psi_{\mathbf{p}_0}$ в \mathbf{r} - и в \mathbf{p} -представлениях.

1.37. Найти в импульсном представлении волновую функцию состояния частицы, рассмотренного в задаче 1.13.

1.38. По заданной волновой функции $\Psi(x, y, z)$ вычислить вероятность нахождения частицы в интервалах значений z от z_1 до z_2 и p_y — от p_1 до p_2 .

1.39. Найти явный вид в импульсном представлении операторов, рассмотренных в задаче 1.1.

1.40. Найти в одномерном случае вид оператора $\widehat{1/p}$ в x -представлении и оператора $\widehat{1/x}$ в p -представлении.

1.41. Установить соотношение между ядрами $L(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $L(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ одного и того же оператора \hat{L} в \mathbf{r} - и \mathbf{p} -представлениях (см. задачу 1.11).

1.42. Найти вид операторов $\widehat{1/r}$ и $\widehat{1/r^2}$ в импульсном представлении.

1.43. Даны два эрмитовых оператора \hat{A} и \hat{B} . Указать связь между собственными функциями оператора \hat{A} в B -представлении и собственными функциями оператора \hat{B} в A -представлении. Привести примеры, иллюстрирующие полученный результат.

1.44. Какие из операторов, рассмотренных в 1.1, являются унитарными?

1.45. Унитарный оператор удовлетворяет уравнению $\hat{U}^2 = \hat{U}$. Каков его явный вид?

1.46. Оператор \hat{U} унитарный. В каком случае оператор $\hat{U}' = c\hat{U}$, где c — некоторое число, также является унитарным?

1.47. Показать, что произведение $\hat{U}_1\hat{U}_2$ двух унитарных операторов также является унитарным оператором.

1.48. Может ли унитарный оператор (матрица) являться одновременно и эрмитовым? Привести примеры.

1.49. Показать, что эрмитова и антиэрмитова части произвольного унитарного оператора коммутируют друг с другом, так что унитарный оператор может быть диагонализирован. Каким свойством обладают его собственные значения (сравнить с 1.50)?

1.50. Показать, что оператор вида $\hat{U} = \exp(i\hat{F})$ является унитарным, если \hat{F} — эрмитов оператор. Записать в таком виде унитарные операторы \hat{I} , \hat{T}_a , \hat{M}_c из 1.1.

1.51. Квадратные матрицы \hat{A} и \hat{A}' одного ранга связаны унитарным преобразованием $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^+$. Показать, что шпуры и детерминанты этих матриц одинаковы.

1.52. Доказать соотношение

$$\det \|\exp \hat{A}\| = \exp(\text{Sp } \hat{A}),$$

где \hat{A} — эрмитова матрица.

1.53. Чем примечателен детерминант унитарной матрицы? Найти его для матрицы вида $\hat{U} = \exp(i\hat{F})$, где \hat{F} — эрмитова матрица. Показать, что преобразованием вида $\hat{U}' = c\hat{U}$ унитарную матрицу можно сделать *унимодулярной*, т. е. такой, что $\det \hat{U}' = 1$.

1.54. Сколько имеется независимых квадратных матриц ранга N , которые являются: а) эрмитовыми;

б) унитарными? Каково число унимодулярных унитарных матриц ранга N ?

1.55. Показать, что при унитарных преобразованиях операторов $\hat{A}' = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^+$ алгебраические соотношения между операторами вида

$$F(\hat{A}_i) \equiv c_0 + \sum_i c_i \hat{A}_i + \sum_{i,k} c_{ik} \hat{A}_i \hat{A}_k + \dots = 0$$

сохраняют свой вид, т. е. $F(\hat{A}'_i) = 0$.

1.56. Найти закон преобразования операторов \hat{x} и \hat{p} при унитарных преобразованиях, осуществляемых операторами: а) отражения \hat{I} ; б) сдвига \hat{T}_a ; в) изменения масштаба \hat{M}_c . Операторы \hat{I} , \hat{T}_a , \hat{M}_c введены в 1.1.

1.57. Совокупность операторов $\hat{U}(a)$, зависящих от непрерывного вещественного параметра a , обладает свойствами $\hat{U}(0) = \hat{I}$ и $\hat{U}(a_3) = \hat{U}(a_1) \hat{U}(a_2)$, если $a_3 = a_1 + a_2$. Показать, что \hat{U} имеет вид $\hat{U}(a) = \exp(ia\hat{F})$, где \hat{F} (так называемый *инфинитезимальный* оператор) определяет вид $\hat{U}(\delta a)$ при бесконечно малом δa согласно формуле $\hat{U}(\delta a) \approx 1 + i\hat{F} \delta a$. В качестве иллюстрации рассмотреть связь операторов \hat{T}_a и \hat{M}_c (см. 1.1) с операторами соответствующих бесконечно малых преобразований.

Г л а в а 2

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Стационарное уравнение Шрёдингера

$$\hat{H}\Psi_E \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \Psi_E(x) = E\Psi_E(x) \quad (\text{II. 1})$$

с соответствующими граничными условиями (ограниченность волновой функции, обращение ее в нуль на непроницаемых потенциальных стенках и др.) определяет энергетический спектр частицы в потенциале $U(x)$ и волновые функции стационарных состояний.

Спектр E_n в области энергий $\min U(x) < E_n < U(\pm\infty)$ (в которой согласно классической механике частица может совершать только финитное дви-

жение), является дискретным¹⁾. Эти уровни E_n являются невырожденными, а соответствующие собственные функции $\Psi_n(x)$ — квадратично интегрируемыми (т. е. они описывают локализованные состояния частицы в согласии с финитным характером движения в классической теории).

Для линейного осциллятора $U(x) = kx^2/2$, $\omega = \sqrt{k/m}$ решение уравнения Шрёдингера дает спектр $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ и с. ф.

$$\Psi_n^{\text{осц}}(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) H_n\left(\frac{x}{a}\right), \quad (\text{II. 2})$$

где $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$, $H_n(z)$ — полиномы Эрмита; так $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$ и т. д. Приведем также для осциллятора матричные элементы координаты

$$x_{n, n+1} = x_{n+1, n} = \sqrt{(n+1)/2} a, \quad (\text{II. 3})$$

остальные равны нулю; матричные элементы оператора импульса связаны с ними соотношением $p_{nk} = i m \omega x_{nk}$, причем $\omega_{nk} = \pm \omega$ для $n = k \pm 1$.

В области $E > \min U(\pm\infty)$ спектр является непрерывным. Значения энергии $E > \max U(\pm\infty)$ (для которых в классической механике возможно инфинитное движение в обоих направлениях: как при $x \rightarrow -\infty$, так и $x \rightarrow +\infty$) являются двукратно вырожденными. При этом в качестве независимых решений у. Ш. (II. 1) обычно рассматриваются такие, которые связаны с физической задачей об отражении частиц потенциалом и однозначно определяются видом асимптотики в. ф. при $x \rightarrow \pm\infty$; так, в случае частиц, падающих на силовой центр слева²⁾

$$\Psi_{k_1}^{(+)}(x) \approx \begin{cases} e^{ik_1 x} + A(E) e^{-ik_1 x}, & x \rightarrow -\infty, \\ B(E) e^{ik_2 x}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (\text{II. 4})$$

где $k_{1,2} = \sqrt{2m(E - U(\mp\infty))/\hbar^2}$. Амплитуды $A(E)$,

¹⁾ Мы используем такую нумерацию уровней д. с. E_n и с. ф. Ψ_n , при которой основному состоянию отвечает значение $n = 0$. При этом n совпадает с числом нулей с. ф. $\Psi_n(x)$, не считая нулей при $x \rightarrow \pm\infty$ (или на непроницаемых потенциальных стенках). Аналогичный смысл имеет радиальное квантовое число n_r состояний д. с. частицы в центральном потенциале.

²⁾ Физически реализуемая ситуация описывается волновыми пакетами из таких с. ф.; см. в связи с этим задачи 6.7, 6.8.

$B(E)$ определяют коэффициенты прохождения $D(E) = (k_2/k_1)|B|^2$ и отражения $R(E) = |A|^2$ частиц. Эти коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D(E) + R(E) &= 1; & D_+(E) &= D_-(E); \\ D(E) &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad E \rightarrow \infty; \\ D(E) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad E \rightarrow \max U (\mp \infty). \end{aligned} \quad (\text{II. 5})$$

Второе из них, $D_+(E) = D_-(E)$, выражает независимость значения коэффициента прохождения при заданной энергии E от направления падения частиц, слева или справа, на силовой центр; о последнем из свойств см. задачи 2.37 и 2.39.

Своеобразными свойствами³⁾ обладает энергетический спектр частицы в пространственно периодическом потенциале; некоторые из них рассмотрены в задачах из § 4.

§ 1. Стационарные состояния дискретного спектра

2.1. Найти энергетические уровни и нормированные волновые функции стационарных состояний частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a (т. е. в потенциале $U(x) = 0$ при $0 < x < a$ и $U(x) = \infty$ при $x < 0$ и $x > a$). Определить в таких состояниях средние значения и флуктуации координаты и импульса частицы.

В состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi = Ax(x-a)$ (при $0 < x < a$), найти распределение вероятностей различных значений энергии частицы и ее среднее значение.

2.2. Найти изменение энергетических уровней и волновых функций стационарных состояний заряженного линейного осциллятора при наложении на него однородного электрического поля, направленного вдоль оси колебаний. Каковы *поляризуемости*⁴⁾ стационарных состояний осциллятора?

³⁾ Укажем также на своеобразие энергетического спектра и свойств с. ф. гамильтоннана при движении в магнитном поле, см. 7.1.

⁴⁾ Напомним, что поляризуемость β определяет средний дипольный момент, $d \approx \beta \mathcal{E}$, индуцируемый слабым внешним электрическим полем; она же определяет квадратичную часть, $\Delta E = -\beta \mathcal{E}^2/2$, сдвига энергетического уровня в таком поле.

2.3. Вычислив среднее значение энергии $E(\alpha)$ в состоянии с волновой функцией $\Psi(x, \alpha) = \sqrt{\alpha} \exp(-\alpha|x|)$, $\alpha > 0$, показать, что в любом одномерном⁵⁾ потенциале $U(x)$, удовлетворяющем условиям $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и $\int U(x) dx < 0$, всегда имеется хотя бы одно состояние дискретного спектра с энергией $E_0 < 0$ (так что такой потенциал всегда может «связать» частицу; отметим, что при этом не требуется выполнения более жесткого условия $U(x) \leq 0$ при всех значениях x).

2.4. Обозначим через E_n и \tilde{E}_n значения n -го уровня энергии дискретного спектра в полях $U(x)$ и $\tilde{U}(x)$, связанных условием $\tilde{U}(x) = U(x) + \delta U(x)$, где $\delta U(x) \geq 0$. Показать, что $\tilde{E}_n \geq E_n$ (этот результат непосредственно переносится на случай системы с произвольным числом степеней свободы).

2.5. Найти соответствие между энергетическими уровнями дискретного спектра и нормированными

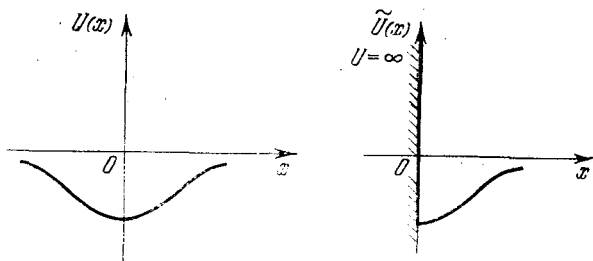


Рис. 1

волновыми функциями стационарных состояний частицы в потенциалах $U(x)$ и $\tilde{U}(x)$, связанных между собой следующим образом: $\tilde{U}(x) = U(x)$ при $x > 0$ и $\tilde{U}(x) = \infty$ при $x < 0$, причем потенциал $U(x)$ симметричен (рис. 1).

2.6. Потенциал имеет такой вид $U(x) = \tilde{U}(x) + \alpha \delta(x - x_0)$, где $\tilde{U}(x)$ — ограниченная функция. Как ведут себя решение $\Psi_E(x)$ уравнения Шрёдингера и его производная в точке x_0 ?

2.7. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции состояний дискретного спектра час-

⁵⁾ Сравнить с результатами задач 4.21, 4.33.

тицы в δ -потенциале ⁶⁾ $U(x) = -\alpha\delta(x)$, рис. 2. Найти средние значения кинетической и потенциальной энергии в этих состояниях. Вычислить произведение неопределенностей координаты и импульса. Каков вид волновой функции в импульсном представлении?

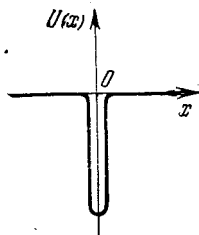


Рис. 2

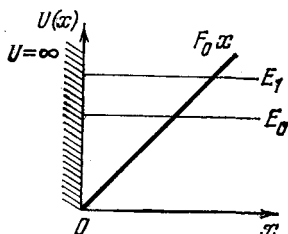


Рис. 3

2.8. Найти энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний частицы в потенциале, указанном на рис. 3.

2.9. Найти энергетические уровни дискретного спектра и соответствующие волновые функции частицы в потенциале $U(x) = U_0(e^{-2x/a} - be^{-x/a})$, причем $U_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Указание. При решении у. Ш. сделать замену переменной $z = 2\beta e^{-x/a}$ и перейти к новой функции $w(z)$ согласно $\Psi = z^{\kappa} e^{-z/2} w(z)$, где $\kappa = (-2mE/\hbar^2)^{1/2}$, $\beta = (2mU_0 a^2/\hbar^2)^{1/2}$.

2.10. То же, что и в предыдущей задаче, для потенциала

$$U(x) = U_1/(1 + e^{x/a})^2 - U_2/(1 + e^{x/a}); \quad U_{1,2} > 0, \quad a > 0.$$

Для решения уравнения Шрёдингера сделать замену переменной $z = -e^{x/a}$ и подстановку $\Psi = (1 - z)^{-\epsilon} z^{\mu} w(z)$ (при соответствующем выборе параметров ϵ и μ у. Ш. сводится к гипергеометрическому уравнению).

⁶⁾ В одномерном случае δ -потенциал притяжения моделирует мелкую потенциальную яму $U(x)$ (достаточно произвольного вида), для которой $ma^2 U_0/\hbar^2 \ll 1$; U_0 , a — характерные величина потенциала и его радиус, при этом $-\alpha = \int U(x) dx < 0$. В связи с данной задачей см. также 2.17, 2.20, 2.23.

2.11. Найти энергетический спектр в потенциале вида: $U(x) = \alpha \delta(x)$, $\alpha > 0$ при $|x| < a$ и $U = \infty$ при $|x| > a$ (рис. 4). Показать, что при выполнении условия $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$ нижняя часть спектра состоит из последовательности пар близко расположенных уровней.

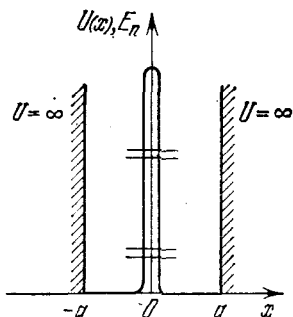


Рис. 4

Каков спектр сильно возбужденных состояний частицы? Какова картина энергетических уровней при $\alpha < 0$?

2.12. Обобщить результат предыдущей задачи на случай, когда δ -барьер разделяет прямоугольную яму несимметричным образом.

2.13. Исследовать поведение решения уравнения Шрёдингера при $x \rightarrow \pm\infty$ в случае $E = 0$ для потен-

циала, удовлетворяющего условию $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Показать, что не возрастающее как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$ решение $\Psi_{E=0}(x)$ уравнения Шрёдингера существует только при *исключительных* значениях параметров потенциала, отвечающих условиям появления новых состояний дискретного спектра при углублении потенциала.

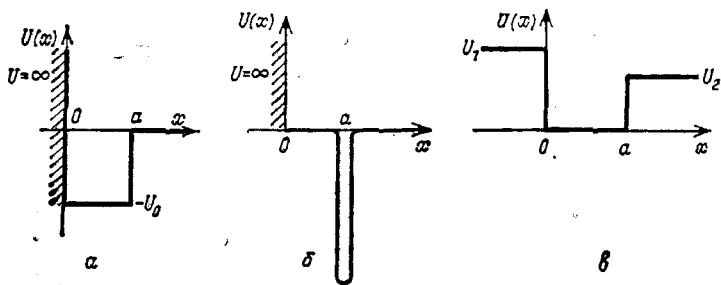


Рис. 5

Каково число дискретных уровней частицы, находящейся: а) в прямоугольной потенциальной яме глубины U_0 и ширины a ; б) в потенциале $U = -\alpha \delta(x) - \alpha \delta(x - a)$, в зависимости от значений параметров потенциала?

2.14. Для частицы в потенциале $U(x)$ вида: а) $U = \infty$ при $x < 0$, $U = -U_0$ при $0 < x < a$, $U = 0$ при $x > a$; б) $U = \infty$ при $x < 0$, $U = -\alpha\delta(x-a)$ при $x > 0$ (рис. 5, а, б), найти число связанных состояний в зависимости от значений параметров потенциала.

2.15. Найти условие существования связанных состояний частицы в потенциальной яме, изображенной на рис. 5, в. Рассмотреть предельные случаи: а) $U_1 = \infty$, б) $U_1 = U_2$.

2.16. Частица находится в поле, имеющем вид двух одинаковых симметричных потенциальных ям, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (рис. 6); области действия ям не перекрываются, так что $U(0) = 0$. Показать, что средняя сила, с которой частица действует на ямы в стационарных состояниях дискретного спектра, приводит к взаимному притяжению ям в четных состояниях и к их взаимному отталкиванию в нечетных состояниях.

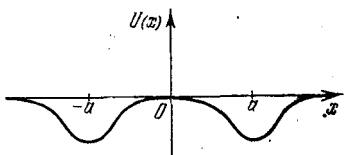


Рис. 6

(рис. 6); области действия ям не перекрываются, так что $U(0) = 0$. Показать, что средняя сила, с которой частица действует на ямы в стационарных состояниях дискретного спектра, приводит к взаимному притяжению ям в четных состояниях и к их взаимному отталкиванию в нечетных состояниях.

§ 2. Уравнение Шрёдингера в импульсном представлении. Функция Грина уравнения Шрёдингера.

Интегральная форма уравнения Шрёдингера

2.17. Найти в импульсном представлении вид стационарного уравнения Шрёдингера в случае потенциала $U(x)$, обращающегося в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. На основе этого уравнения исследовать состояния дискретного спектра в потенциале $U = -\alpha\delta(x)$ и сравнить с результатом 2.7.

2.18. Исследовать связанные состояния частицы в потенциале $U = -\alpha[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ на основе уравнения Шрёдингера в импульсном представлении.

2.19. Рассмотреть связанные состояния частицы в случае *сепарабельного* потенциала, представляющего нелокальный интегральный оператор \hat{U} с ядром $U(x, x') = -\lambda f(x)f^*(x')$, исходя из решения уравнения Шрёдингера в импульсном представлении.

2.20. Найти функцию Грина $G_E(x, x')$ уравнения Шрёдингера для свободной частицы при $E < 0$, убывающую при $|x - x'| \rightarrow \infty$. Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(\hat{H} - E) G_E \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_E - E G_E = \delta(x - x').$$

Каков вид функции Грина в импульсном представлении?

С помощью функции Грина записать уравнение Шрёдингера для состояний дискретного спектра в потенциале $U(x)$ ($U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$) в виде интегрального уравнения. На основе этого уравнения рассмотреть связанные состояния частицы в δ -яме и сравнить с результатами задачи 2.7.

2.21. Рассмотреть задачу о связанных состояниях частицы в случае сепарабельного потенциала, см. 2.19, исходя из решения уравнения Шрёдингера в интегральной форме.

2.22. Воспользовавшись интегральной формой уравнения Шрёдингера, показать, что энергетические уровни дискретного спектра в произвольном потенциале $U(x) \leq 0$ ($U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$) удовлетворяют условию

$$|E_n| \leq \frac{m}{2\hbar^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx \right]^2.$$

2.23. В «мелкой» одномерной потенциальной яме $U(x)$, для которой $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ (U_0 , a — характерное значение потенциала и его радиус), имеется только одно связанное состояние, энергия которого приближенно равна $E_0 \approx -\frac{m}{2\hbar^2} \left[\int U(x) dx \right]^2$. Воспользовавшись интегральной формой уравнения Шрёдингера, найти поправку порядка $ma^2 U_0/\hbar^2$ к этому выражению.

2.24. Найти функцию Грина свободной частицы, движение которой, однако, ограничено непроницаемой стенкой (т. е. $U = 0$ при $x > 0$ и $U = \infty$ при $x < 0$, рис. 7, а) для $E < 0$. Функция Грина удовлетворяет граничному условию $G_E(x = 0, x') = 0$ и убывает при $|x - x'| \rightarrow \infty$.

С помощью функции Грина записать уравнение Шрёдингера для связанных состояний частицы ($E_n < 0$) в потенциале вида, приведенного на рис. 7, б (т. е. $U = \tilde{U}(x)$ при $x > 0$ и $U = \infty$ при $x < 0$) в интегральной форме.

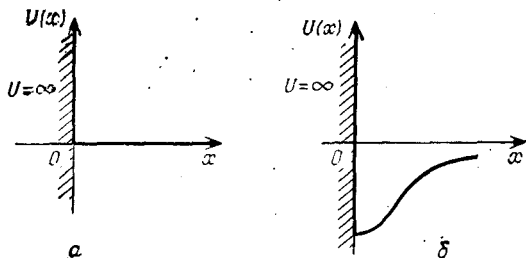


Рис. 7

2.25. Используя интегральную форму уравнения Шрёдингера, показать, что условие

$$\int_0^{\infty} x |\tilde{U}(x)| dx \geq \hbar^2/2m$$

является *необходимым* условием существования связанных состояний в потенциале $U(x)$ вида, приведенного на рис. 7, б: $U = \infty$ при $x < 0$, $U = \tilde{U}(x)$ (при этом $\tilde{U} \leq 0$ и $\tilde{U}(x) \rightarrow 0$ для $x \rightarrow \infty$) при $x > 0$.

Применить полученный результат к потенциалам: а) $\tilde{U} = -U_0$ для $x < a$, $\tilde{U} = 0$ при $x > a$; б) $\tilde{U} = -\alpha\delta(x-a)$, см. рис. 5, а, б, и сравнить с точным условием существования связанных состояний.

2.26. Найти функцию Грина $G_E(x, x')$ частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a . Обсудить аналитические свойства G_E как функции переменной E . Показать, в частности, что она имеет полюсы, и установить связь положений этих полюсов в плоскости комплексной переменной E со значениями энергетических уровней E_n частицы.

2.27. Рассмотреть потенциальные ямы различного вида $U(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$U(x) \leq 0; \quad U(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm \infty;$$

$$\int U(x) dx = \alpha = \text{const.}$$

Какой конкретный вид имеет потенциальная яма, в которой:

а) энергия связи основного уровня $|E_0|$ принимает максимальное значение; б) содержится наибольшее число состояний дискретного спектра?

§ 3. Состояния непрерывного спектра.

Прохождение через потенциальные барьеры

2.28. Для свободной частицы, движение которой ограничено непроницаемой стенкой (т. е. $U = 0$ при $x > 0$ и $U = \infty$ при $x < 0$, рис. 7, а), найти волновые функции стационарных состояний. Нормировать их на δ -функцию по энергии. Убедиться в полноте полученной системы функций (на интервале $0 < x < \infty$).

2.29. Определить коэффициент отражения частицы от потенциальной стенки, изображенной на рис. 8. Рассмотреть предельные случаи $E \rightarrow U_0$ и $E \rightarrow \infty$.

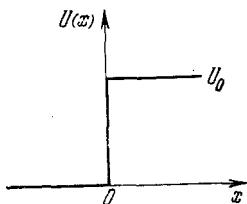


Рис. 8

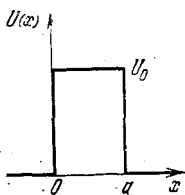


Рис. 9

2.30. Определить коэффициенты отражения и прохождения частиц в случае δ -потенциала $U = \alpha\delta(x)$.

Обсудить аналитические свойства амплитуд отраженной $A(E)$ и прошедшей $B(E)$ волн как функций комплексной переменной E . Убедиться, что точки $E = 0$ и $E = \infty$ являются точками ветвления этих функций. Проведя в плоскости комплексной переменной E разрез от точки $E = 0$ вдоль вещественной полуоси $E > 0$, найти особенности функций $A(E)$ и $B(E)$ на первом, так называемом *физическом*, и других листах их римановой поверхности (физический лист фиксируется условием, что фаза точек E на вещественной полуоси $E > 0$ сверху равна нулю). Показать, что такими особенностями являются полюсы, и установить связь между положениями полюсов и уровнями дискретного спектра.

2.31. Найти коэффициент прохождения частиц через прямоугольный потенциальный барьер, изображенный на рис. 9. Как изменяется полученное выражение при переходе к потенциальной яме ($U_0 < 0$)?

2.32. Найти значения энергий, при которых частицы не отражаются от потенциального барьера вида $U = \alpha [\delta(x) + \delta(x - a)]$, рис. 10.

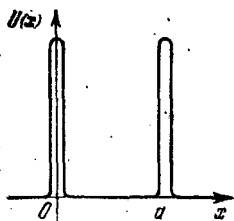


Рис. 10

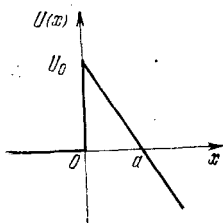


Рис. 11

2.33. Доказать независимость значения коэффициента отражения при данной энергии от направления падения частиц на потенциал.

2.24. Найти коэффициенты прохождения и отражения частицы в случае сепарабельного потенциала (см. 2.19). Убедиться, что общие свойства (II.5) этих коэффициентов сохраняются и в случае сепарабельного потенциала.

2.35. Найти коэффициент прохождения частиц через потенциальный барьер, указанный на рис. 11. Рассмотреть различные предельные случаи, допускающие наглядное восприятие полученного выражения для $D(E)$.

2.36. То же, что и в предыдущей задаче, в случае барьера $U = -F_0|x|$, рис. 12.

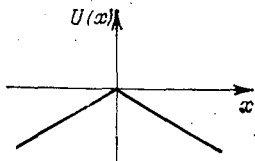


Рис. 12

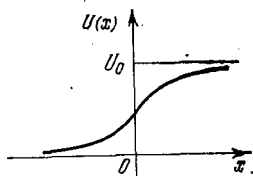


Рис. 13

2.37. Поле $U(x)$ имеет вид потенциальной ступеньки, т. е. $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $U(x) \rightarrow U_0 > 0$ при $x \rightarrow +\infty$, рис. 13. Найти энергетическую зависи-

мость коэффициента прохождения частиц при $E \rightarrow U_0$. Сравнить с результатом из 2.29.

2.38. Найти коэффициенты отражения и прохождения медленных частиц, $ka \ll 1$, в случае «слабого» поля $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ (U_0 , a — характерная величина и радиус потенциала). Сравнить полученные выражения с результатами для δ -потенциала (см. 2.30).

2.39. Показать, что коэффициент прохождения в произвольном потенциале, удовлетворяющем условию $U(x) = 0$ для $|x| > a$, при $E \rightarrow 0$ обращается в нуль: $D(E) \propto E$. В каких исключительных случаях нарушается эта зависимость?

Выразить коэффициент s в зависимости $D = sE$ через параметры, характеризующие асимптотику решения уравнения Шрёдингера с $E = 0$. Применить полученный результат к прямоугольному барьеру (яме) и сравнить с результатом точного решения, см. 2.31.

2.40. Найти коэффициент прохождения для медленных частиц в потенциале $U = -U_0 a^4/(x^2 + a^2)^2$.

Указание. При решении у. Ш. с $E = 0$ сделать замену переменной $z = \arctg(x/a)$ и перейти к новой функции $\psi = \Psi \cdot (x^2 + a^2)^{-1/2}$.

2.41. Исходя из решения уравнения Шрёдингера в импульсном представлении, найти волновые функции стационарных состояний частицы в однородном поле $U = -F_0 x$. Нормировать их на δ -функцию по энергии и убедиться в полноте полученной системы функций.

Воспользоваться полученными результатами для определения энергетического спектра в потенциале, рассмотренном в задаче 2.8.

2.42. Найти функции Грина $G_E^{(\pm)}(x, x')$ свободной частицы при $E > 0$; индексы (\pm) указывают на характер асимптотики:

$$G_E^{(\pm)} \propto \exp(\pm i \sqrt{2mE/\hbar^2} |x - x'|) \text{ при } |x - x'| \rightarrow \infty.$$

Записать уравнение Шрёдингера в виде интегрального уравнения, решения которого описывают процесс отражения и прохождения частиц с импульсом p ($-\infty < p < +\infty$) в потенциале $U(x)$, обращающемся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. На основе полученного уравнения рассмотреть случай δ -потенциала.

2.43. В случае δ -барьера, $U = \alpha \delta(x)$ с $\alpha > 0$, доказать непосредственным вычислением полноту

системы функций $\Psi_p^{(+)}(x)$, описывающих процесс отражения и прохождения частиц с импульсом p ($-\infty < p < +\infty$).

2.44. Обобщить результат предыдущей задачи на случай δ -потенциала притяжения $U = -\alpha\delta(x)$, $\alpha > 0$.

2.45. Найти функции Грина: $G_E(x, x')$ при $E < 0$ и $G_E^{(\pm)}(x, x')$ при $E > 0$ для частицы в δ -потенциале отталкивания $U = \alpha\delta(x)$, $\alpha > 0$. Обсудить их аналитические свойства как функций комплексной переменной E . Сравнить со случаем свободной частицы, см. 2.42.

2.46. То же, что и в предыдущей задаче, для δ -ямы.

2.47. Найти в импульсном представлении функцию Грина частицы в δ -потенциале $U = \alpha\delta(x)$.

§ 4. Системы с несколькими степенями свободы

Частица в периодическом потенциале

2.48. Найти энергетические уровни и соответствующие волновые функции плоского изотропного осциллятора. Какова кратность вырождения уровней?

2.49. Найти энергетический спектр частицы в потенциале $U = (1/2)k(x^2 + y^2) + \alpha xy$, $|\alpha| < k$.

2.50. Найти спектр гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m} \hat{p}_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_1 x_2, \quad |\alpha| < k.$$

2.51. Две частицы одинаковой массы находятся в одинаковом же потенциале $U(x_{1,2})$ и взаимодействуют друг с другом как «непроницаемые» точки. Найти энергетический спектр и соответствующие волновые функции такой системы, считая известным решение одночастичной задачи в потенциале $U(x)$. Рассмотреть в качестве иллюстрации случай двух частиц, находящихся в бесконечно глубокой потенциальной яме.

2.52. Обобщить результат предыдущей задачи на случай N частиц.

2.53. Для частицы в периодическом потенциале вида $U = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$ (идеальный бесконечный «кристалл», см. рис. 14) найти систему независимых решений уравнения Шрёдингера для произвольного значения E .

Определить энергетический спектр частицы.

2.54. Найти энергетический спектр частицы в потенциале $U = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$, где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого с $n = 0$ («кристалл»

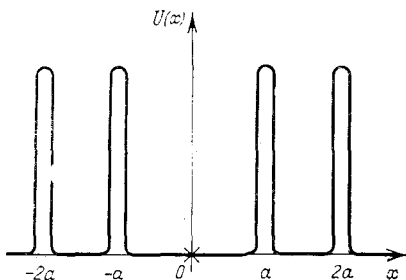


Рис. 14

с дефектом — *вакансией*, рис. 15). Показать, что в дополнение к разрешенным энергетическим зонам в случае идеального кристалла (см. 2.53) появляются новые дискретные уровни, соответствующие локализованным вблизи дефекта состояниям частицы.

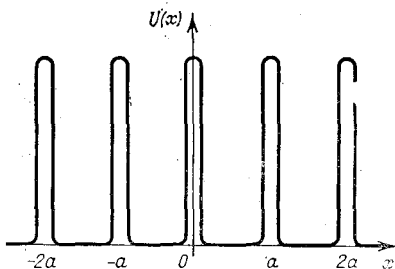


Рис. 15

2.55. Найти энергетический спектр и указать кратность вырождения уровней частицы в потенциале вида: $U = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - na)$ при $x > 0$ и $U = U_0 > 0$ при $x \leq 0$ (частица в полубесконечном кристалле, см. рис. 16). Сравнить со случаем идеального бесконечного кристалла (см. 2.53). Обратить внимание на

возможность существования состояний частицы, локализованных вблизи границы кристалла (так

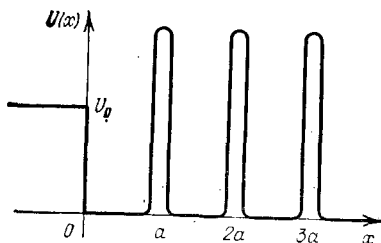


Рис. 16

называемые *поверхностные*, или *таммовские*, состояния, на возможность существования которых впервые указал И. Е. Тамм).

Г л а в а 3

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Операторы компонент момента импульса частицы $\hat{\mathbf{l}} = [\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}]$ удовлетворяют коммутационным соотношениям¹⁾

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{l}_n, \quad [\hat{l}^2, \hat{l}_i] = 0, \quad (\text{III. 1})$$

а также

$$[\hat{l}_i, \hat{x}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{x}_n, \quad [\hat{l}_i, \hat{p}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{p}_n. \quad (\text{III. 2})$$

В сферических координатах операторы \hat{l}_i содержат только угловые переменные θ, φ . Так, оператор $\hat{l}_z = -i\partial/\partial\varphi$, его с. ф. и с. з. имеют вид ($m \equiv l_z$):

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{III. 3})$$

Оператор квадрата момента \hat{l}^2 выражается через угловую часть оператора Лапласа; его с. з. равны $l(l+1)$, причем $l = 0, 1, 2, \dots$. При исследовании

¹⁾ Так: $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z$ и т. д. Говоря о моменте (включая в дальнейшем и спиновый момент), мы имеем в виду измерение его в единицах \hbar , так что соответствующие операторы и их с. з. безразмерны. Подчеркнем, что как соотношения (III. 1), так и (III. 8), (III. 9) справедливы для момента любой системы (или подсистемы) независимо от его природы (орбитальный, спиновый, полный).

лишь угловой зависимости волновых функций частицы операторы \hat{l}^2 и \hat{l}_z образуют полный набор. Шаровые функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ являются нормированными с. ф. этих операторов:

$$\begin{aligned}\hat{l}^2 Y_{lm} &\equiv - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm} = \\ &= l(l+1) Y_{lm}, \\ \hat{l}_z Y_{lm} &\equiv -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} = m Y_{lm},\end{aligned}\quad (\text{III. 4})$$

и имеют вид ($|m| \leq l$)

$$\begin{aligned}Y_{lm} &= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^{|m|} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \times \\ &\quad \times e^{im\varphi}, \quad (\text{III. 5}) \\ P_l^{|m|}(\cos \theta) &= \sin^{|m|} \theta d^{|m|} P_l(\cos \theta) / d(\cos \theta)^{|m|},\end{aligned}$$

где P_l и $P_l^{|m|}$ — полиномы Лежандра и присоединенные полиномы Лежандра соответственно; при этом $Y_{lm}^* = (-1)^{l-m} Y_{l, -m}$.

Шаровые функции имеют определенную четность l , равную $(-1)^l$. Для них имеет место «теорема сложения»:

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'), \quad (\text{III. 6})$$

где \mathbf{n} , \mathbf{n}' — орты вдоль соответствующих направлений, при этом

$$\begin{aligned}Y_{lm}(\mathbf{n}) &\equiv Y_{lm}(\theta, \varphi) \text{ и } \mathbf{n}\mathbf{n}' = \cos \theta \cos \theta' + \\ &\quad + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').\end{aligned}$$

Приведем шаровые функции для низших моментов:

$$\begin{aligned}Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta); \\ Y_{1, \pm 1} &= \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}; \\ Y_{2, \pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}; \\ Y_{2, \pm 2} &= - \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}.\end{aligned}\quad (\text{III. 7})$$

Отметим, что полезно иметь в виду возможность записи шаровых функций через декартовы координаты; так,

$$Y_{1, \pm 1} \propto \sin \theta e^{\pm i \varphi} = (x \pm iy)/r, \quad Y_{10} \propto \cos \theta = z/r \text{ и т. д.}$$

«Повышающий» (значение проекции момента на ось z) \hat{l}_+ и «понижающий» \hat{l}_- операторы, $\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$, удовлетворяют соотношениям коммутации $[\hat{l}_z, \hat{l}_{\pm}] = \pm \hat{l}_{\pm}$. Отсюда следует, что для них из матричных элементов $\langle lm' | \hat{l}_{\pm} | lm \rangle$ отличны от нуля только ²⁾

$$(l_+)_{m, m-1} = (l_-)_{m-1, m} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}. \quad (\text{III. 8})$$

Соответственно для операторов \hat{l}_x, \hat{l}_y отличны от нуля только матричные элементы:

$$\begin{aligned} (l_x)_{m, m-1} &= (l_x)_{m-1, m} = 1/2 \sqrt{(l+m)(l-m+1)}, \\ (l_y)_{m, m-1} &= -(l_y)_{m-1, m} = -1/2i \sqrt{(l+m)(l-m+1)}, \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

чем и определяется вид этих операторов в l_z -представлении, при этом $(l_z)_{mm'} = m\delta_{mm'}$.

§ 1. Общие свойства момента

3.1. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии плоского ротатора ³⁾ с моментом инерции I . Какова кратность вырождения уровней?

В состоянии ротатора с волновой функцией $\Psi = C \cos^2 \varphi$ найти вероятности различных значений энергии и проекции момента, а также средние значения и флуктуации этих величин.

²⁾ Для определения величины матричного элемента следует также учесть соотношение $\hat{l}^2 = \hat{l}_- \hat{l}_+ + \hat{l}_z^2 + \hat{l}_z$. Выбор фазового множителя в (III. 8) фиксирует используемую в теории момента относительную фазу в.ф. состояний с различными m (для одного и того же значения l).

³⁾ Ротатором называется вращающаяся относительно центра масс (в плоскости или в пространстве) система из двух жестко связанных друг с другом частиц. Момент инерции ротатора равен $I = \mu a^2$, где μ — приведенная масса частиц, a — расстояние между ними.

3.2. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии пространственного (сферического) ротатора с моментом инерции I . Какова кратность вырождения уровней?

В состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi = C \cos^2 \theta$, найти вероятности различных значений энергии, момента и его проекции на ось z , а также средние значения и флуктуации этих величин.

3.3. Показать, что равенство $L^2 = l(l+1)$ получается с помощью элементарных формул теории вероятностей, исходя из того, что проекция момента на произвольную ось может принимать лишь значения $m = -l, -l+1, \dots, l$, причем все они равновероятны, а оси равноправны.

3.4. Дать наглядную интерпретацию:

а) коммутативности операторов проекций импульса,

б) некоммутативности операторов проекций момента импульса,

в) коммутативности операторов проекций импульса и момента импульса на одну и ту же ось и их некоммутативности для проекций на различные оси, исходя из кинематического смысла этих операторов, связанного с бесконечно малыми переносами и поворотами.

3.5. Найти следующие коммутаторы:

а) $[\hat{l}_i, r^2], [\hat{l}_i, \hat{p}^2], [\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})], [\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})^2],$

б) $[\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r}) \hat{p}_k], [\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r}) \hat{x}_k], [\hat{l}_i, (a\hat{x}_k + b\hat{p}_k)],$

в) $[\hat{l}_i, \hat{x}_k \hat{x}_l], [\hat{l}_i, \hat{p}_k \hat{p}_l], [\hat{l}_i, \hat{x}_k \hat{p}_l]$

(a, b — постоянные величины). Обратить внимание на одинаковую структуру коммутаторов для операторов, входящих в одну и ту же группу. С чем связана такая универсальность коммутационных соотношений?

3.6. Найти нормированные соответствующим образом волновые функции $\Psi_{r_0 l m}$, описывающие состояния частицы, находящейся на расстоянии r_0 от начала координат, имеющей момент l и его проекцию m на ось z .

3.7. Найти общие собственные функции операторов проекций на ось z импульса и момента импульса частицы.

3.8. Показать, что средние значения векторов $\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{p}}$ в состоянии частицы с волновой функцией $\Psi = \exp(i\mathbf{p}_0\mathbf{r}/\hbar)\varphi(\mathbf{r})$, где \mathbf{p}_0 — вещественный вектор, а $\varphi(\mathbf{r})$ — вещественная функция, связаны классическим соотношением $\bar{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{p}}]$.

3.9. Найти собственные функции операторов $\hat{\mathbf{l}}^2$ и \hat{l}_z в импульсном представлении. Показать, что в состояниях с определенными значениями l, m средний импульс частицы $\bar{\mathbf{p}} = 0$.

3.10. Показать, что функции, получающиеся в результате действия операторов $\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$ на собственные функции Ψ_m оператора \hat{l}_z , также являются собственными функциями \hat{l}_z , отвечающими уже собственным значениям $m \pm 1$.

Показать также, что в состоянии с волновой функцией Ψ_m

$$a) \bar{l}_x = \bar{l}_y = 0, \quad б) \bar{l}_x^2 = \bar{l}_y^2, \quad в) \overline{\hat{l}_x \hat{l}_y + \hat{l}_y \hat{l}_x} = 0.$$

3.11. В состоянии Ψ_{lm} с определенными значениями момента l и его проекции m на ось z найти средние значения \bar{l}_x^2, \bar{l}_y^2 , а также среднее значение и флуктуацию проекции момента на ось \tilde{z} , составляющую угол α с осью z .

3.12. Доказать соотношение

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = (2l+1)/4\pi.$$

3.13. Указать вид волновой функции $\Psi_{l, \tilde{m}=0}(\mathbf{n})$ состояния частицы с моментом l и его проекцией $\tilde{m} = 0$ на ось \tilde{z} , направление которой в пространстве определяется единичным вектором \mathbf{n}_0 . В рассматриваемом состоянии найти вероятности различных значений проекции момента на ось z .

3.14. Обозначим через $\omega_l(m_1; m_2, \alpha)$ вероятность значения m_2 проекции момента на ось \tilde{z} , составляющую угол α с осью z , в состоянии частицы с определенными значениями момента l и его проекции m_1 на ось z . Доказать равенство $\omega_l(m_1; m_2, \alpha) = \omega_l(m_2; m_1, \alpha)$ (воспользоваться результатом задачи 1.43).

3.15. Найти проекционные операторы $\hat{P}(M)$, проектирующие на состояния с заданным значением M

проекция момента на ось z (искомые операторы действуют в пространстве векторов состояний, отвечающих определенному значению L момента).

3.16. Используя коммутационные соотношения для операторов компонент момента, найти $\text{Sp } \hat{L}_i$, где \hat{L}_i — матрица i -й компоненты момента L .

3.17. Найти шпурь следующих матриц:

а) \hat{L}_i , б) $\hat{L}_i \hat{L}_k$, в) $\hat{L}_i \hat{L}_k \hat{L}_l$, г) $\hat{L}_i \hat{L}_k \hat{L}_l \hat{L}_m$, где \hat{L}_i — матрица i -й компоненты момента L .

§ 2. Момент $L = 1$

3.18. В случае момента частицы $l = 1$ найти волновую функцию $\Psi_{\tilde{m}=0}(\theta, \varphi)$ состояния с определенной проекцией момента $\tilde{m} = 0$ на ось \tilde{z} , направление которой в пространстве определяется полярным α и азимутальным β углами.

3.19. Найти волновые функции $\Psi_{l_x}(\theta, \varphi)$ и $\Psi_{l_y}(\theta, \varphi)$ состояний частицы с моментом $l = 1$ и определенным значением проекции момента на оси x и y соответственно. Воспользоваться известным видом шаровых функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, см. (III.7).

3.20. Частица находится в состоянии с моментом $l = 1$ и его проекцией m ($m = 0, \pm 1$) на ось z . Найти вероятности $\omega(m', m)$ различных значений проекции момента m' на ось z' , составляющую угол α с осью z .

Задачу предлагается решить одним из следующих способов:

а) используя результат задачи 3.11;

б) путем нахождения коэффициентов разложения $\psi(m', m)$ заданной волновой функции в ряд по собственным функциям оператора $\hat{L}_{z'}$.

3.21. Показать, что в случае момента частицы $l = 1$ три функции $\Psi_{l_x=0}(\theta, \varphi)$, $\Psi_{l_y=0}(\theta, \varphi)$, $\Psi_{l_z=0}(\theta, \varphi)$, описывающие состояния частицы с равной нулю проекцией момента на оси x , y , z соответственно, образуют полную систему функций.

Какой смысл имеют коэффициенты разложения волновой функции произвольного состояния с $l = 1$ по этим функциям?

3.22. Указать в l_z -представлении явный вид операторов компонент момента, а также повышающе-

го \hat{l}_+ и понижающего \hat{l}_- операторов ($\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$) для момента $l = 1$.

Найти из решения уравнения на собственные функции волновую функцию в l_z -представлении состояния частицы с $l_x = 0$.

3.23. В состоянии частицы с моментом $l = 1$ и его проекцией m на ось z найти следующие средние: $\overline{l_x^n}$, $\overline{l_y^n}$ (n — целое).

3.24. Найти явный вид оператора $\hat{R}(\varphi_0) = \exp(i\varphi_0 \hat{l})$ поворота системы координат на угол φ_0 , действующего в пространстве векторов состояний, отвечающих моменту $l = 1$. С помощью этого оператора получить из шаровой функции Y_{10} волновую функцию $\Psi_{\tilde{m}=0}(\theta, \varphi)$ состояния частицы с моментом $l = 1$ и его проекцией $\tilde{m} = 0$ на ось \tilde{z} , направление которой определяется полярным α и азимутальным β углами. Сравнить с 3.18.

3.25. В пространстве векторов состояний, отвечающих моменту $l = 1$, найти проекционные операторы $\hat{P}(m)$ для состояний с определенной проекцией момента m на ось z . Обобщить результат на случай произвольно направленной оси \tilde{z} . С помощью оператора $\hat{P}(\tilde{m})$ найти в l_z - и в координатном представлении волновую функцию $\Psi_{\tilde{m}=0}$ состояния частицы с моментом $l = 1$ и его проекцией $\tilde{m} = 0$ на ось \tilde{z} . Сравнить с 3.18 и 3.24.

§ 3. Сложение моментов

3.26. Записать оператор момента системы из двух частиц в виде суммы двух слагаемых, соответствующих моменту частиц в с. ц. и. (т. е. моменту относительного движения) и моменту поступательного движения системы как целого.

3.27. Моменты l_1 и l_2 двух слабо взаимодействующих систем складываются в результирующий момент величины L . Показать, что в таких состояниях (с определенным L) скалярные произведения $\hat{l}_1\hat{l}_2$, $\hat{l}_1\hat{L}$, $\hat{l}_2\hat{L}$ также имеют определенные значения.

3.28. Найти следующие коммутаторы:

$$a) [\hat{L}_i, (\hat{l}_1\hat{l}_2)], [\hat{L}_i, (\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{p}}_2)], [\hat{L}_i, (\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_2)];$$

$$б) [\hat{L}_i, \hat{x}_{1k}], [\hat{L}_i, \hat{g}_k] \text{ с } \hat{\mathbf{g}} \equiv [\hat{l}_1\hat{l}_2];$$

в) $[\hat{L}_i, \hat{x}_{1k}\hat{x}_{2l}], [\hat{L}_i, \hat{x}_{1k}\hat{p}_{2l}]$,

где \hat{I}_1, \hat{I}_2 — операторы моментов двух частиц, $\hat{L} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$ — оператор их суммарного момента. Обратить внимание на универсальную структуру (внутри каждой группы) коммутаторов. Сравнить с 3.5.

3.29. Имеются две слабо взаимодействующие системы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами (l_1, m_1) и (l_2, m_2) момента и его проекции на ось z .

Указать возможные значения полного момента L совокупной системы $(1+2)$ и вычислить средние значения \bar{L} и \bar{L}^2 в рассматриваемом состоянии. Для частного случая $m_1 = l_1, m_2 = l_2 - 1$ найти вероятности различных значений суммарного момента.

3.30. Показать, что при сложении двух одинаковых по величине моментов $(l_1 = l_2 = l)$ в результирующий момент L волновая функция $\Psi_L(m_1, m_2)$ в $l_1 z l_2 z$ -представлении имеет определенную симметрию по отношению к взаимной перестановке m_1 и m_2 .

Как зависит характер симметрии от значения L ?

3.31. Показать, что в состоянии системы из двух одинаковых по величине моментов $(l_1 = l_2)$, отвечающем определенным значениям суммарного момента L и его проекции M на ось z , вероятности значений проекций складываемых моментов $m_{1(2)} = m$ и $m_{1(2)} = M - m$ равны.

3.32. Две подсистемы, имеющие одинаковые моменты $l_1 = l_2 = 1$, находятся в состояниях с определенными значениями проекций момента m_1 и m_2 . Найти вероятности различных значений суммарного момента L в таких состояниях. При решении задачи воспользоваться результатом 3.29 для значения \bar{L}^2 и учесть характер симметрии волновой функции состояния с определенным значением L , установленный в 3.30 (отметим, что при произвольных значениях $l_{1,2}$ и $m_{1,2}$ искомая вероятность $w(L) = |C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L, m_1 + m_2}|^2$, где $C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM}$ — коэффициенты Клебша — Гордана; см. 3.38).

3.33. Проиллюстрировать связь, установленную в задаче 1.43, и ее вероятностный смысл на примере сложения моментов l_1, l_2 двух слабовзаимодействующих подсистем в результирующий момент L .

3.34. Для системы из двух одинаковых по величине моментов $l_1 = l_2 = l$ найти в $l_{1z}l_{2z}$ -представлении волновую функцию состояния с суммарным моментом $L = 0$ (воспользоваться операторами \bar{L}_{\pm}). Указать также ее вид в координатном представлении.

3.35. Моменты двух частиц равны $l_1 = l_2 = 1$. Построить волновые функции Ψ_{LM} состояний с определенными значениями L суммарного момента и его проекции M на ось z (при решении использовать результаты задач 3.30 и 3.34).

3.36. Используя технику проекционных операторов, для системы из двух моментов $l_1 = l_2 = 1$ найти волновую функцию $\Psi_{L=0}$ состояния с суммарным моментом $L = 0$. Сравнить с 3.34.

3.37. Произвести классификацию независимых состояний системы, состоящей из трех слабозаимодействующих подсистем с моментами $l_1 = l_2 = 1$ и $l_3 = l$ по значениям суммарного момента L системы.

3.38. Как известно, проблема сложения моментов двух систем l_1 и l_2 в результирующий момент L решается в общем виде следующим соотношением:

$$\Psi_{LM} = \sum_{m_1 m_2} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} \Psi_{l_1 m_1}^{(1)} \Psi_{l_2 m_2}^{(2)}, \quad M = m_1 + m_2,$$

где $C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM}$ — коэффициенты Клебша — Гордана. Используя технику повышающих (понижающих) операторов \hat{L}_{\pm} , найти коэффициенты Клебша — Гордана в случае $L = l_1 + l_2$.

3.39. То же, что и в предыдущей задаче, но в случае $l_1 = l_2, L = 0$.

3.40. В случае двух слабозаимодействующих систем с моментами j_1 и j_2 усреднить следующие операторы:

а) $\hat{j}_{1(2)i}$; б) $\hat{j}_{1i}\hat{j}_{2k} - \hat{j}_{1k}\hat{j}_{2i}$; в) $\hat{j}_{1i}\hat{j}_{2k} + \hat{j}_{1k}\hat{j}_{2i}$; г) $\hat{j}_{1i}\hat{j}_{1k} + \hat{j}_{1k}\hat{j}_{1i}$, по состоянию с заданным значением J момента совокупной системы, не конкретизируя зависимости волновой функции состояния от J_z .

Получить выражение для оператора магнитного момента системы $\hat{\mu} = g_1 \hat{j}_1 + g_2 \hat{j}_2$ в состоянии с определенным значением J полного момента (здесь $g_{1,2}$ — гиромагнитные множители для подсистем, связывающие их магнитные и механические моменты).

§ 4. Тензорный формализм в теории момента

3.41. Показать, что функция вида

$$\Psi_l(\mathbf{n}) = \varepsilon_{ik \dots n} n_i n_k \dots n_n,$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а $\varepsilon_{ik \dots n}$ — симметричный по любой паре индексов тензор ⁴⁾ ранга l с равным нулю следом, $\varepsilon_{iik \dots n} = 0$, является собственной функцией оператора квадрата момента частицы, отвечающей значению момента, равному l .

Показать далее, что число независимых компонент у указанного тензора равно $2l + 1$, как и число шаровых функций $Y_{lm}(\mathbf{n})$ (тем самым будет доказано, что приведенная угловая зависимость волновой функции является наиболее общей для состояний частицы с моментом l).

В частных случаях $l = 1$ и $l = 2$ указать значения компонент соответствующего тензора, $\varepsilon_i(m)$ и $\varepsilon_{ik}(m)$, при выборе которых рассматриваемая волновая функция совпадает с шаровой функцией Y_{lm} .

3.42. Согласно предыдущей задаче наиболее общая зависимость от углов волновой функции состояния частицы с моментом $l = 1$ имеет вид $\Psi_{l=1} = (\mathbf{\varepsilon} \mathbf{n})$, где $\mathbf{\varepsilon}$ — произвольный комплексный вектор. Найти:

а) какому условию должен удовлетворять вектор $\mathbf{\varepsilon}$, чтобы волновая функция была нормирована на единицу;

б) средние значения компонент тензора $\overline{n_i n_k}$;

в) средние значения компонент вектора момента $\overline{\mathbf{I}}$;

г) какому условию должен удовлетворять вектор $\mathbf{\varepsilon}$, чтобы для рассматриваемого состояния можно было указать такую ось $\tilde{\mathbf{z}}$ в пространстве, проекция момента на которую имела бы определенное значение, равное $\tilde{m} = 0$; $\tilde{m} = \pm 1$.

3.43. В условиях предыдущей задачи найти вероятности $w(\tilde{m})$ различных значений проекции момента \tilde{m} на ось $\tilde{\mathbf{z}}$, направление которой определяется единичным вектором \mathbf{n}_0 . Показать, что для произ-

⁴⁾ Не путать с антисимметричным тензором ε_{ikl} !

вольного состояния с моментом $l = 1$ существует такое направление в пространстве, вероятность проекции момента $\tilde{m} = 0$ на которое равна нулю.

3.44. Согласно 3.41 угловая зависимость волновой функции произвольного состояния частицы с моментом $l = 1$ имеет вид $\Psi_{l=1} = (a\mathbf{n})$, т. е. полностью определяется комплексным вектором \mathbf{a} . Поэтому при рассмотрении состояний с $l = 1$ можно перейти к представлению (назовем его векторным), в котором волновой функцией является совокупность компонент вектора \mathbf{a} , т. е. $\Psi(k) \equiv a_k$ ($k = 1, 2, 3$).

Найти явный вид операторов компонент момента в векторном представлении. Установить соответствие между векторным и l_z -представлениями.

3.45. Для системы из двух частиц, имеющих моменты $l_1 = l_2 = 1$, найти:

а) наиболее общий вид угловой зависимости волновой функции;

б) наиболее общий вид угловой зависимости волновых функций Ψ_L , описывающих состояния системы с определенными значениями L ($L = 0, 1, 2$) суммарного момента;

в) угловую зависимость волновых функций Ψ_{LM} , описывающих состояния системы с определенным значением L суммарного момента и его проекции M на ось z .

При решении использовать результат задачи 3.41.

3.46. Для системы из двух частиц, одна из которых имеет момент $l_1 = 1$, найти угловую зависимость волновых функций $\Psi_{JJ_z\Lambda}$ состояний системы, отвечающих определенным значениям ее суммарного момента $J = 0$ и 1 , его проекции J_z на ось z и проекции момента Λ на направление радиуса-вектора второй частицы (при этом ограничиться случаем $\Lambda = 0$). Каковы четности рассматриваемых состояний? Каковы возможные значения момента l_2 второй частицы в таких состояниях?

Обобщить результат на случай произвольных значений l_1, J, J_z (по-прежнему $\Lambda = 0$).

3.47. Показать, что в системе из трех частиц состояния с суммарным орбитальным моментом $L = 0$ (в с. ц. и.) имеют определенную, причем положительную четность.

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Решение уравнения Шрёдингера для центрального потенциала

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right] \Psi_E(\mathbf{r}) = E \Psi_E(\mathbf{r}) \quad (\text{IV. 1})$$

с учетом взаимной коммутативности операторов \hat{H} , \hat{l}^2 , \hat{l}_z можно искать в виде $\Psi_E \equiv \Psi_{nrlm}(\mathbf{r}) = R_{nrl}(r) Y_{lm}(\mathbf{n})$, где Y_{lm} — шаровая функция. При этом (IV.1) сводится к одномерному радиальному у. Ш.:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{nrl} - U(r)) \right] R_{nrl}(r) = 0. \quad (\text{IV. 2})$$

Граничное условие при $r \rightarrow 0$ имеет вид ¹⁾ $R_{nr0}(0) = \text{const} < \infty$ для $l=0$ и $R_{nrl}(0) = 0$ для $l \neq 0$.

Для частицы в кулоновском потенциале притяжения, $U = -\alpha/r$, уровни энергии и радиальные функции для состояний дискретного спектра имеют вид $E_n = -m\alpha^2/2\hbar^2 n^2$ и

$$R_{nl} = -\frac{2}{a^{3/2} n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na} \right)^l L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na} \right), \quad (\text{IV. 3})$$

где $n = n_r + l + 1$ — главное квантовое число, $a = \hbar^2/m\alpha$ (для атома водорода a определяет радиус Бора), $L_n^k(z)$ — обобщенный полином Лагерра, выражающийся через гипергеометрическую функцию

$$L_n^k(z) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{k! (n-k)!} F(k-n, k+1, z).$$

¹⁾ При этом имеются в виду *регулярные* потенциалы, для которых $r^2 U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Для них два независимых решения на малых расстояниях имеют вид $R_1 \propto r^l$ и $R_2 \propto r^{-l-1}$. Исключение из рассмотрения возрастающего решения для $l \neq 0$ естественно и связано с его ненормируемостью. При $l=0$ для растущего решения, $R_2 \propto 1/r$, имеем $\Delta R_2 \propto \delta(r)$, так что оно не удовлетворяет уравнению (IV.1) при $r \rightarrow 0$. Такое решение, квадратично интегрируемое на малых расстояниях, используется при моделировании короткодействующего центра потенциалом нулевого радиуса, см. задачу 4.10. Для *сингулярного* потенциала притяжения возникает «падение на центр» и вопрос о выборе граничного условия при $r \rightarrow 0$ требует дополнительного исследования, см. в связи с этим 9.14.

В частности, для нескольких нижних состояний

$$\begin{aligned} R_{10} &= 2a^{-3/2} e^{-r/a} && \text{(основное, } 1s\text{-состояние),} \\ R_{20} &= (2a^3)^{-1/2} (1 - r/2a) e^{-r/2a} && (2s\text{-состояние),} \\ R_{21} &= (24a^5)^{-1/2} r e^{-r/2a} && (2p\text{-состояние).} \end{aligned} \quad (\text{IV. 4})$$

Для решения уравнения (IV.2) часто оказывается удобным перейти к новой функции $\chi_{nrl} = r R_{nrl}$, для которой

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) \right] \chi_{nrl} = E_{nrl} \chi_{nrl} \quad (\text{IV. 5})$$

и $\chi_{nrl}(0) = 0$; это уравнение по форме совпадает с обычным уравнением Шрёдингера в одномерном случае.

Часто используется также подстановка $u_{nrl} = \sqrt{r} R_{nrl}$; тогда уравнение принимает вид

$$u''_{nrl} + \frac{1}{r} u'_{nrl} - \left[\frac{(l+1/2)^2}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U(r) - E_{nrl}) \right] u_{nrl} = 0, \quad (\text{IV. 6})$$

а граничное условие в нуле $u_{nrl}(0) = 0$.

§ 1. Состояния дискретного спектра в центральных полях

4.1. Указать связь энергетических уровней $E_{n,0}$ и нормированных волновых функций $\Psi_{n,00}(r)$ стационарных s -состояний дискретного спектра частицы в центральном потенциале $U(r)$ с уровнями E_n и нормированными функциями $\Psi_n(x)$ в одномерном потенциале $\bar{U}(x)$ вида $\bar{U}(x) = U(x)$ при $x > 0$, $\bar{U}(x) = \infty$ при $x < 0$ (см. также задачу 2.5).

Используя установленное соответствие, найти:

а) спектр s -уровней в бесконечно глубокой сферической потенциальной яме, т. е. $U(r) = 0$ при $r < a$ и $U = \infty$ при $r > a$;

б) условие существования связанных состояний частицы в потенциале: $U = -U_0$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$.

4.2. Как изменяются значения E_{nrl} энергетических уровней частицы дискретного спектра

а) при фиксированном значении l с увеличением n_r ,

б) при фиксированном значении n_r с увеличением l ?

4.3. Пусть N — номер уровня в центральном потенциале в порядке возрастания энергии (основному уровню отвечает $N = 1$). Каковы для N -го уровня

а) максимально возможное значение момента l ,

б) максимально возможная кратность вырождения уровня,

в) максимально возможная кратность вырождения уровня при условии, что он имеет определенную четность?

4.4. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции сферического осциллятора, $U = kr^2/2$, используя при решении уравнения Шрёдингера разделение переменных в декартовых координатах. Определить кратность вырождения уровней и произвести их классификацию по значениям квантовых чисел n_r , l и четности. Связать «случайное» вырождение уровней с коммутативностью операторов $\hat{T}_{ik} = \hat{p}_i \hat{p}_k / m + k \hat{x}_i \hat{x}_k$ с гамильтонианом осциллятора.

4.5. Рассмотреть стационарные состояния сферического осциллятора (см. предыдущую задачу), используя при решении уравнения Шрёдингера сферические координаты.

4.6. В основном состоянии атома водорода найти:

а) $\overline{r^n}$ для электрона, n — целое;

б) среднюю кинетическую и потенциальную энергию электрона;

в) распределение по импульсам электрона;

г) эффективный (средний) потенциал $\phi(r)$, создаваемый атомом.

4.7. Найти среднее электрическое поле $\mathcal{E}(r)$ и его флуктуацию (флуктуацию компонент поля) на больших расстояниях от атома водорода, находящегося в основном состоянии. Обратит внимание на характер убывания найденных величин с увеличением расстояния.

4.8. Найти s -уровни в потенциалах:

а) $U = -\alpha\delta(r - a)$; б) $U = -U_0 e^{-r/a}$;

в) $U = -U_0/(e^{r/a} - 1)$.

4.9. Найти уровни с произвольным моментом l в потенциалах:

а) $U = -\alpha\delta(r - a)$; б) $U = 0$ при $r < a$ и $U = \infty$ при $r > a$.

4.10. Потенциал нулевого радиуса (трехмерный аналог одномерного δ -потенциала, см. 2.7) задается наложением на волновую функцию граничного условия вида ²⁾

$$(r\Psi(r))'/(r\Psi(r)) \rightarrow -\alpha_0 \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

т. е.

$$\Psi \propto \left(-\frac{1}{\alpha_0 r} + 1 + \dots \right).$$

Обсудить вопрос о возможности существования (в зависимости от знака α_0) в таком потенциале связанных состояний частицы. Найти волновую функцию связанного состояния в импульсном представлении. Каковы средние значения \bar{T} , \bar{U} ?

4.11. Найти энергетический спектр частицы, находящейся в бесконечно глубокой сферической потенциальной яме радиуса a и испытывающей также действие в точке $r=0$ потенциала нулевого радиуса (п. н. р.). Сравнить со спектрами в яме и в п. н. р. в отдельности. Обратить внимание на возможность существенной перестройки спектра «ямных» уровней под влиянием п. н. р.

4.12. Обсудить вопрос о связанных состояниях частицы в случае *сепарабельного* потенциала, представляющего интегральный оператор с ядром (сравнить с 2.19): $U(r, r') = -\lambda f(r)f^*(r')$, причем $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Рассмотреть конкретный случай $U = -(\lambda/r r') \exp(-\gamma(r+r'))$ (потенциал Ямагучи).

4.13. Рассмотреть связанные s -состояния частицы в δ -потенциале $U = -\alpha\delta(r-a)$, исходя из решения уравнения Шрёдингера в импульсном представлении.

4.14. Найти решение уравнения Шрёдингера предыдущей задачи с граничным условием $\Phi(p)=0$ для $p \leq p_0$ ($p_0 > 0$).

Показать, что в такой постановке задачи в яме произвольной глубины имеется связанное состояние,

²⁾ Такой «потенциал», оказывающий действие лишь на частицу с $l=0$, моделирует потенциальную яму достаточно произвольного вида $U(r)$ конечного радиуса r_s в случае, если в ней имеется мелкий реальный (или виртуальный) уровень с энергией ϵ_0 такой, что $\epsilon_0 \ll \hbar^2/mr_s^2$. При этом свойства состояний частицы с моментом $l=0$ и энергией $E \ll \hbar^2/mr_s^2$ слабо зависят от конкретного вида $U(r)$. Применения потенциалов нулевого радиуса в задачах атомной и ядерной физики рассмотрены в главах 11 и 13, см. также монографии [19, 20].

в котором частица локализована в ограниченной области пространства, и найти энергию связи частицы в случае мелкой ямы. Образование связанного состояния в рассматриваемой постановке задачи при наличии сколь угодно слабого притяжения составляет содержание так называемого феномена Купера — явления, лежащего в основе микроскопического механизма сверхпроводимости.

4.15. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции дискретного спектра в одномерном потенциале $U = -\alpha/x$ при $x > 0$ и $U = \infty$ при $x < 0$ из решения уравнения Шрёдингера в импульсном представлении. Используя полученный результат, найти нормированные волновые функции s -состояний частицы в импульсном представлении для кулоновского потенциала $U(r) = -\alpha/r$.

4.16. Найти поведение при $p \rightarrow 0$ волновой функции $\Phi_{nrlm}(\mathbf{p})$ стационарного состояния дискретного спектра с моментом l частицы в импульсном представлении.

4.17. Показать, что асимптотика волновой функции стационарного s -состояния частицы в импульсном представлении при $p \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Phi_{n,00}(p) \approx -2(2\pi\hbar)^{3/2} \Psi_{n,00}(0) m p^{-2} \tilde{U}(p),$$

где $\Psi_{n,00}(r)$ — волновая функция состояния в координатном представлении,

$$\tilde{U}(p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} U(r) dV$$

— фурье-компонента потенциала. Предполагается, что $\tilde{U}(p)$ при $p \rightarrow \infty$ убывает степенным образом: $\tilde{U}(p) \propto p^{-n}$ с $n > 1$ и не содержит быстро осциллирующего множителя вида $\sin(\alpha p^k)$ с $k \geq 1$.

4.18. Показать, что обобщение результата предыдущей задачи на случай состояния с произвольным значением момента l имеет вид

$$\Phi_{nrlm}(\mathbf{p}) \underset{p \rightarrow \infty}{\approx} -2(2\pi\hbar)^{3/2} (2i)^l m \hbar^l \tilde{R}_{nrl}(0) \times \\ \times Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right) p^{l-2} \frac{\partial^l}{\partial (p^2)^l} \tilde{U}(p),$$

где $\tilde{R}_{nrl}(r)$ связано с волновой функцией в координатном представлении соотношением $\Psi_{nrlm}(\mathbf{r}) = r^l \tilde{R}_{nrl}(r) Y_{lm}(\mathbf{r}/r)$.

4.19. Частица находится в потенциале, имеющем при $r \rightarrow 0$ вид $U \approx \alpha/r^s$ с $s < 2$. При этом радиальная волновая функция состояния с моментом l имеет вид $R_{nrl} \approx C_{nrl} r^l$. Найти поправку к этому выражению при значениях $0 < s < 2$.

4.20. Найти функцию Грина $G_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ свободной частицы для значений $E < 0$, убывающую при $r \rightarrow \infty$. С помощью функции Грина записать уравнение Шрёдингера для состояний дискретного спектра в потенциале $U(r)$, обращающемся в нуль при $r \rightarrow \infty$, в виде интегрального уравнения.

4.21. Как известно, у частицы в потенциале притяжения $U(r) \leq 0$ ($U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) не всегда имеются связанные состояния. Показать, что необходимым условием существования таких состояний является выполнение неравенства

$$\int_0^{\infty} r |U(r)| dr \geq \hbar^2/2m.$$

Сравнить это условие с точным условием существования состояний дискретного спектра в потенциальных полях: прямоугольная яма (см. 4.1), δ -потенциал и экспоненциальная яма (см. 4.8), см. также 4.32.

4.22. Показать, что выполнение условия

$$\frac{m}{2\hbar^2} \left\{ \int_0^{\infty} U(r) [1 - \exp(-2\sqrt{2m\epsilon_0/\hbar^2} r)] dr \right\}^2 \geq \epsilon_0$$

является необходимым для существования в центральном потенциале $U(r) \leq 0$ ($U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) связанного состояния частицы с энергией связи ϵ_0 (при $\epsilon_0 \rightarrow 0$ это условие соответствует результату предыдущей задачи).

4.23. Найти функцию Грина $G_{l,E}(r, r')$ радиального уравнения Шрёдингера (IV.6) для свободной частицы с $E = -\hbar^2 \kappa^2/2m < 0$ на отрезке $[a, b]$ (при

этом $0 \leq a < b \leq \infty$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} - \kappa^2 \right] G_{l,E}(r, r') = \delta(r - r'),$$

удовлетворяющую граничным условиям $G_{l,E}(a, r') = G_{l,E}(b, r') = 0$.

4.24. Показать, что выполнение условия

$$\int_0^\infty r |U(r)| dr \geq (2l+1) n_l \hbar^2 / 2m$$

является необходимым для существования в потенциале притяжения $U(r) \leq 0$ ($U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) n_l уровней с моментом l частицы.

§ 2. Состояния с малой энергией связи.

Частица в совместном поле короткодействующего и дальнодействующего потенциалов

4.25. Обобщить результат задачи 2.13 на случай s -состояний частицы в центральном поле. Найти условия существования и появления новых дискретных s -уровней в потенциалах:

- а) $U = -\alpha/r^4$ при $r > a$ и $U = \infty$ при $r < a$, рис. 17;
- б) $U = -\alpha/(r+a)^4$, $a > 0$;
- в) $U = -U_0 a^4/(r^2 + a^2)^2$;

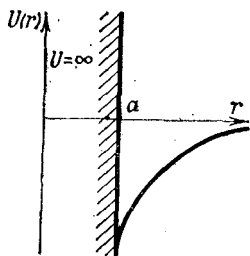


Рис. 17

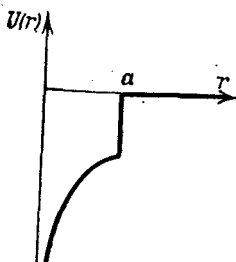


Рис. 18

г) $U = -\alpha/r^s$ при $r > a$ и $U = \infty$ при $r < a$; $s > 2$, рис. 17;

д) $U = -\alpha/r^s$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$; $0 < s < 2$, рис. 18.

4.26. Обсудить вопрос об условиях существования и появления новых связанных состояний частицы

с отличиями от нуля значениями момента при углублении потенциальной ямы на основе уравнения Шрёдингера для $E = 0$. Каково качественное отличие волновой функции в момент возникновения связанного состояния с $l \neq 0$ по сравнению со случаем $l = 0$? Рассмотреть конкретные потенциалы а) $U = -\alpha\delta(r-a)$; б) $U = -\alpha/r^4$ при $r > a$ и $U = \infty$ при $r < a$, рис. 17.

4.27. Параметры центрального потенциала $U_0(r)$ таковы ³⁾, что в нем имеется состояние дискретного спектра с моментом $l = 0$ и $E = 0$. Волновая функция $\Psi_0 = \chi_0(r)/\sqrt{4\pi r}$ этого состояния (т. е. в момент возникновения уровня) считается известной и нормированной, для определенности, условием $\chi_0(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Показать, что смещение этого уровня δE_0 под влиянием малого возмущения $\delta U \leq 0$ описывается выражением

$$\delta E_0 \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \left[\int_0^\infty \delta U(r) \chi_0^2(r) dr \right]^2.$$

Применить полученный результат к потенциалу $U = -\alpha\delta(r-a)$ и сравнить с точным решением, см. 4.8, а.

4.28. Показать, что обобщение результата предыдущей задачи на случай $l \neq 0$ имеет вид

$$\delta E_l = \int_0^\infty \delta U(r) (\chi_l^{(0)}(r))^2 dr,$$

где $\chi_l^{(0)}$ — волновая функция в момент возникновения уровня ($\Psi^{(0)} = \chi_l^{(0)} Y_{lm}/r$) — нормирована уже обычным условием $\int_0^\infty (\chi_l^{(0)})^2 dr = 1$.

Обратить внимание на различные законы углубления уровня $\delta E_l \propto \delta U$ и $\delta E_0 \propto -(\delta U)^2$ под влиянием возмущения в случаях $l \neq 0$ и $l = 0$ соответственно.

³⁾ При решении считать для простоты, что $U \equiv 0$ при $r > a$, a — радиус потенциала. Утверждение задачи сохраняется и для потенциалов, убывающих при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\propto 1/r^2$. В связи с задачами 4.27 и 4.28 см. также 13.49.

Применить полученный результат к δ -потенциалу и сравнить с точным решением, см. 4.9, а.

4.29. Найти ⁴⁾ сдвиги энергетических уровней частицы в центральном поле $U(r)$ под влиянием потенциала нулевого радиуса (п. н. р., см. 4.10), считая их малыми по сравнению с расстоянием между невозмущенными уровнями. Спектр и собственные функции оператора Гамильтона для потенциала $U(r)$ считать известными. Указать условие применимости полученного результата. В качестве иллюстрации рассмотреть приложение к задаче 4.11.

4.30. Показать, что обобщение результата предыдущей задачи на случай, когда состояние $\Psi_n^{(0)}(r)$ является слабосвязанным, имеет вид

$$E_n \approx - \left[\sqrt{-E_n^{(0)}} - \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\hbar^2/2m} (\tilde{R}_n^{(0)}(0))^2 \right]^2,$$

здесь $\tilde{R}_n^{(0)}(r)$ — радиальная волновая функция в момент появления s -уровня с $E = 0$, нормированная условием $r\tilde{R}_n^{(0)}(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$.

4.31. Частица находится в поле $U(r)$ (причем $rU \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$) и испытывает также действие потенциала нулевого радиуса, локализованного в точке $r = 0$, см. 4.10. Считая известной функцию Грина частицы $G_0(r, r'; E)$ в потенциале $U(r)$, показать, что спектр связанных состояний в рассматриваемой системе может быть определен из уравнения ⁵⁾

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (r G_0(r, 0; E)) \right]_{r=0} = - \frac{m \alpha_0}{2\pi \hbar^2}.$$

Получить отсюда для сдвига уровня результат теории возмущений по длине рассеяния (см. задачу 4.29, а также 11.4):

$$\Delta E_n \approx \frac{2\pi \hbar^2}{m} |\Psi_n^{(0)}(0)|^2 a_0,$$

здесь $a_0 \equiv 1/\alpha_0$ — длина рассеяния в п. н. р., $\Psi_n^{(0)}(r)$ — волновая функция невозмущенного уровня, существующего в потенциале $U(r)$, а ΔE_n — его сдвиг под влиянием п. н. р.

⁴⁾ По затронутым в задачах 4.29—31 вопросам см. также 11.4 и 9.3.

⁵⁾ Многочисленные приложения этой формулы рассмотрены в [20].

4.32. Для монотонного потенциала притяжения: $U'(r) \geq 0$ и $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, показать, что выполнение неравенства

$$\frac{2}{\pi \hbar} \int_0^{\infty} \sqrt{-2mU(r)} dr \geq 1$$

является необходимым условием существования связанного состояния; сравнить с 4.21.

Указание. Рассмотреть потенциал $\bar{U}(r)$, для которого волновая функция в момент возникновения связанного состояния имеет вид

$$\chi_0 = \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_r^{\infty} p_0(r) dr \right), \quad \text{где} \quad p_0(r) = \sqrt{-2m\bar{U}(r)},$$

и сравнить его с $U(r)$.

§ 3. Системы с аксиальной симметрией

4.33. Найти энергетические уровни дискретного спектра частицы в двумерной потенциальной яме вида

а) $U(\rho) = -\alpha \delta(\rho - a)$;

б) $U = -U_0$ при $\rho < a$ и $U = 0$ при $\rho > a$,

отвечающие значению проекции момента $m = 0$. Специально обсудить случай мелкой ямы; сравнить с одномерным движением.

4.34. Найти энергетический спектр связанных состояний частицы с произвольным значением проекции момента m в двумерных потенциальных полях:

а) $U(\rho) = -\alpha/\rho$;

б) $U = 0$ при $\rho < a$ и $U = \infty$ при $\rho > a$.

Указать кратность вырождения уровней.

4.35. В двумерном случае найти функцию Грина свободной частицы при энергии $E < 0$, убывающую при $\rho \rightarrow \infty$.

4.36. То же, что и в предыдущей задаче, но для $E > 0$. Рассмотреть функции Грина $G_E^{(\pm)}$, имеющие асимптотики при $\rho \rightarrow \infty$ вида расходящейся и сходящейся волн.

4.37. Найти функцию Грина $G_E(\varphi, \varphi')$ плоского ротатора (см. 3.1). Рассматривая ее как аналитическую функцию комплексной переменной E , показать, что она имеет особые точки — полюсы, и установить связь между положениями этих полюсов в плоскости E и энергетическими уровнями ротатора, сравнить с 2.26.

4.38. Найти функцию Грина $G_E(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ сферического ротатора, \mathbf{n} — единичный вектор вдоль оси ротатора (см. 3.2). Задачу предлагается решить двумя способами:

1) непосредственно решая уравнение для функции Грина,

2) используя общий алгоритм построения функции Грина; см. [15, с. 136].

Г л а в а 5

СПИН

Волновая функция частицы со спином s имеет $(2s + 1)$ компоненту и в s_z -представлении изображается в виде столбца

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{r}, s) \\ \psi(\mathbf{r}, s-1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{r}, -s) \end{pmatrix}, \quad (\text{V. 1})$$

где $\psi(\mathbf{r}, \sigma)$ является амплитудой состояния с проекцией спина на ось z , равной σ , причем $\sigma = s, s-1, \dots, -s$. В этом представлении операторы компонент вектора спина — механического момента по своей физической природе — изображаются матрицами $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$, элементы которых определяются общими формулами (III.9) с $l = s, m = \sigma$; матрица \hat{s}_z диагональна и $(\hat{s}_z)_{\sigma\sigma'} = \sigma\delta_{\sigma\sigma'}$.

Для спина $s = 1/2$ эти операторы $\hat{\mathbf{s}} = 1/2\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ выражаются через матрицы Паули:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{V. 2})$$

Матрицы Паули обладают следующим свойством¹⁾:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \hat{\sigma}_l \quad (\text{V. 3})$$

(здесь $i, k = 1, 2, 3$; при этом $\hat{\sigma}_1 \equiv \hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_2 \equiv \hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_3 \equiv \hat{\sigma}_z$).

В случае $s = 1/2$ для компонент спиновой функции часто используются обозначения $\psi_1 \equiv \psi(\sigma = +1/2)$ и $\psi_2 \equiv \psi(\sigma = -1/2)$, так что $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, а скалярное произведение в спиновом пространстве записывается в виде $\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv \Phi^* \Psi \equiv \Phi_1^* \psi_1 + \Phi_2^* \psi_2$.

Отметим характерное для $s = 1/2$ свойство произвольного спинового состояния: возможность всегда указать такое направление, на которое проекция спина имеет определенное (равное $\pm 1/2$) значение. Если записать нормированную на 1 спиновую функцию наиболее общего состояния в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (\text{V. 4})$$

то θ и φ определяют полярный и азимутальный углы такой оси \mathbf{n} , для которой $s_n = +1/2$, см. 5.3.

Часто приходится иметь дело со спиновым состоянием, описываемым *матрицей плотности* $\hat{\rho}$. Элементы $\rho_{\sigma\sigma'}$ такой матрицы сопоставляются билинейной комбинации $\psi(\sigma)\psi^*(\sigma')$ из спиновых волновых функций и могут рассматриваться как результат некоторого усреднения ее²⁾:

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \overline{\psi(\sigma, \lambda) \psi^*(\sigma', \lambda)} \quad (\text{V. 5})$$

(здесь λ — параметр усреднения). При этом среднее значение оператора (матрицы) \hat{f} в спиновом про-

¹⁾ В частности: $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1$, $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z$ и т. д. Из (V. 3) следует антикоммутативность разных матриц Паули: $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k + \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_i = 0$ для $i \neq k$.

²⁾ Матрица плотности нормирована условием $\text{Sp } \hat{\rho} = 1$. Ее диагональные элементы $\rho_{\sigma\sigma}$ определяют вероятности соответствующих значений σ проекции спина на ось z . В случае $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ матрица плотности имеет вид $\rho_{\sigma\sigma'} = \psi(\sigma') \psi^*(\sigma')$ и характеризует *чистое* состояние, описываемое уже волновой функцией $\psi(\sigma)$.

пространстве описывается выражением $\bar{f} = \text{Sp}(\hat{f}\hat{\rho}) = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{f})$.

Для спина $s = 1/2$ матрица плотности может быть записана в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\hat{\sigma}), \quad (\text{V. 6})$$

где $\mathbf{P} = 2\bar{\mathbf{s}}$ — так называемый *вектор поляризации*. Случай $\mathbf{P} = 0$ соответствует полностью неполяризованному состоянию, а при $|\mathbf{P}| = 1$, наоборот, состояние является *чистым* и описывается спиновой функцией (V. 4) с выбором соответствующей оси вдоль вектора \mathbf{P} .

§ 1. Спин $s = 1/2$

5.1. Для частицы со спином $s = 1/2$ найти собственные значения и собственные функции операторов \hat{s}_x , \hat{s}_y и \hat{s}_z соответственно.

5.2. Указать вид оператора проекции спина \hat{s}_n на произвольное направление, задаваемое единичным вектором \mathbf{n} . В состояниях с определенным значением проекции спина на ось z найти \bar{s}_n . Каковы в этих состояниях вероятности значений проекции спина $\pm 1/2$ на направление \mathbf{n} ?

5.3. В случае спина $s = 1/2$ нормированная волновая функция наиболее общего спинового состояния имеет вид $\Psi = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ e^{i\beta} \sin \alpha \end{pmatrix}$, где $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 \leq \beta < 2\pi$. Найти полярный и азимутальный углы такой оси \mathbf{n} в пространстве, на которую проекция спина имеет определенное значение, равное $+1/2$ (возможность указать такую ось для произвольного состояния — специфика спина $s = 1/2$; сравнить с результатом 3.42 для момента $L = 1$).

Используя полученный результат, решить задачу 5.1.

5.4. Показать, что коэффициенты в разложении произвольной квадратной матрицы 2-го ранга \hat{A} по полной системе матриц $\hat{1}$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$

$$\hat{A} = a_0\hat{1} + a_x\hat{\sigma}_x + a_y\hat{\sigma}_y + a_z\hat{\sigma}_z \equiv a_0 + \mathbf{a}\hat{\sigma}$$

равны $2a_0 = \text{Sp} \hat{A}$, $2\mathbf{a} = \text{Sp}(\hat{\sigma}\hat{A})$.

5.5. Упростить выражение $(\mathbf{a}\hat{\sigma})^n$, где \mathbf{a} — вещественный числовой вектор, n — целое число, $\hat{\sigma}$ — матрицы Паули.

5.6. Найти:

1) собственные значения и собственные функции оператора $\hat{f} = a + \mathbf{b}\hat{\sigma}$,

2) явное выражение для оператора вида $\hat{F} = F(a + \mathbf{b}\hat{\sigma})$; здесь a и \mathbf{b} — вещественные скалярный и векторный параметры, $F(z)$ — достаточно произвольная функция переменной z .

Рассмотреть в качестве иллюстрации оператор $\hat{R}(\varphi_0) = \exp(i\varphi_0\hat{\sigma}/2)$, описывающий преобразование спиновой функции, $\Psi' = \hat{R}(\varphi_0)\Psi$, при повороте системы координат на угол φ_0 , и с его помощью найти собственные функции $\Psi_{s_n=\pm 1/2}$ оператора проекции спина на направление вектора \mathbf{n} (сравнить с 5.3).

5.7. Используя закон преобразования спиновых функций $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ при вращении системы координат $\Psi' = \hat{R}(\varphi_0)\Psi$ (см. предыдущую задачу), показать, что при этом величины вида

$$S = \Phi^* \Psi = \varphi_1^* \psi_1 + \varphi_2^* \psi_2$$

не изменяются, т. е. являются скалярами, а вида

$$\mathbf{V} = \Phi^* \hat{\sigma} \Psi \quad \left(\text{или } V_i = \sum_{\alpha, \beta} \varphi_\alpha^* (\hat{\sigma}_i)_{\alpha\beta} \psi_\beta \right)$$

преобразуются как вектор.

5.8. Рассмотреть матричный элемент вида

$$\langle \Psi^{(2)} | \hat{A} | \Phi^{(1)} \rangle \langle \Phi^{(2)} | \hat{B} | \Psi^{(1)} \rangle \equiv \psi_\alpha^{(2)*} A_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{(1)} \varphi_\gamma^{(2)*} B_{\gamma\delta} \psi_\delta^{(1)},$$

где \hat{A} , \hat{B} — некоторые матрицы 2×2 , а $\Psi^{(1,2)}$, $\Phi^{(1,2)}$ — спиновые функции. Показать возможность записи его в форме

$$\sum_{i, k=0}^3 C_{ik} \langle \Psi^{(2)} | \hat{\sigma}_i | \Psi^{(1)} \rangle \langle \Phi^{(2)} | \hat{\sigma}_k | \Phi^{(1)} \rangle$$

с «переставленными» спиновыми функциями; здесь для единообразия записи положено $\hat{1} \equiv \hat{\sigma}_0$. Записать таким образом скалярные матричные элементы

$$\langle \Psi^{(2)} | \Phi^{(1)} \rangle \langle \Phi^{(2)} | \Psi^{(1)} \rangle \text{ и } \langle \Psi^{(2)} | \hat{\sigma} | \Phi^{(1)} \rangle \langle \Phi^{(2)} | \hat{\sigma} | \Psi^{(1)} \rangle.$$

5.9. Найти проекционные операторы $\hat{P}_{s_z=\pm 1/2}$ для состояний с определенным значением проекции спина на ось z . Какой вид имеет их обобщение $\hat{P}_{s_n=\pm 1/2}$ на случай определенного значения проекции спина на ось, направление которой задается единичным вектором \mathbf{n} ? С помощью этих операторов найти спинорные функции $\Psi_{s_n=\pm 1/2}$ и сравнить с 5.3.

5.10. Для системы из двух спинов с $s = 1/2$ найти собственные функции Ψ_{ss_z} операторов квадрата суммарного спина и его проекции на ось z . Обратить внимание на характер симметрии этих функций по отношению к взаимной перестановке спиновых переменных обеих частиц в зависимости от значения S .

5.11. Система из двух спинов с $s = 1/2$ находится в состоянии, описываемом спинорной функцией вида $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \chi_\beta$ (мультипликативный вид $\Psi_{\alpha\beta}$ указывает на отсутствие корреляции между спинорными состояниями частиц).

Каковы вероятности различных значений S суммарного спина в этом состоянии? Чему равно значение $\overline{S^2}$? Рассмотреть, в частности, случай, когда $\varphi_\alpha = \chi_\alpha$.

5.12. Для системы из двух частиц со спинами $s = 1/2$ показать, что

1) оператор $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2$ в состояниях, отвечающих определенному значению суммарного спина, также имеет определенное значение,

2) оператор $(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2$ может быть представлен в виде, содержащем матрицы Паули $\hat{\sigma}_{1,2}$ в степени не выше первой.

5.13. В условиях предыдущей задачи найти оператор спинового обмена \hat{C} , действие которого на спинорную функцию $\Psi_{\alpha\beta}$ состоит в следующем: $\hat{C}\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}$, т. е. он переставляет спинорные переменные обеих частиц (задача состоит в том, чтобы выразить \hat{C} через матрицы Паули).

5.14. Для системы из двух частиц со спином $s = 1/2$ найти собственные функции и собственные значения операторов:

- а) $\hat{V}_1 = F(a + b\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)$, $F(x)$ — некоторая функция x ;
- б) $\hat{V}_2 = a(\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}) + b\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2$;

$$в) \hat{V}_3 = a\hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z} + b\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2;$$

$$г) \hat{V}_4 = a_1\hat{\sigma}_{1z} + a_2\hat{\sigma}_{2z} + b\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$$

(параметры a , b вещественны, так что операторы \hat{V} эрмитовы).

5.15. Спины N частиц, равные s каждый, складываются в результирующий спин $S = Ns$. Каков при этом суммарный спин любых 2, 3, ..., n частиц? Имеет ли спиновая функция определенную симметрию по отношению к перестановке спиновых переменных любых двух частиц?

5.16. Спиновая функция системы из N спинов $s = 1/2$ имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{n+1} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_N.$$

Найти $\overline{s^2}$. В частных случаях $n = 1$ и $n = N - 1$ найти также вероятности возможных значений S суммарного спина.

5.17. Состояние частицы со спином $s = 1/2$ характеризуется определенными значениями квантовых чисел l , m , s_z . Найти вероятности возможных значений j полного момента $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$; воспользоваться результатом 3.29.

5.18. Моменты двух слабо взаимодействующих подсистем, равные 1 и $1/2$, складываются в результирующий момент J . В состояниях совокупной системы, характеризующихся определенными значениями J и J_z , найти вероятности значений проекций складываемых моментов на ось z и их средние значения. При решении задачи воспользоваться операторами \hat{J}_{\pm} , не прибегая к коэффициентам Клебша — Гордана.

5.19. В системе из трех частиц со спином $s = 1/2$ имеется восемь независимых спиновых состояний. Произвести их классификацию по значениям суммарного спина системы. Найти полную систему спиновых функций ss_z , описывающих состояния с определенными значениями S , S_z суммарного спина. Обратить внимание на характер симметрии этих функций по отношению к перестановке спиновых переменных частиц и сравнить со случаем системы из двух частиц.

§ 2. Спин-орбитальные состояния частицы со спином $s = 1/2$. Высшие спины

5.20. Состояния частицы с определенным значением λ проекции спина на направление импульса называют *спиральными*³⁾. Для частицы со спином $s = 1/2$ найти волновые функции $\Psi_{p_0, \lambda}$ состояний с определенными импульсом p_0 и спиральностью $\lambda = \pm 1/2$.

5.21. Для частицы со спином $s = 1/2$ показать, что наиболее общая спин-угловая зависимость волновой функции $p_{1/2}$ -состояния (т. е. состояния с $l = 1$ и полным моментом $j = 1/2$) имеет вид

$$\Psi = (\hat{\sigma} \mathbf{n}) \chi, \quad \text{или} \quad \Psi_\alpha = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \mathbf{n} \chi_\beta,$$

где $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ — произвольный спинор, не зависящий от направления вектора \mathbf{n} ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ или $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ в зависимости от используемого представления).

Нормировать на единицу эту волновую функцию.

Каково распределение (усредненное по спину) по направлениям импульса частицы в указанном состоянии?

Вычислив среднее значение \bar{j} , выяснить, как этот вектор зависит от конкретного выбора спинора χ .

Найти вид функций, описывающих $p_{1/2}$ -состояния с определенным значением $j_z = \pm 1/2$.

5.22. Провести анализ состояний частицы со спином $s = 1/2$, спин-угловая зависимость волновых функций которых имеет вид $\Psi_\pm = (1 \pm \hat{\sigma} \mathbf{n}) \chi$ (спинор χ не зависит от \mathbf{n}), по значениям следующих квантовых чисел: j, l, I (четность), а также λ — с. з. оператора $\hat{\lambda} = \hat{\sigma} \mathbf{n}/2$ — проекции спина на направление вектора \mathbf{n} (при этом если $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, т. е. используется импульсное представление, то λ является спиральностью).

Как функции Ψ_\pm преобразуются при инверсии координат?

5.23. Для частицы со спином $s = 1/2$ показать, что наиболее общая спин-угловая зависимость волновой функции состояния $p_{3/2}$ имеет вид $\Psi = \{2(\mathbf{c} \mathbf{n}) +$

³⁾ Отметим, что так как вектор импульса — *полярный*, а спина — *аксиальный*, то спиральность является псевдоскалярной величиной и при инверсии координат изменяет знак.

$+i[\mathbf{cn}]\hat{\sigma}\chi$, где вектор \mathbf{c} и спинор $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ от вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ не зависят.

При каком конкретном выборе \mathbf{c} и χ указанная функция описывает $p_{3/2}$ -состояние с определенным значением $j_z = \pm 1/2, \pm 3/2$ проекции полного момента на ось z ?

5.24. Для частицы со спином $s = 1/2$ найти спин-угловые волновые функции Ψ_{jlj_z} состояний с определенными значениями l, j_z и $j = l \pm 1/2$ (l, j — орбитальный и полный моменты).

Задачу предлагается решить следующими двумя способами, не прибегая к коэффициентам Клебша — Гордана:

- 1) используя проекционные операторы \hat{P}_j ,
- 2) используя повышающие (понижающие) операторы \hat{j}_{\pm} .

5.25. Показать, что функции Ψ_{jlj_z} , рассмотренные в предыдущей задаче, связаны соотношением

$$\Psi_{jl_1j_z} = (\hat{\sigma}\mathbf{n}) \Psi_{jl_2j_z}, \quad l_{1,2} = j \pm 1/2 \quad (\mathbf{n} = \mathbf{r}/r \text{ или } \mathbf{p}/p).$$

Найти спин-угловую зависимость волновых функций $\Psi_{jlj_z\lambda}$ (в импульсном представлении) состояний частицы с определенными значениями j, j_z и спиральности λ .

5.26. Частицу со спином $s = 1$ можно описывать как симметричным спинором⁴⁾ второго ранга $\psi^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ (спинорное представление), так и векторной функцией $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (векторное представление). Указать:

- 1) вид оператора спина в этих представлениях,
- 2) связь этих волновых функций с волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, \sigma)$ в s_z -представлении,
- 3) явный вид рассматриваемых волновых функций для состояния частицы с орбитальным моментом $l = 1$ и полным $j = 0$.

⁴⁾ Для решения задач 5.26 и 5.27 надо знать основы спинорной алгебры и связь спиноров с тензорами, см. § 56, 57 в [1]. При этом следует различать ко- и контравариантные спинорные компоненты. Соответственно обычные матрицы Паули (V. 2) теперь надо писать не в виде $(\sigma_i)_{\alpha\beta}$, а как $\sigma_{i,\beta}^{\alpha}$; здесь i является векторным, а α и β контра- и ковариантными спинорными индексами. В 5.26 и 5.27 векторные индексы изображаются латинскими буквами, спинорные — греческими.

5.27. Частицу со спином $s = 3/2$ можно описывать как симметричным спинором третьего ранга $\psi^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$, так и спин-векторной функцией $V_k^\alpha(\mathbf{r})$, удовлетворяющей дополнительному условию $(\hat{\sigma}_k)_\beta^\alpha V_k^\beta = 0$. Указать вид оператора спина и связь волновых функций в этих представлениях друг с другом и с волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, \sigma)$ в s_z -представлении.

Указать вид волновых функций состояний частицы с $l = 1$ и полным моментом $j = 1/2$.

§ 3. Спиновая (поляризационная) матрица плотности. Угловые распределения и корреляции в распадах

5.28. Система из двух частиц с $s = 1/2$ находится в состоянии с определенными значениями S и S_z (S — суммарный спин). Найти спиновые матрицы плотности каждой из частиц в этих состояниях.

5.29. Частица со спином $s = 1/2$ находится в состоянии с определенными значениями j , l и j_z . Найти спиновую матрицу плотности, характеризующую спиновое состояние частицы безотносительно к ее положению в пространстве.

5.30. Указать ограничения на квантовые числа ⁵⁾ — спин J и внутреннюю четность P — нейтральной частицы A^0 , следующие из факта существования распадов такой частицы $A^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, идущих с сохранением четности; квантовые числа пиона $J_{\pi^\pm}^P = 0^-$.

Найти угловое распределение пионов в системе покоя частицы A^0 , если она находится в состоянии с определенным значением J_z , см. также 5.32.

5.31. Показать, что существование у K -мезона, имеющего спин $J_K = 0$, каналов распада как на два пиона $K \rightarrow 2\pi$, так и на три $K \rightarrow 3\pi$ (для пиона $J_\pi^P = 0^-$), свидетельствует о несохранении четности в его распадах (до открытия несохранения четности считалось, что эти каналы распада соответствуют двум различным частицам θ и τ ; и именно разрешение $\tau - \theta$ -проблемы стимулировало эксперименты, в которых непосредственно было установлено несохранение четности в *слабых взаимодействиях*).

⁵⁾ При применении закона сохранения четности к распадам, когда изменяется вид частиц, необходимо учитывать их *внутренние четности*. О распаде $A^0 \rightarrow 2\pi^0$ см. 10.5.

5.32. Покоящаяся частица X со спином J распадается на две бесспиновые частицы (например, на два пиона). Найти угловое распределение продуктов распада в случае, если

а) распадающаяся частица имеет определенное значение J_z ,

б) находится в состоянии, описываемом спиновой матрицей плотности $\rho_{mm'}$, где m — проекция спина на ось z .

В качестве иллюстрации рассмотреть угловое распределение пионов в распаде *векторной* частицы $V \rightarrow 2\pi$ ($J_V^P = 1^-$).

5.33. Найти угловое распределение продуктов распада $B \rightarrow \pi N$ нестабильной частицы B со спином $J_B = 1/2$, если

а) в распаде сохраняется четность, и четность частицы B отрицательная;

б) в распаде сохраняется четность, и четность частицы B положительная;

в) распад происходит с несохранением четности. Предполагается, что спиновое состояние образующегося нуклона не фиксируется (напомним квантовые числа нуклона и пиона: $J_N^P = (1/2)^+$, $J_\pi^P = 0^-$).

5.34. В распаде $X \rightarrow a + B$ бесспиновой частицы X спин частицы a также равен нулю, а у частицы B спин равен j . Найти поляризационную матрицу плотности частицы B при

а) фиксированном выборе в пространстве оси квантования z ;

б) выборе оси квантования вдоль направления относительного движения продуктов распада (в системе покоя X).

В случае а) найти также элементы матрицы плотности, усредненные по направлениям вылета продуктов распада.

5.35. В условиях предыдущей задачи частица B в свою очередь распадается на две бесспиновые частицы: $B \rightarrow b + c$. Найти функцию распределения по значениям угла γ между векторами \mathbf{p}_a — импульса частицы a в системе покоя X и \mathbf{p}_b — импульса частицы b в системе покоя⁶⁾ B (так что $\cos \gamma = \mathbf{p}_a \mathbf{p}_b / p_a p_b$),

⁶⁾ Обратим внимание на то, что векторы \mathbf{p}_a и \mathbf{p}_b определены по отношению к различным системам отсчета.

описывающую корреляцию между направлениями вылета этих частиц.

5.36. Установить соотношение между спинowymi матрицами плотности $\hat{\rho}^{(a, b)}(\mathbf{n})$ частиц a и b , имеющих спин $1/2$ и образующихся в распаде $X \rightarrow a + b$ бесспиновой частицы X (вектор \mathbf{n} направлен вдоль относительного импульса частиц a и b). Обсудить случаи, когда а) четность в распаде сохраняется; б) распад происходит с несохранением четности.

Г л а в а 6

ИЗМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Изменение во времени состояний квантовомеханических систем может быть описано несколькими различными способами.

В *шрёдингеровском представлении* волновая функция (вектор состояния) изменяется во времени в соответствии с уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = \hat{H} \Psi(q, t), \quad (\text{VI. 1})$$

а операторы динамических переменных: координат \hat{q}_i , импульсов \hat{p}_i , спина \hat{s}_i от времени не зависят. Если гамильтониан не зависит явно от времени, то волновая функция системы может быть записана в виде разложения¹⁾

$$\Psi(q, t) = \sum_n c(E_n) e^{-iE_n t/\hbar} \Psi_{E_n}(q) \quad (\text{VI. 2})$$

по полной системе собственных функций $\Psi_{E_n}(q)$ гамильтониана (описывающих *стационарные состояния*). Коэффициенты в нем однозначно определяются заданием волновой функции в начальный момент времени

$$c(E_n) = \int \Psi_{E_n}^*(q) \Psi(q, t=0) d\tau_q. \quad (\text{VI. 3})$$

Если некоторой физической величине f сопоставляется квантовомеханический оператор $\hat{f} \equiv f(\hat{q}, \hat{p}, t)$, то оператор, соответствующий физической величине

¹⁾ По поводу формы записи разложения см. подстрочное примечание на стр. 12.

$\dot{f} \equiv df/dt$ (производной по времени), определяется соотношением

$$\hat{\dot{f}} \equiv \dot{\hat{f}} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{f}]. \quad (\text{VI. 4})$$

Физическую величину, для которой $\dot{\hat{f}} = 0$, называют *интегралом движения*.

Временная функция Грина $G(q, t; q', t')$, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера по переменным q, t и начальному условию $G(q, t = t', q', t') = \delta(q - q')$, позволяет записать решение уравнения (VI. 1) в виде

$$\Psi(q, t) = \int G(q, t; q', 0) \Psi_0(q') d\tau_{q'}, \quad (\text{VI. 5})$$

где $\Psi_0(q) \equiv \Psi(q, t = 0)$. При не зависящем от времени гамильтониане для функции Грина имеем

$$G(q, t; q', t') = \sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \Psi_{E_n}(q) \Psi_{E_n}^*(q'). \quad (\text{VI. 6})$$

В частности, для свободной частицы, $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$, временная функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \left(-\frac{im}{2\pi\hbar(t-t')} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{im(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2\hbar(t-t')} \right]. \quad (\text{VI. 7})$$

В *гейзенберговском представлении*, наоборот, от времени не зависит волновая функция системы, а временная зависимость операторов динамических переменных определяется уравнениями²⁾

$$\frac{d}{dt} \hat{q}_i(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{q}_i(t)], \quad \frac{d}{dt} \hat{p}_i(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}_i(t)], \quad (\text{VI. 8})$$

причем гамильтониан $\hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t), t)$ выражается уже через гейзенберговские операторы $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$, удовлетворяющие каноническому коммутационному соотношению $[\hat{p}_i(t), \hat{q}_k(t)] = -i\hbar\delta_{ik}$. Теперь соотношение

²⁾ Чтобы различать используемое представление, у операторов динамических переменных в гейзенберговском представлении указывается на их временную зависимость: $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$. Обозначения \hat{q}, \hat{p} сохраняются для операторов в шрёдингеровском представлении. Обычно связь этих представлений вводится таким образом, что при $t = 0$ соответствующие операторы и волновые функции состояний совпадают, сравнить с (VI. 9).

(VI.4) является уже не определением \hat{f} , а непосредственным следствием (VI.8).

Шрёдингеровское и гейзенберговское представления для описания временной эволюции системы связаны унитарным преобразованием: $\Psi(q, t) = \hat{U}(t) \Psi_0(q)$. Если гамильтониан не зависит явно от времени, то $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ и соотношение между операторами в этих представлениях имеет вид

$$\hat{f}_\Gamma(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{f}_\Gamma e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \quad (\text{VI.9})$$

§ 1. Представление Шрёдингера.

Движение волновых пакетов

6.1. Для указанных ниже систем и их волновых функций Ψ_0 в начальный момент времени ($t = 0$):

1) частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a и $\Psi_0(x) = A \sin^3(\pi x/a)$ при $0 < x < a$,

2) плоского ротатора и $\Psi_0(\varphi) = A \sin^2 \varphi$,

3) сферического ротатора и $\Psi_0(\theta, \varphi) = A \cos^2 \theta$ найти волновые функции в произвольный момент времени. Показать, что через некоторое время T рассматриваемые системы возвращаются в исходное состояние.

6.2. Состояние свободной частицы при $t = 0$ описывается волновой функцией

$$\Psi_0(x) = A \exp(-x^2/2a^2 + ip_0 x/\hbar).$$

Найти изменение состояния во времени и следующие средние: $\overline{x(t)}$, $\overline{p(t)}$, $\overline{(\Delta x(t))^2}$, $\overline{(\Delta p(t))^2}$ (см. также 6.21). Показать, что ширина волнового пакета $\overline{(\Delta x(t))^2}$ независимо от значений параметров, определяющих волновую функцию $\Psi_0(x)$, не может быть произвольно малой.

6.3. Рассмотрим при $t = 0$ нормированный волновой пакет

$$\Psi(x, t=0) = \int c(E) \Psi_E(x) dE, \quad \int |\Psi|^2 dx = 1,$$

составленный из собственных функций гамильтониана, отвечающих непрерывной части энергетического спектра. Показать, что плотность вероятности наход-

дения частицы в любой точке при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Почему это обстоятельство не противоречит сохранению нормировки волновой функции?

6.4. Состояние частицы в поле δ -ямы (см. 2.7) при $t = 0$ описывается волновой функцией $\tilde{\Psi}_0(x) = A \exp(-\beta|x|)$, $\beta > 0$. Какова вероятность $W(x)dx$ обнаружить частицу на отрезке $(x, x + dx)$ при $t \rightarrow \infty$? Найти значение интеграла $\int W(x)dx$ и сравнить его с первоначальным значением. Объяснить полученный результат.

6.5. При $t = 0$ состояние свободной частицы определяется нормированной на 1 волновой функцией $\Phi_0(p)$ в импульсном представлении. Найти асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ поведение ее волновой функции $\Psi(x, t)$. Убедиться в сохранении нормировки. Для иллюстрации результата рассмотреть волновой пакет из 6.2.

6.6. Рассмотреть отражение волнового пакета от непроницаемой стенки, т. е. для потенциала $U = \infty$ при $x > 0$ и $U = 0$ при $x < 0$. В начальный момент времени

$$\Psi(x, t = 0) = A \exp[ip_0 x / \hbar - (x + x_0)^2 / 2a^2],$$

причем $p_0 > 0$, $x_0 > 0$ и предполагается $x_0 \gg a$, так что можно считать $\Psi(x, 0) = 0$ при $x \geq 0$.

Указание. Предварительно найти временную функцию Грина $G(x, t; x', t')$ для рассматриваемого потенциала.

6.7. Рассмотреть отражение волнового пакета от потенциальной ступеньки вида $U(x) = U_0 > 0$ при $x > 0$ и $U(x) = 0$ при $x < 0$ (рис. 8), считая, что падающий слева на барьер пакет включает с одинаковой амплитудой импульсы из интервала $p_0 \pm \Delta p$ с $\Delta p \ll p_0$ и $E_0 < U_0$. Найти время задержки в процессе отражения от барьера по сравнению со случаем классической частицы.

6.8. Рассмотреть процесс отражения частицы потенциалом $U(x)$. Состояние движущейся в область действия потенциала частицы описывается нормированным на единицу волновым пакетом. Считая для определенности, что в этом пакете с одинаковой амплитудой представлены импульсы частицы из интервала $p_0 \pm \Delta p$, выяснить, при каких ограничениях на Δp значения коэффициентов отражения и прохожде-

ния не зависят от его величины и определяются обычными выражениями стационарной теории, см. (II. 4).

6.9. На *двухуровневую систему*³⁾ (уровни невырожденные, их энергии $\epsilon_1^{(0)}$ и $\epsilon_2^{(0)}$), находящуюся в одном из стационарных состояний, при $t > 0$ начинает действовать внешнее поле. Взаимодействие \hat{V} системы с полем характеризуется матричными элементами V_{11} , V_{22} , $V_{12} = V_{21}^*$ между исходными невозмущенными состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, причем V_{ab} от времени не зависят (при $t > 0$). Найти волновую функцию системы при $t > 0$ и вероятности нахождения ее в собственных состояниях невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 .

§ 2. Изменение во времени физических величин. Интегралы движения

6.10. Для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в электромагнитном поле⁴⁾, найти операторы скорости \hat{v} и ускорения \hat{w} . Сравнить с выражениями классической теории.

6.11. Для нейтральной частицы со спином s , имеющей собственный магнитный момент μ_0 и движущейся в электромагнитном поле⁵⁾, найти операторы скорости \hat{v} , ускорения \hat{w} и производной по времени вектора спина \hat{s} .

6.12. Показать, что среднее значение производной по времени физической величины, не зависящей явно от времени, в стационарном состоянии дискретного спектра равно нулю. Основываясь на этом результате⁶⁾, усреднением оператора $d(\hat{p}\hat{r})/dt$ доказать

³⁾ Двухуровневая система моделирует поведение системы, энергетический спектр которой имеет два близких уровня. При не слишком сильном воздействии на систему переходы между этими и другими ее состояниями малы.

⁴⁾ Гамильтониан частицы — см. (VII. 1).

⁵⁾ Гамильтониан частицы — см. (VII. 1).

⁶⁾ В ряде случаев для конкретного вида потенциала при подходящем выборе оператора $\hat{f}(\hat{r}, \hat{p})$ из условия

$$\overline{\hat{f}} = (i/\hbar) [\hat{H}, \hat{f}] = 0$$

можно получить соотношения между различными средними; см. в связи с этим [15, с. 61].

теорему вириала для частицы, движущейся в потенциале $U = \alpha r^\nu$.

6.13. Показать, что для системы из N заряженных частиц, находящейся в n -м стационарном состоянии дискретного спектра, справедливо равенство (так называемое «правило сумм», см. также 14.11)

$$\frac{2\mu}{e^2 \hbar^2} \sum_m (E_m - E_n) |(\hat{d}_i)_{mn}|^2 = N \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $(\hat{d}_i)_{mn}$ — матричные элементы дипольного момента системы; суммирование проводится по всем независимым стационарным состояниям системы, μ и e — масса и заряд каждой частицы.

6.14. Показать, что если не зависящий явно от времени унитарный оператор \hat{U} оставляет гамильтониан системы неизменным, так что $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^+ = \hat{H}$, то связанный с $\hat{U} = \exp(i\hat{F})$ (см. 1.50) эрмитов оператор \hat{F} описывает сохраняющуюся величину — интеграл движения. Выяснить физический смысл интегралов движения системы из N частиц, связанных с инвариантностью ее гамильтониана относительно преобразований координат:

а) сдвига $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_n = \mathbf{r}_n + \mathbf{a}$,

б) поворота на угол $\varphi_0 = \varphi_0 \mathbf{n}_0$,

в) отражения $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_n = -\mathbf{r}_n$; $n = 1, 2, \dots, N$.

6.15. Указать механические интегралы движения для системы из N бесспиновых частиц, находящейся в следующих полях:

1) при свободном движении,

2) в поле бесконечной однородной плоскости,

3) в поле однородного шара,

4) в поле двух точек,

5) в однородном поле, зависящем от времени,

6) в поле равномерно заряженного прямого провода,

7) в поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.

6.16. Для частицы со спином $s = 1/2$, взаимодействие которой с внешним полем имеет вид⁷⁾

а) $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)(\hat{\sigma}\hat{\mathbf{l}})$,

б) $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)(\hat{\sigma}\hat{\mathbf{r}})/r$,

⁷⁾ См. также задачу 12.5.

указать интегралы движения и спин-угловую зависимость волновых функций стационарных состояний.

6.17. Показать, что если \hat{f}_1 и \hat{f}_2 — интегралы движения некоторой системы, то $\hat{g}_1 = (\hat{f}_1\hat{f}_2 + \hat{f}_2\hat{f}_1)$ и $\hat{g}_2 = i(\hat{f}_1\hat{f}_2 - \hat{f}_2\hat{f}_1)$ также являются интегралами движения.

Для иллюстрации результата указать еще один механический интеграл движения для системы, у которой сохраняются а) P_x и J_z , б) J_x и J_y ; объяснить полученный результат, исходя из свойств симметрии рассматриваемой системы.

6.18. Показать, что для частицы в однородном поле оператор $\hat{G} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{F}_0 t$ является оператором сохраняющейся величины (\mathbf{F}_0 — сила, действующая на частицу). Сравнить с результатом классической механики.

§ 3. Унитарные преобразования, зависящие от времени. Гейзенберговское представление

6.19. Доказать соотношение

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

6.20. Для указанных ниже систем:

а) свободной частицы,

б) частицы в однородном поле, $U = -F_0 x$,

в) линейного гармонического осциллятора —

найти гейзенберговские операторы координаты и импульса следующими способами: 1) используя унитарное преобразование, связывающее шрёдингеровское и гейзенберговское представления и 2) непосредственным решением уравнений движения для гейзенберговских операторов.

6.21. Используя гейзенберговские операторы координаты и импульса, найти следующие средние: $\overline{x(t)}$, $\overline{p(t)}$, $\overline{(\Delta x(t))^2}$, $\overline{(\Delta p(t))^2}$ для указанных в предыдущей задаче систем, находящихся в состоянии с волновой функцией

$$\Psi(x) = A \exp[ip_0 x/\hbar - (x - x_0)^2/2a^2].$$

6.22. Исходя из уравнений движения для гейзенберговских операторов, показать, что $[\hat{p}_i(t), \hat{x}_k(t)] = -i\hbar\delta_{ik}$.

6.23. Найти значение «разновременного» коммутатора $[\hat{p}(t), \hat{x}(t')]$ для указанных в 6.20 систем.

6.24. Частица (описываемая некоторым нормированным волновым пакетом) находится в однородном, переменном во времени поле, причем сила $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Найти изменение среднего значения энергии частицы, вызванное действием поля. Сравнить с результатом классической механики.

6.25. На линейный осциллятор, находящийся при $t \rightarrow -\infty$ в основном состоянии, действует внешняя сила $F(t)$, причем $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Найти вероятности возбуждения различных стационарных состояний осциллятора и среднее значение его энергии при $t \rightarrow +\infty$. Для решения задачи воспользоваться гейзенберговским представлением и исходить из уравнений движения для операторов рождения и уничтожения $\hat{a}^+(t)$, $\hat{a}(t)$.

6.26. Найти унитарный оператор, соответствующий преобразованию Галилея, т. е. переходу в новую инерциальную систему отсчета. Убедиться в инвариантности уравнения Шрёдингера относительно этого преобразования. Как при этом преобразуется волновая функция частицы в координатном и импульсном представлениях?

6.27. Найти унитарный оператор, соответствующий калибровочному преобразованию потенциалов электромагнитного поля. Убедиться в инвариантности уравнения Шрёдингера относительно этого преобразования.

6.28. Как необходимо преобразовать оператор Гамильтона системы, чтобы при зависящем явно от времени унитарном преобразовании уравнение Шрёдингера сохранило свой вид? Сравнить с каноническими преобразованиями в классической механике.

6.29. Указать вид унитарного преобразования, описывающего переход к равномерно вращающейся системе координат. Как при этом преобразуются операторы координат, импульса, скорости и гамильтониан частицы? Сравнить с результатом классической механики. Для иллюстрации рассмотреть заряженную частицу, находящуюся в циркулярном электрическом поле, т. е. таком, что $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, $\mathcal{E}_z = 0$.

6.30. Гамильтониан системы имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где «невозмущенный» гамильтониан \hat{H}_0 не зависит явно от времени. Рассмотреть унитарное преобразование от шрёдингеровского представления к новому, так называемому *представлению взаимодействия*, осуществляемое⁸⁾ унитарным оператором $\hat{U} = \exp(i\hat{H}_0(t - t_0)/\hbar)$ (при $\hat{V} \equiv 0$ и $t_0 = 0$ это преобразование описывает переход к гейзенберговскому представлению).

Как изменяются во времени операторы и волновая функция системы в представлении взаимодействия?

Для иллюстрации использования этого представления рассмотреть возбуждение линейного осциллятора, находящегося при $t \rightarrow -\infty$ в основном состоянии, внешней силой $F(t)$, причем $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Взаимодействие $\hat{V} = -F(t)x$ считать слабым. Сравнить с результатом точного решения, см. 6.25.

§ 4. Временные функции Грина

6.31. Показать, что для не зависящего от времени гамильтониана временная функция Грина удовлетворяет уравнению⁹⁾

$$\hat{q}(-t)G(q, t; q', t' = 0) = q'G(q, t; q', 0),$$

где $\hat{q}(t)$ — гейзенберговский оператор.

Используя это соотношение, найти функцию Грина свободной частицы в координатном и импульсном представлениях. Получить ее также по формуле (VI.6). С помощью найденной функции Грина решить задачу 6.2.

Указание. Предварительно показать, что если в шрёдингеровском представлении волновая функция при $t = 0$ является собственной функцией не зависящего от времени оператора \hat{f} , то $\Psi(q, t)$ является с. ф. гейзенберговского оператора $\hat{f}(-t)$.

⁸⁾ Значение времени t_0 выбирается обычно таким образом, чтобы оно предшествовало моменту включения взаимодействия $\hat{V}(t)$, либо $t_0 = 0$.

⁹⁾ В случае нескольких степеней свободы это — система соответствующего числа уравнений.

6.32. То же, что и в предыдущей задаче, для частицы в однородном поле $U = -F_0 r$.

6.33. То же, что и в двух предыдущих задачах, для линейного гармонического осциллятора.

6.34. Найти временную функцию Грина заряженной частицы в циркулярном электрическом поле во вращающейся системе координат; см. в связи с этим задачу 6.29.

6.35. Найти временную функцию Грина заряженной частицы в однородном магнитном поле.

§ 5. Квазистационарные и квазиэнергетические состояния ¹⁰⁾

6.36. Найти сдвиг и ширину основного уровня частицы в одномерной δ -яме (см. 2.7), возникающие при наложении однородного поля $V = -F_0 x$. Поле предполагается слабым, так что $aF_0 \ll \hbar^2/ma^2$, где $a = 1/\kappa_0 = \hbar^2/m\alpha$ определяет область локализации частицы в основном состоянии (в более сильных полях при нарушении этого условия ширина уровня становится порядка энергии связи частицы и исчезают специфические свойства квазистационарного состояния на фоне непрерывного спектра).

6.37. Найти квазидискретные уровни энергии (их положение и ширину) s -состояний частицы в потенциале $U = \alpha\delta(r - a)$, см. рис. 19. Специально обсудить случай малопроницаемого барьера $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$ и не очень сильно возбужденных уровней. Связать ширину уровня с проницаемостью δ -барьера, см. 2.30.

6.38. Обсудить вопрос о сохранении нормировки волновой функции состояния частицы в случае, когда потенциальная энергия является комплексной функцией: $U = U_0(\mathbf{r}) - iU_1(\mathbf{r})$, где $U_{0,1}$ — вещественные функции (так называемый *оптический потенциал*).

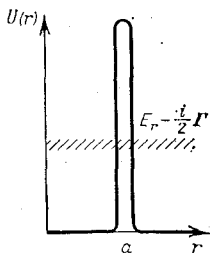


Рис. 19

¹⁰⁾ См. по этим, как и по многим другим, вопросам квантовой механики монографию А. И. Базя, Я. Б. Зельдовича и А. М. Переломова [15]. Общие представления о квазиэнергетических состояниях изложены в решении задачи 6.40, рассмотрение их в рамках теории возмущений см. в 8.41—43.

Изменение со временем нормировки волновой функции можно интерпретировать как «поглощение» или «рождение» частицы при взаимодействии. Как связан знак мнимой части потенциала с характером таких процессов?

Рассмотреть одномерную δ -яму с $U = -(\alpha_0 + i\alpha_1)\delta(x)$ и найти сдвиг и ширину основного уровня в ней, связанные с возможностью «поглощения» частицы (см. в связи с этим также следующую задачу).

6.39. Рассмотреть следующую модель системы с двумя каналами. Система состоит из двух частиц, совершающих одномерное движение. Одна из них является бесструктурной, а другая — составной, причем у нее имеется лишь два независимых состояния «внутреннего» движения, разность энергий которых равна Q_0 (сравнить с системой электрон + ядро). Волновую функцию такой системы в с. ц. и. можно рассматривать как двухкомпонентный столбец $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix}$, где $x = x_2 - x_1$ — относительная координата, а $\psi_{1,2}$ являются амплитудами нахождения составной частицы в 1-м и 2-м внутренних состояниях (соответственно этим двум возможностям и можно говорить о двух каналах). Взаимодействие частиц является точечным и описывается оператором

$$\hat{U} = -\hat{\alpha}\delta(x) = -\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \delta(x);$$

α, β — вещественные параметры, причем $\alpha > 0$.

Найти спектр дискретных и квазидискретных уровней такой системы. Показать, что при энергиях, близких к порогу второго канала, динамика в нем может быть рассмотрена на основе (одноканального) оптического потенциала и найти его вид.

6.40. Заряженная частица находится в однородном электрическом поле $\mathcal{E}(t)$, периодически изменяющемся со временем, $\mathcal{E}(t+T) = \mathcal{E}(t)$, причем так, что среднее за период значение напряженности поля равно нулю. Найти спектр *квазиэнергии* и вид волновых функций *квазиэнергетических состояний*. Специально обсудить случаи

a) $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$;

b) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \mathcal{E}_z = 0$

(электрическое поле соответственно линейно и циркулярно поляризованной монохроматической волны).

Указание. Воспользоваться описанием электрического поля с помощью векторного потенциала: $\mathcal{E}(t) = -\dot{\mathbf{A}}(t)/c$, который в случае $\overline{\mathcal{E}}(t) = 0$ является периодической функцией времени. Об изменении калибровки потенциалов см. 6.27.

6.41. Исследовать квазиэнергетические состояния (КЭС), возникающие из двукратно вырожденного уровня гамильтониана \hat{H}_0 под влиянием периодического возмущения $\hat{V}(t)$, матричные элементы которого между двумя рассматриваемыми состояниями невозмущенного гамильтониана равны¹¹⁾ $V_{11} = V_{22} = 0$, $V_{12} = V_{21} = V_0 \sin \omega t$, при этом $V_0 = V_0^*$. Выполнить разложение волновых функций КЭС по квазиэнергетическим гармоникам, см. 6.40. Наличием других состояний пренебречь, сравнить с двухуровневой системой из 6.9.

6.42. Показать, что рассмотрение квазиэнергетических состояний и вычисление спектра квазиэнергии для системы, находящейся в электрическом поле циркулярно поляризованной волны, т. е. $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, $\mathcal{E}_z = 0$, может быть сведено к решению стационарного уравнения Шрёдингера.

Г л а в а 7

ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Гамильтониан заряженной частицы со спином s и спиновым магнитным моментом¹⁾ μ_0 в присутствии

¹¹⁾ Эта задача моделирует, например, влияние электрического поля $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ на заряженную частицу в потенциале с вырожденными s - и p -уровнями ($2s$ - и $2p$ -состояния с $l_z = 0$, ось z вдоль \mathcal{E}_0 , в атоме водорода). При напряженности поля, много меньшей атомной, искажение волновых функций мало и наиболее существенным является их «перемешивание» внешним полем.

¹⁾ Оператор спинного магнитного момента $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{s}/s$, так что последнее слагаемое в (VII.1) имеет вид $-\hat{\mu} \mathcal{H}$; для частицы с $s = 1/2$ оно равно $-\mu_0 \hat{\sigma} \mathcal{H}$.

Обратим также внимание на использование в решениях задач следующих обозначений: буквы m — как для массы, так и для магнитного квантового числа, а μ — как для магнитного момента, так и для массы.

магнитного поля — *гамильтониан Паули* — имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U - \frac{\mu_0}{s} \mathcal{H} \hat{\mathbf{s}}, \quad (\text{VII. 1})$$

при этом $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ и $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$.

Оператор скорости частицы $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}/c)/m$ (см. 6.10); его компоненты удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_k] = ie\hbar \varepsilon_{ikl} \mathcal{H}_l / m^2 c, \quad (\text{VII. 2})$$

или в векторной форме $\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{v}} = ie\hbar \mathcal{H} / m^2 c$.

В однородном магнитном поле \mathcal{H}_0 энергетический спектр поперечного движения²⁾ частицы является дискретным:

$$E_{t,n} = \hbar \omega_H (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ (уровни Ландау),} \quad (\text{VII. 3})$$

где $\omega_H = |e| \mathcal{H}_0 / mc$, а вид собственных функций гамильтониана зависит от калибровки потенциала, см. 7.1.

Плотность тока в присутствии магнитного поля представляется в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{орб}} + \mathbf{j}_{\text{сп}}, \quad (\text{VII. 4})$$

где первое слагаемое связано с орбитальным движением

$$\mathbf{j}_{\text{орб}} = \frac{ie\hbar}{2m} \{ (\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* \nabla \Psi \} - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \Psi^* \Psi, \quad (\text{VII. 5})$$

а второе — со спиновым магнитным моментом частицы

$$\mathbf{j}_{\text{сп}} = \frac{\mu_0}{s} c \text{rot} (\Psi^* \hat{\mathbf{s}} \Psi). \quad (\text{VII. 6})$$

§ 1. Стационарные состояния частицы в присутствии магнитного поля

7.1. Найти уровни энергии и нормированные соответствующим образом волновые функции стационарных состояний заряженной бесспиновой частицы в однородном магнитном поле (направленном вдоль

²⁾ Т. е. в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

оси z) при следующих калибровках векторного потенциала:

$$а) A_x = 0, A_y = \mathcal{H}_0 x, A_z = 0; б) \mathbf{A} = [\mathcal{H}_0 \mathbf{r}]/2.$$

Обратить внимание на дискретность энергетического спектра поперечного движения частицы и на различный характер нормировки «поперечной» части собственных функций. С чем связано такое свойство с. ф.? Сравнить со случаем стационарных состояний дискретного спектра частицы в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$.

7.2. Для заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле указать операторы координат центра орбиты $\hat{\rho}_0$ поперечного (перпендикулярного магнитному полю, направленному вдоль оси z) движения, квадрата радиуса-вектора этого центра $\hat{\rho}_0^2$ и квадрата радиуса орбиты $\hat{\rho}_L^2$.

Установить коммутационные соотношения для этих операторов друг с другом и с гамильтонианом. Найти спектры собственных значений операторов $\hat{\rho}_0^2$ и $\hat{\rho}_L^2$.

Охарактеризовать поперечное пространственное распределение для частицы в стационарных состояниях Ψ_{nmp_z} , рассмотренных в предыдущей задаче, в случаях: а) $m = -en/|e|$ (при этом специально обсудить значения $n \gg 1$ и произвести предельный переход к классической механике), б) $n = 0$ и $|m| \gg 1$.

7.3. Найти волновые функции стационарных состояний и соответствующие им значения энергии для заряженной бесспиновой частицы, находящейся во взаимно перпендикулярных однородных магнитном и электрическом полях.

7.4. То же, что и в предыдущей задаче, но в случае параллельных полей.

7.5. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции стационарных состояний заряженного сферического осциллятора (заряженная частица в потенциале $U = kr^2/2$), находящегося в однородном магнитном поле. Исследовать предельные случаи а) слабого и б) сильного магнитных полей.

7.6. Показать, что магнитное поле $\mathcal{H}(\mathbf{r})$, отличное от нуля в ограниченной области пространства, не может «связать» заряженную бесспиновую частицу,

так что не существует стационарных состояний, в которых частица локализована в ограниченной области пространства. Почему этот результат не противоречит существованию *магнитных ловушек* для заряженных частиц в классической механике?

7.7. Как известно, в одномерном и двумерном случаях в любом поле притяжения всегда существуют связанные состояния частицы, в которых она локализована в ограниченной области пространства. В трехмерном случае таких состояний может и не быть, если потенциальная яма достаточно «мелкая».

Показать, что при наличии в пространстве однородного магнитного поля у заряженной частицы в произвольном потенциале притяжения, удовлетворяющем условиям $U(r) \leq 0$, $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, всегда имеются стационарные состояния, в которых она локализована в ограниченной области пространства (и не только в поперечном направлении!), так что при наличии магнитного поля любая яма может «связать» частицу. В случае мелкой ямы, для которой $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ (где U_0 , a — характерные величина и радиус потенциала), получить приближенные выражения для энергии связи частицы; в связи с этим вопросом см. также 8.61.

7.8. Найти волновые функции стационарных состояний и соответствующие значения энергии для нейтральной частицы, имеющей спин $s = 1/2$ и спиновый магнитный момент μ_0 (так что $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$) в однородном магнитном поле.

7.9. То же, что и в предыдущей задаче, но для заряженной частицы со спином $s = 1/2$. Сравнить с результатами задач 7.1 и 7.8. Обратит внимание на появление дополнительного вырождения³⁾ уровней поперечного движения для частицы, имеющей магнитный момент, равный $\mu_0 = e\hbar/2mc$ (e , m — заряд и масса частицы; такое значение μ_0 , следующее из уравнения Дирака [29], имеют электрон, мюон и их античастицы).

7.10. Показать, что гамильтониан Паули (VII.1) для электрона в электромагнитном поле может быть

³⁾ Это вырождение может быть связано с *суперсимметричным* характером гамильтониана. О суперсимметрии в квантовой механике см. обзор: Генденштейн Л. Э., Криве И. В. // УФН. — 1985. — Т. 146. — С. 553. Характерные черты и следствия суперсимметрии рассмотрены в задачах 10.26 и 10.27.

представлен в виде

$$\hat{H} = (\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}/c))^2/2m + e\varphi(\mathbf{r}).$$

На основании этого выражения показать также, что а) при движении электрона в стационарном однородном магнитном поле проекция спина на направление скорости является интегралом движения, б) магнитное поле $\mathcal{H}(\mathbf{r})$, отличное от нуля в ограниченной области пространства, не может «связать» электрон; сравнить с 7.6.

Сохраняются ли утверждения задачи для других частиц со спином $s = 1/2$ (протона, нейтрона и др.)?

§ 2. Изменение состояний во времени

7.11. Показать, что при движении заряженной частицы с отличными от нуля спином и спиновым магнитным моментом в однородном переменном во времени магнитном поле $\mathcal{H}(t)$ (и произвольном электрическом) зависимость волновой функции частицы от спиновых и пространственных переменных разделяется.

7.12. Найти зависимость от времени спиновой волновой функции и средних значений компонент вектора спина частицы со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ , находящейся в однородном стационарном магнитном поле (о разделении спиновых и пространственных переменных в этом случае см. предыдущую задачу).

7.13. Обобщить результат предыдущей задачи на случай нестационарного магнитного поля, направление которого остается неизменным, т. е. $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t)\mathbf{n}_0$.

7.14. Частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ находится в однородном магнитном поле $\mathcal{H}(t)$ вида

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0 \cos \omega_0 t, \quad \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_0 \sin \omega_0 t, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_1,$$

где $\mathcal{H}_{0,1}$, ω_0 — постоянные величины.

При $t = 0$ частица находилась в состоянии с $s_z = 1/2$. Найти вероятности различных значений s_z в момент времени t . Обратить внимание на резонансный характер зависимости вероятности «переворота» спина от частоты ω_0 в случае $|\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_1| \ll 1$.

7.15. Для заряженной частицы со спином $s = 1/2$ и спиновым магнитным моментом μ , находящейся в однородном стационарном магнитном поле, найти в гейзенберговском представлении операторы радиуса-вектора, скорости, импульса и вектора спина. Векторный потенциал выбрать в виде $\mathbf{A} = (0, \mathcal{H}_0 x, 0)$. Задачу решить одним из способов, указанных в 6.20.

Сравнить зависимость от времени средних значений векторов скорости $\overline{\mathbf{v}(t)}$ и спина $\overline{\mathbf{s}(t)}$, см. также 7.10.

7.16. В условиях задачи 7.12 найти временную спиновую функцию Грина $G_{\alpha\beta}(t, t')$ частицы ($\alpha, \beta = 1$ и 2 — спиновые переменные).

7.17. То же в условиях задачи 7.13.

7.18. Для нейтральной частицы со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ , находящейся в однородном стационарном магнитном поле, найти временную функцию Грина $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$,

7.19. Обобщить результат предыдущей задачи на случай однородного нестационарного магнитного поля, направление которого остается неизменным, т. е. $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t) \mathbf{n}_0$.

§ 3. Магнитное поле орбитальных токов и спинового магнитного момента

7.20. Найти средние значения компонент плотности тока для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в однородном магнитном поле в стационарном состоянии Ψ_{nmp_z} , см. 7.1, б).

7.21. То же, что и в предыдущей задаче, для частицы со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ_0 в стационарном состоянии $\Psi_{nmp_z s_z}$ из 7.9.

7.22. Найти среднее значение магнитного поля $\mathcal{H}(0)$, создаваемого в начале координат заряженной бесспиновой частицей, находящейся в кулоновском поле ядра $U = -Ze^2/r$ в $1s$ - и $2p$ -состояниях.

7.23. Найти среднее магнитное поле, создаваемое в пространстве электроном, находящимся в основном состоянии в кулоновском поле ядра с зарядом Ze .

7.24. Найти среднее магнитное поле, создаваемое в начале координат частицей со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом μ_0 , находящейся в стационарном s -состоянии в произвольном центральном потенциале.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД. ВНЕЗАПНЫЕ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Методы теории возмущений основаны на возможности представления гамильтониана системы в виде $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где *возмущение* \hat{V} является малой поправкой, а решение уравнения Шрёдингера с невозмущенным гамильтонианом \hat{H}_0 при этом предполагается известным. Эти методы позволяют последовательными итерациями рассмотреть эффекты, связанные с действием возмущения.

В стационарном случае, когда \hat{H}_0 и \hat{V} , как и гамильтониан \hat{H} в целом, от времени не зависят, собственные значения последнего в дискретном спектре и соответствующие собственные функции ¹⁾ записываются в виде рядов по степеням кратности возмущения:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots; \quad \Psi_n = \sum_m c_{nm} \Psi_m^{(0)},$$

$$c_{nm} = c_{nm}^{(0)} + c_{nm}^{(1)} + \dots,$$

где $E_n^{(0)}$, $\Psi_n^{(0)}$ — спектр и с. ф. невозмущенного гамильтониана. При этом если невозмущенный уровень $E_n^{(0)}$ не вырожден, то

$$E_n^{(1)} = \langle \Psi_n^{(0)} | \hat{V} | \Psi_n^{(0)} \rangle \equiv \langle n | \hat{V} | n \rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum'_m \frac{|\langle m | \hat{V} | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (\text{VIII. 1})$$

(в сумме отсутствует слагаемое с $m = n$), а для с. ф.

$$c_{nk}^{(0)} = \delta_{nk}, \quad c_{nn}^{(1)} = 0, \quad c_{nk}^{(1)} = \langle k | \hat{V} | n \rangle / (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}), \quad k \neq n. \quad (\text{VIII. 2})$$

Условие применимости приведенных результатов ($n \neq k$):

$$|\langle k | \hat{V} | n \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_k^{(0)}|. \quad (\text{VIII. 3})$$

¹⁾ О форме записи разложения по собственным функциям см. примечание на с. 12. Подчеркнем, что ниже матричные элементы $\langle k | \hat{V} | n \rangle$ вычисляются с собственными функциями невозмущенного гамильтониана.

Если невозмущенный уровень $E_n^{(0)}$ является s -кратно вырожденным и ему отвечают взаимно ортогональные с. ф. $\Psi_{n,\alpha}^{(0)}$, где $\alpha = 1, 2, \dots, s$, то *правильные* с. ф. нулевого приближения $\Psi_n = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(0)} \Psi_{n,\alpha}^{(0)}$ и соответствующие сдвиги уровней $E_n^{(1)}$ определяются решением системы уравнений

$$\sum_{\beta} (\langle n\alpha | \hat{V} | n\beta \rangle - E_n^{(1)} \delta_{\alpha\beta}) c_{\beta}^{(0)} = 0. \quad (\text{VIII. 4})$$

Условие *совместности* ее приводит к *секулярному* уравнению

$$|\langle n\alpha | \hat{V} | n\beta \rangle - E_n^{(1)} \delta_{\alpha\beta}| = 0. \quad (\text{VIII. 5})$$

Корни его $E_n^{(1)}$ (их число равно s) определяют расщепление уровня невозмущенного гамильтониана, а их последовательная подстановка в (VIII.4) позволяет найти волновые функции соответствующих подуровней (в нулевом приближении).

При зависящем от времени возмущении $\hat{V}(t)$ для в. ф.

$$\Psi(t) = \sum_k a_k(t) \exp(-iE_k^{(0)}t/\hbar) \Psi_k^{(0)}(q) \quad (\text{VIII. 6})$$

из уравнения Шрёдингера $i\hbar \partial \Psi / \partial t = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \Psi$ следует²⁾

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) \exp(i\omega_{mk}t) a_k, \quad (\text{VIII. 7})$$

где $V_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0)*}(q) \hat{V} \Psi_k^{(0)}(q) d\tau_q$, $\omega_{mk} = (E_m^{(0)} - E_k^{(0)})/\hbar$.

Решение уравнения (VIII.7) последовательными итерациями $a_k(t) = a_k^{(0)}(t) + a_k^{(1)}(t) + \dots$ прежде всего дает $a_k^{(0)}(t) = \text{const.}$ Далее, считая, что $\hat{V}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и что при этом (т. е. до включения возмущения) система находилась в n -м состоянии дискретного спектра $\Psi_n^{(0)}(q)$ и поэтому $a_k(t \rightarrow -\infty) \rightarrow \delta_{nk}$, выбираем $a_k^{(0)} \equiv a_{kn}^{(0)} = \delta_{nk}$ (вместо $a_k(t)$ теперь пи-

²⁾ Подчеркнем, что временная зависимость матричных элементов $V_{kn}(t)$ определяется только оператором $\hat{V}(t)$ (множители $\exp(-iE_n^{(0)}t/\hbar)$ выделены отдельно).

шем $a_{kn}(t)$ в соответствии с рассматриваемой постановкой задачи). Для поправки первого приближения из (VIII.7) с учетом условия $a_{kn}^{(1)}(t = -\infty) = 0$ имеем

$$a_{kn}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt. \quad (\text{VIII.8})$$

Если при $t \rightarrow +\infty$ возмущение $\hat{V}(t)$ исчезает, то $a_{kn}^{(1)}(t = +\infty)$ определяет вероятность перехода системы из начального n -го в конечное k -е ($k \neq n$) состояние под влиянием возмущения за все время его действия

$$W^{(1)}(n \rightarrow k) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2. \quad (\text{VIII.9})$$

§ 1. Стационарная теория возмущений (дискретный спектр)

8.1. Показать, что поправка первого порядка $E_n^{(1)}$ к энергетическим уровням частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме для достаточно произвольного возмущения $V(x)$ при больших значениях n не зависит от n .

8.2. Для заряженного линейного осциллятора найти сдвиги энергетических уровней в однородном электрическом поле (направленном вдоль оси колебаний) в первых двух порядках теории возмущений, а также *поляризуемости* состояний. Сравнить с точным результатом.

8.3. То же, что и в предыдущей задаче, для заряженной частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме в основном состоянии.

8.4. Для плоского изотропного осциллятора найти в первом неисчезающем приближении теории возмущений сдвиг основного уровня под действием возмущения $V = \alpha xy$. Указать условия применимости полученного результата и сравнить его с точным, см. 2.49.

8.5. В условиях предыдущей задачи найти расщепление: а) первого возбужденного, б) второго возбужденного уровней осциллятора. Указать пра-

вильные собственные функции нулевого приближения.

8.6. На двухуровневую систему (уровни невырожденные, их энергии ϵ_1 и ϵ_2) накладывается возмущение, характеризующееся матричными элементами V_{11} , V_{22} , $V_{12} = V_{21}^*$ между исходными невозмущенными состояниями 1 и 2. Найти сдвиги уровней в первых двух порядках теории возмущений, указать условия применимости полученных результатов и сравнить их с точными.

8.7. Гамильтониан системы зависит от некоторого параметра λ так, что $\hat{H}(\lambda) = \hat{h} + \lambda \hat{W}$, где \hat{h} и \hat{W} от λ уже не зависят. Доказать соотношение $d^2 E_0(\lambda)/d\lambda^2 < 0$, где $E_0(\lambda)$ — основной уровень этого гамильтониана. Проиллюстрировать полученный результат на примере осциллятора и частицы в кулоновском потенциале.

8.8. Плоский ротатор с моментом инерции I и электрическим дипольным моментом \mathbf{d} помещен в однородное электрическое поле \mathcal{E} , лежащее в плоскости вращения. Рассматривая действие поля как возмущение, найти поляризуемость основного состояния ротатора.

8.9. В условиях предыдущей задачи найти в первых двух порядках теории возмущений сдвиги и расщепления энергетических уровней возбужденных состояний ротатора и их поляризуемости. Указать правильные собственные функции нулевого приближения. Обратит внимание на выделенность свойств первого возбужденного уровня.

8.10. Пространственный ротатор с моментом инерции I и дипольным моментом \mathbf{d} , направленным вдоль оси ротатора, помещен в однородное электрическое поле, рассматриваемое как возмущение. Найти поляризуемость основного состояния ротатора.

8.11. В условиях предыдущей задачи рассчитать в первом не исчезающем порядке теории возмущений сдвиги энергетических уровней возбужденных состояний ротатора. Каков при этом характер снятия вырождения уровней? Происходит ли в более высоких порядках теории возмущений дальнейшее снятие вырождения?

8.12. Найти сдвиг в слабом электрическом поле и поляризуемость основного уровня заряженной частицы в одномерном δ -потенциале $U = -\alpha\delta(x)$.

8.13. Найти приближенный вид волновых функций стационарных состояний и энергетические уровни нижней части спектра плоского ротатора, имеющего дипольный момент \mathbf{d} , в сильном электрическом поле \mathcal{E} таком, что $d\mathcal{E} \gg \hbar^2/l$.

8.14. То же, что и в предыдущей задаче, но для сферического ротатора, см. 8.10.

8.15. Частица находится в центральном потенциале вида

$$a) U = -U_0/(e^{r/a} - 1), \quad б) U = -U_0 a e^{-r/a}/r,$$

причем $U_0 \gg \hbar^2/ma^2$. В первом порядке теории возмущений найти отличие энергетических уровней нижней части спектра от уровней в кулоновском поле $U = -U_0 a/r$. Обратить внимание на снятие случайного кулоновского вырождения уровней.

8.16. Для частицы в центральном потенциале $U = -\alpha/r^\nu$, причем $0 < \nu < 2$, найти энергетические уровни $E_{n_r, l}$ с большим значением момента $l \gg 1$ и с не слишком большим радиальным квантовым числом n_r . В случае кулоновского потенциала, $\nu = 1$, сравнить полученный результат с точным.

8.17. То же, что и в предыдущей задаче, но для потенциала $U = \alpha r^\nu$ с $\alpha, \nu > 0$ (теперь $E_{n_r, l} > 0$). В случае сферического осциллятора, $\nu = 2$, сравнить полученный результат с точным.

8.18. Частица находится внутри непроницаемого эллипсоида вращения, так что потенциал имеет вид

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & (x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 < 1, \\ \infty, & (x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 \geq 1, \end{cases}$$

причем $|a - b| \ll a$. Найти в первом порядке теории возмущений сдвиг основного энергетического уровня по отношению к уровню в сферической яме такого же объема.

8.19. Обобщить результат предыдущей задачи на случай возбужденных состояний частицы. Обсудить вопрос о характере снятия вырождения по проекциям момента в первом и более высоких порядках теории возмущений.

8.20. Используя теорию возмущений, получить правило квантования квадрата орбитального момента и найти вид шаровых функций в случае $l \approx |m| \gg 1$.

Указание. Свести уравнение для с. ф. и с. з. оператора \hat{I}^2 к уравнению Шрёдингера для линейного осциллятора.

§ 2. Вариационный метод

8.21. Найти вариационным методом энергию основного уровня частицы в потенциале из задачи 2.8: $U = F_0 x$ для $x \geq 0$ и $U = \infty$ для $x < 0$, используя пробные функции вида

$$a) \Psi = Ax \exp(-\alpha x), \quad б) \Psi = Bx \exp(-\alpha x^2/2)$$

при $x \geq 0$. Сравнить с точным значением.

8.22. То же, что и в предыдущей задаче, для

a) δ -ямы, см. 2.7, с пробной функцией $\Psi = A(a + |x|)^{-\nu}$,

б) линейного осциллятора и $\Psi = A(a^2 + x^2)^{-\nu/2}$, ν — целое,

в) кулоновского потенциала и $\Psi = A(a + r)^{-\nu}$, a, ν — вариационные параметры.

8.23. Найти энергию: a) основного, б) первого возбужденного уровней частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме, аппроксимируя собственные функции гамильтониана простейшими полиномами, удовлетворяющими требуемым условиям.

8.24. Для двух частиц одинаковой массы m , находящихся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме и взаимодействующих друг с другом как непроницаемые точки, найти энергию основного уровня, аппроксимируя волновую функцию основного состояния простейшим полиномом, удовлетворяющим требуемым условиям. Сравнить с точным результатом, см. 2.51.

8.25. Найти вариационным методом энергию нижнего p -уровня частицы в бесконечно глубокой сферической потенциальной яме радиуса a , воспользовавшись пробной радиальной функцией вида $R(r) = Ar(a^\nu - r^\nu)$ при $r \leq a$, где ν — вариационный параметр ($\Psi_{l=1, m}(\mathbf{r}) = R(r)Y_{1m}(\mathbf{n})$). Сравнить с точным значением.

8.26. Для основного состояния частицы в одномерной δ -яме, $U_0(x) = -\alpha\delta(x)$, найти вариационным методом сдвиг уровня под действием слабого однородного поля, т. е. за счет возмущения $V = -F_0 x$,

воспользовавшись пробной функцией

$$\Psi(x) = C\Psi_0^{(0)}(x)(1 + \varepsilon F_0 x e^{-\gamma|x|}), \quad \Psi_0^{(0)} = \sqrt{\kappa_0} e^{-\kappa_0|x|},$$

где $\Psi_0^{(0)}$ — волновая функция невозмущенного состояния, см. 2.7, а ε и γ — вариационные параметры. Сравнить с точным результатом из 8.12.

Данная задача иллюстрирует возможность вычисления членов ряда теории возмущений для гамильтониана $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ вариационным способом. В связи с этим отметим, что использование в качестве пробной функции невозмущенной собственной функции воспроизводит поправку первого порядка для сдвига уровня.

8.27. Исходя из вариационного принципа и используя пробную функцию вида $\Psi(r) = Ce^{-\kappa r}$, где $\kappa > 0$ — вариационный параметр, получить *достаточное* условие существования в центральном потенциале $U(r)$ (причем $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) связанного состояния частицы. Применить полученное условие к потенциалам, рассмотренным в 4.8, и сравнить с точными результатами и с *необходимым* условием существования связанного состояния из 4.21.

8.28. Пусть Ψ_a с $a = 0, 1, \dots, N-1$ представляет некоторую систему из N взаимно ортогональных, нормированных на *единицу* волновых функций, а \bar{E}_a — среднее значение гамильтониана \hat{H} в таких состояниях. Показать, что

$$\sum_{a=0}^{N-1} \bar{E}_a \geq \sum_{n=0}^{N-1} E_n^{(0)},$$

где $E_n^{(0)}$ — точные энергетические уровни для указанного гамильтониана, и суммирование по ним проводится с учетом кратности их вырождения.

§ 3. Стационарная теория возмущений (непрерывный спектр)

8.29. Основываясь на результате задачи 2.42, получить выражения для амплитуды *отраженной волны* в потенциале $U(x)$ ($U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$) в первых двух порядках теории возмущений. Обсудить условия применимости теории возмущений для вычисления коэффициента отражения частицы. Рас-

смотреть приложения полученных результатов к конкретным потенциалам:

а) $U = \alpha \delta(x)$,

б) $U = \begin{cases} U_0 e^{-x/a} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$

в) $U = U_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/a)$,

г) $U = U_0 e^{-x^2/a^2}$,

и сравнить с точными решениями.

8.30. Найти коэффициент отражения $R(E)$ для быстрых частиц в случае потенциала $U(x)$, имеющего скачок в точке $x=0$ (рис. 20). Обобщить полученный результат на случай, когда потенциал имеет

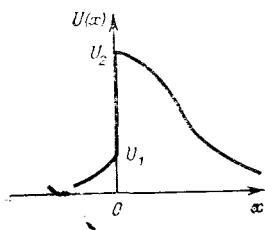


Рис. 20

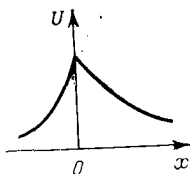


Рис. 21

разрывы в нескольких точках. Применить его к потенциалу из 8.29, б) и к прямоугольному барьеру из 2.31; сравнить с асимптотикой при $E \rightarrow \infty$ точного выражения для $R(E)$, см. также 9.27.

8.31. То же, что и в предыдущей задаче, но в случае, когда потенциал имеет излом в точке $x=0$ (рис. 21) или изломы в нескольких точках x_n . Применить полученный результат к параболическому барьеру вида $U(x) = U_0(1 - x^2/a^2)$ при $|x| < a$ и $U(x) = 0$ при $|x| > a$.

8.32. Как известно, энергетический спектр частицы в периодическом потенциале имеет зонную структуру. Для такого одномерного потенциала ($U(x+a) = U(x)$), рассматриваемого как возмущение, найти спектр $E_n(q)$; здесь n — номер зоны, $\hbar q$ — квазиимпульс (при этом $-\pi/a \leq q \leq \pi/a$). Указать связь импульса $\hbar k$ свободной частицы с квазиимпульсом $\hbar q$ и правильные собственные функции нулевого приближения $\Psi_{n,q}^{(0)}(x)$. Найти величину щели между

соседними энергетическими зонами. Рассмотреть приложения полученных результатов к потенциалу из 2.53.

§ 4. Нестационарная теория возмущений. Переходы в непрерывном спектре

8.33. Заряженный линейный осциллятор подвергается воздействию однородного электрического поля, изменяющегося во времени по закону:

$$a) \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-t^2/\tau^2),$$

$$б) \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + t^2/\tau^2)^{-1},$$

$$в) \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-t^2/\tau^2) \cos \omega_0 t.$$

Считая, что до включения поля (при $t \rightarrow -\infty$) осциллятор находился в n -м квантовом состоянии, найти в первом порядке теории возмущений вероятности возбуждения различных его состояний при $t \rightarrow +\infty$. Для случая $n=0$ сравнить полученный результат с точным, см. 6.25.

8.34. На плоский ротатор, имеющий дипольный момент \mathbf{d} , накладывается однородное, переменное во времени электрическое поле $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t) \mathbf{n}_0$. До включения поля ротатор имел определенное значение энергии и проекции момента m . Вычислить в первом порядке теории возмущений вероятности различных значений проекции момента и энергии ротатора при $t \rightarrow +\infty$. Рассмотреть конкретные виды $\mathcal{E}(t)$, указанные в предыдущей задаче.

8.35. То же, что и в предыдущей задаче, но для сферического ротатора. До включения электрического поля ротатор находился в состоянии с квантовыми числами $l, l_z = m$; поле направлено вдоль оси z .

8.36. В условиях задачи 8.34 рассмотреть переходы ротатора в случае, когда вектор электрического поля вращается в плоскости вращения ротатора с угловой скоростью ω_0 , так что $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}(t) \cos \omega_0 t$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}(t) \sin \omega_0 t$. Обратить внимание на возможность существенного возрастания вероятности перехода даже в случае «плавной» зависимости $\mathcal{E}(t)$ вида а) и б) из 8.33.

8.37. Получить выражения для волновой функции и амплитуды перехода системы из начального (при $t \rightarrow -\infty$) n -го состояния дискретного спектра в ко-

нечное (при $t \rightarrow +\infty$) k -е во втором порядке нестационарной теории возмущений. Предполагается, что возмущение при $t \rightarrow \pm\infty$ отсутствует.

8.38. В условиях задачи 8.33 найти во втором порядке теории возмущений вероятности переходов осциллятора, запрещенных в первом порядке³). Сравнить их с $W^{(1)}(n \rightarrow k)$.

8.39. Если воспользоваться выражением (VIII.8), то для вероятности $W_n = |a_{nn}(+\infty)|^2$ остаться системе в первоначальном n -м состоянии получится $W_n > 1$, что противоречит сохранению нормировки волновой функции. Объяснить возникающий парадокс и получить закон сохранения нормировки волновой функции с учетом переходов в первом порядке теории возмущений.

8.40. На систему, находящуюся при $t \rightarrow -\infty$ в n_1 -м квантовом состоянии, относящемся к двукратно вырожденному уровню $E_n^{(0)}$ гамильтониана \hat{H}_0 , накладывается зависящее от времени возмущение $\hat{V}(t)$. Найти волновую функцию системы в «нулевом» приближении в произвольный момент времени⁴). Считать, что диагональные матричные элементы для вырожденных состояний удовлетворяют условию $V_{n_1 n_1} = V_{n_2 n_2} = 0$ (это имеет место, например, в случае, когда состояния $|n_{1,2}\rangle$ обладают определенной, причем противоположной четностью, а возмущение пропорционально дипольному моменту системы). Как теперь надо модифицировать формулу (VIII.8), определяющую амплитуды переходов с изменением энергии состояния?

8.41. Для периодического во времени возмущения, $\hat{V}(q, t+T) = \hat{V}(q, t)$, действующего на систему, найти волновые функции квазиэнергетических состояний⁵) (КЭС) в нулевом приближении и спектр квазиэнергии в первом порядке теории возмущений. Энергетический спектр невозмущенного гамильтониана считать дискретным, невырожденным и не содержащим уровней, отвечающих резонансному переходу: $E_n^{(0)} - E_k^{(0)} \neq \pm \hbar\omega$ с $\omega = 2\pi/T$ (в связи с этим см. 8.43).

³) То есть таких переходов, для которых $W^{(1)}(n \rightarrow k) = 0$.

⁴) Сравнить с задачей об изменении волновой функции системы под влиянием резонансного возмущения, см. [1], § 40.

⁵) См. подстрочное примечание на с. 75.

8.42. В условиях предыдущей задачи найти поправку второго приближения к квазиэнергии в случае, когда $V_{nn}(t) \equiv 0$. Специально обсудить временную зависимость возмущения вида $\hat{V} = \hat{V}(q) \cos \omega t$ и рассмотреть при этом предельные случаи $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. Получить выражение для динамической поляризуемости уровня в электрическом поле линейно поляризованной монохроматической волны, $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, и найти ее для осциллятора.

Указание. Для системы в электрическом поле линейно поляризованной волны динамическая поляризуемость $\beta_n(\omega)$ связана с поправкой второго приближения к квазиэнергии соотношением ⁶⁾

$$\epsilon_n^{(2)} = -\frac{1}{4} \beta_n(\omega) \mathcal{E}_0^2.$$

8.43. Рассмотреть квазиэнергетические состояния, возникающие при наложении на двухуровневую систему с энергиями $E_{1,2}^{(0)}$ периодического резонансного возмущения вида $\hat{V} = \hat{V}_0 \cos \omega t$, причем $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, где $\hbar \omega_0 = E_2^{(0)} - E_1^{(0)}$. Оператор \hat{V}_0 от времени не зависит, его диагональные матричные элементы равны нулю, а $(\hat{V}_0)_{12} = V_0$, $V_0 = V_0^*$, при этом $V_0 \ll \hbar \omega_0$. Обсудить вопрос о квазиэнергетических гармониках КЭС и сравнить с задачей 6.41.

8.44. Для системы с двумя каналами, рассмотренной в задаче 6.39, в случае слабой связи каналов ($\beta \ll \alpha$) найти по теории возмущений ширину квазистационарного состояния в канале с возбужденной составной частицей. При решении задачи а) пренебречь взаимодействием в конечном состоянии, б) учесть его и сравнить полученные результаты друг с другом и с точным.

8.45. Найти в первом порядке теории возмущений вероятность «ионизации» в единицу времени из основного состояния частицы в одномерной δ -яме (см. 2.7) под действием однородного, периодического во времени поля, так что $V(x, t) = -x F_0 \cos \omega_0 t$. Решить задачу как в пренебрежении взаимодействием в конечном состоянии, так и при учете его. Сравнить со

⁶⁾ Появление здесь дополнительного, по сравнению со статическим случаем, множителя $1/2$ связано со средним значением $\cos^2 \omega t = 1/2$, сравнить с 8.56.

случае *туннельной ионизации* в статическом однородном поле, рассмотренным в 6.36 и 9.28.

8.46. Частица находится в одномерном потенциале $U(x)$, причем $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Рассматривая его как возмущение, найти коэффициент отражения с помощью теории возмущений для переходов в непрерывном спектре. Указать условия применимости полученного результата и сравнить его с 8.29.

§ 5. Внезапные воздействия

8.47. Система, описываемая гамильтонианом \hat{H}_0 , находится в n -м стационарном состоянии дискретного спектра. При $t=0$ гамильтониан системы внезапно изменяется и становится равным (при $t > 0$) $\hat{H}_f = \hat{H}_0 + \hat{V}_0$, где \hat{V}_0 , как и \hat{H}_0 , от времени не зависят. Найти вероятности различных стационарных состояний системы при $t > 0$. Каково среднее значение энергии, приобретаемой системой? Показать, что в случае малого возмущения \hat{V}_0 установленные результаты могут быть получены также в рамках нестационарной теории возмущений.

8.48. Система подвергается импульсному воздействию $\hat{V} = \hat{W}_0 \delta(t)$, так что ее гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}_0 \delta(t)$. При $t < 0$ система находилась в n -м состоянии дискретного спектра. Найти вероятности различных квантовых состояний при $t > 0$. В случае $\hat{W}_0 = -xP_0$ дать наглядную интерпретацию полученного результата. Сравнить его для малого возмущения \hat{V} с результатом нестационарной теории возмущений.

8.49. Частица находится в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a ($0 < x < a$). В некоторый момент времени правая стенка ямы за короткий интервал времени τ смещается в точку $b > a$. Найти вероятности возбуждения различных квантовых состояний частицы после остановки стенки.

8.50. Частица находится в основном состоянии в δ -яме, так что $U = -\alpha\delta(x)$. Внезапно параметр α , характеризующий «глубину» ямы, изменяется и становится равным $\tilde{\alpha}$ (сравнить с изменением заряда ядра атома, например, при β -распаде). Найти

а) вероятность того, что частица останется в связанном состоянии, б) распределение по импульсам для частицы, вылетающей из ямы.

8.51. Частица находится в основном состоянии в δ -яме, $U = -\alpha\delta(x)$. При $t = 0$ яма приходит в движение с постоянной скоростью V . Найти вероятность того, что она увлечет частицу за собой. Рассмотреть предельные случаи малых и больших скоростей V .

8.52. На заряженный осциллятор, находящийся в основном состоянии, внезапно накладывается однородное электрическое поле, направленное вдоль оси колебаний. Найти вероятности возбуждения различных состояний осциллятора после включения поля. Сравнить с результатом задачи 6.25.

8.53. У линейного осциллятора, находящегося в основном состоянии, в момент времени $t = 0$ «точка подвеса» приходит в движение с постоянной скоростью V . Найти вероятности возбуждения различных состояний осциллятора при $t > 0$.

§ 6. Адиабатическое приближение

а) *Адиабатическое приближение в нестационарных задачах.*

8.54. Гамильтониан $\hat{H}(\hat{p}, q, \lambda(t))$ некоторой системы явно зависит от времени. Для каждого момента времени t предполагаются известными спектр собственных значений $E_n(\lambda(t))$ «мгновенного» гамильтониана, являющийся дискретным, и полная система соответствующих ортонормированных собственных функций $\Psi_n(q, \lambda(t))$.

Записать волновое уравнение для системы в представлении, базисом которого является система функций $\Psi_n(q, \lambda(t))$.

Показать, что при адиабатическом изменении гамильтониана (в пределе $\dot{\lambda} \rightarrow 0$) распределение по квантовым состояниям системы не зависит от времени. Каков классический аналог этого результата?

8.55. В условиях предыдущей задачи, считая, что при $t = t_0$ система находилась в невырожденном n -м квантовом состоянии, найти ее волновую функцию при $t > t_0$ в первом порядке адиабатической теории возмущений.

На основе полученных результатов рассмотреть возбуждение заряженного линейного осциллятора,

находящегося при $t \rightarrow -\infty$ в основном состоянии, под влиянием однородного электрического поля $\mathcal{E}(t)$ и сравнить с точным решением, см. 6.25. Исследовать случаи зависимости $\mathcal{E}(t)$ вида, приведенного в 8.33.

8.56. В условиях задачи 8.54 временная зависимость гамильтониана является периодической. Исследовать квазиэнергетические состояния⁷⁾ в адиабатическом приближении. Энергетический спектр мгновенного гамильтониана считать дискретным и невырожденным.

8.57. Частица находится в поле двух сближающихся δ -ям, так что

$$U(x, t) = -\alpha [\delta(x - L(t)/2) + \delta(x + L(t)/2)].$$

При $t \rightarrow -\infty$ ямы находились на бесконечно большом расстоянии друг от друга, а частица была связана одной из них. Расстояние $L(t)$ между ямами медленно уменьшается, и в некоторый момент времени ямы «сливаются» в одну: $U(x) = -2\alpha\delta(x)$. Какова вероятность того, что при этом частица останется в связанном состоянии?

б) *Адиабатическое приближение в стационарных задачах.*

8.58. Гамильтониан системы, состоящей из двух подсистем, имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_1(x) + V(x, \xi) + \hat{H}_2(\xi),$$

где x, ξ — координаты 1-й и 2-й подсистем, $V(x, \xi)$ описывает взаимодействие между ними. Считая характерные частоты 1-й («быстрой») подсистемы много большими характерных частот 2-й («медленной») подсистемы, свести задачу приближенного вычисления энергетических уровней и соответствующих им волновых функций совокупной системы к решению уравнений Шрёдингера для отдельных подсистем.

На основе полученных результатов исследовать состояния нижней части энергетического спектра для частицы, находящейся в двумерном потенциале вида

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1, \\ \infty, & x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1 \end{cases}$$

в случае $b \gg a$.

⁷⁾ См. подстрочное примечание на с. 75.

8.59. Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2M} \hat{p}_y^2 + \frac{k(x^2 + y^2)}{2} + axy, \quad |a| < k,$$

причем $M \gg m$ (два связанных осциллятора с сильно различающимися массами). Найти уровни энергии системы и соответствующие им волновые функции на основе адиабатического приближения. Сравнить полученный результат с точным решением, см. 2.50.

8.60. Две частицы с сильно различающимися массами $M \gg m$ находятся в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a и взаимодействуют друг с другом как взаимно непроницаемые точки. Найти энергетические уровни нижней части спектра и соответствующие им волновые функции.

8.61. Используя адиабатическое приближение, обсудить вопрос об энергетическом спектре и виде соответствующих волновых функций связанных состояний частицы в центральном потенциале притяжения $U(r)$ в присутствии достаточно сильного однородного магнитного поля.

Найти сдвиги уровней Ландау под влиянием короткодействующего потенциала, а также основной уровень атома водорода в сильном магнитном поле.

Г л а в а 9

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Два независимых решения одномерного уравнения Шрёдингера¹⁾ (II.1) в квазиклассическом приближении имеют вид

$$\Psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int_c^x p(x) dx \right\},$$

$$p = \sqrt{2m[E - U(x)]}. \quad (\text{IX. 1})$$

Условие применимости этого приближения

$$|\hbar d\kappa/dx| \equiv \hbar |dp^{-1}/dx| = m\hbar |U'(x)/p^3(x)| \ll 1. \quad (\text{IX. 2})$$

¹⁾ Напомним, что у. Ш. для частицы в центральном потенциале сводится к одномерному, см. (IV. 5).

Обычно всегда имеются такие области значений x , в которых оно нарушается (например, вблизи точек остановки). В связи с этим возникает проблема²⁾

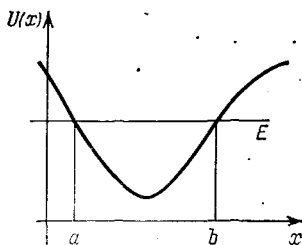


Рис. 22

сшивания квазиклассических функций, отвечающих одному и тому же решению уравнения Шрёдингера по разные стороны от таких областей. Часто применимы условия сшивания, основанные на линейной аппроксимации потенциала в окрестности точек остановки классического движения³⁾. Для самой правой

точки остановки, типа $x = b$ на рис. 22, они имеют вид

$$\Psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p(x)| dx\right\}, \quad x > b; \quad (\text{IX. 3a})$$

$$\Psi = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left\{\frac{1}{\hbar} \int_x^b p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right\}, \quad x < b. \quad (\text{IX. 3б})$$

Для левой точки остановки, $x = a$ на рис. 22:

$$\Psi = \frac{C_1}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p(x)| dx\right\}, \quad x < a; \quad (\text{IX. 4a})$$

$$\Psi = \frac{C_1}{\sqrt{p(x)}} \sin\left\{\frac{1}{\hbar} \int_a^x p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right\}, \quad x > a. \quad (\text{IX. 4б})$$

В случае потенциальной ямы приведенного на рис. 22 вида, из условия совпадения выражений (IX.3б) и (IX.4б) (описывающих одно и то же решение у Ш.): кратности π суммы фаз синусов в

²⁾ Ее решение требуется, в частности, для учета граничных условий.

³⁾ При этом предполагается, что на таком удалении от точки остановки, где еще справедливо линейное разложение потенциала, уже выполнено условие квазиклассичности (IX. 2).

них, следует правило квантования Бора — Зоммерфельда⁴⁾

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[E_n - U(x)]} dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{IX.5})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Хотя формально квазиклассические правила квантования определяют спектр E_n лишь для $n \gg 1$, обычно результат и при $n \sim 1$ имеет достаточно высокую точность.

Дифференцирование в (IX.5) по n определяет расстояние между соседними уровнями $\delta E_n \equiv E_{n+1} - E_n = \hbar \omega(E_n)$, где $\omega(E_n) = 2\pi/T(E_n)$ — частота движения классической частицы с энергией E_n , T — его период.

Для волновой функции связанного состояния обычно можно использовать следующее простое выражение (сравнить с (IX.3, 4)):

$$\Psi_n(x) \approx \begin{cases} \frac{C_n}{\sqrt{p(x)}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p(x) dx + \frac{\pi}{4} \right), & a < x < b; \\ 0, & x < a, x > b, \end{cases} \quad (\text{IX.6})$$

пренебрегая возможностью проникновения частицы в классически запрещенную область, где волновая функция экспоненциально убывает. Для нормировки в. ф. на единицу следует выбрать $C_n^2 = 2m\omega(E_n)/\pi$. При вычислении производных от волновой функции следует дифференцировать лишь тригонометрический множитель (синус или косинус) как наиболее быстро изменяющийся.

Проницаемость барьера, указанного на рис. 23, в квазиклассическом приближении описывается

⁴⁾ В более общем случае, когда неприменимы условия сшивания (IX.3), (IX.4), правая часть в правиле квантования равна $\pi(n + \alpha)$, где квазиклассическая поправка $\alpha \sim 1$. Именно при корректном ее учете область применимости квазиклассического результата обычно *затягивается* до значений $n \sim 1$ (в противном случае происходит существенная потеря точности даже для сравнительно больших значений $n \sim 10$).

выражением

$$D(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x, E)| dx \right\}. \quad (\text{IX. 7})$$

Условием применимости этого выражения является большая величина в нем показателя экспоненты, так

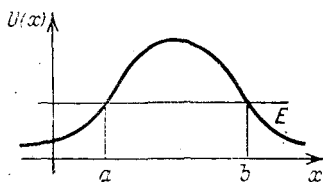


Рис. 23

что $D \ll 1$. Формула (IX. 7), как и (IX. 5), предполагает возможность сшивания квазиклассических решений в окрестностях точек остановки, основанного на линейной аппроксимации потенциала. При нарушении этого условия квазиклассический результат (IX. 7)

справедлив лишь с точностью до предэкспоненциального множителя (но передает главное: экспоненциальную малость коэффициента прохождения барьера).

§ 1. Квантование энергетического спектра

9.1. В квазиклассическом приближении найти энергетический спектр: а) линейного осциллятора, б) связанных состояний частицы в потенциале $U(x) = -U_0 \text{ch}^{-2}(x/a)$. Сравнить с точным результатом (в случае б) см. [1, § 23]).

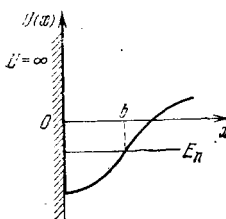


Рис. 24

9.2. Получить правило квантования энергетических уровней и найти соответствующие им квазиклассические волновые функции в случае потенциала вида⁵⁾, приведенного на рис. 24.

Применить полученный результат к потенциалу, рассмотренному в 2.8. Обратить внимание на близость квазиклассического и точного значений E_n даже при $n \sim 1$.

9.3. Частица находится в центральном поле, представляющем суперпозицию «дальнодействующего»

⁵⁾ Полученный результат непосредственно переносится и на случай s -состояний частицы в центральном потенциале, см. 4.1.

потенциала $U(r)$ вида, приведенного на рис. 24 (так что на малых расстояниях нет потенциального барьера), и «короткодействующего» потенциала, аппроксимируемого *потенциалом нулевого радиуса* (п. н. р., см. 4.10, а также 4.31). Получить правило квантования s -уровней и обсудить вопрос о сдвиге уровней в потенциале $U(r)$ под влиянием п. н. р. Обратить внимание на возможность *перестройки спектра*, т. е. больших сдвигов, сравнимых с расстоянием между невозмущенными уровнями.

9.4. В квазиклассическом приближении исследовать энергетический спектр частицы в симметричной потенциальной яме $U_0(x)$, разделенной δ -барьером $\alpha\delta(x)$, так что $U = U_0(x) + \alpha\delta(x)$. Рассмотреть предельные случаи а) слабо отражающего, б) малопроницаемого барьеров.

9.5. Для частицы в потенциале притяжения, имеющем на малых расстояниях кулоновский вид $U(r) \approx -\alpha/r$, получить в квазиклассическом приближении волновые функции и правило квантования s -уровней с энергией $|E| \ll m\alpha^2/\hbar^2$. Применить полученный результат к кулоновскому потенциалу $U = -\alpha/r$ и к потенциалу Хюльтена $U = -U_0/(e^{r/a} - 1)$; сравнить с точным выражением для спектра, см. 4.8.

9.6. Для центрального потенциала приведенного на рис. 24 вида (ограниченного при $r \rightarrow 0$) найти в квазиклассическом приближении радиальные функции стационарных состояний частицы с моментом ⁶⁾ $l \sim 1$ в области классического движения.

Используя полученный результат, обсудить модификацию правила квантования (IX.5) и найти энергетические спектры: а) сферического осциллятора $U = m\omega^2 r^2/2$, б) одномерного движения в потенциале: $U = U_0 \operatorname{tg}^2(\pi x/a)$ при $|x| < a/2$ и $U = \infty$ для $|x| > a/2$. Сравнить с результатом квантования по формуле (IX.5) и с точным выражением для спектра.

9.7. В предыдущей задаче для состояний частицы с моментом l в центральном потенциале $U(r)$, огра-

⁶⁾ Именно этот случай и представляет самостоятельный интерес: при $l \gg 1$ центробежный барьер $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ уже является квазиклассическим и можно воспользоваться условиями сшивания (IX.4), см. также следующую задачу.

ниченном при $r \rightarrow 0$, было получено правило квантования⁷⁾

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m \left[E_{n_r l} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - U(r) \right]} dr = \\ = \pi \left[n_r + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (l + \frac{1}{2} - \sqrt{l(l+1)}) \right].$$

Показать, что с квазиклассической точностью оно эквивалентно квантованию с поправкой Лангера:

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m \left[E_{n_r l} - \frac{\hbar^2 (l + 1/2)^2}{2mr^2} - U(r) \right]} dr = \pi \left(n_r + \frac{1}{2} \right).$$

Показать также, что оба эти соотношения с той же точностью эквивалентны более простому условию квантования

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^b \tilde{p}(r) dr \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^b \sqrt{2m [E_{n_r l} - U(r)]} dr = \\ = \pi \left(n_r + \frac{l}{2} + \frac{3}{4} \right)$$

(в котором радиальный импульс $\tilde{p}(r)$ вообще не содержит центробежного потенциала, а от величины момента l зависит лишь значение квазиклассической поправки к n_r !).

Рассчитать согласно этим правилам квантования энергетические спектры: а) сферического осциллятора $U = m\omega^2 r^2/2$, б) частицы в бесконечно глубокой сферической яме радиуса R (при этом учесть изменение условий «сшивания» для правой точки поворота $r = R$). Сравнить с точным спектром.

9.8. Для одномерного потенциала притяжения, имеющего при $|x| \rightarrow \infty$ вид $U \propto x^{-4}$, найти в квазиклассическом приближении условие появления новых состояний дискретного спектра частицы при

⁷⁾ Подчеркнем, что все три условия квантования предполагают обычное, согласно (IX.3), сшивание квазиклассических решений в правой точке поворота.

Квантование по Лангеру справедливо и для потенциалов, имеющих при $r \rightarrow 0$ вид $U(r) \approx ar^{-\nu}$ с $0 \leq \nu < 2$. Обобщение на этот случай последнего, наиболее эффективного условия квантования, приведено в решении.

углублении ямы. Применить полученный результат к потенциалу из 2.40 и сравнить с точным.

9.9. В квазиклассическом приближении найти условие появления новых связанных состояний частицы с моментом l в центральном потенциале притяжения, имеющем вид $U \approx -\alpha_2 r^{-\nu_2}$ с $\nu_2 > 2$ на больших расстояниях и $U \approx -\alpha_1 r^{-\nu_1}$ с $0 \leq \nu_1 < 2$ при $r \rightarrow 0$, по мере углубления потенциальной ямы. Проиллюстрировать результат на конкретных потенциалах.

Указание. Рассматривая случай $l \sim 1$, учесть, что при этом в основной области классического движения центробежным потенциалом можно пренебречь, см. 9.7. На малых и больших расстояниях, где нарушается квазиклассичность, воспользоваться точным решением уравнения Шрёдингера.

9.10. Исходя из правила квантования Бора — Зоммерфельда, получить выражение для смещения энергетических уровней при малом изменении потенциала на $\delta U(x)$ и установить его связь с результатом первого порядка теории возмущений. Какова интерпретация полученного выражения в рамках классической теории?

Для иллюстрации рассмотреть сдвиги уровней линейного осциллятора за счет ангармоничности $\delta U = \beta x^4$ и сравнить с точным результатом первого порядка теории возмущений.

9.11. Для частицы в симметричной потенциальной яме $U(x)$ получить в квазиклассическом приближении выражение для смещения уровней под влиянием слабого однородного электрического поля и найти поляризуемость стационарных состояний. Какова интерпретация полученного результата в рамках классической теории? Найти поляризуемости для линейного осциллятора и частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме.

9.12. Используя правило квантования Бора — Зоммерфельда, получить квазиклассические выражения для поправок первого и второго приближения к сдвигу уровня под влиянием возмущения $V(x)$ потенциала. Найти сдвиги уровней линейного осциллятора за счет ангармоничности $V = \alpha x^3$ и сравнить их с точным результатом второго порядка теории возмущений.

9.13. Найти следующую по \hbar квазиклассическую поправку к правилу квантования Бора — Зоммер-

фельда. Показать, что при учете ее энергия уровня оказывается равной

$$E_n = E_n^{B.-3.} + \Delta E_n, \quad \Delta E_n = \frac{\hbar^2}{24mT(E)} \frac{\partial^2}{\partial E^2} ((U'(x))^2 T(E)),$$

где черта означает усреднение с классической вероятностью, $dw = 2dx/T(E)v(x)$, при энергии $E = E_n^{B.-3.}$, определяемой правилом Бора — Зоммерфельда.

Для осциллятора с ангармоничностью вида $V = \beta x^4$ и $V = \alpha x^3$ найти следующие квазиклассические поправки к результатам задач 9.10 и 9.12.

9.14. Для потенциала притяжения, имеющего при $r \rightarrow 0$ вид $U = -\alpha/r^\nu$ с $\nu > 2$, возникает «падение на центр» (см. [1], § 35). При этом на малых расстояниях оба независимых решения радиального уравнения Шрёдингера ведут себя одинаковым образом (сравнить с $R_l \propto r^l$ и $\propto r^{-l-1}$ для регулярного потенциала с $\nu < 2$), и на первый взгляд не возникает квантования энергетического спектра, так как только одно условие убывания волновой функции в классически запрещенной области при $r \rightarrow \infty$ может быть всегда удовлетворено.

Используя «обрезание» потенциала со стороны малых r в виде непроницаемой сферы радиуса r_0 , показать, что квантование спектра возникает, но в пределе $r_0 \rightarrow 0$ для однозначного определения этих уровней необходимо фиксировать⁸⁾ положение одного из них (для каждого значения l). Получить правило квантования спектра и выяснить соответствующее ему дополнительное условие, накладываемое на волновую функцию при $r \rightarrow 0$.

Найти также энергетический спектр в потенциале $U = -\alpha/r^2$ в условиях «падения на центр».

§ 2. Квазиклассические волновые функции, вероятности и средние

9.15. Получить выражение для квазиклассической волновой функции в импульсном представлении в области характерных значений импульса частицы.

⁸⁾ Здесь проявляется то обстоятельство, что гамильтониан является эрмитовым, но не самосопряженным оператором, см. 1.29. Для его самосопряженного расширения необходимо введение дополнительного условия, что и эквивалентно фиксированию положения одного из уровней.

Найти распределение по импульсам частицы в стационарном состоянии дискретного спектра. Дать классическую интерпретацию полученного результата.

9.16. В стационарном состоянии дискретного спектра найти вероятность нахождения частицы в классически запрещенной области. Применить полученный результат к линейному осциллятору.

9.17. Каково в квазиклассическом приближении среднее значение физической величины $F(x)$, являющейся функцией только координаты частицы, в n -м стационарном состоянии дискретного спектра? В качестве иллюстрации найти средние $\overline{x^2}$ и $\overline{x^4}$ для линейного осциллятора и сравнить с точными значениями.

9.18. В квазиклассическом приближении найти выражение для среднего значения физической величины $F(p)$, являющейся функцией только импульса частицы, в n -м стационарном состоянии. Вычислить средние $\overline{p^2}$ и $\overline{p^4}$ для линейного осциллятора и сравнить с точным результатом.

9.19. Какова оценка произведения неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p$ в стационарных квазиклассических состояниях дискретного спектра? Сравнить полученную оценку с точным значением $\sqrt{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta p)^2}$ для линейного осциллятора и частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме.

9.20. В квазиклассическом приближении найти матричные элементы F_{mn} оператора вида $\hat{F} = F(x)$ в случае $|m - n| \sim 1$, т. е. между близкими по энергии стационарными состояниями дискретного спектра. Установить соотношение между ними и фурье-компонентами \tilde{F}_s функции $F(x(t))$ в классической механике:

$$F(x(t)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_s e^{is\omega t}, \quad \tilde{F}_s = \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) e^{-is\omega t} dt,$$

где $T(E) = 2\pi/\omega$ — период движения в рассматриваемом поле классической частицы с энергией $E = (E_m + E_n)/2$.

Используя полученный результат, вычислить матричные элементы x_{mn} и $(x^2)_{mn}$ для осциллятора и сравнить с точными значениями.

9.21. Обобщить результат предыдущей задачи на случай оператора вида $\hat{F} = F(\hat{p})$. Применить его для

вычисления матричных элементов операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\rho}^2$ для осциллятора.

9.22. Частица находится в n -м стационарном состоянии в потенциале $U(x)$. Внезапно (при $t=0$) потенциальная энергия изменяется и становится равной $U(x) + V(x)$. Каковы средняя энергия частицы и ее флуктуация при $t > 0$?

Считая $n \gg 1$ и изменение потенциала достаточно большим⁹⁾, так что $|V'_{\text{хар}}(x)|(b-a) \gg \hbar\omega_n$, где $T_n = 2\pi/\omega_n$ — период движения классической частицы в исходном состоянии, найти вероятности перехода ее в новые стационарные состояния. В каком случае может происходить «ионизация» системы? Дать интерпретацию полученных результатов в рамках классической механики.

Для иллюстрации рассмотреть линейный осциллятор, $U = m\omega^2 x^2/2$, на который внезапно накладывается однородное поле, так что $V = -F_0 x$.

§ 3. Прохождение через потенциальные барьеры

9.23. Используя квазиклассическое приближение, найти проницаемости следующих потенциальных барьеров: а) треугольный барьер из 2.36; б) $U(x) = U_0 \text{ch}^{-2}(x/a)$; в) барьер из 2.35.

Указать условия применимости полученных результатов и сравнить с точными значениями для $D(E)$.

9.24. Найти предэкспоненциальный множитель в квазиклассическом выражении для коэффициента прозрачности барьера вида, приведенного на рис. 25, а, и при указанной там энергии частицы. Применить полученный результат к барьеру из 2.35 и сравнить с точным, см. также 9.23, в).

9.25. То же, что и в предыдущей задаче, но для потенциального барьера вида, приведенного на рис. 25, б). Применить полученный результат к прямоугольному барьеру из 2.31.

9.26. В квазиклассическом приближении найти для медленных частиц, $E \rightarrow 0$, проницаемость потенциального барьера, имеющего при $x \rightarrow \pm\infty$ степенное

⁹⁾ Физически это условие означает, что в исходном состоянии представлен достаточно широкий спектр состояний «конечного» гамильтониана \hat{H}_f .

убывание $U \approx U_{1,2}(a/|x|)^{\nu_{1,2}}$ с $\nu_{1,2} > 2$. Обобщить полученный результат на случай барьеров с экспоненциальным убыванием на больших расстояниях.

Указание. Воспользоваться результатом 2.39.

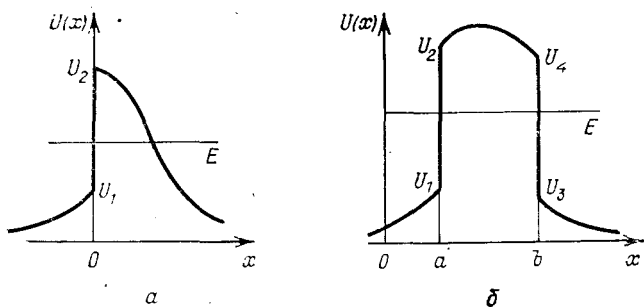


Рис. 25

9.27. В квазиклассическом приближении найти коэффициент надбарьерного отражения частиц в случае потенциала, имеющего скачок в точке $x=0$ (см., например, рис. 20). Сравнить с результатом теории возмущений из 8.30.

9.28. Используя квазиклассическое приближение, найти сдвиг и ширину основного уровня в δ -яме, $U = -\alpha\delta(x)$, возникающие при наложении слабого

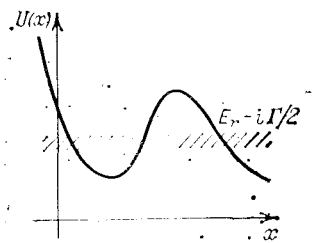


Рис. 26

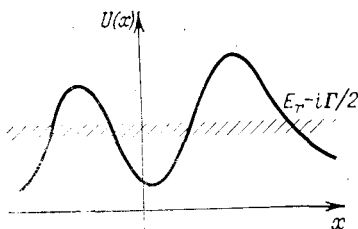


Рис. 27

однородного поля $V = -F_0x$. Сравнить полученные результаты с 6.36 и 8.12.

9.29. Получить в квазиклассическом приближении выражения для определения энергии E_{0n} и ширины Γ_n квазистационарных состояний в одномерном потенциале вида, приведенного на рис. 26. Каково их обобщение на случай, когда и слева от ямы барьер имеет конечную проницаемость (рис. 27)?

Применить полученные результаты для вычисления сдвига и ширины уровней линейного осциллятора, возникающих под влиянием слабой ангармоничности $V = -\lambda x^3$.

9.30. Оценить проницаемость центробежного барьера и *время жизни* квазистационарного состояния частицы (связанное с шириной уровня соотношением $\tau = \hbar/\Gamma$) в короткодействующем потенциале $U_S(r)$ радиуса r_S ; энергия состояния $E \ll \hbar^2/mr_S^2$.

9.31. Обобщить результат предыдущей задачи на случай, когда вне ямы на частицу действует кулоновский потенциал притяжения¹⁰⁾ $U_C = -\xi e^2/r$, причем $r_S \ll a_B = \hbar^2/m\xi e^2$; для простоты считать $|E| \ll \ll \xi e^2/a_B$.

Г л а в а 10

ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТИЦ. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Волновая функция системы, включающей *тождественные* частицы, обладает определенной симметрией относительно перестановки таких частиц, так что

$$\Psi(\dots, \xi_a, \dots, \xi_b, \dots) = \pm \Psi(\dots, \xi_b, \dots, \xi_a, \dots);$$

здесь $\xi_n \equiv (\mathbf{r}_n, \sigma_n)$ — совокупность переменных (пространственных и спиновых) соответствующих частиц. При этом волновая функция симметрична при перестановке частиц с целым спином — *бозонов* и антисимметрична для частиц с полуцелым спином — *фермионов*. Соответственно в случае, когда отдельные частицы системы находятся в определенных квантовых состояниях, волновая функция системы в целом получается в результате симметризации произведения волновых функций одночастичных состояний для системы бозонов и антисимметризации — для фермионов. При этом состояние системы определяется лишь указанием занятых одночастичных состояний (для различимых частиц важен и способ распределения их по таким состояниям!).

¹⁰⁾ Такая задача возникает в теории адронных атомов (см. 11.4). При этом речь идет о проницаемости барьера, разделяющего области ядерного притяжения на расстояниях $r \leq r_S$ и кулоновского — при $r \geq a_B$. Случай кулоновского отталкивания рассмотрен в [1, § 50].

Исследование многочастичных систем, автоматически обеспечивающее квантовомеханический учет их тождественности, удобно проводить на основе *представления чисел заполнения*. Используемые при этом операторы \hat{a}_i^+ , \hat{a}_i — операторы рождения и уничтожения частиц (в соответствующих квантовых состояниях, характеризующихся индексом i) в случае бозонов удовлетворяют соотношению коммутации

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_k] = [\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_k^+] \equiv \hat{a}_i \hat{a}_k^+ - \hat{a}_k^+ \hat{a}_i = \delta_{ik}, \quad (\text{X. 1})$$

а в случае фермионов — антикоммутационным соотношениям

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_k\} = \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+\} = 0, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_k^+\} \equiv \hat{a}_i \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_i = \delta_{ik} \quad (\text{X. 2})$$

(так что для фермионных операторов $\hat{a}_i^2 = (\hat{a}_i^+)^2 = 0$).

Операторы $\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$ являются операторами числа частиц в соответствующих квантовых состояниях. Для нормированных на единицу состояний с определенными значениями чисел заполнения имеем¹⁾

$$\hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i} | \dots, n_i - 1, \dots \rangle;$$

$$\hat{a}_i^+ | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i + 1} | \dots, n_i + 1, \dots \rangle$$

(для фермионов $n_i = 0$ или 1, для бозонов $n_i = 0, 1, 2, \dots$).

Для системы тождественных частиц (как бозонов, так и фермионов) оператор аддитивной физической величины, $F^{(1)} = \sum_a f_a^{(1)}$, в представлении чисел заполнения следующим образом выражается через $\Psi(\xi)$ -операторы²⁾

$$\hat{F}^{(1)} = \int \hat{\Psi}^+(\xi) \hat{f}^{(1)} \hat{\Psi}(\xi) d\xi; \quad (\text{X. 3})$$

¹⁾ Для фермионных систем здесь «опущен» фазовый множитель, см. [1], § 65.

²⁾ Операторы $\hat{\Psi}(\xi)$, $\hat{\Psi}^+(\xi)$ являются важным частным случаем операторов \hat{a}_i , \hat{a}_i^+ , соответствующим выбору $i = \mathbf{r}, \sigma$. Другой часто используемый выбор \hat{a}_i , \hat{a}_i^+ соответствует $i = \mathbf{p}, \sigma$. Обобщение формул (X. 3), (X. 4) на случай произвольного \hat{a}_i -оператора (вместо $\hat{\Psi}(\xi)$) состоит в использовании в них i -представления для операторов $\hat{f}^{(1)}$, $\hat{f}^{(2)}$.

здесь $\hat{f}^{(1)}$ — уже обычный одночастичный оператор в координатном представлении, операторы же $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$ — операторы в пространстве функций чисел заполнения и зависят от ξ как от параметра.

Для двухчастичной физической величины, $F^{(2)} = \sum_{a < b} f_{ab}^{(2)}$, оператор в представлении чисел заполнения имеет вид

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \int \int \hat{\Psi}^+(\xi) \hat{\Psi}^+(\xi') \hat{f}^{(2)} \hat{\Psi}(\xi') \hat{\Psi}(\xi) d\xi d\xi'. \quad (\text{X. 4})$$

§ 1. Симметрия волновых функций

10.1. Для системы из двух одинаковых частиц со спином s найти число различных спиновых состояний, симметричных и антисимметричных по отношению к перестановке спиновых переменных обеих частиц.

10.2. Показать, что если n тождественных частиц со спином s находится в различных орбитальных состояниях $\varphi_1(\mathbf{r})$, $\varphi_2(\mathbf{r})$, ..., $\varphi_n(\mathbf{r})$, то общее число независимых состояний системы с учетом спиновых степеней свободы равно $G = (2s + 1)^n$ независимо от того, какой статистике подчиняются частицы.

Каково число состояний в случае различных частиц?

10.3. Пусть $\psi_{f_i}(\xi)$ являются нормированными на 1 волновыми функциями одночастичных состояний (f_i — совокупность квантовых чисел полного набора). Написать нормированные волновые функции состояний системы из трех тождественных: а) бозонов и б) фермионов, находящихся в состояниях с квантовыми числами f_1 , f_2 , f_3 .

10.4. Три тождественных бозона со спином $s = 1$ находятся в одинаковых орбитальных состояниях, описываемых волновой функцией $\varphi(\mathbf{r})$. Написать нормированные спиновые функции возможных состояний системы. Каково число таких независимых состояний? Каковы возможные значения суммарного спина частиц?

10.5. Какие ограничения на квантовые числа (спин J_A и внутреннюю четность P_A) нейтральной частицы A^0 следуют из факта существования распадов этой

частицы на два π^0 -мезона: $A^0 \rightarrow 2\pi^0$ (для пиона $J_\pi^P = 0^-$), сравнить с 5.30?

10.6. Установлено, что в реакции $\pi^- + d \rightarrow n + n$ захват медленного π^- -мезона (его спин $J_\pi = 0$) происходит из основного состояния мезодейтерия с сохранением четности.

Учитывая, что внутренние четности протона и нейтрона одинаковы и квантовые числа дейтрона $J_d^P = 1^+$, найти отсюда внутреннюю четность пиона.

10.7. Три тождественных бозона со спином $s = 0$, слабо взаимодействующие друг с другом, находятся в стационарных состояниях с одинаковыми квантовыми числами n_r и l , причем $l = 1$, в некотором центральном поле. Показать, что суммарный момент L системы не может принимать значения $L = 0$.

10.8. Какие значения может принимать суммарный спин S двух тождественных бозонов со спином s в состоянии с относительным орбитальным моментом L (L — момент в с. ц. и.), т. е. какие состояния ^{2s+1}L системы возможны? Рассмотреть, в частности, случай $s = 0$.

10.9. То же, что и в предыдущей задаче, но для тождественных фермионов.

10.10. Система состоит из двух одинаковых бесспиновых бозонов, находящихся в состояниях, описываемых нормированными на 1, взаимно ортогональными волновыми функциями $\psi_{1,2}(\mathbf{r})$. Какова вероятность нахождения обеих частиц в одном и том же малом объеме dV ? Сравнить ее со случаем различных частиц.

10.11. Два одинаковых бесспиновых бозона находятся в состояниях, описываемых нормированными на 1 волновыми функциями $\psi_{1,2}(\mathbf{r})$. Найти (среднюю) плотность частиц в такой системе и сравнить ее со случаем различных частиц.

§ 2. Основы формализма вторичного квантования (представление чисел заполнения)

10.12. Найти коммутационное соотношение для операторов, представляющих эрмитову и антиэрмитову части бозонного оператора уничтожения \hat{a} (или рождения \hat{a}^+).

10.13. Построить из операторов координаты \hat{x} и импульса \hat{p} частицы операторы \hat{a} и \hat{a}^+ , обладающие

свойствами бозонных операторов уничтожения и рождения.

Какова волновая функция $\Psi_0(x)$ «вакуумного» состояния?

10.14. Можно ли для преобразования вида $\hat{a}' = \hat{a}^+$, $\hat{a}'^+ = \hat{a}$ рассматривать \hat{a}' , \hat{a}'^+ как операторы уничтожения и рождения некоторых новых частиц? Провести анализ состояний $|n'\rangle$ (т. е. состояний с определенным значением n новых частиц) в базисе состояний исходных частиц. Указать вид унитарного оператора \hat{U} , осуществляющего рассматриваемое преобразование.

10.15. Найти собственные функции и собственные значения операторов рождения и уничтожения. В рассматриваемых состояниях найти распределение по числу частиц. Обсудить случаи бозонных и фермионных операторов.

Показать, что применительно к линейному осциллятору собственные функции оператора уничтожения $\hat{a} = (m\omega\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2m\hbar\omega}$ описывают когерентные состояния, см. 6.21.

10.16. Является ли переход от операторов \hat{a} , \hat{a}^+ к новым операторам $\hat{a}' = \hat{a} + \alpha$, $\hat{a}'^+ = \hat{a}^+ + \alpha^*$ (α — комплексное число) унитарным преобразованием? Каков при этом вид унитарного оператора? Рассмотреть случаи как фермионных, так и бозонных операторов \hat{a} , \hat{a}^+ .

Провести анализ состояния вакуума «новых» частиц $|0'\rangle$ в базисе состояний $|n\rangle$ исходных частиц и найти распределение по числу последних.

10.17. То же, что и в предыдущей задаче, для преобразования вида $\hat{a}' = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a}^+$, $\hat{a}'^+ = \alpha\hat{a}^+ + \beta\hat{a}$ (α , β — вещественные числа).

10.18. Произвольное одночастичное состояние $|1\rangle$ можно представить в виде $|1\rangle = \sum_i C_{f_i} \hat{a}_{f_i}^+ |0\rangle$, где $\hat{a}_{f_i}^+$

является оператором рождения частицы в состоянии Ψ_{f_i} (f_i — совокупность квантовых чисел полного набора). Какой квантовомеханический смысл имеют коэффициенты C_{f_i} ?

Рассмотреть, в частности, одночастичное состояние бесспиновой частицы вида

$$|1\rangle = \int \varphi(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) dV |0\rangle.$$

Нормировать его на 1 и вычислить среднее значение физической величины f с помощью вторично квантованного оператора (X.3).

10.19. Операторы $\hat{a}_{f_k}^+$, \hat{a}_{f_k} и $\hat{a}_{g_k}^+$, \hat{a}_{g_k} являются операторами рождения и уничтожения частицы в состояниях, определяемых квантовыми числами f_k и g_k двух различных полных наборов. Указать соотношения между этими операторами.

10.20. Двухчастичное состояние системы тождественных бозонов (или фермионов) описывается вектором состояния $|2\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ |0\rangle$. Нормировать его на единицу. Указать вид нормированных волновых функций в координатном представлении. Рассмотреть случаи как одинаковых, так и различных квантовых чисел $f_{1,2}$.

10.21. То же, что и в предыдущей задаче, для трехчастичного состояния $|3\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ \hat{a}_{f_3}^+ |0\rangle$.

10.22. Для системы, состоящей из одинаковых частиц, найти в представлении чисел заполнения вид оператора плотности числа частиц $\hat{n}(\mathbf{r})$ (в точке \mathbf{r} пространства) и числа частиц $\hat{N}(v)$ в некотором объеме v .

10.23. Доказать коммутационные соотношения

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{\Psi}(\xi)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\Psi}(\xi), \quad [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\Psi}^+(\xi)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\Psi}^+(\xi),$$

где $\hat{\mathbf{P}}, \hat{\Psi}(\xi)$ — операторы импульса и поля ($\hat{\Psi}$ -операторы) в представлении чисел заполнения для системы тождественных бозонов или фермионов.

10.24. Исследовать стационарные состояния (энергетический спектр и волновые функции) поперечного движения заряженной бесспиновой частицы в однородном магнитном поле, введя соответствующим образом выбранные операторы рождения и уничтожения³⁾. Воспользоваться выражением $\mathbf{A} = [\mathcal{H}\mathbf{r}]/2$ для векторного потенциала.

³⁾ Аналогично тому, как это делается для линейного осциллятора с выбором $\hat{a} = (m\omega\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar m\omega}$, приводящим гамильтониан к виду $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+ \hat{a} + 1/2)$. Для рассматриваемой задачи необходимо ввести две пары операторов рождения и уничтожения; при соответствующем их выборе гамильтониан зависит только от одной из них.

10.25. Энергетический спектр $E_{n_1 n_2} = \hbar\omega_1(n_1 + 1/2) + \hbar\omega_2(n_2 + 1/2)$ двумерного (плоского) осциллятора, $U = m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)/2$, в случае кратных частот $\omega_{1,2}$ содержит вырожденные уровни. Для частных случаев а) $\omega_1 = \omega_2$ и б) $\omega_1 = 2\omega_2$ связать это свойство спектра с симметрией гамильтониана. Указать явный вид операторов симметрии.

10.26. Рассмотреть так называемый *суперсимметричный* осциллятор, характеризуемый гамильтонианом $\hat{H} \equiv \hat{H}_B + \hat{H}_F = \hbar\omega(\hat{b}^+ \hat{b} + \hat{f}^+ \hat{f})$; здесь $\hat{b}(\hat{b}^+)$ и $\hat{f}(\hat{f}^+)$ — операторы уничтожения (рождения) бозона и фермиона, соответственно; $\hat{H}_B = \hbar\omega(\hat{b}^+ \hat{b} + 1/2)$ и $\hat{H}_F = \hbar\omega(\hat{f}^+ \hat{f} - 1/2)$. Спектр такого гамильтониана $E_N = \hbar\omega N$, $N = n_B + n_F$, а собственные векторы — $|n_B, n_F\rangle$. Характерные особенности спектра: $E_N \geq 0$, уровни с $E_N > 0$ двукратно вырождены, основной уровень $E_0 = 0$ невырожденный.

Указать вид операторов симметрии гамильтониана и показать, что гамильтониан может быть выражен через антикоммутатор этих операторов; объяснить свойства спектра.

Указание. Симметрия, проявляющаяся в преобразованиях, переводящих бозоны и фермионы друг в друга (и соответствующая их равноправному рассмотрению), называется *суперсимметрией*. Она обладает рядом привлекательных особенностей и с нею связывают, в частности, надежду на создание единой теории элементарных частиц (см. обзор, указанный в связи с задачей 7.9). В данной и следующей за ней задачах рассмотрены характерные черты суперсимметрии и ее проявления в простейших квантовомеханических системах.

10.27. Введем операторы

$$\hat{Q} = \hat{A}^+ \hat{f}, \quad \hat{Q}^+ = \hat{A} \hat{f}^+, \quad \hat{H} = \hat{Q} \hat{Q}^+ + \hat{Q}^+ \hat{Q},$$

где \hat{f}, \hat{f}^+ обладают свойствами фермионных операторов уничтожения и рождения, а \hat{A}, \hat{A}^+ — некоторые коммутирующие с ними операторы.

Убедиться, что рассматриваемая система⁴⁾ обладает суперсимметрией (см. предыдущую задачу).

⁴⁾ При этом \hat{H} — ее гамильтониан, а пространство векторов состояний системы определяется тем пространством, на котором определены операторы \hat{A}, \hat{f} , а тем самым и $\hat{Q}, \hat{Q}^+, \hat{H}$.

Показать, что при подходящем выборе «координатных» операторов \hat{A} , \hat{A}^+ и спиновых \hat{f} , \hat{f}^+ рассматриваемый суперсимметричный гамильтониан характеризует одномерное движение частицы со спином $s = 1/2$. Каковы при этом следствия суперсимметрии?

Указание. Выбрать $\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\hat{A} = \hat{p}/\sqrt{2m} + iW(x)$.

§ 3. Системы из большого числа $N \gg 1$ частиц

10.28. В основном состоянии бозе-газа из N взаимодействующих частиц со спином $s = 0$, находящегося в объеме V , найти среднюю плотность числа частиц, среднее число частиц в некотором объеме v и флуктуацию этого числа частиц.

Задачу предлагается решить усреднением соответствующих операторов в представлении чисел заполнения.

10.29. В условиях предыдущей задачи рассмотреть пространственную корреляцию флуктуаций плотности числа частиц. Для однородной системы она характеризуется *корреляционной функцией* $v(r)$ ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$), равной

$$v(r) = \{\overline{n_1 n_2} - \bar{n}^2\} / \bar{n}, \quad n_{1,2} \equiv n(\mathbf{r}_{1,2}),$$

где \bar{n} — средняя плотность числа частиц.

Сравнить с соответствующим результатом для системы из классических частиц.

10.30. В основном состоянии идеального ферми-газа из N частиц в объеме V найти среднюю плотность числа частиц и среднее число частиц в некотором объеме v .

Задачу предлагается решить усреднением соответствующих операторов в представлении чисел заполнения.

10.31. В условиях предыдущей задачи рассмотреть корреляцию плотностей числа частиц с определенными значениями проекции спина на ось z в различных точках пространства: найти $\overline{n(\mathbf{r}_1, s_{z1}) n(\mathbf{r}_2, s_{z2})}$ и сравнить с произведением $\overline{n(\mathbf{r}_1, s_{z1})} \cdot \overline{n(\mathbf{r}_2, s_{z2})}$. Рассмотреть случаи различных и одинаковых значений s_{z1} и s_{z2} .

Найти корреляционную функцию плотности (см. 10.29).

10.32. Рассматривая взаимодействие между частицами как возмущение, найти в первом порядке теории возмущений энергию основного состояния бозе-газа, содержащего N частиц со спином $s = 0$ в объеме V (взаимодействие частиц друг с другом описывается короткодействующим парным потенциалом отталкивания $U(r) \geq 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$).

10.33. То же, что и в предыдущей задаче, для ферми-газа частиц со спином $s = 1/2$. Предполагается, что потенциал парного взаимодействия частиц не зависит от спина и удовлетворяет условию $k_F R_0 \ll 1$, где R_0 — радиус потенциала, $\hbar k_F$ — граничный импульс.

10.34. Идеальный ферми-газ нейтральных частиц со спином $s = 1/2$, имеющих спиновый магнитный момент μ_0 (так что $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$), находится во внешнем однородном магнитном поле. Для основного состояния рассматриваемой системы найти:

- 1) числа заполнения одночастичных состояний;
- 2) магнитную восприимчивость газа (для слабого поля).

Взаимодействие магнитных моментов друг с другом пренебрежимо мало.

10.35. Выяснить характер экранировки электронами проводимости электростатического поля точечного заряда q , помещенного внутрь проводника. Воспользоваться статистическими соображениями⁵⁾, рассматривая электроны проводимости как ферми-газ (на фоне равномерного распределения положительного заряда, обеспечивающего электронейтральность проводника) при температуре $T = 0$. Искажение электронной плотности вблизи заряда считать малым.

10.36. Найти распределение заряда вблизи поверхности заряженного (с «поверхностной» плотностью заряда σ) проводника. Воспользоваться соображениями, высказанными в предыдущей задаче.

⁵⁾ Аналогичными используемым в методе Томаса — Ферми, см. главу 11, § 2, а также [1], § 70.

Большинство расчетов атомных систем основано на предположении, что отдельные электроны (а не только вся система в целом) находятся в определенных квантовых состояниях. При этом волновая функция системы записывается в виде антисимметричной комбинации произведений волновых функций таких одноэлектронных состояний. Наиболее точные расчеты в этом приближении связаны с численным решением уравнений Хартри—Фока, полученных на основе метода самосогласованного поля для одноэлектронных состояний.

Для систем с большим числом электронов простая реализация идеи самосогласованного поля лежит в основе метода Томаса—Ферми. В этом методе (средняя) электронная плотность $n(r)$ в основном состоянии нейтрального атома (или положительного атомного иона) на основе статистических соображений связана с электростатическим потенциалом системы $\varphi(r)$ соотношением¹⁾

$$n(r) = \frac{1}{3\pi^2} [2(\varphi - \varphi_0)]^{3/2}. \quad (\text{XI. 1})$$

Для нейтрального атома $\varphi_0 = 0$ и из электростатического уравнения Пуассона следует уравнение Томаса—Ферми ($r \neq 0$)

$$\Delta\varphi = 4\pi n = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \varphi^{3/2} \quad (\text{XI. 2})$$

(самосогласованное уравнение для потенциала). Вводя более удобные величины x и $\chi(x)$ согласно

$$r = xbZ^{-1/3}, \quad \varphi(r) = \frac{Z}{r} \chi(x) = \frac{Z^{4/3}}{b} \frac{\chi(x)}{x}, \quad (\text{XI. 3})$$

где $b = (3\pi/8 \sqrt{2})^{2/3} \approx 0,885$, Z — число электронов (заряд ядра), приводим уравнение (XI.2) к виду

$$\sqrt{x}\chi''(x) = \chi^{3/2}(x) \quad (\text{XI. 4})$$

с граничными условиями $\chi(0) = 1$ и $\chi(\infty) = 0$. Функция $\chi(x)$ является универсальной в методе Томаса—

¹⁾ Здесь (и часто не оговаривая в дальнейшем) используем атомные единицы (а.е.), $e = \hbar = m_e = 1$.

Ферми. Числовые расчеты дают $\chi'(0) = -1,588$, при этом энергия полной ионизации атома в модели Томаса — Ферми равна $E_0 = -(3\chi'(0)/7b)Z^{7/3} = 0,769Z^{7/3} = 20,92Z^{7/3}$ эВ, см. 11.21.

В этой главе представлена серия задач, связанных с исследованием свойств во внешних электрическом и магнитном полях частицы, слабо связанной (т. е. с малой энергией связи) центральным короткодействующим потенциалом. Такая одночастичная система²⁾ используется в атомной физике для моделирования отрицательных атомных ионов, в которых внешний слабосвязанный электрон рассматривается как движущийся в короткодействующем потенциале, создаваемом нейтральным атомом.

§ 1. Стационарные состояния атомов с одним и двумя электронами

11.1. Найти поправку к уровням энергии *водородоподобного* атома³⁾ за счет так называемой релятивистской зависимости массы частицы⁴⁾ от скорости в первом порядке теории возмущений.

11.2. Рассмотреть *сверхтонкую структуру s-уровней* водородоподобного атома, связанную с взаимодействием магнитных моментов электрона и ядра. Ядро имеет спин I и магнитный момент μ_0 , так что для него $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}/I$ (и рассматривается как точечная частица). Оценить сверхтонкое расщепление и сравнить его с интервалом тонкой структуры (из преды-

²⁾ Многие свойства состояний частицы с малой энергией $E \ll \hbar^2/mr_S^2$, где r_S — радиус короткодействующего потенциала, определяются лишь двумя параметрами: энергией связи и так называемым *асимптотическим коэффициентом* $C_{\chi l}$ (см. 11.36, 11.37). Они, в свою очередь, связаны с параметрами низкоэнергетического рассеяния: *длиной рассеяния* a_l и *эффективным радиусом* r_l , см. (XIII. 15).

³⁾ *Водородоподобным* (и аналогично *гелиеподобным*) атомом или ионом мы называем систему, состоящую из ядра с произвольным зарядом Ze и одного (двух) электронов.

⁴⁾ Для бесспиновой частицы получаемый результат определяет *тонкую структуру* уровней водородоподобного атома. В случае же электрона, как это следует из уравнения Дирака [29], кроме такой поправки имеется еще одно слагаемое в гамильтониане, описывающее так называемое *спин-орбитальное взаимодействие*, вклад которого в смещение уровней имеет такой же порядок величины, как и рассчитанная в данной задаче поправка.

душей задачи); магнитный момент ядра порядка $e\hbar/m_p c$, m_p — масса протона. В случае атома водорода сравнить полученный результат с экспериментальным значением сверхтонкого расщепления основного уровня $\Delta\nu_{\text{HFS}} \equiv \Delta E_{\text{HFS}}/2\pi\hbar \approx 1420$ МГц⁵⁾, магнитный момент протона равен $\mu_p = -1,396 e\hbar/m_p c$.

11.3. Вычислить в первом порядке теории возмущений сдвиги s -уровней водородоподобных атомов, обусловленные неточечностью ядра. Распределение заряда в ядре считать сферически симметричным. Оценить значение поправки, рассматривая ядро как равномерно заряженный шар радиуса $R \approx 1,2 \times 10^{-13} A^{1/3}$ см, $A \approx 2Z$, A — массовое число ядра; сравнить с результатами двух предыдущих задач.

Насколько существенна неточечность ядра для μ -мезоатома? Взаимодействие мюона, как и электрона, с ядром имеет чисто электростатический характер.

11.4. Рассмотреть сдвиги кулоновских ns -уровней пионных, и вообще адронных²⁾ атомов, вызванные короткодействующим сильным (ядерным) взаимодействием пиона с ядром. Показать, что сдвиг уровня описывается формулой теории возмущений по длине рассеяния

$$\Delta E_{ns} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} |\Psi_{ns}^{(0)}(0)|^2 a_s,$$

где $\Psi_{ns}^{(0)}(0)$ — значение невозмущенной кулоновской волновой функции, а a_s — так называемая длина рассеяния пиона на ядерном потенциале (сравнить с 4.29; обобщение на случай $l \neq 0$ см. в 13.36).

Указание. Влияние короткодействующего потенциала $U_s(r)$ радиуса r_s на уровни $E_n^{(0)} \ll \hbar^2/mr_s^2$ в далекодействующем потенциале U_L радиуса $r_L \gg r_s$ можно учесть как изменение граничного условия: вместо ограниченности волновой функции на малых расстояниях теперь $\Psi_n \propto (1 - a_s/r)$ при $r \ll r_L$. Соот-

⁵⁾ Энергия, соответствующая частоте $\nu = 1$ МГц, равна $\epsilon_0 \approx 4,136 \cdot 10^{-9}$ эВ.

⁶⁾ Адронные атомы — связанные кулоновским взаимодействием системы из двух адронов; например, пион-протонный (π - p) или протон-антипротонный ($p\bar{p}$) атомы и др. Кулоновские уровни такой системы $E_n^{(0)} = -m(\xi e^2)^2/2\hbar^2 n^2$, где $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы, $\xi = -Z_1 Z_2 > 0$, $Z_{1,2}$ — заряды адронов; радиус Бора такой системы $a_B = \hbar^2 / \xi m e^2$.

ветственно сдвиг уровня определяется лишь длиной рассеяния a_s на потенциале U_s и не зависит от его конкретного вида.

11.5. Рассчитать в первом порядке теории возмущений энергию основного состояния двухэлектронного атома (или иона), рассматривая взаимодействие между электронами как возмущение. Получить значение *потенциала ионизации* системы и сравнить его с экспериментальными данными для атома гелия и ионов лития, бериллия, углерода и кислорода: $I(\text{He}) = 24,6$ эВ; $I(\text{Li}^+) = 75,6$ эВ; $I(\text{Be}^{++}) = 154$ эВ; $I(\text{C}^{4+}) = 392$ эВ; $I(\text{O}^{6+}) = 739$ эВ.

11.6. Найти энергию и потенциал ионизации основного состояния двухэлектронного атома (иона) вариационным методом. В качестве пробной функции взять произведение водородных функций с некоторым эффективным зарядом $Z_{\text{эф}}$, играющим роль вариационного параметра. Сравнить с результатом из 11.5. Можно ли сделать вывод о существовании устойчивого иона водорода H^- ?

11.7. Показать, что рассмотренная в предыдущей задаче пробная функция с эффективным зарядом $Z_{\text{эф}} = Z - 5/16$ является наилучшей из всех пробных функций вида $\Psi_{\text{проб}} \equiv \psi(r_1 + r_2)/4\pi$, т. е. зависящих только от переменной $u = r_1 + r_2$.

11.8. Найти среднюю энергию двухэлектронного иона с зарядом ядра Z в состоянии с волновой функцией

$$\Psi(r_1, r_2) = C [\exp(-\alpha r_1 - \beta r_2) + \exp(-\beta r_1 - \alpha r_2)].$$

Выбрав значения параметров $\alpha = 1$, $\beta = 0,25$, доказать существование стабильного иона водорода H^- .

11.9. Оценить значения энергий и потенциалов ионизации возбужденных состояний гелиеподобных атомов в приближении, в котором взаимодействие между электронами эффективно учитывается как экранирование заряда ядра электроном, находящимся в основном, $1s$ -состоянии (при рассмотрении движения возбужденного электрона). Сравнить полученный результат с экспериментальными данными, приведенными в решении.

11.10. Найти энергию и потенциал ионизации 2^3S -состояния гелиеподобного атома вариационным методом. В качестве пробной функции взять должным образом симметризованное произведение водородных

функций $1s$ - и $2s$ -состояний с некоторым эффективным зарядом ядра $Z_{\text{эф}}$, играющим роль вариационного параметра. В случае атома гелия и иона лития Li^+ сравнить полученные результаты с экспериментальными данными (в атомных единицах): $I_{\text{He}}(2^3S) = 0,175$ и $I_{\text{Li}^+}(2^3S) = 0,610$.

11.11. Рассчитать сверхтонкое расщепление для триплетного 2^3S -состояния атома гелия с ядром ^3He ; спин ядра $I = 1/2$, магнитный момент $\mu = -1,064e\hbar/m_{\text{p}}c$. При вычислениях воспользоваться приближенным видом волновой функции 2^3S -состояния, отвечающим пренебрежению взаимодействием электронов друг с другом. Сравнить полученный результат с экспериментальным значением величины сверхтонкого расщепления $\Delta\nu_{\text{HFS}} \equiv \Delta E_{\text{HFS}}/2\pi\hbar = 6740 \text{ МГц}$.

11.12. Показать, что у гелиеподобных атомов все устойчивые возбужденные состояния, стабильные относительно распада на соответствующий водородоподобный атом и свободный электрон, имеют электронную конфигурацию $1snl$, т. е. один из электронов обязательно находится в основном, $1s$ -состоянии (неустойчивые относительно ионизации состояния атомных систем с двумя или более возбужденными электронами называют *автоионизационными*, см. 11.72).

11.13. Оценить значения потенциалов ионизации основного $2S$ - (электронная конфигурация $(1s)^2 2s$) и первого возбужденного $2P$ -состояний (электронная конфигурация $(1s)^2 2p$) литиеподобного атома, считая, что взаимодействие электронов, находящихся в основном состоянии, с возбужденным сводится эффективно к экранировке на 2 заряда ядра (для возбужденного электрона).

В случае атома лития сравнить полученные значения с экспериментальными: $I(2S) = 5,39 \text{ эВ}$ и $I(2P) = 3,54 \text{ эВ}$.

§ 2. Многоэлектронные атомы.

Статистическая модель атома

11.14. Найти возможные термы атома со следующей электронной конфигурацией (сверх заполненных оболочек):

а) np , б) $(np)^2$, в) $(np)^3$, г) $(np)^4$, д) $(np)^5$, е) $(np)^6$.

Каковы их четности? Пользуясь правилами Гунда, указать нормальный терм.

11.15. Указать атомные термы, возможные для электронной конфигурации $(nl)^2$.

11.16. Состояниям атома, имеющим электронную конфигурацию $nsn'l$ сверх заполненных оболочек, отвечают два терма: 1L и 3L (L — суммарный орбитальный момент, $L = l$). Рассматривая взаимодействие между электронами как возмущение, показать, что энергия триплетного терма ниже энергии синглетного. Вид радиальных функций ns - и $n'l$ -электронов не конкретизировать.

11.17. Атом содержит сверх заполненных оболочек два эквивалентных np -электрона. Рассматривая взаимодействие между электронами как возмущение, найти расположение термов 1S , 1D , 3P атома в порядке возрастания энергии. Убедиться в том, что значения квантовых чисел S и L нормального терма подтверждают правило Гунда. Показать, что энергии термов удовлетворяют соотношению

$$\Delta \equiv \frac{E(^1S) - E(^1D)}{E(^1D) - E(^3P)} = \frac{3}{2}$$

(в рассматриваемом приближении оно относится также к атомам с электронной конфигурацией $(np)^4$). Явный вид радиальной волновой функции np -электрона не конкретизировать.

Указание. При составлении правильных функций нулевого приближения, отвечающих определенному значению L орбитального момента, удобно использовать тензорный формализм (см. задачи § 4 главы 3).

11.18. То же, что и в предыдущей задаче, но для атома с тремя эквивалентными np -электронами. Показать, что энергетические расстояния между термами удовлетворяют соотношению

$$\Delta = \frac{E(^2P) - E(^2D)}{E(^2D) - E(^4S)} = \frac{2}{3}.$$

11.19. Рассмотреть статистическую модель основного состояния нейтрального атома с зарядом ядра $Z \gg 1$ в пренебрежении взаимодействием электронов друг с другом. В рамках этой модели найти:

1) электронную плотность $n(r)$ и \bar{r}^k для отдельного электрона,

2) распределение электронов по импульсам $\tilde{n}(p)$, а также \bar{p} и \bar{p}^2 ,

3) характерную величину орбитального момента электрона,

4) энергию полной ионизации атома $E_{\text{полн. ион}} = -E_0$.

Обратить внимание на зависимость от Z рассчитанных величин и сравнить с результатами модели Томаса — Ферми.

В пренебрежении электрон-электронным взаимодействием получить точное выражение для энергии основного состояния атома E_0 и при $Z \gg 1$ сравнить его с результатом статистической модели.

11.20. Определить зависимость от Z числа электронов распределения Томаса — Ферми, находящихся в s -состоянии.

11.21. В модели Томаса — Ферми выразить через электронную плотность $n(r)$ кинетическую энергию электронов, энергию их взаимодействия друг с другом и с ядром, а также полную энергию $E[n(r)]$ атома.

Показать, что функция $n_0(r)$, минимизирующая функционал $E[n(r)]$, является решением уравнения Томаса — Ферми (XI.2) с $\varphi = (1/2)(3\pi^2 n_0(r))^{2/3}$, и используя это экстремальное свойство функционала, доказать в рамках модели Томаса — Ферми: а) соотношение $U_{\text{е яд}} = -7U_{\text{ее}}$ между энергиями взаимодействия электронов друг с другом $U_{\text{ее}}$ и с ядром $U_{\text{е яд}}$, б) теорему вириала.

Используя пробную функцию вида ⁷⁾

$$n_{\text{проб}}(r) = \frac{\alpha \lambda^3 Z^{3/2}}{16\pi r^{3/2}} \exp(-\lambda \sqrt{rZ^{1/3}}), \quad \int n_{\text{проб}} dV = \alpha Z,$$

⁷⁾ Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче речь идет о безусловном минимуме функционала $E[n(r)]$ без дополнительного условия о нормировке $n(r)$, при этом точная функция $n_0(r)$ оказывается автоматически нормированной на число Z электронов. Приближенная же пробная функция не обязана удовлетворять такому условию.

Отметим интересное свойство функционала энергии. В условиях данной задачи $E[n(r)]$ для нейтрального атома принимает минимальное значение. Если же ввести функционал $E[\varphi(r)]$, см. 11.22, то для нейтрального атома он, наоборот, принимает максимальное значение. Таким образом, результаты 11.21, 11.22 дают ограничения как сверху, так и снизу для энергии атома в модели Томаса — Ферми.

где α , λ — вариационные параметры, найти энергию E основного состояния нейтрального атома с зарядом ядра Z вариационным методом; сравнить с точным результатом модели Томаса — Ферми.

11.22. В рамках статистической модели нейтрального атома записать его энергию $E[\varphi(r)]$ через потенциал $\varphi(r)$ в таком виде, чтобы из условия экстремальности функционала $E[\varphi(r)]$ следовало уравнение Томаса — Ферми (XI. 2).

Используя пробную функцию

$$\varphi(r) = \frac{Z}{r} \chi(r), \quad \chi(r) = (1 + \alpha Z^{1/3} r)^{-2},$$

где α — вариационный параметр, найти энергию основного состояния атома вариационным методом, сравнить с предыдущей задачей и с точным результатом модели Томаса — Ферми.

§ 3. Основные представления теории молекул

11.23. Произвести классификацию возможных термов молекулярного иона водорода H_2^+ . Указать возможные значения орбитального момента электрона L по отношению к центру симметрии для различных термов иона.

11.24. Состояние системы из двух электронов описывается волновой функцией $\Psi = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \chi_{\alpha\beta}$, где $\chi_{\alpha\beta}$ — спиновая функция, а $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеет вид

а) $\psi = f(r_1, r_2);$

б) $\psi = (\mathbf{r}_1 \mathbf{n}_0 + \mathbf{r}_2 \mathbf{n}_0) f(r_1, r_2);$

в) $\psi = ([\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \mathbf{n}_0) f(r_1, r_2);$

г) $\psi = (\mathbf{r}_1 \mathbf{n}_0 + \mathbf{r}_2 \mathbf{n}_0) ([\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \mathbf{n}_0) f(r_1, r_2).$

Произвести принятую в теории двухатомных молекул классификацию указанных состояний, рассматривая постоянный вектор \mathbf{n}_0 как аналог радиуса-вектора относительного положения ядер.

11.25. Для двухатомной молекулы оценить по порядку величины отношения следующих величин:

а) интервалов между электронными, колебательными и вращательными уровнями;

б) межъядерного расстояния и амплитуды колебаний ядер;

в) характерных периодов и скоростей электронных и ядерных движений.

11.26. Считая известными следующие характеристики молекулы водорода H_2 :

1) энергию диссоциации основного состояния молекулы на два невозбужденных атома водорода $I_0 = 4,46$ эВ;

2) частоту колебаний ω_e молекулы, $\hbar\omega_e = 0,54$ эВ;

3) ротационную постоянную $B_e = 7,6 \cdot 10^{-3}$ эВ, найти соответствующие величины для молекул HD и D_2 , в которых одно или оба ядра-протоны заменены на дейтрон.

Сравнить величины эффекта изотопического смещения уровней атома и молекулы водорода.

11.27. Каковы возможные вращательные состояния молекул водорода H_2 , дейтерия D_2 и HD, находящихся в основном, Σ_g^+ -состоянии, в зависимости от значения суммарного ядерного спина молекул (спин дейтрона равен 1)? Как зависит от значения орбитального момента молекулы *знак*⁸⁾ терма?

11.28. Найти электронные термы $E(R)$ отрицательного молекулярного иона (AB)⁻ в рамках модели, в которой взаимодействие внешнего электрона с атомами A и B аппроксимируется потенциалами нулевого радиуса, см. 4.10. Обратить внимание на:

1) возможность существования устойчивого иона (AB)⁻ в случае, когда стабильные ионы A⁻ и B⁻ не существуют;

2) закон изменения при $R \rightarrow \infty$ разности энергий четного и нечетного термов (в случае одинаковых атомов $A \equiv B$).

11.29. Найти основной терм $E_0(R)$ молекулярного иона водорода H_2^+ вариационным методом, аппроксимируя волновую функцию терма функцией вида

$$\Psi_{\text{проб}}(r) = \sqrt{\alpha^3/\pi R^3} \exp(-\alpha r/R),$$

где r — расстояние электрона от центра отрезка, соединяющего ядра-протоны, α — вариационный параметр.

⁸⁾ Напомним, что *знак* терма — положительный или отрицательный — характеризует поведение волновой функции молекулы при одновременной инверсии координат всех электронов и ядер и определяет по своему физическому смыслу *четность* состояния молекулы.

Рассчитать минимальную энергию терма E_0 , равновесное расстояние между ядрами R_0 , энергию нулевых колебаний ядер $E_{\text{кол},0}$ и сравнить их с экспериментальными значениями: $E_0 \approx -0,60$ а. е., $R_0 \approx \approx 2,0$ а. е., $E_{\text{кол},0} \approx 0,0044$ а. е.

Можно ли на основании результата расчета сделать вывод о существовании стабильного иона H_2^+ ?

11.30. Оценить характерное расстояние между ядрами в μ -мезомолекулярном ионе водорода⁹⁾, а также значения величин ω_μ и B_μ для иона в адиабатическом приближении, воспользовавшись результатами из предыдущей задачи для обычного иона H_2^+ .

§ 4. Атомы и молекулы во внешних полях. Взаимодействие атомных систем

Атомные системы во внешнем электрическом поле.

11.31. Рассчитать поляризуемость основного состояния атома водорода вариационным методом, воспользовавшись пробными функциями

$$\begin{aligned} \text{а) } \Psi(\mathbf{r}) &= C\Psi_0(r)(1 + \alpha\mathcal{E}_0\mathbf{r}) = \\ &= C\pi^{-1/2}e^{-r}(1 + \alpha\mathcal{E}_0r \cos \theta), \\ \text{б) } \Psi(\mathbf{r}) &= C\pi^{-1/2}[e^{-r} + \alpha\gamma^{5/2}\mathcal{E}_0re^{-\gamma r} \cos \theta], \end{aligned}$$

где α , γ — вариационные параметры, $\Psi_0 = e^{-r}/\sqrt{\pi}$ — волновая функция основного состояния невозмущенного атома водорода, \mathcal{E}_0 — напряженность внешнего электрического поля. Сравнить с точным значением $\beta_0 = 9/2$ (использованы атомные единицы).

11.32. Используя известное значение $\beta_0 = 9/2$ а. е. поляризуемости основного состояния атома водорода, получить приближенное значение поляризуемости основного, 1^1S -состояния двухэлектронного атома или иона,

а) пренебрегая взаимодействием между электронами,

⁹⁾ Из-за малости размера в мезомолекулярном ионе существенно возрастает проникаемость кулоновского барьера, разделяющего ядра. Поэтому в случае, когда ядрами иона являются тяжелые изотопы водорода (d или t), мюон выступает как катализатор реакций ядерного синтеза (например, $dt \rightarrow n\alpha + 17,6$ МэВ); см. в связи с этим 11.59, 11.74, а также обзор по μ -катализу: Зельдович Я. Б., Герштейн С. С./УФН. — 1960. — Т. 71. — С. 581.

б) учитывая его резульативно как взаимное частичное экранирование заряда ядра, выбрав эффективный заряд равным $Z_{эф} = Z - 5/16$, см. 11.6. Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными, приведенными в решении задачи.

11.33. Рассмотреть эффект Штарка для возбужденных состояний атома водорода с главным квантовым числом $n = 2$ в первом порядке теории возмущений. При решении задачи воспользоваться собственными функциями невозмущенного гамильтониана Ψ_{nlm} в сферических координатах. Указать правильные функции нулевого приближения и условия применимости полученных результатов.

11.34. Рассчитать вариационным способом энергетический сдвиг в однородном электрическом поле и поляризуемость связанного состояния частицы в потенциале нулевого радиуса действия, используя пробную функцию вида ¹⁰⁾

$$\Psi_{\text{проб}} = C [\Psi_0(r) + \lambda (\mathcal{E}_0 \mathbf{r}) e^{-\gamma r}], \quad \Psi_0 = \sqrt{\kappa_0/2\pi} e^{-\kappa_0 r}/r,$$

где λ , γ — вариационные параметры, Ψ_0 — волновая функция невозмущенного состояния. Сравнить с точным значением, см. следующую задачу.

11.35. Найти точное значение поляризуемости связанного состояния частицы в потенциале нулевого радиуса, см. 4.10. Применить полученный результат к иону H^- , сравнить с 11.36.

11.36. Найти поляризуемость слабосвязанного состояния заряженной частицы с моментом $l = 0$ в центральном потенциале $U_S(r)$ радиуса r_S , так что $\kappa_0 r_S \ll 1$, где $\kappa_0 = \sqrt{-2E_0^{(0)}/\hbar^2}$, $E_0^{(0)}$ — энергия невозмущенного состояния. Применить полученный результат к иону H^- .

Указание. Выразить поляризуемость через κ_0 и значение C_{κ_0} так называемого асимптотического коэффициента, определяющего асимптотику невозмущенной волновой функции $\Psi_0 \approx C_{\kappa_0} \sqrt{\kappa_0/2\pi} e^{-\kappa_0 r}/r$ на больших расстояниях (при $r_S \rightarrow 0$ имеем $C_{\kappa_0} \rightarrow 1$ и Ψ_0 переходит в волновую функцию связанного состояния в потенциале нулевого радиуса, см. 4.10).

¹⁰⁾ Обращаем внимание на то, что $\Psi_{\text{проб}}(\mathbf{r})$, как и $\Psi_0(r)$, при $r \rightarrow 0$ удовлетворяет граничному условию, определяющему потенциал нулевого радиуса, см. 4.10.

Отметим, что достаточно надежные вариационные расчеты свойств иона H^- (двухэлектронной системы) приводят к следующим результатам: $\kappa_0 = 0,235$ а. е. (энергия связи $\varepsilon_0 = 0,754$ эВ), $C_{\kappa_0}^2 = 2,65$, поляризуемость $\beta_0 = 206$ а. е.; см. также 13.40.

11.37. То же, что и в предыдущей задаче, для слабо связанного состояния частицы с моментом $l = 1$.

11.38. Получить приближенные выражения для поляризуемостей возбужденных 2^3S - и 2^1S -состояний двухэлектронного атома (или иона). Сравнить с экспериментальными значениями для атома гелия и иона лития Li^+ (в ат. ед.): $\beta_{He}(2^3S) = 316$, $\beta_{He}(2^1S) = 803$, $\beta_{Li^+}(2^3S) = 47$, $\beta_{Li^+}(2^1S) = 99$.

Указание. Учесть близость $2S$ - и $2P$ -уровней и экспериментальные значения для разности их энергий: $E_{He}(2^3P) - E_{He}(2^3S) = 1,14$ эВ и $E_{He}(2^1P) - E_{He}(2^1S) = 0,602$ эВ, а также аналогичные значения 2,26 эВ и 1,29 эВ для иона Li^+ . Электрон в возбужденном состоянии рассматривать как движущийся в поле заряда ядра, экранированного на 1, а обменными эффектами пренебречь.

11.39. Оценить порядок величины поляризуемости атома и зависимость ее от заряда ядра Z в модели Томаса — Ферми. Пренебрегая взаимодействием между электронами, см. 11.19, найти значение коэффициента в полученной зависимости поляризуемости от Z . Сравнить с вкладом в поляризуемость атома валентных электронов.

11.40. Найти штарковское расщепление вращательных компонент уровней двухатомной молекулы, имеющей постоянный дипольный момент (в системе координат, жестко связанной с осью симметрии молекулы). Штарковское расщепление предполагается малым по сравнению с расстоянием между соседними вращательными уровнями, электронный терм молекулы $^1\Sigma$; сравнить с результатом задачи 8.11 для сферического ротатора.

Атомные системы во внешнем магнитном поле.

11.41. Рассмотреть эффект Зеемана для атома водорода. Магнитное поле считать настолько сильным, что зеемановское расщепление много больше тонкой структуры уровней (см. 11.1). Указать условия применимости полученных результатов.

11.42. Рассмотреть эффект Зеемана для основного уровня атома водорода с учетом его сверхтонкой структуры, см. 11.2. Обратит внимание на характер зависимости от \mathcal{H} сдвигов уровней в случае слабого: $\mu_B \mathcal{H} \ll \Delta$ и сильного: $\Delta \ll \mu_B \mathcal{H}$ внешних магнитных полей; здесь $\Delta \approx 1420$ МГц — сверхтонкое расщепление уровня.

11.43. Рассмотреть эффект Зеемана для основного уровня *позитрония* — связанного состояния системы из электрона и позитрона (аналогичной атому водорода) — с учетом его тонкой структуры¹¹). Указать правильные спиновые функции нулевого приближения при наличии магнитного поля.

11.44. Для основного уровня атома водорода найти диамагнитную часть сдвига уровня, связанную с орбитальным движением электрона.

11.45. Найти магнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии, используя приближенный вид волновой функции из вариационного расчета, см. 11.6. Рассчитать также магнитную восприимчивость 1 см³ газообразного гелия при нормальных условиях и сравнить ее с экспериментальным значением, равным $-8,4 \cdot 10^{-11}$.

11.46. Найти сдвиг и магнитную восприимчивость основного уровня заряженной частицы в потенциале нулевого радиуса во внешнем однородном магнитном поле. Обобщить полученный результат на случай слабосвязанного состояния частицы с моментом $l=0$ в короткодействующем потенциале $U_S(r)$ радиуса r_S ; сравнить с 11.35 и 11.36.

11.47. Найти пара- и диамагнитный сдвиги уровня для слабосвязанного состояния заряженной частицы с моментом $l=1$ в короткодействующем потенциале $U_S(r)$.

¹¹) Так как магнитный момент позитрона лишь знаком отличается от электронного, то магнитное взаимодействие спинов в позитронии такого же порядка величины (нет малости $\sim m_e/m_p$), как и другие релятивистские поправки в гамильтониане, так что в отличие от обычных атомов в позитронии уже не имеет смысла говорить о сверхтонкой структуре уровня. Классификация уровней позитрония по значению S (0 или 1) суммарного спина сохраняется и при учете релятивистских эффектов (*пара-* и *ортопозитроний*). Тонкое расщепление для основных уровней орто- и парапозитрония составляет $\Delta = \Delta_1 - \Delta_0 \approx \approx 8,2 \cdot 10^{-4}$ эВ.

11.48. Найти зеemanовское расщепление вращательных компонент уровней двухатомной молекулы, предполагая его малым по сравнению с расстоянием между соседними вращательными уровнями. Электронный терм молекулы $^1\Sigma$.

Взаимодействие атомных систем на далеких расстояниях ¹²⁾.

11.49. Найти потенциал взаимодействия заряженной частицы (иона, электрона и т. д.) с невозбужденным атомом водорода на больших расстояниях друг от друга.

11.50. Найти энергию взаимодействия заряженной частицы и двухатомной молекулы, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Предполагается, что молекула обладает постоянным дипольным моментом d (в системе координат, жестко связанной с осью молекулы) и находится в состоянии с вращательным квантовым числом $K = 0$. Электронный терм молекулы $^1\Sigma$.

11.51. Каков закон изменения с расстоянием взаимодействия заряженной частицы с атомом водорода, находящимся в возбужденном состоянии? Сравнить с 11.49.

11.52. Найти энергию взаимодействия двух атомов водорода (находящихся в основном состоянии) на большом расстоянии R друг от друга вариационным методом. При расчете воспользоваться пробной функцией вида ¹³⁾

$$\Psi_{\text{проб}} = C \Psi_0(r_1) \Psi_0(r_2) [1 + \alpha(x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2z_1 z_2)],$$

где $\Psi_0(r)$ — волновая функция основного состояния атома водорода, α — вариационный параметр; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы электронов первого и второго атомов относительно своих ядер, ось z направлена вдоль оси, проходящей через ядра.

11.53. Найти энергию взаимодействия на больших расстояниях двух молекул, обладающих постоянными

¹²⁾ При этом предполагается, что относительные скорости сталкивающихся составных частиц не слишком велики, так что применимо адиабатическое приближение.

¹³⁾ Рассмотрение электронов как локализованных вблизи «своих» ядер соответствует пренебрежению обменным взаимодействием, убывающим экспоненциально на больших расстояниях. Выбор пробной функции (отличие ее от невозмущенной в. ф.) отражает диполь-дипольный характер взаимодействия атомов.

дипольными моментами d_1 и d_2 (в системах координат, жестко связанных с осями молекул). Предполагается, что молекулы находятся в состояниях с вращательными квантовыми числами $K_{1,2} = 0$, а их электронные термы — $^1\Sigma$.

11.54. Рассмотреть взаимодействие, включая и обменный потенциал¹⁴), отрицательного иона с собственным атомом (система А-А) на больших расстояниях. Валентный электрон в ионе рассматривать как слабосвязанную частицу в короткодействующем потенциале $U_s(r)$ атома, аппроксимируя его потенциалом нулевого радиуса.

11.55. Рассмотреть взаимодействие невозмущенного атома водорода с атомом водорода, находящимся в возбужденном состоянии с $n = 2$. Указать правильные функции нулевого приближения, диагонализующие оператор диполь-дипольного взаимодействия атомов.

11.56. Найти потенциал взаимодействия двух атомов на далеких расстояниях в случае, когда валентный электрон одного из атомов является слабосвязанным, так что $|E_0| \ll \hbar^2/ma_0^2$. Воспользоваться теорией возмущений по длине рассеяния, см. 11.4, и указать условия применимости полученного результата.

§ 5. Нестационарные явления в атомных системах

11.57. Атом трития (сверхтяжелого изотопа водорода) находится в основном состоянии. В результате β -распада тритон превращается в гелий: $^3\text{H} \rightarrow e + \bar{\nu} + ^3\text{He}$. Найти:

1) среднее значение энергии, приобретаемой атомным электроном при β -распаде ядра,

¹⁴) Обменным потенциалом $\Delta(R) = E_g(R) - E_u(R)$ называют разность энергий четного E_g и нечетного E_u электронных термов. Он определяет (с коэффициентом 1/2) матричный элемент оператора взаимодействия $\langle 2 | \hat{H}(R) | 1 \rangle$, взятый между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, в которых электрон локализован соответственно вблизи 1-го и 2-го ядер. Наглядно этот матричный элемент (в отличие от диагональных $\langle 1(2) | \hat{H}(R) | 1(2) \rangle$) характеризует взаимодействие, при котором происходит обмен электроном между атомом и ионом (сравнить, например, с обменным потенциалом ядерного взаимодействия нуклонов [1], § 117). Обменный потенциал играет важную роль в процессах перезарядки, см. 13.88.

2) вероятность того, что при β -распаде образуется ион гелия He^+ , находящийся в основном состоянии,

3) вероятности образования возбужденных состояний иона гелия с главным квантовым числом $n = 2$.

При решении задачи иметь в виду, что электрон β -распада является релятивистским (энерговыведение в распаде составляет ≈ 17 кэВ).

11.58. Ядро атома, находящегося в стационарном состоянии Ψ_0 , испытывает внезапный толчок, в результате которого приобретает импульс \mathbf{P} . Выразить в общем виде вероятность перехода атома в стационарное состояние Ψ_n в результате такого «встряхивания». В случае атома водорода, первоначально находящегося в основном состоянии, вычислить суммарную вероятность возбуждения и ионизации.

11.59. Для мезомолекулярной $dt\mu$ -системы, находящейся в основном состоянии ($K = v = 0$), оценить вероятность того, что α -частица, образующаяся в реакции синтеза $dt \rightarrow p\alpha + 17,6$ МэВ, «подхватит» мюон¹⁵⁾.

11.60. Обобщить результат 11.58 на случай двухатомной молекулы, т. е. получить общее выражение для вероятности перехода молекулы из стационарного состояния Ψ_0 в состояние Ψ_n в результате внезапного «встряхивания», при котором одному из ядер молекулы сообщается импульс \mathbf{P} (например, импульс отдачи при излучении возбужденным ядром кванта). Применить полученный результат для вычисления вероятности того, что молекула останется в исходном состоянии, если изменение скорости ядра много меньше характерных скоростей электронов в молекуле. Электронный терм молекулы $^1\Sigma$, и она находится в состоянии с квантовыми числами $K = v = 0$. Обсудить условия возбуждения вращательных и колебательных степеней свободы молекулы.

11.61. Найти изменение времени жизни основных состояний орто- и парапозитрония, см. 11.43, при наложении однородного магнитного поля.

¹⁵⁾ Оказываясь при этом связанным в мезоатомный ион μHe , мюон перестает выступать в роли катализатора реакций синтеза. Именно это обстоятельство (а не конечность времени жизни мюона) ограничивает число актов реакций, инициируемых одним мюоном, а тем самым — и энергетическую эффективность μ -катализа, см. также 11.74.

Указание. Конечность времени жизни позитрония связана с аннигиляцией электрон-позитронной пары в фотоны. При этом в отсутствие внешних полей времена жизни орто- и парапозитрония имеют существенно различные значения: $\tau_1 \approx 1,4 \cdot 10^{-7}$ с для ортопозитрония и $\tau_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-10}$ с для парапозитрония [29], что связано с различием каналов их распада — на три и на два фотона соответственно. Отметим также, что при наличии нескольких каналов распада полная вероятность его ω (величина, обратная времени жизни τ) равна сумме парциальных вероятностей.

11.62. Найти изменение времени жизни метастабильного $2s$ -состояния атома водорода при наложении слабого однородного электрического поля.

Указание. Возбужденные состояния атомных систем являются, строго говоря, квазистационарными состояниями, так как имеют конечное время жизни, связанное с переходом электронов на более низкие уровни с излучением фотонов. Обычно характерное время жизни составляет $\tau \sim 10^{-9}$ с; так, время жизни $2p$ -состояния атома водорода $\tau_{2p} = 1,6 \cdot 10^{-9}$ с. Однако время жизни $2s$ -состояния несоизмеримо больше: $\tau_{2s} \approx 0,1$ с и определяется переходом в основное состояние с излучением двух фотонов (см. в связи с этим задачи 14.6, 14.8). При решении задачи следует иметь в виду аномальную близость энергий $2s_{1/2}$ - и $2p_{1/2}$ -состояний, разность которых составляет $\Delta E/2\pi\hbar \approx 1058$ МГц (так называемый *лэмбовский сдвиг*).

11.63. Найти в первом порядке теории возмущений вероятность вырывания заряженной частицы, связанной потенциалом нулевого радиуса, электрическим полем монохроматической электромагнитной волны. Длина волны λ предполагается много большей области локализации частицы, так что электрическое поле можно считать однородным, изменяющимся во времени гармоническим образом.

Рассмотреть наиболее общий случай волны эллиптической поляризации. Обобщить полученный результат на случай слабосвязанного состояния частицы в короткодействующем потенциале $U_s(r)$ конечного радиуса.

Указание. Для монохроматической волны эллиптической поляризации, распространяющейся в на-

правлении оси z , электрическое поле в данной точке пространства изменяется во времени по закону

$$\mathcal{E}(t) = (\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \zeta \mathcal{E}_0 \sin \omega t, 0),$$

где ζ — степень эллиптичности ($|\zeta| \leq 1$), а \mathcal{E}_0 — амплитудное значение напряженности поля; знак ζ определяет направление вращения вектора $\mathcal{E}(t)$. При $\zeta = 0$ волна линейно поляризована, а при $\zeta = \pm 1$ обладает круговой поляризацией.

11.64. То же, что и в предыдущей задаче, но для слабосвязанного в короткодействующем потенциале $U_S(r)$ состояния частицы с моментом $l = 1$ в поле линейно поляризованной волны¹⁶⁾; частота ее предполагается удовлетворяющей условию $\hbar\omega \ll \hbar^2/mr_S^2$, где r_S — радиус потенциала.

11.65. То же, что и в задаче 11.63, но для водородоподобного атома, находящегося в основном состоянии. При этом ограничиться случаем большой частоты внешнего поля, $\hbar\omega \gg m(Ze^2)^2/\hbar^2$, так что вылетающий электрон является быстрым.

Указание. При решении задачи воспользоваться для описания взаимодействия заряженной частицы с однородным электрическим полем оператором вида $\hat{V} = -(e/mc) \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{p}}$, соответствующим выбору скалярного потенциала $\varphi = 0$; при этом $\mathcal{E}(t) = -\partial \mathbf{A}(t)/\partial t$, так что для эллиптически поляризованной монохроматической волны

$$\mathbf{A}(t) = -(c\mathcal{E}_0/\omega) (\sin \omega t, -\zeta \cos \omega t, 0).$$

Такое взаимодействие эквивалентно использованному в двух предыдущих задачах $\hat{V}' = -e\mathcal{E}(t) \mathbf{r}$ ($\mathbf{A}' = 0$, $\varphi' = -\mathcal{E}(t) \mathbf{r}$) и получается из последнего калибровочным преобразованием с $\chi = -c\mathbf{r} \int \mathcal{E}(t) dt$ (см., например, 6.27). Его преимущество, по сравнению с \hat{V}' , определяется тем, что в случае большой частоты ω , когда вылетающая частица является быстрой, при вычислении матричного элемента возмущения

¹⁶⁾ При этом волновые функции возникающих в поле волны квазистационарных состояний характеризуются определенным значением проекции момента частицы на направление электрического поля. Для них вероятность ионизации в единицу времени непосредственно связана с шириной уровня $\Gamma = \hbar\omega$.

в качестве волновой функции конечного состояния $\Psi_k^{(-)}$ можно воспользоваться плоской волной.

11.66. Найти динамическую поляризуемость $\beta_0(\omega)$ для частицы в потенциале нулевого радиуса. Обобщить полученный результат на слабосвязанное состояние частицы с моментом $l=0$ в короткодействующем потенциале $U_S(r)$ и в соответствующих предельных случаях сравнить его с 11.36 и 11.63. При решении задачи воспользоваться развитой в 8.42 теорией возмущений для квазиэнергетических состояний.

11.67. Оценить с точностью до предэкспоненциального множителя вероятность вырывания в единицу времени заряженной частицы, связанной центральным потенциалом $U(r)$ (при этом $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), слабым однородным электрическим полем.

11.68. Найти вероятность выбрасывания K -электрона из атома при дипольном переходе ядра из возбужденного состояния в результате прямого электростатического взаимодействия электрона с протонами ядра (*внутренняя конверсия* в пренебрежении запаздыванием). В качестве волновой функции начального состояния электрона использовать Ψ -функцию K -электрона водородоподобного атома. Скорость вылетающего электрона считать много большей атомной.

11.69. То же, что и в предыдущей задаче, но в случае, когда начальное и конечное состояния ядра имеют равный нулю момент и одинаковую четность (такие процессы называют конверсией при *монопольном*, или $E0$ -переходе).

11.70. Найти вероятность выбрасывания K -электрона в результате *эффекта Оже* в мезоатоме (при этом находящийся в возбужденном состоянии μ -мюон переходит на более низкий уровень, передавая энергию электрону). Ограничиться рассмотрением дипольного, или так называемого P -перехода Оже, при котором изменение орбитального момента мюона $|\Delta l| = 1$. При проведении расчетов считать размеры мюонной орбиты много меньшими электронных и электрон в конечном состоянии — свободным. Рассмотреть, в частности, мюонный переход $2p \rightarrow 1s$.

11.71. То же, что и в предыдущей задаче, но для $\Delta l = 0$ (S -переходы Оже). Ограничиться случаем, когда орбитальный момент мюона в начальном и ко-

нечном состоянии равен нулю. Рассмотреть, в частности, мюонный переход $2s \rightarrow 1s$.

11.72. Произвести классификацию (т. е. указать возможные значения квантовых чисел: суммарного электронного спина S , полного орбитального момента L и четности I) нижних *автоионизационных состояний*¹⁷⁾ (АИС) двухэлектронного атома или иона, связанных с электронной конфигурацией $nlnl'$ при $n = 2$. Рассматривая взаимодействие между электронами как возмущение, найти в первом порядке теории возмущений энергетические уровни этих состояний. Указать правильные волновые функции нулевого приближения.

Обсудить вопрос о зависимости ширины уровней АИС от заряда ядра Z .

11.73. Найти зависимость от времени вектора поляризации μ^+ -мюона в основном состоянии *мюония*, находящегося в однородном магнитном поле, перпендикулярном начальной поляризации мюона (т. е. исследовать прецессию спина мюона). Ограничиться случаем слабого магнитного поля, когда $\mu_B^{(e)} \mathcal{H} \ll \Delta$, где $\mu_B^{(e)}$ — электронный магнетон Бора, Δ — сверхтонкое расщепление основного уровня мюония (сравнить с 11.2). Считать, что при образовании мюония электрон является неполяризованным, а мюон, наоборот, полностью поляризован¹⁸⁾.

11.74. Оценить скорость протекания реакции ядерного синтеза $dt \rightarrow n\alpha$ в мезомолекулярном $dt\mu^-$ ионе

¹⁷⁾ Автоионизационными называют неустойчивые относительно ионизации (вылета электрона) состояния атомных систем с двумя или более возбужденными электронами: при передаче возбуждения одному электрону последний вылетает из атома (иона). АИС являются квазистационарными состояниями и обычно проявляются как резонансы.

¹⁸⁾ Мюоний — своеобразный атом водорода, «ядром» которого является μ^+ -мюон. Изменением поляризаций мюона и электрона в процессе образования мюония можно пренебречь. Напомним основные характеристики мюона: спин $1/2$, масса $m_\mu \approx 207m_e$, магнитный момент равен $e\hbar/2m_\mu c$, время жизни $\tau_\mu \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Так как поляризацию мюона можно достаточно просто измерить по угловому распределению позитронов, возникающих при его распаде $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$, то динамика спина мюона может быть использована для исследования свойств вещества, см. обзор И. И. Гуревича и Б. А. Никольского // УФН. — 1976. — Т. 119. — С. 169.

в состоянии с вращательным квантовым числом $K=0$. Как ее величина сказывается на числе актов реакции, инициируемых одним мюоном, сравнить с 11.59?

Указание. Воспользоваться адиабатическим приближением и формулой теории возмущений по длине рассеяния, см. 11.4. Длина рассеяния в s -состоянии для dt -системы $a_s \approx -(90 + i \cdot 30)$ Фм (см. комментарий в решении задачи). Оценку величины $|\Psi^{(0)}(0)|^2$ связать с проникаемостью кулоновского барьера, разделяющего ядра в мезомолекулярном ионе.

Г л а в а 12

АТОМНОЕ ЯДРО

Ядерные силы, действующие между нуклонами — протонами и нейтронами, — из которых состоят атомные ядра, характеризуются малым радиусом и большой интенсивностью. Качественные закономерности низкоэнергетического нуклон-нуклонного взаимодействия можно описать, только предположив, что радиус сил составляет $R \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см, а характерная величина потенциала¹⁾ ядерных сил $U_0 \approx 40$ МэВ. При этом в протон-нейтронной системе имеется, единственное в двухнуклонной системе вообще, связанное состояние — дейтрон, с энергией связи $\epsilon_0 = 2,23$ МэВ; квантовые числа дейтрона $J^P = 1^+$.

Близость свойств протона и нейтрона: одинаковое значение спина, $s = 1/2$, и малое различие масс $m_p = 1836,1 m_e$, $m_n = 1838,6 m_e$, является отражением *изотопической симметрии*, проявляющейся в свойствах и взаимодействиях ядерно активных (или, как говорят, *сильновзаимодействующих*) элементарных частиц — *адронов*. Согласно этой симметрии адроны группируются в изотопические мультиплеты²⁾, характеризующиеся определенным значением T изотопического спина. Изоспин можно рассматривать как векторную величину в некотором абстрактном трех-

¹⁾ Для сравнения укажем, что потенциал кулоновского взаимодействия на таком расстоянии составляет $U_{\text{кул}} = e^2/R \approx 0,7$ МэВ, а взаимодействие магнитных моментов нуклонов — еще меньше: $U_{\text{магн}} \sim \mu^2/R^3 \sim 10^{-2}$ МэВ, где $\mu = e\hbar/m_p c$.

²⁾ В дополнение к изодублету нуклонов (p , n) отметим изотриплет пионов (π^+ , π^0 , π^-); при этом $T_z(\pi^\pm) = \pm 1$, $T_z(\pi^0) = 0$.

мерном пространстве — пространстве изотопического спина. Формальные свойства изоспина, в том числе и вид соответствующих операторов \hat{T} , аналогичны свойствам момента (спина) в обычном пространстве. Возможные значения T при этом связаны с собственными значениями $T(T+1)$ оператора \hat{T}^2 и равны $0, 1/2, 1, \dots$. Частицы, принадлежащие данному изомультиплету, различаются значением электрического заряда и отвечают различным значениям компоненты T_3 изоспина³⁾; число частиц в изомультиплете равно $(2T+1)$. Все они имеют одинаковые спин и внутреннюю четность, близкие массы и обладают сходным сильным взаимодействием. Подобную близость свойств имеют и системы, состоящие из частиц, принадлежащих одним и тем же изомультиплетам⁴⁾, в состояниях, различающихся лишь значением компоненты T_3 суммарного изоспина системы (но одинаковыми другими квантовыми числами, включая и значение T).

Изотопический спин нуклона $T_N \equiv \tau = 1/2$. Операторы компонент изоспина нуклона $\hat{\tau}$ имеют вид (сравнить с матрицами Паули для спина $s = 1/2$)

$$\hat{\tau}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{XII. 1})$$

Физические состояния нуклона — протон и нейтрон — описываются собственными функциями оператора $\hat{\tau}_3$, так что⁵⁾

$$\Psi_p \equiv \Psi_{\tau_3 = +1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_n \equiv \Psi_{\tau_3 = -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{XII. 2})$$

при этом собственные значения $\tau_3 = \pm 1/2$ определяют заряд частицы $q = e(1 + 2\tau_3)/2$.

³⁾ Физическая выделенность «оси квантования» в изопро-
странстве связана с нарушением изотопической симметрии, при-
чем, в основном, за счет электромагнитного взаимодействия; оно
же ответственно за сравнительно небольшое расщепление масс
в изомультиплете.

⁴⁾ Например, системы pp, pp, pp или различные зарядовые
состояния πN -системы.

⁵⁾ В литературе используется также и «обращенная» клас-
сификация, при которой $\tau_3 = +1/2$ соответствует нейтрону, а
 $\tau_3 = -1/2$ — протону; под $\hat{\tau}$ часто подразумеваются матрицы,
удвоенные по отношению к (XII.1) (так что $\hat{\tau}_i \equiv \hat{\sigma}_i$).

Классификация состояний и ряд свойств атомных ядер могут быть получены на основе модели оболочек. В этой модели каждый нуклон рассматривается как движущийся в некотором среднем (самосогла-сованном) поле, создаваемом остальными нуклонами ядра. При этом для описания последовательности $E_{n,l}$ одночастичных нуклонных уровней, согласую-щейся с экспериментальными данными, наряду с (до-минирующим) сферически симметричным самосогла-сованным потенциалом $U(r)$ необходимо также ввести спин-орбитальное взаимодействие вида $\hat{U}_{ls} = -f(r)\hat{l}\hat{s}$.

В модели оболочек спин и четность J^P , магнит-ный μ и квадрупольный Q моменты ядра определяются лишь нуклонами сверх заполненных оболочек. В частности, в случае ядра с одним таким нуклоном на оболочке nl_j оно имеет спин $J = j = l \pm 1/2$ и чет-ность $P = (-1)^l$. При этом оператор магнитного мо-мента ядра принимает вид $\hat{\mu} = g_l \hat{l} + g_s \hat{s}$, где g_l и g_s — орбитальный и спиновый гироманнитные мно-жители, равные: $g_l = 1$, $g_s = 5,59$ для протона и $g_l = 0$, $g_s = -3,83$ для нейтрона (μ и g выражены в единицах ядерного магнетона, равного $e\hbar/2m_p c$). Усреднение этого оператора с использованием резуль-тата 3.40 дает магнитный момент нуклона на обо-лочке nl_j и соответствующего ядра:

$$\mu_j \equiv g_j j = \langle j, l, j_z = j | \hat{\mu}_z | j, l, j_z = j \rangle = \\ = \{(g_l + g_s)j(j+1) + (g_l - g_s)[l(l+1) - 3/4]\}/2(j+1); \quad (\text{XII. 3})$$

значения μ_j и g_j для ряда состояний даны в таблице

| | | $s_{1/2}$ | $p_{1/2}$ | $p_{3/2}$ | $d_{3/2}$ | $d_{5/2}$ |
|---------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Протон | μ | 2,79 | -0,26 | 3,79 | 0,12 | 4,79 |
| | g | 5,59 | -0,53 | 2,53 | 0,08 | 1,92 |
| Нейтрон | μ | -1,91 | 0,64 | -1,91 | 1,15 | -1,91 |
| | g | -3,83 | 1,28 | -1,27 | 0,77 | -0,76 |

(XII. 4)

Приведенные результаты модели оболочек для ядер, имеющих лишь один нуклон сверх заполненных оболочек, непосредственно переносятся и на случай ядер с одной (протонной или нейтронной) дыркой, причем μ и g для дырочного состояния такие же, как для соответствующего нуклона. Для других ядер (например, с незаполненными оболочками как по протонам, так и по нейтронам) предсказания модели оболочек с одночастичным нуклонным потенциалом уже не являются однозначными. Свойства таких ядер существенно зависят от *остаточного взаимодействия* нуклонов незаполненных оболочек друг с другом. Как показывает анализ экспериментальных данных, такое взаимодействие для нуклонов одного и того же зарядового состояния носит характер попарного «спаривания» в состояние с суммарным моментом, равным нулю. Поэтому при четном числе протонов и (или) нейтронов их суммарный момент в основном состоянии ядра равен нулю; при этом спин и четность ядра с нечетным числом нуклонов полностью определяются квантовыми числами *неспаренного* нуклона.

Характерный размер ядра, состоящего из A нуклонов, составляет $R \approx r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см.

§ 1. Основные представления о ядерных силах. Дейтрон

12.1. Аппроксимируя потенциал взаимодействия протона с нейтроном сферической прямоугольной потенциальной ямой радиуса ⁶⁾ $R = 1,7 \cdot 10^{-13}$ см, оценить глубину ямы, используя значение $\epsilon_0 = 2,23$ МэВ энергии связи дейтрона и найти для него вероятность нахождения нуклонов вне ямы, а также $\langle r \rangle$ — среднее расстояние между нуклонами.

12.2. Каким был бы магнитный момент системы, состоящей из протона и нейтрона, если бы она находилась в состоянии

а) 1S_0 ; б) 3S_1 ; в) 1P_1 ; г) 3P_0 ; д) 3P_1 ; е) 3D_1 ?

Воспользоваться значениями магнитных моментов

⁶⁾ Для прямоугольной ямы *эффективный радиус взаимодействия* r_0 совпадает с ее радиусом R , см. 13.43. Значение R выбрано так, что r_0 совпадает с экспериментальным значением. В связи с задачей о дейтроне — системе с малой энергией связи — см. также 11.36.

свободных нуклонов: $\mu_p = 2,79$ и $\mu_n = -1,91$ (в ядерных магнетонах). Имея в виду, что спин дейтрона $J_d = 1$, его магнитный момент $\mu_d = 0,86$ и он представляет суперпозицию 3S_1 - и 3D_1 -волн, оценить примесь D -волны (сравнить с 12.3).

12.3. Магнитный момент дейтрона, описываемого суперпозицией $(^3S_1 + ^3D_1)$ -волн, равен

$$\mu_d = (1 - w) \mu(^3S_1) + w \mu(^3D_1) \approx 0,86 \text{ яд. маг.},$$

где $\mu(^3S_1)$ и $\mu(^3D_1)$ — магнитные моменты протон-нейтронной системы в состояниях 3S_1 , 3D_1 , $w \approx 0,04$ — примесь D -волны (см. предыдущую задачу).

Объяснить, почему для квадрупольного момента дейтрона нет соотношения, аналогичного приведенному выше для магнитного момента. В связи с этим отметим, что квадрупольный момент 3S_1 -состояния равен нулю, в состоянии 3D_1 он отрицателен, а его экспериментальное значение для дейтрона $Q_d \approx \approx 2,82 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2 > 0$.

12.4. Какие свойства дейтрона указывают на зависимость протон-нейтронного взаимодействия от спинов нуклонов?

Рассмотрев зависящие от спина потенциалы:

$$a) \hat{U}_S = V(r) \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 = V(r) (2\hat{S}^2 - 3);$$

$$б) \hat{U} = V(r) \hat{S} \hat{L} \text{ (спин-орбитальное взаимодействие);}$$

$$в) \hat{U} = V(r) [6(\hat{S}n)^2 - 2\hat{S}^2] \text{ (тензорные силы)} \quad (n = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2) \text{ — оператор суммарного спина нуклонов}),$$

выяснить, какие из них совместно с центральным потенциалом могут быть использованы для объяснения обсуждавшихся выше свойств дейтрона. Указать интегралы движения для рассматриваемых потенциалов.

12.5. Показать, что волновая функция дейтрона, представляющая суперпозицию $^3S_1 + ^3D_1$ -волн, может быть записана в виде

$$\Psi_d = \Psi(^3S_1) + \Psi(^3D_1) = [f_0(r) + f_2(r) \hat{S}_{12}] \chi_{S=1}.$$

Здесь $\hat{S}_{12} = 6(\hat{S}n)^2 - 2\hat{S}^2$, $\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)$ — оператор суммарного спина нуклонов, $\chi_{S=1}$ — произвольная спиновая функция для спина ⁷⁾ $S = 1$.

⁷⁾ Об использовании различных представлений для спина $S = 1$ см. 5.26.

Считая, что потенциал взаимодействия протона с нейтроном имеет вид $\hat{U} = U_s(r) + U_T(r)\hat{S}_{12}$ (суперпозиция центрального и тензорного взаимодействий, сравнить с предыдущей задачей), получить систему уравнений для радиальных функций $f_{0,2}(r)$ дейтрона.

Показать также, что потенциал тензорных сил, рассматриваемый как возмущение центрального потенциала, приводит к сдвигу 3S -уровня лишь во втором порядке теории возмущений.

12.6. Для системы из двух нуклонов:

1) найти собственные функции и собственные значения изотопического спина (его величины T и проекции T_z);

2) указать значение изоспина T в состоянии ^{2S+1}L с определенными значениями суммарного спина S и момента L относительного движения нуклонов (сравнить с 10.9);

3) указать изоспиновую часть волновой функции дейтрона.

12.7. От каких свойств инвариантности реальных ядерных сил пришлось бы отказаться, если бы состояние дейтрона представляло суперпозицию $^1P_1 + ^3P_1$ (а не $^3S_1 + ^3D_1$, как у реального дейтрона)? Указать возможный вид взаимодействия, которое могло бы привести к такому состоянию.

12.8. Предположив, что взаимодействие двух нуклонов имеет следующую изотопическую структуру: $\hat{U} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 \hat{\tau}_3^{(1)} \hat{\tau}_3^{(2)}$, где $\hat{V}_{1,2}$ — операторы, уже не зависящие от изоспиновых переменных (они — операторы в пространстве координат и спинов, симметричные по отношению к перестановке нуклонов), найти вид взаимодействия в системе из а) двух протонов, б) двух нейтронов, в) протона и нейтрона.

Согласуется ли рассматриваемое взаимодействие с 1) изотопической инвариантностью; 2) зарядовой симметрией ядерных сил?

12.9. Для системы из двух нуклонов:

1) указать наиболее общий вид изотопически инвариантного оператора взаимодействия \hat{U} и выразить его через операторы \hat{U}_T нуклон-нуклонного взаимодействия в состояниях с определенным значением изотопического спина $T = 0$ и 1;

2) указать изотопическую структуру оператора кулоновского взаимодействия нуклонов.

12.10. Найти среднее значение энергии кулоновского взаимодействия протонов в ядре ${}^3\text{He}$ и оценить размеры зеркальных ядер трития ${}^3\text{H}$ и гелия ${}^3\text{He}$ исходя из того, что в β -распаде ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}$ максимальная кинетическая энергия электрона $\epsilon_0 = 17$ кэВ.

Указание. У рассматриваемых ядер нет возбужденных состояний. Напомним, что $(m_n - m_p)c^2 \approx 2,5m_e c^2 \approx 1,3$ МэВ.

12.11. Как известно, размеры ядер определяются соотношением $R = r_0 A^{1/3}$, где A — число нуклонов в ядре.

Оценить значение r_0 из данных о β^+ -распаде ядра, содержащего $(Z+1)$ протонов и Z нейтронов, так что $A = 2Z + 1$, выразив его через максимальное значение энергии ϵ_0 позитронов распада. Считать, что распадающееся ядро и ядро — продукт распада, являющиеся зеркальными ядрами, находятся в одинаковых состояниях (т. е. имеют одинаковые квантовые числа, за исключением значений T_3 -компонент изоспина). Энергию кулоновского взаимодействия протонов в ядре считать равной электростатической энергии равномерно заряженного шара, имеющего такие же заряд и радиус, как и ядро.

Получить числовую оценку r_0 из распада ${}^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} + e^+ + \nu$, для которого $\epsilon_0 = 3,48$ МэВ.

§ 2. Модель оболочек

12.12. Считая, что самосогласованное поле, действующее на нуклон в ядре, можно аппроксимировать потенциалом $U(r) = -U_0 + m\omega^2 r^2/2$ (m — масса нуклона), найти одночастичные энергетические уровни.

К каким значениям *магических* чисел приводит такая модель самосогласованного потенциала?

Каковы предсказания модели в отношении моментов и четностей основных состояний ядер?

Оценить значение параметра $\hbar\omega$ модели, основываясь на данных о размерах ядер.

12.13. В условиях предыдущей задачи обсудить изменения энергетического спектра однонуклонных состояний, возникающие при введении спин-орбитального взаимодействия вида $\hat{U}_{ls} = -\alpha \hat{l} \hat{s}$. Для $\alpha =$

$= \hbar\omega/10$ нарисовать картину нижних одночастичных уровней⁸⁾.

В рамках рассматриваемой модели найти моменты (спины) и четности основных состояний следующих ядер: ${}^6_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$.

12.14. В рамках модели оболочек указать спин-изоспиновую зависимость волновых функций основных состояний ядер трития ${}^3_1\text{H}$ и гелия ${}^3_2\text{He}$.

12.15. Указать возможные значения полного момента J и изотопического спина T ядер, содержащих сверх заполненных оболочек два нуклона в состоянии $p_{1/2}$ с одинаковым n . Ядрами, имеющими такую конфигурацию, являются ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{14}_8\text{O}$ (два нуклона сверх заполненных оболочек $(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8$).

12.16. То же, что и в предыдущей задаче, для двух нуклонов в состоянии $p_{3/2}$.

12.17. В модели оболочек найти спины и магнитные моменты основных состояний следующих ядер⁹⁾

$$\begin{aligned} &{}^3_1\text{H} (J = 1/2, \mu = 2,91); \quad {}^3_2\text{He} (1/2; -2,13); \\ &{}^{11}_5\text{B} (3/2; 2,69); \quad {}^{13}_6\text{C} (1/2; 0,70); \quad {}^{15}_7\text{N} (1/2; -0,28); \\ &{}^{17}_8\text{O} (5/2; -1,89); \quad {}^{29}_{14}\text{Si} (1/2; -0,55). \end{aligned}$$

При решении задачи воспользоваться схемой одночастичных уровней из 12.13.

12.18. В модели оболочек найти магнитный момент ядра, содержащего сверх заполненных оболочек по одному протону и нейтрону (или имеющего соответствующую дырку) в одинаковых состояниях nlj , в зависимости от спина ядра J .

Сравнить полученный результат с экспериментальными данными для следующих ядер:

$$\begin{aligned} &{}^2_1\text{H} (J = 1; \mu = 0,86); \quad {}^6_3\text{Li} (1; 0,82); \\ &{}^{10}_5\text{B} (3; 1,80); \quad {}^{14}_7\text{N} (1; 0,40); \end{aligned}$$

воспользоваться схемой однонуклонных уровней из 12.13.

⁸⁾ Параметр $\alpha > 0$, так как согласно экспериментальным данным уровень с $j = l + 1/2$ лежит ниже уровня с $j = l - 1/2$.

⁹⁾ В скобках указаны экспериментальные значения спина J и магнитного момента μ ядра. Заметим, что рассматриваемые ядра содержат сверх заполненных оболочек лишь один нуклон (или имеют одну дырку в незаполненной оболочке).

12.19. Рассчитать магнитный момент ядра, содержащего сверх заполненных оболочек по одному протону и нейтрону (или имеющего соответствующие дырки) в одинаковых состояниях в условиях LS -связи¹⁰).

Применить полученный результат к основному состоянию ядра ${}^6\text{Li}$, имеющему спин $J = 1$. Считая, что нуклоны сверх заполненной оболочки $(1s)^4$ находятся в $1p$ -состоянии, найти магнитный момент ядра для различных возможных значений L и S и сравнить с экспериментальным значением $\mu_{\text{эксп}} = 0,82$, а также с результатом предыдущей задачи. Каков изотопический спин рассматриваемых состояний?

12.20. Найти в схеме jj -связи магнитный момент ядра, имеющего одинаковое число протонов и нейтронов сверх заполненных оболочек в одинаковых состояниях nlj в зависимости от спина ядра J .

Применить полученный результат к ядру ${}^{22}_{11}\text{Na}$, имеющему спин $J = 3$ и магнитный момент $\mu_{\text{эксп}} = 1,75$.

12.21. То же, что и в предыдущей задаче, но в условиях LS -связи; сравнить с 12.19.

12.22. В рамках модели оболочек найти соотношение между магнитными моментами основных состояний зеркальных ядер. Считать, что все нуклоны (обоих зарядовых состояний) сверх заполненных оболочек находятся в одинаковых состояниях nlj .

12.23. Найти квадрупольный момент Q_0 ядер, имеющих сверх заполненных оболочек лишь один протон в состоянии: а) $s_{1/2}$; б) $p_{3/2}$; в) $d_{5/2}$ (выразить Q_0 через $\langle r_p^2 \rangle$). Считать $A \gg 1$.

12.24. Обобщить результат предыдущей задачи на случай ядер с протоном в состоянии с произвольным значением l и $j = l + 1/2$.

12.25. Найти квадрупольный момент ядра, имеющего сверх заполненных оболочек лишь один протон в состоянии с произвольным орбитальным моментом l и $j = l - 1/2$.

Сравнить с результатами предыдущих двух задач.

12.26. Найти квадрупольный момент ядра, имеющего сверх заполненных оболочек лишь один нейтрон

¹⁰) При этом одночастичные уровни характеризуются квантовыми числами n, l , а не n, l, j , как в схеме jj -связи.

в состоянии с орбитальным моментом l и полным моментом $j = l \pm 1/2$.

Указание. Ядро рассматривать как систему, состоящую из двух подсистем: нейтрона сверх заполненных оболочек и нуклонов заполненных оболочек (как целого), движущихся относительно центра масс ядра.

12.27. В модели оболочек с самосогласованным однонуклонным потенциалом осцилляторного вида, см. 12.12, получить на основе квазиклассических соображений выражение для радиальной плотности ядер с $A \gg 1$. При решении задачи пренебречь кулоновским взаимодействием протонов и рассматривать ядра с одинаковым числом протонов и нейтронов. Сопоставится ли полученный результат с экспериментальными данными для тяжелых ядер?

12.28. То же, что и в предыдущей задаче, для самосогласованного потенциала вида

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < R, \\ \infty, & r > R. \end{cases}$$

Выбрав в соответствии с экспериментальными данными параметр R модели равным радиусу ядра $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см, найти граничный импульс нуклонов в ядре и максимальную их скорость.

§ 3. Изотопическая инвариантность

12.29. Заряды (в единицах заряда протона e) различных частиц, входящих в один и тот же изотопический мультиплет, в общем случае следующим образом выражаются через значение компоненты изоспина T_3 , соответствующее данной частице: $q = \frac{1}{2}Y + T_3$, где Y — так называемый *гиперзаряд* (так, для нуклона $Y_N = 1$, для пиона $Y_\pi = 0$ и т. д.).

Показать, что сохранение изотопического спина во взаимодействиях частиц влечет за собой и сохранение гиперзаряда.

12.30. Найти наиболее общий вид изотопически инвариантного оператора взаимодействия пиона с нуклоном. Как операторы πN -взаимодействия в состояниях с определенным значением изоспина \hat{U} ($T = 1/2, 3/2$) связаны с найденным оператором \hat{U} ?

Выразить \hat{U} через операторы $\hat{U}(T)$.

12.31. То же, что и в предыдущей задаче, для системы из двух пионов. Выразить оператор \hat{U} через операторы $\pi\pi$ -взаимодействия в состояниях с определенным значением изоспина.

12.32. Для двухпионной системы указать изотопическую структуру оператора кулоновского взаимодействия пионов.

12.33. То же, что и в предыдущей задаче, для кулоновского взаимодействия в πN -системе.

12.34. Каковы возможные значения изотопического спина двухпионной системы в состояниях с определенным значением L орбитального момента относительного движения?

12.35. Для системы, состоящей из двух π^0 -мезонов, найти вероятности $\omega(T)$ различных значений суммарного изотопического спина системы и среднее значение \bar{T}^2 .

12.36. Найти вероятности различных значений суммарного изотопического спина пион-нуклонной системы и среднее значение \bar{T}^2 в следующих зарядовых состояниях: π^+p , π^+n , π^0p , π^0n , π^-p , π^-n .

12.37. Нейтральная частица f^0 с изотопическим спином $T=0$ распадается на два пиона: $f^0 \rightarrow 2\pi$. Возможные каналы распада: $f^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ и $f^0 \rightarrow 2\pi^0$. Найти соотношение между вероятностями распада по этим каналам.

12.38. Показать, что изоспиновая часть волновой функции системы из трех пионов в состоянии с суммарным изотопическим спином системы $T(3\pi)=0$ имеет определенную симметрию по отношению к перестановке изоспиновых переменных любых двух пионов, и выяснить характер этой симметрии.

На основании полученного результата показать, что нейтральная частица ω^0 с изотопическим спином $T=0$ не может распадаться на три π^0 -мезона, т. е. распад $\omega^0 \rightarrow 3\pi^0$ запрещен.

12.39. Частица Δ , имеющая изотопический спин $T=3/2$ и зарядовые состояния Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , отвечающие соответственно значениям $+3/2$, $+1/2$, $-1/2$, $-3/2$ проекции T_3 изоспина, распадается на пион и нуклон: $\Delta \rightarrow \pi N$.

Указать возможные каналы распада для различных зарядовых состояний частицы Δ и найти соотношения между вероятностями распада по этим каналам.

12.40. То же, что и в предыдущей задаче, для частицы N^* , имеющей изоспин $T = 1/2$, зарядовые состояния N^{*+} ($T_3 = 1/2$), N^{*0} ($T_3 = -1/2$) и распадающейся на пион и нуклон: $N^* \rightarrow \pi N$.

12.41. Показать, что

$$\frac{d\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{d\sigma(n + p \rightarrow d + \pi^0)} = 2,$$

где $d\sigma$ — дифференциальные сечения соответствующих реакций, взятые при одних и тех же относительных энергиях, углах разлета и взаимных ориентациях спинов.

12.42. Показать, что

$$\frac{d\sigma(p + d \rightarrow d + n + \pi^+)}{d\sigma(p + d \rightarrow d + p + \pi^0)} = 2,$$

где смысл $d\sigma$ такой же, что и в предыдущей задаче.

12.43. Предполагая, что рассеяние пионов нуклонами (в некотором энергетическом интервале) происходит главным образом через промежуточное состояние πN -системы с полным изотопическим спином $T = 3/2$ (так что при этом взаимодействие в состоянии с $T = 1/2$ пренебрежимо мало), найти при одинаковых относительных энергиях, углах разлета и ориентациях спинов соотношения между дифференциальными сечениями следующих трех реакций:

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p \quad (\text{I}), & \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n \quad (\text{II}), \\ & & \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p \quad (\text{III}). \end{aligned}$$

12.44. Основываясь на зарядовой симметрии нуклон-нуклонных и пион-нуклонных взаимодействий, найти соотношение между дифференциальными сечениями процессов

$$n + p \rightarrow p + p + \pi^-, \quad n + p \rightarrow n + n + \pi^+.$$

Глава 13

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

Исследование рассеяния частиц с импульсом $\mathbf{p}_0 = \hbar \mathbf{k}_0$ потенциалом $U(\mathbf{r})$ связано с решением уравнения Шрёдингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right] \Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}) = E \Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}), \quad (\text{XIII. 1})$$

имеющим следующую асимптотику на больших расстояниях¹⁾:

$$\Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + \frac{f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0\mathbf{r}/r, \quad (\text{XIII. 2})$$

\mathbf{k} — волновой вектор рассеянной частицы ($k = k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$). При этом амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ определяет дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2$.

Воспользовавшись функцией Грина свободной частицы

$$G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{m}{2\pi\hbar^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{XIII. 3})$$

уравнение (XIII.1) вместе с граничным условием (XIII.2) можно записать в виде интегрального уравнения

$$\Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}') dV'. \quad (\text{XIII. 4})$$

Отсюда, в частности, следует выражение для амплитуды рассеяния непосредственно через волновую функцию в области действия потенциала

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}) dV, \quad (\text{XIII. 5})$$

удобное для различных приближенных вычислений.

Так, при $\Psi_{\mathbf{k}_0}^+ = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$ из (XIII.5) следует *приближение Борна* для амплитуды рассеяния

$$f^B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{U}(\mathbf{q}), \quad \tilde{U}(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) dV. \quad (\text{XIII. 6})$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ определяет изменение импульса частицы $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ при рассеянии, при этом $q = 2k \sin(\theta/2)$, а θ — угол рассеяния. Это выражение представляет первый член разложения амплитуды по степеням потенциала (кратности) взаимодействия. Условием его применимости является выполнение

¹⁾ При этом предполагается, что потенциал убывает быстрее, чем ∞/r ; в противном случае как падающая, так и рассеянная волны искажаются на больших расстояниях (сравнить с рассеянием на кулоновском потенциале).

хотя бы одного из неравенств:

$$U_0 \ll \hbar^2/mR^2 \quad \text{или} \quad U_0 \ll \hbar v/R, \quad (\text{XIII. 7})$$

где U_0 и R — характерная величина потенциала и его радиус.

При рассеянии в центральном потенциале амплитуда рассеяния зависит лишь от энергии E и полярного угла θ (нет азимутальной асимметрии), а в борновском приближении — лишь от величины $\hbar q$ передаваемого импульса. При этом (XIII. 6) можно преобразовать к виду

$$f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr. \quad (\text{XIII. 8})$$

В случае центрального потенциала для амплитуды рассеяния справедливо разложение по *парциальным волнам*

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \varphi_l(E) P_l(\cos \theta), \quad (\text{XIII. 9})$$

$$\varphi_l = (e^{2i\delta_l} - 1)/2ik = 1/k (\text{ctg } \delta_l - i),$$

где *фазовые сдвиги* $\delta_l(k)$ связаны с асимптотикой на больших расстояниях радиальной волновой функции $rR_{kl} \approx C \sin(kr - \pi l/2 + \delta_l)$, отвечающей моменту l частицы. При этом полное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) (\text{ctg}^2 \delta_l + 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{XIII. 10})$$

Из сопоставления (XIII. 10) и (XIII. 9) следует соотношение — *оптическая теорема*²⁾:

$$\text{Im } f(E, \theta = 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma(E). \quad (\text{XIII. 11})$$

²⁾ Это соотношение носит общий характер. Оно справедливо и для рассеяния составных частиц, когда возможны неупругие процессы. При этом под $\sigma(E)$ следует понимать полное сечение столкновения, а под $f(E, 0)$ амплитуду упругого рассеяния на угол $\theta = 0$ (без изменения внутренних состояний сталкивающихся частиц).

Приведем приближенные формулы для фазовых сдвигов. В борновском приближении (при этом $|\delta_l^B| \ll 1$)

$$\delta_l^B(k) = -\frac{\pi m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) J_{l+1/2}^2(kr) r dr. \quad (\text{XIII. 12})$$

В квазиклассическом приближении (r_0 — точка поворота)

$$\delta_l = \int_{r_0}^\infty \left\{ \sqrt{k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) - \frac{(l + 1/2)^2}{r^2}} - k \right\} dr + \\ + 1/2\pi (l + 1/2) - kr_0, \quad (\text{XIII. 13})$$

причем в случае $|U(r)| \ll E$ это выражение упрощается:

$$\delta_l = - \int_{r_0}^\infty \frac{mU(r) dr}{\hbar^2 \sqrt{k^2 - (l + 1/2)^2/r^2}}, \quad r_0 = (l + 1/2)/k. \quad (\text{XIII. 14})$$

При рассеянии медленных частиц, $kR \ll 1$, в случае достаточно быстрого убывания потенциала (см. 13.28—30) справедливо разложение эффективного радиуса

$$k^{2l+1} \text{ctg } \delta_l = -1/a_l + r_l k^2/2 + \dots, \quad (\text{XIII. 15})$$

где a_l и r_l называют длиной рассеяния³⁾ и эффективным радиусом взаимодействия в состоянии с орбитальным моментом l ; эти параметры согласно (XIII. 9, 10) определяют низкоэнергетическое рассеяние в соответствующей парциальной волне.

Если в потенциале нет мелкого реального или виртуального (при $l=0$) и квазистационарного (при $l \neq 0$) уровня, то член с эффективным радиусом выступает как поправка. В этом случае $\delta_l \approx -a_l k^{2l+1}$, $|a_l| \leq R^{2l+1}$ и $\sigma_l \leq 4\pi(2l+1)(kR)^{4l} R^2$, так что доми-

³⁾ Подчеркнем, что эти параметры имеют размерность длины лишь для $l=0$. В общем случае их размерность: $[a_l] = L^{2l+1}$, $[r_l] = L^{1-2l}$, где L — размерность длины.

нирующий вклад в сечение вносит рассеяние в s -состоянии.

При наличии в потенциале мелкого уровня с энергией $|E_l| \ll \hbar^2/mR^2$ и моментом l рассеяние в соответствующей парциальной волне имеет резкую энергетическую зависимость, а величина $\sigma_l(E)$ значительно превышает нерезонансное значение. В случае существования мелкого s -уровня имеем $|a_0| \gg R$ и

$$\sigma(E) \approx \sigma_{l=0}(E) \approx \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1 + r_0\kappa_0}{E + \varepsilon_0}, \quad (\text{XIII. 16})$$

где $|E_0| = \varepsilon_0 = \hbar^2\kappa_0^2/2m$, а κ_0 определяется соотношением⁴⁾ $\kappa_0 = 1/a_0 + r_0\kappa_0^2/2$. При $a_0 > 0$ также $\kappa_0 > 0$, и ε_0 определяет энергию связи реального уровня дискретного спектра; при $a_0 < 0$ уровень — виртуальный.

Для резонансного рассеяния с моментом $l \neq 0$ характер энергетической зависимости и величина $\sigma_l(E)$ существенно зависят от природы уровня (реальный он или квазистационарный). При $a_l < 0$ уровень квазистационарный. Записав $E_l = E_R - i\Gamma_R/2$, где E_R и Γ_R — положение уровня и его ширина, из уравнения $\text{ctg } \delta_l(E_l) = i$ находим⁵⁾

$$E_R \equiv \hbar^2 k_R^2/2m \approx \hbar^2/ma_l r_l \quad \text{и} \quad \Gamma_R \approx (2\hbar^2/m |r_l|) k_R^{2l+1}.$$

В этом случае сечение имеет резкую энергетическую зависимость в области энергий, близких к E_R , в которой

$$\sigma_l(E) \approx \frac{(2l+1)\pi}{k_R^2} \frac{\Gamma_R^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma_R^2/4}. \quad (\text{XIII. 17})$$

При рассеянии быстрых частиц, когда выполнены условия $kR \gg 1$ и $|U(\mathbf{r})| \ll E$, для амплитуды в наиболее существенной области малых углов рассеяния

⁴⁾ С учетом (XIII. 15) оно следует из условия $\text{ctg } \delta_l(E_l) = i$, определяющего положения полюсов парциальной амплитуды, $\kappa \approx -i\sqrt{2mE/\hbar^2}$. В случае $l = 0$ имеем, вообще говоря, $r_0 \sim R$ и слагаемое с эффективным радиусом выступает как поправка; при этом $\kappa_0 \approx a_0^{-1}$, $\varepsilon_0 \approx \hbar^2/2ma_0^2$ и $r_0\kappa_0 \ll 1$.

⁵⁾ В условиях существования мелкого уровня с $l \neq 0$ эффективный радиус $r_l < 0$, так что, как и следует, $E_R, \Gamma_R > 0$; см. 13.44.

$\theta \leq (kR)^{-1}$ справедливо выражение

$$f(k_0, q_\perp) = \frac{k}{2\pi i} \int [S(\rho) - 1] e^{-iq_\perp \rho} d^2\rho \quad (\text{XIII. 18})$$

(приближение эйконала). Здесь q_\perp — составляющая q в направлении, перпендикулярном импульсу $\hbar k_0$ падающих частиц (при этом $q_\perp \approx q \approx k\theta$, $q_\parallel \approx k\theta^2/2$), а

$$S(\rho) = e^{2i\delta(\rho)}, \quad \delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz. \quad (\text{XIII. 19})$$

Воспользовавшись оптической теоремой, получаем согласно (XIII. 18) полное сечение рассеяния⁶⁾

$$\sigma(E) = 2 \int (1 - \cos 2\delta(\rho)) d^2\rho. \quad (\text{XIII. 20})$$

В случае центрального потенциала выражение (XIII. 19) для $\delta(\rho)$ совпадает с квазиклассическим (XIII. 14) при $l \approx k\rho \gg 1$, а (XIII. 18) можно записать также в виде

$$f(k, \theta) = ik \int_0^\infty (1 - e^{2i\delta(\rho)}) J_0(k\rho\theta) \rho d\rho. \quad (\text{XIII. 21})$$

При столкновении частиц с отличными от нуля спинами и с зависящим от спина взаимодействием амплитуда рассеяния является уже матрицей \hat{f} — оператором в пространстве спиновых состояний. Ее матричные элементы $\chi_f^* \hat{f} \chi_i$ определяют амплитуду рассеяния из начального спинового состояния, описываемого спиновой функцией χ_i , в конечное состояние, описываемое функцией χ_f . При рассеянии частицы со спином $s = 1/2$ на бесспиновой частице и при сохраняющем четность взаимодействии⁷⁾

$$\hat{f} = A(k, \theta) + iB(k, \theta) \mathbf{v} \hat{\sigma}, \quad \mathbf{v} = [\mathbf{k}_0 \mathbf{k}] / |\mathbf{k}_0 \mathbf{k}|. \quad (\text{XIII. 22})$$

Дифференциальное сечение рассеяния, просуммиро-

⁶⁾ Для справедливости этого соотношения достаточно выполнения лишь одного условия: $kR \gg 1$, см. 13.51.

⁷⁾ Обращаем внимание на выделение перед B множителя i по сравнению с формулой (140.4) из [1].

ванное по различным спиновым состояниям рассеянной частицы

$$d\sigma/d\Omega = |A|^2 + |B|^2 + 2 \operatorname{Im}(AB^*) \mathbf{v} \mathbf{P}_0, \quad (\text{XIII. 23})$$

где $\mathbf{P}_0 = 2\chi_i^* \hat{\mathbf{s}} \chi_i$ — вектор поляризации частиц в начальном (до столкновения) состоянии. Поляризационное состояние рассеянных частиц зависит как от взаимодействия в системе, так и от начальной поляризации \mathbf{P}_0 . Если до столкновения частицы были не поляризованы, $\mathbf{P}_0 = 0$, то после рассеяния вектор поляризации

$$\mathbf{P} = 2 \operatorname{Im}(AB^*) \mathbf{v} / (|A|^2 + |B|^2). \quad (\text{XIII. 24})$$

Приведем также разложение амплитуды (XIII. 22) по парциальным волнам:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1) (\exp(2i\delta_l^+) - 1) + \\ + l (\exp(2i\delta_l^-) - 1) P_l(\cos \theta), \\ B = \frac{1}{2ik} \sum_{l=1}^{\infty} (\exp(2i\delta_l^+) - \\ - \exp(2i\delta_l^-)) \sin \theta P'_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (\text{XIII. 25})$$

здесь δ_l^\pm — фазовые сдвиги (в радиальных волновых функциях) для состояний с определенными значениями орбитального момента l и полного момента $j = l \pm 1/2$.

Амплитуды процессов столкновения обладают определенными *аналитическими* и *унитарными* свойствами. В частности для амплитуды рассеяния в потенциале $U(\mathbf{r})$ справедливо условие унитарности⁸⁾

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - f^*(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0) f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) d\Omega' \quad (\text{XIII. 26})$$

(при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ оно воспроизводит оптическую теорему).

⁸⁾ Оно является следствием *унитарности S-матрицы*. Такой же вид имеет условие унитарности и для рассеяния составных частиц, но лишь при таких значениях энергии, при которых невозможны неупругие процессы (*«упругая» унитарность*).

Отражением аналитических свойств амплитуд являются *дисперсионные соотношения* для них. Наиболее простыми аналитическими свойствами обладает амплитуда рассеяния на угол $\theta = 0$ в центральном потенциале, рассматриваемая как функция энергии⁹⁾ в комплексной плоскости E . Она удовлетворяет (на физическом листе) дисперсионному соотношению вида:

$$f(E, 0) = f^B(0) + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f(E', 0)}{E' - E} dE'. \quad (\text{XIII. 27})$$

Здесь $f^B(0)$ — борновская амплитуда, см. (XIII. 6); суммирование ведется по всем уровням дискретного спектра, существующим в потенциале, при этом вычет в соответствующем полюсе

$$d_n = -(-1)^{l_n} (2l_n + 1) \hbar^2 A_n^2 / 2m \quad (\text{XIII. 28})$$

определяется нормировочным коэффициентом в асимптотике на больших расстояниях радиальной функции связанного состояния, $rR_n \approx A_n \exp(-\kappa_n r)$, с моментом l_n , см. [1].

§ 1. Борновское приближение

13.1. Найти в борновском приближении амплитуду рассеяния и полное сечение рассеяния частиц в указанных ниже полях. (Исследовать предельные случаи медленных и быстрых частиц. Указать условия применимости результатов.)

$$a) U(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-r/R}; \quad б) U(r) = \alpha \delta(r - R);$$

$$в) U(r) = U_0 e^{-r/R}; \quad г) U(r) = \frac{\alpha}{r^2};$$

$$д) U(r) = \begin{cases} U_0, & r < R, \\ 0, & r > R; \end{cases} \quad е) U(r) = U_0 e^{-r^2/R^2}.$$

13.2. Показать, что при больших энергиях частицы, $kR \gg 1$, полное сечение рассеяния в потенциале

⁹⁾ Она имеет следующие особые точки: $E = 0$ и $E = \infty$ — точки ветвления и полюсы E_n на вещественной полуоси $E < 0$, совпадающие с положением дискретных уровней частицы.

$U(r)$ в борновском приближении описывается выражением¹⁰⁾

$$\sigma(E) \underset{E \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m}{2\hbar^2 E} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz \right]^2 d^2\rho$$

(импульс частицы до рассеяния направлен вдоль оси z ; ρ — двумерный радиус-вектор в перпендикулярной ей плоскости).

Применить полученный результат к полю $U(r) = U_0 \exp(-r^2/R^2)$ и к прямоугольной потенциальной яме (барьеру) глубиной U_0 и радиусом R ; сравнить с 13.1.

13.3. Получить выражение для амплитуды рассеяния частиц в борновском приближении в случае потенциала, имеющего *обменный* характер¹¹⁾, так что $\hat{U}_{\text{обм}}\Psi(\mathbf{r}) \equiv U(r)\Psi(-\mathbf{r})$.

Как амплитуда рассеяния в этом случае связана с амплитудой рассеяния на обычном потенциале $U(r)$? Каково угловое распределение при рассеянии быстрых частиц?

13.4. Найти дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния быстрых электронов на атоме водорода, находящемся в основном состоянии, пренебрегая поляризацией атома, см. также 13.77.

13.5. То же, что и в предыдущей задаче, для атома гелия. Волновую функцию атома выбрать на основании вариационного расчета, выполненного в 11.6.

13.6. Найти зависимость от Z сечения упругого рассеяния быстрых электронов нейтральным атомом с $Z \gg 1$; воспользоваться моделью Томаса — Ферми.

13.7. Выразить в борновском приближении амплитуду рассеяния на двух одинаковых силовых центрах, находящихся на расстоянии a друг от друга, так что $U(\mathbf{r}) = U_0(r) + U_0(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)$, через амплитуду рассеяния $f_0^B(q)$ на одном центре $U_0(r)$.

Используя полученное соотношение, обсудить связь между дифференциальными сечениями рассеяния быстрого электрона на атоме и на двухатомной

¹⁰⁾ В связи с данной задачей см. также 13.14, 13.51, 13.52.

¹¹⁾ Применительно к задаче двух тел $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и такой потенциал описывает взаимодействие, в результате которого происходит перестановка (*обмен*) частиц. Такое взаимодействие естественным образом возникает в задачах ядерной физики.

молекуле (из одинаковых атомов; при этом усреднить полученный результат по различным ориентациям оси молекулы, считая их равновероятными).

Найти соотношения между сечениями рассеяния на двух и на одном центрах в случаях:

а) $ka \ll 1$ (при этом величина kR может быть произвольной, R — радиус действия сил отдельного центра);

б) $kR \sim 1$ и $a \gg R$ (т. е. расстояние между центрами много больше радиуса действия сил отдельного центра).

13.8. Обобщить результат предыдущей задачи на случай системы из произвольного числа N одинаковых центров, расположенных в точках \mathbf{a}_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Обсудить характерные особенности углового распределения рассеянных частиц при упорядоченном расположении большого числа ($N \gg 1$) центров вдоль прямой линии с одинаковым расстоянием b между ближайшими соседями.

13.9. В борновском приближении найти амплитуду рассеяния для столкновения двух *протяженных* частиц, взаимодействующих друг с другом электростатическим образом. Частицы считаются протяженными в том смысле, что они характеризуются некоторым распределением заряда $\rho_{1,2}(r)$, предполагающимся сферически симметричным относительно центра масс соответствующей частицы¹²⁾ и не изменяющимся в процессе столкновения. Выразить амплитуду рассеяния через *формфакторы* $F_{1,2}(q)$ зарядовых плотностей $\rho_{1,2}(r)$.

13.10. Получить выражение члена n -го порядка ряда теории возмущений для амплитуды рассеяния частицы в потенциале $U(r)$.

Указание. Предварительно получить согласно (XIII.5,4) интегральное уравнение для амплитуды рассеяния (*уравнение Липпмана — Швингера*).

13.11. В борновском приближении амплитуда рассеяния вперед (на угол $\theta = 0$) является веществен-

¹²⁾ Неточечность распределения заряда указывает на составной характер сталкивающихся частиц (сравнить, например, с 13.4). Так как, однако, изменением их внутренних состояний в процессе столкновения пренебрегается, то задача сводится к обычной задаче рассеяния двух тел. В связи с данной задачей см. также 13.80.

ной величиной и поэтому не удовлетворяет оптической теореме (XIII.11). Почему это обстоятельство не противоречит успешному описанию дифференциального и полного сечений рассеяния в рамках борновского приближения в условиях его применимости?

Написать выражение для амплитуды рассеяния во втором порядке теории возмущений. Найти $\text{Im } f^{(2)}(E, \theta = 0)$ и объяснить полученный результат.

13.12. Найти во втором порядке теории возмущений амплитуду рассеяния на потенциале Юкавы $U(r) = \frac{a}{r} e^{-r/R}$. Сравнить $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ для различных значений энергии и угла рассеяния.

13.13. Найти во втором порядке теории возмущений амплитуду рассеяния в потенциале $U(r) = U_0 e^{-r^2/R^2}$ при больших передаваемых импульсах, $qR \gg 1$. Сравнить вещественную и мнимую части $f^{(2)}$ друг с другом и с борновской амплитудой.

13.14. Показать, что амплитуда рассеяния второго приближения теории возмущений при больших энергиях, $kR \gg 1$, и передаваемых импульсах¹³⁾ $qR \leq 1$ описывается выражением

$$f^{(2)} \approx i \frac{m^2}{4\pi\hbar^4 k} \iint \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz \right]^2 \exp(-i\mathbf{q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho}) d^2\rho$$

(R — радиус потенциала). Применить полученный результат к потенциалу $U(r) = U_0 e^{-r^2/R^2}$ и сравнить с 13.13.

13.15. Из решения уравнения Липпмана — Швингера (см. 13.10) найти амплитуду рассеяния частицы в случае сепарабельного потенциала, ядро которого имеет вид $U(r, r') = \lambda \chi(r) \chi^*(r')$. Каково угловое распределение и полное сечение рассеяния?

13.16. Сравнить при $E = 0$ значения точной и борновской амплитуд рассеяния в потенциале $U(r)$ в случаях:

¹³⁾ Эта область переданных импульсов вносит доминирующий вклад в полное сечение рассеяния. При этом $|\mathbf{q}_{\perp}| \approx q$, где \mathbf{q}_{\perp} — перпендикулярная первоначальному импульсу \mathbf{k}_0 (направленному вдоль оси z) составляющая \mathbf{q} . Заметим, что из выражения для $f^{(2)}$ согласно оптической теореме следует результат борновского приближения для сечения рассеяния, сравнить с 13.11.

а) потенциала отталкивания $U(r) \geq 0$;

б) потенциала притяжения, в котором, однако, нет связанных состояний (т. е. потенциальная яма достаточно «мелкая»).

Показать, что борновское приближение в случае а) дает завышенное, а в случае б), наоборот, заниженное значение сечения рассеяния.

13.17. В борновском приближении получить выражение для амплитуды рассеяния заряженной частицы магнитным полем $\mathcal{H}(\mathbf{r})$. Убедиться в калибровочной инвариантности полученного результата¹⁴⁾.

§ 2. Фазовая теория рассеяния

13.18. Получить выражение для фазовых сдвигов непосредственно из разложения по парциальным волнам амплитуды рассеяния в центральном потенциале в борновском приближении.

Указание. Воспользоваться формулой (XIII.8) и теоремой сложения для функций Бесселя.

13.19. Найти фазовые сдвиги в поле $U(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

Выполнить суммирование ряда (XIII.9) разложения амплитуды по парциальным волнам в случаях:

а) $m\alpha/\hbar^2 \ll 1$ при произвольном угле рассеяния;

б) $m\alpha/\hbar^2 \gtrsim 1$ при достаточно малом угле рассеяния;

в) $m\alpha/\hbar^2 \gg 1$ при рассеянии частиц назад ($\theta = \pi$).

Найти в указанных случаях дифференциальное сечение рассеяния и сравнить его с результатами расчетов в борновском приближении и согласно классической механике.

13.20. Найти волновую функцию $\Psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r})$, амплитуду рассеяния и сечение рассеяния частицы на потенциале нулевого радиуса (см. 4.10). Каково значение эффективного радиуса r_0 ?

13.21. Восстановить потенциал взаимодействия $U(r)$ по фазе s -рассеяния $\delta_0(k)$, считая ее известной при всех энергиях частицы и предполагая, что $|\delta_0(k)| \ll 1$.

Для иллюстрации полученного результата рассмотреть зависимости вида: а) $\delta_0(k) = \text{const}$; б) $\delta_0(k) = \alpha k / (1 + \beta k^2)$.

¹⁴⁾ В связи с данной задачей см. также 13.24.

13.22. Получить выражение для фазовых сдвигов в борновском приближении в случае обменного потенциала (см. 13.3).

13.23. Развить фазовую теорию рассеяния в случае двумерного движения частицы в аксиально-симметричном потенциале $U(\rho)$. Каково обобщение оптической теоремы на этот случай?

13.24. Используя фазовую теорию рассеяния, найти амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц в аксиально-симметричном магнитном поле $\mathcal{H}(\rho)$, направленном вдоль оси z и локализованном на малых расстояниях $\rho \leq a$ около этой оси.

Указание. Ограничиться предельным случаем $a \rightarrow 0$, но конечной величины Φ_0 потока магнитного поля. При этом векторный потенциал удобно выбрать в виде $A_\phi = \Phi_0/2\pi\rho$, $A_z = A_\rho = 0$. Отметим, что рассеяние под малыми углами иным способом рассмотрено в [1, § 131].

13.25. Найти энергетическую зависимость фазовых сдвигов $\delta_l(k)$ с фиксированным значением l при $k \rightarrow \infty$. Рассмотреть случаи потенциалов, имеющих на малых расстояниях $r \rightarrow 0$ вид $U \approx \alpha/r^\nu$ с а) $\nu < 1$; б) $1 < \nu < 2$; в) $\nu = 1$.

13.26. Показать, что при больших значениях энергии и момента, когда $kR \sim l \gg 1$, борновское выражение (XIII.12) для фазового сдвига переходит в квазиклассическое (XIII.14).

Указание. Воспользоваться «приближением тангенсами» для функций Бесселя, см. [33, с. 977].

§ 3. Низкоэнергетическое рассеяние.

Резонансные явления при рассеянии

13.27. Найти энергетическую зависимость сечения рассеяния $\sigma(E)$ в поле, спадающем на больших расстояниях по закону $U(r) \approx \alpha/r^\nu$, $r \rightarrow \infty$, $2 < \nu \leq 3$ при энергии частиц $E \rightarrow 0$.

13.28. Найти зависимость от k фазовых сдвигов $\delta_l(k)$ для медленных частиц и обсудить разложение эффективного радиуса в борновском приближении. При каких ограничениях на убывание потенциала на больших расстояниях справедливо разложение (XIII.15), т. е. можно ввести параметры низкоэнергетического рассеяния — длину рассеяния a_l и

эффективный радиус взаимодействия r_l — с моментом l ?

13.29. Для потенциала со степенным убыванием на больших расстояниях, $U \approx \alpha/r^\nu$, $\nu > 2$, найти зависимость от k фазовых сдвигов для медленных частиц с различными значениями момента l . Рассмотреть приложения полученных результатов к потенциалам, имеющим на больших расстояниях вид $U \approx \approx \alpha/r^3$ и $U \approx \alpha/r^4$ (поляризационный потенциал, см. 11.49).

13.30. Для потенциала со степенным убыванием на больших расстояниях, $U \approx \alpha/r^\nu$, обсудить модификацию разложения эффективного радиуса (XIII.15) при орбитальном моменте частицы l , удовлетворяющем условиям $(\nu - 5)/2 \leq l < (\nu - 3)/2$. В качестве иллюстрации полученного результата рассмотреть s -расстояние медленных частиц в потенциале, имеющем на больших расстояниях вид $U \approx \alpha/r^4$.

13.31. Найти длину рассеяния a_0 в потенциалах:

$$a) U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < R, \\ 0, & r > R; \end{cases}$$

$$б) U(r) = -U_0 R \delta(r - R);$$

$$в) U(r) = -U_0 e^{-r/R}; \quad з) U(r) = -U_0 [1 + (r/R)^2]^{-2};$$

$$д) U(r) = U_0 (R/r)^4, \quad U_0 > 0.$$

Чем примечательны значения параметров потенциала, при которых длина рассеяния обращается в бесконечность?

Какова причина неаналитической зависимости $a_0(U_0)$ от параметра U_0 при $U_0 \rightarrow 0$ в случае д)?

13.32. Найти длину рассеяния и сечение рассеяния медленных частиц непроницаемым эллипсоидом, т. е. в потенциале

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & (x^2 + y^2)/b^2 + z^2/c^2 < 1, \quad c \geq b, \\ 0, & (x^2 + y^2)/b^2 + z^2/c^2 \geq 1. \end{cases}$$

Специально обсудить предельные случаи $c \approx b$ и $c \gg b$.

13.33. В квазиклассическом приближении найти длину рассеяния a_0 для отталкивательного потенциала, имеющего асимптотическое поведение $U \approx \alpha/r^4$ на больших расстояниях.

Для иллюстрации полученного квазиклассического результата применить его к потенциалам а) $U = \alpha(R^2 + r^2)^{-2}$ и б) $U = \alpha(R + r)^{-4}$, где $R > 0$, и сравнить с точным.

13.34. В условиях предыдущей задачи найти квазиклассическую поправку к длине рассеяния, связанную с учетом следующего члена в разложении потенциала на больших расстояниях: $U = \alpha r^{-4}(1 + b/r + \dots)$.

13.35. Для потенциала притяжения, $U(r) \leq 0$, имеющего степенное убывание $U \approx -\alpha/r^\nu$ с $\nu > 3$ на больших расстояниях, найти длину рассеяния a_0 в квазиклассическом приближении. При этом считать, что на малых расстояниях $r \rightarrow 0$ потенциал $U \propto r^{-\beta}$ и $0 \leq \beta < 2$. Чем примечательны значения параметров потенциала, при которых a_0 обращается в бесконечность?

Рассмотреть приложения полученного результата к потенциалам а) $U = -\alpha(r + R)^{-4}$ и б) $U = -\alpha(r^2 + R^2)^{-2}$ и сравнить с точным решением.

13.36. Получить формулу теории возмущений по длине рассеяния для сдвига уровня с произвольным моментом l в потенциале $U_L(r)$ под влиянием короткодействующего потенциала $U_S(r)$ радиуса r_s (обобщение результата 11.4 для $l = 0$). Предполагается, что на малых расстояниях $r \leq r_s$ взаимодействие U_L является слабым, $|U_L| \ll \hbar^2/mr_s^2$, и для рассматриваемых уровней

$$|E_{n,l}^{(0)}| \ll \hbar^2/mr_s^2.$$

13.37. Потенциал представляет суперпозицию сильного короткодействующего потенциала $U_S(r)$ радиуса r_s и дальнедействующего $U_L(r)$ радиуса $r_L \gg r_s$, причем последний на расстояниях $r \leq r_s$ предполагается слабым: $|U_L| \ll \hbar^2/mr_s^2$. Считая известным решение уравнения Шрёдингера для потенциала $U_L(r)$, найти изменение $\Delta\delta_l^{(s)}$ фазового сдвига в этом потенциале под влиянием U_S в случае медленных частиц, когда $kr_s \ll 1$. Выразить $\Delta\delta_l^{(s)}$ через длину рассеяния $a_l^{(s)}$ в потенциале U_S .

В каком случае фазовый сдвиг в поле $U = U_S + U_L$ приближенно равен сумме фазовых сдвигов в потенциалах U_S и U_L в отдельности?

Рассмотреть приложение полученного результата к дальнodelствующему кулоновскому потенциалу.

Указание. Воспользоваться изложенным в 11.4 приемом учета влияния короткодействующего взаимодействия, см. также 13.36.

13.38. Как надо модифицировать формулу Резерфорда, чтобы описать дифференциальное сечение рассеяния частиц в кулоновском потенциале, $U = \pm Ze^2/r$, искаженном на малых расстояниях $r \leq r_s$? Предполагается, что выполнены условия $kr_s \ll 1$ и $Ze^2 \ll \hbar v$. Искажение кулоновского поля описывается потенциалом $U_s(r)$, для которого известна длина рассеяния $a_0^{(s)}$.

13.39. Найти длину рассеяния a_l с произвольным моментом l для следующих потенциалов:

а) непроницаемая сфера радиуса R ; б) $U(r) = -\alpha\delta(r-R)$; в) прямоугольная яма радиуса R и глубины U_0 .

Сравнить со случаем $l=0$ из 13.31.

13.40. Оценить значение синглетной (с суммарным электронным спином $S=0$) длины рассеяния $a_0(1)$ электрона на невозбужденном атоме водорода, учитывая существование слабосвязанного состояния — иона H^- — с энергией связи $\varepsilon_0 = 0,754$ эВ $= 0,0277$ а. е. и

а) пренебрегая конечностью размера атома водорода и области взаимодействия внешнего электрона с атомом;

б) рассматривая внешний электрон как слабосвязанный в потенциале конечного радиуса и используя для него значение $C_{\infty 0}^2 = 2,65$ асимптотического коэффициента (см. 11.36).

Сравнить с результатом вариационного расчета: $a_0(1) = 5,97$ а. е.

13.41. Для протон-нейтронной системы оценить значение триплетной длины рассеяния $a_0(3)$, учитывая существование в такой системе слабосвязанного состояния — дейтрона — с энергией связи $\varepsilon_0 = 2,23$ МэВ. Сравнить с экспериментальным значением $a_0(3) = 5,39 \cdot 10^{-13}$ см.

13.42. а) Используя экспериментальное значение синглетной длины рассеяния $a_0(1) = -23,7 \cdot 10^{-13}$ см для протон-нейтронной системы, оценить энергию

мелкого виртуального уровня¹⁵⁾ в такой системе в состоянии с $S = 0$ и $l = 0$.

б) Для протон-протонной системы $a_0(1) = -7,77 \times 10^{-13}$ см. Не противоречит ли такое существенное различие длин рассеяния для рп- и рр-систем изотопической инвариантности ядерного взаимодействия? В связи с этим приведем значения эффективных радиусов взаимодействия $r_0(1)$, равные $2,67 \cdot 10^{-13}$ см и $2,77 \cdot 10^{-13}$ соответственно для рп- и рр-систем.

13.43. Показать, что для эффективного радиуса взаимодействия r_0 , см. (XIII.15), справедливо выражение

$$r_0 = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \left(-\frac{r}{a_0} + 1 \right)^2 - \chi_0^2(r) \right\} dr,$$

где $\chi_0(r)$ — радиальная волновая функция ($\chi_0 = rR_0$) состояния с $l = 0$ и $E = 0$, нормированная условием $\chi_0(r) = (-r/a_0 + 1)$ при $r \rightarrow \infty$ (a_0 — длина рассеяния).

Найти r_0 для непроницаемой сферы радиуса R , а также для δ -ямы, $U(r) = -\alpha\delta(r - R)$, и прямоугольной ямы радиуса R в момент возникновения в них связанных состояний, когда $a_0 = \infty$.

13.44. Показать, что эффективный радиус взаимодействия r_l в состоянии с $l \neq 0$, см. (XIII.15), в момент появления в потенциале связанного состояния¹⁶⁾ равен

$$r_l = -2 [(2l - 1)!!]^2 C_l^{-2},$$

где C_l — нормировочный коэффициент в волновой функции с $E = 0$, при этом

$$\chi_l(r) \approx C_l r^{-l} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \chi_l^2(r) dr = 1.$$

Найти r_l для δ -ямы.

¹⁵⁾ Виртуальный характер уровня и знак $a_0(1) < 0$ следуют из факта отсутствия реального связанного состояния. С учетом эффективного радиуса $r_0(1)$ следует $\epsilon_{\text{вирт}} = 67$ кэВ.

¹⁶⁾ Этот случай наиболее интересен, так как в отсутствие в потенциале мелкого уровня слагаемое с эффективным радиусом в (XIII.15) выступает как малая поправка.

13.45. Найти фазовый сдвиг $\delta_0(k)$ и сечение рассеяния медленных частиц:

а) непроницаемой сферой радиуса R ;

б) δ -ямой, $U(r) = -\alpha\delta(r - R)$;

в) прямоугольной ямой радиуса R и глубины U_0 .

Воспользоваться разложением эффективного радиуса.

13.46. Рассмотреть рассеяние медленных частиц в парциальной волне с моментом $l \neq 0$ в потенциале $U(r) = -\alpha\delta(r - R)$. Специально обсудить случай резонансного рассеяния в условиях существования в потенциале квазистационарного состояния с малой энергией $E_R \ll \hbar^2/mR^2$, найти его ширину Γ_R .

13.47. На примере модельной задачи: потенциальная яма глубины U_0 и радиуса R , окруженная δ -барьером $\tilde{U}(r) = \alpha\delta(r - R)$ (рис. 28), обсудить особенности резонансного рассеяния медленных частиц в s -состоянии, связанные с наличием малопроницаемого барьера¹⁷⁾.

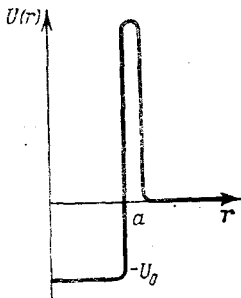


Рис. 28

Указание. Воспользоваться разложением эффективного радиуса, обсудить влияние малопроницаемого барьера на значение эффективного радиуса взаимодействия r_0 .

13.48. Найти парциальную амплитуду s -рассеяния в потенциале $U(r) = \alpha\delta(r - R)$. В случае малой проницаемости δ -барьера определить положения $E_{R,n}$ и ширины $\Gamma_{R,n}$ нижних квазидискретных s -уровней (с $E_{R,n} \sim \hbar^2/mR^2$).

Сравнить сечения рассеяния на δ - и непроницаемой сферах. Каково значение $\Delta\sigma(E)$ разности этих сечений при энергии частиц, близкой к энергии квазидискретного уровня?

13.49. Параметры потенциала $U_0(r)$ выбраны так, что в нем имеется связанное состояние с энергией $E = 0$ и моментом l (длина рассеяния $a_l^{(0)} = \infty$).

¹⁷⁾ Для физических приложений особенно интересен случай, когда такой барьер связан с кулоновским отталкиванием заряженных частиц. Однако ввиду медленного убывания кулоновского потенциала этот случай требует специального рассмотрения, см. [1, § 138].

Найти длину рассеяния a_l в этой парциальной волне при малом изменении потенциала на $\delta U(r)$.

Используя полученный результат, обсудить вопрос о различии зависимостей энергии уровня от $\delta U(r)$ в случаях $l=0$ и $l \neq 0$; сравнить с 4.27 и 4.28.

§ 4. Рассеяние быстрых частиц.

Приближение эйконала

13.50. Получить выражение (XIII.18) для амплитуды рассеяния быстрых частиц суммированием ряда разложения ее по степеням потенциала (кратности взаимодействия), см. 13.10.

13.51. Показать, что полное сечение рассеяния быстрых частиц, $kR \gg 1$, в потенциале $U(r)$ радиуса R может быть вычислено по формуле

$$\sigma(E) = 4\pi \int_0^\infty \left\{ 1 - \cos \left[\frac{m}{k\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} \rho d\rho$$

независимо от соотношения между энергией частиц и характерной величиной потенциала, т. е. справедливость формулы не предполагает выполнения условия $E \gg |U(r)|$ применимости приближения эйконала.

Использовать полученный результат для вычисления сечения рассеяния частиц потенциальным барьером (или ямой): $U = U_0$ при $r < R$ и $U = 0$ при $r > R$.

13.52. Найти полное сечение рассеяния частиц в потенциале $U(r) = \alpha/r^\nu$ с $\nu > 2$ и $\alpha > 0$ при энергии $E \rightarrow \infty$. Сравнить с 13.2.

13.53. Рассмотреть «потенциал» вида $U = g(E)e^{-r/R}$, экспоненциально спадающий на больших расстояниях и с константой связи¹⁸⁾, возрастающей степенным образом с увеличением энергии: $g(E) = g_0(E/E_0)^n$. Показать справедливость следующего ограничения: $\sigma(E) \leq \sigma_0 \ln^2(E/E_0)$ на возможный рост сечения рассеяния при $E \rightarrow \infty$.

¹⁸⁾ Отметим, что спин-орбитальное взаимодействие, $\hat{U} = \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{l}} f(r)$, эффективно растет, $\propto \sqrt{E}$, с увеличением E , сравнить с 13.59. Обсуждаемое ограничение на рост сечения в теории сильных взаимодействий элементарных частиц известно как *теорема Фруассара*.

13.54. В приближении эйконала найти амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния частиц в кулоновском потенциале $U = \alpha/r$ в противоположном борновскому предельном случае $|\alpha|/\hbar v \gg 1$, сравнить с 13.1.

Указание. При вычислении амплитуды считать кулоновский потенциал «обрезанным» на некотором большом, но конечном, расстоянии R (т. е. положить $U = 0$ для $r > R$).

13.55. Выразить в приближении эйконала амплитуду рассеяния частиц в поле двух силовых центров, находящихся на расстоянии a друг от друга, т. е. в потенциале $U(\mathbf{r}) = U_0(|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|) + U_0(|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|)$, через амплитуду f_0 рассеяния на одном центре $U_0(r)$. Какова связь полного сечения рассеяния с одноцентровым σ_0 ?

Применить полученный результат к вычислению полного сечения рассеяния на слабо связанной системе из двух центров (подобной дейтрону), когда ее характерный размер много больше радиуса взаимодействия налетающей частицы с отдельным центром.

13.56. Обобщить приближение эйконала на случай обменного взаимодействия, когда $\hat{U}_{\text{обм}}\Psi(\mathbf{r}) \equiv \equiv U(r)\Psi(-\mathbf{r})$. Какова связь дифференциальных и полных сечений рассеяния для обменного и обычного потенциалов? Сравнить с рассеянием в борновском приближении, рассмотренным в 13.3.

13.57. В случае рассеяния быстрых частиц, $kR \gg 1$, идеально отражающей (непроницаемой) сферой радиуса R найти амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния под малыми углами, когда $kR\theta \leq 1$, а также полное сечение столкновения. Воспользоваться квазиклассическим выражением (XIII.13) для фазового сдвига.

13.58. То же, что и в предыдущей задаче, но в случае не очень малых углов рассеяния $\theta \gg (kR)^{-1/3}$. Сравнить с результатом классической механики.

§ 5. Рассеяние частиц со спином

13.59. Оператор взаимодействия частицы со спином $s = 1/2$ с внешним полем имеет вид¹⁹⁾

$$\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{\sigma}\hat{1}.$$

¹⁹⁾ Классический аналог спин-орбитального взаимодействия $U(r)\hat{\sigma}\hat{1}$ рассмотрен в 13.60. Если для частицы со спином $s =$

Рассмотреть рассеяние в борновском приближении. Какова энергетическая зависимость полного сечения рассеяния для быстрых частиц? Сравнить с рассеянием бесспиновых частиц.

Найти зависящую от спина часть амплитуды рассеяния электрона в кулоновском поле ядра, $U_0 = -Ze^2/r$, учитывая, что спин-орбитальное взаимодействие для него описывается выражением $U_1 = (\hbar^2/4m^2c^2r)\partial U_0/\partial r$.

13.60. Найти в борновском приближении амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния быстрых нейтронов кулоновским полем.

Указание. Сначала установить вид взаимодействия движущегося магнитного диполя с электрическим полем в классической электродинамике, перейдя в систему покоя диполя.

13.61. Какие ограничения накладывает условие эрмитовости гамильтониана на взаимодействие $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{1}\hat{\sigma}$ частицы со спином $s = 1/2$ с внешним полем?

Какова в первом борновском приближении поляризация рассеянных частиц, если первоначально они были не поляризованы? Показать также, что если до столкновения частицы были поляризованы, то в результате рассеяния происходит лишь поворот вектора поляризации.

13.62. Найти поляризацию, возникающую при рассеянии быстрых (так что $Ze^2/\hbar v \ll 1$) неполяризованных электронов в кулоновском поле ядра. Какова поляризация при рассеянии позитронов?

Указание. Спин-орбитальное взаимодействие указано в 13.59. При вычислении амплитуды второго приближения теории возмущений рассмотреть сначала экранированный кулоновский потенциал $U_0(r) = -\frac{Ze^2}{r}e^{-r/R}$ и в окончательном результате перейти к пределу $R \rightarrow \infty$ (сравнить с 13.54).

$= 1/2$ записать магнитный момент в виде $\mu_0 = e\hbar/2mc + \mu'$, где e , m — заряд и масса частицы, а μ' — ее аномальный магнитный момент, то правильное квантовомеханическое обобщение классического результата из 13.60 получается при подстановке вместо μ оператора вида $\mu'_0\hat{\sigma}$ с $\mu'_0 = e\hbar/4mc + \mu'$; см. 15.32, а также [29].

13.63. Взаимодействие частицы со спином $s = 1/2$ с внешним полем имеет вид $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r) \hat{1}\hat{\sigma}$.

Найти фазовые сдвиги δ_l^\pm :

а) в борновском приближении,

б) в квазиклассическом приближении.

Получить также выражение для амплитуды рассеяния в приближении эйконала, исходя из разложений (XIII.25) по парциальным волнам.

13.64. Для столкновения частицы со спином $s = 1/2$ с бесспиновой частицей найти связь между амплитудами рассеяния в спиральном представлении (см. 5.20) и *инвариантными функциями* A и B в (XIII.22).

13.65. При столкновении двух бесспиновых частиц происходит реакция с образованием также двух частиц, одна из которых имеет спин $s = 1$, а другая — спин $s = 0$. Внутренние четности всех частиц — положительные.

Используя для описания спиновых состояний частицы с $s = 1$ векторное представление (см. 5.26), показать, что спиновая структура амплитуды рассматриваемой реакции описывается выражением

$$\langle f | \hat{f} | i \rangle = \mathbf{a}^* [\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1] \mathbf{f}(E, \theta),$$

где \mathbf{a} — спиновая функция, \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_1 — импульсы относительного движения до и после столкновения.

Выполнить разложение $f(E, \theta)$ по парциальным волнам.

Указать также спиновую структуру амплитуды в случае, когда частица со спином $s = 1$ имеет отрицательную внутреннюю четность.

13.66. Бесспиновая частица рассеивается на системе одинаковых, распределенных в пространстве центров со спином $s = 1/2$. Взаимодействие с отдельным центром описывается выражением $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r) \hat{1}\hat{\sigma}$. Исследовать в борновском приближении амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния в случае неполяризованных центров ($\mathbf{P}_n = 0$). Сравнить с рассеянием на системе бесспиновых центров.

13.67. Каково обобщение оптической теоремы на случай столкновения частиц с отличными от нуля спинами?

§ 6. Аналитические свойства и унитарность амплитуды рассеяния

13.68. Обсудить аналитические свойства и дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния на потенциале нулевого радиуса, см. 13.20. Рассмотреть случаи как существования, так и отсутствия связанного состояния в таком потенциале. Сравнить с (XIII.27).

13.69. Воспользовавшись дисперсионным соотношением, показать, что для энергетической зависимости сечения рассеяния частицы в потенциале отталкивания, $U(r) \geq 0$, существует следующее ограничение:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{\sqrt{E}} dE < 4\pi^2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{\infty} r^2 U(r) dr.$$

13.70. Показать справедливость соотношения

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{\sqrt{E}} dE < \pi \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m}} \sigma(0)$$

для рассеяния в потенциале притяжения, $U(r) \leq 0$, в котором, однако, не существует связанных состояний частицы (яма недостаточно глубокая); здесь $\sigma(0) = 4\pi a_0^2$ — сечение рассеяния при $E = 0$. В каком случае обе части неравенства близки друг к другу?

13.71. Используя только условие унитарности и дисперсионное соотношение (при $q^2 \neq 0$), можно, в принципе, по известному выражению для амплитуды рассеяния в борновском приближении восстановить²⁰⁾ ее в виде ряда по степеням потенциала (кратности) взаимодействия.

Показать на примере амплитуды второго приближения при $q^2 = 0$, что такой расчет ее воспроизводит результат теории возмущений по потенциалу, основанный непосредственно на уравнении Шрёдингера (см. 13.10).

13.72. Считая, что для парциальных волн с $l \geq \geq L_0 \equiv kR \gg 1$ взаимодействие пренебрежимо мало,

²⁰⁾ Подчеркнем, что уравнение Шрёдингера при таком подходе не используется!

получить ограничения сверху на величину амплитуды рассеяния бесспиновых частиц при высоких энергиях для различных углов рассеяния²¹⁾.

Указание. Для углов рассеяния, не очень близких к 0 или π , воспользоваться квазиклассическим выражением для полиномов Лежандра, см. [1, § 49].

13.73. В условиях предыдущей задачи получить ограничение снизу на величину сечения упругого рассеяния σ_{el} быстрых частиц при заданном значении σ_{tot} полного сечения столкновения.

13.74. Найти при больших энергиях ограничение сверху на величину вещественной части амплитуды упругого рассеяния вперед, $\theta = 0$, считая известным полное сечение столкновения и предполагая, что взаимодействие частиц на расстояниях, превышающих R , пренебрежимо мало. Каково ограничение на $|f(E, \theta = 0)|$?

13.75. Показать, что при высоких энергиях имеют место следующие ограничения на производную по θ мнимой части амплитуды упругого рассеяния при $\theta = 0$:

$$\frac{\sigma_{tot}}{32\pi} \leq - \frac{d}{dq^2} \ln \operatorname{Im} f(E, q) |_{q=0} \leq \frac{R^2}{4},$$

$$q = 2k \sin(\theta/2),$$

где σ_{tot} — полное сечение столкновения, а R — радиус взаимодействия (на расстояниях, превышающих R , оно пренебрежимо мало).

Проверить выполнение приведенных ограничений для амплитуды дифракционного рассеяния из 13.57 и 13.90.

13.76. Показать, что амплитуда рассеяния в эikonальном приближении удовлетворяет условию унитарности.

²¹⁾ В задачах 13.72—13.75 рассмотрен ряд простых общих ограничений на свойства амплитуд и сечений взаимодействия частиц при больших энергиях, связанных, в основном, с возможностью пренебрежения взаимодействием на расстояниях, превышающих его радиус R . Такая ситуация характерна для физики элементарных частиц. При этом эффективный радиус взаимодействия растет с энергией, но не быстрее, чем $\propto \ln(E/E_0)$, см. 13.53. Необходимость использования релятивистской кинематики фактически не отражается на полученных результатах.

§ 7. Рассеяние составных частиц. Неупругие столкновения

13.77. Показать, что амплитуда упругого рассеяния электрона на атоме — составной системе — в борновском приближении в пренебрежении обменными эффектами²²⁾ совпадает с амплитудой рассеяния электрона статическим локальным потенциалом $U(r)$, и выяснить его физический смысл. Сравнить с 13.4—6.

13.78. Поляризованный электрон с $s_z = +1/2$ сталкивается с атомом водорода, находящимся в основном состоянии, электрон в котором имеет противоположное значение, $s_z = -1/2$, проекции спина. Найти в первом борновском приближении амплитуду и сечение столкновения с «переворотом» спина (т. е. в случае, когда $s_z = -1/2$ уже у рассеянного электрона, а $s_z = +1/2$ у атомного), атом остается в основном состоянии. Сравнить со случаем упругого рассеяния (без изменения спинового состояния электронов), см. 13.77.

Указание. Иметь в виду, что рассматриваемый процесс относится к числу процессов с «перераспределением» частиц, см. [25], гл. 18.

13.79. Оценить сечение перезарядки при столкновении быстрого позитрона с атомом водорода, находящимся в основном состоянии (т. е. найти сечение образования *позитрония* — водородоподобной системы из электрона и позитрона).

Указание. Воспользоваться *приближением Оппенгеймера — Бринкмана — Крамерса* (ОБК) для процессов перезарядки, основанным на пренебрежении взаимодействием ядер друг с другом (в данном случае — позитрона с протоном); сравнить с предыдущей задачей.

13.80. Выразить в борновском приближении амплитуду процесса $A_i + B_i \rightarrow A_f + B_f$ столкновения быстрых составных частиц A и B , взаимодействующих

²²⁾ В условиях применимости борновского приближения (для быстрых частиц) пренебрежение обменными эффектами оправдано; при этом существенно, что спинное состояние свободного электрона, как и атомного, в процессе столкновения не изменяется; сравнить с 13.78.

электростатическим образом, через *электрические формфакторы* ²³⁾)

$$eF_{if}^{A(B)}(\mathbf{q}) = \langle \Psi_{A(B)f} | \sum_a e_a \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a) | \Psi_{A(B)i} \rangle$$

для соответствующих переходов $i \rightarrow f$.

Обсудить поведение формфактора при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ в зависимости от квантовых чисел начального и конечного состояний.

Рассчитать для атома водорода формфакторы переходов $1s \rightarrow 1s$, $1s \rightarrow 2s$, $1s \rightarrow 2p$; обратить внимание на их поведение при $q \rightarrow \infty$.

Найти сечения столкновений для следующих процессов:

1) $\text{H}(1s) + \text{H}(1s) \rightarrow \text{H}(1s) + \text{H}(1s)$ — упругое рассеяние атомов водорода друг другом;

2) столкновения заряженной бесструктурной частицы (электрона, мюона, протона и т. д., но не иона!) с атомом водорода, находящимся в основном состоянии, сопровождающегося возбуждением а) $2s$ -, б) $2p$ -состояний атома.

13.81. Рассмотреть столкновение быстрой заряженной частицы с двухатомной молекулой, имеющей собственный дипольный момент d_0 и находящейся в основном состоянии; электронный терм молекулы $^1\Sigma$. Оценить сечения столкновений, сопровождающихся возбуждением различных вращательных и колебательных уровней молекулы; сравнить со случаем столкновений с атомом, см. предыдущую задачу.

13.82. Найти сечение столкновения быстрой заряженной частицы с атомом водорода, находящимся в метастабильном $2s$ -состоянии, сопровождающегося переходом атома в $2p$ -состояния.

Указание. В данной задаче необходимо учитывать релятивистское расщепление s - и p -уровней, см. 11.62.

13.83. Найти с *логарифмической точностью* сечение расщепления быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра с зарядом Ze (ядро, для простоты, считать точечным и бесконечно тяжелым). Волновую

²³⁾ Подчеркнем, что \mathbf{r}_a является радиусом-вектором a -й заряженной частицы в составной системе $A(B)$ относительно центра масс этой системы.

Обычный *атомный формфактор*, см. [1], § 139, соответствует случаю, когда атом до и после столкновения находится в основном состоянии, при этом $F_{00}(\mathbf{q}) = Z - F_{\text{ат}}(\mathbf{q})$.

функцию дейтрона, учитывая малость энергии связи протона и нейтрона, выбрать как в случае потенциала нулевого радиуса, см. 12.1.

13.84. Найти асимптотику при $q \rightarrow \infty$ электрического формфактора двухчастичной системы. Предполагается, что фурье-компонента $\tilde{U}(q)$ потенциала взаимодействия, ответственного за образование составной системы, при $q \rightarrow \infty$ имеет степенное убывание: $\tilde{U}(q) \propto q^{-n}$ с $n > 1$; сравнить с 4.18. Рассмотреть приложения полученных результатов к атому водорода.

13.85. Найти дифференциальное и полное сечения кулоновского возбуждения атомного ядра, находящегося первоначально в состоянии с моментом $J = 0$, быстрой легкой заряженной частицей²⁴⁾ при а) дипольном ($E1$ —) и б) монополюм ($E0$ —) переходе ядра.

13.86. Найти соотношения между амплитудами и дифференциальными сечениями упругого рассеяния нейтрона на протоне и нейтрона на атоме водорода, находящемся в основном состоянии. Взаимодействием магнитного момента нейтрона с электроном пренебречь. Указать условия применимости полученного результата.

13.87. Найти сечение рассеяния тяжелых заряженных частиц (например, протонов или ионов) нейтральными атомами, имеющими момент, равный нулю. Скорость рассеиваемых частиц предполагается много меньше скоростей атомных электронов, но в то же время $V \gg \hbar/Ma_B$, M — масса частицы. Воспользоваться квазиклассическим выражением для сечения рассеяния, см. 13.51.

13.88. Найти сечение *перезарядки*²⁵⁾ при столкновении медленного, $v \ll v_{ат}$, отрицательного иона A^- с собственным атомом A . Считать атом и ион находящимися в S -состояниях, а валентный электрон иона рассматривать как слабо связанный, см. 11.28. Относительное движение атома и иона рассматривать

²⁴⁾ Частицей (электрон, мюон), *комптоновская* длина волны которой \hbar/mc превосходит размер ядра; заряд частицы $\pm e$.

²⁵⁾ Сравнить с перезарядкой при столкновении медленного протона с атомом водорода, см. [14, с. 99], а также монографию [19], в которой изложена теория резонансных процессов при медленных столкновениях атомных частиц.

квазиклассически в приближении прямолинейных траекторий.

13.89. Для столкновения одинаковых атомов, один из которых находится в основном состоянии, а другой — в возбужденном состоянии (связаны дипольным переходом), оценить сечение взаимодействия и, в частности, сечение *передачи возбуждения*. Считать орбитальные моменты атомов равными 0 и 1. Скорость относительного движения атомов предполагается малой по сравнению с характерной атомной скоростью, а энергия, наоборот, много большей атомной; сравнить с предыдущей задачей.

Указание. По поводу взаимодействия атомов на далеких расстояниях см. 11.55.

13.90. Найти полное сечение σ_{tot} , сечения упругого σ_{el} и неупругого σ_{inel} рассеяния быстрых частиц, $kR \gg 1$, поглощающей («черной») сферой радиуса R . Найти также дифференциальное сечение упругого рассеяния. Сравнить с 13.57 и 13.58.

Указание. Воспользоваться квазиклассическими представлениями о движении частиц. Считать, что все частицы, достигающие поверхности сферы, поглощаются ею.

13.91. Как известно, в результате взаимодействия электрона с позитроном может произойти их *аннигиляция*, т. е. превращение пары в фотоны. Вследствие этого уровни *позитрония* приобретают ширину, связанную с конечным временем жизни состояний, см. 11.61.

Найти соотношение между шириной уровней Γ_{ns} для s -состояний позитрония и сечением аннигиляции пары $\sigma_{\text{ан}}(v)$.

Указание. Учитывая малость радиуса аннигиляционного взаимодействия, $R_{\text{ан}} \sim \hbar/m_e c \ll a_B$, воспользоваться формулами теории возмущений по длине рассеяния²⁶⁾ для сдвига уровней и для фазового сдвига, см. 13.36 и 13.37.

13.92. С помощью *принципа детального равновесия* связать сечения *радиационного захвата* нейтрона протоном, $n + p \rightarrow d + \gamma$, и *фоторасщепления* дейтрона, $d + \gamma \rightarrow n + p$.

²⁶⁾ Полученные результаты непосредственно обобщаются на случай уширения вследствие сильного взаимодействия кулоновских уровней адронных атомов, см. 11.4.

Указание. Соотношение между сечениями взаимно обратных двухчастичных процессов, выражающее принцип детального равновесия (см. [1], § 144), справедливо и в релятивистской области. Заметим, что хотя спин фотона равен 1, у него имеется лишь два независимых поляризационных состояния (что является отражением *поперечности* электромагнитных волн).

13.93. Найти соотношение между сечениями *фотоэффекта* из основного состояния атома водорода и *радиационной рекомбинации* электрона с протоном (процесс, обратный фотоэффекту) в основное состояние атома водорода.

Г л а в а 14

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Последовательная теория процессов излучения и поглощения фотонов связана с использованием представления чисел заполнения для фотонной подсистемы. При этом *полю излучения* (т. е. *свободному* электромагнитному полю) сопоставляется оператор векторного потенциала ¹⁾

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (\text{XIV.1})$$

Здесь $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+$ — операторы уничтожения и рождения фотона с волновым вектором \mathbf{k} , частотой $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ и поляризацией σ ; $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$ — единичный ($|\mathbf{e}|^2 = 1$) вектор поляризации фотона, удовлетворяющий *условию поперечности* $\mathbf{k}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} = 0$. Состояние поля излучения описывается волновой функцией $\Phi(n_{\mathbf{k}\sigma}, t)$, где $n_{\mathbf{k}\sigma}$ — числа заполнения фотонных состояний.

Оператор Гамильтона свободного поля излучения $\hat{H}_{\text{rad}}^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, а взаимодействие нерелятивист-

¹⁾ Сравнить с $\hat{\Psi}$ — операторами из гл. 10. Для описания поля использована *кулоновская калибровка*: $\text{div } \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}} = 0$, $\hat{\Phi}_{\text{rad}} \equiv 0$; оператор $\hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r})$ задан в шрёдингеровском представлении. Объем V , в который считается заключенной система, при $V \rightarrow \infty$ не входит в физически наблюдаемые величины.

ской частицы с этим полем имеет вид²⁾ (в кулоновской калибровке $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{p}}$):

$$\hat{V}_{\text{int}} = -\frac{e_a}{mc} \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} + \frac{e_a^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}^2(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{s} \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathcal{H}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}), \quad (\text{XIV. 2})$$

где e_a , m , s , μ — заряд, масса, спин и магнитный момент частицы, $\hat{\mathcal{H}}_{\text{rad}} = \text{rot } \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(\mathbf{r})$.

Взаимодействие частицы (системы частиц) с полем излучения характеризуется малым параметром $\alpha \equiv e^2/\hbar c \approx 1/137$ (для $e_a \sim e$). Поэтому обычно существенны лишь переходы, сопровождающиеся излучением или поглощением минимально возможного числа фотонов. При этом вероятности процессов можно рассчитывать по теории возмущений. В частности, для вероятности перехода (в единицу времени) между состояниями дискретного спектра системы частиц с излучением одного фотона имеем

$$d\omega_{\text{но}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V}_{\text{int}} | i \rangle|^2 d\rho_f. \quad (\text{XIV. 3})$$

Здесь волновые функции (векторы состояний) начального и конечного состояний системы «частицы + фотоны» имеют вид

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \Psi_i(\xi) |0\rangle_{\gamma}, & E_i &= \varepsilon_i, \\ |f\rangle &= \Psi_f(\xi) |1_{k\sigma}, 0, \dots\rangle_{\gamma}, & E_f &= \varepsilon_f + \hbar\omega_k, \end{aligned}$$

ξ — совокупность независимых координат частиц, $\Psi_{i,f}(\xi)$ и $\varepsilon_{i,f}$ — волновые функции и энергии соответствующих состояний системы частиц, $|0\rangle_{\gamma}$ и $|1_{k\sigma}, 0, \dots\rangle_{\gamma}$ — векторы состояний фотонной подсистемы, соответствующие вакуумному и однофотонному состояниям. Матричный элемент в (XIV.3) с учетом (XIV.1), (XIV.2) (и свойств операторов \hat{a} , \hat{a}^+)

²⁾ Описываемое классически (неквантованное) внешнее поле, как и кулоновское взаимодействие частиц, обычным образом включено в гамильтониан частиц. Заметим, что если система частиц находится во внешнем магнитном поле, так что $\mathbf{A} \neq 0$, то в (XIV.2) следует заменить $\hat{\mathbf{p}}$ на $\hat{\mathbf{p}} - (e_a/c) \mathbf{A}$.

принимает вид

$$\langle f | \hat{V}_{\text{int}} | i \rangle = - \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \langle \Psi_f | \sum_a \left\{ \frac{e_a}{m_a c} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \hat{\mathbf{p}}_a + \right. \\ \left. + i(\mu_a/s_a) [\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \mathbf{k}] \hat{\mathbf{s}}_a \right\} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} | \Psi_i \rangle. \quad (\text{XIV. 4})$$

В дипольном приближении здесь можно заменить $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ на 1, пренебречь слагаемыми с магнитными моментами частиц и преобразовать³⁾ матричный элемент возмущения к виду

$$\langle f | \hat{V}_{\text{int}} | i \rangle = i \sqrt{2\pi\hbar\omega/V} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \mathbf{d}_{fi}, \quad (\text{XIV. 5})$$

где $\mathbf{d}_{fi} = \langle \Psi_f | \sum_a e_a \mathbf{r}_a | \Psi_i \rangle$ — матричный элемент дипольного момента системы частиц. Так как для каждой из двух независимых поляризаций фотона плотность конечных состояний

$$d\rho_f = \int \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f - \hbar\omega) \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{V\omega^2}{(2\pi)^3 \hbar c^3} d\Omega_n, \quad (\text{XIV. 6})$$

где $\hbar\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f$, $d\Omega_n$ — элемент телесного угла в направлении излучения фотона, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, то выражение (XIV. 3) принимает вид

$$d\omega_{\text{по}} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \mathbf{d}_{fi}|^2 d\Omega_n. \quad (\text{XIV. 7})$$

Суммирование по поляризациям фотона, выполняемое с помощью формулы⁴⁾

$$\sum_{\sigma=1,2} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^*)_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma})_k = \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}, \quad (\text{XIV. 8})$$

³⁾ Воспользовавшись при этом соотношением

$$\langle \Psi_f | \hat{\mathbf{p}}_a / m_a | \Psi_i \rangle = -i\omega \langle \Psi_f | \mathbf{r}_a | \Psi_i \rangle, \quad \hbar\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f.$$

Оно справедливо и для системы, находящейся в магнитном поле, когда $\hat{\mathbf{p}}_a$ следует заменить на $\hat{\mathbf{p}}_a - e_a \mathbf{A}(\mathbf{r}_a)/c$.

⁴⁾ При этом

$$\sum_{\sigma} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \mathbf{a}) (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \mathbf{b} - (\mathbf{n} \mathbf{a}) (\mathbf{n} \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{b} \mathbf{n}].$$

дает угловое распределение излучаемого фотона:

$$d\omega_n = \sum_{\sigma} d\omega_{n\sigma} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{n}\mathbf{d}_{fi}|^2 d\Omega_n, \quad (\text{XIV. 9})$$

а последующее интегрирование по направлениям вылета его определяет вероятность излучения фотона для соответствующего перехода $i \rightarrow f$ в системе частиц в дипольном приближении

$$\omega \equiv \omega_{E1} = \int d\omega_n = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\mathbf{d}_{fi}|^2. \quad (\text{XIV. 10})$$

Заметим, что взаимодействие (XIV.2), имеющее в дипольном приближении вид

$$\hat{V}_{\text{int}} \approx - \frac{e}{mc} \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(0) \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}^2(0), \quad (\text{XIV. 11})$$

эквивалентно выбору более простого по форме взаимодействия⁵⁾

$$\hat{V}'_{\text{int}} = - \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathcal{E}}_{\text{rad}}(0), \quad (\text{XIV. 12})$$

где $\hat{\mathbf{d}} = e\mathbf{r}$ — дипольный момент частицы, а

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_{\text{rad}}(0) &= -\frac{1}{c} \dot{\hat{\mathbf{A}}}_{\text{rad}}(0) = \frac{i}{c\hbar} [\hat{H}_{\text{rad}}^{(0)}, \hat{\mathbf{A}}_{\text{rad}}(0)] = \\ &= i \sum_{\mathbf{k}\sigma} \sqrt{2\pi\hbar\omega_k/V} \{ \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}^* \}. \end{aligned} \quad (\text{XIV. 13})$$

Из (XIV.12) непосредственно следует выражение (XIV.5) для матричного элемента возмущения, определяющего излучение фотона в дипольном приближении.

В задачах данной главы для волновых функций свободных частиц⁶⁾ $\Psi_{\mathbf{p}} = V^{-1/2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}$ используется нормировка на 1 в объеме V . При этом связь вероятности $d\omega$ какого-либо перехода (в единицу времени)

⁵⁾ Такое изменение вида взаимодействия возникает в результате выполнения определенного унитарного преобразования. Подчеркнем, что (XIV.12) эквивалентно именно полному выражению (XIV.11) (а не только линейной по операторам \hat{a} , \hat{a}^+ его правой части!).

⁶⁾ При этом возможные значения импульса, образующие дискретный набор, определяются условием ортогональности волновых функций, $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$; число независимых состояний в элементе объема d^3p составляет $V d^3p / (2\pi\hbar)^3$.

с участием такой частицы с дифференциальным сечением соответствующего процесса определяется соотношением

$$d\sigma = dw/j = V dw/v, \quad (\text{XIV. 14})$$

где $j = \rho v$ — плотность потока, $\rho = 1/V$ — объемная плотность частиц, v — относительная скорость сталкивающихся частиц; для столкновений фотонов с частицей (атомом) $v = c$.

§ 1. Излучение фотонов

14.1. Найти *время жизни* и *ширину* возбужденного $2p$ -состояния атома водорода.

Применить полученный результат к μ -мезоатому и сравнить со временем жизни свободного мюона $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с.

14.2. Найти время жизни первого возбужденного уровня заряженного сферического осциллятора.

14.3. Найти вероятность электромагнитного перехода (в единицу времени⁷⁾) для сферического ротатора, находящегося на первом возбужденном уровне; ротатор имеет момент инерции I и дипольный момент d , направленный вдоль его оси.

14.4. Найти вероятность электромагнитного перехода между вращательными уровнями двухатомной молекулы (без изменения электронного и колебательного состояний), имеющей дипольный момент d_0 . Электронный терм молекулы $^1\Sigma$. Ограничиться случаем первого возбужденного ротационного уровня.

Произвести оценку вероятности перехода и сравнить ее с вероятностью дипольного перехода для атомов.

14.5. Показать, что дипольные переходы между
а) уровнями атома с различной мультиплетностью (например, между состояниями орто- и паракелия),
б) компонентами тонкой структуры одного и того же терма атома (т. е. между различными подуровнями одного и того же мультиплета с данными значениями L и S) *запрещены*.

14.6. Для $2s_{1/2}$ -состояния атома водорода найти вероятность электромагнитного перехода в $2p_{1/2}$ -состояние. Полученный результат сравнить с вероят-

⁷⁾ В ряде последующих задач эта оговорка для краткости опускается.

ностью перехода $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ с излучением двух фотонов $\omega_{2\gamma} \approx 8 \text{ с}^{-1}$ и с результатом 14.8. Напомним, что разность энергий $2s_{1/2}$ - и $2p_{1/2}$ -уровней (так называемый *лэмбовский сдвиг*) составляет $\Delta E_{LS} \approx \approx 1058 \text{ МГц} \approx 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}$.

14.7. Свободная нейтральная частица со спином $s = 1/2$, имеющая магнитный момент μ (так что $\hat{\mu} = \mu \hat{\sigma}$), находится в однородном магнитном поле \mathcal{H}_0 в состоянии с определенным значением проекции спина на направление поля. Найти вероятность излучения фотона в единицу времени в результате *переворота* спина.

14.8. Оценить вероятность однофотонного перехода атома водорода из возбужденного $2s_{1/2}$ -состояния в основное $1s_{1/2}$ -состояние. Сравнить полученное значение с результатом 14.6. Какова мультипольность перехода?

14.9. Найти вероятность электромагнитного перехода между компонентами сверхтонкой структуры основного состояния атома водорода⁸⁾ (см. 11.2).

14.10. Какова мультипольность излучения для доминирующих электромагнитных переходов между компонентами тонкой структуры одного и того же терма атома? Оценить численное значение вероятности соответствующих переходов в единицу времени.

14.11. Для частицы в поле $U(\mathbf{r})$ доказать справедливость следующих соотношений (так называемых «*правил сумм*», сравнить с 6.13):

$$a) \sum_m |\langle m | x | n \rangle|^2 = \langle n | x^2 | n \rangle;$$

$$б) \sum_m \omega_{mn} |\langle m | x | n \rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\mu};$$

$$в) \sum_m \omega_{mn}^2 |\langle m | x | n \rangle|^2 = \frac{1}{\mu^2} \langle n | \hat{p}_x^2 | n \rangle;$$

$$г) \sum_m \omega_{mn}^3 |\langle m | x | n \rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\mu^2} \langle n | \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} | n \rangle.$$

⁸⁾ Отметим, что излучение, связанное с рассматриваемым переходом (относящееся к радиодиапазону, длина волны 21 см), играет важную роль в астрофизических исследованиях; так, по *красному смещению* спектральной линии определяют расстояния до (удаляющихся) галактик.

Здесь μ — масса частицы, суммирование проводится по всем стационарным состояниям частицы, $|n\rangle$ — стационарное состояние дискретного спектра, $\langle n|n\rangle = 1$.

§ 2. Рассеяние фотонов.

Излучение фотонов при столкновениях

14.12. Найти дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния фотонов свободной заряженной частицей. Сравнить с результатом классической электродинамики.

14.13. Найти дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния фотонов сферическим ротатором, имеющим момент инерции I и электрический дипольный момент \mathbf{d} (направленный вдоль оси ротатора) и находящимся в основном состоянии, см. также следующую задачу.

14.14. В условиях предыдущей задачи найти дифференциальное и полное сечения неупругого рассеяния фотона ротатором. Какие состояния ротатора при этом возбуждаются?

14.15. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния фотонов заряженным сферическим осциллятором, находящимся в основном состоянии.

14.16. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния фотонов нейтральной частицей со спином $s = 1/2$, имеющей магнитный момент μ . Рассмотреть следующие случаи:

1) до рассеяния частица находится в состоянии с определенным значением проекции спина $s_z = +1/2$ на ось z и в процессе рассеяния спиновое состояние частицы не изменяется (ось z направлена вдоль импульса падающих фотонов);

2) в процессе столкновения происходит *переворот* спина, т. е. в конечном состоянии уже $s_z = -1/2$;

3) спиновое состояние частицы после столкновения не детектируется.

Обобщить полученные результаты на случай частицы с произвольным значением спина.

14.17. Выразить сечение рассеяния фотона малой частоты, $\hbar\omega \rightarrow 0$, атомом, находящимся в стационарном состоянии с равным нулю моментом, через поляризуемость β_0 атома (определяющую сдвиг уровня, $\Delta E = -\beta_0 \mathcal{E}^2/2$, в однородном электрическом поле).

14.18. Найти сечение *фотоэффекта* для водородоподобного атома, находящегося в основном состоянии. Предполагается, что частота фотона удовлетворяет условию $\hbar\omega \gg I$, где I — потенциал ионизации атома.

14.19. Найти сечение *радиационной рекомбинации* быстрого электрона с покоящимся протоном (процесс, обратный фотоэффекту) с образованием атома водорода в основном состоянии.

14.20. Найти дифференциальное и полное сечения фоторасщепления дейтрона, т. е. процесса $\gamma + d \rightarrow p + n$.

Указание. Волновую функцию дейтрона взять в приближении потенциала нулевого радиуса, а в конечном состоянии протон и нейтрон рассматривать как свободные.

14.21. Найти дифференциальное сечение *тормозного излучения* электрона в кулоновском поле ядра. Исследовать угловое и спектральное распределения излучаемых фотонов. Взаимодействие электрона с ядром рассматривать как возмущение.

Глава 15

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Характерная особенность физических явлений в релятивистской области состоит в возможности взаимного превращения (рождения и аннигиляции) частиц при их взаимодействии. Поэтому постановка задачи о свойствах состояний одночастичной системы во внешнем поле имеет ограниченную область применимости, а обычная квантовомеханическая интерпретация волновой функции частицы в координатном представлении как амплитуды вероятности оказывается несостоятельной¹⁾. Для обеспечения релятивистской инвариантности теории описание одночастичных состояний связано с использованием волновых функций, обладающих определенными *трансформацион-*

¹⁾ Действительно, из соотношения неопределенности $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$ следует, что локализация частицы в малой области пространства, $\Delta x \lesssim \hbar/mc$, сопровождается передачей большой энергии частице (требует сильных внешних полей). При этом становятся возможными процессы рождения новых частиц и одночастичная задача теряет смысл.

ными свойствами относительно преобразования Лоренца. Эти свойства, как и вид соответствующего волнового уравнения, зависят от значения спина частицы.

В случае бесспиновой частицы волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — однокомпонентная величина — является *четырёхмерным скаляром*²⁾. Релятивистское волновое уравнение для такой свободной частицы, *уравнение Клейна — Гордона*, имеет вид

$$(\hat{p}_i^2 + m^2 c^2) \Psi = 0, \quad \text{или} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Psi. \quad (\text{XV. 1})$$

Волновое уравнение для заряженной бесспиновой частицы, находящейся во внешнем электромагнитном поле, описываемом потенциалами \mathbf{A} , φ , получается из (XV. 1) заменами $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}/c$, $i\hbar(\partial/\partial t) \rightarrow i\hbar(\partial/\partial t) - e\varphi$ и имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 \Psi = \left[\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right] \Psi. \quad (\text{XV. 2})$$

Из этих уравнений следует уравнение непрерывности

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \frac{2ie}{\hbar} \varphi \Psi^* \Psi \right), \quad (\text{XV. 3})$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* - \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A} \Psi^* \Psi \right)$$

и сохранение во времени величины $Q = \int \rho(\mathbf{r}, t) dV$.

Хотя эти соотношения внешне подобны существующим в нерелятивистской квантовой механике (и играющим важную роль в интерпретации теории), существенное отличие состоит в том, что теперь ρ не является положительно определенной величиной и не может рассматриваться как плотность вероятности. Однако в связи с отмеченным выше ограничением на область локализации одночастичного состояния возможность введения плотности вероятности

²⁾ При этом по отношению к преобразованиям лишь пространственных координат, включающим и отражение, волновые функции могут быть как *скалярными*, так и *псевдоскалярными*. Эти две возможности отвечают частицам с различными внутренними четностями, см. 15.5.

координат $\rho \geq 0$ не является необходимым элементом релятивистской квантовой теории. Некоторые вопросы, связанные с интерпретацией решений уравнения Клейна — Гордона и свойства состояний бесспиновой частицы во внешних полях, рассмотрены в задачах § 1 данной главы.

Для свободной частицы со спином $s = 1/2$ релятивистское волновое уравнение, *уравнение Дирака*, имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi = (c\hat{\alpha} \hat{\mathbf{p}} + mc^2 \beta) \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{XV. 4})$$

При этом волновая функция Ψ частицы является четырехкомпонентной величиной³⁾ — *биспинором*; матрицы Дирака

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (\text{XV. 5})$$

$$\gamma = -i\beta\alpha = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ , 1 , 0 означают двухрядные матрицы Паули, единичную и нулевую (символ оператора над матрицами опущен).

Для электрона во внешнем электромагнитном поле с потенциалами \mathbf{A} , $\varphi \equiv A_0$ уравнение Дирака получается из (XV. 4) с помощью указанных выше замен (заряд электрона обозначен как $-e < 0$):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(c\hat{\alpha} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc^2 \beta - eA_0 \right) \Psi. \quad (\text{XV. 6})$$

Отсюда следует наличие у электрона спинового магнитного момента, причем для него гиромагнитное

³⁾ Удвоение, по сравнению с нерелятивистским случаем, числа компонент в. ф. отражает то общее обстоятельство, что интерпретация решений релятивистских волновых уравнений приводит к концепции *античастицы*. В случае бесспиновых частиц появление «дополнительных» решений, соответствующих античастице, связано с тем, что уравнение Клейна — Гордона, в отличие от уравнения Дирака, содержит вторые производные по времени.

отношение⁴⁾ равно $-e/mc$ в согласии с экспериментальным значением.

Из (XV.4) и (XV.6) следует уравнение непрерывности

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \rho = \Psi^* \Psi, \quad \mathbf{j} = c \Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi. \quad (\text{XV.7})$$

§ 1. Уравнение Клейна — Гордона

15.1. Показать, что если $\Psi^\pm(\mathbf{r}, t)$ представляет волновой пакет, составленный из частных решений уравнения Клейна — Гордона, отвечающих энергии (или частоте) определенного знака (либо $\varepsilon \geq mc^2$, либо $\varepsilon \leq -mc^2$), то независимо от конкретного вида такой суперпозиции значение сохраняющейся во времени величины

$$Q^\pm = \int \rho^\pm(\mathbf{r}, t) dV = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int \left\{ \Psi^{(\pm)*} \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^{(\pm)*}}{\partial t} \Psi^\pm \right\} dV$$

является *знакоопределенным*.

15.2. Показать, что уравнение Клейна — Гордона для свободной частицы инвариантно относительно *антилинейного* преобразования волновой функции вида

$$\Psi \rightarrow \Psi_c(\mathbf{r}, t) = \hat{C} \Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi^*(\mathbf{r}, t).$$

Преобразование \hat{C} описывает *зарядовое сопряжение*. Оно позволяет поставить в соответствие не имеющим непосредственного физического смысла решениям $\Psi^-(\mathbf{r}, t)$ уравнения Клейна — Гордона (Ψ^- — суперпозиция частных решений, отвечающих формально отрицательной энергии частицы, см. 15.1) функцию $\Psi_c^+ = \hat{C} \Psi^-$, отвечающую уже положительным энергиям и интерпретируемую как волновая функция *античастицы*.

Убедиться в том, что если функция Ψ является собственной функцией какого-либо из операторов $\hat{\varepsilon} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{\mathbf{p}}$, \hat{l}_z , \hat{l}^2 , то соответствующая *зарядово сопряженная* функция Ψ_c также является собственной

⁴⁾ Этот результат, как и уравнение (XV.6), справедлив лишь для частиц со спином $1/2$, не обладающих *сильным* взаимодействием.

функцией. Как связаны собственные значения указанных операторов для таких функций?

15.3. а) Какой вид принимает уравнение Клейна — Гордона для заряженной бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле при преобразовании волновой функции

$$\Psi \rightarrow \Psi_c(\mathbf{r}, t) = \hat{C}\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi^*(\mathbf{r}, t)?$$

б) Какое преобразование электромагнитного поля следует осуществить одновременно с указанным преобразованием функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$, чтобы получающееся при этом уравнение имело такой же вид, как и исходное?

в) На основании полученных результатов дать интерпретацию преобразования \hat{C} как преобразования зарядового сопряжения, осуществляющего переход от частицы к античастице (сравнить с 15.2).

15.4. Показать, что внешнее *скалярное* (по отношению к преобразованию Лоренца) поле оказывает одинаковое действие на бесспиновую частицу и соответствующую ей античастицу. Сравнить со случаем частицы во внешнем электромагнитном поле (см. 15.3).

Указание. Уравнение, описывающее бесспиновую частицу во внешнем скалярном поле $U(\mathbf{r}, t)$, имеет вид

$$\{c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2c^4 + 2mc^2U\} \Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi.$$

Не следует путать скалярное поле с электростатическим (последнее представляет временную компоненту 4-вектора). В нерелятивистском пределе $U(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл обычной потенциальной энергии.

15.5. Показать, что *внутренние* четности бесспиновой частицы и соответствующей ей античастицы — одинаковые.

15.6. Основываясь на сохранении величины Q (см. 15.1), обсудить вопрос об ортогональности и нормировке функций $\Psi_{p, e}(\mathbf{r}, t)$, являющихся решениями уравнения Клейна — Гордона, отвечающими определенным значениям энергии (обоих знаков) и импульса.

15.7. Показать, что для бесспиновой частицы в релятивистском случае можно сохранить обычную интерпретацию волновой функции в импульсном пред-

ставлении как амплитуды вероятности значений импульса (в отличие от координатного представления, см. 15.1).

Какова связь волновых функций частицы и античастицы в импульсном представлении с решениями $\Psi^\pm(\mathbf{r}, t)$ уравнения Клейна — Гордона? Обсудить вопрос о собственных функциях оператора координат частицы.

Сравнить с нерелятивистским случаем.

15.8. Получить выражение для среднего значения энергии свободной бесспиновой частицы в произвольном состоянии, описываемом решением $\Psi^+(\mathbf{r}, t)$ уравнения Клейна — Гордона.

15.9. То же, что и в предыдущей задаче, но для среднего значения импульса частицы.

15.10. То же, что и в предыдущих двух задачах, но для среднего значения момента частицы.

15.11. Найти в релятивистском случае энергетический спектр заряженной бесспиновой частицы, находящейся в однородном магнитном поле.

Сравнить с нерелятивистским случаем.

15.12. Найти энергетический спектр s -состояний бесспиновой частицы во внешнем скалярном поле (см. 15.4) вида

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Каков энергетический спектр античастицы в таком поле?

Обсудить трудности в интерпретации энергетического спектра, возникающие при значительном углублении ямы.

15.13. Найти энергетические уровни дискретного спектра заряженной бесспиновой частицы (заряд $-e$) в кулоновском поле ядра с зарядом Ze (ядро считать точечным и бесконечно тяжелым).

В случае $Z\alpha \ll 1$ ($\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$) сравнить полученный результат с соответствующим выражением нерелятивистской теории.

Обратить внимание на трудности, возникающие в интерпретации энергетического спектра при достаточно больших значениях заряда ядра, и объяснить их причину.

15.14. Показать, что для состояний свободной частицы уравнение Клейна — Гордона можно записать

в виде уравнения Шрёдингера, $i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H}_{\text{rel}} \Psi$. Найти соответствующий гамильтониан и обсудить его нерелятивистский предел. Какова связь шрёдингеровской волновой функции Ψ с решением Ψ^+ (см. 15.1 и 15.7) уравнения Клейна — Гордона?

15.15. Исходя из стационарного уравнения Клейна — Гордона для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в постоянном электромагнитном поле:

а) получить в нерелятивистском пределе уравнение Шрёдингера;

б) найти первые две ($\sim 1/c^2$ и $\sim 1/c^4$) релятивистские поправки к гамильтониану частицы.

Показать, что поправка $\sim 1/c^4$ включает слагаемые, отличающиеся от разложения гамильтониана

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \sqrt{c^2 (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}/c)^2 + m^2 c^4} + e\varphi - mc^2.$$

15.16. Показать, что в достаточно сильном электростатическом поле заряженная бесспиновая частица испытывает притяжение (в квантовомеханическом смысле) независимо от знака ее заряда⁵).

15.17. Найти в борновском приближении амплитуду и дифференциальное сечение рассеяния релятивистской заряженной (заряд e_1) бесспиновой частицы в кулоновском поле ядра с зарядом Ze (ядро считать бесконечно тяжелым).

Сравнить со случаем нерелятивистской частицы.

Указать условия применимости полученных результатов.

15.18. Найти в борновском приближении энергетическую зависимость сечения рассеяния $\sigma(\epsilon)$ заряженной бесспиновой частицы во внешнем электростатическом поле $\varphi(r)$ при $\epsilon \rightarrow \infty$.

Указать условия применимости полученного результата; сравнить его с результатом нерелятивистской теории.

15.19. Найти в борновском приближении энергетическую зависимость сечения рассеяния $\sigma(\epsilon)$ бесспиновой частицы во внешнем скалярном поле $U(r)$ (см. указание к 15.4) при $\epsilon \rightarrow \infty$.

Указать условия применимости полученного результата; сравнить его с результатами нерелятивистской теории и предыдущей задачи.

⁵) Это утверждение справедливо и для частиц с отличным от нуля спином.

§ 2. Уравнение Дирака

15.20. Выяснить, какие из указанных ниже операторов коммутируют с гамильтонианом свободной релятивистской частицы со спином $s = 1/2$ (и тем самым являются интегралами движения):

- 1) $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$; 2) $\hat{\mathbf{l}} = \frac{1}{\hbar} [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}] = -i[\mathbf{r}\nabla]$; 3) $\hat{\mathbf{l}}^2$;
- 4) $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$; 5) $\hat{\mathbf{s}}^2$; 6) $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}$; 7) $\hat{\mathbf{j}}^2$; 8) $\hat{\Lambda} = \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\Sigma}$;
- 9) $\hat{I}[\hat{I}\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(-\mathbf{r})]$; 10) $\hat{P} \equiv \beta\hat{I}$; 11) γ_5 .

Сравнить со случаем свободной нерелятивистской частицы.

15.21. Найти решения уравнения Дирака, описывающие свободную частицу, имеющую определенные импульс и энергию.

Для конкретизации спинового состояния частицы воспользоваться коммутативностью оператора $\hat{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}\hat{\mathbf{p}}$ с операторами $\hat{\mathbf{p}}$ и \hat{H} (см. также 15.26).

15.22. Найти компоненты 4-вектора плотности тока свободной дираковской частицы в состоянии, характеризующемся определенным значением ее импульса.

Сравнить с соответствующими выражениями нерелятивистской теории.

15.23. Найти среднее значение вектора спина дираковской частицы, имеющей определенный импульс (при этом спинное состояние частицы — произвольное). Считать для простоты, что импульс направлен вдоль оси z .

Сравнить с результатом нерелятивистской теории.

15.24. Рассмотреть унитарное преобразование биспиноров, задаваемое унитарным оператором (матрицей)

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Какой вид имеют в новом представлении оператор спина частицы и уравнение Дирака для двухкомпонентных спиноров $(\Psi' = \hat{U}\Psi \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix})$? Обсудить случай безмассовой частицы, $m = 0$.

15.25. Считая известным спинное состояние в системе покоя частицы, найти биспинор $u(\mathbf{p})$ в произ-

вольной системе координат, в которой частица имеет импульс \mathbf{p} .

Используя полученный результат, найти связь средних значений вектора спина частицы в указанных системах координат.

15.26. Как известно (см. 15.21), для частицы со спином $s = 1/2$ волновая функция состояния с импульсом \mathbf{p} и энергией $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ имеет вид

$$\Psi_{\mathbf{p}}^+ = u(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon t)}; \quad u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon + mc^2} \varphi \end{pmatrix}.$$

Указанное состояние является двукратно вырожденным (существует два независимых способа выбора спинора φ), что связано со спиновой степенью свободы. Рассмотрим два таких независимых состояния, соответствующие выбору спинора φ в виде φ_{λ} , где

$$(\boldsymbol{\sigma}\tilde{\mathbf{n}}) \varphi_{\lambda} = \lambda \varphi_{\lambda},$$

$\tilde{\mathbf{n}}$ — произвольный единичный вектор, $\lambda = \pm 1$, см. 5.12.

Убедиться в ортогональности спиновых состояний релятивистской частицы, отвечающих различным значениям λ .

Учитывая результат предыдущей задачи, выяснить физический смысл вектора \mathbf{n} и соответствующих собственных значений λ .

Каков смысл вектора $\frac{1}{2} \varphi^* \boldsymbol{\sigma} \varphi$ при нормировке $\varphi^* \varphi = 1$?

15.27. Выполнив преобразование зарядового сопряжения, найти явный вид волновой функции Ψ_c^+ состояния античастицы, соответствующего решению уравнения Дирака Ψ^- с определенным импульсом, равным $-\mathbf{p}$, и отрицательной энергией $\varepsilon = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ частицы. Сравнить с волновой функцией физического состояния частицы (с энергией $\varepsilon \geq mc^2$ и определенным импульсом), см. 15.21 и 15.26.

Как изменяется квантовое число *спиральность* при зарядовом сопряжении (сравнить с 15.2)?

15.28. Показать, что для дираковской частицы с массой $m = 0$ оператор (матрица) γ_5 коммутирует с гамильтонианом свободной частицы.

Найти собственные значения указанного оператора и выяснить их физический смысл.

15.29. Показать, что операторы (матрицы) $\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ являются проекционными.

Для дираковской частицы с массой $m = 0$ эти операторы коммутируют с гамильтонианом. На какие состояния частицы и античастицы проектируют указанные операторы \hat{P}_{\pm} ?

15.30. Квантовомеханическое описание фотона может быть осуществлено с помощью двух векторов $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющих⁶⁾ таким же уравнениям, как уравнения Максвелла классической электродинамики для свободного электромагнитного поля $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ (т. е. для электромагнитных волн в вакууме).

Показать, что эти уравнения можно представить в виде, аналогичном уравнениям Дирака для двухкомпонентных спиноров (следует учесть, что масса фотона $m = 0$, а его спин $s = 1$).

15.31. Найти нерелятивистский предел (с точностью до членов порядка « $1/c$ » включительно) выражений для плотности заряда и тока дираковской частицы, находящейся во внешнем электромагнитном поле.

15.32. Гамильтониан частицы со спином $s = 1/2$, находящейся во внешнем электромагнитном поле, имеет вид

$$\hat{H} = c\alpha\hat{p} + mc^2\beta + \frac{i\kappa}{2}F_{\mu\nu}\beta\gamma_{\mu}\gamma_{\nu},$$

где κ — некоторый параметр, характеризующий частицу, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля.

Рассмотрев нерелятивистский предел (с точностью до членов порядка « $1/c$ » включительно) волнового уравнения⁷⁾ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$, выяснить физический

⁶⁾ Подчеркнем, что \mathcal{E} , \mathcal{H} , как и векторный потенциал \mathbf{A} , при этом являются комплексными величинами в отличие от вещественности соответствующих функций, используемых для описания классического электромагнитного поля.

⁷⁾ Это уравнение можно записать в явно релятивистски инвариантном виде:

$$\left(ic\beta + \frac{i\kappa}{2}F_{\mu\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + mc^2 \right) \Psi = 0 \quad \left(\beta \equiv \hat{\mathbf{p}}_{\mu}\hat{\gamma}_{\mu} = \beta\gamma - \frac{\hbar}{c}\gamma_4\frac{\partial}{\partial t} \right).$$

смысл параметра κ , т. е. установить его связь с электромагнитными характеристиками частицы. Сравнить со случаем заряженных дираковских частиц — электрона и мюона, гамильтониан которых имеет вид

$$\hat{H} = c\alpha \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc^2\beta + eA_0.$$

15.33. Найти энергетический спектр заряженной дираковской частицы в однородном магнитном поле.

15.34. Найти в первом порядке теории возмущений дифференциальное сечение рассеяния дираковской частицы в кулоновском поле ядра с зарядом Ze . Ядро считать бесконечно тяжелым.

Указание. Воспользоваться теорией возмущений для переходов в непрерывном спектре под действием стационарного возмущения; см. также 15.37.

15.35. Найти в первом порядке теории возмущений энергетическую зависимость сечения рассеяния $\sigma(\epsilon)$ заряженной дираковской частицы во внешнем электростатическом поле $A_0(r)$ при $\epsilon \rightarrow \infty$.

Сравнить с результатом 15.18.

15.36. Найти функции Грина $\hat{G}_{\epsilon; \alpha\beta}^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ стационарного уравнения Дирака для свободной частицы при энергии $\epsilon \geq mc^2$, удовлетворяющие уравнению

$$(\hat{H} - \epsilon) \hat{G}_{\epsilon} \equiv (-i\hbar c\alpha\nabla + mc^2\beta - \epsilon) \hat{G}_{\epsilon} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

и имеющие при $r \rightarrow \infty$ асимптотики вида

$$G_{\epsilon}^{\pm} \propto \frac{1}{r} e^{\pm ikr}, \quad k = \sqrt{\frac{\epsilon^2 - m^2c^4}{\hbar^2c^2}}.$$

Найти также функции Грина \hat{f}_{ϵ}^{\pm} уравнения Дирака, записанного в симметричной форме:

$$(i\epsilon\hat{\rho} + mc^2)\Psi_{\epsilon} = 0, \quad \hat{\rho} \equiv -i\hbar\nabla + \frac{i\epsilon}{c}\gamma_4.$$

15.37. Найти в борновском приближении амплитуду рассеяния дираковской частицы во внешнем постоянном электромагнитном поле.

Применить полученный результат к случаю электростатического поля $A_0 = Ze/r$ и сравнить с 15.34.

Переходя, как и выше, к разложению по параметру $1/N$, получаем

$$E_0(1/N) = -2\alpha^2 N^{-2} \{ 1 + 2/N + 3/N^2 + \dots \}. \quad (\text{ДЗ.16})$$

Здесь по сравнению с (ДЗ.14) и (ДЗ.15) сходимость разложения «затягивается». Это разложение можно «улучшить», если воспользоваться параметром разложения $1/(N-1)$. При этом выражение (ДЗ.16) принимает вид $E_0(1/(N-1)) = -2\alpha^2/(N-1)^2$, что совпадает с точным результатом. Указанное изменение параметра разложения связано с тем, что оно при $N=1$ обеспечивает «падение на центр» (дает $E_0 = -\infty$), возникающее в кулоновском потенциале в одномерном случае, см. 8.61.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1989.
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1983.
3. Давыдов А. С. Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.
4. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. — М.: Наука, 1979.
5. Елютин П. В., Кривченков В. Д. Квантовая механика. — М.: Наука, 1976.
6. Мессиа А. Квантовая механика. — М.: Наука, 1978. Т. 1, 1979. Т. 2.
7. Шифф Л. Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1957.
8. Коган В. И., Галицкий В. М. Сборник задач по квантовой механике. — М.: Гостехиздат, 1956.
9. Гольдман И. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. — М.: Гостехиздат, 1957.
10. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. — М.: Мир, 1974, Т.Т. 1, 2.
11. Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. — М.: Атомиздат, 1975.
12. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
14. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории. — М.: Наука, 1975.
15. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1971.
16. Бете Г., Соллнтер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: Физматгиз, 1960.
17. Бете Г. Квантовая механика. — М.: Мир, 1965.
18. Фок В. А. Начала квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
19. Смирнов Б. М. Асимптотические методы в теории атомных столкновений. — М.: Атомиздат, 1973.
20. Демков Ю. Н., Островский В. Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. — Л.: ЛГУ, 1975.
21. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
22. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. — М.: Мир, 1969.

23. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. — М.: Мир, 1967.
24. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969.
25. Тейлор Дж. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1975.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1988.
27. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1988.
28. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика, ч. 2. — М.: Наука, 1978.
29. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.
30. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
31. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. — М.: Наука, 1978.
32. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров. — М.: Наука, 1977.
33. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.
34. Справочник по специальным функциям. // Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
35. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции; формулы, графнки, таблицы. — М.: Наука, 1977.

V. M. Galitsky, B. M. Karnakov, V. I. Kogan

PROBLEMS IN QUANTUM MECHANICS

Textbook, Second Edition

Moscow, Nauka, Main Editorial Board for Literature
on Physics and Mathematics, 1992.

Readership: Students, teachers, researchers in physics, physical engineering and chemistry.

Summary: A modern textbook on quantum mechanics, containing about 700 problems of various difficulty with solutions. Along with traditional topics the problems represent calculational methods, approximations and models, such as Green functions, potentials of zero radius, perturbation theory with respect to the scattering length etc., used in atomic and nuclear physics for investigation of spectra (including quasi-stationary and quasi-energetical states), the behaviour of systems in external fields and processes of particle collisions. Also presented are problems reflecting the recent development of quantum mechanics and its applications: hadronic atoms, meso-molecular systems and muon catalysis, auto-ionizational states, super-symmetry etc.

Contents: Operators in quantum mechanics. One-dimensional problems. Angular momentum. Particle in central field. Spin. Time dependence of state vector and observables. Particle in magnetic field. Perturbation theory, variational method, sudden and adiabatic approximations. WKB-method. Systems of identical particles. Atoms and molecules. Atomic nucleus. Collision theory. Quantum theory of radiation. Relativistic quantum mechanics.

The authors: Professor Victor Galitsky, Member — Correspondent of the USSR Academy of Sciences, specialist in quantum statistical physics, high-energy particle and radiation theory, nuclear theory etc.

Boris Karnakov, Associate Professor of Moscow Physical — Engineering Institute, specialist in atomic and nuclear theory.

Vladimir Kogan, group head at the Kurchatov Institute of Atomic Energy and Associate Professor of Moscow Physical — Engineering Institute, specialist in radiation theory and plasma physics.